ISSN 2949-5083 (print)
ISSN 2949-5067 (online)

ПРОСВЕТ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРОСВЕЩЕНИЯ

Вестник

Государственного университета просвещения

Серия

Физика-математика

ОСОБЕННОСТИ ВЛИЯНИЯ ФОРМЫ ОБТЕКАЕМОГО ТЕЛА НА ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ С НИМ ПОТОКА ЧАСТИЦ

СТАТИСТИЧЕСКИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПАР МОЛЕКУЛ В МОДИФИЦИРОВАННОЙ БИМОДАЛЬНОЙ МОДЕЛИ УДАРНО-СЖАТОЙ СМЕСИ ГАЗОВ

2024/№ 3

ВЕСТНИК
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА ПРОСВЕЩЕНИЯ

ISSN 2949-5083 (print) 2024 / № 3 ISSN 2949-5067 (online)

серия
ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА

Рецензируемый научный журнал. Основан в 1998 г.

Журнал «Вестник Государственного университета просвещения. Серия: Физика-математика» включён в «Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание учёной степени кандидата наук, на соискание учёной степени доктора наук» Высшей аттестационной комиссии при Министерстве науки и высшего образования Российской Федерации (См.: Список журналов на сайте ВАК при Минобрнауки России) по следующим научным специальностям: 1.3.3. – Теоретическая физика (физико-математические науки); 1.3.8. – Физика конденсированного состояния (физико-математические науки).

The peer-reviewed journal was founded in 1998

«Bulletin of Federal State University of Education. Series: Physics and Mathematics» is included by the Supreme Certifying Commission of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation into "the List of reviewed academic journals and periodicals recommended for publishing in corresponding series basic research thesis results for a Ph.D. Candidate or Doctorate Degree" (See: the online List of journals at the site of the Supreme Certifying Commission of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation) on the following scientific specialities: 1.3.3. – Theoretical physics (physical-mathematical sciences); 1.3.8. – Physics of the condensed state (physical-mathematical sciences) (See: the online List of journals at the site of the Supreme Certifying Commission of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation).

ISSN 2949-5083 (print) 2024 / № 3 ISSN 2949-5067 (online)

series
PHYSICS AND MATHEMATICS

BULLETIN
OF FEDERAL STATE UNIVERSITY
OF EDUCATION

Учредитель журнала
«Вестник Государственного университета просвещения. Серия: Физика-математика»
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
Государственный университет просвещения
Выходит 4 раза в год

ISSN 2949-5083 (print)
ISSN 2949-5067 (online)

Рецензируемый научный журнал «Вестник Государственного университета просвещения. Серия: Физика-математика» публикует статьи по математическим проблемам термодинамики, кинетики и статистической физики; теории конденсированного состояния классических и квантовых, макроскопических и микроскопических систем; изучению различных состояний вещества и физических явлений в них; статистической физике и кинетической теории равновесных и неравновесных систем; теоретическому и экспериментальному исследованию физических свойств неупорядоченных неорганических систем; изучению экспериментального состояния конденсированных веществ и фазовых переходов в них. Журнал адресован ученым, докторантам, аспирантам и всем, интересующимся достижениями физико-математических наук.

Журнал «Вестник Государственного университета просвещения. Серия «Физика-математика» зарегистрирован в Федеральной службе по надзору за соблюдением законодательства в сфере массовых коммуникаций и охране культурного наследия. Регистрационное свидетельство ПИ № ФС 77-73344.

Индекс серии «Физика-математика» по Объединенному каталогу «Пресса России» 40723

Журнал включён в базу данных Российского индекса научного цитирования (РИНЦ), имеет полнотекстовую сетевую версию в интернете на платформе Научной электронной библиотеки (www.elibrary.ru), с августа 2017 г. на платформе Научной электронной библиотеки «КиберЛенинка» (www.cyberleninka.ru), а также на сайте журнала «Вестник Государственного университета просвещения. Серия: Физика-математика» (www.physmathmgou.ru).

Вестник Государственного университета просвещения. Серия: Физика-математика. – 2024. – № 3. – 68 с.

Адрес редакции:
г. Москва, ул. Радио, д.10А, стр. 2, офис 98
тел.: (495) 780-09-42 (доб. 6101)
e-mail: sj@guppros.ru; сайт: www.physmathmgou.ru.

Founder of journal
«Bulletin of Federal State University of Education. Series: Physics and Mathematics»
Federal State University of Education

Issued 4 times a year

ISSN 2949-5083 (print)
ISSN 2949-5067 (online)

The reviewed scientific journal "Bulletin of Federal State University of Education. Series: Physics and Mathematics" publishes articles on mathematical problems of thermodynamics, kinetics and statistical physics; the theory of the condensed state of classical and quantum, macroscopic and microscopic systems; the study of various states of substance and physical phenomena in them; statistical physics and the kinetic theory of equilibrium and non-equilibrium systems; theoretical and experimental research of physical features of disordered inorganic systems; the study of the experimental state of condensed substances and phase transitions in them. The journal is addressed to scientists, doctoral students, PhD students and everyone interested in the achievements of physical and mathematical sciences.

The series "Physics and Mathematics" of the Bulletin of Federal State University of Education is registered in Federal service on supervision of legislation observance in sphere of mass communications and cultural heritage protection. The registration certificate ПИ № ФС 77 – 73344.

Index series «Physics and Mathematics» according to the union catalog «Press of Russia» 40723

The journal is included into the database of the Russian Science Citation Index, and its full texts are available through scientific electronic libraries "eLibrary" (www.elibrary.ru) and "CyberLeninka" (since August 2017; www.cyberleninka.ru), as well as on the site of "Bulletin of Federal State University of Education. Series: Physics and Mathematics" (www.physmathmgou.ru).

Bulletin of Federal State University of Education. Series: Physics and Mathematics. – 2024. – № 3. – 68 p.

The Editorial Board address:
10A build. 2 Radio str., office 98, Moscow, Russia
Phone: (495) 780-09-42 (add. 6101)
e-mail: sj@guppros.ru; site: www.physmathmgou.ru.

СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКА

CONTENTS

PHYSICS

Памяти Александра Степановича Бугаева

(25 августа 1947 – 3 октября 2024)

С глубоким прискорбием сообщаем, что 3 октября 2024 г. ушёл из жизни наш коллега и выдающийся учёный, академик Российской академии наук Александр Степанович Бугаев.

Александр Степанович родился 25 августа 1947 г. в Сталинской области (ныне – Донецкая Народная Республика) и посвятил свою жизнь служению науке и образованию.

Александр Степанович был признанным специалистом в области физики конденсированного состояния, информационных технологий и элементной базы полупроводниковых устройств. Под его руководством были разработаны принципиально новые типы приборов, включая высокочувствительные детекторы акустических и магнитостатических волн, молекулярно-электронные датчики движения и сейсмографы, которые значительно расширили возможности современной науки и техники.

С 2009 г. Александр Степанович Бугаев был главным научным сотрудником учебно-научной лаборатории теоретической и прикладной нанотехнологии Московского государственного областного университета (ныне – Государственного университета просвещения). В стенах нашего университета он активно делился своим опытом, привнося инновационные идеи и поддерживая научные исследования молодых специалистов и студентов. Его работы легли в основу разработки новых СВЧ-резонаторов, генераторов и модуляторов, а также других устройств, применяемых в прикладных задачах физики и электроники.

В нашем университете Александр Степанович плодотворно работал и в качестве главного редактора журнала «Вестник Государственного университета просвещения. Серия Физика-Математика». При нём в журнал пришли многие авторитетные учёные из России и других стран, журнал развивался как серьёзное издание, входящее в Перечень ВАК.

За свои достижения Александр Степанович был удостоен многих высоких наград, включая премию Ленинского комсомола, Государственную премию РФ в области науки и техники, различные премии Правительства РФ в области науки и техники и образования. В 2024 г. Александр Степанович был награждён Почётной грамотой Президента РФ за заслуги в развитии отечественной науки и многолетнюю плодотворную деятельность в связи с 300-летием Российской академии наук.

Вклад Александра Степановича в развитие отечественной и мировой науки, а также неоценимая помощь в подготовке молодых учёных навсегда останутся частью истории нашего университета. Мы выражаем глубокие соболезнования его родным, близким, коллегам и всем, кто разделял с ним годы научного труда и дружбы. Светлая память об Александре Степановиче навсегда останется в наших сердцах.

ФИЗИКА

Научная статья
УДК 541. 182. 022: 532. 135
DOI: 10.18384/2949-5067-2024-3-8-19

ВЯЗКОУПРУГОСТЬ ЭЛЕКТРОРЕОЛОГИЧЕСКОЙ СУСПЕНЗИИ В РАМКАХ СТРУКТУРНОЙ МОДЕЛИ

Вековищев М. П.*, Кирсанов Е. А.

Государственный социально-гуманитарный университет, 140411, Московская обл., г. Коломна, ул. Зелёная, д. 30, Российская Федерация
**Корреспондирующий автор, e-mail: mpv.71@mail.ru*

Поступила в редакцию 12.09.2024
Принята к публикации 20.09.2024

Аннотация
Цель: рассмотреть вязкоупругие свойства электрореологической жидкости, состоящей из частиц диоксида кремния в полидиметилсилоксане, при различных значениях напряжённости электрического поля.
Процедура и методы. Проведена аппроксимация частотных зависимостей динамических модулей с помощью уравнений структурной реологической модели. Определены значения коэффициентов уравнений при различных значениях напряжённости поля.
Результаты. Показана возможность применения уравнений структурной модели для описания частотной зависимости модуля потерь и модуля накопления. Установлена связь коэффициентов реологических уравнений с величиной приложенного электрического поля. Показана связь между характером реологических кривых и структурой дисперсии в электрическом поле.
Теоретическая и/или практическая значимость. Предложены уравнения, которые способны аппроксимировать экспериментальные данные на отдельных участках частотной зависимости динамических модулей для электрореологической жидкости. Установлена связь между рассчитанными коэффициентами реологических уравнений и структурой вещества.
Ключевые слова : электрореологическая жидкость, структурная реологическая модель, вязкоупругость, динамические измерения

Для цитирования :
Вековищев М. П., Кирсанов Е. А. Вязкоупругость электрореологической суспензии в рамках структурной модели // Вестник Государственного университета просвещения. Серия: Физика-математика. 2024. № 3. С. 8-19. https://doi.org/10.18384/2949-5067-2024-3-8-19

Original research article

VISCOELASTICITY OF ELECTRORHEOLOGICAL SUSPENSION WITHIN THE FRAMEWORK OF THE STRUCTURAL MODEL

M. Vekovishchev*, E. Kirsanov

State University of Humanities and Social Studies, ulitsa Zelyonaya 30, Kolomna 140411, Moscow region, Russian Federation
**Corresponding author, e-mail: mpv.71@mail.ru*

Received by the editorial office 12.09.2024
Accepted for publication 20.09.2024

Abstract
Aim. To consider the viscoelastic properties of an electrorheological fluid consisting of silicon dioxide particles in polydimethylsiloxane at different values of electric field strength.
Methodology. The frequency dependences of dynamic modules were approximated using the equations of the structural rheological model. The values of the coefficients of the equations were determined for different values of the field strength.
Results. The possibility of using the equations of the structural model to describe the frequency dependence of the loss modulus and the storage modulus is shown. The relationship between the coefficients of the rheological equations and the magnitude of the applied electric field is established. The relationship between the nature of the rheological curves and the structure of dispersion in the electric field is shown.
Research implications. Equations are proposed that are capable of approximating experimental data in individual sections of the frequency dependence of dynamic modules for an electrorheological fluid. A relationship is established between the calculated coefficients of rheological equations and the structure of the substance.
Keywords : electrorheological fluid, structural rheological model, viscoelasticity, dynamic measurements
For citation :
Vekovishchev, M. P. & Kirsanov, E. A. (2024). Viscoelasticity of electrorheological suspension within the framework of the structural model. In: *Bulletin of the Federal State University of Education. Series: Physics and Mathematics*, 3, pp.8-19. https://doi.org/10.18384/2949-5067-2024-3-8-19

Введение

Область «умных» (smart) материалов привлекает внимание исследователей в различных отраслях науки и технологий на протяжении нескольких последних десятилетий. Материалы называют «умными» за счёт их способности обратимо изменять свои свойства под действием внешнего стимула, например светового, механического, температурного, действия электрического или магнитного поля.

Электрореологические (ЭР) жидкости являются современным материалом, способным изменять свои свойства под действием электрического поля. Электрореологические жидкости имеют ряд потенциальных применений в системах демпфирования и сцепления, твердотельной и мягкой робототехнике, микрофлюидных чипах, датчиках тактильного отклика и медицинских сенсорах и др. [1–3].

Электрореологическим (ЭР) эффектом называют явление увеличения вязкости при наложении на образец вещества электрического поля. ЭР-эффект наблюдается в ЭР-жидкостях, например, в дисперсиях частиц, которые легко поляризуются и находятся в диэлектрической непроводящей жидкости. В основе механизма ЭР-эффекта лежит образование цепочек (или колонок) частиц, за счёт притяжения поляризованных частиц, возникающего в электрическом поле. Цепочки частиц ориентируются вдоль линий напряжённости поля $\boldsymbol{E}$ и образуют структуру, способную разрушаться при сдвиговом течении. В такой структурированной жидкости возможно появление предела текучести. В случае стационарного сдвигового течения для описания кривых течения используют известные уравнения Бингама, Кэссона, Гершеля-Балкли [1; 2]. Часто применяется [2; 4] уравнение Бингама в следующем виде $\tau = \tau_y(E) + \eta_0\dot{\gamma}$, где динамическое предельное напряжение зависит от напряжённости поля $\boldsymbol{E}$, например в виде $\tau_y(E) = \alpha E^2 \frac{tanh(E/E_c)^\beta}{(E/E_c)^\beta}$.

В некоторых случаях простые реологические уравнения плохо аппроксимируют экспериментальные данные. Тогда используют [2] более сложные модели, например, вида:

$$\tau = \frac{\tau_0}{1+(t_1\dot{\gamma})^a} + \eta_\infty\left(1+\frac{1}{(t_2\dot{\gamma})^\beta}\right)\dot{\gamma} \text{ или } \tau = \tau_{sy}\left(1-\frac{1-\exp(-a\dot{\gamma})}{1+(a\dot{\gamma})^a}\right) + \eta_\infty\dot{\gamma}.$$

Общей универсальной модели, основанной на строгих физических принципах, до сих пор не существует. Зависимость $\tau_y(E)$ представляют степенным законом $\tau_y \sim E^n$, где величина n находится в интервале от 1 до 2 в зависимости от характера поляризации частиц.

Динамические измерения в ЭР-жидкостях демонстрируют типичное поведение модуля упругости $G'(\omega)$ и модуля потерь G'' [5]. Теоретическая интерпретация основана [4] на моделях с механическими элементами: пружина, демпфер, элемент сухого трения.

В представленной статье осциллирующее течение ЭР-жидкости рассматривается с точки зрения структурной реологической модели [6].

Вязкоупругое поведение при осциллирующем течении

В работе [5] рассмотрено реологическое поведение электрореологической монодисперсной суспензии, состоящей из частиц диоксида кремния (SiO_2) в полидиметилсилоксане. Процесс подготовки однородного образца подробно описан в [5]. Сферические частицы аморфного диоксида кремния (SeahostarKP-100) имеют средний размер частиц 1,00 ± 0,10 мкм. Частицы однородно диспергированы в непроводящей жидкости (полидиметилсилоксан), которая имеет ньютоновскую вязкость 0,5 Па•с. Суспензия ERS107 имеет массовую концентрацию 20 % и объёмную концентрацию Ф = 0,107. После длительного перемешивания проводились динамические измерения на ротационном вискозиметре ARES в куэттовской ячейке с зазором между цилиндрами 1 мм. Внутренний цилиндр был заземлён, внешний цилиндр являлся положительным электродом. Напряжённость электрического поля варьировалась от 30 до 2000 В/мм. Измерения проводились при комнатной температуре, электрический ток в ячейке не наблюдался.

Экспериментальные результаты частотных зависимостей динамических модулей $G'(\omega)$ и $G''(\omega)$ представлены на рис. 1–4 в двойных логарифмических координатах и в корневых координатах. Предварительно определялся район линейной вязкоупругости, причём амплитуда сдвиговых колебаний γ_0 выбиралась отдельно для разных напряжённостей электрического поля ***E***: 0,1% при 2000 В/мм; 0,2% при 1000 В/мм и 500 В/мм; 1% при 250 В/мм и 100 В/мм; 10% при 60 В/мм и при отсутствии поля. Перед началом каждой развёртки по частоте образцы подвергались предварительному сдвигу с большой амплитудой при частоте 10 рад/с в течение 60 с. Предварительная подготовка способствовала одинаковому начальному состоянию образцов.

В работе [5] дано традиционное описание реологических кривых. Отмечено, что в отсутствии поля расплав полимера демонстрирует типичное поведение в терминальной зоне: G'' и $G' \sim \omega^2$. После наложения электрического поля величина динамических модулей возрастает, что приписывается возникновению внутренней структуры из «цепочек» частиц, ориентированных в направлении вектора напряжённости поля. При низких значениях напряжённости поля ***E*** преобладает вязкость (G''), при высоких значениях ***E*** доминирует упругость (G''). Авторы [5] связывают такое поведение с переходом от жидкого состояния в состояние геля.

Будем рассматривать отдельно «вязкое» и «упругое» поведение электрореологической суспензии с точки зрения структурных изменений.

В рамках структурной реологической модели [6] предполагается, что в области линейной вязкоупругости под действием сдвига происходит изменение структуры вещества. На отдельных интервалах частот наблюдаются различные режимы осциллирующего течения, связанные с характером изменения структуры в результате изменения амплитуды скорости сдвига $\gamma_0\omega$.

Для описания реологических кривых будем использовать уравнения структурной модели, подобно тому, как сделано в работах [7; 8].

«Вязкое» реологическое поведение при высоких значениях ***E*** представлено на рис. 1. На графиках показана аппроксимация экспериментальных данных, взятых из работы [5], с помощью реологического уравнения

$$G''^{1/2} = \frac{g'\omega^{1/2}}{\omega^{1/2}+\chi'} + \eta'_\infty{}^{1/2}\omega^{1/2}. \tag{1}$$

Значения коэффициентов приведены в табл. 1.

Уравнение (1) описывает равновесное состояние осциллирующего течения, при котором происходит постепенное разрушение агрегатов (цепочек частиц) с увеличением частоты под действием сдвига.

На интервале низких частот экспериментальные значения G'' превышают рассчитанные, что можно объяснить избытком агрегированных частиц в суспензии. Такое состояние течения будем считать неравновесным.

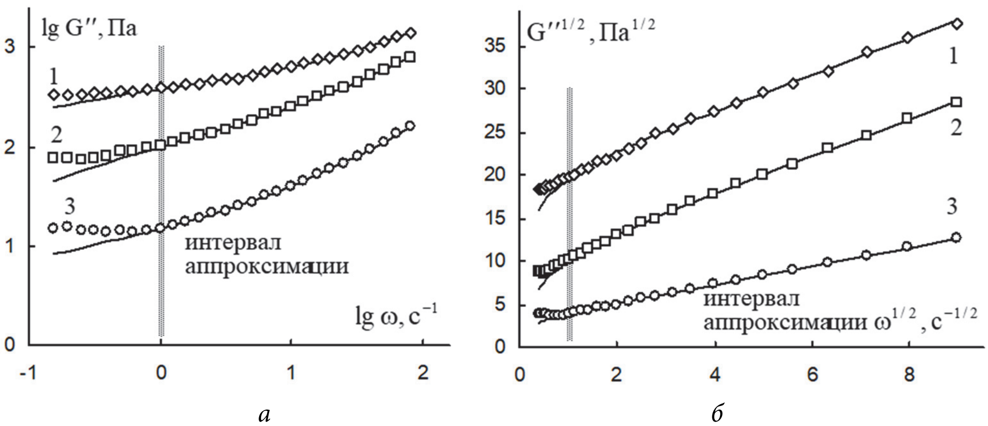
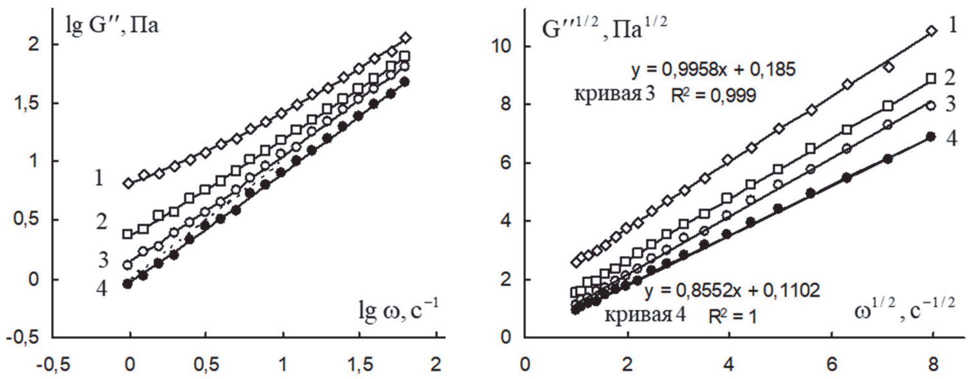


Рис. 1 / Fig. 1. Зависимость модуля потерь G'' от циклической частоты ω для суспензии диоксида кремния в полидиметилсилоксане при напряжённости электрического поля (В/мм) 2000 (1); 1000 (2); 500 (3):
а – в двойных логарифмических координатах, *б* – в корневых координатах /
Dependence of the loss modulus G'' on the cyclic frequency ω for a suspension of silicon dioxide in polydimethylsiloxane at electric field strength (V/mm) of 2000 (1); 1000 2); 500 (3):
a – in double logarithmic coordinates, *б* – in root coordinates

Источник: [5].

При более низких значениях $\boldsymbol{E}$ на графиках (рис. 2) имеется только участок высоких частот, где наблюдается равновесное течение. Реологические кривые G' достаточно хорошо аппроксимируются уравнением (1).

При $\boldsymbol{E}=60$ В/мм и в отсутствие поля в корневых координатах экспериментальные данные описываются прямой, т. е. коэффициент χ' равен нулю. В рамках структурной модели [6] это означает, что отсутствует спонтанное разрушение цепочек-агрегатов; процесс разрушения агрегатов происходит только в результате разрывающих гидродинамических сил при сдвиге. Возможное «ньютоновское течение» с постоянной вязкостью показано пунктирной прямой на рис. 2, *а*. Таким образом, видно, что в отсутствии поля также существует некая слабая структура, которая разрушается с увеличением частоты сдвиговых колебаний.



а *б*

Рис. 2 / Fig. 2. Зависимость модуля потерь G'' от циклической частоты ω для суспензии диоксида кремния в полидиметилсилоксане при напряжённости электрического поля (В/мм) 250 (1); 100 (2); 60 (3); 0 (4): *а* – в двойных логарифмических координатах, *б* – в корневых координатах / Dependence of the loss modulus G'' on the cyclic frequency ω for a suspension of silicon dioxide in polydimethylsiloxane at electric field strength (V/mm) of 250 (1); 100 (2); 60 (3); 0 (4): *a* – in double logarithmic coordinates, *б* – in root coordinates

Источник: [5].

