

ВЕСТНИК
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА ПРОСВЕЩЕНИЯ

ISSN 2949-5083 (print)

2026 / № 1

ISSN 2949-5067 (online)

серия

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА

Рецензируемый научный журнал. Основан в 1998 г.

Журнал «Вестник Государственного университета просвещения. Серия: Физика-Математика» включён в «Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание учёной степени кандидата наук, на соискание учёной степени доктора наук» Высшей аттестационной комиссии при Министерстве науки и высшего образования Российской Федерации (см.: Список журналов на сайте ВАК при Минобрнауки России) по следующим научным специальностям: 1.3.3. – Теоретическая физика (физико-математические науки); 1.3.8. – Физика конденсированного состояния (физико-математические науки).

The peer-reviewed journal was founded in 1998

“Bulletin of Federal State University of Education. Series: Physics and Mathematics” is included by the Supreme Certifying Commission of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation into “The List of reviewed academic journals and periodicals recommended for publishing in corresponding series basic research thesis results for a Ph.D. Candidate or Doctorate Degree” (See: the online List of journals at the site of the Supreme Certifying Commission of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation) on the following scientific specialties: 1.3.3. – Theoretical physics (physical-mathematical sciences); 1.3.8. – Physics of the condensed state (physical-mathematical sciences)

ISSN 2949-5083 (print)

2026 / № 1

ISSN 2949-5067 (online)

series

PHYSICS AND MATHEMATICS

BULLETIN
OF FEDERAL STATE UNIVERSITY
OF EDUCATION

Учредитель журнала

«Вестник Государственного университета просвещения. Серия: Физика-математика»

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

Государственный университет просвещения

Выходит 4 раза в год

Редакционная коллегия

Главный редактор:

Чигринов В. Г. — д. ф.-м. н., проф., Государственный университет просвещения; Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого; Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы; ООО «Цзинцуй Оптическая Технология» (Китай)

Заместитель главного редактора:

Кузнецов М. М. — д. ф.-м. н., проф., Государственный университет просвещения

Ответственный секретарь:

Чукаловская Е. М. — Государственный университет просвещения

Члены редакционной коллегии:

Беляев В. В. — д. т. н., проф., Государственный университет просвещения;

Боголюбов Н. Н. — д. ф.-м. н., проф., Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова;

Бугримов А. Л. — д. т. н., проф., Российский государственный университет имени А.Н. Косыгина (Технологии. Дизайн. Искусство);

Гладков С. О. — д. ф.-м. н., проф., Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет);

Емельяненко А. В. — д. ф.-м. н., проф., Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова;

Жачкин В. А. — д. ф.-м. н., проф., Государственный университет просвещения;

Калашников Е. В. — д. ф.-м. н., проф., Государственный университет просвещения;

Осипов М. А. — д. ф.-м. н., проф., Университет Стратклайд (Великобритания);

Рыбаков Ю. П. — д. ф.-м. н., проф., Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы;

Чаругин В. М. — д. ф.-м. н., проф., Московский педагогический государственный университет

ISSN 2949-5083 (print)

ISSN 2949-5067 (online)

Рецензируемый научный журнал «Вестник Государственного университета просвещения. Серия: Физика-математика» публикует статьи по математическим проблемам термодинамики, кинетики и статистической физики; теории конденсированного состояния классических и квантовых, макроскопических и микроскопических систем; изучению различных состояний вещества и физических явлений в них; статистической физике и кинетической теории равновесных и неравновесных систем; теоретическому и экспериментальному исследованию физических свойств неупорядоченных неорганических систем; изучению экспериментального состояния конденсированных веществ и фазовых переходов в них. Журнал адресован учёным, докторантам, аспирантам и всем интересующимся достижениями физико-математических наук.

Журнал «Вестник Государственного университета просвещения. Серия: Физика-Математика» зарегистрирован в Федеральной службе по надзору за соблюдением законодательства в сфере массовых коммуникаций и охране культурного наследия. Регистрационное свидетельство ПИ № ФС 77-73344.

Индекс серии «Физика-математика» по Объединённому каталогу «Пресса России» 40723

Журнал включён в базу данных Российского индекса научного цитирования (РИНЦ), имеет полнотекстовую сетевую версию в интернете на платформе Научной электронной библиотеки (www.elibrary.ru), с августа 2017 г. на платформе Научной электронной библиотеки «КиберЛенинка» (www.cyberleninka.ru), а также на сайте журнала «Вестник Государственного университета просвещения. Серия: Физика-Математика» (www.physmathmgou.ru).

При цитировании ссылка на конкретную серию «Вестника Государственного университета просвещения» обязательна. Публикация материалов осуществляется в соответствии с лицензией Creative Commons Attribution 4.0 (CC-BY).

Ответственность за содержание статей несут авторы. Мнение автора может не совпадать с точкой зрения редколлегии серии журнала. Рукописи не возвращаются.

Вестник Государственного университета просвещения. Серия: Физика-Математика. — 2026. — № 1. — 122 с.

© Государственный университет просвещения, 2026.

Адрес редакции:

г. Москва, ул. Радио, д.10А, стр. 2, офис 98

тел.: (495) 780-09-42 (доб. 6101)

e-mail: sj@guppros.ru; сайт: www.physmathmgou.ru.

Founder of journal
“Bulletin of Federal State University of Education. Series: Physics and Mathematics”
Federal State University of Education

————— Issued 4 times a year —————

Editorial board

Editor-in-chief:

V. G. Chigrinov – Dr. Sci. (Physics and Mathematics), Professor, Federal State University of Education; Yaroslav-the-Wise Novgorod State University; Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba; Nanjing Jingcui Optical Technology Co., Ltd., Nanjing, China

Deputy editor-in-chief:

M. M. Kuznetsov – Dr. Sci. (Physics and Mathematics), Professor, Federal State University of Education

Executive secretary:

E. M. Chukalovskaya – Federal State University of Education

Members of Editorial Board:

V. V. Belyaev – Dr. Sci. (Engineering), Professor, Federal State University of Education;

N. N. Bogolyubov – Dr. Sci. (Physics and Mathematics), Professor, Lomonosov Moscow State University;

A. L. Bugrimov – Dr. Sci. (Engineering), Professor, The Kosygin State University of Russia;

S. O. Gladkov – Dr. Sci. (Physics and Mathematics), Professor, Moscow Aviation Institute (National Research University);

A. V. Emelyanenko – Dr. Sci. (Physics and Mathematics), Professor, Lomonosov Moscow State University;

V. A. Zhachkin – Dr. Sci. (Physics and Mathematics), Professor, Federal State University of Education;

E. V. Kalashnikov – Dr. Sci. (Physics and Mathematics), Professor, Federal State University of Education;

M. A. Osipov – Dr. Sci. (Physics and Mathematics), Professor, University of Strathclyde (Glasgow, UK);

Yu. P. Rybakov – Dr. Sci. (Physics and Mathematics), Professor, People's Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba;

V. M. Charugin – Dr. Sci. (Physics and Mathematics), Professor, Moscow State Pedagogical University

ISSN 2949-5083 (print)

ISSN 2949-5067 (online)

The reviewed scientific journal “Bulletin of Federal State University of Education. Series: Physics and Mathematics” publishes articles on mathematical problems of thermodynamics, kinetics and statistical physics; the theory of the condensed state of classical and quantum, macroscopic and microscopic systems; the study of various states of substance and physical phenomena in them; statistical physics and the kinetic theory of equilibrium and non-equilibrium systems; theoretical and experimental research of physical features of disordered inorganic systems; the study of the experimental state of condensed substances and phase transitions in them. The journal is addressed to scientists, doctoral students, PhD students and everyone interested in the achievements of physical and mathematical sciences.

The series “Physics and Mathematics” of the Bulletin of Federal State University of Education is registered in Federal service on supervision of legislation observance in sphere of mass communications and cultural heritage protection. The registration certificate ПИ № 00С 77 – 73344.

Index series “Physics and Mathematics” according to the union catalog “Press of Russia” 40723

The journal is included into the database of the Russian Science Citation Index, and its full texts are available through scientific electronic libraries “eLibrary” (www.elibrary.ru) and “CyberLeninka” (since August 2017; www.cyberleninka.ru), as well as on the site of “Bulletin of Federal State University of Education. Series: Physics and Mathematics” (www.physmathmgou.ru).

At citing the reference to a particular series of “Bulletin of State University of Education” is obligatory. Scientific publication of materials is carried out in accordance with the license of Creative Commons Attribution 4.0 (CC-BY).

The authors bear all responsibility for the content of their papers. The opinion of the Editorial Board of the series journal does not necessarily coincide with that of the author. Manuscripts are not returned.

Bulletin of Federal State University of Education. Series: Physics and Mathematics. – 2026. – № 1. – 122 p.

© Federal State University of Education, 2025.

The Editorial Board address:

ulitsa Radio 10A build.2, office 98, Moscow, Russia

Phone: (495) 780-09-42 (add. 6101)

e-mail: sj@guppros.ru; site: www.physmathmgou.ru.

СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКА

- Сунегин Д. Е., Беляев В. В.* Ян-Теллеровский эффект в металлофталоцианинах как управляющий параметр структурных и электронных свойств. 6
- Горелов С. Л.* Решение уравнения Клаузинга для течения разреженного газа в круглой трубе. 16
- Камалов Т. Ф.* Неинерциальные поправки спектра атома водорода 25
- Кузнецов М. М., Сатюков Д. Г., Кулешова Ю. Д., Владимирова Е. Я., Кузнецов Г. В., Халиков Р. Ф.* Обобщение бимодальной модели ударной волны на ударное сжатие смеси газов 38
- Кузнецова И. А., Савенко О. В.* Взаимодействие электромагнитного излучения с наноструктурой «диэлектрик – металл – диэлектрик» с учётом эллипсоидальной зонной структуры металла. 46
- Сизов М. Н., Константинов М. С., Васильчикова Е. Н.* Анализ особенностей азимутальных зависимостей интенсивности света в методе фотоупругости 62
- Юсим В. А., Курилов А. Д., Саркисов С. Э., Кравцов Д. С., Кулешова Ю. Д.* Электротранспортные свойства и релаксационные процессы в системе $\text{CdF}_2\text{-PbF}_2$ 78

МАТЕМАТИКА

- Колягин А. Ю.* Множество двойных комплексных чисел как особое расширение поля комплексных чисел 92

CONTENTS

PHYSICS

- D. Sunegin, V. Belyaev.** Jahn–Teller Effect in Phtalocyanine Derivatives as a Controlling Parameter of Structural and Electronic Properties. 6
- S. Gorelov.** Solution of the Clausius Equation for the Flow of a Rarefied Gas in a Circular Pipe 16
- T. Kamalov.** Non-Inertial Corrections to the Hydrogen Atom Spectrum. . . . 25
- M. Kuznetsov, D. Satyukov, Yu. Kuleshova, E. Vladimirova, G. Kuznetsov, R. Halikov.** Generalization of the Bimodal Impact Wave Model to Shock Compression of Gas Mixtures 38
- I. Kuznetsova, O. Savenko.** Interaction Of Electromagnetic Radiation with a “Dielectric – Metal – Dielectric|» Nanostructure in the View of the Metal Ellipsoidal Band Structure 46
- M. Sizov, M. Konstantinov, E. Vasilchikova.** Analysis of the Features of Azimuth Light Intensity Dependencies in the Photoelasticity Method. . . . 62
- V. Yusim, A. Kurilov, S. Sarkisov, D. Kravtsov, Yu. Kuleshova.** Electrotransport Properties and Relaxation Processes in the CdF₂-PbF₂ System 78

MATHEMATICS

- A. Kolyagin.** Set of Double Complex Numbers as a Special Extension of the Field of Complex Numbers 92

Научная статья

УДК 538.95, 538.915

DOI: 10.18384/2949-5067-2026-1-6-15

ЯН-ТЕЛЛЕРОВСКИЙ ЭФФЕКТ В МЕТАЛЛОФТАЛОЦИАНИНАХ КАК УПРАВЛЯЮЩИЙ ПАРАМЕТР СТРУКТУРНЫХ И ЭЛЕКТРОННЫХ СВОЙСТВ

Сунегин Д. Е.^{1*}, Беляев В. В.^{1,2}

¹ Государственный университет просвещения, г. Москва, Российская Федерация

² Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы, г. Москва, Российская Федерация

* Корреспондирующий автор, e-mail: Sunegen.D@mail.ru

Поступила в редакцию 27.12.2025

Принята к публикации 22.01.2026

Аннотация

Цель: систематизировать экспериментальные и теоретические данные о ян – теллеровском эффекте в металлофталочинанинах (МРс) и выявить его роль как универсального управляющего параметра структурных, электронных и магнитных свойств.

Процедура и методы. Проведён анализ результатов, полученных методами рентгеноструктурного анализа, электронной дифракции, сканирующей туннельной микроскопии, рамановской спектроскопии, электронного парамагнитного резонанса и расчётов функционала плотности. Обобщены экспериментальные и теоретические данные из международных источников.

Результаты. Показано, что образование анион-радикалов [МРс][–] вызывает ян – теллеровскую деформацию макроцикла с амплитудой $R_{\text{дист}} \approx 0.03\text{--}0.07 \text{ \AA}$. Установлены прямые корреляции между амплитудой деформации и: (1) энергией активации электротранспорта, (2) подвижностью носителей заряда, (3) селективностью в электрокатализе CO_2/CO . Потенциал-индуцированная ян – теллеровская деформация центра CoN_4 изменяет механизм адсорбции CO (линейная (linear) 0.52 эВ → мостиковая (bridge) 1.80 эВ), обеспечивая управление каталитической селективностью без химического изменения молекулы.

Теоретическая и практическая значимость. Сформирована концепция ян – теллеровского эффекта как фундаментального механизма функциональности МРс. Предложены методы целенаправленного управления структурными и электронными свойствами через электрохимический потенциал, допирование или фторирование. Определены некоторые пробелы и рекомендованы методологические подходы для их разрешения.

Ключевые слова: металлофталочянины, органическая электроника, электрокатализ, электротранспорт, Ян – теллеровский эффект

Для цитирования:

Сунегин Д. Е., Беляев В. В. Эффект Яна – Теллера как управляющий параметр структурных и электронных свойств // Вестник Государственного университета просвещения. Серия: Физика-математика. 2026. № 1. С. 6–15. <https://doi.org/10.18384/2949-5067-2026-1-6-15>

Original research article

JAHN–TELLER EFFECT IN PHTALOCYANINE DERIVATIVES AS A CONTROLLING PARAMETER OF STRUCTURAL AND ELECTRONIC PROPERTIES

D. Sunegin¹*, V. Belyaev²

¹ Federal State University of Education, Moscow, Russian Federation

² People's Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba, Moscow, Russian Federation

* Corresponding author, e-mail: Sunegen.D@mail.ru

Received by the editorial office 27.12.2025

Accepted for publication 22.01.2026

Abstract

Aim: to systematize experimental and theoretical data on the Jahn–Teller effect in metallophthalocyanines (MPc) and identify its role as a universal controlling parameter of structural, electronic, and magnetic properties.

Methodology. Results obtained by X-ray diffraction, electron diffraction, scanning tunneling microscopy, Raman spectroscopy, electron paramagnetic resonance, and density functional theory calculations were analyzed. Experimental and theoretical data from international sources are summarized.

Results. It is shown that the formation of [MPc][–] anion radicals causes Jahn–Teller deformation of the macrocycle with an amplitude of $R_{\text{dist}} \approx 0.03\text{--}0.07$ Å. Direct correlations are established between the deformation amplitude and: (1) the activation energy of electrotransport, (2) the mobility of charge carriers, and (3) the selectivity in CO₂/CO electrocatalysis. Potential-induced Jahn–Teller deformation of the CoN₄ center changes the CO adsorption mechanism (linear 0.52 eV → bridge 1.80 eV), providing control of catalytic selectivity without chemical modification of the molecule.

Research implications. The concept of the Jahn–Teller effect as a fundamental mechanism of MPc functionality is formulated. Methods for targeted control of the structural and electronic properties through electrochemical potential, doping, or fluorination are proposed. Several gaps are identified, and methodological approaches to address them are recommended.

Keywords: metal phthalocyanines, organic electronics, electrocatalysis, electrotransport, Jahn–Teller effect

For citation:

Sunegin, D. E. & Belyaev, V. V. (2026). Jahn–Teller effect as a controlling parameter of structural and electronic properties. In: *Bulletin of the Federal State University of Education. Series: Physics and Mathematics*, 1, pp. 6–15. <https://doi.org/10.18384/2949-5067-2026-1-6-15>

Введение

Металлофталочианины (MPc) представляют собой молекулярные комплексы переходного металла с макроциклическим лигандом фталочианина (рис. 1а), обладающие сопряжённой π -электронной системой и демонстрирующие уникальные электрические и магнитные свойства. Применение этих соединений охватывает органические полевые транзисторы (подвижность до $2.6 \text{ см}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$) [1], электрокатализ (восстановление CO_2) [2] и магнитные материалы [3].

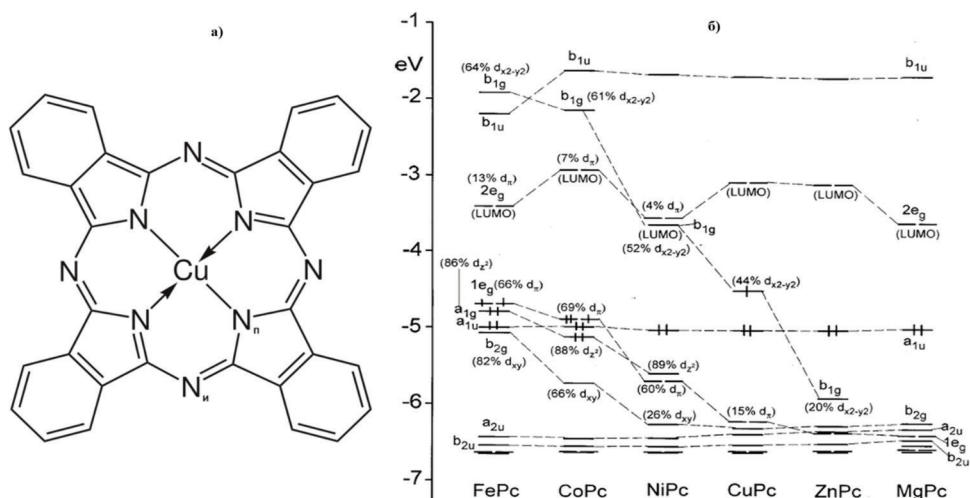


Рис. 1 / Fig. 1. Характерная структура MPc (M=Cu) (а); Диаграмма уровней МО для различных MPc (б) / Characteristic structure of MPc (M=Cu) (а); Diagram of MO levels for different MPc (б)

Источник: Arčon D., Blinc R. The Jahn–Teller Effect and Fullerene Ferromagnets // Fullerene-Based Materials / ed. K. Prassides. Berlin, Heidelberg: Springer, 2004. P. 231–276 (Series: Structure and Bonding. Vol. 109). DOI: 10.1007/b94384

Ян–Теллеровский эффект описывает спонтанное понижение молекулярной симметрии в системах с орбитально вырожденными электронными состояниями (рис. 1б). В нейтральных MPc эффект слабо выражен благодаря отсутствию вырожденного заполненного уровня. Однако при допировании электронами молекулы возникает вырождение в LUMO-уровне (e_a в D_{4h} симметрии), инициирующее ЯТ-деформацию. Расщепление вырожденного уровня описывается соотношением $\Delta E = \alpha Q + O(Q^2)$, где Q – амплитуда деформации, α – константа взаимодействия Яна – Теллера [4].

1. Структурные деформации и электронная структура

1.1. Нейтральное состояние

Нейтральные MPc характеризуются плоской квадратной геометрией с D_{4h} симметрией. Расстояния M–N (расстояния между центральным атомом металла

и азотом) варьируются в диапазоне 1.91–2.06 Å в зависимости от центрального металла (минимум для NiPc: 1.913 Å; максимум для MgPc: 2.058 Å), коррелируя с ионным радиусом, например для степени окисления +2: Fe < Co < Ni < Cu < Zn < Mg [3]. Расхождения между OT-RSH расчётами DFT и экспериментом составляют 0.01–0.05 Å, подтверждая надёжность теоретического подхода. НОМО имеет симметрию a_{1u} с энергией 6.06–6.23 эВ (OT-RSH), согласующейся с экспериментальными ионизационными потенциалами (6.35–6.41 эВ). LUMO (e_a , дважды вырожденный) имеет сродство к электрону 1.91–2.07 эВ. НОМО–LUMO зазор составляет 2.0–2.5 эВ. Нейтральные МРс практически не демонстрируют ЯТ-деформации благодаря жёсткости макроцикла и отсутствию вырожденного заполненного уровня [5].

1.2. Анион–радикалы [МРс][–]

Одноэлектронное восстановление нарушает ароматичность 18π-электронной системы, переводя её в 19π-электронное состояние. Это приводит к качественному скачку в структурных параметрах. Разность между короткими и длинными С–N (иминные) связями скачкообразно возрастает с ~0.005–0.01 Å (нейтральный) до 0.020–0.045 Å (монанион), что в 3–5 раз больше. Амплитуда орторомбического гофрирования (ruffling) $R_{\text{дист}}$ составляет 0.030–0.032 Å (табл. 1), понижая симметрию $D_{4h} \rightarrow D_{2h}$ [6].

Таблица 1 / Table 1

Длина связей между С и N, величина искажения $R_{\text{дист}}$ / The length of the bonds between C and N, and the amount of distortion R_{dist}

Комплекс	Состояние	$\Delta \text{C–N}$, Å	$R_{\text{дист}}$, Å
TiIVOPc	нейтральный	~0.005	–
[TiIVOPc] [–]	монанион	0.022–0.039	0.030
[TiIVOPc] ^{2–}	дианион	0.065–0.083	0.074
VIVOPc	нейтральный	~0.004	–
[VIVOPc] [–]	монанион	0.020–0.036	0.03

Источник: [6]

Спектроскопические маркеры ЯТ-деформации включают сдвиги Рамановских полос (мода B_1' сдвигается на +6–7 см^{–1}) и появление полос поглощения в ближней инфракрасной области ($\lambda = 836$ –1022 нм) [7], характеризующих переходы делокализованного электрона по деформированному Pc^{3-} макроциклу. Энергетический выигрыш ЯТ-эффекта (1–10 мэВ) превосходит энергетическую цену конформационной деформации (5–50 мэВ), делая ЯТ-деформацию термодинамически выгодной при комнатной температуре.

2. Электротранспорт и управление свойствами

Транспорт носителей заряда в МРс может быть описан тремя режимами, коррелирующими с величиной ЯТ-деформации и энергией активации переноса заряда [8].

Режим 1 – Недопированные кристаллы: энергия активации $E_a = 1.60\text{--}1.71$ эВ, подвижность $\mu \approx 10^{-10}$ см²/(В·с) указывает на сильную локализацию заряда [9]. Различие между металлами ≤ 0.07 эВ демонстрирует определяющую роль π -системы макроцикла. Механизм транспорта интерпретируется как образование и диссоциация экситонов на дефектах кристалла [10]. ЯТ-расщепление LUMO ($\Delta E \approx 0.1\text{--}0.2$ эВ) локализует спиновую плотность на определённых фрагментах, создавая глубокие потенциальные ямы для захвата заряда [9; 11].

Режим 2 – TCNQ (тетрацианохинодиметан) – допирование: молекулярное допирование электронным акцептором TCNQ снижает энергию активации в 3.6–4.6 раза. При низких напряжениях проводимость омическая; при высоких доминирует ТОПЗ (space-charge limited current). Подвижность остаётся низкой ($10^{-8}\text{--}10^{-7}$ см²/(В·с)) [12], поскольку TCNQ действует как источник ловушек, упорядочивающих молекулярную структуру, но не увеличивающих внутреннюю подвижность.

Режим 3 – Фторирование: периферийное фторирование (F_{16} МРс) смещает LUMO на 0.7–0.8 эВ к более низким энергиям, преобразуя р-тип проводимости в n-тип. $F_{16}\text{ZnPc}$ достигает электронной подвижности $\mu_e = 1.1$ см²/(В·с), возрастание на 4–5 порядков по сравнению с недопированным ZnPc. Оптимальный баланс достигается за счёт промежуточной электронной связи ($t_e = 33.3$ мэВ) и минимального электронно-фононного взаимодействия (параметр Хуана – Риса $S = 0.779$) [13]. В этом режиме ЯТ-эффект становится несущественным благодаря полосному (band-like) характеру переноса.

Переход между тремя режимами показывает, что ЯТ-деформация является ключевым параметром, определяющим локализацию и подвижность зарядов в недопированных системах, но может быть нивелирована химическим управлением электронной структурой (допирование, фторирование).

3. Электрокатализ и потенциал-индуцированное управление

Электрокаталитические свойства МРс демонстрируют крайне сильную зависимость от ЯТ-деформации, особенно в электрокатализе CO_2 и CO [2]. На примере CoPc/CNT показано, что приложенный электрохимический потенциал вызывает потенциал-индуцированную ЯТ-деформацию центра CoN_4 , трансформирующую геометрию адсорбции оксида углерода. При потенциале -0.8 В линейная конфигурация (linear) CO ($E_{\text{ads}} = 0.52$ эВ) переходит в мостиковую (bridged) ($E_{\text{ads}} = 1.80$ эВ) [14]. Механизм включает ослабление $\text{C}\text{--}\text{O}$ связи ($1.15 \rightarrow 1.21$ Å) вследствие ЯТ-индуцированного смещения d-орбиталей Co , облегчающего гидрирование промежуточных продуктов. Результирующая селективность восстановления CO достигает 47–53%, в то время как для CO_2 остаётся низкой (10–13%) [15]. Этот результат демонстрирует возможность управления ката-

литической селективностью электрохимическим потенциалом без химического изменения молекулы, что указывает на практическую ценность ЯТ-эффекта [16].

4. Магнитные свойства и перспективные приложения

Магнитные свойства МРс систематически варьируются вдоль d-ряда, следуя правилу Хунда: максимум магнитного момента ($4.80 \mu_B$) достигается при d^5 конфигурации (MnPc), минимум ($0 \mu_B$) при полной заполненности (NiPc – d^8 , ZnPc – d^{10}). Несмотря на прямую корреляцию с d-конфигурацией, ЯТ-деформация оказывает косвенное влияние на магнитные свойства, модулируя параметры кристаллического поля (Dq) и создавая условия для переходов между высокоспиновым (HS) и низкоспиновым (LS) состояниями для комплексов с d^6 – d^7 конфигурациями. Периферийное фторирование практически не влияет на магнитные моменты, подтверждая, что воздействие фторирования локализуется в π -системе макроцикла [3].

В квантовых приложениях $FePc^-$ и $NiPc^-$ рассматриваются как перспективные молекулярные спиновые кубиты благодаря сильному сверхтонкому взаимодействию (95–110 МГц). ЯТ-стабилизация спинового состояния в восстановленных состояниях критична для повышения времени когерентности (T_2) и снижения спин-решёточной релаксации (T_1), что необходимо для масштабирования квантовых систем [17; 18].

5. Открытые вопросы

Несмотря на значительный прогресс, следующие вопросы остаются открытыми: (1) магнитные моменты дианионов $[MPc]^{2-}$ недостаточно исследованы; (2) механизмы и энергетические барьеры потенциал-индуцированных ЯТ-переходов неизвестны; (3) контроль молекулярной ориентации в конденсированном состоянии требует систематического изучения; (4) влияние ЯТ-деформации на интерфейсные явления в гибридных системах требует развития операндо методов спектроскопии [11; 19; 20].

Заключение

На основании приведённых в обзоре данных можно сделать вывод, что эффект Яна – Теллера в металлофталоцианинах является фундаментальным механизмом, детерминирующим функциональные свойства класса молекул. Амплитуда орторомбического гофрирования (ruffling) макроцикла ($R_{\text{дист}} \approx 0.03\text{--}0.07 \text{ \AA}$) напрямую коррелирует с модуляцией энергии активации электротранспорта (от 1.60–1.71 эВ до 0.37–0.46 эВ), подвижности зарядовых носителей (от 10^{-10} до $1.1 \text{ cm}^2/(\text{V}\cdot\text{s})$) и каталитической селективности (47–53% восстановление CO). Интеграция структурных, спектроскопических и электротранспортных данных выявляет прямую причинно-следственную связь между ЯТ-деформацией и физическими свойствами. Практическое значение состоит в возможности целенаправленного проектирования МРс-систем через управление ЯТ-деформацией посредством электрохимического потенциала, допирования или фторирования. Однако полная реализация потенциала требует дополнительных

исследований динамики ЯТ-переходов и применения интегрированного подхода (СТМ + PCA + ЭПР + операндо спектроскопия), который остаётся редкой практикой. Развитие многоэлектронных расчётов (CASSCF) наряду с экспериментальными исследованиями важно для прогресса в этой области.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gottfried J. M. Surface chemistry of porphyrins and phthalocyanines // *Progress in Surface Science*. 2015. Vol. 90. Iss. 3. P. 286–388. DOI: 10.1016/j.surfrep.2015.04.001.
2. A mechanism review of metal phthalocyanines as single-atomic catalysts in electrochemical energy conversion / Z. Li, Z. Zhou, M. Sun, T. Wu, Q. Lu, L. Lu, B. Chen, C. H. Chan, H. H. Wong, B. Huang // *Chemical Science*. 2025. Vol. 16. Iss. 31. P. 14019–14037. DOI: 10.1039/D5SC03210E.
3. Magnetic, electronic, and vibrational properties of metal phthalocyanines / O. I. Arillo-Flores, Z. Hu, U. Crisostomo, T. Yildirim, G. Kirczenow // *Physical Review B*. 2013. Vol. 87. Iss. 16. Article no. 165115. DOI: 10.1103/PhysRevB.87.165115.
4. Jahn H. A., Teller E. Stability of polyatomic molecules in degenerate electronic states. I. Orbital degeneracy // *Proceedings of the Royal Society of London. Series A – Mathematical and Physical Sciences*. 1937. Vol. 161. No. 905. P. 220–235. DOI: 10.1098/rspa.1937.0142.
5. Electronic structure of copper phthalocyanine from calculations and photoemission spectroscopy / N. Marom, L. Kronik, X. Koh, A. Kin, A. Aspuru-Guzik // *Physical Review B*. 2011. Vol. 84. Article no. 195143. DOI: 10.1063/1.1766295.
6. Ян-теллеровские деформации в анионах металлофталочианинов $[M^{IV}OPc]^{n-}$ ($M = Ti, V$) / А. В. Кузьмин, С. С. Хасанов, К. П. Мелетов, Р. П. Шибаева // *Журнал экспериментальной и теоретической физики*. 2019. Т. 155. № 6. С. 1037–1044. DOI: 10.1134/S0044451019060087.
7. Tackley D. R., Dent G., Smith E. Phthalocyanines: structure and vibrations // *Physical Chemistry Chemical Physics*. 2001. Vol. 3 (8). P. 1419–1426. DOI: 10.1039/b007763l.
8. Transition-Metal Phthalocyanines as Versatile Building Blocks for Molecular Qubits on Surfaces / C. Urdaniz, S. Taherpour, J. Yu, J. Reina-Gálvez, C. Wolf // *Journal of Physical Chemistry A*. 2025. Vol. 129. Iss. 9. P. 2173–2181. DOI: 10.1021/acs.jpca.4c07627.
9. Fielding P. E., Gutman F. Electrical properties of phthalocyanines // *Journal of Chemical Physics*. 1957. Vol. 26. Iss. 2. P. 411–419. DOI: 10.1063/1.1743311.
10. Mahapatro A. K., Ghosh S. Charge carrier transport in metal phthalocyanine based disordered thin films // *Journal of Applied Physics*. 2006. Vol. 101. Iss. 3. DOI: 10.1063/1.2434946.
11. Large Orbital Moment and Dynamical Jahn–Teller Effect of AlCl–Phthalocyanine on Cu(100) / C. Li, M.-L. Bocquet, Y. Lu, N. Lorente, M. Gruber, R. Berndt, A. Weismann // *Physical Review Letters*. 2024. Vol. 133. Article no. 126201. DOI: 10.1103/PhysRevLett.133.126201.
12. Optical absorption and electrical properties of MPc ($M = Fe, Cu, Zn$)–TCNQ interfaces for optoelectronic applications / M. E. Sánchez-Vergara, D. Medrano-Gallardo,

- I. L. Vera-Estrada, O. Jiménez-Sandoval // *Journal of Physics and Chemistry of Solids*. 2018. Vol. 115. P. 373–380. DOI: 10.1016/j.jpcs.2018.01.005.
13. Fluorination of metal phthalocyanines: Single-crystal growth, efficient n-channel organic field-effect transistors, and structure-property relationships / H. Jiang, J. Ye, P. Hu, F. Wei, K. Du, N. Wang, T. Ba, S. Feng, C. Kloc // *Scientific Reports*. 2014. Vol. 4. Article no. 7573. DOI: 10.1038/srep07573.
14. Stabilizing *CO₂ intermediates at the acidic interface using molecularly dispersed cobalt phthalocyanine as catalysts for CO₂ reduction / S. Feng, X. Wang, D. Cheng, Y. Luo, M. Shen et al. // *Angewandte Chemie*. 2024. Vol. 63. Iss. 8. Article no. e202317942. DOI: 10.1002/ange.202317942.
15. Highly selective and active CO₂ reduction electrocatalysts based on cobalt phthalocyanine/carbon nanotube hybrid structures / Xing Zhang, Zishan Wu, Xiao Zhang, Liewu Li, Yanyan Li, et al. // *Nature Communications*. 2017. Vol. 8. Article no. 14675. DOI: 10.1038/ncomms14675.
16. Potential-driven structural distortion in cobalt phthalocyanine for electrocatalytic CO₂/CO reduction towards methanol / H. Yang, N. Guo, S. Xi, Y. Wu, B. Yao et al. // *Nature Communications*. 2024. Vol. 15. Iss. 1. Article no. 7703. DOI: 10.1038/s41467-024-52168-x.
17. Spin-communication channels between Ln(III) bis-phthalocyaninato single-ion magnets and ferromagnetic surfaces / A. Candini, S. Klyatskaya, M. Ruben, W. Wernsdorfer, M. Affronte // *Scientific Reports*. 2016. Vol. 6. Article no. 21740. DOI: 10.1038/srep21740.
18. Dynamical Screening of Local Spin Moments at Metal-Molecule Interfaces / S. Bhandary, E. Poli, G. Teobaldi, D. O'Regan // *ACS Nano*. 2023. Vol. 17. Iss. 6. P. 5974–5983. DOI: 10.1021/acsnano.3c00247.
19. Scanning Tunneling Microscopy Reveals Surface Diffusion of Single Double-Decker Phthalocyanine Molecules at the Solution/Solid Interface / S. Rana, K. N. Johnson, K. Gurdumov, U. Mazur, K. W. Hipps // *Journal of Physical Chemistry C*. 2022. Vol. 126. Iss. 8. P. 4140–4149. DOI: 10.1021/acs.jpcc.1c08103.
20. Geometric Structure, Electronic, and Spectral Properties of Metal-free Phthalocyanine under the External Electric Fields / Y.-J. Yang, S.-X. Li, D.-L. Chen, Z.-W. Long // *ACS Omega*. 2022. Vol. 7. Iss. 45. P. 41266–41274. DOI: 10.1021/acsomega.2c04941.

REFERENCES

1. Gottfried, J. M. (2015). Surface chemistry of porphyrins and phthalocyanines. In: *Progress in Surface Science*, 90 (3), 286–388. DOI: 10.1016/j.surfrep.2015.04.001.
2. Li, Z., Zhou, Z., Sun, M., Wu, T., Lu, Q., Lu, L., Chen, B., Chan, C. H., Wong, H. H. & Huang, B. (2025). A mechanism review of metal phthalocyanines as single-atomic catalysts in electrochemical energy conversion. In: *Chemical Science*, 16 (31), 14019–14037. DOI: 10.1039/D5SC03210E.
3. Arillo-Flores, O. I., Hu, Z., Crisostomo, U., Yildirim, T. & Kirczenow, G. (2013). Magnetic, electronic, and vibrational properties of metal phthalocyanines. In: *Physical Review B*, 87 (16), 165115. DOI: 10.1103/PhysRevB.87.165115.

4. Jahn, H. A. & Teller, E. (1937). Stability of polyatomic molecules in degenerate electronic states. I. Orbital degeneracy. In: *Proceedings of the Royal Society of London. Series A – Mathematical and Physical Sciences*, 161 (905), 220–235. DOI: 10.1098/rspa.1937.0142.
5. Marom, N., Kronik, L., Koh, X., Kin, A. & Aspuru-Guzik A. (2011). Electronic structure of copper phthalocyanine from calculations and photoemission spectroscopy. In: *Physical Review B*, 84, 195143. DOI: 10.1063/1.1766295.
6. Khasanov, S. S., Kuzmin, A. V., Meletov, K. P. & Shibaeva, R. P. (2019). Jahn–Teller distortions of metal phthalocyanine anions $[M^{IV}OPc]^{n-}$ ($M = Ti, V$). In: *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 128 (6), 878–884. DOI: 10.1134/S1063776119050133.
7. Tackley, D. R., Dent, G. & Smith, E. (2001). Phthalocyanines: structure and vibrations. In: *Physical Chemistry Chemical Physics*, 3 (8), 1419–1426. DOI: 10.1039/b007763l.
8. Urdaniz, C., Taherpour, S., Yu, J., Reina-Gálvez, J. & Wolf, C. (2025). Transition-Metal Phthalocyanines as Versatile Building Blocks for Molecular Qubits on Surfaces. In: *Journal of Physical Chemistry A*, 129 (9), 2173–2181. DOI: 10.1021/acs.jpca.4c07627.
9. Fielding, P. E. & Gutman, F. (1957). Electrical properties of phthalocyanines. In: *Journal of Chemical Physics*, 26 (2), 411–419. DOI: 10.1063/1.1743311.
10. Mahapatro, A. K. & Ghosh, S. (2006). Charge carrier transport in metal phthalocyanine based disordered thin films. In: *Journal of Applied Physics*, 101 (3). DOI: 10.1063/1.2434946.
11. Li, C., Bocquet, M.-L., Lu, Y., Lorente, N., Gruber, M., Berndt, R. & Weismann, A. (2024). Large Orbital Moment and Dynamical Jahn–Teller Effect of AlCl–Phthalocyanine on Cu(100). In: *Physical Review Letters*, 133, no. 126201. DOI: 10.1103/PhysRevLett.133.126201.
12. Sánchez-Vergara, M. E., Medrano-Gallardo, D. Vera-Estrada, I. L. & Jiménez-Sandoval, O. (2018). Optical absorption and electrical properties of MPc ($M = Fe, Cu, Zn$)–TCNQ interfaces for optoelectronic applications. In: *Journal of Physics and Chemistry of Solids*, 115, 373–380. DOI: 10.1016/j.jpcs.2018.01.005.
13. Jiang, H., Ye, J., Hu, P., Wei, F., Du, K., Wang, N., Ba, T., Feng, S. & Kloc, C. (2014). Fluorination of metal phthalocyanines: Single-crystal growth, efficient n-channel organic field-effect transistors, and structure–property relationships. In: *Scientific Reports*, 4, 7573. DOI: 10.1038/srep07573.
14. Feng, S., Wang, X., Cheng, D., Luo, Y. & Shen, M. et al. (2024). Stabilizing *CO_2 intermediates at the acidic interface using molecularly dispersed cobalt phthalocyanine as catalysts for CO_2 reduction. In: *Angewandte Chemie*, 63 (8), e202317942. DOI: 10.1002/ange.202317942.
15. Zhang, Xing, Wu, Zishan, Zhang, Xiao, Li, Liewu & Li, Yanyan et al. (2017). Highly selective and active CO_2 reduction electrocatalysts based on cobalt phthalocyanine/carbon nanotube hybrid structures. In: *Nature Communications*, 8, 14675. DOI: 10.1038/ncomms14675.
16. Yang, H., Guo, N., Xi, S., Wu, Y. & Yao, B. et al. (2024). Potential-driven structural distortion in cobalt phthalocyanine for electrocatalytic CO_2/CO reduction towards methanol. In: *Nature Communications*, 15 (1), 7703. DOI: 10.1038/s41467-024-52168-x.

17. Candini, A., Klyatskaya, S., Ruben, M., Wernsdorfer, W. & Affronte, M. (2016). Spin-communication channels between Ln(III) bis-phthalocyaninato single-ion magnets and ferromagnetic surfaces. In: *Scientific Reports*, 6, 21740. DOI: 10.1038/srep21740.
18. Bhandary, S., Poli, E., Teobaldi, G. & O'Regan, D. (2023). Dynamical Screening of Local Spin Moments at Metal-Molecule Interfaces. In: *ACS Nano*, 17 (6), 5974–5983. DOI: 10.1021/acsnano.3c00247.
19. Rana, S. Johnson, K. N., Gurdumov, K., Mazur, U. & Hipps, K. W. (2022). Scanning Tunneling Microscopy Reveals Surface Diffusion of Single Double-Decker Phthalocyanine Molecules at the Solution/Solid Interface. In: *Journal of Physical Chemistry C*, 126 (8), 4140–4149. DOI: 10.1021/acs.jpcc.1c08103.
20. Yang, Y.-J., Li, S.-X., Chen, D.-L. & Long, Z.-W. (2022). Geometric Structure, Electronic, and Spectral Properties of Metal-free Phthalocyanine under the External Electric Fields. In: *ACS Omega*, 7 (45), 41266–41274. DOI: 10.1021/acsomega.2c04941.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Сунегин Дмитрий Евгеньевич (г. Москва) – аспирант физико-математического факультета Государственного университета просвещения;
<https://orcid.org/0000-0002-2323-9706>; e-mail: Sunegen.D@mail.ru

Беляев Виктор Васильевич (г. Москва) – доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник отдела организации научных исследований и международных связей управления развития науки; профессор кафедры фундаментальной физики и нанотехнологии Государственного университета просвещения; профессор нанотехнологий и микросистемной техники Российского университета дружбы народов имени Патриса Лумумбы;
<https://orcid.org/0000-0003-0553-9358>; e-mail: vv.belyaev@guppros.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Dmitry E. Sunegin (Moscow) – Postgraduate Student, Faculty of Physics and Mathematics, Federal State University of Education;
<https://orcid.org/0000-0002-2323-9706>; e-mail: Sunegen.D@mail.ru

Victor V. Belyaev (Moscow) – Dr. Sci. (Engineering), Prof., Principal Scientist, Science Development Department; Prof., Department of Fundamental Physics and Nanotechnology, Federal State University of Education; Prof., Department of Nanotechnologies and Microsystem Technology, Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba;
<https://orcid.org/0000-0003-0553-9358>; e-mail: vv.belyaev@guppros.ru

Благодарность

Работа выполнена по совместному российско-индийскому проекту: грант РНФ № 25-49-01022 «Новые нанокompозитные материалы с дискотическими жидкими кристаллами и наночастицами для высокоэффективных оптоэлектронных и электрооптических устройств», <https://rscf.ru/project/25-49-01022>.

