



ISSN 2949-5083 (print)
ISSN 2949-5067 (online)

ПРО
СВЕТ

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ
ПРОСВЕЩЕНИЯ

Вестник

ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА
ПРОСВЕЩЕНИЯ

Серия

*Физика-
Математика*

ОПТИМИЗАЦИЯ РЕЛЬЕФА ПОВЕРХНОСТИ
ДЛЯ ПРИДАНИЯ ЕЙ СУПЕРГИДРОФОБНЫХ
СВОЙСТВ

ОЦЕНКА ВОЗМОЖНОСТИ
ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ПРОВЕРКИ
КВАНТОВОГО ЭФФЕКТА ЗЕНОНА
С ПОМОЩЬЮ СКАНИРУЮЩЕГО
ЗОНДОВОГО МИКРОСКОПА



2024/№ 4

ВЕСТНИК
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА ПРОСВЕЩЕНИЯ

ISSN 2949-5083 (print)

2024 / № 4

ISSN 2949-5067 (online)

серия

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА

Рецензируемый научный журнал. Основан в 1998 г.

Журнал «Вестник Государственного университета просвещения. Серия: Физика-математика» включён в «Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание учёной степени кандидата наук, на соискание учёной степени доктора наук» Высшей аттестационной комиссии при Министерстве науки и высшего образования Российской Федерации (См.: Список журналов на сайте ВАК при Минобрнауки России) по следующим научным специальностям: 1.3.3. – Теоретическая физика (физико-математические науки); 1.3.8. – Физика конденсированного состояния (физико-математические науки).

The peer-reviewed journal was founded in 1998

«Bulletin of Federal State University of Education. Series: Physics and Mathematics» is included by the Supreme Certifying Commission of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation into “the List of reviewed academic journals and periodicals recommended for publishing in corresponding series basic research thesis results for a Ph.D. Candidate or Doctorate Degree” (See: the online List of journals at the site of the Supreme Certifying Commission of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation) on the following scientific specialties: 1.3.3. – Theoretical physics (physical-mathematical sciences); 1.3.8. – Physics of the condensed state (physical-mathematical sciences) (See: the online List of journals at the site of the Supreme Certifying Commission of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation).

ISSN 2949-5083 (print)

2024 / № 4

ISSN 2949-5067 (online)

series

PHYSICS AND MATHEMATICS

BULLETIN
OF FEDERAL STATE UNIVERSITY
OF EDUCATION

Учредитель журнала

«Вестник Государственного университета просвещения. Серия: Физика-математика»

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

Государственный университет просвещения

Выходит 4 раза в год

Редакционная коллегия

Главный редактор:

Бугаев А. С. – д. ф.-м. н., академик РАН, Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)

Заместитель главного редактора:

Кузнецов М. М. – д. ф.-м. н., проф., Государственный университет просвещения

Ответственный секретарь:

Чукаловская Е. М. – Государственный университет просвещения

Члены редакционной коллегии:

Беляев В. В. – д. т. н., проф., Государственный университет просвещения;

Боголюбов Н. Н. – д. ф.-м. н., проф., Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова;

Бугримов А. Л. – д. т. н., проф., Российский государственный университет имени А.Н. Косыгина (Технологии. Дизайн. Искусство);

Гладков С. О. – д. ф.-м. н., проф., Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет);

Емельяненко А. В. – д. ф.-м. н., проф., Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова;

Жачкин В. А. – д. ф.-м. н., проф., Государственный университет просвещения;

Калашников Е. В. – д. ф.-м. н., проф., Государственный университет просвещения;

Осипов М. А. – д. ф.-м. н., проф., Университет Стратклайд (Великобритания);

Рыбаков Ю. П. – д. ф.-м. н., проф., Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы;

Чаругин В. М. – д. ф.-м. н., проф., Московский педагогический государственный университет;

Чигринов В. Г. – д. ф.-м. н., проф., Гонконгский университет науки и технологий (Китай)

ISSN 2949-5083 (print)

ISSN 2949-5067 (online)

Рецензируемый научный журнал «Вестник Государственного университета просвещения. Серия: Физика-математика» публикует статьи по математическим проблемам термодинамики, кинетики и статистической физики; теории конденсированного состояния классических и квантовых, макроскопических и микроскопических систем; изучению различных состояний вещества и физических явлений в них; статистической физике и кинетической теории равновесных и неравновесных систем; теоретическому и экспериментальному исследованию физических свойств неупорядоченных неорганических систем; изучению экспериментального состояния конденсированных веществ и фазовых переходов в них. Журнал адресован ученым, докторантам, аспирантам и всем, интересующимся достижениями физико-математических наук.

Журнал «Вестник Государственного университета просвещения. Серия «Физика-математика» зарегистрирован в Федеральной службе по надзору за соблюдением законодательства в сфере массовых коммуникаций и охране культурного наследия. Регистрационное свидетельство ПИ № ФС 77-73344.

Индекс серии «Физика-математика» по Объединенному каталогу «Пресса России» 40723

Журнал включён в базу данных Российского индекса научного цитирования (РИНЦ), имеет полнотекстовую сетевую версию в интернете на платформе Научной электронной библиотеки (www.elibrary.ru), с августа 2017 г. на платформе Научной электронной библиотеки «КиберЛенинка» (www.cyberleninka.ru), а также на сайте журнала «Вестник Государственного университета просвещения. Серия: Физика-математика» (www.physmathmgou.ru).

При цитировании ссылка на конкретную серию «Вестника Государственного университета просвещения» обязательна. Публикация материалов осуществляется в соответствии с лицензией Creative Commons Attribution 4.0 (CC-BY).

Ответственность за содержание статей несут авторы. Мнение автора может не совпадать с точкой зрения редколлегии серии. Рукописи не возвращаются.

Вестник Государственного университета просвещения. Серия: Физика-математика. – 2024. – № 4. – 86 с.

© Государственный университет просвещения, 2024.

Адрес редакции:

г. Москва, ул. Радио, д.10А, стр. 2, офис 98

тел.: (495) 780-09-42 (доб. 6101)

e-mail: sj@guppros.ru; сайт: www.physmathmgou.ru.

Founder of journal
«Bulletin of Federal State University of Education. Series: Physics and Mathematics»
Federal State University of Education

———— Issued 4 times a year ————

Editorial board

Editor-in-chief:

A. S. Bugaev — Dr. Sci. (Physics and Mathematics),
Academician of Russian Academy of Science, Moscow Insti-
tute of Physics and Technology

Deputy editor-in-chief:

M. M. Kuznetsov — Dr. Sci. (Physics and Mathematics),
Professor, Federal State University of Education

Executive secretary:

E. M. Chukalovskaya — Federal State University of Education

Members of Editorial Board:

V. V. Belyaev — Dr. Sci. (Engineering), Professor, Federal
State University of Education;

N. N. Bogolyubov — Dr. Sci. (Physics and Mathematics),
Professor, Lomonosov Moscow State University;

A. L. Bugrimov — Dr. Sci. (Engineering), Professor, The Ko-
sygin State University of Russia;

S. O. Gladkov — Dr. Sci. (Physics and Mathematics),
Professor, Moscow Aviation Institute (National Research
University);

A. V. Emelyanenko — Dr. Sci. (Physics and Mathematics),,
Professor, Lomonosov Moscow State University;

V. A. Zhachkin — Dr. Sci. (Physics and Mathematics),,
Professor, Federal State University of Education;

E. V. Kalashnikov — Dr. Sci. (Physics and Mathematics),
Federal State University of Education;

M. A. Osipov — Dr. Sci. (Physics and Mathematics),, Profes-
sor, University of Strathclyde (Glasgow, UK);

Yu. P. Rybakov — Dr. Sci. (Physics and Mathematics),
Professor, People's Friendship University of Russia named
after Patrice Lumumba;

V. M. Charugin — Dr. Sci. (Physics and Mathematics),
Professor, Moscow State Pedagogical University;

V. G. Chigrinov — Dr. Sci. (Physics and Mathematics),
Professor, Hong Kong University of Science and Technology
(China)

ISSN 2949-5083 (print)

ISSN 2949-5067 (online)

The reviewed scientific journal “Bulletin of Federal State University of Education. Series: Physics and Mathematics” publishes articles on mathematical problems of thermodynamics, kinetics and statistical physics; the theory of the condensed state of classical and quantum, macroscopic and microscopic systems; the study of various states of substance and physical phenomena in them; statistical physics and the kinetic theory of equilibrium and non-equilibrium systems; theoretical and experimental research of physical features of disordered inorganic systems; the study of the experimental state of condensed substances and phase transitions in them. The journal is addressed to scientists, doctoral students, PhD students and everyone interested in the achievements of physical and mathematical sciences.

The series “Physics and Mathematics” of the Bulletin of Federal State University of Education is registered in Federal service on supervision of legislation observance in sphere of mass communications and cultural heritage protection. The registration certificate ПИ № 0С 77 – 73344.

Index series «Physics and Mathematics» according to the union catalog «Press of Russia» 40723

The journal is included into the database of the Russian Science Citation Index, and its full texts are available through scientific electronic libraries “eLibrary” (www.elibrary.ru) and “CyberLeninka” (since August 2017; www.cyberleninka.ru), as well as on the site of “Bulletin of Federal State University of Education. Series: Physics and Mathematics” (www.physmathmgou.ru).

At citing the reference to a particular series of «Bulletin of State University of Education» is obligatory. Scientific publication of materials is carried out in accordance with the license of Creative Commons Attribution 4.0 (CC-BY).

The authors bear all responsibility for the content of their papers. The opinion of the Editorial Board of the series does not necessarily coincide with that of the author Manuscripts are not returned.

Bulletin of Federal State University of Education. Series: Physics and Mathematics. — 2024. — № 4. — 86 p.

© Federal State University of Education, 2024.

The Editorial Board address:

ulitsa Radio 10A build.2, office 98, Moscow, Russia

Phone: (495) 780-09-42 (add. 6101)

e-mail: sj@guppros.ru; site: www.physmathmgou.ru.

СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКА

- Амелюшкин И. А., Кудров М. А., Кулешов П. С.** Оптимизация рельефа поверхности для придания ей супергидрофобных свойств 6
- Бозиев О. Л.** Априорные оценки интегральной нагрузки гиперболического уравнения Кирхгофа 26
- Камалов Т. Ф., Евдокимов Н. В., Камалов Ю. Т.** Оценка возможности экспериментальной проверки квантового эффекта Зенона с помощью сканирующего зондового микроскопа 37
- Кухаренко Н. И.** О метрике гравитационного поля точечной массы для неподвижных наблюдателей 43
- Никоненко К. Л.** О некоторых возможных следствиях соотношений планковских величин 54

CONTENTS

PHYSICS

A. Amelyushkin, M. Kudrov , P. Kuleshov. Optimization of the surface relief to give it superhydrophobic properties6

O. Boziev. A priori estimates of the integral load of the hyperbolic Kirchhoff equation 26

T. Kamalov, N. Evdokimov, Yu. Kamalov. Experimental test of the quantum Zeno effect using an scanning probe microscope. 37

N. Kukhareenko. On the metric of the gravitational field of a point mass for stationary observers 43

K. Nikonenko. On some conclusions from the relations of Planck quantities..... 54

Научная статья

УДК 620.22

DOI: 10.18384/2949-5067-2024-4-6-25

ОПТИМИЗАЦИЯ РЕЛЬЕФА ПОВЕРХНОСТИ ДЛЯ ПРИДАНИЯ ЕЙ СУПЕРГИДРОФОБНЫХ СВОЙСТВ

Амелюшкин И. А. *, Кудров М. А., Кулешов П. С.

Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), 141701, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., д. 9, Российская Федерация

**Корреспондирующий автор, e-mail: Amelyushkin_Ivan@mail.ru*

Поступила в редакцию 28.08.2024

После доработки 12.09.2024

Принята к публикации 16.09.2024

Аннотация

Цель. Моделирование свойств гидрофобных и льдофобных покрытий.

Процедура и методы. Применявшиеся методы основаны на использовании известных общепринятых законов механики, электродинамики и термодинамики. Уравнения решались численно с помощью собственных программ ЭВМ, графики построены с помощью известных программ построения графиков.

Результаты. Сформулированы условия супергидрофобности. Проведены аналитические исследования особенностей нанесения рельефа на поверхность металла с помощью лазерной абляции. Предложен способ управления пространственным периодом рельефа путём изменения параметров лазерной системы. На основе опубликованных экспериментальных данных по лазерной абляции показана возможность удовлетворения условиям супергидрофобности модифицированных поверхностей из алюминия, титана и стали.

Теоретическая и практическая значимость заключается в развитии методов моделирования гидрофобных и льдофобных свойств, а также в моделировании и оптимизации процессов их создания. Использование таких покрытий позволяет существенно снизить интенсивность обледенения летательных аппаратов, снизить сопротивление тел в жидкости, а также сопротивление летательных аппаратов в условиях обильных осадков.

Ключевые слова: лазерная абляция, пространственный период, рельеф, супергидрофобность

Для цитирования:

Амелюшкин И. А., Кудров М. А., Кулешов П. С. Оптимизация рельефа поверхности для придания ей супергидрофобных свойств // Вестник Государственного университета просвещения. Серия: Физика-математика. 2024. № 4. С. 6-25. <https://doi.org/10.18384/2949-5067-2024-4-6-25>

Original research article

OPTIMIZATION OF THE SURFACE RELIEF TO GIVE IT SUPERHYDROPHOBIC PROPERTIES

I. Amelyushkin, M. Kudrov, P. Kuleshov*

Moscow Institute of Physics and Technology, Institutskiy pereulok 9, Dolgoprudny 141701, Moscow region, Russian Federation

**Corresponding author, e-mail: Amelyushkin_Ivan@mail.ru,*

Received by the editorial office 28.08.2024

Revised by the author 12.09.2024

Accepted for publication 16.09.2024

Abstract

Aim. Modeling the properties of hydrophobic and ice-repellent coatings.

Methodology. The methods used are based on the use of known generally accepted laws of mechanics, electrodynamics and thermodynamics. The equations were solved numerically using proprietary computer programs, and the graphs were constructed using known graph plotting programs.

Results. The conditions for superhydrophobicity were formulated. Analytical studies of the features of applying relief to a metal surface using laser ablation were conducted. A method for controlling the spatial period of relief by changing the parameters of the laser system was proposed. Based on published experimental data on laser ablation, the possibility of satisfying the conditions of superhydrophobicity of modified aluminum, titanium and steel surfaces was shown.

Research implications lies in development of methods for modeling hydrophobic and ice-phobic properties, as well as in modeling and optimizing the processes of their creation. The use of such coatings allows for a significant reduction in the intensity of icing of aircraft, the drag of bodies in liquid, and the drag of aircraft in conditions of heavy precipitation.

Keywords. laser ablation, spatial period, relief, superhydrophobicity.

For citation.

Amelyushkin, I. A., Kudrov, M. A. & Kuleshov, P. S. (2024). Optimization of the surface relief to give it superhydrophobic properties. In: *Bulletin of the Federal State University of Education. Series: Physics and Mathematics*, 4, pp. 6-25. <https://doi.org/10.18384/2949-5067-2024-4-6-25>

Введение

Проблеме обледенения и борьбы с ним (особенно в авиации) посвящено множество научных статей [1–6] и обзоров [7], как с теоретической [1; 2; 3; 7],

так и практической [4–6] точек зрения². В данной работе рассматривается пассивный метод борьбы с обледенением путём нанесения на защищаемую поверхность субмикронного рельефа для придания ей свойств супергидрофобности и льдофобности [1–3; 6; 7]. Несмотря на привлекательность данного метода, в нём существуют свои сложности. Гидрофобные покрытия эффективно работают в условиях приблизительного баланса между силами инерции и силами поверхностного натяжения жидкости на масштабах пространственного рельефа обтекаемого тела [2]. Однако при превышении критического значения поверхностной плотности кинетической энергии переохлаждённой капли возникает отрицательный эффект, связанный с проникновением и застыванием переохлаждённой жидкости в углубления рельефа. Другими словами, при контактном взаимодействии переохлаждённой капли с рельефной поверхностью, если превышена критическая скорость удара, возможна деформация капли и затекание отдельных её элементов в углубления рельефа с последующим их замерзанием. Поэтому, в общем случае, для выявления условий возникновения данного отрицательного эффекта необходимо исследовать трёхмерную трёхфазную нестационарную динамику деформируемой дробящейся и отвердевающей капли, взаимодействующей с рельефной поверхностью твёрдого тела [1].

В [1; 2], исходя из баланса сил поверхностного натяжения и сил инерции, сформулировано необходимое условие отсутствия проникновения капли в углубления рельефа. В настоящей работе выводится аналогичное необходимое условие из механизма фрагментации капли, изложенного в [8; 9]. Кроме того, описывается технология нанесения нанорельефа с помощью лазерной абляции [10; 11] и кратко излагается механизм его формирования [12], аналогичный механизму фрагментации.

В механизмах фрагментации капель и формирования нанорельефа используются аналитические формулы для частот колебаний сферических упругих и жидких объектов из [13; 14], а необходимые для описания фрагментации капель значения их скоростей вблизи поверхности обтекаемого тела рассчитывались численно в авторской программе, изложенной в [15; 16].

В процессе оптимизации метода нанесения гидрофобного нанорельефа на поверхность обтекаемого тела при лазерной абляции использовались типичные параметры лазерного излучения из работ [10–12; 17–19].

Механизмы фрагментации капель и образования нанорельефа тестировались на результатах соответствующих экспериментов [10; 11; 17; 20; 21].

Вывод необходимого критерия супергидрофобности

Пусть радиус исходной круглой переохлаждённой капли гораздо крупнее пространственного периода рельефа: $R \gg \lambda$. Рассмотрим касательное

² Также см.: Патент № 2605401 С2 Российская Федерация, МПК В23К 26/364, В82В 3/00, Н01L 21/268. Способ придания супергидрофобных свойств поверхности металла: № 2014146427/02: заявл. 19.11.2014: опубл. 20.12.2016 / Л. Б. Бойнович, А. М. Емельяненко; заявитель ИФХЭ РАН. 9 с.

движение капли со скоростью v_τ поперёк гребней рельефа. Рельефное тело будет взаимодействовать с каплей периодической силой электромагнитной природы (силы поверхностного натяжения и т. д.) с временным периодом $T = \lambda / v_\tau$. Эта вынуждающая сила будет вызывать волны деформации, распространяющиеся в капле со скоростью звука c , максимальное усиление которых происходит при совпадении их частоты (частоты вынуждающей силы $1/T$) с частотой первой гармоники ($k=1$) собственных акустических колебаний капли. Для капли как для одномерного резонатора оценим частоту акустических колебаний:

$$\sim kc / 2R \quad (1).$$

Более точно для изотропного упругого шара в [14] аналитически найден период основной гармоники звуковых колебаний $T = 0.816 \cdot (2R / c)$. Итак, условие резонанса:

$$v_\tau / \lambda \approx kc / 2R \quad (2).$$

В результате такого взаимодействия с рельефной поверхностью капля может начать разваливаться на отдельные фрагменты радиуса r .

С другой стороны, в случае резонансного процесса (в чём убеждают узкие распределения фрагментов по размерам [18]) эта же частота будет и у капиллярных колебаний формы жидких сферических фрагментов радиуса r , которая известна для основного тона колебаний из [13]: $[2\sigma / (\rho \pi^2 r^3)]^{1/2}$, где σ, ρ – коэффициент поверхностного натяжения и плотность жидкости. При этом, согласно [8; 9], через равенство акустической и капиллярной частот можно связать радиус фрагмента и радиус исходной капли:

$$r \approx \left[(R / kc)^2 (\sigma / \rho) \right]^{1/3}. \quad (3)$$

Ранее формула (3) была протестирована в [8] на результатах экспериментов [20] по диспергации оксидированных наночастиц алюминия быстрым нагревом, когда наночастицы переходили в жидкое состояние. По фотографиям, выполненным на электронном микроскопе, были определены размеры исходных наночастиц и их фрагментов ($2R = 60\text{--}96$ нм и $2r = 3\text{--}20$ нм). Подстановка теплофизических данных расплава алюминия (см. табл. 1) и радиуса исходной частицы в формулу (3) при $k=1$ дало значение радиуса фрагмента, близкое к экспериментальному ($R = 50$ нм и $r = 4$ нм). Кроме того, по формуле (3) при $k=1$ можно сделать оценки размеров фрагментов дробления водяного микровыступа с диаметром основания $2R=10$ мкм из [21], формируемого при конденсации пара на срезе капилляра в присутствии высокопотенциального электрода. Оценки дают микронный размер аэрозоля, что подтверждается косвенными измерениями [21].

Проникновение жидкости в углубления рельефа затрудняется при условии, что размеры фрагментов капли после её дробления оказываются меньше пространственного периода рельефа:

$$2r > \lambda \quad (4).$$

Тут предполагалось, что фрагменты дробления являются недеформируемыми твёрдыми шарами. В самом деле, внутреннее лапласово давление жидкости во фрагментах по сравнению с каплей значительно возрастает из-за сильного уменьшения их радиуса – $r \ll R$. Кроме того, если капля была переохлаждённая, то при её распаде во фрагментах дробления могла начать распространяться волна кристаллизации, и они могли успеть застыть ещё до взаимодействия с рельефом (при этом r меняется слабо).

При типичных условиях обледенения (при радиусе капель 20 мкм и скорости потока 100 м/с) значение числа Вебера капли равно $We=55$. Для фрагментов оно оказывается меньше во столько же раз, во сколько раз меньше размеры самих фрагментов по отношению к размерам исходной капли, т. е. на порядки. Другими словами, если поверхность капли при ударе была неустойчива, то её фрагменты становились устойчивыми и сохраняли свою форму. Также известно, что при ударе о твёрдую поверхность капли начинают дробиться при больших значениях чисел Вебера нежели в потоке газа (где критическое значение $We \sim 10$). Причём это справедливо во всём диапазоне чисел Рейнольдса и капиллярности, соответствующих широкому кругу практических задач.

Из (3, 4) с учётом (2) получаем:

$$\lambda < \frac{2\sigma}{\rho v_r^2} \quad (5).$$

Данное выражение хорошо согласуется с формулой из [1; 2], но в отличие от неё в (5) учитывается касательная составляющая скорости капли, а не нормальная.

Численная оценка периода гидрофобного нанорельефа для капель воды, летящих со скоростью $v_r = 100$ м/с, из (5) оказывается нереалистично малой – $\lambda < 15$ нм.

В (5) пространственный период не зависит в явном виде от радиуса исходной капли. В [1; 2] для учёта влияния R вводится число Стокса (Stk), позволяющее отличить скорость капли вблизи обтекаемой поверхности от скорости потока. Тем не менее для типичных в авиационных приложениях значений радиусов капли воды ~ 20 мкм и затупления носка обтекаемой поверхности ~ 0.1 м оценки [1; 2] дают $Stk \gg 1$, т. е. различия между скоростью невозмущённого потока $v_\infty \sim 100$ м/с и скоростью удара капли v (а также касательной скоростью v_r) несущественны, и влияние радиуса капли на период мало, с чем нельзя согласиться.

В [1; 2] для критерия проникновения вещества капли внутрь нанорельефа использовалось сравнение скоростного напора воды и лапласова давления фрагментов капли, диаметр которых равен периоду рельефа. Однако давление скоростного напора необходимо пересчитывать с учётом коэффициента заполнения выступами рельефа площади сечения взаимодействия капли с поверхностью, тогда скоростной напор будет зависеть от формы и скважности рельефа, что не учитывается [1; 2]. Кроме того, поверхность рельефа считалась полностью несмачиваемой, т. е. предполагалось, что фрагменты жидкости формируются в виде полусфер (краевой угол – 180°), не контактирующих с

углублениями рельефа нигде, кроме как по их диаметру. Это может быть обеспечено нанесением, например, гидрофобизатора по технологии, описанной в Патенте № 2605401³.

При трансформации капли радиуса 20 мкм на фрагменты диаметром 15 нм её свободная поверхность возрастает настолько сильно, что увеличение поверхностной энергии оказывается больше кинетической энергии капли, а это невозможно.

Скорее всего, капля при первом же взаимодействии с рельефом распадётся на фрагменты, но такое однократное воздействие не может задать частоту капиллярных колебаний по формуле (2). Поэтому выведем критерий гидрофобности из (1, 3) без учёта (2):

$$\lambda < 2 \left[(R/kc)^2 (\sigma/\rho) \right]^{1/3} \quad (6).$$

По формуле (1) при больших скоростях капли в ней может возбуждаться не первая гармоника акустических колебаний, а k -ая. При этом фрагменты уменьшаются в размерах согласно (3). Выбор номера возбуждаемой гармоники возможен при использовании другой формулы для радиуса фрагмента дробления, полученного в [8; 9; 12] из закона сохранения энергии при условии $r \ll R$:

$$r = 6^{1/2} \sigma V / W \quad (7),$$

где $V = 4\pi R^3 / 3$ – трансформируемый объём, $W = \eta \rho V v^2 / 2$ – энергозатраты на прирост поверхностной энергии при распаде объёма V на фрагменты радиуса r , $\eta < 1$ – коэффициент преобразования кинетической энергии капли в поверхностную энергию фрагментов при её трансформации. Приравнявая (3) и (7), оценим номер возбуждаемой гармоники как

$$k = \left(2\sqrt{6} \right)^{-3/2} \cdot R \rho \eta^{3/2} v^3 / (c\sigma). \quad (8)$$

Для $k=1$ и указанных выше параметров получим из (8) $\eta \sim 15\%$ – коэффициент преобразования кинетической энергии капли воды $R = 20$ мкм при её диспергации на $\sim 6 \cdot 10^5$ фрагментов радиуса $r = 235$ нм.

В этом примере возможны и другие варианты распада с наборами значений (k, r, η) : $(k=2, 147 \text{ нм}, 24\%)$; $(k=3, 118 \text{ нм}, 31\%)$; ... и так вплоть до $(k = 17, 35 \text{ нм}, 100\%)$. Тогда из (6) $\lambda_{\min} < 70$ нм при $k_{\max}=17$ или $\lambda_{\max} < 470$ нм при $k_{\min}=1$. Оценка (6) даёт более крупный период нанорельефа нежели (5), и в ней присутствует в явном виде зависимость от радиуса исходной капли и в неявном виде – от её скорости (через номер k по формуле (8)). Критерий гидрофобности (6) можно переписать, подставив в него номер гармоники (8), в зависимости от скорости удара и дискретной функции $\eta(v, R)$, определённой только для возбуждаемых гармоник k :

³ Патент № 2605401 С2 Российская Федерация, МПК В23К 26/364, В82В 3/00, Н01L 21/268. Способ придания супергидрофобных свойств поверхности металла: № 2014146427/02: заявл. 19.11.2014; опубл. 20.12.2016 / Л. Б. Бойнович, А. М. Емельяненко; заявитель ИФХЭ РАН. 9 с.

$$\lambda < \frac{2\sigma}{\rho v^2} \cdot \frac{24^{1/2}}{\eta} \quad (9).$$

Итак, если кинетическая энергия капли воды $R = 20$ мкм при скорости её удара ~ 100 м/с полностью расходуется на увеличение поверхностной энергии её фрагментов, то наиболее строгая оценка периода рельефа, когда льдообразование невозможно, $\lambda < 70$ нм. Если же на трансформацию капли при ударе расходуется только минимально возможная часть этой энергии (при возбуждении первой гармоники акустических колебаний в ней), то наиболее мягкая оценка, при которой возможно лишь слабое льдообразование, – $\lambda < 470$ нм.

В целом, для ансамбля капель $R=20$ мкм, взаимодействующих с нанорельефом на скорости ~ 100 м/с, возможно возбуждение с некоторой вероятностью всех гармоник $k \leq 17$ акустических колебаний, причём с наибольшей вероятностью при $k = 1$.

На рис. 1 показаны верхние границы допустимых значений периода льдофобного рельефа, исходя из наименее жёсткого критерия при $k=1$, рассчитанные по формулам (6, 9) в зависимости от радиуса капли воды (в пределах 1–100 мкм) и от её скорости (в пределах 50–150 м/с).

