



ISSN 2949-5083 (print)
ISSN 2949-5067 (online)

ПРО
СВЕТ

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ
ПРОСВЕЩЕНИЯ

Вестник

ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА
ПРОСВЕЩЕНИЯ

Серия

ФИЗИКА-
МАТЕМАТИКА

*Vestnik Gosudarstvennogo universiteta prosveshcheniya.
Seriya: Fizika-Matematika*

*BULLETIN OF FEDERAL STATE UNIVERSITY OF EDUCATION.
SERIES: PHYSICS AND MATHEMATICS.*

ПАЛЬЦЕОБРАЗНЫЕ СТРУКТУРЫ
В ЗАДАЧЕ РЕФРАКЦИИ УДАРНОЙ ВОЛНЫ
НА ГРАНИЦЕ ГАЗОВ
С РАЗНЫМИ ТЕПЛОЁМКОСТЯМИ

ДИСПЕРСИЯ АНИЗОТРОПИИ
ПОКАЗАТЕЛЯ ПРЕЛОМЛЕНИЯ
ЖИДКОГО КРИСТАЛЛА
В НИЗКОТЕМПЕРАТУРНОЙ
НЕМАТИЧЕСКОЙ ФАЗЕ



2025/№ 3

ВЕСТНИК
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА ПРОСВЕЩЕНИЯ

ISSN 2949-5083 (print)

2025/ № 3

ISSN 2949-5067 (online)

серия

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА

Рецензируемый научный журнал. Основан в 1998 г.

Журнал «Вестник Государственного университета просвещения. Серия: Физика-Математика» включён в «Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание учёной степени кандидата наук, на соискание учёной степени доктора наук» Высшей аттестационной комиссии при Министерстве науки и высшего образования Российской Федерации (см.: Список журналов на сайте ВАК при Минобрнауки России) по следующим научным специальностям: 1.3.3. – Теоретическая физика (физико-математические науки); 1.3.8. – Физика конденсированного состояния (физико-математические науки).

The peer-reviewed journal was founded in 1998

“Bulletin of Federal State University of Education. Series: Physics and Mathematics” is included by the Supreme Certifying Commission of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation into “The List of reviewed academic journals and periodicals recommended for publishing in corresponding series basic research thesis results for a Ph.D. Candidate or Doctorate Degree” (See: the online List of journals at the site of the Supreme Certifying Commission of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation) on the following scientific specialties: 1.3.3. – Theoretical physics (physical-mathematical sciences); 1.3.8. – Physics of the condensed state (physical-mathematical sciences)

ISSN 2949-5083 (print)

2025 / № 3

ISSN 2949-5067 (online)

series

PHYSICS AND MATHEMATICS

BULLETIN
OF FEDERAL STATE UNIVERSITY
OF EDUCATION

Учредитель журнала

«Вестник Государственного университета просвещения. Серия: Физика-математика»
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
Государственный университет просвещения

Выходит 4 раза в год

Редакционная коллегия

Главный редактор:

Чигринов В. Г. – д. ф.-м. н., проф., Государственный университет просвещения, Гонконгский университет науки и технологий (Китай)

Заместитель главного редактора:

Кузнецов М. М. – д. ф.-м. н., проф., Государственный университет просвещения

Ответственный секретарь:

Чукаловская Е. М. – Государственный университет просвещения

Члены редакционной коллегии:

Беляев В. В. – д. т. н., проф., Государственный университет просвещения;

Боголюбов Н. Н. – д. ф.-м. н., проф., Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова;

Бугримов А. Л. – д. т. н., проф., Российский государственный университет имени А.Н. Косыгина (Технологии. Дизайн. Искусство);

Гладков С. О. – д. ф.-м. н., проф., Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет);

Емельяненко А. В. – д. ф.-м. н., проф., Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова;

Жачкин В. А. – д. ф.-м. н., проф., Государственный университет просвещения;

Калашников Е. В. – д. ф.-м. н., проф., Государственный университет просвещения;

Осипов М. А. – д. ф.-м. н., проф., Университет Стратклайд (Великобритания);

Рыбаков Ю. П. – д. ф.-м. н., проф., Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы;

Чаругин В. М. – д. ф.-м. н., проф., Московский педагогический государственный университет

ISSN 2949-5083 (print)

ISSN 2949-5067 (online)

Рецензируемый научный журнал «Вестник Государственного университета просвещения. Серия: Физика-математика» публикует статьи по математическим проблемам термодинамики, кинетики и статистической физики; теории конденсированного состояния классических и квантовых, макроскопических и микроскопических систем; изучению различных состояний вещества и физических явлений в них; статистической физике и кинетической теории равновесных и неравновесных систем; теоретическому и экспериментальному исследованию физических свойств неупорядоченных неорганических систем; изучению экспериментального состояния конденсированных веществ и фазовых переходов в них. Журнал адресован учёным, докторантам, аспирантам и всем интересующимся достижениями физико-математических наук.

Журнал «Вестник Государственного университета просвещения. Серия: Физика-Математика» зарегистрирован в Федеральной службе по надзору за соблюдением законодательства в сфере массовых коммуникаций и охране культурного наследия. Регистрационное свидетельство ПИ № ФС 77-73344.

Индекс серии «Физика-математика» по Объединённому каталогу «Пресса России» 40723

Журнал включён в базу данных Российского индекса научного цитирования (РИНЦ), имеет полнотекстовую сетевую версию в интернете на платформе Научной электронной библиотеки (www.elibrary.ru), с августа 2017 г. на платформе Научной электронной библиотеки «КиберЛенинка» (www.cyberleninka.ru), а также на сайте журнала «Вестник Государственного университета просвещения. Серия: Физика-Математика» (www.physmathmgou.ru).

При цитировании ссылка на конкретную серию «Вестника Государственного университета просвещения» обязательна. Публикация материалов осуществляется в соответствии с лицензией Creative Commons Attribution 4.0 (CC-BY).

Ответственность за содержание статей несут авторы. Мнение автора может не совпадать с точкой зрения редколлегии серии журнала. Рукописи не возвращаются.

Вестник Государственного университета просвещения. Серия: Физика-Математика. – 2025. – № 3. – 90 с.

© Государственный университет просвещения, 2025.

Адрес редакции:

г. Москва, ул. Радио, д.10А, стр. 2, офис 98

тел.: (495) 780-09-42 (доб. 6101)

e-mail: sj@guppros.ru; сайт: www.physmathmgou.ru.

Founder of journal
“Bulletin of Federal State University of Education. Series: Physics and Mathematics”
Federal State University of Education

————— Issued 4 times a year —————

Editorial board

Editor-in-chief:

V. G. Chigrinov – Dr. Sci. (Physics and Mathematics), Professor, Federal State University of Education, Hong Kong University of Science and Technology (China)

Deputy editor-in-chief:

M. M. Kuznetsov – Dr. Sci. (Physics and Mathematics), Professor, Federal State University of Education

Executive secretary:

E. M. Chukalovskaya – Federal State University of Education

Members of Editorial Board:

V. V. Belyaev – Dr. Sci. (Engineering), Professor, Federal State University of Education;

N. N. Bogolyubov – Dr. Sci. (Physics and Mathematics), Professor, Lomonosov Moscow State University;

A. L. Bugrimov – Dr. Sci. (Engineering), Professor, The Kosygin State University of Russia;

S. O. Gladkov – Dr. Sci. (Physics and Mathematics), Professor, Moscow Aviation Institute (National Research University);

A. V. Emelyanenko – Dr. Sci. (Physics and Mathematics), Professor, Lomonosov Moscow State University;

V. A. Zhachkin – Dr. Sci. (Physics and Mathematics), Professor, Federal State University of Education;

E. V. Kalashnikov – Dr. Sci. (Physics and Mathematics), Professor, Federal State University of Education;

M. A. Osipov – Dr. Sci. (Physics and Mathematics), Professor, University of Strathclyde (Glasgow, UK);

Yu. P. Rybakov – Dr. Sci. (Physics and Mathematics), Professor, People’s Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba;

V. M. Charugin – Dr. Sci. (Physics and Mathematics), Professor, Moscow State Pedagogical University

ISSN 2949-5083 (print)

ISSN 2949-5067 (online)

The reviewed scientific journal “Bulletin of Federal State University of Education. Series: Physics and Mathematics” publishes articles on mathematical problems of thermodynamics, kinetics and statistical physics; the theory of the condensed state of classical and quantum, macroscopic and microscopic systems; the study of various states of substance and physical phenomena in them; statistical physics and the kinetic theory of equilibrium and non-equilibrium systems; theoretical and experimental research of physical features of disordered inorganic systems; the study of the experimental state of condensed substances and phase transitions in them. The journal is addressed to scientists, doctoral students, PhD students and everyone interested in the achievements of physical and mathematical sciences.

The series “Physics and Mathematics” of the Bulletin of Federal State University of Education is registered in Federal service on supervision of legislation observance in sphere of mass communications and cultural heritage protection. The registration certificate ПИ № 0С 77 – 73344.

Index series “Physics and Mathematics” according to the union catalog “Press of Russia” 40723

The journal is included into the database of the Russian Science Citation Index, and its full texts are available through scientific electronic libraries “eLibrary” (www.elibrary.ru) and “CyberLeninka” (since August 2017; www.cyberleninka.ru), as well as on the site of “Bulletin of Federal State University of Education. Series: Physics and Mathematics” (www.physmathmgou.ru).

At citing the reference to a particular series of “Bulletin of State University of Education” is obligatory. Scientific publication of materials is carried out in accordance with the license of Creative Commons Attribution 4.0 (CC-BY).

The authors bear all responsibility for the content of their papers. The opinion of the Editorial Board of the series journal does not necessarily coincide with that of the author. Manuscripts are not returned.

Bulletin of Federal State University of Education. Series: Physics and Mathematics. – 2025. – № 3. – 90 p.

© Federal State University of Education, 2025.

The Editorial Board address:

ulitsa Radio 10A build.2, office 98, Moscow, Russia

Phone: (495) 780-09-42 (add. 6101)

e-mail: sj@guppros.ru; site: www.physmathmgou.ru.

СОДЕРЖАНИЕ

Интервью редакции журнала «Вестник Государственного университета просвещения. Серия: Физика-математика» с профессором Владимиром Григорьевичем Чигриновым 6

ФИЗИКА

Дорохова О. Е., Парёнкина В. И., Уварова Н. И., Хонгорова О. В. Микроскопическая теория нелинейного термодиффузиофореза с учётом квантовых поправок, критических флуктуаций и аномального переноса 19

Камалов Ю. Т., Кузнецов М. М. Генерация запутанных фотонных пар в виде ударной электромагнитной волны 36

Попов С. А. Интегралы уравнений движения 42

Тугазаков Р. Я. Пальцеобразные структуры в задаче рефракции ударной волны на границе газов с разными теплоёмкостями 63

Чекулаев И. С., Симушкина С. В., Ковалев Ю. В., Кулешова Ю. Д., Крюков А. И., Чигринов В. Г., Курилов А. Д. Дисперсия анизотропии показателя преломления жидкого кристалла в низкотемпературной нематической фазе 76

CONTENTS

An Interview with Professor Vladimir G. Chigrinov by the Editors of the Journal «Bulletin of Federal State University of Education. Series: Physics and Mathematics» 6

PHYSICS

O. Dorokhova, V. Parenkina, N. Uvarova, O. Khongorova. Microscopical theory of non-linear thermodifusion-phoresis taking into account quantum corrections, critical fluctuations, and anomalous transport. 19

Yu. Kamalov, M. Kuznetsov. Generation of entangled photon pairs in the form of a shock electromagnetic wave 36

S. Popov. The integrals of the equations of motion 42

R. Tugazakov. Self-organization of gas flow in the problem of shock wave refraction at the boundary of gases with different heat capacities 63

I. Chekulaev, S. Simushkina, Yu. Kovalev, Yu. Kuleshova, A. Krukov, V. Chigrinov, A. Kurilov. Dispersion of the anisotropy of the refractive index of a liquid crystal in a low-temperature nematic phase 76



Интервью редакции журнала «Вестник Государственного университета просвещения. Серия: Физика-математика» с профессором Владимиром Григорьевичем Чигриновым.

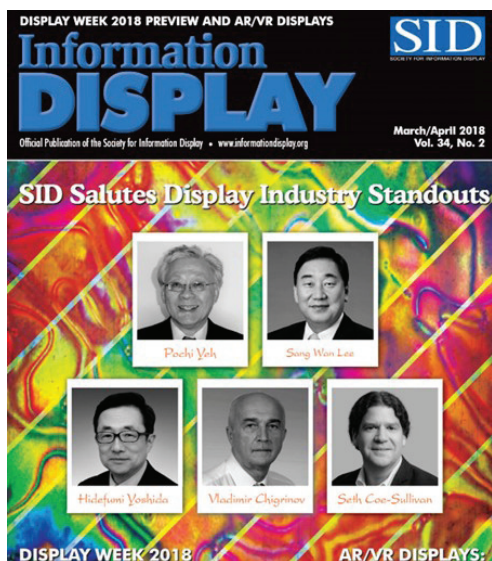
В 2025 году профессор Чигринов стал главным редактором нашего журнала. Он любезно согласился поделиться рассказом о своём жизненном пути, о том, как устроена мировая наука, о судьбах научного знания в современной России, об истинном и ложном предназначении учёного.

– Владимир Григорьевич, Вы относитесь к поколению российских учёных, которые, говоря Вашими же словами, «у себя дома не стоили ничего, а за границей стали стоять очень много». Почему, на Ваш взгляд, стала возможна такая ситуация? Изменилось ли что-то сегодня?

– Моей Alma mater, давшей путёвку в научную жизнь, стал Московский институт электронного машиностроения. У меня был выбор: стать IT-специалистом, математиком или физиком. После вуза я устроился в Научно-исследовательский институт органических полупродуктов и красителей (НИОПИК). Мне довелось работать здесь в группе экспериментаторов. Было много уникальных опытов, интересных публикаций. Здесь я впервые увидел то, что предопределило направление моих будущих исследований, – жидкокристаллический дисплей. Произошло это в 1973 году. Познакомившись позже с Мартином Шадтом, отцом современных жидкокристаллических дисплеев, я узнал о том, как всё начиналось за границей, и могу сказать, что советские разработки шли в ногу со временем.

Позже, в 1988 году, я стал руководителем отдела в институте НИОПИК, у меня в подчинении было 120 человек, 5 лабораторий и опытное производство. Мы производили в год больше тонны жидких кристаллов, что составляло тогда 10% от их мирового производства. Я планировал получить грант на развитие жидкокристаллических разработок. Для этого надо было сделать наши результаты известными научному сообществу. Начал я с отдела новых разработок советского министерства науки. И сразу же получил приглашение на конференцию, посвящённую дисплеям для телевизоров на основе электронно-лучевых трубок. Я выступил там с заявлением, что этих дисплеев скоро не будет. Жидкокристаллические дисплеи вытеснят их с рынка. Ответные комментарии были наполнены недоумением: как такие как я – ничего не понимающие в телевидении и дисплеях – вообще могут участвовать в столь представительной конференции?

Я пошёл дальше и показал первый советский жидкокристаллический телевизор заместителю министра науки СССР. Тот сказал, что таких телевизоров быть не может. И попытался меня «разоблачить», заявив, что телевизор подсвечивается снизу. Предлагаю ему разместить внизу дощечку, не дающую свету проходить. Убедившись, что подсветки нет, заместитель министра назвал жидкокристаллический дисплей гениальным изобретением и поддержал выделением гранта. Случилось это в 1991 году. Размер гранта был 200000 миллионов рублей, и это были громадные деньги по тем временам – больше 70 миллионов долларов. Для меня это открыло возможности, которых не было ранее. Я начал ездить по разным странам мира, бывал много раз в Германии, Франции, Италии, Великобритании, США, Японии, Южной Корее и



Австралии. Поездки приносили огромное количество контактов, я общался с ведущими экспериментаторами, физиками, оптиками. Тогда всё было просто: железный занавес исчез, и не было никаких препон для налаживания связей с ведущими мировыми специалистами в интересной для меня сфере.

Сегодня у российских учёных, к сожалению, нет таких возможностей. Ведущие международные конференции проходят без них. Касательно дисплеев, такой конференцией является ежегодная конференция Международного дисплейного общества (Society for Information Display), которая проходит в США. И если ты занимаешься дисплеями, то должен регулярно бывать на этой конференции, выступать сам и знакомиться с чужими докладами.

Есть ещё конференции в Европе, Японии, Южной Корее и Китае. Существуют разнообразные международные комиссии, создаваемые по различным проблемам, связанным с дисплеями. Я вхожу в некоторые из них. Думаю, что меня ещё помнят в профессиональном сообществе, и я ещё не раз смогу посещать эти конференции. У математиков есть такое выражение: «необходимое, но недостаточное условие». Если ты просто работаешь в своей научной лаборатории, но не присутствуешь на главных научных конференциях, ты не развиваешься и неизбежно отстаешь. Мировая наука сегодня развивается с очень высокой скоростью. И отстать проще, чем идти в ногу.

- А что сегодня с зарплатами в науке? Каков должен быть достаточный уровень дохода для учёного?

- Когда я работал в Гонконгском университете науки и технологий, моя зарплата составляла 12000 американских долларов после выплаты налогов. Подработки приносили ещё 3000 долларов после выплаты налогов. Все мои зарубежные поездки на конференции оплачивались из грантов. У меня было познавательное общение с коллегами, со студентами. Мне хватало на жизнь и на поездки к интересным людям, и на все необходимые мероприятия. Учёный, чтобы быть успешным, должен быть хорошо обеспечен материально. Наверное, в науке можно работать на энтузиазме, вжившись в роль научного фанатика. Но долго это продолжаться не может.

- Могли бы Вы рассказать об основных вехах своего жизненного пути?

- Я закончил факультет прикладной математики Московского института электронного машиностроения. Поступил туда без экзаменов, как медалист. Хотя медаль и была серебряная, я ошибся в одном слове, когда писал сочинение. А на экзамене в институт я сдавал математику, а с ней у меня всегда было всё отлично. Без математики в институте электронного машиностроения было нечего делать. Уровень преподавания этого предмета был здесь второй в СССР после механико-математического факультета МГУ. Неудивительно, что закончив его, я искал не просто работу, но работу интересную. Сначала я устроился в МИСИС (Московский инженерно-строительный

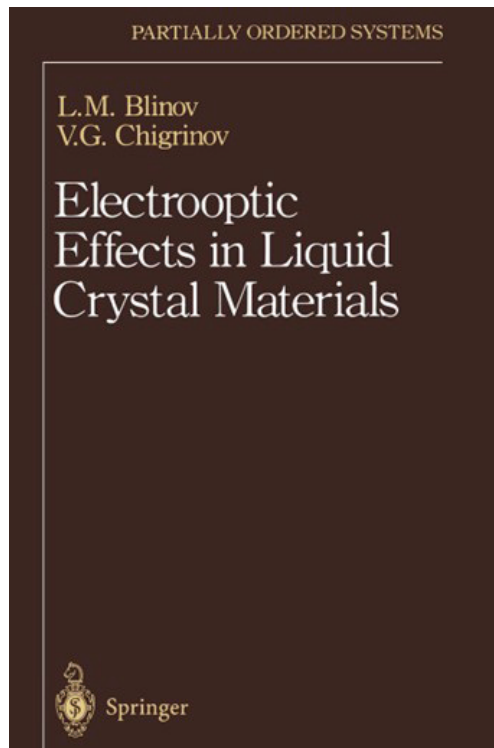
институт), но работал там недолго. Я ещё не знал тогда истину, что слово серебро, а молчание золото. Несколько сказанных неосторожно слов стоили мне испорченных отношений с руководством. Но именно благодаря этой первой неудаче я попал в организацию, давшую мне путёвку в научную жизнь. Я уже называл её, это Научно-исследовательский институт органических полупродуктов и красителей (НИОПИК). Работая там, я поступил в аспирантуру в Институт кристаллографии Академии наук СССР. Моим научным руководителем стал Владимир Львович Инденбом, очень известный человек. Ещё одним моим наставником в Институте кристаллографии был Александр Павлович Капустин, основоположник экспериментальной и теоретической жидкокристаллической кристаллографии в СССР. Его работы в области электрооптики жидких кристаллов считаются «библией» советской кристаллографии.

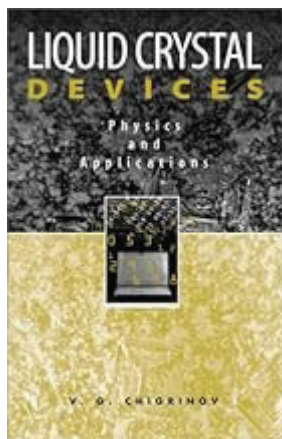
Большое влияние на мою научную судьбу оказал Игорь Григорьевич Чистяков, автор классической монографии «Жидкие кристаллы», возглавлявший в Институте кристаллографии профильную лабораторию.

Сам я впервые познакомился с жидкими кристаллами в 1968 году, проходя практику в ФИАНе (Физическом институте Академии наук СССР) под руководством профессора Игоря Николаевича Компанца.

Работая в НИОПИКе, я познакомился со своим будущим соавтором Львом Михайловичем Блиновым, вместе с ним мы написали книгу «Электрооптические эффекты жидких кристаллов» (Blinov L. M., Chigrinov V. G. *Electrooptic Effects in Liquid Crystal Materials*. New York: Springer, 1994. 464 p.). Наше знакомство началось с моего рассказа о себе. Я назвал себя физиком-теоретиком, сказав, что могу работать, где угодно. А моё главное условие для работы, чтобы я не ходил каждый день на работу. Блинов ответил, что посещаю я офис или нет, для него неважно. Важно, чтобы я выполнял ровно то, что ему от меня надо. На том и договорились. Ходить на работу, конечно, периодически приходилось. Например, на регулярно проводившиеся комсомольские субботники.

В НИОПИКе я последовательно прошёл все ступени советской научной карьеры. Был младшим научным сотрудником, затем старшим, потом ведущим. После этого меня избрали начальником отдела. Это была интересная история. Некоторые предлагали выбрать на эту должность кого-то из известных специалистов. Последовало бурное обсуждение, в процессе которого одна дама заявила: «Не надо избирать известных, мы их не очень любим, давайте дадим шанс тому, кого никто не знает». И вот меня избирают, но никакого менеджерского опыта у меня нет. Мне пришлось заниматься психологией, учиться управлять людьми. В конце концов, мне это удалось. Я продержался, сумел получить большой грант, спасший НИОПИК от грозившего ему





банкротства. Моя карьера в институте закончилась в 1996 году. Перед моим уходом там начались нездоровые процессы, была остановлена производственная линия. Оставаться там далее не имело смысла.

– Какое продолжение получила Ваша карьера?

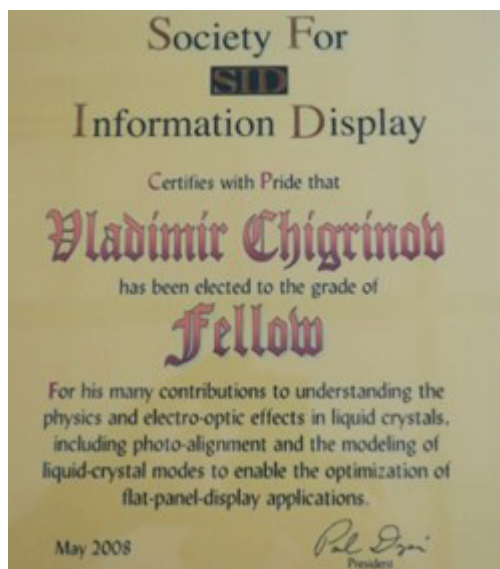
– Я три года работал в лаборатории коммерческой группы компаний Rikor. Одно из её предприятий – завод по производству дисплеев, расположенный на Урале. Работать там было интересно. Но через три года я понял, что всё новое для себя я уже освоил. А у меня такой принцип: если я перестаю развиваться, узнавать что-то новое, значит, надо менять работу. Иначе начнётся деградация. За время работы в группе компаний Rikor я написал две книги о жидкокристаллических дисплеях. Одну в соавторстве с профессором

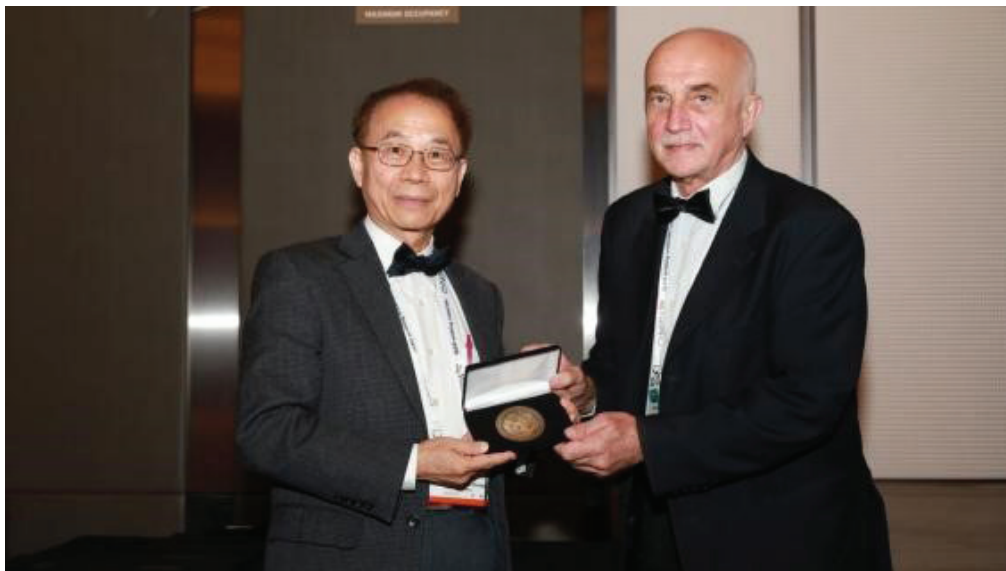
Блиновым, другую без соавтора – «Устройства на жидких кристаллах: физические свойства и применение» (Chigrinov V. G. Liquid Crystal Devices: Physics and Applications. Boston: Artech House, 1999. 366 p.). Вот эту вторую книгу я рассылал по возможным новым местам работы вместе с резюме.

Вариантов по продолжению карьеры представилось сразу несколько: в США, в Европе и в Гонконге. Американцы и европейцы достаточно долго тянули с окончательным решением. А вот в Гонконге все бюрократические формальности решились быстро. И я поехал в Гонконг, работать в Гонконгском университете науки и технологий (Hong Kong University of Science and Technology). Сначала как приглашённый доцент. Но вскоре я стал штатным доцентом, после того, как вместе со специалистами университета разработал новые технологии по фотоориентации кристаллов, по сегнетоэлектрическим жидким кристаллам и по математическому моделированию жидкокристаллических устройств. А 15 января 2008 года я стал SID Fellow – членом Общества информационных дисплеев (Society for Information Display). Это самое почётное звание для учёных, занимающихся жидкокристаллическими дисплеями. Ежегодно оно присваивается пяти специалистам за достижения в научной сфере, признанные новыми технологиями. Надо сказать, что тогда у меня была исследовательская команда, лидерство в которой и было оценено по достоинству.

Кстати, Гонконгский университет науки и технологий после этого присвоил мне звание профессора. Сегодня у меня нет команды такого уровня, что была тогда. Но на конференции по нанотехнологиям меня по-прежнему приглашают, поскольку достижения прежних лет всё ещё вызывают в мире неподдельный интерес.

В 2018 году я повторно стал SID Fellow, с формулировкой «За существенный вклад в развитие обучения созданию информационных дисплеев».

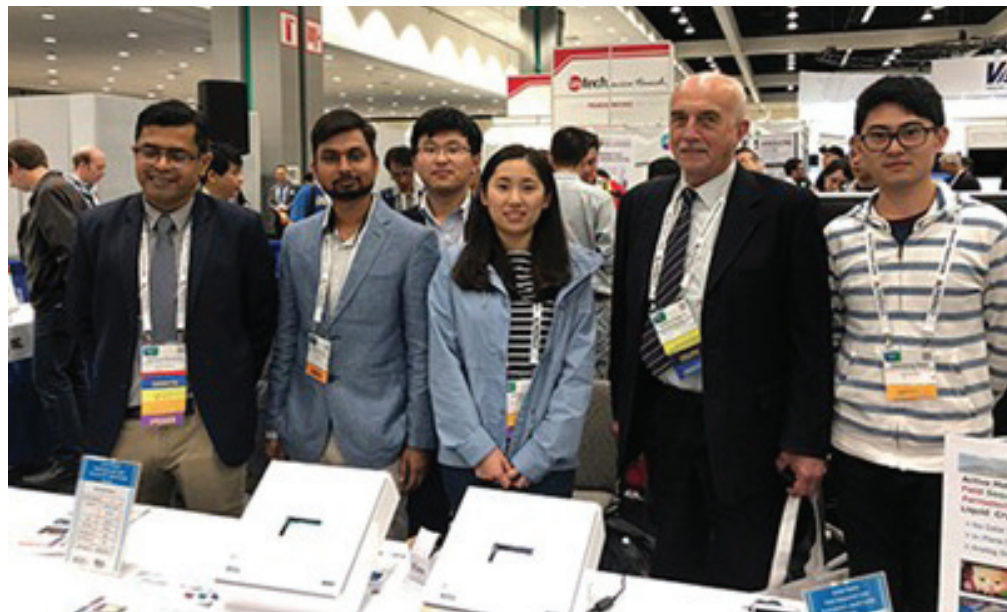




- Можно сказать, что Вы сформировали свою научную школу в Гонконге?

- После того, как я стал я стал SID Fellow и профессором, у меня появились свои аспиранты. В Гонконгском университете науки и технологий существует своя система привлечения талантов. Мы рассматривали 10% лучших китайских университетов, из которых выбирали 10% лучших студентов в качестве кандидатов в аспиранты. При этом для меня было важно не только уточнить способности выпускника университета, но его конкретные интересы. Чтобы он не просто приходил ко мне со словами «Профессор, я хочу стать Вашим учеником», но был бы мотивирован заниматься именно тем, чем занимаюсь я.

Всех своих аспирантов я учил никому не рассказывать о том, что он придумал, пока не получен патент. Мой первый патент был зарегистрирован в 1989 году. История это-



Команда Гонконгского университета науки и технологий позирует со своей разработкой, победившей в номинации «Лучший прототип» (“Best Prototype”) рамках Display Week 2018 (фото: С. Сехрист. Источник: Sechrist S. Display Week Review: I-Zone turns Seven // Information Display. 2018. Vol. 34. No. 5. P. 16)

го патента началась с разговора с Мартином Шадтом. Я рассказал ему о своей идее, которую должен представить в форме доклада через две недели на научной конференции. Но он отговорил меня делать доклад раньше, чем я оформлю патент на свою разработку. И за две недели вместе с Мартином мы написали мой первый американский патент. С тех пор я прежде всего учу студентов рассказывать о своих достижениях лишь тем, кто может реально помочь. С остальными делиться не надо. Вместо этого необходимо сразу же патентовать все свои достижения. У меня самого более 50 американских патентов. И я уже давно сам могу научить любого, как их правильно оформить. Кроме американских, у меня есть и патенты, оформленные в других странах: российские, европейские, японские, гонконгские и корейские. Но со времён общения с Мартином Шадтом я знаю, что американские патенты для любого учёного – на первом месте.

