ISSN 2949-5083 (print)
ISSN 2949-5067 (online)

ПРОСВЕТ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ
ПРОСВЕЩЕНИЯ

Вестник

Государственного университета просвещения

Серия

Физика-математика

ФИЗИЧЕСКИЙ МЕХАНИЗМ СЕЛЕКТИВНОГО ЛАЗЕРНОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ КОРОТКОИМПУЛЬСНОГО ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ НА МИКРОПОРЫ В НЕПРОЗРАЧНОМ МАТЕРИАЛЕ

ВРЕМЕННАЯ ЭВОЛЮЦИЯ ТУННЕЛИРОВАНИЯ БОЗЕ-КОНДЕНСИРОВАННЫХ АТОМОВ В ЧЕТЫРЁХЪЯМНОЙ ЛОВУШКЕ ПРИ УСЛОВИИ НАЧАЛЬНОГО РАВНОЗАСЕЛЕНИЯ ЯМ ЛОВУШКИ

2023/№ 3

ВЕСТНИК
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА ПРОСВЕЩЕНИЯ

ISSN 2949-5083 (print) 2023 / № 3 ISSN 2949-5067 (online)

серия

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА

Рецензируемый научный журнал. Основан в 1998 г.

Журнал «Вестник Государственного университета просвещения. Серия: Физика-математика» включён в «Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание учёной степени кандидата наук, на соискание учёной степени доктора наук» Высшей аттестационной комиссии при Министерстве науки и высшего образования Российской Федерации (См.: Список журналов на сайте ВАК при Минобрнауки России) по следующим научным специальностям: 1.3.3. – Теоретическая физика (физико-математические науки); 1.3.8. – Физика конденсированного состояния (физико-математические науки).

The peer-reviewed journal was founded in 1998

«Bulletin of State University of Education. Series: Physics and Mathematics» is included by the Supreme Certifying Commission of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation into "the List of reviewed academic journals and periodicals recommended for publishing in corresponding series basic research thesis results for a Ph.D. Candidate or Doctorate Degree" (See: the online List of journals at the site of the Supreme Certifying Commission of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation) on the following scientific specialities: 1.3.3. – Theoretical physics (physical-mathematical sciences); 1.3.8. – Physics of the condensed state (physical-mathematical sciences) (See: the online List of journals at the site of the Supreme Certifying Commission of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation).

ISSN 2949-5083 (print) 2023 / № 3 ISSN 2949-5067 (online)

series

PHYSICS AND MATHEMATICS

BULLETIN
OF STATE UNIVERSITY
OF EDUCATION

Учредитель журнала
«Вестник Государственного университета просвещения. Серия: Физика-математика»
Федеральное бюджетное государственное образовательное учреждение высшего образования
Государственный университет просвещения
Выходит 4 раза в год

ISSN 2949-5083 (print)
ISSN 2949-5067 (online)

Рецензируемый научный журнал «Вестник Государственного университета просвещения. Серия: Физика-математика» публикует статьи по математическим проблемам термодинамики, кинетики и статистической физики; теории конденсированного состояния классических и квантовых, макроскопических и микроскопических систем; изучению различных состояний вещества и физических явлений в них; статистической физике и кинетической теории равновесных и неравновесных систем; теоретическому и экспериментальному исследованию физических свойств неупорядоченных неорганических систем; изучению экспериментального состояния конденсированных веществ и фазовых переходов в них. Журнал адресован ученым, докторантам, аспирантам и всем, интересующимся достижениями физико-математических наук.

Журнал «Вестник Государственного университета просвещения. Серия «Физика-математика» зарегистрирован в Федеральной службе по надзору за соблюдением законодательства в сфере массовых коммуникаций и охране культурного наследия. Регистрационное свидетельство ПИ № ФС 77-73344.

Индекс серии «Физика-математика» по Объединенному каталогу «Пресса России» 40723

Журнал включён в базу данных Российского индекса научного цитирования (РИНЦ), имеет полнотекстовую сетевую версию в интернете на платформе Научной электронной библиотеки (www.elibrary.ru), с августа 2017 г. на платформе Научной электронной библиотеки «КиберЛенинка» (www.cyberleninka.ru), а также на сайтах Вестника Государственного университета просвещения (www.physmathmgou.ru, www.vestnik-mgou.ru).

Вестник Государственного университета просвещения. Серия: Физика-математика. – 2023. – № 3. – 70 с.

Адрес редакции:
г. Москва, ул. Радио, д.10А, офис 98
тел.: (495) 780-09-42 (доб. 6101)
e-mail: info@vestnik-mgou.ru; сайты: www.physmathmgou.ru; www.vestnik-mgou.ru

Founder of journal
«Bulletin of State University of Education. Series: Physics and Mathematics»

State University of Education

Issued 4 times a year

ISSN 2949-5083 (print)
ISSN 2949-5067 (online)

The reviewed scientific journal “Bulletin of State University of Education. Series: Physics and Mathematics” publishes articles on mathematical problems of thermodynamics, kinetics and statistical physics; the theory of the condensed state of classical and quantum, macroscopic and microscopic systems; the study of various states of substance and physical phenomena in them; statistical physics and the kinetic theory of equilibrium and non-equilibrium systems; theoretical and experimental research of physical features of disordered inorganic systems; the study of the experimental state of condensed substances and phase transitions in them. The journal is addressed to scientists, doctoral students, PhD students and everyone interested in the achievements of physical and mathematical sciences.

The series “Physics and Mathematics” of the Bulletin State University of Education is registered in Federal service on supervision of legislation observance in sphere of mass communications and cultural heritage protection. The registration certificate ПИ № ФС 77 – 73344.

Index series «Physics and Mathematics» according to the union catalog «Press of Russia» 40723

The journal is included into the database of the Russian Science Citation Index, and its full texts are available through scientific electronic libraries “eLibrary” (www.elibrary.ru) and “CyberLeninka” (since August 2017; www.cyberleninka.ru), as well as on the journal’s sites (www.physmathmgou.ru, www.vestnikmgou.ru).

Bulletin of State University of Education. Series: Physics and Mathematics. – 2023. – № 3. – 70 p.

The Editorial Board address:
10A Radio st., office 98, Moscow, Russia
Phone: (495) 780-09-42 (add. 6101)
e-mail: info@vestnik-mgou.ru; sites: www.physmathmgou.ru; www.vestnik-mgou.ru

СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКА

ТЕОРИЯ И МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ И ВОСПИТАНИЯ

CONTENTS

PHYSICS

THEORY AND METHODS OF TEACHING AND EDUCATION

ФИЗИКА

УДК 517.95
DOI: 10.18384/2949-5067-2023-3-6-14

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ НАВЬЕ ДЛЯ БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ СО СПЕЦИАЛЬНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ В БЕСКОНЕЧНОМ СЛОЕ

Алгазин О. Д., Копаев А. В.

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет)
105005, г. Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, Российская Федерация

Аннотация
Цель: найти точные решения краевой задачи для бигармонического уравнения в бесконечном n-мерном слое с граничными условиями Навье.
Процедура и методы. В статье рассмотрена краевая задача для бигармонического уравнения в бесконечном n-мерном слое $x \in \mathbb{R}^n, 0 < y < a$ с граничными условиями Навье. Эта задача сводится к последовательному решению двух задач Дирихле для уравнения Пуассона, явные решения которых получены авторами ранее с помощью преобразования Фурье обобщённых функций медленного роста.
Результаты. Получены точные решения краевой задачи Навье для бигармонического уравнения, правая часть которого является полигармонической функцией по x, в частности полиномом. В этом случае решение также является полигармонической функцией по x, в частности полиномом.
Теоретическая и/или практическая значимость заключается в получении точных решений краевой задачи Навье для бигармонического уравнения в бесконечном n-мерном слое.
Ключевые слова: бигармоническое уравнение, уравнение Пуассона, задача Дирихле, функция Грина

EXACT SOLUTIONS OF THE NAVIER BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A BIHARMONIC EQUATION WITH A SPECIAL RIGHT-HAND SIDE IN AN INFINITE LAYER

O. Algazin, A. Kopaev

Bauman Moscow State Technical University

ulitsa Vtoraya Baumanskay 5 build. 1, Moscow 105005, Russian Federation

Abstract
Aim. Purpose is to find exact solutions of the boundary value problem for the biharmonic equation in an infinite n-dimensional layer with Navier boundary conditions
Methodology. The paper considers a boundary value problem for a biharmonic equation in an infinite n-dimensional layer. The paper considers a boundary value problem for a biharmonic equation in an infinite n-dimensional layer $x \in \mathbb{R}^n, 0 < y < a$ with Navier boundary conditions. This problem reduces to the sequential solution of two Dirichlet problems for the Poisson equation, the explicit solutions of which were obtained earlier by the authors using the Fourier transform of generalized functions of slow growth.
Results. Exact solutions of the Navier boundary value problem are obtained for a biharmonic equation whose right-hand side is a polyharmonic function in x, in particular a polynomial. In this case, the solution is also a polyharmonic function in x, in particular a polynomial.
Research implications. They consist in obtaining exact solutions of the Navier boundary value problem for a biharmonic equation in an infinite n-dimensional layer.
Keywords: biharmonic equation, Poisson equation, Dirichlet problem, Green's function

Введение

Бигармоническое уравнение $\Delta^2 u = f$ используется для описания стационарных процессов различной физической природы. Например, в плоских задачах теории упругости решение u даёт прогиб пластины или балки под действием нагрузки f. В зависимости от способа закрепления краёв пластины или балки задаются различные граничные условия. Если, например, края пластины шарнирно закреплены, то получаем на границе Γ условия:

$$u|_\Gamma = 0, \qquad \Delta u|_\Gamma = 0.$$

Краевая задача для бигармонического уравнения с такими граничными условиями называется задачей Навье. Обзор граничных условий для бигармонического уравнения см. в [1].

Бигармоническое уравнение также используется в гидродинамике для описания медленных течений вязкой несжимаемой жидкости.

Решению различных краевых задач для бигармонического уравнения посвящено много работ, см. например [2–6].

Точные решения краевых задач для бигармонического уравнения можно получить только для некоторых областей, например для слоя в пространстве произвольной размерности. В случае плоскости это будет полоса.

Мы рассматриваем краевую задачу для неоднородного бигармонического уравнения в слое

$$\Delta^2 u(x,y) = f(x,y), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \qquad 0 < y < a, \qquad n \geq 1, \qquad (1)$$

с граничными условиями

$$u(x,0) = u(x,a) = u_{yy}(x,0) = u_{yy}(x,a) = 0, \qquad (2)$$

которые можно записать в виде

$$\begin{aligned} y = 0, \qquad u = 0, \qquad \Delta u = 0, \\ y = a, \qquad u = 0, \qquad \Delta u = 0. \end{aligned} \qquad (3)$$

В случае $n = 1$ решение задачи $u(x,y)$ даёт прогиб упругой полосы под действием нагрузки $f(x,y)$ при условии, что края полосы шарнирно закреплены.

Задача (1), (3) сводится к последовательному решению двух задач Дирихле для уравнения Пуассона:

$$\Delta u = v(x,y), \qquad u(x,0) = 0, \qquad u(x,a) = 0, \qquad (4)$$

и

$$\Delta v = f(x,y), \qquad v(x,0) = 0, \qquad v(x,a) = 0. \qquad (5)$$

Задача Дирихле для уравнения Пуассона (с неоднородными граничными условиями) рассмотрена нами в [7]. В случае полиномиальных данных решение является полиномом [8].

Далее мы приводим решение задачи (1), (2) в классе функций медленного роста по x для правой части $f(x,y)$ являющейся функцией медленного роста по x. Это решение в данном классе функций является единственным. Для правой части, являющейся полигармонической функцией по x (в частности – полиномом), мы даём алгоритм получения точного решения задачи. Это решение также является полигармонической функцией по x (в частности – полиномом).

1. Постановка и решение задачи

Пусть правая часть уравнения (1) является функцией медленного роста по x, то есть

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x,y)|\,(1+|x|)^{-m} dx < C\ , \qquad |x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}\,, \qquad (6)$$

для некоторого $m \geq 0$ и для каждого $y \in (0,a)$.

Решение задачи (1), (2) также будем искать в этом классе функций. Тогда задачи (4) и (5) имеют единственные решения [7] и решением задачи (1), (2) будет функция

$$u(x,y) = \int_0^a \int_{\mathbb{R}^n} v(t,\tau)\, G_n(x,y,t,\tau)\, dt d\tau, \qquad (7)$$

где

$$v(x,y) = \int_0^a \int_{\mathbb{R}^n} f(t,\tau)\, G_n(x,y,t,\tau)\, dt d\tau\,. \qquad (8)$$

Здесь $G_n(x,y,t,\tau)$ – функция Грина задачи Дирихле.

Для $n = 1$, то есть для случая полосы на плоскости, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$G_1(x,y,t,\tau)=\frac{1}{4\pi}\ln\frac{\operatorname{ch}(\pi(x-t)/a)-\cos(\pi(y-\tau)/a)}{\operatorname{ch}(\pi(x-t)/a)-\cos(\pi(y+\tau)/a)}. \qquad (9)$$

Для $n=2$, то есть для случая слоя в трёхмерном пространстве, $(x,y)\in\mathbb{R}^3$,

$$G_2(x,y,t,\tau)=\frac{1}{4\pi a}\int_0^\infty\left\{\frac{\exp(-\pi|x-t|\operatorname{ch}(\xi)/a)-\cos(\pi(y-\tau)/a)}{\operatorname{ch}(\pi|x-t|\operatorname{ch}(\xi)/a)-\cos(\pi(y-\tau)/a)}\right.$$
$$\left.-\frac{\exp(-\pi|x-t|\operatorname{ch}(\xi)/a)-\cos(\pi(y+\tau)/a)}{\operatorname{ch}(\pi|x-t|\operatorname{ch}(\xi)/a)-\cos(\pi(y+\tau)/a)}\right\}d\xi.$$

Для слоя в пространстве чётной размерности $(x,y)\in\mathbb{R}^{2k}$,

$$G_{2k-1}(x,y,t,\tau)=G^*_{2k-1}(|x-t|,y,\tau)=G^*_{2k-1}(r,y,\tau)=$$
$$=\frac{(-1)^{k-1}}{(2\pi)^{k-1}}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^{k-1}\left[\frac{1}{4\pi}\ln\frac{\operatorname{ch}(\pi r/a)-\cos\big(\pi(y-\tau)\big)}{\operatorname{ch}(\pi r/a)-\cos\big(\pi(y+\tau)\big)}\right].$$

Для слоя в пространстве нечётной размерности $(x,y)\in\mathbb{R}^{2k+1}$,

$$G_{2k}(x,y,t,\tau)=G^*_{2k}(|x-t|,y,\tau)=G^*_{2k}(r,y,\tau)=$$
$$=\frac{(-1)^{k-1}}{(2\pi)^{k-1}}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^{k-1}\left[\frac{1}{4\pi a}\int_0^\infty\left\{\frac{\exp(-\pi r\operatorname{ch}(\xi)/a)-\cos(\pi(y-\tau)/a)}{\operatorname{ch}(\pi r\operatorname{ch}(\xi)/a)-\cos(\pi(y-\tau)/a)}\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{\exp(-\pi r\operatorname{ch}(\xi)/a)-\cos(\pi(y+\tau)/a)}{\operatorname{ch}(\pi r\operatorname{ch}(\xi)/a)-\cos(\pi(y+\tau)/a)}\right\}d\xi\right].$$

Рассмотрим правую часть $f(x,y)$ специального вида, удовлетворяющую условию

$$\Delta_x^k f(x,y)=0,$$

для некоторого k, то есть являющуюся по переменным x полигармонической функцией, в частности полиномом. Обозначим

$$\Delta=\Delta_x+\frac{\partial^2}{\partial y^2}=B+A,$$

$$A^{-1}f(x,y)=\int_0^y(y-\xi)\,f(x,\xi)d\xi-\frac{y}{a}\int_0^a(a-\xi)\,f(x,\xi)d\xi.$$

Легко проверить, что решением задачи Дирихле (5)

$$\Delta v=f(x,y),\qquad v(x,0)=0,\qquad v(x,a)=0,$$

будет функция

$$v(x,y)=\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j A^{-1-j}B^j f(x,y)=\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j A^{-1-j}\Delta_x^j f(x,y),$$

которая также является полигармонической по x, $\Delta_x^k v(x,y)=0$.

Тогда решением задачи (1), (2) будет функция

$$u(x,y)=\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j A^{-1-j}\Delta_x^j v(x,y).$$

Если $f(x,y)$ является полиномом по x, то решение задачи $u(x,y)$ также является полиномом по x и это решение единственно в классе функций медленного роста по x.

2. Примеры

Пример 1.

$$\Delta^2 u(x,y) = 1, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \qquad 0 < y < a,$$
$$u(x,0) = u(x,a) = u_{yy}(x,0) = u_{yy}(x,a) = 0.$$

Поскольку $f(x,y) = 1$, $\Delta_x f = 0$, то

$$v(x,y) = A^{-1} f(x,y) = \int_0^y (y-\xi)\, d\xi - \frac{y}{a}\int_0^a (a-\xi)\, d\xi = \frac{y^2}{2} - \frac{ya}{2}.$$

В силу единственности решения в классе функций медленного роста по x это решение даётся интегралом по формуле (8). То есть, например, при $n = 1$

$$v(x,y) = \int_0^a \int_{\mathbb{R}^1} f(t,\tau)\, G_1(x,y,t,\tau)\, dt d\tau =$$
$$= \frac{1}{4\pi}\int_0^a \int_{-\infty}^{\infty} \ln \frac{\operatorname{ch}(\pi(x-t)/a) - \cos(\pi(y-\tau)/a)}{\operatorname{ch}(\pi(x-t)/a) - \cos(\pi(y+\tau)/a)}\, dt d\tau = \frac{y^2}{2} - \frac{ya}{2}.$$

Теперь найдём $u(x,y)$. Поскольку $\Delta_x v = 0$, то единственное в классе функций медленного роста по x решение задачи даётся формулой

$$u(x,y) = A^{-1} v(x,y) = \frac{y^4}{24} - \frac{y^3 a}{12} + \frac{ya^3}{24}.$$

Если не ограничивать рост искомого решения по x, то к найденному решению можно добавить любое решение однородной задачи

$$\Delta^2 u(x,y) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \qquad 0 < y < a,$$
$$u(x,0) = u(x,a) = u_{yy}(x,0) = u_{yy}(x,a) = 0.$$

Например, при $n = 1$ можно добавить

$$\sum_{k=1}^{N} \left(c_1 \operatorname{ch}\left(\frac{\pi k x}{a}\right) + c_2 x \operatorname{ch}\left(\frac{\pi k x}{a}\right) + c_3 \operatorname{sh}\left(\frac{\pi k x}{a}\right) + c_4 x \operatorname{sh}\left(\frac{\pi k x}{a}\right)\right) \sin\left(\frac{\pi k y}{a}\right).$$

Пример 2.

$$\Delta^2 u(x,y) = x^2 e^y, \qquad x \in \mathbb{R}^1, \qquad 0 < y < 1,$$
$$u(x,0) = u(x,1) = u_{yy}(x,0) = u_{yy}(x,1) = 0.$$

Поскольку

$$f(x,y) = x^2 e^y, \qquad \Delta_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \qquad \Delta_x^2 f = 0,$$

то $v(x,y) = A^{-1} f(x,y) - A^{-2}\Delta_x f(x,y)$ и
$u(x,y) = A^{-1} v(x,y) - A^{-2}\Delta_x v(x,y)$.

Эти вычисления легко выполняются в *Maple* или в *Mathematica*.

Единственное в классе функций медленного роста по x решение задачи

$$u(x,y) = 4 + \frac{1}{6}y^4 - \frac{1}{30}y^5 + \frac{1}{6}x^2y^3 + \frac{1}{30}ey^5 + \frac{307}{90}ey + \frac{5}{9}ey^3 - \frac{8}{9}y^3 -$$
$$-\frac{5}{6}ex^2y - \frac{1}{6}ex^2y^3 + 2y^2 + \frac{4}{3}x^2y - 4e^y - x^2 - \frac{1}{2}x^2y^2 + x^2e^y - \frac{236}{45}y.$$

Пример 3.

$$\Delta^2 u(x,y) = x_1 \cos(x_1) e^{x_2} y^3, \qquad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \qquad 0 < y < 1,$$
$$u(x,0) = u(x,1) = u_{yy}(x,0) = u_{yy}(x,1) = 0.$$

Поскольку
$$f(x,y) = x_1\cos(x_1)e^{x_2}y^3, \qquad \Delta_x^2 f(x,y) = 0,$$
то
$$v(x,y) = A^{-1}f(x,y) - A^{-2}\Delta_x f(x,y),$$
$$u(x,y) = A^{-1}v(x,y) - A^{-2}\Delta_x v(x,y) =$$
$$= -\frac{239}{75600}y\sin(x_1)\,e^{x_2} + \frac{1}{210}\sin(x_1)\,e^{x_2}y^3 - \frac{1}{600}\sin(x_1)\,e^{x_2}y^5 +$$
$$+\frac{1}{15120}\sin(x_1)\,e^{x_2}y^9 + \frac{1}{140}yx_1\cos(x_1)\,e^{x_2} - \frac{1}{120}x_1\cos(x_1)\,e^{x_2}y^3 +$$
$$+\frac{1}{840}x_1\cos(x_1)\,e^{x_2}y^7.$$

Здесь правая часть уравнения $f(x,y)$ и найденное решение $u(x,y)$ не являются функциями медленного роста по x. Если не накладывать никаких ограничений на рост искомого решения по x, то к найденному решению можно добавить любое решение однородной задачи
$$\Delta^2 u(x,y) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^2, \qquad 0 < y < 1,$$
$$u(x,0) = u(x,1) = u_{yy}(x,0) = u_{yy}(x,1) = 0.$$

Замечание. Аналогично изложенному в статье получается решение задачи для бигармонического уравнения (1) со смешанными граничными условиями
$$u(x,0) = 0, \qquad u_{yy}(x,0) = 0,$$
$$u_y(x,a) = 0, \qquad u_{yyy}(x,a) = 0,$$
которое сводится к последовательному решению двух смешанных краевых задач Дирихле-Неймана для уравнения Пуассона [9].