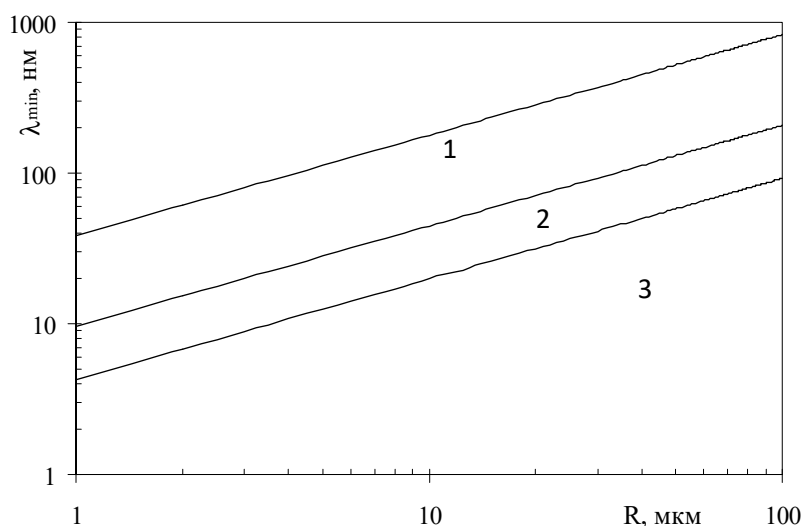


Рис. 1 / Fig. 1. Верхние границы допустимых значений периода рельефа λ (при $k=1$) в зависимости от радиуса капли R (линии 1, 2, 3 на графике расположены сверху-вниз, согласно убыванию скорости удара капли о поверхность 50, 100, 150 м/с, соответственно) / Upper limits of permissible values of the relief period λ (at $k=1$) depending on the radius of the drop R (lines 1, 2, 3 on the graph are located from top to bottom, according to the decrease in the speed of impact of the drop on the surface 50, 100, 150 m/s, respectively)

Источник: составлено авторами

На рис. 2а показана структура поля скоростей капель воды радиуса $R = 20$ мкм (полная скорость капли) вблизи поверхности обтекаемого цилиндрического тела с различными радиусами кривизны R_0 при фиксированной скорости набегающего потока $U_\infty = 100$ м/с, типичной для крейсерского полёта самолёта. Угловая координата θ задавалась между направлением, обратным скорости невозмущённого потока, и радиусом кривизны поверхности, проведённым в точку удара капли. Расчёт производился численно в авторской программе на языке программирования Си++. Обратным влиянием частиц на несущий их газовый поток пренебрегали из-за малости массовой и объёмной концентрации частиц в практических задачах моделирования обледенения. Поток предполагался несжимаемым в силу малости числа Маха. Ознакомиться с особенностями работы программы можно в работах [15; 16].

В расчётах была применена процедура пересчёта скорости потока в скорость капли вблизи поверхности обтекаемого тела с учётом числа Стокса, описанная в [1; 2]. Максимальная нормальная компонента скорости удара капли при обтекании тела с цилиндрической передней кромкой зависит от скорости потока согласно следующему выражению $V_{in}^{max} / V_\infty \cong \exp(-1/4Stk_\infty)$: здесь $Stk = \frac{2\rho_p V_\infty a_p^2}{9\mu R}$ – число Стокса, равное отношению характерного времени

релаксации скорости частиц в потоке τ_{rel} к характерному газодинамическому времени R/V_∞ . Также определяется температурный аналог числа Стокса, описывающий изменение температуры частиц двухфазного потока. Характерное время релаксации скорости частиц t_{rel} определяется из уравнения их движения относительно потока:
$$\frac{dV_p}{dt} = \frac{6\pi\mu_p(V - V_p)}{m_p} = \frac{9\mu(V - V_p)}{2\rho_p a_p^2} = \frac{V - V_p}{t_{rel}}.$$

На рис. 2б соответствующие верхние границы допустимых значений периода льдофобного рельефа приведены в зависимости от угловой координаты места точки удара капли (на поверхности обтекаемого цилиндра с радиусом $R_0 = 50, 100, 200$ мм). Для большого радиуса затупления $R_0 = 200$ мм верхняя граница допустимых значений периода рельефа сильно уменьшается ($\sim$ от 1 мкм до 150 нм) по мере роста угла θ положения точки удара (от 0 до 36°), а сам диапазон возможных углов сужается по сравнению со случаем обтекания тела с малым радиусом затупления (т.е. капли попадают из потока на поверхность обтекаемого тела всё ближе к его передней кромке по мере роста радиуса). Напротив, для малого радиуса затупления $R_0 = 50$ мм значение верхней границы периода рельефа почти не меняется (~ 100 нм), но диапазон возможных углов θ мест ударов капель расширяется (от 0 до 72°).

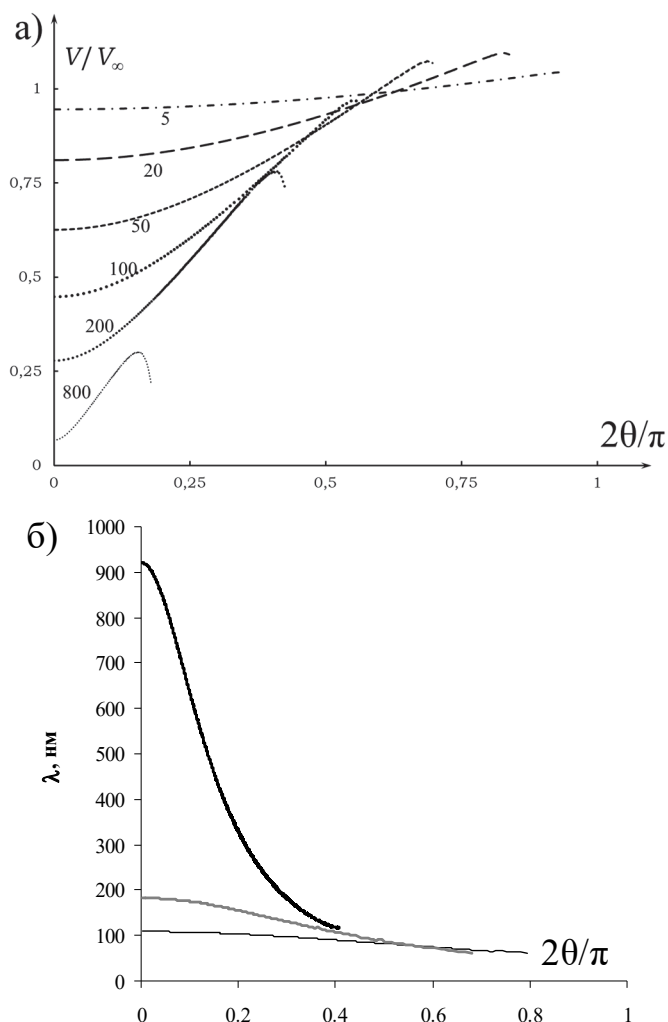


Рис. 2 / Fig. 2. а) Полные скорости, нормированные на невозмущённую скорость набегающего потока $v_\infty = 100$ м/с, в момент удара капли воды $R = 20$ мкм в зависимости от угловой координаты места удара капли θ при различных радиусах R_0 обтекаемого цилиндрического тела (снизу вверх: 800, 200, 100, 50, 20, 5 мм); б) Соответствующие верхние границы периода гидрофобного рельефа λ (для $k=1$), при радиусах R_0 обтекаемого тела: чёрная жирная линия – 200 мм, серая – 100 мм, чёрная тонкая – 50 мм / а) Total velocities normalized to the unperturbed velocity of the incident flow $v_\infty = 100$ m/s, at the moment of impact of a water droplet $R = 20$ mcm depending on the angular coordinate of the point of impact of the droplet θ at different radii R_0 of the streamlined cylindrical body (from bottom to top: 800, 200, 100, 50, 20, 5 mm); б) The corresponding upper boundaries of the period of the hydrophobic relief λ (for $k=1$), at radii R_0 of the streamlined body: black thick line – 200 mm, gray – 100 mm, black thin line – 50 mm

Источник: составлено авторами

Необходимо также отметить, что в работах [1–4] рассматривается гидрофобная поверхность со столбчатой структурой нанорельефа. Представляется, что нанесение такой структуры трудоёмко и не очень практично. Можно предложить в качестве разумной альтернативы довольно развитую технологию нанесения волнообразного нанорельефа методом лазерной абляции. Создаваемый при этом нанорельеф может быть как моно- [11; 17], так и бимодальным [10; 18; 19] (последний случай схематически показан на рис. 3). Под моно- и бимодальным рельефом понимается рельеф с одним или двумя сильно отличающимися значениями пространственных периодов, сформированных в ортогональных направлениях ($\lambda_L \gg \lambda_H$). Как указано в [12], период нанорельефа на мишени в жидкости зависит от параметров лазерных импульсов и материала мишени.

В [6] упоминается, что для изготовления неподвижных поверхностей, омываемых потоком воздуха с переохлаждёнными каплями воды (на которых есть риск намерзания льда), в мотогондоле газотурбинного авиадвигателя (на входе в компрессор) используют алюминиевые (Al), стальные или титановые (Ti) сплавы. Их и нужно считать подходящим материалом для нанесения рельефа в качестве защиты от намерзания. В табл. 2 приведены примеры экспериментально достигнутых значений нанорельефа при лазерной абляции.

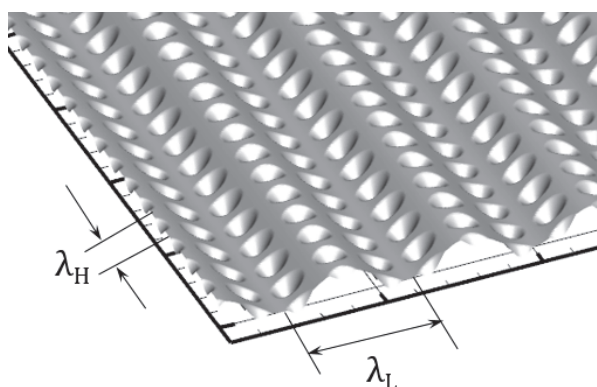


Рис. 3 / Fig. 3. Упрощённая схема формирования крупно- (λ_L) и мелкомасштабной (λ_H) периодической структуры бимодального рельефа на поверхности металлической мишени под действием повторяющихся лазерных импульсов / Simplified diagram of the formation of large- (λ_L) and small-scale (λ_H) periodic structure of bimodal relief on the surface of a metal target under the action of repeated laser pulses

Источник: составлено авторами

Описание экспериментов по созданию нанорельефа при лазерной абляции

В экспериментах [11] по созданию нанорельефа частота повторения лазерных импульсов, генерируемых на основной гармонике титан-сапфирового лазера с центральной длиной волны $\lambda_{em} = 790$ нм, равна $\nu = 10$ Гц, длительность импульса

$\tau = 130$ фс, скорость сканирования лазерного пучка по мишени $0,6$ мм/с, диаметр лазерного пятна на поверхности мишени $l \sim 2,2$ мм, а в качестве материала мишеней применялись никель (Ni) и железо (Fe). Толщина металлического слоя мишени Ni в [11] $h=15$ мкм, а для Fe – ещё больше. Мишень помещена в жидкость – изопропиловый спирт. Период рельефа, трактуемый как длина застывших капиллярных волн, образующихся на поверхности мишеней после воздействия лазера, равна $0,5\text{--}1$ мкм (Ni) и $1\text{--}1,5$ мкм (Fe).

В [17] описываются эксперименты по лазерной абляции подложек из стали и бронзы в воде. В качестве источника излучения использовали импульсно-периодический Nd:YAG-лазер, генерирующий третью гармонику ($\lambda_{em} = 355$ нм). Энергия в импульсе достигала 8 мДж при длительности $\tau = 10$ нс и частоте повторения $f = 100$ Гц. Обработку образцов проводили лазерным пучком диаметром $s \sim 200$ мкм при сканировании пучка по поверхности со скоростью перемещения по горизонтали ~ 1 мм/с. Из [17] известно, что для скорости сканирования стальной подложки $0,25$ мм/с поперечный масштаб образовавшегося нанорельефа на подложке в виде борозд и валов составляет $4\text{--}6$ мкм. Кроме того, по экспериментальным данным [17] при сканировании лазером с шагом $10\text{--}20$ мкм на CuCr-бронзовой поверхности появлялись застывшие капли металла диаметром $2R = 600$ нм (при поверхностной плотности энергии $0,85$ Дж/см²) на «ножках» высотой 1 мкм с характерным расстоянием между ножками капель $2\text{--}3$ мкм (последний масштаб может считать периодом рельефа).

Из [11; 17] видно, что мономодальный рельеф довольно крупный $\sim 0,5\text{--}6$ мкм и меняется не более чем на порядок, несмотря на варьирование длительности лазерного импульса в широких пределах от 10^{-13} до 10^{-8} с. Такой крупный период рельефа не подходит для создания гидрофобной поверхности на обтекаемых телах, рассматриваемых в наших расчётах (см. рис. 26). Более перспективным является использование периода мелкой структуры бимодального нанорельефа из [10; 18; 19], который создаётся при специально подобранной ориентации поляризации лазерного излучения.

Структура нанорельефа (см. рис. 3) с крупным продольным (λ_L) и мелким поперечным (λ_H) пространственным периодом создавалась в [10] воздействием на различные мишени сверхкороткими лазерными импульсами определённой поляризации с $\tau = 1\text{--}10^4$ фс и с поверхностной плотностью энергии $F \sim 1\text{--}10$ Дж/см² на разных длинах волн ($\lambda_{em} = 355, 532, 800, 1064$ нм). Такое лазерное воздействие создаёт на мишени в пределах освещаемого пятна диаметром $l \sim 100$ мкм поверхностные электромагнитные волны (ПЭВ), в пучностях которых возникает тонкий слой расплава толщиной $x < \lambda_H$. Так, в эксперименте [10] типичные значения $\lambda_H \sim 50$ нм, а глубина расплава $x = [a_{m2}\tau]^{1/2} \sim 10$ нм оценивается, как радиус диффузии теплового импульса τ , где a_{m2} – коэффициент температуропроводности твёрдого металла (см. табл. 1).

Из-за возникновения ПЭВ на мишени в зоне расплава формируются параллельные (продольные) волноводы крупномасштабной структуры с размерами $l \gg \lambda_L \gg x$. Исходя из механизма резонансной фрагментации жидкой фазы [8; 9; 12], будем считать, что многократно отражающаяся от границ расплава волна деформации (в виде гребня крупной структуры) задаёт вынуждающую силу с круговой частотой $\omega = \pi c / \lambda_L$ (гармоника $k=1$) и усиливает капиллярные волны на поверхности расплава. Их собственная частота известна из [13] $\omega^2 = \frac{\sigma}{\rho} \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^3 \operatorname{th} \left(\frac{2\pi}{\lambda} x \right)$. Из равенства акустической и капиллярной частот (в приближении $\lambda_H \gg x$) получим:

$$\lambda_H = \left(\sqrt{a_{m2}} \tau \cdot \sigma / \rho \right)^{1/4} \cdot (4\pi \lambda_L / kc)^{1/2} \quad (10)$$

Масштаб λ_H задаётся шириной гребня крупной структуры λ_L . Тут c , ρ , σ – скорость, плотность и коэффициент поверхностного натяжения расплава металла при температуре плавления. Причём, согласно экспериментам [10], $\lambda_L \sim \lambda_{em} / 2n_{em}$ (n_{em} – коэффициент преломления среды), т. е. λ_L можно трактовать как расстояние между пучностями стоячей поверхностной электромагнитной волны, возникающей при отражении ПЭВ от границ лазерного пятна.

Чтобы связать радиус образовавшегося сферического фрагмента r и длину капиллярной волны λ_H , приравняем квадраты частот основного тона колебаний жидкой капли [13] $\omega_{\min}^2 = 8\sigma / (\rho \cdot r^3)$ и капиллярных волн в мелкой жидкости

$$\omega^2 = \frac{\sigma x}{\rho} \left(\frac{2\pi}{\lambda_H} \right)^4. \text{ Тогда получим } r = \frac{\lambda_H}{\pi} \left(\frac{\lambda_H}{2\pi x} \right)^{1/3}.$$

Из предыдущего выражения с учётом формулы (7) и $x = [a_{m2} \tau]^{1/2}$ найдём зависимость периода рельефа от интенсивности и длительности лазерного импульса $\lambda_H \approx 7.3 \cdot \sigma^{3/4} \cdot a_{m2}^{1/2} \cdot I^{-3/4} \cdot \tau^{-1/4}$ (формула в СИ, 7,3 – безразмерный коэффициент). Видно, что уменьшать λ_H можно как за счёт увеличения интенсивности, так и за счёт увеличения длительности импульса. Однако увеличивать энергию импульса можно только ограниченно, чтобы не изменился режим абляции, иначе вместо волнообразного нанорельефа на поверхности мишени формируются кратеры, происходит срыв нанокпель или образование нанопены [18]. Из формулы (10) следует, что λ_H сильнее всего снижается при выборе материала мишени с наибольшей скоростью звука в его расплаве, т. к. $\lambda_H \sim c^{-1/2}$. Из рассмотренных «авиационных металлов» у Al-расплава самая большая скорость звука, что делает этот металл предпочтительным, см. табл. 1.

Таблица 1 / Table 1

Теплофизические данные жидких металлов вблизи температуры плавления /
Thermophysical data of liquid metals near the melting point

Материал	Плотность ρ , г/см ³	Коэфф. поверхностного натяжения σ , Дж/м ²	Скорость звука c , м/с	Температуропроводность жид. (тв.) металла $a_{m1,2}$, 10 ⁶ м ² /с
Al	2.4	0.9	4700	35 (68)
Ti	4.2	1.55	4407	11.6 (9.4)
н-ж. сталь	7.9	1.9	3800	7.18 (6.01)
Cu	8.6	1.35	3900	(81)
Ni	7.5	1.6	4000	(15.5)

Источник: Физические величины: справочник / под ред. И. С. Григорьева, Е. З. Мейлихова. М.: Энергоатомиздат, 1991. 1232 с.

Таблица 2 / Table 2

Сопоставление экспериментальных данных с расчётными /
Comparison of experimental data with calculated ones

Особенности исследований	Поперечный масштаб λ_H нанорельефа	Масштаб резонатора s или λ_L	Длина волны лазера λ_{et}	Длительность импульса τ
Эксперимент [11] (Ni)	0,5–1 мкм	Диаметр лазерного пятна 2,2 мм	790 нм	130 фс
Соотв. [11] расчёт (Ni) по формуле (11)	1,7 мкм ($k=1$) 1,0 мкм ($k=2$)			
Эксперимент [11] (Fe)	1-1,5 мкм	Диаметр лазерного пятна 2,2 мм	790 нм	130 фс
Соотв. [11] расчёт (сталь) по формуле (11)	1,4 мкм ($k=1$), 0,8 мкм ($k=2$)			
Эксперимент [17] (сталь)	4-6 мкм	Диаметр лазерного пятна 200 мкм	355 нм	10 нс
Соотв. [17] расчёт (сталь) по формуле (11)	3,1 мкм ($k=1$) 1,8 мкм ($k=2$)			

Окончание таблицы 2

Особенности исследований	Поперечный масштаб λ_H нанорельефа	Масштаб резонатора s или λ_L	Длина волны лазера $\lambda_{\text{лт}}$	Длительность импульса τ
Эксперимент [17] (CuCr-бронза)	2–3 мкм	Диаметр лазерного пятна 200 мкм	355 нм	10 нс
Соотв. [17] расчёт (Cu) по формуле (11)	4 мкм ($k=1$), 2,3 мкм ($k=2$)			
Эксперимент [10] (Al)	86-90 нм	Ширина гребня крупной структуры 650–580 нм	1064 нм	10 пс
Соотв. [10] расчёт (Al) по формуле (10)	71 нм ($k=1$)			
Эксперимент [10] (сталь)	90 нм	Ширина гребня крупной структуры 380 нм	532 нм	10 пс
Соотв. [10] расчёт (сталь) по формуле (10)	41 нм ($k=1$)			
Эксперимент [10] (Ti)	60-75 нм	Ширина гребня крупной структуры 220–280 нм	532 нм	10 пс
Соотв. [10] расчёт (Ti) по формуле (10)	39 нм ($k=1$)			

Для экспериментов [11; 17] можно получить аналогичную (10) формулу периода мономодального рельефа, где в качестве характерного размера жидкого резонатора рассматривается диаметр лазерного пятна на мишени s . Причём необходимо учитывать несимметричность граничных условий при отражении акустических волн от передней и задней границ пятна по отношению к направлению сканирования. В отличие от формулы (10), где при $k=1$ предполагается полуволновой резонанс, в [11; 12] при $k=1$ предполагается четвертьволновой резонанс:

$$\lambda_H \sim \left(\frac{\sigma}{\rho} \sqrt{a_m \tau} \right)^{1/4} \cdot \left(\frac{8\pi s}{(2k-1)c} \right)^{1/2}$$

(11)

Результаты расчётов по формулам (10, 11) с учётом теплофизических данных табл. 1 показаны в табл. 2 в сравнении с данными экспериментов из [10; 11; 17]. Наблюдается удовлетворительное совпадение аналитических и экспериментальных результатов.

На выбранном режиме обтекания для придания супергидрофобных свойств поверхностям тел с малым радиусом кривизны ($R_0 = 50$ мм – например, штанга приёмника воздушного давления (ПВД), антенна и т. п.) нанорельеф необходимо наносить практически по всей поверхности с одинаковым мелким периодом (см. рис. 2б, тонкая чёрная кривая). Для тел с большим радиусом кривизны ($R_0 = 200$ мм – передняя кромка крыла вблизи фюзеляжа, чёрная жирная кривая) нанорельеф необязательно наносить на всей поверхности (достаточно локально, вблизи передней точки). Причём в зоне попадания капель на поверхность обтекаемого тела (в зоне нанорельефа) не обязательно везде добиваться самого мелкого его периода (~ 117 нм), удовлетворяющего критерию (9). За счёт допустимого укрупнения периода рельефа (до ~ 1 мкм, по направлению к передней точке цилиндра, т. к. там падает скорость капель) энергоёмкость операции по его нанесению на поверхность может быть снижена согласно формуле $\lambda_H \approx 7.3 \cdot \sigma^{3/4} \cdot a_{m2}^{1/2} \cdot I^{-3/4} \cdot \tau^{-1/4}$. Этого можно достичь перестройкой интенсивности лазера (плавным снижением интенсивности излучения $I \sim$ на порядок во время сканирования лучом поверхности цилиндра в процессе её обработки). Оценим численно при $R_0 = 200$ мм по данным рис. 2б (чёрная жирная кривая), во сколько раз можно снизить энергоёмкость A нанесения рельефа при неизменном шаге сканирования, если плавно перестраивать интенсивность $I(t)$:

$$A_2 / A_1 = I_{\max} \cdot t_k / \int_0^{t_k} I(t) dt = I_{\max} \cdot \theta_k / \int_0^{\theta_k} I(\theta) d\theta = \lambda_{\min}^{-4/3} \cdot \theta_k / \int_0^{\theta_k} \lambda^{-4/3}(\theta) d\theta$$

в $2,57$ раза.

Заключение

Проведённый анализ показал, что необходимый критерий супергидрофобности и льдофобности рельефа поверхности (5), сформулированный в [1; 2] из условия превышения лапласовым давлением капли её скоростного напора, может быть получен из другого условия (2).

Однако этот критерий (в обеих формулировках) оказывается чрезмерно жёстким для известной технологии лазерной абляции ($\lambda < 15$ нм при радиусе капли $R = 20$ мкм и её скорости ~ 100 м/с). К тому же он не удовлетворяет необходимому энергетическому условию: кинетической энергии капли не хватит для увеличения её поверхностной энергии при такой фрагментации. Поэтому критерий был скорректирован в предположении, что капля при первом же взаимодействии с рельефом должна распасться на фрагменты. Таким образом, получаем модифицированный критерий гидрофобности нанорельефа (6) или (9).

При моделировании обтекания поперечного цилиндрического тела выяснилось, что зона попадания на его поверхность капель фиксированного радиуса 20 мкм сильно зависит от радиуса его кривизны: чем больше радиус, тем

сильнее сжимается эта зона вблизи линии растекания; и чем меньше радиус – тем шире данная зона. Для скорости невозмущённого потока 100 м/с в первом случае верхняя граница допустимого значения периода нанорельефа уменьшается на порядок от линии растекания ($\lambda \sim 1$ мкм) до верхней точки поверхности цилиндра ($\lambda \sim 150$ нм). Во втором случае почти не меняется и остаётся равной ~ 100 нм.

С точки зрения возможностей технологии лазерной абляции удалось показать реальность создания на практике гидрофобного и льдофобного нанорельефа с периодом $\lambda < 70$ нм, исходя из рассмотренного выше критерия (9). Так, сопоставимым периодом обладает мелкая структура бимодального рельефа, создаваемого на поверхности алюминия под тонким слоем жидкости при определённой ориентации поляризации лазерного излучения [10]. Для придания свойств супергидрофобности цилиндрической поверхности на данном режиме обтекания необходимо наносить на неё рельеф с периодом (10), который можно увеличивать по мере удаления от передней точки обтекания за счёт плавного уменьшения энергии лазерного импульса в пределах $\sim 1\text{--}10$ Дж/см². По расчётам для цилиндрических тел с радиусом затупления $R_0 = 200$ мм этим изменением периода можно достичь $\sim 60\%$ экономии лазерной энергии в процессе его нанесения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амелюшкин И. А., Миллер А. Б., Стасенко А. Л. Оценка периода шероховатости противообледенительных покрытий тела в потоке воздуха с переохлаждёнными каплями // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2021. № 1. С. 54–63. DOI: 10.18384/2310-7251-2021-1-54-63.
2. Модели процессов, сопровождающих кристаллизацию переохлажденных капель / И. А. Амелюшкин, М. А. Кудров, А. О. Морозов, А. Л. Стасенко, А. С. Щеглов // Труды Института системного программирования РАН. 2020. Т. 32. № 4. С. 235–244. DOI: 10.15514/ISPRAS-2020-32(4)-17.
3. Design of Ice-free Nanostructured Surfaces Based on Repulsion of Impacting Water Droplets / L. Mishchenko, B. Hatton, V. Bahadur, J. A. Taylor, T. Krupenkin, J. Aizenberg // ACS Nano. 2010. Vol. 4. Iss. 12. P. 7699–7707. DOI: 10.1021/nn102557p.
4. Каджардузов П. А., Эзрохи Ю. А. Влияние обледенения на характеристики двухконтурных ГТД в условиях ледяных кристаллов // Авиационные двигатели. 2019. № 1 (2). С. 75–81. DOI: 10.54349/26586061_2019_1_75.
5. Расчетно-аналитическое исследование в обеспечение подтверждения эффективности защиты авиационного двигателя от воздействий дождя и шквального града / А. В. Горячев, П. А. Горячев, В. Г. Жулин, С. А. Гребеньков // Авиационные двигатели. 2019. № 4 (5). С. 19–30. DOI: 10.54349/26586061_2019_4_19.
6. Экспериментальные и теоретические исследования процессов обледенения наномодифицированных супергидрофобных и обычных поверхностей / Э. С. Гринац, А. Б. Миллер, Ю. Ф. Потапов, А. Л. Стасенко // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2013. № 3. С. 84–92.

7. Особенности получения антиобледенительных покрытий (обзор) / Л. В. Соловьянчик, С. В. Кондрашов, В. С. Нагорная, А. А. Мельников // ТРУДЫ ВИАМ. 2018. № 6 (66). С. 77–98. DOI: 10.18577/2307-6046-2018-0-6-77-98.
8. Кулешов П. С. О диспергировании наночастиц алюминия // Горение и взрыв. 2019. Т. 12. № 3. С. 117–126. DOI: 10.30826/CE19120313.
9. Кулешов П. С., Кобцев В. Д. Распределение кластеров алюминия и их воспламенение в воздухе при диспергации наночастиц алюминия в ударной волне // Физика горения и взрыва. 2020. Т. 56. № 5. С. 80–90. DOI: 10.15372/FGV20200508.
10. Kirichenko N. A., Barmina E. V., Shafeev G. A. Theoretical and Experimental Investigation of the Formation of High Spatial Frequency Periodic Structures on Metal Surfaces Irradiated by Ultrashort Laser Pulses // Physics of Wave Phenomena. 2018. Vol. 26. No. 4. P. 264–273. DOI: 10.3103/S1541308X18040027.
11. Гидродинамическая неустойчивость и самоорганизация субмикронного рельефа поверхности металлов при фемтосекундном лазерном облучении в жидкости / А. А. Ионин, С. И. Кудряшов, А. О. Левченко, С. В. Макаров, И. Н. Сараева, А. А. Руденко, А. В. Буцень, В. С. Бураков // Письма в журнал экспериментальной и теоретической физики. 2017. Т. 106. № 3-4. С. 247–251. DOI: 10.7868/S0370274X17160123.
12. Кулешов П. С., Кузнецов А. М., Кулешова Ю. Д. Диспергация металлических нанопленок при лазерном сканировании // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2022. № 1. С. 41–51. DOI: 10.18384/2310-7251-2022-1-41-51.
13. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика; 3-е изд., перераб. М.: Наука, 1986. 738 с.
14. Новацкий В. Теория упругости: монография. М.: Мир, 1975. 872 с.
15. Амелюшкин И. А., Стасенко А. Л. Взаимодействие потока газа, несущего несферические микрочастицы, с поперечным цилиндром // Инженерно-физический журнал. 2018. Т. 91. № 2. С. 307–318.
16. Амелюшкин И. А., Стасенко А. Л. Моделирование взаимодействия кристаллов льда с поверхностью летательного аппарата: область орошения и коэффициенты восстановления скорости // Инженерно-физический журнал. 2020. Т. 93. № 3. С. 597–605.
17. Миколуцкий С. И., Хомич Ю. В. Влияние лазерного УФ-излучения наносекундной длительности на структуру и адгезионные свойства металлов и сплавов // Физика металлов и металловедение. 2021. Т. 122. № 2. С. 159–165. DOI: 10.31857/S001532302102008X.
18. Effect of fs/ps laser pulsewidth on ablation of metals and silicon in air and liquids, and on their nanoparticle yields / I. N. Saraeva, S. I. Kudryashov, A. A. Rudenko, M. I. Zhilnikova, D. S. Ivanov, D. A. Zayarny, A. V. Simakin, A. A. Ionin, M. E. Garcia // Applied Surface Science. 2019. Vol. 470. P. 1018–1034. DOI: 10.1016/j.apsusc.2018.11.199.
19. Structural-phase state of near-surface layers of VT6 titanium alloy after femtosecond laser treatment / M. V. Zhidkov, N. A. Smirnov, J. Chen, S. I. Kudryashov, M. N. Yapryntsev // Letters on Materials. 2020. No. 10 (3). P. 243–248. DOI: 10.22226/2410-3535-2020-3-243-248.
20. Ohkura Y., Rao P. M., Zheng X. Flash ignition of Al nanoparticles: mechanism and applications // Combustion and Flame. 2011. Vol. 158. Iss. 12. P. 2544–2548.