Таблица 1 / Table 1

Коэффициенты уравнений для модуля потерь для суспензии диоксида кремния в полидиметилсилоксане, полученные при различной напряжённости электрического поля / The coefficients of the equations for the loss modulus obtained for a suspension of silicon dioxide in polydimethylsiloxane at different electric field strengths

E, В/мм	2000	1000	500	250	100	60	0
g', Па$^{1/2}$	19,65	10,21	3,087	1,675	0,863	0,185	0,110
$\eta_\infty'^{1/2}$,(Па с)$^{1/2}$	2,067	2,078	1,067	1,110	1,010	0,996	0,855
χ', с$^{-1/2}$	0,122	0,284	0,102	0,173	0,741	0	0
g'/χ',(Па с)$^{1/2}$	161,7	35,99	30,39	9,681	1,166	-	-
$\eta'^{1/2}(0)$, (Па с)$^{1/2}$	163,8	38,07	31,45	10,79	2,176	-	-

Источник: по данным авторов

В рамках структурной реологической модели [6] коэффициент агрегации g', связан с прочностью контактов между частицами и количеством контактов. Разумно считать, что величина g' должна возрастать с увеличением напряжённости электрического поля (табл. 1).

Величина коэффициента $\eta'^{1/2}_{\infty}$ представляет суммарную вязкость одиночных частиц, которые присутствуют в жидкости при возможном полном разрушении всех агрегатов. Строго говоря, величина $\eta'^{1/2}_{\infty}$ не должна изменяться при изменении электрического поля. Однако мы видим практически одинаковые значения $\eta'^{1/2}_{\infty}$ при двух высоких напряжённостях $\boldsymbol{E}$, а затем коэффициент резко уменьшается в два раза и крайне незначительно уменьшается затем вплоть до исчезновения поля (табл. 1). Можно допустить, что при очень высоких значениях $\boldsymbol{E}$ агрегаты не способны распадаться полностью и сохраняются отдельные малые агрегаты, выступающие в модели в роли первичных частиц.

Коэффициент χ' пропорционален вероятности спонтанного разрыва контактов между частицами, например в результате теплового движения. Величина коэффициента компактности χ' зависит от строения агрегатов частиц. Более рыхлые агрегаты соответствуют низким значениям χ'; при вероятном возникновении сплошной сетки частиц коэффициент стремится к нулю.

Уравнение для динамической вязкости имеет вид:

$$\eta'^{1/2} = \frac{g'}{\omega^{1/2}+\chi'} + \eta'^{1/2}_{\infty}. \qquad (2)$$

Для удобства сравнения различных кривых вводим величину структурной части динамической вязкости g'/χ' и величину нулевой вязкости в виде $\eta'^{1/2}(0)$ (при частоте $\omega \to 0$); значения этих величин приведены в табл. 1.

«Упругое» реологическое поведение при высоких значениях $\boldsymbol{E}$ представлено на рис. 3. На графиках показана аппроксимация экспериментальных данных, взятых из работы [5], с помощью реологического уравнения (3):

$$G'^{1/2} = \frac{g''\omega^{1/2}}{\omega^{1/2}+\chi''} + \eta''^{1/2}_{\infty}\omega^{1/2}, \qquad (3, а)$$

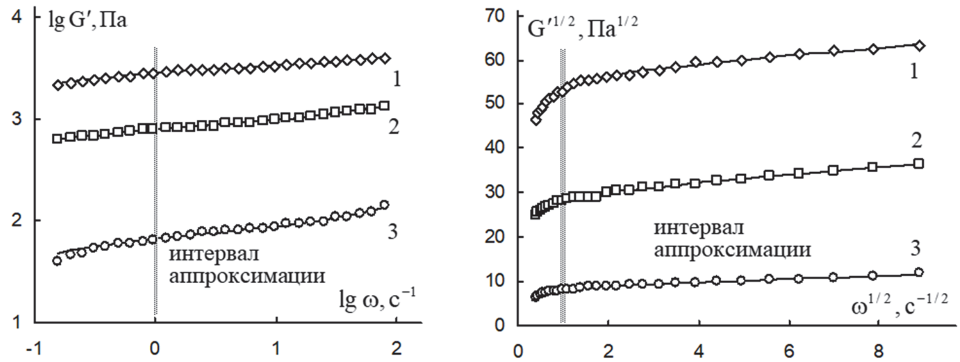
Поскольку $\eta'' = G'/\omega$, то уравнение для динамической упругости η' приобретает вид

$$\eta''^{1/2} = \frac{g''}{\omega^{1/2}+\chi''} + \eta''^{1/2}_{\infty}. \qquad (3, б)$$

Первое слагаемое представляет собой структурную часть модуля накопления (или динамической упругости), обусловленную упругостью агрегатов частиц; второе слагаемое описывает часть модуля накопления (или динамической упругости), связанную с суммарной упругостью отдельных частиц.

Значения коэффициентов приведены в табл. 2.

Уравнение (3) описывает равновесное состояние осциллирующего течения, при котором происходит постепенное разрушение упругих агрегатов (точнее, упругих контактов между частицами) с увеличением частоты. Отметим, что на интервале низких частот экстраполированные значения G' (из области высоких частот) практически совпадают с экспериментальными точками.

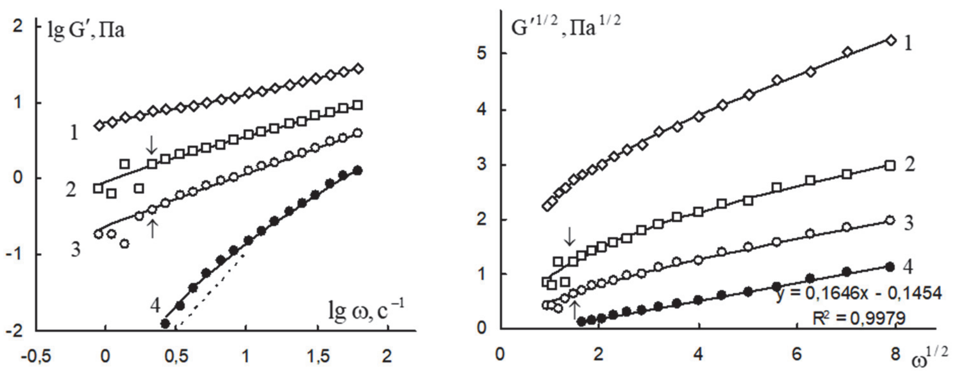


а *б*

Рис. 3 / Fig. 3. Зависимость модуля накопления G' от циклической частоты ω для суспензии диоксида кремния в полидиметилсилоксане при напряжённости электрического поля (В/мм) 2000 (1); 1000 (2); 500 В/мм (3):
а – в двойных логарифмических координатах, *б* – в корневых координатах / Dependence of the storage modulus G' on the cyclic frequency ω for a suspension of silicon dioxide in polydimethylsiloxane at electric field strength (V/mm) of 2000 (1); 1000 (2); 500 V/mm (3):
a – in double logarithmic coordinates, *б* – in root coordinates

Источник: [5].

При значениях $\boldsymbol{E} = 100$ В/мм и $\boldsymbol{E} = 60$ В/мм равновесное состояние наблюдается (рис. 4) на участке высоких частот (начало аппроксимации отмечено стрелкой).



а *б*

Рис. 4 / Fig. 4. Зависимость модуля накопления G' от циклической частоты ω для суспензии диоксида кремния в полидиметилсилоксане при напряжённости электрического поля (В/мм) 250 (1); 100 (2); 60 (3); 0 (4):
а – в двойных логарифмических координатах, *б* – в корневых координатах / Dependence of the storage modulus G' on the cyclic frequency ω for a suspension of silicon dioxide in polydimethylsiloxane at an electric field strength (V/mm) of 250 (1); 100 (2); 60 (3); 0 (4):
a – in double logarithmic coordinates, *б* – in root coordinates

Источник: [5].

Таблица 2 / Table 2

Коэффициенты уравнений для модуля накопления, полученных для суспензии диоксида кремния в полидиметилсилоксане при различной напряжённости электрического поля / The coefficients of the equations for the storage modulus obtained for a suspension of silicon dioxideinpolydimethylsiloxane at different electric field strengths

Е, В/мм	2000	1000	500	250	100	60
g'', Па$^{1/2}$	57,02	29,51	8,631	2,855	2,114	0,999
$\eta_\infty''^{1/2}$, (Па с)$^{1/2}$	0,784	0,820	0,344	0,327	0,158	0,150
χ'', с$^{-1/2}$	0,085	0,078	0,103	0,443	1,669	2,037
g''/χ'', (Па с)$^{1/2}$	671,8	376,5	84,11	6,441	1,267	0,491
$\eta''^{1/2}(0)$, (Па с)$^{1/2}$	672,6	377,3	84,45	6,769	1,425	0,641

Источник: по данным авторов

В рамках структурной реологической модели [5] коэффициент g' определяет прочность упругих контактов между частицами и пропорционален корню силы сцепления между частицами. Величина g' увеличивается с увеличением напряженности электрического поля (табл. 2).

Изменение коэффициентов, связанных с упругостью, сходно с изменением коэффициентов, связанных с вязкостью (рис. 5–7). При той же самой напряжённости поля происходит скачок от низких значений к высоким значениям предельной вязкости (и предельной упругости) «полностью разрушенной» структуры (рис. 5).

Зависимость коэффициентов агрегации для «вязких» и «упругих» агрегатов в первом приближении прямо пропорциональны $\boldsymbol{E}$ (рис. 6).

Зависимость коэффициентов компактности χ' для «вязких» агрегатов и коэффициентов компактности χ' для «упругих» агрегатов имеют сходный вид, а при высоких значениях $\boldsymbol{E}$ практически совпадают (рис. 7).

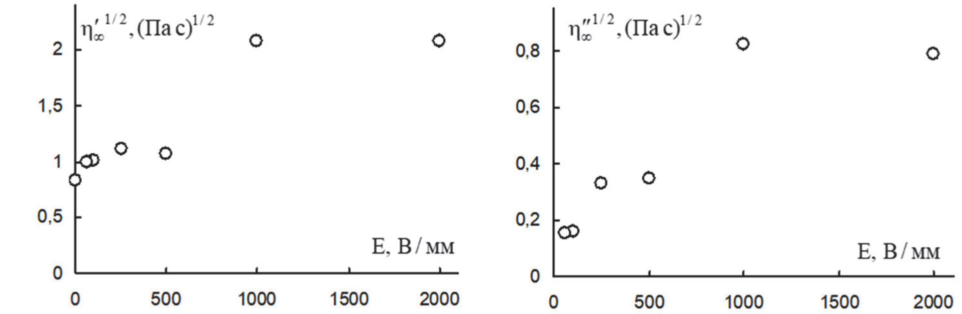
В рамках структурной реологической модели количество агрегированных частиц в единице объёма N_2 можно выразить соотношением:

$$N_2 = \frac{g'}{B\omega^{1/2}}, \tag{5}$$

где B – некоторая постоянная величина.

Чем больше агрегированных частиц, тем больше величина коэффициента агрегации g', при данной частоте. Можно допустить, что коэффициент агрегации g' увеличивается с ростом $\boldsymbol{E}$, поскольку визуальное наблюдение показывает увеличение числа частиц в цепочечных структурах.

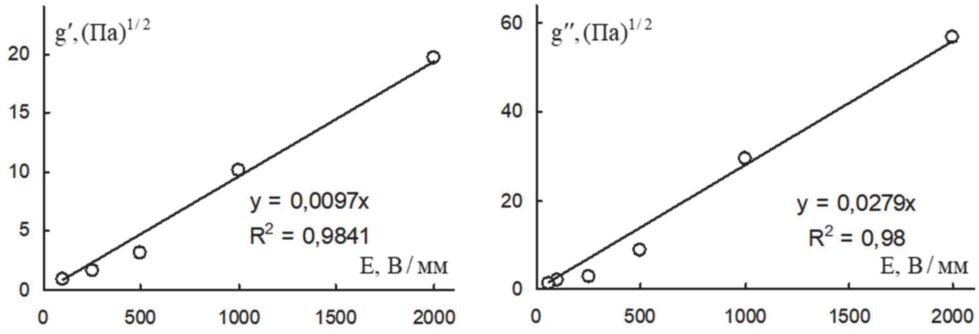
В рамках структурной модели величина g' пропорциональна корню из силы сцепления между агрегатами $F_s^{1/2}$. Если сила сцепления, вызванная электрическим полем, пропорциональна квадрату напряжённости поля, то $g'{\sim}E$. Такая зависимость, в первом приближении, присутствует на графиках (рис. 6).



а *б*

Рис. 5 / Fig. 5. Зависимость коэффициентов уравнений (1) и (3) от напряжённости электрического поля (В/мм): *а* – корень предельной динамической вязкости $\eta'^{1/2}_{\infty}$, *б* – корень предельной динамической упругости $\eta''^{1/2}_{\infty}$ / Dependence of the coefficients of equations (1) and (3) on the electric field strength (V/mm): *а* – root of the limiting dynamic viscosity $\eta'^{1/2}_{\infty}$, *б* – root of the limiting dynamic elasticity $\eta''^{1/2}_{\infty}$

Источник: по данным авторов.



а *б*

Рис. 6 / Fig. 6. Зависимость коэффициентов уравнений (1) и (3) от напряжённости электрического поля (В/мм): *а* – коэффициент агрегации g' для «вязких» агрегатов, *б* – коэффициент агрегации g'' для «упругих» агрегатов / Dependence of the coefficients of equations (1) and (3) on the electric field strength (V/mm): *а* – aggregation coefficient g' for "viscous" aggregates, *б* – aggregation coefficient g'' for "elastic" aggregates

Источник: по данным авторов.

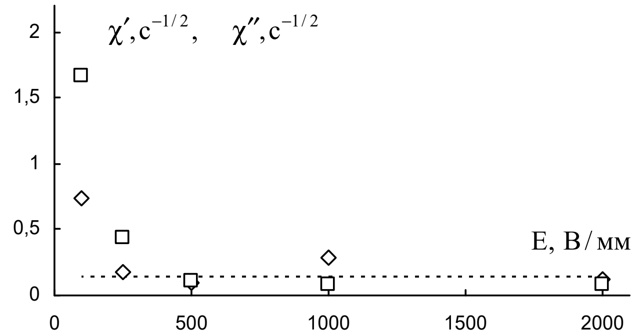


Рис. 7 / Fig. 7. Зависимость коэффициентов уравнений (1) и (3) от напряжённости электрического поля (В/мм): коэффициент компактности χ' для «вязких» агрегатов (ромб), коэффициент компактности χ'' для «упругих» агрегатов (квадрат) / Dependence of the coefficients of equations (1) and (3) on the electric field strength (V/mm): compactness coefficient χ' for “viscous” aggregates (rhombus), compactness coefficient χ'' for “elastic” aggregates (square)

Источник: по данным авторов.

Выводы

Вязкоупругие свойства электрореологической жидкости (суспензии диоксида кремния) рассмотрены в рамках структурной реологической модели. Частотные зависимости динамических модулей G' и $G'(\omega)$ аппроксимированы с помощью реологических уравнений структурной модели. Показана зависимость коэффициентов реологических уравнений от величины напряжённости электрического поля. Установлена связь реологических характеристик с величиной электрического поля и структурой дисперсии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Электрореологический эффект / З. П. Шульман, Ю. Ф. Дейнега, Р. Г. Городкин, А. А. Мацепуро. Минск: Наука и Техника, 1972. 176 с.
2. Кузнецов Н. М. Электрореологические жидкости: состав, структура, свойства: дисс. … докт. физ.-мат. наук. М., 2023. 335 с.
3. Joshi R. R., Patil A. A. Smart Materials- Electrorheological Fluids // International Journal of Innovative Research in Science, Engineering and Technology (IJIRSET). 2020. Vol. 9. Iss. 4. P. 1310–1312.
4. Magnetorheological Fluid Dampers: A Close Look at Efficient Parametric Models / A. Bahar, Fr. Pozo, R. M. Meybodi, S. Karami //Structural Control and Health Monitoring. 2024. Vol. 2024. Iss. 1. Article ID 6860185. DOI: 10.1155/2024/6860185.
5. Chin B. D., Winter H. H. Field-induced gelation, yield stress, and fragility of an electro-rheological suspension // Rheologica Acta. 2002. Vol. 41. Iss. 3. P. 265–275. DOI: 10.1007/s00397-001-0212-0.
6. Кирсанов Е. А., Матвеенко В. Н. Вязкость и упругость структурированных жидкостей: монография. М.: Техносфера, 2022. 284 с.
7. Вековищев М. П., Кирсанов Е. А. Вязкоупругость углеродных нанотрубок в полимерной матрице // Вестник Государственного университета просвещения. Серия: Физика-Математика. 2024. № 1. С. 6–19. DOI: 10.18384/2949-5067-2024-1-6-19.

8. Вековищев М. П., Кирсанов Е. А. Неньютоновское течение структурированных систем. XXXVI. Наножидкость наночастиц оксида железа в этиленгликоле // Жидкие кристаллы и их практическое использование. 2023 Т. 23. № 2. С. 38–51. DOI: 10.18083/LCAppl.2023.2.38.

REFERENCES

1. Shulman, Z. P., Deinega, Yu. F., Gorodkin, R. G. & Matsepuro, A. A. (1972). *Electrorheological effect*. Minsk: “Nauka i Tekhnika” publ. (in Russ.)
2. Kuznetsov, N. M. (2023). *Electrorheological fluids: composition, structure, properties* [dissertation]. Moscow (in Russ.).
3. Joshi, R. R. & Patil, A. A. (2020). Smart Materials- Electrorheological Fluids. In: *International Journal of Innovative Research in Science, Engineering and Technology (IJIRSET)*, 9 (4), 1310–1312.
4. Bahar, A., Pozo, Fr., Meybodi, R. M. & Karami, S. (2024). Magnetorheological Fluid Dampers: A Close Look at Efficient Parametric Models. In: *Structural Control and Health Monitoring*, 2024 (1), article ID 6860185. DOI: 10.1155/2024/6860185.
5. Chin, B. D. & Winter, H. H. (2002). Field-induced gelation, yield stress, and fragility of an electro-rheological suspension. In: *Rheologica Acta*, 41 (3), 265–275. DOI: 10.1007/s00397-001-0212-0.
6. Kirsanov, E. A. & Matveenko, V. N. (2022). *Viscosity and elasticity of structured liquids*. Moscow: Tekhnosfera publ. (in Russ.)
7. Vekovishchev, M. P. & Kirsanov, E. A. (2024). Viscoelasticity of carbon nanotubes in a polymer matrix. In: *Bulletin of the Federal State University of Education. Series: Physics and Mathematics*, 1, 6–19. DOI: 10.18384/2949-5067-2024-1-6-19 (in Russ.).
8. Vekovishchev, M. P. & Kirsanov, E. A. (2023). Non-Newtonian flow of structured systems. XXXVI. Nanofluid of iron oxide nanoparticles in ethylene glycol. In: *Liquid crystals and their Application*, 23 (2), 38–51. DOI: 10.18083/LCAppl.2023.2.38 (in Russ.).

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Вековищев Михаил Петрович (г. Коломна, Московская обл.) – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физики и химии Государственного социально-гуманитарного университета;
ORCID: 0000-0001-9100-9526; e-mail: mpv.71@mail.ru

Кирсанов Евгений Александрович (г. Коломна, Московская обл.) – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физики и химии Государственного социально-гуманитарного университета;
ORCID: 0000-0003-3030-7989; e-mail: Kirsanov47@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Mikhail P. Vekovishchev (Kolomna, Moscow Region) – Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Prof., Department of Physics and Chemistry, State University of Humanities and Social Studies;
ORCID: 0000-0001-9100-9526; e-mail: mpv.71@mail.ru

Evgeny A. Kirsanov (Kolomna, Moscow Region) – Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Prof., Department of Physics and Chemistry, State University of Humanities and Social Studies;
ORCID: 0000-0003-3030-7989; e-mail: Kirsanov47@mail.ru

Научная статья
УДК 532.529:536.24
DOI: 10.18384/2949-5067-2024-3-20-32

ОСОБЕННОСТИ ВЛИЯНИЯ ФОРМЫ ОБТЕКАЕМОГО ТЕЛА НА ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ С НИМ ПОТОКА ЧАСТИЦ

Зубова Н. В.*[1]*, Кудров М. А.*[2]*, Амелюшкин И. А.*[2]* *

[1] *Московский государственный университет технологий и управления им. К. Г. Разумовского (Первый казачий университет), 109004, г. Москва, ул. Земляной вал, д. 73, Российская Федерация*

[2] *Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), 141701, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., д. 9, Российская Федерация*

**Корреспондирующий автор, e-mail: Amelyushkin_Ivan@mail.ru*

Поступила в редакцию 20.05.2024
Принята к публикации 28.05.2024

Аннотация

Цель: создание алгоритмов, позволяющих рассчитывать и управлять дисперсным потоком с обтекаемым телом в приложении к задачам управления тепломассообменом и снижения сопротивления в условиях обильных осадков.

Процедуры и методы. Используются известные физические закономерности, методы интегрирования и анализ исследований других авторов.

Результаты. В настоящей работе развит метод расчёта параметров взаимодействия потока твёрдым телом, свойства покрытия которого влияют на процессы его обтекания. Проведены параметрические исследования, показаны оптимальные формы тел в двухфазных средах при больших значениях числа Стокса.

Теоретическая и практическая значимость. Результаты могут быть использованы при проектировании форм обтекаемых тел, движущихся в аэрозольных средах, в частности, при движении летательных аппаратов в облаках и осадках.

Ключевые слова: рельефное тело, молекулярное моделирование, потенциалы взаимодействия, атомы кристаллической решётки

Благодарности. Исследование выполнено при поддержке РФФИ в рамках проекта № 19–29–13024а.

Для цитирования:

Зубова Н. В., Кудров М. А., Амелюшкин И. А. Особенности влияния формы обтекаемого тела на взаимодействие с ним потока частиц // Вестник Государственного университета просвещения. Серия: Физика-математика. 2024. № 3. С. 20-32. https://doi.org/10.18384/2949-5067-2024-3-20-32

Original research article

FEATURES OF THE INFLUENCE OF THE SHAPE OF A STREAMLINED BODY ON THE INTERACTION OF A PARTICLE FLOW WITH IT

N. Zubova [1]***, M. Kudrov*** [2]***, I. Amelushkin*** [2] *****

[1] K. G. Razumovsky Moscow State University of Technologies and Management (the First Cossack University), Zemlyanoy val 73, Mosccow 109004, Russian Federation

[2] Moscow Institute of Physics and Technology, Institutskiy pereulok 9, Dolgoprudniy 141701, Moscow region, Russian Federation

**Corresponding author, e-mail: Amelyushkin_Ivan@mail.ru*

Received by the editorial office 20.05.2024
Accepted for publication 28.05.2024

Abstract
Aim. Creation of algorithms for calculating and controlling a dispersed flow with a streamlined body in application to the problems of heat and mass transfer control and drag reduction in heavy precipitation conditions.
Methodology. Known physical laws, integration methods and analysis of studies by other authors are used.
Results. In this paper, a method for calculating the parameters of interaction of a flow with a solid body, the properties of the coating of which affect the processes of its flow, is developed. Parametric studies are carried out, optimal shapes of bodies in two-phase media at large values of the Stokes number are shown.
Research implications. The results can be used in designing the shapes of streamlined bodies moving in aerosol media, in particular when a flying vehicle move through clouds and media with precipitation.
Keywords : relief body, molecular modeling, interaction potentials, crystal lattice atoms
Acknowledgments . The study was carried out with the support of the Russian Foundation for Basic Research within the framework of project No. 19-29-13024a.
For citation :
Zubova, N. V., Kudrov, M. A. & Amelushkin, I. A. (2024). Features of the influence of the shape of a streamlined body on the interaction of a particle flow with it. In: *Bulletin of the Federal State University of Education. Series: Physics and Mathematics*, 3, pp. 20-32. https://doi.org/10.18384/2949-5067-2024-3-20-32

Введение

Моделирование управления взаимодействием потока с обтекаемой поверхностью представляет большой интерес в различных областях науки и техники: разработка противообледенительных покрытий, изменение тепломассообмена, транспорт веществ по каналам, ламинаризация и турбулизация потока, управление пограничным слоем и ряд других приложений.