Отметим, что к смешанной задаче Дирихле – Неймана для уравнения Лапласа сводится смешанная краевая задача для системы Моисила – Теодореску [10].

Заключение

В работе получены точные решения краевой задачи Навье для бигармонического уравнения в многомерном бесконечном слое, ограниченном двумя гиперплоскостями
$$\Delta^2 u(x,y) = f(x,y),\ x \in \mathbb{R}^n,\ 0 < y < a,\ n \geq 1,$$
$$u(x,0) = u(x,a) = u_{yy}(x,0) = u_{yy}(x,a) = 0,$$
при условии, что правая часть является полигармонической функцией по x, $\Delta_x^k f(x,y) = 0$. Это решение единственно в классе функций медленного роста по x,
$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x,y)|\,(1+|x|)^{-m}dx < C\ , \qquad |x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}\,,$$
для некоторого $m \geq 0$ и для каждого $y \in (0,a)$.

Согласно приведённому алгоритму получения решения соответствующие вычисления легко выполняются в *Maple* или в *Mathematica*. Эти точные решения могут быть использованы для проверки точности численных методов решения краевых задач для бигармонического уравнения, возникающих в прикладных задачах теории упругости и гидромеханики.

Статья поступила в редакцию 22.08.2023 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Sweers G. A survey on boundary conditions for the biharmonic // Complex Variables and Elliptic Equations. 2009. Vol. 54. Iss. 2. P. 79–93. DOI: 10.1080/17476930802657640.
2. Gazzola F., Grunau H., Sweers G. Polyharmonic Boundary Value Problems: Positivity Preserving and Nonlinear Higher Order Elliptic Equations in Bounded Domains. Berlin: Springer, 2010. 423 p. (Series: Lecture Notes in Mathematics. Vol. 1991).
3. Meleshko V. V. Selected topics in the history of the two-dimensional biharmonic problem // Applied Mechanics Reviews. 2003. Vol. 56. Iss. 1. P. 33–85. DOI: 10.1115/1.1521166.
4. Матевосян О. А. О решениях задачи Неймана для бигармонического уравнения в неограниченных областях // Математические заметки. 2015. Т. 98. № 6. С. 944–947. DOI: 10.4213/mzm10980.
5. Карачик В. В., Торебек Б. Т. О задаче Дирихле – Рикье для бигармонического уравнения // Математические заметки. 2017. Т. 102. № 1. С. 39–51. DOI: 10.4213/mzm11035.
6. Примеры точных решений задач изгиба пластины со свободными лицевыми плоскостями / Е. М. Зверяев, М. Д. Коваленко, Д. А. Абруков, И. В. Меньшова, А. П. Кержаев // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2019. № 46. 17 с. URL: https://keldysh.ru/papers/2019/prep2019_46.pdf (дата обращения: 12.05.2023). DOI: 10.20948/prepr-2019-46.
7. Алгазин О. Д., Копаев А. В. Решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона в многомерном бесконечном слое // Математика и Математическое моделирование (сетевое издание МГТУ им. Н. Э. Баумана). 2015. № 4. С. 41–53. URL: https://elpub.ru/elpub-article/mathm/24 (дата обращения: 12.05.2023). DOI: 10.7463/mathm.0415.0812943.
8. Алгазин О. Д. Полиномиальные решения краевых задач для уравнения Пуассона в слое // Математика и Математическое моделирование (сетевое издание МГТУ им. Н. Э. Баумана). 2017. № 6. С. 1–18. URL: https://elpub.ru/elpub-article/mathm/82 (дата обращения: 12.05.2023). DOI: 10.24108/mathm.0517.0000082.
9. Алгазин О. Д., Копаев А. В. Решение смешанной краевой задачи Дирихле – Неймана для уравнения Пуассона в многомерном бесконечном слое // Вестник Московского государственного технического университета им. Н. Э. Баумана. Серия: Естественные науки. 2016. № 3. С. 42–56. DOI: 10.18698/1812-3368-2016-3-42-56.
10. Алгазин О. Д., Копаев А. В. Решение смешанной краевой задачи для системы Моисила – Теодореску в бесконечном слое // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2022. № 2. С. 6–16. DOI: 10.18384/2310-7251-2022-2-6-16.

REFERENCES

1. Sweers G. A survey on boundary conditions for the biharmonic. In: *Complex Variables and Elliptic Equations*, 2009, vol. 54, iss. 2, pp. 79–93. DOI: 10.1080/17476930802657640.
2. Gazzola F., Grunau H., Sweers G. Polyharmonic Boundary Value Problems: Positivity Preserving and Nonlinear Higher Order Elliptic Equations in Bounded Domains. Berlin, Springer, 2010. 423 p. (Series: Lecture Notes in Mathematics. Vol. 1991).
3. Meleshko V. V. Selected topics in the history of the two-dimensional biharmonic problem. In: *Applied Mechanics Reviews*, 2003, vol. 56, iss. 1, pp. 33–85. DOI: 10.1115/1.1521166.

4. Matevossian O. A. [On solutions of the Neumann problem for the biharmonic equation in unbounded domains]. In: *Matematicheskiye zametki* [Mathematical Notes], 2015, vol. 98, no. 6, pp. 944–947. DOI: 10.4213/mzm10980.
5. Karachik V. V., Torebek B. T. [On the Dirichlet – Riquier problem for biharmonic equations]. In: *Matematicheskiye zametki* [Mathematical Notes], 2017, vol. 102, no. 1, pp. 39–51. DOI: 10.4213/mzm11035.
6. Zveryayev Ye. M., Kovalenko M. D., Abrukov D. A., Menshova I. V., Kerzhayev A. P. [Examples of exact solutions for problems of bending plate with free face planes]. In: *Preprinty IPM im. M. V. Keldysha* [KIAM Preprint], 2019, no. 46, 17 p. Available at: https://keldysh.ru/papers/2019/prep2019_46.pdf (accessed: 12.05.2023). DOI: 10.20948/prepr-2019-46.
7. Algazin O. D., Kopayev A. V. [Solution of the Dirichlet Problem for the Poisson's Equation in a Multidimensional Infinite Layer]. In: *Matematika i Matematicheskoye modelirovaniye (setevoye izdaniye MGTU im. N. E. Baumana)* [Mathemathics and Mathematical Modelling (electronic journal of the Bauman MSTU)], 2015, no. 4, pp. 41–53. Available at: https://elpub.ru/elpub-article/mathm/24 (accessed: 12.05.2023). DOI: 10.7463/mathm.0415.0812943.
8. Algazin O. D. [Polynomial solutions of the boundary value problems for the Poisson equation in a layer]. In: *Matematika i Matematicheskoye modelirovaniye (setevoye izdaniye MGTU im. N. E. Baumana)* [Mathemathics and Mathematical Modelling (electronic journal of the Bauman MSTU)], 2017, no. 6, pp. 1–18. Available at: https://elpub.ru/elpub-article/mathm/82 (accesssed: 12.05.2023). DOI: 10.24108/mathm.0517.0000082.
9. Algazin O. D., Kopayev A. V. [The solution of the mixed boundary value problem of Dirichlet - Neumann for the Poisson equation in a multidimensional infinite layer]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta im. N. E. Baumana. Seriya: Yestestvennyye nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series: Natural Sciences], 2016, no. 3, pp. 42–56. DOI: 10.18698/1812-3368-2016-3-42-56.
10. Algazin O. D., Kopayev A. V. [Solution of a mixed boundary value problem for the Moisil-Teodoresku system in an infinite layer]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-Matematika* [Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics-Mathematics], 2022, no. 2, pp. 6–16. DOI: 10.18384/2310-7251-2022-2-6-16.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Алгазин Олег Дмитриевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры вычислительной математики и математической физики Московского государственного технического университета имени Н. Э. Баумана;
e-mail: mopi66@yandex.ru;

Копаев Анатолий Владимирович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики Московского государственного технического университета имени Н. Э. Баумана;
e-mail: kopaev50@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Oleg D. Algazin – Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Prof., Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University;
e-mail: mopi66@yandex.ru;

Anatoliy V. Kopaev – Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Prof., Department of Higher Mathematics, Bauman Moscow State Technical University;
e-mail: kopaev50@mail.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Алгазин О. Д., Копаев А. В. Точные решения краевой задачи Навье для бигармонического уравнения со специальной правой частью в бесконечном слое // Вестник Государственного университета просвещения. Серия: Физика-Математика. 2023. № 3. С. 6–14.
DOI: 10.18384/2949-5067-2023-3-6-14

FOR CITATION

Algazin O. D., Kopaev A. V. Exact solutions of the Navier boundary value problem for a biharmonic equation with a special right-hand side in an infinite layer. In: *Bulletin of State University of Education. Series: Physics and Mathematics*, 2023, no. 3, pp. 6–14.
DOI: 10.18384/2949-5067-2023-3-6-14

УДК 537.632
DOI: 10.18384/2949-5067-2023-3-15-32

ВРЕМЕННАЯ ЭВОЛЮЦИЯ ТУННЕЛИРОВАНИЯ БОЗЕ-КОНДЕНСИРОВАННЫХ АТОМОВ В ЧЕТЫРЁХЪЯМНОЙ ЛОВУШКЕ ПРИ УСЛОВИИ НАЧАЛЬНОГО РАВНОЗАСЕЛЕНИЯ ЯМ ЛОВУШКИ

Васильева О. Ф., Зинган А. П.

Приднестровский государственный университет имени Т. Г. Шевченко
МД 3300, г. Тирасполь, ул. 25 лет Октября, д. 128, Молдова

Аннотация
Целью работы является теоретическое исследование временной эволюции бозе-конденсированных атомов в четырёхъямной ловушке.
Процедура и методы. Проведены теоретические исследования гамильтониана взаимодействия, описывающего временную эволюцию бозе-конденсированных атомов в четырёхъямной ловушке в условиях линейного туннелирования.
Результаты. Получены аналитические решения системы дифференциальных уравнений, описывающих временную эволюцию бозе-конденсированных атомов в четырёхъямной ловушке.
Теоретическая значимость. Временная эволюция бозе-конденсированных атомов в четырёхъямной ловушке определяется начальной разностью фаз, что даёт возможность фазового управления процессом туннелирования бозе-атомов в ловушках.
Ключевые слова: бозе-атомы, туннелирование, четырёхъямная оптическая ловушка

TEMPORAL EVOLUTION OF TUNNELING OF BOSE-CONDENSED ATOMS IN A QUADRUPOLE TRAP UNDER THE CONDITION OF INITIAL EQUIPOPULATION OF TRAP PITS

O. Vasilieva, A. Zingan

Pridnestrovian State University 12
8 ulitsa 25 Oktyabrya, Tiraspol MD3300, Moldova
Abstract
Aim of this work is to theoretically investigate the temporal evolution of Bose-condensed atoms in a quadrupole trap
Methodology. Theoretical studies of the interaction Hamiltonian describing the time evolution of Bose-condensed atoms in a quadrupole trap under linear tunneling conditions have been carried out
Results. Analytical solutions are obtained for a system of differential equations describing the time evolution of Bose-condensed atoms in a quadrupole trap.
Research implications. The time evolution of Bose-condensed atoms in a quadrupole trap is determined by the initial phase difference, which makes it possible to phase-control the process of Bose-atom tunneling in traps
Key words: Bose atoms, tunneling, four-well optical trap.

Введение

С момента первой экспериментальной реализации бозе-эйнштейновского конденсата прошло достаточно много времени, однако изучение данного явления до сих пор является актуальной задачей. За последнее десятилетие был достигнут значительный экспериментальный и теоретический прогресс в изучении свойств этого нового состояния вещества. Было изучено туннелирование атомов в двойной яме [1–4]. В [5] был численно изучен процесс туннелирования солитонов в двухъямном бозе-конденсате. Были получены не привычные джозефсоновские колебания, а прямоугольные колебания, что доказывает топологическую устойчивость и локализованность солитонов, распространяющихся в нелинейной среде. В [6] показано, что, изменяя конфигурацию ловушки, можно вызвать переход от джозефсоновских колебаний к явлению квантового самозахвата системы бозе-атомов. В [7] исследовалась вероятность транзитной передачи частиц из одной ямы в другую при наличии и отсутствии диполь-дипольного и когерентного взаимодействий.

Постепенно началось исследование бозе-конденсата в тройной ловушке [8–13]. Добавление ещё одной ямы приводит к гамильтониану с двумя степенями свободы, который в общем случае является неинтегрируемым и, следовательно, способен демонстрировать смешанную регулярно-хаотическую динамику. Возникновение хаоса в неинтегрируемой системе оказывает своё уникальное влияние на временную эволюцию бозе-конденсата. Так, динамика бозе-конденсированных атомов в тройных ловушках приводит к нескольким интересным возможностям, таким как: поведение конденсата, подобное транзистору [14], бозе-конденсат рассматривается в качестве атомотронного переключающегося устройства [15] и в качестве переноса одиночных атомов исток-сток [16].

В [17] рассмотрена система бозе-конденсированных атомов в ловушке с четырьмя ямами. Такая система была подробно проанализирована в [18]. В [17] система бозе-конденсированных атомов представлена как линейный тример, слабо связанный с четвёртой лункой (ямой-мономером). Бозе-конденсированная система рассматривалась как двухчастичная (тример и мономер) модель Бозе-Хаббарда. Предсказаны исходные конфигурации тримера, которые устойчивы к возмущениям мономера. Показано, что, изменяя начальные параметры заселения мономера, можно прийти к инверсному состоянию заселённости ямы-тримера.

Постановка задачи. Основные уравнения

Рассмотрим когерентную динамику туннелирования бозе-конденсированных атомов в ловушке, состоящей из четырёх ям, в условиях линейного процесса туннелирования. При этом будем считать, что константы линейного процесса туннелирования между ямами одинаковые: $\chi_{12} = \chi_{13} = \chi_{23} = \chi_{14} = \chi$ (рис. 1). Потенциальный барьер между ямами ловушки допускает туннелирование бозе-атомов между всеми четырьмя ямами. Гамильтониан взаимодействия в этом случае имеет вид:

$$\hat{H}_{int} = -\hbar\chi\left(\hat{a}_1^+\hat{a}_2 + \hat{a}_1\hat{a}_2^+\right) - \hbar\chi\left(\hat{a}_2^+\hat{a}_3 + \hat{a}_2\hat{a}_3^+\right) - \hbar\chi\left(\hat{a}_3^+\hat{a}_4 + \hat{a}_3\hat{a}_4^+\right) - \hbar\chi\left(\hat{a}_1^+\hat{a}_4 + \hat{a}_1\hat{a}_4^+\right), \quad (1)$$

где χ – константа линейного процесса туннелирования бозе-конденсированных атомов в четырёхъямной ловушке, $\hat{a}_j$ – оператор уничтожения атома в j –ой яме ($j = 1,2,3,4$).

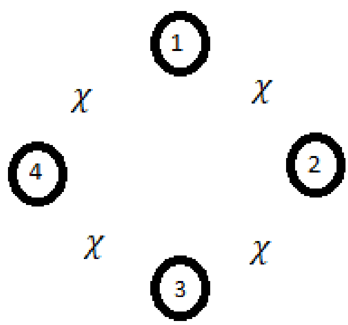

Рис. 1 / Fig. 1. Схема четырёхъямной ловушки / Scheme of a quadrupole trap

Источник: данные авторов

Из гамильтониана взаимодействия (1) получаем систему дифференциальных уравнений для комплексных амплитуд a_1, a_2, a_3 и a_4:

$$\begin{aligned} i\dot{a}_1 &= -\chi(a_2 + a_4), \\ i\dot{a}_2 &= -\chi(a_1 + a_3), \\ i\dot{a}_3 &= -\chi(a_2 + a_4), \\ i\dot{a}_4 &= -\chi(a_1 + a_3). \end{aligned} \quad (2)$$

Система уравнений (2) записана при учёте выполнения условия точного резонанса. Начальные условия для системы дифференциальных уравнений (2) запишутся в виде: $a_j\Big|_{t=0} = a_{j0}e^{-i\varphi_{j0}}$, где $j = 1,2,3,4$.

Введём в рассмотрение населённости атомов в четырёхъямной ловушке: $n_j = \left|a_j\right|^2$, где $j = 1,2,3,4$.

Если в начальный момент времени присутствуют бозе-конденсированные атомы в каждой яме четырёхъямной ловушки, то динамика населённостей в ямах будет определяться начальными плотностями частиц в ямах и начальными разностями фаз. В этом случае удаётся получить аналитические выражения для плотностей атомов в четырёхъямной ловушке:

$$n_1 = n_{30} + \left(n_{10} + n_{30} + 2\sqrt{n_{10}n_{30}}cos(\varphi_{10} - \varphi_{30})\right)cos^4(\chi t) - 2\left(n_{30} + \sqrt{n_{10}n_{30}}cos(\varphi_{10} - \varphi_{30})\right)cos^2(\chi t) + 2\left(\sqrt{n_{10}n_{20}}sin(\varphi_{10} - \varphi_{20}) + \sqrt{n_{10}n_{40}}sin(\varphi_{10} - \varphi_{40}) + \sqrt{n_{20}n_{30}}sin(\varphi_{20} - \varphi_{30}) + \sqrt{n_{30}n_{40}}sin(\varphi_{30} - \varphi_{40})\right)sin(\chi t)cos^3(\chi t) + \left(n_{20} + n_{40} + 2\sqrt{n_{20}n_{40}}cos(\varphi_{20} -\right.$$

$\varphi_{40})\big) sin^2(\chi t)cos^2(\chi t) - 2\big(\sqrt{n_{20}n_{30}}sin(\varphi_{20} - \varphi_{30}) + \sqrt{n_{30}n_{40}}sin(\varphi_{30} -$
$\varphi_{40})\big) sin(\chi t)cos(\chi t),$

$n_2 = n_{40} + \big(n_{20} + n_{40} + 2\sqrt{n_{20}n_{40}}cos(\varphi_{20} - \varphi_{40})\big) cos^4(\chi t) - 2\big(n_{40} +$
$\sqrt{n_{20}n_{40}}cos(\varphi_{20} - \varphi_{40})\big) cos^2(\chi t) - 2\big(\sqrt{n_{10}n_{20}}sin(\varphi_{10} - \varphi_{20}) +$
$\sqrt{n_{10}n_{40}}sin(\varphi_{10} - \varphi_{40}) + \sqrt{n_{30}n_{40}}sin(\varphi_{30} - \varphi_{40}) + \sqrt{n_{20}n_{30}}sin(\varphi_{20} -$
$\varphi_{30})\big) sin(\chi t)cos^3(\chi t) + \big(n_{10} + n_{30} + 2\sqrt{n_{10}n_{30}}cos(\varphi_{10} -$
$\varphi_{30})\big) sin^2(\chi t)cos^2(\chi t) + 2\big(\sqrt{n_{10}n_{40}}sin(\varphi_{10} - \varphi_{40}) + \sqrt{n_{30}n_{40}}sin(\varphi_{30} -$
$\varphi_{40})\big) sin(\chi t)cos(\chi t),$

$n_3 = n_{10} + \big(n_{10} + n_{30} + 2\sqrt{n_{10}n_{30}}cos(\varphi_{10} - \varphi_{30})\big) cos^4(\chi t) - 2\big(n_{10} +$
$\sqrt{n_{10}n_{30}}cos(\varphi_{10} - \varphi_{30})\big) cos^2(\chi t) - 2\big(\sqrt{n_{10}n_{20}}sin(\varphi_{10} - \varphi_{20}) +$
$\sqrt{n_{10}n_{40}}sin(\varphi_{10} - \varphi_{40}) + \sqrt{n_{20}n_{30}}sin(\varphi_{20} - \varphi_{30}) + \sqrt{n_{30}n_{40}}sin(\varphi_{30} -$
$\varphi_{40})\big) sin(\chi t)cos^3(\chi t) + \big(n_{20} + n_{40} + 2\sqrt{n_{20}n_{40}}cos(\varphi_{20} -$
$\varphi_{40})\big) sin^2(\chi t)cos^2(\chi t) + 2\big(\sqrt{n_{10}n_{20}}sin(\varphi_{10} - \varphi_{20}) + \sqrt{n_{10}n_{40}}sin(\varphi_{10} -$
$\varphi_{40})\big) sin(\chi t)cos(\chi t),$

$n_4 = n_{20} + \big(n_{20} + n_{40} + 2\sqrt{n_{20}n_{40}}cos(\varphi_{20} - \varphi_{40})\big) cos^4(\chi t) - 2\big(n_{40} +$
$\sqrt{n_{20}n_{40}}cos(\varphi_{20} - \varphi_{40})\big) cos^2(\chi t) + 2\big(\sqrt{n_{10}n_{20}}sin(\varphi_{10} - \varphi_{20}) +$
$\sqrt{n_{10}n_{40}}sin(\varphi_{10} - \varphi_{40}) + \sqrt{n_{30}n_{40}}sin(\varphi_{30} - \varphi_{40}) + \sqrt{n_{20}n_{30}}sin(\varphi_{20} -$
$\varphi_{30})\big) sin(\chi t)cos^3(\chi t) + \big(n_{10} + n_{30} + 2\sqrt{n_{10}n_{30}}cos(\varphi_{10} -$
$\varphi_{30})\big) sin^2(\chi t)cos^2(\chi t) - 2\big(\sqrt{n_{10}n_{20}}sin(\varphi_{10} - \varphi_{20}) + \sqrt{n_{30}n_{20}}sin(\varphi_{20} -$
$\varphi_{30})\big) sin(\chi t)cos(\chi t).$ (3)

Из (3) следует закон сохранения числа бозе-атомов в системе: $n_1(t) + n_2(t) + n_3(t) + n_4(t) = n_{10} + n_{20} + n_{30} + n_{40}$.