21. Kuleshov P. S., Manoshkin Y. V. The effect of electric field on the formation and fragmentation of condensate film on the walls of a capillary in a flow of steam // High Temperature. 2009. Vol. 47. No. 1. P. 102–110. DOI: 10.1134/S0018151X09010131.

REFERENCES

1. Amelyushkin, I. A., Miller, A. B. & Stasenko, A. L. (2021). Estimation of the roughness period of anti-ice body coatings in air flow with supercooled droplets. In: *Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics-Mathematics*, 1, 54–63. DOI: 10.18384/2310-7251-2021-1-54-63 (in Russ.).
2. Amelyushkin, I. A., Kudrov, M. A., Morozov, A. O., Stasenko, A. L. & Shcheglov, A. S. (2020). Models of processes accompanying crystallization of supercooled metastable droplets. In: *Proceedings of the Institute for System Programming of the RAS*, 32 (4), 235–244. DOI: 10.15514/ISPRAS-2020-32(4)-17 (in Russ.).
3. Mishchenko L., Hatton, B., Bahadur, V., Taylor, J. A., Krupenkin, T. & Aizenberg, J. (2010). Design of Ice-free Nanostructured Surfaces Based on Repulsion of Impacting Water Droplets. In: *ACS Nano*, 4 (12), 7699–7707. DOI: 10.1021/nn102557p.
4. Kadzharduzov, P. A. & Ezrokhi, Yu. A. (2019). Influence of ice accretion on turbofan performances in ice crystal conditions. In: *Aviation Engines*, 1 (2), 75–81. DOI: 10.54349/26586061_2019_1_75 (in Russ.).
5. Goryachev, A. V., Goryachev, P. A., Zhulin, V. G. & Grebenkov, S. A. (2019). Computational and analytical study to confirm effectiveness of an aircraft engine's protection from effects of rain and hail. In: *Aviation Engines*, 4 (5), 19–30. DOI: 10.54349/26586061_2019_4_19 (in Russ.).
6. Grinats, E. S., Miller, A. B., Potapov, Y. Ph. & Stasenko, A. L. (2013). Experimental and theoretical investigations of the ordinary and nano modified superhydrophobic surfaces icing processes. In: *Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics-Mathematics*, 3, 84–92 (in Russ.).
7. Solovyanchik, L. V., Kondrashov, S. V., Nagornaya, V. S. & Melnikov, A. A. (2018). Feature of receipt anti-icing coating (review). In: *Proceedings of VIAM*, 6 (66), 77–98. DOI: 10.18577/2307-6046-2018-0-6-77-98 (in Russ.).
8. Kuleshov, P. S. (2019). On the dispersion of aluminum nanoparticles. In: *Combustion and explosion*, 12 (3), 117–126. DOI: 10.30826/CE19120313 (in Russ.).
9. Kuleshov, P. S. & Kobtsev, V. D. (2020). Distribution of aluminum clusters and their ignition in air during dispersion of aluminum nanoparticles in a shock wave. In: *Combustion, Explosion, and Shock Waves*, 56 (5), 80–90. DOI: 10.15372/FGV20200508 (in Russ.).
10. Kirichenko, N. A., Barmina, E. V. & Shafeev, G. A. (2018). Theoretical and Experimental Investigation of the Formation of High Spatial Frequency Periodic Structures on Metal Surfaces Irradiated by Ultrashort Laser Pulses. In: *Physics of Wave Phenomena*, 26 (4), 264–273. DOI: 10.3103/S1541308X18040027.
11. Ionin, A. A., Kudryashov, S. I., Levchenko, A. O., Makarov, S. V., Saraeva, I. N., Rudenko, A. A., Butsen, A. V. & Burakov, V. S. (2017). Hydrodynamic instability and self-organization of a submicron relief on metal surfaces upon femtosecond laser exposure in liquids. In: *Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters*, 106 (3-4), 247–251. DOI: 10.7868/S0370274X17160123 (in Russ.).
12. Kuleshov, P. S., Kuznetsov, M. M. & Kuleshova, Yu. D. (2022). Dispersion of metal nanofilms during laser scanning. In: *Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*, 1, 41–51. DOI: 10.18384/2310-7251-2022-1-41-51 (in Russ.).

13. Landau, L. D. & Lifshitz, E. M. (1986). *Theoretical Physics. Vol. 6. Hydrodynamics*. Moscow: Nauka publ. (in Russ.).
14. Novatsky, V. (1975). *Theory of elasticity*. Moscow: Mir publ. (in Russ.).
15. Amelyushkin, I. A. & Stasenko, A. L. (2018). Interaction of a gas flow carrying nonspherical microparticles with a cross cylinder. In: *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 91 (2), 307–318 (in Russ.).
16. Amelyushkin, I. A. & Stasenko, A. L. (2020). Simulation of the interaction of ice crystals with the surface of a flying vehicle. In: *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 93 (3), 597–605 (in Russ.).
17. Mikolutsky, S. I. & Khomich, Y. V. (2021). Effect of nanosecond ultraviolet laser radiation on the structure and adhesion properties of metals and alloys. In: *Physics of Metals and Metallography*, 122 (2), 159–165. DOI: 10.31857/S001532302102008X (in Russ.).
18. Saraeva, I. N., Kudryashov, S. I., Rudenko, A. A., Zhilnikova, M. I., Ivanov, D. S., Zayarny, D. A., Simakin, A. V., Ionin, A. A. & Garcia, M. E. (2019). Effect of fs/ps laser pulsewidth on ablation of metals and silicon in air and liquids, and on their nanoparticle yields. In: *Applied Surface Science*, 470, 1018–1034. DOI: 10.1016/j.apsusc.2018.11.199.
19. Zhidkov, M. V., Smirnov, N. A., Chen, J., Kudryashov, S. I. & Yapyrintsev, M. N. (2020). Structural-phase state of near-surface layers of VT6 titanium alloy after femtosecond laser treatment. In: *Letters on Materials*, 10 (3), 243–248. DOI: 10.22226/2410-3535-2020-3-243-248.
20. Ohkura, Y., Rao, P. M. & Zheng, X. (2011). Flash ignition of Al nanoparticles: mechanism and applications. In: *Combustion and Flame*, 158 (12), 2544–2548.
21. Kuleshov, P. S. & Manoshkin, Y. V. (2009). The effect of electric field on the formation and fragmentation of condensate film on the walls of a capillary in a flow of steam. In: *High Temperature*, 47 (1), 102–110. DOI: 10.1134/S0018151X09010131.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Амелюшкин Иван Алексеевич (г. Жуковский, Московская обл.) – кандидат физико-математических наук, программист лаборатории информационных технологий и прикладной математики Физтех-школы аэрокосмических технологий Московского физико-технического института (национального исследовательского университета);
ORCID: 0000-0002-4281-3531; e-mail: Amelyushkin_Ivan@mail.ru

Кудров Максим Александрович (г. Москва) – кандидат технических наук, доцент, директор Передовой инженерной школы радиолокации, радионавигации и программной инженерии Московского физико-технического института (национального исследовательского университета);
ORCID: 0000-0003-2056-1932; e-mail: MKudrov@mail.ru;

Кулешов Павел Сергеевич (г. Жуковский, Московская обл.) – кандидат физико-математических наук, преподаватель кафедры общей физики Московского физико-технического института (национального исследовательского университета);
ORCID: 0000-0002-7101-9759; e-mail: KuleshovPS@yandex.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Ivan A. Amelyushkin (Zhukovsky, Moscow region) – Cand. Sci. (Phys.-Math.), Programmer, Laboratory of Information Technologies and Applied Mathematics, Phystech School of Aerospace Technology, Moscow Institute of Physics and Technology;
ORCID: 0000-0002-4281-3531; e-mail: Amelyushkin_Ivan@mail.ru

Maksim A. Kudrov (Moscow) – Cand. Sci. (Engineering), Assoc. Prof., Director of the Advanced Engineering School of Radar, Radionavigation and Software Engineering, Moscow Institute of Physics and Technology;
ORCID: 0000-0003-2056-1932; e-mail: MKudrov@mail.ru;

Pavel S. Kuleshov (Zhukovsky, Moscow region) – Cand. Sci. (Phys.-Math.), Lecturer of the Department of General Physics, Moscow Institute of Physics and Technology;
ORCID: 0000-0002-7101-9759; e-mail: KuleshovPS@yandex.ru

Научная статья

УДК 517.956.35

DOI: 10.18384/2949-5067-2024-4-26-36

АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ ИНТЕГРАЛЬНОЙ НАГРУЗКИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ КИРХГОФА

Бозиев О. Л.

Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова, 360004, г. Нальчик, ул. Чернышевского, д. 173, Кабардино-Балкарская республика, Российская Федерация;

Институт информатики и проблем регионального управления Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук, 360000, г. Нальчик, ул. И. Арманд, д. 37А, Кабардино-Балкарская республика, Российская Федерация

e-mail: boziev@yandex.ru

Поступила в редакцию 02.09.2024

После доработки 16.09.2024

Принята к публикации 20.09.2024

Аннотация

Цель: установление априорных оценок для интегральной нагрузки гиперболического уравнения Кирхгофа, моделирующего некоторые нелинейные колебательные процессы. Здесь нагрузкой является рациональная степень m/n линейной функции от нормы искомого решения в пространстве $H^1(\Omega)$.

Процедура и методы. Для установления априорных оценок производятся интегральные преобразования слагаемых скалярного произведения исходного уравнения и временной производной его решения. Применение некоторого известного интегрального неравенства приводит к искомым оценкам.

Результаты. Установлены априорные неравенства, ограничивающие интегральную нагрузку уравнения Кирхгофа известной функцией, зависящей от правой части уравнения и начальных условий, зависящие от знака и вида показателя степени. Показан способ редукции уравнения Кирхгофа к линейному уравнению путём замены интегральной нагрузки правыми частями этих оценок. Приведён пример такой редукции.

Теоретическая и/или практическая значимость. Описанный способ установления априорных оценок и последующей редукции нелинейного уравнения к линейному может быть применён к широкому классу нагруженных уравнений, содержащих модуль интеграла рациональной степени искомой функции или её производной.

Ключевые слова: априорная оценка, интегральная нагрузка, редукция к линейному уравнению, уравнение Кирхгофа

Для цитирования.

Бозиев О. Л. Априорные оценки интегральной нагрузки гиперболического уравнения Кирхгофа // Вестник Государственного университета просвещения. Серия: Физика-математика. 2024. № 4. С. 26-36. <https://doi.org/10.18384/2949-5067-2024-4-26-36>

Original research article

A PRIORI ESTIMATES OF THE INTEGRAL LOAD OF THE HYPERBOLIC KIRCHHOFF EQUATION

O. Boziev

*Kabardino-Balkarian State University named after H. M. Berbekov, ulitsa Tchernyshevskogo 173, Nalchik 360004, Kabardino-Balkarian Republic, Russian Federation;
Institute of Computer Science and Problems of Regional Management, Kabardin-Balkar Scientific Center of Russian Academy of Sciences, ulitsa I. Armand 37A, Nalchik 360000, Kabardino-Balkarian Republic, Russian Federation
e-mail: boziev@yandex.ru*

Received by the editorial office 02.09.2024

Revised by the author 16.09.2024

Accepted for publication 20.09.2024

Abstract

Aim. The aim of this work is to establish a priori estimates for the integral load of the Kirchhoff equation. This equation models some nonlinear oscillatory processes. Here, the load is the rational degree m/n of a linear function of the norm of the desired solution in the space $H^1(\Omega)$.

Methodology. To establish a priori estimates, integral transformations of the terms of the scalar product of the original equation and the time derivative of its solution are performed. The application of some well-known integral inequality leads to the desired estimates.

Results. A priori inequalities limiting the integral load of the Kirchhoff equation to a known function are established. This function depends on the right side of the equation and the initial conditions, depending on the sign and type of exponent. A method is shown for reducing the Kirchhoff equation to a linear equation by replacing the integral load with the right-hand sides of these estimates. An example of such a reduction is given.

Research implications. The described method of establishing a priori estimates and subsequent reduction of a nonlinear equation to a linear one can be applied to a wide class of loaded equations containing the modulus of the integral of the rational degree of the desired function or its derivative.

Keywords: a priori estimation, integral load, Kirchhoff equation, reduction to a linear equation.

For citation:

Boziev, O. V. (2024). A priori estimates of the integral load of the hyperbolic Kirchhoff equation. In: *Bulletin of the Federal State University of Education. Series: Physics and Mathematics*, 4, pp.26-36. <https://doi.org/10.18384/2949-5067-2024-4-26-36>

Введение

Нелинейное гиперболическое уравнение Кирхгофа

$$u_{tt} - a(s)\Delta u = f(x, t), \quad (1)$$

в котором

$$s = s(t) = \|\nabla u\|^2 = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx, \quad \Omega \subset R^n,$$

будем рассматривать в области $Q = \{(x, t) : x \in \Omega \subseteq R^n, t \in [0, T]\}$ с границей $\partial\Omega$ класса дважды непрерывно-дифференцируемых функций при условиях

$$u(x, 0) = \varphi_1(x), u_t(x, 0) = \varphi_2(x), \nabla u|_{\partial\Omega} = 0, x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega. \quad (2)$$

Уравнение вида (1) моделирует некоторые колебательные процессы, в частности, оно учитывает изменения длины струны, вызванные поперечными колебаниями. Данное уравнение является нагруженным в силу того, что содержит нагрузку $a(s)$, где s – это интеграл указанного вида. Подобную нагрузку будем называть интегральной. В статье полагается

$$a(s) = (C_1 s + C_2)^p, C_1, C_2 > 0, p \in R, p \neq 0.$$

В [1] для уравнения указанного вида была установлена разрешимость в целом первой смешанной задачи с однородными начальными условиями при натуральных p . В [2] разрешимость этой же задачи в целом установлена при $p = -2$. В [3] доказывается существование и единственность задачи Коши для однородного уравнения вида (1). Работы [4–9], как и большое количество других, также посвящены подобным уравнениям, в том числе и с младшими членами.

Полученные в этих работах результаты соответствуют основным натуральным p , реже – целым отрицательным. Проблема нахождения решения какой-либо начально-краевой задачи для уравнения (1) в них не рассматривается. Как известно, непосредственное интегрирование нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных в большинстве случаев не представляется возможным. В подобных случаях часто прибегают к аппроксимации нелинейных уравнений линейными. При этом процесс, описываемый аппроксимирующим линейным уравнением, может существенно отличаться от моделируемого исходным уравнением нелинейного процесса. В настоящей работе устанавливаются априорные оценки интегральной нагрузки уравнения при рациональных значениях p . Правые части этих оценок являются известными функциями свободного члена уравнения и начальных условий. Они могут быть использованы для редукции нагруженного уравнения к ассоциированному с ним линейному уравнению путём замены ими интегральной нагрузки. Подобная линеаризация представляется более обоснованной по сравнению с другими способами. Кроме того, полученное таким образом аппроксимирующее линейное уравнение может быть принято за начальное приближение к исходному нагруженному уравнению в итерационном процессе поиска решения задачи (1), (2). Этот приём применялся в случае одномерного уравнения вида (1) в [10; 11], где были получены априорные оценки производных решения одномерного уравнения вида (1). Для установления априорных оценок применяется

Лемма. [12, теорема 1.4] Если функция $u(t)$ удовлетворяет неравенству

$$u(t) \leq \alpha(t) \int_{t_0}^t \beta(\tau) u(\tau) d\tau + f(t), t \geq t_0,$$

где функция $f(t)$ и неотрицательные функции $\alpha(t)$, $\beta(t)$ интегрируемы, то справедливо неравенство

$$u(t) \leq \alpha(t) \int_{t_0}^t f(\tau) \beta(\tau) \exp \left(\int_{\tau}^t \alpha(s) \beta(s) ds \right) d\tau + f(t).$$

Также неоднократно используются обозначения

$$F_1(t) = \int_0^t \|f\|^2 d\tau + \|\varphi_2(x)\|^2, \quad K_0(t) = \int_0^t F_2(\tau) e^{t-\tau} d\tau + F_2(t),$$

а при доказательстве теорем возникает неравенство

$$\|u_t\|^2 \leq K_0(t). \quad (3)$$

Легко видеть, что в предположении $u \in H^1(\Omega)$ имеют место равенства

$$(u_{tt}, u_t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_t\|^2, \quad -(\Delta u, u_t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u\|^2,$$

где скалярное произведение рассматривается в смысле пространства $L_2(\Omega)$.

1. Интегральная нагрузка со степенью $p = \frac{m}{n}$, $m, n \in N$

Рассмотрим уравнение (1) в виде

$$u_{tt} - (C_1 s + C_2)^{\frac{m}{n}} \Delta u = f(x, t), m, n \in N. \quad (4)$$

Теорема 1. Пусть решением задачи (4), (2) является функция $u \in H^1(\Omega)$, такая, что $u_t, u_{tt}, \nabla \varphi_1, \varphi_2, f \in L_2(\Omega)$. Тогда функция $(C_1 s + C_2)^{\frac{m+n}{n}}$ ограничена зависящей от t константой.

Доказательство. Скалярное произведение (1) и функции u_t имеет вид:

$$(u_{tt}, u_t) - a(s)(\Delta u, u_t) = (f, u_t). \quad (5)$$

Заметим, что

$$-a(s)(\Delta u, u_t) = \frac{1}{2} a(s) \frac{d}{dt} \|\nabla u\|^2 = \frac{1}{2C_1} (C_1 s + C_2)^{\frac{m}{n}} \frac{d}{dt} (C_1 s + C_2).$$

Это позволяет записать соотношение

$$\frac{d}{dt} \|u_t\|^2 + \frac{1}{C_1} (C_1 s + C_2)^{\frac{m}{n}} \frac{d}{dt} (C_1 s + C_2) = 2 \int_{\Omega} f u_t dx,$$

интегрирование которого в свою очередь приводит к равенству

$$\|u_t\|^2 + \frac{1}{C_1} \frac{n}{m+n} (C_1 s + C_2)^{\frac{m+n}{n}} = 2 \int_0^t \int_{\Omega} f u_t dx d\tau + \|u_t(x, 0)\|^2 + \frac{1}{C_1} \frac{n}{m+n} (C_1 s(0) + C_2)^{\frac{m+n}{n}}.$$

Функцию под интегралом в правой части оценим по модулю и применим к нему неравенство Коши:

$$\|u_t\|^2 + \frac{1}{C_1} \frac{n}{m+n} (C_1 s + C_2)^{\frac{m+n}{n}} \leq \int_0^t \|u_t\|^2 d\tau + F_1(t) + \frac{1}{C_1} \frac{n}{m+n} (C_1 s(0) + C_2)^{\frac{m+n}{n}}. \quad (6)$$

Исключая второе слагаемое левой части, получим

$$\|u_t\|^2 \leq \int_0^t \|u_t\|^2 d\tau + F_2(t),$$

$$F_2(t) = F_1(t) + \frac{1}{C_1} \frac{n}{m+n} (C_1 s(0) + C_2)^{\frac{m+n}{n}}.$$

Применяя к последнему неравенству лемму, получаем оценку (3). В левой части (6) исключим $\|u_t\|^2$, а в правой части заменим его на $K_0(t)$:

$$\frac{1}{C_1} \frac{n}{m+n} (C_1 s + C_2)^{\frac{m+n}{n}} \leq \int_0^t K_0 d\tau + F_1(t) + \frac{1}{C_1} \frac{n}{m+n} (C_1 s(0) + C_2)^{\frac{m+n}{n}}.$$

Отсюда перейдём к выполняющейся для всех $t \in [0, T]$ оценке

$$(C_1 s + C_2)^{\frac{m+n}{n}} \leq K(t), \quad (7)$$

$$K(t) = C_1 \frac{m+n}{n} \left(\int_0^t K_0 d\tau + F_1(t) \right),$$

Теорема 1 доказана.

С помощью (7) редуцируем нелинейное уравнение (4) к линейному уравнению. Для этого положим в (4)

$$(C_1 s + C_2)^{\frac{m}{n}} = (K(t))^{\frac{m}{m+n}},$$

что приводит к линейному уравнению

$$u_{tt} - (K(t))^{\frac{m}{m+n}} \Delta u = f(x, t). \quad (8)$$

2. Интегральная нагрузка со степенью $p = -\frac{m}{n}$, $m, n \in N$

При условиях (2) рассмотрим уравнение

$$u_{tt} - (C_1 s + C_2)^{-\frac{m}{n}} \Delta u = f(x, t), m, n \in N. \quad (9)$$

Заметим, что при $a(s) = (C_1 s + C_2)^{-\frac{m}{n}}$ в скалярном произведении (5) имеет место равенство

$$-a(s)(\Delta u, u_t) = \frac{1}{2} a(s) \frac{d}{dt} \|\nabla u\|^2 = \frac{1}{2C_1} (C_1 s + C_2)^{-\frac{m}{n}} \frac{d}{dt} (C_1 s + C_2).$$

Продолжим его при $m = n$ и $m \neq n$.

При $m = n$ ($p = -1$) имеем

$$\frac{1}{2C_1} (C_1 s + C_2)^{-1} \frac{d}{dt} (C_1 s + C_2) = \frac{1}{2C_1} \frac{d}{dt} \ln (C_1 s + C_2). \quad (10)$$

Пусть $m \neq n$. Тогда

$$\frac{1}{2C_1} (C_1 s + C_2)^{-\frac{m}{n}} \frac{d}{dt} (C_1 s + C_2) = \frac{1}{2C_1} \frac{n}{n-m} \frac{d}{dt} (C_1 s + C_2)^{\frac{n-m}{n}}. \quad (11)$$

Теорема 2. Пусть решением задачи (9), (2) является функция $u \in H^1(\Omega)$, такая, что $u, u_t, \nabla \varphi_1, \nabla \varphi_2, f \in L_2(\Omega), m, n \in N$. Тогда ограничены зависящими от t константами следующие функции:

- а) $\ln(C_1s + C_2)$ при $C_1s + C_2 \geq 1, p = -1$;
- б) $\ln(C_1s + C_2)^{-1}$ при $C_1s + C_2 < 1$ и $s'(t) < 0, p = -1$;
- в) $(C_1s + C_2)^{\frac{n-m}{n}}$ при $\|\nabla \varphi_1\|^2 > 0, m < n$;
- г) $(C_1s + C_2)^{\frac{m-n}{n}}$ при $\|\nabla \varphi_1\|^2 > 0, s'(t) > 0, m > n$.

Доказательство.

а) С учётом (10) запишем:

$$\frac{d}{dt} \left(\|u_t\|^2 + \frac{1}{C_1} \ln(C_1s + C_2) \right) = 2 \int_{\Omega} f u_t dx.$$

После интегрирования последнего перейдём к неравенству

$$\|u_t\|^2 + \frac{1}{C_1} \ln(C_1s + C_2) \leq \int_0^t \|u_t\|^2 d\tau + F_2(t), \quad (12)$$

$$F_2(t) = F_1(t) + \frac{1}{C_1} \ln(C_1s(0) + C_2).$$

Пусть $C_1s + C_2 \geq 1$. Исключая в (12) второе слагаемое левой части и применяя лемму, приходим к оценке (3).

Выбирая верхнюю границу неравенства, в правой части (12) заменим $\|u_t\|^2$ на $K_0(t)$, исключая при этом первое слагаемое левой части. Это приводит к выполняющейся для всех $t \in [0, T]$ оценке

$$\ln(C_1s + C_2) \leq K_1(t), \quad (13)$$

$$K_1(t) = C_1 \left(\int_0^t K_0(\tau) d\tau + F_1(t) \right),$$

б) Пусть $C_1s + C_2 < 1$. С учётом знака логарифма запишем (12) в виде

$$\|u_t\|^2 \leq \int_0^t \|u_t\|^2 d\tau + F_1(t) - \frac{1}{C_1} \ln \frac{C_1s(0) + C_2}{C_1s + C_2},$$

Последний член правой части исключим в силу $s(0) = \max s(t)$. После применения леммы при $F_2(t) = F_1(t)$ получаем неравенство (3).

В (11) заменим $\|u_t\|^2$ на $K_0(t)$, исключая при этом первое слагаемое левой части, что приводит к выполняющейся для всех $t \in [0, T]$ оценке

$$\ln(C_1s + C_2)^{-1} \leq K_2(t), \quad (14)$$

$$K_2(t) = C_1 \left(\int_0^t K_0(\tau) d\tau + F_1(t) \right),$$

с) С учётом (11) запишем:

$$\frac{d}{dt} \left(\|u_t\|^2 + \frac{1}{C_1} \frac{n}{n-m} (C_1 s + C_2)^{\frac{n-m}{n}} \right) = 2 \int_{\Omega} f u_t dx. \quad (15)$$

После интегрирования перейдём к неравенству

$$\|u_t\|^2 + \frac{1}{C_1} \frac{n}{n-m} (C_1 s + C_2)^{\frac{n-m}{n}} \leq \int_0^t \|u_t\|^2 d\tau + F_2(t). \quad (16)$$

$$F_2(t) = F_1(t) + \frac{1}{C_1} \frac{n}{n-m} (C_1 s(0) + C_2)^{\frac{n-m}{n}}.$$

Исключая в (16) второе слагаемое левой части с применением леммы имеем оценку (3). Подстановка $K_0(t)$ в правую часть (16) вместо $\|u_t\|^2$ с одновременным исключением первого слагаемого левой части приводит к выполняющейся для всех $t \in [0, T]$ оценке

$$(C_1 s + C_2)^{\frac{n-m}{n}} \leq K(t), \quad (17)$$

$$K(t) = C_1 \frac{n-m}{n} \left(\int_0^t K_0 d\tau + F_1(t) \right).$$

d) С помощью (11) перейдём к уравнению (15). Проинтегрируем его, замечая, что в силу возрастания функции s

$$\int_0^t \frac{d}{dt} (C_1 s + C_2)^{\frac{n-m}{n}} d\tau = \frac{(C_1 s(0) + C_2)^{\frac{m-n}{n}} - (C_1 s + C_2)^{\frac{m-n}{n}}}{(C_1 s + C_2)^{\frac{m-n}{n}} (C_1 s(0) + C_2)^{\frac{m-n}{n}}} = F_0(t) < 0,$$

после чего перейдём к неравенству

$$\|u_t\|^2 + \frac{1}{C_1} \frac{n}{n-m} F_0(t) \leq \int_0^t \|u_t\|^2 d\tau + F_1(t). \quad (18)$$

Исключая второе слагаемое левой части, запишем оценку

$$\|u_t\|^2 \leq \int_0^t \|u_t\|^2 d\tau + F_1(t).$$

Очередное применение леммы при $F_2(t) = F_1(t)$ даёт оценку (3).