Развиваемый в настоящей работе подход позволяет учесть возможность прилипания молекул к поверхности обтекаемого тела для различных режимов взаимодействия, например, формирования пограничного слоя у рельефного тела, образования инея и конденсации.

Известно, что аэродинмическое качество летательного апапарата может измениться на 70% при полёте в сильный дождь [1]. Отметим, что хотя большинство самолётов летают над уровнем облаков, влияние осадков на полёты малых беспилотных летательных аппаратов может быть весьма существенным как из-за длительного времени пребывания в потоке осадков, так и с точки зрения более значительного влияния жидкости на ламинарно-турбулентный переход, нестационарные срывы плёнки и другие процессы, сопровождающие заметное влияние осадков на аэродинамические характеристики.

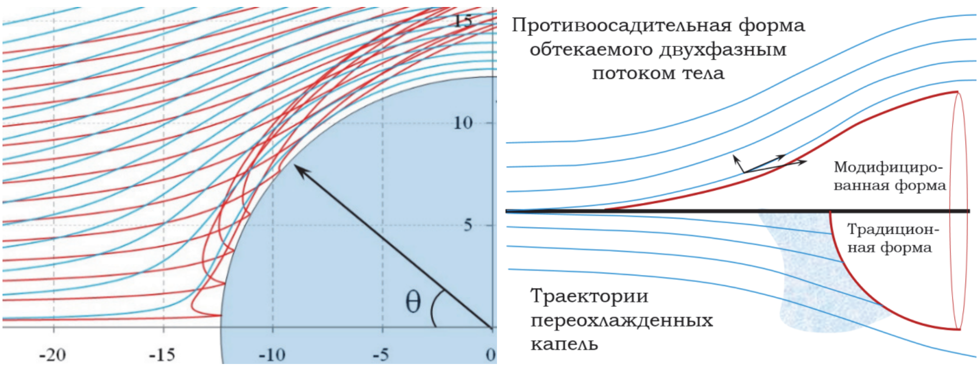
Управление тепломассообменом летательного аппарата в двухфазном потоке представляет большой научный и практический интерес. Обеспечение безопасности полётов, снижение энергозатрат противообледенительных систем, повышение полезной нагрузки летательных аппаратов за счёт снижения веса противообледенительных систем также представляются весьма интересными с научной и практической стороны в широкой области приложений. При расширении предназначений и областей применения летательных аппаратов и аэрогидросредной техники требуется обеспечение надёжности режимов полёта и функционирования необходимого для движения транспортного средства оборудования.

Управление тепломассообменом, силовым и эрозионным воздействием двухфазного потока представляет большой научный и практический интерес. Так, например, при незначительной концентрации пыли (несколько процентов) тепловой поток к поверхности сверхзвукового летательного аппарата увеличивается в несколько раз [2] по сравнению со случаем незапылённого газа, а увеличение концентрации пыли с 1 до 3% может привести к появлению дисперсного экрана – области с повышенной концентрацией дисперсной фазы [3]. Применение гидрофобных покрытий в определённом диапазоне параметров потока позволяет полностью устранить образование льда [4], а их использование в сочетании с тепловой противообледенительной системой позволяет снизить её энергозатраты и вес и при этом предотвратить образование на крыле барьерного льда [4; 5]. Создание на поверхности обтекаемого жидкостью тела слоя воздушной или иной смазки за счёт удержания газа в порах нанорельефного тела позволяет значительно снизить сопротивление трения [6, с. 84–86] и в ряде задач интенсифицировать перемешивание жидкостей при малых значениях числа Рейнольдса [7]. Управление неустойчивыми гидродинамическими явлениями при сворачивании жидкой плёнки в ручейки и распаде ручейков в отдельные капли [8] представляет интерес в задачах теплообмена, предотвращения образования барьерного льда и в некоторых методах визуализации ламинарно-турбулентного перехода на крыле самолёта. Кроме того, учитывая значительный вклад силового воздействия льдин в сопротивление движущихся за ледоколом караванов судов [9] представляет интерес подготовка рекомендаций по выбору формы обтекаемого тела, обеспечивающей снижение сопротивления в двухфазном потоке. Эта задача также актуальна в проектировании элементов конструкции летательной техники, обеспечивающих защиту от обледенения и попадания посторонних предметов в тех случаях, когда аэродинамические аспекты не так важны, как процессы, сопровождающие взаимодействие частиц и капель с поверхности: например, при проектировании приёмника воздушного давления, обледенение которого может привести к тяжёлым последствиям [10]. Отдельного внимания заслуживает повышение аэрогидроднамического качества движущегося по воде колеса с грунтозацепами, при аквапланировании которого могут реализоваться своеобразные режимы обтекания: от гребного до образования под колесом изогнутого воздушного экрана [11]. Влияние водности потока и влажности рассмотрено ранее в работах [12–14], однако в этом исследовании не учитываются безразмерные критерии, определяющие влияние инерции взвешенных в потоке частиц и капель, а также их прогрев на особенности нарастания льда, теплообмен и структуру пограничного слоя на элементах конструкции летательной техники.

Оптимизация формы тел в двухфазных потоках представляет большой практический интерес в широком спектре областей практических приложений. Так, например, при полёте летательного аппарата в сильный ливень масса капель в единице объёма может в десятки раз превышать плотность воздуха, при движении во льдах сопротивление судна возрастает на порядок; даже ничтожные (меньше 1%) массовые и объёмные концентрации частиц и капель в атмосфере приводят к возрастанию тепловых потоков в несколько раз, абляции поверхности вплоть до полного разрушения или к противоположному этому явлению – обледенению, которое может привести к катастрофическому снижению аэродинамического качества летательного аппарата. Особого внимания заслуживает применение смазок и специальных покрытий, с помощью которых можно значительно (несколько десятков процентов в практических задачах) снизить массу наросшего льда и даже полностью предотвратить обледенение твёрдого тела в аэрозольном потоке за конечное время.

Управление взаимодействием двухфазного потока с твёрдым телом

Снижению сопротивления тел в дисперсных средах посвящено множество исследований: от известной формулы И. Ньютона до использования современных методов расчёта динамики разреженного газа или хаоса частиц в пылевой плазме и иных гетерогенных средах, в том числе при эволюции галактик и образовании звёзд. Тем не менее формулировка принципов оптимальных форм обтекаемых тел в двухфазных средах пока далека от своего завершения.



а) б)

Рис. 1 /Fig. 1. Особенности обтекания тела двухфазным потоком: а – различие траекторий частиц и линий тока газа; б – иллюстрация к определению формы тела, которое устойчиво к образованию льда / Features of a two-phase flow around a body: а – difference in particle trajectories and gas flow lines; б – illustration for determining the shape of a body that is resistant to ice formation.

Источник: по данным авторов

Цель настоящего исследования – формулировка принципов проектирования формы тел, которая препятствует обледенению. С точки зрения практических приложений в области летательных аппаратов наибольшую ценность представляет снижение обледенения крыла. С точки зрения фундаментальных исследований наибольший практический интерес представляет собой определение формы тела с минимальным количеством образующегося на нём льда. На рис. 1 показано отличие линий тока газа и частиц двухфазного потока. Справа (1а) показана иллюстрация возможностей снижения интенсивности обледенения за счёт изменения формы обтекаемого тела.

В качестве одного из существующих методов борьбы с обледенением используется небольшая деформация профиля крыла за счёт надувных мешков на его атакующей кромке. Предлагаемый в настоящей работе метод заключается в более радикальной управляющей оптимизации профиля, позволяющей минимизировать плотность падающего потока диспергированной массы за счёт специальной формы обтекаемого тела.

С точки зрения противодействия оледенению крылья можно разделить на три группы (рис. 2). Заметим, что режимы образования льда зависят от многих параметров, к наиболее важным из которых можно отнести температуру переохлаждения и число Стокса, в котором в качестве размера обтекаемого тела выбран радиус кривизны передней кромки.

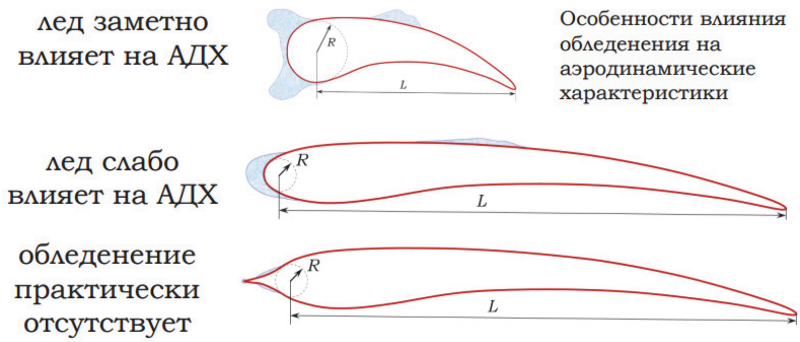


Рис. 2 / Fig. 2. Разновидности форм крыльев с различной степенью чувствительности к обледенению / Varieties of wing shapes with varying degrees of sensitivity to icing

Источник: по данным авторов

Удлинение носовой части обтекаемого тела увеличивает время на выравнивание скоростей частиц (капель) и несущего их потока, тем самым снижая скорость удара частиц (или капель) о поверхность, поток массы двухфазного потока, ослабляя эффекты дробления, эрозии и проникновения в поры покрытия.

Если рассмотреть случай крупных частиц (число Стокса много больше единицы), нетрудно заметить, что сила воздействия частиц на конус при их абсолютно упругом ударе уменьшается пропорционально квадрату синуса угла полураствора конуса. В качестве основных форм-факторов, которые влияют на обледенение, могут быть рассмотрены следующие параметры: 1) форма передней части крыла, 2) отношение длины крыла к характерному размеру передней кромки, 3) угол атаки.

Заметим, что изменение каждого из них может ощутимо влиять на аэродинамические характеристики. При этом результат оптимизации будет весьма существенно зависеть от числа Стокса и температуры переохлаждения капель аэрозоля, а также от поверхностных сил адгезии льда с поверхностью. Количество образовавшегося льда на крыле можно характеризовать: 1) отношением площади поперечного сечения льда к площади, ограниченной контуром профиля (коэффициент ψ) и 2) относительным изменением аэродинамических коэффициентов.

Для определения формы тела, подверженного наименьшему влиянию обледенения, рассмотрен плоский случай обтекания симметричного относительно горизонтальной оси тела, то есть тела с минимальным значением коэффициента ψ. Заметим, что при решении такой задачи изменится коэффициент аэродинамического сопротивления C_x и оптимальная форма тела будет определяться минимальным значением сопротивления хорошо обтекаемого тела, покрытого льдом, и хуже обтекаемого тела, но с меньшим значением образовавшегося льда.

При обтекании клина или конуса поток массы и энергии не меняется. Силу, то есть импульс, который передаётся частицами при их ударе о конус с углом раствора 2α и радиусом основания R при больших значениях числа Стокса, найдём, используя уравнения переноса импульса и рис. 3.

$S = \int_0^{R\mathrm{ctg}\alpha} \frac{2\pi x \mathrm{tg}\alpha \mathrm{d}x}{\cos\alpha} = \frac{\pi R^2}{\sin\alpha}$ – площадь боковой поверхности конуса;

$V_1 = V\sqrt{(a_n \sin\alpha)^2 + (a_\tau \cos\alpha)^2}$ – импульс отражённой частицы в системе координат, в которой конус неподвижен;

$\mathrm{tg}\beta = \frac{a_n}{a_\tau}\mathrm{tg}\alpha$ – угол отскока;

$V_r = \sqrt{V^2 + V_1^2 - 2VV_1\cos(\alpha+\beta)}$ – импульс отражённой частицы в неподвижной системе координат;

$\sin\gamma = \frac{V_1}{V_r}\sin(\alpha+\beta)$ – угол между скоростью отражённой частицы и горизонтальной плоскостью;

$V_r^\tau = V_r \cos\gamma$ – горизонтальная составляющая импульса, переданного частицей поверхности;

$F = \rho V V_r^\tau S$ – сила, действующая со стороны частиц на конус.

В случае полидисперсного двухфазного потока с распределением частиц по размерам a_p, описываемой функцией $f(a_p)$, которую можно найти из следующего выражения: $\mathrm{d}n/n = f(a_p)\mathrm{d}a_p$, где n – концентрация частиц, имеем $F = SV\int_0^\infty V_r^\tau \frac{4}{3}\pi a_p^3 N_0 \rho_p f\left(a_p\right)\mathrm{d}a_p = VS\frac{4}{3}\pi N_0\rho_p \int_0^\infty V_r^\tau a_p^3 f\left(a_p\right)\mathrm{d}a_p$.

Учитывая выражение

$\rho_0 = \int_0^\infty \frac{4}{3}\pi a_p^3 \rho_p \mathrm{d}N = \int_0^\infty \frac{4}{3}\pi a_p^3\rho_p N_0 f\left(a_p\right)\mathrm{d}a_p = \frac{4}{3}\pi\rho_p N_0 \int_0^\infty a_p^3 f\left(a_p\right)\mathrm{d}a_p$,

имеем $F = \rho_0 VS\frac{\int_0^\infty V_r^\tau a_p^3 f(a_p)\mathrm{d}a_p}{\int_0^\infty a_p^3 f(a_p)\mathrm{d}a_p}$.

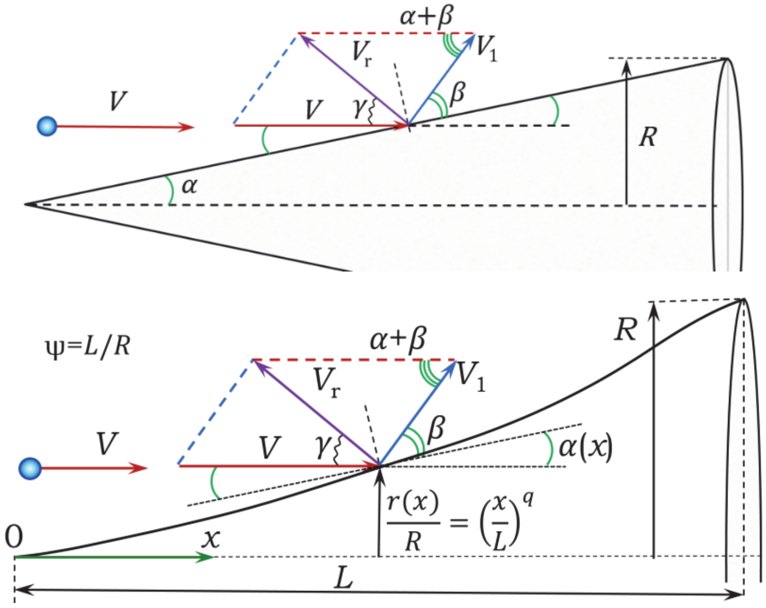


Рис. 3 / Fig. 3. Иллюстрация к расчётам силового воздействия частиц на обтекание конуса (слева) и степенного тела (справа) / Illustration of calculations of the force action of particles on the flow around a cone (left) and a power-law body (right)

Источник: по данным авторов

В частных случаях, например, при абсолютно упругом ударе частиц о поверхность $a_n = a_\tau = 1$, получим $V_r = 2V\sin\alpha$, $\sin\gamma = \cos\alpha$, $V_r^\tau = 2V\sin^2\alpha$, а выражение для силы будет иметь следующий вид: $F = 2\pi R^2\rho V^2\sin\alpha$.

При фиксированном радиусе тела вращения найдём форму тела, которое обладает минимальным сопротивлением в двухфазном потоке: $r(x)/R = (x/L)^q$. Найдём значение q и удлинения $\psi=L/R$, при которых сопротивление минимально в случае абсолютно упругих ударов. $\mathrm{tg}\alpha=(q/\psi)(x/L)^{q-1}$, $V_r = 2V\sin\alpha$,

$\sin\gamma = \cos\alpha$, $V_r^\tau = 2V\sin^2\alpha = 2V\left(\frac{\frac{q}{\psi}\left(\frac{x}{L}\right)^{q-1}}{1+\frac{q}{\psi}\left(\frac{x}{L}\right)^{q-1}}\right)^2$, $\mathrm{dS}=\frac{2\pi r(x)\mathrm{d}x}{\cos\alpha}$,

$$\mathrm{d}F = 2\rho V^2\sin^2\alpha\frac{2\pi r(x)\mathrm{d}x}{\cos\alpha} = 4\pi\rho V^2\mathrm{tg}^2\alpha\frac{r(x)\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}} =$$

$$4\pi\rho V^2\left(\frac{q}{\psi}\right)^2\left(\frac{x}{L}\right)^{2q-2}\frac{RL\left(\frac{x}{L}\right)^q\mathrm{d}\left(\frac{x}{L}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{q}{\psi}\right)^2\left(\frac{x}{L}\right)^{2q-2}}} = 4\pi\rho V^2R^2\psi\left(\frac{q}{\psi}\right)^2\frac{\xi^{3q-2}\mathrm{d}\xi}{\sqrt{1+\left(\frac{q}{\psi}\right)^2\xi^{2q-2}}}..$$

$\frac{F}{\rho V^2\pi R^2} = \frac{4q^2}{\psi}\int_0^1\frac{\xi^{3q-2}\mathrm{d}\xi}{\sqrt{1+(q/\psi)^2\xi^{2q-2}}}$ – коэффициент силы воздействия частиц двухфазного потока на обтекаемое тело при абсолютно упругом ударе. Меняя параметры $\psi=L/R$ и q, нетрудно найти оптимальное значение формы обтекаемого тела.

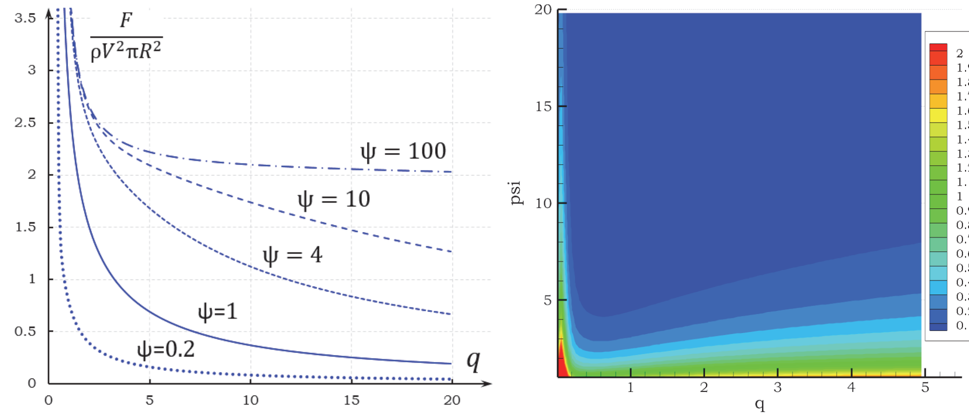


Рис. 4 / Fig. 4. Зависимость коэффициента силы сопротивления от параметров q и ψ при абсолютно упругих ударах частиц о поверхность. Справа показано распределение плотности потока массы в зависимости от упомянутых выше параметров / Dependence of the drag force coefficient on the parameters q and ψ for perfectly elastic impacts of particles on a surface. The distribution of the mass flow density is shown on the right as a function of the above parameters

Источник: по данным авторов

Результаты моделирования и их обсуждение

На рис. 4 и рис. 5 показаны зависимости коэффициента силы сопротивления тела от параметров q и ψ. Видно, что чем меньше удлинение и менее заострённое тело, тем меньше коэффициент сопротивления.

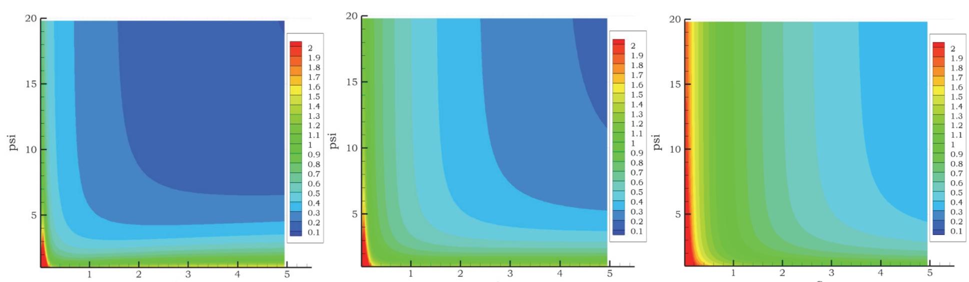


Рис. 5 / Fig. 5. Зависимость коэффициента сопротивления степенного тела от показателя степени q, удлинения ψ и коэффициентов изменения скорости частиц при их ударах о поверхность: слева $a_n = a_\tau = 0.75$; в центре $a_n = a_\tau = 0.5$; справа $a_n = a_\tau = 0.1$ / The dependence of the drag coefficient of a power-law body on the exponent q, elongation ψ and the coefficients of change in the velocity of particles when they hit the surface: on the left $a_n = a_\tau = 0.75$; in the center $a_n = a_\tau = 0.5$; on the right $a_n = a_\tau = 0.1$

Источник: по данным авторов

При уменьшении размеров частиц вплоть до размеров молекулярных кластеров будут проявляться эффекты, которые связаны с тепловым движением молекул, для расчёта силы необходимо проинтегрировать по скоростям выражение действующей на обтекаемое тело силы, умноженной на функцию распределения молекул по скоростям. При этом с уменьшением массы молекул тепловая скорость увеличивается пропорционально кубическому корню из массы. Развитая в настоящей работе модель может быть использована при расчёте обтекания тел потоком частиц произвольной физической природы. Важно отметить, что наряду с изменением формы, силами, моментами сил и потоком массы можно управлять путем подбора свойств материала обтекаемого тела, от которых зависят вектора скорости отскочивших от обтекаемого тела частиц.