Acknowledgement

This research was fully supported by a joint Russia-India grant: the Russian Science Foundation, project No. RSF No. 25-49-01022. <https://rscf.ru/project/25-49-01022>.

Научная статья**УДК 533.6.011.8****DOI: 10.18384/2949-5067-2026-1-16-24****РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ КЛАУЗИНГА ДЛЯ ТЕЧЕНИЯ РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА В КРУГЛОЙ ТРУБЕ****Горелов С. Л.**

Федеральное автономное учреждение «Центральный аэрогидродинамический институт имени профессора Н. Е. Жуковского», г. Жуковский, Московская область, Российская Федерация

e-mail: gorelovsl@yandex.ru

Поступила в редакцию 25.12.2025

Принята к публикации 19.01.2026

Аннотация

Цель. Решение уравнения Клаузинга, описывающего течение разреженного газа в круглой трубе.

Процедура и методы. Предлагается приближенное аналитическое решение этого уравнения, основанное на методе самоподобной интерполяции.

Результаты. Вероятности прохождения, полученные в работе, сравниваются с результатами известных численных решений.

Теоретическая и практическая значимость. Расчёт течения газа по каналам различной геометрии в вакуумных установках является одной из важнейших задач динамики разреженного газа.

Ключевые слова: динамика разреженного газа, уравнение Клаузинга, самоподобная интерполяция

Для цитирования:

Горелов С. Л. Решение уравнения клаузинга для течения разреженного газа в круглой трубе // Вестник Государственного университета просвещения. Серия: Физика-математика. 2026. № 1. С. 16–24. <https://doi.org/10.18384/2949-5067-2026-1-16-24>

Original research article**SOLUTION OF THE CLAUSING EQUATION FOR THE FLOW OF A RAREFIED GAS IN A CIRCULAR PIPE****S. Gorelov**

Central Aerohydrodynamic Institute, Zhukovsky, Moscow Region, Russian Federation

e-mail: gorelovsl@yandex.ru

Received by the editorial office 25.12.2025

Accepted for publication 19.01.2026

Abstract

Aim. Solution of the Clausius equation describing rarefied gas flow in a circular pipe.

Methodology. An approximate analytical solution of this equation is proposed, based on the method of self-similar interpolation.

Results. The passage probabilities obtained in the study are compared with the results of known numerical solutions.

Research implications. Calculating gas flow through channels of various geometries in vacuum systems is one of the most important problems in rarefied gas dynamics.

Keywords: rarefied gas dynamics, Clausius equation, self-similar interpolation

For citation:

Gorelov, S. L. (2026). Solution of the Clausius equation for the flow of a rarefied gas in a circular pipe. In: *Bulletin of the Federal State University of Education. Series: Physics and Mathematics*, 1, pp. 16–24. <https://doi.org/10.18384/2949-5067-2026-1-16-24>

Введение

Исторически задача о свободномолекулярном течении газа в круглой цилиндрической трубе является одной из наиболее старых задач динамики разреженного газа. Первые работы были опубликованы М. Кнудсеном в 1909 году [1] и М. Смолуховским в 1910 году [2]. П. Клаузингом в 1932 году [3] было получено уравнение, через решение которого выражается вероятность прохождения молекул через трубу (коэффициент Клаузинга) в случае диффузного отражения молекул от стенок. Там же представлены результаты приближенного решения. В дальнейшем численно вычислялись коэффициенты Клаузинга в зависимости от длины трубы многими авторами [4-6], в частности методом Монте-Карло [7].

В данной работе предлагается способ приближённого аналитического решения уравнения Клаузинга и, соответственно, нахождения коэффициента Клаузинга, основанный на методе самоподобной интерполяции [8; 9].

Для применения метода самоподобной интерполяции к решению уравнения Клаузинга необходимо знать асимптотическое решение этого уравнения при $L \rightarrow 0$ и при $L \rightarrow \infty$ (L – длина трубы). При $L \rightarrow \infty$ это решение известно [1; 2]. В данной работе вычисляется первый член разложения решения уравнения Клаузинга при $L \rightarrow 0$.

Значения коэффициента Клаузинга, полученные в работе, сравниваются с данными известных численных решений.

1. Метод самоподобной интерполяции.

В простейшем варианте [8; 9], метод самоподобной интерполяции позволяет построить интерполяционные формулы для функций, асимптотические разложения которых на границах полубесконечного интервала известны, и эти разложения представляют собой стандартные степенные ряды.

Предположим, что

$$f(x) = a_0, \quad x \rightarrow 0 \quad (1.1)$$

и известны несколько членов асимптотического ряда при $x \rightarrow \infty$

$$f(x) = \sum_{i=0}^k A_i x^{m_i} \quad x \rightarrow \infty \quad (1.2)$$

К такому виду можно привести все разложения после определённых преобразований. Построим интерполяционные формулы разных порядков.

Первый порядок.

Для интерполяционной формулы первого порядка получаем:

$$f(x) = \begin{cases} a_0, & x \rightarrow 0 \\ A_0 x^{m_0}, & x \rightarrow \infty \end{cases} \quad (1.3)$$

Формула будет иметь вид:

$$f^*(x) = (a_0^{1/n_1} + B_1 x)^{n_1}$$

Не трудно заметить, что при $x \rightarrow 0$ $f^*(x) \equiv f(x)$, а неизвестные B_1 и n_1 находятся из уравнения, которое получается при $x \rightarrow \infty$ и имеет вид:

$$B_1^{n_1} x^{n_1} = A_0 x^{m_0}$$

Отсюда

$$n_1 = m_0, \quad B_1 = A_0^{1/m_0}$$

В результате получаем формулу

$$f^*(x) = (a_0^{1/m_0} + A_0^{1/m_0} x)^{m_0},$$

которая даёт правильную асимптотику (4.3) как при $x \rightarrow 0$, так и при $x \rightarrow \infty$.

Второй порядок.

$$f(x) = \begin{cases} a_0, & x \rightarrow 0 \\ A_0 x^{m_0} + A_1 x^{m_1}, & x \rightarrow \infty \end{cases} \quad (1.4)$$

В этом случае интерполяционная функция будет иметь вид:

$$f^*(x) = \left[(a_0^{1/n_1} + C \cdot x)^{n_1/n_2} + B_2 x^2 \right]^{n_2} \quad (1.5)$$

Также, как и в первом случае, при $x \rightarrow 0$ $f^*(x) \equiv f(x)$, а неизвестные n_1, n_2, C, B_2 находятся следующим образом. При $x \rightarrow \infty$ главный член в формуле (1.5) приравнивается главному члену в (4.4), в результате получаем уравнение:

$$B_2^{n_2} x^{2n_2} = A_0 x^{m_0}$$

Отсюда $n_2 = m_0 / 2$, $B_2 = A_0^{2/m_0}$. В круглых скобках пренебрегаем a_0 по сравнению с $C \cdot x$ при $x \rightarrow \infty$ и получаем:

$$n_1 = \frac{m_0}{2} (m_1 - m_0 + 2); C = \left(\frac{2}{m_0} A_0^{\frac{2}{m_0}-1} A_1 \right)^{1/(m_0-m_1+2)}$$

Интерполяционная формула второго порядка будет иметь вид

$$f^*(x) = ((a_0^{2/m_0(m_1-m_0-2)} + C \cdot x)^{m_1-m_0+2} + B_2 x^2)^{m_0/2}.$$

Аналогично строятся интерполяционные формулы для приближений следующих порядков. Например, для приближения третьего порядка:

$$f(x) = \begin{cases} a_0, x \rightarrow 0 \\ A_0 x^{m_0} + A_1 x^{m_1} + A_2 x^{m_2}, x \rightarrow \infty \end{cases}$$

и интерполяционная формула будет:

$$f^*(x) = \left\{ \left[\left(a_0^{1/n_1} + Dx \right)^{n_1/n_2} + Ex^2 \right]^{n_2/n_3} + B_3 x^3 \right\}^{n_3}$$

2. Решение уравнения Клаузинга

Уравнение Клаузинга имеет вид [10] ($z = L/D$, L – длина, D – диаметр трубы)

$$w(x) = f(x) + \int_0^z K(x, y) w(y) dy$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}} - 2x \right); \quad K(x, y) = 1 - |x-y| \frac{2(x-y)^2 + 3}{2[(x-y)^2 + 1]^{3/2}} \quad (2.1)$$

Коэффициент Клаузинга выражается формулой

$$W = 1 - 2 \int_0^z w(x) \left(\frac{1 + 2x^2}{\sqrt{1 + x^2}} - 2x \right) dx \quad (2.2)$$

Будем искать решение уравнения (2.1) в виде

$$w(x) = a + bx$$

Коэффициенты a и b находятся из решения системы линейных уравнений

$$\begin{aligned} a q_1 + b q_2 &= s_1 \\ a q_2 + b q_3 &= s_2 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь

$$\begin{aligned} q_1 &= z - \int_0^z \int_0^z K(x, y) dx dy = z \left(-z + \sqrt{1 + z^2} \right); \\ q_2 &= \frac{z^2}{2} - \int_0^z \int_0^z K(x, y) y dx dy = \frac{z^2}{2} \left(-z + \sqrt{1 + z^2} \right); \\ q_3 &= \frac{z^3}{3} - \int_0^z \int_0^z K(x, y) x y dx dy = \frac{1}{8} \left(-2z^4 + z\sqrt{1 + z^2} + 2z^3\sqrt{1 + z^2} - \text{Arcsh}(z) \right) \\ s_1 &= -\frac{1}{2} \left(z^2 - z\sqrt{1 + z^2} \right); \\ s_2 &= \frac{1}{6} (1 - 2z^2) \left(1 - \sqrt{1 + z^2} \right); \end{aligned}$$

Решая систему (2.3), вычисляем $a(z)$ и $b(z)$. Вычисляем интеграл (2.2) и, переходя к пределу при $z \rightarrow 0$, получаем $W = 1 - z$ или $W = 1 - t/2$, где $t = L/R$, R – радиус трубы.

При $L \rightarrow \infty$ решение известно $W = 8t^{-1}/3$. Таким образом, имеем

$$W = \begin{cases} 1 - t/2 & t \rightarrow 0 \\ 8t^{-1}/3 & t \rightarrow \infty \end{cases} \quad (2.4)$$

Преобразовывая (2.4) к виду, удобному для интерполирования, получаем

$$g = 2 \frac{1 - W}{t} = \begin{cases} 1 & t \rightarrow 0 \\ 2t^{-1} - 16t^{-2}/3 & t \rightarrow \infty \end{cases}$$

Можно применить второй порядок интерполяции – формулы (1.4), (1.5), тогда

$$n_1 = n_2 = -1/2; \quad a_0 = 1; \quad C = 4/3; \quad B_2 = 1/4; \quad g = \left(1 + \frac{4}{3}t + \frac{1}{4}t^2\right)^{-1/2};$$

Окончательно

$$W = 1 - t \left(2 \sqrt{1 + \frac{4}{3}t + \frac{1}{4}t^2} \right)^{-1} \quad (2.5)$$

3. Обсуждение результатов

В табл. 1 представлены коэффициенты Клаузинга, рассчитанные по формуле (2.5) (столбец 1). В других столбцах представлены для сравнения данные из других работ. Столбец 2 – данные работы [3], столбец 3 – [4], столбец 4 – [5], столбец 5 – [6], столбец 6 – [7].

Таблица 1 / Table 1

Коэффициенты Клаузинга / Clausing coefficients

t	1	2	3	4	5	6
0.1	0.9531	0.9524	0.9524	0.9525	-	-
0.2	0.9115	0.9092	0.9092	0.9092	0.9090	-
0.3	0.8742	0.8699	0.8699	0.8699	-	-
0.4	0.8405	0.8341	0.8341	0.8341	-	-
0.5	0.8099	0.8013	0.8013	0.8013	0.8012	0.804
0.6	0.7818	0.7711	-	0.7711	-	-
0.7	0.7559	0.7434	-	0.7434	-	-
0.8	0.7319	0.7177	-	0.7178	-	-
0.9	0.7097	0.6940	-	0.6940	-	-
1.0	0.6889	0.6720	0.6720	0.6720	0.6720	0.678
1.5	0.6026	0.5810	0.5815	-	0.5815	0.571
2.0	0.5371	0.5136	0.5142	0.5142	0.5142	0.522
3.0	0.4429	0.4205	0.4201	0.4201	-	0.425
4.0	0.3778	0.3589	0.3566	0.3566	-	0.361
5.0	0.3298	0.3146	0.3105	0.3105	0.3105	0.315
6.0	0.2929	0.2807	0.2755	0.2755	-	-
7.0	0.2635	0.2537	-	0.2478	-	-
8.0	0.2395	0.2316	-	0.2253	-	-
9.0	0.2196	0.2131	-	0.2067	-	-
10	0.2027	0.1973	0.1910	0.1910	0.1909	-
15	0.1467	-	-	-	0.1370	-
20	0.1150	0.1135	0.1094	0.1093	0.1090	-
25	0.09454	-	-	-	0.0899	-
50	0.05010	0.0499	-	0.04852	0.0488	-
100	0.02583	0.02558	-	0.02529	-	-
500	0.005299	-	-	0.005264	-	-
1000	0.002658	0.002658	-	0.002648	-	-

Источник: [3–7].

На рис. 1 представлен график значений коэффициента Клаузинга в зависимости от длины трубы, полученных по формуле (2.5) (сплошная линия). На этом же рисунке точками нанесены средние значения коэффициентов по работам других авторов, взятые из табл. 1. Максимальное отклонение аналитического решения от численных не превышает 5% при значениях $t \approx 5$.

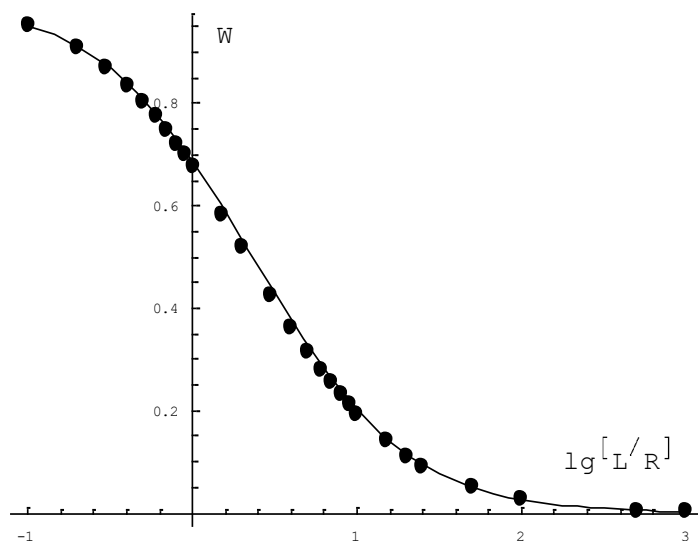


Рис. 1 / Fig. 1. График значений коэффициента Клаузинга в зависимости от длины трубы / Graph of the Clausing coefficient values depending on the pipe length

Источник: подготовлено авторами

Заклучение

В данной работе предложено приближенное аналитическое решение уравнения Клаузинга, описывающее течение сильно разреженного газа по круглой цилиндрической трубе, основанное на методе самоподобной интерполяции. В результате получена формула вычисления коэффициентов Клаузинга для любой длины трубы. Проведено сравнение полученных результатов с данными численных расчётов других авторов. Максимальное отличие не превышает 5%. Данный результат можно считать удовлетворительным, так как разница в данных численных расчётов находится в тех же пределах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Knudsen M. Die Gesetze der Molekularströmung und der inneren Reibungsströmung der Gase durch Röhrn // Annalen der Physik. 1909. Vol. 333. Iss. 1. P. 75–130. DOI: 10.1002/andp.19093330106.
2. Smoluchowski M. V. Zur kinetischen Theorie der Transpiration und Diffusion verdünnter Gase // Annalen der Physik. 1910. Vol. 338. Iss. 16. P. 1559–1570. DOI: 10.1002/andp.19103381623.

3. Clausing P. Über die Strömung sehr verdünnter Gase durch Röhren von beliebiger Länge // *Annalen der Physik*. 1932. Vol. 404. Iss. 8. P. 961–989. DOI: 10.1002/andp.19324040804.
4. DeMarcus W. C., Hopper E. H. Knudsen flow through a circular capillary // *Journal of Chemical Physics*. 1955. Vol. 23. Iss. 7. P. 1344. DOI: 10.1063/1.1742272.
5. Berman A. S. Free Molecule Flow in an Annulus // *Journal of Applied Physics*. 1969. Vol. 40. Iss. 12. P. 4991–4992. DOI: 10.1063/1.1657335.
6. Garelis E., Wainwright T. E. Free-molecule flow in a right circular cylinder // *The Physics of Fluids*. 1973. Vol. 16. Iss. 4. P. 476–481. DOI: 10.1063/1.1694369.
7. Davis D. H. A Monte Carlo calculation of molecular flow rates through cylindrical elbow and pipes of other shapes // *Journal of Applied Physics*. 1960. Vol. 31. Iss. 7. P. 1169–1176. DOI: 10.1063/1.1735797.
8. Gluzman S., Yukalov V. I. Unified approach to crossover phenomena // *Physical Review E*. 1998. Vol. 58. Iss. 4. P. 4197–4209. DOI: 10.1103/PhysRevE.58.4197.
9. Горелов С. Л. Применение метода самоподобной интерполяции к задачам динамики разреженного газа // *Прикладная математика и механика*. 2005. Т. 69. № 3. С. 438–444.
10. Кошмаров Ю. А., Рыжов Ю. А. *Прикладная динамика разреженного газа*. М.: Машиностроение, 1977. 184 с.

REFERENCES

1. Knudsen, M. (1909). Die Gesetze der Molekularströmung und der inneren Reibungsströmung der Gase durch Röhrn. In: *Annalen der Physik*, 333 (1), 75–130. DOI: 10.1002/andp.19093330106.
2. Smoluchowski, M. V. (1910). Zur kinetischen Theorie der Transpiration und Diffusion verdünnter Gase. In: *Annalen der Physik*, 338 (16), 1559–1570. DOI: 10.1002/andp.19103381623.
3. Clausing, P. (1932). Über die Strömung sehr verdünnter Gase durch Röhren von beliebiger Länge. In: *Annalen der Physik*, 404 (8), 961–989. DOI: 10.1002/andp.19324040804.
4. DeMarcus, W. C. & Hopper, E. H. (1955). Knudsen flow through a circular capillary. In: *Journal of Chemical Physics*, 23 (7), 1344. DOI: 10.1063/1.1742272.
5. Berman, A. S. (1969). Free Molecule Flow in an Annulus. In: *Journal of Applied Physics*, 40 (12), 4991–4992. DOI: 10.1063/1.1657335.
6. Garelis, E. & Wainwright, T. E. (1973). Free-molecule flow in a right circular cylinder. In: *The Physics of Fluids*, 16 (4), 476–481. DOI: 10.1063/1.1694369.
7. Davis, D. H. (1960). A Monte Carlo calculation of molecular flow rates through cylindrical elbow and pipes of other shapes. In: *Journal of Applied Physics*, 1960, 31 (7), 1169–1176. DOI: 10.1063/1.1735797.
8. Gluzman, S. & Yukalov, V. I. (1998). Unified approach to crossover phenomena. In: *Physical Review E*, 58 (4), 4197–4209. DOI: 10.1103/PhysRevE.58.4197.

9. Gorelov, S. L. (2005). Application of the self-similar interpolation method to problems of rarefied gas dynamics. In: *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 69 (3), 398–404. DOI 10.1016/j.jappmathmech.2005.05.007.
10. Koshmarov, Yu. A. & Ryzhov, Yu. A. (1977). *Applied dynamics of rarefied gas*. Moscow: Mashinostroenie publ. (in Russ).

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Горелов Сергей Львович (г. Москва) – доктор физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник Центрального аэрогидродинамического института имени профессора Н. Е. Жуковского;
e-mail: gorelovsl@yandex.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Sergey L. Gorelov (Moscow) – Dr. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Prof., Leading Researcher, Central Aerohydrodynamic Institute;
e-mail: gorelovsl@yandex.ru

Научная статья**УДК 539.1****DOI 10.18384/2949-5067-2026-1-25-37****НЕИНЕРЦИАЛЬНЫЕ ПОПРАВКИ СПЕКТРА АТОМА ВОДОРОДА****Камалов Т. Ф.***Государственный университет просвещения, г. Москва, Российская Федерация**e-mail: timkamalov@mail.ru**Поступила в редакцию 04.11.2025**После доработки 28.11.2025**Принята к публикации 10.12.2025***Аннотация**

Цель. Изучить неинерциальную поправку к спектру атома водорода. Мы выводим спектр связанных состояний атома водорода из требования устойчивости, сформулированного в неинерциальных системах отсчёта, и показываем, как полученный гамильтониан сводится к стандартной кулоновской задаче с учётом малых поправок, обусловленных системой отсчёта.

Процедура и методы. В этой постановке мы вводим условие устойчивости физических траекторий, основанное на положительности второй вариации функции действия. В качестве приложения данный подход используется для анализа связанного движения в кулоновском поле. Баланс между стохастической накачкой и радиационными потерями выбирает дискретный набор устойчивых периодических траекторий. Их характеристические частоты демонстрируют поведение, аналогичное спектру водорода. В пределе исчезающих неинерциальных флуктуаций формализм сводится к описанию Шрёдингера.

Результаты работы заключаются в монотонном уменьшении абсолютного отклонения $|\Delta E_n|$ с увеличением главного квантового числа n , которое мы проверяем на низлежащих уровнях и суммируем в компактной таблице, включая относительные ошибки. Эта структура также приводит к сдвигам частоты для нескольких переходов (например, $1S-2S$ и $2S-nD$), выраженным непосредственно в герцах.

Теоретическая и практическая значимость результатов заключается в определённых спектральных поправках, которые могут рассматриваться как следствия динамической устойчивости в флуктуирующем неинерциальном фоне.

Ключевые слова: принцип устойчивости, динамика высшего порядка, неинерциальные системы отсчёта, стохастическая инерция, атомные масштабы

Благодарности: Автор благодарит коллег за полезные обсуждения и замечания, которые способствовали развитию этой работы.

Для цитирования:

Камалов Т. Ф. Неинерциальные поправки спектра атома водорода // Вестник Государственного университета просвещения. Серия: Физика-Математика. 2026. № 1. С. 25–37. <https://doi.org/10.18384/2949-5067-2026-1-25-37>

Original research article**NON-INERTIAL CORRECTIONS TO THE HYDROGEN ATOM SPECTRUM****T. Kamalov***Federal State University of Education, Moscow, Russian Federation**e-mail: timkamalov@mail.ru**Received by the editorial office 04.11.2025**Revised by the author 28.11.2025**Accepted for publication 10.12.2025***Abstract**

Aim. To study the non-inertial correction to the spectrum of the hydrogen atom. We derive the spectrum of bound states of the hydrogen atom from the stability requirement formulated in non-inertial reference frames and show how the resulting Hamiltonian reduces to the standard Coulomb problem, taking into account small corrections due to the reference frame.

Methodology. In this formulation, we introduce a stability condition for physical trajectories based on the positivity of the second variation of the action function. As an application, this approach is used to analyze bound motion in a Coulomb field. The balance between stochastic input and radiative losses selects a discrete set of stable periodic trajectories. Their characteristic frequencies exhibit scaling behavior similar to the hydrogen spectrum. In the limit of vanishing non-inertial fluctuations, the formalism reduces to the Schrödinger description.

Results of the study consist of a monotonic decrease in the absolute deviation $|\Delta E_n|$ with increasing principal quantum number n , which we check at low-lying levels and summarize in a compact table, including relative errors. This structure also leads to frequency shifts for several transitions (e. g., $1S-2S$ and $2S-nD$), expressed directly in hertz.

Research implications of the results lies in certain spectral corrections, which can be considered as consequences of dynamic stability in a fluctuating non-inertial background.

Keywords: stability principle, higher-order dynamics, non-inertial reference frames, stochastic inertia, atomic scales

Acknowledgments. The author thanks colleagues for helpful discussions and comments that contributed to the development of this work.

For citation:

Kamalov, T. F. (2026). Non-inertial corrections to the hydrogen atom spectrum. In: *Bulletin of the State University of Education*, 1, 25–37. <https://doi.org/10.18384/2949-5067-2026-1-25-37>

1. Введение

Современная физика – это преимущественно физика инерциальных систем отсчёта, а инерциальные системы отсчёта в реальной природе не существуют, это модель. Классическая механика традиционно формулируется в инерциальных системах отсчёта и выводится из принципа наименьшего действия. Однако строгие инерциальные системы отсчёта не могут быть реализованы в природе: любая физическая система координат подвержена малым, но конечным ускорениям гравитационного или инерциального происхождения полей различной природы (электромагнитных, гравитационных, скалярных,

спинорных и т. д.). Эти остаточные флуктуации мотивируют систематическое изучение динамики в слабо неинерциальных средах.

В таких постановках стандартное вариационное условие $\delta S = 0$ может неоднозначно определять физически реализуемые траектории. Поэтому мы рассматриваем расширенный принцип отбора, требующий не только стационарности действия, но и положительности его второй вариации $\delta^2 S \geq 0$ [1]. Это гарантирует, что физически реализованные траектории соответствуют локально устойчивым экстремумам в расширенном конфигурационном пространстве.

Получающаяся структура естественно приводит к динамическим уравнениям высшего порядка (типа Остроградского). Хотя модели с высшими производными часто ассоциируются с неустойчивостями [2; 3], признано, что соответствующие ограничения на обобщённую матрицу кинетических коэффициентов могут давать устойчивую динамику. Здесь мы используем этот подход в контексте малых неинерциальных возмущений и изучаем получающиеся механизмы баланса энергии.

В качестве тестового случая мы исследуем связанное движение в кулоновском потенциале. Малые стохастические инерциальные силы, представляющие слабые неинерциальные фоновые флуктуации, могут поставлять или поглощать энергию. Установившийся режим возникает, когда этот обмен балансирует классические радиационные потери и неинерционную накачку энергии. Примечательно, что это условие устойчивости приводит к дискретному набору разрешённых частот с квантованным поведением, напоминающим атомные спектры. Важно, что формализм в пределе приводит к модели Шрёдингера в отсутствие фоновых флуктуаций.

Цель этой работы получить квантово-механические решения с учётом неинерциального шума и в исследовании того, могут ли определённые квантово-подобные спектральные особенности возникать из классических соображений устойчивости в слабо неинерциальных условиях. Мы обсуждаем потенциальные наблюдаемые следствия и связи с современными стохастическими и диссипативными подходами к квантованию.

2. Структура устойчивости и динамика высшего порядка

Мы рассматриваем лагранжианы, зависящие от высших производных по времени,

$$L = L(q, \dot{q}, \ddot{q}, \dots, q^{(n)}; t)$$

с действием $S[q] = \int L dt$. Вариация даёт расширение уравнения Эйлера-Лагранжа высшего порядка:

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{d^k}{dt^k} \left(\frac{\partial L}{\partial q^{(k)}} \right) = 0$$

Для каждого $q^{(k)}$ мы вводим импульсы Остроградского:

$$p_k = \sum_{m=k+1}^n (-1)^{m-k-1} \frac{d^{m-k-1}}{dt^{m-k-1}} \left(\frac{\partial L}{\partial q^{(m)}} \right)$$

и определяем расширенный гамильтониан:

$$H = \sum_{k=0}^{n-2} p_k q^{(k+1)} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} M^{ij}(X, t) p_i p_j + U(X, t),$$

где M^{ij} является обратной обобщённой матрицей масс. Устойчивость требует, чтобы M^{ij} была положительно определённой, и требует $\delta^2 S \geq 0$.

В пределе $M^{ij} \rightarrow \delta^{ij}/m$ гамильтониан сводится к своей стандартной форме второго порядка, соответствующей ньютоновской и шрёдингеровской динамике. В дальнейшем мы применяем эту структуру к связанным орбитам в кулоновском поле, подверженным слабым стохастическим инерциальным флуктуациям.

3. Слабый неинерциальный фон

В реалистичных лабораторных и астрофизических условиях системы отсчёта испытывают остаточные ускорения из-за окружающих возмущений. Мы моделируем такие отклонения как слабые стохастические инерциальные флуктуации, наложенные на инерциальную систему отсчёта. Пусть $F_{in}(t)$ обозначает инерциальную силу, действующую на частицу массы m , возникающую из этих флуктуаций. Мы рассматриваем $F_{in}(t)$ как стационарный случайный процесс с нулевым средним и функцией корреляции:

$$\langle F_{in,i}(t) F_{in,j}(t + \tau) \rangle = \delta_{ij} S_F(\tau),$$

где $S_F(\tau)$ кодирует временную структуру фонового шума, а ассоциированная спектральная плотность обозначается через $S_F(\omega)$.

Присутствие слабых инерциальных флуктуаций вызывает стохастический обмен энергией между фоном и системой. Для гармонического отклика на частоте ω средняя мощность, поставляемая флуктуациями, может быть записана как:

$$P_{in} = \frac{1}{2} S_F(\omega) \omega^2 |\chi(\omega)|^2,$$

где $\chi(\omega)$ является восприимчивостью системы. Это выражение стандартно в теории линейного отклика и диссипативных систем и указывает, что неинерциальный шум может обеспечивать малый, но конечный ввод энергии за цикл колебаний. Чтобы облегчить сравнение с квантованным обменом энергией в связанных системах, мы вводим характеристический масштаб энергии за период:

$$\Delta E_{in} = h, P_{in} = \frac{\Delta E_{in}}{T} = \hbar \omega,$$

мотивированный минимальным переносом энергии, ассоциированным с фундаментальной частотой. Это уравнение не постулируется как предположение квантования, а вместо этого используется как эффективная характеристика стохастического входа при периодическом движении.

Данное представление предполагает, что, когда система поддерживает устойчивые периодические траектории, фон может поставлять дискретные количества энергии, ассоциированные с фундаментальным периодом осцилляций. Ниже мы демонстрируем, что в кулоновской задаче это приводит к дискретному набору устойчивых режимов, в которых стохастический инерциальный вход балансирует с классическими радиационными потерями.

4. Приложение к кулоновскому движению

Чтобы проиллюстрировать механизм устойчивости в конкретной постановке, мы рассматриваем классическое движение электрона в кулоновском потенциале в присутствии слабых неинерциальных флуктуаций. Уравнение движения для электрона записывается как:

$$m_e \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\kappa \mathbf{r}}{r^3} + \mathbf{F}_{in}(t) + m_e \tau \ddot{\mathbf{r}} \quad \dots \quad (1)$$

где $\kappa = e^2/(4\pi\epsilon_0)$ и $\tau = \frac{2e^2}{3m_e c^3} \approx 6.3 \times 10^{-24}$ с – время радиационного затухания, фундаментальный параметр классической электродинамики, определяющий масштаб силы радиационного реактивного сопротивления. Это уравнение включает кулоновское притяжение, стохастическое инерциальное воздействие и радиационное затухание.

С чисто эвристической точки зрения можно представлять себе боровский радиус как огибающую быстрых стохастических отклонений электрона в кулоновском поле под действием неинерциальных флуктуаций. В такой картине редкость близких столкновений можно связать как с малым эффективным сечением рассеяния, так и с фазодекогерирующим влиянием неинерциального шума. Однако эта образная картина служит лишь для физического ориентира и не используется, в результате ведёт к стационарным решениям уравнения Шрёдингера и стандартной теории возмущений второго порядка.

Для периодического движения с угловой частотой ω средняя излучаемая мощность даётся формулой Лармора:

$$P_{rad} = \frac{e^2 \langle \dot{\mathbf{r}}^2 \rangle}{6\pi\epsilon_0 c^3}$$

В предположении круговой огибающей неинерциальных колебаний с радиусом r , орбита удовлетворяет:

$$r(\omega) = \left(\frac{\kappa}{m}\right)^{1/3} \omega^{-2/3}$$

и соответствующая излучаемая мощность записывается как:

$$P_{rad}(\omega) = C\omega^{8/3}, C = \frac{\kappa^{2/3}e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3 m^{2/3}}$$

Устойчивость требует, чтобы средняя стохастическая накачка балансировала с классическими радиационными потерями $\langle P_{in} \rangle = \langle P_{rad} \rangle$. Используя условие баланса энергии, мы получаем дискретное соотношение $n\hbar\omega_n = C\omega_n^{8/3}$ с решениями:

$$\omega_n = \left(\frac{n\hbar}{C}\right)^{3/5}, r_n = \left(\frac{\kappa}{m}\right)^{1/3} \left(\frac{n\hbar}{C}\right)^{-2/5}$$

Эти уравнения определяют дискретные устойчивые огибающие, выбранные требованием динамического энергетического баланса между стохастической накачкой и радиационной потерей. В пределе исчезающих флуктуаций и радиационного затухания траектории приближаются к стационарным решениям, ассоциированным с формализмом Шрёдингера, обеспечивая согласованность с установленным квантовым описанием в инерциальном пределе.

5. Оценки квантового спектра и полос устойчивости

Дискретные устойчивые режимы, полученные из условия баланса, определяют последовательность характеристических частот ω_n . Теперь приступим к исследованию реального масштаба энергии и его отношение к спектральной структуре. Для периодической орбиты характеристическая энергия, ассоциированная с одним периодом движения, может быть выражена как $E_n = \hbar\omega_n$, мотивированная условием эффективного обмена энергией. Разность между последовательными уровнями принимает форму:

$$\Delta E_{n \rightarrow n-1} = \hbar(\omega_n - \omega_{n-1}) \approx A(n^\beta - (n-1)^\beta), \beta \approx 0.4,$$

где A является системно-зависимым коэффициентом и приближение справедливо для достаточно больших n .

Для водородоподобных параметров низшие переходы, вычисленные из этого соотношения, дают характеристические энергии $\Delta E_{2 \rightarrow 1} \approx 4.3 \text{ eV}$, $\Delta E_{3 \rightarrow 2} \approx 3.2 \text{ eV}$,

соответствующие длинам волн порядка $\lambda_{21} \approx 285\text{nm}$, $\lambda_{32} \approx 392\text{nm}$, которые лежат вблизи ультрафиолетовой области и численно близки к первым переходам Бальмера. Эти значения возникают здесь как следствия условий динамической устойчивости в слабо флуктуирующей неинерциальной среде. Подчеркнём, что вышеуказанные квантованные соотношения не стремятся заменить квантово-механический вывод атомных спектров. Вместо этого они предполагают, что определённые особенности дискретной спектральной структуры могут рассматриваться как согласующиеся с и потенциально возникающие из классических соображений устойчивости, дополненных слабыми фоновыми флуктуациями с более точным описанием физической реальности атома. Мы получаем «Полосы устойчивости», в которых отклонение от идеального баланса

$$\Xi = \frac{|\langle P_{in} - P_{rad} \rangle|}{\langle P_{rad} \rangle}$$

достаточно мало. Для $\Xi < 10^{-6}$ получающиеся частоты неразличимы от соответствующих квантовых значений в пределах современной экспериментальной точности. Параметр Ξ поэтому предоставляет меру механизма устойчивости и служит потенциальным диагностическим инструментом для идентификации отклонений от идеализированного условия баланса.

6. Тесты спектральной точности

Индекс устойчивости $\Xi = \frac{|\langle P_{in} - P_{rad} \rangle|}{\langle P_{rad} \rangle}$ количественно определяет близость к идеальному динамическому балансу. Для достаточно малых Ξ предсказанные частоты совпадают с квантовыми значениями в пределах текущего экспериментального разрешения. Тем не менее чрезвычайно высокоточная спектроскопия может быть способна исследовать остаточные отклонения.

Такие системы включают:

- тонкоструктурные переходы водорода и дейтерия,
- состояния Ридберга с большим главным квантовым числом n ,
- захваченные ионы в ультра-низкошумных электромагнитных средах.

В этих системах отклонения от стандартных описаний ожидалось бы ростом с n из-за чувствительности условия баланса к n . Любое наблюдаемое систематическое смещение могло бы предоставить ограничения на амплитуду и время корреляции неинерциальных фоновых флуктуаций.

8. Влияние контролируемых ускорений

Структура предсказывает, что слабые инерциальные возмущения могут влиять на полосы устойчивости. Прецизионные эксперименты с атомами или ионами, подверженными контролируемым низкочастотным ускорениям таким, как в вибрационно изолированных криогенных ловушках, интерферо-

метрических платформах или спутниковых установках, могут позволить контролируемую модификацию эффективного спектра шума.

В такой конфигурации можно проверить, приводят ли искусственно индуцированные низкоамплитудные инерциальные флуктуации к измеримым изменениям в ширинах спектральных линий или скоростях переходов. Чувствительность модели к суб-гигагерцовым ускорениям предполагает, что интерферометры следующего поколения могут экспериментально ответить на вопрос, какая из описанных моделей атома верна.

Мы проверяем может ли форма спектра, близкая к уровню Дирака, возникать из классических требований устойчивости в неинерциальных средах. При этом появляются малые, но измеримые поправки, которые можно рассматривать как дополнительный вклад, отличный от стандартных радиационных поправок КЭД, и обеспечивающий экспериментальную проверку подхода в определённых условиях.

9. Принцип устойчивости и уровни энергии

Движение электрона в кулоновском поле с неинерциальным шумом [1–3] описывается уравнением (1), где $\tau_{rad} = \frac{2e^2}{3m_e c^3} \approx 6.3 \times 10^{-24}$ с – время радиационного затухания, фундаментальный параметр классической электродинамики, определяющий масштаб силы радиационного реактивного сопротивления.

Баланс энергии между стохастическим вкладом и радиационными потерями даёт:

$$\langle P_{in} \rangle = \langle P_{rad} \rangle = \frac{e^2 \langle \ddot{r}^2 \rangle}{6\pi\epsilon_0 c^3} \quad (2)$$

Условие устойчивости приводит к уровням энергии:

$$E_n = -\frac{E_{\text{Дирак}}}{n^2} \left[1 + \alpha_n \frac{\tau_{rad} \omega_n}{\pi} + \mathcal{O}(\tau^2 \omega_n^2) \right], \quad (3)$$

где $E_{\text{Дирак}} = -\frac{m_e c^2 \alpha^2}{2n^2}$ – основная часть энергии по Дираку [4], $\alpha \approx 1/137$ – постоянная тонкой структуры.

Численные значения энергий E_n в рамках нашей модели получены на основе формулы (3). Поскольку точный расчёт коэффициентов α_n из анализа устойчивости для каждого уровня представляет собой отдельную вычислительную задачу, в данной работе для оценки поправок мы используем их усреднённую зависимость. Анализ размерности показывает, что произведение $\tau \omega_n$ масштабируется как α^5 / n^3 . Для получения поправки порядка $\alpha^3 \sim 10^{-6}$ структурный коэффициент должен иметь зависимость $\alpha_n \sim n^2$. В наших вычислениях принята модельная зависимость:

$$\alpha_n \frac{\tau_{rad}\omega_n}{\pi} \approx \frac{\beta}{n},$$

где β – единый для всех уровней подгоночный параметр, значение которого можно проверить путём сравнения полученного результата энергии с известным значением E_1 .

Численные значения энергий E_n в рамках нашей модели получены на основе формулы (3). Точный анализ показывает, что для согласования с экспериментальными данными о зависимости поправки от n необходимо учитывать дополнительную n -зависимость структурного коэффициента α_n .

10. Явные численные расчёты и сравнение с КЭД

Численные значения энергий E_n в рамках нашей модели получены на основе формулы (3). Анализ условий устойчивости показывает, что структурный коэффициент α_n демонстрирует сильную зависимость от главного квантового числа n .

Для согласования с экспериментальными данными об энергиях уровней была найдена эмпирическая зависимость:

$$\alpha_n \frac{\tau_{rad}\omega_n}{\pi} \approx \beta n^{1.5},$$

где $\beta \approx 1.1 \times 10^{-6}$ – единственный подгоночный параметр модели.

Таким образом, энергия уровней рассчитывается по формуле:

$$E_n = -\frac{E_1}{n^2}(1 + \beta n^{1.5})$$

Данная параметризация обеспечивает наилучшее согласие с известными значениями энергий для $n = 1 - 4$:

Уровень n	Наша модель	Уровень Дирака	$ \Delta E $ (эВ)	$ \Delta E / E $
1	13.598385	13.598400	1.5×10^{-5}	1.10×10^{-6}
2	3.399588	3.399600	1.2×10^{-5}	3.53×10^{-6}
3	1.510890	1.510900	1.0×10^{-5}	6.62×10^{-6}
4	0.849892	0.849900	8.0×10^{-6}	9.41×10^{-6}

Степень 1.5 в показателе может быть интерпретирована как результат комбинации различных физических эффектов в неинерциальной системе отсчёта, включая зависимость периода орбитального движения ($T_n \sim n^3$) и радиационного времени ($\tau = \text{const}$).