Вновь заменяя $\|u_t\|^2$ на $K_0(t)$ в правой части (18) с одновременным исключением первого слагаемого левой части, получаем неравенство

$$\frac{n}{n-m} F_0(t) \leq C_1 \left(\int_0^t K_0(\tau) d\tau + F_1(t) \right).$$

Из последнего следует, что для всех $t \in [0, T]$ выполнено неравенство

$$(C_1 s + C_2)^{\frac{m-n}{n}} \leq K(t), \quad (19)$$

$$K(t) = C_1 \frac{m-n}{n} \left(\int_0^t K_0(\tau) d\tau + F_1(t) \right) (C_1 s(0) + C_2)^{\frac{m-n}{n}}.$$

Теорема 2 доказана.

Рассмотрим применение полученных оценок для редуцирования нелинейного уравнения (8) к соответствующим линейным уравнениям.

а) и б) Переход к равенствам в (13) и (14) позволяет перейти от (9) к линейному уравнению

$$u_{tt} - \exp(K(t)) \Delta u = f(x, t), \quad (20)$$

в котором

$$K(t) = \begin{cases} -K_1(t), & C_1 s + C_2 \geq 1, \\ K_2(t), & C_1 s + C_2 < 1. \end{cases}$$

с) Полагая в уравнении (9)

$$(C_1 s + C_2)^{-\frac{m}{n}} = (K(t))^{\frac{m}{m-n}},$$

где $K(t)$ – правая часть неравенства (17), получаем линейное уравнение

$$u_{tt} - (K(t))^{\frac{m}{m-n}} \Delta u = f(x, t). \quad (21)$$

д) Полагая в уравнении (9)

$$(C_1 s + C_2)^{-\frac{m}{n}} = (K(t))^{\frac{m}{n-m}},$$

где $K(t)$ – правая часть неравенства (20), получаем линейное уравнение

$$u_{tt} - (K(t))^{\frac{m}{n-m}} \Delta u = f(x, t). \quad (22)$$

3. Пример

Приведём одномерный пример, соответствующий случаю с) теоремы 2. Пусть задача (9), (2) имеет вид

$$u_{tt} - \left(\int_0^1 |u_x|^2 dx + 1 \right)^{-\frac{1}{2}} u_{xx} = x + t,$$

$$u(x, 0) = \frac{1}{6} x^2 (2x - 3), u_t(x, 0) = x, x \in [0, 1], u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0, t \in [0, T].$$

Таким образом, в формулировке теоремы 2 имеем

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{6} x^2 (2x - 3), \varphi_2(x) = x, f(x, t) = x + t, C_1 = C_2 = 1, m = 1, n = 2.$$

Найдём величины, входящие в (17):

$$\int_0^t \|f\|^2 dx = \int_0^t \int_0^1 |x + t|^2 dx d\tau = t^2 + t + \frac{1}{3}, \|\varphi_2\|^2 = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}, F_1(t) = \frac{1}{6} t(2t^2 + 3t + 2) + \frac{1}{3},$$

$$s(0) = \int_0^1 |u_x(x, 0)|^2 dx = \int_0^1 |\varphi_{1x}(x)|^2 dx = \int_0^1 |x^2 - x|^2 dx = \frac{1}{30}, (s(0) + 1)^{\frac{1}{2}} \approx 1,01653.$$

$$F_2(t) = 0,16667t(2t^2 + 3t + 2) + 2,36639, K_0(t) = 5,69972e^t - t^2 + 3,33333t - 2,99748,$$

$$\int_0^t K_0(\tau) d\tau = 5,69972e^t - 0,25t^4 - 3,33333t^3 - 2,99748t,$$

$$K(t) = 2,84986e^t - 0,125t^4 - 1,5t^3 + 0,25t^2 - 1,33208t - 2,68319.$$

После подстановки в (21) получаем линейное уравнение

$$u_{tt} - (2,84986e^t - 0,125t^4 - 1,5t^3 + 0,25t^2 - 1,33208t - 2,68319)^{-0,5} u_{xx} = x + t.$$

Заключение

В работе установлены априорные оценки для интегральной нагрузки $a(s) = (C_1 s + C_2)^{\pm \frac{m}{n}}$, $C_1, C_2 > 0$, $m, n \in N$, уравнения Кирхгофа (1) при условиях (2) и показано их применение к его линеаризации. Положительной степени интегральной нагрузки соответствует оценка (7). Для отрицательной степени рассмотрены случаи $m = n$ с оценками (12) и (14), а также случаи $m < n$ и $m > n$ с оценками (17) и (19) соответственно. Правые части полученных выражений, рассматриваемых как равенства, используются для линеаризации уравнения (1) путём замены ими интегральной нагрузки. Результатом являются уравнения (8), (20), (21), (22). Приводится одномерный пример, иллюстрирующий редукцию нагруженного уравнения к линейному. Решение последнего при исходных начально-краевых условиях может быть принято за первое приближение к решению нагруженной задачи.

Практическое значение работы состоит в том, что использование рациональных значений степени p в интегральной нагрузке расширяет класс исследуемых уравнений Кирхгофа, а установленные априорные оценки дают возможность получения некоторых качественных результатов для данного уравнения. Кроме того, способ редукции к линейному уравнению может быть полезным для решения практически важных задач, связанных с малыми поперечными колебаниями упругих струн и мембран.

ЛИТЕРАТУРА

1. Похожаев С. И. Об одном классе квазилинейных гиперболических уравнений // Математический сборник. 1975. Т. 96 (138). № 1. С. 152–166.
2. Похожаев С. И. Об одном квазилинейном гиперболическом уравнении Кирхгофа // Дифференциальные уравнения. 1985. Т. 21. № 1. С. 101–108.
3. Nishihara K. Exponential decay of solutions of some quasilinear hyperbolic equations with linear damping // Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. 1984. Vol. 8. Iss. 6. P. 623–636. DOI: 10.1016/0362-546X(84)90007-5.
4. Crippa H. R. On local solutions of some mildly degenerate hyperbolic equations // Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. 1993. Vol. 21. Iss. 8. P. 565–574. DOI: 10.1016/0362-546X(93)90001-9.
5. Ngoc L. T. P., Long N. T. Linear approximation and asymptotic expansion of solutions in many small parameters for a nonlinear Kirchhoff wave equation with mixed

- nonhomogeneous conditions // *Acta Applicandae Mathematicae*. 2010. Vol. 112. P. 137–169. DOI: 10.1007/s10440-009-9555-9.
6. Frota C. L., Medeiros L. A., Vicente A. Wave equation in domains with non-locally reacting boundary // *Differential Integral Equations*. 2011. Vol. 24. No. 11/12. P. 1001–1020. DOI: 10.57262/die/1356012872.
 7. Frota C. L., Medeiros L. A., Vicente A. A mixed problem for semilinear wave equations with acoustic boundary conditions in domains with non-locally reacting boundary // *Electronic Journal of Differential Equations*. 2014. No. 243. P. 1–14. URL: <https://ejde.math.txstate.edu/Volumes/2014/243/frota.pdf> (дата обращения: 02.04.2024).
 8. Ono K. Lower decay estimates for non-degenerate Kirchhoff type dissipative wave equations // *Journal of Mathematics, Tokushima University*. 2018. Vol. 52. P. 39–52 [Электронный ресурс]. URL: <https://www-math.st.tokushima-u.ac.jp/journal/2018/2018-3-ono.pdf> (дата обращения: 02.04.2024).
 9. Ono K. Global solvability for mildly degenerate Kirchhoff type dissipative wave equations in bounded domains // *Journal of Mathematics, Tokushima University*. 2021. Vol. 55. P. 11–18 [Электронный ресурс]. URL: <https://www-math.st.tokushima-u.ac.jp/journal/2021/2021-2-ono.pdf> (дата обращения: 02.04.2024).
 10. Бозиев О. Л. О линеаризации гиперболических уравнений с интегральной нагрузкой в главной части с помощью априорной оценки их решений // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2022. № 80. С. 16–25. DOI: 10.17223/19988621/80/2.
 11. Бозиев О. Л. Априорные оценки производных решений одномерных неоднородных волновых уравнений с интегральной нагрузкой в главной части // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2024. № 89. С. 5–16. DOI: 10.17223/19988621/89/1.
 12. Филатов А. Н., Шарова Л. В. Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний. М.: Наука, 1976. 151 с.

REFERENCES

1. Pokhozhaev, S. I. (1975). On a class of quasilinear hyperbolic equations. In: *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 138 (1), 152–166 (in Russ.).
2. Pokhozhaev, S. I. (1985). A quasilinear hyperbolic Kirchhoff equation. In: *Differential Equations*, 21 (1), 101–108 (in Russ.).
3. Nishihara, K. (1984). Exponential decay of solutions of some quasilinear hyperbolic equations with linear damping. In: *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 8 (6), 623–636. DOI: 10.1016/0362-546X(84)90007-5.
4. Crippa, H. R. (1993). On local solutions of some mildly degenerate hyperbolic equations. In: *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 21 (8), 565–574. DOI: 10.1016/0362-546X(93)90001-9.
5. Ngoc, L. T. P. & Long, N. T. (2010). Linear approximation and asymptotic expansion of solutions in many small parameters for a nonlinear Kirchhoff wave equation with mixed nonhomogeneous conditions. In: *Acta Applicandae Mathematicae*, 112, 137–169. DOI: 10.1007/s10440-009-9555-9.
6. Frota, C. L., Medeiros, L. A. & Vicente, A. (2011). Wave equation in domains with non-locally reacting boundary. In: *Differential Integral Equations*, 24 (11/12), 1001–1020. DOI: 10.57262/die/1356012872.
7. Frota, C. L., Medeiros, L. A. & Vicente, A. (2014). A mixed problem for semilinear wave equations with acoustic boundary conditions in domains with non-locally reacting

- boundary. In: *Electronic Journal of Differential Equations*, 243, 1–14. URL: <https://ejde.math.txstate.edu/Volumes/2014/243/frota.pdf> (accessed: 02.04.2024).
8. Ono, K. (2018). Lower decay estimates for non-degenerate Kirchhoff type dissipative wave equations. In: *Journal of Mathematics, Tokushima University*, 52, 39–52. URL: <https://www-math.st.tokushima-u.ac.jp/journal/2018/2018-3-ono.pdf> (accessed: 02.04.2024).
 9. Ono, K. (2021). Global solvability for mildly degenerate Kirchhoff type dissipative wave equations in bounded domains. In: *Journal of Mathematics, Tokushima University*, 55, 11–18. URL: <https://www-math.st.tokushima-u.ac.jp/journal/2021/2021-2-ono.pdf> (accessed: 02.04.2024).
 10. Boziev, O. K. (2022). On linearization of hyperbolic equations with integral load in the main part using an a priori estimate of their solutions. In: *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*, 80, 16–25. DOI: 10.17223/19988621/80/2.
 11. Boziev, O. K. (2024). A priori estimates for derivative solutions of one-dimensional inhomogeneous wave equations with an integral load in the main part. In: *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*, 89, 5–16. DOI: 10.17223/19988621/89/1.
 12. Filatov, A. N. & Sharova, L. V. (1976). Integral inequalities and the theory of nonlinear oscillations. Moscow: Nauka publ.
-

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Бозиев Олег Людинович (г. Нальчик) – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры компьютерных технологий и информационной безопасности института искусственного интеллекта и цифровых технологий Кабардино-Балкарского государственного университета им. Х. М. Бербекова; старший научный сотрудник отдела автоматизации и информатизации региональных систем управления Института информатики и проблем регионального управления Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук;

ORCID: 0000-0001-6660-7444; e-mail: boziev@yandex.ru

INFORMATION ABOUT AUTHOR

Oleg L. Boziev (Nalchik) – Cand. Sci (Phys.-Math.), Assoc. Prof., Department of Computer Technologies and Information Security, Institute of Artificial Intelligence and Digital Technologies, Kabardino-Balkarian State University named after H. M. Berbekov; Senior Researcher, Department of Automation and Informatization of Regional Control Systems, Institute of Computer Science and Problems of Regional Management, Kabardin-Balkar Scientific Center of Russian Academy of Sciences;

ORCID: 0000-0001-6660-7444; e-mail: boziev@yandex.ru

Научная статья

УДК 530.145

DOI: 10.18384/2949-5067-2024-4-37-42

ОЦЕНКА ВОЗМОЖНОСТИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ПРОВЕРКИ КВАНТОВОГО ЭФФЕКТА ЗЕНОНА С ПОМОЩЬЮ СКАНИРУЮЩЕГО ЗОНДОВОГО МИКРОСКОПА

Камалов Т. Ф.*, Евдокимов Н. В., Камалов Ю. Т.

*Государственный университет просвещения, 105005, г. Москва, ул. Радио, д. 10А, стр. 2,
Российская Федерация*

**Корреспондирующий автор, e-mail: timkamalov@gmail.com*

Поступила в редакцию 19.08.2024

Принята к публикации 02.09.2024

Аннотация

Цель: описать эксперимент по прямому экспериментальному наблюдению квантового эффекта Зенона.

Процедура и методы. Для исследования необходима модель сканирующего зондового микроскопа (СЗМ).

Результаты. Описанные теоретические оценки исследования дают обнадеживающие результаты получения устойчивых возбуждённых состояний атомов методом прямого измерения их возбуждённых состояний.

Теоретическая и практическая значимость заключается в перспективе получать устойчивые возбуждённые состояния атомов различных элементов.

Ключевые слова. квантовый эффект Зенона, сканирующий зондовый микроскоп

Благодарности: Авторы благодарны профессору В. В. Беляеву за общее руководство и ценные советы, которые повлияли на написание этой работы.

Для цитирования.

Камалов Т. Ф., Евдокимов Н. В., Камалов Ю. Т. Оценка возможности экспериментальной проверки квантового эффекта Зенона с помощью сканирующего зондового микроскопа // Вестник Государственного университета просвещения. Серия: Физика-математика. 2024. № 4. С. 37-42. <https://doi.org/10.18384/2949-5067-2024-4-37-42>

Original research article

EXPERIMENTAL TEST OF THE QUANTUM ZENO EFFECT USING AN SCANNING PROBE MICROSCOPE

T. Kamalov, N. Evdokimov, Yu. Kamalov*

*Federal State University of Education, ulitsa Radio 10A build. 2, Moscow 105005,
Russian Federation*

**Corresponding author, e-mail: e-mail: timkamalov@gmail.com*

Received by the editorial office 19.08.2024

Accepted for publication 02.09.2024

Abstract

Aim. To describe an experiment on direct experimental observation of the quantum Zeno effect.

Methodology. The study requires a model of a scanning probe microscope-SPM.

Results. The described theoretical estimates of the study give encouraging results of obtaining stable excited states of atoms by direct measurement of their excited states.

Research implication lies in the prospect of obtaining stable excited states of atoms of various elements.

Keywords. quantum Zeno effect, scanning probe microscope-SPM

Acknowledgments. The authors are grateful to Professor V. V. Belyaev for general guidance and valuable advice that influenced the writing of this work.

For citation.

Kamalov, T. F., Evdokimov, N. V. & Kamalov, Yu. T. (2024). Experimental test of the quantum Zeno effect using an scanning probe microscope. In: *Bulletin of the Federal State University of Education. Series: Physics and Mathematics*, 4, pp.37-42. <https://doi.org/10.18384/2949-5067-2024-4-37-42>

Введение

Квантовый эффект Зенона предсказан квантовой механикой и теоретически описан в работах [1–4]. Эффект был экспериментально подтверждён в [5; 6].

В эффекте Зенона вероятность нахождения электрона в атоме в начальном возбуждённом состоянии $|\psi_0\rangle$ уменьшается квадратично со временем в маленьком промежутке времени,

$$S = 1 - \frac{t}{t_z} + o(t^2), \quad (1)$$

где время Зенона t_z определяется разбросом энергий начального состояния ($\hbar = 1$),

$$t_z = [\langle \psi_0 | H | \psi_0 \rangle^2 - \langle \psi_0 | H^2 | \psi_0 \rangle],^{-1/2} \quad (2)$$

где H – оператор Гамильтона.

Из этого следует, что для системы, подвергаемой частым проверкам (или эквивалентным «прерываниям» [6]) каждые τ секунд, вероятность $W(t)$ оставаться в $|\psi_0\rangle$, как ожидается, будет демонстрироваться экспоненциальный распад

$$\lim W(t) \approx \exp(-\gamma t), \gamma(\tau) = \tau^2 / t_z^2 \quad (3)$$

который останавливается при $\tau \rightarrow 0$.

Наблюдение квантового эффекта Зенона не с помощью косвенных измерений, а прямыми измерениями может позволить подтвердить возможность получать устойчивые возбуждённые состояния атомов.

Сканирующий зондовый микроскоп (СЗМ) известен двух типов. Это сканирующий туннельный микроскоп (СТМ) и атомно-силовой микроскоп (АСМ). СТМ измеряет эквипотенциальные поверхности взаимодействия между острием зонда и поверхностью образца, что позволяет получить информацию о рельефе поверхности. СТМ может по протекающему туннельному току наблюдать размеры атома с точностью порядка нескольких ангстрем.

Также в некоторых модификациях атомно-силового микроскопа (АСМ) можно измерять силы взаимодействия между зондом и поверхностью в зависимости от расстояния (спектроскопия силового взаимодействия). Это может дать информацию о локальных электронных свойствах, которые могут быть связаны с возбуждёнными состояниями.

Размер возбуждённого атома As

Размер атома (или его радиус) зависит от его энергетического состояния. В возбуждённом состоянии электроны занимают более высокие энергетические уровни, что приводит к увеличению размера атома. Давайте рассмотрим, как оценить размер возбуждённого атома мышьяка (As).

1. Основные понятия

Атомный радиус: Это расстояние от ядра до внешнего электронного облака. В возбуждённом состоянии электроны находятся дальше от ядра, поэтому радиус увеличивается.

Энергетические уровни: В возбуждённом состоянии электроны переходят на орбитали с более высокими главными квантовыми числами (n), что увеличивает атомный радиус.

2. Основное состояние атома As

В основном состоянии электронная конфигурация атома мышьяка:

As: $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^3$.

Внешние электроны находятся на $4s$ и $4p$ орбиталях. Атомный радиус мышьяка в основном состоянии составляет около 120 пм (пикометров).

Возбуждённое состояние атома As

В возбуждённом состоянии один из электронов переходит на более высокий энергетический уровень. Например:

Электрон с $4p$ переходит на $5s$:

As*: $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^2 5s^1$.

Электрон с $4s$ переходит на $4d$:

As*: $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^1 4p^3 4d^1$.

В этих состояниях внешние электроны находятся на орбиталях с более высокими главными квантовыми числами ($n=5$ или $n=4d$), что увеличивает размер атома.

Оценка размера возбуждённого атома

Размер атома в возбуждённом состоянии можно оценить с помощью квантовой механики. Радиус орбиты электрона пропорционален квадрату главного квантового числа (n^2):

$$r_n \propto n^2,$$

где r_n — радиус орбиты для уровня n .

Пример:

В основном состоянии внешние электроны находятся на уровне $n=4$.

В возбуждённом состоянии электрон может перейти на уровень $n=5$.

Отношение радиусов:

$$\frac{r_5}{r_4} = \frac{5^2}{4^2} = \frac{25}{16} \approx 1.56$$

Таким образом, радиус атома в возбуждённом состоянии увеличивается примерно в 1,56 раза по сравнению с основным состоянием.

Численная оценка

Если радиус атома As в основном состоянии составляет 120 пм, то в возбуждённом состоянии:

$$r \text{ возбуждённый} \approx 120 \text{ пм} \times 1.56 \approx 187 \text{ пм}.$$

Факторы, влияющие на размер

Экранирование ядра: в многоэлектронных атомах внутренние электроны экранируют заряд ядра, что влияет на радиус внешних электронов.

Релятивистские эффекты

Для тяжёлых элементов (таких как As) релятивистские эффекты могут влиять на размер атома.

Заключение

Размер возбуждённого атома мышьяка увеличивается по сравнению с основным состоянием, так как электроны переходят на более высокие энергетические уровни. Оценка показывает, что радиус может увеличиться примерно в 1,6 раза. Согласно квантовому эффекту Зенона нахождение электрона на возбуждённом состоянии атома должно оставаться стабильным в течении всего времени измерения его состояния с помощью сканирующего туннельного микроскопа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Sokolovski D., Pons M., Kamalov T. Anomalous Zeno effect for sharply localized atomic states // Physical Review A. 2012. Vol. 86. Iss. 2. Article No. 022110. DOI: 10.1103/PhysRevA.86.022110.
2. Misra B., Sudarshan E. C. G. The Zeno's paradox in quantum theory // Journal of Mathematical Physics. 1977. Vol. 18. Iss. 4. P. 756–763. DOI: 10.1063/1.523304.

3. Home D., Whitaker M. A. B. A Conceptual Analysis of Quantum Zeno; Paradox, Measurement, and Experiment // *Annals of Physics*. 1997. Vol. 258. Iss. 2. P. 237–285. DOI: 10.1006/aphy.1997.5699.
4. Facchi P., Nakazato H., Pascazio S. From the Quantum Zeno to the Inverse Quantum Zeno Effect // *Physical Review Letters*. 2001. Vol. 86. Iss. 13. P. 2699–2703. DOI: 10.1103/PhysRevLett.86.2699.
5. Quantum Zeno effect / W. M. Itano, D. J. Heinzen, J. J. Bollinger, D. J. Wineland // *Physical Review A*. 1990. Vol. 41. Iss. 5. P. 2295–2300. DOI: 10.1103/PhysRevA.41.2295.
6. Fischer M. C., Gutierrez-Medina B., Raizen M. G. Observation of the Quantum Zeno and Anti-Zeno Effects in an Unstable System // *Physical Review Letters*. 2001. Vol. 87. Iss. 4. Article No. 040402. DOI: 10.1103/PhysRevLett.87.040402.

REFERENCES

1. Sokolovski, D., Pons, M. & Kamalov, T. (2012). Anomalous Zeno effect for sharply localized atomic states. In: *Physical Review A*, 86 (2), 022110. DOI: 10.1103/PhysRevA.86.022110.
2. Misra, B. & Sudarshan, E. C. G. (1977). The Zeno's paradox in quantum theory. In: *Journal of Mathematical Physics*, 18 (4), 756–763. DOI: 10.1063/1.523304.
3. Home, D. & Whitaker, M. A. B. (1997). A Conceptual Analysis of Quantum Zeno; Paradox, Measurement, and Experiment. In: *Annals of Physics*, 258 (2), 237–285. DOI: 10.1006/aphy.1997.5699.
4. Facchi, P., Nakazato, H. & Pascazio, S. (2001). From the Quantum Zeno to the Inverse Quantum Zeno Effect. In: *Physical Review Letters*, 86 (13), 2699–2703. DOI: 10.1103/PhysRevLett.86.2699.
5. Itano, W. M., Heinzen, D. J., Bollinger, J. J. & Wineland, D. J. (1990). Quantum Zeno effect. In: *Physical Review A*, 41 (5), 2295–2300. DOI: 10.1103/PhysRevA.41.2295.
6. Fischer, M. C., Gutierrez-Medina, B. & Raizen, M. G. (2001). Observation of the Quantum Zeno and Anti-Zeno Effects in an Unstable System. In: *Physical Review Letters*, 87 (4), 040402. DOI: 10.1103/PhysRevLett.87.040402.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Камалов Тимур Фянович (г. Москва) – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры фундаментальной физики и нанотехнологий Государственного университета просвещения;

ORCID: 0000-0002-4349-4747; e-mail: timkamalov@gmail.com;

Евдокимов Николай Валерьевич (г. Москва) – аспирант кафедры фундаментальной физики и нанотехнологий Государственного университета просвещения;

ORCID: 0000-0002-5129-2619; e-mail: nv.evdokimov@gmail.com;

Камалов Юрий Тимурович (г. Москва) – аспирант кафедры фундаментальной физики и нанотехнологий Государственного университета просвещения;

ORCID: 0000-0003-0475-7556; e-mail: kamalov@gmail.com.

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Timur F. Kamalov (Moscow) – Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Prof., Department of Fundamental Physics and Nanotechnology, Federal State University of Education;
ORCID: 0000-0002-4349-4747; e-mail: timkamalov@gmail.com;

Nikolay V. Evdokimov (Moscow) – Postgraduate Student, Department of Fundamental Physics and Nanotechnology, Federal State University of Education;
ORCID: 0000-0002-5129-2619; e-mail: nv.evdokimov@gmail.com;

Yuriy T. Kamalov (Moscow) – Postgraduate Student, Department of Fundamental Physics and Nanotechnology, Federal University of Education;
ORCID: 0000-0003-0475-7556; e-mail: kamalov@gmail.com.

Научная статья

УДК 530.12

DOI: 10.18384/2949-5067-2024-4-43-53

О МЕТРИКЕ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ ТОЧЕЧНОЙ МАССЫ ДЛЯ НЕПОДВИЖНЫХ НАБЛЮДАТЕЛЕЙ

Кухаренко Н. И.

*Независимый исследователь, г. Жуковский, Московская область, Российская Федерация
e-mail: n_kuharenko@mail.ru*

Поступила в редакцию 05.03.2024

После доработки 03.06.2024

Принята к публикации 11.06.2024

Аннотация

Цель. Работа выполнена с целью получения приближённого выражения пространственно-временной метрики центрально-симметричного гравитационного поля точечной массы, являющейся обобщением метрики Шварцшильда для неподвижных наблюдателей, находящихся на любых отличных от нуля расстояниях от точечной массы.

Процедура и методы. Проведён анализ и использована структура метрики Шварцшильда и зависимости компонент метрического тензора от разности потенциалов гравитационного поля, что является одним из основных положений общей теории относительности.

Результаты. Получено приближённое выражение пространственно-временной метрики центрально-симметричного гравитационного поля точечной массы, являющееся обобщением метрики Шварцшильда для случая неподвижных наблюдателей, находящихся на любых отличных от нуля расстояниях от точечной массы. Полученная метрика асимптотически стремится к метрике Шварцшильда по мере удаления наблюдателя от точечной массы и является, как минимум, первым постньютоновским приближением к точному решению.

Теоретическая и практическая значимость. Анализ полученного выражения пространственно-временной метрики центрально-симметричного гравитационного поля точечной массы позволяет сделать вывод о том, что относительные горизонты видимости для наблюдателей с конечными радиальными координатами располагаются на сферах с радиальными координатами меньшими, чем гравитационный радиус.

Ключевые слова. общая теория относительности, решение Шварцшильда, наблюдатель, центрально-симметричное гравитационное поле

Для цитирования.

Кухаренко Н. И. О метрике гравитационного поля точечной массы для неподвижных наблюдателей // Вестник Государственного университета просвещения. Серия: Физика-математика. 2024. № 4. С. 48-53. <https://doi.org/10.18384/2949-5067-2024-4-43-53>

Original research article

ON THE METRIC OF THE GRAVITATIONAL FIELD OF A POINT MASS FOR STATIONARY OBSERVERS

N. Kukhareno

Independent researcher, Zhukovsky, Moscow region, Russian Federation

e-mail: n_kuharenko@mail.ru

Received by the editorial office 05.03.2024

Revised by the author 03.06.2024

Accepted for publication 11.06.2024

Abstract

Aim. The work is performed with the aim of obtaining an approximate expression for the space-time metric of the centrally symmetric gravitational field of a point mass, which is a generalization of the Schwarzschild metric for stationary observers located at any non-zero distance from the point mass.

Methodology. The analysis was carried out, the structure of the Schwarzschild metric and the dependence of the components of the metric tensor on the potential difference of the gravitational field were used, which is one of the main provisions of the general theory of relativity.

Results. An approximate expression for the space-time metric of the centrally symmetric gravitational field of a point mass is obtained, which is a generalization of the Schwarzschild metric for the case of stationary observers located at any non-zero distance from the point mass. The resulting metric asymptotically tends to the Schwarzschild metric as the observer moves away from the point mass and is, at least, the first post-Newtonian approximation to the exact solution.

Research implications. Analysis of the obtained expression for the space-time metric of the centrally symmetric gravitational field of a point mass allows us to conclude that the relative horizons of visibility for observers with finite radial coordinates are located on spheres with radial coordinates smaller than the gravitational radius.

Keywords: general relativity, Schwarzschild solution, observer, centrally symmetric gravitational field

For citation.

Kukhareno, N. I. (2024). On the metric of the gravitational field of a point mass for stationary observers. In: *Bulletin of the Federal State University of Education. Series: Physics and Mathematics*, 4, pp.43-53. <https://doi.org/10.18384/2949-5067-2024-4-43-53>

«Истина всегда оказывается проще, чем можно было предположить».