Согласно полученной системе уравнений (3) временная эволюция бозе-конденсированных атомов существенно зависит от начального заполнения ям и от начальной разности фаз.

Если в начальный момент времени населённость первой ямы отлична от нуля, а населённости остальных ям равны нулю, то из (2) нетрудно получить выражения, определяющие динамику плотностей бозе-конденсированных атомов в четырёхъямной ловушке:

$n_1 = n_{10}cos^4(\chi t),$
$n_2 = n_4 = n_{10}sin^2(\chi t)cos^2(\chi t),$
$n_3 = n_{10}sin^4(\chi t),$ (4)

где n_{10} – начальная населённость атомов в первой яме четырёхъямной ловушки.

Из (4) и рис. 2 видно, что бозе-конденсированные атомы начинают периодически туннелировать из одной ямы в другую. В моменты времени $t_m = \frac{\pi(2m\pm1)}{2\chi}$ $(m = 0,1, ...)$ первая яма оказывается пустой, а третья максимально заполненной, таким образом создаётся инверсная заселённость первой и третьей ям. А в моменты времени $t_m = \frac{\pi(2m\pm1)}{4\chi}$ $(m = 0,1, ...)$ населённости в ямах оказываются одинаковыми.

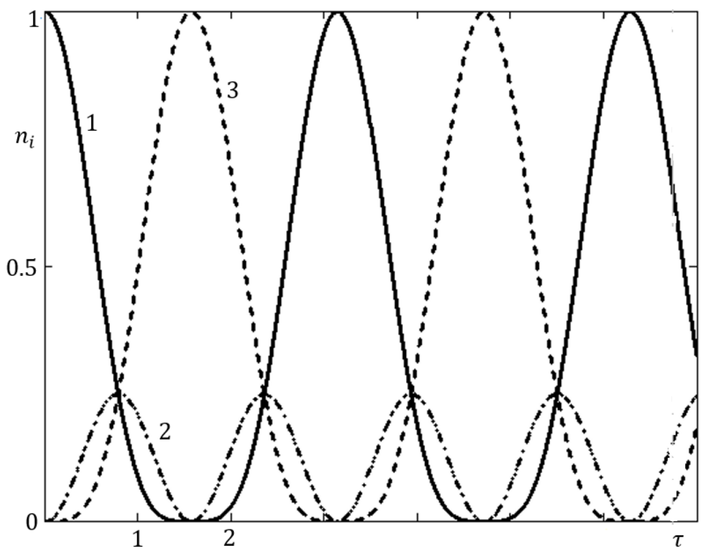

Рис. 2 / Fig. 2. Временная эволюция плотностей бозе-конденсированных атомов в ямах, в условиях начального заселения первой ямы ловушки. Здесь: **1**- $\boldsymbol{n_1(t)}$, **2**- $\boldsymbol{n_2(t) = n_4(t)}$, **3**- $\boldsymbol{n_3(t)}$, $\boldsymbol{\tau = \chi t}$. / Time evolution of the densities of Bose-condensed atoms in wells under conditions of initial population of the first well of the trap. Here: **1**- $\boldsymbol{n_1(t)}$, **2**- $\boldsymbol{n_2(t) = n_4(t)}$, **3**- $\boldsymbol{n_3(t)}$, $\boldsymbol{\tau = \chi t}$.

Источник: данные авторов

Рассмотрим случай, когда в начальный момент времени плотности атомов в четырёхъямной ловушке одинаковы $n_{10} = n_{20} = n_{30} = n_{40} = n_0$, тогда систему уравнений (3) можно записать в виде:

$$n_1 = 2n_0\Big(\big(1 + cos(\varphi_{10} - \varphi_{30})\big)cos^4(\chi t) + \big(sin(\varphi_{10} - \varphi_{20}) + sin(\varphi_{10} - \varphi_{40}) + sin(\varphi_{20} - \varphi_{30}) + sin(\varphi_{30} - \varphi_{40})\big)sin(\chi t)cos^3(\chi t) + \big(1 + cos(\varphi_{20} - \varphi_{40})\big)sin^2(\chi t)cos^2(\chi t) - \big(1 + cos(\varphi_{10} - \varphi_{30})\big)cos^2(\chi t) - \big(sin(\varphi_{20} - \varphi_{30}) + sin(\varphi_{30} - \varphi_{40})\big)sin(\chi t)cos(\chi t) + 1\Big),$$

$$n_2 = 2n_0\Big(\big(1 + cos(\varphi_{20} - \varphi_{40})\big)cos^4(\chi t) - \big(sin(\varphi_{10} - \varphi_{20}) + sin(\varphi_{10} - \varphi_{40}) + sin(\varphi_{20} - \varphi_{30}) + sin(\varphi_{30} - \varphi_{40})\big)sin(\chi t)cos^3(\chi t) + \big(1 + cos(\varphi_{10} - \varphi_{30})\big)sin^2(\chi t)cos^2(\chi t) - \big(1 + cos(\varphi_{20} - \varphi_{40})\big)cos^2(\chi t) + \big(sin(\varphi_{10} - \varphi_{40}) + sin(\varphi_{30} - \varphi_{40})\big)sin(\chi t)cos(\chi t) + 1\Big),$$

$$n_3 = 2n_0\Big(\big(1 + cos(\varphi_{10} - \varphi_{30})\big)cos^4(\chi t) - \big(sin(\varphi_{10} - \varphi_{20}) + sin(\varphi_{10} - \varphi_{40}) + sin(\varphi_{20} - \varphi_{30}) + sin(\varphi_{30} - \varphi_{40})\big)sin(\chi t)cos^3(\chi t) + \big(1 + cos(\varphi_{20} - \varphi_{40})\big)sin^2(\chi t)cos^2(\chi t) - \big(1 + cos(\varphi_{10} - \varphi_{30})\big)cos^2(\chi t) + \big(sin(\varphi_{10} - \varphi_{20}) + sin(\varphi_{10} - \varphi_{40})\big)sin(\chi t)cos(\chi t) + 1\Big),$$

$$n_4 = 2n_0\Big(\big(1 + cos(\varphi_{20} - \varphi_{40})\big)cos^4(\chi t) + \big(sin(\varphi_{10} - \varphi_{20}) + sin(\varphi_{10} - \varphi_{40}) + sin(\varphi_{20} - \varphi_{30}) + sin(\varphi_{30} - \varphi_{40})\big)sin(\chi t)cos^3(\chi t) + \big(1 + cos(\varphi_{10} - \varphi_{30})\big)sin^2(\chi t)cos^2(\chi t) - \big(1 + cos(\varphi_{20} - \varphi_{40})\big)cos^2(\chi t) - \big(sin(\varphi_{10} - \varphi_{20}) + sin(\varphi_{20} - \varphi_{30})\big)sin(\chi t)cos(\chi t) + 1\Big) \quad (5)$$

Проанализируем динамику системы при различных значениях начальных фаз в условиях начального равнозаселения бозе-атомами ям ловушки. Пусть $\varphi_{10} - \varphi_{20} = \varphi_{10} - \varphi_{30} = \varphi_{10} - \varphi_{40} = \varphi_{20} - \varphi_{30} = \varphi_{20} - \varphi_{40} = \varphi_{30} - \varphi_{40} = \frac{\pi}{2}$. Система уравнений (5) в этом случае упрощается, и записывается в виде:

$$n_1 = n_4 = n_0\big(1 + sin(4\chi t)\big),$$
$$n_2 = n_3 = n_0\big(1 - sin(4\chi t)\big), \quad (6)$$

Временная эволюция туннелирования бозе-атомов в ямах для этого случая представлена на рис. 3. Из рис. 3 видно, что динамика изменения со временем населённости ям четырёхъямной ловушки является периодической. Период колебаний в этом случае равен $\frac{\pi}{2}$. В моменты времени $t_m = \frac{\pi m}{4\chi}$ $(m = 0,1, \ldots)$ населённости в ямах становятся равными начальному значению плотности бозе-атомов: $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = n_0$. При этом в начальный момент времени плотности атомов в первой и четвёртой ямах ловушки увеличиваются за счёт уменьшения атомов в результате линейного туннелирования из второй и третьей ям. В момент времени $t_m = \frac{\pi m}{8\chi}$ $(m = 0,1, \ldots)$ плотности атомов в первой и четвёртой ямах становятся максимальными и равными $n_1 = n_4 = n_{max} = 2n_0$, а плотности атомов в третьей и во второй ямах соответственно равными $n_2 = n_3 = n_{min} = 0$.

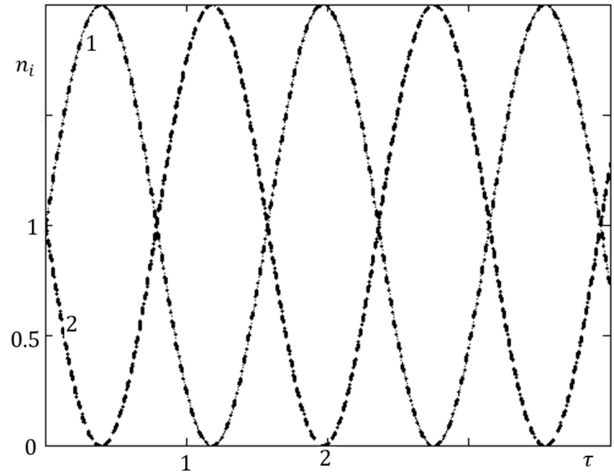

Рис. 3 / Fig. 3. Временная эволюция плотностей бозе-конденсированных атомов в ямах, в условиях, когда начальные разности фаз соответственно равны: $\boldsymbol{\varphi_{10} - \varphi_{20} = \varphi_{10} - \varphi_{30} = \varphi_{10} - \varphi_{40} = \varphi_{20} - \varphi_{30} = \varphi_{20} - \varphi_{40} = \varphi_{30} - \varphi_{40} = \frac{\pi}{2}}$. Здесь **1**- $\boldsymbol{n_1(t) = n_4(t)}$, **2**- $\boldsymbol{n_2(t) = n_3(t), \tau = \chi t}$. / Time evolution of the densities of Bose -condensed atoms in wells, under conditions when the initial phase differences are respectively equal: $\boldsymbol{\varphi_{10} - \varphi_{20} = \varphi_{10} - \varphi_{30} = \varphi_{10} - \varphi_{40} = \varphi_{20} - \varphi_{30} = \varphi_{20} - \varphi_{40} = \varphi_{30} - \varphi_{40} = \frac{\pi}{2}}$. **Here 1**- $\boldsymbol{n_1(t) = n_4(t)}$, **2**- $\boldsymbol{n_2(t) = n_3(t), \tau = \chi t}$.

Источник: данные авторов

Если $\varphi_{10}-\varphi_{20}=\varphi_{10}-\varphi_{30}=\varphi_{10}-\varphi_{40}=\varphi_{20}-\varphi_{30}=\varphi_{20}-\varphi_{40}=\varphi_{30}-\varphi_{40}=0$ либо π, то система бозе-конденсированных атомов в четырёхъямной ловушке будет находиться в покое: $n_1(t)=n_2(t)=n_3(t)=n_4(t)=n_0=const$.

Однако, если $\varphi_{10}-\varphi_{20}=\varphi_{10}-\varphi_{30}=\varphi_{20}-\varphi_{30}=\pi$, а $\varphi_{10}-\varphi_{40}=\varphi_{20}-\varphi_{40}=\varphi_{30}-\varphi_{40}=0$, в этом случае система будет эволюционировать согласно (7):

$$n_1=n_3=n_0\left(1+sin^2(2\chi t)\right),$$
$$n_2=n_4=n_0cos^2(2\chi t). \tag{7}$$

Плотность атомов в первой (третьей) яме за всё время туннелирования атомов будет больше начальной плотности атомов в ямах n_0, в то время как плотность атомов во второй (четвёртой) яме будет находиться в пределах от нуля до n_0. К моменту времени $t_m=\frac{\pi(2m+1)}{4\chi}$ $(m=0,1,2\ldots)$ $n_1=n_3=n_{max}=2n_0$, а $n_2=n_4=n_{min}=0$, таким образом вторая и четвёртая ямы оказываются полностью пустыми, а первая и третья максимально заполненными. Колебания плотности бозе-атомов являются периодическими с периодом равным $\frac{\pi}{2}$ (рис. 4).

Временная эволюция изменится, если $\varphi_{10}-\varphi_{20}=\varphi_{10}-\varphi_{30}=\varphi_{20}-\varphi_{30}=0$, а $\varphi_{10}-\varphi_{40}=\varphi_{20}-\varphi_{40}=\varphi_{30}-\varphi_{40}=\frac{\pi}{2}$, решение системы уравнений (2), запишется в виде:

$$n_1=n_3=\frac{n_0\left(2+sin(4\chi t)-sin(2\chi t)\right)}{2},$$
$$n_2=\frac{n_0\left(sin^2(2\chi t)+2sin(2\chi t)-sin(4\chi t)+2\right)}{2},$$
$$n_4=\frac{n_0\left(sin^2(2\chi t)-sin(2\chi t)-sin(4\chi t)+2\right)}{2}. \tag{8}$$

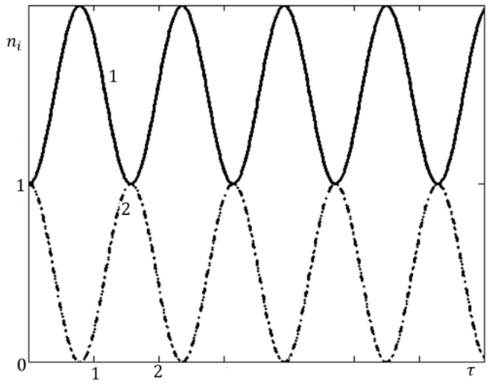

Рис. 4 / Fig. 4. Временная эволюция плотностей бозе-конденсированных атомов в ямах, в условиях, когда начальные разности фаз соответственно равны: $\boldsymbol{\varphi_{10}-\varphi_{20}=\varphi_{10}-\varphi_{30}=\varphi_{20}-\varphi_{30}=\pi}$, а $\boldsymbol{\varphi_{10}-\varphi_{40}=\varphi_{20}-\varphi_{40}=\varphi_{30}-\varphi_{40}=0}$. Здесь **1**- $\boldsymbol{n_1(t)=n_3(t)}$, **2**- $\boldsymbol{n_2(t)=n_4(t)}$, $\boldsymbol{\tau=\chi t}$. / Time evolution of the densities of Bose -condensed atoms in wells, under conditions when the initial phase differences are respectively equal: $\boldsymbol{\varphi_{10}-\varphi_{20}=\varphi_{10}-\varphi_{30}=\varphi_{20}-\varphi_{30}=\pi}$, end $\boldsymbol{\varphi_{10}-\varphi_{40}=\varphi_{20}-\varphi_{40}=\varphi_{30}-\varphi_{40}=0}$. Here **1**- $\boldsymbol{n_1(t)=n_3(t)}$, **2**- $\boldsymbol{n_2(t)=n_4(t)}$, $\boldsymbol{\tau=\chi t}$.

Источник: данные авторов

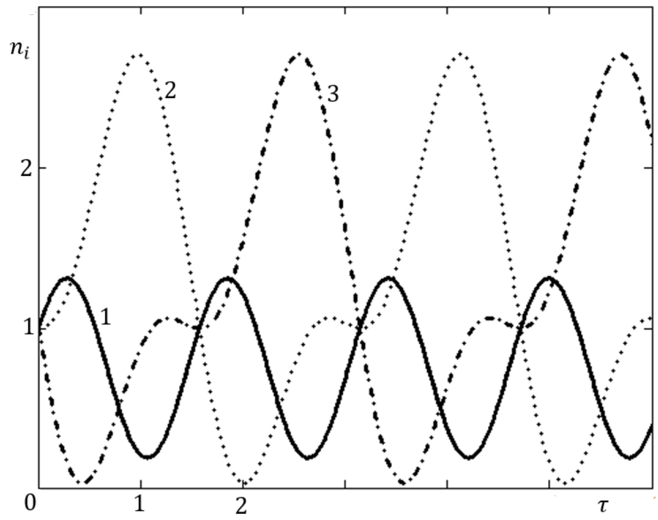

Рис. 5 / Fig. 5. Временная эволюция плотностей бозе-конденсированных атомов в ямах, в условиях, когда начальные разности фаз соответственно равны: $\boldsymbol{\varphi_{10} - \varphi_{20} = \varphi_{10} - \varphi_{30} = \varphi_{20} - \varphi_{30} = 0}$, а $\boldsymbol{\varphi_{10} - \varphi_{40} = \varphi_{20} - \varphi_{40} = \varphi_{30} - \varphi_{40} = \frac{\pi}{2}}$. Здесь $\boldsymbol{1}$- $\boldsymbol{n_1(t) = n_3(t)}$, $\boldsymbol{2}$- $\boldsymbol{n_2(t)}$, $\boldsymbol{3}$- $\boldsymbol{n_4(t)}$, $\boldsymbol{\tau = \chi t}$. / Time evolution of the densities of Bose -condensed atoms in wells, under conditions when the initial phase differences are respectively equal: $\boldsymbol{\varphi_{10} - \varphi_{20} = \varphi_{10} - \varphi_{30} = \varphi_{20} - \varphi_{30} = 0}$, end $\boldsymbol{\varphi_{10} - \varphi_{40} = \varphi_{20} - \varphi_{40} = \varphi_{30} - \varphi_{40} = \frac{\pi}{2}}$. Here $\boldsymbol{1}$- $\boldsymbol{n_1(t) = n_3(t)}$, $\boldsymbol{2}$- $\boldsymbol{n_2(t)}$, $\boldsymbol{3}$- $\boldsymbol{n_4(t)}$, $\boldsymbol{\tau = \chi t}$.