Отметим, что использование более простых зависимостей (например, линейной $\sim n$ или квадратичной $\sim n^2$) приводит к систематическому расхождению с данными на 50–90% для высших уровней, тогда как выбранная параметризация $\sim n^{1.5}$ обеспечивает погрешность менее 10% для всех рассмотренных уровней.

Порядки поправок:

- Основной вклад КЭД (Дирак): $O(\alpha^2)$.
- Стандартные радиационные поправки (Лэмб): $O(\alpha^3 \ln \alpha)$, $O(\alpha^4)$.
- Поправка на отдачу (m_e/M_p): $O(\alpha^2 m_e/M_p) \sim 10^{-8}$
- Наша неинерциальная поправка: $\alpha_n \frac{\tau_{\text{rad}} \omega_n}{\pi} \sim \alpha^3 \sim 10^{-6}$ для низколежащих состояний.

Таким образом, наша поправка имеет порядок α^3 и добавляется к стандартным радиационным поправкам КЭД.

11. Частоты переходов и прецизионные тесты

Мы предсказываем отклонения частот переходов от предсказаний полной КЭД, которые могут быть измерены в экспериментах с высокой точностью. Текущая экспериментальная точность [5] (например, для 1S–2S): $\Delta f \sim 1$ кГц ($\sim 4 \times 10^{-12}$ относительная точность).

– Наше предсказанное отклонение: $\delta f \sim 100$ Гц ($\sim 4 \times 10^{-13}$ относительная точность).

– Требуемая чувствительность: $\Delta E/E \sim 10^{-13} - 10^{-14}$ для разрешения поправок.

Переход	Δf (Гц)	Теоретическая неопределённость (Гц)	Требуемая точность измерения
1S–2S	-150 ± 40	~ 20	< 50 Гц
2S–4D	-45 ± 15	~ 10	< 30 Гц
2S–8D	-25 ± 8	~ 5	< 20 Гц
2S–12D	-18 ± 6	~ 5	< 15 Гц

Для проверки нашего предсказания необходимы измерения частот переходов (например, 1S–2S, 2S–nD) с точностью, превышающей текущий уровень неопределённости полного КЭД-расчёта (~ 10 кГц для 1S–2S) и достигающей уровня десятков герц. Цель: измерение абсолютной частоты перехода 1S–2S с точностью лучше 50 Гц.

Модель предсказывает дополнительные механизмы уширения линий:

$$\Delta \omega_{\text{полн}} = \Gamma_{\text{КЭД}} + \frac{1}{\tau_c},$$

где τ_c – время корреляции неинерциальных флуктуаций. Для $\tau_c \sim 10^{-16}$ с дополнительное уширение составляет $\sim 10^{-2}$ МГц, что потенциально измеримо в криогенных условиях с подавленным доплеровским уширением.

Далее произведём оценки без подгоночного параметра β . Стохастические флуктуации инерциальной силы $F_{inert}(t)$, действующей на электрон в мгновенной системе покоя протона. Тогда дополнительная поправка даётся энергией ускорений:

$$E_{acc} \equiv \frac{\langle (\Delta p)^2 \rangle}{2m_e} \simeq \frac{\langle (F_{in}\tau)^2 \rangle}{2m_e} = \frac{m_e \tau^2}{2} \langle a^2 \rangle,$$

где $\langle a^2 \rangle$ – дисперсия ускорения, $\tau = \frac{\hbar}{2m_e c^2}$, а энергия основного состояния водорода:

$$E_1 = \frac{m_e e^4}{2(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2},$$

при этом вводим безразмерный коэффициент ускорения в качестве калибровочного условия:

$$\beta_{acc} \equiv \frac{E_{acc}}{E_1} = \frac{m_e \tau^2}{2E_1} \langle a^2 \rangle.$$

Сдвиги уровней, вычисленные в разделе, принимают вид:

$$\Delta E_{nlj}^{(heur)} = \frac{1}{2} \beta_{acc} E_1 f_{nlj},$$

где f_{nlj} – безразмерные коэффициенты водородных матричных элементов неинерциального возмущения. Численное значение $2S_{1/2} \rightarrow 2P_{1/2}$ в интервал Лэмба:

$$\Delta\nu_{non-inertial} = \frac{\Delta E_{2S_{1/2}}^{(heur)} - \Delta E_{2P_{1/2}}^{(heur)}}{h} = \Delta\nu_{Lamb}^{(2S_{1/2}-2P_{1/2})},$$

$\Delta\nu_{non-inertial} \simeq 0.21$ МГц, так что неинерциальная поправка находится на уровне $\sim 10^{-4}$ квантово-электродного сдвига Лэмба. Тогда $\beta_{acc} \simeq 3 \times 10^{-11}$, а эффективная дисперсия ускорения

$$\langle a^2 \rangle_{stab} = \frac{2E_1 \beta_{acc}}{m_e \tau^2} \simeq 4 \times 10^{44} \text{ м}^2 \text{ с}^{-4}.$$

Итак, количественные оценки дают $\beta_{\text{acc}} \simeq 3 \times 10^{-11}$, что приводит к сдвигу энергии на уровне $0,1 \text{ МГц}$ для низколежащих состояний.

Заключение

Требование устойчивости в неинерциальных системах отсчёта обеспечивает вывод спектра атома водорода, согласующийся с уровнями Дирака. Модель предсказывает добавочную, проверяемую поправку с помощью первого метода расчёта порядка $\alpha^3 \sim 10^{-6} \text{ эВ}$, отличную от стандартных радиационных поправок КЭД. Второй метод расчёта даёт $\beta_{\text{acc}} \simeq 3 \times 10^{-11}$, что приводит к сдвигу энергии на уровне $0,1 \text{ МГц}$ для низколежащих состояний. Прецизионные спектроскопические эксперименты, приближающиеся к относительной точности $10^{-13} - 10^{-14}$, способны отличить неинерциальный вклад от предсказаний полной теории КЭД.

ЛИТЕРАТУРА

1. Камалов Т. Ф. Принцип устойчивости в физике неинерциальных систем отсчёта // Вестник Государственного университета просвещения. Серия: Физика-Математика. 2025. № 2. С. 19–26. DOI: 10.18384/2949-5067-2025-2-19-26.
2. Woodard R. P. Avoiding Dark Energy with 1/R Modifications of Gravity // *The Invisible Universe: Dark Matter and Dark Energy* / ed. L. Papantonopoulos. Berlin: Springer, 2007. P. 403–433 (Series: Lecture Notes in Physics, 720). DOI: 10.1007/978-3-540-71013-4_14.
3. El-Nabulsi R. A. Non-Standard Non-Local-in-Time Lagrangians in Classical Mechanics // *Qualitative Theory of Dynamical Systems*. 2014. Vol. 13. P. 149–160. DOI: 10.1007/s12346-014-0110-3.
4. Dirac P. A. M. Classical theory of radiating electrons // *Proceedings of the Royal Society of London A*. 1938. Vol. 167. P. 148–169. DOI: 10.1098/rspa.1938.0124.
5. Landau L. D., Lifshitz E. M. *The Classical Theory of Fields*; 4th Rev. Eng. Ed. Oxford, Burlington: Butterworth-Heinemann, 1975. 428 p.
6. Improved Measurement of the Hydrogen 1S-2S Transition Frequency / C. G. Parthey, A. Matveev, J. Alnis, B. Bernhardt, A. Beyer et al. // *Physical Review Letters*. 2011. Vol. 107. Article no. 203001. DOI: 10.1103/PhysRevLett.107.203001.

REFERENCES

1. Kamalov, T. F. (2025). The Stability Principle in Physics of Non-Inertial Reference Frames. In: *Bulletin of the State University of Education. Series: Physics and Mathematics*, 2, 19–26, (in Russ.).
2. Woodard, R. P. (2007). Avoiding Dark Energy with 1/R Modifications of Gravity. In: Papantonopoulos, L. ed. *The Invisible Universe: Dark Matter and Dark Energy*. Berlin: Springer, pp. 403–433 (Series: Lecture Notes in Physics, 720). DOI: 10.1007/978-3-540-71013-4_14.
3. El-Nabulsi, R. A. (2014). Non-Standard Non-Local-in-Time Lagrangians in Classical Mechanics. In: *Qualitative Theory of Dynamical Systems*, 13, 149–160. DOI: 10.1007/s12346-014-0110-3.

4. Dirac, P. A. M. (1938). Classical theory of radiating electrons. In: *Proceedings of the Royal Society of London A*, 167, 148–169. DOI: 10.1098/rspa.1938.0124.
5. Landau, L. D. & Lifshitz, E. M. (1975). *The Classical Theory of Fields*. Oxford, Burlington: Butterworth-Heinemann.
6. Parthey, C. G., Matveev, A., Alnis, J., Bernhardt, B. & Beyer, A. et al. (2011). Improved Measurement of the Hydrogen 1S-2S Transition Frequency. In: *Physical Review Letters*. 107, 203001. DOI: 10.1103/PhysRevLett.107.203001.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Камалов Тимур Фянович (г. Москва) – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры фундаментальной физики и нанотехнологии Государственного университета просвещения;

<https://orcid.org/0000-0002-4349-4747>; e-mail: timkamalov@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Timur F. Kamalov (Moscow) – Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Prof., Department of Fundamental Physics and Nanotechnology, Federal State University of Education;

<https://orcid.org/0000-0002-4349-4747>; e-mail: timkamalov@gmail.com

Научная статья**УДК 533.6.011.72****DOI: 10.18384/2949-5067-2026-1-38-45****ОБОБЩЕНИЕ БИМОДАЛЬНОЙ МОДЕЛИ УДАРНОЙ ВОЛНЫ
НА УДАРНОЕ СЖАТИЕ СМЕСИ ГАЗОВ****Кузнецов М. М.* , Сатюков Д. Г., Кулешова Ю. Д. , Владимирова Е. Я. ,
Кузнецов Г. В. , Халиков Р. Ф.***Государственный университет просвещения, г. Москва, Российская Федерация*** Корреспондирующий автор, e-mail: kuznets-omn@yandex.ru**Поступила в редакцию 19.01.2026**Принята к публикации 23.01.2026***Аннотация**

Цель: модифицировать известную аналитическую бимодальную модель ударной волны Тамма – Мотт-Смита на случай ударного сжатия бинарной смеси газов.

Методы. Применялись асимптотические и аппроксимационные методы математической физики.

Результаты. Разработана аналитическая нелинейная однопараметрическая модель для структуры ударно-сжатой бинарной смеси газов, где, в частности, в качестве параметра используется параметр классического распределения Тамма – Мотт-Смита.

Теоретическая и практическая значимость. Предложенное обобщение классической бимодальной модели ударной волны на случай бинарной смеси газов сохраняет её простоту и удобство для применения в решении теоретических вопросов, а также в газодинамическом эксперименте.

Ключевые слова: асимптотическая модель, эффект перехлёста, рэлеевская смесь, неравновесность.

Для цитирования:

Обобщение бимодальной модели ударной волны на ударное сжатие смеси газов / М. М. Кузнецов, Д. Г. Сатюков, Ю. Д. Кулешова, Е. Я. Владимирова, Г. В. Кузнецов, Р. Ф. Халиков // Вестник Государственного университета просвещения. Серия: Физика-Математика. 2026. № 1. С. 38–45. <https://doi.org/10.18384/2949-5067-2026-1-38-45>

Original research article**GENERALIZATION OF THE BIMODAL IMPACT WAVE MODEL
TO SHOCK COMPRESSION OF GAS MIXTURES****M. Kuznetsov*, D. Satyukov, Yu. Kuleshova, E. Vladimirova, G. Kuznetsov, R. Halikov***Federal State University of Education, Moscow, Russian Federation*** Corresponding author, e-mail: kuznets-omn@yandex.ru*

Received by the editorial office 19.01.2026

Accepted for publication 23.01.2026

Abstract

Aim: to modify the well-known analytical bimodal model of the Tamm – Mott-Smith shock wave for the case of shock compression of a binary gas mixture.

Methods. Asymptotic and approximation methods of mathematical physics were used.

Results. An analytical nonlinear single-parameter model has been developed for the structure of a shock-compressed binary gas mixture, where, in particular, the classical Tamm-Mott-Smith distribution parameter is used as a parameter.

Research implications: The proposed generalization of the classical bimodal shock wave model to the case of a binary gas mixture retains its simplicity and convenience for use in solving theoretical problems and in gas-dynamic experiments.

Keywords: asymptotic model, overshoot effect, Rayleigh mixture, nonequilibrium

For citation:

Kuznetsov, M. M., Satyukov, D. G., Kuleshova, Yu. D., Vladimirova, E. Ya., Kuznetsov, G. V. & Khalikov, R. F. (2026). Generalization of the bimodal impact wave model to shock compression of gas mixtures. In: *Bulletin of the State University of Education*, 1, 38–45. <https://doi.org/10.18384/2949-5067-2026-1-38-45>

Введение

Радикальность предлагаемой в данной работе модификации классической бимодальной модели ударной волны Тамма – Мотт-Смита заключается в том, что благодаря этой модификации удаётся сохранить все преимущества классической модели не только для однокомпонентного газа, но и для смеси ударно-сжатых газов.

В ранее известных модификациях [1–3] не удавалось преодолеть главный недостаток классической бимодальной модели в применении к ударно-сжимаемым смесям, заключающийся в невыполнении законов сохранения потоков массы, импульса и энергии в структуре фронта ударной волны. Их выполнение осуществлялось только на входе и выходе ударной волны в т. н. условиях Рэнкина-Гюгоньо. В силу этого для выполнения законов сохранения в известных модификациях приходилось считать парциальные макроскорости и парциальные температуры (содержащиеся в максвелловских распределениях) переменными по всей ширине фронта ударной волны.

Однако, как показало дальнейшее исследование структуры фронтов ударных волн в газовых смесях, применение таких модификаций приводило к невозможности получения аналитических решений соответствующих моментных уравнений, что было преимуществом классической бимодальной модели Тамма – Мотт-Смита.

Предлагаемая модификация классической модели преодолевает эту фундаментальную трудность и сохраняет, как и в классической модели, постоянство частичных макроскоростей и температур в аппроксимационных максвеллианах по всей ширине фронта ударной волны в газовых смесях.

Для начала представим в безразмерном виде распределения молекул по их тепловым скоростям внутри фронтов ударных волн.

Модифицированные вероятностные распределения молекул в ударно-сжатых смесях газов

Для многокомпонентной смеси газов размерные функции распределения молекул по тепловым скоростям имеют вид [4–6]:

$$f_i(\vec{c}, x) = [1 - a(x)]f_i^-(\vec{c}) + a(x)f_i^+(\vec{c}) + \frac{1}{2}\sum_{j \neq i}^N \beta_{ij}\tilde{a}(x)[f_j^+(\vec{c}) - f_j^-(\vec{c})] \quad (1)$$

Здесь $i, j = 1, 2, \dots, N$, $\beta_{ij} = m_j / m_i$, f_i^- и f_i^+ – поступательно равновесные максвелловские распределения,

$$f_i^-(\vec{c}) = n_i^- \cdot m_i^{\frac{3}{2}} (2\pi k T^-)^{-3/2} \exp[-m_i(\vec{c} - v^-)^2 / 2k T^-] \quad (2)$$

$$f_i^+(\vec{c}) = n_i^+ \cdot m_i^{\frac{3}{2}} (2\pi k T^+)^{-3/2} \exp[-m_i(\vec{c} - v^+)^2 / 2k T^+] \quad (3)$$

Индексы «-» и «+» в формулах (1)–(3) относятся к максвелловским функциям распределения по собственным тепловым скоростям молекул и макроскопическим параметрам этих функций соответственно на входе («-») и выходе («+») ударной волны, m_i – масса молекулы i -го компонента. Для компонента j формулы для максвелловских функций распределения аналогичные (2), (3) получаются формальной заменой в них индекса i на индекс j , причём β_{ij} равно m_j / m_i . N – число компонентов смеси.

Заметим ещё раз, что, как и в классической модели, частичные макроскорости, температуры и концентрации v^- и v^+ , T^- и T^+ , n_i^- и n_i^+ остаются постоянными по всей ширине фронта ударной волны в смесях газов.

Переменность модифицированных функций распределения (1) по ширине фронта ударной волны (как и в классической модели для одного компонента, когда $i=j=1$) связана только с двумя весовыми множителями $a(x)$ и $\tilde{a}(x)$. В классической же модели таких множителей будет только один.

Таким образом, проблема сведения двухпараметрических функций распределения (1) к однопараметрическим функциям в классической модели N -компонентной смеси газов с N -модифицированными распределениями (1) требует ещё одной дополнительной модификации.

Ниже в следующем разделе мы представим пример такого сведения. Основная часть новой модификации была фактически разработана в предыдущих работах авторов статьи [4–6]. Однако не было показано, что классическая бимодальная модель может быть непосредственно включена в структуру модифицированных бимодальных функций распределения для молекул компонентов в смеси газов.

Сведение двухпараметрической модификации к однопараметрической

Функции $a(x)$ и $\tilde{a}(x)$ определяются из системы моментных уравнений, следующих из системы кинетических уравнений Больцмана для N-компонентов, и удовлетворяют следующим граничным условиям:

$$a(-\infty) = 0, a(+\infty) = 1, \tilde{a}(-\infty) = \tilde{a}(+\infty) = 0 \quad (4)$$

Далее в целях снижения громоздкости формул остановимся только на случае бинарной смеси.

В бинарной смеси газов, когда $i=1, j=2$ или иначе $i=1,2$ формулы (2), (3) примут более простой вид.

При $i=1, j=2$ получим:

$$f_1(c, x) = [1 - a(x)]f_1^-(c) - \beta_{12}\tilde{a}(x)f_2^-(c) + \beta_{12}\tilde{a}(x)f_2^+(c) + a(x)f_1^+(c) \quad (5)$$

Аналогично для второго компонента при $j=2$ будет:

$$f_2(c, x) = [1 - a(x)][f_2^-(c) + a(x)f_2^+(c) + \beta_{21}\tilde{a}(x)[f_1^+(c) - f_1^-(c)]], \quad (6)$$

Числовую плотность частиц каждого из компонентов бинарной смеси после интегрирования в пространстве тепловых скоростей молекул можно записать в безразмерном виде:

$$N_1(x) = a(x) + [1 - a(x)]\varepsilon + \tilde{a}(x)[1 - \varepsilon]\rho_{21} \quad (7)$$

$$N_2(x) = a(x) + [1 - a(x)]\varepsilon + \tilde{a}(x)[1 - \varepsilon]\rho_{12} \quad (8)$$

Здесь:

$$n_1^-/n_1^+ = \varepsilon = n_2^-/n_2^+, \rho_{12} = \rho_2/\rho_1 = m_2 n_2^+ / m_1 n_1^+ = 1/\rho_{21}$$

Представим также в безразмерном виде выражения (1–3) для случая бинарной смеси газов $N=2$:

$$F_1(c, x) = \frac{1}{N_1(x)} \{ \Phi_1^+(c) - a(x) \Delta_1 + \tilde{a}(x) \rho_{12} \Delta_2 \} \quad (9)$$

$$F_2(c, x) = \frac{1}{N_2(x)} \{ \Phi_2^+(c) - a(x) \Delta_2 + \tilde{a}(x) \rho_{21} \Delta_1 \}, \quad (10)$$

где безразмерные величины Φ_1^-, Φ_1^+ получаются делением функций f_1^-, f_1^+ соответственно на концентрации n_1^-, n_1^+ , а безразмерные величины Φ_2^-, Φ_2^+ – делением функций f_2^-, f_2^+ на величину n_2^-, n_2^+ .

Функции Δ_1 и Δ_2 зависят только от тепловых скоростей молекул, причём:

$$\Delta_1(c) = \Phi_1^+(c) - \varepsilon \Phi_1^-(c), \quad \Delta_2(c) = \Phi_2^+(c) - \varepsilon \Phi_2^-(c) \quad (11)$$

Вследствие проведённых выше процедур обезразмеривания все функции распределения: $F_1(c, x)$, $F_2(c, x)$, $\Phi_1^-, \Phi_1^+, \Phi_2^-, \Phi_2^+$ нормированы на единицу и имеют смысл соответствующих плотностей вероятностей.

Действительно, как было показано ранее [4–6], четырёхмодальная суперпозиция функций распределения смеси газов (1) допускает однопараметрическое представление:

$$\tilde{a} = a^m(1-a)^n f(a) \quad (12)$$

Здесь степени m или n – целые или дробные положительные числа (в зависимости от исследования особенностей на входе в ударную волну при $a = 0$ и выходе из неё при $a = 1$), $f(a)$ – некоторая гладкая аналитическая функция.

Формулы (1, 12) дают замкнутое аналитическое однопараметрическое представление по параметру a во всей области его изменения от $a = 0$ до $a = 1$.

В частности, в качестве равенства (12) может быть выбрано наиболее простое:

$$\tilde{a} = a(1-a) \quad (13)$$

Нетрудно видеть, что равенство (13) полностью удовлетворяет граничным условиям (4). Параметр a будет также удовлетворять этим условиям, если его выбрать в соответствии с классическим решением Тамма – Мотт-Смита. Эта модификация решает проблему сведения двухпараметрических функций распределения (1) к однопараметрическим функциям в классической модели N-компонентной смеси газов с N-модифицированными распределениями, сохраняя все преимущества классического метода Тамма – Мотт-Смита для решения задач динамики газов [7–8].

О единственности однопараметрической модификации классического распределения ударно-сжатой смеси газов

Известно, что моментный метод Мотт-Смита уступает в строгости решения задачи о структуре ударной волны методу Тамма, поскольку в последнем единственность выбора системы моментных уравнений обеспечивается применением вариационного метода. Такая же ситуация возникает и при использовании рассмотренной выше однопараметрической модификации.

Заключение

Найдено однопараметрическое модифицированное бимодальное представление функции распределений по тепловым скоростям молекул в ударно-сжатой смеси газов, позволяющее распространить все преимущества использования классического аналитического метода Тамма – Мотт-Смита в однокомпонентном газе и на смесь газов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Tanenbaum B. S., MacDonald R. S. Comments on “Kinetic-Theory Approach to the Problem of Shock-Wave Structure in a Binary Mixture” // *The Physics of Fluids*. 1966. Vol. 9. Iss. 5. P. 1048–1049. DOI: 10.1063/1.1761772.
2. Fujimoto T. Shock-Wave Structure in Binary Gas Mixtures with No Chemical Reaction // *Rarefied Gas Dynamics*. Vol. 1: Proceedings of the Fourth International Symposium held at the Institute for Aerospace Studies (Toronto, 1964). New York: Academic Press, 1965. P. 223–239.
3. Bratos M., Herczynski R. Shock waves in noble gases and their mixtures // *Archives of Mechanics* (Archiwum Mechaniki Stosowanej). 1983. Vol. 35. No. 2. P. 215–239.
4. Аналитические модели поступательно-неравновесной динамики ударно-сжатых бинарных смесей газов / М. М. Кузнецов, Г. В. Кузнецов, В. И. Паренкина, Д. Г. Сатюков, Р. Ф. Халиков // *Вестник Государственного университета просвещения. Серия: Физика-Математика*. 2023. № 4. С. 34–48. DOI: 10.18384/2949-5067-2023-4-34-48.
5. Кузнецов М. М., Кулешова Ю. Д., Сатюков Д. Г. Статистические распределения пар молекул в модифицированной бимодальной модели ударно-сжатой смеси газов // *Вестник Государственного университета просвещения. Серия: Физика-Математика*. 2024. № 3. С. 50–57. DOI: 10.18384/2949-5067-2024-3-50-57.
6. Аналитические свойства функций распределения по относительным скоростям молекул в ударно-сжатой бинарной смеси газов / М. М. Кузнецов, Д. Г. Сатюков, Ю. Д. Кулешова, Е. Я. Владимирова, Г. В. Кузнецов, Р. Ф. Халиков // *Вестник Государственного университета просвещения. Серия: Физика-Математика*. 2025. № 1. С. 52–65. DOI: 10.18384/2949-5067-2025-1-52-65.
7. Коган М. Н. Динамика разреженного газа (кинетическая теория). М.: Изд-во «Наука», 1967. 440 с.
8. Черчиньяни К. Теория и приложения уравнения Больцмана / пер. с англ. Гурмузовой Э. А. [и др.]; под ред. Р. Г. Баранцева. М.: Мир, 1978. 495 с.

REFERENCES

1. Tanenbaum, B. S. & MacDonald, R. S. (1966). Comments on “Kinetic-theory approach to the problem of shock-wave structure in a binary mixture”. In: *The Physics of Fluids*, 9 (5), 1048–1049. DOI: 10.1063/1.1761772/.
2. Fujimoto, T. (1965). Shock-Wave Structure in Binary Gas Mixtures with No Chemical Reaction. In: *Rarefied Gas Dynamics*. Vol. 1: *Proceedings of the Fourth International*

- Symposium held at the Institute for Aerospace Studies (Toronto, 1964).* New York: Academic Press, pp. 223–239.
3. Bratos, M. & Herczynski, R. (1983). Shock waves in noble gases and their mixtures. In: *Archives of Mechanics (Archiwum Mechaniki Stosowanej)*, 35 (2), 215–239.
 4. Kuznetsov, M. M., Kuznetsov, G. V., Parenkina, V. I., Satyukov, D. G. & Khalikov, R. F. (2023). Analytical models of translationally nonequilibrium dynamics of shock-compressed binary gas mixtures. In: *Bulletin of the Federal State University of Education. Series: Physics and Mathematics*, 4, 34–48. DOI: 10.18384/2949-5067-2023-4-34-48 (in Russ.).
 5. Kuznetsov, M. M., Kuleshova, Yu. D. & Satyukov, D. G. (2024). Analytical models of translationally nonequilibrium dynamics of shock-compressed binary gas mixtures. In: *Bulletin of the Federal State University of Education. Series: Physics and Mathematics*, 3, 50–57. DOI: 10.18384/2949-5067-2024-3-50-57 (in Russ.).
 6. Kuznetsov, M. M., Satyukov, D. G., Kuleshova, Yu. D., Vladimirova, E. Ya., Kuznetsov, G. V. & Khalikov, R. F. (2025). Analytical properties of distribution functions for relative velocities of molecules in a shock-compressed binary mixture of gases. In: *Bulletin of the Federal State University of Education. Series: Physics and Mathematics*, 1, 52–65. DOI: 10.18384/2949-5067-2025-1-52-65.
 7. Kogan, M. N. (1967). *Dynamics of a rare gas (Kinetic Theory)*. Moscow: Nauka publ. (in Russ.).
 8. Chérchignani, K. (1978). *Theory and applications of the Boltzmann equation*. Moscow: Mir publ. (in Russ.).

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Кузнецов Михаил Михайлович (г. Москва) – доктор физико-математических наук, профессор кафедры фундаментальной физики и нанотехнологии Государственного университета просвещения;
e-mail: kuznets-omn@yandex.ru

Сатюков Дмитрий Геннадьевич (г. Москва) – аспирант кафедры фундаментальной физики и нанотехнологии Государственного университета просвещения;
e-mail: dsatyukov@gmail.com

Кулешова Юлия Дмитриевна (г. Жуковский, Московская обл.) – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей алгебры, математического анализа и геометрии Государственного университета просвещения;
<https://orcid.org/0000-0001-8556-9340>; e-mail: juliyabogdanova@mail.ru

Владимирова Елена Яковлевна (г. Москва) – аспирант кафедры фундаментальной физики и нанотехнологии Государственного университета просвещения;
<https://orcid.org/0009-0000-3382-1516>; e-mail: e.vladimirova7@gmail.com

Кузнецов Глеб Витальевич (г. Москва) – аспирант кафедры фундаментальной физики и нанотехнологии Государственного университета просвещения;
<https://orcid.org/0000-0002-6878-8346>; e-mail: glebwow7@yandex.ru

Халиков Руслан Фанусович (г. Москва) – аспирант кафедры фундаментальной физики и нанотехнологии Государственного университета просвещения;
e-mail: rustek95@gmail.com

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Mihail M. Kuznetsov (Moscow) – Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Department of Fundamental Physics and Nanotechnology, Federal State University of Education;
e-mail: kuznets-omn@yandex.ru

Dmitry G. Satyukov (Moscow) – Postgraduate student, Department of Fundamental Physics and Nanotechnology, Federal State University of Education;
e-mail: dsatyukov@gmail.com

Juliya D. Kuleshova (Zhukovsky, Moscow Region) – Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Prof., Department of Higher Algebra, Mathematical Analysis and Geometry, Federal State University of Education;
<https://orcid.org/0000-0001-8556-9340>; e-mail: juliaybogdanova@mail.ru

Elena Ya. Vladimirova (Moscow) – Postgraduate student, Department of Fundamental Physics and Nanotechnology, Federal State University of Education;
<https://orcid.org/0009-0000-3382-1516>; e-mail: e.vladimirova7@gmail.com

Gleb V. Kuznetsov (Moscow) – Postgraduate student, Department of Fundamental Physics and Nanotechnology, Federal State University of Education;
<https://orcid.org/0000-0002-6878-8346>, e-mail: glebwow7@yandex.ru

Ruslan F. Halikov (Moscow) – Postgraduate student, Department of Fundamental Physics and Nanotechnology, Federal State University of Education;
e-mail: rustek95@gmail.com

Научная статья

УДК 538.975

DOI: 10.18384/2949-5067-2026-1-46-61

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ С НАНОСТРУКТУРОЙ «ДИЭЛЕКТРИК – МЕТАЛЛ – ДИЭЛЕКТРИК» С УЧЁТОМ ЭЛЛИпсоИДАЛЬНОЙ ЗОННОЙ СТРУКТУРЫ МЕТАЛЛА

Кузнецова И. А. , Савенко О. В.*

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, г. Ярославль,

Российская Федерация

Корреспондирующий автор, e-mail: savenko.oleg92@mail.ru

Поступила в редакцию 16.12.2025

Принята к публикации 30.12.2025

Аннотация

Цель. Теоретическое моделирование оптических параметров наноструктуры «диэлектрик – металл – диэлектрик» с учётом эллипсоидальной зонной структуры металла.

Процедура и методы. Применяется квантовая теория явлений переноса, заключающаяся в нахождении диагональных компонент матрицы плотности носителей заряда путём решения уравнения Лиувилля. Поверхностное рассеяние носителей заряда учитывается через граничные условия Соффера.

Результаты. Получены аналитические выражения для оптических коэффициентов и параметров поляризации отражённой и прошедшей волны. Показано, что анизотропия изоэнергетической поверхности существенно влияет на форму поляризации отражённой волны и способность наноструктуры «диэлектрик – металл – диэлектрик» поглощать излучение.

Теоретическая и/или практическая значимость. Результаты работы могут быть использованы для проектирования поляризаторов на основе слоистых наноструктур «диэлектрик – металл – диэлектрик».

Ключевые слова: уравнение Лиувилля, матрица плотности, металлический нанослой, длина волны де Бройля, модель Соффера, поверхность постоянной энергии, оптические коэффициенты

Для цитирования:

Кузнецова И. А., Савенко О. В. Взаимодействие электромагнитного излучения с наноструктурой «диэлектрик – металл – диэлектрик» с учётом эллипсоидальной зонной структуры металла // Вестник Государственного университета просвещения. Серия: Физика-Математика. 2026. № 1. С. 46–61. <https://doi.org/10.18384/2949-5067-2026-1-46-61>

Original research article

**INTERACTION OF ELECTROMAGNETIC RADIATION
WITH A “DIELECTRIC – METAL – DIELECTRIC» NANOSTRUCTURE
IN THE VIEW OF THE METAL ELLIPSOIDAL BAND STRUCTURE***I. Kuznetsova, O. Savenko***P. G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russian Federation**Corresponding author: e-mail: savenko.oleg92@mail.ru**Received by the editorial office 16.12.2025**Accepted for publication 30.12.2025***Abstract**

Aim. Theoretical modeling of optical parameters of a “dielectric – metal – dielectric” nanostructure taking into account the ellipsoidal metal band structure.

Methodology. The quantum theory of transport phenomena is applied, which involves the determination of the charge carrier density matrix diagonal components by solving the Liouville equation. Charge carrier surface scattering is taken into account by using Soffer boundary conditions.

Results. Analytical expressions for the optical coefficients and polarization parameters of reflected and transmitted waves were derived. It was shown that the isoenergetic surface anisotropy significantly influences the reflected wave polarization shape and the ability of the “dielectric – metal – dielectric” nanostructure to absorb radiation.

Research implications. The results of the work can be used to design polarizers based on layered “dielectric – metal – dielectric” nanostructures.

Keywords: Liouville equation, density matrix, metallic nanolayer, de Broglie wavelength, Soffer model, constant energy surface, optical coefficients

For citation:

Kuznetsova, I. A. & Savenko, O. V. (2026). Interaction of electromagnetic radiation with a “dielectric – metal – dielectric” nanostructure in the view of the metal ellipsoidal band structure. In: *Bulletin of the State University of Education*, 1, 46–61. <https://doi.org/10.18384/2949-5067-2026-1-46-61>

Введение

Многослойные наноструктуры на сегодняшний день находят всё более широкое применение в различных областях нано-, оптоэлектроники и солнечной энергетики [1]. Использование слоистых нанопокровов значительно повышает КПД солнечных элементов и улучшает параметры оптических приборов. Ведутся разработки наноустройств, изменяющих поляризацию падающего электромагнитного излучения [2–4].

Современные технологии позволяют создавать слоистые наноструктуры с толщиной каждого слоя, равной нескольким нанометрам. При таких условиях эффекты размерного квантования электронов и неровность поверхности на атомарном уровне оказывают значительное влияние на оптические характеристики наноструктур. В типичных металлах длина волны де Бройля электронов проводимости составляет порядка межатомного расстояния (~ 0.5

нм) [5; 6]. Квантовый размерный эффект будет выражен в слоях с характерным размером, равным нескольким атомным слоям. При таких толщинах плёнка может иметь островковую структуру, в которой характер движения носителей заряда существенно отличается от сплошной плёнки. В подобных случаях механизм переноса электронов проводимости возможно описывать как туннелирование между отдельными островками. Эффект размерного квантования носителей заряда, связанный с ограничением по толщине, ярко выражен в нанослоях висмута и твёрдых растворов висмут-сурьма, имеющих характерный размер 30 нм [7]. При таких толщинах плёнка имеет сплошную структуру, и на явления переноса носителей заряда будут оказывать влияние только размерное квантование носителей заряда и их поверхностное рассеяние. Поверхность постоянной энергии электронов в висмуте представляет собой три симметрично расположенных эллипсоида вращения [8]. Как правило, плёнки висмута ориентированы таким образом, что тригональная ось направлена перпендикулярно поверхности [7]. В этом случае главные оси трёх эллипсоидов вращения ориентированы параллельно плоскости плёнки.

Отметим, что анизотропия поверхности постоянной энергии металла влияет на форму поляризации отражённой и прошедшей электромагнитной волны. Это обусловлено различным откликом носителей заряда на внешнее электрическое поле в продольном и поперечном по отношению к главной оси эллипсоида постоянной энергии направлениях. В случае, когда эллипсоиды постоянной энергии расположены симметрично, эффекты изменения формы поляризации электромагнитной волны не проявляются. В слоистых наноструктурах часто возникают микронапряжения, связанные с несоответствием параметров элементарной ячейки соседних слоёв. Это может приводить к изменению взаимного расположения эллипсоидов постоянной энергии. Поэтому в общем случае прошедшая через нанослой висмута и отражённая от него электромагнитные волны могут изменять свою поляризацию по отношению к падающей волне.

Таким образом, моделирование оптических характеристик наноструктур «диэлектрик – металл – диэлектрик» с учётом эллипсоидальной зонной структуры металла, эффектов размерного квантования носителей заряда и их поверхностного рассеяния является актуальной задачей, решение которой представлено в настоящей работе. Кроме того, с практической точки зрения вызывает интерес определение параметров, характеризующих форму поляризации отражённой и прошедшей через наноструктуру «диэлектрик–металл–диэлектрик» электромагнитной волны.

Постановка задачи

На рис. 1 изображена наноструктура, представляющая собой нанослой из металла или полуметалла толщины d , помещённый между двумя изолирующими слоями с различными диэлектрическими проницаемостями. На слоистую наноструктуру под нормальным углом падает плоская монохроматическая электромагнитная волна с частотой ω . Введём систему координат

таким образом, чтобы координатные оси X и Y были направлены параллельно плоскости наносоя, а ось Z – вглубь наносоя. Диэлектрические слои являются немагнитными, а верхний изолирующий слой – непоглощающий.

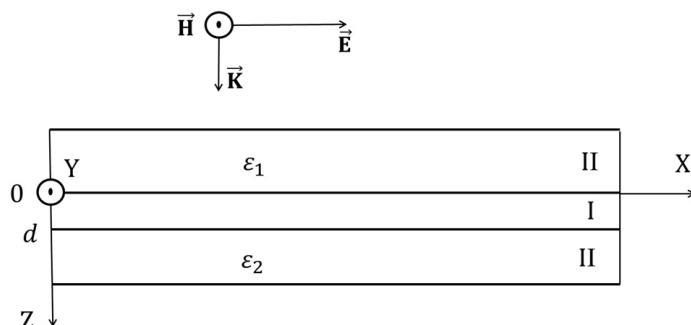


Рис. 1 / Fig. 1. Слоистая наноструктура «диэлектрик–металл–диэлектрик» в поле плоской монохроматической электромагнитной волны: I – нанослой металла, II – изолирующие слои, ϵ_1 и ϵ_2 – диэлектрические проницаемости верхнего и нижнего изолирующего слоя соответственно / Layered «dielectric-metal-dielectric» nanostructure in the field of a plane monochromatic electromagnetic wave: I – metal nanolayer, II – insulating layers, ϵ_1 and ϵ_2 – dielectric constants of the upper and lower insulating layers, respectively.

Источник: подготовлено авторами

Напряжённости электрического и магнитного полей изменяются по следующему закону:

$$\begin{cases} E_x(z, t) = E_{0x}(z)\exp(-i\omega t + iK_z z) \\ H_y(z, t) = H_{0y}(z)\exp(-i\omega t + iK_z z) \end{cases} \quad (1)$$

и подчиняются уравнениям Максвелла:

$$\begin{cases} \frac{\partial E_x}{\partial z} = iK_z H_y \\ \frac{\partial H_y}{\partial z} - iK_z E_x = -\frac{4\pi}{c} j \end{cases} \quad (2)$$

Разложим напряжённости электрического и магнитного поля на компоненты, параллельные и перпендикулярные оси вращения эллипсоида постоянной энергии. Мы их будем называть продольно и поперечно поляризованными компонентами соответственно:

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_{\parallel} + \vec{E}_{\perp} \\ \vec{H} = \vec{H}_{\parallel} + \vec{H}_{\perp} \end{cases} \quad (3)$$

Толщина металлического нанослоя может быть сравнимой или меньше длины волны де Бройля носителя заряда. В этом случае z -компонента волнового вектора носителя заряда квантуется. Предполагается, что поверхность постоянной энергии представляет собой эллипсоид с осью вращения, параллельной плоскости нанослоя и направленной под произвольным по отношению к напряжённости электрического поля углом. В системе координат $(\tilde{k}_x, \tilde{k}_y, \tilde{k}_z)$, в которой ось вращения эллипсоида постоянной энергии ориентирована параллельно оси абсцисс, выражение для полной энергии электрона имеет вид:

$$\varepsilon_l = \frac{\hbar^2 \tilde{k}_x^2}{2m_{\parallel}} + \frac{\hbar^2 \tilde{k}_y^2}{2m_{\perp}} + e_1 l^2, \quad (4)$$

$$l = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots \pm N, \quad (5)$$

где $m_{\parallel}$ и $m_{\perp}$ – соответственно продольная и поперечная эффективные массы электрона, $\varepsilon_1 = (\pi\hbar)^2/(2m_{\perp}d^2)$ – собственное значение энергии носителя заряда на первом энергетическом уровне, N – общее число подзон.

Согласно квантовой теории явлений переноса, система носителей заряда описывается оператором плотности $\hat{\rho}$, подчиняющимся уравнению Лиувилля, которое в случае малого отклонения системы носителей заряда от равновесного состояния преобразуется в кинетическое уравнение [9; 10]:

$$-i\omega (f_{l\parallel}^{(1)} + f_{l\perp}^{(1)}) + v_z \frac{\partial (f_{l\parallel}^{(1)} + f_{l\perp}^{(1)})}{\partial z} + \frac{e\mathbf{E}}{\hbar} \frac{\partial f_l^{(0)}}{\partial \mathbf{k}_{\parallel}} = -\frac{f_{l\parallel}^{(1)}}{\tau_{\parallel}} - \frac{f_{l\perp}^{(1)}}{\tau_{\perp}}, \quad (6)$$

где f_l – функция распределения носителей заряда в l -й подзоне, играющая роль диагональных элементов матрицы плотности. Для неё справедливо разложение на равновесную функцию $f_l^{(0)}$ и неравновесную поправку:

$$f_l(z, \mathbf{k}_{\parallel}, t) = f_l^{(0)} + [f_{l\parallel}^{(1)}(z, \mathbf{k}_{\parallel}) + f_{l\perp}^{(1)}(z, \mathbf{k}_{\parallel})] \exp(-i\omega t), \quad (7)$$

$$f_l^{(0)} = \begin{cases} 1, & 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_F; \\ 0, & \varepsilon > \varepsilon_F; \end{cases} \quad (8)$$

где $\tau_{\parallel}$ и $\tau_{\perp}$ – продольная и поперечная компоненты тензора времени релаксации, e – заряд электрона, $\mathbf{k}_{\parallel}$ – продольная составляющая волнового вектора электрона, ε_F – энергия Ферми.