Р. Фейнман

Введение

При разработке основ общей теории относительности А. Эйнштейн отметил только один параметр, определяющий отличие метрики пространства-времени от евклидовой. А именно – разность потенциалов гравитационного поля между точкой, где находится наблюдатель, и наблюдаемой точкой (см. [1, с. 105–114]). И до настоящего времени других первичных параметров, определяющих «искривление» пространства-времени, т. е. отличие метрики пространства-времени от евклидовой, не отмечено [2–6]. Очень часто, однако, для разности

потенциалов гравитационного поля используют обозначение φ , а не $\Delta\varphi$, и возможно для краткости, используют термин «потенциал». В том, что речь идёт именно о разности потенциалов гравитационного поля между наблюдателем и наблюдаемой точкой, убеждает, например, изящное разрешение «парадокса часов». Так, в книге К. Мёллера (см. [5, с. 208–212]) используется выражение для вычисления разности потенциалов гравитационного поля, хотя используется термин «гравитационный потенциал». В книге Р. Толмена (см. [6, с. 199–204]) используется термин «разность значений гравитационных потенциалов» и обозначение $\Delta\psi$. Важно, однако, отметить следующее. В книге «Теория поля» Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшица (см. [2, с. 317–321]) приводится выражение для компонента g_{00} метрического тензора для нерелятивистского случая, т. е. случая малых скоростей (по сравнению со скоростью света c) и слабых гравитационных полей (точнее, малых значений разности потенциалов φ гравитационного поля между наблюдателем и наблюдаемой точкой). «...Возводя в квадрат и опуская члены, обращающиеся при $c \rightarrow \infty$ в нуль, находим: $ds^2 = (c^2 + 2\varphi)dt^2 - d\mathbf{r}^2$, где мы учли, что $vdt = d\mathbf{r}$.

Таким образом, компонента g_{00} метрического тензора в предельном случае равна $g_{00} = 1 + \frac{2\varphi}{c^2}$. (87,12)» [2, с. 320].

Здесь s – интервал, $\mathbf{v}$ – вектор скорости, $\mathbf{r}$ – вектор координат. Понятно, что выражение (87,12) для компонента g_{00} метрического тензора является, вообще говоря, приближённым (первым постньютоновским приближением). Именно это выражение мы будем использовать для построения приближённого выражения пространственно-временной метрики центрально-симметричного гравитационного поля точечной массы, являющейся обобщением метрики Шварцшильда, для неподвижных наблюдателей, находящихся на любых отличных от нуля расстояниях от точечной массы.

1. Анализ решения Шварцшильда

Если внимательно рассмотреть решение Шварцшильда, то можно отметить, что выражение $g_{00} = 1 + \frac{2\varphi}{c^2}$, где $\varphi = -\frac{km}{r}$, для этого решения является точным (в координатах Шварцшильда) везде, где $\varphi > -c^2/2$, т. е. там, где $g_{00} > 0$. Кроме того, в решении Шварцшильда $\varphi = -\frac{km}{r}$ при любых $r > 0$ (r – радиальная координата наблюдаемой точки в решении Шварцшильда, «радиус-вектор r » определён таким образом, чтобы длина окружности с центром в начале координат была равна $2\pi r$) [2, с. 386], m – масса тела, k – гравитационная постоянная). Как известно, решение Шварцшильда является точным решением уравнений Эйнштейна для гравитационного поля точечной массы m

относительно «удалённого» наблюдателя. В решении Шварцшильда пространственно-временная метрика имеет вид:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \cdot c^2 \cdot dt^2 - \frac{1}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)} \cdot dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta \cdot d\psi^2), \quad (1)$$

где ψ и θ – угловые координаты, $r_g = \frac{2km}{c^2}$ ([2, с. 385–394]). Если учесть, что

$-\frac{r_g}{r} = \frac{2\phi}{c^2}$, то метрику в решении Шварцшильда можно записать в виде:

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right) \cdot c^2 \cdot dt^2 - \frac{1}{\left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right)} \cdot dr^2 - r^2 \cdot (d\theta^2 + \sin^2 \theta \cdot d\psi^2). \quad (2)$$

Это и означает, что выражение $g_{00} = 1 + \frac{2\phi}{c^2}$ для этого решения является точным там, где $\phi > -c^2/2$, т.е. там, где $g_{00} > 0$. Условие $\phi > -c^2/2$ эквивалентно условию $r > r_g$.

Строго говоря, в решении Шварцшильда термин «удалённый» наблюдатель означает, что наблюдатель находится на бесконечном расстоянии от точечной массы (точнее, его радиальная координата r_0 стремится к бесконечности). Только для такого наблюдателя в классическом (Ньютоновском) приближении выражение разности потенциалов гравитационного поля между наблюдателем и наблюдаемой точкой с радиальной координатой r имеет вид $\phi = -\frac{km}{r}$.

2. Построение приближённого выражения пространственно-временной метрики центрально-симметричного гравитационного поля

Построим в первом постньютоновском приближении метрику для наблюдателя, имеющего конечную радиальную координату r_v («V» – от слова «Viewer» – наблюдатель), в гравитационном поле точечной массы. При этом будем следовать работам А. Эйнштейна (см. [1, с. 105–114]) и Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица [2, с. 317–321]. Вместо выражения $\phi = -\frac{km}{r}$ будем использовать выражение для разности потенциалов гравитационного поля $\Delta\phi$ (в ньютоновском приближении) между наблюдателем, имеющим конечную координату r_v , и наблюдаемой точкой с радиальной координатой r :

$$\Delta\phi = \frac{km}{r_v} - \frac{km}{r}. \quad (3)$$

Тот факт, что в решении Шварцшильда выражение $\phi = -\frac{km}{r}$ является точным при любых $r > 0$, даёт нам право поступить именно так и гарантирует, что метрика, которую получим в результате, если и не является точным решением, то, как минимум, является первым постньютоновским приближением.

Будем использовать те же «сферические пространственные координаты», что и в решении Шварцшильда (см. [2, с. 385–394]):

$$x^0 = ct, \quad x^1 = r, \quad x^2 = \theta, \quad x^3 = \psi,$$

выражение для метрики:

$$ds^2 = g_{00} \cdot c^2 \cdot dt^2 - g_{11} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta \cdot d\psi^2). \quad (4)$$

Тогда для компоненты метрического тензора g_{00} получаем выражение:

$$g_{00} = 1 + \frac{2\Delta\phi}{c^2} = 1 + \frac{2km}{c^2} \left(\frac{1}{r_V} - \frac{1}{r} \right) = 1 + r_g \left(\frac{1}{r_V} - \frac{1}{r} \right), \quad (5)$$

аналогично, для g_{11} :

$$g_{11} = - \frac{1}{1 + r_g \left(\frac{1}{r_V} - \frac{1}{r} \right)}, \quad (6)$$

выражения для $g_{22} = -r^2$ и $g_{33} = -r^2 \cdot \sin^2 \theta$ те же, что и в решении Шварцшильда (см. [2, с. 385–394]).

В результате получаем следующие выражения для метрики:

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2\Delta\phi}{c^2} \right) \cdot c^2 \cdot dt^2 - \frac{1}{\left(1 + \frac{2\Delta\phi}{c^2} \right)} \cdot dr^2 - r^2 \cdot (d\theta^2 + \sin^2 \theta \cdot d\psi^2) \quad (7)$$

или, используя обозначение r_g для гравитационного радиуса:

$$ds^2 = \left(1 + r_g \left(\frac{1}{r_V} - \frac{1}{r} \right) \right) \cdot c^2 dt^2 - \frac{1}{\left(1 + r_g \left(\frac{1}{r_V} - \frac{1}{r} \right) \right)} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta \cdot d\psi^2). \quad (8)$$

Теперь мы можем уточнить смысл термина «удалённый» наблюдатель в решении Шварцшильда. А именно: «удалённый» наблюдатель – это наблюдатель, для которого отличие $\Delta\phi = -\frac{km}{r}$ от более точного выражения

$\Delta\phi = \frac{km}{r_V} - \frac{km}{r}$ пренебрежимо мало, т. е. величина $\frac{km}{r_V}$ пренебрежимо мала по сравнению с величиной $\frac{km}{r}$.

В результате подстановки выражений (6) и (7) для компонент метрического тензора в уравнения [2, с. 387], получим, что в этом случае компоненты тензора энергии-импульса:

$$\frac{8\pi k}{c^4} \cdot T_1^1 = \frac{8\pi k}{c^4} \cdot T_0^0 = -\frac{r_g}{r_V \cdot r^2},$$

т. е. не равны нулю, что естественно на конечных расстояниях от тяготеющих

тел. При стремлении r_V к бесконечности величина $\frac{r_g}{r_V \cdot r^2}$ стремится к нулю, и мы

получаем условие на бесконечности, соответствующее решению Шварцшильда.

Легко видеть, что при $r_V \rightarrow \infty$ метрика (8) превращается в метрику решения Шварцшильда. Таким образом, можно считать, что полученные выражения (7) и (8) для наблюдателя, находящегося в точке с произвольным значением радиальной координаты r_V (в первом постньютоновском приближении), являются некоторым обобщением метрики Шварцшильда. Обратим внимание на то, что по мере приближения значения r_V к значению r (т. е. по мере приближения наблюдателя к наблюдаемой точке), компоненты метрического тензора g_{00} и g_{11} стремятся к единице, т. е. метрика приближается к метрике плоского пространства.

3. Дополнительные замечания

Вернёмся к рассмотрению метрики Шварцшильда (1). Сферическую поверхность радиуса r_g называют «горизонтом событий». Очевидно, что при стремлении $r \rightarrow r_g$, или, другими словами, при стремлении φ к $-c^2/2$, в связи с

тем, что $g_{00} = (1 - \frac{r_g}{r}) \cdot c^2$ стремится при этом к нулю, а $-g_{11} = \frac{1}{(1 - \frac{r_g}{r})}$ – к

бесконечности, можно ожидать некоторых «особенностей». А именно: время распространения световых сигналов от сферы радиуса до удалённого наблюдателя становится бесконечным [2, с. 402]:

«... По отношению r_g к **внешнему наблюдателю** сжатие к гравитационному радиусу сопровождается “самозамыканием” тела. Время распространения посылаемых с тела сигналов стремится к бесконечности. Действительно, для световых сигналов $ds^2 = 0$ и в шварцшильдовой системе имеем $c \cdot dt = dr / (1 - r_g / r)$; время распространения от r до некоторого $r_0 > r$ даётся интегралом

$$c\Delta t = \int_r^{r_0} \frac{dr}{1 - r_g / r} = r_0 - r + r_g \ln \frac{r_0 - r_g}{r - r_g}, \quad (102,9)$$

Расходящимся при $r \rightarrow r_g$.

Интервалы собственного времени на поверхности тела сокращены по отношению к интервалам времени t **бесконечно удалённого наблюдателя** в отношении

$$\sqrt{g_{00}} = \sqrt{1 - \frac{r_g}{r}};$$

при $r \rightarrow r_g$, следовательно, все процессы на теле по отношению к внешнему наблюдателю “застывают”» [2, с. 402].

Обратим внимание на то, что в приведённом фрагменте текста в одном предложении говорится о **бесконечно удалённом наблюдателе**, а чуть выше – о **внешнем наблюдателе**, что не вполне корректно. Выражения (7) и (8) для обобщения метрики Шварцшильда позволяют уточнить картину для **внешних наблюдателей**, имеющих конечные значения радиальной координаты r . Для метрики (7) и (8) особенности возникают тогда, когда значение $\Delta\phi$ стремится к

$$-c^2/2, \text{ или, другими словами, при стремлении значения } \frac{2\Delta\phi}{c^2} = r_g \left(\frac{1}{r_V} - \frac{1}{r} \right) \text{ к}$$

минус единице. Это означает, что при конечных значениях радиальной координаты наблюдателя r_V на сфере Шварцшильда (при $r = r_g$) никакой особенности нет, особенность появляется на сфере меньшего радиуса. Например, для наблюдателя, имеющего значение радиальной координаты

$$r_V = 2 \cdot r_g, \text{ особенности будут возникать при } r = \frac{2}{3} r_g, \text{ а для наблюдателя с } r_V = r_g$$

при $r = \frac{1}{2} r_g$. Таким образом, понятно, что «горизонты событий» для **внешних наблюдателей** с различными радиальными координатами $r_V < \infty$ также

расположены на сферах с различными радиальными координатами $r_{vh} = \frac{r_g}{1 + \frac{r_g}{r_V}}$.

Поэтому правильнее будет применять термин «относительный горизонт событий», а ещё точнее – «относительный горизонт видимости» (Relative Visibility Horizon, [8; 9]). Легко видеть, что при стремлении r_V к бесконечности значение r_{vh} стремится снизу к значению r_g , т. е. к гравитационному радиусу. Очевидно, что при любых конечных положительных значениях r_V значения $r_{vh} < r_g$. Это означает, что относительные горизонты видимости для таких наблюдателей всегда располагаются внутри сферы Шварцшильда. Напомним также, что по мере приближения наблюдателя к наблюдаемой точке, метрика (7), (8) приближается к метрике плоского пространства при любых положительных значениях r_V (в том числе и при $r_V = r_g$).

Приведённые выше выводы согласуются с результатами анализа решения Толмена [2; 8; 9]. В книге «Теория поля» при рассмотрении гравитационного коллапса пылевидной сферы сделано следующее замечание: «Обратим внимание на то, что во всех случаях момент прохождения поверхности коллапсирующего шара под шварцшильдову сферу ($r(\tau, R) = r_g$) ничем не замечателен для его внутренней динамики (описываемой метрикой в сопутствующей системе отсчета)» [2, с. 409]. Как известно, решение Толмена – это точное решение

уравнений Эйнштейна для гравитационного поля в материальной среде, полученное в общем виде для центрально-симметричного случая в пренебрежении давлением вещества, т. е. для «пылевидной» материи без вращения. Решение Толмена получено в сопутствующей системе координат, т. е. для наблюдателя, падающего вместе с «пылинками» вещества. Это решение как нельзя более подходит для анализа «космологических» задач, когда в качестве «пылинок» рассматриваются галактики и скопления галактик; давлением межгалактической пыли и давлением света, а также воздействием других полей, кроме гравитационного, на движение «пылинок» можно пренебречь. В том случае, когда начальная скорость пылинки равна нулю, наблюдатель, находящийся на падающей пылинке, отличается от неподвижного наблюдателя, имеющего такую же радиальную координату r_v , только наличием ускорения свободного падения. Для оценки величины ускорения свободного падения воспользуемся одним интересным свойством решения Толмена. В работах [3] и [7] показано, что выражение для ускорения свободного падения в сопутствующей системе координат имеет в точности тот же вид, что и в классическом законе всемирного тяготения Ньютона: $\ddot{r} = -\frac{km}{r^2}$, где r «... представляет собой “радиус”, определенный так, что $2\pi r$ есть длина окружности (с центром в начале координат)», ([2, с. 406]). Поскольку при выводе решения Толмена не делалось никаких предположений о слабости полей или малых массах, то это выражение в сопутствующей системе координат является некоторым обобщением закона всемирного тяготения Ньютона [7]. Отметим, что r в решении Толмена имеет тот же смысл, что и радиальная координата в решении Шварцшильда, что позволяет сопоставлять результаты этих точных аналитических решений уравнений Эйнштейна. Очевидно, что никаких особенностей для наблюдателя в сопутствующей системе координат нет при строго положительных значениях радиальной координаты r , т. к. в этом случае значение ускорения свободного падения конечно. Получим выражение для вычисления ускорения свободного падения на поверхности сферы Шварцшильда в том случае, когда вся масса расположена в начале системы координат (точечная масса), или когда масса равномерно распределена внутри сферы Шварцшильда:

$$\ddot{r} = -\frac{k \cdot m}{r_g^2} = -\frac{c^4}{4 \cdot k \cdot m}.$$

Обратим внимание на то, что значение ускорения свободного падения обратно пропорционально значению массы. Для массы Земли ($5976 \cdot 10^{21}$ кг) и

массы Солнца ($1.99 \cdot 10^{30}$ кг) благодаря очень большому множителю $\frac{c^4}{k}$ эти значения огромны. Однако уже для массы 10000 галактик ($\sim 10000 \cdot 10^{41}$ кг) значение ускорения свободного падения на поверхности сферы Шварцшильда имеет значение ~ 0.03 м/с², т. е. уже отнюдь не чрезмерно большое. Для массы $\sim 2 \cdot 10^{53}$ (порядок массы нашей видимой Вселенной) получаем значение гравитационного радиуса $\sim 3 \cdot 10^{26}$ м (по порядку величин близко к размерам нашей видимой Вселенной), а для ускорения свободного падения на поверхности сферы Шварцшильда – значение $\sim 10^{-10}$ м/с². Понятно, что неподвижный и «падающий» в сопутствующей системе наблюдатели будут видеть практически одно и то же, не говоря уже об отсутствии для них какой-либо особенности на сфере Шварцшильда.

Отметим также, что выводы, полученные выше на основе предложенной метрики (выражения (7) и (8)), вполне согласуются также с принципом эквивалентности: «... всегда в любой интересующей нас пространственно-временной точке возможен переход к координатам, в которых эффекты гравитации исчезают в окрестности этой точки» [6, с. 183]. Отсюда следует, что в сопутствующей («падающей») системе координат пространство-время «плоское», во всяком случае в ближайшей окрестности падающего наблюдателя.

Интересно отметить часто встречающиеся в литературе утверждения о невозможности существования неподвижных тел под сферой Шварцшильда: «... мы имеем дело лишь с невозможностью осуществления при $r < r_g$ жесткой системы отсчета» [2, с. 398]; «Очевидно, никакое статическое тело не может иметь размер меньше r_g » [4, с. 90]; «ибо в этой области...(внутри сферы Шварцшильда) ... недеформирующихся систем отсчета не существует», опровергаются примером нашей видимой Вселенной. По имеющимся оценкам, её гравитационный радиус примерно равен её размерам (а возможно, и несколько их превосходит). По-видимому, можно считать, что мы (вместе с галактиками и звездами) находимся внутри «сферы Шварцшильда» для нашей видимой Вселенной. Мы находимся в роли наблюдателя на «падающей пылинке» в сопутствующей системе координат (как в решении Толмена). Однако скорости и ускорения нашей «пылинки» (галактики, солнечной системы) не настолько велики, чтобы невозможно было представить себе жесткую систему отсчета, хотя бы в пределах нашей видимой Вселенной. Следует обратить внимание, однако, что наблюдатель, для которого может быть осуществлена жесткая система отсчета, не является «удаленным наблюдателем» [4, с. 90].

По-видимому, в рамках общей теории относительности (ОТО), теории, в самом названии которой подчёркивается, что эта теория рассматривает, что одно и то же явление выглядит различно для (*относительно*) различных наблюдателей, имеет смысл рассматривать те или иные объекты с точки зрения (т. е. *относительно*) таких наблюдателей, для которых эти объекты находятся «в пределах видимости». Попытки построить решение (и, например, жёсткую

систему координат) для наблюдателя в области, находящейся за пределами относительного горизонта видимости, могут привести к некоторым некорректным выводам.

Представляется рациональным следующий порядок рассмотрения задач, в которых требуется учитывать эффекты ОТО. Сначала следует рассмотреть движение объекта наблюдения, (или явление в целом) в сопутствующей или, как минимум, в приближённой к объекту наблюдения системе координат. После этого можно выяснять, как выглядит это движение для наблюдателей, находящихся в различных точках относительно объекта наблюдения. Следует отметить, что возможны ситуации, когда для некоторых наблюдателей рассматриваемый объект наблюдения окажется за пределами их относительных горизонтов видимости (см. [8; 9]).

Заключение

1. Получено следующее приближённое выражение пространственно-временной метрики центрально-симметричного гравитационного поля точечной массы, являющееся обобщением метрики Шварцшильда для неподвижных наблюдателей, находящихся на любых отличных от нуля расстояниях от точечной массы:

$$ds^2 = \left(1 + r_g \left(\frac{1}{r_V} - \frac{1}{r}\right)\right) \cdot c^2 dt^2 - \frac{1}{\left(1 + r_g \left(\frac{1}{r_V} - \frac{1}{r}\right)\right)} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta \cdot d\psi^2) \cdot$$

2. В результате анализа полученного выражения пространственно-временной метрики получено выражение для радиальных координат относительных горизонтов видимости (Relative Visibility Horizon) для наблюдателей с конечными радиальными координатами ($r_V < \infty$):

$$r_{rvh} = \frac{r_g}{1 + \frac{r_g}{r_V}}.$$

Понятно, что относительные горизонты видимости для наблюдателей с конечными значениями радиальных координат расположены ниже сферы Шварцшильда.

ЛИТЕРАТУРА

1. Эйнштейн А. О принципе относительности и его следствиях // Эйнштейн А. Собрание научных трудов: в 4 т. Т. 1. Работы по теории относительности. М.: Наука, 1965. С. 65–114.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: в 10 т. Т. II. Теория поля. М.: Наука, 1988. 512 с.
3. Сборник задач по теории относительности и гравитации / А. Лайтман, В. Пресс, Р. Прайс, С. Тюкольски; пер. с англ. А. П. Бондарева, Ю. А. Данилова, под ред. И. М. Халатникова. М.: Мир, 1979. 536 с.
4. Зельдович Я. Б., Новиков И. Д. Релятивистская астрофизика. М.: Наука, 1967. 656 с.

5. Мёллер К. Теория относительности / пер. с англ. В. Г. Кречета, В. Г. Лапчинского, под ред. Д. Иваненко. М.: Атомиздат, 1975. 400 с.
6. Толмен Р. Относительность, термодинамика и космология / пер. с англ. В. М. Дубовика, В. К. Игнатовича, под ред. Я. А. Смородинского. М.: Наука, 1974. 520 с.
7. Кухаренко Н. И. Об одном свойстве решения Толмена // Преподавание физики в высшей школе. 2005. № 30. С. 121–123.
8. Кухаренко Н. И. Об относительных горизонтах видимости и разности потенциалов гравитационного поля // Преподавание физики в высшей школе. 2006. № 32. С. 198–200.
9. Кухаренко Н. И. К вопросу об использовании термина «горизонт событий» // Преподавание физики в высшей школе. 2007. № 34. С. 118–122.

REFERENCES

1. Einstein, A. (1965). On the Principle of Relativity and Its Consequences. In: Einstein, A. *Collected Scientific Works: in 4 volumes. Vol. 1. Works on the Theory of Relativity*. Moscow: Nauka publ., pp. 65–114 (in Russ.).
2. Landau, L. D. & Lifshitz, E. M. (1988). *Theoretical Physics: in 10 volumes. Vol. II. Field Theory*. Moscow: Nauka publ. (in Russ.).
3. Lightman, A., Press, W., Price, R. & Teukolsky, S. (1979). *Problem book in Relativity and Gravitation*. Moscow: Mir publ. (in Russ.).
4. Zeldovich, Ya. B. & Novikov, I. D. (1967). *Relativistic Astrophysics*. Moscow: Nauka publ. (in Russ.).
5. Möller, C. (1975). *The theory of relativity*. Moscow: Atomizdat publ. (in Russ.).
6. Tolman, R. (1974). *Relativity, Thermodynamics, and Cosmology*. Moscow: Nauka publ. (in Russ.).
7. Kukhareno, N. I. (2005). On One Property of Tolman's Solution. In: *Teaching Physics in Higher School*, 30, 121–123 (in Russ.).
8. Kukhareno, N. I. (2006). On the relative horizons of visibility and the potential difference of the gravitational field. In: *Teaching Physics in Higher Education*, 32, 198–200 (in Russ.).
9. Kukhareno, N. I. (2007). On the use of the term “event horizon”. In: *Teaching Physics in Higher Education*, 34, 118–122. (in Russ.).

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Кухаренко Николай Иванович (г. Жуковский, Московская обл.) – независимый исследователь;
e-mail: n_kuharenko@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Nikolay I. Kukhareno (Zhukovsky, Moscow region) – Independent researcher;
e-mail: n_kuharenko@mail.ru

Научная статья

УДК 53.081.6

DOI: 10.18384/2949-5067-2024-4-54-85

О НЕКОТОРЫХ ВОЗМОЖНЫХ СЛЕДСТВИЯХ СООТНОШЕНИЙ ПЛАНКОВСКИХ ВЕЛИЧИН

Никоненко К. Л.

Независимый исследователь, г. Москва, Российская Федерация

e-mail: klnikon2013@mail.ru

Поступила в редакцию 12.09.2024

После доработки 19.09.2024

Принята к публикации 23.09.2024

Аннотация

Цель. Поиск варианта LT-системы единиц, максимально согласованной с международной системой единиц SI и подсистемами системы единиц CGS.

Процедура и методы. Проведён анализ соотношений физических величин в международной системе единиц SI, подсистемах CGS и планковской LT-системе единиц. Предложен метод определения значений физических величин по критерию максимальной степени согласованности между рекомендуемыми CODATE значениями констант для определяющих уравнений связи.

Результаты. Получены условно точные значения планковской длины $\ell_P = 1.616255272206877 \cdot 10^{-35} \cdot m$, постоянной тонкой структуры $\alpha = 7.297352564390205 \cdot 10^{-3}$ и ряда других физических констант. Предложен вариант планковской LT-системы (PLT) единиц, и уточнены переводные коэффициенты между электромагнитными величинами SI и CGS.

Теоретическая и практическая значимость заключается в возможности применения PLT-системы единиц и условно точных значений ряда физических констант для расчётных методов и математических моделей физических процессов в различных областях науки и техники.

Ключевые слова: гравитационная постоянная Ньютона, международная СИ, планковская длина, постоянная тонкой структуры, планковская LT-система единиц, система CGS, CODATE

Для цитирования:

Никоненко К. Л. О некоторых возможных следствиях соотношений планковских величин // Вестник Государственного университета просвещения. Серия: Физика-математика. 2024. № 4. С. 54-85. <https://doi.org/10.18384/2949-5067-2024-4-54-85>

Original research article

ON SOME CONCLUSIONS FROM THE RELATIONS OF PLANCK QUANTITIES

K. Nikonenko

An Independent researcher, Moscow, Russian Federation

e-mail: klnikon2013@mail.ru

Received by the editorial office 12.09.2024

Revised by the author 19.09.2024

Accepted for publication 23.09.2024

Abstract

Aim. Search for a variant of the LT system of units that is maximally consistent with the international SI and the subsystems of the CGS system of units.

Methodology. The analysis of the ratios of physical quantities in the international SI, CGS subsystems and Planck LT systems of units is carried out. A method is proposed for determining the values of physical quantities according to the criterion of the maximum degree of consistency between the recommended CODATE values of constants for defining coupling equations.

Results. Conditionally accurate values of the Planck length are obtained $\ell_p = 1.616255272206877 \cdot 10^{-35} \cdot m$, the fine structure constant $\alpha = 7.297352564390205 \cdot 10^{-3}$, and a number of other physical constants were obtained. A variant of the Planck LT system of units is proposed and the conversion coefficients between the electromagnetic quantities of the analyzed systems of units are clarified.

Research implications. It consists in the possibility of using the PLT system of units and conditionally accurate values of a number of physical constants for computational methods and mathematical models of physical processes in various fields of science and technology.

Keywords: Newtonian constant of gravitation, international SI, Planck length, fine structure constant, Planck LT system of units, CGS system, CODATE

For citation.

Nikonenko, K. L. On some conclusions from the relations of Planck quantities. In: *Bulletin of the Federal State University of Education. Series: Physics and Mathematics*, 4, pp. 54-85. <https://doi.org/10.18384/2949-5067-2024-4-54-85>

Введение

В астрономии в перечень телесных констант входят солнечный массовый параметр GM_S и геоцентрическая гравитационная константа GM_E [1, p. 296]. Их величины имеют размерность $L^3 \cdot T^{-2}$, что соответствует размерности массы в представлении Джеймса Клерка Максвелла [2, с. 31] и Роберта Людвиговича Бартини [3, с. 253]. Переводным коэффициентом для значения в единицах массы соответствующей системы единиц служит Гравитационная постоянная Ньютона (G_N), т.е. $M_S = GM_S/G_N$ и $M_E = GM_E/G_N$, соответственно. Однако это соотношение на несколько порядков увеличивает стандартную неопределённость объективно наблюдаемых величин. Этот факт явился предпосылкой для поиска варианта LT-системы единиц, максимально

согласованной с международной SI и подсистемами CGS, и метода уточнения ряда физических констант исходя из принципа единства законов физики.

1. Значения планковских величин и основных физических констант в размерности LT

Используя известные уравнения связи физических величин², рассмотрим соотношение планковских констант, выраженных единицами пространственной протяжённости, времени и массы (LTM) в подсистемах семейства CGS (CGS), в единицах пространственной протяжённости, времени, массы и электрического тока (LTMI) международной СИ (SI) и эквивалентных им систем единиц, выраженных только единицами пространственной протяжённости и времени (далее – LT):

LT–SI – адекватной международной системе единиц (SI);

LT–G – адекватной симметричной CGS, или гауссовой системе единиц (CGS–G);

LT–ESU – адекватной электростатической CGS (CGS–ESU);

LT–EMU – адекватной электромагнитной CGS (CGS–EMU);

LT–HL – адекватной единицам Хевисайда-Лоренца (CGS–HL);

LT–B – адекватной единицам кинематической LT-системы Ди Бартини при условии, что квантами протяжённости и длительности во времени являются, соответственно, планковская длина ℓ_P и Планковское время t_P .