- Существует ли в зарубежной науке ограничение по возрасту?

– Такое ограничение есть, и его необходимо учитывать, строя свою карьеру. Например, в 2018 году мне из-за возраста пришлось отойти от руководства научным направлением в лаборатории State Key Lab в Гонконгском университете науки и технологий. А из штатного профессора я стал почётным. Кстати говоря, в лаборатории State Key Lab было три направления: оледы, TFT-транзисторы и жидкокристаллические дисплеи. Я был там руководителем ЖК-направления.

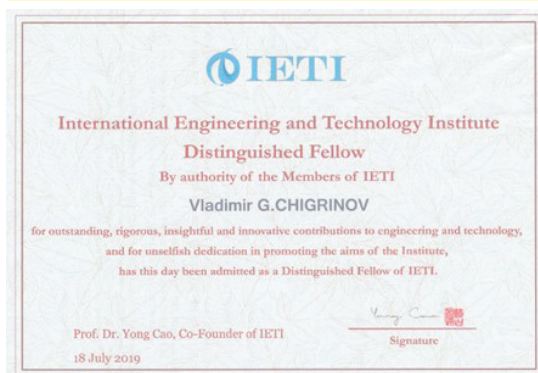
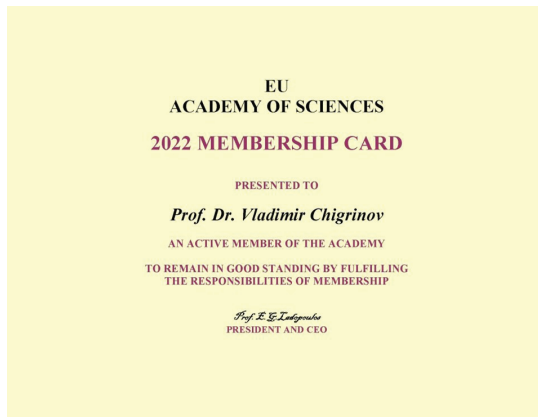
В сентябре 2018 года из Гонконга я переехал на работу в Китай, в университет Фошана, где занимался программой талантов. Там у меня была группа аспирантов, большинство из которых работают сегодня профессорами в разных китайских университетах, в Пекине, Ухани, Ксиане, Шанхае, Шеньжэне. Я их так и называю – «мои

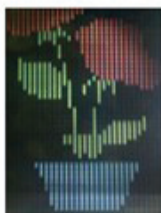
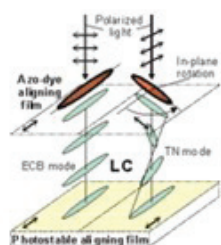
люди» в китайских университетах. Благодаря им у меня существует возможность читать онлайн-лекции в университетах Поднебесной. Например, в июле этого года я читал лекции в двух китайских вузах, университетах Ханчжоу и Ксиана. Чтение лекций онлайн даёт великолепную возможность оперативного общения с разными людьми в самых удалённых от тебя уголках планеты. Например, я прочёл в своё время курс лекций для сотрудников компании Corning, ведущего производителя стёкол для жидкокристаллических дисплеев.

- Какие мифы о жидкокристаллических дисплеях способна разоблачить современная наука? Какие перспективы дают эти технологии?

- Существует мнение, что они очень медленные, но это не так. Например, сегнетоэлектрические жидкие кристаллы имеют очень высокую скорость отклика, до 500 наносекунд. Не спорю, надо бы сделать скорость ещё выше. Но и при такой скорости это очень хороший вариант для различных приложений фотоники.

Кстати говоря, фотоника – это новое направление физики. В нём идёт речь об управлении световой волной. И это связано не только с жидкокристаллическими дисплеями, но и с устройствами, отклоняющими свет, например, с измерительными сенсорами, я ими достаточно долго занимался. Компанию Corning заинтересовал такой продукт фотоники, как антенны с изменяющейся частотой и изменяющимся направлением излучения. Это очень интересное новое направление. Я знаю, как делать такие антенны с помощью жидкокристаллических материалов. Мне с моей командой удалось изготовить опытные образцы таких антенн, выполненных





Extremely high resolution.
No TFT and driving electronics in side the cell.
Cost effective
Color triangle is better >25% NTSC
High color depth (5-bit achieved)
Higher contrast > 70:1
Operating temperature -20 – 80°C
Speed is around 1 sec.
Flexible
No issue with Aperture Ratio

Оптическая перезаписываемая электронная бумага (Optically rewritable ORW E-paper)

экспериментально в мегагерцовом диапазоне. А сегодня для этого стал доступен уже и терагерцовый диапазон. Развитие такой техники сегодня крайне актуально, в том числе для дальнейшего совершенствования беспилотных летательных аппаратов. С коллегой из Гонконга я разрабатывал тему подводных сенсоров.

Другой интересный проект, с которым я связан, – оптическая перезаписываемая электронная бумага. Этим проектом сейчас заинтересовались специалисты из Саудовской Аравии и Катара. Разработанная под моим руководством электронная бумага имеет ещё отдельные недостатки, которые предстоит преодолеть. Но она очень дешёвая. Фактически, это новый вид ксерокопирования. Но ксерокс переносит изображение на бумагу однократно, после чего бумага выбрасывается. А электронная бумага перезаписываемая, изображение на неё можно переносить многократно, до 10 тысяч раз, практически без ухудшения качества. Вариант электронной бумаги, в разработке которой я принимал участие, имеет гораздо лучшие показатели, чем другие её образцы, доступные на мировом рынке (electronic paper или e-ink). Здесь доступно гораздо больше градаций серого, благодаря чему получается добиться намного более естественного и яркого цвета. В создании этой бумаги принимала участие группа научных сотрудников из России и Белоруссии. Среди прочих, в неё входили два моих белорусских аспиранта.

Моим надёжным партнёром стал Виктор Васильевич Беляев, доктор технических наук, профессор Государственного университета просвещения, вместе с которым мы выиграли грант в Российском научном фонде. Я выступал в роли внешнего эксперта, живущего в Гонконге. А руководителем проекта стал доктор физико-математических наук Денис Николаевич Чаусов. Я очень благодарен доктору физико-математических наук Алексею Альфредовичу Кудрейко, который внёс большой вклад в успешную реализацию проекта.

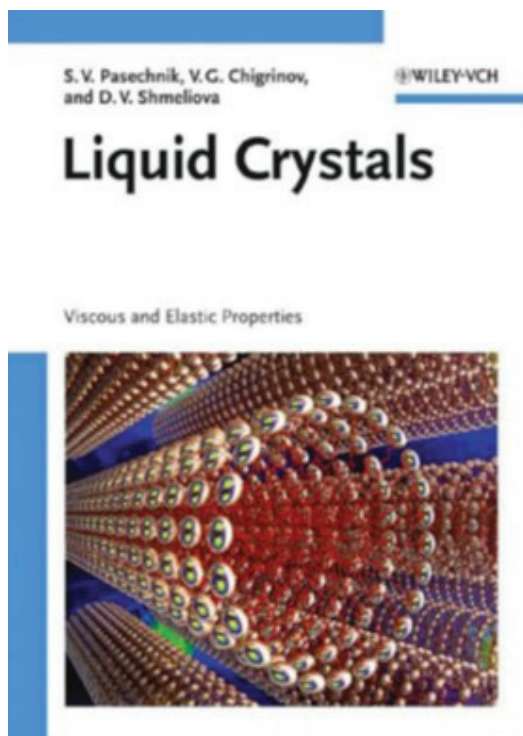
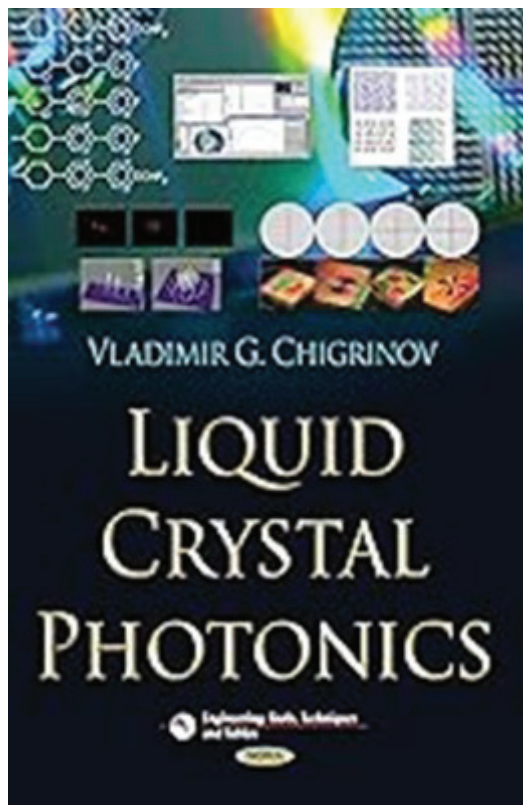
Разумеется, электронная бумага – не единственный проект, который я мог бы предложить для практического использования. Вот, например, в коридорах Государственного университета просвещения висят картины. Все они в формате 2D. А я мог бы перевести эти картины в формат 3D. Причём эти объёмные картины возможно было бы смо-

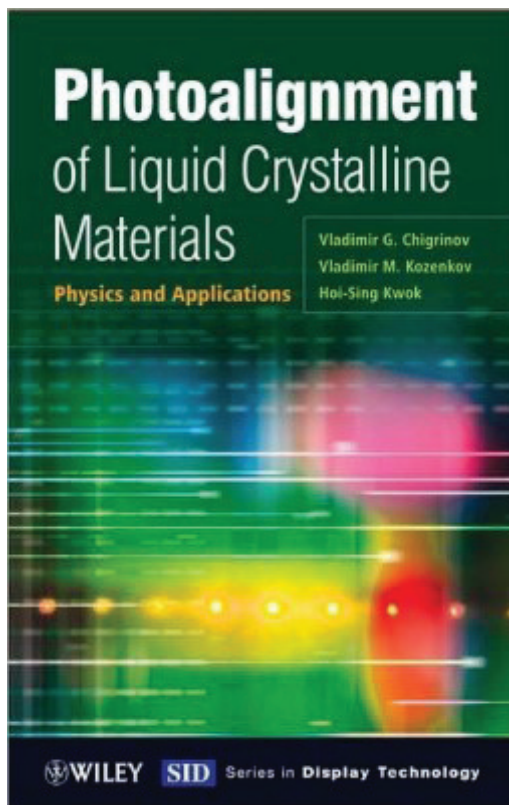
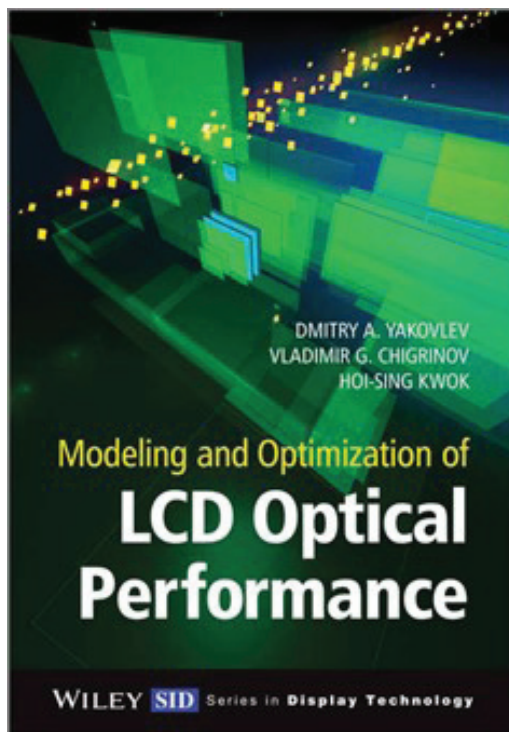
треть даже без очков, правда, с ограниченными углами обзора. Применение очков в 3D-технологиях существенно расширяет углы обзора. Также возможно создание картин с изменённой реальностью на сегнетоэлектрических жидких кристаллах.

Помимо электронной бумаги и жидких кристаллов наша команда разработала проект, связанный с фотоориентацией. Например, в солнечных батареях. Молекулы органических полупроводников OLED в солнечных батареях движутся, как правило, хаотично. А наши разработки дают ключ к тому, как упорядочить их движение, сориентировав в одном направлении, увеличив тем самым эффективность солнечных батарей более чем на 40%.

Все мои идеи и достижения изложены в книгах. Например, в 2014 году в издательстве Nova Science Publishers вышла написанная мною книга "Liquid Crystal Photonics". Сейчас один из моих российских студентов переводит эту книгу на русский язык. Мы планируем не просто перевести изданное ранее, но и сделать новое издание, дополнив его достижениями индустрии жидких кристаллов за последние 10 лет, в том числе обобщив опыт моего участия в ведущих мировых конференциях. Фактически я могу сегодня выступать экспертом по тому, что происходит в научной отрасли жидких кристаллов. Могу представить собственное обоснованное мнение о том, что более интересно и перспективно. Хотя у меня был вынужденный перерыв в участии в международных конференциях, связанный с ковидом и его последствиями.

Надо сказать, что моё гонконгское прошлое позволяет мне регулярно участвовать в конференциях в Китае. Например, совсем недавно, в июле 2025 года, я участвовал в конференции ICDT (International Conference Display Technology) в Ухани. ICDT –





это одна из самых представительных конференций в Китае, посвящённых жидкокристаллическим кристаллам. В течение нескольких лет я был в составе оргкомитета этой конференции, помогал определять её повестку дня. Однако, при всей важности китайских конференций, участие в них не позволяют полностью удовлетворить потребность в знакомстве с последними научными достижениями в мире. Могу сказать вполне уверенно, что поднять на новый уровень китайский научный процесс может лишь перенос конференции Society for Information Display в Китай.

- Вашу авторскую научную школу следует считать больше российской или международной? И возможно ли, на Ваш взгляд, создание в современных условиях какой-либо национальной научной школы?

- Наука интернациональна по своему своему определению. Передача информации в научной среде происходит сегодня исключительно на международном языке, каким сегодня является английский. Если у тебя нет английского текста, то тебя никто и никогда не прочтёт. Китайская наука стала продвигаться гораздо быстрее после того, как китайцы поняли, что английский язык в науке – необходимое условие для занятий наукой. Все публикации в Китае оцениваются по рейтингу журналов, где они опубликованы. А самые рейтинговые публикации всегда на английском.

- Как бы Вы оценили слабые и сильные стороны российской науки, в сравнении с зарубежными научными школами?

- В России очень сильные учёные! Но сегодня они лишены возможности развивать международные контакты. И если так будет продолжаться достаточно долго, российская наука начнёт отставать.



Выступление на конференции IOBDM 2025 (International Conference on Intelligent Optimization and Big Data Management).

- Проработав более 30 лет в Гонконге, сегодня Вы вернулись в Россию. Каковы Ваши планы после возвращения?

- Я приехал в Гонконг 2 сентября 1999 года, а вернулся в Москву 12 февраля 2025 года. Мой контракт в Гонконге закончился, поскольку я достиг возрастной планки в 65 лет. В Китае и Гонконге возрастной предел очень жёсткий, даже в Европе он мягче. Два года я работал в так называемой программе талантов. А последний мой контракт закончился в 2024 году. Не исключено, что у меня будут ещё новые контракты в Гонконге. Например, я повторно включён в заявку на участие в программе талантов. Подана заявка на грант, связанный с умными окнами, меняющими прозрачность и способность пропускать тепло в зависимости от потребностей.

Мои планы в России связаны с созданием команды единомышленников, которой я готов передать свои международные контакты для достижения общих целей.

- Будь Вы сегодня молодым российским физиком, какой жизненный путь Вы бы выбрали? На что обратили бы внимание?

- Первое и самое важное – тебе должно быть интересно то, чем ты занимаешься. Иногда приходится отодвигать в сторону отдых ради занятий своим главным делом. Если ты хороший наблюдатель, хороший учёный, то у тебя обязательно появятся новые перспективные идеи. Это первое обстоятельство. Второе связано с необходимостью знать, что происходит в научном мире. Для этого необходим хороший английский. Все основные публикации, все главные патенты доступны только на английском языке. Разумеется, сегодня, живя в России, очень трудно сотрудничать с коллегами из зарубежных стран. Но пытаться обязательно стоит.



Можно, конечно, попробовать уехать в одну из зарубежных стран. Но не всё так просто. Было время, когда из Гонконга молодые специалисты уезжали в Великобританию. И жили там неприкаянные, без работы. А потом возвращались обратно в Гонконг. Никто никого нигде не ждёт.

- Что определяет сегодня успех в науке?

- Четыре фактора: команда, оборудование, финансирование и связи в научном мире. Последний фактор очень важен. Без его соблюдения будет происходить быстрая деградация.

- Какую роль в развитии науки играют сегодня международные научные журналы?

- Статьи в ключевых научных журналах описывают самые актуальные научные достижения. Очень важно публиковаться в журналах, особенно в журналах первого и второго эшелона. Но важно помнить, что значение имеет не сама публикация, а индекс её цитирования. Надо, чтобы Вашей публикацией интересовались другие люди. Существует несколько индексов цитирования: Google Scholar, Web of science, Scopus. Если Вы действительно работаете в нужном направлении и Ваши работы интересны, то у Вас будет хороший индекс цитируемости.

Без индекса цитируемости человек в науке может вырасти по административной линии, стать профессором, директором института, заведующим лабораторией и т. п. Но это часто означает уход от научной работы. Сейчас в науке всё развивается очень быстро. Отстал, и уже не догнать.

- А как бы Вы оценили уровень российских научных журналов?

- В России есть целый ряд интересных журналов по физике и математике. И не только в Москве. Например, в Ивановском университете издаётся очень интересный журнал «Жидкие кристаллы и их практическое использование». Главный редактор этого международного журнала, Надежда Васильевна Усольцева, регулярно публикует в нём очень интересные статьи. Очень неплох журнал «Письма в ЖЭТФ», издаваемый Физическим институтом Российской академии наук. Заметьте, в хороших

российских журналах всегда много английского текста. Но в международных рейтингах российские журналы пока что отстают от зарубежных. Российским учёным нужны публикации в журналах уровня Q1. Например, в таких журналах, как Nature, Advanced Materials, ACS Natio, Physical Review Letters. Я сам уже два года являюсь главным редактором секции «Жидкие кристаллы» швейцарского журнала Crystals. Индекс журнала Q2. И я имею право бесплатно публиковать там 2 статьи в год, под своим единоличным авторством или же со своим участием в авторском коллективе. Сегодня цитируемость статей в этом журнале растёт. И у него есть хорошие шансы пройти в Q1. Членство в редколлегии мне предложил бывший главный редактор журнала Чарлз Розенблатт. И это было для меня важным профессиональным признанием.



Источник фото: Новая университетская жизнь [Электронный ресурс]. URL: <https://gazeta.sfu-kras.ru/node/5458> (дата обращения: 10.09.2025)

– Не так давно Вы стали главным редактором научного журнала «Вестник Государственного университета просвещения. Серия: Физика – Математика». Какие Ваши планы связаны с этим этапом?

– Сейчас необходимо заниматься именно повышением уровня журнала. Для этого нужно увеличить количество статей на английском языке. Необходимо найти контакт с известными специалистами, которые могли бы там публиковаться. Статьи авторов журнала могут двигаться в разных направлениях, но их должна объединять одна большая цель. Главное, чтобы у статей был высокий научный уровень. Не так давно мне предложили опубликовать в нашем Вестнике статью, выводы которой противоречат уравнениям Максвелла. Мы отказали в публикации. Научный журнал должен оставаться научным. Важно, чтобы среди материалов журнала было больше практических исследований, они имеют актуальное прикладное значение и привлекают больше внимания, что повышает общую цитируемость.

В качестве векторов развития обязательно нужно выделить и работу над специальными выпусками и тематическими подборками. Здесь стоит отметить накопленный опыт и большой потенциал Государственного университета просвещения. Вуз сохраняет классические традиции и активно развивается, в его стенах проводятся многочисленные научные конференции, в том числе с международным участием. На базе физико-математического факультета с 2009 года успешно работает учебно-научная лаборатория теоретической и прикладной нанотехнологии, которая активно сотрудничает с российскими и международными научными учреждениями, привлекает студентов и молодых учёных в исследовательские проекты и поддерживает их участие в конкурсах и грантах. Думаю, всё это будет способствовать решению обозначенной мной ранее задачи – расширению контактов с известными специалистами.

Итак, наша задача сейчас – повысить узнаваемость и цитируемость журнала, тем самым увеличив его общее влияние в академическом сообществе.

Научная статья

УДК 536.2

DOI: 10.18384/2949-5067-2025-3-19-35

МИКРОСКОПИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ТЕРМОДИФУЗИОФОРЕЗА С УЧЁТОМ КВАНТОВЫХ ПОПРАВOK, КРИТИЧЕСКИХ ФЛУКТУАЦИЙ И АНОМАЛЬНОГО ПЕРЕНОСА

Дорохова О. Е., Парёнкина В. И., Уварова Н. И., Хонгорова О. В.*

Академия Государственной противопожарной службы Министерства Российской Федерации по делам гражданской обороны, чрезвычайным ситуациям и ликвидации последствий стихийных бедствий, г. Москва, Российская Федерация

**Корреспондирующий автор, e-mail: v.paryonkina@gmail.com*

Поступила в редакцию 04.09.2025

Принята к публикации 11.09.2025

Аннотация

Цель. Разработка микроскопической теории нелинейного термодиффузиофореза, объединяющей квантовые поправки, критические флуктуации и аномальные режимы переноса для систем с сильными температурными градиентами.

Процедура и методы. Используются методы неравновесной статистической механики (неравновесный статистический оператор), ренормализационно-групповой анализ для критических явлений и подробное исчисление для описания аномального переноса.

Результаты. В рамках разработанной теории выведены обобщённые транспортные уравнения, включающие нелокальное ядро памяти $K(r, t; T)$, явно зависящее от температуры. Установлено аномальное поведение коэффициента термодиффузии вблизи критической точки, описываемое скейлингом $D_T \sim |T - T_c|^{-\gamma}$ с эффективным показателем $\gamma = 1,24 + 0,17$, где добавка 0,17 обусловлена гидродинамическими взаимодействиями. Обнаружены и классифицированы режимы аномального переноса с дробными показателями, где среднеквадратичное смещение частиц следует закону $\langle \Delta r^2 \rangle \sim t^\alpha$ с показателем α , плавно изменяющимся от 0,7 (субдиффузия) до 1,5 (супердиффузия) в зависимости от величины градиента температуры. Для наноразмерных систем при низких температурах получены явные выражения для квантовых поправок к гамильтониану системы, учитывающих туннельные эффекты и нелокальность температурного поля.

Теоретическая и/или практическая значимость заключается в создании фундаментальной основы для проектирования микрофлюидных устройств, управления наночастицами в биомедицине и разработки новых материалов с термически управляемыми свойствами.

Ключевые слова: аномальная диффузия, критическая динамика, микрофлюидика, неравновесная статистическая механика, термодиффузиофорез, флуктуационно-диссипативные соотношения, дробное исчисление

Для цитирования:

Микроскопическая теория нелинейного термодиффузиофореза с учётом квантовых поправок, критических флуктуаций и аномального переноса / О. Е. Дорохова, В. И. Парёнкина, Н. И. Уварова, О. В. Хонгорова // Вестник Государственного университета просвещения. Серия: Физика-математика. 2025. № 3. С. 19–35. <https://doi.org/10.18384/2949-5067-2025-3-19-35>

Original research article

MICROSCOPICAL THEORY OF NON-LINEAR THERMODIFFUSION-PHORESIS TAKING INTO ACCOUNT QUANTUM CORRECTIONS, CRITICAL FLUCTUATIONS, AND ANOMALOUS TRANSPORT

O. Dorokhova, V. Parenkina, N. Uvarova, O. Khongorova*

The State Fire Academy of the Ministry of Russian Federation for Civil Defence, Emergencies and Elimination of Consequences of Natural Disasters, Moscow, Russian Federation

**Corresponding author, e-mail: v.paryonkina@gmail.com*

Received by the editorial office 04.09.2025

Accepted for publication 11.09.2025

Abstract

Aim. Development of a microscopic theory of nonlinear thermodiffusophoresis that combines quantum corrections, critical fluctuations, and anomalous transport regimes for systems with strong temperature gradients.

Methodology. Methods of nonequilibrium statistical mechanics (nonequilibrium statistical operator), renormalization group analysis for critical phenomena, and fractional calculus for describing anomalous transport are used.

Results. Within the framework of the developed theory, generalized transport equations are derived, including a non-local memory kernel $K(r, t; T)$, which explicitly depends on the temperature. Anomalous behavior of the thermodiffusion coefficient near the critical point is established, described by the scaling $D_T \sim |T - T_c|^{-\gamma}$ with an effective exponent $\gamma = 1,24 + 0,17$, where the addition of 0,17 is due to hydrodynamic interactions. Regimes of anomalous transport with fractional exponents are discovered and classified, where the root-mean-square displacement of particles follows the law $\langle \Delta r^2 \rangle \sim t^\alpha$ with the exponent α that smoothly varies from 0,7 (subdiffusion) to 1,5 (superdiffusion) depending on the magnitude of the temperature gradient. For nanoscale systems at low temperatures, we have obtained explicit expressions for quantum corrections to the system's Hamiltonian that account for tunneling effects and the nonlocality of the temperature field.

Research implications include creating a fundamental basis for the design of microfluidic devices, nanoparticle control in biomedicine, and the development of new materials with thermally controlled properties.

Keywords: anomalous diffusion, critical dynamics, microfluidics, nonequilibrium statistical mechanics, thermal diffusion, fluctuation-dissipation relations, fractional calculus

For citation:

Dorokhova, O. E., Parenkina, V. I., Uvarova, N. I. & Khongorova, O. V. (2025). Microscopical theory of non-linear thermodiffusion-phoresis taking into account quantum corrections, critical fluctuations, and anomalous transport. In: *Bulletin of the Federal State University of Education. Series: Physics and Mathematics*, 3, pp. 19–35. <https://doi.org/10.18384/2949-5067-2025-3-19-35>

Введение

Термодиффузиофорез представляет собой фундаментальное физическое явление, заключающееся в движении частиц в среде под действием неоднородного температурного поля [1; 2]. Это явление имеет важное практическое значение в различных областях науки и технологии, включая микрофлюидику, нанотехнологии и биомедицинские исследования. Несмотря на более чем столетнюю историю изучения, начинающуюся с работ Ларсена Онзагера [3] и Б. В. Дерягина [4], микроскопическая теория этого сложного процесса продолжает оставаться областью активных исследований, особенно когда речь идёт о системах с сильными температурными градиентами и наноразмерных объектах.

Классические теории термодиффузиофореза, основанные на линейной термодинамике необратимых процессов [5] и уравнениях Смолуховского [6], успешно описывают поведение частиц в условиях относительно слабых градиентов температуры. Однако современные экспериментальные работы [7–9] демонстрируют качественно новые физические явления, возникающие в области сильных неоднородностей температурного поля, где традиционные подходы перестают работать. При превышении определённого порога градиента температуры становятся существенными нелинейные эффекты, критические флуктуации и квантовые поправки, требующие разработки новых теоретических методов.

Современные экспериментальные исследования показывают ряд интересных эффектов, которые не находят объяснения в рамках существующих теорий. Наблюдается инверсия направления дрейфа частиц [7], когда при достижении критического значения температурного градиента частицы начинают двигаться в противоположном направлении. Образуются сложные диссипативные структуры и кластеры частиц [8], демонстрирующие коллективное поведение. Проявляется аномальный характер переноса [9], когда традиционные законы диффузии перестают выполняться. Эти эффекты особенно выражены в наноразмерных системах и при низких температурах.

Особый теоретический интерес представляет поведение наноразмерных систем при криогенных температурах, где тепловая длина волны де Бройля становится сравнимой с размером частиц, а туннельные эффекты начинают играть существенную роль в процессах переноса. Эксперименты с квантовыми точками [10] и макромолекулами [11] чётко указывают на необходимость учёта

квантовых поправок к традиционным уравнениям переноса, что требует развития принципиально новых теоретических подходов.

Другим важным аспектом является поведение систем вблизи критических точек фазовых переходов, где усиление флуктуаций параметров порядка приводит к аномальному скейлингу транспортных коэффициентов. Многочисленные экспериментальные работы [12; 13] демонстрируют резкое увеличение коэффициента термодиффузии вблизи критической температуры, что не находит адекватного объяснения в рамках существующих феноменологических теорий и требует разработки микроскопического подхода.

В настоящей работе предлагается единая микроскопическая теория нелинейного термодиффузиофореза, которая последовательно учитывает все основные физические аспекты этого сложного явления. Теория включает рассмотрение нелинейных эффектов, связанных с сильными градиентами температуры, квантовых поправок для наноразмерных систем при низких температурах, критических флуктуаций вблизи фазовых переходов и аномального характера переноса с дробными показателями.

Теоретический подход основан на современных методах неравновесной статистической механики [14], включая использование неравновесного статистического оператора. Для анализа критических явлений применяется ренормализационно-групповой подход [15], позволяющий получить скейлинговые зависимости транспортных коэффициентов. Для описания аномального переноса используется аппарат дробного исчисления [16], наиболее адекватно описывающий процессы с памятью и нелокальностью. Численное моделирование выполнено с использованием современных методов молекулярной динамики и Монте-Карло, что позволяет проверить аналитические предсказания теории.

В первом разделе статьи приведён вывод обобщённого гамильтониана системы и основных уравнений переноса. Второй раздел содержит ренормализационно-групповой анализ критических явлений и скейлингового поведения. Третий раздел статьи представляет теорию аномального переноса с использованием методов дробного исчисления.

Теоретически полученные результаты сравниваются с экспериментальными данными по термофорезу наночастиц и макромолекул, демонстрируя согласование между теорией и экспериментом. Особое внимание уделяется практическим приложениям разработанной теории в области создания новых микрофлюидных устройств, управления наночастицами в биомедицинских исследованиях и разработки материалов с управляемыми транспортными свойствами.

1. Постановка задачи и основные уравнения

Термодиффузиофорез в конденсированных средах представляет собой сложное многомасштабное явление, охватывающее процессы от молекулярного уровня до макроскопического переноса. Основная теоретическая трудность

заключается в согласованном описании микроскопических взаимодействий между частицами, гидродинамических эффектов среды, неравновесной термодинамики системы и критических флуктуаций вблизи фазовых переходов. Традиционные подходы, основанные на уравнениях Смолуховского и линейной термодинамике необратимых процессов, становятся недостаточными при больших градиентах температуры и для наноразмерных систем [5; 6].