Источник: данные авторов

В этом случае, как видно из (8) и рис. 5, плотность атомов в первой и в третьей ямах четырёхъямной ловушки оказываются равными. Временная эволюция бозе-атомов в этих ямах является периодической с периодом равным $\frac{\pi}{2}$, причём полного истощения плотности атомов не возникает. В моменты времени $t_m = \frac{arccos\sqrt{\frac{5}{6}}+\frac{\pi}{2}(m+1)}{\chi}$ $(m = 0,1, ...)$ плотности атомов в первой и в третьей ямах становятся максимально возможными, причём $n_0 < n_1 = n_{1max} < \frac{3n_0}{2}$. В моменты времени $t_m = \frac{arccos\sqrt{\frac{5}{6}}+\frac{\pi}{4}(m+1)}{\chi}$ $(m = 0,1, ...)$ плотность атомов в первой и в третьей ямах является минимальной, причём $0 < n_1 = n_{1min} < \frac{n_0}{2}$. Что касается поведения атомов во второй и четвёртой ямах четырёхъямной ловушки, то временная эволюция бозе-атомов в этих ямах является периодической и модулированной в пределах одного периода. Плотность атомов во второй яме вначале увеличивается за счёт туннелирования атомов из четвёртой в первую яму, а затем при t > $t_m = \frac{\arccos\sqrt{\frac{5}{6}}+\pi m}{\chi}$ $(m = 0,1,\ldots)$ обогащается за счёт туннелирования атомов из третьей во вторую яму. В моменты времени $t_m = \frac{3\pi m}{10\chi}$ $(m = 1,2\ldots)$ плотность бозе-атомов во второй яме достигает максимального значения, лежащего в пределах $2n_0 < n_2 = n_{2max} < 3n_0$. В моменты времени $t_m = \frac{13\pi m}{20\chi}$ $(m = 1,2\ldots)$ плотность бозе-атомов во второй яме достигает минимального значения, лежащего в пределах $0 < n_2 = n_{2min} < 0{,}1n_0$, причём полного истощения атомов во второй яме не наступает. Что касается плотности атомов в четвёртой яме, динамика изменения является периодической и модулированной в пределах периода. В начальный момент времени плотность атомов в четвёртой яме уменьшается к моменту времени $t_m = \frac{3\pi m}{20\chi}$ $(m = 1,2\ldots)$ и становится минимально возможной $0 < n_4 = n_{4min} < 0{,}1n_0$. К моменту времени $t_m = \frac{4\pi m}{5\chi}$ $(m = 1,2\ldots)$ плотность бозе-атомов достигает своего максимального значения $2n_0 < n_4 = n_{4max} < 3n_0$. В моменты времени $t_m = \frac{\pi(2m+1)}{2\chi}$ $(m = 0,1,2\ldots)$ популяции бозе-атомов в ямах становятся равными начальному значению плотности атомов в ямах: $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = n_0$. В моменты времени $t_m = \frac{\pi(10m+1)}{10\chi}$ $(m = 0,1,2\ldots)$ популяция бозе-атомов во второй яме становится равной $n_1 = n_3$ и больше n_0. В моменты времени $t_m = \frac{\pi(4m+1)}{4\chi}$ $(m = 0,1,2\ldots)$ популяции бозе-атомов в первой, третьей и четвёртой ямах равны $n_1 = n_3 = n_4 = \frac{n_0}{2}$, а плотность атомов во второй яме равна $n_2 = \frac{5n_0}{2}$. Создаётся инверсная населённость второй и четвёртой ям в моменты времени $t_m = \frac{\pi(4m+3)}{4\chi}$ $(m = 0,1,2\ldots)$, таким образом популяции бозе-атомов в первой, третьей и во второй ямах $n_1 = n_3 = n_2 = \frac{n_0}{2}$, а плотность атомов в четвёртой яме равна $n_4 = \frac{5n_0}{2}$. К моменту времени $t_m = \frac{\pi(5m+3)}{5\chi}$ $(m = 0,1,2\ldots)$ плотность атомов в четвёртой яме равна плотности атомов в первой (третьей) яме: $n_4 = n_1 = n_3 > n_0$.

Если начальные разности фаз $\varphi_{10} - \varphi_{20} = \varphi_{10} - \varphi_{30} = \varphi_{20} - \varphi_{30} = \frac{\pi}{2}$, а $\varphi_{10} - \varphi_{40} = \varphi_{20} - \varphi_{40} = \varphi_{30} - \varphi_{40} = 0$, то эволюция системы бозе-атомов в четырёхъямной ловушке будет описываться системой уравнений (9):

$$n_1 = \frac{n_0\left(\sin^2(2\chi t)+2\sin(2\chi t)+2\right)}{2},$$
$$n_2 = n_4 = \frac{n_0(\cos(4\chi t)+3)}{4},$$
$$n_4 = \frac{n_0\left(\sin^2(2\chi t)-2\sin(2\chi t)+2\right)}{2} \qquad (9)$$

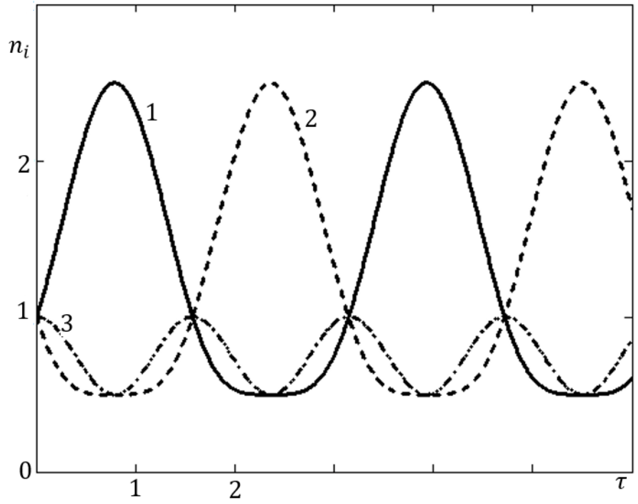

Рис. 6 / Fig. 6. Временная эволюция плотностей бозе-конденсированных атомов в ямах, в условиях, когда начальные разности фаз соответственно равны: $\boldsymbol{\varphi_{10} - \varphi_{20} = \varphi_{10} - \varphi_{30} = \varphi_{20} - \varphi_{30} = \frac{\pi}{2}}$, а $\boldsymbol{\varphi_{10} - \varphi_{40} = \varphi_{20} - \varphi_{40} = \varphi_{30} - \varphi_{40} = 0}$. Здесь **1**- $\boldsymbol{n_1(t)}$, **2**- $\boldsymbol{n_3(t)}$, **3**- $\boldsymbol{n_2(t) = n_4(t)}$, $\boldsymbol{\tau = \chi t}$. / Time evolution of the densities of Bose -condensed atoms in wells, under conditions when the initial phase differences are respectively equal: $\boldsymbol{\varphi_{10} - \varphi_{20} = \varphi_{10} - \varphi_{30} = \varphi_{20} - \varphi_{30} = \frac{\pi}{2}}$, end $\boldsymbol{\varphi_{10} - \varphi_{40} = \varphi_{20} - \varphi_{40} = \varphi_{30} - \varphi_{40} = 0}$. Here **1**- $\boldsymbol{n_1(t) = n_3(t)}$, **2**- $\boldsymbol{n_2(t)}$, **3**- $\boldsymbol{n_4(t)}$, $\boldsymbol{\tau = \chi t}$.

Источник: данные авторов

В этом случае, как видно из (9) и рис. 6, динамика системы является периодической. Причём населённости второй и четвёртой ямы в любой момент времени принимают одинаковые значения, период колебаний населённостей этих ям равен $\frac{\pi}{2}$. В начальный момент времени населённости второй, третьей и четвёртой ям уменьшаются, а населённость первой ямы увеличивается, и к моменту времени $t_m = \frac{\pi(4m+1)}{4\chi}$ $(m = 0,1,2 \ldots)$ становятся равными $n_2 = n_3 = n_4 = n_{min} = \frac{n_0}{2}$, а населённость первой ямы становится максимальной $n_1 = n_{1max} = \frac{5n_0}{2}$. Следует отметить, что полного истощения бозе-атомов в ямах не наступает, часть атомов захватываются одной из ям ловушки. Осцилляции населённостей становятся неполными, и проявляется явление квантового самохвата бозе-атомов в ямах четырёхямной ловушки. Что касается плотностей атомов во второй и четвёртой ямах, то она не превышает начального значения плотности бозе-атомов n_0. В моменты времени $t_m = \frac{3\pi(4m+1)}{4\chi}$ $(m = 0,1,2 \ldots)$ создаётся инверсная населённость первой и третьей ям: $n_2 = n_4 = n_1 = n_{min} = \frac{n_0}{2}$ и $n_3 = n_{3max} = \frac{5n_0}{2}$. В моменты времени $t_m = \frac{\pi m}{2\chi}$ $(m = 0,1,2 \ldots)$ популяции бозе-атомов в ямах становятся равными начальному значению плотности атомов в ямах: $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = n_0$.

Рассмотрим ещё один случай, когда $\varphi_{10} - \varphi_{20} = \varphi_{10} - \varphi_{30} = \varphi_{10} - \varphi_{40} = \varphi_{20} - \varphi_{30} = \varphi_{20} - \varphi_{40} = \varphi_{30} - \varphi_{40} = \frac{\pi}{4}$, тогда система (5), описывающая временную эволюцию бозе-конденсированных атомов в четырёхъямной ловушке, перепишется в виде:

$$n_1 = \frac{n_0\left(2\sqrt{2}sin(2\chi t) + \sqrt{2}sin(4\chi t) + 4\right)}{4},$$
$$n_2 = \frac{n_0\left(2\sqrt{2}sin(2\chi t) - \sqrt{2}sin(4\chi t) + 4\right)}{4},$$
$$n_3 = \frac{n_0\left(\sqrt{2}sin(4\chi t) - 2\sqrt{2}sin(2\chi t) + 4\right)}{4},$$
$$n_4 = -\frac{n_0\left(2\sqrt{2}sin(2\chi t) + \sqrt{2}sin(2\chi t) - 4\right)}{4}. \qquad (10)$$

В этом случае в моменты времени $t_m = \frac{\pi m}{2\chi}$ $(m = 0,1,2 \ldots)$ популяции бозе-атомов в ямах становятся равными начальному значению плотности атомов в ямах: $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = n_0$. В начальный момент времени плотность атомов в третьей и четвёртой ямах уменьшаются, а плотности атомов в первой и второй ямах увеличиваются. Колебания популяций бозе-частиц являются модулированными в пределах одного периода. В моменты времени $t_m = \frac{\pi(6m+1)}{6\chi}$ $(m = 0,1,2 \ldots)$ плотность атомов в первой яме достигает своего максимального значения $n_{1max} = \frac{n_0(3\sqrt{6}+8)}{8} > n_0$, а плотность атомов в четвёртой яме своего минимального значения $n_{4min} = \frac{n_0(8-3\sqrt{6})}{8} < n_0$. В моменты времени $t_m = \frac{\pi(3m+1)}{3\chi}$ $(m = 0,1,2 \ldots)$ плотность атомов во второй яме достигает своего максимального значения $n_{2max} = \frac{n_0(3\sqrt{6}+8)}{8} > n_0$, а плотность атомов в третьей яме своего минимального значения $n_{3min} = \frac{n_0(8-3\sqrt{6})}{8} < n_0$. Таким образом, в моменты времени $t_m = \frac{\pi(6m+1)}{6\chi}$ и $t_m = \frac{\pi(3m+1)}{3\chi}$ создаётся в системе инверсная населённость в первой и во второй ямах, а также в четвёртой и третьей ямах четырёхъямной ловушки. К моменту времени $t_m = \frac{\pi(4m+1)}{4\chi}$ плотность атомов в первой и второй ямах оказываются равными $n_1 = n_2 = \frac{n_0(\sqrt{2}+2)}{2} > n_0$, а плотность атомов в третьей и в четвёртой $n_3 = n_4 = \frac{n_0(2-\sqrt{2})}{2} < n_0$ (см. рис. 7).

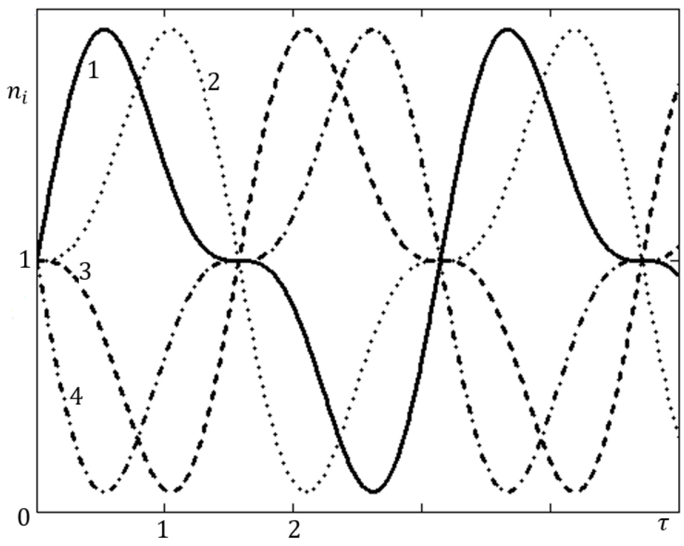

Рис. 7 / Fig. 7. Временная эволюция плотностей бозе-конденсированных атомов в ямах, в условиях, когда начальные разности фаз соответственно равны: $\boldsymbol{\varphi_{10} - \varphi_{20} = \varphi_{10} - \varphi_{30} = \varphi_{10} - \varphi_{40} = \varphi_{20} - \varphi_{30} = \varphi_{20} - \varphi_{40} = \varphi_{30} - \varphi_{40} = \frac{\pi}{4}}$. Здесь **1**- $\boldsymbol{n_1(t)}$, **2**- $\boldsymbol{n_2(t)}$, **3**-$\boldsymbol{n_3(t)}$, **4**-$\boldsymbol{n_4(t)}, \boldsymbol{\tau = \chi t}$. / Time evolution of the densities of Bose -condensed atoms in wells, under conditions when the initial phase differences are respectively equal: $\boldsymbol{\varphi_{10} - \varphi_{20} = \varphi_{10} - \varphi_{30} = \varphi_{10} - \varphi_{40} = \varphi_{20} - \varphi_{30} = \varphi_{20} - \varphi_{40} = \varphi_{30} - \varphi_{40} = \frac{\pi}{4}}$. Here **1**- $\boldsymbol{n_1(t) = n_3(t)}$, **2**- $\boldsymbol{n_2(t)}$, **3**- $\boldsymbol{n_4(t)}$, $\boldsymbol{\tau = \chi t}$.

Источник: данные авторов

Если задать начальные разности фаз такие, когда $\varphi_{10} - \varphi_{20} = \varphi_{10} - \varphi_{30} = \varphi_{20} - \varphi_{30} = \frac{\pi}{4}$, а $\varphi_{10} - \varphi_{40} = \varphi_{20} - \varphi_{40} = \varphi_{30} - \varphi_{40} = 0$, тогда система (5), описывающая временную эволюцию туннелирования бозе-конденсированных атомов в четырёхъямной ловушке, запишется в виде:

$$n_1 = \frac{n_0\left(2\sqrt{2}sin(2\chi t) + sin^2(2\chi t)\left(2-\sqrt{2}\right)+4\right)}{4},$$
$$n_2 = n_4 = \frac{n_0\left(cos(4\chi t)\left(2-\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}+6\right)}{4},$$
$$n_3 = \frac{n_0\left(-2\sqrt{2}sin(2\chi t) + sin^2(2\chi t)\left(2-\sqrt{2}\right)+4\right)}{4}. \quad (11)$$

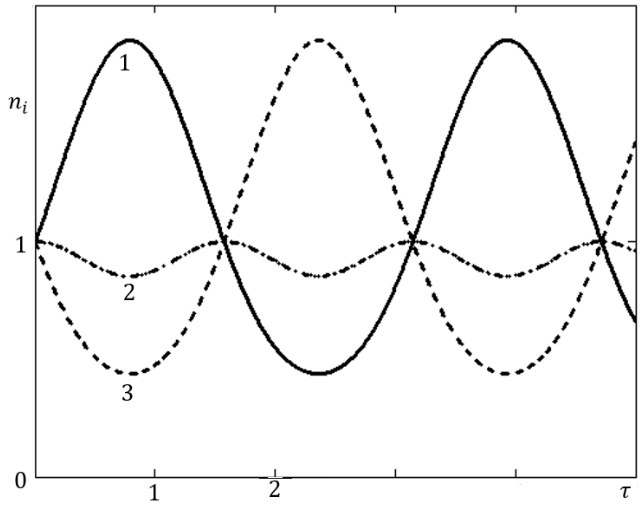

Рис. 8 / Fig. 8. Временная эволюция плотностей бозе-конденсированных атомов в ямах, в условиях, когда начальные разности фаз соответственно равны: $\boldsymbol{\varphi_{10} - \varphi_{20} = \varphi_{10} - \varphi_{30} = \varphi_{20} - \varphi_{30} = \frac{\pi}{4}}$, а $\boldsymbol{\varphi_{10} - \varphi_{40} = \varphi_{20} - \varphi_{40} = \varphi_{30} - \varphi_{40} = 0}$. Здесь **1**- $\boldsymbol{n_1(t)}$, **2**- $\boldsymbol{n_2(t) = n_4(t)}$, **3**-$\boldsymbol{n_3(t), \tau = \chi t}$. / Time evolution of the densities of Bose-condensed atoms in wells, under conditions when the initial phase differences are respectively equal: $\boldsymbol{\varphi_{10} - \varphi_{20} = \varphi_{10} - \varphi_{30} = \varphi_{20} - \varphi_{30} = \frac{\pi}{4}}$, **and** $\boldsymbol{\varphi_{10} - \varphi_{40} = \varphi_{20} - \varphi_{40} = \varphi_{30} - \varphi_{40} = 0}$. Here **1**- $\boldsymbol{n_1(t)}$, **2**- $\boldsymbol{n_2(t) = n_4(t)}$, **3**-$\boldsymbol{n_3(t), \tau = \chi t}$.

Источник: данные авторов

В этом случае плотность атомов изменяется со временем периодически (рис. 8). Период колебаний n_2 и n_4 равен $\frac{\pi}{2}$, а n_1 и n_3 равен π. В начальный момент времени плотность бозе-атомов в первой ловушке увеличивается, в то время как плотности атомов в остальных ямах уменьшаются. К моменту времени $t_m = \frac{\pi(4m+1)}{4\chi}$ плотность атомов в первой яме становится равной максимально возможной $n_1 = n_{1max} = \frac{n_0(\sqrt{2}+6)}{4}$, а плотности атомов в остальных ямах минимально возможными $n_2 = n_4 = n_{min} = \frac{n_0(\sqrt{2}+2)}{4} < n_0$, а $n_3 = n_{3min} = \frac{3n_0(2-\sqrt{2})}{4} < n_0$. В моменты времени $t_m = \frac{\pi(4m+3)}{4\chi}$ создаётся инверсная населённость первой и третьей ям: $n_3 = n_{3max} = \frac{n_0(\sqrt{2}+6)}{4}$ и $n_1 = n_{1min} = \frac{3n_0(2-\sqrt{2})}{4} < n_0$. Если $t_m = \frac{\pi m}{2\chi}$ ($m = 0,1,2 ...$), то плотности бозе-атомов во всех четырёх ямах становятся равными начальному значению плотности атомов в ямах: $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = n_0$. Полного истощения бозе-атомов в ямах ловушки в процессе временной эволюции не наблюдается, т. е. атомы захватываются ловушкой и проявляется явление квантового самозахвата.

Заключение

Таким образом, изменяя начальную разность фаз четырёх атомных конденсатов, можно получить различные режимы эволюции системы. В найденные моменты временной эволюции можно получить различные соотношения между населённостями атомов в ямах: максимальное и минимальное заполнение ям бозе-атомами, создание инверсной населённости бозе-атомов в ямах. Получены периодические режимы эволюции атомов, модулированные колебания плотности атомов, явление квантового самозахвата. Задавая необходимую начальную разность фаз, можно получить заданную наперёд динамику плотности атомов в ямах, т. е. осуществить фазовый контроль динамики системы бозе-конденсированных атомов в четырёхъямной ловушке.

Впервые разность фаз двух конденсатов была измерена интерферометрическим методом. В [19] предложена оптическая схема детектирования относительной фазы двух бозе-эйнштейновских конденсатов, которые находятся в одной и той же ловушке в двух различных зеемановских состояниях. Для возбуждения рамановских переходов между конденсатами предлагалось использовать два фазово-когерентных луча. Усиление одного из лучей и ослабление другого может быть признаком существования фазовой когерентности атомов. Используя «метод впечатывания фазы» [20], можно задавать необходимую начальную разность фаз и осуществлять фазовый контроль динамики бозе-конденсированных атомов, получая наперёд заданные значения плотностей атомов в ямах.

Статья поступила в редакцию 01.06.2023 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Khadzhi P. I., Vasilieva O. V. Coherent dynamics of Bose-condensed atoms in a double-well trap // Journal of Nanoelectronics and Optoelectronics. 2011. Vol. 6. No. 4. P. 433–451. DOI: 10.1166/jno.2011.1194.
2. Jezek D. M., Capuzzi P., Cataldo H. M. Two-mode effective interaction in a double-well condensate // Physical Review A. 2013. Vol. 87. Iss. 5. P. 053625. DOI: 10.1103/PhysRevA.87.053625.
3. Adriazola J., Goodman R. H., Kevrekidis P. G. Efficient manipulation of Bose-Einstein condensates in a double-well potential (2022). arXiv:2206.01858v2 // arXiv.org: e-Print archive. URL: https://arxiv.org/abs/2206.01858 (дата обращения: 12.04.2023).
4. Holthaus M. Towards coherent control of a Bose-Einstein in a double well // Physical Review A. 2001. Vol. 64. Iss. 1. P. 011601(R).
5. Ma D., Jia C. Square wave oscillation of soliton in double-well potential trapped BEC (2019). arXiv:1903.00141 // arXiv.org: e-Print archive. URL: https://arxiv.org/abs/1903.00141 (дата обращения: 12.04.2023).