Заключение

В результате аналитических решений и компьютерного моделирования определены формы тел в двухфазном потоке с точки зрения снижения интенсивности тепломасообмена и силового воздействия двухфазного потока на обтекаемое тело с учётом физических свойств материалов поверхности обтекаемого тела. В настоящей работе в течение ряда лет создана и развита программа, позволяющая рассчитывать динамику разреженных газов с учётом многократных взаимодействий молекул между собой и с атомами твёрдого тела. Созданная программа позволяет не только предсказать коэффициенты аэродинамических сил и теплообмена летательного аппарата в потоке множества тел произвольной природы и размеров, но определить, какими свойствами должны обладать материалы обтекаемого тела или тонкий поверхностный слой для изменения коэффициентов аэродинамических сил и интенсивности тепломассообмена в широком диапазоне управляющих параметров – от обледенения до абляции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Yihua Cao, Zhenlong Wu, Zhengyu Xu. Effects of rainfall on aircraft aerodynamics // Progress in Aerospace Sciences. 2014. Vol. 71. P. 85–127. DOI: 10.1016/j.paerosci.2014.07.003.
2. Теплообмен в окрестности точки торможения при сверхзвуковом обтекании тел гетерогенным потоком со скольжением фаз / Василевский Э. Б., Домбровский Л. А., Михатулин Д. С., Полежаев Ю. В. // Теплофизика высоких температур. 2001. Т. 39. № 6. С. 925–938.
3. Экспериментальное исследование натекания высокотемпературной струи запыленного газа на преграду / Кудин О. К., Нестеров Ю. Н., Токарев О. Д., Флаксман Я. Ш. // Ученые записки ЦАГИ. 2013. Т. 44. № 6. С. 105–115.
4. Противообледенительные свойства супергидрофобных покрытий на алюминии и нержавеющей стали / Бойнович Л. Б., Домантовский А. Г., Емельяненко А. М., Миллер А. Б., Потапов Ю. Ф., Ходан А. Н. // Известия Академии наук. Серия химическая. 2013. № 2. С. 383–390.

5. Амелюшкин И. А. Критерии подобия и особенности обледенения тел в потоках воздуха, содержащего переохлажденные капли // Ученые записки ЦАГИ. 2023. Т. 54. № 3. С. 22–41.
6. Морозов М. А. Расчетно-экспериментальные исследования гидравлических характеристик трубопроводов систем теплоснабжения с учетом степени гидрофобности функциональных поверхностей: дисс. … канд. тех. наук. М., 2016. 134 с.
7. Stone H. A., Stroock A. D., Ajdari A. Engineering Flows in Small Devices: Microfluidics Toward a Lab-on-a-Chip // Annual Review of Fluid Mechanics. 2004. Vol. 36. P. 381–411. DOI: 10.1146/annurev.fluid.36.050802.122124.
8. Kai Zhang, Hui Hu. An experimental study on the transient runback characteristics of wind-driven film/rivulet flows // Physics of Fluids. 2021. Vol. 33. Iss. 11. Article: 112104. DOI: 10.1063/5.0067672.
9. Ионов Б. П., Грамузов Е. М. Ледовая ходкость судов. СПб.: Судостроение, 2001. 512 с.
10. Aircraft Icing / eds. J. Steuernagle, K. Roy, D. Wrigh. Frederick, MD: AOPA Air Safety Foundation, 2008. 16 p. URL: https://www.aopa.org/-/media/Files/AOPA/Home/Pilot-Resources/ASI/Safety-Advisors/sa11.pdf (дата обращения: 10.02.2024).
11. Амелюшкин И. А., Дружинин О. В. Гидродинамические установки и моделирование сил, действующих на колесо с грунтозацепами, при его качении по воде // Гидравлические машины, гидроприводы и гидропневмоавтоматика: сборник трудов XXVI Международной научно-технической конференции (Москва, 07 декабря 2022 г.). М.: Мир науки, 2022. С. 13–16.
12. Математические модели и методы расчета процессов, сопровождающих обледенение летательного аппарата / Амелюшкин И. А., Кудров М. А., Морозов А. О., Щеглов А. С. // Труды Института системного программирования РАН. 2021. Т. 33. № 5. С. 237–248. DOI: 10.15514/ISPRAS-2021-33(5)-14.
13. Амелюшкин И. А., Стасенко А. Л. Взаимодействие нанокапель аэрозольного потока с твердым телом // Наноструктуры. Математическая физика и моделирование. 2016. Т. 14. № 2. С. 5–23.
14. Особенности формирования ледяных наростов на симметричном и несимметричном профиле и их влияние на аэродинамические характеристики крыла / Амелюшкин И. А., Павленко О. В., Февральских А. В., Багхдади М. К. // Письма в Журнал технической физики. 2023. Т. 49. № 24. С. 28–30. DOI: 10.61011/PJTF.2023.24.56867.87A.

REFERENCES

1. Yihua, Cao, Zhenlong, Wu & Zhengyu, Xu (2014). Effects of rainfall on aircraft aerodynamics. In: *Progress in Aerospace Sciences*, 71, 85–127. DOI: 10.1016/j.paerosci.2014.07.003.
2. Vasilevskii, E. B., Dombrovskii, L. A., Mikhatulin, D. S. & Polezhayev, Yu. V. (2001). Heat Transfer in the Neighborhood of the Stagnation Point under Conditions of Hypersonic Heterogeneous Slip Flow past Bodies. In: *High Temperature*, 39 (6), 925–938 (in Russ.).
3. Kudin, O. K., Nesterov, Yu. N., Tokarev, O. D. & Flaksman, Ya. Sh. (2013). Experimental study of the leakage of a high-temperature jet of dusty gas onto an obstacle. In: *Scientific Notes of Central Aerohydrodynamic Institute*, 44 (6), 105–115 (in Russ.).
4. Boinovich, L. B., Domantovskii, A. G., Emelyanenko, A. M., Miller, A. B., Potapov, Y. F. & Khodan, A. N. (2013). Antiicing performance of superhydrophobic coatings on aluminum and stainless steel. In: *Russian Chemical Bulletin*, 2, 83–390 (in Russ.).

5. Amelyushkin, I. A. (2023). Similarity criteria and peculiarities of ice accretion on bodies in air flows containing supercooled droplets. In: *Scientific Notes of Central Aerohydrodynamic Institute*, 54 (3), 22–41 (in Russ.).
6. Morozov, M. A. (2016). *Calculation and experimental studies of hydraulic characteristics of pipelines of heat supply systems taking into account the degree of hydrophobicity of functional surfaces* [dissertation]. Moscow (in Russ.).
7. Stone, H. A., Stroock, A. D. & Ajdari, A. (2004). Engineering Flows in Small Devices: Microfluidics Toward a Lab-on-a-Chip. In: *Annual Review of Fluid Mechanics*, 36, 381–411. DOI: 10.1146/annurev.fluid.36.050802.122124.
8. Kai, Zhang & Hui, Hu (2021). An experimental study on the transient runback characteristics of wind-driven film/rivulet flows. In: *Physics of Fluids*, 33 (11), article: 112104. DOI: 10.1063/5.0067672.
9. Ionov, B. P. & Gramuzov, Ye. M. (2001). *Ice propulsion of ships*. St. Petersburg: Sudostroyeniye publ. (in Russ.).
10. Steuernagle, J., Roy, K. & Wrigh, D., eds. (2008). *Aircraft Icing*. Frederick, MD: AOPA Air Safety Foundation. URL: https://www.aopa.org/-/media/Files/AOPA/Home/Pilot-Resources/ASI/Safety-Advisors/sa11.pdf (accessed: 10.02.2024).
11. Amelyushkin, I. A. & Druzhinin, O. V. (2022). Hydrodynamic installations and modeling of forces acting on a lugged wheel when it rolls on water. In: *Hydraulic machines, hydraulic drives and hydropneumatic automation: collected papers of the XXVI International scientific and technical conference (Moscow, December 7, 2022)*. Moscow: Mir nauki publ., pp. 13–16 (in Russ.).
12. Amelyushkin, I. A., Kudrov, M. A., Morozov, A. O. & Shcheglov, A. S. (2021). Mathematical models and methods of numerical investigation of processes which accompany aircraft icing. In: *Proceedings of the Institute for System Programming of the RAS*, 33 (5), 237–248. DOI: 10.15514/ISPRAS-2021-33(5)-14 (in Russ.).
13. Amelyushkin, I. A. & Stasenko, A. L. (2016). Interaction of aerosol flow nanodroplets with a solid body. In: *Nanostruktury. Matematicheskaya fizika i modelirovaniye*, 14 (2), 5–23 (in Russ.).
14. Amelyushkin, I. A., Pavlenko, O. V., Fevralskikh, A. V. & Baghdadi, M. K. (2023). Features of the formation of ice creations on a symmetrical and asymmetrical airfoil and their influence on aerodynamic characteristic of the wing. In: *Technical Physics Letters*, 49 (24), 28–30. DOI: 10.61011/PJTF.2023.24.56867.87A (in Russ.).

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Зубова Наталья Валерьевна (г. Москва) – кандидат педагогических наук, доцент кафедры физики Московского государственного университета технологий и управления им. К. Г. Разумовского (Первого казачьего университета);
ORCID: 0000-0002-8112-1378; e-mail: Na448@yandex.ru

Кудров Максим Александрович (г. Жуковский, Московская обл.) – кандидат технических наук, доцент, начальник научного центра, директор Передовой инженерной школы радиолокации, радионавигации и программной инженерии Московского физико-технического института (национального исследовательского университета);
ORCID: 0000-0003-2056-1932; e-mail: MKudrov@mail.ru

Амелюшкин Иван Алексеевич (г. Жуковский, Московская обл.) – кандидат физико-математических наук, программист лаборатории информационных технологий и прикладной математики Физтех-школы аэрокосмических технологий Московского физико-технического института (национального исследовательского университета);
ORCID: 0000-0002-4281-3531; e-mail: Amelyushkin_Ivan@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Natalya V. Zubova (Moscow) – Cand. Sci. (Education), Assoc. Prof., Department of Physics, Moscow State University of Technology and Management;
ORCID: 0000-0002-8112-1378; e-mail: Na448@yandex.ru

Maksim A. Kudrov (Zhukovsky, Moscow region) – Cand. Sci. (Engineering), Assoc. Prof., Head of the Research Center, Director of the Advanced Engineering School of Radar, Radionavigation and Software Engineering, Moscow Institute of Physics and Technology;
ORCID: 0000-0003-2056-1932; e-mail: MKudrov@mail.ru

Ivan A. Amelyushkin (Zhukovsky, Moscow region) – Cand. Sci. (Phys.-Math.), Programmer, Laboratory of Information Technologies and Applied Mathematics, Phystech School of Aerospace Technology, Moscow Institute of Physics and Technology;
ORCID: 0000-0002-4281-3531; e-mail: Amelyushkin_Ivan@mail.ru

Научная статья
УДК 533.27; 519.6
DOI: 10.18384/2949-5067-2024-3-33-49

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЛОТНОСТИ МОЛЕКУЛЯРНЫХ ПОТОКОВ, ПАДАЮЩИХ НА ТЕЛО ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ В УСЛОВИЯХ СВОБОДНОМОЛЕКУЛЯРНОГО ТЕЧЕНИЯ

Коротков Д. П.

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), 125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4, Российская Федерация
e-mail: danel-09@yandex.ru

Поступила в редакцию 09.09.2024
Принята к публикации 19.09.2024

Аннотация
Целью данной работы являлась разработка алгоритма определения плотности падающих потоков массы, импульса и энергии на тело сложной формы, обтекаемое сильно разрежённым газом.
Процедура и методы. В работе использованы методы молекулярно-кинетической теории газов, ориентированные на определение макроскопических характеристик потока разрежённых газов. Работа основана на численном решении интегралов от функции распределения Максвелла.
Результаты. Разработан и протестирован алгоритм на модели, имитирующей прибор (панель солнечной батареи, антенну и т. п.), установленный на поверхности корпуса космического аппарата.
Теоретическая и практическая значимость. Разработанный алгоритм может использоваться в задачах, связанных с определением распределения плотностей потоков массы, импульса и энергии по поверхности объектов, обтекаемых сильноразрежённой газовой средой, и в задачах, связанных с определением характеристик собственной внешней атмосферы космического аппарата.
Ключевые слова : динамика разрежённого газа, молекулярно-кинетическая теория газов, распределение Максвелла, тепломассоперенос в разрежённых газах, факторы космического пространства
Благодарности. Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства образования и науки Российской Федерации, номер темы FSFF-2023-0008.
Для цитирования :
Коротков Д. П. Определение плотности молекулярных потоков, падающих на тело произвольной формы в условиях свободномолекулярного течения // Вестник Государственного университета просвещения. Серия: Физика-математика. 2024. № 3. С. 33-49. https://doi.org/10.18384/2949-5067-2024-3-33-49

Original research article

DETERMINATION OF THE DENSITY OF MOLECULAR FLOWS FALLING ON A BODY OF ARBITRARY SHAPE UNDER CONDITIONS OF FREE-MOLECULAR FLOW

D. Korotkov

Moscow Aviation Institute (National Research University), Volokolamskoe shosse 4, Moscow 125993, Russian Federation
e-mail: danel-09@yandex.ru

Received by the editorial office 09.09.2024
Accepted for publication 19.09.2024

Abstract
Aim. The aim of this work was to develop an algorithm for determining the density of incident mass, momentum and energy flows on a body of complex shape, flown around by a highly rarefied gas.
Methodology. The work uses methods of the molecular-kinetic theory of gases, aimed at determining the macroscopic characteristics of a rarefied gas flow. The work is based on the numerical solution of integrals of the Maxwell distribution function.
Results. An algorithm has been developed and tested on a model simulating a device (solar battery panel, antenna, etc.) installed on the surface of a spacecraft body.
Research implications. The developed algorithm can be used in problems related to determining the distribution of mass, momentum and energy flow densities over the surface of objects flown around by a highly rarefied gas medium, and in problems related to determining the characteristics of a spacecraft's own external atmosphere.
Keywords : rarefied gas dynamics, molecular kinetic theory of gases, Maxwell distribution, heat and mass transfer in rarefied gases, space factors
Acknowledgment .: The work was carried out within the framework of the state assignment of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation, topic number FSFF-2023-0008.
For citation :
Korotkov, D. P. (2024). Determination of the density of molecular flows falling on a body of arbitrary shape under conditions of free-molecular flow. In: *Bulletin of the Federal State University of Education. Series: Physics and Mathematics*, 3, pp.33-49. https://doi.org/10.18384/2949-5067-2024-3-33-49

Введение

Поверхность космических аппаратов (КА) находится под воздействием потоков разрежённого газа, обтекающего аппарат. Газовые частицы постоянно взаимодействуют с поверхностями элементов КА: вступают в химические реакции; внедряются в состав кристаллической решётки; «выбивают» частицы материала с поверхности. Результатами подобного взаимодействия становятся: деградация оптических поверхностей, поверхностей радиаторов и панелей солнечных батарей; снижение эффективности работы и выход из строя датчиков и приборов; изменение физических свойств материалов поверхностей элементов КА.

Данная проблема актуальна как для низкоорбитальных КА, летающих на высотах с относительно высокой концентрацией частиц газа, так и для высокоорбитальных КА и КА, находящихся в межпланетном пространстве и обтекаемых потоком очень быстрых высокоэнергетических частиц.

Определение взаимодействия частиц газа с поверхностями элементов КА позволяет определять ресурс элементов КА, а также разрабатывать меры по уменьшению вредного влияния газовой среды на элементы КА. Одним из первых и основных этапов в определении взаимодействия газовой среды с поверхностью является определение величин потоков массы, импульса и энергии и их распределения по исследуемой поверхности. Подробно о факторах космического пространства (ФКП) и их вилянии на КА написано в источниках [1; 2; 3], о взаимодействии газов с твёрдыми телами в источнике [4].

В настоящий момент существует целый ряд способов решения задачи определения величин потоков массы, импульса и энергии на поверхность, обтекаемую сильно разрежённым газом. Большинство существующих способов опираются на аналитические или статистические методы. Проблемой аналитических методов является сложность, а чаще невозможность их использования для определения потоков на поверхностях со сложной геометрической формой. Статистические методы требуют больших вычислительных мощностей и больших затрат времени для проведения расчётов потоков на поверхности тел со сложной геометрической формой с приемлемой точностью, что особенно ощутимо при необходимости серийных расчётов. Некоторые из существующих методов расчётов газодинамических характеристик вблизи тел сложной формы изложены в работах [5–11].

Цель настоящей работы – разработка метода определения величин потоков массы, нормального импульса и энергии, и их распределения по поверхности тел со сложной геометрической формой. В данной работе учитываются только потоки, падающие на поверхность тела из окружающего пространства, без учёта потоков, отражённых от поверхности тела. Главные требования к методу: экономичность с точки зрения вычислительных ресурсов; способность работы с поверхностями со сложной геометрической формой, аппроксимированными множеством элементарных площадок.

В ходе работы решались следующие задачи:

1) разработка алгоритма разбиения видимого пространства вокруг элементарной площадки на некоторое количество телесных углов $\Delta\Omega$, обеспечивающее решение интегралов от функций распределения Максвелла с требуемой степенью точности;

2) тестирование численного решения для плотностей потоков на изолированную площадку;

3) разработка алгоритма определения экранирования;

4) численный расчёт плотности потоков на тело сложной формы.

Алгоритм разбиения пространства на телесные углы

В декартовой системе координат функция распределения Максвелла для частиц потока, падающего на элемент поверхности, будет иметь вид [3; 12; 13; 14]:

$$f_\infty = \frac{\eta_\infty}{(2\pi k T_\infty/m)^{3/2}} exp\left[-\frac{\left(\xi_x - \vec{U}_\infty cos(\alpha_1)\right)^2}{2kT_\infty/m} + \right.$$
$$\left. + \frac{\left(\xi_y - \vec{U}_\infty cos(\alpha_2)\right)^2 + \left(\xi_z - \vec{U}_\infty cos(\alpha_3)\right)^2}{2kT_\infty/m}\right], \quad (1)$$

здесь: η_∞ – концентрация частиц в невозмущённом потоке; k – постоянная Больцмана; T_∞ – температура невозмущённого потока; m – масса частицы; ξ_x, ξ_y и ξ_z – проекции вектора молекулярной скорости на оси декартовой системы координат, связанные с элементом поверхности; $\vec{U}_\infty$ – вектор скорости невозмущённого потока частиц (групповой скорости частиц); α_1, α_2, и α_3 – эйлеровы углы между вектором скорости и осями X, Y, и Z соответственно (ось Y системы координат, связанной с элементом поверхности, совпадает с нормалью поверхности, вектора $\vec{Y}$ и $\vec{n}$ – равнозначны).

Для определения плотности потока частиц газа на элемент поверхности при свободномолекулярном обтекании используется следующее выражение [3, с. 481]:

$$N = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \xi_y f_\infty d\xi_x d\xi_y d\xi_z = n_\infty \sqrt{\frac{kT_\infty}{2\pi m}}\chi(S_n), \quad (2)$$

здесь $S_n = \left|\vec{U}_\infty cos(\alpha_2)\right|/(2kT_\infty/m)^{1/2}$ – скоростное отношение по нормали к поверхности. Функция $\chi(S_n)$ определяется:

– если проекция $\vec{U}_\infty$ на нормаль к элементу поверхности положительная величина

$$\chi(S_n) = \exp(-S_n^2) + \sqrt{\pi}S_n\left(1 + erf(S_n)\right); \quad (3a)$$

– если проекция $\vec{U}_\infty$ на нормаль к элементу поверхности отрицательная величина

$$\chi(S_n) = \exp(-S_n^2) - \sqrt{\pi}S_n\left(1 - erf(S_n)\right). \quad (3b)$$

Для определения плотности потока нормального импульса на элемент поверхности при свободномолекулярном обтекании используется следующее выражение [3, с. 481]:

$$Pn = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \xi_y^2 f_\infty d\xi_x d\xi_y d\xi_z =$$
$$= \frac{n_\infty m U^2}{2}\left[S_n\chi(S_n) + \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(1 + erf(S_n)\right)\right]. \quad (4)$$

Для определения плотности потока энергии на элемент поверхности при свободномолекулярном обтекании одноатомным газом используется следующее выражение [3]:

$$E' = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{m\xi^2\xi_y}{2}d\xi_x d\xi_y d\xi_z = \frac{\eta_\infty mU^3}{2}\frac{1}{2\sqrt{\pi}S_\infty^3}\times$$

$$\times\left\{\left(S_\infty^3+\frac{5}{2}\right)\chi(S_n)-\frac{1}{2}exp(-S_n^2)\right\}, \qquad (5)$$

здесь $S_\infty = \vec{U}_\infty/(2kT_\infty/m)^{1/2}$ – скоростное отношение.

В сферической системе координат функция распределения Максвелла примет вид:

$$f_\infty = \frac{n_\infty}{(2\pi kT_\infty/m)^{3/2}}exp\left[-\frac{\left(\vec{\xi}cos(\varphi)sin(\theta)-\vec{U}_\infty\cos(\beta)sin(\alpha)\right)^2}{2kT_\infty/m}-\right.$$

$$\left.-\frac{\left(\vec{\xi}cos(\theta)-\vec{U}_\infty\cos(\alpha)\right)^2+\left(\vec{\xi}sin(\varphi)sin(\theta)-\vec{U}_\infty\sin(\beta)sin(\alpha)\right)^2}{2kT_\infty/m}\right], \qquad (6)$$

здесь φ и β – азимутальные углы векторов молекулярной и групповой скорости соответственно; θ и α – меридиональные углы векторов молекулярной и групповой скорости соответственно (схематическое изображение см. рис. 1).

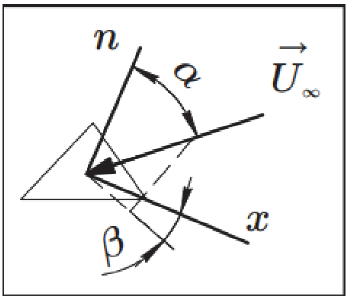


Рис. 1 / Fig. 1. Углы, связанные с вектором групповой скорости / Angles associated with the group velocity vector

Источник: [14, с. 78].

В сферической системе координат для определения плотности потока частиц газа на элемент поверхности при свободномолекулярном обтекании используется следующее выражение:

$$N = \int_0^\infty\int_0^{2\pi}\int_0^\pi \xi^3cos(\Theta)f_\infty sin(\Theta)d\xi d\varphi d\Theta \qquad (7)$$

т. к. $d\Omega = sin(\Theta)d\varphi d\Theta$, то выражение (7) можно представить в виде

$$N = \int_0^\infty \int_\Omega \xi^3 cos(\Theta) f_\infty d\xi d\Omega \quad (8)$$

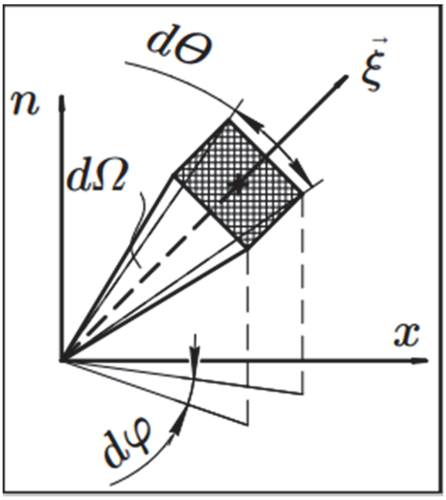


Рис. 2 / Fig. 2. Элементарный телесный угол / Elementary solid angle

Источник: [14, с. 31].