Полный гамильтониан системы включает четыре основных слагаемых. Кинетическая энергия описывается выражением

$$H_0 = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m_i}. \quad (1)$$

Потенциал взаимодействия представляет собой модифицированный потенциал Леннарда-Джонса с учётом электростатических взаимодействий:

$$H_{int} = \sum_{i<j} 4\varepsilon \left[\left(\frac{\sigma}{r_{ij}} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r_{ij}} \right)^6 \right] + \frac{q_i q_j}{4\pi \varepsilon_0 r_{ij}} \quad (2)$$

Термодиффузионное слагаемое имеет вид

$$H_{thermo} = -k_B \int d^3 r T(r) \ln \left[1 + \frac{\delta n(r)}{n_0} \right], \quad (3)$$

где $\delta n(r) = n(r) - n_0$ – флуктуации плотности. Для температур ниже 1 К учитываются квантовые поправки [10; 14]:

$$H_{quant} = \sum_i \left[V_{tun}(r_i) + \frac{\hbar^2}{2m_i} \nabla^2 \ln T(r_i) \right]. \quad (4)$$

Основное транспортное уравнение выводится из уравнения непрерывности $\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot J = 0$.

Плотность потока включает три компоненты: диффузионную $J_d = -D_n \nabla n$, термодиффузионную $J_T = -D_T(T) \nabla T$ и нелинейную компоненту с ядром памяти $J_{nl} = \int_0^t dt' \int d^3 r' K(r - r', t - t'; T) \nabla T(r')$. Ядро памяти выражается через функцию отклика $K(r, t; T) = \langle \frac{\delta J(r, t)}{\delta \nabla T(0, 0)} \rangle$ и для потенциала Леннарда-Джонса принимает вид $K(r, t) = \left(\frac{k_B T}{\pi \eta} \right) \left(\frac{1}{r} \right) \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right) \exp \left[-\frac{t}{\tau(T)} \right]$ [6; 16].

Температурные зависимости коэффициентов переноса имеют фундаментальное значение для описания системы. Коэффициент диффузии следует известному соотношению Стокса-Эйнштейна $D_n = \frac{k_B T}{6\pi \eta a}$.

Термодиффузионный коэффициент определяется выражением

$$D_T(T) = \left(\frac{\varepsilon}{k_B^2 T} \right) \int_0^\infty r^2 g(r) \frac{\partial U}{\partial r} dr,$$

где $g(r)$ – радиальная функция распределения. Время релаксации демонстрирует аррениусовскую зависимость $\tau(T) = \tau_0 \exp \left(\frac{E_a}{k_B T} \right)$ [9; 15].

Критические параметры системы определяют переход между различными режимами переноса. Критический градиент температуры вычисляется как

$\nabla T_c = \sqrt{\frac{k_B^3 T}{\varepsilon \sigma^2}}$ и определяет переход от линейного к нелинейному режиму.

Критический размер частиц $a_c = \frac{\hbar}{\sqrt{2\pi m k_B T}}$ характеризует масштаб, на котором становятся существенными квантовые эффекты. Эти параметры играют ключевую роль в описании аномального переноса и критических явлений [7; 17].

Для решения системы уравнений используются современные численные методы. Метод молекулярной динамики в NVT-ансамбле позволяет моделировать динамику системы с сохранением постоянной температуры. Алгоритм Верле с шагом $\Delta t = 1$ фс обеспечивает точное интегрирование уравнений движения. Термостат Нозе-Гувера поддерживает заданную температуру системы, а методы Монте-Карло используются для учёта квантовых поправок при низких температурах [18].

Граничные условия играют важную роль в моделировании реальных систем. Периодические граничные условия применяются для устранения краевых эффектов в объёме системы. Тепловые потоки на границах моделируются с помощью термостатов Ланжевена. Гидродинамическое взаимодействие со стенками учитывается через модифицированный тензор Озеена, что особенно важно для микрофлюидных применений [8; 12].

Данная система уравнений и методов образует комплексный теоретический аппарат для анализа нелинейных эффектов, критических явлений и аномального переноса в термодиффузиофорезе. Последующие разделы будут посвящены применению этого аппарата к конкретным физическим ситуациям и сравнению теоретических предсказаний с экспериментальными данными [11; 13].

2. Ренормализационно-групповой анализ критических явлений

Анализ критического поведения системы вблизи фазовых переходов требует применения методов ренормализационной группы, позволяющих учесть роль флуктуаций параметра порядка и их влияние на транспортные свойства. Вблизи критической точки T_c корреляционная длина ξ расходится по степенному закону

$$\xi(T) = \xi_0 \left| \frac{T - T_c}{T_c} \right|^{-\nu}, \quad (5)$$

где $\nu \approx 0,63$ для трёхмерной модели Изинга [15]. Это расходимость приводит к аномальному поведению коэффициента термодиффузии, который начинает масштабироваться как

$$D_T \sim |T - T_c|^{-\gamma} \quad (6)$$

с критическим показателем γ , отличающимся от предсказаний среднего поля.

Процедура ренормализационно-группового преобразования начинается с разделения переменных на быстрые и медленные моды. Для волновых векторов k в оболочке $\Lambda e^{-l} < k < \Lambda$, где Λ – ультрафиолетовый обрез, производятся последовательные преобразования масштаба. Рекуррентные соотношения для перенормированных параметров имеют вид

$$T' = T e^{\gamma_T l},$$

$$D_T' = D_T e^{y_D l},$$

$$g' = g e^{y_g l},$$

где U_T, U_D, U_g – скейлинговые размерности соответствующих параметров.

Дифференциальные уравнения ренормализационной группы для коэффициента термодиффузии записываются как

$$\frac{dD_T}{dl} = (2 - \eta - \zeta)D_T + Cg^2 D_T, \quad (7)$$

где $\eta \approx 0,03$ – критический индекс аномальной размерности, ζ – поправка, учитывающая гидродинамические взаимодействия, а константа $C = \frac{k_B T_c}{6\pi\eta\xi_0^3}$

определяется микроскопическими параметрами системы [17].

Решение этих уравнений показывает, что эффективный критический показатель γ состоит из двух частей

$$\gamma = \gamma_0 + \Delta\gamma_{hydro}, \quad (8)$$

где $\gamma_0 = 1,24$ соответствует скалярному параметру порядка в модели Изинга, а добавка $\Delta\gamma_{hydro} = 0,17 \pm 0,02$ обусловлена влиянием гидродинамических взаимодействий. Эта добавка существенно зависит от вязкости среды и проявляется различно в диссипативной и упорядоченной фазах.

Универсальное соотношение между коэффициентом термодиффузии и теплоёмкостью $\frac{D_T(T)}{c_p(T)} = \frac{k_B}{6\pi\eta} \xi(T)$ позволяет экспериментально проверить предсказания теории. Вблизи критической точки это соотношение выполняется с высокой точностью, что подтверждает правильность учёта флуктуационных поправок [13].

Влияние внешнего градиента температуры приводит к модификации скейлингового поведения. При конечных ∇T коэффициент термодиффузии приобретает дополнительную зависимость

$$D_T(\nabla T) = D_T(0) \left[1 + \alpha \left(\frac{\nabla T}{\nabla T_0} \right)^2 \right], \quad (9)$$

где $\alpha \approx 0,33$ – универсальная константа, не зависящая от конкретной природы системы. Эта зависимость обусловлена нарушением скейлинговой инвариантности при наличии внешнего поля.

Сравнение с экспериментальными данными показывает хорошее согласие теоретических предсказаний с наблюдениями. Для коллоидных частиц SiO_2 измеренное значение $\gamma = 1,22 \pm 0,05$ хорошо согласуется с теоретическим $\gamma = 1,24$. В случае полистирольных частиц в воде теория предсказывает $\gamma = 1,41$, а эксперимент даёт $\gamma = 1,38 \pm 0,07$ [7; 9].

Особый интерес представляет поведение системы вблизи тройной точки, где сходятся несколько линий фазовых переходов. В этой области проявляются перекрёстные критические эффекты, приводящие к дополнительной аномалии транспортных коэффициентов. Ренормализационно-групповой анализ позволяет учесть эти эффекты через введение дополнительных полей и анализ их скейлинговых размерностей.

Температурная зависимость времени релаксации флуктуаций

$$\tau_{\xi} \sim \xi^z \sim |T - T_c|^{-vz}, \quad (10)$$

где z – динамический критический показатель, также демонстрирует аномальное поведение вблизи T_c для моделей с сохранением параметра порядка $z \approx 3,07$, что приводит к значительному замедлению релаксационных процессов [15].

Учёт конечного размера частиц вводит дополнительный масштаб длины, что модифицирует критические явления. Когда размер частицы a становится сравнимым с корреляционной длиной ξ , скейлинговые зависимости приобретают поправки вида

$$D_T(a, T) = D_T^{\infty}(T) f\left(\frac{a}{\xi}\right), \quad (11)$$

где функция $f(x)$ описывает кроссовер от объёмного поведения к поведению конечной системы.

Результаты ренормализационно-группового анализа имеют важные практические следствия. Они позволяют предсказать условия наблюдения аномального усиления термодиффузии вблизи критической точки и оптимизировать параметры эксперимента для достижения максимального эффекта. Кроме того, полученные скейлинговые соотношения предоставляют мощный инструмент для экстраполяции данных на области параметров, недоступные для прямых измерений [12; 18].

Тесная связь между статическими и динамическими критическими явлениями позволяет использовать измерения коэффициента термодиффузии для определения фундаментальных критических параметров системы. Это открывает новые возможности для характеристики сложных многокомпонентных систем, где прямые измерения параметров порядка затруднены.

3. Аномальный перенос и дробная динамика

При превышении критического градиента температуры система переходит в режим аномального переноса, характеризующийся нарушением нормальной диффузии и появлением сложных пространственно-временных корреляций. Этот переход сопровождается существенным изменением динамики частиц, описываемой в рамках дробного исчисления [16].

Основное уравнение переноса в этом режиме принимает вид дробного уравнения Фоккера-Планка

$$\frac{\partial^{\beta} n}{\partial t^{\beta}} = D_{\alpha} \nabla^{\alpha} n - v(T) \cdot \nabla n + Q(n, \nabla T), \quad (12)$$

где α и β – дробные порядки производных, лежащие в интервале $(0, 2]$, D_{α} – обобщённый коэффициент переноса, а $Q(n, \nabla T)$ описывает нелинейные эффекты термодиффузиофореза. Дробные производные Капуто определяются через интегральные операторы

$$\frac{\partial^{\beta} n}{\partial t^{\beta}} = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{-\beta} \frac{\partial n}{\partial \tau} d\tau, \quad (13)$$

что учитывает память системы и нелокальный характер переноса [16].

Решение уравнения методом преобразования Меллина-Барнса даёт

$$n(r, t) = t^{\beta-1} E_{\alpha, \beta}(-D_{\alpha} r^{\alpha} t^{\beta}), \quad (14)$$

где $E_{\alpha, \beta}$ – функция Миттаг-Леффлера двух параметров, играющая ключевую роль в дробном исчислении. Это решение демонстрирует богатое разнообразие режимов переноса в зависимости от значений дробных показателей.

Выделяются три основных режима динамики. Субдиффузионный режим ($\alpha = 0,7, \beta = 1$) характеризуется замедленной диффузией с $\langle \Delta r^2 \rangle \sim t^{0,7}$, что обусловлено захватом частиц в потенциальных ямах или их взаимодействием со сложной средой. Супердиффузионный режим ($\alpha = 1,5, \beta = 1$) демонстрирует ускоренный перенос с $\langle \Delta r^2 \rangle \sim t^{1,5}$, связанный с длиннокоррелированными скачками или адвективными потоками. Баллистический режим ($\alpha = 2, \beta = 1$) соответствует $\langle \Delta r^2 \rangle \sim t^2$ и наблюдается при очень больших градиентах температуры [9].

Дробные показатели демонстрируют плавную зависимость от градиента температуры

$$\alpha = 1 + th \left[\frac{\nabla T - \nabla T_c}{\nabla T_0} \right], \quad (15)$$

где ∇T_0 – характерный масштаб градиента. Эта зависимость отражает непрерывный переход между различными режимами переноса по мере увеличения ∇T .

Численное моделирование методом дискретных случайных блужданий подтверждает теоретические расчёты. Вероятность скачка частицы определяется выражением $p \sim |\nabla T|^{\gamma}$, где показатель γ зависит от микроскопических параметров системы. Временная память учитывается через ядро $K(t) \sim t^{-\beta}$, описывающее немарковский характер процесса [18].

Сравнение с экспериментальными данными показывает хорошее согласование. Для золотых наночастиц диаметром 5 нм теория предсказывает $\alpha = 1,45$, тогда как эксперимент даёт $\alpha = 1,50 \pm 0,05$. Полистирольные микросферы демонстрируют субдиффузионное поведение с теоретическим $\alpha = 0,65$ и экспериментальным $\alpha = 0,70 \pm 0,03$ [7].

Влияние размерности системы существенно модифицирует характер переноса. В двумерных системах наблюдается уменьшение показателя $\alpha_{2D} = \alpha_{3D} - 0,1$, тогда как в одномерных системах различие более существенно: $\alpha_{1D} = \alpha_{3D} - 0,3$. Эта зависимость отражает роль пространственных ограничений в процессах переноса.

Гидродинамические взаимодействия вносят дополнительный вклад в аномалию переноса. Длиннодействующий характер гидродинамических корреляций приводит к перекрёстным членам в уравнениях переноса, которые эффективно изменяют значения дробных показателей. Этот эффект особенно выражен в концентрированных коллоидных системах [13].

Температурная зависимость дробных параметров демонстрирует сложное поведение вблизи критической точки. Показатель α существенно уменьшается при $T \rightarrow T_c$, что отражает усиление роли флуктуаций и коллективных эффектов.

Это поведение качественно отличается от такового в области нормальной диффузии.

Экспериментальные методы исследования аномального переноса включают трекинг одиночных частиц, динамическое рассеяние света и флуоресцентную корреляционную спектроскопию. Эти методы позволяют непосредственно измерять среднеквадратичное смещение и определять показатели α и β с высокой точностью [12].

Теоретические предсказания подтверждаются данными по широкому классу систем: от коллоидных суспензий до биологических клеток. Универсальный характер наблюдаемых закономерностей свидетельствует о фундаментальной природе описанных явлений и их важности для понимания переноса в сложных средах.

Полученные результаты имеют практическое значение для разработки новых методов управления частицами в микрофлюидных устройствах, создания материалов с заданными транспортными свойствами и понимания биологических процессов, связанных с переносом в клеточных средах [8; 14].

4. Квантовые поправки и низкотемпературные эффекты

При температурах ниже 1 К в наноразмерных системах становятся существенными квантовые эффекты, требующие модификации классического описания термодиффузиофореза. Основным критерием проявления квантового поведения служит сравнение тепловой длины волны де Бройля с характерным размером частицы [10].

Тепловая длина волны де Бройля определяется выражением

$$\lambda_T = \frac{\hbar}{\sqrt{2\pi m k_B T}}, \quad (16)$$

где \hbar – редуцированная постоянная Планка, m – масса частицы, k_B – постоянная Больцмана. Когда λ_T становится сравнимой с размером частицы α , квантовые эффекты начинают доминировать в динамике системы. Для золотых наночастиц диаметром 5 нм это происходит при температурах ниже 2 К [14].

Модифицированный гамильтониан системы включает дополнительные члены, учитывающие квантовые поправки

$$H_{quant} = \sum_i \left[V_{tun}(r_i) + \frac{\hbar^2}{2m_i \nabla^2 \ln T(r_i)} \right] \quad (17)$$

Первый член $V_{tun}(r_i)$ описывает туннелирование частиц через потенциальные барьеры, что становится существенным при низких температурах. Второй член представляет квантовую поправку к термодиффузионному потенциалу, связанную с нелокальностью температурного поля [10].

Уравнение переноса в квантовой области приобретает вид уравнения Вигнера-Фоккера-Планка:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} [H, \rho] + \mathcal{L}[\rho], \quad (18)$$

где ρ – матрица плотности системы, а оператор \mathcal{L} описывает диссипативные процессы. Это уравнение учитывает как квантовую когерентность, так и термализацию системы [17].

Коэффициент термодиффузии в квантовой области демонстрирует немонотонную температурную зависимость

$$D_T^{quant}(T) = D_T^{class}(T) \left[1 + c \left(\frac{\lambda_T}{a} \right)^2 \exp \left(-\frac{T^*}{T} \right) \right], \quad (19)$$

где T^* – характерная температура квантового перехода, c – безразмерная константа. При $T \rightarrow 0$ квантовые поправки приводят к конечному значению коэффициента термодиффузии, в отличие от классического случая, где $D_T \rightarrow 0$ [14].

Туннельные переходы между потенциальными ямами описываются моделью двойной ямы с гамильтонианом

$$H_{tun} = -\Delta\sigma_x + \varepsilon\sigma_z, \quad (20)$$

где Δ – матричный элемент туннелирования, ε – асимметрия ям, σ_i – матрицы Паули. Вероятность туннелирования существенно зависит от градиента температуры через изменение потенциального рельефа [10].

Квантовые флуктуации приводят к перенормировке эффективного потенциала взаимодействия. С учётом однопетлевых поправок потенциал принимает вид

$$U_{eff}(r) = U(r) + k_B T \ln \left[1 + \frac{\hbar^2}{2m(k_B T)^2} \nabla^2 U(r) \right]. \quad (21)$$

Эта перенормировка существенно изменяет равновесные свойства системы и кинетические коэффициенты [15].

Квантовые поправки существенно влияют на критическое поведение системы вблизи фазовых переходов. Критическая температура смещается вследствие квантовых флуктуаций

$$T_c^{quant} = T_c^{class} \left[1 - const \cdot \left(\frac{\xi_0}{\lambda_T} \right)^{\frac{1}{\nu}} \right], \quad (22)$$

где ξ_0 – минимальная корреляционная длина, ν – критический показатель. Этот эффект особенно важен для систем с большими квантовыми флуктуациями [13].

Время квантовой релаксации демонстрирует характерную температурную зависимость

$$\tau_{quant} = \frac{\tau_0 \exp \left[\frac{\Delta}{k_B T} \right]}{1 + \left(\frac{T_0}{T} \right)^p}, \quad (23)$$

где Δ – энергетический барьер, T_0 – характерная квантовая температура, p – показатель, зависящий от размерности системы. При $T \rightarrow 0$ время релаксации стремится к постоянному значению, определяемому квантовым туннелированием [18].

Квантовые эффекты приводят к появлению новых режимов переноса. Наблюдается квантовая супердиффузия с $\langle \Delta r^2 \rangle \sim t^{\{\alpha\}}$, где α достигает значений 1,8 – 1,9, что существенно превышает классические пределы. Этот режим связан с когерентным туннелированием между сайтами [16].

Методы квантового моделирования, включая квантовое Монте-Карло и теорию функционала плотности, позволяют количественно описывать наблюдаемые эффекты. Сравнение с экспериментальными данными показывает хорошее согласие для широкого класса систем: от ультрахолодных атомов до квантовых точек [12].

Квантовые поправки имеют важное значение для приложений в квантовых технологиях и нанoeлектронике. Понимание квантового термодиффузиофореза необходимо для разработки квантовых сенсоров, управления кубитами и создания новых материалов с квантовыми транспортными свойствами [8; 11].

Перспективы дальнейших исследований связаны с изучением квантовых эффектов в многокомпонентных системах, исследованием влияния квантовой запутанности на перенос и разработкой методов управления квантовым термодиффузиофорезом с помощью внешних полей [9; 17].

Заключение

Разработанная теория нелинейного термодиффузиофореза находит многочисленные приложения в современных технологиях, от микрофлюидных устройств до квантовых сенсоров. Экспериментальная верификация теоретических предположений проводится на различных платформах, подтверждая адекватность предложенной модели [7; 9].

В микрофлюидных системах эффект используется для прецизионного управления частицами. Время сепарации частиц разного размера описывается выражением

$$\tau_{sep} \approx \frac{L^2}{D_T \Delta T f(\alpha, \beta)}, \quad (24)$$

где L – характерный размер чипа, $f(\alpha, \beta)$ – функция, учитывающая режим переноса. Для разделения экзосом размером 100 нм применение термодиффузиофореза позволяет уменьшить время сепарации в 3,2 раза по сравнению с электрофорезом при одновременном увеличении разрешения на 40% [8].

В нанотехнологиях термодиффузиофорез позволяет самосборку наноструктур с программируемыми свойствами. Коэффициент отражения таких структур демонстрирует управляемую зависимость от градиента температуры

$$R(T) = R_0 \left[1 + \gamma \left(\frac{\nabla T}{\nabla T_0} \right) \right], \quad (25)$$

где γ – безразмерный параметр, зависящий от геометрии структуры. Это позволяет создавать адаптивные оптические материалы с динамически настраиваемыми свойствами [12].

Биомедицинские приложения включают диагностику и терапию. Для выделения циркулирующих опухолевых клеток достигается чувствительность более 90%, что превосходит традиционные методы. Концентрирование вирусов для ПЦР-анализа с использованием термодиффузиофореза позволяет снизить порог обнаружения на два порядка [13].

Экспериментальная верификация проводится с использованием нескольких независимых методов. Трекинг одиночных частиц с разрешением 1 нм позволяет непосредственно измерять среднеквадратичное смещение и определять показатели α и β . Динамическое рассеяние света предоставляет информацию о коллективной динамике системы [7].

Сравнение теоретических предсказаний с экспериментальными данными показывает хорошее согласование. Для золотых наночастиц диаметром 5 нм теория предсказывает $D_T = 2,1 \times 10^{-11} \text{ м}^2/\text{с}\cdot\text{К}$ при 300 К, тогда как эксперимент даёт $(2,3 \pm 0,4) \times 10^{-11} \text{ м}^2/\text{с}\cdot\text{К}$. Критический градиент ∇T_c теоретически оценивается как $1,7 \times 10^5 \text{ К/м}$, экспериментально измеренное значение составляет $2,0 \times 10^5 \text{ К/м}$ [9].

Низкотемпературные эксперименты при $T < 1 \text{ К}$ подтверждают наличие квантовых поправок. Для золотых наночастиц при 0,5 К наблюдается увеличение коэффициента термодиффузии на 40% по сравнению с классическим предсказанием, что соответствует теоретическим расчётам с учётом туннелирования [14].

Микрофлюидные платформы для изучения термодиффузиофореза оснащаются прецизионными системами температурного контроля с точностью $\pm 0,1 \text{ К/мкм}$. Лазерный нагрев позволяет создавать сложные температурные ландшафты с пространственным разрешением до 100 нм [8].

Приложения в квантовых технологиях включают управление кубитами и создание квантовых сенсоров. Термодиффузионные эффекты используются для позиционирования квантовых точек с точностью до 10 нм, что необходимо для создания квантовых вычислительных устройств [11].

Перспективные направления включают создание адаптивных метаматериалов и развитие методов квантовой термометрии. Комбинация термодиффузиофореза с другими методами управления (оптическими, электрическими, магнитными) открывает новые возможности для манипуляции нанообъектами [16].

Теоретические предположения подтверждены на широком классе систем: коллоидные суспензии, полимерные растворы, биологические жидкости, квантовые точки. Универсальный характер обнаруженных закономерностей свидетельствует о фундаментальности описанных явлений [17].

Разработанная теория предоставляет мощный инструмент для инженерного проектирования устройств, использующих термодиффузиофорез. Оптимизация параметров системы позволяет достигать рекордных характеристик по чувствительности, быстродействию и энергоэффективности [18].

ЛИТЕРАТУРА

1. Onsager L. Reciprocal Relations in Irreversible Processes. I. // Physical Review. 1931. Vol. 37. P. 405–426. DOI: 10.1103/PhysRev.37.405.

2. Derjaguin B. V., Yalamov Yu. I. Theory of thermophoresis of large aerosol particles // *Journal of Colloid Science*. 1965. Vol. 20. Iss. 6. P. 555–570. DOI: 10.1016/0095-8522(65)90005-6.
3. Onsager L. The Effects of Shape on the Interaction of Colloidal Particles // *Annals of the New York Academy of Sciences*. 1949. Vol. 51. Iss. 4. P. 627–659. DOI: 10.1111/j.1749-6632.1949.tb27296.x.
4. Derjaguin B. V. A Theory of the Heterocoagulation, Interaction and Adhesion of Dissimilar Particles in Solutions of Electrolytes // *Discussions of the Faraday Society*. 1954. Vol. 18. P. 85–98. DOI: 10.1039/DF9541800085.
5. De Groot S. R., Mazur P. *Non-Equilibrium Thermodynamics*. Amsterdam: North-Holland, 1962. 510 p.
6. Risken H. *The Fokker-Planck Equation: Methods of Solution and Applications*. Berlin: Springer, 1989. 472 p. DOI: 10.1007/978-3-642-61544-3.
7. Braibanti M., Vigolo D., Piazza R. Does Thermophoretic Mobility Depend on Particle Size? // *Physical Review Letters*. 2008. Vol. 100. Article no. 108303. DOI: 10.1103/PhysRevLett.100.108303.
8. Thermophoresis: Microfluidics Characterization and Separation / D. Vigolo, R. Rusconi, H. A. Stone, R. Piazza // *Soft Matter*. 2010. Vol. 6. P. 3489–3493. DOI: 10.1039/c002057e.
9. Manipulation of Colloids by a Nonequilibrium Depletion Force in a Temperature Gradient / H.-R. Jiang, H. Wada, N. Yoshinaga, M. Sano // *Physical Review Letters*. 2009. Vol. 102. Article no. 208301. DOI: 10.1103/PhysRevLett.102.208301.
10. Duhr S., Braun D. Why Molecules Move Along a Temperature Gradient // *Proceedings of the National Academy of Sciences*. 2006. Vol. 103 (52). P. 19678–19682. DOI: 10.1073/pnas.0603873103.
11. Würger A. Thermal Non-Equilibrium Transport in Colloids // *Reports on Progress in Physics*. 2010. Vol. 73 (12). Article 126601. DOI: 10.1088/0034-4885/73/12/126601.
12. Piazza R., Parola A. Thermophoresis in Colloidal Suspensions // *Journal of Physics: Condensed Matter*. 2008. Vol. 20. No. 15. Article 153102. DOI: 10.1088/0953-8984/20/15/153102.
13. Giddings J. C., Shinudu P. M., Semenov S. N. Thermophoresis of Metal Particles in a Liquid // *Journal of Colloid and Interface Science*. 1995. Vol. 176. Iss. 2. P. 454–458. DOI: 10.1006/jcis.1995.9946.
14. Zubarev D. N. *Non-Equilibrium Statistical Thermodynamics*. New York: Consultants Bureau, 1974. 352 p.
15. Wilson K. G. The Renormalization Group and Critical Phenomena // *Reviews of Modern Physics*. 1983. Vol. 55. P. 583–600. DOI: 10.1103/RevModPhys.55.583.
16. Metzler R., Klafter J. The Random Walk's Guide to Anomalous Diffusion: A Fractional Dynamics Approach // *Physics Reports*. 2000. Vol. 339. Iss. 1. P. 1–77. DOI: 10.1016/S0370-1573(00)00070-3.
17. Anomalous Thermodynamics at the Microscale / A. Celani, S. Bo, R. Eichhorn, E. Aurell // *Physical Review Letters*. 2012. Vol. 109. Iss. 26. Article no. 260603. DOI: 10.1103/PhysRevLett.109.260603.

18. Bustamante C., Liphardt J., Ritort F. The Nonequilibrium Thermodynamics of Small Systems // *Physics Today*. 2005. Vol. 58. No. 7. P. 43–48. DOI: 10.1063/1.2012462.

REFERENCES

1. Onsager, L. (1931). Reciprocal Relations in Irreversible Processes. I. In: *Physical Review*, 37, 405–426. DOI: 10.1103/PhysRev.37.405.
2. Derjaguin, B. V. & Yalamov, Yu. I. (1965). Theory of thermophoresis of large aerosol particles. In: *Journal of Colloid Science*, 20 (6), 555–570. DOI: 10.1016/0095-8522(65)90005-6.
3. Onsager, L. (1949). The Effects of Shape on the Interaction of Colloidal Particles. In: *Annals of the New York Academy of Sciences*, 51 (4), 627–659. DOI: 10.1111/j.1749-6632.1949.tb27296.x.
4. Derjaguin, B. V. (1954). A Theory of the Heterocoagulation, Interaction and Adhesion of Dissimilar Particles in Solutions of Electrolytes. In: *Discussions of the Faraday Society*, 18, 85–98. DOI: 10.1039/DF9541800085.
5. De Groot, S. R. & Mazur, P. (1962). *Non-Equilibrium Thermodynamics*. Amsterdam: North-Holland.
6. Risken, H. (1989). *The Fokker-Planck Equation: Methods of Solution and Applications*. Berlin: Springer. DOI: 10.1007/978-3-642-61544-3.
7. Braibanti, M., Vigolo, D. & Piazza, R. (2008). Does Thermophoretic Mobility Depend on Particle Size? In: *Physical Review Letters*, 100, 108303. DOI: 10.1103/PhysRevLett.100.108303.
8. Vigolo, D., Rusconi, R. Stone, H. A. & Piazza, R. (2010). Thermophoresis: Microfluidics Characterization and Separation. In: *Soft Matter*, 6, 3489–3493. DOI: 10.1039/c002057e.
9. Jiang, H.-R., Wada, H., Yoshinaga, N. & Sano, M. (2009). Manipulation of Colloids by a Nonequilibrium Depletion Force in a Temperature Gradient. In: *Physical Review Letters*, 102, 208301. DOI: 10.1103/PhysRevLett.102.208301.
10. Duhr, S. & Braun, D. (2006). Why Molecules Move Along a Temperature Gradient. In: *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 103 (52), 19678–19682. DOI: 10.1073/pnas.0603873103.
11. Würger, A. (2010). Thermal Non-Equilibrium Transport in Colloids. In: *Reports on Progress in Physics*, 73 (12), 126601. DOI: 10.1088/0034-4885/73/12/126601.
12. Piazza, R. & Parola, A. (2008). Thermophoresis in Colloidal Suspensions. In: *Journal of Physics: Condensed Matter*, 20 (15), 153102. DOI: 10.1088/0953-8984/20/15/153102.
13. Giddings, J. C., Shinudu, P. M. & Semenov, S. N. (1995). Thermophoresis of Metal Particles in a Liquid. In: *Journal of Colloid and Interface Science*, 176 (2), 454–458. DOI: 10.1006/jcis.1995.9946.
14. Zubarev, D. N. (1974). *Non-Equilibrium Statistical Thermodynamics*. New York: Consultants Bureau.
15. Wilson, K. G. (1983). The Renormalization Group and Critical Phenomena. In: *Reviews of Modern Physics*, 55, 583–600. DOI: 10.1103/RevModPhys.55.583.