6. The effects of trap-confinement and interatomic interaction on Josephson effects and macroscopic quantum self-trapping for a Bose-Einstein condensate / Saha A. K., Adhikary K., Mal S., Dastidar K.R., Deb B. // Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics. 2019. Vol. 52. No. 15. P. 155301. DOI: 10.1088/1361-6455/ab2b58.
7. Dastidar K. R., Gupta M. Dynamics of dipolar atom-molecular BEC in a double well potential: effect of atom-molecular coherent coupling (2021). arXiv:2106.12274v1 // arXiv.org: e-Print archive. URL: https://arxiv.org/abs/2106.12274 (дата обращения: 12.04.2023).
8. Васильева О. Ф., Зинган А. П. Временная эволюция бозе-конденсированных атомов в трёхъямной симметричной цепочной ловушке // Вестник Московского государственного университета. Серия: Физика-Математика. 2021. № 1. С. 27–38. DOI: 10.18384/2310-7251-2021-1-27-38.
9. Васильева О. Ф., Зинган А. П. Временная эволюция бозе-конденсированных атомов в трёхъямной ловушке, при условии отличной от нуля начальной заселенности первой ямы // Вестник Московского государственного университета. Серия: Физика-Математика. 2022. № 2. С. 28–41. DOI: 10.18384/2310-7251-2022-2-28-41.
10. Self-trapping and tunneling of Bose-Einstein condensates in a cavity-mediated triple-well system / Wang B., Zhang H., Chen Y., Tan L. // The European Physical Journal D. 2017. Vol. 71. P. 56. DOI: 10.1140/epjd/e2017-70647-3.
11. Dey A., Cohen D., Vardi A. Adiabatic Passage through Chaos // Physical Review Letters. 2018. Vol. 121. Iss. 25. P. 250405. DOI: 10.1103/PhysRevLett.121.250405.
12. Entangled states of dipolar bosons generated in a triple-well potential / Tonel A. P., Ymai L. H., Wittmann K., Foerster A., Links J. // SciPost Physics Core. 2020. Vol. 2. P. 003. DOI: 10.21468/SciPostPhysCore.2.1.003.
13. Optimal conditions for spatial adiabatic passage of a Bose-Einstein condensate / Rubio J. L., Ahufinger V., Busch Th., Mompart J. // Physical Review A. 2016. Vol. 94. Iss. 5. P. 053606. DOI: 10.1103/PhysRevA.94.053606.
14. Stickney J. A., Anderson D. Z., Zozulya A. A. Transistor like behavior of a Bose-Einstein condensate in a triple-well potential // Physical Review A. 2007. Vol. 75. Iss. 1. P. 013608. DOI: 10.1103/PhysRevA.75.013608.
15. Control of tunneling in an atomtronic switching device / Wilsmann K. W., Ymai L. H., Tonel A. P., Links J., Foerster A. // Communications Physics. 2018. Vol. 1. P. 91. DOI: 10.1038/s42005-018-0089-1.
16. Transport and interaction blockade of cold bosonic atoms in a triple-well potential / Schlagheck P., Malet F., Cremon J. C., Reimann S. M. // New Journal of Physics. 2010. Vol. 12. P. 065020. DOI: 10.1088/1367-2630/12/6/065020.
17. Karmakar S., Keshavamurthy S. Arnold web and dynamical tunneling in a four-site Bose-Hubbard model // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2021. Vol. 427. P. 133006. DOI: 10.1016/j.physd.2021.133006.
18. Khripkov C., Vardi A., Coher D. Semiclassical theory of strong localization for quantum thermalization // Physical Review E. 2018. Vol. 97. Iss. 2. P. 022127. DOI: 10.1103/PhysRevE.97.022127.
19. Javanainen J. Optical detection of the relative phase between two Bose-Einstein condensates // Physical Review A. 1996. Vol. 54. Iss. 6. P. R4629. DOI: 10.1103/PhysRevA.54.R4629.
20. Producing superfluid circulation states using phase imprinting / Kumar A., Dubessy R., Badr T., De Rossi C., De Goer M., Longchambon L., Perrin H. // Physical Review A. 2018. Vol. 97. Iss. 4. P. 043615. DOI: 10.1103/PhysRevA.97.043615.

REFERENCES

1. Khadzhi P. I., Vasilieva O. V. Coherent dynamics of Bose-condensed atoms in a double-well trap. In: *Journal of Nanoelectronics and Optoelectronics*, 2011, vol. 6, no. 4, pp. 433–451. DOI: 10.1166/jno.2011.1194.
2. Jezek D. M., Capuzzi P., Cataldo H. M. Two-mode effective interaction in a double-well condensate. In: *Physical Review A*, 2013, vol. 87, iss. 5, pp. 053625. DOI: 10.1103/PhysRevA.87.053625.
3. Adriazola J., Goodman R. H., Kevrekidis P. G. Efficient manipulation of Bose-Einstein condensates in a double-well potential (2022). arXiv:2206.01858v2. In: *arXiv.org: e-Print archive*. Available at: https://arxiv.org/abs/2206.01858 (accessed: 12.04.2023).
4. Holthaus M. Towards coherent control of a Bose-Einstein in a double well. In: *Physical Review A*, 2001, vol. 64, iss. 1, pp. 011601(R).
5. Ma D., Jia C. Square wave oscillation of soliton in double-well potential trapped BEC (2019). arXiv:1903.00141. In: *arXiv.org: e-Print archive*. Available at: https://arxiv.org/abs/1903.00141 (accessed: 12.04.2023).
6. Saha A. K., Adhikary K., Mal S., Dastidar K.R., Deb B. The effects of trap-confinement and interatomic interaction on Josephson effects and macroscopic quantum self-trapping for a Bose-Einstein condensate. In: *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, 2019, vol. 52, no. 15, pp. 155301. DOI: 10.1088/1361-6455/ab2b58.
7. Dastidar K. R., Gupta M. Dynamics of dipolar atom-molecular BEC in a double well potential: effect of atom-molecular coherent coupling (2021). arXiv:2106.12274v1. In: *arXiv.org: e-Print archive*. Available at: https://arxiv.org/abs/2106.12274 (accessed: 12.04.2023).
8. Vasil'yeva O. F., Zingan A. P. [Temporary evolution of bose-condensed atoms in a three-well symmetric chain trap]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika-Matematika* [Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], 2021, no. 1, pp. 27–38. DOI: 10.18384/2310-7251-2021-1-27-38.
9. Vasil'yeva O. F., Zingan A. P. [Time evolution of Bose-condensed atoms in a three-well trap under the condition of a non-zero initial population of the first well]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika-Matematika* [Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], 2022, no. 2, pp. 28–41. DOI: 10.18384/2310-7251-2022-2-28-41.
10. Wang B., Zhang H., Chen Y., Tan L. Self-trapping and tunneling of Bose-Einstein condensates in a cavity-mediated triple-well system. In: *The European Physical Journal D*, 2017, vol. 71, pp. 56. DOI: 10.1140/epjd/e2017-70647-3.
11. Dey A., Cohen D., Vardi A. Adiabatic Passage through Chaos. In: *Physical Review Letter*s, 2018, vol. 121, iss. 25, pp. 250405. DOI: 10.1103/PhysRevLett.121.250405.
12. Tonel A. P., Ymai L. H., Wittmann K., Foerster A., Links J. Entangled states of dipolar bosons generated in a triple-well potential. In: *SciPost Physics Core*, 2020, vol. 2, pp. 003. DOI: 10.21468/SciPostPhysCore.2.1.003.
13. Rubio J. L., Ahufinger V., Busch Th., Mompart J. Optimal conditions for spatial adiabatic passage of a Bose-Einstein condensate. In: *Physical Review A*, 2016, vol. 94, iss. 5, pp. 053606. DOI: 10.1103/PhysRevA.94.053606.
14. Stickney J. A., Anderson D. Z., Zozulya A. A. Transistor like behavior of a Bose-Einstein condensate in a triple-well potential. In: *Physical Review A*, 2007, vol. 75, iss. 1, pp. 013608. DOI: 10.1103/PhysRevA.75.013608.

15. Wilsmann K. W., Ymai L. H., Tonel A. P., Links J., Foerster A. Control of tunneling in an atomtronic switching device. In: *Communications Physics*, 2018, vol. 1, pp. 91. DOI: 10.1038/s42005-018-0089-1.
16. Schlagheck P., Malet F., Cremon J. C., Reimann S. M. Transport and interaction blockade of cold bosonic atoms in a triple-well potential. In: *New Journal of Physics*, 2010, vol. 12, pp. 065020. DOI: 10.1088/1367-2630/12/6/065020.
17. Karmakar S., Keshavamurthy S. Arnold web and dynamical tunneling in a four-site Bose-Hubbard model. In: *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2021, vol. 427, pp. 133006. DOI: 10.1016/j.physd.2021.133006.
18. Khripkov C., Vardi A., Coher D. Semiclassical theory of strong localization for quantum thermalization. In: *Physical Review E*, 2018, vol. 97, iss. 2, pp. 022127. DOI: 10.1103/PhysRevE.97.022127.
19. Javanainen J. Optical detection of the relative phase between two Bose-Einstein condensates. In: *Physical Review A*, 1996, vol. 54, iss. 6, pp. R4629. DOI: 10.1103/PhysRevA.54.R4629.
20. Kumar A., Dubessy R., Badr T., De Rossi C., De Goer M., Longchambon L., Perrin H. Producing superfluid circulation states using phase imprinting. In: *Physical Review A*, 2018, vol. 97, iss. 4, pp. 043615. DOI: 10.1103/PhysRevA.97.043615.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Васильева Ольга Федоровна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры квантовой радиофизики и систем связи Приднестровского государственного университета имени Т. Г Шевченко;
e-mail: florina_of@mail.ru;

Зинган Анна Петровна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры квантовой радиофизики и систем Приднестровского государственного университета имени Т. Г. Шевченко;
e-mail: zingan.anna@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Olga F. Vasilieva – Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Prof., Department of Quantum Radiophysics and Communication Systems, Pridnestrovian State University;
e-mail: florina_of@mail.ru;

Anna P. Zingan – Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Prof., Department of Quantum Radiophysics and Communication Systems, Pridnestrovian State University;
e-mail: zingan.anna@mail.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Васильева О. Ф., Зинган А. П. Временная эволюция туннелирования бозе-конденсированных атомов в четырёхъямной ловушке при условии начального равнозаселения ям ловушки // Вестник Государственного университета просвещения. Серия: Физика-Математика. 2023. № 3. С. 15–32.
DOI: 10.18384/2949-5067-2023-3-15-32

FOR CITATION

Vasilieva O. F., Zingan A. P. Temporal evolution of tunneling of bose-condensed atoms in a quadrupole trap under the condition of initial equipopulation of trap pits. In: *Bulletin of State University of Education. Series: Physics and Mathematics*, 2023, no. 3, pp. 15–32.
DOI: 10.18384/2949-5067-2023-3-15-32

УДК 3937
DOI: 10.18384/2949-5067-2023-3-33-42

МЕТОДЫ КОНТРОЛЯ ТОЛЩИНЫ ЭПИТАКСИАЛЬНОГО СЛОЯ КРЕМНИЯ

Захарова Т. И.

Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы
117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Российская Федерация

Аннотация
Цель. Обзор разрушающих и неразрушающих методов контроля толщины эпитаксиального слоя кремния (Si). Определение параметров тонкой плёнки является важной задачей для физики конденсированного состояния. Приведены современные способы контроля, такие как сферический шлиф, эллипсометрия и ИК-Фурье спектрометрия, слабо представленные в научной литературе.
Процедура и методы. Проанализирован практический опыт и изложены основные результаты.
Результаты. Обобщены основные подходы к определению толщины эпитаксиальных слоёв.
Теоретическая значимость заключается в углублённом рассмотрении метода определения толщины эпитаксиальной плёнки Si и глубины залегания p-n перехода сферическим шлифом.
Ключевые слова: кремний, эпитаксиальный слой, метод контроля, ИК-Фурье спектрометрия, сферический шлиф, эллипсометрия

METHODS FOR CONTROLLING THE THICKNESS OF THE EPITAXIAL SILICON LAYER

T. Zakharova

Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba
ulitsa Miklukho-Maklaya 6, Moscow 117198, Russian Federation
Abstract
Aim. Review of destructive and non-destructive methods for controlling the thickness of the epitaxial silicon layer (Si). The determination of thin film parameters is an important problem for condensed matter physics. Modern methods of control, such as spherical slot, ellipsometry and IR-Fourier spectrometry, which are poorly represented in the scientific literature, are given.
Methodology. Practical experience is analyzed and the main results are presented.
Results. The main approaches to determining the thickness of epitaxial layers are summarized.
Research implications. A method for determining the thickness of the Si epitaxial film and the depth of the p–n junction with a spherical strip is considered in depth.
Keywords: control method, IR-Fourier spectrometry, spherical slot, ellipsometry, epitaxial layer, silicon

Введение

Для производства электронных компонентов таких, как диоды, транзисторы, полупроводниковые лазеры, используются эпитаксиальные структуры. Важно знать основные параметры структур, чтобы конструировать на их основе качественные приборы. К основным характеристикам эпитаксиальных пластин относят толщину эпитаксиального слоя, удельное сопротивление, линии скольжения, дефекты упаковки и крупные дефекты. Наиболее важными параметрами для физиков и технологов является толщина и удельное сопротивление эпитаксиального слоя; именно от этих параметров зависит выбор режимов в последующих операциях. Для определения толщины эпитаксиального слоя кремния используют разрушающие и неразрушающие методы, такие как: сферический шлиф, ИК-Фурье спектрометрия, эллипсометрия. У каждого метода измерения есть свои особенности и ограничения, которые рассмотрены ниже. Ряд факторов определяют выбор метода контроля: степень разрушающего воздействия, точность измерений, свойства материала.

Исследование эпитаксиальных структур является одним из векторов развития физики конденсированного состояния. Появились и стали доступны более совершенные детекторы инфракрасного диапазона спектра, которые лежат в основе подавляющего большинства приборов, измеряющих толщину эпитаксиального слоя кремния. С помощью них можно контролировать толщину с высокой точностью. Создаются математические модели, которые дают меньшую погрешность измерений.

Сферический шлиф

Данным методом можно определять не только толщину наращенного слоя, но и величину диффузионных слоёв. Сферический шлиф относится к разрушающему методу контроля. Методика измерений заключается в следующем. На установке по изготовлению сферического шлифа делается шар-шлиф. Диаметр шара зависит от конструкции установки и от толщины структуры [1]. На шар кладётся небольшое количество алмазной пасты, которая и будет являться материалом, осуществляющим шлифовку, затем пластину или её осколок крепят на столик (может быть как вакуумное крепление, так и с помощью клеящих материалов). Следующий шаг – установка столика с пластиной на шар с абразивным материалом в точку, где планируется будущая лунка, затем следует включение механизма вращения шара. Время шлифовки зависит от скорости вращения и толщины эпитаксиального или диффузионного слоя. Контроль диффузионного слоя проводится по залеганию p-n перехода. После проведения процедуры происходит окрашивание шлифа, если металлургическая граница не имеет выраженного контраста. Химическое окрашивание требуется для визуализации границы p-n перехода или эпитаксиального слоя с подложкой. Существует несколько составов для химического окрашивания сферического шлифа в зависимости от исследуемого материала и типа структуры.

Для эпитаксиальных структур, имеющих переход типа n-p или p-n, рекомендовано использовать травитель на основе плавиковой кислоты (HF) с добавлением азотной (HNO_3); концентрация азотной кислоты совсем маленькая, достаточно нескольких капель. Этот раствор быстро становится непригодным, срок его годности составляет 10–15 суток. Существенным недостатком является наличие радужных переливов на шлифе, что затрудняет определение границы раздела двух типов проводимости. Чтобы этого избежать используют чистую плавиковую кислоту и освещение лунки. Для эпитаксиальных структур типа $n\text{-}n^+$ и $p\text{-}p^+$ химический проявитель имеет другой состав: плавиковая кислота + перекись водорода в соотношении 2 к 1. Для этого же типа структур можно применить раствор для окраски на основе плавиковой кислоты с добавлением азотной кислоты и нескольких капель азотнокислого серебра ($AgNO_3$). Существуют также уже готовые многокомпонентные травители, пример такого – травитель Райта. Им можно травить любой тип кремниевой структуры.

После проявления границ раздела идёт определение толщины эпитаксиального или диффузионного слоя. Для этого структуру со шлифом помещают под микроскоп со специальным окуляром, имеющим шкалу. Оператор подсчитывает количество делений, составляющих хорду, проведённую по касательной к внутренней окружности. Границей внутренней окружности является, либо p-n переход, либо граница слой – подложка, либо диффузионный слой [2]. Затем по этим данным по формуле (1) определяется толщина эпитаксиального слоя. Длину хорды также можно определить с помощью современных оптических микроскопов, имеющих встроенные инструменты. На рис. 1 изображён сферический шлиф с обозначенной хордой, диаметр шара 150 мм, для окраса использовался травитель Райта, фотография получена с помощью оптического микроскопа.

$$h = \frac{l^2 * k^2}{4 * D}, \quad (1)$$

где h – толщина эпитаксиального слоя, l – длина хорды, k – цена деления окуляр-микрометра, D – диаметр шара.

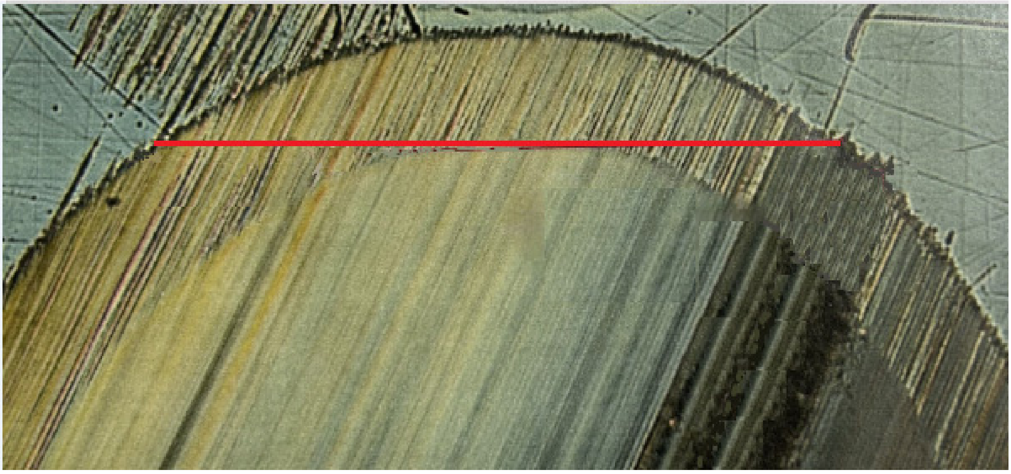

Рис. 1 / Fig. 1. Фотография сферического шлифа на пластине эпитаксиального кремния, сделанная с помощью оптического микроскопа / A photograph of a spherical slot on an epitaxial silicon wafer taken with an optical microscope

Источник: данные автора

Существует ещё один способ определения толщины эпитаксиального слоя кремния h с помощью сферического шлифа, для расчёта по формуле (2) потребуется измерить диаметр лунки D_1 и диаметр вписанной концентрической окружности D_2, которая соответствует границе раздела контролируемого слоя с последующим слоем. В расчёте также участвует диаметр сферического шлифа D [1]. На рис. 2 показана схема измерения сферического шлифа.

$$h = \frac{D_1^2 - D_2^2}{4 * D}, \tag{2}$$

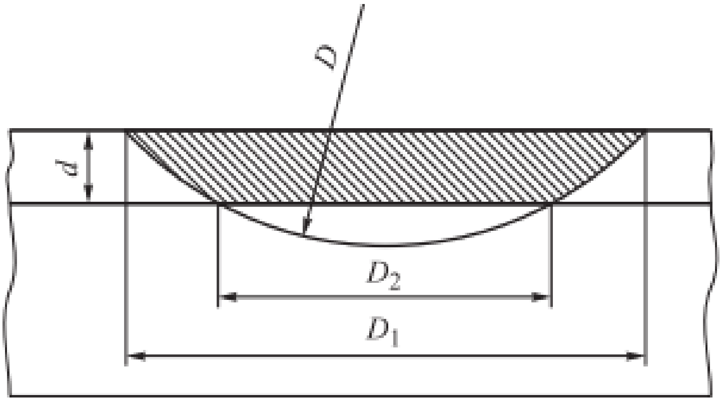

Рис. 2 / Fig. 2. Схема определения толщины эпитаксильного слоя по формуле (2) / Scheme for determining the thickness of the epitaxial layer according to the formula (2)

Источник: [1, с. 33].

Основным недостатком данного метода является погрешность измерения, связанная с человеческим фактором. Ограниченность применения метода сферического шлифа обусловлена контрастностью проявления слоёв. Для образования границы, структура должна быть разнотипная (n-p или p-n) или разница в концентрации легирующей примеси в слоях должна составлять несколько порядков для однотипных структур (n-n и p-p). Также погрешность измерений может возникать из-за несферичности шлифа. Измерения данным методом трудоёмки и занимают много времени. Сферический шлиф является основным промышленным методом контроля толщины эпитаксиальных плёнок кремния.