Проинтегрировав выражение (8) вдоль вектора молекулярной скорости частиц $\vec{\xi}$, получим

$$N = \eta_\infty \sqrt{\frac{RT_\infty}{2\pi}} \frac{1}{\pi} \times$$

$$\times \int_\Omega \left\{ (1+\zeta^2) e^{-S_\infty^2} + \sqrt{\pi}\zeta \left(\frac{3}{2}+\zeta^2\right) [1+erf(\zeta)] exp(\zeta^2 - S_\infty^2) \right\} cos(\Theta) d\Omega \quad (9)$$

Интеграл по телесным углам берётся численно. Для этого видимая область вокруг элемента поверхности (полусфера) разбивается на n телесных углов $\Delta\Omega$ (схематическое изображение элементарного телесного угла см. рис. 2). Выражение (9) приводится к дискретной форме:

$$N = \eta_\infty \sqrt{\frac{RT_\infty}{2\pi}} \frac{1}{\pi} \sum_{i=0}^{n} \left\{ \left[\left(1+\zeta_i^2\right) e^{-S_\infty^2} + \sqrt{\pi}\zeta \left(\frac{3}{2}+\zeta_i^2\right) [1+erf(\zeta_i)] \times \right.\right.$$
$$\left.\left. \times\, exp\left(\zeta_i^2 - S_\infty^2\right) \right] cos(\Theta_i) \Delta\Omega_i \right\}, \quad (10)$$

здесь

$$\zeta_i = S_\infty [cos(\varphi_i) sin(\Theta_i) \cos(\beta) sin(\alpha) + cos(\Theta_i) \cos(\alpha) +$$
$$+ sin(\varphi_i) sin(\Theta_i) \sin(\beta) sin(\alpha)] \quad (11)$$

Аналогично получаются выражения для падающих потоков нормального импульса

$$Pn = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} m\xi^4 cos^2(\Theta) f_\infty sin(\Theta) d\xi d\varphi d\Theta = \frac{\eta_\infty m U^2}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{(\pi S_\infty)^2}\times$$

$$\times\sum_{i=0}^{n}\left\{\left[\zeta_i v\left(\frac{5}{2}+\zeta_i^2\right)+\sqrt{\pi}\left(\zeta_i^4+3\zeta_i^2+\frac{3}{4}\right)[1+erf(\zeta_i)]exp\left(\zeta_i^2-S_\infty^2\right)\right]\times\right.$$

$$\left.\times\, cos^2(\Theta_i)\Delta\Omega_i\right\} \qquad (12)$$

и энергии

$$E' = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{m}{2}\xi^5 cos(\Theta) f_\infty sin(\Theta) d\xi d\varphi d\Theta = \frac{\eta_\infty m U^3}{2}\frac{1}{\pi^{3/2} S_\infty^3}\times$$

$$\times\sum_{i=0}^{n}\left\{\left[e^{-S_\infty^2}\left(\frac{\zeta^4}{2}+\frac{9}{4}\zeta^2+1\right)+\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\zeta^5+5\zeta^3+\frac{15}{4}\zeta\right)[1+erf(\zeta_i)]\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\, exp\left(\zeta_i^2-S_\infty^2\right)\right]cos^2(\Theta_i)\Delta\Omega_i\right\} \qquad (13)$$

В данной работе предлагается следующий **алгоритм разбиения пространства на телесные углы.**

1. Задаются максимально допустимая величина телесного угла $\Delta\Omega_{max}$ и величина телесного угла для направления, совпадающего с направлением нормали к элементу поверхности $\Delta\Omega_0$.

2. Определяется шаг меридионального угла для $\Delta\Omega_0$

$$\Delta\Theta_0 = acos\left(1-\frac{\Delta\Omega_0}{2\pi}\right) \qquad (14)$$

телесный угол $\Delta\Omega_0$ представляет собой элемент пространства в диапазоне углов $\theta = 0 \dots \Delta\Theta_0$ и $\varphi = 0 \dots 2\pi$. Данному углу соответствует направление $\theta = 0$ и $\varphi = 0$.

3. Определяется диапазон значений меридионального угла для видимого пространства с исключённым из него телесным углом $\Delta\Omega_0$ (пространства dA)

$$\Delta\Theta_{dA} = {}^{\pi}/_{2} - \Delta\Theta_0 \qquad (15)$$

4. Задаётся количество разбиений пространства dA на меридиональные пояса n_Θ.

5. Определяется шаг между разбиениями меридиональных поясов

$$\Delta\Theta = {}^{\Delta\Theta_{dA}}/_{n_\Theta} \qquad (16)$$

6. Определяются параметры каждого -го (при $j = 1 \dots n_\Theta$) меридионального пояса – нижняя граница первого пояса

$$\Theta_{l_1} = \Delta\Theta_0, \qquad (17)$$

верхняя граница -го пояса

$$\Theta_{h_j} = \Theta_{l_j} + \Delta\Theta, \qquad (18)$$

нижняя граница -го пояса

$$\Theta_{l_j} = \Theta_{h_{j-1}}; \qquad (19)$$

7. Определяется первичное количество разбиений по азимутальным углам для каждого -го пояса

$$n_{\varphi_{j_0}} = {}^{2\pi}/_{\Delta\varphi_{j_0}} \tag{20}$$

здесь $\Delta\varphi_{0_j}$ – первичный шаг разбиений по азимутальным углам

$$\Delta\varphi_{j_0} = \frac{\Delta\Omega_{max}}{\left[cos\left(\Theta_{l_j}\right) - cos\left(\Theta_{h_j}\right)\right]}; \tag{21}$$

8. Определяется точное количество разбиений по азимутальным углам для каждого j-го пояса

$$n_{\varphi_j} = \left\lfloor n_{\varphi_{j_0}} \right\rfloor + 1; \tag{22}$$

9. Уточняется шаг разбиений по азимутальным углам

$$\Delta\varphi_j = {}^{2\pi}/_{n_{\varphi_j}}; \tag{23}$$

10. Определяются величины каждого i-го телесного угла ($i = 1 \dots n$)

$$\Delta\Omega_i = \left[\cos\left(\Theta_{l_j}\right) - cos\left(\Theta_{h_j}\right)\right] \Delta\varphi_j, \tag{24}$$

для каждого значения j имеется свой диапазон значений индексов $k_j = n_{\varphi_j}$. При определении угла $\Delta\Omega_1$ индексам j и k_j присваивается значение $j = 1$ и $k_j = 1$. Продвижение по индексам k_j осуществляется одновременно с продвижением по индексам i, а продвижение по индексу j осуществляется только тогда, когда индекс k_j примет значение $k_j = n_{\varphi_j}$. При смене индекса j индексу k_j присваивается значение $k_j = 1$. Продвижение по индексу i осуществляется до тех пор, пока индекс $\left(k_j\right)_{j=n_\Theta}$ не станет равным $\left(k_j\right)_{j=n_\Theta} = n_{\varphi_j}$. Тогда же определится количество телесных углов n и примет значение $(n = i + 1)$.

11. Определяются параметры каждого -го телесного угла – меридиональный угол направления i-го вектора молекулярной скорости для первого пояса ($i = 1 \dots n_{\varphi_1}$)

$$\Theta_i = \Delta\Theta_0 + \frac{\Delta\Theta}{2}, \tag{25a}$$

меридиональный угол направления -го вектора молекулярной скорости ($i = \left[n_{\varphi_1} + 1\right] \dots n$)

$$\Theta_i = \Theta_{l_j} + \frac{\Delta\Theta}{2}, \tag{25b}$$

азимутальный угол направления -го вектора молекулярной скорости

$$(\varphi_i)_{k_j=1} = 0, (\varphi_i)_{k_j\neq 1} = (\varphi_i)_{k_j-1} + \Delta\varphi_j$$

Пункты 10 и 11 выполняются в пределах одного шага по индексу i, что избавляет от необходимости отслеживать соответствия индексов i и j.

Тестирование численного решения для плотностей потоков на изолированную площадку

Для определения достаточных для точного решения интегралов значений параметров $\Delta\Omega_{max}$,$\Delta\Omega_0$ и n_Θ были проведены тестовые расчёты, в которых численные решения выражений, определяющих плотности потоков массы, нормального импульса и энергии, сравнивались с аналитическими решениями для декартовой системы координат (обозначение на графиках – νDEC, см. рис. 3–5). В качестве характерного параметра потока принималось скоростное отношение S_∞. Тестовые расчёты проводились для значений S_∞= 0.6, 1, 7. Для каждого значения S_∞ перебирались параметры разбиения полусферы $\Delta\Omega_{max}$, $\Delta\Omega_0$ и n_Θ. Параметр $\Delta\Omega_0$ отвечает за точность результата для телесного угла, сонаправленного с нормалью элемента поверхности. Параметр $\Delta\Omega_{max}$ отвечает за точность результата для всех телесных углов, за исключением угла, сонаправленного с нормалью элемента поверхности. Параметр n_Θ отвечает за соотношения между $\Delta\Theta$ и $\Delta\varphi_j$. Так как параметр $\Delta\varphi_j$ для каждого пояса свой, то добиться равенства $\Delta\Theta$ и $\Delta\varphi_j$ для всех поясов невозможно. Рекомендуется подбирать n_Θ таким образом, чтобы $\Delta\Theta \approx \left(\Delta\varphi_j\right)_{j=n_\Theta}$. Всего для тестовых расчётов было сформировано три конфигурации разбиений полусферы.

1. Первая конфигурация имеет параметры: $\Delta\Omega_{max} = 0.01$, $\Delta\Omega_0 = 0.05$, $n_\Theta = 24$ (обозначение на графиках – νSPH 1).
2. Вторая конфигурация имеет параметры: $\Delta\Omega_{max} = 0.001$, $\Delta\Omega_0 = 0.005$, $n_\Theta = 36$ (обозначение на графиках – νSPH 2).
3. Третья конфигурация имеет параметры: $\Delta\Omega_{max} = 0.0001$, $\Delta\Omega_0 = 0.0005$, $n_\Theta = 50$ (обозначение на графиках – νSPH 3).

Далее на рис. 3–5 приведены графики зависимостей относительных плотностей потоков частиц от угла α. Значения функций плотностей потоков отнесены к значениям функций плотностей потоков, посчитанных по аналитическому выражению для декартовой системы координат при значении угла$\alpha = 0$.

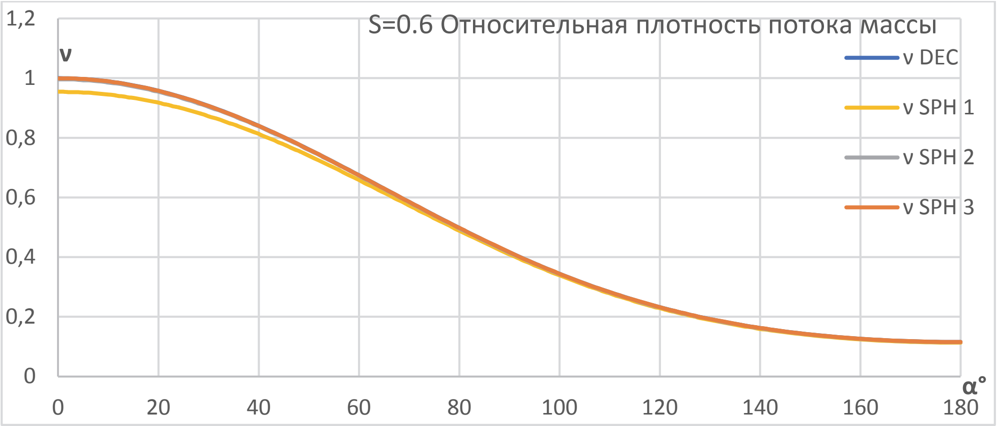


Рис. 3 / Fig. 3. График сравнения аналитического решения в декартовой СК с численными решениями в сферической СК, полученными для трёх конфигураций разбиения окружающего пространства при S = 0.6 / Comparison graph of the analytical solution in the Cartesian coordinate system with the numerical solutions in the spherical coordinate system obtained for three configurations of partitioning the surrounding space at S = 0.6

Источник: по данным автора.

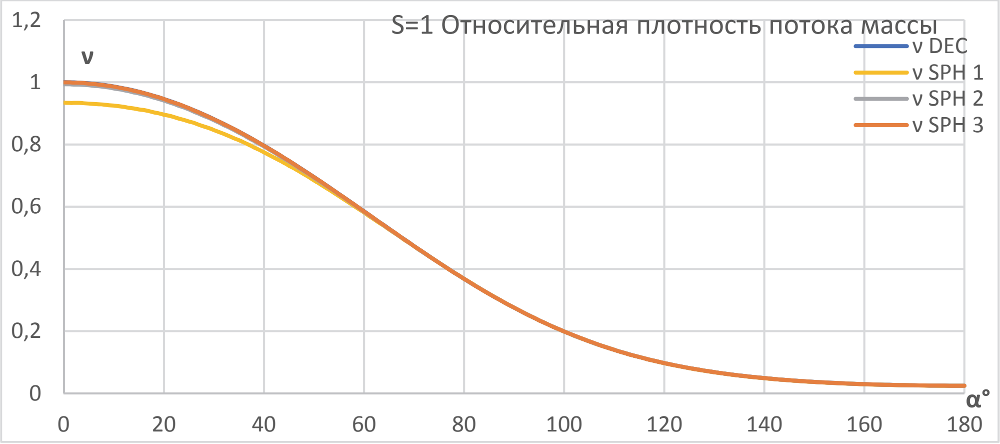


Рис. 4 / Fig. 4. График сравнения аналитического решения в декартовой СК с численными решениями в сферической СК, полученными для трёх конфигураций разбиения окружающего пространства при S = 1 / Comparison graph of the analytical solution in the Cartesian coordinate system with the numerical solutions in the spherical coordinate system obtained for three configurations of partitioning the surrounding space at S = 1.

Источник: по данным автора.

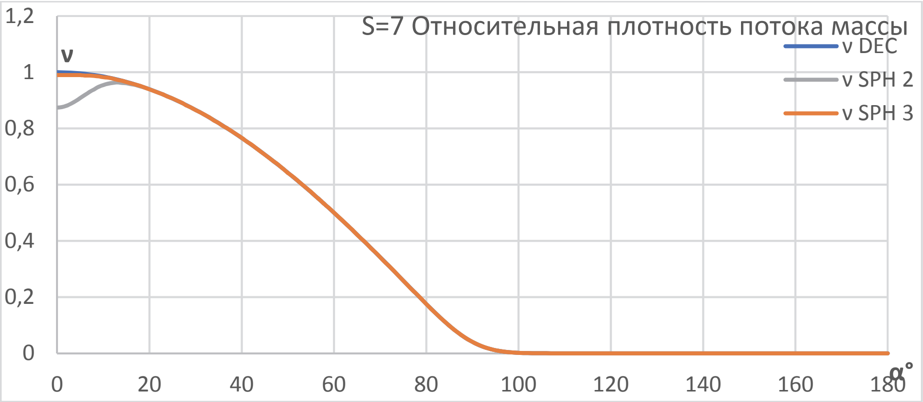


Рис. 5 / Fig. 5. График сравнения аналитического решения в декартовой СК с численными решениями в сферической СК, полученными для второй и третьей конфигураций разбиения окружающего пространства при $S = 7$ / Comparison graph of the analytical solution in the Cartesian coordinate system with the numerical solutions in the spherical coordinate system obtained for the second and third configurations of the partition of the surrounding space at S = 7

Источник: по данным автора.

Как видно из графиков на рис. 3–5, параметр S_∞ сильно влияет на требуемые значения параметров разбиения полусферы для обеспечения точного расчёта. Влияние скоростного отношения S_∞ увеличивается по мере его возрастания, что связано с влиянием скоростного отношения на характер распределения плотности потока по углу α. Максимальное и среднее значения относительной погрешности приведены ниже (см. табл. 1, 2).

Таблица 1 / Table 1

Максимальное значение погрешности 10^2 / Maximum error value 10^2

	Конфигурация 1			**Конфигурация 2**			**Конфигурация 3**		
	N	Pn	E'	N	Pn	E'	N	Pn	E'
$S_\infty = 0.6$	0.49	0.33	0.28	0.7	0.98	0.74	4.65	6.34	5.04
$S_\infty = 1$	0.38	0.85	0.7	0.7	0.98	1.42	6.63	8.66	7.8
$S_\infty = 7$	1.0	1.17	1.39	12.55	12.9	12.5	226	258	229

Источник: по данным автора.

Таблица 2 / Table 2

Среднее арифметическое значение погрешности 10^2 / Arithmetic mean error value 10^2

	Конфигурация 1			**Конфигурация 2**			**Конфигурация 3**		
	N	Pn	E'	N	Pn	E'	N	Pn	E'
$S_\infty = 0.6$	0.078	0.025	0.022	0.273	0.363	0.223	2.39	3.46	2.18
$S_\infty = 1$	0.07	0.042	0.022	0.219	0.309	0.198	1.65	2.308	1.664
$S_\infty = 7$	0.158	0.093	0.123	1.187	1.129	1.136	184.1	100.7	186.8

Источник: по данным автора.

Определение распределения плотности потоков на изолированную площадку с учётом экранирования

Перед определением распределения плотностей потоков массы импульса и энергии по произвольной поверхности сложной геометрической формы необходимо определить экранирование для каждой элементарной площадки, входящей в состав поверхности.

В данной работе предлагается следующий **алгоритм определения экранирования** -го направления j-го элемента поверхности k-м элементом поверхности:

1) задаётся некоторый контрольный размер Cr, больший любого из габаритных размеров обтекаемого тела;

2) строится вектор $\vec{R}_i$ длинной Cr из центра -го элемента поверхности, для каждого i-го направления;

3) определяется кратчайшее расстояние в каждый -й элемент поверхности, видимый из текущего j-го элемента для каждого вектора $\vec{R}_i$, если хотя бы для одного k-го элемента кратчайшее расстояние окажется меньше, чем радиус окружности, описывающий текущий k-й элемент, то данное i-е направление данного j-го элемента считается экранированным и не учитывается в численном решении интегралов в выражениях, определяющих плотность потоков массы, нормального импульса и энергии на -й элемент.

Определение распределения плотностей потоков массы, нормального импульса и энергии по поверхности тел сложной геометрической формы происходит в следующем порядке:

1. Поверхность разбивается на множество элементарных площадок треугольной формы.

2. Для каждой площадки определяются экранированные направления на полусфере $\vec{R}_i$ (для площадок, которые гарантированно ничем не экранируются (внешних площадок), данный шаг опускается).

3. По аналитическим выражениям для плотностей потоков массы, нормального импульса и энергии в декартовой системе координат (2, 4, 5), определяются плотности потоков на внешние элементарные площадки.

4. По выражениям для плотностей потоков массы, нормального импульса и энергии в сферической системе координат определяются плотности потоков для всех невнешних элементарных площадок, при решении численных интегралов не учитываются экранированные направления.

Некоторые результаты тестового расчёта плотностей потоков на тело сложной формы

На рис. 6–8 приведены результаты расчётов на тестовой модели. Тестовая модель представляет из себя имитацию некоторого оборудования (панели солнечной батареи, антенны и т. п.), установленного на элементе корпуса космического аппарата. Расчёты проводились со следующими параметрами: $\Delta\Omega_{max} = 0.0001$, $\Delta\Omega_0 = 0.0005$, $n_\Theta = 50, T_\infty = 1500$К, $U_\infty = 12000$м/с. Поток состоит из трёх компонент: атомарного водорода, гелия и кислорода, с концентрациями 0.7656E+11 м$^{-3}$, 0.40832E+11 м$^{-3}$ и 0.10208E+11 м$^{-3}$ соответственно.

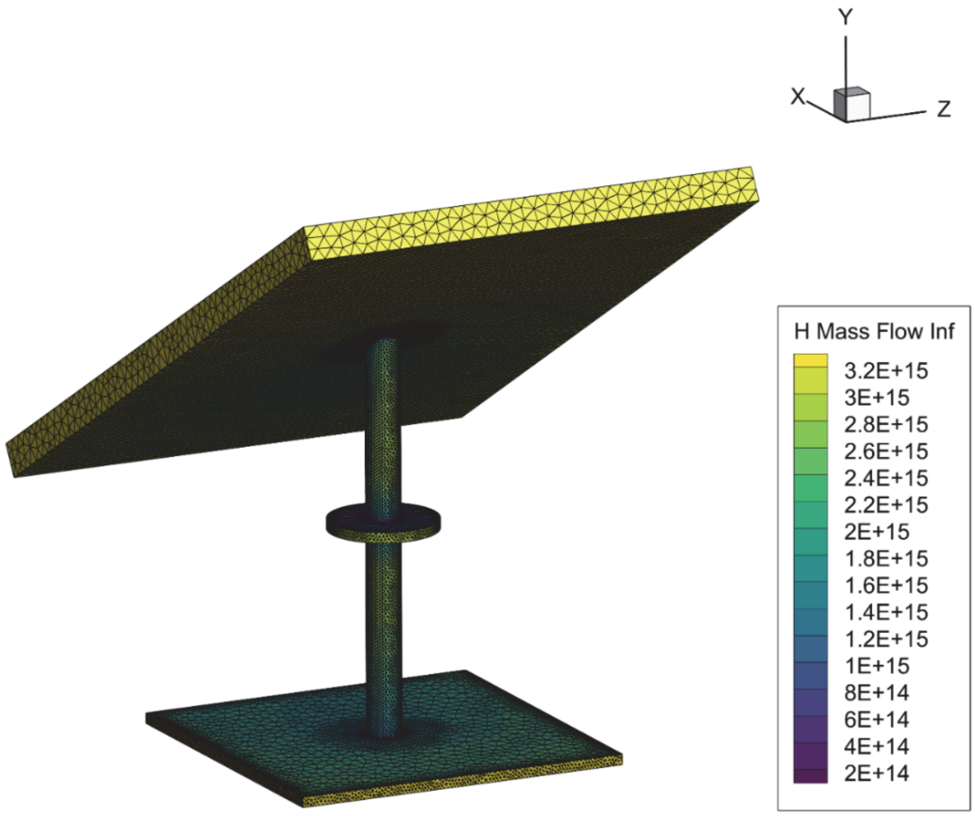


Рис 6 / Fig. 6. Расчётная сетка / Calculation grid

Источник: по данным автора.

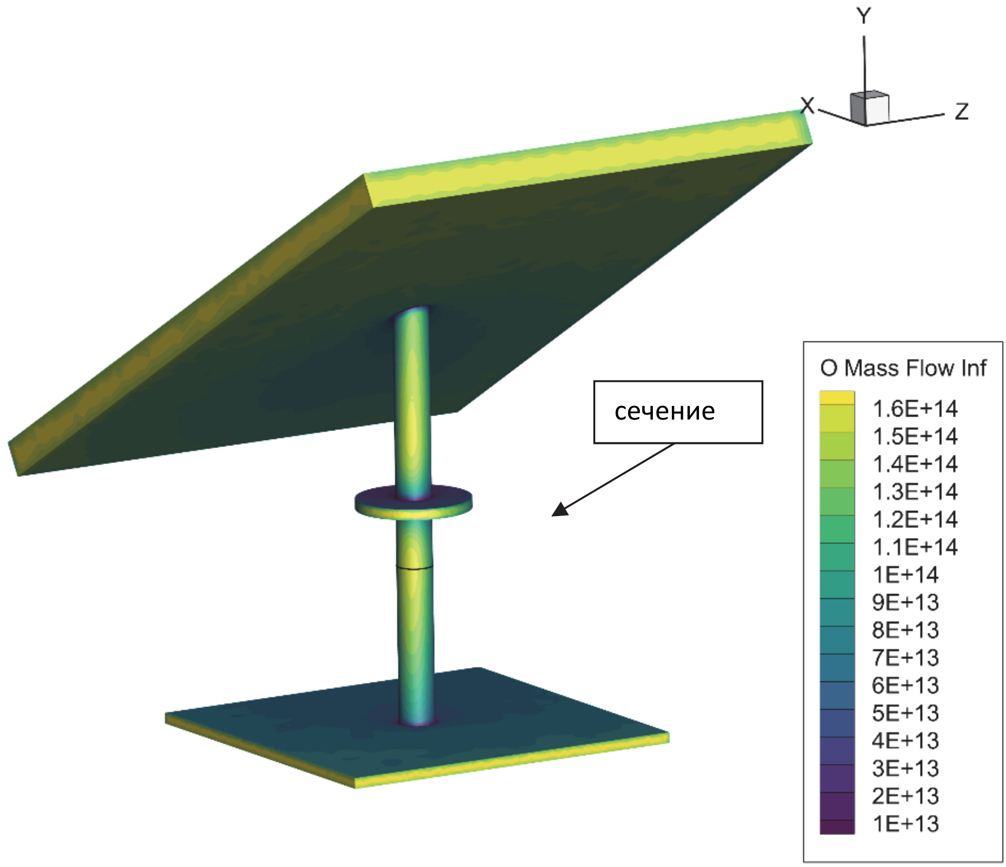


Рис. 7 / Fig. 7. Положение сечения Y = 0.044 ($\beta = 45°$, кислород) //
Section position Y = 0.044 (β=45°, oxygen)

Источник: по данным автора.