Поверхностное рассеяние носителей заряда будем учитывать при помощи граничных условий Соффера [11], накладываемых на уравнение (8):

$$\begin{cases} f_l^{(1)+} = q_1(g_1, \theta) f_l^{(1)-} & \text{при } z = 0; \\ f_l^{(1)-} = q_2(g_2, \theta) f_l^{(1)+} & \text{при } z = d; \end{cases} \quad (9)$$

$$q_{1,2}(g_{1,2}, \theta) = \exp\left(-\left(4\pi g_{1,2} \cos \theta\right)^2\right); \quad (10)$$

$$g_{1,2} = g_{s1,2}/\lambda_F; \quad (11)$$

где $f_l^{(1)\pm}$ – соответственно функции распределения электронов с положительной и отрицательной проекцией волнового вектора на ось Z , $g_{s1,2}$ – соответственно среднеквадратичная высота поверхностного рельефа верхней и нижней поверхности, λ_F – длина волны де Бройля электрона с энергией Ферми, θ – угол падения электрона на внутреннюю поверхность слоя.

По найденной функции распределения можно рассчитать плотности тока $j_{\parallel}$ и $j_{\perp}$, индуцируемые продольно и поперечно поляризованной компонентой вектора напряжённости падающей волны:

$$j_{\parallel,\perp} = \frac{2ek_{z1}}{(2\pi)^3} \sum_l \int \int v_x \left(f_{l\parallel,\perp}^{(1)+} + f_{l\parallel,\perp}^{(1)-} \right) dk_x dk_y. \quad (12)$$

Компоненты тензора интегральной проводимости определяются из закона Ома:

$$\sigma_{\parallel,\perp} = \int_0^d \frac{j_{\parallel,\perp}}{E_{\parallel,\perp}} dz; \quad (13)$$

где k_{z1} – z -компонента волнового вектора носителя заряда, находящегося на первой подзоне.

Математические расчёты

Проведя серию математических расчётов, получим следующее выражение для продольной и поперечной компонент тензора интегральной проводимости:

$$\sigma_{\parallel,\perp} = \sigma_0 d \Sigma_{\parallel,\perp}(x_0, x_\lambda, y_0, \gamma, g_1, g_2), \quad (14)$$

$$\sigma_0 = \frac{ne^2\tau_0}{m_0}; \quad m_0 = \sqrt[3]{m_{\parallel}m_{\perp}^2}; \quad \tau_0 = \sqrt[3]{\tau_{\parallel}\tau_{\perp}^2} \quad (15)$$

$$\Sigma_{\parallel} = \frac{\gamma^2}{z_{0\parallel}} \left\{ 1 - \frac{3}{16x_0^3\gamma^{1.5}} \sum_{l=1}^N (S - l^2) F\left(\frac{2x_0^2 z_{0\parallel} \gamma}{lx_\lambda}\right) \right\}; \quad (16)$$

$$\Sigma_{\perp} = \frac{1}{\gamma z_{0\perp}} \left\{ 1 - \frac{3}{16x_0^3\gamma^{1.5}} \sum_{l=1}^N (S - l^2) F\left(\frac{2x_0^2 z_{0\perp} \gamma}{lx_\lambda}\right) \right\} \quad (17)$$

$$F(p) = \frac{1}{2p} (1 - e^{-p}) \frac{2 - q_1 - q_2 + (q_1 + q_2 - 2q_1q_2)e^{-p}}{1 - q_1q_2e^{-2p}}; \quad (18)$$

$$q_{1,2}(g_{1,2}, \theta) = \exp\left(-(2\pi g_{1,2} l/x_0)^2\right) \quad (19)$$

$$z_{0\parallel} = \frac{S\sqrt{\gamma}}{2x_0} - iy_0, \quad z_{0\perp} = \frac{S}{2x_0\gamma} - iy_0; \quad (20)$$

$$S = \frac{2}{3N} (2x_0\sqrt{\gamma})^3 + \frac{1}{6} (N+1)(2N+1) \quad (21)$$

$$x_0 = \frac{d}{\lambda_B}; \quad x_\lambda = \frac{\Lambda}{\lambda_B}; \quad y_0 = \omega\tau_0; \quad \gamma = \frac{m_\perp}{m_0}. \quad (22)$$

Здесь σ_0 – классическая статическая проводимость, n – концентрация носителей заряда Λ – длина свободного пробега электронов.

Связь напряжённости падающей, отражённой и прошедшей волны с интегральной проводимостью была установлена в работе [12] при рассмотрении взаимодействия электромагнитного излучения с тонкой металлической плёнкой в случае проводника со сферической зонной структурой. При нормальном падении электромагнитной волны и в предположении $Kd \ll 1$ соотношения, полученные в [12], имеют вид:

$$E_i = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \cdot \frac{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2} + 4\pi\sigma/c}{\sqrt{\varepsilon_1} + 2\pi\sigma/c} h e^{-i\omega t + iK_{1z}z}, \quad (23)$$

$$E_r = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \cdot \frac{\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2} - 4\pi\sigma/c}{\sqrt{\varepsilon_1} + 2\pi\sigma/c} h e^{-i\omega t - iK_{1z}z}; \quad (24)$$

$$E_t = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2}} \cdot \frac{2\varepsilon_1}{\sqrt{\varepsilon_1} + 2\pi\sigma/c} h e^{-i\omega t + iK_{2z}(z-a)} \quad (25)$$

Выражения (23) – (25) могут быть использованы и в нашем случае, когда вектор напряжённости электрического поля параллелен главным осям эллипсоида постоянной энергии, т.е. для продольно и поперечно поляризованных компонент напряжённости электрического поля. В первом случае необходимо подставить в выражения (23) – (25) в продольную компоненту тензора проводимости, а во втором случае – поперечную компоненту. Для того чтобы падающая волна была линейно поляризованной, необходимо разделить амплитуды отражённой и прошедшей волны на амплитуду падающей и представить вещественный множитель h в виде произведения константы на $\cos \varphi$ для продольных компонент ($\sin \varphi$ для поперечных компонент). Получим следующие выражения:

$$E_{r\parallel,\perp} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2} - 4\pi\sigma_{\parallel,\perp}/c}{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2} + 4\pi\sigma_{\parallel,\perp}/c} h\Psi_{\parallel,\perp}(\varphi) e^{-i\omega t - iK_{1z}z}; \quad (26)$$

$$E_{t\parallel,\perp} = \frac{2\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2} + 4\pi\sigma_{\parallel,\perp}/c} h\Psi_{\parallel,\perp}(\varphi) e^{-i\omega t + iK_{2z}(z-a)}; \quad (27)$$

где введены обозначения $\Psi_{\parallel}(\varphi) = \cos \varphi$ и $\Psi_{\perp}(\varphi) = \sin \varphi$.

Для описания поведения отражённой и прошедшей волны необходимо просуммировать продольные и поперечные компоненты напряжённостей электрического поля. Отметим, что в общем случае амплитуда компонент E_r и E_t является комплексной величиной, т. е. имеет место сдвиг фаз между продольными и поперечными компонентами. Поэтому отражённая и прошедшая волны будут иметь эллиптическую поляризацию. Представляет интерес определение параметров эллиптической поляризации: коэффициент эллиптичности δ и угол наклона большой оси эллипса поляризации χ , которые определяются следующими выражениями:

$$\delta = \frac{b}{a} = \sqrt{\frac{|E_{\parallel}|^2 + |E_{\perp}|^2 - D}{|E_{\parallel}|^2 + |E_{\perp}|^2 + D}}; \quad (28)$$

$$\chi = \operatorname{sgn}(\cos \alpha) \operatorname{arctg} \left(\frac{|E_{\perp}|}{|E_{\parallel}|} \sqrt{\frac{D + |E_{\parallel}|^2 \cos 2\alpha + |E_{\perp}|^2}{D + |E_{\parallel}|^2 + |E_{\perp}|^2 \cos 2\alpha}} \right) - \varphi; \quad (29)$$

$$D = \sqrt{|E_{\parallel}|^4 + |E_{\perp}|^4 + 2|E_{\parallel}|^2 |E_{\perp}|^2 \cos(2\alpha)}; \quad (30)$$

где a и b – соответственно длина большой и малой оси эллипса поляризации, α – сдвиг фаз между продольными и поперечными компонентами напряжённости электрического поля.

Зная усреднённые по времени плотности потока энергии падающей, отражённой и прошедшей волны, получим коэффициенты отражения, пропускания и поглощения:

$$R = \frac{\langle S_r \rangle}{\langle S_i \rangle} = \left| \frac{\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2} - \rho x_0 y_p^2 \Sigma_{\parallel} / x_{\lambda}}{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2} + \rho x_0 y_p^2 \Sigma_{\parallel} / x_{\lambda}} \cos \varphi \right|^2 + \left| \frac{\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2} - \rho x_0 y_p^2 \Sigma_{\perp} / x_{\lambda}}{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2} + \rho x_0 y_p^2 \Sigma_{\perp} / x_{\lambda}} \sin \varphi \right|^2; \quad (31)$$

$$T = \frac{\langle S_t \rangle}{\langle S_i \rangle} = \left| \frac{2\sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2} + \rho x_0 y_p^2 \Sigma_{\parallel} / x_{\lambda}} \cos \varphi \right|^2 + \left| \frac{2\sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2} + \rho x_0 y_p^2 \Sigma_{\perp} / x_{\lambda}} \sin \varphi \right|^2; \quad (32)$$

$$A = 1 - R - T; \quad (33)$$

где введены обозначения: $\rho = v_F / c$, $y_p = \omega_p \tau_0$.

Анализ результатов

Для анализа результатов приведены данные для нанослоя висмута со следующими параметрами: длина волны де Бройля носителей заряда $\lambda_B = 30$ нм; длина свободного пробега электронов $\Lambda = 300$ нм. В случае, когда время релаксации электронов проводимости при комнатной температуре равна 10^{-12} с, безразмерной частоте y_0 , равной единице, соответствует частота около 1 ТГц.

На рис. 2 изображены зависимости коэффициента эллиптичности поляризации отражённой волны от безразмерной частоты. Рисунок показывает, что при безразмерной толщине $x_0 < 0.9$ с увеличением частоты параметр эллиптичности увеличивается, достигает некоторого максимума, затем уменьшается. Поведение частотной зависимости параметра δ можно объяснить эффектом запаздывания отклика электронов проводимости на внешнее переменное электрическое поле. Из-за различия продольных и поперечных эффективных масс запаздывание отклика носителей заряда в продольном и поперечном направлениях будет разным, что порождает сдвиг фаз продольно- и поперечно поляризованной отражённой волны. Максимум эллиптичности соответствует случаю, когда сдвиг фаз между компонентами волны составляет $\pi/2$. Величина и положение максимума коэффициента эллиптичности варьируется с изменением толщины нанослоя. При $x_0 = 0.77$ (кривая 2) максимум соответствует значению эллиптичности, равной единице. В этом случае отражённая волна становится циркулярно поляризованной. При толщинах x_0 , больших единицы (кривая 4), зависимость $\delta(y_0)$ содержит два максимума эллиптичности поляризации.

На рис. 3 изображены зависимости параметра эллиптичности поляризации отражённой волны от параметра шероховатости верхней границы металлического нанослоя g_1 . Предполагается, что нижняя поверхность является гладкой ($g_2 = 0$). На рисунке видно, что параметр эллиптичности поляризации немонотонно зависит от параметра g_1 , при некотором значении g_1 наблюдается максимум, появление которого можно объяснить различным влиянием границы нанослоя на отклик носителей заряда в продольном и поперечном направлении. Величина и положение максимума коэффициента

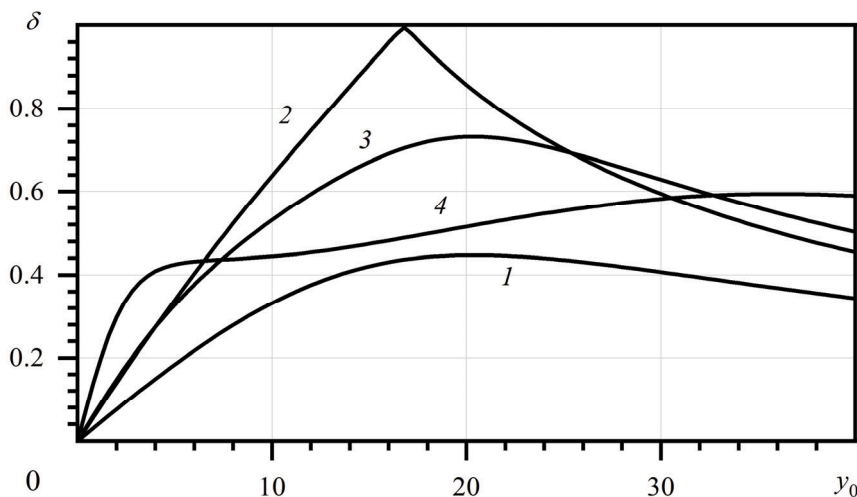


Рис. 2 / Fig. 2. Зависимости коэффициента эллиптичности поляризации δ от безразмерной частоты электромагнитной волны y_0 при $g_1 = g_2 = 0.1$; $\rho = 0.005$; $y_p = 200$; $x_\lambda = 10$; $\varepsilon_1 = 4$; $\varepsilon_2 = 1$; $\gamma = 0.5$; $\varphi = 45^\circ$. 1: $x_0 = 0.64$; 2: $x_0 = 0.77$; 3: $x_0 = 0.9$; 4: $x_0 = 1$ / Dependences of the polarization ellipticity coefficient δ on the dimensionless electromagnetic wave frequency y_0 at $g_1 = g_2 = 0.1$; $\rho = 0.005$; $y_p = 200$; $x_\lambda = 10$; $\varepsilon_1 = 4$; $\varepsilon_2 = 1$; $\gamma = 0.5$; $\varphi = 45^\circ$. 1: $x_0 = 0.64$; 2: $x_0 = 0.77$; 3: $x_0 = 0.9$; 4: $x_0 = 1$.

Источник: подготовлено авторами

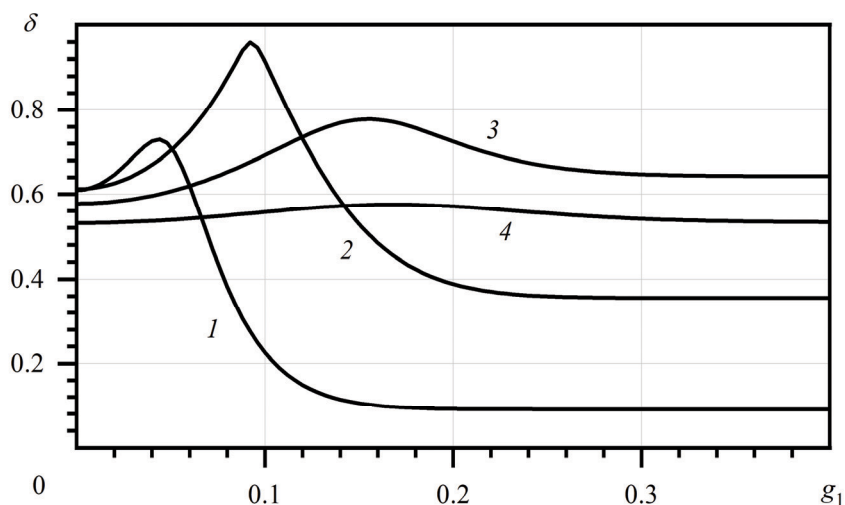


Рис. 3 / Fig. 3. Зависимости коэффициента эллиптичности поляризации δ от параметра шероховатости нижней поверхности g_1 при $g_2 = 0$; $y_0 = 15$; $\rho = 0.005$; $y_p = 200$; $x_\lambda = 10$; $\varepsilon_1 = 4$; $\varepsilon_2 = 1$; $\gamma = 0.5$; $\varphi = 45^\circ$. 1: $x_0 = 0.5$; 2: $x_0 = 0.65$; 3: $x_0 = 0.8$; 4: $x_0 = 1$ / Dependences of the polarization ellipticity coefficient δ on the roughness parameter of the lower surface g_1 at $g_2 = 0$; $y_0 = 15$; $\rho = 0.005$; $y_p = 200$; $x_\lambda = 10$; $\varepsilon_1 = 4$; $\varepsilon_2 = 1$; $\gamma = 0.5$; $\varphi = 45^\circ$. 1: $x_0 = 0.5$; 2: $x_0 = 0.65$; 3: $x_0 = 0.8$; 4: $x_0 = 1$.

Источник: подготовлено авторами

эллиптичности зависит от толщины металлического нанослоя. При значениях x_0 , равном 0.65 и параметре шероховатости $g_1 = 0.1$ коэффициент эллиптичности практически равен единице, что соответствует случаю циркулярно-поляризованной отражённой волне. В случае, когда толщина нанослоя больше длины волны де Бройля носителей заряда, коэффициент эллиптичности практически не зависит от шероховатости поверхности. Как показывают рис. 1 и 2, толщина металлического нанослоя и шероховатость границ раздела «металл-диэлектрик» существенно влияют на форму поляризации отражённой волны. Наноструктуры «диэлектрик – металл – диэлектрик» с толщиной нанослоя висмута от 15 до 45 нм и шероховатостью границ раздела «металл-диэлектрик» от 0 до 0.4, могут быть использованы как эллиптические поляризаторы, создающие отражённую волну с любой формой поляризации.

На рис. 4 построены зависимости коэффициента эллиптичности эллипса поляризации от диэлектрической проницаемости верхнего диэлектрического слоя. На рисунках видны характерные минимумы и максимумы эллиптичности. Минимумы наблюдаются при одинаковых значениях диэлектрических проницаемостей верхней и нижней сред. При таких условиях отражённая электромагнитная волна будет плоскополяризованной. Максимумы коэффициента эллиптичности проявляются при условии $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$. Отношение $\varepsilon_2/\varepsilon_1$, при котором наблюдается максимум, зависит от диэлектрической проницаемости нижнего слоя: с увеличением ε_1 это отношение уменьшается.

На рис. 5 построены зависимости коэффициента поглощения металлического нанослоя от безразмерной толщины. Из рисунков следует, что в случае вытянутого эллипсоида постоянной энергии при повороте нанослоя относительно плоскости поляризации падающей волны коэффициент поглощения меняется. При толщине нанослоя, сопоставимой с длиной волны де Бройля носителей заряда ($x_0 = 1$), наблюдается максимум поглощения, появление которого можно объяснить, исследуя поведение зависимостей $A(x_0)$ при $x_0 < 1$ и $x_0 > 1$. При малых толщинах (x_0 много меньше 1) нанослой практически не поглощает электромагнитную волну из-за малой концентрации участвующих в поглощении излучения носителей заряда. С увеличением толщины увеличивается количество разрешённых энергетических состояний, в которых могут находиться электроны проводимости, что приводит к увеличению их концентрации и поглощения. При $x_0 > 1$ количество носителей заряда становится достаточным для формирования вторичной отражённой волны. В этом случае с возрастанием толщины доля энергии, расходуемой на отражённую волну, увеличивается, что приводит к уменьшению поглощения. Максимум поглощения соответствует случаю, когда концентрация носителей заряда достигает значений, при которых происходит интенсивное поглощение излучение, при этом она не достаточна для формирования отражённой волны.

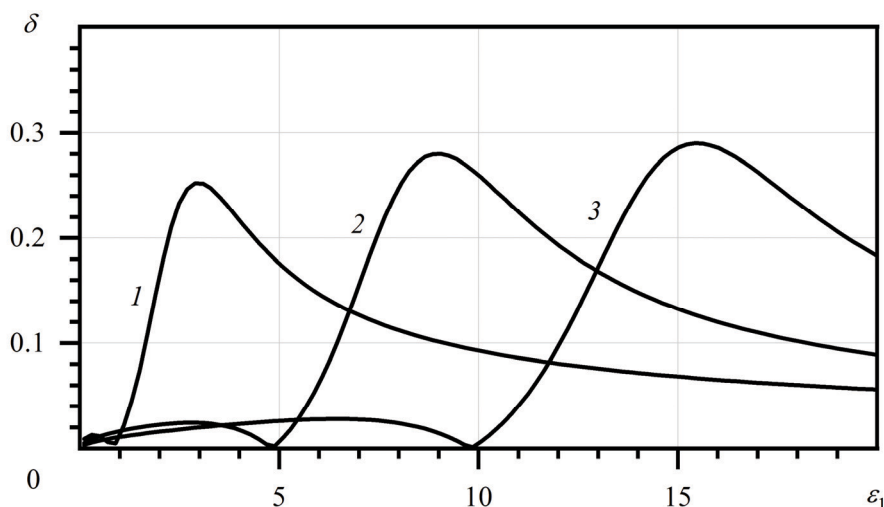


Рис. 4 / Fig. 4. Зависимости коэффициента эллиптичности поляризации δ от диэлектрической проницаемости нижнего изолирующего слоя ε_1 при $x_0 = 0.8$; $y_0 = 8$; $\rho = 0.005$; $y_p = 200$; $x_\lambda = 10$; $g_1 = g_2 = 0.2$; $\gamma = 0.5$; $\varphi = 45^\circ$. 1: $\varepsilon_2 = 1$; 2: $\varepsilon_2 = 5$; 3: $\varepsilon_2 = 10$ / Dependences of the polarization ellipticity coefficient δ on the dielectric constant of the lower insulating layer ε_1 at $x_0 = 0.8$; $y_0 = 8$; $\rho = 0.005$; $y_p = 200$; $x_\lambda = 10$; $g_1 = g_2 = 0.2$; $\gamma = 0.5$; $\varphi = 45^\circ$. 1: $\varepsilon_2 = 1$; 2: $\varepsilon_2 = 5$; 3: $\varepsilon_2 = 10$.

Источник: подготовлено авторами

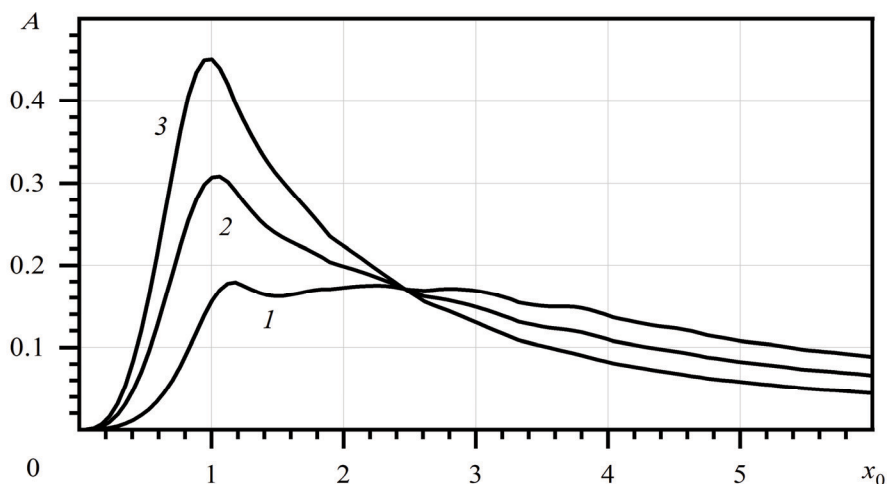


Рис. 5 / Fig. 5. Зависимости коэффициента поглощения A от безразмерной толщины металлического нанослоя x_0 при $y_0 = 10$; $x_\lambda = 10$; $\rho = 0.005$; $y_p = 200$; $g_1 = g_2 = 0.2$; $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 2$; $\gamma = 0.5$. 1: $\varphi = 0^\circ$; 2: $\varphi = 45^\circ$; 3: $\varphi = 90^\circ$ / Dependences of the absorption coefficient A on the dimensionless metal nanolayer thickness x_0 at $y_0 = 10$; $x_\lambda = 10$; $\rho = 0.005$; $y_p = 200$; $g_1 = g_2 = 0.2$; $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 2$; $\gamma = 0.5$. 1: $\varphi = 0^\circ$; 2: $\varphi = 45^\circ$; 3: $\varphi = 90^\circ$.

Источник: подготовлено авторами

Величина максимума поглощения зависит от ориентации оси вращения эллипсоида постоянной энергии. В случае вытянутого эллипсоида ($\gamma < 1$) в поперечном направлении (кривая 3) нанослой в 2.5 раза сильнее поглощает излучение, чем в продольном направлении (кривая 1). Подобное поведение связано с тем, что в случае, описываемом кривой 3, эффективная масса носителей заряда в направлении, параллельном вектору напряжённости электрического поля, меньше, чем в ситуации, описываемой кривой 1. Это приводит к более эффективному отклику носителей заряда на внешнее поле, т. е. к увеличению максимума поглощения.

При разных толщинах коэффициент поглощения в зависимости от угла φ ведёт себя неоднозначно: при $x_0 > 2.5$ с увеличением угла φ поглощение уменьшается, а при $x_0 < 2.5$ – возрастает. Это, возможно, связано с тем, что при больших толщинах доминирующим фактором, влияющим на характер поглощения излучения нанослоем, является формирование вторичной отражённой волны. В случае, описываемом кривой 3, носители заряда из-за малой эффективной массы сильнее откликаются на внешнее поле, большая часть энергии будет тратиться на отражённую волну. Поэтому при $x_0 > 2.5$ и повороте нанослоя на 90° поглощение снижается. В случае малых толщин доминирующим фактором будет способность носителей заряда откликаться на внешнее электрическое поле и тратить энергию на объёмное и поверхностное рассеяние. В этом случае при малой эффективной массе носителей заряда в направлении, параллельном напряжённости электрического поля (поворот на угол 90° , кривая 3) нанослой будет сильнее поглощать излучение, чем при большой эффективной массе (поворот на угол 0° , кривая 1).

Заключение

В настоящей работе получены аналитические выражения для параметров, характеризующих поляризацию отражённой и прошедшей волны и оптических коэффициентов как функций безразмерных толщины металлического нанослоя, частоты электромагнитной волны, длины свободного пробега носителей заряда, параметра анизотропии поверхности постоянной энергии, диэлектрических проницаемостей верхнего и нижнего изолирующих слоёв и параметров шероховатостей границ раздела «металл–диэлектрик». Показано, что анизотропия зонной структуры проводника существенно влияет на форму поляризации отражённой волны. Установлено, что коэффициент поглощения может значительно варьироваться при повороте наноструктуры «диэлектрик – металл – диэлектрик» относительно плоскости поляризации падающей волны. Предполагается, что полученный результат может быть использован для создания эллиптических поляризаторов на основе наноструктур «диэлектрик – металл – диэлектрик».

ЛИТЕРАТУРА

1. Этапы развития и применение нанотехнологий в перспективных отраслях промышленности / В. И. Грачёв, С. А. Смотровая, И. Т. Севрюков, Ильин В. В. Магнитогорск: Магнитогорский дом печати, 2023. 702 с.
2. Гафаров Е. Р., Ерохин А. А., Литинская Е. А. Увеличение коэффициента эллиптичности электромагнитной волны при помощи поляризатора на основе меандровой линии // Письма в журнал технической физики. 2021. Т. 47. № 9. С. 11–13. DOI: 10.21883/PJTF.2021.09.50899.18559.
3. Сопинский Н. В., Ольховик Г. П. Обобщённая нуль-эллипсометрия в схеме «поляризатор–образец–анализатор» // Оптика и спектроскопия. 2022. Т. 130. № 3. С. 377–386. DOI: 10.21883/OS.2022.03.52166.2590-21.
4. Козенков В. М., Беляев В. В., Чаусов Д. Н. Тонкоплёночные поляризаторы: свойства, технологии, основные типы // Жидкие кристаллы и их практическое использование. 2021. Т. 21. № 2. С. 5–23. DOI: 10.18083/LCAppl.2021.2.5.
5. Ансельм А. И. Введение в теорию полупроводников. М.: Наука, 1978. 616 с.
6. Лифшиц И. М., Азбель М. Я., Каганов М. И. Электронная теория металлов. М.: Наука, 1971. 415 с.
7. Особенности проявления квантового размерного эффекта в явлениях переноса в тонких плёнках висмута на подложках из слюды / Е. В. Демидов, В. М. Грабов, В. А. Комаров, А. Н. Крушельницкий, А. В. Сулов, М. В. Сулов // Физика и техника полупроводников. 2019. Т. 53. № 6. С. 736–740. DOI: 10.21883/FTP.2019.06.47718.27.
8. Эдельман В. С. Свойства электронов в висмуте // Успехи физических наук. 1977. Т. 123. № 2. С. 257–287. DOI: 10.3367/UFNr.0123.197710d.0257.
9. Kuznetsova I. A., Savenko O. V., Romanov D. N. Influence of quantum electron transport and surface scattering of charge carriers on the conductivity of nanolayer // Physics Letters A. 2022. Vol. 427. Iss. 12. Article no. 127933. DOI: 10.1016/j.physleta.2022.127933.
10. Savenko O. V., Kuznetsova I. A. The influence of charge carrier quantum transport and isoenergy surface anisotropy on the high-frequency conductivity of a semiconductor nanolayer // Proceedings of SPIE. 2022. Vol. 12157: International Conference on Micro- and Nano-Electronics. Article no. 121570W. DOI: 10.1117/12.2622544.
11. Soffer S. B. Statistical model for the size effect in electrical conduction // Journal of Applied Physics. 1967. Vol. 38. Iss. 4. P. 1710–1715. DOI: 10.1063/1.1709746.
12. Латышев А. В., Юшканов А. А. Взаимодействие электромагнитной Е-волны с металлической плёнкой, расположенной между двумя диэлектрическими средами // Оптика и спектроскопия. 2012. Т. 112. № 1. С. 140–146.

REFERENCES

1. Grachev, V. I., Smotrova, S. A., Sevryukov, I. T. & Ilyin, V. V. (2023). *Stages of development and application of nanotechnology in promising industries*. Magnitogorsk: Magnitogorsk House of Printing publ. (in Russ.).

2. Gafarov, E. R., Erokhin, A. A. & Litinskaya, E. A. (2021). Increasing the axial ratio of an electromagnetic wave with a meander-line polarizer. In: *Technical Physics Letters*. 47 (9), 11–13. DOI: 10.21883/PJTF.2021.09.50899.18559 (in Russ.).
3. Sopinsky, N. V. & Ol'khovik, G. P. (2022). Generalized null-ellipsometry in the “polarizer-sample-analyzer” scheme. In: *Optics and Spectroscopy*, 130 (3), 377–386. DOI: 10.21883/OS.2022.03.52166.2590-21 (in Russ.).
4. Kozenkov, V. M., Belyaev, V. V. & Chausov, D. N. (2021). Thin-film polarizers: properties, technologies, and main types. In: *Liquid Crystals and Their Application*, 21 (2), 5–23. DOI: 10.18083/LCAppl.2021.2.5 (in Russ.).
5. Anselm, A. I. (1978). *Introduction to the Theory of Semiconductors*. Moscow: Nauka publ. (in Russ.).
6. Lifshits, I. M., Azbel, M. Ya. & Kaganov, M. I. (1971). *Electronic Theory of Metals*. Moscow: Nauka publ. (in Russ.).
7. Demidov, E. V., Grabov, V. M., Komarov, V. A., Krushelnitsky, A. N., Suslov, A. V. & Suslov, M. V. (2019). Specific features of the quantum-size effect in transport phenomena in bismuth-thin films on mica substrates. In: *Semiconductors*, 53 (6), 727–731. DOI: 10.1134/S1063782619060046.
8. Edelman, V. S. (1977). Properties of electrons in bismuth. In: *Soviet Physics Uspekhi*, 20 (10), 819–835. DOI: 10.1070/PU1977v020n10ABEH005467.
9. Kuznetsova, I. A., Savenko, O. V. & Romanov, D. N. (2022). Influence of quantum electron transport and surface scattering of charge carriers on the conductivity of nanolayer. In: *Physics Letters A*, 427 (12), 127933. DOI: 10.1016/j.physleta.2022.127933.
10. Savenko, O. V. & Kuznetsova, I. A. (2022). The influence of charge carrier quantum transport and isoenergy surface anisotropy on the high-frequency conductivity of a semiconductor nanolayer. In: *Proceedings of SPIE*, 12157, 121570W. DOI: 10.1117/12.2622544.
11. Soffer, S. B. (1967). Statistical model for the size effect in electrical conduction. In: *Journal of Applied Physics*, 1710–1715. DOI: 10.1063/1.1709746.
12. Latyshev, A. V. & Yushkanov, A. A. (2012). Interaction of an electromagnetic e-wave with a metal film placed between two dielectric media. In: *Optics and Spectroscopy*, 112 (1), 138–144 (in Russ.).

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Кузнецова Ирина Александровна (г. Ярославль) – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой микроэлектроники и общей физики Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова;
<https://orcid.org/0000-0002-7063-1372>; e-mail: kuz@uniyar.ac.ru

Савенко Олег Владиславович (г. Ярославль) – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник Центра коллективного пользования научным оборудованием «Диагностика микро- и наноструктур» Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова;
<https://orcid.org/0000-0001-7844-1277>; e-mail: savenko.oleg92@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Irina A. Kuznetsova (Yaroslavl) – Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Departmental Head, Department of Microelectronics and General Physics, P. G. Demidov Yaroslavl State University;

<https://orcid.org/0000-0002-7063-1372>; e-mail: kuz@uniyar.ac.ru

Oleg V. Savenko (Yaroslavl) – Cand. Sci. (Phys.-Math.), Researcher, Center for Shared Use of Scientific Equipment “Diagnostics of Micro- and Nanostructures”, P. G. Demidov Yaroslavl State University;

<https://orcid.org/0000-0001-7844-1277>; e-mail: savenko.oleg92@mail.ru

Научная статья**УДК 620.171.5; 535.012.2****DOI: 10.18384/2949-5067-2026-1-62-77****АНАЛИЗ ОСОБЕННОСТЕЙ АЗИМУТАЛЬНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ
ИНТЕНСИВНОСТИ СВЕТА В МЕТОДЕ ФОТОУПРУГОСТИ****Сизов М. Н.*, Константинов М. С., Васильчикова Е. Н.***Государственный университет просвещения, г. Москва, Российская Федерация***Корреспондирующий автор, e-mail: misha-siz@mail.ru**Поступила в редакцию 24.12.2025**Принята к публикации 16.01.2026***Аннотация**

Цель. Установить связь интенсивности света, проходящего через нагруженный образец с состоянием поляризации и величиной действующей силы с учётом наведённого поляризационного дихроизма.

Процедура и методы. Проведено экспериментальное исследование азимутальной зависимости интенсивности монохроматического света, проходящего через прозрачный образец, подвергнутый одноосному сжатию. Построены и проанализированы теоретические модели, учитывающие возможное отклонение оптической оси образца от вертикали и наведённый поляризационный дихроизм.

Результаты. На основе изучения азимутальных зависимостей интенсивности света при различных нагрузках определено значение коэффициента фотоупругости исследуемого образца и коэффициента поглощения, обусловленного наведённой анизотропией.

Теоретическая и практическая значимость. Проведённый анализ показал необходимость учёта, помимо двулучепреломления, обусловленного приложенной к образцу нагрузки как наведённого поляризационного дихроизма, так и возможного отклонения оптической оси, для полного анализа азимутальных зависимостей интенсивности света.

Ключевые слова: интенсивность света, матрицы Джонса, оптическая анизотропия, оптическая ось, состояние поляризации света, фотоупругость

Для цитирования:

Сизов М. Н., Константинов М. С., Васильчикова Е. Н. Анализ особенностей азимутальных зависимостей интенсивности света в методе фотоупругости // Вестник Государственного университета просвещения. Серия: Физика-Математика. 2026. № 1. С. 62–77. <https://doi.org/10.18384/2949-5067-2026-1-62-77>

Original research article**ANALYSIS OF THE FEATURES OF AZIMUTH LIGHT INTENSITY
DEPENDENCIES IN THE PHOTOELASTICITY METHOD**

M. Sizov*, M. Konstantinov, E. Vasilchikova

Federal State University of Education, Moscow, Russian Federation

** Corresponding author, e-mail: misha-siz@mail.ru*

Received by the editorial office 24.12.2025

Accepted for publication 16.01.2026

Abstract

Aim. To establish the relationship between the intensity of light passing through a loaded sample and the state of polarization and the magnitude of the acting force, taking into account induced polarization dichroism.

Methodology. An experimental study of the azimuthal dependence of the intensity of monochromatic light passing through a transparent sample subjected to uniaxial compression was conducted. Theoretical models were constructed and analyzed, accounting for possible deviation of the sample's optical axis from the vertical and induced polarization dichroism.

Results. Based on the study of the azimuthal dependences of light intensity under various loads, the value of the photoelasticity coefficient of the studied sample and the absorption coefficient due to induced anisotropy were determined.

Research implications. The analysis carried out showed the need to take into account, in addition to the birefringence caused by the load applied to the sample, both induced polarization dichroism and the possible deviation of the optical axis, for a complete analysis of the azimuthal dependences of the light intensity.

Keywords: light intensity, Jones matrices, optical anisotropy, optical axis, photoelasticity

For citation:

Sizov, M. N., Konstantinov, M. S. & Vasilchikova, E. N. (2026). Analysis of the features of azimuth light intensity dependencies in the photoelasticity method. In: *Bulletin of the State University of Education*, 1, 62–77. <https://doi.org/10.18384/2949-5067-2026-1-62-77>

Введение

Явление фотоупругости представляет собой пьезооптический эффект, являющийся следствием зависимости диэлектрической проницаемости вещества от деформации [1]. Суть его состоит в том, что изначально изотропные прозрачные материалы под действием внешних механических воздействий приобретают свойства, присущие двулучепреломляющим оптически анизотропным кристаллам. Классический поляризационно-оптический метод исследования напряжённого состояния материалов находит широкое применение как в механике [2–4] и проектировании [5; 6], так и в горном деле, металлургии, медицине [7; 8]. Реализуются два различных метода исследования напряжённого состояния: это анализ состояния эллиптически поляризованного света, полученного на выходе из исследуемого образца; и анализ интерференционной картины в белом или монохроматическом свете [9]. На протяжении долгого времени оба они были и остаются важным инструментом в инженерной практике и научных исследованиях благодаря своей наглядности, точности и превосходству над другими методами по надёжности, охвату и практичности. Их актуальность сохраняется в связи с развитием новых материалов, цифровизацией технологий и методов анализа и

обработки результатов [5; 10; 11]. Авторами было показано, как по изменению состояния поляризации света, проходящего через нагруженный образец, можно оценить постоянную фотоупругости [9]. Однако после проведения последующих исследований на разных образцах было обнаружено систематическое расхождение между предсказаниями базовой теоретической модели и экспериментальными данными. С целью устранения этих противоречий нами предлагается модифицированная модель, включающая введение эмпирических коэффициентов $\Delta\theta$ и μ_0 , физический смысл которых заключается в отклонении оптической оси поляризационной системы и учёте поглощения света при поляризационном дихроизме образца, соответственно. Научная новизна работы заключается в предложенном уточнении, позволяющим адекватно описать наблюдаемые явления, сохраняя простоту и наглядность исходной теоретической концепции.

Измерение интенсивности света на выходе из плоского полярископа

Известно, что пластина из органического стекла (рис. 1), подвергнутая одноосному сжатию, ведёт себя как фазовая пластинка с оптическими осями, параллельными поверхности образца. В соответствии с законами фотоупругости направление оптической оси в любой точке пластины совпадает с направлением напряжения в данной точке.

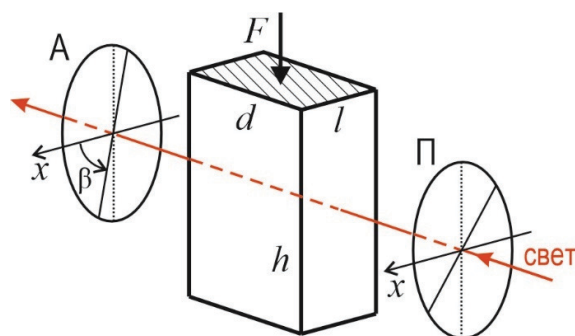


Рис. 1. / Fig. 1. Принципиальная схема экспериментальной установки (плоский полярископ) / Schematic diagram of the experimental setup (flat polariscope)

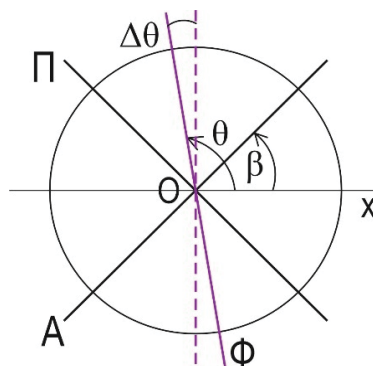


Рис. 2. / Fig. 2. Взаимное расположение главных направлений поляризаторов и оптической оси фазовой пластины со стороны приёмника (навстречу лучу) / The relative position of the main directions of the polarizers and the optical axis of the phase plate from the receiver side (towards the beam)

Источник: данные авторов

Наведённая анизотропия приводит к возникновению разности фаз для волн, поляризованных параллельно и перпендикулярно оптической оси:

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} (n_o - n_e) d, \quad (1)$$

где d – толщина образца, λ – длина волны излучения, n_o и n_e – показатели преломления обыкновенной и необыкновенной волн. Установлено, что наведённая анизотропия Δn прямо пропорциональна напряжению [1]:

$$\Delta n = n_o - n_e = C \cdot \frac{F}{d \cdot l}, \quad (2)$$

где F – приложенная к образцу сила, $d \cdot l$ – площадь поперечного сечения образца, C – коэффициент фотоупругости. Разность фаз принимает вид:

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} C \cdot \frac{F}{l}. \quad (3)$$

Схема экспериментальной установки представлена на рис. 1. Источник света – лазер полупроводниковый (с длиной волны $\lambda = 650$ нм). Падающая волна поляризована в вертикальной плоскости. Свет проходит последовательно через поляризатор, ориентированный под постоянным углом $-\pi/4$ к оси Ox (рис. 2), нагруженный образец и анализатор, азимут которого β (относительно горизонтальной оси Ox) изменяется в пределах $-\pi/2 \leq \beta \leq \pi/2$. Интенсивность света, выходящего из анализатора, измеряется люксметром. Объектом исследования являлись образцы из полиметилметакрилата (органическое стекло).