Достоинствами метода является – простота, дешевизна установки, возможность контролировать однородность толщины слоя.

Эллипсометрия

Этот оптический метод определения толщины эпитаксиального слоя–имеет высокую точность. Относится к неразрушающим методам контроля. Эллипсометрия подходит для измерения только оптически прозрачных плёнок, кремний прозрачен для излучения в диапазоне примерно от 1,5 до 25 мкм. Метод является непростым и не подходит для входного контроля на производстве. Снятие спектра на эллипсометре не составит труда, а для расшифровки его потребуется специалист. Использования данного метода подходит для лабораторных исследований тонких плёнок.

Основными элементами эллипсометра являются источник излучения с поляризатором, гониометр, анализатор и координатный столик. В эллипсометрии измеряют изменение поляризации при отражении света от структуры материала или его прохождении через неё. Изменение поляризации представлено в виде двух компонент – амплитуд и разности фаз. Измеряемый отклик зависит от оптических свойств и толщины каждого материала.

Поскольку эллипсометрия основана на соотношении двух измеренных величин, она очень точна и воспроизводима. Метод относительно нечувствителен к рассеянию и флуктуациям, также не требует постоянной калибровки с использованием эталонного образца [3]. С помощью эллипсометрии можно определить показатель преломления, коэффициент поглощения и толщину слоя. Есть возможность измерять отдельные слои или даже сложные многослойные структуры толщиной от десятков ангстрем. Метод также применим для характеристики состава, кристалличности, шероховатости, концентрации легирующего вещества и других свойств материала, связанных с изменением оптического отклика [4; 5]. К преимуществам метода относится быстрота измерений, возможность интегрировать данный метод в ростовой процесс. Эллипсометрия не боится высоких температур, вакуума и агрессивных сред.

С помощью эллипсометрии проводятся измерения оптических свойств тонких плёнок аморфного кремния, нанесённого на стекло [6]. Авторы статьи

[7] смогли разрешить проблему измерения толщины плёнок кремнезема на прозрачных подложках методом спектрально-интерференционной эллипсометрии, точность определения параметра превысила 1 нм. В процессе изготовления интегральных схем диоксид кремния образуется на кремниевой пластине для предотвращения диффузии примесей. Толщина слоя имеет решающее значение для последующего процесса легирования и производительности схемы. Кроме того, в процессе экспонирования в литографической машине точное измерение толщины плёнки позволяет подобрать режимы и повысить чувствительность литографии. Поэтому работа имеет высокую практическую ценность и теоретический вклад в развитие физики конденсированного состояния. В статье [8] методом ИК-эллипсометрии изучают тонкие плёнки кремния (5–12 нм) на границе раздела кремний-жидкость.

Основными недостатками метода являются сложность интерпретации результатов измерений и подбор модели отражающей системы. На рынке представлен широкий выбор приборов с автоматическим программным обеспечением, которое помогает ускорить время интерпретации результатов.

Чаще всего эллипсометрию комбинируют с другими методами исследования, более подробно это рассматривается в статьях [9;10].

ИК-Фурье спектрометрия

В инфракрасном диапазоне длин волн нашли распространение интерференционные спектрометры с преобразованием Фурье. С помощью данного метода, являющегося неразрушающим, можно определить металлургическую толщину эпитаксиального слоя кремния на подложках из сапфира или кремния. Получение оптического спектра исследуемого образца происходит в два этапа. На первом этапе приёмник излучения регистрирует интерферограмму, затем с помощью математических Фурье-преобразований интерферограммы восстанавливается спектральный состав излучения. Основой Фурье-спектрометра является двухлучевой интерферометр Майкельсона, который состоит из полупрозрачного светоделителя и двух плоских зеркал [11]. С помощью этого оптического прибора, работающего в инфракрасном спектре, можно получать не только значение величины эпитаксиального слоя кремния, но и концентрацию междоузельного кислорода, концентрацию углерода замещения, концентрацию легирующих примесей (бора и фосфора).

Как и в случае эллипсометрии, эпитаксиальный слой должен быть прозрачен в использованном интервале длин волн. Условием получения интерференционного спектра отражения является отличие оптических постоянных слоя и подложки. На этом принципе строится определение толщины слоя. Чтобы это условие выполнялось, эпитаксиальный слой должен быть сильно легированный, а подложка, наоборот, должна иметь малую концентрацию свободных носителей. В этом случае ИК-излучение проходит сквозь слой и отражается от подложки.

В интерференционной картине существуют помехи (затухающие колебания), связанные со спектром излучения материала, из которого изготовлен источник, на практике не существует идеальных полихроматических источников.

Инфракрасная спектрометрия с преобразованием Фурье активно развивается и находит применение при исследовании полимерных плёнок, что подробно описано в статье [12].

Достоинства метода заключаются в быстроте измерений (определение толщины в одной точке занимает порядка 30 секунд) и в небольшой погрешности измерений.

Заключение

Проведён обзор разрушающих и неразрушающих методов контроля толщины эпитаксиального слоя Si, которые применяются как при проведении научно-исследовательских работ, так и в условиях производства. Выбор метода измерений зависит от толщины слоя, его физических свойств и точности измерений. Сферический шлиф имеет ограничение по минимальной толщине определения слоя в 0,1 мкм, эллипсометрическими методами имеется возможность измерять слои толщиной порядка 10 А, но есть трудности при измерении достаточно толстых слоёв более 2 мкм. ИК-Фурье спектрометрия с помощью отечественных приборов может определять слои толщиной 2,5 мкм, зарубежные разработки дают возможность измерять эпитаксиальные слои толщиной 0,5 мкм. Повысить предел измерений сферическим шлифом (0,1 мкм) не представляется возможным, в отличие от оптических методов. С помощью разработок новых более чувствительных детекторов и повышения точности математических преобразований и моделей можно повысить предел измерений.

Для исследовательских лабораторий оптимальным методом измерений является эллипсометрия, она даёт более точные и полные сведения о толщине материала. На производстве незаменимым остаётся метод сферического шлифа и ИК-Фурье спектрометрия.

Кремний является базовым полупроводником в микроэлектронном производстве. Важно точно знать толщину эпитаксиальной плёнки кремния для контроля качества и управления производственным процессом, а также для теоретических исследований, которыми занимается физика конденсированного состояния.

В развивающейся области многослойных полупроводниковых структур важно проводить контроль одной из основных характеристик – толщины эпитаксиальных слоёв. Для этого необходимо изучать и развивать методы контроля и исследования, рассмотренные в этой обзорной статье. Кремний был и остаётся базовым проводником для производства компонентной электронной базы. Развитие кремниевой технологии продолжается и по сей день. Большинство российских микроэлектронных предприятий работают именно на этом полупроводниковом материале.

Статья поступила в редакцию 12.08.2023 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Анализ разрушающих методов измерения и контроля толщины тонких пленок / Шупенев А.Е., Панкова Н. С., Коршунов И. С., Григорьянц А. Г. // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2019. № 3 (708). С. 32–34. DOI: 10.18698/0536-1044-2019-3-31-39.
2. Controlled Doping Methods for Radial p/n Junctions in Silicon Micropillars / Elbersen R., Tiggelaar R. M., Milbrat A., Mul G., Gardeniers H., Huskens J. // Advanced Energy Materials. 2015. Vol. 5. Iss. 6. P. 1–8. DOI: 10.1002/aenm.201401745.
3. Handbook of Ellipsometry / eds. Tompkins H. G., Irene E. A. Norwich, NY: William Andrew Publishing, 2005. 902 p.
4. Measurement of stress-optic coefficients for metals in the visible to near-infrared spectrum with spectroscopic ellipsometry / Sun X., Wang S., Li L., Huo Z., Wang L., Li C., Wang Z. // Optics and Lasers in Engineering. 2023. Vol. 161. P. 107362. DOI: 10.1016/j.optlaseng.2022.107362.
5. Modeled optical properties of SiGe and Si layers compared to spectroscopic ellipsometry measurements / Kriso C., Triozon F., Delerue C., Schneider L., Abbate F. et al. // Solid-State Electronics. 2017. Vol. 129. P. 93–96. DOI: 10.1016/j.sse.2016.12.011.
6. Spectroscopic ellipsometry study of non-hydrogenated fully amorphous silicon films deposited by room-temperature radio-frequency magnetron sputtering on glass: Influence of the argon pressure / Márqueza E., Blanco E., García-Vázquezb C., Díazb J. M., Saugar E. // Journal of Non-Crystalline Solids. 2020. Vol. 547. P 120305. DOI: 10.1016/j.jnoncrysol.2020.120305.
7. Spectral interference ellipsometry for film thickness measurement on transparent substrate / Zhang J., Shi L., Zhang R., Chen J., Wu G. // Optics and Lasers in Engineering. 2023. Vol. 171. P. 107819. DOI: 10.1016/j.optlaseng.2023.107819.
8. Structure and chemical analysis in thin films by in situ IR ellipsometry / Hinrichs K., Sun G., Rappich J., Furchner A. // Encyclopedia of Solid-Liquid Interfaces / eds. K. Wandelt, G. Bussetti. USA: Elsevier, 2023. P. 514–520. DOI: 10.1016/B978-0-323-85669-0.00019-2.
9. The microstructure and optical properties of p-type microcrystalline silicon thin films characterized by ex-situ spectroscopic ellipsometry / Zhang He, Zhang X., Hou G., Wei C., Sun J. et al. // Thin Solid Films. 2012. Vol. 521. P. 17–21. DOI: 10.1016/j.tsf.2012.03.081.
10. Combined ellipsometry and X-ray related techniques for studies of ultrathin organic nanocomposite films / Krämer M., Roodenko K., Pollakowski B., Hinrichs K., Rappich J. et al. // Thin Solid Films. 2010. Vol. 518. Iss. 19. P. 5509–5514. DOI: 10.1016/j.tsf.2010.04.033.
11. Инфракрасная фурье-спектрометрия / Ефимова А. И., Зайцев В. Б., Болдырев Н. Ю., Кашкаров П. К. М.: Физический факультет МГУ, 2008. 133 с.
12. Xu J., Gowen A. A. Time series Fourier transform infrared spectroscopy for characterization of water vapor sorption in hydrophilic and hydrophobic polymeric films // Spectrochimica Acta Part A: Molecular and Biomolecular Spectroscopy. 2021. Vol. 250. P. 119371. DOI: 10.1016/j.saa.2020.119371.

REFERENCES

1. Shupenev A. E., Pankova N. S., Korshunov I. S., Grigoryants A. G. [An analysis of destructive methods of thin films thickness measurement]. In: *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Mashinostroyeniye* [Proceedings of Higher Educational Institutions. Machine Building], 2019, no. 3 (708), pp. 32–34. DOI: 10.18698/0536-1044-2019-3-31-39.

2. Elbersen R., Tiggelaar R. M., Milbrat A., Mul G., Gardeniers H., Huskens J. Controlled Doping Methods for Radial p/n Junctions in Silicon Micropillars. In: *Advanced Energy Materials*, 2015, vol. 5, iss. 6, pp. 1–8. DOI: 10.1002/aenm.201401745.
3. Tompkins H. G., Irene E. A., eds. Handbook of Ellipsometry. Norwich, NY, William Andrew Publishing, 2005. 902 p.
4. Sun X., Wang S., Li L., Huo Z., Wang L., Li C., Wang Z. Measurement of stress-optic coefficients for metals in the visible to near-infrared spectrum with spectroscopic ellipsometry. In: *Optics and Lasers in Engineering*, 2023, vol. 161, pp. 107362. DOI: 10.1016/j.optlaseng.2022.107362.
5. Kriso C., Triozon F., Delerue C., Schneider L., Abbate F. et al. Modeled optical properties of SiGe and Si layers compared to spectroscopic ellipsometry measurements. In: *Solid-State Electronics*, 2017, vol. 129, pp. 93–96. DOI: 10.1016/j.sse.2016.12.011.
6. Márqueza E., Blanco E., García-Vázquezb C., Díazb J. M., Saugar E. Spectroscopic ellipsometry study of non-hydrogenated fully amorphous silicon films deposited by room-temperature radio-frequency magnetron sputtering on glass: Influence of the argon pressure. In: *Journal of Non-Crystalline Solids*, 2020, vol. 547, pp 120305. DOI: 10.1016/j.jnoncrysol.2020.120305.
7. Zhang J., Shi L., Zhang R., Chen J., Wu G. Spectral interference ellipsometry for film thickness measurement on transparent substrate. In: *Optics and Lasers in Engineering*, 2023, vol. 171, pp. 107819. DOI: 10.1016/j.optlaseng.2023.107819.
8. Hinrichs K., Sun G., Rappich J., Furchner A. Structure and chemical analysis in thin films by in situ IR ellipsometry. In: Wandelt K., Bussetti G., eds. *Encyclopedia of Solid-Liquid Interfaces*. USA, Elsevier, 2023, pp. 514–520. DOI: 10.1016/B978-0-323-85669-0.00019-2.
9. Zhang He, Zhang X., Hou G., Wei C., Sun J. et al. The microstructure and optical properties of p-type microcrystalline silicon thin films characterized by ex-situ spectroscopic ellipsometry. In: *Thin Solid Films*, 2012, vol. 521, pp. 17–21. DOI: 10.1016/j.tsf.2012.03.081.
10. Krämer M., Roodenko K., Pollakowski B., Hinrichs K., Rappich J. et al. Combined ellipsometry and X-ray related techniques for studies of ultrathin organic nanocomposite films. In: *Thin Solid Films*, 2010, vol. 518, iss. 19, pp. 5509–5514. DOI: 10.1016/j.tsf.2010.04.033.
11. Efimova A. I., Zaitsev V. B., Boldyrev N. Yu., Kashkarov P. K. *Infrakrasnaya fur'ye-spektrometriya* [Infrared Fourier spectrometry]. Moscow, Faculty of Physics of Lomonosov Moscow State University Publ., 2008. 133 p.
12. Xu J., Gowen A. A. Time series Fourier transform infrared spectroscopy for characterization of water vapor sorption in hydrophilic and hydrophobic polymeric films. In: *Spectrochimica Acta Part A: Molecular and Biomolecular Spectroscopy*, 2021, vol. 250, pp. 119371. DOI: 10.1016/j.saa.2020.119371.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Захарова Татьяна Ивановна – магистрант Инженерной академии Российского университета дружбы народов имени Патриса Лумумбы;
e-mail: tatyana.z94@icloud.com

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Tatyana I. Zakharova – Master's Degree Student, Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba;
e-mail: tatyana.z94@icloud.com

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Захарова Т. И. Методы контроля толщины эпитаксиального слоя кремния // Вестник Государственного университета просвещения. Серия: Физика-Математика. 2023. № 3. С. 33–42.
DOI: 10.18384/2949-5067-2023-3-33-42

FOR CITATION

Zakharova T. I. Methods for controlling the thickness of the epitaxial silicon layer. In: *Bulletin of State University of Education. Series: Physics and Mathematics*, 2023, no. 3, pp. 33–42.
DOI: 10.18384/2949-5067-2023-3-33-42

УДК 538.9
DOI: 10.18384/2949-5067-2023-3-43-56

ФИЗИЧЕСКИЙ МЕХАНИЗМ СЕЛЕКТИВНОГО ЛАЗЕРНОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ КОРОТКОИМПУЛЬСНОГО ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ НА МИКРОПОРЫ В НЕПРОЗРАЧНОМ МАТЕРИАЛЕ

Ушаков И. В., Сафронов И. С.

Университет науки и технологий МИСИС
119049, г. Москва, Ленинский пр-т, д. 4, стр. 1, Российская Федерация

Аннотация
Цель. Исследование физического механизма селективного воздействия лазерного излучения на систему микропор в поверхностном слое непрозрачного материала с высокой теплопроводностью.
Процедура и методы. Теоретическое исследование специфики прогрева поверхности материала с системой микропор, с использованием нелинейного дифференциального уравнения теплопроводности методом конечных элементов.
Результаты. Предложен физический механизм селективного воздействия короткоимпульсного лазерного излучения на микропоры в непрозрачном материале. Установлено, что в условиях импульсного прогрева материала специфика распространения изотерм существенно зависит от конфигурации системы микропор. Для верхней микропоры реализуется ускоренный прогрев материала над микропорой и запаздывание прогрева под микропорой. Специфическая картина прогрева материала, дополненная воздействием ударной волны, будет стимулировать движение материала в направлении микропоры и её частичное/полное залечивание.
Теоретическая и/или практическая значимость. Полученные результаты расширяют представления о физике селективного лазерного залечивания микропор.
Ключевые слова: физика селективного лазерного воздействия, микропоры, твёрдые материалы, физика конденсированного состояния, физический механизм залечивания

PHYSICAL MECHANISM OF SELECTIVE EXPOSURE OF SHORT-PULSE LASER RADIATION ON MICROPORES IN OPAQUE MATERIAL

I. Ushakov, I. Safronov

University of Science and Technology MISIS
Leninskiy Prospekt 4 build. 1, Moscow 119049, Russian Federation

Abstract
Aim. Investigation of the physical mechanism of the selective effect of laser radiation on the micropore system in the surface layer of an opaque material with high thermal conductivity.

Methodology. Theoretical study of the specifics of heating the surface for a material with a system of micropores using a nonlinear differential equation of thermal conductivity by the finite element method.
Results. A physical mechanism for the selective effect of short-pulse laser radiation on micropores in an opaque material is proposed. It is established that under conditions of impulsed laser heating of the material, the specificity of the propagation of isotherms significantly depends on the configuration of the micropore system. For the upper micropore is realized speeded heating of the material above the micropore and slowed heating under the micropore. The specific heating pattern of the material, supplemented by the impact of the shock wave, will stimulate the movement of the material in the direction of the micropore and its partial/complete healing.
Research implications. The results obtained expand the understanding of the physics of selective laser healing of micropores.
Keywords: physics of selective laser affecting, micropores, solid materials, physics of condensed matter, physical mechanism of healing

Введение

В физике конденсированного состояния известны эффекты избирательного воздействия короткоимпульсного (как правило, наносекундного) лазерного излучения на дефекты [1–5]. Короткоимпульсное лазерное излучение, при определённых условиях, может избирательно воздействовать на микро- и наномасштабные неоднородные области. В случае оптически прозрачных материалов эти области могут быть расположены как на поверхности, так и в объёме материала. Для оптически непрозрачных материалов лазерное излучение может оказывать селективное воздействие на дефектные области, расположенные в поверхностном слое материала. Данные явления были обнаружены экспериментально и достаточно подробно описаны в ряде работ [2; 6; 7]. Однако физический механизм, ответственный за селективное воздействие короткоимпульсного лазерного излучения на дефектные области, не исследован. Имеются лишь общие представления о физике избирательного воздействия лазерного излучения на дефекты в поверхностном слое непрозрачного вещества [6].

Известно [6; 7], что в результате селективного лазерного воздействия удаётся выборочно менять состояние отдельных макро-, микро- или наномасштабных областей. При этом лазерное излучение никак не меняет структуру и свойства остального материала. Избирательность воздействия лазерного импульса на оптически прозрачные и непрозрачные материалы на практике применяется в различных областях спектроскопии и микроскопии [8; 9]. Применение математического комплекса определения изменённых состояний различных участков расширяет применение световых волн различной плотности мощности.

В настоящее время есть лишь предположения и гипотезы, описывающие вероятные процессы, приводящие к возможности лазерных импульсов избирательно воздействовать на определённые нано- и микромасшабные области [2; 6]. Отсутствие полноценной физической теории, описывающей механизм селективного лазерного воздействия на дефектные области, лимитирует возможности практического использования технологии селективной лазерной обработки.

Из всего многообразия дефектов, с точки зрения исследования физики селективного лазерного воздействия, наибольший интерес на данном этапе представляют поры. Это связано с тем, что из всех дефектов идеальная пора обладает околонулевой теплопроводностью. Процессы, происходящие в материале, могут быть достаточно точно описаны в модели, а часть теоретических результатов верифицирована прямым экспериментом. Отметим также, что поры являются распространёнными дефектами, формирующимися, например, при лазерном аддитивном производстве материалов [10–14].

Целью данной работы является исследование физического механизма, обусловливающего избирательность воздействия лазерного излучения на поры и системы пор в поверхностном слое материала с высокой теплопроводностью.

Методика моделирования

На современном техническом уровне прямое экспериментальное исследование физики селективного воздействия лазерного излучения на нано- и микропоры невозможно. Поэтому исследования были проведены методом компьютерного моделирования. Полученные результаты и теоретические предсказания были верифицированы экспериментальными исследованиями.

В модели использовали материал, непрозрачный на длине волны лазерного излучения (1064 нм). Воздействие лазерного импульса с длительностью порядка 20 нс, плотностью мощности от 141×10^{12} Вт/м^2 до 1273×10^{12} Вт/м^2 и энергией импульса от 15 до 100 мДж приводит к быстрому нагреву поверхности, испарению материала и формированию облака лазерной плазмы. Дальнейший нагрев материала обусловлен воздействием лазерной плазмы. В этих условиях на поверхности материала существует достаточно тонкий расплавленный слой, который приводит к прогреву всего образца.