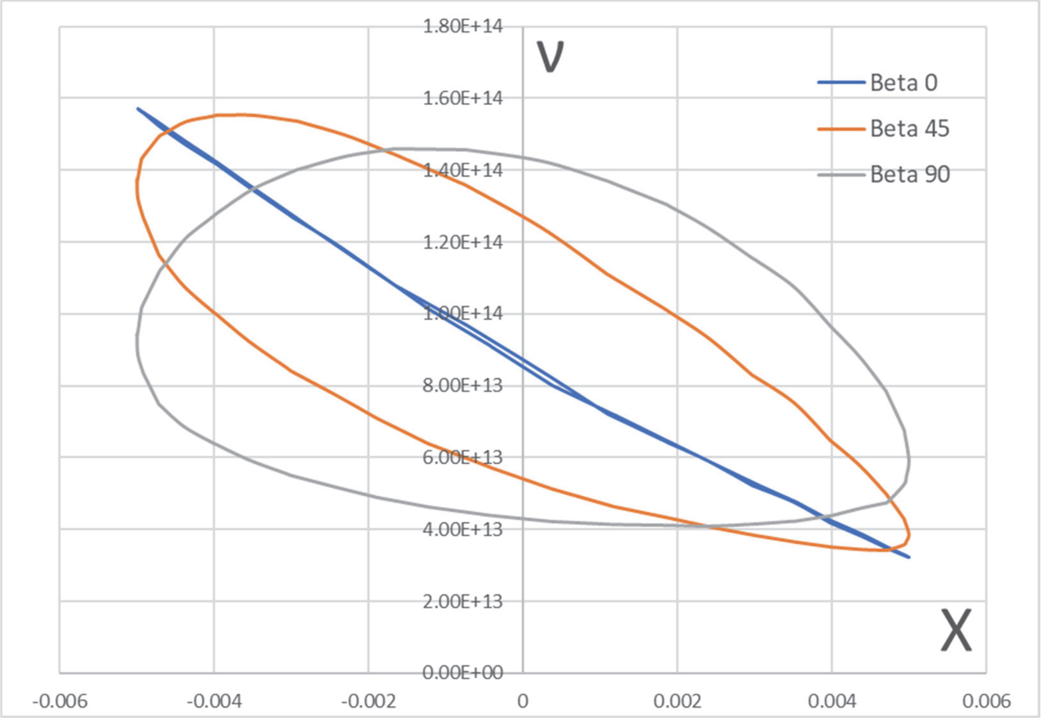


Рис. 8 / Fig. 8. Распределение плотности потока массы для кислорода по сечению Y = 0.044 для углов $\beta = 0°$, $\beta = 45°$ и $\beta = 90°$ / Distribution of the mass flux density for oxygen over the cross section Y = 0.044 for angles β = 0, β =45˚ и β =90˚

Источник: по данным автора.

Выводы

В ходе работы получен и протестирован ресурсоэкономичный способ определения плотностей падающих потоков массы, нормального импульса и энергии по поверхности тела произвольной сложной формы. Данный способ применяется в разрабатываемом методе для определения распределения плотности адсорбированных частиц по поверхности тела сложной формы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Модель Космоса: Научно-информационное издание: В 2 т. Т. 1: Физические условия в космическом пространстве / под ред. М. И. Панасюка, Л. С. Новикова. М.: КДУ, 2007. 872 с.
2. Модель Космоса: Научно-информационное издание: в 2 т Т. 2: Воздействие космической среды на материалы и оборудование космических аппаратов / под ред. М. И. Панасюка, Л. С. Новикова. М.: КДУ, 2007. 1144 с.
3. Аэрогидромеханика / Е. Н. Бондарев, В. Т. Дубасов, Ю. А. Рыжов, С. Б. Свирщевский, Н. В. Семенчиков. М.: Машиностроение, 1993. 608 с.
4. Баранцев Р. Г. Взаимодействие разреженных газов с обтекаемыми поверхностями. М.: Наука, 1975. 344 с.

5. Басс В. П., Бразинский В. И. Газодинамические аспекты формирования собственной атмосферы космических аппаратов, движущихся в верхних слоях атмосферы // Наблюдение искусственных спутников Земли (Публикации научных результатов сотрудничества Интеркосмос). № 24. М.: Астрономический совет СССР, 1986. С. 158–179.
6. Басс В. П., Бразинский В. И. Влияние параметров собственной внешней атмосферы на функционирование летательных аппаратов // Наблюдение искусственных небесных тел. 1984. № 81. С. 87–99.
7. Бразинский В. И. Расчёт параметров собственной атмосферы в окрестности летательных аппаратов сложной формы // Прикладные вопросы аэродинамики летательных аппаратов. Киев: Наукова Думка, 1984. С. 50–54.
8. О методах расчёта параметров собственной внешней атмосферы космических аппаратов / Ю. А. Рыжов, М. П. Бургасов, К. Н. Кузовкин, С. Б. Свирщевский // Тезисы докладов VIII Всесоюзной конференции по динамике разреженных газов. Т. 1. М.: Б. и., 1986. С. 107.
9. Басс В. П., Ковтуненко В. М., Чепурной В. Н. К определению аэродинамических характеристик тел сложной формы в свободномолекулярном потоке с учётом затенения // Космические исследования. 1973. Т. XII. № 1. С. 3–43.
10. Басс В. П. Об одном алгоритме для комплексного исследования аэродинамических характеристик космических аппаратов // Космические исследования на Украине. Вып. 11. Киев: Наукова Думка, 1977. С. 11–17.
11. Абрамовская М. Г., Басс В. П. Учёт эффектов экранирования в алгоритмах численного моделирования свободномолекулярных течений // Аэродинамика, тепло- и массообмен в разреженном газе: труды VIII Всесоюзной конференции по динамике разреженных газов. М., 1987. С. 41–45.
12. Шидловский В. П. Введение в динамику разреженного газа. М.: Наука, 1965. 220 с.
13. Коган М. Н. Динамика разреженного газа. М.: Наука, 1967. 440 с.
14. Кошмаров Ю. А., Рыжов Ю. А.. Прикладная динамика разреженного газа. М.: Машиностроение, 1977. 184 с.

REFERENCES

1. Panasyuk, M. I. & Novikov, L. S., eds. (2007). *Model of Space: Scientific and information publication: In 2 volumes. Volume 1: Physical conditions in outer space.* Moscow: KDU publ. (in Russ.).
2. Panasyuk, M. I. & Novikov, L. S., eds. (2007). *Model of Space: Scientific information publication: in 2 volumes. Volume 2: Impact of the space environment on materials and equipment of spacecraft.* Moscow: KDU publ. (in Russ.)
3. Bondarev, E. N., Dubasov, V. T., Ryzhov, Yu. A., Svirshchevsky, S. B. & Semenchikov, N. V. (1993). *Aerohydromechanics.* Moscow: Mashinostroenie publ. (in Russ.)
4. Barantsev, R. G. (1975). *Interaction of rarefied gases with streamlined surfaces.* Moscow: Nauka publ. (in Russ.).
5. Bass, V. P. & Brazinskiy, V. I. (1986). Gas-dynamic aspects of formation of proper atmosphere of spacecraft moving in the upper layers of the atmosphere. In*: Observation of artificial Earth satellites (Publications of scientific results of the Intercosmos collaboration). No. 24.* Moscow: Astronomical Council of the USSR publl., pp. 158–179 (in Russ.).

6. Bass, V. P. & Brazinskiy, V. I. (1984). Influence of the parameters of one's own external atmosphere on the functioning of aircraft. In: *Observation of artificial celestial bodies,* 81, 87–99 (in Russ.).
7. Brazinskiy, V. I. (1984). Calculation of the parameters of the proper atmosphere in the vicinity of aircraft of complex shape. In: *Applied issues of aircraft aerodynamics.* Kyiv: Naukova Dumka publ., pp. 50–54 (in Russ.).
8. Ryzhov, Yu. A., Burgasov, M. P., Kuzovkin, K. N. & Svirshchevsky, S. B. (1986). On methods for calculating the parameters of the proper external atmosphere of spacecraft. In: *Abstracts of reports of the VIII All-Union Conference on the dynamics of rarefied gases. Vol. 1.* Moscow. P. 107 (in Russ.).
9. Bass, V. P., Kovtunenko, V. M. & Chepurnoy, V. N. (1973). On the determination of aerodynamic characteristics of complex-shaped bodies in a free-molecular flow taking into account shading. In: *Space Research,* XII (1), 3–43 (in Russ.).
10. Bass, V. P. (1977). On an algorithm for a comprehensive study of the aerodynamic characteristics of spacecraft. In: *Space Research in Ukraine. Iss. 11.* Kyiv: Naukova Dumka publ., pp. 11–17 (in Russ.).
11. Abramovskaya, M. G. & Bass, V. P. (1987). Taking into account screening effects in algorithms for numerical modeling of free molecular flows. In: *Aerodynamics, heat and mass transfer in a rarefied gas: Proceedings of the VIII All-Union Conference on the Dynamics of Rarefied Gases.* Moscow, pp. 41–45 (in Russ.).
12. Shidlovsky, V. P. (1965). *Introduction to Rarefied Gas Dynamics.* Moscow: Nauka publ. (in Russ.).
13. Kogan, M. N. (1967). *Rarefied Gas Dynamics.* Moscow: Nauka publ. (in Russ.).
14. Koshmarov, Yu. A. & Ryzhov, Yu. A. (1977). *Applied dynamics of rarefied gas.* Moscow: Mashinostroenie publ. (in Russ.).

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Коротков Данил Павлович (г. Королёв, Московская обл.) – инженер кафедры 106 «Аэродинамика, динамика и управление летательных аппаратов» Московского авиационного института (национального исследовательского университета);
ORCID: 0000-0002-7147-7784; e-mail: danel-09@yandex.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Daniil P. Korotkov (Korolev, Moscow Region) – Engineer, Department 106 “Aerodynamics, Dynamics and Control of Aircraft”, Moscow Aviation Institute (National Research University);
ORCID: 0000-0002-7147-7784; e-mail: danel-09@yandex.ru

Научная статья
УДК 533 6.011
DOI: 10.18384/2949-5067-2024-3-50-57

СТАТИСТИЧЕСКИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПАР МОЛЕКУЛ В МОДИФИЦИРОВАННОЙ БИМОДАЛЬНОЙ МОДЕЛИ УДАРНО-СЖАТОЙ СМЕСИ ГАЗОВ

Кузнецов М. М.*, Кулешова Ю. Д., Сатюков Д. Г.

Государственный университет просвещения, 105005, г. Москва, ул. Радио, д. 10А, стр. 2, Российская Федерация
**Корреспондирующий автор, e-mail: kuznets-omn@yandex.ru*

Поступила в редакцию 02.09.2024
Принята к публикации 12.09.2024

Аннотация
Цель: на основе модифицированного метода Тамма – Мотт-Смита найти статистические распределения молекул и их пар в ударно-сжатой смеси газов.
Методы. Применялись теоретические методы математической физики.
Результаты. Показано, что одночастичное модифицированное статистическое распределение Тамма – Мотт-Смита для ударно-сжатой смеси газов является по существу четырёхмодальным. Это позволяет удовлетворить как условиям сохранения потоков массы, импульсов и энергии внутри фронта ударной волны, так и существенно упростить системы моментных уравнений, применяемых в численных расчётах. Получены аналитические представления для всех видов функций распределения пар молекул в ударной сжатой бинарной смеси газов.
Теоретическая и практическая значимость. Полученные аналитические результаты имеют существенное значение для выяснения вопроса о необходимости учёта поступательной неравновесности при определении коэффициентов скоростей энергетически активированных неупругих соударений внутри фронтов ударных волн.
Ключевые слова : асимптотическая модель, эффект перехлёста, рэлеевская смесь, неравновесность
Для цитирования :
Кузнецов М. М., Кулешова Ю. Д., Сатюков Д. Г. Статистические распределения пар молекул в модифицированной бимодальной модели ударно-сжатой смеси газов // Вестник Государственного университета просвещения. Серия: Физика-математика. 2024. № 3. С. 50-57. https://doi.org/10.18384/2949-5067-2024-3-50-57

Original research article

STATISTICAL DISTRIBUTIONS OF PAIRS OF MOLECULES IN A MODIFIED BIMODAL MODEL OF A SHOCK-COMPRESSED GAS MIXTURE

M. Kuznetsov*, Ju. Kuleshova, D. Satyukov

Federal State University of Education, ulitsa Radio 10A, build. 2, Moscow 105005, Russian Federation
**Corresponding author, e-mail: kuznets-omn@yandex.ru*

Received by the editorial office 02.09.2024
Accepted for publication 12.09.2024

Abstract
Aim: to find statistical distributions of molecules and their pairs in a shock-compressed gas mixture based on the modified Tamm-Mott-Smith method.
Methodology. Theoretical methods of mathematical physics were used.
Results. It is shown that the single-particle modified Tamm-Mott-Smith statistical distribution for a shock-compressed gas mixture is essentially four-modal. This makes it possible to satisfy both the conditions of conservation of mass, momentum and energy fluxes inside the shock wave front, and to significantly simplify the systems of moment equations used in numerical calculations. Analytical representations are obtained for all types of distribution functions of pairs of molecules in a shock compressed binary mixture of gases.
Research implications. The obtained analytical results are essential for clarifying the question of the need to take into account translational disequilibrium in determining the velocity coefficients of energetically activated inelastic collisions inside shock wave fronts.
Keywords : asymptotic model, overlap effect, Rayleigh mixture, disequilibrium
For citation :
Kuznetsov, M. M, Kuleshovaa, Ju. D. & Satyukov, D. G. (2024). Analytical models of translationally nonequilibrium dynamics of shock-compressed binary gas mixtures. In: *Bulletin of the Federal State University of Education. Series: Physics and Mathematics*, 3, pp. 50-57. https://doi.org/10.18384/2949-5067-2024-3-50-57

Введение

Ранее в работе авторов [1] отмечалось, что учёт поступательной неравновесности смеси газов внутри фронтов ударных волн существенен при решении задач спуска космических аппаратов в атмосферах планет Солнечной системы. Характерной чертой этих задач является сравнимость величин концентраций лёгких и тяжёлых компонентов смесей, сжимаемых в ударной волне.

Однако при аналитическом исследовании поступательной неравновесности в ударно-сжатых смесях газов возникает принципиальная трудность, которая отсутствует в однокомпонентных газах. Дело в том, что при применении основного приближённого аналитического метода Тамма – Мотт-Смита в его непосредственном виде, как в однокомпонентных газах, оказалось невозможным удовлетворить основным физическим законам сохранения потоков массы, импульса и энергии внутри фронтов ударных волн. Эта трудность отмечена впервые в работе [2]. Её удалось преодолеть в работе [3], где для этого пришлось модифицировать традиционное распределение Тамма – Мотт-Смита для каждого отдельного компонента.

По нашему мнению, физический смысл этой модификации состоит в том, что внутри фронта ударной волны аппроксимация функции распределения молекул каждого компонента смеси газов должна равноправно учитывать влияние всех компонентов смеси.

Действительно, классическая бимодальная модель ударной волны для однокомпонентного газа с распределением молекул по аппроксимации Тамма – Мотт-Смита физически представляет собой диффузию друг в друге сверхзвукового и дозвукового «крыла» этой аппроксимации.

В то же время, чисто математически, эта аппроксимация может рассматриваться как разложение функций распределения внутри фронта ударной волны по базису, составленному из двух поступательно равновесных максвелловских функций распределения.

Для предложенной ранее в работе [3] модификации классической Тамма – Мотт-Смитовской аппроксимации выполняются одновременно оба вышеперечисленных свойства.

В настоящей работе на основе аппроксимации [3] найдено аналитическое представление функций распределения пар сталкивающихся молекул G_{ij}.

Функция распределения пар молекул в модифицированной бимодальной модели ударной волны

Аналитическое представление нормированной (на единицу) функции распределения пар молекул однокомпонентного газа в ударной волне была впервые введена в работах [4; 5]. В работах авторов [6–8] для однокомпонентного газа функция распределения пар молекул найдена с учётом анизотропии кинетических температур в ударной волне, и были сформулированы необходимые и достаточные условия эффекта перехлёста (превышения) значений функции пар молекул внутри фронта ударной волны над их поступательно равновесными значениями за ударной волной.

По аналогии с однокомпонентным сжатым газом функция распределения пар молекул строится аналитически на основе функций распределения для отдельных молекул. При этом в однокомпонентном газе используются классическая аппроксимация Тамма – Мотт-Смита. В данной работе для этой цели используется модификация классической аппроксимации, в соответствие с которой одночастичная функция распределения для каждого компонента смеси имеет следующий вид [3].

$$f_i(\vec{c},x) = [1-a(x)]f_i^-(\vec{c}) + a(x)f_i^+(\vec{c}) + \frac{1}{2}\sum_{j\neq i}^{N} \beta_{ij}\tilde{a}(x)\left[f_j^+(\vec{c}) - f_j^-(\vec{c})\right], \quad j = 1,2,\dots,N, \tag{1}$$

Здесь β_{ij}=m_j /m_i , f_i^- и f_i^+ поступательно равновесные максвелловские распределения,

$$f_i^-(\vec{c}) = n_i^- \, m_i^{\frac{3}{2}}(2\pi kT^-)^{-3/2}\exp[-m_i(\vec{c}-v^-)^2/2kT^-] \quad (2)$$

$$f_i^+(\vec{c}) = n_i^- \, m_i^{\frac{3}{2}}(2\pi kT^+)^{-3/2}\exp[-m_i(\vec{c}-v^+)^2/2kT^+] \quad (3)$$

Индексы «-» и «+» в формулах (1)–(3) относятся к максвелловским функциям распределения по собственным тепловым скоростям молекул и макроскопическим параметрам этих функций соответственно на входе («-») и выходе («+») ударной волны, m_i масса молекулы i-го компонента. Для компонента j формулы для максвелловских функций распределения аналогичные (2), (3) получаются формальной заменой в них индекса i на индекс j, причём β_{ij} равно m_j/m_i.

Число n различных компонент в бинарных смесях равно 2. Функции $a(x)$ и $\tilde{a}(x)$ удовлетворяют следующим граничным условиям:

$$a(-\infty)=0, a(+\infty)=1, \ \tilde{a}(-\infty)=\tilde{a}(+\infty)=0 \quad (4)$$

Для дальнейших преобразований одночастичные функции (1), (2), (3) удобнее представить в следующем виде:

$$\Phi_i(\vec{c},x) = [1-a(x)]\varepsilon N_i^{-1}(x)\Phi_i^{(-)}(\vec{c}) + a(x)N_i^{-1}(x)\Phi_i^{(+)}(\vec{c}) + \frac{1}{2}\sum_{j\neq i}^{N} \beta_{ij}\tilde{a}(x)N_j^{-1}(x)\left[\Phi_i^{(+)}(\vec{c}) - \varepsilon\Phi_i^{(-)}(\vec{c})\right], \quad (5)$$

где

$$\Phi_i(\vec{c},x) = \frac{f_i(\vec{c},x)}{n_i(x)}, \Phi_i^{(-)}(\vec{c}) = \frac{f_i^-(\vec{c})}{n_i^-}, \Phi_i^{(+)}(\vec{c}) = \frac{f_i^+(\vec{c})}{n_i^+},$$

$$N_i(x) = (n_i^+/n_i(x)) = [1-a(x)]\varepsilon + \frac{1}{2}\tilde{a}(x)(1-\varepsilon)\sum_{j=1}^{N} \rho_{ij},$$

$\varepsilon^{-1} = (n_i^+/n_i^-) = (n_j^+/n_j^-)$ степень сжатия концентрации любого компонента в ударной волне, $\rho_{ij}= (m_j n_j^+/m_i n_i^+) = (\beta_{ij}\ \alpha_{ij})$, $\alpha_{ij} = n_j^+/n_i^+$

В формулах (5) функции $\Phi_i(\vec{c},x)$, $\Phi_i^{(-)}(\vec{c})$, $\Phi_i^{(+)}(\vec{c})$ нормированы на единицу в пространстве скоростей молекул $\vec{c}$, например:

$$\int_{(\vec{c})}\Phi_i(\vec{c},x)d\vec{c} = 1. \quad (6)$$

Для вычисления функции пар молекул $H_{ij}(\mathbf{c},x)$ на основе исходных одночастичных функций распределения (1) воспользуемся алгоритмами, ранее предложенными в работах [4; 6; 7]. Тогда получим:

$$H_{ij}(\mathbf{c},x) = G_{ij}/n_i(x)n_j(x) = \left< \frac{f_i(\vec{c},x)}{n_i(x)}, \frac{f_j(\vec{c},x)}{n_j(x)} \right>, \quad (7)$$

где угловые скобки в равенстве (7) означают усреднение по всем угловым переменным в фазовом пространстве тепловых скоростей сталкивающихся молекул сортов i и j [9], причём i=1, … , N; j=1, … , N;

Нетрудно проверить, что аналогично формуле (6) для функции (7) будет выполняться условие нормировки на единицу.

$$\int_{(\vec{c})} H_{ij}(\vec{c},x)d\vec{c} = 1 \qquad (8)$$

В более подробной записи с учётом равенств (1–3, 5) формула (7) для многокомпонентной смеси имеет очень громоздкий вид. В дальнейшем целесообразно ограничиться только случаем бинарной смеси, когда число компонентов смеси равно двум (N=2).