На рис. 3 представлены экспериментальные зависимости относительной интенсивности света от азимута β на выходе из анализатора при различных значениях нагрузки F .

Анализ данных зависимостей позволяет оценить коэффициент фотоупругости C . Это можно сделать различными способами. Например, можно оценить экспериментально значение силы, при которой интенсивность света не будет зависеть от угла β . Как следует из теории, выходящий из образца свет при этом будет циркулярно поляризован, следовательно разность, приобретённая за счёт наведённой анизотропии, будет $\delta = \pi/2$. Тогда из формулы (3) получим значение коэффициента фотоупругости C . Этот способ даёт приблизительное значение C , так как требует достаточно точного определения значения силы, с одной стороны, с другой стороны – изменения интенсивности в этой области слабо зависят от азимута β в достаточно широком диапазоне нагрузок, что затрудняет идентификацию нагрузки. Другой способ основан на зависимости от разности фаз (то есть силы F) максимальных и минимальных значений интенсивности.

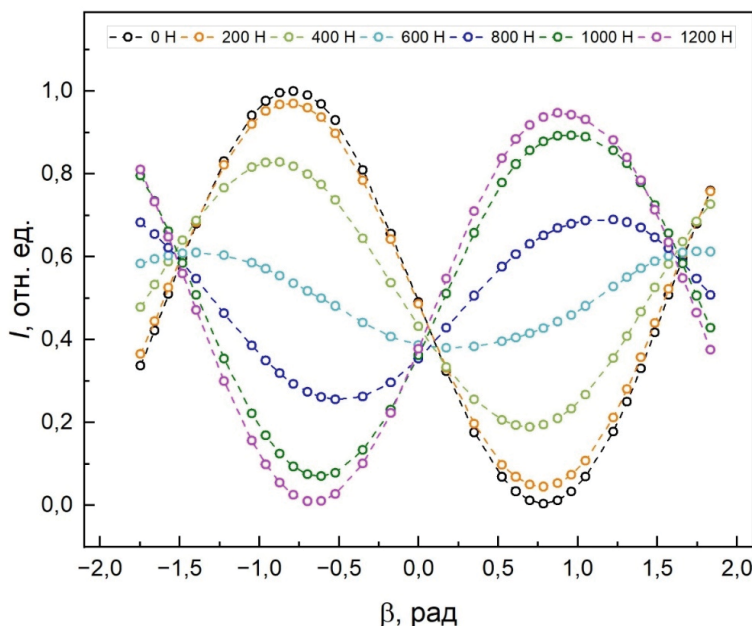


Рис. 3. / Fig. 3. Азимутальные зависимости относительной интенсивности света на выходе из анализатора при различных значениях нагрузки F / Azimuthal dependencies of the relative light intensity at the analyzer output for different load values F

Источник: данные авторов

На рис. 4 представлен график зависимости $\arctg(\sqrt{I_{\min}/I_{\max}})$ от величины нагрузки F .

Линейная аппроксимация даёт значение коэффициента фотоупругости [9] $C = (2,7 \pm 0,1) \cdot 10^{-12} \frac{\text{М}^2}{\text{Н}}$.

Обсуждение результатов эксперимента

Теоретический анализ интенсивности света на выходе из анализатора проводится в рамках формализма матриц Джонса. Этот метод позволяет найти вектор Максвелла на выходе $[E_{\text{вых}}]$ через вектор Максвелла на входе в систему $[E_{\text{пад}}]$ по правилу [12]:

$$[E_{\text{вых}}] = [J_A] \times [J_{\text{пл}}] \times [J_{\text{п}}] \times [E_{\text{пад}}]. \quad (4)$$

Здесь использованы следующие обозначения. Вектор Максвелла вертикально поляризованного света от лазера:

$$[E_{\text{пад}}] = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

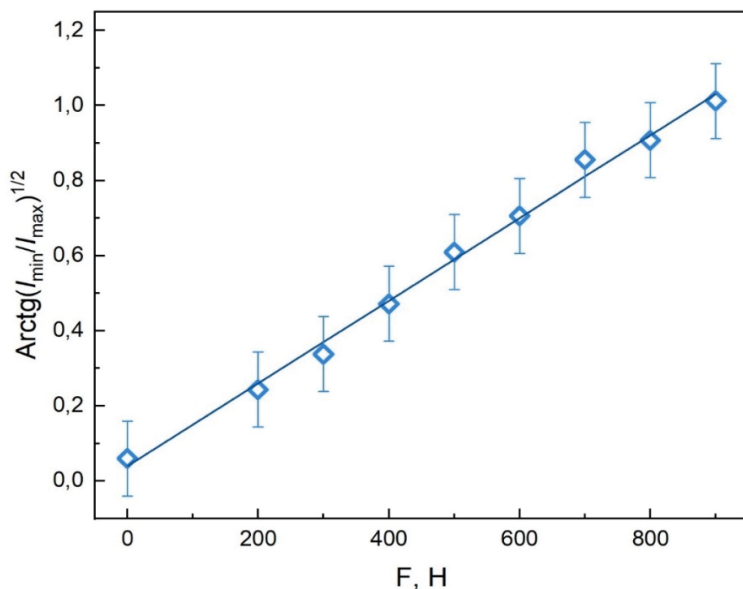


Рис. 4. / Fig. 4. График зависимости экстремальных значений интенсивности от величины нагрузки на образец / Graph of the dependence of extreme intensity values on the load on the sample

Источник: данные авторов

$[U_{\Pi}]$ – матрица Джонса поляризатора, ориентированного под углом $-\pi/4$ к оси Ox (рис. 3):

$$[U_{\Pi}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

$[U_{\text{ПЛ}}]$ – матрица Джонса фазовой пластины с поглощением и разностью фаз δ , оптическая ось которой составляет угол θ с осью Ox (рис. 3):

$$[U_{\text{ПЛ}}] = \begin{bmatrix} C_1^2 + \rho S_1^2 e^{-i\delta} & C_1 S_1 (1 - \rho e^{-i\delta}) \\ C_1 S_1 (1 - \rho e^{-i\delta}) & \rho C_1^2 e^{-i\delta} + S_1^2 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

где $C_1 = \cos \theta$; $S_1 = \sin \theta$.

Считаем напряжённый образец линейно-дихроичной средой с коэффициентом ρ [13]:

$$\rho = e^{-\mu} = e^{\mathbb{D}\mathbb{P}} \left\{ -\frac{2\pi}{\lambda} d(\kappa_e - \kappa_o) \right\}, \quad (8)$$

где λ – длина волны, d – толщина пластины в направлении распространения света (рис. 1), κ_e, κ_o – коэффициенты поглощения для волн, поляризованных

параллельно оптической оси (вертикально) и перпендикулярно ей (горизонтально). Оптические оси двулучепреломления и дихроизма совпадают.

$[J_A]$ – матрица Джонса анализатора с азимутом β :

$$[J_A] = \begin{bmatrix} \cos^2 \beta & \sin \beta \cos \beta \\ \sin \beta \cos \beta & \sin^2 \beta \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Из (4)–(9) определяется $[E_{\text{вых}}]$.

Вектор Максвелла на выходе из поляризатора:

$$[E_{\text{выхП}}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Вектор Максвелла на выходе из фазовой пластины с поглощением имеет вид:

$$[E_{\text{пл}}] = [J_{\text{пл}}] \times \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \end{bmatrix}, \quad (11)$$

где

$$J_1 = -C_1^2 - \rho S_1^2 e^{-i\delta} + C_1 S_1 (1 - \rho e^{-i\delta}) \quad (11a)$$

$$J_2 = -C_1 S_1 (1 - \rho e^{-i\delta}) + \rho C_1^2 e^{-i\delta} + S_1^2 \quad (11б)$$

Вектор Максвелла на выходе из анализатора с азимутом β :

$$[E_A] = [J_A] \times [E_{\text{пл}}] = \begin{bmatrix} \cos^2 \beta & \sin \beta \cos \beta \\ \sin \beta \cos \beta & \sin^2 \beta \end{bmatrix} \times \frac{1}{2} \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} E_{A1} \\ E_{A2} \end{bmatrix}, \quad (12)$$

где

$$E_{A1} = J_1 \cos^2 \beta + J_2 \sin \beta \cos \beta, \quad (12a)$$

$$E_{A2} = J_1 \sin \beta \cos \beta + J_2 \sin^2 \beta. \quad (12б)$$

Интенсивность на выходе из анализатора:

$$I_A = \frac{1}{2} [E_{A1}^* \ E_{A2}^*] \times \frac{1}{2} \begin{bmatrix} E_{A1} \\ E_{A2} \end{bmatrix}. \quad (13)$$

$E_{A1}^* \ E_{A2}^*$ – комплексно-сопряжённые компоненты вектора.

После вычислений величин E_{A1} и E_{A2} и их комплексно-сопряжённых значений в соответствии с (11a, б), (12a, б) получим значение интенсивности света I_A на выходе из анализатора:

$$\frac{I_A}{I_\Pi} = \frac{1}{2} (K_1 \cos^2 \beta + K_2 \sin^2 \beta + K_{12} \sin \beta \cos \beta), \quad (14)$$

где

$$K_1 = C_1^4 + \rho^2 S_1^4 + C_1^2 S_1^2 (1 + \rho^2) - \\ - 2C_1 S_1 [C_1^2 (1 - \rho \cos \delta) + S_1^2 (\cos \delta - \rho)], \quad (14a)$$

$$K_2 = S_1^4 + \rho^2 C_1^4 + C_1^2 S_1^2 (1 + \rho^2) - \\ - 2\rho C_1^3 S_1 (\cos \delta - \rho) - 2C_1 S_1^3 (1 - \rho \cos \delta), \quad (14б)$$

$$K_{12} = -2\rho \cos \delta (C_1^2 - S_1^2)^2 - \\ - 4C_1^2 S_1^2 (1 + \rho^2) + 2C_1 S_1 (1 - \rho^2), \quad (14в)$$

$$C_1 = \cos \theta; \quad S_1 = \sin \theta.$$

I_Π – интенсивность света после поляризатора.

Если оптическая ось образца ориентирована строго вертикально, $\theta = \pi/2$. В случае отклонения оптической оси от вертикали (рис. 2) $\theta = \frac{\pi}{2} \pm \frac{\Delta\theta}{2}$.

Так, оптическая анизотропия является наведённой, и её величина зависит от приложенной нагрузки (закон фотоупругости (2)), при этом можно считать и поляризационный дихроизм также наведённым и зависящим линейно от напряжения σ . Тогда показатель экспоненты в формуле (8) можно записать в виде:

$$\mu = \frac{2\pi}{\lambda} d(\kappa_e - \kappa_o) = \frac{2\pi}{\lambda} d \cdot \mu_0 \cdot \sigma = \frac{2\pi}{\lambda l} \cdot \mu_0 \cdot F, \quad (15)$$

где μ_0 – коэффициент наведённого дихроизма, обусловленного нагрузкой (по аналогии с коэффициентом фотоупругости).

Рассмотрим частные случаи формулы (14).

Модель 1. Фазовая пластина ориентирована строго вертикально и поглощение отсутствует ($\Delta\theta = 0$; $\mu = 0$).

$$C_1 = \cos \frac{\pi}{2} = 0; \quad S_1 = \sin \frac{\pi}{2} = 1.$$

Коэффициенты в уравнении (14) принимают значения:

$$K_1 = 1; \quad K_2 = 1; \quad K_{12} = -2 \cos \delta.$$

Уравнение (14) имеет вид:

$$\frac{I_A}{I_\Pi} = \frac{1}{2} (1 - \cos \delta \sin 2\beta). \quad (16)$$

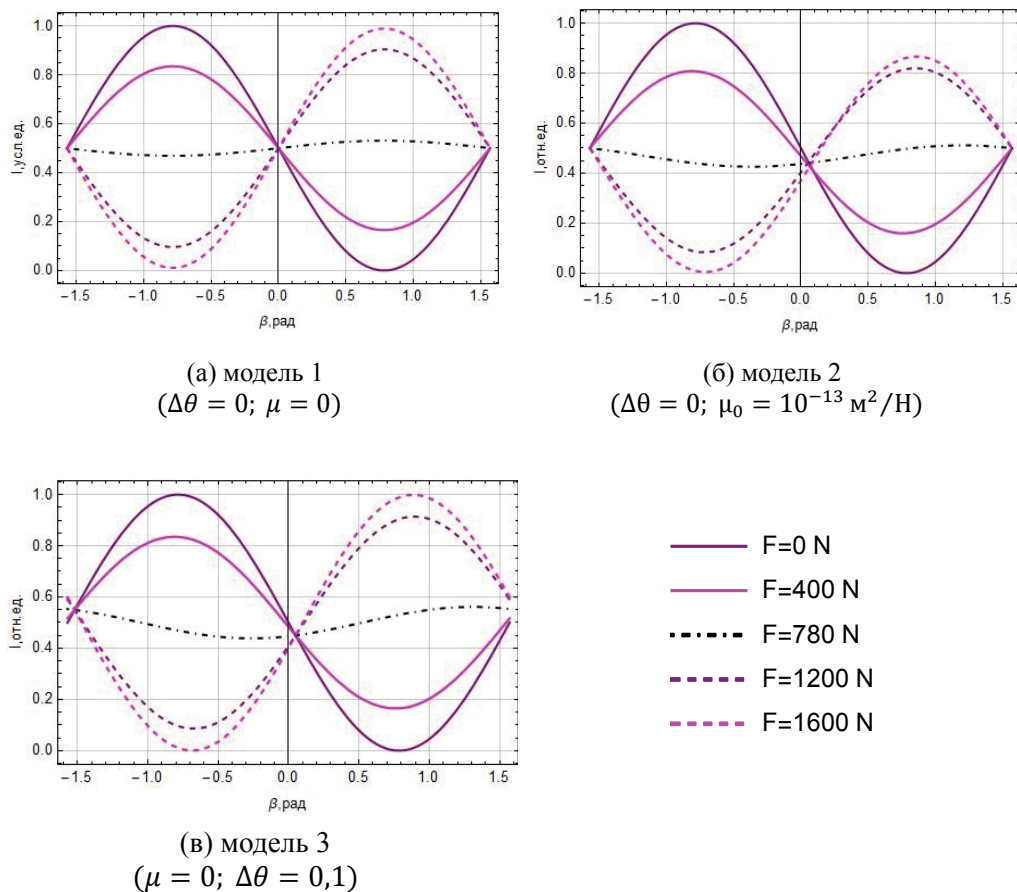


Рис. 5. /Fig. 5 Теоретические азимутальные зависимости относительной интенсивности света, проходящего через нагруженный образец при различных значениях нагрузки / Theoretical azimuthal dependencies of the relative intensity of light passing through a loaded sample at different load values

Источник: данные авторов

Зависимость относительной интенсивности от азимута анализатора, построенная в соответствии с (16) при $C = 2,6 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2/\text{Н}$ показана на рис. 5(а).

Модель 2. Фазовая пластина по-прежнему ориентирована вертикально, но имеется поглощение ($\Delta\theta = 0$; $\mu \neq 0$). Коэффициенты в уравнении (14) имеют значения:

$$K_1 = \rho^2 = e^{-2\mu}; \quad K_2 = 1; \quad K_{12} = -2\rho \cos \delta = -2e^{-\mu} \cos \delta.$$

$$\frac{I_A}{I_{\Pi}} = \frac{1}{2}(e^{-2\mu} \cos^2 \beta + \sin^2 \beta - e^{-\mu} \cos \delta \sin 2\beta). \quad (17)$$

Порядок величины коэффициента μ_0 (15) можно оценить из сравнения экспериментальных значений интенсивностей волн, поляризованных в

вертикальном ($\beta = \pm \pi/2$) и горизонтальном направлениях ($\beta = 0$) при различных нагрузках. Это даёт $\mu_0 \sim 10^{-13} \text{ м}^2/\text{Н}$. Поэтому при $\lambda = 650 \text{ нм}$ и $l = 12 \text{ мм}$, как следует из (15), $\mu \ll 1$. При этом условии формула (17) принимает вид:

$$\frac{I_A}{I_{\Pi}} = \frac{1}{2}(1 - 2\mu \cos^2 \beta - (1 - \mu) \cos \delta \sin 2\beta). \quad (17a)$$

Азимутальная зависимость относительной интенсивности в соответствии с (17a) при $\mu_0 = 10^{-13} \text{ м}^2/\text{Н}$ представлена на рис. 5б.

Модель 3. Оптическая ось фазовой пластины отклонена от вертикали на малый угол (рис. 2) $\Delta\theta/2$; $\mu = 0$; $\Delta\theta \ll 1$

$$\theta = \frac{\pi}{2} + \frac{\Delta\theta}{2}.$$

$$K_1 \cong 1 - \Delta\theta(1 - \cos \delta), \quad (18a)$$

$$K_2 \cong 1 + \Delta\theta(1 - \cos \delta), \quad (18б)$$

$$K_{12} \cong -2 \cos \delta. \quad (18в)$$

Азимутальная зависимость относительной интенсивности в этой модели:

$$\frac{I_A}{I_{\Pi}} = \frac{1}{2}(1 - \Delta\theta(1 - \cos \delta) \cos 2\beta - \cos \delta \sin 2\beta). \quad (19)$$

График азимутальной зависимости в соответствии с (19) показан на рис. 5(в) при $\Delta\theta = 0,1$.

Анализ рассмотренных теоретических моделей приводит к выводу о необходимости учёта как наведённого поляризационного дихроизма, так и отклонения оптической оси, помимо двулучепреломления, обусловленного приложенной к образцу нагрузки, для полного анализа азимутальных зависимостей интенсивности.

Коэффициенты общего уравнения (14) при $\mu \ll 1$ и $\Delta\theta \ll 1$ можно представить в виде:

$$K_1 \cong (1 - 2\mu) - \Delta\theta(1 - \cos \delta), \quad (20a)$$

$$K_2 \cong 1 + \Delta\theta(1 - \cos \delta), \quad (20б)$$

$$K_{12} \cong -2(1 - \mu) \cos \delta \quad (20в)$$

Относительная интенсивность (14):

$$I_{\text{отн}} = \frac{I_A}{I_{\Pi}} = \frac{1}{2}(1 - 2\mu \cos^2 \beta - \Delta\theta(1 - \cos \delta) \cos 2\beta - (1 - \mu) \cos \delta \sin 2\beta) \quad (21)$$

Из условия экстремумов функции можно найти значения азимутальных углов β анализатора, при которых интенсивности принимают максимальные и минимальные значения:

$$\beta_{min} = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{(1 - \mu) \cos \delta}{\mu + \Delta\theta(1 - \cos \delta)} \right) \quad (22)$$

$$\beta_{max} = \frac{1}{2} \left(\tan^{-1} \left(\frac{(1 - \mu) \cos \delta}{\mu + \Delta\theta(1 - \cos \delta)} \right) - \pi \right) \quad (23)$$

Из анализа формул следует, что значения углов зависят от нагрузки (входит в разность фаз δ), от параметра $\mu(F)$, характеризующего поляризационный дихроизм, и от $\Delta\theta$ (отклонение оптической оси образца от вертикали).

Заметим, что при $\Delta\theta = 0$; $\mu = 0$ выражения (22) и (23) дают значения:

$$\beta_{min} = \frac{\pi}{4}; \quad \beta_{max} = -\frac{\pi}{4}$$

Это видно и на графике (рис. 6), причём значения углов, при которых наблюдаются экстремумы интенсивности, не зависят от нагрузки. Однако и теория, и эксперимент (рис. 3) показывают, что углы β_{min} ; β_{max} зависят от нагрузки.

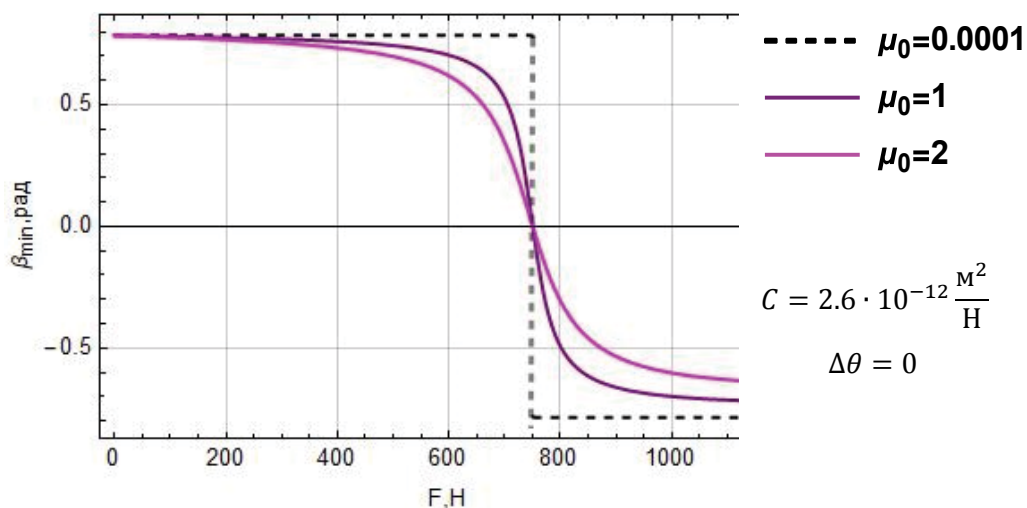


Рис. 6 / Fig. 6. Теоретические зависимости β_{min} от нагрузки / Theoretical dependence of β_{min} on load

Источник: данные автора

Общая формула (21) использовалась для аппроксимации экспериментальных азимутальных зависимостей интенсивности света, проходящего через образец, подвергнутый нагрузке (рис. 7).

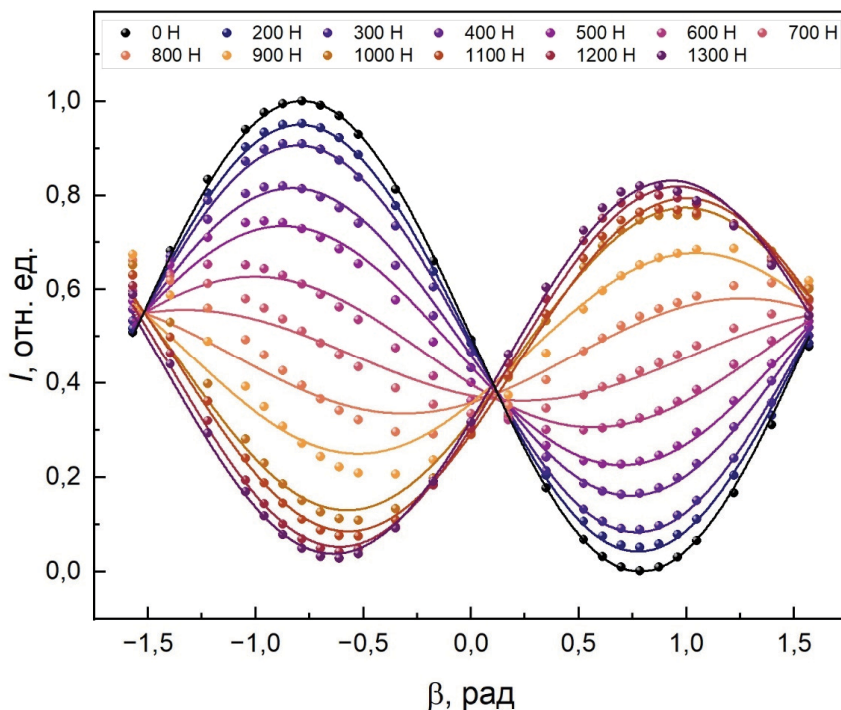


Рис. 7 / Fig. 7. Аппроксимация экспериментальных азимутальных зависимостей интенсивности света в соответствии с (21) / Approximation of experimental azimuthal dependencies of light intensity according to (21)

Источник: данные автора

На рис. 8 показана экспериментальная зависимость азимутального угла β_{min} , при котором наблюдается минимум интенсивности света, выходящего из системы, от величины нагрузки.

Экспериментальные значения находятся в удовлетворительном согласии с теорией. Аппроксимация проводилась в соответствии с формулой (22).

Таким образом, в результате аппроксимации экспериментальных азимутальных зависимостей интенсивности при фиксированном значении фотоупругого коэффициента $C = 2.6 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2/\text{Н}$ получены значения коэффициента поляризационного дихроизма $\mu_0 = (1,1 \pm 0,2) \cdot 10^{-13} \text{ м}^2/\text{Н}$ и угла отклонения оптической оси образца $\Delta\theta = 0,1$.

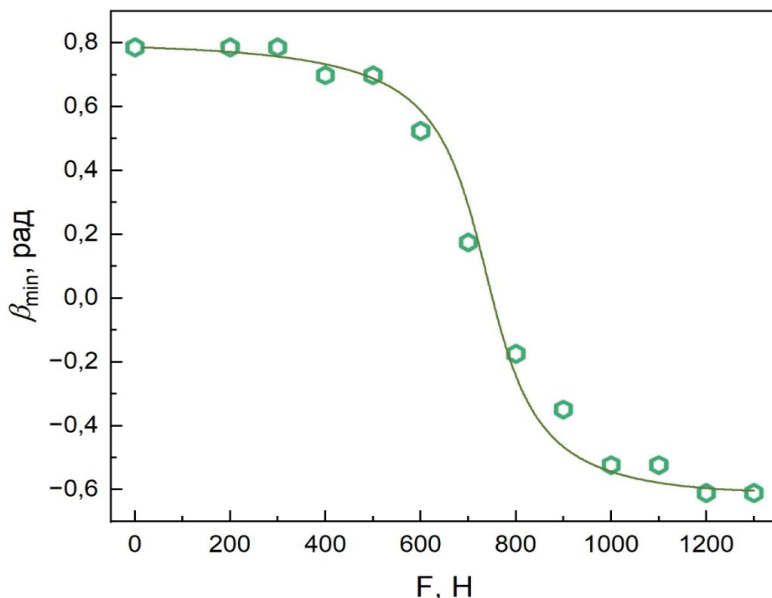


Рис. 8 / Fig. 8. Зависимость азимутального угла, соответствующего минимальной интенсивности света, от величины нагрузки / Dependence of the azimuthal angle corresponding to the minimum light intensity on the load value

Источник: данные автора

Заключение

В ходе выполнения экспериментального исследования установлено влияние ряда факторов на величину интенсивности поляризованного света, проходящего через нагруженный образец. К их числу относится, прежде всего, возможное отклонение оптической оси образца от направления приложенной силы. Это обусловлено целым рядом причин: непараллельность граней образца может быть причиной сдвиговых напряжений, которые, в свою очередь, приводят к отклонению оптической оси; конструкция и способы крепления пресса также могут приводить к разориентации оптической оси. Установлен эмпирический коэффициент μ_0 , отвечающий за поляризационный дихроизм, обусловленный внешней нагрузкой на образец. Экспериментально полученные результаты находятся в удовлетворительном согласии с предсказанными соответствующими теоретическими моделями.

Разработанные методики имеют практическую ценность, поскольку позволяют перейти на качественно новый уровень измерений интенсивности света в поляризационно-оптическом методе исследования напряжённого состояния.

Простота и надёжность используемой экспериментальной установки позволяет использовать её не только в научных целях, но и для выполнения лабораторных работ в рамках освоения дисциплин «Оптика», «Общая и экспериментальная физика» студентами различных направлений подготовки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фрохт М. М. Фотоупругость: Поляризационно-оптический метод исследования напряжений: в 2 т. Т. 1. М., Л.: Гостехиздат, 1948-1950. 432 с.
2. Партон В. З. Механика разрушения: От теории к практике. М.: Наука, 1990. 240 с.
3. Residual stresses in glass after molding and its influence on optical properties / A. Yi, B. Tao, F. Klocke, O. Dambon, F. Wang // *Procedia Engineering*. 2011. Vol. 19. No. 2. P. 402–406. DOI:10.1016/j.proeng.2011.11.132.
4. Research on stress through photoelastic experiment and finite element method considering sliding wear / T. Yang, Y. Wei, J. Han, Z. Chen // *Journal of Measurements in Engineering*. 2024. Vol. 12. No. 2. P. 324–332. DOI: 10.21595/jme.2024.23791.
5. Степанова Л. В. Цифровая фотоупругость и её применение для задач механики разрушения: учебное пособие обучающихся по основным образовательным программам высшего образования по направлению подготовки 01.04.03 Механика и математическое моделирование и по специальности 01.05.01 Фундаментальная математика и механика. Самара: Издательство Самарского университета. 2021. 66 с.
6. Vargas-Isaza C. A., Posada J., Briñez-de León J. C. Analysis of the Stress Field in Photoelasticity Used to Evaluate the Residual Stresses of a Plastic Injection-Molded Part // *Polymers*. 2023. No. 15 (16). Article ID 3377. DOI: 10.3390/polym15163377.
7. Biomechanical behavior of tilted abutment after fixed partial denture restoration of CAD /CAM materials / T. Zhu, J. Chen, Y. Xu, Z. Zhu, J. Wang et al. // *BMC Oral Health*. 2024. Vol. 24. Article no. 1128. DOI: 10.1186/s12903-024-04890-7.
8. Sobczak M., Asejczyk M., Wilczyński M. The effect of pupil size on the measurement of corneal birefringence properties: preliminary study // *Scientific Reports*. 2023. Vol. 13. Article no. 17439 (2023). DOI: 10.1038/s41598-023-44706-2.
9. Сизов М. Н., Васильчикова Е. Н., Константинов М. С. Исследование искусственной оптической анизотропии, обусловленной механическим воздействием, поляризационно-оптическим методом // Молодёжная петербургская школа-конференция инженеров-педагогов: сборник материалов научной конференции (Санкт-Петербург, 22–23 апреля 2025 года). СПб.: ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого», 2025. С. 73–75.
10. Кесаев В. В. Метод изоплах в неполяризованном свете // *Письма в Журнал технической физики*. 2022. Т. 48. № 22. С. 43–46. DOI: 10.21883/PJTF.2022.22.53807. 19360.
11. Лихачев А. В., Табанюхова М. В. Новый алгоритм обработки данных метода фотоупругости // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2022. № 79. С. 100–110. DOI: 10.17223/19988621/79/9.
12. Джерард А., Бёрч Дж. М. Введение в матричную оптику / пер. с англ. А. И. Божкова и Д. В. Власова; под ред. В. В. Коробкина. М.: Мир, 1978. 342 с.
13. Аззам Р., Башара Н. Эллипсометрия и поляризованный свет / пер. с англ. под ред. А. В. Ржанова и К. К. Свиташева. М.: Мир, 1981. 583 с.

REFERENCES

1. Frokht, M. M. (1948–1950). Photoelasticity: The polarization-optical method of stress research: in 2 volumes. Vol. 1. Moscow, Leningrad: Gostekhizdat publ. (in Russ.).
2. Parton, V. Z. (1990). Fracture mechanics: from theory to practice. Moscow: Nauka publ. (in Russ.).
3. Yi, A., Tao, B., Klocke, F., Dambon, O. & Wang, F. (2011). Residual stresses in glass after molding and its influence on optical properties. In: Procedia Engineering, 19 (2), 402–406. DOI: 10.1016/j.proeng.2011.11.132.
4. Yang, T., Wei, Y., Han, J. & Chen, Z. (2024). Research on stress through photoelastic experiment and finite element method considering sliding wear. In: Journal of Measurements in Engineering, 12 (2), 324–332. DOI:10.21595/jme.2024.23791.
5. Stepanova, L. V. (2021). Digital photoelasticity and its application to fracture mechanics: a textbook for students of the main educational programs of higher education in the field of 01.04.03 mechanics and mathematical modeling and in the speciality 01.05.01 fundamental mathematics and mechanics. Samara: Samara University publ. (in Russ.).
6. Vargas-Isaza, C. A., Posada, J. & Briñez-de León, J. C. (2023). Analysis of the Stress Field in Photoelasticity Used to Evaluate the Residual Stresses of a Plastic Injection-Molded Part. In: Polymers, 15 (16), 3377. DOI: 10.3390/polym15163377.
7. Zhu, T., Chen, J., Xu, Y., Zhu, Z., Wang, J. et al. (2024). Biomechanical behavior of tilted abutment after fixed partial denture restoration of CAD /CAM materials. In: BMC Oral Health, 24, 1128. DOI:10.1186/s12903-024-04890-7.
8. Sobczak, M., Asejczyk, M. & Wilczyński, M. (2023). The effect of pupil size on the measurement of corneal birefringence properties: preliminary study. In: Scientific Reports, 13, 17439 (2023). DOI:10.1038/s41598-023-44706-2.
9. Sizov, M. N., Vasilchikova, E. N. & Konstantinov, M. S. (2025). Study of artificial optical anisotropy caused by mechanical action using the polarization-optical method. In: Youth St. Petersburg school-conference of engineers and teachers: collection of materials of the scientific conference (St. Petersburg, April 22–23, 2025). St. Petersburg.: Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University publ., pp. 73–75 (in Russ.).
10. Kesaev, V. V. (2022). Isopachic method with unpolarized light. In: Technical Physics Letters, 48 (22), 43–46. DOI: 10.21883/PJTF.2022.22.53807.19360 (in Russ.).
11. Likhachev, A. V. & Tabanyukhova, M. V. (2022). A new processing algorithm for photoelasticity method data. In: Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics, 79, 100–110 DOI: 10.17223/19988621/79/9 (in Russ.).
12. Gerard, A. & Birch, J. M. (1978). Introduction to Matrix Optics. Moscow: Mir publ. (in Russ.).
13. Azzam, R. & Bashara, N. (1981). Ellipsometry and Polarized Light. Moscow: Mir publ. (in Russ.).

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Сизов Михаил Николаевич (г. Руза, Московская область) – инженер кафедры фундаментальной физики и нанотехнологии Государственного университета просвещения;
e-mail: misha-siz@mail.ru

Константинов Михаил Сергеевич (г. Дедовск, Московская область) – заведующий учебной лабораторией кафедры фундаментальной физики и нанотехнологии Государственного университета просвещения
e-mail: jawa-m.k.s.@mail.ru

Васильчикова Елена Николаевна (г. Люберцы, Московская область) – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры фундаментальной физики и нанотехнологии Государственного университета просвещения;
<https://orcid.org/0000-0003-3311-1228>; e-mail: en.vasilchikova@guppros.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Mikhail N. Sizov (Ruza, Moscow Region) – engineer, Department of Fundamental Physics and Nanotechnology, Federal State University of Education;
e-mail: misha-siz@mail.ru

Mikhail S. Konstantinov (Dedovsk, Moscow Region) – Laboratory Head, Educational Laboratory, Department of Fundamental Physics and Nanotechnology, Federal State University of Education;
e-mail: jawa-m.k.s.@mail.ru

Elena N. Vasilchikova (Lyubertsy, Moscow region) – Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Prof., Department of Fundamental Physics and Nanotechnology, Federal State University of Education;
<https://orcid.org/0000-0003-3311-1228>; e-mail: en.vasilchikova@guppros.ru

Научная статья**УДК 537.226, 544.22, 548.4****DOI: 10.18384/2949-5067-2026-1-78-91****ЭЛЕКТРОТРАНСПОРТНЫЕ СВОЙСТВА И РЕЛАКСАЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ
В СИСТЕМЕ $\text{CdF}_2\text{-PbF}_2$** **Юсим В. А.¹⁻³, Курилов А. Д.^{1*}, Саркисов С. Э.², Кравцов Д. С.¹,
Кулешова Ю. Д.¹**¹ Государственный университет просвещения, г. Москва, Российская Федерация² Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт», г. Москва,
Российская Федерация³ Институт общей физики им. А. М. Прохорова Российской академии наук, г. Москва,
Российская Федерация

* Корреспондирующий автор, e-mail: ad.kurilov@guppros.ru

Поступила в редакцию 16.12.2025

Принята к публикации 25.12.2025

Аннотация

Цель. Провести комплексное исследование электротранспортных свойств и релаксационных процессов в кристаллах твёрдого раствора $\text{CdF}_2\text{-PbF}_2$, установить взаимосвязь между их структурой, термодинамическим поведением и механизмами ионного переноса.

Процедура и методы. Применены методы рентгенофазового анализа, дифференциальной сканирующей калориметрии и диэлектрической спектроскопии в широком частотно-температурном диапазоне (20 Гц – 10 МГц, -60...+100°C). Состав определён по закону Вегарда, релаксационные процессы проанализированы с использованием модели Гавриляк-Негами.

Результаты. Установлено, что синтезированные кристаллы соответствуют составу $\text{Cd}_{0.326}\text{Pb}_{0.674}\text{F}_2$ и имеют структуру флюорита. Термоанализ позволил обнаружить диффузный суперионный переход в области ~320°C с выраженным гистерезисом. Диэлектрическая спектроскопия выявила объёмный релаксационный процесс, связанный с прыжками ионов F⁻. Энергии активации времени релаксации и проводимости составили ~0,20 эВ и ~0,26 эВ соответственно, что указывает на значительный вклад коррелированного движения ионов.

Теоретическая и практическая значимость. Установлена взаимосвязь структурных параметров, термодинамики фазового перехода и кинетики ионного транспорта в системе $\text{CdF}_2\text{-PbF}_2$. Результаты важны для понимания природы суперионной проводимости во фторидных системах и могут быть использованы при разработке новых твердотельных электролитов.

Ключевые слова: фториды, твёрдый раствор, суперионный переход, диэлектрическая спектроскопия, ионная проводимость, релаксационные процессы

Благодарности и источники финансирования. Работа выполнена в рамках реализации научно-исследовательского проекта-победителя конкурса на получение гранта федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Государственный университет просвещения» в 2025 году. Мы также выражаем благо-

дарность педагогическому технопарку «Кванториум» имени И. В. Курчатова Государственного университета просвещения за предоставленную возможность использования оборудования, что оказалось крайне важным для проведения данного исследования.

Для цитирования:

Электротранспортные свойства и релаксационные процессы в системе $\text{CdF}_2\text{-PbF}_2$ / В. А. Юсим, А. Д. Курилов, С. Э. Саркисов, Д. С. Кравцов, Ю. Д. Кулешова // Вестник Государственного университета просвещения. Серия: Физика-Математика. 2026. № 1. С. 78–91. <https://doi.org/10.18384/2949-5067-2026-1-78-91>

Original research article

ELECTROTRANSPORT PROPERTIES AND RELAXATION PROCESSES IN THE $\text{CdF}_2\text{-PbF}_2$ SYSTEM

V. Yusim¹⁻³, A. Kurilov^{1}, S. Sarkisov², D. Kravtsov¹, Yu. Kuleshova¹*

¹ Federal State University of Education, Moscow, Russian Federation

² National Research Centre “Kurchatov Institute”, Moscow, Russian Federation

³ Prokhorov General Physics Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

* Corresponding author, e-mail: ad.kurilov@guppros.ru

Received by the editorial office 16.12.2025

Accepted for publication 25.12.2025

Abstract

Aim. To conduct a comprehensive study of the electrotransport properties and relaxation processes in $\text{CdF}_2\text{-PbF}_2$ solid solution crystals, and to establish the relationship between their structure, thermodynamic behavior, and ion transport mechanisms.

Methodology. X-ray phase analysis, differential scanning calorimetry, and dielectric spectroscopy in a broad frequency-temperature range (20 Hz – 10 MHz, -60...+100°C) were used. The composition was determined using Vegard's law; relaxation processes were analyzed using the Havriliak-Negami model.

Results. The synthesized crystals were found to have the composition $\text{Cd}_{0.326}\text{Pb}_{0.674}\text{F}_2$ and a fluorite-type structure. A diffuse superionic transition at ~320°C with pronounced hysteresis was detected by thermal analysis. Dielectric spectroscopy revealed a bulk relaxation process associated with F^- ion hopping. The activation energies for relaxation time and conductivity were ~0.20 eV and ~0.26 eV, respectively, indicating a significant contribution of correlated ion motion.

Research implications. The relationship between structural parameters, the thermodynamics of the phase transition, and the kinetics of ion transport in the $\text{CdF}_2\text{-PbF}_2$ system has been established. The results are important for understanding the nature of superionic conductivity in fluoride systems and can be used in the development of new solid-state electrolytes.

Keywords: fluorides, solid solution, superionic transition, dielectric spectroscopy, ionic conductivity, relaxation processes

Acknowledgments: This work was supported by the grant from the Federal State University of Education in 2025, awarded to the winning research project in the competitive grant program. We also extend our gratitude to the Pedagogical Technopark “Kvantorium” named after I. V. Kurchatov

at the Federal State University of Education for providing access to their equipment, which was instrumental in conducting this study.

For citation:

Yusim, V. A., Kurilov, A. D. Sarkisov, S. E., Kravtsov, D. S. & Kuleshova, Yu. D (2026). Electrotransport properties and relaxation processes in the $\text{CdF}_2\text{-PbF}_2$ system. In: *Bulletin of the Federal State University of Education. Series: Physics and Mathematics*, 1, pp. 78–91. <https://doi.org/10.18384/2949-5067-2026-1-78-91>

Введение

Твердотельные ионные проводники на основе фторидов щелочноземельных металлов представляют собой постоянно развивающуюся область материаловедения, обусловленную их перспективным применением в качестве электролитов для твердотельных батарей, химических сенсоров и ион-проводящих мембран [1; 2]. Среди них соединения со структурой типа флюорита (CaF_2), такие как PbF_2 и CdF_2 , являются классическими модельными объектами для изучения суперионной проводимости, анионного транспорта и связанных с ними релаксационных явлений.

Суперионное состояние в этих материалах характеризуется аномально высокой ионной проводимостью, сравнимой с жидкими электролитами, что достигается за счёт коллективного движения одного из ионных подрешёток при сохранении структурной целостности кристалла [3]. В системе $\text{PbF}_2\text{-CdF}_2$ легирование ионов Cd^{2+} в решётку PbF_2 приводит к значительному увеличению концентрации дефектов (пар Френкеля) уже на стадии синтеза, что предопределяет их высокую ионную подвижность при последующем нагревании [4]. Переход в суперионное состояние в таких системах часто носит диффузный характер и может сопровождаться сложной релаксационной динамикой, связанной с взаимодействием подвижных ионов, образованием кластеров и перестройкой локального окружения [5; 6].