Для того чтобы корректно решить данную задачу на основе механизма теплопроводности, необходимо выполнить условие однозначности. В это условие входят геометрические условия, определяющие форму и размеры расчётной области, и физические параметры материала (коэффициент теплопроводности, плотность и удельная теплоёмкость вещества), а также граничные условия.

Решение основано на использовании нелинейного дифференциального уравнения теплопроводности [15] при отсутствии внутренних источников теплоты:

$$\rho \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = div(\lambda \cdot gradT), \{x, y, z\} \in G, \quad (1)$$

где $T(x, y, t)$ – температура тела, K, в точке $\{x, y\}$ в момент t; ρ – плотность вещества, кг/м^3; c – удельная теплоёмкость вещества, Дж/(кг·К); λ – коэффициент теплопроводности вещества, Вт/(м·К); G – расчётная область пространства, в пределах которой решается уравнение теплопроводности, отделённая от окружающей среды граничной поверхностью Г.

В уравнении (1) единственной зависимой переменной является температура. Размерность пространства – 2D. Математическая модель была реализована в программе FEATool_Multiphysics.

Моделировали тепловое/лазерное воздействие на титановый сплав ВТ9 ($Ti_{88,3}Al_{6,4}Mo_{3,3}Zr_{1,5}Si_{0,3}Fe_{0,2}$). Использованные при моделировании физические свойства указаны в табл. 1. Скорость конвекции в направлении оси X и Y равна нулю. Тепловая мощность также равна нулю.

Таблица 1 / Table 1

Основные свойства материала, которые были использованы при разработке модели / The main properties of the material that were used in the development of the model

Свойства	Значения / Температурная зависимость
Плотность	4510 кг/м^3
Коэффициент теплопроводности	0,013 Т [Вт/(м^2·К^2)] + 3,3 [Вт/(м^2·К)]
Удельная теплоёмкость	0,209 Т [Дж/(кг·К^2)] + 467 [Дж/(кг·К)]

Источник: по данным авторов

Начальные условия: температура в объёме тела и в области теплового воздействия 293,15 К и 1273,15 К соответственно. Максимальная температура выбрана так, чтобы не происходило плавления.

Использовали граничные условия первого рода, при которых температура поверхности совпадает с температурой прилегающего к поверхности материала (изолированная система).

Воздействие короткоимпульсного лазерного излучения создаёт на поверхности материала расплавленную область в виде окружности. На срезе проплавленная часть соответствует форме эллипса (полуэллипса). Рис. 1а демонстрирует срез образца размерами 50×100 мкм с зоной локального нагрева. Дуга полуэллипса расположена в центре большей стороны (100 мкм) образца на верхней кромке. В качестве источника теплоты выбрана граница дуги полуэллипса. Диаметр малой оси полуэллипса находится в центре одной из сторон прямоугольника. Большая ось эллипса параллельная верхней стороне прямоугольника и равна 12 мкм. Радиус малой оси принят равным 1 мкм. Представленный источник энергии по форме достаточно близок к реальной области воздействия лазерной плазмы при определённой глубине фокусировки.

В первой модели рассматривается бездефектный материал. В остальных моделях внутри квадрата на расстоянии 3,5 мкм от полуэллипса находится треугольник пор (2,5 мкм от соответствующей стороны квадрата). Эти поры имеют форму сферы. Диаметр пор 5 мкм. Расстояние между порами в горизонтальном направлении 5 мкм. В зависимости от эксперимента меняется угол при вершине треугольника от 45° до 90° с шагом 15°. В этом случае расстояние между порами в вертикальном направлении будет меняться.

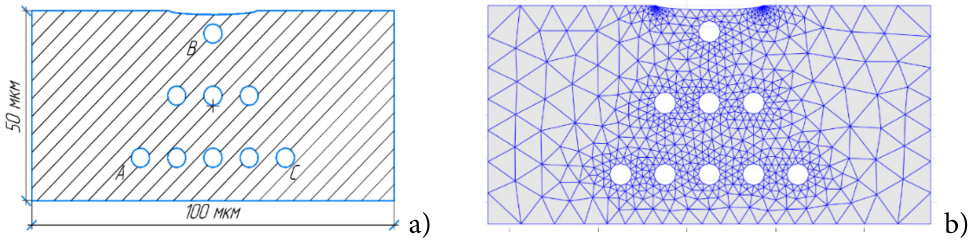

Рис. 1 / Fig. 1. a) модель образца с порами; b) сетка МКЭ на моделируемом образце с порами / a) model of the sample with pores; b) a grid of the finite element method on a sample with pores

Источник: по данным авторов

Результаты и обсуждение

Анализировали момент времени $t = 0{,}1$с после начала нагрева. Этому моменту времени соответствовал наибольший градиент температур в образце. Самая холодная часть нагрета до 688,3 К (рис. 2a, f). Установлено, что поры используемых конфигураций существенно влияют на распространении изотерм (рис. 2b-e).

В результате компьютерного моделирования установлено, что прогрев материала перед вершиной поры при вершине треугольника всегда происходит быстрее, чем в бездефектном материале. Одновременно прогрев материала под данной порой происходит медленнее, чем в бездефектном материале.

Установлена зависимость разности температур в точках, расположенных над порами $X^{/}$ и под порами $Y^{/}$ (рис. 3a). Рассмотрены поры, ориентированные вдоль стороны BC треугольника ABC (стороны B_1C_1 треугольника $A_1B_1C_1$ и т. д. на рис. 2). Для сравнения определена температура в аналогичных точках в бездефектном образце (рис. 3b). Соответствующие результаты приведены в табл. 2 и 3.

В табл. 2 рассмотрен случай, когда T_1 – температура в материале, прилегающем к верхней точке поры (некоторая точка $X^{/}$). T_2 – температура в точке $X^{//}$ бездефектного материала. Разность температур $\Delta T = T_1 - T_2$.

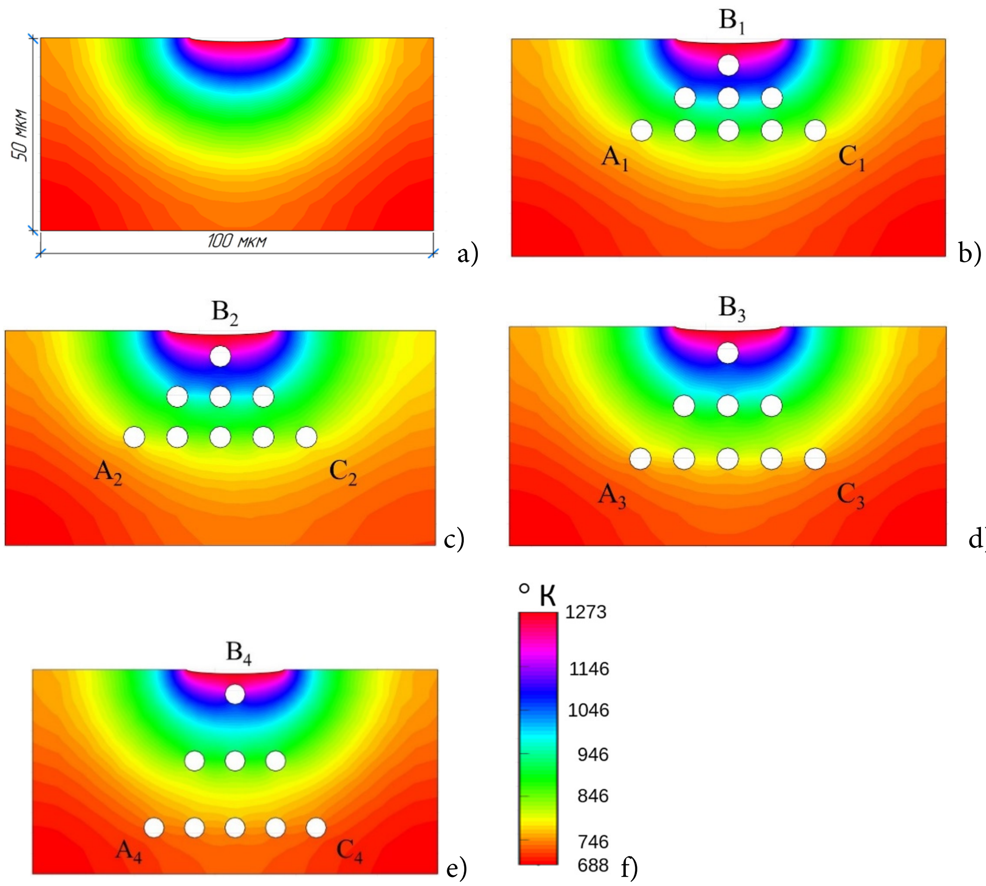

Рис. 2 / Fig. 2. Результаты компьютерного моделирования: a) образец без пор; b) образец с порами, угол при вершине B_1 треугольника пор $A_1B_1C_1$ равен 90°; c) образец с порами, угол при вершине B_2 треугольника пор $A_2B_2C_2$ равен 75°; d) образец с порами, угол при вершине B_3 треугольника пор $A_3B_3C_3$ равен 60°; e) образец с порами, угол при вершине B_4 треугольника пор $A_4B_4C_4$ равен 45°; f) цветовая гамма температур / The results of computer simulation: a) a sample without pores; b) a sample with pores, the angle at the apex B_1 of the triangle of pores $A_1B_1C_1$ is 90°; c) a sample with pores, the angle at the apex B_2 of the triangle of pores $A_2B_2C_2$ is 75°; d) a sample with pores, the angle at the apex B_3 of the triangle of pores $A_3B_3C_3$ is 60°; e) a sample with pores, the angle B_4 at the vertex of the pore triangle $A_4B_4C_4$ is 45°; f) color range of temperatures

Источник: по данным авторов

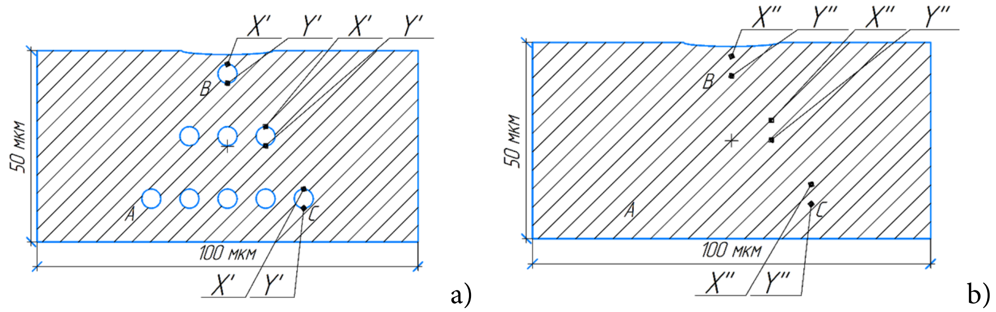

Рис. 3 / Fig. 3. Расположение точек, которые используются для анализа влияния пор на распределение температуры: a) образец с порами; b) образец без пор / Location of points that are used to analyze the effect of pores on temperature distribution: a) a sample with pores; b) a sample without pores

Источник: по данным авторов

Таблица 2 / Table 2

Температурная зависимость прогрева материала над порами / Temperature dependence of the heating of the material over the pores

№ поры	Угол при вершине треугольника пор											
	90°			75°			60°			45°		
	T_1, K	T_2, K	ΔT, K	T_1, K	T_2, K	ΔT, K	T_1, K	T_2, K	ΔT, K	T_1, K	T_2, K	ΔT, K
1	1223	1197	26	1223	1197	26	1218	1197	21	1218	1197	21
2	1047	1012	35	858	783	75	779	782	-3	751	742	9
3	858	850	8	1028	980	48	851	881	-31	910	885	25

Источник: по данным авторов

В табл. 3 рассмотрен случай, когда T_1 – температура в материале, прилегающем к нижней точке поры (некоторая точка Y'). T_2 – температура в точке Y'' бездефектного материала. Разность температур $\Delta T = T_1 - T_2$.

Таблица 3 / Table 3

Температурная зависимость прогрева материала под порами / Temperature dependence of the heating of the material under the pores

№ поры	Угол при вершине треугольника пор											
	90°			75°			60°			45°		
	T_1, K	T_2, K	ΔT, K	T_1, K	T_2, K	ΔT, K	T_1, K	T_2, K	ΔT, K	T_1, K	T_2, K	ΔT, K
1	1106	1114	-8	1109	1114	-5	1087	1114	-27	1086	1114	-28
2	914	933	-19	796	819	-23	728	754	-25	722	727	-5
3	778	803	-25	916	911	5	961	941	20	823	838	-15

Источник: по данным авторов

Специфика распределения изотерм в окрестности пор существенно влияет на физику процесса частичного/полного залечивания таких дефектов при селективном лазерном воздействии. Как следует из табл. 2 и 3, над первой порой, ближайшей к зоне нагрева, температура существенно выше, чем в бездефектном материале, а под порой – ниже. В результате формируется специфическое распределение изотерм (рис. 4а). Аналогичный градиент температур наблюдается для остальных пор. Материал, расположенный над порой, нагрет до более высоких температур, чем материал под порой (а также слева и справа от поры). Учитывая, что лазерное воздействие сопровождается формированием ударной волны (давление до 10^{10} Па и более [16; 17]), создаётся условие для движения нагретого материала в направлении действия сил сжатия. Сопротивление деформации любого металлического материала существенно зависит как от его температуры, так и от скорости деформации. Для скоростей деформации, создаваемых при стандартных технологиях обработки металлов давлением при T=1123 К, сопротивление деформации сплава ВТ9 от 100 до 500 МПа [18; 19]. Давление, инициируемое в поверхностном слое материала, при воздействии короткого лазерного импульса на два порядка выше. Следовательно, выполняются необходимые условия для заполнения пор нагретым материалом. Для определения достаточных условий необходимо отдельное исследование поведения материала в окрестности пор при сверхкоротком периодическом импульсном нагружении.

Эффективность движения материала будет зависеть от длительности воздействия шокового давления, характеристик нагретого материала (изменения его пластических характеристик) и ряда других факторов. Если область воздействия лазерной плазмы достаточно велика, то под центральной частью области воздействия сжимающая сила будет направлена вертикально вниз.

Можно ожидать движения расплавленного и нагретого материала в направлении поры и её заполнение (в данной модели предполагается, что в поре отсутствуют газы или находятся в ультраразреженном состоянии).

Только для поры, находящейся в точке B (рис. 2b-e), распределение изотерм во всех исследованных треугольниках пор аналогично показанному на рис. 4а. На распределение изотерм в окрестности любой другой поры в значительной степени будут влиять другие поры (рис. 4b).

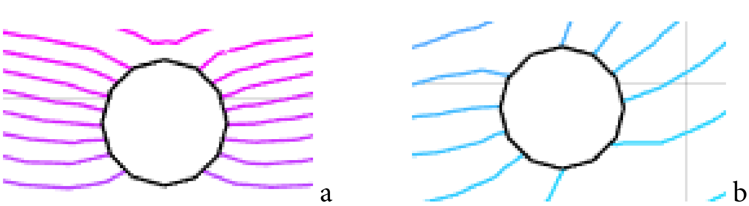

Рис. 4 / Fig. 4. Изотермы в окрестности микропор: a) микропора при вершине B треугольника ABC; b) микропора при вершине C треугольника ABC / Isotherms in the vicinity of micropores: a) micropore at the vertex B of triangle ABC; b) micropore at the vertex C of triangle ABC

Источник: по данным авторов

Специфика прогрева материала была определена из относительной разницы температур Δ между верхней и нижней точками пор, расположенных вдоль стороны BC треугольника ABC (рис. 1а). Если данная разница больше, чем для бездефектного материала, то $\Delta > 0$. Результаты расчётов показаны на рис. 5. Из рисунка следует, что величина Δ существенно зависит от геометрии треугольника пор.

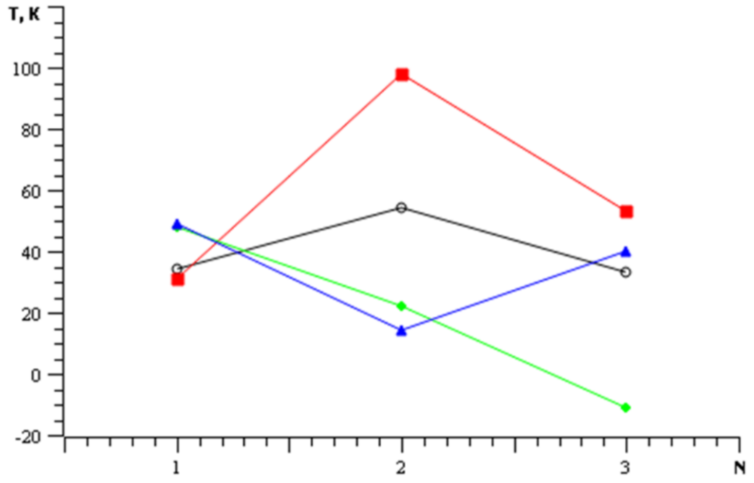

Рис. 5 / Fig. 5. Влияние поры на величину разницы температур $\Delta\boldsymbol{T}$ между точкой, расположенной над порой и под порой. $\Delta = \Delta\boldsymbol{T_1} - \Delta\boldsymbol{T_2}$, где $\Delta\boldsymbol{T_1}$ – приращение температур для точки, расположенной над порой, $\Delta\boldsymbol{T_2}$ – приращение температуры для точки, расположенной под порой. Угол при вершине треугольника пор: о – 90° ■ – 75°; ◆ – 60°; ▲ – 45° / The influence of the pore on the magnitude of the temperature difference Δ between the point located above the pore and below the pore. $\Delta = \Delta\boldsymbol{T_1} - \Delta\boldsymbol{T_2}$, where $\Delta\boldsymbol{T_1}$ is the temperature increment for the point located above the pore, $\Delta\boldsymbol{T_2}$ is the temperature increment for the point located below the pore. The angle at the apex of the pore triangle: : о – 90° ■ – 75°; ◆ – 60°; ▲ – 45°

Источник: по данным авторов

Зависимости Δ от номера поры немонотонны для всех случаев. Геометрия треугольника пор оказывает минимальное влияние на распределение изотерм в окрестности верхней поры (рис. 4 и 5). Распределение изотерм и величина Δ для остальных пор существенно зависит от места их расположения.

Очевидно, что в рамках предложенной модели, чем больше величина Δ, тем больше вероятность залечивания поры. Кроме того, для верхней поры направление распространения изотерм совпадает с направлением воздействия силы сжатия. Изотермы симметричны относительно данного направления.

Условие симметричности направления изотерм не всегда выполняются для определённых конфигураций пор (рис. 5). Важно отметить, что значение Δ меньше нуля для третьей поры C треугольника пор ABC (рис. 1a и 2d) с углом при вершине 60°.

В работах [2; 14] экспериментально показана возможность существенного, в 3-4 раза, повышения нанотвёрдости титановых сплавов при селективной лазерной обработке. Одновременно отмечено увеличение микротвёрдости на 30–40%. Увеличение нанотвёрдости сопровождается исчезновением флуктуаций нанотвёрдости при механических испытаниях в различных точках. Отличительной особенностью селективной лазерной обработки является существенное повышение твёрдости с одновременным повышением пластических характеристик сплава. Это может быть связано с залечиванием дефектов, являющихся зародышами разрушения.

В работе [14] было экспериментально установлено, что для существенного повышения нано- и микротвёрдости необходимо несколько (до 10) последовательных воздействий. Необходимость серии лазерных воздействий теоретически ранее не была обоснована. Полученные в данной работе результаты позволяют описать физический механизм залечивания и необходимость нескольких воздействий лазерных импульсов. Воздействие единичного лазерного импульса приводит к селективному залечиванию пор, расположенных ближе всего к поверхности. Остальные поры оказываются в сложном температурном поле, так как распределение изотерм существенно зависит от относительного расположения пор. Последовательное многократное воздействие лазерным импульсом приводит к эффекту залечивания пор, расположенных на большей глубине.

Таким образом, полученные в работе теоретические результаты моделирования позволяют непротиворечиво объяснить экспериментальные результаты, а также предложить физическую модель селективного лазерного воздействия на микропоры в поверхностном слое непрозрачного материала.

Заключение

1. На основании теоретических и экспериментальных исследований предложен физический механизм селективного воздействия короткоимпульсного лазерного излучения на микропоры в непрозрачном материале, основанный на селективном прогреве материала перед микропорами и их заполнения/залечивания за счёт движения нагретого материала под действием ударной волны.

2. В условиях импульсного прогрева материала специфика распространения изотерм существенно зависит от конфигурации системы микропор. Только для верхней микропоры изотермы распространяются симметрично. Все микропоры, за исключением верхней, оказываются в сложном температурном поле. Направление движения изотерм существенно отклоняется от прямолинейного, а конфигурация прогрева не обеспечивает возможность залечивания микропор, находящихся во втором и третьем слое. Для залечивания второго и третьего слоя микропор требуется воздействие серии лазерных импульсов.