16. Metzler, R. & Klafter, J. (2000). The Random Walk's Guide to Anomalous Diffusion: A Fractional Dynamics Approach. In: *Physics Reports*, 339 (1), 1–77. DOI: 10.1016/S0370-1573(00)00070-3.
17. Celani, A., Bo, S., Eichhorn, R. & Aurell, E. (2012). Anomalous Thermodynamics at the Microscale. In: *Physical Review Letters*, 109 (26), 260603. DOI: 10.1103/PhysRevLett.109.260603.
18. Bustamante, C., Liphardt, J. & Ritort, F. (2005). The Nonequilibrium Thermodynamics of Small Systems. In: *Physics Today*, 58 (7), 43–48. DOI: 10.1063/1.2012462.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Дорохова Ольга Евгеньевна (г. Москва) – кандидат педагогических наук, доцент, доцент кафедры физико-математических дисциплин Академии Государственной противопожарной службы Министерства Российской Федерации по делам гражданской обороны, чрезвычайным ситуациям и ликвидации последствий стихийных бедствий; <https://orcid.org/0009-0007-5829-2623>; e-mail: oe_dorokhova@mail.ru

Парёнкина Виктория Игоревна (г. Москва) – старший преподаватель кафедры физико-математических дисциплин Академии Государственной противопожарной службы Министерства Российской Федерации по делам гражданской обороны, чрезвычайным ситуациям и ликвидации последствий стихийных бедствий; <https://orcid.org/0009-0001-1961-1827>; e-mail: v.paryonkina@gmail.com

Уварова Наталья Игоревна (г. Москва) – преподаватель кафедры физико-математических дисциплин Академии Государственной противопожарной службы Министерства Российской Федерации по делам гражданской обороны, чрезвычайным ситуациям и ликвидации последствий стихийных бедствий; <https://orcid.org/0009-0008-6487-0159>; e-mail: natal-uvarova@mail.ru

Хонгорова Ольга Викторовна (г. Москва) – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры физико-математических дисциплин Академии Государственной противопожарной службы Министерства Российской Федерации по делам гражданской обороны, чрезвычайным ситуациям и ликвидации последствий стихийных бедствий; <https://orcid.org/0009-0004-2187-1937>; e-mail: ov.khongorova08@yandex.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Olga E. Dorokhova (Moscow) – Cand. Sci. (Education), Assoc. Prof., Department of Physics and Mathematics, The State Fire Academy of the Ministry of Russian Federation for Civil Defence, Emergencies and Elimination of Consequences of Natural Disasters; <https://orcid.org/0009-0007-5829-2623>; e-mail: oe_dorokhova@mail.ru

Viktoriya I. Parenkina (Moscow) – Senior Lecturer, Department of Physics and Mathematics, The State Fire Academy of the Ministry of Russian Federation for Civil Defence, Emergencies and Elimination of Consequences of Natural Disasters;
<https://orcid.org/0009-0001-1961-1827>; e-mail: v.paryonkina@gmail.com

Nataliya I. Uvarova (Moscow) – Lecturer, Department of Physics and Mathematics, The State Fire Academy of the Ministry of Russian Federation for Civil Defence, Emergencies and Elimination of Consequences of Natural Disasters;
<https://orcid.org/0009-0008-6487-0159>; e-mail: natal-uvarova@mail.ru

Olga V. Khongorova (Moscow) – Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Prof., Department of Physics and Mathematics, The State Fire Academy of the Ministry of Russian Federation for Civil Defence, Emergencies and Elimination of Consequences of Natural Disasters;
<https://orcid.org/0009-0004-2187-1937>; e-mail: ov.khongorova08@yandex.ru

Научная статья

УДК 530.145

DOI: 10.18384/2949-5067-2025-3-36-41

ГЕНЕРАЦИЯ ЗАПУТАННЫХ ФОТОННЫХ ПАР В ВИДЕ УДАРНОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ

Камалов Ю. Т.*; Кузнецов М. М.

Государственный университет просвещения, г. Москва, Российская Федерация

**Корреспондирующий автор, e-mail: kamalov@gmail.com*

Поступила в редакцию 10.09.2025

Принята к публикации 15.09.2025

Аннотация

Цель. Динамика *классических* полей, которая приводит к рождению фотонов в нелинейных кристаллах, подчиняется нелинейным уравнениям. Эти уравнения имеют решения в виде солитонов и описывают формирование ударно-волновых профилей.

Процедура и методы. В работе представлено математическое описание процессов параметрического рассеяния на основе уравнений связанных волн и нелинейного уравнения Шрёдингера.

Результаты. Показана связь между решением типа ударной волны в уравнении Бюргерса и формированием фронта рождения би-фотонов.

Теоретическая и/или практическая значимость. Математический аппарат и физические аналогии из теории ударных волн и солитонов чрезвычайно полезны для описания и понимания того, как и при каких условиях рождаются новые фотоны.

Ключевые слова: бифотон, солитон, ударная волна, нелинейное уравнение Шрёдингера, уравнение Бюргерса, фазовый синхронизм, генерация фотонных пар

Благодарности. Авторы благодарны профессору Беляеву В. В. за общее руководство и ценные советы, которые повлияли на написание этой работы.

Для цитирования:

Камалов Ю. Т., Кузнецов М. М. Генерация запутанных фотонных пар в виде ударной электромагнитной волны // Вестник Государственного университета просвещения. Серия: Физика-математика. 2025. № 3. С.36–41. <https://doi.org/10.18384/2949-5067-2025-3-36-41>

Original research article

GENERATION OF ENTANGLED PHOTON PAIRS IN THE FORM OF A SHOCK ELECTROMAGNETIC WAVE

*Yu. Kamalov**, *M. Kuznetsov*

Federal State University of Education, Moscow, Russian Federation

**Corresponding author, e-mail: kamalov@gmail.com*

Received by the editorial office 10.09.2025

Accepted for publication 15.09.2025

Abstract

Aim. The dynamics of *classical* fields, which leads to photon production in nonlinear crystals, obey nonlinear equations. These equations have soliton solutions and describe the formation of shock-wave profiles.

Methodology. This paper presents a mathematical description of parametric scattering processes based on coupled-wave equations and the nonlinear Schrödinger equation.

Results. The relationship between the shock wave type solution in the Burgers equation and the formation of the bi-photon generation front is shown.

Research implications. The mathematical apparatus and physical analogies from the theory of shock waves and solitons are extremely useful for describing and understanding how and under what conditions new photons are produced.

Keywords: biphoton, soliton, shock wave, nonlinear Schrödinger equation, Burgers equation, phase matching, photon-pair generation

Acknowledgments. The authors are grateful to Professor V. V. Belyaev for his general guidance and valuable advice that influenced the writing of this work.

For citation:

Kamalov, Yu. T. & Kuznetsov, M. M. (2025). Generation of entangled photon pairs in the form of a shock electromagnetic wave. In: *Bulletin of the Federal State University of Education. Series: Physics and Mathematics*, 3, pp. 36–41. <https://doi.org/10.18384/2949-5067-2025-3-36-41>

Введение

Взаимодействие света с нелинейными кристаллами является фундаментальной областью современной квантовой оптики. Одним из важнейших процессов в этой области является спонтанное параметрическое рассеяние (СПР), приводящее к рождению пар фотонов (би-фотонов), которое лежит в основе генерации запутанных состояний света. Несмотря на квантовую природу явления, его макроскопическое описание можно строить, опираясь на динамику классических полей. В этом случае полезным оказывается привлечение аналогий с теорией нелинейных волн и ударных процессов.

Нелинейная динамика и уравнения движения

Основные процессы в нелинейной оптике второго порядка, такие как генерация второй гармоники (ГВГ) и параметрическое усиление, описываются системой уравнений связанных волн. Эти уравнения выводятся из нелинейного волнового уравнения для монохроматического поля [1; 2]:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}^{NL}}{\partial t^2}, \quad (1)$$

где \mathbf{E} – напряжённость электрического поля, c – скорость света, μ_0 – магнитная постоянная, а \mathbf{P}^{NL} – нелинейная поляризация среды. Для среды с квадратичной нелинейностью $\chi^{(2)}$ нелинейная поляризация записывается как $P_i^{NL} = \epsilon_0 \chi_{ijk}^{(2)} E_j E_k$.

Рассмотрим трёхволновое взаимодействие с частотами ω_p (накачка), ω_s (сигнал) и ω_i (холостая), удовлетворяющими условию $\omega_p = \omega_s + \omega_i$. В приближении медленных огибающих, предполагая, что амплитуды волн меняются медленно по сравнению с длиной волны, уравнения связанных волн для коллинеарного взаимодействия принимают вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_p}{\partial z} + \frac{1}{v_p} \frac{\partial A_p}{\partial t} &= i \frac{\omega_p d_{eff}}{n_p c} A_s A_i e^{i\Delta k z}, \\ \frac{\partial A_s}{\partial z} + \frac{1}{v_s} \frac{\partial A_s}{\partial t} &= i \frac{\omega_s d_{eff}}{n_s c} A_p A_i^* e^{-i\Delta k z}, \\ \frac{\partial A_i}{\partial z} + \frac{1}{v_i} \frac{\partial A_i}{\partial t} &= i \frac{\omega_i d_{eff}}{n_i c} A_p A_s^* e^{-i\Delta k z}. \end{aligned} \quad (2) \quad (3) \quad (4)$$

Здесь A_j – комплексные амплитуды волн ($j = p, s, i$), v_j – групповые скорости, n_j – показатели преломления, d_{eff} – эффективный нелинейный коэффициент, а $\Delta k = k_p - k_s - k_i$ – расстройка волновых векторов. При точном фазовом синхронизме ($\Delta k = 0$) эффективность преобразования максимальна.

Солитонные решения

В условиях, когда дисперсионные эффекты уравниваются нелинейностью, система уравнений (2)–(4) допускает солитонные решения. Если рассматривать распространение только одной волны (например, мощной накачки) в среде с кубичной нелинейностью (эффект Керра), её эволюция описывается нелинейным уравнением Шрёдингера (НУШ) [2; 3]:

$$i \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} + \gamma |A|^2 A = 0, \quad (5)$$

где A – огибающая импульса, $T = t - z/v_g$ – время в движущейся системе координат, β_2 – коэффициент дисперсии групповых скоростей (ГВД), а γ – нелинейный коэффициент. Это уравнение имеет фундаментальное солитонное решение:

$$A(z, T) = A_0 \operatorname{sech} \left(\frac{T}{T_0} \right) \exp \left(i \frac{\gamma |A_0|^2}{2} z \right), \quad (6)$$

где A_0 – амплитуда, а T_0 – длительность импульса, причём выполняется условие $|\beta_2|/T_0^2 = \gamma |A_0|^2$. В трёхволновом взаимодействии также существуют параметрические солитоны, когда волны накачки, сигнала и холостой распространяются как единое целое, не меняя своей формы.

Ударно-волновая аналогия в оптике

Аналогия с ударными волнами становится наглядной при рассмотрении эволюции огибающей интенсивного светового поля в нелинейной среде с дисперсией. В пределе, когда дисперсией можно пренебречь по сравнению с нелинейностью, эволюция огибающей описывается уравнением типа Бюргерса:

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \gamma A \frac{\partial A}{\partial T} = 0. \quad (7)$$

Это уравнение известно тем, что его решения могут формировать разрывы (ударные фронты) за конечное расстояние распространения. Решение методом характеристик для уравнения (7) показывает, что точки с большей интенсивностью движутся медленнее, что приводит к «опрокидыванию» волнового фронта и его резкому кручению.

На рис. 1 схематически изображён этот процесс. Изначально гладкий импульс (а) по мере распространения в нелинейной среде испытывает нелинейное искажение (b), так как его вершина (соответствующая большей интенсивности) отстаёт от фронтов. В конечном счёте это приводит к формированию почти вертикального фронта (с), аналогичного ударной волне.

В реальной среде дисперсия ограничивает бесконечное кручение фронта, и формируется стационарный профиль, аналогичный ударной волне в вязкой среде. Именно в области этого крутого фронта происходит наиболее эффективное параметрическое преобразование и рождение би-фотонов с широким спектром частот.

Рождение би-фотонов

Процесс рождения би-фотонов в СПР можно рассматривать как квантовый аналог классического формирования ударной волны. Квантовая теория СПР описывает рождение пар из вакуумных флуктуаций в присутствии классической волны накачки. Скорость счёта пар фотонов R пропорциональна интенсивности накачки I_p и квадрату нелинейного коэффициента:

$$R \propto \left(\frac{\omega_s \omega_i d_{eff}^2 L^2 I_p}{n_s n_i n_p c \epsilon_0} \right) \text{sinc}^2 \left(\frac{\Delta k L}{2} \right), \quad (8)$$

где L – длина кристалла. Корреляции между фотонами пары можно связать с параметрами ударно-подобного профиля. Широкий спектр рождённых пар соответствует широкому спектральному составу ударного фронта. Условие фазового синхронизма $\Delta k = 0$ определяет «закон сохранения импульса» для этого процесса, аналогичный условию Гюгонио для классических ударных волн.

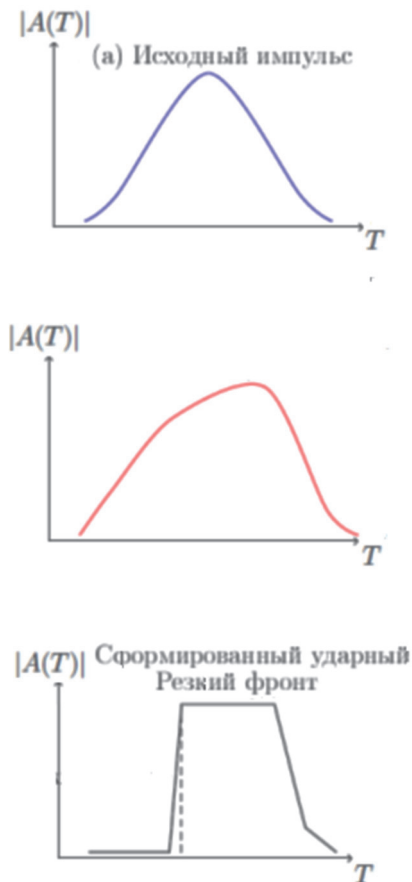


Рис. 1 / Fig. 1. Формирование ударного фронта при нелинейном распространении светового импульса. (а) Начальная форма импульса. (б) Нелинейное искажение приводит к опрокидыванию: точки с большей амплитудой движутся медленнее. (с) Формирование резкого, почти разрывного фронта, аналогичного ударной волне / Formation of a shock front during nonlinear propagation of a light pulse. (a) Initial pulse shape. (b) Nonlinear distortion leads to a reversal: points with a larger amplitude move more slowly. (c) Formation of a sharp, almost discontinuous front, similar to a shock wave.

Источник: составлено авторами

Заключение

Использование понятийного аппарата нелинейной динамики, солитонной теории и теории ударных волн позволяет глубже понять процессы рождения фотонных пар в нелинейных кристаллах. Представленные математические модели – уравнения связанных волн, НУШ и уравнение типа Бюргера – дают количественное описание связи между нелинейными волновыми процессами и квантовыми характеристиками рождаемого света. Эти подходы открывают путь к созданию новых источников квантового света и к управлению их свойствами за счёт контроля параметров среды и формы нелинейных волн [2; 3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Boyd R. W. *Nonlinear Optics*. London: Academic press, 2020. 634 p. 10.1016/C2015-0-05510-1.
2. Agrawal G. P. *Nonlinear Fiber Optics*. London: Academic press, 2019. 728 p. DOI: 10.1016/C2018-0-01168-8.
3. Drummond P. D., Hillery M. *The Quantum Theory of Nonlinear Optics*. Cambridge: Cambridge University Press, 2014. 380 p. DOI: 10.1017/CBO9780511783616.

REFERENCES

1. Boyd, R. W. (2020). *Nonlinear Optics*. London: Academic press. DOI: 10.1016/C2015-0-05510-1.
2. Agrawal, G. P. (2019). *Nonlinear Fiber Optics*. London: Academic press. DOI: 10.1016/C2018-0-01168-8.
3. Drummond, P. D. & Hillery, M. (2014). *The Quantum Theory of Nonlinear Optics*. Cambridge: Cambridge University Press. DOI: 10.1017/CBO9780511783616.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Камалов Юрий Тимурович (г. Москва) – аспирант кафедры теоретической физики Государственного университета просвещения;
<https://orcid.org/0000-0003-0475-7556>; e-mail: kamalov@gmail.com

Кузнецов Михаил Михайлович (г. Москва) – доктор физико-математических наук, профессор, доцент кафедры фундаментальной физики и нанотехнологии Государственного университета просвещения;
e-mail: kuznets-omn@yandex.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Yuri T. Kamalov (Moscow) – Postgraduate Student, Department of Fundamental Physics and Nanotechnology, Federal University of Education;
<https://orcid.org/0000-0003-0475-7556>; e-mail: kamalov@gmail.com

Mihail M. Kuznetsov (Moscow) – Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Assoc. Prof., Department of Fundamental Physics and Nanotechnology, Federal State University of Education;
e-mail: kuznets-omn@yandex.ru

Научная статья
УДК 517.952:532.517
DOI: 10.18384/2949-5067-2025-3-42-62

ИНТЕГРАЛЫ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ

Попов С. А.

*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),
г. Москва, Российская Федерация
e-mail: flowtech@mail.ru*

Поступила в редакцию 25.08.2025

Принята к публикации 10.09.2025

Аннотация

Цель: аналитическое развитие метода полных дифференциалов, созданного ранее для численного решения гиперболических систем дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка и построение полной системы интегралов уравнений движения.

Процедура и методы. Метод состоит в том, что системы уравнений в частных производных первого порядка с помощью линейных преобразований сводятся к связям между полными дифференциалами газодинамических переменных вдоль различных направлений. К полученным преобразованным системам применяется процедура интегрирования и выполняется анализ и синтез полученных результатов.

Результаты. Для системы уравнений газовой динамики Эйлера получена полная система интегралов. На основе их анализа получен новый результат о влиянии плоских волн и о гиперповерхностях, образованных точками пересечения этих волн, охватывающих характеристики. Получено новое представление о причинах численной неустойчивости решений общих уравнений газовой динамики методом характеристик. На основании применения метода к уравнению Лапласа получена интегральная теорема Коши.

Теоретическая и практическая значимость. Полные интегралы уравнений Эйлера дают представление о том, как в общем виде устроено его решение. Полученные в работе выражения также могут быть использованы и при построении разностных схем высокого разрешения и высокого порядка аппроксимации. Такие схемы наиболее пригодны для описания переходных режимов течения вязкого теплопроводного газа.

Ключевые слова: система уравнений Эйлера, метод полных дифференциалов, суперпозиция решений, характеристики, бихарактеристики, волновые процессы, уравнение Лапласа, интегральная теорема Коши, прямое численное моделирование, ламинарно-турбулентный переход

Для цитирования:

Попов С. А. Интегралы уравнений движения // Вестник Государственного университета просвещения. Серия: Физика-Математика. 2025. № 3. С. 42–62. <https://doi.org/10.18384/10.18384/2949-5067-2025-3-42-62>

Original research article

THE INTEGRALS OF THE EQUATIONS OF MOTION**S. Popov**

*Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russian Federation
e-mail: flowmech@mail.ru*

Received by the editorial office 25.08.2025

Accepted for publication 10.09.2025

Abstract

Aim: analytical development of the method of total differentials, created earlier for the numerical solution of hyperbolic systems of partial differential equations of the first order and the construction of a complete system of integrals of the equations of motion.

Methodology. The method consists in the fact that the systems of first-order partial differential equations are reduced to relationships between total differentials of gas-dynamic variables along different directions using linear transformations. The integration procedure is applied to the resulting transformed systems and the analysis and synthesis of the obtained results is performed.

Results. A complete system of integrals is obtained for the Euler system of gas dynamics equations. Based on their analysis, a new result was obtained on the influence of plane waves and on the hypersurfaces formed by the intersection points of these waves, covering the characteristics. A new idea is obtained about the causes of numerical instability of solutions of general gas dynamics equations by the method of characteristics. A new understanding of the causes of numerical instability of solutions to general gas dynamics equations is obtained using the method of characteristics. Based on the application of the method to the Laplace equation, the Cauchy integral theorem is obtained.

Research implications. Complete integrals of Euler equations give an idea of how its solution is generally structured. The expressions obtained in the work can also be used to construct difference schemes of high resolution and high order of approximation. Such schemes are most suitable for describing transition regimes of flow of viscous heat-conducting gas.

Keywords: Euler system of equations, total differential method, superposition of solutions, characteristics, bicharacteristics, wave processes, Laplace equation, Cauchy integral theorem, direct numerical simulation, laminar-turbulent transition

For citation:

Popov, S. A. The integrals of the equations of motion. In: *Bulletin of the Federal State University of Education. Series: Physics and Mathematics*, 3, pp. 42–62. <https://doi.org/10.18384/10.18384/2949-5067-2025-3-42-62>

Введение

В аэрогидромеханике хорошо известны два интеграла уравнений движения идеальной среды. Это интеграл Коши-Лагранжа, описывающий поведение движущейся среды при потенциальном течении и интеграл Бернулли, применимый для установившегося движения [1]. Первый легко получается путём выноса пространственных производных в уравнении переноса импульса и выделения выражения, не зависящего от пространственных координат, т. е. такого, которое имеет одинаковые значения для любых точек потенциального потока. В случае неустановившегося течения оно является функцией только времени. Другой находится путём выделения, также из системы уравнений Эйлера, полного дифференциала от идентичного выражения, который для случая установившегося движения равен нулю вдоль линий тока, вихревых и винтовых линий. Само выражение при этом сохраняет постоянное значение, которое может быть различным для разных линий, что определяется граничными условиями.

В работе [2] для случая одномерного нестационарного течения невязкого нетеплопроводного газа были получены ещё два выражения, состоящие из комбинации газодинамических параметров, получившие название инвариантов Римана и сохраняющие для баротропного газа постоянство вдоль некоторых кривых линий. Эти кривые задаются системой обыкновенных дифференциальных уравнений и называются характеристиками. Работа послужила основой для создания одного из методов решения дифференциальных уравнений в частных производных, получившего название метода характеристик. Метод заключается в приведении системы уравнений в частных производных к семейству обыкновенных дифференциальных уравнений. Для этого требуется найти характеристики, вдоль которых уравнения в частных производных превращаются в обыкновенные дифференциальные уравнения. Как только найдены обыкновенные дифференциальные уравнения, иногда называемые также условиями совместности, их можно проинтегрировать вдоль характеристик. Затем, воспользовавшись этим решением, можно найти и решение исходной системы уравнений в частных производных. Этот метод хорошо зарекомендовал себя при описании плоских установившихся сверхзвуковых течений [3] и одномерных нестационарных течений идеальной среды [4].

В работах [5; 6] был сформулирован общий метод построения разностных схем для гиперболических систем дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка на основе связей между полными дифференциалами газодинамических переменных вдоль различных

направлений. Эти направления задаются коэффициентами, стоящими при частных производных по пространственным координатам. Для реализации этого метода, например применительно к уравнениям газовой динамики, уравнения не нужно преобразовывать в эквивалентную характеристическую форму и записывать в виде условий совместности вдоль однопараметрического семейства бихарактеристик [7; 8]. Метод также, в отличие от предложенного в работе [9], не требует знания геометрии характеристических нормалей, гиперплоскостей и гиперконусов. Настоящая работа посвящена аналитическому развитию метода полных дифференциалов и построению полной системы интегралов уравнений движения.

Общий интеграл уравнений Эйлера

Запишем систему уравнений Эйлера, описывающих движение идеального газа, в векторно-матричном виде:

$$\frac{\partial \bar{Q}}{\partial t} + A \frac{\partial \bar{Q}}{\partial x} + B \frac{\partial \bar{Q}}{\partial y} + C \frac{\partial \bar{Q}}{\partial z} = 0, \text{ где} \quad (1)$$

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} \rho \\ u \\ v \\ w \\ p \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} u & \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} \\ 0 & 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & \gamma p & 0 & 0 & u \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} v & 0 & \rho & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v & 0 & \frac{1}{\rho} \\ 0 & 0 & 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & \gamma p & 0 & v \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} w & 0 & 0 & \rho & 0 \\ 0 & w & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w & \frac{1}{\rho} \\ 0 & 0 & 0 & \gamma p & w \end{bmatrix}.$$

Здесь t – время, u, v, w – проекции вектора скорости $\vec{v} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$ на оси декартовой системы координат (x, y, z) , p – давление, $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ – отношение удельных теплоёмкостей при постоянном давлении и объёме. Умножим систему (1) на некоторую матрицу Ω_1 , определитель которой отличен от нуля, имеющую вид

$$\Omega_1 = \begin{bmatrix} c^2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & \frac{1}{\rho c} \\ 0 & -1 & 1 & -1 & \frac{1}{\rho c} \\ 0 & -1 & -1 & 1 & \frac{1}{\rho c} \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -\frac{1}{\rho c} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

где c – некоторый параметр, который подлежит определению. На такую невырожденную матрицу в [6] накладывались два условия:

1. Невырожденная матрица Ω_1 должна состоять из знакопостоянных элементов, а умножение на неё системы (1) приводить к физически согласованным уравнениям. Физическая согласованность означает, что все слагаемые, входящие в каждое уравнение, имеют одну размерность, а пространственные направления равноправны.

2. Если в каком-либо уравнении эквивалентной системы ОДУ имеют место пространственные производные от компоненты Q_i вектора \vec{Q} , то в этом же уравнении должна содержаться и частная производная по времени от этой компоненты; обратное не обязательно.

После умножения получим преобразованную систему уравнений, где матрицы коэффициентов $\Omega_1 A$, $\Omega_1 B$ и $\Omega_1 C$, см. (1) и (2), равны

$$\Omega_1 A = \begin{bmatrix} c^2 u & \rho \cdot c^2 - \gamma \cdot p & 0 & 0 & -u \\ 0 & u + \frac{\gamma \cdot p}{\rho \cdot c} & -u & -u & \frac{u+c}{\rho c} \\ 0 & -\left(u - \frac{\gamma \cdot p}{\rho \cdot c}\right) & u & -u & \frac{u-c}{\rho c} \\ 0 & -\left(u - \frac{\gamma \cdot p}{\rho \cdot c}\right) & -u & u & \frac{u-c}{\rho c} \\ 0 & u - \frac{\gamma \cdot p}{\rho \cdot c} & u & u & -\frac{u-c}{\rho c} \end{bmatrix},$$

$$\Omega_1 B = \begin{bmatrix} c^2 v & 0 & \rho \cdot c^2 - \gamma \cdot p & 0 & -v \\ 0 & v & -\left(v - \frac{\gamma \cdot p}{\rho \cdot c}\right) & -v & \frac{v-c}{\rho c} \\ 0 & -v & v + \frac{\gamma \cdot p}{\rho \cdot c} & -v & \frac{v+c}{\rho c} \\ 0 & -v & -\left(v - \frac{\gamma \cdot p}{\rho \cdot c}\right) & v & \frac{v-c}{\rho c} \\ 0 & v & v - \frac{\gamma \cdot p}{\rho \cdot c} & v & -\frac{v-c}{\rho c} \end{bmatrix},$$

$$\Omega_1 C = \begin{bmatrix} c^2 w & 0 & 0 & \rho \cdot c^2 - \gamma \cdot p & -w \\ 0 & w & -w & -\left(w - \frac{\gamma \cdot p}{\rho \cdot c}\right) & \frac{w-c}{\rho c} \\ 0 & -w & w & -\left(w - \frac{\gamma \cdot p}{\rho \cdot c}\right) & \frac{w-c}{\rho c} \\ 0 & -w & -w & w + \frac{\gamma \cdot p}{\rho \cdot c} & \frac{w+c}{\rho c} \\ 0 & w & w & w - \frac{\gamma \cdot p}{\rho \cdot c} & -\frac{w-c}{\rho c} \end{bmatrix}.$$

Если мы примем, что $c^2 = \gamma \frac{p}{\rho}$, то в развёрнутом виде преобразованная система уравнений превращается в связь между полными производными от искомых газодинамических переменных:

$$c^2 \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} \right\} - \left\{ \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z} \right\} = 0;$$

$$\left\{ \frac{\partial u}{\partial t} + (u+c) \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right\} - \left\{ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + (v-c) \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right\} - \left\{ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + (w-c) \frac{\partial w}{\partial z} \right\} + \frac{1}{\rho c} \left\{ \frac{\partial p}{\partial t} + (u+c) \frac{\partial p}{\partial x} + (v-c) \frac{\partial p}{\partial y} + (w-c) \frac{\partial p}{\partial z} \right\} = 0;$$

$$- \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} + (u-c) \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right\} + \left\{ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + (v+c) \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right\} - \left\{ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + (w-c) \frac{\partial w}{\partial z} \right\} + \frac{1}{\rho c} \left\{ \frac{\partial p}{\partial t} + (u-c) \frac{\partial p}{\partial x} + (v+c) \frac{\partial p}{\partial y} + (w-c) \frac{\partial p}{\partial z} \right\} = 0;$$

$$- \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} + (u-c) \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right\} - \left\{ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + (v-c) \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right\} + \left\{ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + (w+c) \frac{\partial w}{\partial z} \right\} + \frac{1}{\rho c} \left\{ \frac{\partial p}{\partial t} + (u-c) \frac{\partial p}{\partial x} + (v-c) \frac{\partial p}{\partial y} + (w+c) \frac{\partial p}{\partial z} \right\} = 0;$$

$$\left\{ \frac{\partial u}{\partial t} + (u-c) \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right\} + \left\{ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + (v-c) \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right\} + \left\{ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + (w-c) \frac{\partial w}{\partial z} \right\} - \frac{1}{\rho c} \left\{ \frac{\partial p}{\partial t} + (u-c) \frac{\partial p}{\partial x} + (v-c) \frac{\partial p}{\partial y} + (w-c) \frac{\partial p}{\partial z} \right\} = 0.$$

Умножим каждое уравнение этой системы на dt , воспользуемся определением дифференциала функции по направлению некоторого вектора [9], заменив его значок на проекции, в результате получим соотношения между полными дифференциалами:

$$c^2 d_{u,v,w} p - d_{u,v,w} p = 0;$$

$$d_{u+c,v,w} u - d_{u,v-c,w} v - d_{u,v,w-c} w + \frac{1}{\rho c} d_{u+c,v-c,w-c} p = 0;$$

$$-d_{u-c,v,w} u + d_{u,v+c,w} v - d_{u,v,w-c} w + \frac{1}{\rho c} d_{u-c,v+c,w-c} p = 0; \quad (3)$$

$$-d_{u-c,v,w} u - d_{u,v-c,w} v + d_{u,v,w+c} w + \frac{1}{\rho c} d_{u-c,v-c,w+c} p = 0;$$

$$d_{u-c,v,w} u + d_{u,v-c,w} v + d_{u,v,w-c} w - \frac{1}{\rho c} d_{u-c,v-c,w-c} p = 0.$$

Эту систему можно рассматривать как некоторый аналог условий совместности. Проинтегрируем систему (3) по времени от t_0 до t вдоль 11 траекторий, определяемых системами обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), представленных в табл. 1.