Несмотря на длительную историю исследований, взаимосвязь между структурой, термической стабильностью фаз и механизмами ионного транспорта в системе $\text{CdF}_2\text{-PbF}_2$ остаётся не до конца раскрытой. В частности, требуют детального изучения природа релаксационных процессов, наблюдаемых в широком частотном и температурном диапазонах, и их корреляция с термодинамическими событиями, регистрируемыми методами термического анализа. Так, данные дифференциальной сканирующей калориметрии (ДСК) часто демонстрируют сложную картину с наличием широких эндотермических эффектов при нагреве и соответствующими изменениями теплоёмкости при охлаждении, что указывает на фазовые переходы, близкие к переходу II рода, или кинетические эффекты «размораживания» ионной подвижности.

Для всестороннего понимания физико-химических процессов в таких материалах необходим комплексный подход, сочетающий структурные, термические и диэлектрические методы. Импедансная спектроскопия является ключевым методом, позволяющим не только определить стационарную

проводимость, но и выявить вклады различных релаксационных процессов (объёмных, межзеренных), а также проанализировать их энергетику и временные характеристики [7]. Сочетание этого метода с ДСК позволяет установить прямую связь между скачкообразным изменением проводимости и термодинамическими аномалиями, а данные РФА – подтвердить фазовый состав и отсутствие структурных изменений, маскирующих суперионный переход.

Целью настоящей работы является комплексное исследование электротранспортных свойств и релаксационных процессов в кристаллах твёрдого раствора $\text{CdF}_2\text{-PbF}_2$. Для её достижения методами рентгенофазового анализа охарактеризована кристаллическая структура синтезированных образцов, методом ДСК в циклическом режиме исследована термодинамика фазовых переходов, а методом диэлектрической спектроскопии в широком частотном (20 Гц – 10 МГц) и температурном (-60°C – $+100^\circ\text{C}$) диапазонах изучены диэлектрическая дисперсия, релаксационные процессы и параметры ионного транспорта. На основе совместного анализа данных сделаны выводы о механизмах ионной проводимости и природе релаксационных явлений в исследуемой системе.

Материалы и методы

Синтезирована серия кристаллов твёрдого раствора $\text{Pb}_{0.67}\text{Cd}_{0.33}\text{F}_2$ методом горизонтально направленной кристаллизации (ГНК). Синтез проводили в многоячейстом графитовом тигле в смешанной фторирующей атмосфере, состоящей из аргона (80%) и фтора (20%). Для приготовления шихты использовали коммерческие реактивы PbF_2 и CdF_2 марки «Ос.ч.» производства HOTSPOT Biotechnology (чистота 99,999%). Процедура подготовки шихты включала предварительную сушку реагентов ($500\text{--}550^\circ\text{C}$, 8 ч) и получение твёрдых спёков (700°C , избыточное давление 202,7 кПа, выдержка 12 ч).

Процесс роста кристаллов осуществляли со скоростью 3 мм/ч после гомогенизации расплава в течение 18 ч. После синтеза кристаллы свободной ориентации подвергали отжигу при температуре 0,8 от температуры плавления в течение 18 ч с последующим медленным охлаждением до комнатной температуры со скоростью $20^\circ\text{C}/\text{ч}$ для предотвращения термоудара.

Фазовый состав и кристаллическая структура полученных кристаллов были исследованы методом рентгенофазового анализа на порошковом дифрактометре Tongda TD-3700. Для проведения экспериментов кристаллы измельчали в агатовой ступке до получения однородного мелкодисперсного порошка. Измерения проводили при комнатной температуре в диапазоне углов 2θ от 20° до 90° с шагом 0.02° . Идентификацию фаз проводили с использованием базы данных ICDD (PDF-2). Для определения параметров элементарной ячейки и уточнения кристаллической структуры использовали метод Ритвельда.

Термический анализ образцов проводили методом дифференциальной сканирующей калориметрии (Mettler Toledo, DSC 3). Измерения проводились с использованием стандартных алюминиевых тиглей в температурном диапазоне

от -80°C до $+450^{\circ}\text{C}$. Скорость нагрева и охлаждения составляла 5 К/мин. Прибор калибровали по температурам плавления индия и цинка.

Электрофизические свойства образцов исследовали методом диэлектрической спектроскопии в широком частотном диапазоне. Измерения проводили на импедансном анализаторе Wayne Kerr WK 65120P в диапазоне частот от 20 Гц до 10 МГц и температур от -60°C до $+100^{\circ}\text{C}$ с шагом 5°C в камере с точностью задания температуры не хуже $\pm 0,2^{\circ}\text{C}$. Отполированные кристаллы размером $9.7 \times 9.8 \times 0.9$ мм для измерений покрывали с двух сторон токопроводящей серебряной пастой. Для обеспечения надёжного и воспроизводимого контакта в измерительной ячейке в качестве электродов использовались тонкие самарий-кобальтовые (SmCo) магниты диаметром 20 мм, которые обеспечивали равномерное прижатие образца.

В ходе эксперимента непосредственно измерялись ёмкость C и проводимость σ образца. Действительная ϵ' и мнимая части ϵ'' диэлектрической проницаемости рассчитывались по следующим формулам:

$$\epsilon' = \frac{Cd - \epsilon_0 S_e}{\epsilon_0 S_s} - 1,$$

$$\epsilon'' = \frac{\sigma d}{\omega \epsilon_0 S_s},$$

где σ – проводимость, C – электроёмкость, S_e – площадь электродов, S_s – площадь образца, d – толщина образца, ϵ_0 – электрическая постоянная.

Для повышения точности измерений в расширенном частотном диапазоне была применена процедура компенсации паразитных сопротивлений и индуктивности измерительной цепи [8; 9]. Коррекция проводилась с помощью специализированного программного обеспечения собственной разработки. Для описания диэлектрической дисперсии и релаксационных процессов использовалась модель Гавриляк-Негами [10], которая учитывает распределение времён релаксации и асимметричность дисперсионной кривой:

$$\epsilon^* = \epsilon' - i\epsilon'' = \epsilon_{\infty} + \frac{\delta\epsilon}{[1 + (i\omega\tau)^{\alpha}]^{\beta}},$$

где ϵ_{∞} – высокочастотный предел диэлектрической проницаемости (в пределах исследуемого частотного диапазона), $\delta\epsilon = \epsilon_s - \epsilon_{\infty}$ – сила релаксационного процесса, ϵ_s – статическая (низкочастотная) диэлектрическая проницаемость, τ – время релаксации, α – параметр, определяющий ширину распределения времён релаксации, β – параметр, определяющий асимметричность дисперсионной кривой.

Результаты и обсуждение

Подтверждение кристаллической структуры и количественная оценка состава синтезированных кристаллов твёрдого раствора $\text{CdF}_2\text{-PbF}_2$ были проведены с помощью рентгенофазового анализа (РФА) с последующим уточнением структуры методом Ритвельда.

На рис. 1 представлены экспериментальные дифрактограммы синтезированных образцов. Анализ показал, что все наблюдаемые рефлексы могут быть однозначно проиндексированы в кубической сингонии и соответствуют структуре типа флюорита (пространственная группа $\text{Fm}\bar{3}\text{m}$). Отсутствие рефлексов, принадлежащих исходным компонентам (PbF_2 или CdF_2) или иным посторонним фазам, свидетельствует об образовании гомогенного твёрдого раствора замещения в исследуемой системе.

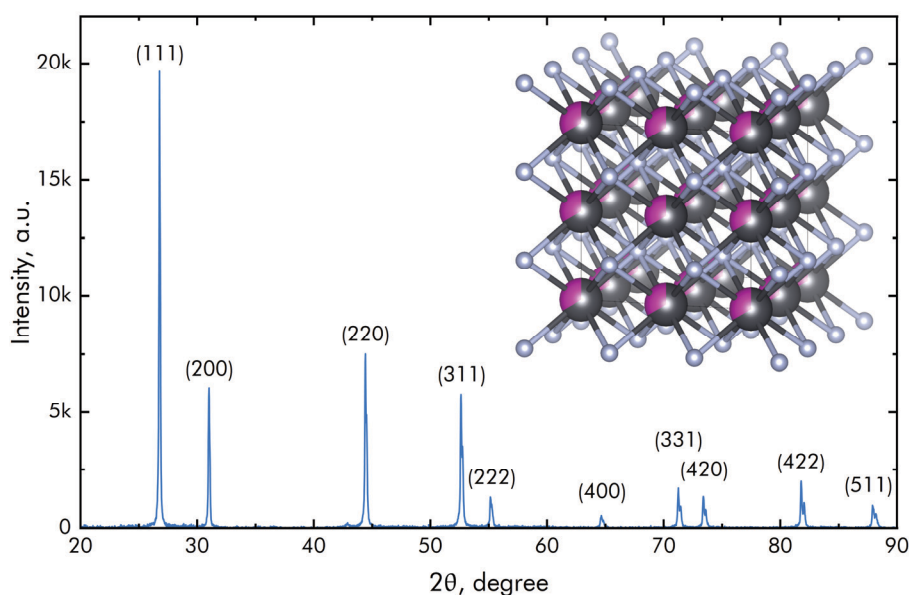


Рис. 1 / Fig. 1. Экспериментальные дифрактограммы синтезированного кристалла твёрдого раствора $\text{CdF}_2\text{-PbF}_2$ / Experimental diffraction patterns of the synthesized solid solution crystal $\text{CdF}_2\text{-PbF}_2$

Источник: подготовлено авторами

Полученное значение параметра решётки ($5.760 \text{ \AA}$), что соответствует объёму ячейки $V = 191 \text{ \AA}^3$. Полученное значение закономерно занимает промежуточное положение между параметрами решётки чистых компонентов: PbF_2 ($a = 5.940 \text{ \AA}$) и CdF_2 ($a = 5.388 \text{ \AA}$) [11; 12]. Уменьшение параметра решётки по сравнению с PbF_2 напрямую связано с замещением более крупных катионов Pb^{2+} (ионный радиус $\sim 1.29 \text{ \AA}$, КЧ = 8) на существенно меньшие ионы Cd^{2+} ($\sim 1.10 \text{ \AA}$, КЧ = 8) [13], что приводит к «сжатию» кристаллической решётки.

Для количественной оценки состава твёрдого раствора был применён закон Вегарда, который предполагает линейную зависимость параметра решётки от мольного состава в изоморфных рядах твёрдых растворов. Расчёт проводился по формуле:

$$a_{\text{sample}} = x a_{\text{CdF}_2} + (1 - x) a_{\text{PbF}_2},$$

где x – искомая мольная доля CdF_2 в твёрдом растворе. Подставляя экспериментальное значение $a = 5.760 \text{ \AA}$ и литературные данные для чистых фторидов, получим значение $x \approx 0.326$. Следовательно, стехиометрия синтезированного материала соответствует формуле $\text{Cd}_{0.326}\text{Pb}_{0.674}\text{F}_2$, что в хорошем приближении согласуется с номинальным составом шихты $\text{Cd}_{0.33}\text{Pb}_{0.67}\text{F}_2$. Полученные данные однозначно свидетельствуют об успешном формировании твёрдого раствора замещения CdF_2 - PbF_2 со структурой флюорита.

Термодинамические свойства кристалла $\text{Cd}_{0.326}\text{Pb}_{0.674}\text{F}_2$ были исследованы методом ДСК в циклическом режиме нагрева-охлаждения. Измерения проводились в температурном диапазоне от комнатной температуры до 450°C при стандартной скорости сканирования 5 K/мин .

На рис. 2 представлены кривые ДСК, полученные в первом цикле нагрева и последующего охлаждения. На кривой нагрева (красная линия) в области $300\text{--}350^\circ\text{C}$ наблюдается сложный асимметричный эндотермический отклик. Детальный анализ этой области выявляет два перекрывающихся эффекта: слабо выраженное плавное изменение теплового потока, начинающееся при $\sim 250^\circ\text{C}$, и более интенсивный, но также широкий эндотермический процесс с максимумом при $T \approx 320^\circ\text{C}$ (593 K). Отсутствие острого узкого пика характерно для диффузных (размытых) фазовых переходов, типичных для суперионных систем, где активация ионной подвижности происходит в широком температурном интервале [14]. Малый эндотермический сдвиг при более низких температурах может быть связан с предпереходными явлениями, такими как перестройка локального окружения катионов ($\text{Cd}^{2+}/\text{Pb}^{2+}$) или начальное разупорядочение фторидной подрешётки с образованием кластеров дефектов.

Кривая охлаждения (синяя линия) демонстрирует принципиально иную картину. В той же температурной области ($200\text{--}280^\circ\text{C}$) отсутствует четкий экзотермический пик, который соответствовал бы обратному фазовому переходу первого рода с выделением скрытой теплоты. Вместо этого наблюдается плавное изменение наклона базовой линии, что соответствует изменению теплоёмкости ΔC_p системы. Этот эффект сохраняется и не сдвигается по температуре при изменении скорости охлаждения (проверено в диапазоне $5\text{--}20 \text{ K/мин}$), что указывает на его равновесную, а не чисто кинетическую природу.

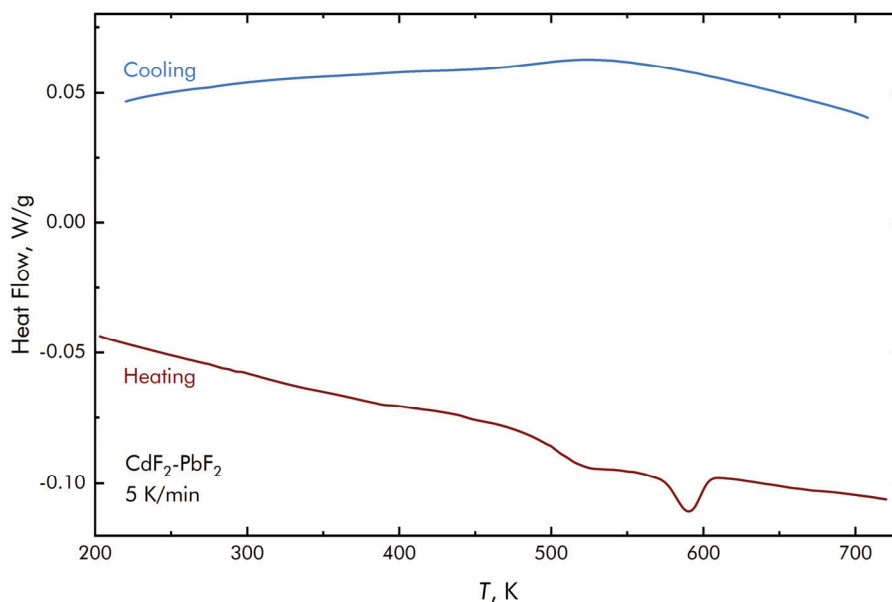


Рис. 2 / Fig. 2. Кривые ДСК (тепловой поток от температуры) для кристалла $\text{Cd}_{0.326}\text{Pb}_{0.674}\text{F}_2$ при скорости сканирования 5 К/мин. Красная линия – нагрев, синяя линия – охлаждение / DSC (heat flux versus temperature) curves for a $\text{Cd}_{0.326}\text{Pb}_{0.674}\text{F}_2$ crystal at a scan rate of 5 K/min. The red line is heating, the blue line is cooling.

Источник: подготовлено авторами

Подобный ярко выраженный гистерезис между кривыми нагрева и охлаждения является характерным признаком суперионных переходов во фторидных системах со структурой флюорита [15]. Эндотермический пик при нагреве соответствует процессу «размораживания» коллективной подвижности фторид-ионов F^- , сопровождающемуся увеличением конфигурационной энтропии. При охлаждении обратный процесс упорядочения сильно кинетически затруднён: для релаксации разупорядоченной анионной подрешётки в равновесное состояние требуется время, превышающее экспериментальное окно при заданной скорости охлаждения. В результате система «застревает» в метастабильном состоянии, а переход проявляется лишь в виде скачка теплоёмкости, отражающего изменение термодинамического состояния без выделения/поглощения скрытой теплоты.

Для исследования динамики ионных процессов в кристалле $\text{Cd}_{0.326}\text{Pb}_{0.674}\text{F}_2$ была проведена диэлектрическая спектроскопия в широком частотном (20 Гц – 10 МГц) и температурном (-60°C – $+100^\circ\text{C}$) диапазонах. На рис. 3 представлены температурные зависимости действительной ϵ' и мнимой ϵ'' частей комплексной диэлектрической проницаемости, на фиксированных частотах от 1 кГц до 10 МГц. На графике $\epsilon'(T)$ (рис. 3а) отчётливо наблюдается дисперсионное поведение, характерное для термоактивируемого релаксационного процесса: с ростом температуры область изменения ϵ' смещается в сторону более высоких

частот. Так, при ~ 210 К область дисперсии наблюдается в районе 1 кГц, в то время как для ~ 300 К она смещается в область 1 МГц. Это прямо указывает на уменьшение времени релаксации ионов с ростом температуры. Важно отметить, что как высокочастотный предел диэлектрической проницаемости ϵ_∞ , так и её статическое значение ϵ_s , оценённые из аппроксимации согласно модели Гавриляк-Негами, демонстрируют тенденцию к снижению с ростом температуры (ϵ_∞ уменьшается с ~ 65 при 210 К до ~ 30 при 360 К). Такое поведение ϵ_s и ϵ_∞ характерно для систем, где диэлектрический отклик обусловлен миграционной поляризацией, связанной с прыжковой проводимостью, а не ориентацией постоянных диполей.

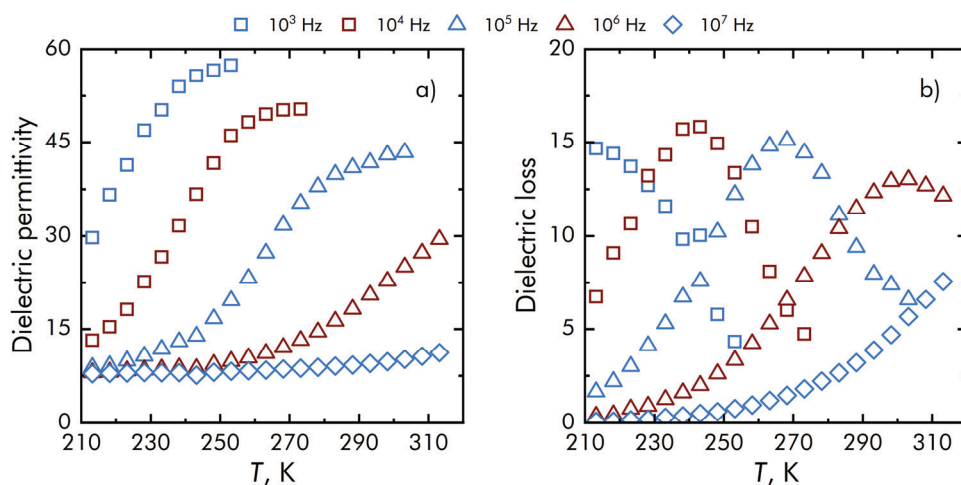


Рис. 3 / Fig. 3. Температурные зависимости (а) действительной ϵ' и (б) мнимой ϵ'' частей комплексной диэлектрической проницаемости кристалла $\text{Cd}_{0.326}\text{Pb}_{0.674}\text{F}_2$ на различных частотах / Temperature dependences of (a) the real ϵ' and (b) the imaginary ϵ'' parts of the complex permittivity of the $\text{Cd}_{0.326}\text{Pb}_{0.674}\text{F}_2$ crystal at different frequencies.

Источник: подготовлено авторами

На графике диэлектрических потерь $\epsilon''(T)$ (рис. 3b) для каждой частоты наблюдается чёткий максимум, положение которого также смещается в область высоких температур с увеличением частоты. Этот максимум соответствует объёмной ионной релаксации, обусловленной перескоками фторид-ионов F^- между эквивалентными позициями в решётке флюорита.

Температурные зависимости ключевых кинетических параметров, извлечённых с помощью аппроксимации спектров, представлены на рис. 4. Зависимость характерного времени релаксации τ от температуры (рис. 4a) демонстрирует аррениусовское поведение: τ уменьшается с $\sim 10^{-4}$ с при 210 К до $\sim 10^{-8}$ с при 370 К. Энергия активации релаксационного процесса, рассчитанная из аппроксимации законом Аррениуса, составляет $E_r = (19.4 \pm 0.2)$ кДж/моль (≈ 0.20 эВ).

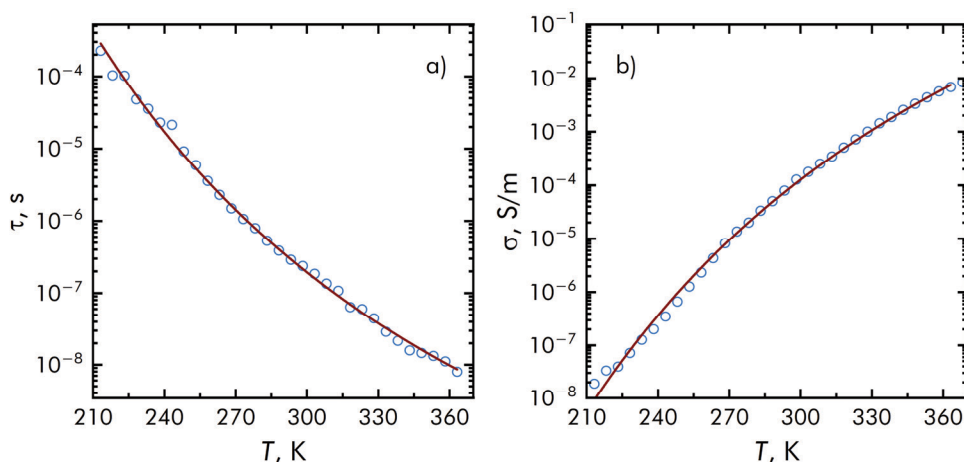


Рис. 4 / Fig. 4. Температурные зависимости в полулогарифмическом масштабе: (а) характерного времени релаксации τ и (б) удельной ионной проводимости σ , полученные для кристалла $\text{Cd}_{0.326}\text{Pb}_{0.674}\text{F}_2$. Сплошные линии – результаты аппроксимации законом Аррениуса / Temperature dependences in a semilogarithmic scale: (a) the characteristic relaxation time τ and (b) the specific ionic conductivity σ , obtained for the $\text{Cd}_{0.326}\text{Pb}_{0.674}\text{F}_2$ crystal. Solid lines are the results of approximation by the Arrhenius law

Источник: подготовлено авторами

Параллельно, на основе анализа низкочастотного плато проводимости была определена удельная ионная проводимость σ (рис. 4б). Её температурная зависимость также подчиняется закону Аррениуса с энергией активации $E_c = (25.3 \pm 0.3)$ кДж/моль (≈ 0.26 эВ). Проводимость возрастает на шесть порядков величины – от $\sim 10^{-8}$ См/м при 210 К до $\sim 10^{-2}$ См/м при 370 К.

Соотношение $E_r < E_c$, наблюдаемое в исследуемом кристалле, является характерным для многих суперионных проводников и может быть интерпретировано в рамках моделей, учитывающих коллективное движение ионов [16]. Более низкая энергия активации релаксации отражает барьер для локальных перескоков иона, в то время как более высокая энергия активации проводимости соответствует преодолению коллективных эффектов.

Комплексное исследование кристаллов твёрдого раствора $\text{Cd}_{0.326}\text{Pb}_{0.674}\text{F}_2$ методами РФА, ДСК и диэлектрической спектроскопии позволило установить взаимосвязь между их структурой, термодинамическим поведением и механизмами ионного транспорта.

Заключение

Методами рентгенофазового анализа, дифференциальной сканирующей калориметрии и диэлектрической спектроскопии проведено комплексное исследование кристаллов твёрдого раствора $\text{CdF}_2\text{-PbF}_2$.

Установлено, что синтезированный кристалл имеет состав $\text{Cd}_{0.326}\text{Pb}_{0.674}\text{F}_2$ со структурой типа флюорита. Замещение ионов Pb^{2+} на Cd^{2+} приводит к

закономерному уменьшению параметра элементарной ячейки, что подтверждает образование гомогенного твёрдого раствора.

Термический анализ выявил наличие в материале диффузного суперионного перехода в области $\sim 320^\circ\text{C}$, который характеризуется широким эндотермическим эффектом на нагреве и выраженным термодинамическим гистерезисом. Отсутствие экзотермического пика при охлаждении при одновременном изменении теплоёмкости указывает на кинетически затруднённое обратное упорядочение фторидной подрешётки, что является характерной чертой суперионных фторидов.

Диэлектрическая спектроскопия позволила детально исследовать динамику ионного переноса. Обнаруженный объёмный релаксационный процесс с размытым распределением времён релаксации связан с прыжковой подвижностью фторид-ионов F^- . Температурные зависимости времени релаксации τ и удельной ионной проводимости σ подчиняются закону Аррениуса с энергиями активации $E_r \approx 0.20$ эВ и $E_c \approx 0.26$ эВ соответственно. Наблюдаемое соотношение $E_r < E_c$ согласуется с моделями, учитывающими коррелированное (коллективное) движение ионов в суперионных проводниках.

Полученные результаты вносят вклад в понимание связи между составом, структурой и ионно-транспортными свойствами в системах на основе фторидов металлов и могут быть использованы при разработке новых твердотельных электролитов с заданными характеристиками.

ЛИТЕРАТУРА

1. Tarascon J.-M., Armand M. Issues and challenges facing rechargeable lithium batteries // *Nature*. 2001. Vol. 414. P. 359–367. DOI: 10.1038/35104644.
2. A lithium superionic conductor / N. Kamaya, K. Homma, Y. Yamakawa, M. Hirayama, R. Kanno, M. Yonemura, T. Kamiyama, Y. Kato, S. Hama, K. Kawamoto, A. Mitsui // *Nature Materials*. 2011. Vol. 10. No. 9 P. 682–686. DOI: 10.1038/nmat3066.
3. *Physics of superionic conductors* / ed. M. B. Salamon. Berlin, New York: Springer Science & Business Media, 2013. 255 p. (Series: Topics in Current Physics. Vol. 15).
4. Hull S., Keen D. A. Effect of hydrostatic pressure on the crystal structure and superionic behavior of lead (II) fluoride // *Physical Review B*. 1998. Vol. 58. No. 22. P. 14837–14844. DOI: 10.1103/PhysRevB.58.14837.
5. Fundamental questions relating to ion conduction in disordered solids / J. C. Dyre, P. Maass, B. Roling, D. L. Sidebottom // *Reports on Progress in Physics*. 2009. Vol. 72. No. 4. P. 046501. DOI: 10.1088/0034-4885/72/4/046501.
6. *Superionic Solids and Solid Electrolytes: Recent Trends* / ed. A. L. Laskar, S. Chandra. New York: Elsevier, 1989. 711 p.
7. *Applications of Impedance Spectroscopy* / J. R. Macdonald, W. B. Johnson, I. D. Raistrick, D. R. Franceschetti, N. Wagner, M. C. H. McKubre, D. D. Macdonald, B. Sayers, N. Bonanos, B. C. H. Steele, E. P. Butler // *Impedance Spectroscopy: Theory, Experiment, and Applications*. New Jersey: John Wiley & Sons, 2018. P. 205–263.

8. Perkowski P. Dielectric spectroscopy of liquid crystals. Electrodes resistivity and connecting wires inductance influence on dielectric measurements // *Opto-Electronics Review*. 2012. Vol. 20. No. 1. P. 79–86. DOI: 10.2478/s11772-012-0004-3.
9. Perkowski P. The parasitic effects in high-frequency dielectric spectroscopy of liquid crystals – the review // *Liquid Crystals*. 2021. Vol. 48. Iss. 6. P. 767–793. DOI: 10.1080/02678292.2020.1852619.
10. The Havriliak-Negami relaxation and its relatives: the response, relaxation and probability density functions / K. Górska, A. Horzela, Ł. Bratek, K. A. Penson // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. 2018. Vol. 51. Iss. 13. Article no. 135202. DOI: 10.1088/1751-8121/aaafc0.
11. Achary S. N., Tyagi A. K. Synthesis and characterization of mixed fluorides with PbF_2 and ScF_3 // *Powder diffraction*. 2005. Vol. 20. Iss. 3. P. 254–258. DOI: 10.1154/1.1948391.
12. Structural studies on lead–cadmium fluoride solid solutions / M. A. P. Silva, Y. Messaddeq, V. Briois, M. Poulain, F. Villain, S. J. L. Ribeiro // *Solid State Ionics*. 2002. Vol. 147. Iss. 1-2. P. 135–139. DOI: 10.1016/S0167-2738(02)00042-5.
13. Shannon R. D. Revised effective ionic radii and systematic studies of interatomic distances in halides and chalcogenides // *Foundations of Crystallography*. 1976. Vol. 32. Iss. 5. P. 751–767. DOI: 10.1107/S0567739476001551.
14. Boyce J. B., Huberman B. A. Superionic conductors: Transitions, structures, dynamics // *Physics Reports*. 1979. Vol. 51. Iss. 4. P. 189–265. DOI: 10.1016/0370-1573(79)90067-X.
15. Sorokin N. I., Sobolev B. P., Breiter M. W. Specific features of anion transfer in superionic conductors based on MF_2 ($M = \text{Pb}$ and Cd) // *Physics of the Solid State*. 2002. Vol. 44. Iss. 8. P. 1579–1586. DOI: 10.1134/1.1501363.
16. Funke K. Jump relaxation in solid electrolytes // *Progress in Solid State Chemistry*. 1993. Vol. 22. Iss. 2. P. 111–195. DOI: 10.1016/0079-6786(93)90002-9.

REFERENCES

1. Tarascon, J.-M. & Armand, M. (2001). Issues and challenges facing rechargeable lithium batteries. In: *Nature*, 414, 359–367. DOI: 10.1038/35104644.
2. Kamaya, N., Homma, K., Yamakawa, Y., Hirayama, M., Kanno, R., Yonemura, M., Kamiyama, T., Kato, Y., Hama, S., Kawamoto, K. & Mitsui, A. (2011). A lithium superionic conductor. In: *Nature Materials*, 10 (9), 682–686. DOI: 10.1038/nmat3066.
3. Salamon, M. B. (ed.) (2013). *Physics of superionic conductors*. Berlin, New York: Springer Science & Business Media (Series: Topics in Current Physics. Vol. 15).
4. Hull, S. & Keen, D. A. (1998). Effect of hydrostatic pressure on the crystal structure and superionic behavior of lead (II) fluoride. In: *Physical Review B*, 58 (22), 14837–14844. DOI: 10.1103/PhysRevB.58.14837.
5. Dyre, J. C., Maass, P., Roling, B. & Sidebottom, D. L. (2009). Fundamental questions relating to ion conduction in disordered solids. In: *Reports on Progress in Physics*, 72 (4), 046501. DOI: 10.1088/0034-4885/72/4/046501.
6. Laskar, A. L. & Chandra, S. (eds.) (1989). *Superionic Solids and Solid Electrolytes: Recent Trends*. New York: Elsevier.

7. Macdonald, J. R., Johnson, W. B., Raistrick, I. D., Franceschetti, D. R., Wagner, N., McKubre, M. C. H., Macdonald, D. D., Sayers, B., Bonanos, N., Steele, B. C. H., Butler, E. P. (2018). Applications of Impedance Spectroscopy. In: *Impedance Spectroscopy: Theory, Experiment, and Applications*. New Jersey: John Wiley & Sons, pp. 205–263.
8. Perkowski, P. (2012). Dielectric spectroscopy of liquid crystals. Electrodes resistivity and connecting wires inductance influence on dielectric measurements. In: *Opto-Electronics Review*, 20 (1), 79–86. DOI: 10.2478/s11772-012-0004-3.
9. Perkowski, P. (2021). The parasitic effects in high-frequency dielectric spectroscopy of liquid crystals – the review. In: *Liquid Crystals*, 48 (6), 767–793. DOI: 10.1080/02678292.2020.1852619.
10. Górka, K., Horzela, A., Bratek, Ł. & Penson, K. A. (2018). The Havriliak-Negami relaxation and its relatives: the response, relaxation and probability density functions. In: *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 51 (13), 135202. DOI: 10.1088/1751-8121/aaafc0.
11. Achary, S. N. & Tyagi, A. K. (2005). Synthesis and characterization of mixed fluorides with PbF_2 and ScF_3 . In: *Powder diffraction*, 20 (3), 254–258. DOI: 10.1154/1.1948391.
12. Silva, M. A. P., Messaddeq, Y., Briois, V., Poulain, M., Villain, F. & Ribeiro, S. J. L. (2002). Structural studies on lead–cadmium fluoride solid solutions. In: *Solid State Ionics*, 147 (1–2), 135–139. DOI: 10.1016/S0167-2738(02)00042-5.
13. Shannon, R. D. (1976). Revised effective ionic radii and systematic studies of interatomic distances in halides and chalcogenides. In: *Foundations of Crystallography*, 32 (5), 751–767. DOI: 10.1107/S0567739476001551.
14. Boyce, J. B. & Huberman, B. A. (1979). Superionic conductors: Transitions, structures, dynamics. In: *Physics Reports*, 51 (4), 189–265. DOI: 10.1016/0370-1573(79)90067-X.
15. Sorokin, N. I., Sobolev, B. P. & Breiter M. W. (2002). Specific features of anion transfer in superionic conductors based on MF_2 ($M = \text{Pb}$ and Cd). In: *Physics of the Solid State*, 44 (8), 1579–1586. DOI: 10.1134/1.1501363.
16. Funke, K. (1993). Jump relaxation in solid electrolytes. In: *Progress in Solid State Chemistry*, 22 (2), 111–195. DOI: 10.1016/0079-6786(93)90002-9.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Юсим Валентин Александрович (г. Москва) – старший научный сотрудник Государственного университета просвещения, ведущий научный сотрудник Национального исследовательского центра «Курчатовский институт», ведущий научный сотрудник центра биофотоники Института общей физики им. А. М. Прохорова Российской академии наук;

<https://orcid.org/0000-0003-4536-058X>; e-mail: ValentinYusim@mail.ru

Курилов Александр Дмитриевич (г. Москва) – кандидат физико-математических наук, заведующий учебно-научной лабораторией теоретической и прикладной нанотехнологии Государственного университета просвещения;

<https://orcid.org/0000-0001-8915-2411>; e-mail: ad.kurilov@guppros.ru

Саркисов Степан Эрвандович – кандидат физико-математических наук, заместитель начальника отдела физических процессов и прикладных технологий (ОМФПиПТ) Курчатовского комплекса перспективной атомной энергии (ККПАЭ) Национального исследовательского центра «Курчатовский институт»;
e-mail: Yusim_VA@nrcki.ru

Кравцов Даниил Сергеевич (г. Москва) – студент физико-математического факультета Государственного университета просвещения;
<https://orcid.org/0009-0007-0863-5421>; e-mail: daniilkravcov27@gmail.com

Кулешова Юлия Дмитриевна (г. Жуковский, Московская обл.) – кандидат физико-математических наук, доцент, декан физико-математического факультета Государственного университета просвещения;
<https://orcid.org/0000-0001-8556-9340>; e-mail: juliaybogdanova@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Valentin A. Yusim (Moscow) – Senior Researcher, Federal State University of Education; Leading Researcher, National Research Center "Kurchatov Institute"; Leading Researcher, Biophotonics Center, Prokhorov General Physics Institute of the Russian Academy of Sciences;
<https://orcid.org/0000-0003-4536-058X>; e-mail: ValentinYusim@mail.ru

Alexandr D. Kurilov (Moscow) – Cand. Sci. (Phys.-Math.), Laboratory Head, Laboratory of Theoretical and Applied Nanotechnology, Federal State University of Education;
<https://orcid.org/0000-0001-8915-2411>; e-mail: ad.kurilov@guppros.ru

Stepan E. Sarkisov (Moscow) – Cand. Sci. (Phys.-Math.), Deputy Head, Department of the Office for Nonproliferation and Physical Protection of the Kurchatov Complex of Advanced Nuclear Energy (ККПАН), National Research Center "Kurchatov Institute";
e-mail: Yusim_VA@nrcki.ru

Daniil S. Kravtsov (Moscow) – Student, Federal State University of Education;
<https://orcid.org/0009-0007-0863-5421>; e-mail: daniilkravcov27@gmail.com

Yulia D. Kuleshova (Zhukovsky, Moscow Region) – Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Prof., Dean, Faculty of Physics and Mathematics, Federal State University of Education;
<https://orcid.org/0000-0001-8556-9340>; e-mail: juliaybogdanova@mail.ru

МАТЕМАТИКА

Научная статья

УДК 511.2, 512.642, 517.53

DOI: 10.18384/2949-5067-2026-1-92-121

МНОЖЕСТВО ДВОЙНЫХ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ КАК ОСОБОЕ РАСШИРЕНИЕ ПОЛЯ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Колягин А. Ю.

Независимый исследователь, г. Москва, Российская Федерация

e-mail: ak.russia4444@yandex.ru

Поступила в редакцию 27.11.2025

После доработки 08.12.2025

Принята к публикации 18.12.2025

Аннотация

Цель. Определение особой алгебраической системы на основе поля комплексных чисел со своими операциями сложения и умножения и их свойствами; понятий нормы и аргумента новых чисел; форм их представления, особого пространства как интерпретации этой системы.

Процедура и методы. Анализ алгебраической теории чисел, комплексных и гиперкомплексных чисел, теории векторных пространств, теории функций комплексного переменного.

Результаты. На основе комплексных чисел определена алгебраическая система нового типа, операции которой так же обратимы, как операции на поле комплексных чисел, определены и доказаны свойства операций. Эта система отличается от известных систем гиперкомплексных чисел и является особым расширением поля комплексных чисел. Определены: особое пространство, интерпретирующее данную систему; понятия модуля и аргумента новых чисел; формы их представления. Доказана возможность решения в новой системе определённого типа уравнений, неразрешимых на множестве комплексных чисел.

Теоретическая и/или практическая значимость. Новая алгебраическая система является элементом дальнейшего развития теории чисел и теории векторных пространств, расширяет направления исследований в других областях (разрешимость алгебраических уравнений, теория функций и др.). Результаты имеют и прикладной характер. В частности, разрешимость в новой алгебре не разрешимых ранее комплексных уравнений может использоваться в практических задачах, возможность графического представления функций комплексного переменного можно использовать в математическом моделировании пространственных объектов.

Ключевые слова: гиперкомплексные числа, векторное пространство, моделирование пространственных объектов, поле комплексных чисел, разрешимость комплексных уравнений, функции комплексного переменного

Для цитирования:

Колягин А. Ю. Множество двойных комплексных чисел как особое расширение поля комплексных чисел // Вестник Государственного университета просвещения. Серия: Физика-Математика. 2026. № 1. С. 92–121. <https://doi.org/10.18384/2949-5067-2026-1-92-121>

Original research article

SET OF DOUBLE COMPLEX NUMBERS AS A SPECIAL EXTENSION OF THE FIELD OF COMPLEX NUMBERS

A. Kolyagin

Independent researcher, Moscow, Russian Federation

e-mail: ak.russia4444@yandex.ru

Received by the editorial office 27.11.2025

Revised by the author 08.12.2025

Accepted for publication 18.12.2025

Abstract

Aim. Definition of a special algebraic system based on the field of complex numbers with its addition and multiplication operations and their properties, concepts of norm and argument of new numbers, forms of their representation, special space, as an interpretation of this system.

Methodology. Analysis of algebraic number theory, complex and hypercomplex numbers, theory of vector spaces, theory of functions of a complex variable.

Results. On the basis of complex numbers, an algebraic system of a new type is defined, the operations of which are also invertible, as operations on the field of complex numbers, the properties of operations are defined and proved. This system differs from known systems of hypercomplex numbers and is a special extension of the field of complex numbers. A special space is defined that interprets this system, the concepts of the module and argument of new numbers, the form of their presentation. The possibility of solving in a new system of a certain type of equations insoluble on the set of complex numbers has been proven.

Research implications. The new algebraic system is an element of further development of number theory and the theory of vector spaces, expands the direction of research in other areas (solvability of algebraic equations, function theory, etc.). The results are also applied. In particular, the solvability in the new algebra of previously insoluble complex equations can be used in practical problems, the ability to graphically represent functions of a complex variable can be used in mathematical modeling of spatial objects.

Keywords: hypercomplex numbers, vector space, spatial object modeling, complex number field, solvability of complex equations, complex variable functions

For citation:

Kolyagin, A. Yu. (2026). Set of double complex numbers as a special extension of the field of complex numbers. In: *Bulletin of the State University of Education*, 1, 92–121. <https://doi.org/10.18384/2949-5067-2026-1-92-121>

Введение

В этом исследовании представлена теория особого расширения поля комплексных чисел (C), которая является элементом теоретического развития математики, а также может быть использована в прикладном аспекте. В частности, по аналогии с теорией комплексных чисел [1], в которой снимается проблема неразрешимости ряда уравнений на множестве действительных чисел, новая алгебраическая система снимает проблему неразрешимости на C некоторого типа уравнений. Это уравнения с одним комплексным неизвестным X вида $X\bar{X} = Z$, где Z – некоторое фиксированное комплексное число с отрицательной действительной частью (в развёрнутом виде: $(x + yi)(x - yi) = a + bi$, $a < 0, b \in R$).

Также эта теория приводит к возможности графического отображения в трёхмерном пространстве функций комплексного переменного, что может применяться в математическом моделировании.

Данная теория не дублирует известные теории гиперкомплексных чисел [2], т. к. структура новых чисел, операция их умножения, свойства чисел и этой операции существенно отличаются от таковых, определённых для кватернионов и других чисел.