Из уравнения связи

$$\ell_P = \sqrt{\frac{G_N \cdot \hbar}{c^3}} \quad (1)$$

следует, что

$$G_N = \frac{\ell_P^2 \cdot c^3}{\hbar} \quad (2)$$

Планковская масса определяется уравнением

$$M_P = \sqrt{\frac{\hbar \cdot c}{G_N}} = \frac{\hbar}{c \cdot \ell_P} \quad (3)$$

Тогда Планковская масса в размерности LT независимо от исходной системы единиц:

$$M_P^{LT} = M_P \cdot G_N = \frac{\hbar}{c \cdot \ell_P} \cdot \frac{\ell_P^2 \cdot c^3}{\hbar} = \ell_P \cdot c^2, \quad (4)$$

а гравитационная постоянная Ньютона тождественно равна 1:

$$G_N^{LT} = \frac{\ell_P^2 \cdot c^3}{\hbar \cdot G_N} = 1 \quad (5)$$

Для выражения масс покоя элементарных частиц (M_{ep}^{rm}) через планковскую массу введём безразмерный показатель, равный отношению массы покоя

² См.: Яворский Б. М., Детлаф А. А., Лебедев А. К. Справочник по физике для инженеров и студентов; 8-е изд. М.: ОНИКС; «Мир и образование», 2006. С. 1004. Далее – Справочник по физике для инженеров и студентов.

элементарной частицы к планковской массе который, соответственно, будет справедлив для любой системы единиц:

$$K_{ep}^{rm} = \frac{M_{ep}^{rm}}{M_P} = \frac{\frac{\hbar}{c \cdot \lambda_{C,ep}}}{\frac{\hbar}{c \cdot \ell_P}} = \frac{\ell_P}{\lambda_{C,ep}}, \quad (6)$$

поскольку

$$K_{ep}^{rm} = \frac{M_{ep}^{rmLT}}{M_P^{LT}} = \frac{M_{ep}^{rmSI}}{M_P^{SI}} = \frac{M_{ep}^{rmCGS}}{M_P^G} = \frac{\ell_P}{\lambda_{C,ep}} = \frac{\ell_P^{SI}}{\lambda_{C,ep}^{SI}} = \frac{\ell_P^{CGS}}{\lambda_{C,ep}^{CGS}}$$

Во всех подсистемах CGS выраженный в основных единицах электрический заряд включает единицу массы в степени $\frac{1}{2}$. Таким образом, переводным коэффициентом для электрического заряда между подсистемами CGS и системами LT является:

$$\sqrt{G_N} = \sqrt{\frac{\ell_P^2 \cdot c^3}{\hbar}} \quad (7)$$

Планковский заряд в подсистемах CGS имеет следующие значения

$$\begin{aligned} q_P^{CGS-EMU} &= \sqrt{\hbar/c} = \sqrt{\hbar^{CGS}/c^{CGS}} \\ q_P^{CGS-G} &= q_P^{CGS-ESU} = q_P^{CGS-B} = \sqrt{\hbar \cdot c} = \sqrt{\hbar^{CGS} \cdot c^{CGS}} \\ q_P^{CGS-HL} &= \sqrt{4 \cdot \pi \cdot \hbar \cdot c} = \sqrt{4 \cdot \pi \cdot \hbar^{CGS} \cdot c^{CGS}} \end{aligned}$$

Тогда Планковский заряд в системах LT соответственно равен:

$$\begin{aligned} q_P^{LT-EMU} &= \sqrt{\hbar/c} \cdot \sqrt{G_N} = \sqrt{\hbar/c} \cdot \sqrt{\frac{\ell_P^2 \cdot c^3}{\hbar}} = \ell_P \cdot c \\ q_P^{LT-G} &= q_P^{LT-ESU} = q_P^{LT-B} = \sqrt{\hbar \cdot c} \cdot \sqrt{G_N} = \sqrt{\hbar \cdot c} \cdot \sqrt{\frac{\ell_P^2 \cdot c^3}{\hbar}} = \ell_P \cdot c^2 \\ q_P^{LT-HL} &= \sqrt{4 \cdot \pi \cdot \hbar \cdot c} \cdot \sqrt{G_N} = \sqrt{4 \cdot \pi \cdot \hbar \cdot c} \cdot \sqrt{\frac{\ell_P^2 \cdot c^3}{\hbar}} = \sqrt{4 \cdot \pi} \cdot \ell_P \cdot c^2 \end{aligned}$$

2. О соотношении CGS и SI

В международной SI ампер базовая единица, имеющая тот же статус, что и метр, килограмм и секунда, и взаимосвязь в определении ампера с метром и ньютоном не учитывается, и ампер не рассматривается как размерно эквивалентный какой-либо комбинации других базовых единиц, но, по сути, это та же электромагнитная система, что и CGS – EMU, т.к. соотношение $c^2 \cdot \mu_0 \cdot \varepsilon_0 = 1$ сохраняется.

Поскольку планковский заряд в SI³

$$q_P^{SI} = \frac{e}{\sqrt{\alpha}} = 1.87554603842(14) \cdot 10^{-18} \cdot A \cdot s,$$

то согласно [6] будет справедливым значение:

$$q_P^{SI} = \sqrt{\frac{\hbar}{c}} \cdot \sqrt{\frac{10^7}{m \cdot kg}} \cdot A \cdot s = 1.8755460382902112 \cdot 10^{-18} \cdot A \cdot s \quad (8)$$

Поскольку это значение находится в границах стандартной неопределённости планковского заряда, рассчитанного согласно рекомендуемого CODATA [4] значения постоянной тонкой структуры α , то согласно (7) допустимо полагать:

$$q_P^{LT-SI} = \sqrt{\frac{\hbar}{c}} \cdot \sqrt{G_N} = \sqrt{\frac{\hbar}{c}} \cdot \sqrt{\frac{\ell_P^2 \cdot c^3}{\hbar}} = \ell_P \cdot c \quad (9)$$

Вышеприведённые соотношения позволяют утверждать, что в этом случае исключается аномалия SI для электромагнитных величин. Так, например:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0^{SI} &= \frac{e^{SI^2}}{4 \cdot \pi \cdot \alpha \cdot c^{SI} \cdot \hbar^{SI}} = \frac{q_P^{SI^2}}{4 \cdot \pi \cdot c^{SI} \cdot \hbar^{SI}} = \\ &= \frac{\left(\sqrt{\frac{\hbar \cdot 10^7}{c \cdot m \cdot kg}} \cdot A \cdot s \right)^2}{4 \cdot \pi \cdot c^{SI} \cdot \hbar^{SI}} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot c^{SI^2}} \cdot \frac{10^7 \cdot A^2 \cdot s^2}{m \cdot kg} = \\ &= 8.854187817620389 \cdot 10^{-12} \cdot s^4 \cdot A^2 \cdot m^{-3} \cdot kg^{-1} = \\ &= 8.854187817620389 \cdot 10^{-12} \cdot F/m \\ \mu_0^{SI} &= \frac{1}{c^{SI^2}} = \\ &= \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot c^{SI^2} \cdot 10^7 \cdot A^2 \cdot s^2 \cdot m^{-1} \cdot kg^{-1}} = \\ &= 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot m \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-2} = 1.2566370614359172 N/A^2 \end{aligned}$$

В табл. 1 представлены соотношения планковского заряда (q_P) в различных системах (подсистемах) единиц.

³ См.: Планковские единицы [Электронный ресурс] // Wikipedia : [сайт]. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Планковские_единицы (дата обращения: 14.09.2024).

Таблица 1 / Table 1

Соотношение значений планковского заряда (q_p) в различных системах (подсистемах) единиц / The ratio of the values of the Planck charge (q_p) in various systems (subsystems) of units

LT			Переводной коэффициент PLT – CGS	CGS			Переводной коэффициент	SI	
Подсистема	Размерность	Значение		Подсистема	Размерность	Значение		Размерность	Значение
SI							$\sqrt{\frac{10^7 \cdot \hbar^{SI}}{c^{SI} \cdot m \cdot kg}} \cdot \frac{A \cdot s}{\ell_p \cdot c}$		
EMU	$\frac{\ell_p^2}{t_p}$	$\ell_p \cdot c$	$\frac{\sqrt{\hbar^{CGS} / c^{CGS}}}{\ell_p \cdot c}$	EMU	$\frac{1}{cm^{\frac{1}{2}} \cdot gm^{\frac{1}{2}}}$	$\sqrt{\hbar^{CGS} / c^{CGS}}$	$\frac{10 \cdot A \cdot s}{cm^{\frac{1}{2}} \cdot gm^{\frac{1}{2}}}$		
G		$\ell_p \cdot c^2$	$\frac{\sqrt{\hbar^{CGS} \cdot c^{CGS}}}{\ell_p \cdot c^2}$	G	$\frac{1}{cm^{\frac{1}{2}} \cdot gm^{\frac{1}{2}}}$	$\sqrt{\hbar^{CGS} \cdot c^{CGS}}$	$\frac{10 \cdot A \cdot s}{c^{CGS} \cdot cm^{\frac{1}{2}} \cdot gm^{\frac{1}{2}}}$	$A \cdot s$	$\frac{e}{\sqrt{\alpha}}$
ESU				ESU					
B				B					
HL	$\frac{\ell_p^3}{t_p^2}$	$\frac{\sqrt{4 \cdot \pi \cdot \ell_p \cdot c^2}}{\sqrt{4 \cdot \pi \cdot \hbar^{CGS} \cdot c^{CGS}}}$		HL	$\frac{cm^{\frac{3}{2}} \cdot gm^{\frac{1}{2}}}{c}$	$\sqrt{4 \cdot \pi \cdot \hbar^{CGS} \cdot c^{CGS}}$	$\frac{10 \cdot A \cdot s}{\sqrt{4 \cdot \pi \cdot c^{CGS} \cdot cm^{\frac{1}{2}} \cdot gm^{\frac{1}{2}}}}$		

Источник: по данным [5, р. 779, 781] и [6], обобщённым автором

SI и каждая из подсистем семейства CGS является самодостаточной с точки зрения интерпретации уравнений связи и вычислительных возможностей. Но каждая ли из них может быть базой для натуральной планковской LT-системы (PLT) единиц?

Согласно вышеизложенному и данным [5, р. 779, 781] и [6] сформирована табл. 2.

Таблица 2 / Table 2

Значения основных констант и согласующих коэффициентов в подсистемах единиц LT / The values of the basic constants and matching coefficients in the subsystems of the LT units

Наименование	Обозн.	Значение					
		SI	EMU	G	ESU	B	HL
Планковская длина	ℓ_P	ℓ_P					
Планковское время	t_P	t_P					
Скорость света	c	ℓ_P/t_P					
Постоянная Дирака (приведённая постоянная Планка)	$\hbar$	$\ell_P^2 \cdot c^3$					
Постоянная Планка	h	$2 \cdot \pi \cdot \ell_P^2 \cdot c^3$					
Гравитационная постоянная Ньютона	G_N	1					
Планковская масса	M_P	$\ell_P \cdot c^2$					
Масса покоя элементарной частицы	M_{ep}	$K_{ep}^{rm} \cdot \ell_P \cdot c^2$					
Планковский заряд	q_P	$\ell_P \cdot c$		$\ell_P \cdot c^2$		$\sqrt{4 \cdot \pi} \cdot \ell_P \cdot c^2$	
Элементарный заряд	e	$\sqrt{\alpha} \cdot \ell_P \cdot c$		$\sqrt{\alpha} \cdot \ell_P \cdot c^2$		$\sqrt{\alpha \cdot 4 \cdot \pi} \cdot \ell_P \cdot c^2$	
Постоянная Кулона (коэффициент пропорциональности в законе Кулона)	k_C, k_1	c^2		1		$\frac{1}{4 \cdot \pi}$	
Электрическая постоянная	ε_0	$\frac{1}{4 \cdot \pi \cdot c^2}$	$\frac{1}{c^2}$	1			
Постоянная магнитной силы из закона Био-Савара (коэффициент пропорциональности в законе силы Ампера)	k_A, k_2	1		$\frac{1}{c^2}$		$\frac{1}{4 \cdot \pi \cdot c^2}$	
Магнитная постоянная	μ_0	$4 \cdot \pi$	1	1	$\frac{1}{c^2}$	1	
Согласующий коэффициент в уравнении связи для магнитной индукции	a	1		c	1		c
Согласующий коэффициент в законе индукции Фарадея ($k_3 = a^{-1}$)	k_3	1		$\frac{1}{c}$	1		$\frac{1}{c}$

Окончание таблицы 2

Наименование	Обозн.	Значение					
		SI	EMU	G	ESU	B	HL
Константы пропорциональности для электромагнитных уравнений в среде	λ	1	$4 \cdot \pi$				1
	$\hat{\lambda}$	1	$4 \cdot \pi$				1

постоянных и коэффициентов в уравнениях связи законов электромагнетизма. Соответственно различны и электромагнитные величины для каждой из этих подсистем единиц. И это связано прежде всего с соображениями удобства представления расчётов и результатов исследования. Однако важно отметить, что согласно [3, с. 253] электрический заряд имеет в системе LT размерность $L^3 \cdot T^{-2}$, кроме того, именно эта размерность электрических зарядов вытекает из электростатической, симметричной (Гауссовой) и Хевисайда-Лоренца подсистем единиц, ещё не полностью вытесненных международной SI из физики, особенно из её разделов, связанных с физикой элементарных частиц. К тому же одинаковые размерности массы и электрического заряда упрощают их соотношение в ряде физических констант, что склоняет чашу весов к электростатической подсистеме. В дальнейшем изложении будем полагать планковской LT-системой (PLT) единиц именно LT – ESU, базовыми размерными единицами которой являются планковская длина и планковское время.

Важно, что для подсистем единиц, приведённых в табл. 2 вид уравнений поля электрического смещения D и напряжённости магнитного поля H, макроскопические формы уравнений Максвелла и уравнения силы Лоренца в зависимости от значений ϵ_0 , μ_0 и констант рационализации, приведённых в табл. 2, полностью соответствуют [5, р. 781].

Учитывая (7), определим значение поправочного коэффициента электрического заряда $K_{\Delta e}$ для переводных коэффициентов между электромагнитными величинами SI и других систем (подсистем) единиц, рассматриваемых в данной работе:

$$K_{\Delta e} = \frac{q_P^{LT-SI} / \sqrt{G_N}}{\left(\frac{e^{SI}}{\sqrt{\alpha}}\right)} = \frac{\sqrt{\frac{\hbar^{SI}}{c^{SI}}} \cdot \sqrt{\frac{10^7}{m \cdot kg}} \cdot A \cdot s}{\frac{e^{SI}}{\sqrt{\alpha}}} = 0.999999999931(75) \quad (10)$$

Необходимо отметить, что для значений, рекомендованных CODATE предыдущей версии (2018 года), рассчитанное по формуле (10) значение этого коэффициента $K_{\Delta e} = 1.000000000274(74)$.

Согласно работе [7], измеренные в период 2006–2017 годов значения таких базовых констант, как постоянная Планка (h), элементарный заряд (e), постоянная тонкой структуры (α), имеют соответствующую стандартную

неопределённость ($u(h)$, $u(e)$, $u(\alpha)$). Суммарная стандартная неопределённость рассчитывается по формуле⁴:

$$u(K_{\Delta e}) = \sqrt{\left(\frac{dK_{\Delta e}}{dh} \cdot u(h)\right)^2 + \left(\frac{dK_{\Delta e}}{de} \cdot u(e)\right)^2 + \left(\frac{dK_{\Delta e}}{d\alpha} \cdot u(\alpha)\right)^2}$$

относительная стандартная неопределённость – по формуле:

$$\delta(K_{\Delta e}) = \frac{u(K_{\Delta e})}{K_{\Delta e}}$$

Расчёты по исходным данным [7] дают значение $K_{\Delta e} = 1$ со следующими значениями относительной стандартной неопределённости:

$$\delta(K_{\Delta e})_{2006} = 3.4 \cdot 10^{-7} \text{ – по данным 2006 года,}$$

$$\delta(K_{\Delta e})_{2010} = 1.6 \cdot 10^{-7} \text{ – по данным 2010 года,}$$

$$\delta(K_{\Delta e})_{2014} = 1.2 \cdot 10^{-7} \text{ – по данным 2014 года,}$$

$$\delta(K_{\Delta e})_{2017} = 1.7 \cdot 10^{-8} \text{ по данным 2017 года,}$$

то есть асимптотически приближаются к тождественной 1, что допускает эквивалентность систем единиц SI и семейства подсистем системы единиц CGS.

К сожалению, по измеренным значениям основных физических констант, на основе которых сформированы международные рекомендованные CODATA значения на 2022 год, публикаций пока нет.

В табл. 3 приведены соотношения значений планковского заряда в системах LT, SI и подсистемах CGS.

⁴ ГОСТ Р 34100.3–2017. Неопределённость измерения. Часть 3. Руководство по выражению неопределённости измерения. М.: Стандартинформ, 2018. С. 18.

Таблица 3 / Table 3

Соотношения значений планковского заряда PLT, подсистем CGS и SI /
Ratios of Planck charge values of PLT, CGS subsystems and SI

PLT		Переводной коэффициент PLT – CGS	CGS			Переводной коэффициент	SI	
Размерность	Значение		Подсистема	Размерность	Значение		Размерность	Значение
$\ell_P^3 \cdot t_P^{-2}$	$\ell_P \cdot c^2$					$\sqrt{\frac{10^7 \cdot \hbar^{SI}}{c^{SI} \cdot m \cdot kg}} \cdot \frac{A \cdot s}{K_{\Delta e} \cdot \ell_P \cdot c^2}$	$A \cdot s$	$\frac{e}{\sqrt{\alpha}}$
		$\frac{\sqrt{\hbar^{CGS} \cdot c^{CGS}}}{\ell_P \cdot c^2}$	EMU	$\frac{1}{cm^{\frac{1}{2}} \cdot gm^{\frac{1}{2}}}$	$\sqrt{\hbar^{CGS} / c^{CGS}}$	$\frac{10 \cdot A \cdot s}{K_{\Delta e} \cdot \sqrt{cm \cdot gm}}$		
		$\frac{\sqrt{\hbar^{CGS} \cdot c^{CGS}}}{\ell_P \cdot c^2}$	G	$\frac{1}{cm^{\frac{1}{2}} \cdot gm^{\frac{1}{2}}}$	$\sqrt{\hbar^{CGS} \cdot c^C}$	$\frac{10 \cdot A \cdot s}{K_{\Delta e} \cdot c^{CGS} \cdot \sqrt{cm \cdot gm}}$		
			ESU					
			B					
$\frac{\sqrt{4 \cdot \pi \cdot \hbar^{CGS} \cdot c^{CGS}}}{\ell_P \cdot c^2}$	HL	$\sqrt{4 \cdot \pi}$	$\frac{10 \cdot A \cdot s}{K_{\Delta e} \cdot \sqrt{4 \cdot \pi \cdot c^{CGS} \cdot \sqrt{cm \cdot gm}}}$					

Источник: по данным автора

Таким образом, посредством поправочного коэффициента электрического заряда в пересчёте на 1 ампер согласуются любые электромагнитные единицы LT и подсистем CGS с международной SI.

3. Роль скорости света в значениях физических констант

Рассмотрим с позиции PLT и значений, приведённых табл. 2, уравнения связи для констант, имеющих размерность пространственной протяжённости, например:

– постоянной Ридберга:

$$R_{\infty} = \frac{M_e^{PLT} \cdot (e^{PLT})^4}{4 \cdot \pi \cdot c \cdot \hbar^3} = \frac{K_e^{rm} \cdot \ell_P \cdot c^2 (\alpha^{\frac{1}{2}} \cdot \ell_P \cdot c^2)^4}{4 \cdot \pi \cdot c \cdot (\ell_P^2 \cdot c^3)^3} = \frac{\alpha^2 \cdot K_e^{rm}}{4 \cdot \pi \cdot \ell_P} \tag{11};$$

– томсоновского сечения рассеяния фотонов свободными электронами:

$$\sigma_T = \frac{8 \cdot \pi}{3} \cdot \frac{(e^{PLT})^2}{M_e^{PLT} \cdot c^2} = \frac{8 \cdot \pi}{3} \cdot \frac{(\alpha^{\frac{1}{2}} \cdot \ell_P \cdot c^2)^2}{K_e^{rm} \cdot \ell_P \cdot c^2 \cdot c^2} = \frac{8 \cdot \pi \cdot \alpha \cdot \ell_P}{3 \cdot K_e^{rm}} \tag{12};$$

– боровского радиуса:

$$a_0 = \frac{\hbar^{PLT^2}}{M_e^{PLT} \cdot (e^{PLT})^2} = \frac{\ell_P^2 \cdot c^3}{K_e^{rm} \cdot \ell_P \cdot c^2 (\alpha^{\frac{1}{2}} \cdot \ell_P \cdot c^2)^2} = \frac{\ell_P}{K_e^{rm} \cdot \alpha} \tag{13}.$$

Эти константы инвариантны к скорости света, то есть даже при условии справедливости концепции переменной скорости света [8, р. 2032-2033] их значение будет неизменным.

По этой же причине действующие на сегодняшний день метрологические эталоны не позволят обнаружить изменение скорости света в вакууме, даже если оно реально происходит.

Пусть скорость света изменилась в k раз.

Поскольку постоянная Ридберга согласно (10) не зависит от скорости света, длина волны для частоты перехода сверхтонкого расщепления Cs 133 не изменится, но частота $\Delta\nu_{Cz} = \dot{c}/\lambda_{\nu_{Cz}}$ будет в k раз выше. То есть 1 секунда будет определена согласно известной формуле⁵:

$$1 \text{ s} = \frac{9192631770}{\Delta\nu_{Cz}} = \frac{s}{k}$$

Длина в один метр будет определена как⁶:

$$\dot{m} = \left(\frac{\dot{c}}{299792458} \right) \cdot \dot{s} = \left(\frac{c \cdot k}{299792458} \right) \cdot \frac{s}{k}$$

т. е. $\dot{m} = m$.

Поскольку

$$\frac{\dot{h}}{h} = \frac{h^{PLT}}{h^{PLT}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \ell_p^2 \cdot \dot{c}^3}{2 \cdot \pi \cdot \ell_p^2 \cdot c^3} = k^3$$

Масса в один kg будет определена по формуле для эталона⁷:

$$\dot{kg} = \left(\frac{\dot{h}}{6.62607015 \cdot 10^{-34}} \right) \cdot \dot{m}^{-2} \cdot \dot{s} = \left(\frac{h \cdot k^3}{6.62607015 \cdot 10^{-34}} \right) \cdot m^{-2} \cdot \frac{s}{k}$$

Соответственно ($1 \cdot \dot{kg} = k^2 \cdot kg$).

Поскольку

$$\frac{\dot{e}}{e} = \frac{e^{PLT}}{e^{PLT}} = \frac{\alpha^{1/2} \cdot \ell_p \cdot \dot{c}^2}{\alpha^{1/2} \cdot \ell_p \cdot c^2} = k^2$$

Ток в 1 А будет определён согласно⁸:

$$\dot{A} = \left(\frac{\dot{e}}{1.602176634 \cdot 10^{-19}} \right) \cdot \dot{s}^{-1} = \frac{k^2 \cdot e}{1.602176634 \cdot 10^{-19}} \cdot \frac{k}{s} = A \cdot k^3$$

Таким образом, изменятся все определяющие константы и единицы измерений кроме единиц длины. Но с точки зрения метрологии все эти величины останутся неизменными, как и уравнения связи законов физики.

Изменяются частоты взаимодействий при сохранении спектральных полос, изменяются энергии взаимодействий, но главное – сохранятся отношения

⁵ См.: Международная система единиц (SI); 9-е изд. М.: Росстандарт, 2019. С. 14. Далее – Международная система единиц (SI).

⁶ Международная система единиц (SI). С. 15.

⁷ Там же.

⁸ Международная система единиц (SI). С. 16

зарядов и масс элементарных частиц, и уравнения связи продолжают работать, а поскольку порядок определения единиц длины, времени, массы и тока не изменится – эти изменения с точки зрения пользователя останутся незамеченными.

Так, например, не изменятся в единицах SI значения безразмерных в системе PLT величин:

- гравитационной постоянной:

$$G_N = \frac{\ell_P^2 \cdot c^3}{\hbar} = \frac{\ell_P^2 \cdot k^3 \cdot c^3}{k^3 \cdot \hbar} = \frac{\ell_P^2 \cdot c^3}{\hbar};$$

- электрической постоянной вакуума:

$$\epsilon_0^{SI} = \frac{e^{SI^2}}{4 \cdot \pi \cdot \alpha \cdot c^{SI} \cdot \hbar^{SI}} = \frac{k^4 \cdot e^{SI^2}}{4 \cdot \pi \cdot \alpha \cdot k \cdot c^{SI} \cdot k^3 \cdot \hbar^{SI}} = \frac{e^{SI^2}}{4 \cdot \pi \cdot \alpha \cdot c^{SI} \cdot \hbar^{SI}};$$

- отношение заряда электрона к массе:

$$\frac{e}{m_e} = \frac{e \cdot k^2}{m_e \cdot k^2} = \frac{e}{m_e}.$$

Таким образом, было бы целесообразно полагать, что основными базовыми размерными константами являются планковская длина и скорость света в вакууме.

4. О возможности уточнения значения планковской длины и постоянной тонкой структуры

Пожалуй, единственным серьёзным препятствием для практического использования системы PLT является низкая точность определения планковской длины, ограниченная экспериментально установленной точностью значения гравитационной постоянной Ньютона G_N .

Последние экспериментальные определения G_N дают расхождение до 0,05% её значения [9]. Это свидетельствует о том, что в различных существующих методах могут быть необнаруженные систематические ошибки. В работе [10] проведён анализ 78 источников, и предложена новая процедура достижения консенсуса в определении значения G_N , однако результат находится в том же диапазоне расхождений. Кроме того, на данных, полученных с 1985 по 1996 г. в работе [11] достоверно выявлены ритмические изменения результатов измерений G_N . Таким образом, как полагают авторы этой статьи: «Разумно предположить, что этот анализ выявляет не изменение величины физической константы – гравитационной постоянной, а действие каких-то неучитываемых исследователями факторов, прямо или косвенно влияющих на результаты измерений», т. е. экспериментальные методы определения этой константы для уточнения значения планковской длины на современном этапе являются малоперспективными.

Как уже отмечалось, согласно [7, р. 6–7] измеренные значения основных констант и целый ряд производных констант представлены в рекомендациях CODATE как точные на основе латентно-семантического анализа (LSA) по критерию максимальной степени согласованности между константами для определяющих уравнений связи.

Следуя этой логике в [12] предложен альтернативный подход к определению планковской длины. Его суть заключается в создании массива значений (квазиизмерений) планковских длин с использованием уравнений связи⁹ и рекомендуемых CODATA [4] значений физических констант, определённых как точные или с существенно большей точностью, чем G_N , с учётом границ стандартной неопределённости этих значений. Поиск значения планковской длины осуществляется путём обработки полученных значений в соответствии с порядком оценки стандартной неопределённости типа A¹⁰ в совокупности с рекурсивным алгоритмом проводимых вычислений. При этом задача поиска значения планковской длины ℓ_P сводится к n циклам рекурсивных вычислений планковской длины и величины её стандартной неопределённости в каждом цикле $u(\ell_{Pn})$ до достижения минимальной взвешенной разности значений стандартных неопределённостей, рассчитанных в предшествующем и последующем циклах. При этом минимальное значение Δu_n является критерием максимальной степени согласованности полученного результата посредством уравнений связи со значениями констант, использованных при создании массива обрабатываемых значений:

$$\Delta u_n = \min_n \left| \frac{u(\ell_{P(n-1)}) - u(\ell_{Pn})}{u(\ell_{P(n-1)})} \right| \quad (14)$$

Аналогичным способом уточнено значения постоянной тонкой структуры.

Результаты, полученные в [12], основаны на рекомендованных CODATA значениях по состоянию на 2018 год. В данной работе предлагается расчёт, основанный на последних (2022 год) рекомендованных CODATA значениях. Все расчёты, результаты которых приведены в этой статье, производились с использованием приложения Mathcad-19 с его максимальной точностью.