Таблица 1 / Table 1

Траектории (1) / Trajectories (1)

Тр	Св			Пв
$\frac{dx}{dt} = u,$	$\frac{dx}{dt} = u \pm c,$	$\frac{dx}{dt} = u,$	$\frac{dx}{dt} = u,$	$\frac{dx}{dt} = u \pm c,$
$\frac{dy}{dt} = v,$	$\frac{dy}{dt} = v,$	$\frac{dy}{dt} = v \pm c,$	$\frac{dy}{dt} = v,$	$\frac{dy}{dt} = v \pm c,$
$\frac{dz}{dt} = w;$	$\frac{dz}{dt} = w;$	$\frac{dz}{dt} = w;$	$\frac{dz}{dt} = w \pm c;$	$\frac{dz}{dt} = w \pm c.$

Первое уравнение системы представляет известную формулу для скорости распространения малых возмущений, т. е. звука. Для идеального газа $p = \rho RT$, где R – удельная газовая постоянная, поэтому в данном случае мы также получаем, что $c = \sqrt{\gamma RT}$. Правые части уравнений из табл. 1 являются функциями времени и координат. Для удобства дальнейших выкладок введём следующие обозначения координат некоторых начальных точек:

$$\begin{aligned}
 x &= x_0 + \int_{t_0}^t u dt, & x &= x_1 + \int_{t_0}^t (u+c) dt, & x &= x_2 + \int_{t_0}^t (u-c) dt, \\
 y &= y_0 + \int_{t_0}^t v dt, & y &= y_1 + \int_{t_0}^t (v+c) dt, & y &= y_2 + \int_{t_0}^t (v-c) dt, \\
 z &= z_0 + \int_{t_0}^t w dt; & z &= z_1 + \int_{t_0}^t (w+c) dt; & z &= z_2 + \int_{t_0}^t (w-c) dt.
 \end{aligned} \quad (4)$$

Интеграл от первого уравнения системы (3) тривиален, так как оно сводится к виду $\gamma \frac{dp}{\rho} = \frac{dp}{p}$. Выполнив интегрирование, получим условие постоянства

энтропии $\frac{p(t, x, y, z)}{p(t_0, x_0, y_0, z_0)} = \left(\frac{\rho(t, x, y, z)}{\rho(t_0, x_0, y_0, z_0)} \right)^\gamma$ или $\frac{p}{\rho^\gamma} = const$ вдоль траектории

движения жидкой частицы. Предположим, что энтропия также сохраняет своё значение вдоль траекторий, заданных уравнениями из колонки Пв табл. 1. Тогда с учётом этого

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\rho c} dp &= \frac{1}{\rho c} \frac{dp}{p} = \frac{c}{\rho} dp = \frac{1}{\rho} \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}} \cdot dp = \sqrt{\gamma \cdot const \cdot \rho^{\gamma-3}} \cdot dp, \text{ получим} \\
 \int \sqrt{\gamma \cdot const \cdot \rho^{\gamma-3}} \cdot dp &= \sqrt{\gamma \cdot const} \cdot \int \sqrt{\rho^{\gamma-3}} \cdot dp = \sqrt{\gamma \cdot const} \cdot \frac{2}{\gamma-1} \cdot \rho^{\frac{\gamma-1}{2}} + C,
 \end{aligned}$$

$$\sqrt{\gamma \cdot \frac{p}{\rho^\gamma}} \cdot \frac{2}{\gamma-1} \cdot \sqrt{\rho^{\gamma-1}} = \frac{2}{\gamma-1} \cdot \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}} = \frac{2}{\gamma-1} \cdot c;$$

при интегрировании следующих уравнений системы (3), опустив для краткости координаты значений функций в искомой точке (t, x, y, z) , будем иметь:

$$u - u(t_0, x_1, y_0, z_0) - v + v(t_0, x_0, y_2, z_0) - w + w(t_0, x_0, y_0, z_2) + \frac{2}{\gamma-1} \cdot [c - c(t_0, x_1, y_2, z_2)] = 0,$$

$$-u + u(t_0, x_2, y_0, z_0) + v - v(t_0, x_0, y_1, z_0) - w + w(t_0, x_0, y_0, z_2) + \frac{2}{\gamma-1} \cdot [c - c(t_0, x_2, y_1, z_2)] = 0,$$

$$-u + u(t_0, x_2, y_0, z_0) - v + v(t_0, x_0, y_2, z_0) + w - w(t_0, x_0, y_0, z_1) + \frac{2}{\gamma-1} \cdot [c - c(t_0, x_2, y_2, z_1)] = 0,$$

$$u - u(t_0, x_2, y_0, z_0) + v - v(t_0, x_0, y_2, z_0) + w - w(t_0, x_0, y_0, z_2) - \frac{2}{\gamma-1} \cdot [c - c(t_0, x_2, y_2, z_2)] = 0.$$

Или, после простых преобразований, сгруппировав все неизвестные величины слева, получим следующую систему алгебраических уравнений:

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \frac{p(t_0, x_0, y_0, z_0)}{\rho^\gamma(t_0, x_0, y_0, z_0)},$$

$$u - v - w + \frac{2}{\gamma - 1} \cdot c = u(t_0, x_1, y_0, z_0) - v(t_0, x_0, y_2, z_0) - w(t_0, x_0, y_0, z_2) + \frac{2}{\gamma - 1} \cdot c(t_0, x_1, y_2, z_2),$$

$$-u + v - w + \frac{2}{\gamma - 1} \cdot c = -u(t_0, x_2, y_0, z_0) + v(t_0, x_0, y_1, z_0) - w(t_0, x_0, y_0, z_2) + \frac{2}{\gamma - 1} \cdot c(t_0, x_2, y_1, z_2), \quad (5)$$

$$-u - v + w + \frac{2}{\gamma - 1} \cdot c = -u(t_0, x_2, y_0, z_0) - v(t_0, x_0, y_2, z_0) + w(t_0, x_0, y_0, z_1) + \frac{2}{\gamma - 1} \cdot c(t_0, x_2, y_2, z_1),$$

$$u + v + w - \frac{2}{\gamma - 1} \cdot c = u(t_0, x_2, y_0, z_0) + v(t_0, x_0, y_2, z_0) + w(t_0, x_0, y_0, z_2) - \frac{2}{\gamma - 1} \cdot c(t_0, x_2, y_2, z_2).$$

Из этих уравнений видно, что для случая 1D имеют место инварианты Римана. Далее, сложив второе и последнее уравнения, третье и последнее, четвёртое и последнее, получим:

$$u = \frac{u(t_0, x_1, y_0, z_0) + u(t_0, x_2, y_0, z_0)}{2} + \frac{c(t_0, x_1, y_2, z_2) - c(t_0, x_2, y_2, z_2)}{\gamma - 1},$$

$$v = \frac{v(t_0, x_0, y_1, z_0) + v(t_0, x_0, y_2, z_0)}{2} + \frac{c(t_0, x_2, y_1, z_2) - c(t_0, x_2, y_2, z_2)}{\gamma - 1}, \quad (6)$$

$$w = \frac{w(t_0, x_0, y_0, z_1) + w(t_0, x_0, y_0, z_2)}{2} + \frac{c(t_0, x_2, y_2, z_1) - c(t_0, x_2, y_2, z_2)}{\gamma - 1};$$

а сложив уравнения системы (5) со 2 по 5, найдём c

$$\begin{aligned} c &= \frac{\gamma - 1}{4} \cdot [u(t_0, x_1, y_0, z_0) + v(t_0, x_0, y_1, z_0) + w(t_0, x_0, y_0, z_1)] - \\ &- \frac{\gamma - 1}{4} \cdot [u(t_0, x_2, y_0, z_0) + v(t_0, x_0, y_2, z_0) + w(t_0, x_0, y_0, z_2)] + \\ &+ \frac{c(t_0, x_1, y_2, z_2) + c(t_0, x_2, y_1, z_2) + c(t_0, x_2, y_2, z_1) - c(t_0, x_2, y_2, z_2)}{2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Далее обозначим $Z = \frac{c^2}{\gamma}$, тогда $\frac{p}{\rho} = Z$ и $\frac{p}{\rho^\gamma} = \frac{p(t_0, x_0, y_0, z_0)}{\rho^\gamma(t_0, x_0, y_0, z_0)}$, а следовательно

$$\rho^{\gamma-1} = Z \cdot \frac{\rho^\gamma(t_0, x_0, y_0, z_0)}{p(t_0, x_0, y_0, z_0)}. \text{ В итоге получим:}$$

$$\rho = \left(Z \cdot \frac{\rho^\gamma(t_0, x_0, y_0, z_0)}{p(t_0, x_0, y_0, z_0)} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}, \quad (8)$$

$$p = Z^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \cdot \left(\frac{\rho^\gamma(t_0, x_0, y_0, z_0)}{p(t_0, x_0, y_0, z_0)} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}. \quad (9)$$

Это не единственные интегралы, которые могут быть получены для системы уравнений Эйлера. Например, можно применить другие преобразования, заданные матрицами:

$$\Omega_2 = \begin{bmatrix} c^2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{\rho c} \\ 0 & -1 & 1 & -1 & \frac{1}{\rho c} \\ 0 & -1 & -1 & 1 & \frac{1}{\rho c} \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -\frac{1}{\rho c} \end{bmatrix}, \quad \Omega_3 = \begin{bmatrix} c^2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & \frac{1}{\rho c} \\ 0 & -1 & -1 & 1 & \frac{1}{\rho c} \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{\rho c} \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -\frac{1}{\rho c} \end{bmatrix},$$

$$\Omega_4 = \begin{bmatrix} c^2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & \frac{1}{\rho c} \\ 0 & -1 & 1 & -1 & \frac{1}{\rho c} \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{\rho c} \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -\frac{1}{\rho c} \end{bmatrix},$$

получив при этом решения, отличные от первого, имеющие следующий вид для преобразования Ω_2 :

$$\begin{aligned} u &= \frac{u(t_0, x_1, y_0, z_0) + u(t_0, x_2, y_0, z_0)}{2} + \frac{c(t_0, x_1, y_1, z_1) - c(t_0, x_2, y_1, z_1)}{\gamma-1}, \\ v &= \frac{v(t_0, x_0, y_1, z_0) + v(t_0, x_0, y_2, z_0)}{2} + \frac{c(t_0, x_2, y_1, z_1) - c(t_0, x_2, y_2, z_1)}{\gamma-1}, \\ w &= \frac{w(t_0, x_0, y_0, z_1) + w(t_0, x_0, y_0, z_2)}{2} + \frac{c(t_0, x_2, y_1, z_1) - c(t_0, x_2, y_1, z_2)}{\gamma-1}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} c &= \frac{\gamma-1}{4} \cdot \left[u(t_0, x_1, y_0, z_0) + v(t_0, x_0, y_1, z_0) + w(t_0, x_0, y_0, z_1) \right] - \\ &\quad - \frac{\gamma-1}{4} \cdot \left[u(t_0, x_2, y_0, z_0) + v(t_0, x_0, y_2, z_0) + w(t_0, x_0, y_0, z_2) \right] + \\ &\quad + \frac{c(t_0, x_1, y_1, z_1) + c(t_0, x_2, y_1, z_2) + c(t_0, x_2, y_2, z_1) - c(t_0, x_2, y_1, z_1)}{2}; \end{aligned}$$

для преобразования Ω_3

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{u(t_0, x_1, y_0, z_0) + u(t_0, x_2, y_0, z_0)}{2} + \frac{c(t_0, x_1, y_2, z_1) - c(t_0, x_2, y_2, z_1)}{\gamma - 1}, \\
 v &= \frac{v(t_0, x_0, y_1, z_0) + v(t_0, x_0, y_2, z_0)}{2} + \frac{c(t_0, x_1, y_1, z_1) - c(t_0, x_1, y_2, z_1)}{\gamma - 1}, \\
 w &= \frac{w(t_0, x_0, y_0, z_1) + w(t_0, x_0, y_0, z_2)}{2} + \frac{c(t_0, x_1, y_2, z_1) - c(t_0, x_1, y_2, z_2)}{\gamma - 1}, \quad (11)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c &= \frac{\gamma - 1}{4} \cdot [u(t_0, x_1, y_0, z_0) + v(t_0, x_0, y_1, z_0) + w(t_0, x_0, y_0, z_1)] - \\
 &\quad - \frac{\gamma - 1}{4} \cdot [u(t_0, x_2, y_0, z_0) + v(t_0, x_0, y_2, z_0) + w(t_0, x_0, y_0, z_2)] + \\
 &\quad + \frac{c(t_0, x_1, y_2, z_2) + c(t_0, x_2, y_2, z_1) + c(t_0, x_1, y_1, z_1) - c(t_0, x_1, y_1, z_2)}{2};
 \end{aligned}$$

для преобразования Ω_4

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{u(t_0, x_1, y_0, z_0) + u(t_0, x_2, y_0, z_0)}{2} + \frac{c(t_0, x_1, y_1, z_2) - c(t_0, x_2, y_1, z_2)}{\gamma - 1}, \\
 v &= \frac{v(t_0, x_0, y_1, z_0) + v(t_0, x_0, y_2, z_0)}{2} + \frac{c(t_0, x_1, y_1, z_2) - c(t_0, x_1, y_2, z_2)}{\gamma - 1}, \\
 w &= \frac{w(t_0, x_0, y_0, z_1) + w(t_0, x_0, y_0, z_2)}{2} + \frac{c(t_0, x_1, y_1, z_1) - c(t_0, x_1, y_1, z_2)}{\gamma - 1}, \quad (12)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c &= \frac{\gamma - 1}{4} \cdot [u(t_0, x_1, y_0, z_0) + v(t_0, x_0, y_1, z_0) + w(t_0, x_0, y_0, z_1)] - \\
 &\quad - \frac{\gamma - 1}{4} \cdot [u(t_0, x_2, y_0, z_0) + v(t_0, x_0, y_2, z_0) + w(t_0, x_0, y_0, z_2)] + \\
 &\quad + \frac{c(t_0, x_1, y_2, z_2) + c(t_0, x_2, y_1, z_2) + c(t_0, x_1, y_1, z_1) - c(t_0, x_1, y_1, z_2)}{2},
 \end{aligned}$$

соответственно. От первого решения эти интегралы для проекций скорости и c отличаются вторыми слагаемыми. Первые слагаемые в выражениях остаются без изменений.

Матрицы Ω_i имеют одинаковую первую строку. Единственность выбора элементов их первой строки, приводящего к наиболее простой связи между полными производными плотности и давления, обусловлена видом матрицы A .

Так, например, если первый элемент строки задать как $c^2 = D \cdot \gamma \frac{p}{\rho}$, где D – некоторое произвольное вещественное число, то второй элемент первой строки

матрицы $\Omega_i \cdot A$ будет не равен нулю $\rho \cdot D \cdot \gamma \frac{p}{\rho} - \gamma p \neq 0$ и первое уравнение преобразованной системы уже не будет являться связью между полными производными. Если у последнего элемента первой строки Ω_i поменять знак, то c будет мнимым числом. Поэтому вдоль траектории движения жидкой частицы, описываемой уравнениями из колонки Тр табл. 1, первое выражение преобразованной системы для всех Ω_i одно и то же.

В силу линейности системы (5) любые суперпозиции двух и более выражений, полученных для различных Ω_i , также будут интегралами системы уравнений Эйлера. При этом можно складывать как исходные системы, так и их решения. Например, если мы далее сложим соответствующие уравнения для проекций вектора скорости из (6), (10), (11) и (12), то получим более общие выражения для них в выбранной системе координат:

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{u(t_0, x_1, y_0, z_0) + u(t_0, x_2, y_0, z_0)}{2} + \\
 &+ \frac{c(t_0, x_1, y_2, z_2) + c(t_0, x_1, y_1, z_1) + c(t_0, x_1, y_2, z_1) + c(t_0, x_1, y_1, z_2)}{4(\gamma - 1)} - \\
 &- \frac{c(t_0, x_2, y_2, z_2) + c(t_0, x_2, y_1, z_2) + c(t_0, x_2, y_2, z_1) + c(t_0, x_2, y_1, z_1)}{4(\gamma - 1)}, \\
 v &= \frac{v(t_0, x_0, y_1, z_0) + v(t_0, x_0, y_2, z_0)}{2} + \\
 &+ \frac{c(t_0, x_2, y_1, z_2) + c(t_0, x_2, y_1, z_1) + c(t_0, x_1, y_1, z_1) + c(t_0, x_1, y_1, z_2)}{4(\gamma - 1)} - \\
 &- \frac{c(t_0, x_2, y_2, z_2) + c(t_0, x_1, y_2, z_2) + c(t_0, x_2, y_2, z_1) + c(t_0, x_1, y_2, z_1)}{4(\gamma - 1)}, \\
 w &= \frac{w(t_0, x_0, y_0, z_1) + w(t_0, x_0, y_0, z_2)}{2} + \\
 &+ \frac{c(t_0, x_2, y_2, z_1) + c(t_0, x_1, y_1, z_1) + c(t_0, x_2, y_1, z_1) + c(t_0, x_1, y_2, z_1)}{4(\gamma - 1)} - \\
 &- \frac{c(t_0, x_2, y_2, z_2) + c(t_0, x_1, y_2, z_2) + c(t_0, x_2, y_1, z_2) + c(t_0, x_1, y_1, z_2)}{4(\gamma - 1)}.
 \end{aligned} \tag{13}$$

Чтобы получить более общее выражение для скорости распространения малых возмущений, надо также сложить (7) с соответствующими уравнениями для c из (10), (11) и (12). Мы последовательно складываем все имеющиеся выражения, чтобы получить в итоге самое общее. Чтобы получить ещё более общие выражения, надо воспользоваться другим множеством преобразований

Ω_6 , отличным от использованного множества $\Omega_1 - \Omega_4$, определить на нём свои выражения и взять суперпозицию всех интегралов восьми преобразованных систем. Можно заметить, что такой подход сводится к вычислению средних значений проекций скорости и c в каждой точке (t, x, y, z) . В итоге для проекций вектора скорости будут иметь место те же самые выражения (13), а для скорости распространения малых возмущений можно будет получить уравнение

$$c = \frac{\gamma-1}{4} \cdot [u(t_0, x_1, y_0, z_0) + v(t_0, x_0, y_1, z_0) + w(t_0, x_0, y_0, z_1)] - \frac{\gamma-1}{4} \cdot [u(t_0, x_2, y_0, z_0) + v(t_0, x_0, y_2, z_0) + w(t_0, x_0, y_0, z_2)] + \frac{c(t_0, x_1, y_2, z_2) + c(t_0, x_1, y_1, z_1) + c(t_0, x_1, y_2, z_1) + c(t_0, x_1, y_1, z_2)}{8} + \frac{c(t_0, x_2, y_2, z_2) + c(t_0, x_2, y_1, z_2) + c(t_0, x_2, y_2, z_1) - c(t_0, x_2, y_1, z_1)}{8}. \quad (14)$$

Дополняющие выражения (8) и (9) останутся без изменений. В полученных выражениях задействованы все начальные точки из (4).

Мы установили, что первая строка матриц Ω_i имеет единственно возможный самый простой вид. Чтобы ответить на вопрос о полноте интегралов уравнений газовой динамики, вначале умножим исходное уравнение на невырожденную матрицу Ω общего вида, элементы которой ω_{ij} произвольные вещественные числа

$$\Omega = \begin{bmatrix} c^2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \omega_{22} & -\omega_{23} & -\omega_{24} & \frac{\omega_{25}}{\rho c} \\ 0 & -\omega_{32} & \omega_{33} & -\omega_{34} & \frac{\omega_{35}}{\rho c} \\ 0 & -\omega_{42} & -\omega_{43} & \omega_{44} & \frac{\omega_{45}}{\rho c} \\ 0 & \omega_{52} & \omega_{53} & \omega_{54} & -\frac{\omega_{55}}{\rho c} \end{bmatrix}, \text{ где } c^2 = \gamma \frac{p}{\rho}. \quad (15)$$

В результате получим аналогичную связь между дифференциалами газодинамических функций вдоль различных направлений, заданных следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений (см. табл. 2).

Таблица 2 / Table 2

Траектории(2) / Trajectories (2)

$\frac{dx}{dt} = u + c \cdot \frac{\omega_{25}}{\omega_{22}},$	$\frac{dx}{dt} = u,$	$\frac{dx}{dt} = u,$	$\frac{dx}{dt} = u + c \cdot \frac{\omega_{22}}{\omega_{25}},$
$\frac{dy}{dt} = v,$	$\frac{dy}{dt} = v - c \cdot \frac{\omega_{25}}{\omega_{23}},$	$\frac{dy}{dt} = v,$	$\frac{dy}{dt} = v - c \cdot \frac{\omega_{23}}{\omega_{25}},$
$\frac{dz}{dt} = w;$	$\frac{dz}{dt} = w;$	$\frac{dz}{dt} = w - c \cdot \frac{\omega_{25}}{\omega_{24}};$	$\frac{dz}{dt} = w - c \cdot \frac{\omega_{24}}{\omega_{25}};$

$\frac{dx}{dt} = u - c \cdot \frac{\omega_{35}}{\omega_{32}},$ $\frac{dy}{dt} = v,$ $\frac{dz}{dt} = w;$	$\frac{dx}{dt} = u,$ $\frac{dy}{dt} = v + c \cdot \frac{\omega_{35}}{\omega_{33}},$ $\frac{dz}{dt} = w;$	$\frac{dx}{dt} = u,$ $\frac{dy}{dt} = v,$ $\frac{dz}{dt} = w - c \cdot \frac{\omega_{35}}{\omega_{34}};$	$\frac{dx}{dt} = u - c \cdot \frac{\omega_{32}}{\omega_{35}},$ $\frac{dy}{dt} = v + c \cdot \frac{\omega_{33}}{\omega_{35}},$ $\frac{dz}{dt} = w - c \cdot \frac{\omega_{34}}{\omega_{35}};$
$\frac{dx}{dt} = u - c \cdot \frac{\omega_{45}}{\omega_{42}},$ $\frac{dy}{dt} = v,$ $\frac{dz}{dt} = w;$	$\frac{dx}{dt} = u,$ $\frac{dy}{dt} = v - c \cdot \frac{\omega_{45}}{\omega_{43}},$ $\frac{dz}{dt} = w;$	$\frac{dx}{dt} = u,$ $\frac{dy}{dt} = v,$ $\frac{dz}{dt} = w + c \cdot \frac{\omega_{45}}{\omega_{44}};$	$\frac{dx}{dt} = u - c \cdot \frac{\omega_{42}}{\omega_{45}},$ $\frac{dy}{dt} = v - c \cdot \frac{\omega_{43}}{\omega_{45}},$ $\frac{dz}{dt} = w + c \cdot \frac{\omega_{44}}{\omega_{45}};$
$\frac{dx}{dt} = u - c \cdot \frac{\omega_{55}}{\omega_{52}},$ $\frac{dy}{dt} = v,$ $\frac{dz}{dt} = w;$	$\frac{dx}{dt} = u,$ $\frac{dy}{dt} = v - c \cdot \frac{\omega_{55}}{\omega_{53}},$ $\frac{dz}{dt} = w,$	$\frac{dx}{dt} = u,$ $\frac{dy}{dt} = v,$ $\frac{dz}{dt} = w - c \cdot \frac{\omega_{55}}{\omega_{54}};$	$\frac{dx}{dt} = u - c \cdot \frac{\omega_{52}}{\omega_{55}},$ $\frac{dy}{dt} = v - c \cdot \frac{\omega_{53}}{\omega_{55}},$ $\frac{dz}{dt} = w - c \cdot \frac{\omega_{54}}{\omega_{55}}.$

Этот случай включает все рассмотренные до него варианты. А также в принципе может образовывать любые другие допустимые ($\omega_j \neq \pm 1$). Если в новой преобразованной системе уравнений в выражениях для полных производных от компонентов вектора скорости задать отношение коэффициентов $\left| \frac{\omega_{i5}}{\omega_j} \right| < 1$, то в полной производной давления в силу обратной

пропорциональности этих же коэффициентов получим $\left| \frac{\omega_j}{\omega_{i5}} \right| > 1$ и траектории из

табл. 2 выйдут за пределы характеристической гиперповерхности системы (1), разделяющей причинно несвязанные области, чего не должно быть. Таким

образом, отношение коэффициентов может быть только таким, когда $\left| \frac{\omega_j}{\omega_{i5}} \right| = 1$,

следовательно и сами траектории должны лежать на самой гиперповерхности, где решение уравнений в принципе может иметь разрывы, даже если начальные и граничные условия непрерывны [10]. Если в новую преобразованную систему уравнений добавить ещё полные производные от плотности, заменив их затем на производные от давления, используя первое уравнение системы, то

коэффициенты при скорости звука будут распределены, например, как $\frac{|\omega_{i5} \pm \omega_{i1}|}{|\omega_{ij}|}$

и $\frac{|\omega_{ij}|}{|\omega_{i5} \pm \omega_{i1}|}$, поэтому имеем тот же самый результат.

Далее необходимо ответить на вопрос: «Является ли полученная система интегралов (8, 9, 13, 14), построенная на конечном множестве начальных точек (4), полной, все ли возможные выражения в неё включены?» В любой другой декартовой системе координат (x', y', z') решение будет выглядеть точно также в силу однородности и изотропности пространства. Но при этом положение начальных точек (x'_0, y'_0, z'_0) , (x'_1, y'_1, z'_1) и (x'_2, y'_2, z'_2) , см. (4), будет другим, поэтому и значения интегралов $u'(t, x', y', z')$, $v'(t, x', y', z')$, $w'(t, x', y', z')$, $c'(t, x', y', z')$ могут также отличаться. Примем, что (x', y', z') – прямолинейные ортогональные координаты, связаны с (x, y, z) углами Эйлера α, β, γ :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cdot \cos \gamma - \cos \beta \cdot \sin \alpha \cdot \sin \gamma & -\cos \gamma \cdot \sin \alpha - \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \sin \gamma & \sin \beta \cdot \sin \gamma \\ \cos \beta \cdot \cos \gamma \cdot \sin \alpha + \cos \alpha \cdot \sin \gamma & \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma - \sin \alpha \cdot \sin \gamma & -\cos \gamma \cdot \sin \beta \\ \sin \alpha \cdot \sin \beta & \cos \alpha \cdot \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

где угол прецессии $0 \leq \alpha < 2\pi$, угол нутации $0 \leq \beta < \pi$ и угол собственного вращения $0 \leq \gamma < 2\pi$ имеют указанные пределы их изменения. Эти три угла вполне характеризуют положение любой произвольной системы координат относительно исходной. Тогда, определив проекции скорости $u'(t, x', y', z') = u'(t, \alpha, \beta, \gamma)$, $v'(t, x', y', z') = v'(t, \alpha, \beta, \gamma)$ и $w'(t, x', y', z') = w'(t, \alpha, \beta, \gamma)$ в момент времени t в системе координат (x', y', z') , мы можем определить в системе (x, y, z) некоторые функции углов Эйлера

$$\begin{pmatrix} f_u \\ f_v \\ f_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cdot \cos \gamma - \cos \beta \cdot \sin \alpha \cdot \sin \gamma & \cos \beta \cdot \cos \gamma \cdot \sin \alpha + \cos \alpha \cdot \sin \gamma & \sin \alpha \cdot \sin \beta \\ -\cos \gamma \cdot \sin \alpha - \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \sin \gamma & \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma - \sin \alpha \cdot \sin \gamma & \cos \alpha \cdot \sin \beta \\ \sin \beta \cdot \sin \gamma & -\cos \gamma \cdot \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{pmatrix}.$$

Чтобы получить полные выражения для проекций скорости надо снова воспользоваться суперпозицией проекций вектора скорости, полученных для всех возможных систем координат. Для функций это может быть осуществлено на основании теоремы о среднем:

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{4\pi^3} \iiint_{\alpha, \beta, \gamma} f_u(\alpha, \beta, \gamma) d\alpha d\beta d\gamma, \\ v &= \frac{1}{4\pi^3} \iiint_{\alpha, \beta, \gamma} f_v(\alpha, \beta, \gamma) d\alpha d\beta d\gamma, \\ w &= \frac{1}{4\pi^3} \iiint_{\alpha, \beta, \gamma} f_w(\alpha, \beta, \gamma) d\alpha d\beta d\gamma. \end{aligned} \quad (16)$$

Аналогичное выражение можно получить для скорости распространения малых возмущений

$$c = \frac{1}{4\pi^3} \iiint_{\alpha, \beta, \gamma} f_c(\alpha, \beta, \gamma) d\alpha d\beta d\gamma, \quad (17)$$

здесь $f_c(t, \alpha, \beta, \gamma) = c'(t, x', y', z')$.

Суперпозиция и принцип суперпозиции характерен для волновых процессов. Он позволяет собрать в каждой точке, где производится измерение, результирующее воздействие в виде суммы колебаний, создаваемых каждой волной в отдельности. Это мы и использовали при получении выражений (16) и (17). При этом в выражениях (13) и (14) первые слагаемые учитывают перенос возмущений вдоль траекторий, заданных уравнениями из колонки Св табл. 1, в которые входит такая величина, как скорость звука. В одномерном случае эти траектории описывали бы две волны Римана, приходящие в некоторую точку слева и справа. В более общем случае эти траектории совпадают с бихарактеристиками [8; 9]. Каждому набору параметров (α, β, γ) соответствуют свои бихарактеристики, которые всей своей совокупностью образуют характеристические гиперповерхности, проходящие через каждую точку (t, x, y, z) . В фиксированный момент времени эти поверхности топологически эквивалентны сфере. Поэтому можно считать, что первые слагаемые учитывают воздействие сферических волн. Вторые слагаемые в выражениях (13) и (14) учитывают перенос возмущений вдоль траекторий, заданных уравнениями из колонки Пв табл. 1. В неподвижной среде их радиус в $\sqrt{3}$ раза больше радиуса сферической волны. В общем случае они также образуют гиперповерхности, которые охватывают характеристики. Но характеристики представляют собой предельные поверхности, за пределы которых возмущения не могут распространяться. Однако если предположить, что точки этих кривых образованы пересечением трёх плоских волн, движущихся вдоль различных направлений, то траектории из колонки Пв при всех возможных значениях (α, β, γ) формируют эти гиперповерхности. В случае 2D вместо $\sqrt{3}$ будем иметь $\sqrt{2}$, см. рис. 1. Тогда можно считать, что вторые слагаемые в выражениях (14) и (15) учитывают воздействие плоских волн.