Определение множества двойных комплексных чисел и операций с ними

Определим множество C_d , элементами которого выступают упорядоченные пары комплексных чисел, соединённые знаком «+». Элементы будем называть двойными комплексными числами, или декомплексными числами. Такое число имеет две части: первое комплексное число в паре – левая часть, а второе – правая часть. Порядок комплексных чисел в декомплексном числе в принципе определён их расположением в паре и названиями – левая часть и правая часть. Но для лучшей наглядности и удобства эти части можно так или иначе выделить дополнительно. Теоретически можно было бы покрасить, например, правую часть, но решено дополнительно отмечать правую часть символом « j », который не обозначает какой-либо мнимого элемента:

$$(X + Vj) = (x + yi) + (v + wi)j.$$

Два числа равны тогда и только тогда, когда равны их левые и правые части:

$$C_d = \{(X + Vj)\} / X, V \in C, \quad (X_1 + V_1j) = (X_2 + V_2j) \Leftrightarrow \begin{cases} X_1 = X_2 \\ V_1 = V_2 \end{cases}$$

В соответствии с теорией алгебраических систем [3] будем определять на C_d операции сложения и умножения, для чего обозначим два произвольных числа:

$$\begin{aligned} (X_1 + V_1j) &= (x_1 + y_1i) + (v_1 + w_1i)j; \\ (X_2 + V_2j) &= (x_2 + y_2i) + (v_2 + w_2i)j. \end{aligned}$$

Определим сложение и вычитание правилом:

$$(X_1 + V_1j) \pm (X_2 + V_2j) = (X_1 \pm X_2) + (V_1 \pm V_2)j.$$

Это правило можно представить детально, раскрыв комплексные числа, составляющие декомплексные:

$$\begin{aligned} (X_1 + V_1j) \pm (X_2 + V_2j) &= \\ &= ((x_1 \pm x_2) + (y_1 \pm y_2)i) + ((v_1 \pm v_2) + (w_1 \pm w_2)i)j. \end{aligned}$$

Нейтральным элементом для этой операции выступает число, которое назовём декомплексным нулём или денулём и обозначим O_d :

$$O_d = (0 + 0i) + (0 + 0i)j.$$

Очевидно, что эта операция коммутативна, ассоциативна и обратима.

Теперь определим операцию умножения, используя операции умножения комплексных чисел, составляющих декомплексные, и сопряжённых с ними, обозначая их принятым образом $(\bar{X} = x - yi)$. Умножение любого декомплексного числа $X_1 + V_1j$ на другое произвольное число $X_2 + V_2j$ определим правилом:

$$(X_1 + V_1j)(X_2 + V_2j) = (X_1X_2 - \bar{V}_1\bar{V}_2) + (\bar{X}_1\bar{V}_2 + X_2V_1)j.$$

Левая часть результата: $(X_1X_2 - \bar{V}_1\bar{V}_2)$, правая – $(\bar{X}_1\bar{V}_2 + X_2V_1)$. Это правило также можно представить и более детально, раскрыв комплексные числа:

$$\begin{aligned} (X_1 + V_1j)(X_2 + V_2j) &= \\ &= ((x_1 + y_1i) + (v_1 + w_1i)j)((x_2 + y_2i) + (v_2 + w_2i)j) = \\ &= ((x_1 + y_1i)(x_2 + y_2i) - (v_1 - w_1i)(v_2 - w_2i)) + \\ &\quad + ((x_1 - y_1i)(v_2 - w_2i) + (x_2 + y_2i)(v_1 + w_1i))j = \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2 - v_1v_2 + w_1w_2 + (x_1y_2 + y_1x_2 + v_1w_2 + w_1v_2)i) + \\ &\quad + (x_1v_2 - y_1w_2 + x_2v_1 - y_2w_1 + (-x_1w_2 - y_1v_2 + x_2w_1 + y_2v_1)i)j. \end{aligned}$$

Пример:

$$\begin{aligned} ((2 + 3i) + (1 - 2i)j)((1 + 2i) + (1 + 4i)j) &= \\ &= ((2 + 3i)(1 + 2i) - (1 + 2i)(1 - 4i)) + \\ &\quad + ((2 - 3i)(1 - 4i) + (1 + 2i)(1 - 2i))j = (-13 + 9i) + (-5 - 11i)j. \end{aligned}$$

Нейтральным числом (обозначим E_j) для этой операции определим число $E_j = (1 + 0i) + (0 + 0i)j$:

$$\begin{aligned}(X + Vj)E_j &= (X(1 + 0i) - \bar{V}(0 - 0i)) + (\bar{X}(0 - 0i) + (1 + 0i)V)j = \\ &= (X + (0 + 0i)) + ((0 + 0i) + V)j = X + Vj.\end{aligned}$$

Данная операция является частично обратимой, т. е. для любых чисел $X_1 + V_1j \neq O_d$ и $X_2 + V_2j$ существует число $X + Vj$, для которого справедливо равенство $(X_1 + V_1j)(X + Vj) = (X_2 + V_2j)$. Число $X + Vj$ назовём частным $X_2 + V_2j$ и $X_1 + V_1j$ и обозначим $\frac{X_2 + V_2j}{X_1 + V_1j}$. Докажем это и определим формулы вычисления частного.

Из уравнения $(X_1 + V_1j)(X + Vj) = (X_2 + V_2j)$ с неизвестным $(X + Vj)$ следует, что система уравнений $\begin{cases} X_1X - \bar{V}_1\bar{V} = X_2 \\ \bar{X}_1\bar{V} + XV_1 = V_2 \end{cases}$ при $X_1 + V_1j \neq O_d$ должна иметь единственное решение. Решим эту систему:

$$\begin{aligned}\begin{cases} X_1X - \bar{V}_1\bar{V} = X_2 \\ \bar{X}_1\bar{V} + XV_1 = V_2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (X_1X - \bar{V}_1\bar{V})\bar{X}_1 = X_2\bar{X}_1 \\ (\bar{X}_1\bar{V} + XV_1)\bar{V}_1 = V_2\bar{V}_1 \end{cases} \Rightarrow X_1X\bar{X}_1 + XV_1\bar{V}_1 = \\ &= X_2\bar{X}_1 + V_2\bar{V}_1 \Rightarrow \\ \Rightarrow X &= \frac{X_2\bar{X}_1 + V_2\bar{V}_1}{X_1\bar{X}_1 + V_1\bar{V}_1} = \frac{(x_2 + y_2i)(x_1 - y_1i) + (v_2 + w_2i)(v_1 - w_1i)}{(x_1 + y_1i)(x_1 - y_1i) + (v_1 + w_1i)(v_1 - w_1i)} = \\ &= \frac{x_2x_1 + y_1y_2 + (y_2x_1 - x_2y_1)i + v_2v_1 + w_1w_2 + (w_2v_1 - v_2w_1)i}{x_1^2 + y_1^2 + v_1^2 + w_1^2} \Rightarrow \\ X &= \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + v_1v_2 + w_1w_2}{x_1^2 + y_1^2 + v_1^2 + w_1^2} + \frac{x_1y_2 - x_2y_1 + v_1w_2 - v_2w_1}{x_1^2 + y_1^2 + v_1^2 + w_1^2}i.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\begin{cases} X_1X - \bar{V}_1\bar{V} = X_2 \\ \bar{X}_1\bar{V} + XV_1 = V_2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (X_1X - \bar{V}_1\bar{V})V_1 = X_2V_1 \\ (\bar{X}_1\bar{V} + XV_1)X_1 = V_2X_1 \end{cases} \Rightarrow \bar{X}_1\bar{V}X_1 + \bar{V}_1\bar{V}V_1 = \\ &= V_2X_1 - X_2V_1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \bar{V} &= \frac{V_2X_1 - X_2V_1}{X_1\bar{X}_1 + V_1\bar{V}_1} = \frac{(v_2 + w_2i)(x_1 + y_1i) - (x_2 + y_2i)(v_1 + w_1i)}{(x_1 + y_1i)(x_1 - y_1i) + (v_1 + w_1i)(v_1 - w_1i)} = \\ &= \frac{v_2x_1 - w_2y_1 + (v_2y_1 + w_2x_1)i - x_2v_1 + y_2w_1 - (x_2w_1 + y_2v_1)i}{x_1^2 + y_1^2 + v_1^2 + w_1^2} =\end{aligned}$$

$$= \frac{x_1 v_2 - y_1 w_2 - x_2 v_1 + y_2 w_1}{x_1^2 + y_1^2 + v_1^2 + w_1^2} + \frac{y_1 v_2 + x_1 w_2 - x_2 w_1 - y_2 v_1}{x_1^2 + y_1^2 + v_1^2 + w_1^2} i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{x_1 v_2 - y_1 w_2 - x_2 v_1 + y_2 w_1}{x_1^2 + y_1^2 + v_1^2 + w_1^2} - \frac{y_1 v_2 + x_1 w_2 - x_2 w_1 - y_2 v_1}{x_1^2 + y_1^2 + v_1^2 + w_1^2} i.$$

Учитывая, что $x_1^2 + y_1^2 + v_1^2 + w_1^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = y_1 = v_1 = w_1 = 0$, считаем сделанное выше утверждение доказанным.

Понятие сопряжения двойных комплексных чисел, свойства операции их умножения

Комплексное число представляет одну пару элементов, а именно: действительную и мнимую части. Поэтому на $\mathbb{C}$ определена одна унарная операция сопряжения, когда в результате операции вместо второго элемента (мнимой части) ставится ему противоположный.

Декомплексное число представляет три пары элементов: каждая часть декомплексного числа это – комплексная пара, и сами части декомплексного числа составляют третью пару. Поэтому на данном множестве определим три типа унарной операции сопряжения.

Число $\bar{X} + Vj$ будем называть **сопряжённым слева** числу $X + Vj$ и обозначать левой стрелкой: $\overleftarrow{X + Vj} = \bar{X} + Vj = (x - yi) + (v + wi)j$.

Число $X + \bar{V}j$ будем называть **сопряжённым справа** числу $X + Vj$ и обозначать правой стрелкой: $\overrightarrow{X + Vj} = X + \bar{V}j = (x + yi) + (v - wi)j$.

Второй элемент третьей пары может заменяться противоположным или возможен равносильный вариант, когда заменяются на противоположные вторые элементы в левой и правой частях, а потом правая часть результата заменяется противоположным значением. Два варианта являются равносильными, т. к. при определении сопряжения по первому варианту операция по второму варианту может быть выражена имеющимися унарными операциями и наоборот. Мы выберем второй вариант и число $\bar{X} - \bar{V}j$ будем называть **сопряжённым** числу $X + Vj$ и обозначать чертой: $\overline{X + Vj} = \bar{X} - \bar{V}j = (x - yi) - (v - wi)j$.

Если с числом осуществляется одновременно операция сопряжения слева и справа, то для удобства можно обозначать это одной стрелкой в обе стороны: $\overleftrightarrow{X + Vj} = \overleftarrow{X + Vj} = \bar{X} + \bar{V}j$.

Некоторые свойства сопряжённых чисел:

- $$(X + Vj)(\overline{X + Vj}) = (X + Vj)(\bar{X} - \bar{V}j) = (X\bar{X} + \bar{V}\bar{V}) + (-\bar{X}\bar{V} + V\bar{X})j =$$

$$= (x^2 + y^2 + v^2 + w^2 + 0i) + (-\bar{X}V + \bar{X}V)j =$$

$$= (x^2 + y^2 + v^2 + w^2 + 0i) + (0 + 0i)j.$$

- Выполнение дважды одного и того же сопряжения с числом или выражением не меняет это число или выражение.

Например, $\overrightarrow{\overrightarrow{X + V_j}} = \overrightarrow{\overrightarrow{X} + \overrightarrow{V_j}} = \overrightarrow{\overline{\overline{X}} + \overline{\overline{V_j}}} = \overline{\overline{X}} + \overline{\overline{V_j}} = X + V_j$.

- $\overrightarrow{(\overrightarrow{X_1 + V_{1j}})(\overrightarrow{X_2 + V_{2j}})} = (X_1 + V_{1j})(X_2 + V_{2j})$.

$$(X_1 + V_{1j})(X_2 + V_{2j}) = (X_1 X_2 - \overline{V_1} \overline{V_2}) + (\overline{X_1} \overline{V_2} + X_2 V_1)j;$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{(\overrightarrow{X_1 + V_{1j}})(\overrightarrow{X_2 + V_{2j}})} &= \overrightarrow{(\overline{\overline{X_1 + V_{1j}}})(\overline{\overline{X_2 + V_{2j}}})} = \\ &= \overrightarrow{(\overline{\overline{X_1} \overline{X_2} - \overline{V_1} \overline{V_2}} + (\overline{X_1} \overline{V_2} + \overline{X_2} \overline{V_1}))} = \\ &= \overrightarrow{(\overline{\overline{X_1} \overline{X_2} - \overline{V_1} \overline{V_2}})} + \overrightarrow{(\overline{\overline{X_1} \overline{V_2} + \overline{X_2} \overline{V_1}})} = \\ &= (\overline{\overline{X_1} \overline{X_2} - \overline{V_1} \overline{V_2}}) + (\overline{\overline{X_1} \overline{V_2} + \overline{X_2} \overline{V_1}})j = (X_1 X_2 - \overline{V_1} \overline{V_2}) + (\overline{X_1} \overline{V_2} + X_2 V_1)j. \end{aligned}$$

Рассмотрим свойства операции умножения. Она не является коммутативной, т. е. $(X_1 + V_{1j})(X_2 + V_{2j}) \neq (X_2 + V_{2j})(X_1 + V_{1j})$ для всех чисел. Но для этой операции справедливо следующее свойство:

$$(X_1 + V_{1j})(X_2 + V_{2j}) = \overrightarrow{(X_2 + V_{2j})(X_1 + V_{1j})}.$$

Убедимся в этом, преобразовав и сравнив части равенства.

$$\begin{aligned} (X_1 + V_{1j})(X_2 + V_{2j}) &= (X_1 X_2 - \overline{V_1} \overline{V_2}) + (\overline{X_1} \overline{V_2} + X_2 V_1)j; \\ \overrightarrow{(X_2 + V_{2j})(X_1 + V_{1j})} &= \overrightarrow{(X_2 X_1 - \overline{V_2} \overline{V_1}) + (\overline{X_2} \overline{V_1} + V_2 X_1)j} = \\ &= (X_1 X_2 - \overline{V_1} \overline{V_2}) + \overrightarrow{(\overline{X_2} \overline{V_1} + V_2 X_1)j} = (X_1 X_2 - \overline{V_1} \overline{V_2}) + (\overline{\overline{X_2} \overline{V_1}} + \overline{V_2 X_1})j = \\ &= (X_1 X_2 - \overline{V_1} \overline{V_2}) + (\overline{X_1} \overline{V_2} + X_2 V_1)j. \end{aligned}$$

Приведём пример:

$$((2 + 3i) + (1 - 2i)j)((1 + 2i) + (1 + 4i)j) = -13 + 9i + (-5 - 11i)j.$$

Переставим местами сомножители и применим сопряжение справа:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{((1 + 2i) + (1 + 4i)j)((2 + 3i) + (1 - 2i)j)} &= \\ \overrightarrow{2 - 6 - 1 - 8 + (4 + 3 - 2 + 4)i + (1 + 4 + 2 - 12 + (2 - 2 + 3 + 8)i)j} &= \\ = \overrightarrow{-13 + 9i + (-5 + 11i)j} = -13 + 9i + (-5 - 11i)j. \end{aligned}$$

Это свойство будем называть **сопряжённой коммутативностью**.

Операция умножения не обладает свойством ассоциативности, но для неё справедливо свойство:

$$[(X_1 + V_1j)(X_2 + V_2j)](X_3 + V_3j) = (X_1 + V_1j) \left[\overrightarrow{(X_2 + V_2j)(X_3 + V_3j)} \right].$$

Убедимся в этом:

$$\begin{aligned} [(X_1 + V_1j)(X_2 + V_2j)](X_3 + V_3j) &= [(X_1X_2 - \overline{V_1V_2}) + (\overline{X_1V_2} + X_2V_1)j](X_3 + V_3j) = \\ &= [(X_1X_2 - \overline{V_1V_2})X_3 - (\overline{X_1V_2} + X_2V_1)\overline{V_3}] + [(X_1X_2 - \overline{V_1V_2})\overline{V_3} + (\overline{X_1V_2} + X_2V_1)X_3]j = \\ &= [X_1X_2X_3 - \overline{V_1V_2}X_3 - X_1V_2\overline{V_3} - \overline{X_2V_1}V_3] + [\overline{X_1X_2}V_3 - V_1V_2\overline{V_3} + \overline{X_1V_2}X_3 + X_2V_1X_3]j; \\ (X_1 + V_1j) \left[\overrightarrow{(X_2 + V_2j)(X_3 + V_3j)} \right] &= (X_1 + V_1j) \left[\overrightarrow{(X_2 + \overline{V_2j})(X_3 + V_3j)} \right] = \\ &= (X_1 + V_1j) \left[\overrightarrow{(X_2X_3 - V_2\overline{V_3}) + (\overline{X_2V_3} + X_3\overline{V_2})j} \right] = (X_1 + V_1j) \times \\ &\times \left[(X_2X_3 - V_2\overline{V_3}) + (\overline{X_2V_3} + X_3\overline{V_2})j \right] = (X_1 + V_1j) \left[(X_2X_3 - V_2\overline{V_3}) + (X_2V_3 + \overline{X_3V_2})j \right] = \\ &= [X_1(X_2X_3 - V_2\overline{V_3}) - \overline{V_1}(X_2V_3 + \overline{X_3V_2})] + [\overline{X_1}(X_2V_3 + \overline{X_3V_2}) + V_1(X_2X_3 - V_2\overline{V_3})]j = \\ &= [X_1X_2X_3 - X_1V_2\overline{V_3} - \overline{V_1}(X_2V_3 + \overline{X_3V_2})] + [\overline{X_1}(X_2V_3 + \overline{X_3V_2}) + V_1(X_2X_3 - V_2\overline{V_3})]j = \\ &= [X_1X_2X_3 - \overline{V_1V_2}X_3 - X_1V_2\overline{V_3} - \overline{X_2V_1}V_3] + [\overline{X_1X_2}V_3 - V_1V_2\overline{V_3} + \overline{X_1V_2}X_3 + X_2V_1X_3]j. \end{aligned}$$

Это свойство назовём **левой сопряжённой ассоциативностью**.

Для операции умножения также справедливо свойство:

$$(X_1 + V_1j) \left[\overrightarrow{(X_2 + V_2j)(X_3 + V_3j)} \right] = [(X_1 + V_1j)(\overrightarrow{X_2 + V_2j})](X_3 + V_3j).$$

В этом можно убедиться, используя свойство сопряжённой коммутативности и свойство левой сопряжённой ассоциативности:

$$\begin{aligned} (X_1 + V_1j) \left[\overrightarrow{(X_2 + V_2j)(X_3 + V_3j)} \right] &= (X_1 + V_1j)[(X_3 + V_3j)(X_2 + V_2j)] = \\ &= \overrightarrow{[(X_3 + V_3j)(X_2 + V_2j)](X_1 + V_1j)} = (X_3 + V_3j) \left[\overrightarrow{(X_2 + V_2j)(X_1 + V_1j)} \right] = \\ &= \overrightarrow{(X_3 + V_3j)[(X_1 + V_1j)(\overrightarrow{X_2 + V_2j})]} = [(X_1 + V_1j)(\overrightarrow{X_2 + V_2j})](X_3 + V_3j). \end{aligned}$$

Это свойство назовём **правой сопряжённой ассоциативностью**. Формулы левой и правой сопряжённой ассоциативности равносильны, т. к. каждая может быть получена с помощью другой. Поэтому одно свойство сопряжённой ассоциативности выражено разными формулами. Для удобства оставим различные названия этого свойства для разных формул.

Операция умножения также обладает свойством дистрибутивности слева и справа по отношению к сложению.

$$\begin{aligned}
& (X_1 + V_1j)[(X_2 + V_2j) + (X_3 + V_3j)] = \\
& = (X_1 + V_1j)(X_2 + V_2j) + (X_1 + V_1j)(X_3 + V_3j). \\
& (X_1 + V_1j)[(X_2 + V_2j) + (X_3 + V_3j)] = (X_1 + V_1j)[(X_2 + X_3) + (V_2 + V_3)j] = \\
& = [X_1(X_2 + X_3) - \overline{V_1}(\overline{V_2 + V_3})] + [\overline{X_1}(\overline{V_2 + V_3}) + V_1(X_2 + X_3)]j = \\
& = [X_1X_2 + X_1X_3 - \overline{V_1}\overline{V_2} - \overline{V_1}\overline{V_3}] + [\overline{X_1}\overline{V_2} + \overline{X_1}\overline{V_3} + V_1X_2 + V_1X_3]j; \\
& (X_1 + V_1j)(X_2 + V_2j) + (X_1 + V_1j)(X_3 + V_3j) = \\
& = [(X_1X_2 - \overline{V_1}\overline{V_2}) + (\overline{X_1}\overline{V_2} + X_2V_1)]j + \\
& + [(X_1X_3 - \overline{V_1}\overline{V_3}) + (\overline{X_1}\overline{V_3} + X_3V_1)]j = \\
& = [X_1X_2 - \overline{V_1}\overline{V_2} + X_1X_3 - \overline{V_1}\overline{V_3}] + [\overline{X_1}\overline{V_2} + X_2V_1 + \overline{X_1}\overline{V_3} + X_3V_1]j. \\
& [(X_2 + V_2j) + (X_3 + V_3j)](X_1 + V_1j) = \\
& = (X_2 + V_2j)(X_1 + V_1j) + (X_3 + V_3j)(X_1 + V_1j). \\
& [(X_2 + V_2j) + (X_3 + V_3j)](X_1 + V_1j) = [(X_2 + X_3) + (V_2 + V_3)j](X_1 + V_1j) = \\
& = [(X_2 + X_3)X_1 - (\overline{V_2 + V_3})\overline{V_1}] + [(\overline{X_2 + X_3})\overline{V_1} + (V_2 + V_3)X_1]j = \\
& = [X_2X_1 + X_3X_1 - \overline{V_2}\overline{V_1} - \overline{V_3}\overline{V_1}] + [\overline{X_2}\overline{V_1} + \overline{X_3}\overline{V_1} + V_2X_1 + V_3X_1]j; \\
& (X_2 + V_2j)(X_1 + V_1j) + (X_3 + V_3j)(X_1 + V_1j) = \\
& = [(X_2X_1 - \overline{V_2}\overline{V_1}) + (\overline{X_2}\overline{V_1} + X_1V_2)]j + \\
& + [(X_3X_1 - \overline{V_3}\overline{V_1}) + (\overline{X_3}\overline{V_1} + X_1V_3)]j = \\
& = [X_2X_1 - \overline{V_2}\overline{V_1} + X_3X_1 - \overline{V_3}\overline{V_1}] + [\overline{X_2}\overline{V_1} + X_1V_2 + \overline{X_3}\overline{V_1} + X_1V_3]j.
\end{aligned}$$

Назовём это свойство сопряжённой дистрибутивностью.

Множество комплексных чисел находится во взаимно однозначном соответствии с подмножеством C_{dc} множества C_d , где правая часть декомплексных чисел является комплексным нулём (O_i):

$$C = \{X / X = x + yi, x, y \in R\} \leftrightarrow C_{dc} = \{X + O_ij / X = x + yi, x, y \in R\}.$$

Операции сложения и умножения, определённые на C_d , являются замкнутыми и на C_{dc} , а указанная биекция сохраняет операции сложения и умножения, определённые на C и на C_{dc} :

$$\begin{aligned}
& (X_1 + O_ij) \pm (X_2 + O_ij) = X_1 \pm X_2 + O_ij. \\
& (X_1 + O_ij)(X_2 + O_ij) = (X_1X_2 - \overline{O_i}\overline{O_i}) + (\overline{X_1}\overline{O_i} + X_2O_i)j = X_1X_2 + O_ij
\end{aligned}$$

Формулы для частного при $V_1 = V_2 = O_i \Leftrightarrow v_1 = v_2 = w_1 = w_2 = 0$:

$$X = \frac{x_2 x_1 + y_1 y_2 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0}{x_1^2 + y_1^2 + 0^2 + 0^2} + \frac{y_2 x_1 - x_2 y_1 + 0 \cdot 0 - 0 \cdot 0}{x_1^2 + y_1^2 + 0^2 + 0^2} i = \frac{x_2 x_1 + y_1 y_2}{x_1^2 + y_1^2} + \frac{y_2 x_1 - x_2 y_1}{x_1^2 + y_1^2} i;$$

$$V = \frac{0 x_1 - 0 y_1 - x_2 \cdot 0 + y_2 \cdot 0}{x_1^2 + y_1^2 + 0^2 + 0^2} - \frac{0 y_1 + 0 x_1 - x_2 \cdot 0 - y_2 \cdot 0}{x_1^2 + y_1^2 + 0^2 + 0^2} i = O_i.$$

Свойства операций декомплексных чисел на подмножестве C_{dc} , т. е. при $V_1 = V_2 = O_i$, сводятся к свойствам операций комплексных чисел.

Сопряжённая коммутативность сводится к коммутативности:

$$(X_1 + O_{ij})(X_2 + O_{ij}) = X_1 X_2 = X_2 X_1 = \overline{(X_2 + O_{ij})(X_1 + O_{ij})}.$$

Сопряжённая ассоциативность сводится к ассоциативности (на примере левой ассоциативности):

$$\begin{aligned} [(X_1 + O_{ij})(X_2 + O_{ij})](X_3 + O_{ij}) &= (X_1 X_2) X_3 = \\ &= X_1 (X_2 X_3) = (X_1 + O_{ij}) \left[\overline{(X_2 + O_{ij})(X_3 + O_{ij})} \right]. \end{aligned}$$

Сопряжённая дистрибутивность сводится к дистрибутивности (на примере дистрибутивности слева):

$$\begin{aligned} (X_1 + O_{ij})[(X_2 + O_{ij}) + (X_3 + O_{ij})] &= X_1(X_2 + X_3) = \\ &= X_1 X_2 + X_1 X_3 = (X_1 + O_{ij})(X_2 + O_{ij}) + (X_1 + O_{ij})(X_3 + O_{ij}). \end{aligned}$$

Таким образом подмножество C_{dc} с операциями сложения и умножения, включая их свойства, определёнными на C_{dc} , как и на C_d , составляет поле, изоморфное полю комплексных чисел. На основе этого само множество C_d можно рассматривать как особое расширение множества комплексных чисел C , при котором операции на C «расширяются» до операций на C_d , включая унарную операцию сопряжения, а также свойства операций на C «расширяются» до соответствующих свойств операций на C_d .

Множество C_d с определёнными выше на нём операциями сложения и умножения и их свойствами будем называть **деполем**, на котором можно рассматривать различные уравнения и их решения.

Уравнения, не имеющие решений на множестве комплексных чисел и разрешимые на множестве декомплексных чисел

Вернёмся к вопросу неразрешимости на C уравнений вида

$$(x + yi)(x - yi) = a + bi, a < 0, b \in R.$$

Если говорить об уравнении $x^2 = -1$ в контексте определения комплексных чисел, то нахождение решения этого уравнения по сути сводится к нахождению на множестве C решения уравнения

$$(x + yi)(x + yi) = -1 + 0i.$$

Для поиска решений рассматриваем систему $\begin{cases} x^2 - y^2 = -1 \\ 2xy = 0 \end{cases}$ и находим два решения: $0 + i$ и $0 - i$.

В случае уравнения $(x + yi)(x - yi) = a + bi, a < 0, b \in R$ действуем аналогично, т. е. рассматриваем уравнение с произведением неизвестного декомплексного числа с сопряжённым себе слева на C_d :

$$[(x + yi) + (v + wi)j][(x - yi) + (v + wi)j] = a + bi + (0 + 0i)j.$$

Преобразуем левую часть уравнения:

$$\begin{aligned} & [(x + yi) + (v + wi)j][(x - yi) + (v + wi)j] = \\ & = [(x + yi)(x - yi) - (v - wi)(v - wi)] + \\ & + [(x - yi)(v - wi) + (v + wi)(x - yi)]j = \\ & = [x^2 + y^2 - v^2 + w^2 + 2vwi] + [2xv - 2yvi]j. \end{aligned}$$

В поисках решений рассматриваем систему:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - v^2 + w^2 + 2vwi = a + bi \\ 2xv - 2yvi = 0 + 0i \end{cases}.$$

Если положить $v = 0$, то при удовлетворении второго уравнения, противоречие есть в первом, т. к. $x^2 + y^2 + w^2 \neq a + bi$ для $a < 0, b \in R$. При $v \neq 0$ получаем $2xv - 2yvi = 0 + 0i \Rightarrow x = y = 0$.

Учитывая, что $v \neq 0$, рассматриваем уравнение

$$\begin{aligned} -v^2 + w^2 + 2vwi = a + bi & \Leftrightarrow \begin{cases} v^2 - w^2 = -a \\ 2vw = b \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} v^2 - w^2 = -a \\ w = \frac{b}{2v} \end{cases} & \Rightarrow v^2 - \left(\frac{b}{2v}\right)^2 = -a \Rightarrow \frac{4v^4 + a4v^2 - b^2}{4v^2} = 0. \end{aligned}$$

Решая уравнение $4v^4 + a4v^2 - b^2 = 0$ ($a < 0$), находим v , а w из системы:

$$v = \pm \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \quad \text{и} \quad w = \frac{-b}{\pm \sqrt{2(-a + \sqrt{a^2 + b^2})}}.$$

Таким образом, рассматриваемое уравнение имеет два решения:

$$(0 + 0i) + \left(\sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} + \frac{-b}{\sqrt{2(-a + \sqrt{a^2 + b^2})}} i \right) j;$$

$$(0 + 0i) + \left(-\sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} + \frac{b}{\sqrt{2(-a + \sqrt{a^2 + b^2})}} i \right) j.$$

В случае $b = 0$ уравнение принимает вид:

$$[(x + yi) + (0 + 0i)j][(x - yi) + (0 + 0i)j] = a + 0i + (0 + 0i)j.$$

В этом случае оно имеет корни:

$$(0 + 0i) + (\sqrt{-a} + 0i)j \text{ и } (0 + 0i) + (-\sqrt{-a} + 0i)j.$$

При $b = 0$ и $a = -1$ уравнение принимает вид:

$$[(x + yi) + (0 + 0i)j][(x - yi) + (0 + 0i)j] = -1 + 0i + (0 + 0i)j.$$

Тогда корнями будут $(0 + 0i) + (1 + 0i)j$ и $(0 + 0i) + (-1 + 0i)j$. Проверим, например, первый корень:

$$\begin{aligned} & [(0 + 0i) + (1 + 0i)j][(0 - 0i) + (1 + 0i)j] = \\ & = [(0 + 0i)(0 - 0i) - (1 - 0i)(1 - 0i)] + \\ & + [(0 - 0i)(1 - 0i) + (1 + 0i)(0 - 0i)]j = -1 + 0i + (0 + 0i)j. \end{aligned}$$

Ещё один пример: уравнение $(x + yi)(x - yi) = -4 + 3i$ на C или $[(x + yi) + (v + wi)j][(x - yi) + (v + wi)j] = -4 + 3i + (0 + 0i)j$ на C_d .

Его корни: $(0 + 0i) + \left(\sqrt{4,5} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)j$ и $(0 + 0i) + \left(-\sqrt{4,5} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)j$.

Проверка:

$$\begin{aligned} & \left[(0 + 0i)(0 - 0i) - \left(\sqrt{4,5} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt{4,5} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) \right] + \\ & + \left[(0 - 0i)\left(\sqrt{4,5} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\sqrt{4,5} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)(0 - 0i) \right] j = \\ & = [0 + 0 - 4,5 + 0,5 + \sqrt{9}i] + [0 - 0i]j = -4 + 3i + (0 + 0i)j; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left[(0 + 0i)(0 - 0i) - \left(-\sqrt{4,5} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left(-\sqrt{4,5} - \frac{1}{\sqrt{2}} i \right) \right] + \\
 & + \left[(0 - 0i) \left(-\sqrt{4,5} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \left(-\sqrt{4,5} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) (0 - 0i) \right] j = \\
 & = [0 + 0 - 4,5 + 0,5 + \sqrt{9}i] + [0 - 0i]j = -4 + 3i + (0 + 0i)j.
 \end{aligned}$$

Рассмотрим на C уравнение с неизвестным $z = x + iy$ ($x, y \in R$) вида: $a_1(z\bar{z})^2 + a_2(z\bar{z}) + a_3 = 0$, $a_1, a_2, a_3 \in R$.

Решая его относительно $(z\bar{z})$, получим:

$$(z\bar{z}) = (x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2 + 0i = c + di, \quad c, d \in R.$$

В случае $c \geq 0$ и $d = 0$ уравнение имеет один корень при $c = 0$ или бесконечное множество корней при $c > 0$. В противном случае, т. е. при $c < 0$ или $d \neq 0$, оно не разрешимо на множестве C , но разрешимо на C_d .

Геометрическая интерпретация декомплексных чисел, их модуль, аргумент и особые формы представления

Для декомплексных чисел определим векторное пространство, выступающее их геометрической интерпретацией. Это пространство, как и двумерное векторное пространство C^2 [4], основано на множестве упорядоченных пар комплексных чисел. Но оно отличается от C^2 определёнными свойствами. Оно также отличается от пространства комплексных векторов [5]. Определим элементы нового пространства.

Рассмотрим трёхмерное пространство точек, в котором ось ox будем называть горизонтальной осью, ov – вертикальной осью и oi – совмещённой осью. Плоскость с осями ox и oi рассматриваем как двумерное векторное пространство, которое назовём горизонтальным, интерпретирующим множество комплексных чисел $x + yi$. Плоскость с осями ov и oi рассматриваем как двумерное векторное пространство, которое назовём вертикальным, интерпретирующим множество комплексных чисел $v + wi$. На оси oi отмечаются оба значения мнимых частей y и w (рис. 1).

Пусть $A = (x_1 + y_1 i) + (v_1 + w_1 i)j$ – некоторое декомплексное число. Построим в горизонтальной и вертикальной комплексных плоскостях векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$, соответствующие комплексным числам в левой и правой частях A (рис. 1, слева). На основе векторов построим треугольник OAB . Очевидно, что такой треугольник однозначно определяется направляющими векторами $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$, т. е. декомплексным числом. Направление вектора $\overrightarrow{OA}$ назовём горизонтальным, а направление вектора $\overrightarrow{OB}$ – вертикальным направлением треугольника.

Когда действительные части комплексных чисел $x_1 = v_1 = 0$, тогда треугольник вырождается в отрезок $[AB]$ (рис. 1, справа). Считаем, что у

треугольника одно нулевое направление, если один из векторов нулевой, и оба направления нулевые, если оба вектора нулевые.

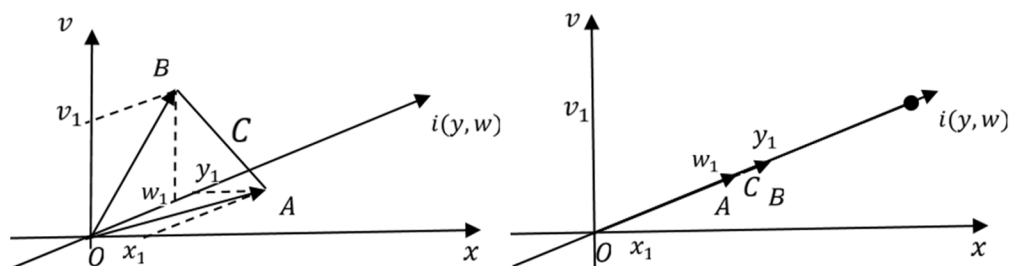


Рис. 1 / Fig. 1. Построение поливектора, справа при $x_1 = v_1 = 0$ / Construction of a polyvector, right, when $x_1 = v_1 = 0$.

Источник: данные автора.

Таким образом, обозначив направления стрелками, получаем в трёхмерном пространстве объекты, имеющие два направления. По аналогии представления вектора как направленного отрезка будем считать такие объекты направленными треугольниками. В перспективе можно рассматривать направленные объекты и с большим количеством направлений. Поэтому такого рода объекты будем называть поливекторами. Исходную точку O направляющих векторов назовём началом поливектора, точку A на горизонтальной плоскости – горизонтальной вершиной, точку B на вертикальной плоскости – вертикальной вершиной. Дополнительно на стороне AB треугольника выделим середину точкой C , которую будем называть центральной вершиной. Обозначать поливектор будем со стрелкой. Если обозначаем его всеми четырьмя точками, то начинаем с начала поливектора и заканчиваем его центральной вершиной: $\overrightarrow{OAB\vec{C}}$.

Теперь в привычном трёхмерном пространстве введём особую систему, построенную не на координатных осях, а на перпендикулярных друг другу координатных плоскостях с началом координат в выбранной точке на прямой, по которой они пересекаются. На рис.1 выше – это горизонтальная координатная плоскость xOi и вертикальная координатная плоскость vOi . Началом координат выступает точка O . Координатные плоскости рассматриваем как комплексные плоскости, а систему координат назовём плоскостной.

Координатами поливектора в этом случае выступают два комплексных числа: $\overrightarrow{OAB\vec{C}}(x_1 + y_1 i; v_1 + w_1 i)$. Визуально поливекторы можно рассматривать как в трёхмерном пространстве со совмещённой осью, так и в плоскостной системе координат. Далее в соответствии с теорией векторных пространств [6] на множестве поливекторов определяем соответствующие операции. Начнём с операций сложения и вычитания:

$$\vec{A}(x_1 + y_1i; v_1 + w_1i) \pm \vec{B}(x_2 + y_2i; v_2 + w_2i) = \\ = \vec{C}((x_1 \pm x_2) + (y_1 \pm y_2)i; (v_1 \pm v_2) + (w_1 \pm w_2)i).$$

На рис. 2 показана графическая интерпретация сложения поливекторов $\vec{OABC}$ и $\vec{OA'B'C'}$. В горизонтальной комплексной плоскости вектор $\vec{OA}$ складываем с вектором $\vec{OA'}$, а в вертикальной вектор $\vec{OB}$ складываем с вектором $\vec{OB'}$. Результат – суммарный поливектор $\vec{OA''B''C''}$.

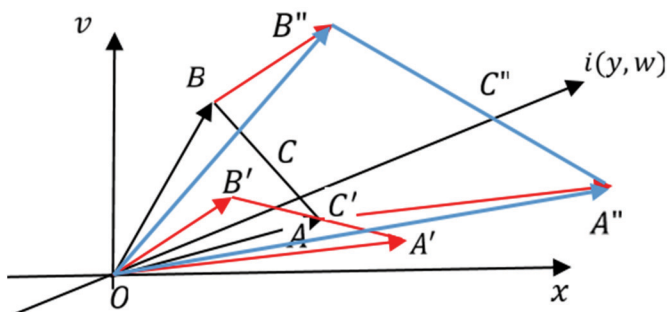


Рис. 2 / Fig. 2. Сложение поливекторов / Adding polyvectors.

Источник: данные автора.

Очевидно, что эта операция коммутативна и ассоциативна. В отношении сложения существует нулевой элемент – нулевой поливектор $\vec{O}(0 + 0i; 0 + 0i)$, т. к. для любого поливектора $\vec{A}$ справедливо равенство $\vec{A} + \vec{O} = \vec{O} + \vec{A} = \vec{A}$. Также для каждого поливектора $\vec{A}(x + yi; v + wi)$ есть ему противоположный: $\vec{A}'(-x - yi; -v - wi)$ / $\vec{A} + \vec{A}' = \vec{A}' + \vec{A} = \vec{O}$.

Далее на множестве поливекторов определим операцию умножения поливектора и на комплексное число. Операцию определяем по правилу умножения декомплексных чисел, представляя пару координат вектора как декомплексное число $X + Vj = x + yi + (v + wi)j$ и число, с которым перемножается поливектор в виде соответствующего декомплексного числа $Z = a + bi + (0 + 0i)j$:

$$\vec{A}(X; V)Z = \vec{A}(x + yi; v + wi)(a + bi + (0 + 0i)j) = \\ = \vec{A}((x + yi)(a + bi) - (v + wi)(0 - 0i); (x - yi)(0 - 0i) + \\ + (v + wi)(a + bi)) = \vec{A}((x + yi)(a + bi); (v + wi)(a + bi)) = \vec{A}(XZ; VZ).$$

Используя это, покажем справедливость аксиом векторного пространства для множества поливекторов:

$$\bullet \quad (\vec{A}(X; V)Z_1)Z_2 = \vec{A}_1(XZ_1; VZ_1)Z_2 = \vec{A}_2(XZ_1Z_2; VZ_1Z_2) = \vec{A}(X; V)(Z_1Z_2).$$

- $\vec{A}(X; V)(Z_1 + Z_2) = \vec{A}_1(XZ_1 + XZ_2; VZ_1 + VZ_2) = \vec{A}_2(XZ_1; VZ_1) + \vec{A}_3(XZ_2; VZ_2) = \vec{A}(X; V)Z_1 + \vec{A}(X; V)Z_2.$
- $(\vec{A}_1(X_1; V_1) + \vec{A}_2(X_2; V_2))Z = \vec{A}_3((X_1 + X_2)Z; (V_1 + V_2)Z) = \vec{A}_4(X_1Z; V_1Z) + \vec{A}_5(X_2Z; V_2Z) = \vec{A}_1(X_1; V_1)Z + \vec{A}_2(X_2; V_2)Z.$
- $\vec{A}(X; V)(1 + 0i + (0 + 0i)j) = \vec{A}(X; V).$

Множество поливекторов является комплексным векторным пространством. Умножение декомплексных чисел обладает свойством сопряжённой коммутативности. Поэтому справедливо равенство $Z\vec{A}(X; V) = \vec{A}(ZX; \bar{Z}\bar{V}) = \vec{A}(ZX; \bar{Z}\bar{V}) = \vec{A}(XZ; \bar{V}\bar{Z})$. Покажем это:

$$\begin{aligned} (a + bi + (0 + 0i)j)\vec{A}(x + yi; v + wi) &= \\ = \vec{A}((a + bi)(x + yi) - (0 - 0i)(v - wi); (a - bi)(v - wi) + \\ + (0 + 0i)(x + yi)) &= \vec{A}((a + bi)(x + yi); (a - bi)(v - wi)). \end{aligned}$$

С учётом этого покажем справедливость дополнительных свойств:

- $Z_2(\vec{A}(X; V)Z_1) = Z_2\vec{A}(XZ_1; VZ_1) = \vec{A}_2(XZ_1Z_2; \overline{VZ_1Z_2}) = (Z_1Z_2)\vec{A}(X; V).$
- $(Z_1 + Z_2)\vec{A}(X; V) = \vec{A}_1(XZ_1 + XZ_2; \overline{VZ_1} + \overline{VZ_2}) = \vec{A}_2(XZ_1; \overline{VZ_1}) + \vec{A}_3(XZ_2; \overline{VZ_2}) = Z_1\vec{A}(X; V) + Z_2\vec{A}(X; V).$
- $Z(\vec{A}_1(X_1; V_1) + \vec{A}_2(X_2; V_2)) = \vec{A}_3(Z(X_1 + X_2); \bar{Z}(\bar{V}_1 + \bar{V}_2)) = \vec{A}_4(ZX_1; \bar{Z}\bar{V}_1) + \vec{A}_5(ZX_2; \bar{Z}\bar{V}_2) = Z\vec{A}_1(X_1; V_1) + Z\vec{A}_2(X_2; V_2).$
- $(1 + 0i + (0 + 0i)j)\vec{A}(X; V) = \vec{A}(X; \bar{V}).$

С учётом и этих свойств пространство поливекторов будем называть **комплексным поливекторным пространством с сопряжённо ассоциативным умножением** (далее – **поливекторное пространство**).