5. Первый этап расчёта значения планковской длины

На первом этапе расчёта планковской длины, используя значения массы и сокращённой комптоновской длины волны для электрона, мюона, протона и нейтрона, а также планковской массы и планковской длины согласно [4] и в соответствии с уравнением (6) для каждого из n циклов рекурсивных вычислений формируется массив из L значений (квазиизмерений) планковской длины.

Для первого цикла ($n = 1$):

$$\ell_{Pn_{i=1...3}} = \ell_{P0_k} \quad \text{и} \quad \ell_{Pn_{i=4...L}} = \frac{M_{ak} \cdot \overline{\lambda}_{C_{ak}}}{M_{Pk}},$$

где ℓ_{P0_k} и M_{Pk} – рекомендуемые CODATE значения планковской длины и планковской массы.

⁹ См.: Справочник по физике для инженеров и студентов. С. 452, 489, 722, 950, 776, 778, 796.

¹⁰ ГОСТ Р 34100.3–2017. Неопределённость измерения. Часть 3. Руководство по выражению неопределённости измерения. М.: Стандартинформ, 2018. С. 10–11.

Для последующих циклов рекурсивных вычислений ($n \geq 2$) соответственно:

$$\ell_{Pni=1\dots 3} = \ell_{P(n-1)_k} \quad \text{и}$$

$$\ell_{Pni=4\dots L} = \frac{M_{ak} \cdot \bar{\lambda}_{Cak}}{\hbar \cdot c \cdot \ell_{P(n-1)_k}} = \frac{M_{ak} \cdot \bar{\lambda}_{Cak} \cdot c}{\hbar} \cdot \ell_{P(n-1)_k},$$

где a – индекс элементарной частицы ($a=1\dots 4$, соответственно электрона, мюона, протона и нейтрона, так как для этих элементарных частиц наиболее точно определены значения массы и сокращённой комптоновской длины волны).

k – индексы значений, рекомендуемых [4], при $k=1$ – без учёта стандартной неопределённости ($A_1 = A$), при $k=2$ – на верхней границе стандартной неопределённости ($A_2 = A + u(A)$), при $k=3$ – на нижней границе стандартной неопределённости ($A_2 = A - u(A)$). То есть $k = 1 \dots b$, где $b=3$.

$L = a(b^3) + b = 111$ – число значений массива, соответственно индекс $i = 1 \dots L$

Сформированный в каждом цикле массив был обработан в соответствии с порядком оценки стандартной неопределённости типа A^{11} :

$$\ell_{Pcp} = \sum_{i=1}^L \frac{\ell_{Pi}}{L} \quad (15)$$

$$u(\ell_{Pcp}) = \sqrt{\sum_{i=1}^L \frac{(\ell_{Pi} - \ell_{Pcp})^2}{L \cdot (L-1)}} \quad (16)$$

Соответствующая рекурсивная функция принимает вид:

$$\ell_{Pn}, \Delta u_n = \begin{cases} \ell_{Pni=1\dots 3} = \ell_{P(n-1)_k}, \quad \ell_{Pni=4\dots L} = \frac{M_{ak} \cdot \bar{\lambda}_{Cak}}{M_{Pk}} & n = 1 \\ \ell_{Pni=1\dots 3} = \ell_{P(n-1)_k}, & n \geq 2 \\ \ell_{Pni=4\dots L} = \frac{M_{ak} \cdot \bar{\lambda}_{Cak} \cdot c}{\hbar} \cdot \ell_{P(n-1)_k} \\ \ell_{Pn} = \sum_{i=1}^L \frac{\ell_{Pni}}{L}, \quad u(\ell_{Pn}) = \sqrt{\sum_{i=1}^L \frac{(\ell_{Pni} - \ell_{Pn})^2}{L \cdot (L-1)}}, \\ \Delta u_n = \left| \frac{u(\ell_{P(n-1)}) - u(\ell_{Pn})}{u(\ell_{P(n-1)})} \right| \end{cases}$$

Критерий ограничения рекурсивных циклов – достижение минимальной взвешенной разности Δu_n согласно (14).

¹¹ См.: ГОСТ Р 34100.3–2017. Неопределённость измерения. Часть 3. Руководство по выражению неопределённости измерения. М.: Стандартиформ, 2018. С. 10–11.

На рис. 1 представлен график дискретной функции Δu_n :

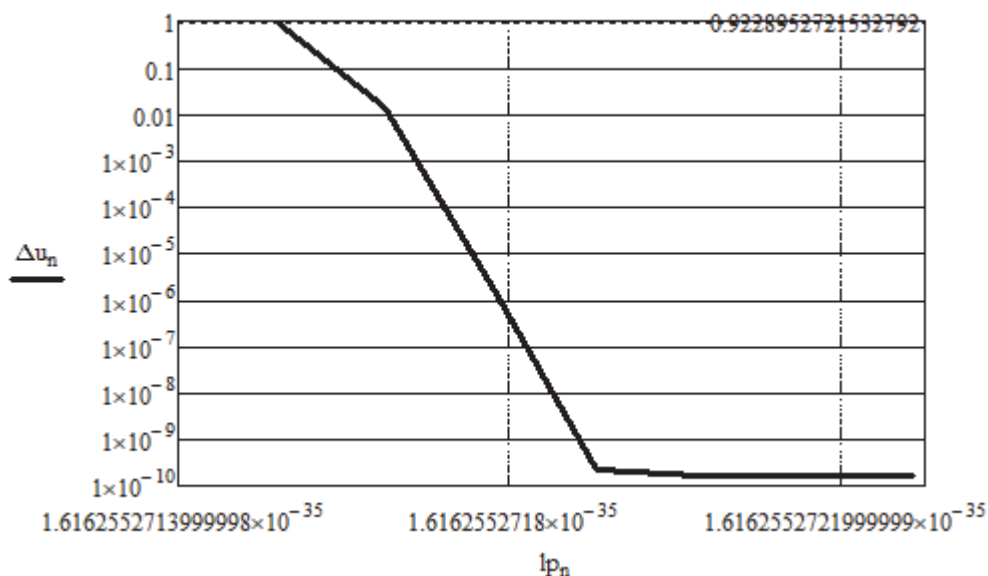


Рис. 1 / Fig. 1. График дискретной функции Δu_n для первого этапа расчёта ℓ_{p_n} , m /
The graph of the discrete function Δu_n for the first stage of calculation ℓ_{p_n} , m

Источник: по данным автора

В нашем случае минимальное значение $\Delta u_n = 1.570 \cdot 10^{-10}$ достигается при $n=6$, при этом исходное значение для дальнейших расчётов соответственно $\ell_{p_6} = 1.6162552721582595 \cdot 10^{-35} \cdot m$ и $u(\ell_{p_6}) = 1.3687373825143279 \cdot 10^{-41} \cdot m$.

6. Расчёт значения постоянной тонкой структуры

Для организации рекурсивных вычислений уточнённого значения постоянной тонкой структуры (α) использованы определяющие уравнения связи, в которых возможно связать вычисляемое в n -м цикле значение со значением α , рассчитанным в предыдущем $n-1$ цикле. Для максимальной степени согласованности между константами через эти уравнения, использованы значения констант, рекомендованные CODATE как точные или с минимальной стандартной неопределённостью. В нижеприведённых уравнениях k – индексы значений, рекомендуемых CODATE [4], при $k=1$ – без учёта стандартной неопределённости ($A_1 = A$), при $k=2$ – на верхней границе стандартной неопределённости ($A_2 = A + u(A)$), при $k=3$ – на нижней границе стандартной неопределённости ($A_2 = A - u(A)$). То есть $k = 1 \dots b$, где $b=3$.

Для формирования массива квазиизмерений использованы следующие уравнения, включающие константы:

– характеристического сопротивления вакуума (Z_0) и вакуумной магнитной проницаемости (μ_0)

$$\alpha_{n_{i=1...b^3}} = \alpha_{(n-1)_k}^2 \cdot \frac{\mu_{0k} \cdot 4 \cdot \pi \cdot \hbar \cdot c}{e^2 \cdot Z_{0k}^2} \quad (17);$$

– постоянной Ридберга (R_∞) и приведённой комптоновской длина волны электрона ($\overline{\lambda_{C,e}}$)

$$\alpha_{n_{i=b^3+1...2 \cdot b^3}} = \frac{R_{\infty k} \cdot 4 \cdot \pi \cdot \overline{\lambda_{C,e_k}}}{\alpha_{(n-1)_k}} \quad (18);$$

– постоянной фон Клитцинга (R_K)

$$\alpha_{n_{i=2 \cdot b^3+1...2 \cdot b^3+b}} = \alpha_{(n-1)_k} \sqrt{\frac{2 \cdot \pi \cdot \hbar}{R_K \cdot e^2}} \quad (19);$$

– кванта проводимости (G_0)

$$\alpha_{n_{i=2 \cdot b^3+b+1...2 \cdot b^3+2 \cdot b}} = \alpha_{(n-1)_k} \cdot \frac{e^2}{G_0 \cdot \pi \cdot \hbar} \quad (20);$$

– кванта магнитного потока (Φ_0)

$$\alpha_{n_{i=2 \cdot b^3+2 \cdot b+1...2 \cdot b^3+3 \cdot b}} = \alpha_{(n-1)_k} \cdot \frac{\pi \cdot \hbar}{\Phi_0 \cdot e} \quad (21);$$

– радиуса Бора (a_0) и приведённой комптоновской длины волны электрона ($\overline{\lambda_{C,e}}$)

$$\alpha_{n_{i=2 \cdot b^3+3 \cdot b+1...3 \cdot b^3+3 \cdot b}} = \frac{\overline{\lambda_{C,e_k}}^2}{a_{0k}^2 \cdot \alpha_{(n-1)_k}} \quad (22);$$

– постоянной Ридберга, умноженной на $\hbar c$ (R_y) и приведённой комптоновской длины волны электрона ($\overline{\lambda_{C,e}}$)

$$\alpha_{n_{i=3 \cdot b^3+3 \cdot b+1...4 \cdot b^3+3 \cdot b}} = \frac{2 \cdot R_{y_k} \cdot \overline{\lambda_{C,e_k}}}{c \cdot \hbar \cdot \alpha_{(n-1)_k}} \quad (23);$$

– энергии Хартри (E_h) и массы электрона (M_e)

$$\alpha_{n_{i=4 \cdot b^3+3 \cdot b+1...5 \cdot b^3+3 \cdot b}} = \frac{E_{h_k}}{\alpha_{(n-1)_k} \cdot M_{e_k} \cdot c^2} \quad (24);$$

– постоянной тонкой структуры (α) в значениях предыдущего цикла

$$\alpha_{n_{i=5 \cdot b^3+3 \cdot b+1...5 \cdot b^3+4 \cdot b}} = \alpha_{(n-1)_k} \quad (25).$$

При этом общее количество квазиизмерений $L = 5 \cdot b^3 + 4 \cdot b = 147$, соответственно индекс $i = 1 \dots L$

Совокупность уравнений (17) – (25) запишем выражением:

$$\alpha_{ni} = F(\alpha_{k(n-1)})$$

Тогда рекурсивная функция принимает вид:

$$\alpha_n, \Delta u_n = \begin{cases} \alpha_{ni} = F(\alpha_{k(n-1)}), & n \geq 1 \\ \alpha_n = \sum_{i=1}^L \frac{\alpha_{ni}}{L}, \quad u(\alpha_n) = \sqrt{\sum_{i=1}^L \frac{(\alpha_{ni} - \alpha_n)^2}{L \cdot (L-1)}}, \\ \Delta u_n = \left| \frac{u(\alpha_{(n-1)}) - u(\alpha_n)}{u(\alpha_{(n-1)})} \right| \end{cases}$$

Критерием для ограничения циклов также являлось достижение минимального значения Δu_n , согласно (14).

На рис. 2 представлен график дискретной функции Δu_n .

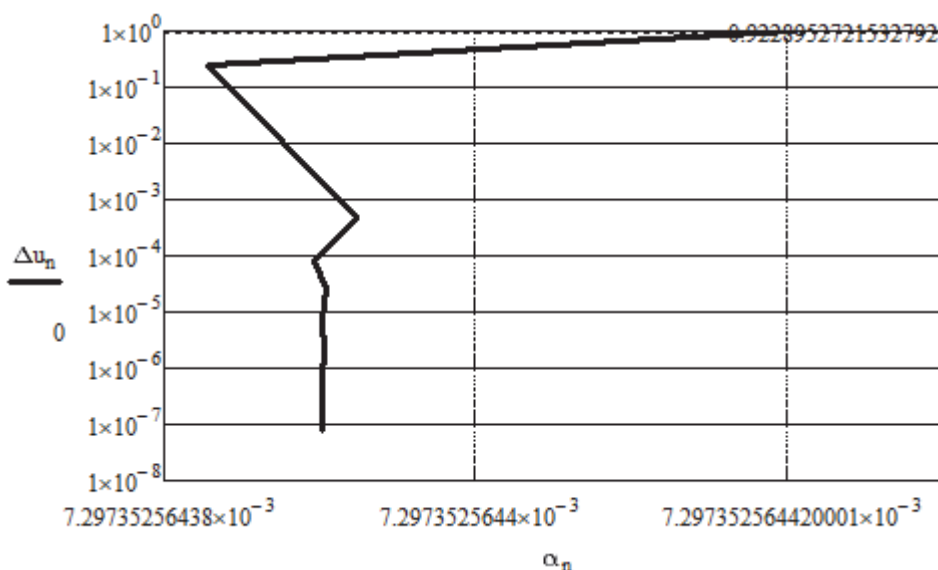


Рис. 2 / Fig. 2 График дискретной функции Δu_n для расчёта α /
The graph of the discrete function Δu_n for calculating α

Источник: по данным автора

В нашем случае минимальное значение $\Delta u_n = 7.648 \cdot 10^{-8}$ достигается при $n=10$, при этом: $\alpha_{\text{расч}} = 7.297352564390205 \cdot 10^{-3}$. Это значение $\alpha_{\text{расч}}$ как медианное и максимально согласованное с рекомендованными CODATE [4] значениями других физических констант для дальнейших расчётов будем полагать условно точным.

7. Второй этап расчёта значения планковской длины

На втором этапе рекурсивных вычислений для максимальной степени согласованности между константами через определяющие уравнения связи были использованы уравнения (1) и (2), причём для уравнения (2) вспомогательное значение постоянной Дирака выражено через константы, значения которых определены согласно [4] как точные или с минимальной стандартной неопределённостью, и постоянную тонкой структуры в значении $\alpha_{\text{расч}}$:

$$\ell_{Pn_i} = \sqrt{\frac{G_{N\text{всп}} \cdot \hbar}{c^3}} = \sqrt{\frac{(\ell_{Pn-1})_k^2 \cdot c^3}{\hbar_{\text{всп}K}} \cdot \hbar} = (\ell_{Pn-1})_k \cdot \sqrt{\frac{\hbar}{\hbar_{\text{всп}j}}}$$

В нижеприведённых уравнениях k – индексы значений, рекомендуемых CODATE [4], при $k = 1$ – без учёта стандартной неопределённости ($A_1 = A$), при $k = 2$ – на верхней границе стандартной неопределённости ($A_2 = A + u(A)$), при $k = 3$ – на нижней границе стандартной неопределённости ($A_2 = A - u(A)$). То есть $k = 1 \dots b$, где $b=3$.

Расчёт вспомогательных значений постоянной Дирака осуществлялся с использованием:

- постоянной Ридберга (R_∞) и постоянной Ридберга, умноженной на $\hbar c$ (R_y)

$$\hbar_{\text{всп}j=1\dots b^2} = \frac{R_{y_k}}{R_{\infty k} \cdot c \cdot 2 \cdot \pi} \quad (26);$$

- постоянной Ридберга (R_∞) и энергии Хартри (E_h)

$$\hbar_{\text{всп}j=b^2+1\dots 2 \cdot b^2} = \frac{E_{h_k}}{R_{\infty k} \cdot c \cdot 4 \cdot \pi} \quad (27);$$

- постоянной фон Клитцинга (R_K)

$$\hbar_{\text{всп}j=2 \cdot b^2+1} = \frac{R_K \cdot e^2}{2 \cdot \pi} \quad (28);$$

- кванта проводимости (G_0)

$$\hbar_{\text{всп}j=2 \cdot b^2+2} = \frac{2 \cdot e^2}{G_0 \cdot 2 \cdot \pi} \quad (29);$$

- кванта магнитного потока (Φ_0)

$$\hbar_{\text{всп}j=2 \cdot b^2+3} = \frac{\Phi_0 \cdot e}{\pi} \quad (30);$$

- характеристического сопротивления вакуума (Z_0), вакуумной магнитной проницаемости (μ_0) и постоянной тонкой структуры (α)

$$\hbar_{\text{всп}j=2 \cdot b^2+4\dots b^3+2 \cdot b^2+3} = \frac{e^2 \cdot Z_{0k}^2}{\mu_{0k} \cdot 4 \cdot \pi \cdot \alpha_k \cdot c} \quad (31);$$

- магнетона Бора (μ_B) и массы электрона (M_e)

$$\hbar_{\text{всп}j=b^3+2 \cdot b^2+4\dots b^3+3 \cdot b^2+3} = \frac{\mu_{Bk} \cdot 2 \cdot M_{ek}}{e} \quad (32);$$

- боровского радиуса (a_0), массы электрона (M_e) и постоянной тонкой структуры (α)

$$\hbar_{\text{всп}j=b^3+3 \cdot b^2+4\dots 2 \cdot b^3+3 \cdot b^2+3} = a_{0k} \cdot M_{ek} \cdot \alpha_k \quad (33);$$

– постоянной Дирака ($\hbar$)

$$\hbar_{\text{всп } j=2 \cdot b^3 + 3 \cdot b^2 + 4} = \hbar \quad (34).$$

При этом количество вариантов $\hbar_{\text{всп } j}$ $K = 2 \cdot b^3 + 3 \cdot b^2 + 4 = 85$, соответственно индекс $j = 1 \dots K$, а общее количество квазиизмерений планковской длины в каждом цикле рекурсивных вычислений $L = b \cdot K = 255$, соответственно индекс $i = 1 \dots L$.

Для второго этапа расчёта значения планковской длины значения $\ell_{P_0} = \ell_{P_6}$ первого этапа и $u(\ell_{P_0}) = u(\ell_{P_6})$ первого этапа.

Рекурсивная функция принимает вид:

$$\ell_{Pn}, \Delta u_n = \begin{cases} \ell_{Pni} = (\ell_{Pn-1})_k \cdot \sqrt{\frac{\hbar}{\hbar_{\text{всп } j}}}, & n \geq 1 \\ \ell_{Pn} = \sum_{i=1}^L \frac{\ell_{Pni}}{L}, \quad u(\ell_{Pn}) = \sqrt{\sum_{i=1}^L \frac{(\ell_{Pni} - \ell_{Pn})^2}{L \cdot (L-1)}}, \\ \Delta u_n = \left| \frac{u(\ell_{P(n-1)}) - u(\ell_{Pn})}{u(\ell_{P(n-1)})} \right| \end{cases}$$

Критерием для ограничения циклов также являлось достижение минимального значения Δu_n согласно (14). На рис. 3 представлен график дискретной функции Δu_n .

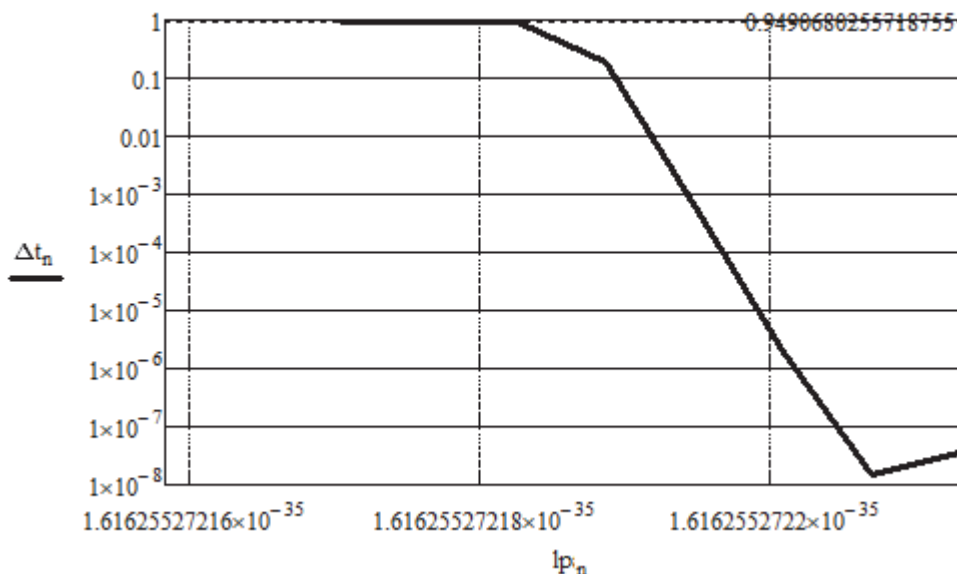


Рис. 3 / Fig. 3. График дискретной функции Δu_n для второго этапа расчёта ℓ_{Pn} , м /
The graph of the discrete function Δu_n for the second stage of calculation ℓ_{Pn} , m

Источник: по данным автора

В нашем случае минимальное значение $\Delta u_n = 1.527 \cdot 10^{-8}$ достигается при $n=7$, при этом: $\ell_{p_{расч}} = 1.616255272206877 \cdot 10^{-35} \cdot m$. Это значение $\ell_{p_{расч}}$ как медианное и максимально согласованное с рекомендованными CODATE [4] значениями других физических констант, для дальнейших расчётов также будем полагать условно точным.

8. Соотношение основных и производных констант PLT и SI

Полученные результаты позволяют рассчитать значения поправочного коэффициента электрического заряда и переводных коэффициентов между величинами PLT и SI.

Согласно (10)

$$K_{\Delta e_{расч}} = \frac{\sqrt{\frac{\hbar \cdot 10^7}{c \cdot m \cdot kg}} \cdot A \cdot s}{e \sqrt{\alpha_{расч}}} = 0.99999999993730530$$

При этом как соотношение предположительно точных величин вышеприведённое значение поправочного коэффициента электрического заряда $K_{\Delta e_{расч}}$ также полагаем условно точным.

Переводными коэффициентами из PLT в SI для значений массы и электрического заряда являются отношения соответствующих тождественных величин:

- планковской массы в единицах массы к значению планковской массы в единицах пространственной протяжённости и времени;
- планковского заряда в единицах электрического заряда к значению планковского заряда в единицах пространственной протяжённости и времени, то есть уже по определению значения этих соотношений должны быть точными.

Так переводной коэффициент массы K_M , согласно (4) для $\ell_p = \ell_{p_{расч}}$:

$$K_M = \frac{M_p}{\ell_p^3 \cdot t_p^{-2}} = \frac{\left(\frac{\hbar}{c \cdot \ell_p}\right)}{\ell_p \cdot c^2} = \frac{\hbar}{\ell_p^2 \cdot c^3} = 14982840048.935719 \cdot s^2 \cdot m^{-3} \cdot kg$$

Согласно (8) и (9) планковский заряд в SI

$$q_p = \frac{e}{\sqrt{\alpha}} = \frac{1}{K_{\Delta e}} \cdot \sqrt{\frac{\hbar \cdot 10^7}{c \cdot m \cdot kg}} \cdot A \cdot s$$

Тогда переводной коэффициент электрического заряда K_q для $\ell_p = \ell_{p_{расч}}$ и $K_{\Delta e} = K_{\Delta e_{расч}}$:

$$\begin{aligned} K_q &= \frac{q_p}{\ell_p^3 \cdot t_p^{-2}} = \frac{\frac{e}{\sqrt{\alpha}}}{\ell_p \cdot c^2} = \frac{\frac{1}{K_{\Delta e}} \cdot \sqrt{\frac{\hbar \cdot 10^7}{c \cdot m \cdot kg}} \cdot A \cdot s}{\ell_p \cdot c^2} = \\ &= \frac{1}{K_{\Delta e} \cdot \ell_p \cdot c^2} \cdot \sqrt{\frac{\hbar \cdot 10^7}{c \cdot m \cdot kg}} \cdot A \cdot s = \\ &= 1.2911490162789518 \cdot s^3 \cdot m^{-3} \cdot A \end{aligned}$$

Постоянная Ридберга является одной из наиболее точно определённых физических констант с относительной стандартной неопределённостью $1,1 \cdot 10^{-12}$ [4], что позволяет с учётом значения постоянной тонкой структуры $\alpha = \alpha_{\text{расч}}$ уточнить значение сокращённой комптоновской длины волны электрона

$$\overline{\lambda_{C,e_x}^{SI}} = \frac{\alpha^2}{4 \cdot \pi \cdot R_{\infty}} 3.8615926744061(42) \cdot 10^{-13} \cdot m$$

и определить более точное значение постоянной массы покоя электрона (6)

$$K_e^{rm} = \frac{\ell_{P_{\text{расч}}}}{\overline{\lambda_{C,e_x}^{SI}}} = \frac{4 \cdot \pi \cdot R_{\infty} \cdot \ell_{P_{\text{расч}}}}{\alpha_{\text{расч}}^2} = 4.1854628607494(46) \cdot 10^{-23}$$

Суммарная стандартная неопределённость рассчитана по формуле¹²:

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_1^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \cdot u^2(x_i)}$$

Для сравнительного анализа значений ряда физических констант и планковских величин в единицах PLT и результатов их перевода в значения международной SI на основе вышеприведённых результатов (для анализа обозначены как x_i) со значениями, рекомендуемыми CODATE [4], либо рассчитанными согласно уравнений связи в международной SI на основе рекомендуемых CODATE значений – обозначены как y_i .

Отклонение x_i от y_i для величин, имеющих в рекомендациях CODATE стандартную неопределённость, рассчитано в процентах от величины, соответствующей стандартной неопределённости – $u(y_i)$:

$$\Delta_{xi} = \frac{y_i - x_i}{u(y_i)} \cdot 100\%$$

Отклонение x_i от y_i для величин, имеющих в рекомендациях CODATE точные значения, рассчитаны по формуле:

$$\Delta_{xi} = \frac{y_i - x_i}{y_i}$$

Результаты расчётов внесены в табл. 4 и 5 (пометки «расч» в нижних индексах обозначений $\ell_{P_{\text{расч}}}$, $\alpha_{\text{расч}}$ и $K_{\Delta_{\text{расч}}}$ опущены).

12 ГОСТ Р 34100.3–2017. Неопределённость измерения. Часть 3. Руководство по выражению неопределённости измерения. М.: Стандартинформ, 2018. С. 18.