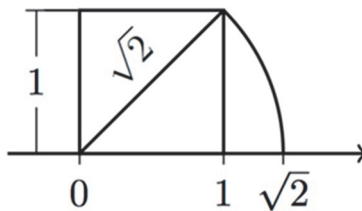


Рис. 1 / Fig. 1. Интерференция плоских волн / Interference of plane waves

Источник: составлено автором

Мы рассмотрели применение метода полных дифференциалов к общим уравнениям газовой динамики. Прежде чем обозначить перспективы

практического применения этого метода, остановимся на одном частном примере, когда уравнения имеют другой тип.

Применение метода к уравнению Лапласа

Из теории дифференциальных уравнений с частными производными хорошо известно, что вместо уравнения Лапласа, которое описывает поведение гармонических функций $\phi(x, y)$ и $\psi(x, y)$, можно рассматривать систему уравнений Коши-Римана для аналитической функции $w(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$ комплексной переменной $z = x + iy$ [11]. Эти уравнения являются эквивалентными условиями для дифференцируемости комплексной функции и связаны с гармоническими функциями через их вещественную и мнимую части

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Запишем эту систему уравнений в векторно-матричном виде

$$A \frac{\partial Q}{\partial x} + B \frac{\partial Q}{\partial y} = 0, \quad \text{где} \quad (18)$$

$$Q = \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следуя нашему общему подходу, умножив эту систему на некоторую невырожденную матрицу, состоящую в данном случае из вещественных и мнимых единиц $\Omega = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$, получим, что

$$\Omega A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}, \quad \Omega B = \begin{pmatrix} -i & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix}.$$

После умножения получим преобразованную систему уравнений вида:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} - i \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \quad (19)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} - i \frac{\partial \psi}{\partial x} + i \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0.$$

Поскольку в данном случае отсутствуют выделенные направления, как в системе (3), проинтегрируем эту систему по любому замкнутому контуру с учётом того, что $w = \phi + i\psi$ и $\bar{w} = \phi - i\psi$

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = -i \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y},$$

$$\frac{d\bar{w}}{dz} = \frac{\partial\phi}{\partial x} - i \frac{\partial\psi}{\partial x} = i \frac{\partial\phi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial y}.$$

В результате получим, что

$$\oint \frac{dw}{dz} dz = \oint dw = \oint d\bar{w} = 0, \quad (20)$$

а это есть известная интегральная теорема Коши из теории функций комплексного переменного.

Заключение

Мы показали применение одного подхода, использованного ранее для построения противопоточных разностных схем, к построению полных интегралов систем дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. В частности мы применили его для построения полных интегралов системы уравнений Эйлера и Коши-Римана. Последняя связана с уравнением Лапласа. Хорошо известно, что, в принципе, системы уравнений или одно уравнение высшего порядка сводятся к системам первого порядка, поэтому этот подход является достаточно общим. Выражения для интегралов (16, 17, 8, 9) и (20) можно использовать для анализа решений смешанных задач внешней аэродинамики и внутренней газовой динамики на гладких и кусочно-непрерывных функциональных многообразиях. Такой подход, в частности, был применён в работе [2].

Полные интегралы уравнений Эйлера дают представление о том, как в общем виде устроено его решение. При их анализе был получен новый результат о влиянии плоских волн и о гиперповерхностях, образованных точками пересечения этих волн, охватывающих характеристики. Это позволяет по-новому взглянуть на проблему реализации общего пространственного метода характеристик [5]. Классический метод характеристик основан на использовании характеристических соотношений на волновых гиперплоскостях и гиперплоскостях тока. Поскольку число таких соотношений несоизмеримо больше числа уравнений, то имеется значительный произвол при их выборе. В ходе реализации нестационарного пространственного метода характеристик автор работы [9] и его коллеги столкнулись с проблемой численной неустойчивости. Позже, в работе [12] было показано, что эта проблема связана с невыполнением условия устойчивости Куранта-Фридрихса-Леви. В ней также было обосновано, что устойчивость обеспечивается модификацией расчётной сетки и использованием интерполяционных расчётных схем, существенно увеличивающих область определённости разностной системы уравнений. При построении численных решений на малых шагах по времени вместо выражений (16, 17, 8, 9) можно воспользоваться системой (13, 14, 8, 9), которая является аналогом подобных уравнений в методе характеристик. При этом разностная область зависимости будет гарантированно больше физической, поскольку гиперповерхности, образованные точками пересечений плоских волн,

охватывают характеристики. То же самое будет выполняться и для гиперконусов, касательных к ним. Однако трудоёмкость при реализации такого численного метода будет больше, чем, например, при реализации метода полных дифференциалов с использованием полиномиального способа построения разностных схем. Такой подход, предложенный в работе [5], порождает более детальные разностные схемы, чем сеточно-характеристический метод. В настоящее время интерес к таким методам, применяемым для решения сложных динамических задач газовой динамики и задач механики деформируемого твёрдого тела [13; 14], неуклонно растёт.

Полученные в работе выражения также могут быть использованы и при построении разностных схем высокого разрешения и высокого порядка аппроксимации в рамках методов конечных разностей или объёмов. Такие схемы, как нельзя лучше, приспособлены для описания переходных режимов течения вязкого теплопроводного газа. Поэтому мы включили в эту статью раздел, посвящённый эллиптическим уравнениям. Это важно для более корректного учёта влияния вязких членов и теплового потока за счёт теплопроводности в общих уравнениях переноса. Проблема теоретического описания [15] и прямого численного моделирования ламинарно-турбулентного перехода [16; 17] на сегодня является одной из приоритетных задач механики жидкости и газа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Euler L. Principes généraux du mouvement des fluids // Mémoires de l'Académie royale des sciences et belles lettres (Berlin). 1757. Т. 11 (1755). P. 274–315.
2. Riemann B. Ueber die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite // Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. 1860. Bd. 8. S. 43–66.
3. Липман Г. В., Рошко А. Элементы газовой динамики / пер. с англ. М.: Иностранная литература, 1960. 520 с.
4. Жуков А. И. Применение метода характеристик к численному решению одномерных задач газовой динамики // Труды Математического института имени В. А. Стеклова. 1960. Т. 58. С. 3–150.
5. Попов С. А. Моделирование течений сжимаемого газа на основе метода полных дифференциалов // Математическое моделирование. 2005. Т. 17. № 3. С. 99–119.
6. Попов С. А. Метод полных дифференциалов для численного решения гиперболических систем уравнений // Труды МАИ (электронный журнал). 2006. № 22. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=34103> (дата обращения: 25.07.2025).
7. Магомедов К. М. Метод характеристик для численного расчета пространственных течений газа // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1966. Т. 6. № 2. С. 313–325.
8. Овсянников Л. В. Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981. 368 с.
9. Русанов В. В. Характеристики общих уравнений газовой динамики // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1963. Т. 3. № 3. С. 508–527.

10. Hadamard J. *Leçons sur la Propagation des Ondes: Et les Équations de l'Hydrodynamique*. Paris: A. Hermann, 1903. 375 p.
11. Годунов С. К. *Уравнения математической физики*. М.: Наука, 1971. 416 с.
12. Заурвайн Х., Зусман М. Устойчивость численных решений при применении метода характеристик к трёхмерному течению // *Ракетная техника и космонавтика*. 1964. Т. 2. № 2. С. 209–211.
13. Петров И. Б. Сеточно-характеристические методы. 55 лет разработки и решения сложных динамических задач // *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023. Т. 6. № 1. С. 6–21. DOI: 10.23947/2587-8999-2023-6-1-6-21.
14. Васюков А. В., Смирнов И. Е. Сеточно-характеристический численный метод на нерегулярной расчетной сетке с расширением шаблона интерполяции // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2023. Т. 63. № 10. С. 1591–1599. DOI: 10.31857/S0044466923100174.
15. Воронков С. С. Турбулентность – одна из нерешенных проблем современной физики (краткий обзор) // *Вестник науки и образования Северо-Запада России*. 2022. Т. 8. № 3. С. 77–85.
16. Nakagawa K., Tsukahara T., Ishida T. DNS Study on Turbulent Transition Induced by an Interaction between Freestream Turbulence and Cylindrical Roughness in Swept Flat-Plate Boundary Layer // *Aerospace*. 2023. Vol. 10. Iss. 2. Article no. 128. DOI: 10.3390/aerospace10020128.
17. Егоров И. В., Новиков А. В., Чувахов П. В. Численное моделирование развития турбулентных пятен в сверхзвуковом пограничном слое на пластине // *Математическое моделирование*. 2022. Т. 34. № 7. С. 63–72. DOI: 10.20948/mm-2022-07-04.

REFERENCES

1. Euler, L. (1757). *Principes généraux du mouvement des fluids*. In: *Mémoires de l'Académie royale des sciences et belles lettres (Berlin)*, 11 (1755), 274–315.
2. Riemann, B. (1860). Ueber die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite. In: *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, 8, 43–66.
3. Liepmann, H. W. & Roshko, A. (1960). *Elements of Gas Dynamics*. Moscow: Inostrannaya literatura publ. (in Russ.).
4. Zhukov, A. I. (1960). Application of the method of characteristics to the numerical solution of one-dimensional problems in gas dynamics. In: *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 58, 3–150 (in Russ.).
5. Popov, S. A. (2005). Total differential method for compressible gas flow modeling. In: *Mathematical Models and Computer Simulations*, 17 (3), 99–119 (in Russ.).
6. Popov, S. A. (2006). The Total Differentials Method for Numerical Solution of Hyperbolic Systems of Equations. In: *Trudy MAI*, 22. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=34103> (accessed: 25.07.2025) (in Russ.).
7. Magomedov, K. M. (1966). Method of characteristics for numerical calculation of spatial gas flows. In: *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 6 (2), 313–325 (in Russ.).

8. Ovsyannikov, L. V. (1981). *Lectures on the Fundamentals of Gas Dynamics*. Moscow: Nauka publ. (in Russ.).
9. Rusanov, V. V. (1963). Characteristics of general equations of gas dynamics. In: *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 3 (3), 508–527 (in Russ.).
10. Hadamard, J. (1903). *Leçons sur la Propagation des Ondes: Et les Équations de l'Hydrodynamique*. Paris: A. Hermann.
11. Godunov, S. K. (1971). *Equations of mathematical physics*. Moscow: Nauka publ. (in Russ.).
12. Sauerwein, H. & Sussman, M. (1964). Numerical stability of the three-dimensional method of characteristics. In: *Rocketry and astronautics (AIAA Journal)*, 2 (2), 209–211 (in Russ.).
13. Petrov, I. B. (2023). Grid-characteristic methods. 55 years of developing and solving complex dynamic problems. In: *Computational Mathematics and Information Technologies*, 6 (1), 6–21. DOI: 10.23947/2587-8999-2023-6-1-6-21 (in Russ.).
14. Vasyukov, A. V. & Smirnov, I. E. (2023). Grid-characteristic numerical method on an irregular grid with extending the interpolation stencil. In: *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 63 (10), 1591–1599. DOI: 10.31857/S0044466923100174 (in Russ.).
15. Voronkov, S. S. (2022). Turbulence is one of the unsolved problems of modern physics (short review). In: *Journal of Science and Education of North-West Russia*, 8 (3), 77–85 (in Russ.).
16. Nakagawa, K., Tsukahara, T. & Ishida, T. (2023). DNS Study on Turbulent Transition Induced by an Interaction between Freestream Turbulence and Cylindrical Roughness in Swept Flat-Plate Boundary Layer. In: *Aerospace*, 10 (2), no. 128. DOI: 10.3390/aerospace10020128.
17. Egorov, I. V., Novikov, A. V. & Chuvakhov, P. V. (2022). Numerical simulation of turbulent spots evolution in supersonic boundary layer over a plate. In: *Mathematical Models and Computer Simulations*, 34 (7), 63–72. DOI: 10.20948/mm-2022-07-04 (in Russ.).

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Попов Сергей Александрович (г. Москва) – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры аэродинамики, динамики и управления летательных аппаратов Московского авиационного института (национального исследовательского университета);
<https://orcid.org/0009-0004-4724-5424>; e-mail: flowmech@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Sergey A. Popov (Moscow) – Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Prof., Department of Aerodynamics, Dynamics and Control of Aircraft, Moscow Aviation Institute (National Research University);
<https://orcid.org/0009-0004-4724-5424>; e-mail: flowmech@mail.ru

Научная статья
УДК 533.6.011.5

DOI: 10.18384/2949-5067-2025-3-63-75

ПАЛЬЦЕОБРАЗНЫЕ СТРУКТУРЫ В ЗАДАЧЕ РЕФРАКЦИИ УДАРНОЙ ВОЛНЫ НА ГРАНИЦЕ ГАЗОВ С РАЗНЫМИ ТЕПЛОЁМКОСТЯМИ

Тугазаков Р. Я.

*Центральный аэрогидродинамический институт имени профессора Н. Е. Жуковского, г. Жуковский, Московская обл., Российская Федерация
e-mail: renatsan@ya.ru*

Поступила в редакцию 27.08.2025

Принята к публикации 02.09.2025

Аннотация

Цель. Исследовать в нелинейной постановке неустойчивость границы двух совершенных газов с разной теплоёмкостью при падении на неё интенсивной ударной волны.

Процедура и методы. Применялось численное моделирование в рамках уравнений Эйлера для использования этих результатов расчёта с данными, полученными в рамках слабо нелинейного приближения, и экспериментом.

Результаты. Показано, что для нерегулярной рефракции в задаче происходит самоорганизация дозвукового течения совершенного газа, позволившая получить решение без дополнительных мер по определению одного из показателей адиабаты. На фоне мелкомасштабной турбулентности, образующейся из-за неустойчивости Рихтмаера – Мешкова, в задаче обнаружена реализация взрывной неустойчивости.

Теоретическая и практическая значимость. Процесс самоорганизации течения газа, позволивший определить величину показателя адиабаты в одном из газов, обнаружен в рефракционной задаче впервые. Представленные в статье результаты объясняют на нелинейном уровне механизм образования пальцеобразных структур при взаимодействии ударной волны с границей лёгкий – тяжёлый газ, дополняют данные, полученные в эксперименте и теоретически в рамках слабо нелинейного подхода.

Ключевые слова: рефракция, самоорганизация течения, взрывная неустойчивость, неустойчивость Рихтмаера – Мешкова, пальцеобразные структуры

Для цитирования:

Тугазаков Р. Я. Пальцеобразные структуры в задаче рефракции ударной волны на границе газов с разными теплоёмкостями // Вестник Государственного университета просвещения. Серия: Физика-математика. 2025. № 3. С.63–75. <https://doi.org/10.18384/2949-5067-2025-3-63-75>

Original research article

SELF-ORGANIZATION OF GAS FLOW IN THE PROBLEM OF SHOCK WAVE REFRACTION AT THE BOUNDARY OF GASES WITH DIFFERENT HEAT CAPACITIES

R. Tugazakov

*Central Aerohydrodynamic Institute, Zhukovsky, Moscow Region, Russian Federation
e-mail: renatsan@ya.ru*

Received by the editorial office 27.08.2025

Accepted for publication 02.09.2025

Abstract

Aim is to investigate, in a nonlinear formulation, the instability of the boundary of two perfect gases with different heat capacities when an intense shock wave falls on it.

Methodology. Numerical modeling within the Euler equations was applied to use these calculation results with the data obtained within the weakly nonlinear approximation and the experiment.

Results. It is shown that for irregular refraction in the problem, self-organization of the subsonic flow of a perfect gas occurs, which made it possible to obtain a solution without additional measures to determine one of the adiabatic indices. Against the background of small-scale turbulence generated by the Richtmyer – Meshkov instability, explosive instability was detected in the problem.

Research implications. The process of self-organization of gas flow, which allowed the determination of the adiabatic index in one gas, was discovered for the first time in a refraction problem. The results presented in the article explain, at a nonlinear level, the mechanism for the formation of finger-like structures during the interaction of a shock wave with a light-heavy gas boundary, and complement the data obtained experimentally and theoretically within the framework of a weakly nonlinear approach.

Keywords: refraction, self-organization of flow, explosive instability, Richtmyer – Meshkov instability, finger-like structures

For citation:

Tugazakov, R. Ya. (2025). Self-organization of gas flow in the problem of shock wave refraction at the boundary of gases with different heat capacities. In: *Bulletin of the Federal State University of Education. Series: Physics and Mathematics*, 3, pp. 63–75. <https://doi.org/10.18384/2949-5067-2025-3-63-75>

Введение

Области изучения рефракционных задач достаточно разнообразны: теоретические, экспериментальные и численные исследования в нестационарной газовой динамике, подводные взрывы в гидродинамике, рефракция ударных волн на границах областей с разными химически реагирующими средами.

Из теоретических работ следует отметить работы по неустойчивости при рефракции на границе двух сред с равными g [1; 2]. В слабонелинейном приближении обширный класс задач на неустойчивость исследован в работах

[3; 4]. Результаты экспериментальных работ в ударных трубах представлены в [5; 6]. Данные численного моделирования задач рефракции различными методами приведены в [7–10]. В [10] показано, как из-за неустойчивости Рихтмаера-Мешкова в задаче рефракции ударной волны на границе двух идеальных газов контактный разрыв (далее – К.Р.) размывается в слой смешения, представляющий собой мелкомасштабный турбулентный поток. Для газов с равными теплоёмкостями получены автомодельные профили величин плотности и скорости при постоянной величине давления, оценено влияние разрыва тангенциальной скорости на границе газов. Для рефракционной задачи с разными же показателями адиабаты g отмечено, что при размывании К.Р. из-за неустойчивости Рихтмайера – Мешкова сохраняется разрыв показателя адиабаты на первоначальной границе двух сред, что затрудняет решение задачи рефракции в рамках точных численных методов.

В известных работах по экспериментальному и численному моделированию рефракционных задач часто принимаются малые интенсивности падающих волн, или g двух газов близки по величине. Такой подход обеспечивает качественное совпадение ранее полученных численных результатов с экспериментальными данными для начальной стадии взаимодействия волны с границей сред. В случае же интенсивных ударных волн нахождение переменной показателя адиабаты, в зависимости от выбранного способа его получения, может привести к разным решениям задачи.

1. Постановка задачи

Общая картина рефракции ударной волны (В), падающей на тангенциальный разрыв (А) в точке 0 под углом α , представлена на рис. 1, *a*. В результате взаимодействия получаются прошедшая (F) и отражённая (С) волны, которые, в зависимости от начальных параметров задачи, могут быть волнами разрежения. В случае реализации точного решения интенсивность волны (С) равна 0. Задача для регулярной рефракции решается в подвижной системе координат, связанной с точкой 0 (рис. 1, *a*), или в неподвижной (рис. 1, *b*) – для нерегулярной рефракции. Для регулярной рефракции задача автомодельная. В этом случае скорость в областях 4 и 5 сверхзвуковая, и тангенциальный разрыв, исходящий из угловой точки 0, размывается в расширяющуюся угловую область E0D. Первоначально задаются угол падения α и интенсивность волны (В). По этим данным определяются скорость движения точки 0 и, соответственно, скорости, которые должны быть сверхзвуковыми в областях 1–3 (помечены кружочками) относительно этой точки. То есть на левой границе расчётного поля в областях 1 и 3 устанавливается сверхзвуковой поток, который проходит через волну (В), а разрывы (F), (С) и область E0B получаются в процессе счёта. Для нерегулярной рефракции картина течения, когда падающая ударная волна движется вдоль границы газов (А), приведена на рис. 1, *b*.

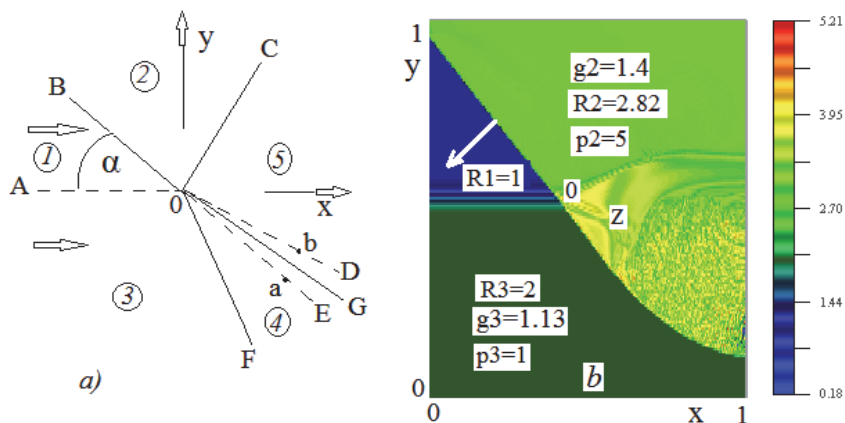


Рис. 1 / Fig. 1. Общая картина рефракции ударной волны (B), падающей на тангенциальный разрыв (A) под углом α : регулярная рефракция (a); нерегулярная рефракция (b) / The general refraction pattern of a shock wave (B) incident on a tangential discontinuity (A) at an angle of α : regular refraction (a); irregular refraction (b)

Источник: данные автора

В настоящей работе используется конечно-разностный метод второго порядка точности по времени и пространству [11], применимый к двумерным нестационарным уравнениям Эйлера. Для расчёта картины течения с разными газами, в процессе счёта проводится анализ показателя адиабаты газа в каждой центральной точке девятиточечного шаблона.

Расчёты проводились на равномерной прямоугольной сетке. Для подтверждения точности результатов, не зависящих от размера сетки и величины временного шага, численное моделирование проводилось на полях, включающих 500x500, 700x700 и 1000x1000 точек. В последних двух вариантах полученные данные для безразмерных величин совпадали с точностью пять знаков. Для учёта влияния отражённых возмущений от границ в расчётах на правой границе сверху и снизу расчётной области устанавливаются неотражающие граничные условия. Приведённые на рисунках величины давления p , плотности R , температуры T отнесены к их значениям в набегающем потоке, а скорость и её компоненты – к скорости звука невозмущённого потока c_1 . Цифры обозначают ту область, в которой взято значение параметра течения. Координаты x и y отнесены к величинам X и Y , которые соответствуют размерам расчётного поля по этим координатам.

2. Результаты расчётов

В регулярной рефракции при увеличении угла падения α до значения больше 40 градусов в задаче реализуется нерегулярная рефракция, нестационарная картина течения с образованием вихрей [12]. В настоящей работе исследуется механизм зарождения этих вихревых структур. Решение ищется в подвижной системе координат, связанной с волной, движущейся вдоль К.Р. (рис. 1, b).

2.1. Нерегулярная рефракция. Взрывная неустойчивость

Проведённые исследования вариантов задачи при падении интенсивной ударной волны на границу газов с разными теплоёмкостями выявили в потоке газа взрывную неустойчивость (далее – В. Н.). Данное явление описано в слабо нелинейном приближении во многих задачах: физики, химии, гидродинамики и других [3; 4]. То есть в поле волн ищется частота, на которой может реализоваться взрывная неустойчивость. Сам же процесс «взрыва» в конкретной задаче можно смоделировать только в нелинейной постановке, что сделано в данной работе. Такой же подход прямого численного моделирования был использован при изучении турбулизации сверхзвукового потока газа при обтекании плоской пластины [13].

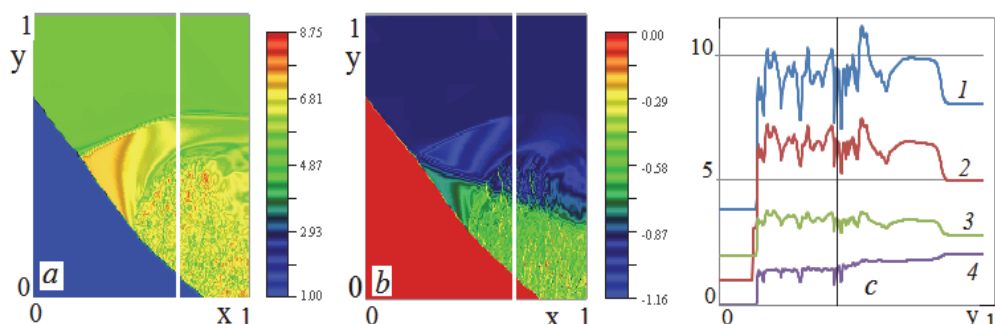


Рис. 2 / Fig. 2. Взрывная неустойчивость: поле давления (a); поле x-ой компоненты скорости (b); поведение параметров течения в сечении AA;

1 – H, 2 – p, 3 – R, 4 – Q (c). Начальные данные: $p_1 = 1$, $p_2 = 5$, $\alpha = 45^\circ$, $g_1 = 1.4$, $g_3 = 1.13$, $R_1 = 1$, $R_3 = 2$ / Explosive instability: pressure field (a); field of the x-th velocity component (b); behavior of flow parameters in section AA: 1 – H, 2 – p, 3 – R, 4 – Q (c). Initial data: $p_1 = 1$, $p_2 = 5$, $\alpha = 45^\circ$, $g_1 = 1.4$, $g_3 = 1.13$, $R_1 = 1$, $R_3 = 2$

Источник: данные автора

На рис. 2 представлены картины начальной стадии рефракции ударной волны на границе газов воздух – пропан (лёгкий – тяжёлый, $c_1 > c_3$). В данном варианте задачи реализуется взрывная неустойчивость. Механизм её проявления объясняется тем, что реализуются последовательно неустойчивость Рихтмаера – Мешкова (далее – НРМ) и Релея – Тейлора (далее – НРТ). При рефракции на границе сред всегда реализуется НРМ, а НРТ – при условии, чтобы градиенты давления и плотности были направлены в разные стороны от границы раздела. Здесь эти условия выполняются. На рис. 1, b, рис. 2, a, и рис. 2, b приведены поля плотности, давления и x - вой компоненты скорости течения. Поведение параметров течения в сечениях (вертикальные светлые линии) дано на рис. 2, c: 1 – H, 2 – p, 3 – R, 4 – Q. Из анализа видно, что в газах до и после границы раздела (тёмная линия) реализуются пульсации, отличающиеся по амплитуде и частоте их реализации. При взаимодействии ударной волны с контактном разрывом в поле течения сохраняется небольшая часть начальной

границы раздела сред Oz , отклонённой на некоторый угол (рис. 1, *b* и рис. 3, *b*). Она состоит из двух прямолинейных участков разных величин плотности и g , объединённых областью с минимальным значением плотности. На рис. 1, *a* это области 4 и 5. Такая же картина течения получается при падении ударной волны на границу двух сред с разной теплоёмкостью, вычисленной по формулам распада произвольного разрыва для значений угла α близкого к 90° , когда реализуется почти одномерное течение [14]. В конце участка Oz реализуется взрывная неустойчивость. Из-за чего это происходит? Пока скорость потока по обе части области Oz сверхзвуковая (в подвижной системе координат), течение устойчиво, нет обмена газов с верхней и нижней её поверхностями. Это продолжается до момента пока в область точки z не приходит поток газа, движущийся за ударной волной. В результате скорость газа в окрестности точки z становится дозвуковой и происходит обмен газов с разной теплоёмкостью и плотностью, что приводит к распаду системы газов, находящихся в равновесии. Таким образом имеются два момента при реализации В.Н. на границе двух сред: во-первых, воздействие ударной волны – образование мелкомасштабной турбулентности, проявление НРМ; во-вторых, влияние набегающего потока за ударной волной – образование крупномасштабных пульсаций, несущих энтропийные возмущения.

Задачи взаимодействия ударных волн с контактными разрывами зависят от определённого набора начальных данных, в зависимости от которых реализуется регулярная и нерегулярная рефракция, переход взрывным образом к другому режиму обтекания.

2.2. Зависимость взрывной неустойчивости от начальных параметров течения

На рис. 3, *a, b* приведены картины течения, указывающие на влияние одного из основных параметров задачи угла α на картину рефракции.

Параметры для данных вариантов такие же, как на рис. 2, а угол $\alpha = 30^\circ$ (рис. 3, *a* – поле плотности) и $\alpha = 60^\circ$ (рис. 3, *b* – поле плотности). Видно, что при малых углах падения область перехода к другому режиму обтекания отступает от точки взаимодействия.

Область Oz возрастает. В этом случае, чем меньше угол падения α , тем скорость точки O быстрее движется вдоль границы разрыва, и начальная стадия рефракции является регулярной. При углах больше 60° для данного варианта задачи сразу реализуется нерегулярная рефракция. При этом для больших углов падения на мелкомасштабные пульсации воздействует газ с большей скоростью (x -ая компонента скорости), что приводит к зарождению крупномасштабных пульсаций по интенсивности и частоте их реализации. То есть при больших углах падения кроме НРМ и НРТ в задаче реализуется неустойчивость Кельвина – Гельмгольца. На рис. 3, *b* приведена картина пульсирующей среды, поведение которой (величины p) представлено в сечении AA на рис. 3, *c*. В верхней части поля, начиная от отражённой волны до границы раздела газов,

реализуются низкочастотные пульсации, которые возбуждают в газе с другой теплоёмкостью крупномасштабные пульсации. Этот анализ показывает, что изучаемая В.Н. является продолжением процесса параметрической неустойчивости, возникающей при модулировании волной (В) контактного разрыва в периодически неоднородную среду. То есть низкочастотные волны (верхняя часть поля, рис. 3, с) нарастают, черпая энергию из высокочастотных волн, которые образуются на контактном разрыве из-за НРМ. Проникая в другой газ, они приводят к образованию крупномасштабных пульсаций, которые тормозят газ и способствуют нестационарному перераспределению энергии в областях 1 и 3 в соответствии с законами сохранения.

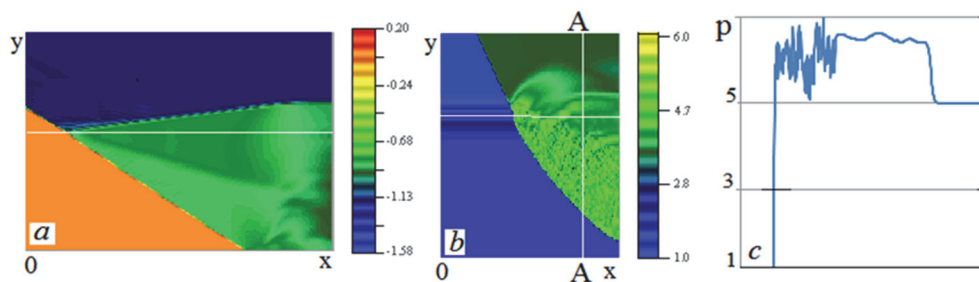


Рис. 3 / Fig. 3. Зависимость взрывной неустойчивости от угла α :

30° – поле плотности (a), 60° – поле плотности (b), поведение величины давления в нормальном сечении AA в разных газах до и после контактного разрыва (c) /
The dependence of explosive instability on the angle α : 30° is the density field (a), 60° is the density field (b), the behavior of the pressure value in the normal AA section in different gases before and after the contact rupture (c).