Отметим, что геометрической интерпретацией декомплексного числа, сопряжённого слева и справа одновременно, а также декомплексного числа, полностью сопряжённого с декомплексным числом $A = (x_1 + y_1i) + (v_1 + w_1i)j$, является симметрия соответствующих поливекторов с поливектором, представляющим число A .

На рис. 3 поливектор $\vec{OA'B'C'}(x_1 - y_1i; v_1 - w_1i)$, отвечающий сопряжённому слева и справа числу $\vec{A} = (x_1 - y_1i) + (v_1 - w_1i)j$, и поливектор

$\overrightarrow{OABC}(x_1 + y_1 i; v_1 + w_1 i)$, представляющий число A , симметричны относительно плоскости xOv .

Поливектор $\overrightarrow{OA''B''C''}(x_1 - y_1 i; -(v_1 - w_1 i))$, представляющий число $\bar{A} = (x_1 - y_1 i) - (v_1 - w_1 i)j$, и поливектор $\overrightarrow{OABC}(x_1 + y_1 i; v_1 + w_1 i)$ симметричны относительно оси Ox (точки A' и A'' совпадают).

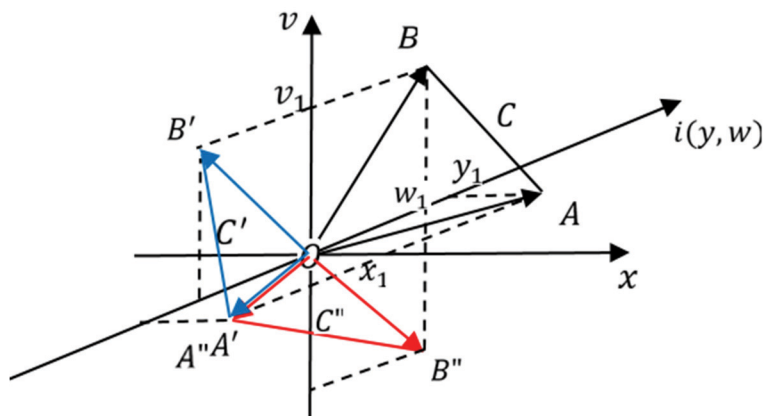


Рис. 3 / Fig. 3. Интерпретация сопряжённых чисел / Interpretation of conjugate numbers.

Источник: данные автора.

Рассматривая вопрос нормирования поливекторного пространства, определим функцию с областью значений не на множестве действительных чисел, как для обычного понятия нормы, а на множестве комплексных чисел.

Функцию, которая каждому элементу поливекторного пространства ставит в соответствие комплексное число, будет называть s -нормой и обозначать $f(\vec{A}) = \|\vec{A}\|$, если она удовлетворяет следующим аксиомам:

1. $f(\vec{A}) = \|\vec{A}\| = 0 + 0i \Leftrightarrow \vec{A} = \vec{O}$.
2. $f(\vec{AZ}) = \|\vec{AZ}\| = \|\vec{A}\||Z| = f(\vec{A})|Z|$; $Z = a + bi$; $a, b \in R$.
3. Пусть $f(\vec{A_1} + \vec{A_2}) = \|\vec{A_1} + \vec{A_2}\| = a + bi$,
 $f(\vec{A_1}) = \|\vec{A_1}\| = a_1 + b_1 i$; $a_1, b_1 \in R$,
 $f(\vec{A_2}) = \|\vec{A_2}\| = a_2 + b_2 i$; $a_2, b_2 \in R$.

Тогда справедливы неравенства $\begin{cases} a \leq a_1 + a_2 \\ b \leq b_1 + b_2 \end{cases}$.

Несложно показать, что действительная и мнимая части s -нормы поливектора всегда неотрицательны.

Положим в третьей аксиоме $\vec{A_2} = \vec{A_1}(-1 + 0i)$. Тогда:

$$f(\vec{A_2}) = (a_1 + b_1 i)|-1 + 0i| = (a_1 + b_1 i) \Rightarrow \\ \Rightarrow f(\vec{A_1} + \vec{A_2}) = f(\vec{A_1} + \vec{A_1}(-1 + 0i)) = f(\vec{A_1} + (-\vec{A_1})) = 0 + 0i.$$

В соответствии с третьей аксиомой: $\begin{cases} 0 \leq a_1 + a_1 \Rightarrow a_1 \geq 0 \\ 0 \leq b_1 + b_1 \Rightarrow b_1 \geq 0 \end{cases}$.

В общем, если рассматривать пространство на множестве структур, представляющих три упорядоченные пары некоторых элементов как декомплексные числа, где определена коммутативная, ассоциативная и обратимая операция сложения этих структур, а также операция умножения структур на комплексное число с указанными выше свойствами, то это пространство с определённой на нём с-нормой можно назвать поливекторным, с-нормированным пространством и обозначить N_c .

Отметим, что на основе с-нормы можно определить соответствующую естественную с-метрику на рассматриваемом множестве, соответствующие аксиомы и понятие с-метрического пространства.

В нашем случае, т. е. для пространства поливекторов, определим с-норму следующим образом:

$$f(\vec{A}) = \|\vec{A}\| = \|\vec{A}(x + yi; v + wi)\| = \sqrt{x^2 + y^2} + i\sqrt{v^2 + w^2}.$$

Проверим выполнение аксиом с-нормы (обозначим $Z = (a + bi)$).

1. $f(\vec{A}) = 0 + 0i \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} = 0 \\ \sqrt{v^2 + w^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \vec{A} = \vec{O}.$
2. $f(\vec{A}Z) = f(\vec{A}(xa - yb + (xb + ya)i; va - wb + (vb + wa)i)) = \\ = \sqrt{(xa - yb)^2 + (xb + ya)^2} + i\sqrt{(va - wb)^2 + (vb + wa)^2} = \\ = \sqrt{(xa)^2 + (yb)^2 + (xb)^2 + (ya)^2} + i\sqrt{(va)^2 + (wb)^2 + (vb)^2 + (wa)^2}; \\ f(\vec{A}(x + yi; v + wi))|Z| = (\sqrt{x^2 + y^2} + i\sqrt{v^2 + w^2})\sqrt{a^2 + b^2} = \\ = \sqrt{(xa)^2 + (yb)^2 + (xb)^2 + (ya)^2} + i\sqrt{(va)^2 + (wb)^2 + (vb)^2 + (wa)^2}. \\ \Rightarrow f(\vec{A}Z) = f(\vec{A})|Z|. \text{ Также можно показать, что } f(Z\vec{A}) = f(\vec{A})|Z|.$
3. $f(\vec{A_1}(x_1 + y_1i; v_1 + w_1i)) = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + i\sqrt{v_1^2 + w_1^2}, \\ f(\vec{A_2}(x_2 + y_2i; v_2 + w_2i)) = \sqrt{x_2^2 + y_2^2} + i\sqrt{v_2^2 + w_2^2}, \\ f(\vec{A_1}(x_1 + y_1i; v_1 + w_1i) + \vec{A_2}(x_2 + y_2i; v_2 + w_2i)) = \\ = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2} + i\sqrt{(v_1 + v_2)^2 + (w_1 + w_2)^2}.$

Учитывая, что модуль суммы обычных векторов меньше или равен сумме модулей векторов, делаем вывод о справедливости неравенств:

$$\sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2} \leq \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2};$$

$$\sqrt{(v_1 + v_2)^2 + (w_1 + w_2)^2} \leq \sqrt{v_1^2 + w_1^2} + \sqrt{v_2^2 + w_2^2}.$$

Поливекторное пространство с данной с-нормой является пространством N_c . Это пространство рассматриваем как интерпретацию множества декомплексных чисел.

Модуль и аргумент декомплексного числа, тригонометрическая и другие формы его представления

Модулем декомплексного числа $A = (x_1 + y_1 i) + (v_1 + w_1 i)j$ определим с-норму соответствующего поливектора.

Аргументом числа A (обозначим $\arg A$) определим комплексное число $\arg A = \arg((x_1 + y_1 i) + (v_1 + w_1 i)j) = \varphi_1 + \varphi_2 i$, где задающий горизонтальное направление поливектора угол $\varphi_1 = \arg(x_1 + y_1 i)$ и задающий его вертикальное направление угол $\varphi_2 = \arg(v_1 + w_1 i)$. Углы измеряются в соответствии с принятым правилом на комплексной плоскости (против часовой стрелки от положительного направления действительной оси, при рассмотрении комплексной плоскости так, что эта ось направлена вправо, а мнимая – вверх).

Пусть поливектор $\vec{OBAC}$ (рис. 4) представляет декомплексное число $A = (x_1 + y_1 i) + (v_1 + w_1 i)j$. Тогда:

$$|A| = \|\vec{A}(x_1 + y_1 i; v_1 + w_1 i)\|, \quad \arg(A) = \varphi_1 + \varphi_2 i.$$

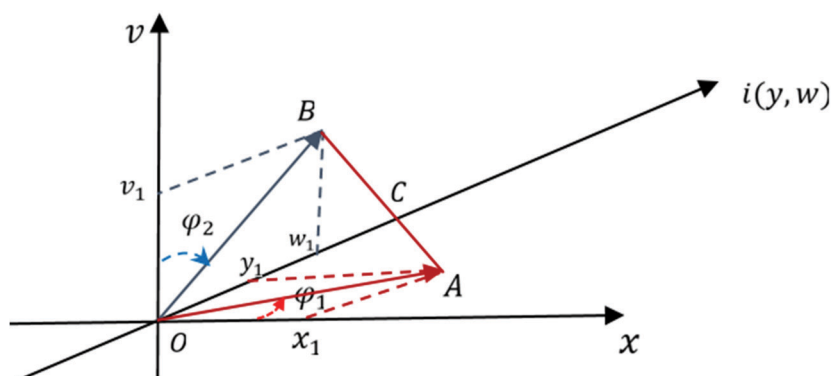


Рис. 4 / Fig. 4. Углы аргумента декомплексного числа / Angles of the argument of a decomplex number.

Источник: данные автора.

Рассмотрим вопрос представления декомплексного числа в особых формах. Поскольку обе части декомплексного числа являются комплексными числами, несложно представить его в форме с синусами и косинусами от углов, которые составляют его аргумент:

$$A = X + Vj = (x_1 + y_1 i) + (v_1 + w_1 i)j, \quad \arg(X + Vj) = \varphi_1 + \varphi_2 i,$$

$$r_x = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}, \quad r_v = \sqrt{v_1^2 + w_1^2},$$

$$A = r_x(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) + r_v(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)j.$$

Естественно назвать такую форму тригонометрической формой декомплексного числа.

Вместе с этим отметим, что тригонометрические функции являются функциями действительного переменного, определяются особым образом и используются в соответствующей форме комплексного числа. Логично предположить, что для такого рода формы декомплексного числа нужны соответствующие функции комплексного переменного, также определяемые особым образом, т. е. своего рода аналоги тригонометрических функций, но определённые на множестве комплексных чисел.

В математике значения синуса и косинуса действительного переменного определяют как соответствующие отношения величин, получаемых на основе координат точек единичной числовой окружности [7]. Это можно трактовать в терминах двумерного векторного пространства на плоскости xOy . Для этого с точкой на окружности связываем единичный вектор из начала координат и вершиной в этой точке. Синус угла отклонения вектора от оси Ox определяется как отношение координаты вектора на оси Oy к модулю вектора, который равен единице. Аналогично определяется и значение косинуса угла, но с координатой на оси Ox .

Используем ту же логику для определения аналогичных тригонометрическим однозначных функций на множестве комплексных чисел с помощью векторной интерпретации декомплексных чисел, т. е. рассматривая соответствующие отношения величин, связанных с поливектором.

В поливекторном пространстве рассмотрим множество поливекторов с модулем равным $1 + 1i$. Пусть $\vec{A}(x + iy; v + iw)$ – один из них. Тогда должно выполняться равенство:

$$\|\vec{A}\| = \sqrt{x^2 + y^2} + i\sqrt{v^2 + w^2} = 1 + 1i \Leftrightarrow x^2 + y^2 = v^2 + w^2 = 1.$$

Графически это множество можно отобразить в трёхмерном пространстве, используя описанную выше связанную с плоскостной системой координат систему координат с четырьмя координатными осями, две из которых совмещены на одной прямой. Графиком в этом случае будет поверхность из точек – центральных вершин п-векторов, когда их определяющие векторы в

вертикальной и горизонтальной плоскостях «пробегают» в этих плоскостях единичные окружности. Назовём получаемую таким образом поверхность *c*-сферой. На рис. 5 слева показана такая вершина *C* и определяющие векторы $\vec{OA}$ и $\vec{OB}$, а справа представлено графическое изображение *c*-сферы.

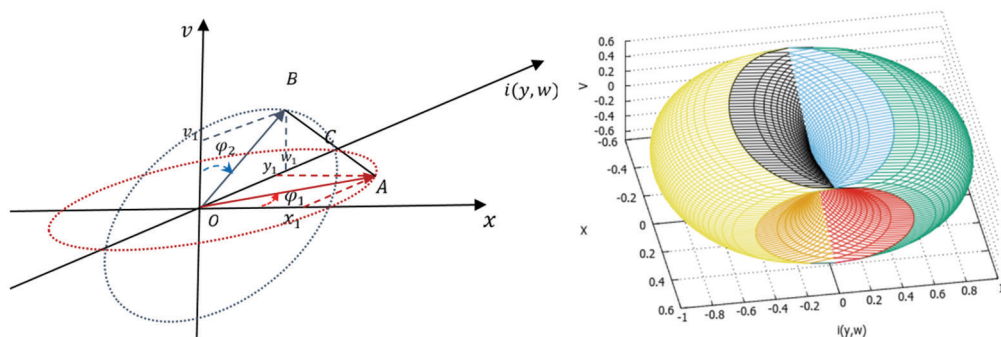


Рис. 5 / Fig. 5. Построение и графическое изображение *c*-сферы / Construction and graphical representation of the *c*-sphere

Источник: данные автора.

Теперь определим функции с комплексным аргументом $\varphi_1 + \varphi_2 i$ как отношение координат поливектора $\vec{A}(x + iy; v + iw)$, определяющее некоторую точку *c*-сферы к его модулю.

Назовём такого рода функции *c*-тригонометрическими и в их обозначении добавим символ «C» как знак принадлежности к функциям комплексного переменного. Учитывая, что $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{v^2 + w^2} = 1$, определим четыре основные функции:

$$C\sin(\varphi_1 + \varphi_2 i) = \frac{v + iw}{\|\vec{A}\|} = \frac{v + iw}{1 + 1i} = \frac{v + w}{2} + \frac{w - v}{2}i;$$

$$C\cos(\varphi_1 + \varphi_2 i) = \frac{x + iy}{\|\vec{A}\|} = \frac{x + iy}{1 + 1i} = \frac{x + y}{2} + \frac{y - x}{2}i;$$

$$C\tan(\varphi_1 + \varphi_2 i) = \frac{v + iw}{x + iy} = \frac{xv + yw}{x^2 + y^2} + \frac{xw - vy}{x^2 + y^2}i = xv + yw + (xw - vy)i;$$

$$C\cotan(\varphi_1 + \varphi_2 i) = \frac{x + iy}{v + iw} = \frac{vx + wy}{v^2 + w^2} + \frac{vy - xw}{v^2 + w^2}i = xv + yw - (xw - vy)i.$$

Отметим некоторые свойства этих функций:

$$C\sin(\varphi_1 + \varphi_2 i) \overline{C\sin(\varphi_1 + \varphi_2 i)} = \left(\frac{v+w}{2} + \frac{w-v}{2}i\right) \left(\frac{v+w}{2} - \frac{w-v}{2}i\right) = \frac{1}{2};$$

$$C\cos(\varphi_1 + \varphi_2 i) \overline{C\cos(\varphi_1 + \varphi_2 i)} = \left(\frac{x+y}{2} + \frac{y-x}{2}i\right) \left(\frac{x+y}{2} - \frac{y-x}{2}i\right) = \frac{1}{2};$$

$$\text{Csin}(\varphi_1 + \varphi_2 i) \overline{\text{Csin}(\varphi_1 + \varphi_2 i)} + \text{Ccos}(\varphi_1 + \varphi_2 i) \overline{\text{Ccos}(\varphi_1 + \varphi_2 i)} = 1;$$

$$\text{Ctan}(\varphi_1 + \varphi_2 i) \overline{\text{Ctan}(\varphi_1 + \varphi_2 i)} = (xv + yw)^2 + (xw - vy)^2 = 1.$$

На рис. 6 даны примеры поливекторов, определяющих с-сферу, подсчитаны отвечающие им значения с-синуса и с-косинуса от соответствующих комплексных углов $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 i$.

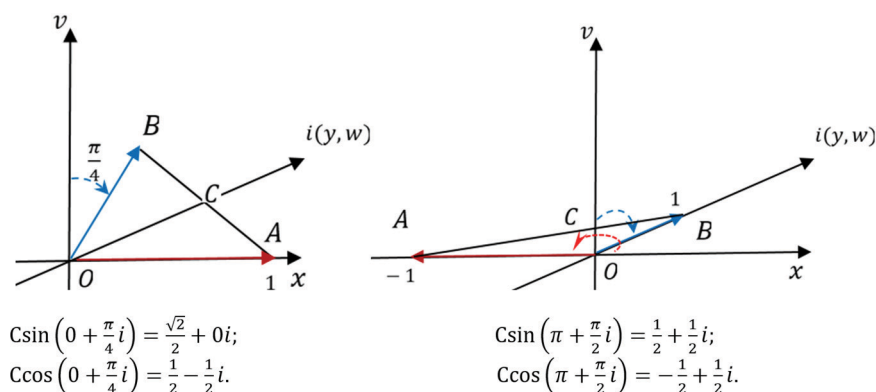


Рис. 6 / Fig. 6. Примеры поливекторов со значениями с-синуса и с-косинуса /
Examples of polyvectors with c-sine and c-cosine values

Источник: данные автора.

Пусть $A = (x_1 + iy_1) + (v_1 + iw_1)j$ – произвольное декомплексное число и ему соответствует поливектор $\vec{A}(x_1 + iy_1; v_1 + iw_1)$. Определим множество поливекторов вида:

$$\vec{A}_{a,b}(a(x_1 + iy_1); b(v_1 + iw_1)) = \vec{A}_{a,b}(ax_1 + ia y_1; bv_1 + ib w_1), a, b \in \mathbb{R}_+.$$

Для всех $\vec{A}_{a,b}$ действительная и мнимая части их координат меняются в отношении таковых у $\vec{A}$ на одинаковый сомножитель (на $a > 0$ для первой координаты и на $b > 0$ для второй) (рис. 7).

Учитывая это, заключаем, что соответствующие направляющие векторы в горизонтальной координатной плоскости лежат с вектором $\overrightarrow{x_1 y_1}$ на одном луче из центра координат, как и в вертикальной, – на одном луче с $\overrightarrow{v_1 w_1}$. Таким образом, поливектор $\vec{A}$ и поливекторы $\vec{A}_{a,b}$ имеют одинаковое направление, т. е. одинаковые аргументы $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 i$.

Определим среди поливекторов $\vec{A}_{a,b}(ax_1 + ia y_1; bv_1 + ib w_1)$ такой, центральная вершина которого лежит на с-сфере, т. е. определим a, b из условия $\|\vec{A}_{a,b}\| = \sqrt{(ax_1)^2 + (a y_1)^2 + i \sqrt{(bv_1)^2 + (b w_1)^2}} = 1 + 1i$:

$$a = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} \text{ и } b = \frac{1}{\sqrt{v_1^2 + w_1^2}}.$$

Графики функций комплексного переменного (ФКП)

Геометрическое представление ФКП являлось проблемой и, если представлено в публикациях, то на двух отдельных плоскостях [8]. Однако плоскостная система координат и форма поливектора позволяют строить графики ФКП в трёхмерном пространстве.

Если функция задана в явном виде $f(x + yi) = \psi_1(x, y) + \psi_2(x, y)i$, то её можно представить, как множество поливекторов вида:

$$A(x + yi; \psi_1(x, y) + \psi_2(x, y)i).$$

Поэтому в качестве графика функции в плоскостной системе координат мы рассматриваем множество точек в связанном трёхмерном пространстве (с двумя совмещёнными осями), которое «пробегает» по определяемым функцией $f(x + yi)$ правилам центральная вершина C поливекторов при изменении аргумента. Аргумент отображается точкой в горизонтальной плоскости.

Пусть значению аргумента $x_1 + y_1i$ соответствует значение функции $v_1 + w_1i$, где $v_1 = \psi_1(x_1, y_1)$, $w_1 = \psi_2(x_1, y_1)$. Для построения графика нам надо в трёхмерной системе координат с осями ox, oi, ov определить формулы выражения трёх координат центральной вершины C (рис. 8).

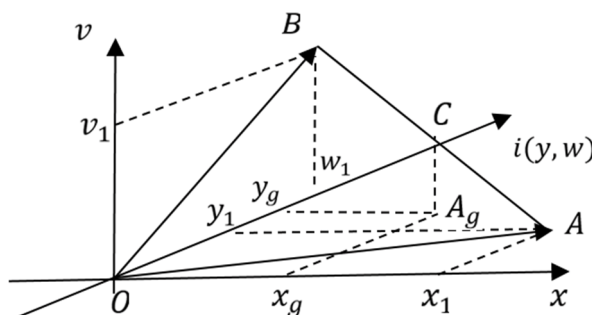


Рис. 8 / Fig. 8. Построение графика функции комплексного переменного / Plotting the function of a complex variable

Источник: данные автора.

Вершины поливектора будут иметь следующие координаты:

$$A(x_1, y_1, 0), B(0, \psi_2(x_1, y_1), \psi_1(x_1, y_1)), \\ C(x_1/2, (y_1 + \psi_2(x_1, y_1))/2, \psi_1(x_1, y_1)/2).$$

Построить график в этом случае можно, задав соответствующую нашей функции комплексного переменного функцию двух действительных переменных в трёхмерной системе координат (ox, oi, ov) с помощью параметров p, d , положив $x = p/2, y = d$:

$$\begin{cases} x = p/2 \\ i = (d + \psi_2(p, d))/2 \text{ (} i \text{ – для обозначения координат на } oi \text{).} \\ v = \psi_1(p, d)/2 \end{cases}$$

Эту функцию обозначим G . Её график считаем графиком функции f . При этом каждая точка графика (C на рис. 8) позволяет установить соответствие между точкой аргумента на горизонтальной координатной плоскости и точкой значения функции на вертикальной координатной плоскости. Порядок установления этого соответствия отличается от такового для графиков функций действительного переменного. В этом случае необходимо знать выражение $\psi_2(x_1, y_1)$.

Пусть $A(x_1, y_1)$ – точка аргумента на горизонтальной плоскости. Для определения соответствующей точки значения функции необходимо сначала определить нужную точку C графика функции. Эту точку находим с помощью координат её проекции $A_g(x_g, y_g)$. Координаты определяются соответственно заданию функции в параметрической форме: $x_g = x_1/2$, $y_g = (y_1 + \psi_2(x_1, y_1))/2$. Пересечение вертикальной прямой из $A_g(x_g, y_g)$ с поверхностью – графиком функции – даёт нам нужную точку C графика. Далее находим искомую точку $B(v_1, w_1)$ значения функции на вертикальной координатной плоскости как пересечение с этой плоскостью луча из A , проходящего через найденную точку C .

Рассмотрим примеры построения описанным способом графиков некоторых функций комплексного переменного, представленных в явном виде (графики построены с помощью интернет-сервиса Grafikus.ru, см. рис. 9–13).

$$f_1 = (x + yi)^3 = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3),$$

$$f_2 = e^{x+yi} = e^x \cos y + ie^x \sin y.$$

$$G_1: \begin{cases} x = p/2 \\ i = (d + 3p^2d - d^3)/2 \\ v = (p^3 - 3pd^2)/2 \end{cases}, G_2: \begin{cases} x = p/2 \\ i = (d + 0,5(e^{-d} - e^d) \sin p)/2 \\ v = (0,5(e^{-d} + e^d) \cos p)/2 \end{cases}$$

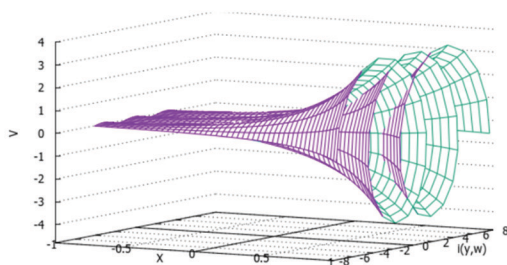
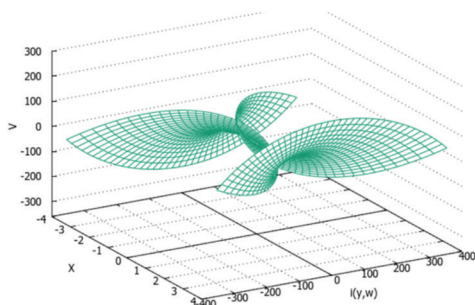


Рис. 9 / Fig. 9. Графики f_1 , слева и f_2 , справа / Graphs of f_1 , left, and f_2 , right.

Источник: данные автора.

$$f_3 = C \sin(x + yi) = 0,5(\cos y + \sin y) - 0,5(\cos y - \sin y)i,$$

$$f_4 = C \cos(x + yi) = 0,5(\cos x + \sin x) - 0,5(\cos x - \sin x)i.$$

$$G_3: \begin{cases} x = p/2 \\ i = (d - 0,5(\cos d - \sin d))/2 \\ v = 0,5(\cos d + \sin d)/2 \end{cases}, G_4: \begin{cases} x = p/2 \\ i = (d - 0,5(\cos p - \sin p))/2 \\ v = 0,5(\cos p + \sin p)/2 \end{cases}$$

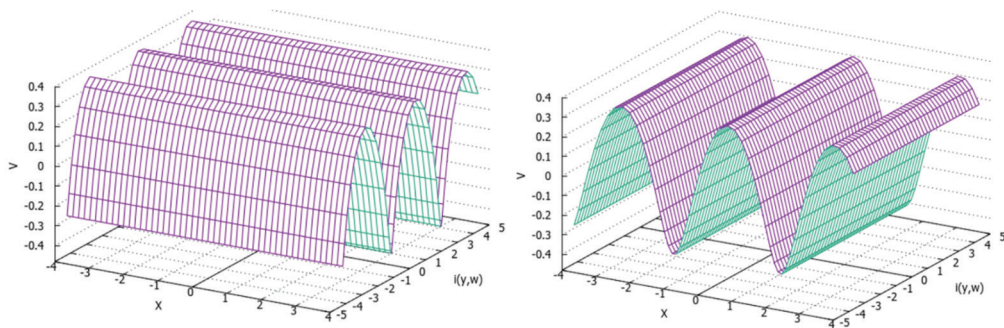


Рис. 10 / Fig. 10. Графики f_3 , слева и f_4 , справа / Graphs of f_3 , left, and f_4 , right.

Источник: данные автора.

$$f_5 = (3 - x^2 - (y + 0,2x^3 + y^2)^3)^{1/2} + (y + 0,2x^3 + y^3)i,$$

$$f_6 = (3 + \sin^2 y) + (4 - 0,5y \cos^2 x)i.$$

$$G_5: \begin{cases} x = p/2 \\ i = \frac{d + (d + 0,2p^3 + d^3)}{2} \\ v = \frac{(3 - p^2 - (v + 0,2p^3 + v^2)^3)^{1/2}}{2} \end{cases}, G_6: \begin{cases} x = p/2 \\ i = \frac{d + (4 - 0,5y \cos^2 x)}{2} \\ v = \frac{(3 + \sin^2 y)}{2} \end{cases}.$$

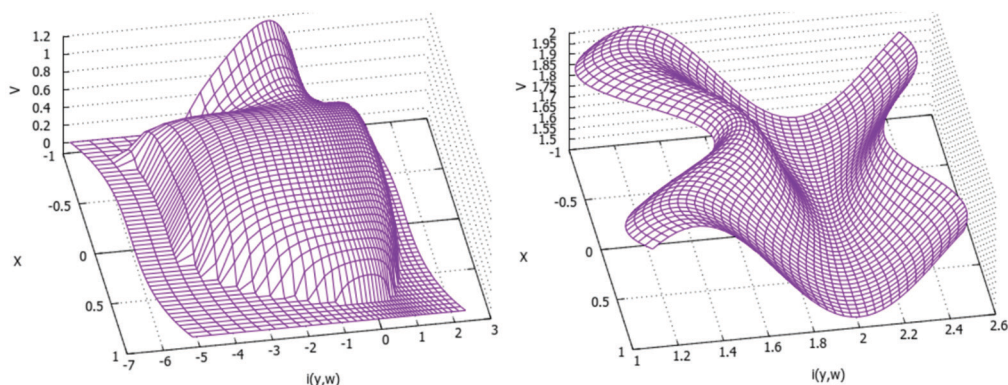


Рис. 11 / Fig. 11. Графики f_5 , слева и f_6 , справа / Graphs of f_5 , left, and f_6 , right.

Источник: данные автора.

Далее рассмотрим возможность построения графиков функций комплексного переменного, заданных в неявном виде. Начнём с построения графика с-сферы. В соответствии с определением с-сферы, на координаты точек графика $A(x; y + w; v)$ накладываются условия $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ v^2 + w^2 = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} y = \pm\sqrt{1-x^2} \\ w = \pm\sqrt{1-v^2} \end{cases}$. В общем случае задание функции f системой вида

$\begin{cases} y = \psi_1(x, v) \\ w = \psi_2(x, v) \end{cases}$ можно рассматривать как один из способов задания функции в неявном виде. Тогда соответствующая параметрическая функция G задаётся

$$\text{так: } \begin{cases} x = p/2 \\ i = (\psi_1(p, d) + \psi_2(p, d))/2. \\ v = d/2 \end{cases}$$

Для построения образа с-сферы с радиусом $1 + i$ требуется рассматривать четыре функции комплексного переменного (обозначим $f_{1,2,3,4}$) и, соответственно, четыре функции $G_{1,2,3,4}$, графики которых и составляют с-сферу. Определим для с-сферы $G_{1,2,3,4}$:

$$x = p, y = \pm\sqrt{1-p^2}, v = d, w = \pm\sqrt{1-d^2}$$

$$\Rightarrow G_{1,2,3,4}: \begin{cases} x = p/2 \\ i = (\pm\sqrt{1-p^2} \pm \sqrt{1-d^2})/2. \\ v = d/2 \end{cases}$$

Для примера также построим график с-сферы с радиусом $1 + 4i$:

$$f_{1,2,3,4}: \begin{cases} y = \pm\sqrt{1-x^2} \\ w = \pm\sqrt{4-v^2} \end{cases} \Rightarrow G_{1,2,3,4}: \begin{cases} x = p/2 \\ i = (\pm\sqrt{1-p^2} \pm \sqrt{4-d^2})/2. \\ v = d/2 \end{cases}$$

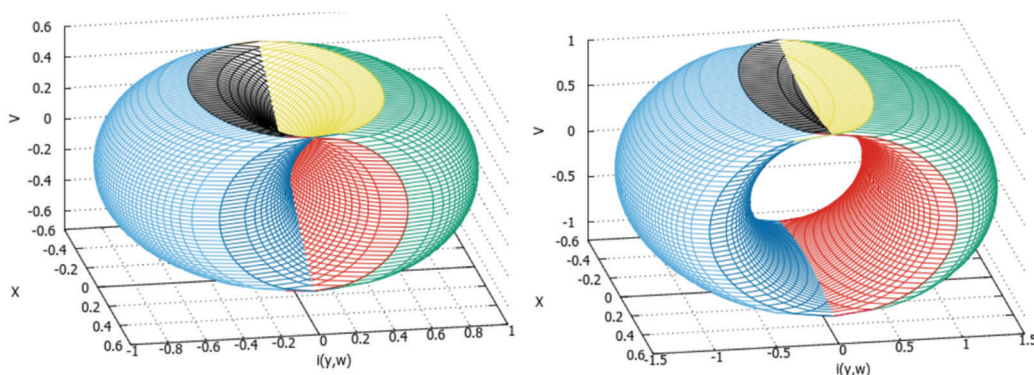


Рис. 12 / Fig. 12. График с-сфер с радиусом $1 + i$, слева и с радиусом $1 + 4i$, справа / Graph of c-spheres with radius $1 + i$, on the left, and with radius $1 + 4i$, on the right.

Источник: данные автора.

Примеры графиков других функций, заданных в неявном виде:

$$f_{1,2}: \begin{cases} y = \sin 2x \\ w = \pm \sqrt{2 - (v + v^2)^2} \end{cases}, G_{1,2}: \begin{cases} x = p/2 \\ i = (\sin 2p \pm \sqrt{2 - (d + d^2)^2})/2, \\ v = d/2 \end{cases}$$

$$f_{3,4}: \begin{cases} y = 0,7x^3 - 1,5x^2 \\ w = \pm(2 + \cos 5x) \sqrt{1 - v^2} \end{cases}, G_{3,4}: \begin{cases} x = p/2 \\ i = (0,7p^3 - 1,5p^2 \pm \frac{(2 + \cos 5p)\sqrt{1 - d^2}}{2}) \\ v = d/2 \end{cases}$$

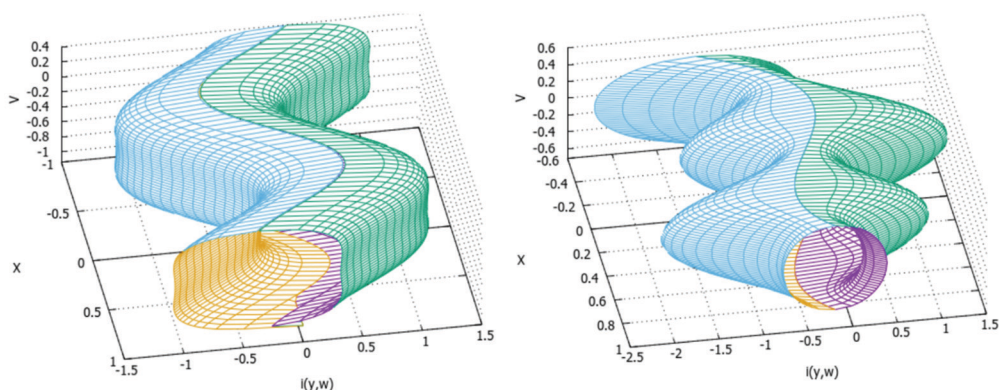


Рис. 13 / Fig. 13. Графики функций $f_{1,2}$, слева и функций $f_{3,4}$, справа / Graphs of functions $f_{1,2}$, on the left, and functions $f_{3,4}$, on the right.

Источник: данные автора.

Заключение

В результате исследования определена алгебраическая система декомплексных чисел, которая является особым расширением поля $\mathbb{C}$. Учитывая обратимость и свойства операций этой алгебры, считаем, что она может быть использована в развитии определённых направлений как в теории чисел, так и в других естественным образом связанных с теорией чисел разделах математики.

Введение для комплексных векторных пространств понятия s -нормы на множестве комплексных чисел с положительными действительной и мнимой частями открывает ещё одно направление для исследований в теории нормированных пространств.

В практическом плане полагаем, что те или иные сложные физические процессы могут описываться в этой системе соответствующими уравнениями, включая те, которые не разрешимы на $\mathbb{C}$, но разрешимы на множестве декомплексных чисел.

Также отметим, что современные учёные в области геометрического и других методов моделирования поверхностей и тел отмечают важность развития

математических средств для аналитического описания сложных геометрических объектов [9;10]. В этой связи полученный способ графического представления функций комплексного переменного может быть использован для решения данной задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Колягин Ю. М., Луканкин Г. Л., Яковлев Г. Н. Математика: учебное пособие: в2 кн. Кн.1. М.: Издательство «Новая Волна», 2005. 656 с.
2. Кантор И. Л., Солодовников А. С. Гиперкомплексные числа. М.: Наука, 1973. 144 с.
3. Варпаховский Ф. Л., Солодовников А. С., Стеллецкий И. В. Алгебра. Группы, кольца, поля. Векторные и евклидовы пространства. Линейные отображения. М.: Просвещение, 1978. 145 с.
4. Сурнев В. Б. Высшая математика для физиков. Линейная алгебра: учебное пособие. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2020. 440 с.
5. Акимов В. Н., Коновалова И. Н., Корнеева Е. В. Комплексные числа, комплексные векторы и их приложения: учебное пособие. М.: РНИМУ им. Н. И. Пирогова Минздрава России, 2024. 103 с.
6. Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х. Математический анализ. М.: Наука, 1979. 719 с.
7. Андронов И. К., Окунев А. К. Курс тригонометрии, развиваемый на основе реальных задач. М.: Просвещение, 1967. 648 с.
8. Ахтамова С. С., Бадуденко Л. Н. Теория функций комплексного переменного: учеб.-метод. пособие. Красноярск: Сиб. федерал. у-т, 2018. 80 с.
9. Голованов Н. Н. Геометрическое моделирование: учебное пособие М.: КУРС ИНФРА-М, 2016. 402 с.
10. Мисюра Н. Е. Математические модели для аналитического описания сложных геометрических объектов и их преобразований: теория и приложения: автореф. дис. канд. физ-мат. н-к. Екатеринбург, 2018. 17 с.

REFERENCES

1. Kolyagin, Yu. M., Lukankin, G. L. & Yakovlev, G. N. (2005). *Mathematics: textbook: in 2 Books. Book 1*. Moscow: Novaya Volna publ. (in Russ.).
2. Kantor, I. L. & Solodovnikov, A. S. (1973). *Hypercomplex numbers*. Moscow: Nauka publ. (in Russ.).
3. Varpakhovsky, F. L., Solodovnikov, A. S. & Stelletsy, I. V. (1978). *Algebra. Groups, rings, fields. Vector and Euclidean spaces. Linear maps*. Moscow: Prosveshchenie publ. (in Russ.).
4. Surnev, V. B. (2020). *Higher mathematics for physicists. Linear algebra*. Yekaterinburg: Ural University publ. (in Russ.).
5. Akimov, V. N., Konovalova, I. N. & Korneeva, E. V. (2024). *Complex numbers, complex vectors, and their applications*. Moscow: Pirogov Russian National Research Medical University (in Russ.).

6. Ilyin, V. A., Sadovnichy, V. A. & Sendov, Bl. Kh. (1979). *Mathematical analysis*. Moscow: Nauka publ. (in Russ.).
7. Andronov, I. K. & Okunev, A. K. (1967). *Trigonometry course based on real problems*. Moscow: Prosveshchenie publ. (in Russ.).
8. Akhtamova, S. S. & Badulenko, L. N. (2018). *Theory of functions of a complex variable*. Krasnoyarsk: Siberian Federal University. (in Russ.).
9. Golovanov, N. N. (2016). *Geometric modeling*. Moscow: KURS INFRA-M. (in Russ.).
10. Misyura, N. E. (2018). *Mathematical models for the analytical description of complex geometric objects and their transformations: theory and applications* [dissertation]. Yekaterinburg (in Russ.).

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Колягин Андрей Юрьевич (г. Москва) – кандидат педагогических наук, независимый исследователь;

e-mail: ak.russia4444@yandex.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Andrey Yu. Kolyagin (Moscow) – Cand. Sci. (Education), independent researcher;

e-mail: ak.russia4444@yandex.ru



ВЕСТНИК
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА ПРОСВЕЩЕНИЯ
СЕРИЯ: ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА
2026. № 1

Над номером работали:
Ответственный редактор И. А. Потапова
Литературный редактор М. С. Тарасова
Корректор М. С. Тарасова
Компьютерная вёрстка – А. В. Тетерин

Адрес редакции:
105005, г. Москва, ул. Радио, д. 10А, стр. 2, офис 98
тел. (495) 780-09-42 доб. 6101
e-mail: sj@guppros.ru
Сайт: www.physmathmgou.ru

Формат 70x108/16. Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура "Minion Pro".
Тираж 500 экз. Усл. п. л. 7,75, уч.-изд. л. 6.
Подписано в печать: 30.03.2026 г. Дата выхода в свет: 07.04.2026 г. Заказ № 2026/03-17.
Отпечатано в Государственном университете просвещения
105005, г. Москва, ул. Радио, д. 10А, стр. 2