Таблица 4 / Table 4

Соотношение значений ряда физических констант и планковских величин между PLT и международной SI, рекомендуемых CODATE с некоторой стандартной неопределённостью / The ratio of values of a number of physical constants and Planck quantities between PLT and international SI recommended by CODATE with some standard uncertainty

Наименование	Обозначение	Значение в основных единицах PLT	Переводной коэффициент	Индекс i	Значение в основных единицах SI			Δ_{x_i} , %
					x_i	Размер- ность	y_i	
1	2	3	4	5	6	7	9	8
Планковская длина	ℓ_P	ℓ_P	1	1	$\ell_{P6} = 1.6162552721582595 \cdot 10^{-35} \cdot m$	m	$\ell_P = 1.616255(18) \cdot 10^{-35}$	1.5
Гравитационная постоянная Ньютона	G_N	1	$\frac{1}{K_M}$	2	$\frac{\ell_P^2 \cdot c^3}{h} =$ $= 6.67430204643366900 \cdot 10^{-11}$	$\frac{m^3}{s^2 \cdot kg}$	$G_N = 6.67430(15) \cdot 10^{-11}$	1.4
Планковский заряд	q_P	$\ell_P \cdot c^2$	K_q	3	$\frac{1}{K_{\Delta e} \cdot c} \cdot \sqrt{\frac{10^7 \cdot h \cdot c}{m \cdot kg}} =$ $= 1.87554603840779820 \cdot 10^{-18}$	$A \cdot s$	$\frac{e}{\sqrt{\alpha}} = 1.87554603842(14)$	8.2
Электрическая постоянная	ϵ_0	1	$\frac{K_q^2}{4\pi \cdot K_M}$	4	$\frac{10^7 \cdot m^2}{4 \cdot \pi \cdot c^2 \cdot K_{\Delta e}^2 \cdot s^2} =$ $= 8.85418781873061400 \cdot 10^{-12}$	$\frac{s^4 \cdot A^2}{m^3 \cdot kg}$	$\epsilon_0 = 8.8541878188(14) \cdot 10^{-12}$	5.0

Продолжение таблицы 4

Магнитная постоянная	μ_0	$\frac{1}{\text{C}^2}$	$\frac{4\pi \cdot K_M}{K_d^2}$	5	$\frac{4 \cdot \pi \cdot K_{\Delta\epsilon}^2 \cdot \text{C}^2}{10^7 \cdot \text{m}^2} = 1.25663706127834820 \cdot 10^{-6}$	$\frac{\text{m} \cdot \text{kg}}{\text{C}^2 \cdot \text{A}^2}$	$\mu_0 = 1.25663706127(20) \cdot 10^{-6}$	4.2
Планковская масса	M_P	$\ell_P \cdot \text{C}^2$	K_M	6	$\frac{\ell_P \cdot \text{C}}{\hbar} = 2.17643400905538000 \cdot 10^{-8}$	kg	$M_P = 2.176434(24) \cdot 10^{-8}$	0.4
Приведённая комптоновская длина волны электрона	$\overline{\lambda_C}$	$\frac{\ell_P}{K_e^{rm}}$	1	7	$\frac{\ell_P}{K_e^{rm}} = 3.8615926744061(42) \cdot 10^{-13}$	m	$\overline{\lambda_C} = 3.8615926744(12) \cdot 10^{-13}$	0.5
Масса покоя электрона	M_e	$K_e^{rm} \cdot \ell_P \cdot \text{C}^2$	K_M	8	$\frac{K_e^{rm} \cdot \hbar}{\ell_P \cdot \text{C}} = 9.10938371377(11) \cdot 10^{-31}$	kg	$M_e = 9.1093837139(28) \cdot 10^{-31}$	4.5
Планковская энергия	E_P	$\ell_P \cdot \text{C}^4$	K_M	9	$\frac{\text{C} \cdot \hbar}{\ell_P} = 1.95608133681745660 \cdot 10^9$	$\frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2}$	$\sqrt{\frac{\hbar \cdot \text{C}^5}{G_N}} = 1.956082(22) \cdot 10^9$	3.0
Постоянная Ридберга, умноженная на $\hbar\text{C}$	hcR_8	$\frac{\alpha^2 \cdot K_e^{rm} \cdot \ell_P \cdot \text{C}^4}{2}$	K_M	10	$\frac{\alpha^2 \cdot K_e^{rm}}{2 \cdot \ell_P} \cdot \text{C} \cdot \hbar = 2.1798723611030(24) \cdot 10^{-18}$	$\frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2}$	$hcR_\infty = 2.1798723611030(24) \cdot 10^{-18}$	0
Энергия Хартри	E_h	$\alpha^2 \cdot K_e^{rm} \cdot \ell_P \cdot \text{C}^4$	K_M	11	$\frac{\alpha^2 \cdot K_e^{rm}}{\ell_P} \cdot \text{C} \cdot \hbar = 4.3597447222060(48) \cdot 10^{-18}$	$\frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2}$	$E_h = 4.3597447222060(48) \cdot 10^{-18}$	0

Продолжение таблицы 4

Магнетон Бора	μ_B	$\frac{\sqrt{\alpha} \cdot \ell_P^2 \cdot c^3}{2 \cdot K_e^{cm}}$	K_q	12	$\frac{\ell_P}{2 \cdot K_e^{cm} \cdot K_{\Delta e}} \cdot \sqrt{\frac{10^7 \cdot \alpha \cdot c \cdot \hbar}{kg \cdot m}} = 9.274010065867(10) \cdot 10^{-24}$	$A \cdot m^2$	$\mu_B = 9.2740100657(29) \cdot 10^{-24}$	5.8
Характеристическое сопротивление вакуума	Z_0	$\frac{1}{c}$	$\frac{4\pi \cdot K_M}{K_q^2}$	13	$\frac{4 \cdot \pi \cdot c \cdot K_{\Delta e}^2 \cdot s}{10^7 \cdot m} = 376.73031341453260000$	$\frac{kg \cdot m^2}{A^2 \cdot s^3}$	$Z_0 = 376.730313412(59)$	4.3
Отношение заряда электрона к массе	$\frac{e}{M_e}$	$\frac{\sqrt{\alpha}}{K_e^{cm}}$	$\frac{K_q}{K_M}$	14	$\frac{\ell_P}{K_e^{cm} \cdot K_{\Delta e}} \cdot \sqrt{\frac{10^7 \cdot \alpha \cdot c}{\hbar \cdot kg \cdot m}} = 1.7588200084025(19) \cdot 10^{11}$	$\frac{A \cdot s}{kg}$	$\frac{e}{M_e} = 1.75882000838(55) \cdot 10^{11}$	4.0
Радиус Бора	a_0	$\frac{\ell_P}{\alpha \cdot K_e^{cm}}$	1	15	$\frac{\ell_P}{\alpha \cdot K_e^{cm}} = 5.2917721054757(58) \cdot 10^{-11}$	m	$a_0 = 5.29177210544(82) \cdot 10^{-11}$	4.4
Планковская мощность	P_P	c^5	$\frac{1}{K_M}$	16	$\frac{\hbar \cdot c^2}{\ell_P^2} = 3.62825379193795400 \cdot 10^{52}$	$\frac{kg \cdot m^2}{s^3}$	$\frac{c^5}{G_N} = 3.628255(82) \cdot 10^{52}$	1.5
Планковская сила	F_P	c^4	K_M	17	$\frac{c \cdot \hbar}{\ell_P^2} = 1.21025519325704800 \cdot 10^{44}$	$\frac{kg \cdot m}{s^2}$	$\frac{c^4}{G_N} = 1.210256(27) \cdot 10^{44}$	3.0
Планковский ток	I_P	c^3	K_q	18	$\frac{c \cdot A \cdot s}{\ell_P \cdot K_{\Delta e}} \cdot \sqrt{\frac{\hbar}{c} \cdot \frac{10^7}{kg \cdot m}} = 3.47887222158101200 \cdot 10^{25}$	A	$\frac{q_P}{t_P} = \frac{e \cdot c}{\sqrt{\alpha} \cdot \ell_P} = 3.478873(39) \cdot 10^{25}$	2.0

Продолжение таблицы 4

Планковское напряжение	V_P	c^2	$\frac{K_M}{K_q}$	19	$\frac{K_{\Delta e} \cdot c^2}{\ell_P^2 \cdot A \cdot s} \cdot \sqrt{\frac{\hbar \cdot kg \cdot m}{c \cdot 10^7}} = 1.04293965424491900 \cdot 10^{27}$	$\frac{kg \cdot m^2}{A \cdot s^3}$	$\frac{P_P}{I_P} = \frac{\sqrt{\alpha} \cdot \ell_P \cdot c^4}{G_N \cdot e} = 1.042940(12) \cdot 10^{27}$	2.9
Планковская напряжённость электрического поля	$\vec{E}_P$	$\frac{c^2}{\ell_P}$	$\frac{K_M}{K_q}$	20	$\frac{K_{\Delta e} \cdot c^2}{\ell_P^2 \cdot A \cdot s} \cdot \sqrt{\frac{\hbar \cdot kg \cdot m}{c \cdot 10^7}} = 6.45281517207898800 \cdot 10^{61}$	$\frac{kg \cdot m}{A \cdot s^3}$	$\frac{q_P}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \ell_P^2} = 6.45282(15) \cdot 10^{61}$	3.2
Планковская магнитная индукция	$\vec{B}_P$	$\frac{c}{\ell_P}$	$\frac{K_M}{K_q}$	21	$\frac{c \cdot K_{\Delta e}}{\ell_P^2 \cdot A \cdot s} \cdot \sqrt{\frac{\hbar \cdot kg \cdot m}{c \cdot 10^7}} = 2.15242745435543500 \cdot 10^{53}$	$\frac{kg}{A \cdot s^2}$	$\frac{I_P \cdot \mu_0}{4 \cdot \pi \cdot \ell_P} = \frac{c^2}{2 \cdot \ell_P} \cdot \sqrt{\frac{\mu_0}{\pi \cdot G_N}} = 2.152428(34)$	1.6
Планковская напряжённость магнитного поля	$\vec{H}_P$	$\frac{c^3}{\ell_P}$	K_q	22	$\frac{c \cdot A \cdot s}{4 \cdot \pi \cdot \ell_P^2 \cdot K_{\Delta e}} \cdot \sqrt{\frac{\hbar \cdot 10^7}{c \cdot kg \cdot m}} = 1.71284734525163480 \cdot 10^{59}$	$\frac{A}{m}$	$\frac{\vec{B}_P}{\mu_0} = \frac{c^2}{2 \cdot \ell_P \cdot \sqrt{\pi \cdot \mu_0 \cdot G_N}} = 1.712848(27) \cdot 10^{59}$	2.4
Планковский магнитный поток	Φ_{mP}	$\ell_P \cdot c$	$\frac{K_M}{K_q}$	23	$\frac{c \cdot K_{\Delta e}}{\ell_P^2 \cdot A \cdot s} \cdot \sqrt{\frac{\hbar \cdot 4 \cdot \pi \cdot kg \cdot m}{c \cdot 10^7}} = 5.62274556875932950 \cdot 10^{-17}$	$\frac{kg \cdot m^2}{A \cdot s^2}$	$\frac{E_P}{I_P} = \sqrt{\frac{\hbar}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot c}} = 5.62274556874(44) \cdot 10^{-17}$	4.4
Планковское сопротивление	R_P	c^{-1}	$\frac{K_M}{K_q^2}$	24	$c \cdot K_{\Delta e}^2 \cdot \frac{kg \cdot m}{10^7 \cdot A^2 \cdot s^2} = 29.97924579624092000$	$\frac{kg \cdot m^2}{A^2 \cdot s^3}$	$\frac{V_P}{I_P} = \frac{\alpha \cdot \ell_P^2 \cdot c^3}{G_N \cdot e^2} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot c} = 29.9792457960(47)$	5.1

Окончание таблицы 4

Планковская проводимость	G_P	c	$\frac{K_q^2}{K_M}$	25	$\frac{1}{c \cdot K_{\Delta e}^2} \cdot \frac{10^7 \cdot A^2 \cdot s^2}{kg \cdot m} =$ $= 3.33564095239977430 \cdot 10^{-2}$	$\frac{A^2 \cdot s^3}{kg \cdot m^2}$	$\frac{I_P}{V_P} = 4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot c =$ $= 3.33564095243(53) \cdot 10^{-2}$	5.7
Планковское удельное сопротивление	ρ_P	$t_P = \frac{\ell_P}{c}$	$\frac{K_M}{K_q^2}$	26	$\ell_P \cdot c \cdot K_{\Delta e}^2 \cdot \frac{kg \cdot m}{10^7 \cdot A^2 \cdot s^2} =$ $= 4.84541140749602400 \cdot 10^{-34}$	$\frac{kg \cdot m^3}{A^2 \cdot s^3}$	$\frac{\ell_P}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot c} =$ $= 4.845411(54) \cdot 10^{-34}$	5.7
Планковская электрическая ёмкость	C_P	ℓ_P	$\frac{K_q^2}{K_M}$	27	$\frac{\ell_P}{c^2 \cdot K_{\Delta e}^2} \cdot \frac{10^7 \cdot A^2 \cdot s^2}{kg \cdot m} =$ $= 1.79832651944342950 \cdot 10^{-45}$	$\frac{A^2 \cdot s^4}{kg \cdot m^2}$	$\frac{q_P}{V_P} = \frac{G_N \cdot e^2}{\alpha \cdot \ell_P \cdot c^4} =$ $= 1.798326(45) \cdot 10^{-45}$	1.2
Электрическая индуктивность Планка	L_P	$\frac{\ell_P}{c^2}$	$\frac{K_M}{K_q^2}$	28	$\ell_P \cdot K_{\Delta e}^2 \cdot \frac{kg \cdot m}{10^7 \cdot A^2 \cdot s^2} =$ $= 1.61625527200421560 \cdot 10^{-42}$	$\frac{kg \cdot m^2}{A^2 \cdot s^2}$	$\frac{E_P}{I_P^2} = \frac{\alpha \cdot \hbar \cdot \ell_P}{e^2 \cdot c} =$ $= 1.616255(18) \cdot 10^{-42}$	1.5
Планковская температура	T_P	$\frac{\ell_P \cdot c^4 \cdot K_M}{k_B}$	1	29	$\frac{c \cdot \hbar}{\ell_P \cdot k_B} =$ $= 1.41678394495447900 \cdot 10^{32}$	K	$T_P = 1.416784(16) \cdot 10^{32}$	0.3

Источник: [4].

Таблица 5 / Table 5
Соотношения значений физических констант между PLT и международной SI, рекомендуемых CODATE как точные /
The ratios of the values of the physical constants between PLT and international SI, recommended by CODATE as accurate

Наименование	Обозначение	Значение в основных единицах PLT	Переводной коэффициент	Индекс i	Значение в основных единицах SI		
					x_i	Размерность	y_i
1	2	3	4	5	6	7	8
Элементарный заряд	e	$\sqrt{\alpha} \cdot \ell_P \cdot c^2$	K_q	1	$\frac{A \cdot s}{K_{\Delta e} \cdot c} \cdot \sqrt{\frac{10^7 \cdot \alpha \cdot h \cdot c}{m \cdot kg}} = 1.602176640000000 \cdot 10^{-19}$	$A \cdot s$	$e = 1.60217664 \cdot 10^{-19}$
Электронвольт	eV	$\sqrt{\alpha} \cdot \ell_P \cdot c^2 \cdot \left(1 \cdot V \cdot \frac{K_q}{K_M}\right)$	K_M	2	$\frac{V \cdot A \cdot s}{K_{\Delta e} \cdot c} \cdot \sqrt{\frac{10^7 \cdot \alpha \cdot h \cdot c}{m \cdot kg}} = 1.602176640000000 \cdot 10^{-19}$	$\frac{kg \cdot m^2}{s^2}$	$eV = 1.60217664 \cdot 10^{-19}$
Постоянная Клитцинга	R_K	$\frac{2 \cdot \pi}{\alpha \cdot c}$	$\frac{K_M}{K_q^2}$	3	$\frac{2 \cdot \pi \cdot c \cdot K_{\Delta e}^2}{\alpha} \cdot \frac{kg \cdot m}{A^2 \cdot s^2} = 25812.80745930450000000$	$\frac{kg \cdot m^2}{A^2 \cdot s^3}$	$\frac{2 \cdot \pi \cdot h}{e^2} = 25812.80745930450200000$
Квант магнитного потока	Φ_0	$\frac{\pi \cdot \ell_P \cdot c}{\sqrt{\alpha}}$	$\frac{K_M}{K_q}$	4	$\frac{\pi \cdot K_{\Delta e} \cdot \sqrt{h \cdot c \cdot kg \cdot m}}{\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{10^7} \cdot A \cdot s} = 2.06783384846192940 \cdot 10^{-15}$	$\frac{kg \cdot m^2}{A \cdot s^2}$	$\frac{2 \cdot \pi \cdot h}{2 \cdot e} = 2.06783384846192900 \cdot 10^{-15}$

Окончание таблицы 5

Квант проводимости	G_0	$\frac{\alpha \cdot c}{\pi}$	$\frac{K_q^2}{K_M}$	5	$\frac{\alpha \cdot 10^7 \cdot A^2 \cdot s^2}{\pi \cdot c \cdot K_{\Delta e}^2 \cdot kg \cdot m} = 7.74809172986365100 \cdot 10^{-5}$	$\frac{A^2 \cdot s^3}{kg \cdot m^2}$	$\frac{2 \cdot e^2}{2 \cdot \pi \cdot \hbar} = 7.74809172986365200 \cdot 10^{-5}$	1.7
Постоянная Джозефсона	K_J	$\frac{\sqrt{\alpha}}{\pi \cdot c \cdot \ell_P}$	$\frac{K_q}{K_M}$	6	$\frac{\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{10^7} \cdot A \cdot s}{\pi \cdot K_{\Delta e} \cdot \sqrt{\hbar \cdot c \cdot kg \cdot m}} = 4.83597848416983600 \cdot 10^{14}$	$\frac{A \cdot s^2}{kg \cdot m^2}$	$\frac{2 \cdot e}{2 \cdot \pi \cdot \hbar} = 4.83597848416983660 \cdot 10^{14}$	2.6

Источник: [4].

Приведённые в табл. 4 расчётные величины имеют отклонение от рекомендуемых (рассчитанных на основе рекомендуемых) CODATE [4] значений не более чем на 8,2% их стандартной неопределённости (при среднем отклонении менее 2,8%), а в табл. 5 не более чем на $2.6 \cdot 10^{-16}$ (при среднем отклонении менее $1.6 \cdot 10^{-16}$), т. е. совпадают с точностью до 15 знака. Таким образом, полученные результаты, как минимум, не противоречат рекомендациям CODATE.

Поскольку по определению квадрат стандартной неопределённости есть дисперсия соответствующего значения, для оценки полученных результатов применим взвешенный метод наименьших квадратов (ВМК или WLS)¹³.

Показатель степени близости R_x значений x_i с учётом стандартной неопределённости значениям x_i без стандартной неопределённости рассчитан в соответствии с формулой:

$$R_x = \sum_{i=1}^n \beta_i \cdot (x_i + u(x_i) - x_i)^2,$$

где n – количество величин, а $i=1 \dots n$ – порядковый индекс

Для устранения гетероскедастичности и несоразмерности величин весовой коэффициент установлен как обратная величина квадрата значения x_i :

$$\beta_i = \frac{1}{x_i^2}$$

То есть показатель степени близости значений x_i некоторого набора к идеалу возможно определить как сумму квадратов их относительной стандартной неопределённости

$$R_x = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^2} \cdot (x_i + u(x_i) - x_i)^2 = \sum_{i=1}^n \frac{u^2(x_i)}{x_i^2} = \sum_{i=1}^n \delta^2(x_i)$$

Соответственно, для y_i :

$$R_y = \sum_{i=1}^n \delta^2(y_i)$$

Тогда сравнительная оценка точности значений массива x_i и массива y_i может быть дана отношением соответствующих показателей степени близости

$$\frac{R_x}{R_y} = 8.2 \cdot 10^{-8}$$

То есть показатель степени близости массива x_i превосходит показатель степени близости массива y_i (табл. 4) в 10 миллионов раз.

Заключение

Таким образом, из представленных в статье материалов можно сделать следующие выводы.

1. Предлагаемый вариант планковской LT-системы (PLT) единиц точно согласован с подсистемами системы единиц CGS и максимально согласован с международной SI.

¹³ См.: Weighted least squares [Электронный ресурс] // Wikipedia: [сайт]. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Weighted_least_squares (дата обращения: 14.09.2024).

2. Расчётное значение постоянной тонкой структуры α и поправочного коэффициента электрического заряда $K_{\Delta e}$ позволяет уточнить известные переводные коэффициенты подсистем системы единиц CGS и SI, устранить аномалию в электромагнитных величинах и уточнить значение элементарного заряда.

3. Значения ряда констант (графа 6 табл. 4) в единицах международной SI по аналогии с рекомендуемыми CODATE значениями постоянной Планка и элементарного заряда при проведении расчётов допустимо полагать точными, в том числе:

– планковской длины $\ell_P = 1.616255272206877 \cdot 10^{-35} \cdot m$;

– постоянной тонкой структуры $\alpha = 7.297352564390205 \cdot 10^{-3}$;

– гравитационной постоянной Ньютона

$$G_N = 6.67430204643366900 \cdot 10^{-11} \cdot m^3 \cdot s^{-2} \cdot kg^{-1};$$

– электрической постоянной

$$\varepsilon_0 = 8.85418781873061400 \cdot 10^{-12} \cdot s^4 \cdot A^2 \cdot m^{-3} \cdot kg^{-1};$$

– магнитной постоянной

$$\mu_0 = 1.25663706127834820 \cdot 10^{-6} \cdot m \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-2};$$

– планковской массы $M_P = 2.17643400905538000 \cdot 10^{-8} \cdot kg$;

– планковского заряда $q_P = 1.87554603840779820 \cdot 10^{-18} \cdot A \cdot s$;

– планковской температуры $T_P = 1.41678394495447900 \cdot 10^{32} \cdot K$.

4. Представление значений физических величин в единицах PLT (графа 3 табл. 4 и табл. 5) в ряде случаев упростит математические модели и расчёты в широком спектре научных и технических приложений.

5. Современные метрологические эталоны, принятые в международной SI, не позволят обнаружить изменение скорости света в вакууме, если оно произойдёт или происходит, в связи с тем, что постоянная Планка, элементарный электрический заряд и массы покоя элементарных частиц являются производными константанами, зависящими от скорости света в вакууме. Но именно выбор системы единиц, в которой эти константы явно зависят от скорости света, автор монографии [8, р. 2031] связывает с успехом дальнейшего развития теорий переменной скорости света (ПСС или VSL).

7. Предлагаемые переводные коэффициенты и условно точные константы допускают преобразование значений результатов наблюдений, экспериментов и расчётов, полученных при использовании одной из упомянутых в статье систем единиц, в значения другой без потери точности.

Так, например, масса Солнца и масса Земли, рассчитанные с использованием солнечного массового параметра и геоцентрической гравитационной константы [1, р. 296], имеют значения

$$M_{S\text{расч}} = GM_S / G_{N\text{расч}} = GM_S \cdot K_M = 1.98840926163(15) \cdot 10^{30} \cdot kg,$$

$$M_{E\text{расч}} = GM_E / G_{N\text{расч}} = GM_E \cdot K_M = 5.972166570(12) \cdot 10^{24} \cdot kg,$$

что более чем на 5 порядков для массы Солнца и более чем на 3 порядка для массы Земли точнее значений, приведённых в том же источнике.

ЛИТЕРАТУРА

1. The IAU 2009 system of astronomical constants: the report of the IAU working group on numerical standards for Fundamental Astronomy / B. Luzum, N. Capitaine, A. Fienga, W. Folkner, T. Fukushima et al. // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2011. Vol. 110. P. 293–304. DOI: 10.1007/s10569-011-9352-4.
2. Максвелл Дж. К. Об измерении величин // Максвелл Дж. К. Трактат об электричестве и магнетизме: в двух томах. Т. 1. М.: Наука, 1989. С. 29–54.
3. Ди Бартини Р. О. Соотношения между физическими величинами // Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. М.: Атомиздат, 1966. С. 249–266.
4. CODATA. Fundamental Physical Constants from NIST [Электронный ресурс] // National Institute of Standards and Technology: [сайт]. URL: <https://physics.nist.gov/cuu/Constants/index.html> (дата обращения: 30.08.2024).
5. Jackson J. D. Appendix of Units and Dimensions // Jackson J. D. *Classical Electrodynamics*; 3rd ed. New York: Wiley, 1999. P. 775–784.
6. Cardarelli F. Other Systems of Units. Cgs, Gauss, IEUS, a.u. // Cardarelli F. *Encyclopaedia of Scientific Units, Weights and Measures Their SI Equivalences and Origins* / English translation by M. J. Shields, FllnfSc, MITI. London: Springer, 2003. P. 20–25.
7. Pavese F. The New SI and the CODATA recommended values of the fundamental constants 2017 compared with 2014, with a Comment to “Possolo et al., *Metrologia* 55 (2018) 29” // ArXiv.org: e-Print archive. URL: <https://arxiv.org/abs/1512.03668> (дата обращения: 30.08.2024). DOI: 10.48550/arXiv.1512.03668.
8. Magueijo J. New varying speed of light theories // *Reports on Progress in Physics*. 2003. Vol. 66. Iss. 11. P. 2025–2068. DOI: 10.1088/0034-4885/66/11/R04.
9. Measurements of the gravitational constant using two independent methods / Q. Li, C. Xue, J.-P. Liu, J.-F. Wu, S.-Q. Yang et al. // *Nature*. 2018. Vol. 560. P. 582–588. DOI: 10.1038/s41586-018-0431-5.
10. Shades of dark uncertainty and consensus value for the Newtonian constant of gravitation / C. Merkatas, B. Toman, A. Possolo, S. Schlamminger // *Metrologia*. 2019. Vol. 56. No. 5: Focus on Measurements of the Newtonian Constant of Gravitation. Article: 054001. DOI: 10.1088/1681-7575/ab3365.
11. Измайлов В. П., Карагиоз О. В., Пархомов А. Г. Исследование вариаций результатов измерений гравитационной постоянной // *Физическая мысль России*. 1999. № 1/2. С. 20–26.
12. Никоненко К. Л. К вопросу оценки точности значений фундаментальных физических констант // Вопросы технических и физико-математических наук в свете современных исследований: сборник статей по материалам LIX международной научно-практической конференции. Т. 1 (50) / под ред. С. М. Ахметова. Новосибирск: ООО «Сибирская академическая книга», 2023. С. 26–59.

REFERENCES

1. Luzum, B., Capitaine, N., Fienga, A., Folkner, W., Fukushima, T. et al. (2011). The IAU 2009 system of astronomical constants: the report of the IAU working group on numerical standards for Fundamental Astronomy. In: *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 110, 293–304. DOI: 10.1007/s10569-011-9352-4 -4 (in Russ.).
2. Maxwell, J. C. (1989). On the Measurement of Quantities. In: Maxwell, J. C. *A Treatise on Electricity and Magnetism*. Vol. 1. Moscow: Nauka publ., pp. 29–54.

3. di Bartini, R. O. (1966). Relationships between physical quantities. In: *Problems of the theory of gravitation and elementary particles*. Moscow: -4 (in Russ.). Atomizdat publ., pp. 249–266.
4. CODATA. Fundamental Physical Constants from NIST. In: *National Institute of Standards and Technology*. URL: <https://physics.nist.gov/cuu/Constants/index.html> (accessed: 30.08.2024).
5. Jackson, J. D. (1999). Appendix of Units and Dimensions. In: Jackson, J. D. *Classical Electrodynamics*. New York: Wiley, pp. 775–784.
6. Cardarelli, F. (2003). Other Systems of Units. Cgs, Gauss, IEUS, a.u. In: Cardarelli, F. *Encyclopaedia of Scientific Units, Weights and Measures Their SI Equivalences and Origins* / English translation by M. J. Shields, FllnfSc, MITI. London: Springer, pp. 20–25.
7. Pavese, F. (2018). The New SI and the CODATA recommended values of the fundamental constants 2017 compared with 2014, with a Comment to “Possolo et al., Metrologia 55 (2018) 29”. In: *ArXiv.org: e-Print archive*. URL: <https://arxiv.org/abs/1512.03668> (accessed: 30.08.2024). DOI: 10.48550/arXiv.1512.03668.
8. Magueijo, J. (2003). New varying speed of light theories. In: *Reports on Progress in Physics*, 66 (11), 2025–2068. DOI: 10.1088/0034-4885/66/11/R04.
9. Li, Q., Xue, C., Liu, J.-P., Wu, J.-F., Yang, S.-Q. et al. (2018). Measurements of the gravitational constant using two independent methods. In: *Nature*, 560, 582–588. DOI: 10.1038/s41586-018-0431-5.
10. Merkatas, C., Toman, B., Possolo, A. & Schlamminger, S. (2019). Shades of dark uncertainty and consensus value for the Newtonian constant of gravitation. In: *Metrologia*, 56 (5): Focus on Measurements of the Newtonian Constant of Gravitation, 054001. DOI: 10.1088/1681-7575/ab3365.
11. Izmailov, V. P., Karagioz, O. V. & Parkhomov, A. G. (1999). Study of variations in the results of measurements of the gravitational constant. In: *Physical Thought of Russia*, 1/2, 20–26 (in Russ).
12. Nikonenko, K. L. (2023). On the issue of estimating the accuracy of the values of fundamental physical constants. In: *Issues of technical and physical-mathematical sciences in light of modern research. Vol. 1* (50). Novosibirsk: LLC “Sibirskaya Akademicheskaya Kniga” publ., pp. 26–59 (in Russ).

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Никоненко Константин Леонидович (г. Москва) – независимый исследователь;
ORCID: 0009-0005-6318-0760; e-mail: klnikon2013@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Konstantin L. Nikonenko (Moscow) – Independent Researcher;
ORCID: 0009-0005-6318-0760; e-mail: klnikon2013@mail.ru



ВЕСТНИК
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА ПРОСВЕЩЕНИЯ

СЕРИЯ: ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА
2024. № 4

Над номером работали:
Ответственный редактор И. А. Потапова
Литературный редактор М. С. Тарасова
Переводчик В. А. Дворянов
Корректор М. С. Тарасова
Компьютерная вёрстка – Д. А. Заботина

Адрес редакции:
105005, г. Москва, ул. Радио, д. 10А, стр. 2, офис 98
тел. (495) 780-09-42 доб. 6101
e-mail: sj@guppros.ru
Сайт: www.physmathmgou.ru

Формат 70x108/16. Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура "Minion Pro".
Тираж 500 экз. Усл. п. л. 5,5, уч.-изд. л. 4,5.
Подписано в печать: 28.12.2024 г. Дата выхода в свет: 20.03.2025 г. Заказ № 2024/12-08.
Отпечатано в Государственном университете просвещения
105005, г. Москва, ул. Радио, д. 10А, стр. 2