С этой целью перегруппируем слагаемые в функции (5), представляя её в виде следующей суперпозиции

$$\Phi_1(\vec{c},x) = \varepsilon N_1^{-1}(x)\Phi_1^{(-)}(\vec{c}) + a(x)N_1^{-1}(x)[\Phi_1^{(+)}(\vec{c}) - \varepsilon\Phi_1^{(-)}(\vec{c})] + \tilde{a}(x)\ \rho_{12}N_2^{-1}(x)\left[\Phi_2^{(+)}(\vec{c}) - \varepsilon\Phi_2^{(-)}(\vec{c})\right], \qquad (9)$$

Здесь:

$N_1(x) = \varepsilon + (1\text{-}\varepsilon)a(x) + (1\text{-}\varepsilon)\,\tilde{a}(x)\,\rho_{12}$, $N_2(x) = \varepsilon + (1\text{-}\varepsilon)a(x) + (1\text{-}\varepsilon)\,\tilde{a}(x)\,\rho_{21}$

Выражение для функции $\Phi_2(\vec{c},x)$ получается из функции (9) перестановкой индексов:

$$\Phi_2(\vec{c},x) = \varepsilon N_2^{-1}(x)\Phi_2^{(-)}(\vec{c}) + a(x)N_2^{-1}(x)[\Phi_2^{(+)}(\vec{c}) - \varepsilon\Phi_2^{(-)}(\vec{c})] + \tilde{a}(x)\ \rho_{21}N_1^{-1}(x)\left[\Phi_1^{(+)}(\vec{c}) - \varepsilon\Phi_1^{(-)}(\vec{c})\right], \qquad (10)$$

Для выполнения последующих преобразований равенства (9) и (10) удобно записать в следующем виде:

$$\Phi_1(\vec{c},x) = \varepsilon N_1^{-1}(x)\Phi_1^{(-)}(\vec{c}) + a(x)N_1^{-1}(x)\Delta_1(\vec{c}) + \tilde{a}(x)\ \rho_{12}N_2^{-1}(x)\Delta_2(\vec{c}) \qquad (11)$$

$$\Phi_2(\vec{c},x) = \varepsilon N_2^{-1}(x)\Phi_2^{(-)}(\vec{c}) + a(x)N_2^{-1}(x)\Delta_2(\vec{c}) + \tilde{a}(x)\ \rho_{21}N_1^{-1}(x)\Delta_1(\vec{c}) \qquad (12)$$

Здесь

$$\Delta_1(\vec{c}) = [\Phi_1^{(+)}(\vec{c}) - \varepsilon\Phi_1^{(-)}(\vec{c})],\ \Delta_2(\vec{c}) = [\Phi_2^{(+)}(\vec{c}) - \varepsilon\Phi_2^{(-)}(\vec{c})]$$

Для бинарной смеси газов функции пар молекул H_{ij} (**c**, x) представляют собой набор следующих трёх видов функций H_{11} (**c**, x), H_{22} (**c**, x) и H_{12} (**c**, x). Им соответствуют пары молекул лёгкого, тяжёлого и смешанного сортов газа. Эти функции распределения пар молекул имеют следующий вид:

$$H_{12}(\mathbf{c},x) = N_1^{-1}(x)N_2^{-1}(x)\{\varepsilon^2 < \Phi_1^{(-)}(\vec{c})\,\Phi_2^{(-)}(\vec{c}) > + \varepsilon\,[< \Phi_1^{(-)}(\vec{c})\ \Delta_2(\vec{c}) > + < \Phi_2^{(-)}(\vec{c})\ \Delta_1(\vec{c}) >]\,a(x) + < \Delta_1(\vec{c})\ \Delta_2(\vec{c}) > a^2(x) + \varepsilon\,[\,\rho_{21} < \Phi_1^{(-)}(\vec{c})\ \Delta_1(\vec{c}) > + \rho_{12} < \Phi_2^{(-)}(\vec{c})\ \Delta_2(\vec{c}) >]\ \tilde{a}(x) + \rho_{12}\ \rho_{21} < \Delta_2(\vec{c})\ \Delta_1(\vec{c}) > \tilde{a}^2(x) + \rho_{21} < \Delta_1^2(\vec{c}) > a(x)\tilde{a}(x) + \rho_{12} < \Delta_2^2(\vec{c}) > \tilde{a}(x)a(x)\} \qquad (13)$$

$$H_{11}(\mathbf{c},x) = N_1^{-2}(x)\{\varepsilon^2 < \Phi_1^{(-)}(\vec{c})\,\Phi_1^{(-)}(\vec{c}) > + \varepsilon\,[< \Phi_1^{(-)}(\vec{c})\ \Delta_1(\vec{c}) > + < \Phi_1^{(-)}(\vec{c})\ \Delta_1(\vec{c}) >]\,a(x) + < \Delta_1(\vec{c})\ \Delta_1(\vec{c}) > a^2(x) + \varepsilon\,[\,\rho_{12} < \Phi_1^{(-)}(\vec{c})\ \Delta_1(\vec{c}) > + \rho_{12} < \Phi_1^{(-)}(\vec{c})\ \Delta_1(\vec{c}) >]\ \tilde{a}(x) + \rho_{12}\ \rho_{12} < \Delta_2(\vec{c})\ \Delta_2(\vec{c}) > \tilde{a}^2(x) + \rho_{12} < \Delta_2^2(\vec{c}) > a(x)\tilde{a}(x) + \rho_{12} < \Delta_2^2(\vec{c}) > \tilde{a}(x)a(x)\} \qquad (14)$$

H_{22} (**c**,x) = $N_2^{-2}(x)$ { $\varepsilon^2 < \Phi_2^{(-)}(\vec{c})\ \Phi_2^{(-)}(\vec{c}) >$ + ε [$< \Phi_2^{(-)}(\vec{c})\ \Delta_2(\vec{c}) >$ + $< \Phi_2^{(-)}(\vec{c})$ $\Delta_2(\vec{c}) >$] $a(x)$ + $< \Delta_2(\vec{c})\ \Delta_2(\vec{c}) > a^2$(x) + ε [$\rho_{21} < \Phi_2^{(-)}(\vec{c})\ \Delta_2(\vec{c}) >$ + $\rho_{21} < \Phi_2^{(-)}(\vec{c})$ $\Delta_2(\vec{c}) >$] $\tilde{a}(x)$ + $\rho_{21}\ \rho_{21} < \Delta_1(\vec{c})\ \Delta_1(\vec{c}) > \tilde{a}^2$(x) + $\rho_{21} < \Delta_1^2(\vec{c}) > a(x)\tilde{a}(x)$ + $\rho_{21} <$ $\Delta_1^2(\vec{c}) > \tilde{a}(x)a(x)$} (15)

Выражения, записанные в виде угловых скобок в формулах (13)–(15), являются функциями абсолютных величин относительных скоростей выбранных пар молекул:

$g_{ij} = |\ \vec{c}_i - \vec{c}_j\ |$

Их удобно записать, полагая для краткости $g_{ij} \equiv g$, например, так:

$$< \Phi_1^{(-)}(\vec{c})\ \Phi_2^{(-)}(\vec{c}) > = G_{12}^{(-)}(g), \quad (16)$$

$$< \Phi_1^{(-)}(\vec{c})\ \Delta_2(\vec{c}) > = < \Phi_1^{(-)}(\vec{c})\ [\Phi_2^{(+)}(\vec{c}) - \varepsilon\Phi_2^{(-)}(\vec{c})] > = < \Phi_1^{(-)}(\vec{c})\Phi_2^{(+)}(\vec{c}) >$$
$$- \varepsilon < \Phi_1^{(-)}(\vec{c})\Phi_2^{(-)}(\vec{c}) > = G_{12}^{(+,-)}(g) - \varepsilon\, G_{12}^{(-)}(g), \quad \text{и т. д.} \quad (17)$$

Функции модуля относительной скорости пар молекул g вычислялись ранее. Для однокомпонентного газа в работах [4; 5]. Для смесей – в [6–8]. В соответствии с терминами, введёнными в [4; 5], функции $G_{ii}^{(-)}$, $G_{ii}^{(+)}$, $G_{ij}^{(-,+)}$, $G_{ij}^{(+,-)}$ могут быть названы как «холодная», «горячая» и «перекрёстная» моды распределений пар молекул. При этом «перекрёстные» моды не зависят от перестановки как верхних, так и нижних индексов:

$$G_{ij}^{(-,+)} = G_{ij}^{(+,-)} = G_{ji}^{(-,+)} = G_{ji}^{(-,+)} \quad (18)$$

Учитывая формулы (16), (17) и аналогичные им (в которых для краткости опустим аргумент g), представим равенства (13)–(15) следующим образом:

H_{12} (g,x) = $N_1^{-1}(x)N_2^{-1}(x)$ { $\varepsilon^2 G_{12}^{(-)}$ + ε [$G_{12}^{(+,-)}$ - ε $G_{12}^{(-)}$ + $G_{21}^{(-,+)}$ - ε $G_{12}^{(-)}$] $a(x)$ + [$G_{12}^{(+)}$ - ε $G_{12}^{(+,-)}$ - ε $G_{12}^{(-,+)}$ + $\varepsilon^2 G_{12}^{(-)}$] a^2(x) + ε [ρ_{21}($G_{11}^{(-,+)}$ - ε $G_{11}^{(-)}$) + ρ_{12} ($G_{22}^{(-,+)}$ - ε $G_{22}^{(-)}$)] $\tilde{a}(x)$ + $\rho_{12}\ \rho_{21}$ ($G_{21}^{(+)}$ - ε $G_{21}^{(+,-)}$- ε $G_{21}^{(-,+)}$ + $\varepsilon^2 G_{21}^{(-)}$) $\tilde{a}^2$(x) + ρ_{21} ($G_{11}^{(+)}$- 2ε$G_{11}^{(+,-)}$ + $\varepsilon^2 G_{11}^{(-)}$) $a(x)\tilde{a}(x)$ + ρ_{12} ($G_{22}^{(+)}$- 2ε$G_{22}^{(+,-)}$ + $\varepsilon^2 G_{22}^{(-)}$) $\tilde{a}(x)a(x)$} (19)

H_{11} (g,x) = $N_1^{-2}(x)$ { ε^2 ($G_{11}^{(+)}$- 2 ε $G_{11}^{(+,-)}$ + ε^2 $G_{11}^{(-)}$) + ε [($G_{11}^{(-,+)}$ - ε $G_{11}^{(-)}$) + ($G_{11}^{(-,+)}$ - ε $G_{11}^{(-)}$)] $a(x)$ + ($G_{11}^{(+)}$- 2 ε $G_{11}^{(+,-)}$ + ε^2 $G_{11}^{(-)}$) a^2(x) + ε [ρ_{12}($G_{11}^{(-,+)}$ - ε $G_{11}^{(-)}$) + ρ_{12} ($G_{11}^{(-,+)}$ - ε $G_{11}^{(-)}$)] $\tilde{a}(x)$ + ρ_{12} ρ_{12}($G_{22}^{(+)} -$ 2 ε $G_{22}^{(+,-)}$ + ε^2 $G_{22}^{(-)}$) $\tilde{a}^2$(x) + ρ_{12} ($G_{22}^{(+)} -$ 2 ε $G_{22}^{(+,-)}$ + ε^2 $G_{22}^{(-)}$) $a(x)\tilde{a}(x)$ + ρ_{12} ($G_{22}^{(+)} -$ 2 ε $G_{22}^{(+,-)}$ + ε^2 $G_{22}^{(-)}$) $\tilde{a}(x)a(x)$} (20)

H_{22} (g,x) = $N_2^{-2}(x)$ { ε^2 ($G_{22}^{(+)}$- 2 ε $G_{22}^{(+,-)}$ + ε^2 $G_{22}^{(-)}$) + ε [($G_{22}^{(-,+)}$ - ε $G_{22}^{(-)}$) + ($G_{22}^{(-,+)}$ - ε $G_{22}^{(-)}$)] $a(x)$ + ($G_{22}^{(+)}$- 2 ε $G_{22}^{(+,-)}$ + ε^2 $G_{22}^{(-)}$) a^2(x) + ε [ρ_{21}($G_{22}^{(-,+)}$ - ε $G_{22}^{(-)}$) + ρ_{21} ($G_{22}^{(-,+)}$ - ε $G_{22}^{(-)}$)] $\tilde{a}(x)$ + ρ_{21} ρ_{21}($G_{11}^{(+)} -$ 2 ε $G_{11}^{(+,-)}$ + ε^2 $G_{11}^{(-)}$)

$\tilde{a}^2(\mathrm{x}) + \rho_{21} (G_{11}^{(+)} - 2\,\varepsilon\, G_{11}^{(+,-)} + \varepsilon^2 G_{11}^{(-)}) \quad a(x)\tilde{a}(x) + \rho_{12} (G_{11}^{(+)} - 2\,\varepsilon\, G_{11}^{(+,-)} + \varepsilon^2 G_{11}^{(-)})\, \tilde{a}(x) a(x)\}$ (21)

Заключение

Для модифицированной модели ударного сжатия бинарных смесей газов найдено аналитическое представление всех возможных видов функций распределения пар молекул (19–21).

ЛИТЕРАТУРА

1. Аналитические модели поступательно-неравновесной динамики ударно-сжатых бинарных смесей газов / М. М. Кузнецов, Г. В. Кузнецов, В. И. Паренкина, Д. Г. Сатюков, Р. Ф. Халиков // Вестник Государственного университета посвещения. Серия: Физика-Математика. 2023. № 4. С. 34–48. DOI: 10.18384/2949-5067-2023-4-34-48.
2. Tanenbaum B. S., Scott R. M. Comments on “Kinetic-Theory Approach to the Problem of Shock-Wave Strukture in a Binary Mixture” // Physics of Fluids. 1966. Vol. 9. Iss. 5. P. 1048–1049. DOI: 10.1063/1.1761772.
3. Bratos M., Herczynski R. Shock waves in noble gases and their mixtures // Archives of Mechanics (Archiwum Mechaniki Stosowanej). 1983. Vol. 35. No. 2. P. 215–239.
4. Куликов С. В., Терновая О. И., Черешнев С. Л. Специфика поступательной неравновесности во фронте ударной волны в однокомпонентном газе // Химическая физика. 1993. Т. 12. № 3. С. 340–342.
5. Куликов С. В., Терновая О. И., Черешнев С. Л. Специфика эволюции распределения молекул однокомпонентного газа по относительным скоростям во фронте УВ // Физика горения и взрыва. 1994. Т. 30. № 4. С. 140–144.
6. Kuznetsov M. M., Kuleshova J. D. Increase in rates of Kinetic Processes inside the Bimodal Hypersonic Shock Wave // Heat Transfer Research. 2012. Vol. 43. Iss. 3. P. 228–236. DOI: 10.1615/HeatTransRes.v43.i3.30.
7. Кузнецов М. М., Кулешова Ю. Д., Смотрова Л. В. Эффект высокоскоростной поступательной неравновесности в бимодальной ударной волне // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2012. № 2. С. 108–116.
8. Кузнецов М. М., Кулешова Ю. Д., Смотрова Л. В. Эффект поступательной неравновесности в Тамм – Мотт-Смитовской модели ударной волны // Вестник Санки-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2012. № 3. С. 84–86.

REFERENCES

1. Kuznetsov, M. M., Kuznetsov, G. V., Parenkina, V. I., Satyukov, D. G. & Halikov, R. F. (2023). Analytical models of translationally nonequilibrium dynamics of shock-compressed binary gas mixtures. In: *Bulletin of the Federal State University of Education. Series: Physics and Mathematics*, 4, 36–48. DOI: 10.18384/2949-5067-2023-4-34-48 (in Russ.).
2. Tanenbaum, B. S. & Scott, R. M. (1966). Comments on “Kinetic-Theory Approach to the Problem of Shock-Wave Strukture in a Binary Mixture”. In: *Physics of Fluids*, 9 (5), 1048–1049. DOI: 10.1063/1.1761772.

3. Bratos, M. & Herczynski, R. (1983). Shock waves in noble gases and their mixtures. In: *Archives of Mechanics (Archiwum Mechaniki Stosowanej)*, 35 (2), 215–239.
4. Kulikov, S. V., Ternovaya, O. I. & Chereshnev, S. L. (1993). Specificity of translational nonequilibrium in the shock wave front in a single-component gas. In: *Soviet Journal of Chemical Physics*, 12 (3), 340–342 (in Russ.).
5. Kulikov, S. V., Ternovaya, O. I. & Chereshnev, S. L. (1994). Specificity of the evolution of the distribution of one-component gas molecules by relative velocities in the shock wave front. In: *Combustion, Explosion, and Shock Waves*, 30 (4), 140–144 (in Russ.).
6. Kuznetsov, M. M. & Kuleshova, J. D. (2012). Increase in rates of Kinetic Processes inside the Bimodal Hypersonic Shock Wave. In: *Heat Transfer Research*, 43 (3), 228–236. DOI: 10.1615/HeatTransRes.v43.i3.30.
7. Kuznetsov, M. M., Kuleshova, Ju. D. & Smotrova, L. V. (2012). On the increase of the kinetic processes rates in Tamm – Mott-Smith shock wave model. In: *Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*, 2, 108–116 (in Russ.).
8. Kuznetsov, M. M., Kuleshova, Ju. D. & Smotrova, L. V. (2012). The translational nonequilibrium effect in the Tamm – Mott-Smith shock wave model. In: *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 3, 84–86 (in Russ.).

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Кузнецов Михаил Михайлович (г. Москва) – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры фундаментальной физики и нанотехнологии Государственного университета просвещения;
e-mail: kuznets-omn@yandex.ru;

Кулешова Юлия Дмитриевна (г. Жуковский, Московская обл.) – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей алгебры, математического анализа и геометрии Государственного университета просвещения;
ORCID: 0000-0001-8556-9340; e-mail: juliaybogdanova@mail.ru

Сатюков Дмитрий Геннадьевич (г. Москва) – аспирант кафедры фундаментальной физики и нанотехнологии Государственного университета просвещения;
e-mail: dsatyukov@gmail.com

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Mikhail M. Kuznetsov (Moscow) – Dr. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Prof., Prof., Department of Fundamental Physics and Nanotechnology, Federal State University of Education;
e-mail: kuznets-omn@yandex.ru;

Juliya D. Kuleshova (Zhukovsky, Moscow region) – Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Prof., Department of Higher Algebra, Mathematical Analysis and Geometry, Federal State University of Education;
ORCID: 0000-0001-8556-9340; e-mail: juliaybogdanova@mail.ru

Dmitry G. Satyukov (Moscow) – Postgraduate Student, Department of Fundamental Physics and Nanotechnology, Federal State University of Education;
e-mail: dsatyukov@gmail.com dsatyukov@gmail.com

Научная статья
УДК 537.874.6
DOI: 10.18384/2949-5067-2024-3-58-67

УТОЧНЕНИЕ РАСЧЁТА ПАРАМЕТРОВ ДИФРАКЦИИ СВЕТА НА ПЛОСКИХ ОБЪЕКТАХ

Муратов Т. Т.

Ташкентский государственный педагогический университет имени Низами, 100185, г. Ташкент, ул. Бунёдкор, д. 27, Республика Узбекистан

Поступила в редакцию 12.08.2024
После доработки 05.09.2024
Принята к публикации 06.09.2024

Аннотация
Цель – уточнение расчёта дифрагированного светового поля от плоских объектов в рамках классического подхода Кирхгофа. Под этим предполагается вывод аналитических формул с учётом кубических членов фазового разложения и последующим анализом предельных переходов.
Процедура и методы. При выводе аналитических формул для дифрагированных полей использовался метод «стационарной фазы».
Результаты. Получены формулы для дифрагированного поля с учётом кубического члена фазового разложения, из которых в частном порядке получаются известные формулы дифракции света.
Теоретическая и практическая значимость исследования заключается в предельном переходе к частным случаям, исходя из одной общей задачи. Так, из задачи дифракции света на щели в качестве частного случая выступает задача дифракции света от полуплоскости. Поворотом системы координат можно совместить угол падения света с углом поворота, в результате получаются те же формулы, что и при нормальном падении. Использование элементов симметрии объекта, анализ предельных переходов, выбор удачной точки наблюдения позволяют в ряде случаев решать сложные дифракционные задачи. Данную методику расчёта можно использовать на практических занятиях по электродинамике для определения дифрагированного поля от различных объектов.
Ключевые слова: плоский экран со щелью, полуплоскость, дифракция света, дифрагированное поле, интеграл Френеля
Для цитирования:
Муратов Т. Т. Уточнение расчёта параметров дифракции света на плоских объектах // Вестник Государственного университета просвещения. Серия: Физика-математика. 2024. № 3. С. 58-67. https://doi.org/10.18384/2949-5067-2024-3-58-67

Original research article

REFINEMENT OF CALCULATION OF THE PARAMETERS OF A LIGHT DIFFRACTION ON FLAT OBJECTS

T. Muratov

Tashkent State Pedagogical University named after Nizami, ulitsa Bunyodkor 27, Tashkent 100185, Republic of Uzbekistan

Received by the editorial office 12.08.2024
Revised by the author 05.09.2024
Accepted for publication 06.09.2024

Abstract
Aim is refinement of the calculation of the diffracted light field from flat objects within the framework of the classical Kirchhoff's approach. This implies the derivation of analytical formulas taking into account the cubic terms of the phase expansion and subsequent analysis of the limit transitions.
Methodology. By obtaining the analytical formulas for diffracted fields, the method of "stationary phase" was applied.
Results. The formulas for the diffracted field with taking into account the cubic term of the phase expansion are obtained, from which obtains the well known formulas of diffraction of light in a private manner.
Research implications. The theoretical significance of the proposed methodology is the limiting transition to special cases, based on one general problem. Thus, from the problem of light diffraction by a slit, as a special case, appears the problem of light diffraction from a half-plane. By rotating the coordinate system, you can combine the angle of incidence of light with the angle of rotation, in results obtains the same formulas as for normal incidence. The use of symmetry elements of an object, analysis of limit transitions, and choose of a successful observation point allows, in a number of cases, to solve complex diffraction tasks. The given technique of calculation can be used in practical lessons on electrodynamics for determination of diffracted field from various objects.
Kewwords: flat screen with a slit, half-plane, light diffraction, diffracted field, Fresnel's integral
For citation.
Muratov, T. T. (2024). Refinement of calculation of the parameters of a light diffraction on flat objects. In: *Bulletin of the Federal State University of Education. Series: Physics and Mathematics*, 3, pp.58-67. https://doi.org/10.18384/2949-5067-2024-3-58-67

Введение

Асимптотическая теория дифракции электромагнитных волн, излагаемая на занятиях по электродинамике и теоретической оптике, основана на формуле Кирхгофа, которая предполагает непрерывность производной волнового поля **E** на границе замкнутой поверхности *S*, охватывающей область пространства, внутри которой находится точка $M(\mathbf{r})$, в которой рассчитывается дифрагированное поле [1, с. 247]:

$$E_M = -\frac{1}{4\pi}\oint_S \left[E\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\exp(i\mathbf{k}\,\mathbf{r})}{r}\right) - \frac{\exp(i\mathbf{k}\,\mathbf{r})}{r}\frac{\partial E}{\partial n}\right] dS\,, \qquad (1)$$

где $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$ – волновое число, ω – круговая частота монохроматической волны с длиной λ, $\partial/\partial n$ означает дифференцирование вдоль внутренней нормали к поверхности S, $\exp(i\mathbf{k}\,\mathbf{r})/r$ – уходящая в бесконечность сферическая волна. Чтобы применить формулу (1) для решения дифракционных задач, нужно уже знать значения E и/или $\partial E/\partial n$ на границе поверхности S (плоского экрана), т. е. знать решение соответствующего однородного волнового уравнения Гельмгольца:

$$\Delta\mathbf{E} + k^2\mathbf{E} = 0\,. \tag{2}$$

Следует отметить, что формула (1) формально является точным интегралом уравнения (2). Для устранения «неоднозначности» значения поля на границе поверхности интегрирования, обычно задаются значения одного только $\partial E/\partial n$ или одного E, при свободном распространении монохроматического света при отсутствии непрозрачного экрана:

$$E = E_0\exp[i(\mathbf{kr} - \omega t)]\,. \tag{3}$$

Формула (1) является решением уравнения (2) в том смысле, что световое поле перед экраном непрерывно (3), на экране (в том числе и на щели) обращается в нуль, а за экраном представляло бы расходящуюся сферическую волну (для двумерного случая – цилиндрическую волну). Формулу (1) можно упростить, рассматривая точку M^* как зеркально симметричную точке M, относительно общей границы S, тогда

$$E_M = -\frac{1}{2\pi}\oint_S E\Big|_S \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\exp(i\mathbf{kr})}{r}\right)dS\,. \tag{4}$$

При решении теоретических задач дифракции света от непрозрачного плоского экрана со щелью, круглого диска, цилиндра, шара, полуплоскости, полосы в случае большого расстояния r между дифракционным объектом и точкой наблюдения обычно ограничиваются членами порядка r^{-2} [2, с. 198]. Учёт членов $O(r^{-3})$ позволяет уточнить форму контура дифракционной картины. Кроме того, расчёт высших поправок представляет самостоятельный методический интерес в плане применения методов математической физики для решения дифракционных задач. В результате повышается вычислительная культура студентов и расширяется их научный кругозор. В этом отношении теоретико-аналитический подход к методике расчёта параметров дифракции света на плоских объектах имеет важное научно-методическое значение. Традиционный подход, основанный на методе «зон Френеля», несмотря на простоту и наглядность имеет ограниченный характер и не позволяет, например, учесть взаимодействие света с веществом дифракционного объекта и физические свойства среды.