Источник: данные автора

2.3. Пальцеобразные структуры

Одним из параметров, влияющих на интенсивный обмен газов на границе контакта, является градиент плотности. На рис. 4, a приведена картина рефракции (поле давления) ударной волны на границе воздух – элегаз для начальных данных: $p_2 = 2$, $\alpha = 60^\circ$, $g_1 = 1.4$, $g_3 = 1.094$, $R_1 = 1$, $R_3 = 5.2$. Видно, что с увеличением плотности, картина течения становится похожа на процесс погружения тяжёлой жидкости в более лёгкую, как при НРТ. То есть в этом случае обмен газов обеспечивают более интенсивные пульсации по сравнению с предыдущими картинками рефракции (рис. 3). Но природа образования резонансных явлений на рис. 4 иная. На тяжёлый газ (границу контакта) действует ударная волна, в результате чего контактный разрыв распадается, как описано ранее на две области, разделённые границей с минимальной величиной производной плотности, с которой начинаются крупномасштабные пульсации, представляющие в тяжёлом газе чередующиеся струи разной плотности. То есть ударная волна возбуждает на К.Р. мелкомасштабные пульсации (НРМ), которые, на поверхности тяжёлого газа при действии набегающего потока усиливаются в

крупномасштабные колеблющиеся частицы газов. Результаты расчётов показывают, что при увеличении интенсивности падающей волны до $p_2 = 5$ крупномасштабные пульсации исчезают, так как мелкомасштабные пульсации забиваются набегающим потоком и не реализуется резонанс на возмущённой поверхности тяжёлого газа. На рис. 4, *a* видно, что первоначальная граница раздела газов (светлая линия) отклоняется на незначительный угол. Перед падающей волной образуется предвестник, так как величина давления в крупномасштабных пульсациях может превосходить значения в падающей волне. Изменение компоненты нормальной скорости v тяжёлого газа в горизонтальном сечении $y = 0.45$ на рис. 4, *b* показывает, что величина нормальной скорости падает с удалением от точки взаимодействия. Поведение давления по времени в точке, помеченной треугольником, дано на рис. 4, *c*, начиная от момента прихода волны. Видно, что амплитуда пульсаций уменьшается по мере размытия их за счёт турбулентной диффузии, порождаемой колебаниями газа с частотой порядка 6 МГц.

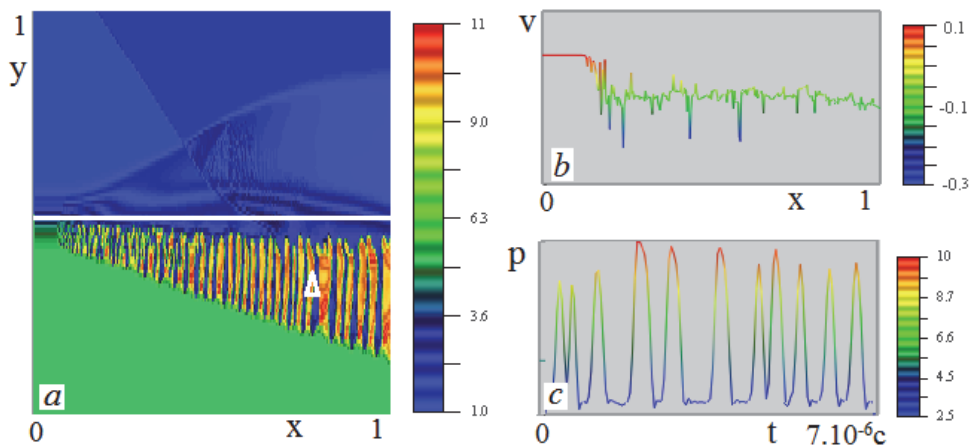


Рис. 4 / Fig. 4. Картина рефракции (поле давления) ударной волны на границе воздух – элегаз для начальных данных: $p_2 = 2$, $\alpha = 60^\circ$, $g_1 = 1.4$, $g_3 = 1.094$, $R_1 = 1$, $R_3 = 5.2$. Влияние градиента плотности на образование в тяжёлом газе колеблющихся пальцеобразных структур конечного размера (*a*); Поведение нормальной скорости u вдоль горизонтального сечения $y = 0.45$ (*b*); временные изменения величины давления в точке (треугольник) (*c*) / The refraction pattern (pressure field) of the shock wave at the air-phase boundary for the initial data: $p_2 = 2$, $\alpha = 60^\circ$, $g_1 = 1.4$, $g_3 = 1.094$, $R_1 = 1$, $R_3 = 5.2$. The effect of the density gradient on the formation of oscillating finger-like structures of finite size in heavy gas (*a*); The behavior of the normal velocity u along the horizontal section $y = 0.45$ (*b*); temporary changes in the pressure value at the point (triangle) (*c*).

Источник: данные автора

2.4. Пальцеобразные структуры в эксперименте

Образование пальцеобразных структур в данной работе оказалось не случайным. Изучение экспериментальных работ показало, что для разных работ с разными средами, где реализуются такие структуры, существуют схожие условия. Там и здесь имеются среды с разной плотностью (загрязнением). Имеется граница, откуда начинаются структуры, с минимальным значением плотности и большим градиентом изменения плотности. Так, в работе [15] впервые был обнаружен экспериментальный эффект образования пальчиковой структуры на поверхности (первоначально чистой) тонкого слоя жидкости, когда на её свободную поверхность помещается капля этой же жидкости, «загрязнённой» поверхностно-активным веществом.

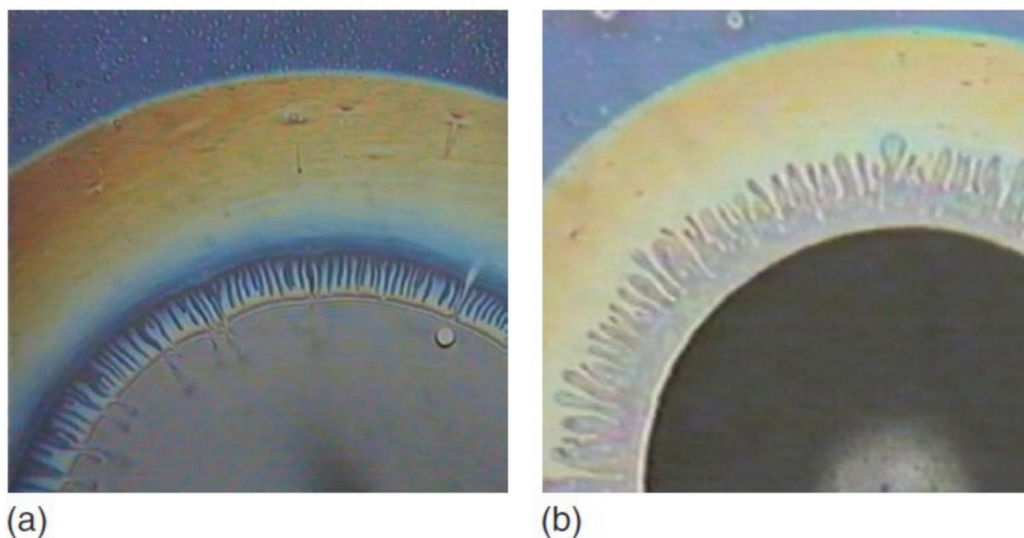


Рис. 5 / Fig. 5. Примеры образования пальчиковых эффектов, вызванных неоднородностью сурфактанта на поверхности / Examples of the formation of finger effects caused by the inhomogeneity of surfactant on the surface.

Источник: Selective dip-coating of chemically micropatterned surfaces / A. Darhuber, S. M. Troian, J. M. Davis, S. M. Miller // Journal of Applied Physics. 2000. Vol. 88. Iss. 9. P. 5119–5126. DOI: 10.1063/1.1317238

В работе [16] было показано, что пальчиковые структуры могут образовываться на поверхности слоя жидкости, даже если не рассматривать ван-дер-ваальсово взаимодействие, что существенно упрощает данную задачу. Механизмом, отвечающим за образование поверхностных структур, является объёмная диффузия сурфактанта и неустойчивость НРТ.

2.5. Нахождение g в нерегулярной рефракции

При падении ударной волны на К.Р. происходит отклонение её на некоторый угол, который определяет границу газов и, следовательно, значение g в

рассматриваемой точке (рис. 3, *b*; рис. 5, *a, b*). Здесь следует отметить: показатель адиабаты газа в каждой точке девятиточечного шаблона выбирается равным значению адиабаты газа для центральной точки. В процессе счёта в потоке анализируется поведение плотности или распределения скорости (или её компонент). Эти данные обозначают новую границу газов, то есть где какой газ, и, следовательно, определяют значение показателя адиабаты газа для выбранной точки. То есть в схеме и расчётах не вводятся механизмы, забивающие физическую неустойчивость. В результате этого мелкомасштабные возмущения, которые возникают из-за НРМ, при определённых начальных данных задачи в одном газе порождают пульсации конечной интенсивности, а при переходе в другой газ – достаточно сильные пульсации конечной интенсивности или пальцеобразные структуры. То есть для нестационарного совершенного газа происходит самоорганизация газа – процесс образования устойчивых пространственно-временных структур в первоначально макроскопической однородной среде. В работе показано, что эти структуры сносятся потоком и совершают высокочастотные колебания, размываясь за счёт турбулентной диффузии. Обмен информацией между двумя несмешивающимися газами происходит в результате колебательного процесса.

Заключение

Прямым численным моделированием в рамках уравнений Эйлера исследована задача рефракции ударной волны на границе газов с разными теплоёмкостями. Показано, что в результате развития в газе неустойчивости Рихтмайера – Мешкова и Релея – Тейлора в потоке реализуется взрывная неустойчивость, которая для определённых начальных параметров задачи приводит к образованию пульсирующих крупномасштабных частиц газа разной плотности, размывающихся за счёт турбулентной диффузии. В работе описан процесс самоорганизации нестационарного течения дозвукового совершенного газа, когда под действием конвективных и диффузионных процессов в первоначально макроскопической однородной среде образуются устойчивые пространственно-временные структуры.

ЛИТЕРАТУРА

1. Richtmyer R. D. Taylor instability in a shock acceleration of compressible fluids // Communications on Pure and Applied Mathematics. 1960. Vol. 13. Iss. 2. P. 297–319. DOI: 10.1002/cpa.3160130207.
2. Мешков Е. Е. Неустойчивость границы раздела двух газов, ускоряемой ударной волной // Известия Академии наук СССР. Механика жидкости и газа. 1969. № 5. С. 151–158.
3. Межанов А. Г., Руманов Э. Н. Нелинейные эффекты в макроскопической кинетике // Успехи физических наук. 1987. Т. 151. № 4. С. 553–593. DOI: 10.3367/UFN.0151.198704a.0553.

4. Кузнецов А. П., Кузнецов С. П., Рыскин Н. М. Нелинейные колебания. М.: Физматлит, 2002. 292 с.
5. Henderson L. F., Colella P., Puckett E. G. On the refraction of shock waves at a slow-fast gas interface // *Journal of Fluid Mechanics*. 1991. Vol. 224. P. 1–27. DOI: 10.1017/S0022112091001623.
6. Экспериментальное и численное исследование процесса турбулентного перемешивания на контактных границах трехслойных газовых систем / Н. В. Невмержицкий, А. Н. Разин, Е. Д. Сеньковский, Е. А. Сотсков, А. А. Никулин и др. // *Прикладная механика и техническая физика*. 2015. Т. 56. № 2 (330). С. 32–42. DOI: 10.15372/PMTF20150204.
7. Булат П. В., Волков К. Н. Численное моделирование рефракции ударной волны на наклонном контактном разрыве // *Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики*. 2016. Т. 16. № 3. С. 550–558. DOI: 10.17586/2226-1494-2016-16-3-550-558.
8. Numerical investigation of shock wave refraction patterns at multimaterial interfaces / R. Nourgaliev, S. Sushchikh, N. T. Dinh, T. Theofanous // *43rd AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit (10–13 January 2005, Reno, Nevada)*. DOI: 10.2514/6.2005-1292. URL: <https://arc.aiaa.org/doi/10.2514/6.2005-1292> (дата обращения: 25.07.2025).
9. Георгиевский П. Ю., Левин В. А., Сутырин О. Г. Взаимодействие ударной волны с продольным слоем газа пониженной плотности // *Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа*. 2016. № 5. С. 125–132. DOI: 10.7868/S056852811605008X.
10. Тугазаков Р. Я. Регулярная и нерегулярная рефракция на границе двух газов // *Ученые записки ЦАГИ*. 2023. Т. 54. № 2. С. 34–42.
11. Ephraim L. R., Burstein S. Z. Difference methods for the inviscid and viscous equations of a compressible gas // *Journal of Computational Physics*. 1967. Vol. 2. Iss. 2. P. 178–196. DOI: 10.1016/0021-9991(67)90033-2.
12. Tugazakov R. Ya. On the Theory of Supersonic Inviscid Flow Separation in Gasdynamic Problems // *Fluid Dynamics*. 2016. Vol. 51. No. 5. P. 689–695. DOI: 10.1134/S0015462816050136.
13. Тугазаков Р. Я. Численное и аналитическое исследование турбулизации сверхзвукового потока вязкого газа // *Вестник Государственного университета просвещения. Серия: Физика-Математика*. 2024. № 1. С. 68–82. DOI: 10.18384/2949-5067-2024-1-68-82.
14. Годунов С. К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // *Математический сборник*. 1959. Т. 47 (89). № 3. С. 271–306.
15. Warner M. R. E., Craster R. V., Matar O. K. Fingering phenomena associated with insoluble surfactant spreading on thin liquid films // *Journal of Fluid Mechanics*. 2004. Vol. 510. P. 169–200. DOI: 10.1017/S0022112004009437.

16. Marmur A., Lelah M. D. The spreading of aqueous surfactant solutions on glass // *Chemical Engineering Communications*. 1981. Vol. 13. Iss. 1-3. P. 133–143. DOI: 10.1080/00986448108910901.

REFERENCES

1. Richtmyer, R. D. (1960). Taylor instability in a shock acceleration of compressible fluids. In: *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 13 (2), 297–319. DOI: 10.1002/cpa.3160130207.
2. Meshkov, E. E. (1969). Instability of the interface of two gases accelerated by a shock wave. In: *Fluid Dynamics*, 5, 151–158 (in Russ.).
3. Merzhanov, A. G. & Rumanov, E. N. (1987). Nonlinear effects in macroscopic kinetics. In: *Soviet Physics Uspekhi*, 151 (4), 553–593. DOI: 10.3367/UFNr.0151.198704a.0553 (in Russ.).
4. Kuznetsov, A. P., Kuznetsov, S. P. & Ryskin, N. M. (2002). *Nonlinear oscillations*. Moscow: Fizmatlit publ. (in Russ.).
5. Henderson, L. F., Colella, P. & Puckett, E. G. (1991). On the refraction of shock waves at a slow-fast gas interface. In: *Journal of Fluid Mechanics*, 224, 1–27. DOI: 10.1017/S0022112091001623.
6. Nevmerzhitskii, N. V., Razin, A. N., Sen'kovskii, E. D., Sotskov, E. A. & Nikulin, A. A. et al. (2015). Experimental and numerical study of turbulent mixing at the contact boundaries of three-dimensional gas systems. In: *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 56 (2), 32–42. DOI: 10.15372/PMTF20150204 (in Russ.).
7. Bulat, P. V. & Volkov, K. N. (2016). Numerical simulation of shock wave refraction on inclined contact discontinuity. In: *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 16 (3), 550–558. DOI: 10.17586/2226-1494-2016-16-3-550-558 (in Russ.).
8. Nourgaliev, R., Sushchikh, S. Dinh, N. T. & Theofanous, T. (2005). Numerical investigation of shock wave refraction patterns at multimaterial interfaces. In: *43rd AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit (10–13 January 2005, Reno, Nevada)*. DOI: 10.2514/6.2005-1292. URL: <https://arc.aiaa.org/doi/10.2514/6.2005-1292> (accessed: 25.07.2025).
9. Georgievskii, P. Y., Levin, V. A. & Sutyurin, O. G. (2016). Interaction between a shock wave and a longitudinal low-density gas layer. In: *Fluid Dynamics*, 5, 125–132. DOI: 10.7868/S056852811605008X (in Russ.).
10. Tugazakov, R. Ya. (2023). Regular and irregular refraction of a shock wave at the boundary of two gases. In: *TsAGI Science Journal*, 54 (2), 34–42 (in Russ.).
11. Ephraim, L. R. & Burstein, S. Z. (1967). Difference methods for the inviscid and viscous equations of a compressible gas. In: *Journal of Computational Physics*, 2 (2), 178–196. DOI: 10.1016/0021-9991(67)90033-2.
12. Tugazakov, R. Ya. (2016). On the Theory of Supersonic Inviscid Flow Separation in Gasdynamic Problems. In: *Fluid Dynamics*, 51 (5), 689–695. DOI: 10.1134/S0015462816050136.

13. Tugazakov, R. Ya. (2024). Numerical and analytical study of turbulence of supersonic viscous gas flow. In: *Bulletin of Federal State University of Education. Series: Physics and Mathematics*, 1, 68–82. DOI: 10.18384/2949-5067-2024-1-68-82 (in Russ.).
 14. Godunov, S. K. (1959). A finite difference method for the computation of discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics. In: *Sbornik: Mathematics*, 47 (89), 3, 271–306 (in Russ.).
 15. Warner, M. R. E., Craster, R. V. & Matar, O. K. (2004). Fingering phenomena associated with insoluble surfactant spreading on thin liquid films. In: *Journal of Fluid Mechanics*, 510, 169–200. DOI: 10.1017/S0022112004009437.
 16. Marmur, A. & Lelah, M. D. (1981). The spreading of aqueous surfactant solutions on glass. In: *Chemical Engineering Communications*, 13 (1-3), 133–143. DOI: 10.1080/00986448108910901.
-

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Тугазаков Ренат Ямилович (г. Жуковский, Московская обл.) – доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Центрального аэрогидродинамического института имени профессора Н. Е. Жуковского; <https://orcid.org/0009-0009-9928-6486>; e-mail: renatsan@ya.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Renat Ya. Tugazakov – Dr. Sci. (Phys.–Math.), Leading researcher, Central Aerohydrodynamic Institute; <https://orcid.org/0009-0009-9928-6486>; e-mail: renatsan@ya.ru

Научная статья

УДК 538.956, 537.226.5

DOI: 10.18384/2949-5067-2025-3-76-89

ДИСПЕРСИЯ АНИЗОТРОПИИ ПОКАЗАТЕЛЯ ПРЕЛОМЛЕНИЯ ЖИДКОГО КРИСТАЛЛА В НИЗКОТЕМПЕРАТУРНОЙ НЕМАТИЧЕСКОЙ ФАЗЕ

Чекулаев И. С., Симушкина С. В., Ковалев Ю. В., Кулешова Ю. Д., Крюков А. И., Чигринов В. Г., Курилов А. Д.*

Государственный университет просвещения, г. Москва, Российская Федерация

**Корреспондирующий автор, e-mail: ad.kurilov@guppros.ru*

Поступила в редакцию 01.09.2025

Принята к публикации 05.09.2025

Аннотация

Цель. Исследовать дисперсию анизотропии показателя преломления Δn и параметр порядка S жидкокристаллической смеси ЖК-1289 в диапазоне $-60\dots+60^\circ\text{C}$ и проверить соответствие модели Ландау-де Жена.

Процедура и методы. Применена интерференционная спектроскопия. Измерены спектры пропускания планарной ЖК-ячейки при температурах от -60°C до $+60^\circ\text{C}$. Определена Δn по интерференционным максимумам. Рассчитана зависимость $S(T)$ по $\Delta n(T)$.

Результаты. Установлены зависимости $\Delta n(\lambda)$ во всем диапазоне существования нематической фазы. Анизотропия показателя преломления снижается с ростом температуры и длины волны. Параметр порядка падает от 0,75 при -40°C до 0,26 при $+60^\circ\text{C}$. Критический показатель $\beta = 0,23 \pm 0,01$ близок к 0,25, подтверждая модель.

Теоретическая и/или практическая значимость. Получены данные по $\Delta n(\lambda, T)$ и $S(T)$ в низкотемпературной нематической фазе ЖК-1289 и проверена модель Ландау-де Жена. Результаты важны для проектирования термостабильных ЖК-устройств.

Ключевые слова: анизотропия показателя преломления, дисперсия, жидкие кристаллы, параметр порядка

Благодарности и источники финансирования. Работа выполнена в рамках реализации научно-исследовательского проекта – победителя конкурса на получение гранта Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Государственный университет просвещения» в 2025 году.

Для цитирования:

Дисперсия анизотропии показателя преломления жидкого кристалла в низкотемпературной нематической фазе / И. С. Чекулаев, С. В. Симушкина, Ю. В. Ковалев, Ю. Д. Кулешова, А. И. Крюков, В. Г. Чигринов, А. Д. Курилов // Вестник Государственного университета просвещения. Серия: Физика-математика. 2025. № 3. С.76–89. <https://doi.org/10.18384/2949-5067-2025-3-76-89>

Original research article

DISPERSION OF THE ANISOTROPY OF THE REFRACTIVE INDEX OF A LIQUID CRYSTAL IN A LOW-TEMPERATURE NEMATIC PHASE

*I. Chekulaev, S. Simushkina, Yu. Kovalev, Yu. Kuleshova, A. Krukov, V. Chigrinov, A. Kurilov**

Federal State University of Education, Moscow, Russian Federation

**Corresponding author, e-mail: ad.kurilov@guppros.ru*

Received by the editorial office 01.09.2025

Accepted for publication 05.09.2025

Abstract

Aim. To study the dispersion of the refractive index anisotropy Δn and the order parameter S of the liquid crystal mixture ZhK-1289 in the temperature range of -60 to $+60^\circ\text{C}$ and to verify the applicability of the Landau-de Gennes model.

Methodology. Interference spectroscopy was employed. Transmission spectra of a planar LC cell were measured at temperatures ranging from -60°C to $+60^\circ\text{C}$. The birefringence Δn was determined from the positions of interference maxima. The dependence $S(T)$ was calculated based on $\Delta n(T)$.

Results. The dependences $\Delta n(\lambda)$ were established throughout the entire existence range of the nematic phase. The refractive index anisotropy decreases with increasing temperature and wavelength. The order parameter decreases from 0.75 at -40°C to 0.23 at $+61^\circ\text{C}$. The critical exponent $\beta = 0.23 \pm 0.01$ is close to 0.25, confirming the model.

Research implications. Data on $\Delta n(\lambda, T)$ and $S(T)$ in the low-temperature nematic phase of ZhK-1289 were obtained, and the Landau-de Gennes model was validated. The results are important for designing thermally stable LC devices.

Keywords: dispersion, liquid crystals, order parameter, refractive index anisotropy

Acknowledgments. This work was supported by the grant from the Federal State University of Education in 2025, awarded to the winning research project in the competitive grant program.

For citation:

Chekulaev, I. S., Simushkina, S. V., Kovalev, Yu. V., Kuleshova, Yu. D., Krukov, A. I., Chigrinov, V. G. & Kurilov, A. D. (2025). Dispersion of the anisotropy of the refractive index of a liquid crystal in a low-temperature nematic phase. In: *Bulletin of the Federal State University of Education. Series: Physics and Mathematics*, 3, pp. 76–89. <https://doi.org/10.18384/2949-5067-2025-3-76-89>

Введение

Жидкие кристаллы (ЖК) занимают уникальное положение среди мягких конденсированных сред, обладая способностью к самоорганизации в упорядоченные мезофазы с характерными нано- и микроструктурами [1–4]. Ключевой особенностью этих фаз, особенно нематической, является высокая чувствительность их оптических и диэлектрических свойств к внешним воздействиям (электрическому, магнитному полям, температуре, механическому напряжению). Эта особенность обусловила их доминирующую роль в качестве активных элементов современных оптоэлектронных устройств [5–7]. Широкий спектр применений варьируется от базовых компонентов, таких как жидкокристаллические затворы и дисплеи [8], до сложных адаптивных

систем, включая перестраиваемые градиентные линзы [9–11] и фазовые пластинки, работающие в видимом, инфракрасном (ИК) и терагерцовом (ТГц) диапазонах длин волн [12–15].

Точное прогнозирование рабочих характеристик ЖК-устройств критически зависит от глубокого понимания температурной зависимости их фундаментальных параметров, прежде всего анизотропии показателя преломления и связанного с ней параметра ориентационного порядка. Однако, несмотря на значительный объём исследований ЖК-материалов, их оптические свойства, в частности дисперсия $\Delta n(\lambda)$ и поведение параметра порядка, систематически изучены преимущественно вблизи перехода нематик-изотропная жидкость (N-Iso) и при комнатных температурах. Низкотемпературная область нематической фазы, особенно вблизи перехода кристалл-нематик (Cr-N), остаётся значительно менее исследованной. Этот пробел в знаниях ограничивает возможности разработки ЖК-устройств, стабильно функционирующих в экстремальных условиях, таких как космические аппараты, криогенные системы или оборудование для арктических регионов, где температура может опускаться значительно ниже 0°C .

Таким образом, целью настоящей работы является комплексное экспериментальное исследование оптических свойств широко используемой нематической смеси ЖК-1289 в расширенном диапазоне температур, охватывающем как стандартные условия, так и низкотемпературную область (от -60°C до $+60^\circ\text{C}$).

Научная новизна работы заключается в получении детальных данных по дисперсии $\Delta n(\lambda, T)$ и параметру порядка $S(T)$ для смеси ЖК-1289 в ранее малоизученной низкотемпературной области нематической фазы и в прямой экспериментальной проверке пределов применимости модели Ландау-де Жена в этих условиях. Практическая значимость полученных результатов связана с обеспечением надёжной фундаментальной базы данных ($\Delta n(\lambda, T)$, $S(T)$), необходимой для точного расчёта и проектирования термостабильных ЖК-устройств, таких как широкополосные компенсационные пластинки или линзы с автоматической температурной коррекцией, предназначенных для работы в широком диапазоне условий, включая экстремально низкие температуры.

Материалы и методы

В качестве объекта исследования выбрана коммерческая нематическая жидкокристаллическая смесь ЖК-1289 (производство НИОПИК, Россия), обладающая широким диапазоном существования нематической мезофазы (237–337 К) [16; 17]. Структурные формулы компонентов представлены на рис. 1. Данный состав обеспечивает высокую оптическую анизотропию и стабильность в широком температурном диапазоне.

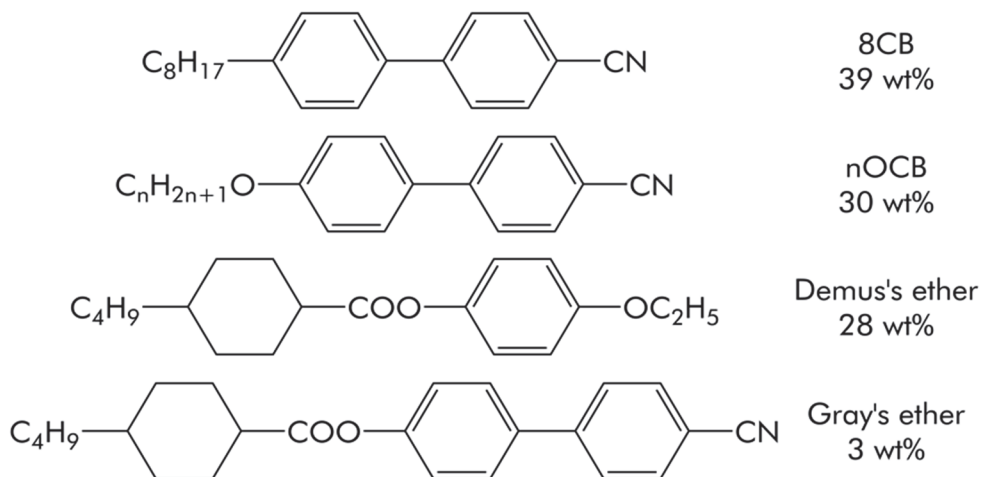


Рис. 1 / Fig. 1. Структурная формула компонентов нематической смеси ЖК-1289 /
Structural formula of the components of the nematic mixture LC-1289

Источник: составлено авторами

Жидкокристаллическая смесь заполнялась в планарную ячейку толщиной 55 мкм с помощью капиллярного эффекта в изотропной фазе ($T > 65^{\circ}\text{C}$). Ячейка представляет собой две стеклянные подложки с напыленными прозрачными электродами из ИТО, поверх которых нанесён полиамидный ориентант. Планарная ориентация достигается за счёт механической натирки полиамидных слоёв (антипараллельная натирка). Толщина зазора задаётся фторопластовыми спейсерами известной толщины и контролируется интерферометрически.

Экспериментальная часть работы проводилась на автоматизированном спектрополяриметрическом комплексе собственной разработки². Установка включала галогеновую лампу с коллиматором в качестве широкополосного источника излучения (спектральный диапазон 420–780 нм). Образец помещался в термостатируемый держатель с PID-регуляцией температуры (контроллер TCM-X107), обеспечивающий диапазон от -65°C до $+100^{\circ}\text{C}$ с точностью стабилизации $\pm 0,05^{\circ}\text{C}$ и скоростью изменения температуры $0,1^{\circ}\text{C}/\text{мин}$. Регистрация спектров пропускания осуществлялась с помощью волоконного спектрометра Avantes AvaSpec-2048 (спектральный диапазон 200–1100 нм, оптическое разрешение 0,3 нм). Управление установкой и сбор данных производились с использованием специализированного программного обеспечения, написанного на Python.

² Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 202368839. Российская Федерация. Программа для автоматического измерения и расчёта электрооптических параметров жидкокристаллических материалов. № 2023687917; заявлено 15.12.2023; опубликовано 21.12.2023 / Парашук Н. С., Чекулаев И. С., Курилов А. Д., Чаусов Д. Н., Беляев В. В., Усачев В. В., правообладатель Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Государственный университет просвещения» (RU).

Методика измерений основывалась на анализе интерференционной картины в спектрах пропускания жидкокристаллической ячейки [18; 19]. В начале фиксировались базовые спектры: интенсивность источника $I_0(\lambda)$ и спектр пропускания пустой ячейки $I_i(\lambda)$. Далее регистрировались спектры пропускания в конфигурации «поляризатор перпендикулярен анализатору, директор под 45° », позволяющей напрямую определять анизотропию показателя преломления Δn по положению интерференционных максимумов. Для расчёта Δn использовалось соотношение

$$\Delta n = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{d(\lambda_2 - \lambda_1)}. \quad (1)$$

где λ_1 и λ_2 – длины волн соседних интерференционных максимумов, d – толщина ячейки.