Цель работы – уточнение расчёта дифрагированного светового поля от плоских объектов в рамках классического подхода Кирхгофа. Под этим предполагается вывод аналитических формул с учётом кубических членов фазового разложения и последующим анализом предельных переходов.

Дифракция от щели

Пусть на непрозрачный экран со щелью под углом α к нормали (ос x) падает монохроматическая волна, параллельная плоскости (x, y). Плоскость экрана совпадает с плоскостью $x=0$. При этих условиях падающую скалярную волну (3) можно представить уравнением:

$$E = E_0 \exp[ik(x\cos\alpha + y\sin\alpha)]\,. \tag{5}$$

Обозначим координаты точки наблюдения через $M(x, y, 0)$, координаты произвольной точки в плоскости экрана – $P(0,\eta,\xi)$ (рис. 1).

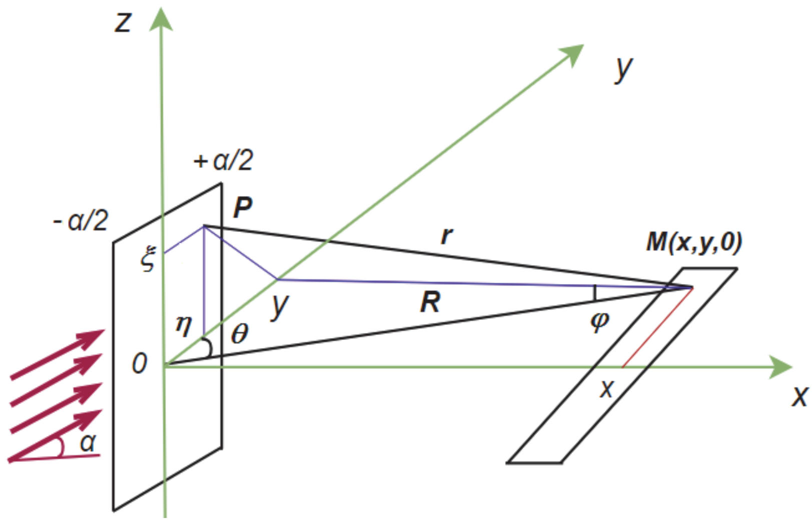


Рис. 1 / Fig. 1. Геометрия задачи дифракции света на щели шириной *a* / Geometry of the problem of diffraction light on a slit of width *a*.

Источник: по данным автора.

Подстановка формулы (5) в интеграл (4) даёт (для простоты опущены амплитудный множитель E_0 и временная зависимость):

$$E_M = -\frac{1}{2\pi}\int_{-a/2}^{+a/2} d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(ik\eta\sin\alpha)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\exp(ikr)}{r}\right) d\xi =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_{-a/2}^{+a/2} d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(ik\eta\sin\alpha)\left(\frac{\exp(ikr)}{r}\right) d\xi\,. \tag{6}$$

Так как $r=\sqrt{x^2+(y-\eta)^2+\xi^2}$, то ввиду чётности подынтегральной функции относительно ξ формулу (6) можно переписать так:

$$E_M = -\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_{-a/2}^{+a/2} d\eta \exp(ik\eta\sin\alpha)\int_{0}^{+\infty}\left(\frac{\exp(ikr)}{r}\right) d\xi\,. \tag{7}$$

Интеграл (7) выражается через функцию Ганкеля первого рода:

$$E_M = -\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial x}\int_{-a/2}^{+a/2} \exp(ik\eta\sin\alpha)\,H_0^{(1)}\left(k\sqrt{x^2+(y-\eta)^2}\right)\,d\eta. \qquad (8)$$

Исходя из методических соображений целесообразно рассмотреть случай, когда расстояние от точки наблюдения до щели велико по сравнению с шириной щели a (расстояния и углы показаны на рис. 1):

$$\rho = \sqrt{x^2+(y-\eta)^2} = R\sqrt{1-2(\eta/R)\sin\phi+(\eta/R)^2} \approx$$
$$\approx R\left[1-(\eta/R)\sin\phi+(\eta^2/2R^2)\cos^2\phi+(\eta^3/2R^3)\sin\phi\cos^2\phi-\cdots\right]. \qquad (9)$$

В большинстве случаев, на практических занятиях, ограничиваются вторым и третьим членом разложения (9). Методический интерес может представить учёт четвёртого члена [3]. Функцию Ганкеля можно при этом заменить её асимптотическим выражением, тогда с учетом разложения (9):

$$E_M = \frac{i}{2}\int_{-a/2}^{+a/2}\exp(ik\eta\sin\alpha)\,\frac{kxH_1^{(1)}\left(k\sqrt{x^2+(y-\eta)^2}\right)}{\sqrt{x^2+(y-\eta)^2}}\,d\eta =$$
$$= \frac{ikx}{2}\int_{-a/2}^{+a/2}\frac{\exp(ik\eta\sin\alpha)}{\rho}H_1^{(1)}(k\rho)\,d\eta \approx$$
$$\approx \frac{ikx}{2}\int_{-a/2}^{+a/2}\frac{\exp(ik\eta\sin\alpha)}{\rho}\sqrt{\frac{2}{\pi k\rho}}\exp\left[i\left(k\rho-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right]d\eta \approx$$
$$\approx \frac{kx}{2R}\sqrt{\frac{2}{\pi kR}}\exp(-i\pi/4)\int_{-a/2}^{+a/2}\exp(ik\eta\sin\alpha)\exp(ik\rho)\,d\eta \approx$$
$$\approx \frac{k\cos\phi}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi kR}}\exp(ikR)\exp(-i\pi/4)\int_{-a/2}^{+a/2}\exp(ik\eta\sin\alpha)\times$$
$$\times\exp\left[ik\left(-\eta\sin\phi+\frac{\eta^2}{2R}\cos^2\phi+\frac{\eta^3}{2R^2}\sin\phi\cos^2\phi\right)\right]d\eta =$$
$$= \exp(-i\pi/4)\,\frac{k\cos\phi}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi kR}}\exp(ikR)\times$$
$$\times\int_{-a/2}^{+a/2}\exp\left\{ik\left[\eta(\sin\alpha-\sin\phi)+\frac{\eta^2}{2R}\cos^2\phi+\frac{\eta^3}{2R^2}\sin\phi\cos^2\phi\right]\right\}d\eta. \qquad (10)$$

Приведением кубического многочлена в показателе экспоненты к каноническому виду выражение (10) может быть преобразовано к виду:

$$E_M = \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right)\sqrt[3]{\frac{\mathrm{ctg}\phi}{3\pi}}\sqrt[6]{\frac{kR}{2\pi}}\exp\left\{ikR\left[1+f(\alpha,\phi)\right]\right\}I(t), \qquad (11)$$

$$f(\alpha,\phi)=\left(\frac{1}{9}-\frac{(\sin\alpha-\sin\phi)\sin\phi}{\cos^2\phi}\right)\frac{\mathrm{ctg}^2\phi}{3}, \tag{12}$$

$$I(t)=\int\limits_{\sqrt[3]{\frac{kR\,\mathrm{ctg}^2\phi}{18}}\left(1-\frac{3a}{2R}\sin\phi\right)}^{\sqrt[3]{\frac{kR\,\mathrm{ctg}^2\phi}{18}}\left(1+\frac{3a}{2R}\sin\phi\right)}\exp\left[i\left(tz+\frac{z^3}{3}\right)\right]dz, \tag{13}$$

$$t(\phi)=\sqrt[3]{\frac{2(kR)^2\,\mathrm{tg}^2\phi}{3}}\left(\frac{(\sin\alpha-\sin\phi)\sin\phi}{\cos^2\phi}-\frac{1}{6}\right)\mathrm{ctg}^2\phi. \tag{14}$$

Из физических соображений ясно, что функция $t(\varphi)<0$, с учётом этого ограничения интеграл (13) можно доопределить так

$$I(t)=\int\limits_{\sqrt[3]{\frac{kR\,\mathrm{ctg}^2\varphi}{18}}\left(1-\frac{3a}{2R}\sin\varphi\right)}^{\sqrt[3]{\frac{kR\,\mathrm{ctg}^2\varphi}{18}}\left(1+\frac{3a}{2R}\sin\varphi\right)}\exp\left[i\left(-|t|\,z+\frac{z^3}{3}\right)\right]dz. \tag{15}$$

Интеграл (15) можно представить как разность неполных функций Эйри:

$$I(t)=\mathrm{Ai}\left(-|t|,z_1\right)-\mathrm{Ai}\left(-|t|,z_2\right). \tag{16}$$

Здесь $\mathrm{Ai}\left(-|t|,\tau\right)=\int\limits_{\tau}^{\infty}\exp\left[i\left(-|t|z+\frac{z^3}{3}\right)\right]dz$. Неполную функцию Эйри можно оценить методом стационарной фазы [4, с. 342]. Разлагая фазовую функцию вблизи стационарной точки $z=|t|^{1/2}$ в ряд Тейлора и ограничившись квадратичным членом, интеграл (15) можно выразить через комплексные интегралы Френеля [4, с. 356]:

$$I(t)=|t|^{-1/4}\exp\left(-\frac{2i}{3}|t|^{3/2}\right)\left[F(p_2)-F(p_1)\right], \tag{17}$$

где $F(p)=\int\limits_0^p\exp(iz^2)\,dz$, $p_{1,2}=|t|^{1/4}\left[z_{1,2}-|t|^{1/2}\right]$,

$$z_{1,2}=\sqrt[3]{\frac{kR\,\mathrm{ctg}^2\phi}{18}}\left(1\mp\frac{3a}{2R}\sin\phi\right).$$

При этом вкладом граничных точек можно пренебречь[1], так как

[1] Для типичных параметров $a=10^{-2}$ мм, $\lambda=5\cdot10^{-7}$ м, $\phi\approx4^0$ при нормальном падении света оценки дают $(3a/2R)\sin\phi\propto10^{-7}$ и $\sqrt{1+6\,\mathrm{tg}^2\phi}\approx1.015$. Граничные точки соизмеримы. При больших углах дифракции метрическое расстояние между стационарной точкой и граничными точками увеличивается, и вкладом последних можно пренебречь, по крайней мере в первом приближении.

$$1 \pm \frac{3a}{2R} \sin\phi < \sqrt{1 - \frac{6(\sin\alpha - \sin\phi)\sin\phi}{\cos^2\phi}}\,. \tag{18}$$

Подстановка (17) в (11) приводит к выражению

$$E_M \approx \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right)\sqrt[3]{\frac{\text{ctg}\phi}{3\pi}}\sqrt[6]{\frac{kR}{2\pi}}\left|t\right|^{-1/4}\exp\left\{ikR\left[1+f(\alpha,\phi)\right]-\frac{2i}{3}\left|t\right|^{3/2}\right\}\times$$
$$\times\left[F(p_2)-F(p_1)\right]. \tag{19}$$

Из модифицированной формулы (19), при условии $\dfrac{6\left|\sin\alpha-\sin\phi\right|\sin\phi}{\cos^2\phi} \ll 1$, можно получить формулу

$$E_M \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right)\exp\left[ikR\left(1-\frac{A^2}{2}\right)\right]\left\{F\left[\sqrt{\frac{kR}{2}}\left(A+\frac{Ba}{2}\right)\right]-F\left[\sqrt{\frac{kR}{2}}\left(A-\frac{Ba}{2}\right)\right]\right\}, \tag{20}$$

где $A = \dfrac{\sin\alpha - \sin\phi}{\cos\phi}$, $B = \dfrac{\cos\phi}{R}$. Формула (20) соответствует удержанию второй степени η в показателе подынтегральной функции формулы (10). Формулы (19) и (20) пригодны для любых $\phi = \text{arctg}(y/x)$ при условии $kR \gg 1$ и $R \gg a$. Если ограничиться только линейными членами в показателе подынтегральной функции (10), то получится простая формула [2, с. 209]:

$$E_M \approx \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\exp(ikR)}{\sqrt{kR}}\frac{\sin[ka(\sin\alpha-\sin\phi)/2]}{\sin\alpha-\sin\phi}\cos\phi\,, \tag{21}$$

которая соответствует геометрооптическому приближению $a/R \to 0$, т. е. дифракции в параллельных лучах.

Формулы (11), (19) и (20) учитывают дифракцию в непараллельных (сходящихся) лучах – дифракцию Френеля. Вследствие этого возникают разности фаз $(k\eta^2/2R)\cos^2\phi$ и $(k\eta^3/2R^2)\sin\phi\cos^2\phi$. В данном случае можно получить полную дифракционную картину на любом конечном расстоянии от экрана ($R \neq \infty$).

Дифракция от полуплоскости

Если границы щели, исходя из методических соображений, переопределить так: $\eta_1 = 0$ и $\eta_2 = a$, то вместо формулы (8) следует написать:

$$E_M = -\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial x}\int_0^a \exp(ik\eta\sin\alpha)H_0^{(1)}\left(k\sqrt{x^2+(y-\eta)^2}\right)d\eta\,. \tag{21}$$

Мысленно увеличивая *a*, можно прийти к случаю дифракции от полуплоскости:

$$E_M = -\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty \exp(ik\eta\sin\alpha)H_0^{(1)}\left(k\sqrt{x^2+(y-\eta)^2}\right)d\eta\,. \tag{22}$$

В частности при нормальном падении света на экран:

$$E_M = -\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty H_0^{(1)}\left(k\sqrt{x^2+(y-\eta)^2}\right)d\eta = -\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial x}\int_{-y}^\infty H_0^{(1)}\left(k\sqrt{x^2+\nu^2}\right)d\nu. \quad (23)$$

С методической точки зрения целесообразно сначала вычислить вспомогательный интеграл

$$I_1 = \int_0^\infty H_0^{(1)}\left(k_1\sqrt{x^2+\upsilon^2}\right)d\upsilon, \quad (24)$$

где $H_0^{(1)}\left(k_1\sqrt{x^2+\nu^2}\right) = \frac{2}{i\pi}\int_0^\infty \frac{\exp\left(ik_1\sqrt{u^2+x^2+\nu^2}\right)}{\sqrt{u^2+x^2+\nu^2}}du$, k_1 – комплексное волновое число.

$$I_1 = \frac{2}{i\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\exp\left(ik_1\sqrt{u^2+x^2+\nu^2}\right)}{\sqrt{u^2+x^2+\nu^2}}du\,d\nu = \frac{2}{i\pi}\int_0^\infty\int_0^{\pi/2}\frac{\exp\left(ik_1\sqrt{R_1^2+x^2}\right)}{\sqrt{R_1^2+x^2}}R_1\,dR_1\,d\phi_1. \quad (25)$$

Для сходимости исходного интеграла необходимо, чтобы $\chi = \mathrm{Im}\,k_1 > 0$, что соответствует распространению света в поглощающей среде. Реальная среда в той или иной степени обладает диссипацией. Последовательный учёт поглощения света молекулами воздуха требует применения методов статистической физики. Потеря световой энергии приводит к ухудшению видимости дифракционных максимумов вследствие увеличения их ширины. Однако при обычных условиях демонстрационного эксперимента [5; 6] потери световой энергии столь ничтожны, что практически не влияют на распределение интенсивности света.

Таким образом,

$$I_1 = \frac{1}{i}\int_0^\infty \frac{\exp\left[(ik-\chi)\sqrt{R_1^2+x^2}\right]}{\sqrt{R_1^2+x^2}}R_1\,dR_1 =$$

$$= \left.\frac{\exp\left[(ik-\chi)\sqrt{R_1^2+x^2}\right]}{ik-\chi}\right|_0^\infty = -\frac{1}{i}\frac{\exp[(ik-\chi)x]}{ik-\chi}, \quad \lim_{\chi\to 0} I_1(\chi) = \frac{\exp(ikx)}{k}, \quad (26)$$

$$I_1 = \int_0^\infty H_0^{(1)}\left(k\sqrt{x^2+\upsilon^2}\right)d\upsilon = \frac{\exp(ikx)}{k}, \quad (27)$$

из (27) следует

$$E_M = -\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty H_0^{(1)}\left(k\sqrt{x^2+\nu^2}\right)d\nu = \frac{\exp(ikx)}{2}, \quad (28)$$

т. е. в точке наблюдения *M*, находящейся на границе области геометрической тени, интенсивность света вследствие влияния экрана уменьшается в четыре раза. На основе (28) можно определить поле света, дифрагированного от полуплоскости:

$$E_M = \frac{\exp(ikR\cos\phi)}{2}\left[1+\exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right)\frac{2}{\sqrt{\pi}}F\left(\sqrt{2kR}\sin\frac{\phi}{2}\right)\right]. \qquad (29)$$

При наклонном падении света:

$$E_M = \frac{\exp[ikR\cos(\phi-\alpha)]}{2}\left[1+\exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right)\frac{2}{\sqrt{\pi}}F\left(\sqrt{2kR}\sin\frac{\phi-\alpha}{2}\right)\right]. \qquad (30)$$

Формула (30) полностью определяет дифрагированное поле света от полуплоскости в асимптотическом приближении.

Заключение

Основное содержание работы можно резюмировать формулами (11), (19). Применение метода стационарной фазы позволяет представить дифрагированное от экрана со щелью световое поле через интегралы Френеля, что позволяет получать различные оценки и контролировать пределы применимости полученных результатов. Например, при углах дифракции $\varphi \approx 4^0$ достаточно ограничится квадратичным членом разложения (9). При $\varphi > 4^0$ следует учесть кубический член. В качестве частного случая от дифракции света на щели рассматривается дифракция от полуплоскости.

Предложенную методику расчёта можно использовать на практических занятиях по электродинамике.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мультановский В. В., Василевский А. С. Курс теоретической физики: Классическая электродинамика. М.: Просвещение, 1990. 272 с.
2. Ландау Л. Д., Лифщиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 2. Теория поля. М.: Наука, 1988. 512 с.
3. Чен Т. К теории фокусирующего спектрометра Иоганна // Письма в Журнал теоретической физики. 2002. Т. 28. № 7. С. 84–88.
4. Солимено С., Крозиньяни Б., Ди Порто П. Дифракция и волноводное распространение оптического излучения / пер. Е. В. Московца и В. В. Тяхта; под ред. В. С. Летохова. М.: Мир, 1989. 664 с.
5. Лосев В. В., Плис В. И. Дифракция света на щели и тонком цилиндре. Конус дифракции // Потенциал: журнал для старшеклассников и учителей. Математика. Физика. Информатика. 2016. № 2. С. 33–42.
6. Лосев В. В., Плис В. И. Дифракция на одномерных дифракционных решетках. Дифракционное «колесо» // Потенциал: журнал для старшеклассников и учителей. Математика. Физика. Информатика. 2016. № 8. С. 25–37.

REFERENCES

1. Multanovsky, V. V. & Vasilevsky, A. S. (1990). *Course of theoretical physics: Classical electrodynamics*. Moscow: Prosveshchenie publ. (in Russ.).
2. Landau, L. D. & Lifshchits, E. M. (1988). *Theoretical Physics. Vol. 2. Field Theory*. Moscow: Nauka publ. (in Russ).
3. Chen, T. (2002). On the Theory of the Johann Focusing Spectrometer. In: *Applied Physics Letters*, 28 (7), 84–88 (in Russ).

4. Solimeno, S., Crosignani, B. & Di Porto, P. (1989). *Diffraction and Waveguide Propagation of Optical Radiation*. Moscow: Mir publ. (in Russ).
5. Losev, V. V. & Plis, V. I. (2016). Diffraction of light on a slit and a thin cylinder. Diffraction cone. In: *Potential: magazine for high school students and teachers. Mathematics. Physics. Computer science*, 2, 33–42 (in Russ).
6. Losev, V. V. & Plis, V. I. (2016). Diffraction on one-dimensional diffraction gratings. Diffraction “wheel”. In: *Potential: magazine for high school students and teachers. Mathematics. Physics. Computer science*, 8, 25–37 (in Russ).

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Муратов Темур Ташкабаевич (г. Ташкент, Узбекистан) – доктор философии по физико-математическим наукам, старший преподаватель кафедры методики преподавания физики Ташкентского государственного педагогического университета имени Низами;
ORCID: 0000-0002-0905-6620; e-mail: temur-muratov@yandex.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Temur T. Muratov (Tashkent, Uzbekistan) – Doctor of Philosophy in Physical and Mathematical Sciences (PhD), Senior Teacher, Department of methodology teaching physics, Tashkent State Pedagogical University named after Nizami;
ORCID: 0000-0002-0905-6620; e-mail: temur-muratov@yandex.ru

ПРОСВЕТ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ
ПРОСВЕЩЕНИЯ

ВЕСТНИК
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА ПРОСВЕЩЕНИЯ
СЕРИЯ: ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА
2024. № 3

Над номером работали:
Литературный редактор М. С. Тарасова
Переводчик В. А. Дворянов
Корректор М. С. Тарасова
Компьютерная вёрстка – Д. А. Заботина

Адрес редакции:
105005, г. Москва, ул. Радио, д. 10А, стр. 2, офис 98
тел. (495) 780-09-42 доб. 6101
e-mail: sj@guppros.ru
Сайт: www.physmathmgou.ru

Формат 70x108/16. Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура "Minion Pro".
Тираж 500 экз. Усл. п. л. 4,25, уч.-изд. л. 3,25.
Подписано в печать: 30.10.2024 г. Дата выхода в свет: 24.12.2024 г. Заказ № 2024/10-09.
Отпечатано в Государственном университете просвещения
105005, г. Москва, ул. Радио, д. 10А, стр. 2