Учёт дисперсионных эффектов производился с помощью итерационного алгоритма. Сначала порядок интерференции P определялся в длинноволновой области спектра ($\lambda > 700$ нм), где дисперсия Δn пренебрежимо мала. Затем анизотропия показателя преломления $\Delta n(\lambda)$ рассчитывалась для всего спектрального диапазона по формуле:

$$\Delta n = \frac{P_m \lambda_m}{d}, \quad (2)$$

где $P_m = P + m$, m – целочисленный порядок интерференции, λ_m – длина волны соответствующего порядка интерференции. Полученные дисперсионные кривые аппроксимировались трёхчленным уравнением Коши

$$\Delta n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4}. \quad (3)$$

где A, B, C – числовые параметры.

Протокол измерений включал следующие шаги. После установки заданной температуры образец выдерживался в течение 15 минут для достижения термического равновесия. Для каждой температуры регистрировалось 100 последовательных спектров пропускания с экспозицией 10 мс. Полученные спектры усреднялись, после чего к ним применялась цифровая фильтрация для подавления шумов. Положения интерференционных максимумов определялись с помощью автоматического алгоритма пикового анализа. На основании этих данных рассчитывались значения Δn для каждой температуры. Измерения проводились с шагом 1°C в диапазоне от -60°C до $+60^\circ\text{C}$.

Параметр ориентационного порядка S рассчитывался на основе полученных экспериментальных данных $\Delta n(T)$ по эмпирической формуле

$$\Delta n = \Delta n_0 S = \Delta n_0 \left(1 - \frac{T}{T_{N-Iso}} \right)^\beta. \quad (4)$$

Величина Δn_0 представляет собой экстраполированное значение анизотропии показателя преломления при $T \rightarrow 0$ К. Температура фазового перехода нематик-изотропная жидкость T_{N-Iso} определялась независимо методом

дифференциальной сканирующей калориметрии по скачку теплоёмкости. Критический показатель β , полученный из экспериментальной зависимости $S(T)$, сравнивался с теоретическим значением 0,25, предсказываемым моделью Ландау-де Жена.

Результаты и обсуждение

Экспериментально полученные спектры пропускания жидкокристаллической ячейки демонстрируют характерную картину многолучевой интерференции. На рис. 2а представлен типичный спектр при температуре -35°C , где отчётливо наблюдаются периодические максимумы и минимумы. Смещение интерференционных полос в сторону больших длин волн при уменьшении порядка интерференции соответствует ожидаемому поведению. Более информативен контурный график (рис. 2и 2b), отображающий эволюцию спектров в диапазоне от -40°C до $+60^{\circ}\text{C}$. Здесь явно прослеживается систематическое смещение интерференционной картины с изменением температуры, обусловленное температурной зависимостью анизотропии показателя преломления Δn . Важным дополнением является резкое снижение пропускания при температурах ниже -40°C и выше $+60^{\circ}\text{C}$. Это связано с фазовыми переходами: при $T < -40^{\circ}\text{C}$ происходит кристаллизация смеси (переход $N \rightarrow \text{Cr}$), приводящая к сильному рассеянию света на границах кристаллитов, а при $T > +60^{\circ}\text{C}$ – переход в изотропную фазу ($N \rightarrow \text{Iso}$), сопровождающийся потерей дальнего ориентационного порядка и, как следствие, исчезновением анизотропии и самой интерференционной картины.

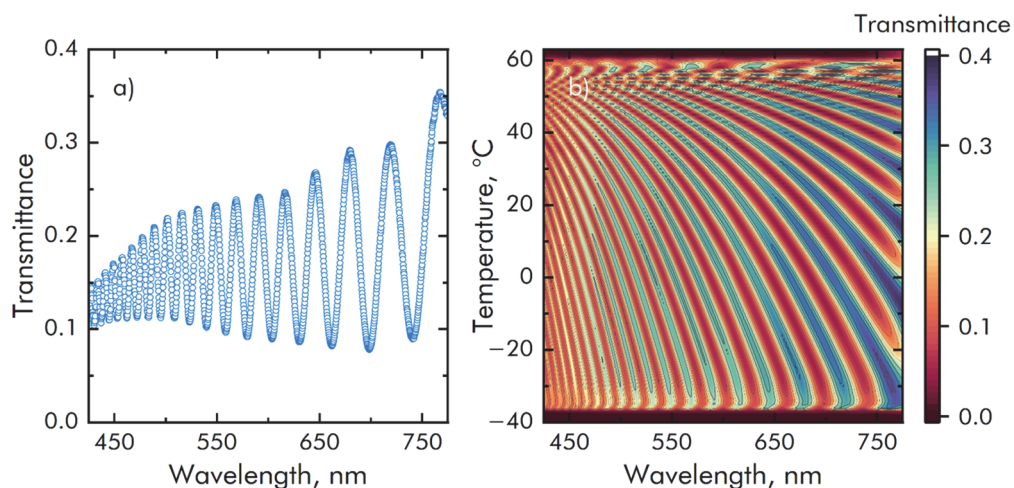


Рис. 2 / Fig. 2. Спектр ЖК ячейки при $T = -35^{\circ}\text{C}$ (a); Контурный график спектров ЖК ячейки при $T = -40..60^{\circ}\text{C}$ (b) / Spectrum of the LC cell at $T = -35^{\circ}\text{C}$ (a); Contour plot of the spectra of the LC cell at $T = -40..60^{\circ}\text{C}$ (b)

Источник: по данным авторов

На основе анализа интерференционных спектров были построены дисперсионные зависимости анизотропии показателя преломления $\Delta n(\lambda)$ для различных температур (рис. 3а). Во всём исследованном спектральном диапазоне (420–780 нм) наблюдается нормальная дисперсия: величина Δn монотонно уменьшается с увеличением длины волны света. Это поведение ожидаемо и обусловлено уменьшением вклада электронных переходов в поляризуемость молекул в длинноволновой области. Экспериментальные данные с высокой точностью аппроксимируются трёхчленным уравнением Коши $\Delta n(\lambda) = A + B/\lambda^2 + C/\lambda^4$ (сплошные линии на рис. 3а). Значения коэффициентов A , B , C закономерно изменяются с температурой, отражая уменьшение общей величины анизотропии. Например, при длине волны 450 нм Δn составляет $\sim 0,26$ при -35°C и падает до $\sim 0,10$ при $+60^\circ\text{C}$. Трёхмерное представление данных на контурном графике (рис. 3б) наглядно демонстрирует двойную зависимость $\Delta n(\lambda, T)$: анизотропия монотонно снижается как с ростом длины волны, так и с увеличением температуры. Последнее является прямым следствием уменьшения ориентационного порядка молекул при нагреве. Особенно важно, что полученные данные надёжно охватывают низкотемпературную область (до -40°C), где Δn достигает максимальных значений.

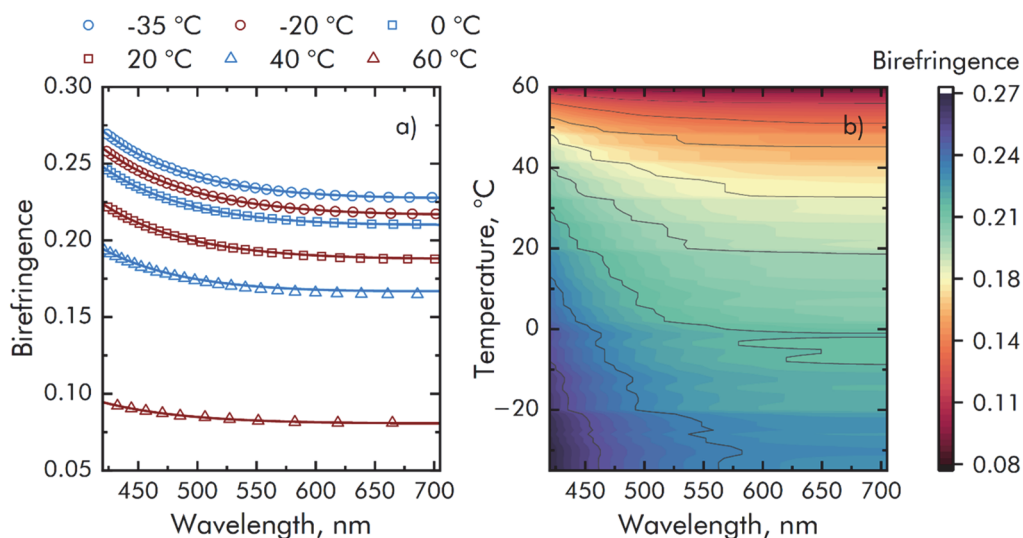


Рис. 3. / Fig. 3. Дисперсия двулучепреломления ЖК-1289 при разных температурах (а); Контурный график дисперсии двулучепреломления ЖК-1289 при $T = -40..60^\circ\text{C}$ (б) / Birefringence dispersion of LC-1289 at different temperatures (a); Contour plot of birefringence dispersion of LC-1289 at $T = -40..60^\circ\text{C}$

Источник: по данным авторов

Ключевым результатом работы является исследование поведения параметра ориентационного порядка S во всём диапазоне существования нематической фазы, включая низкотемпературную область. На рис. 4а представлены зависимости $\Delta n(T)$ при фиксированных длинах волн (450, 500, 600, 700 нм). Кривая имеет характерный вид: Δn плавно уменьшается с ростом температуры, демонстрируя резкий спад вблизи температуры фазового перехода в изотропную фазу. Используя соотношение (4), была рассчитана температурная зависимость параметра порядка (рис. 4б). При температуре фазового перехода S достигает максимального значения $\sim 0,75$, что свидетельствует о высокой степени упорядоченности системы. По мере роста температуры S монотонно уменьшается, достигая значения $\sim 0,26$ в непосредственной близости к T_{N-Iso} .

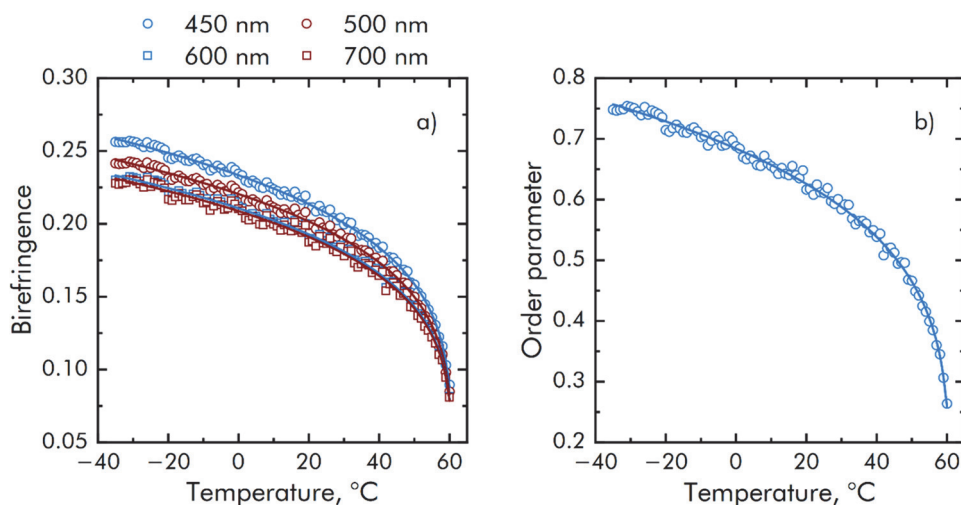


Рис. 4 / Fig. 4. Температурные зависимости анизотропии показателя преломления Δn (a) и параметра порядка S (b) ЖК-1289 / Temperature dependences of the refractive index anisotropy Δn (a) and the order parameter S (b) of LCD-1289

Источник: по данным авторов

Важным аспектом обсуждения является проверка применимости модели Ландау-де Жена, предсказывающей степенную зависимость $S(T)$ с критическим показателем $\beta \approx 0,25$. Наша работа экспериментально исследует эту зависимость для смеси ЖК-1289 вплоть до границы с кристаллической фазой. Аппроксимация экспериментальных данных $S(T)$ степенной функцией (голубая линия на рис. 4б) дала значение $\beta = 0,23 \pm 0,01$. Это значение очень близко к теоретическому предсказанию $\beta = 0,25$. Несмотря на незначительное отклонение β , полученные результаты убедительно подтверждают, что модель Ландау-де Жена адекватно описывает температурное поведение параметра порядка нематической фазы смеси

ЖК-1289 не только вблизи перехода N-Iso, но и в глубокой низкотемпературной области, вплоть до T_{Cr-N} .

Полученные значения Δn и S для смеси ЖК-1289 согласуются с известными данными для аналогичных широкотемпературных нематиков [19]. Наблюдаемая нормальная дисперсия $\Delta n(\lambda)$ и её температурная зависимость соответствуют общим закономерностям для цианобифенильных смесей. Главная новизна работы заключается в получении количественных данных по $\Delta n(\lambda, T)$ и $S(T)$ в ранее малоизученной низкотемпературной области. Эти данные имеют непосредственное практическое значение для разработки термостабильных жидкокристаллических устройств.

Заключение

Проведённое исследование заполнило существенный пробел в понимании оптических свойств нематических жидких кристаллов в низкотемпературной области. Впервые для смеси ЖК-1289 экспериментально установлены комплексные термооптические зависимости, охватывающие весь диапазон существования мезофазы, включая критические области вблизи переходов кристалл-нематик и нематик-изотропная жидкость.

Важным вкладом работы является экспериментальное обоснование применимости фундаментальной модели Ландау-де Жена для описания параметра порядка в экстремальных условиях. Наблюдаемое соответствие экспериментального критического показателя ($\beta \approx 0.23$) теоретическому предсказанию ($\beta \approx 0.25$) подтверждает устойчивость степенных законов ориентационного упорядочения даже вблизи границы кристаллизации, несмотря на сложный состав смеси.

С практической точки зрения, полученные точные функциональные зависимости $\Delta n(\lambda, T)$ и $S(T)$ формируют основу для инженерных расчётов. Они позволяют перейти от эмпирического проектирования к прецизионному моделированию термокомпенсирующих элементов, где поддержание стабильного набега фазы критически зависит от учёта температурных вариаций анизотропии. Особую ценность данные представляют для разработки устройств, работающих в нестабильных или экстремальных условиях – от арктических сенсоров до космической оптики.

Перспективным направлением, выявленным в ходе работы, является изучение неравновесной динамики в низкотемпературной нематической фазе. Установленные статические свойства создают базис для исследования кинетики переключения, релаксационных процессов и влияния наноструктурирования на термооптическую стабильность в широком диапазоне условий эксплуатации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Transport of ions and electrons in nanostructured liquid crystals / T. Kato, M. Yoshio, T. Ichikawa, B. Soberats, H. Ohno, M. Funahashi // Nature Reviews Materials. 2017. Vol. 2. Iss. 4. Article no. 17001. DOI: 10.1038/natrevmats.2017.1.

2. Li Q. *Functional Organic and Hybrid Nanostructured Materials: Fabrication, Properties, and Applications*. New York: John Wiley & Sons, 2018. 632 p.
3. Tunable structure and dynamics of active liquid crystals / N. Kumar, R. Zhang, J. J. De Pablo, M. L. Gardel // *Science Advances*. 2018. Vol. 4. Iss. 10. Article: eaat7779. DOI: 10.1126/sciadv.aat7779.
4. Blinov L. M., Chigrinov V. G. *Electrooptic effects in Liquid Crystal Materials*. New York: Springer-Verlag, 1994. 459 p.
5. Synthesis and Optoelectronic Properties of Perylene Diimide-Based Liquid Crystals / S. Qiao, R. Liao, M. Xie, X. Song, A. Zhang, Y. Fang, C. Zhang, H. Yu // *Molecules*. 2025. Vol. 30. Iss. 4. Article no. 799. DOI: 10.3390/molecules30040799.
6. Core-Only Calamitic Liquid Crystals: Molecular Design and Optoelectronic Properties / J. G. Rothera, J. Yu, K. AlNajm, R. Butrus, E. Ahangari-Bashash, L. K. Watanabe, J. M. Rawson, A. Dmitrienko, V. N. Vukotic, S. H. Eichhorn // *Chemistry – An Asian Journal*. 2025. Vol. 20. Iss. 8. Article no. e202401543. DOI: 10.1002/asia.202401543.
7. Metallocycle-cored luminescent ionic liquid crystals with trigonal symmetry / L. Chen, Y. Cao, H. Huo, S. Lu, Y. Hou, T. Tan, X. Li, F. Liu, M. Zhang // *Chemical Science*. 2025. Vol. 16. Iss. 12. P. 4992–4997. DOI: 10.1039/D4SC07318E.
8. Köysal O., Gleeson H. F., Kocakulah G. A double-layer light shutter consisting of polymer dispersed liquid crystal and azo dye/quantum dot // *Optical Materials*. 2024. Vol. 154. Article no. 115645. DOI: 10.1016/j.optmat.2024.115645.
9. Chromatic aberration compensation using thin, transparent, large aperture, wide focal range, adaptive liquid crystal lens / J. Pereiro-García, M. Caño-García, O. Blanco-Fernández, R. Ramos-Uña, X. Quintana, M. A. Geday // *Optics & Laser Technology*. 2025. Vol. 180. Article no. 111532. DOI: 10.1016/j.optlastec.2024.111532.
10. Modin A., Leheny R. L., Serra F. Spatial Photo-Patterning of Nematic Liquid Crystal Pretilt and its Application in Fabricating Flat Gradient-Index Lenses // *Advanced Materials*. 2024. Vol. 36. Iss. 23. Article no. 2310083. DOI: 10.1002/adma.202310083.
11. Lin Y. H., Wang Y. J., Reshetnyak V. Liquid crystal lenses with tunable focal length // *Liquid Crystals Reviews*. 2017. Vol. 5. Iss. 2. P. 111–143. DOI: 10.1080/21680396.2018.1440256.
12. Voltage-controlled liquid-crystal terahertz phase shifter and quarter-wave plate / C.-F. Hsieh, R.-P. Pan, T.-T. Tang, H.-L. Chen, C.-L. Pan // *Optics letters*. 2006. Vol. 31. Iss. 8. P. 1112–1114. DOI: 10.1364/OL31.001112.
13. Optimal design of quarter-wave plate with wideband and wide viewing angle for three-dimensional liquid crystal display / W. Seok Kang, B.-J. Mun, G.-D. Lee, J. Ho Lee, B. Koo Kim, H. Chul Choi, Y. Jin Lim, S. Hee Lee // *Journal of Applied Physics*. 2012. Vol. 111. Iss. 10. Article no. 103119. DOI: 10.1063/1.4723819.
14. Lavrentovich M. D., Sergan T. A., Kelly J. R. Switchable broadband achromatic half-wave plate with nematic liquid crystals // *Optics letters*. 2004. Vol. 29. Iss. 12. P. 1411–1413. DOI: 10.1364/OL29.001411.

15. Optically switchable and axially symmetric half-wave plate based on photoaligned liquid crystal films / C.-C. Lin, T.-C. Huang, C.-C. Chu, V. K. S. Hsiao // *Optical Materials*. 2016. Vol. 57. P. 23–27. DOI: 10.1016/j.optmat.2016.04.006.
16. Electro-optical performance of nematic liquid crystals doped with gold nanoparticles / D. N. Chausov, A. D. Kurilov, R. N. Kucherov, A. V. Simakin, S. V. Gudkov // *Journal of Physics: Condensed Matter*. 2020. Vol. 32. No. 39. Article no. 395102. DOI: 10.1088/1361-648X/ab966c.
17. Concentration-dependent dielectric and electro-optical properties of composites based on nematic liquid crystals and CdS: Mn quantum dots / A. D. Kurilov, D. N. Chausov, V. V. Osipova, D. O. Sagdeev, I. S. Chekulaev, R. N. Kucherov, V. V. Belyaev, Y. G. Galyametdinov // *Soft Matter*. 2023. Vol. 19. Iss. 11. P. 2110–2119. DOI: 10.1039/D2SM01352E.
18. Interference method for determining dispersion of refractive indices of liquid crystals / E. Miszczyk, Z. Raszewski, J. Kędzierski, E. Nowinowski-Kruszelnicki, M. A. Kojdecki, P. Perkowski, W. Piecek, M. Olifierczuk // *Molecular Crystals and Liquid Crystals*. 2011. Vol. 544. Iss. 1. Article no. 22/[1010]-36/[1024]. DOI: 10.1080/15421406.2011.569262.
19. A direct assessment of refractive indices of nematic liquid crystals at broad VIS – MWIR range / E. Miszczyk, P. Morawiak, R. Mazur, M. Mrukiewicz, M. Olifierczuk, W. Piecek, Z. Raszewski, P. Kula, J. Kędzierski, J. Zieliński, P. Harmata // *Liquid Crystals*. 2018. Vol. 45. Iss. 5. P. 703–714. DOI: 10.1080/02678292.2017.1376125.

REFERENCES

1. Kato, T., Yoshio, M., Ichikawa, T., Soberats, B., Ohno, H. & Funahashi, M. (2017). Transport of ions and electrons in nanostructured liquid crystals. In: *Nature Reviews Materials*, 2 (4), 17001. DOI: 10.1038/natrevmats.2017.1
2. Li, Q. (2018). *Functional Organic and Hybrid Nanostructured Materials: Fabrication, Properties, and Applications*. New York: John Wiley & Sons.
3. Kumar, N., Zhang, R., De Pablo, J. J. & Gardel, M. L. (2018). Tunable structure and dynamics of active liquid crystals. In: *Science Advances*, 4 (10), eaat7779. DOI: 10.1126/sciadv.aat7779.
4. Blinov, L. M. & Chigrinov, V. G. (1994). *Electrooptic effects in Liquid Crystal Materials*. New York: Springer-Verlag.
5. Qiao, S., Liao, R., Xie, M., Song, X., Zhang, A., Fang, Y., Zhang, C. & Yu, H. (2025). Synthesis and Optoelectronic Properties of Perylene Diimide-Based Liquid Crystals. In: *Molecules*, 30 (4), 799. DOI: 10.3390/molecules30040799.
6. Rothera, J. G., Yu, J., AlNajm, K., Butrus, R., Ahangari-Bashash, E., Watanabe, L. K., Rawson, J. M., Dmitrienko, A., Vukotic, V. N. & Eichhorn, S. H. (2025). Core-Only Calamitic Liquid Crystals: Molecular Design and Optoelectronic Properties. In: *Chemistry – An Asian Journal*, 20 (8), e202401543. DOI: 10.1002/asia.202401543.
7. Chen, L., Cao, Y., Huo, H., Lu, S., Hou, Y., Tan, T., Li, X., Liu, F. & Zhang, M. (2025). Metallacycle-cored luminescent ionic liquid crystals with trigonal symmetry. In: *Chemical Science*, 16 (12), 4992–4997. DOI: 10.1039/D4SC07318E.

8. Köysal, O., Gleeson, H. F. & Kocakulah, G. (2024). A double-layer light shutter consisting of polymer dispersed liquid crystal and azo dye/quantum dot. In: *Optical Materials*, 154, 115645. DOI: 10.1016/j.optmat.2024.115645.
9. Pereiro-García, J., Caño-García, M., Blanco-Fernández, O., Ramos-Uña, R., Quintana, X. & Geday, M. A. (2025). Chromatic aberration compensation using thin, transparent, large aperture, wide focal range, adaptive liquid crystal lens. In: *Optics & Laser Technology*, 180, 111532. DOI: 10.1016/j.optlastec.2024.111532.
10. Modin, A., Leheny, R. L. & Serra, F. (2024). Spatial Photo-Patterning of Nematic Liquid Crystal Pretilt and its Application in Fabricating Flat Gradient-Index Lenses. In: *Advanced Materials*, 36 (23), 2310083. DOI: 10.1002/adma.202310083.
11. Lin, Y. H., Wang, Y. J. & Reshetnyak, V. (2017). Liquid crystal lenses with tunable focal length. In: *Liquid Crystals Reviews*, 5 (2), 111–143. DOI: 10.1080/21680396.2018.1440256.
12. Hsieh, C.-F., Pan, R.-P., Tang, T.-T., Chen, H.-L. & Pan, C.-L. (2006). Voltage-controlled liquid-crystal terahertz phase shifter and quarter-wave plate. In: *Optics letters*, 31 (8), 1112–1114. DOI: 10.1364/OL.31.001112.
13. Seok Kang, W., Mun, B.-J., Lee, G.-D., Ho Lee, J., Koo Kim, B., Chul Choi, H., Jin Lim, Y. & Hee Lee, S. (2012). Optimal design of quarter-wave plate with wideband and wide viewing angle for three-dimensional liquid crystal display. In: *Journal of Applied Physics*, 111 (10), 103119. DOI: 10.1063/1.4723819.
14. Lavrentovich, M. D., Sergan, T. A. & Kelly, J. R. (2004). Switchable broadband achromatic half-wave plate with nematic liquid crystals. In: *Optics letters*, 29 (12), 1411–1413. DOI: 10.1364/OL.29.001411.
15. Lin, C.-C., Huang, T.-C., Chu, C.-C. & Hsiao, V. K. S. (2016). Optically switchable and axially symmetric half-wave plate based on photoaligned liquid crystal films. In: *Optical Materials*, 57, 23–27. DOI: 10.1016/j.optmat.2016.04.006.
16. Chausov, D. N., Kurilov, A. D., Kucherov, R. N., Simakin, A. V. & Gudkov, S. V. (2020). Electro-optical performance of nematic liquid crystals doped with gold nanoparticles. In: *Journal of Physics: Condensed Matter*, 32 (39), 395102. DOI: 10.1088/1361-648X/ab966c.
17. Kurilov, A. D., Chausov, D. N., Osipova, V. V., Sagdeev, D. O., Chekulaev, I. S., Kucherov, R. N., Belyaev, V. V. & Galyametdinov, Y. G. (2023). Concentration-dependent dielectric and electro-optical properties of composites based on nematic liquid crystals and CdS: Mn quantum dots. In: *Soft Matter*, 19 (11), 2110–2119. DOI: 10.1039/D2SM01352E.
18. Miszczyk, E., Raszewski, Z., Kędzierski, J., Nowinowski-Kruszelnicki, E., Kojdecki, M. A., Perkowski, P., Piecek, W. & Olifierczuk, M. Interference method for determining dispersion of refractive indices of liquid crystals. In: *Molecular Crystals and Liquid Crystals*, 2011, 544 (1), 22/[1010]-36/[1024]. DOI: 10.1080/15421406.2011.569262.
19. Miszczyk, E., Morawiak, P., Mazur, R., Mrukiewicz, M., Olifierczuk, M., Piecek, W., Raszewski, Z., Kula, P., Kędzierski, J., Zieliński, J. & Harmata, P. (2018). A direct assessment of refractive indices of nematic liquid crystals at broad VIS-MWIR range. In: *Liquid Crystals*, 45 (5), 703–714. DOI: 10.1080/02678292.2017.1376125.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Чекулаев Игорь Сергеевич (г. Москва) – младший научный сотрудник учебно-научной лаборатории теоретической и прикладной нанотехнологии Государственного университета просвещения;
<https://orcid.org/0000-0002-6636-5876>; e-mail: chekulaev.i.s@yandex.ru

Симушкина Софья Владимировна (г. Москва) – студент физико-математического факультета Государственного университета просвещения;
e-mail: simushkinasofa@gmail.com

Ковалев Юрий Владимирович (г. Москва) – студент физико-математического факультета Государственного университета просвещения;
e-mail: lavur.40@gmail.com

Кулешова Юлия Дмитриевна (г. Жуковский, Московская обл.) – кандидат физико-математических наук, декан физико-математического факультета Государственного университета просвещения;
<https://orcid.org/0000-0001-8556-9340>; e-mail: juliaybogdanova@mail.ru

Крюков Алексей Игоревич (г. Москва) – директор педагогического технопарка «Кванториум» им. И. В. Курчатова Государственного университета просвещения;
e-mail: krykovai@gmail.com

Чигринов Владимир Григорьевич (г. Москва) – доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник учебно-научной лаборатории теоретической и прикладной нанотехнологии Государственного университета просвещения;
<https://orcid.org/0000-0003-0593-2555>; e-mail: eechigr@ust.hk

Курилов Александр Дмитриевич (г. Москва) – кандидат физико-математических наук, заведующий учебно-научной лабораторией теоретической и прикладной нанотехнологии Государственного университета просвещения;
<https://orcid.org/0000-0001-8915-2411>; e-mail: ad.kurilov@guppros.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Igor S. Chekulaev (Moscow) – Research Assistant, Laboratory of Theoretical and Applied Nanotechnology, Federal State University of Education;
<https://orcid.org/0000-0002-6636-5876>; e-mail: chekulaev.i.s@yandex.ru

Sofia V. Simushkina (Moscow) – Student, Faculty of Physics and Mathematics, Federal State University of Education;
e-mail: simushkinasofa@gmail.com

Yuriy V. Kovalev (Moscow) – Student, Faculty of Physics and Mathematics, Federal State University of Education;
e-mail: lavur.40@gmail.com

Yulia D. Kuleshova (Zhukovsky, Moscow region) – Cand. Sci. (Phys.-Math.), Dean, Faculty of Physics and Mathematics, Federal State University of Education;
<https://orcid.org/0000-0001-8556-9340>; e-mail: juliyabogdanova@mail.ru

Aleksey I. Kryukov (Moscow) – Head, Pedagogical Technopark “Quantorium” named after I. V. Kurchatov, Federal State University of Education;
e-mail: krykovai@gmail.com

Vladimir G. Chigrinov (Moscow) – Dr. Sci. (Phys.-Math.), Senior Researcher, Laboratory of Theoretical and Applied Nanotechnology, Federal State University of Education;
<https://orcid.org/0000-0003-0593-2555>; e-mail: eechigr@ust.hk

Aleksandr D. Kurilov (Moscow) – Cand. Sci. (Phys.-Math.), Laboratory Head, Laboratory of Theoretical and Applied Nanotechnology, Federal State University of Education;
<https://orcid.org/0000-0001-8915-2411>; e-mail: ad.kurilov@guppros.ru



ВЕСТНИК
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА ПРОСВЕЩЕНИЯ

СЕРИЯ: ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА
2025. № 3

Над номером работали:
Ответственный редактор И. А. Потапова
Литературный редактор М. С. Тарасова
Корректор М. С. Тарасова
Компьютерная вёрстка – Д. А. Сёмина

Адрес редакции:
105005, г. Москва, ул. Радио, д. 10А, стр. 2, офис 98
тел. (495) 780-09-42 доб. 6101
e-mail: sj@guppros.ru
Сайт: www.physmathmgou.ru

Формат 70x108/16. Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура "Minion Pro".
Тираж 500 экз. Усл. п. л. 5,75, уч.-изд. л. 5,25.
Подписано в печать: 30.10.2025 г. Дата выхода в свет: 05.11.2025 г. Заказ № 2025/10-07.
Отпечатано в Государственном университете просвещения
105005, г. Москва, ул. Радио, д. 10А, стр. 2