3. Полученные теоретические результаты и предложенная физическая модель избирательного залечивания микропор позволяют непротиворечиво объяснить имеющие экспериментальные результаты, связанные со спецификой изменения комплекса физических свойств поверхности после селективного лазерного воздействия.

Статья поступила в редакцию 26.05.2023 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gorbunov A. V. Dendritic melting in modulated laser beam // Europhysics Letters. 1993. Vol. 24. No. 9. P. 773–778. DOI: 10.1209/0295-5075/24/9/013.
2. Симонов Ю. В., Ушаков И. В. Механические свойства поверхностных структур титанового сплава ВТ9 после многократной локальной обработки наносекундными лазерными импульсами // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2020. № 2. С. 19–35. DOI: 10.18384/2310-7251-2020-2-19-35.
3. Мирзоев Ф. Х., Панченко В. Я., Шелепин Л. А. Лазерное управление процессами в твердом теле // Успехи физических наук. 1996. Т. 166. № 1. С. 3–23. DOI: 10.3367/ufnr.0166.199601a.0003.
4. Лазерная сварка новых аустенитных криогенных коррозионностойких сталей, легированных азотом / Капуткина Л. М., Смарыгина И. В., Киндоп В. Э., Капуткин Д. Е. // Чёрные металлы. 2021. № 7. С. 56–62. DOI: 10.17580/chm.2021.07.05.
5. Шинкин В. Н. Предварительная правка стальной полосы // Чёрные металлы. 2018. № 5. С. 34–40.
6. Ushakov I. V., Safronov I. S. Directed changing properties of amorphous and nanostructured metal al-loys with help of nanosecond laser impulses // CIS Iron and Steel Review. 2021. Vol. 22. P. 77–81. DOI: 10.17580/cisisr.2021.02.14
7. Safronov I. S., Ushakov A. I. Targeted alternation in properties of solid amorphous-nanocrystalline material in exposing to nanosecond laser radiation // Defect and Diffusion Forum. 2021. Vol. 410. P. 469–474. DOI: 10.4028/www.scientific.net/DDF.410.469.
8. Идентификация и счет эритроцитов нативной донорской крови человека методом цифровой оптической микроскопии с использованием спектрально фильтрованного освещения / Дубровский В. А., Забенков И. В., Карпочева Е. П., Торбин С. О. // Оптика и спектроскопия. 2021. Т. 129. № 3. С. 327–341. DOI: 10.21883/OS.2021.03.50660.208-20.
9. Spectroscopy in the gas phase with GaAs/AlGaAs quantum-cascade lasers / Hvozdara L., Gianordoli S., Strasser G., Schrenk W., Unterrainer K., Gornik E., Murthy C. S. S., Kraft M., Pustogow V., Mizaikoff B., Inberg A., Croitoru N. // Applied Optics. 2000. Vol. 39. Iss. 36. P. 6926–6930. DOI: 10.1364/AO.39.006926.
10. Selective Laser Melting of Aluminum and Its Alloys / Wang Z., Ummethala R., Singh N., Tang S., Suryanarayana C., Eckert J., Prashanth K. G. // Materials. 2020. Vol. 13. Iss. 20. P. 4564. DOI: 10.3390/ma13204564.
11. Densification, Microstructure, and Mechanical Properties of Additively Manufactured 2124 Al-Cu Alloy by Selective Laser Melting / Deng J., Chen C., Zhang W., Li Y., Li R., Zhou K. // Materials. 2020. Vol. 13. Iss. 19. P. 4423. DOI: 10.3390/ma13194423.

12. Kaputkin D. E., Duradji V. N., Kaputkina N. A. Plasma electrolytic processing of bimetals at the anodic process // Letters on Materials. 2021. Vol. 11. P. 433–437. DOI: 10.22226/2410-3535-2021-4-433-437.
13. Laser powder-bed fusion additive manufacturing: Physics of complex melt flow and formation mechanisms of pores, spatter, and denudation zones / Khairallah S. A., Anderson A. T., Rubenchik A., King W. E. // Acta Materialia. 2016. Vol. 108 (16). P. 36–45. DOI: 10.1016/j.actamat.2016.02.014.
14. Prashanth K. G., Scudino S. Quasicrystallyne composites by additive manufacturing // Key Engineering Materials. 2019. Vol. 818. P. 72–76. DOI: 10.4028/www.scientific.net/KEM.818.72.
15. Шинкин В. Н. Механика сплошных сред для металлургов. М.: МИСиС, 2014. 628 с.
16. Лазерная абляция: физические представления и приложения (обзор) / Иногамов Н. А., Петров Ю. В., Хохлов В. А., Жаховский В. В. // Теплофизика высоких температур. 2020. Т. 58. № 4. С. 689–706. DOI: 10.31857/S0040364420040043.
17. Генерация ударных волн и образование кратеров в твердом веществе при кратковременном воздействии лазерного импульса / Гуськов С.Ю., Бородзюк С., Калал М., Касперчик А., Краликова Б., Кроуски Е., Лимпоух И., Машек К., Писарчик Т., Писарчике П., Пфейфер М., Рохлена К., Скала Й., Уллшмид Й. // Квантовая электроника. 2004. Т. 34. № 11. С. 989–1003. DOI: 10.1070/QE2004v034n11ABEH002695.
18. Simulation of Deformation Behavior and Microstructure Evolution during Hot Forging of TC11 Titanium Alloy / Alimov A., Zabelyan D., Burlakov I., Korotkov I., Gladkov Y. // Defect and Diffusion Forum. 2018. Vol. 385. P. 449–454. DOI: 10.4028/www.scientific.net/DDF.385.449.
19. Ильин А.А. Колачёв Б.А., Полькин И.С. Титановые сплавы. Состав, структура, свойства. Справочник. М.: ВИЛС – МАТИ, 2009. 520 с.

REFERENCES

1. Gorbunov A. V. Dendritic melting in modulated laser beam. In: *Europhysics Letters*, 1993, vol. 24, no. 9, pp. 773–778. DOI: 10.1209/0295-5075/24/9/013.
2. Simonov Yu. V., Ushakov I. V. [Mechanical properties of surface structures of titanium alloy vt9 after repeated local processing with nanosecond laser pulses]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-Matematika* [Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], 2020, no. 2, pp. 19–35. DOI: 10.18384/2310-7251-2020-2-19-35.
3. Mirzoev F. Kh., Panchenko V. Ya., Shelepin L. A. [Laser control of processes in solids]. In: *Uspekhi fizicheskikh nauk* [Physics-Uspekhi (Advances in Physical Sciences)], 1996, vol. 166, no. 1, pp. 3–23. DOI: 10.3367/ufnr.0166.199601a.0003.
4. Kaputkina L. M., Smarygina I. V., Kindop V. E., Kaputkin D. Ye. [Laser welding of new austenitic cryogenic corrosion-resistant steels alloyed with nitrogen]. In: *Chornyye metally* [Chernye Metally. Stahl und Eisen], 2021, no. 7, pp. 56–62. DOI: 10.17580/chm.2021.07.05.
5. Shinkin V. N. [Preliminary straightening of steel strip]. In: *Chornyye metally* [Chernye Metally. Stahl und Eisen], 2018, no. 5, pp. 34–40.
6. Ushakov I. V., Safronov I. S. Directed changing properties of amorphous and nanostructured metal al-loys with help of nanosecond laser impulses. In: *CIS Iron and Steel Review*, 2021, vol. 22, pp. 77–81. DOI: 10.17580/cisisr.2021.02.14.
7. Safronov I. S., Ushakov A. I. Targeted alternation in properties of solid amorphous-nanocrystalline material in exposing to nanosecond laser radiation. In: *Defect and Diffusion Forum*, 2021, vol. 410, pp. 469–474. DOI: 10.4028/www.scientific.net/DDF.410.469.

8. Dubrovsky V. A., Zabenkov I. V., Karpocheva E. P., Torbin S. O. [Identification and counting of natural donor blood erythrocytes of human by digital optical microscopy method using spectrally filtered illumination]. In: *Optika i spektroskopiya* [Optics and Spectroscopy], 2021, vol. 129, no. 3, pp. 327–341. DOI: 10.21883/OS.2021.03.50660.208-20.
9. Hvozdara L., Gianordoli S., Strasser G., Schrenk W., Unterrainer K., Gornik E., Murthy C. S. S., Kraft M., Pustogow V., Mizaikoff B., Inberg A., Croitoru N. Spectroscopy in the gas phase with GaAs/AlGaAs quantum-cascade lasers. In: *Applied Optics*, 2000, vol. 39, iss. 36, pp. 6926–6930. DOI: 10.1364/AO.39.006926.
10. Wang Z., Ummethala R., Singh N., Tang S., Suryanarayana C., Eckert J., Prashanth K. G. Selective Laser Melting of Aluminum and Its Alloys. In: *Materials*, 2020, vol. 13, iss. 20, pp. 4564. DOI: 10.3390/ma13204564.
11. Deng J., Chen C., Zhang W., Li Y., Li R., Zhou K. Densification, Microstructure, and Mechanical Properties of Additively Manufactured 2124 Al-Cu Alloy by Selective Laser Melting. In: *Materials*, 2020, vol. 13, iss. 19, pp. 4423. DOI: 10.3390/ma13194423.
12. Kaputkin D. E., Duradji V. N., Kaputkina N. A. Plasma electrolytic processing of bimetals at the anodic process. In: *Letters on Materials*, 2021, vol. 11, pp. 433–437. DOI: 10.22226/2410-3535-2021-4-433-437.
13. Khairallah S. A., Anderson A. T., Rubenchik A., King W. E. Laser powder-bed fusion additive manufacturing: Physics of complex melt flow and formation mechanisms of pores, spatter, and denudation zones. In: *Acta Materialia*, 2016, vol. 108 (16), pp. 36–45. DOI: 10.1016/j.actamat.2016.02.014.
14. Prashanth K. G., Scudino S. Quasicrystallyne composites by additive manufacturing. In: *Key Engineering Materials*, 2019, vol. 818, pp. 72–76. DOI: 10.4028/www.scientific.net/KEM.818.72.
15. Shinkin V. N. *Mekhanika sploshnykh sred dlya metallurgov* [Mechanics of continuous media for metallurgists]. Moscow, MISiS Publ., 2014. 628 p.
16. Inogamov N. A., Petrov Yu. V., Khokhlov V. A., Zhakhovsky V. V. [Laser ablation: physical concepts and applications (review)]. In: *Teplofizika vysokikh temperatur* [High Temperature], 2020, vol. 58, no. 4, pp. 689–706. DOI: 10.31857/S0040364420040043.
17. Guskov S. Yu., Borodzyuk S., Kalal M., Kasperchik A., Kralikova B., Krouski E., Limpoukh I., Mashek K. , Pisarczyk T., Pisarczyk P., Pfeiffer M., Rohlena K., Skala J., Ullschmid J. [Generation of shock waves and formation of craters in a solid material irradiated by a short laser pulse]. In: *Kvantovaya elektronika* [Quantum Electronics], 2004, vol. 34, no 11, pp. 989–1003. DOI: 10.1070/QE2004v034n11ABEH002695.
18. Alimov A., Zabelyan D., Burlakov I., Korotkov I., Gladkov Y. Simulation of Deformation Behavior and Microstructure Evolution during Hot Forging of TC11 Titanium Alloy. In: *Defect and Diffusion Forum*, 2018, vol. 385, pp. 449–454. DOI: 10.4028/www.scientific.net/DDF.385.449.
19. Ilyin A. A. Kolachev B. A., Polkin I. S. *Titanovyye splavy. Sostav, struktura, svoystva. Spravochnik* [Titanium alloys. Composition, structure, properties. Directory]. Moscow, VILS – MATI Publ., 2009. 520 p.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Ушаков Иван Владимирович – доктор технических наук, профессор кафедры физики Национального исследовательского технологического университета МИСиС;
e-mail: ushakoviv@mail.ru;

Сафронов Иван Сергеевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физики Национального исследовательского технологического университета МИСиС;
e-mail: issafronov@yandex.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Ivan V. Ushakov – Dr. Sci. (Engineering), Prof., Department of Physics, National University of Science and Technology “MISiS”;
e-mail: ushakoviv@mail.ru;

Ivan S. Safronov – PhD (Phys.-Math.), Assoc. Prof., Department of Physics, National University of Science and Technology “MISiS”;
e-mail: issafronov@yandex.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Ушаков И. В., Сафронов И. С. Физический механизм селективного лазерного воздействия короткоимпульсного лазерного излучения на микропоры в непрозрачном материале // Вестник Государственного университета просвещения. Серия: Физика-Математика. 2023. № 3. С. 43–56.
DOI: 10.18384/2949-5067-2023-3-43-56

FOR CITATION

Ushakov I. V., Safronov I. S. Physical mechanism of selective exposure of short-pulse laser radiation on micropores in opaque material. In: *Bulletin of State University of Education. Series: Physics and Mathematics*, 2023, no. 3, pp. 43–56.
DOI: 10.18384/2949-5067-2023-3-43-56

ТЕОРИЯ И МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ И ВОСПИТАНИЯ

УДК 514.8+537.8
DOI: 10.18384/2949-5067-2023-3-57-69

ГРУППА ЛОРЕНЦА И ДРОБНО-ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

Тришин В. Н.[1]***, Тришина Н. Е.***[1, 2]

[1] *Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет)*
105005, г. Москва, ул. 2-я Бауманская, д. 5, стр. 1, Российская Федерация

[2] *Российский химико-технологический университет имени Д. И Менделеева*
125047, г. Москва, Миусская площадь, д. 9, Российская Федерация

Аннотация
Цель. Демострация взаимосвязи дробно-линейной функции, разбираемой студентами технических университетов в курсе «Теория функции комплексного переменного (ТФКП)», и группы Лоренца, которую студенты изучают в курсе теоретической физики.
Процедура и методы. Приведён анализ соответствия между группой Лоренца и её двукратно накрывающей – группой спиновых преобразований, что позволяет описывать преобразования Лоренца с помощью комплексной дробно-линейной функции.
Результаты. В явной форме описано взаимно-однозначное соответствие между классами дробно-линейных преобразований расширенной комплексной плоскости и соответствующими преобразованиями Лоренца инерциальных систем отсчёта. Описаны физически значимые примеры аберрации света и вигнеровского вращения.
Теоретическая и/или практическая значимость. Продемонстрирована необходимость учёта межпредметных связей теоретической физики и ТФКП при изучении основ специальной теории относительности.
Ключевые слова: группа Лоренца, дробно-линейное преобразование, спиноры, спиновые преобразования

THE LORENTZ GROUP AND LINEAR FRACTIONAL TRANSFORMATIONS OF THE COMPLEX PLANE

V. Trishin1, N. Trishina [1,2]

[1] Bauman Moscow State Technical University
ulitsa 2-ya Baumanskaya 5 build. 1, Moscow 105005, Russian Federation
[2] Mendeleev University of Chemical Technology of Russia
Miusskaya ploshad 9, Moscow 125047, Russian Federation

Abstract
Aim. Demonstration of the relationship between the linear-fractional function, analyzed by students of technical universities in the course of complex function theory, and the Lorentz group, which students study in the course of theoretical physics.
Methodology. Demonstration of the relationship between the fractional linear function, which is analyzed by students of technical universities in the course "Theory of Function of Complex Variable (TFCV)", and the Lorentz group, which students study in the course of theoretical physics.
Results. The one-to-one correspondence between the classes of fractional-linear transformations of the extended complex plane and the corresponding Lorentz transformations of inertial frames of reference is described in an explicit form. Physically significant examples of light aberration and Wigner rotation are described.
Research implications. The necessity of taking into account the interdisciplinary connections of theoretical physics and "Theory of Function of Complex Variable (TFCV)" in the study of the foundations of the special theory of relativity is demonstrated.
Keywords: Lorentz group, linear-fractional transformation, spinors, spin transformations

Введение

В университетском курсе «Теория функции комплексного переменного (ТФКП)» в качестве стандартного примера аналитической функции детально разбирают (см., например, [1]) дробно-линейную функцию, которая осуществляет наиболее общее, взаимно-однозначное конформное отображение расширенной комплексной плоскости на себя. Со студентами рассматривают различные классы отображений и их геометрический смысл, но при этом, как правило, не обсуждается возможный физический смысл получаемых результатов. Тем не менее, специалистам хорошо известно, что дробно-линейные преобразования ТФКП эквивалентны собственным преобразованиям группы Лоренца, лежащим в основе специальной теории относительности. Это соответствие позволяет дать наглядную физическую интерпретацию отображениям, которые осуществляет дробно-линейная функция.

В данной методической заметке мы детально, в явной форме рассматриваем классы дробно-линейных преобразований расширенной комплексной плоскости и соответствующие им преобразования Лоренца, связывающие две инерциальные системы отсчёта. Подобное рассмотрение, с одной стороны, демонстрирует наглядный физический смысл параметров дробно-линейной функции, а с другой стороны – существенно упрощает понимание особенностей преобразований Лоренца, и делает доказательства многих свойств существенно компактнее. Параллельно мы излагаем понятие спиновых преобразований, естественно возникающих при таком описании.

В специальной теории относительности каждому событию сопоставляется точка четырёхмерного, действительного, линейного пространства M, которое называется пространство-время Минковского. Это пространство можно рассматривать как множество векторов положений точек относительно некоторого произвольно выбранного начала отсчёта. Пусть векторы $V = v^{\mu} e_{\mu}$ и $W = w^{\mu} e_{\mu}$ – элементы этого пространства со скалярным произведением $(V, W) = (v^{\mu} e_{\mu}, w^{\nu} e_{\nu}) = g_{\mu\nu} v^{\mu} w^{\nu}$, где метрический тензор $g_{\mu\nu} = (e_{\mu}, e_{\nu})$.

В псевдоортонормированном базисе e_{μ} метрический тензор имеет компоненты

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

и скалярное произведение (квадрат интервала между событиями) принимает вид $(V, W) = v^0 w^0 - v^1 w^1 - v^2 w^2 - v^3 w^3$. В декартовых координатах $V = (ct, x, y, z)$, где c – скорость света, получим для квадрата нормы Минковского выражение

$$|V|^2 = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2. \tag{2}$$

Преобразования Лоренца – это линейные преобразования $\tilde{v}^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} v^{\nu}$ пространства M, сохраняющие скалярное произведение и норму (2). В координатах они заданы матрицами Λ^{μ}_{ν} так, что

$$\begin{pmatrix} c\tilde{t} \\ \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где матрицы преобразования должны удовлетворять условию $g = \Lambda^T g \Lambda$, при котором сохраняется интервал:

$$(c\tilde{t})^2 - \tilde{x}^2 - \tilde{y}^2 - \tilde{z}^2 = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2.$$

Эти преобразования образуют группу, так называемую группу Лоренца, с групповой операцией – матричным умножением [2; 3]. В дальнейшем мы будем рассматривать только ограниченные преобразования Лоренца, которые являются собственными ($\det\Lambda > 0$) и ортохронными ($\Lambda^0_0 > 0$).

Преобразования Лоренца и спиновые преобразования

Любое ограниченное преобразование Лоренца Λ можно разложить в произведение пространственного вращения R и буста B – преобразования, изменяющего только скорость и не содержащего пространственного поворота.

Элементарные вращения относительно пространственных координатных осей OX, OY и OZ задаются соответственно матрицами

$$R_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\varphi_x & -\sin\varphi_x \\ 0 & 0 & \sin\varphi_x & \cos\varphi_x \end{pmatrix}, \tag{4}$$

$$R_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi_y & 0 & \sin\varphi_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin\varphi_y & 0 & \cos\varphi_y \end{pmatrix}, \tag{5}$$

$$R_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi_z & -\sin\varphi_z & 0 \\ 0 & \sin\varphi_z & \cos\varphi_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Бусты вдоль осей OX, OY и OZ имеют вид

$$B_x = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\vartheta_x & -\mathrm{sh}\vartheta_x & 0 & 0 \\ -\mathrm{sh}\vartheta_x & \mathrm{ch}\vartheta_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

$$B_y = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\vartheta_y & 0 & -\mathrm{sh}\vartheta_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\mathrm{sh}\vartheta_y & 0 & \mathrm{ch}\vartheta_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{8}$$

$$B_z = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\vartheta_z & 0 & 0 & -\mathrm{sh}\vartheta_z \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\mathrm{sh}\vartheta_z & 0 & 0 & \mathrm{ch}\vartheta_z \end{pmatrix}, \tag{9}$$

где введён параметр быстроты ϑ:

$$\vartheta = \mathrm{Arth}\,\frac{v}{c} = \ln\left(\frac{1+v/c}{1-v/c}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{10}$$

Легко проверить, что $\mathrm{ch}\vartheta = \gamma$ и $\mathrm{sh}\vartheta = \gamma\frac{v}{c}$, где $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ – релятивистский множитель, v– скорость наблюдателя. Откуда видно, например, что матрица B_x осуществляет простейшее преобразование Лоренца $\tilde{t} = \gamma(t - vx/c^2)$, $\tilde{x} = \gamma(x - vt)$.

Помимо стандартного четырёхмерного представления, описанного выше, преобразования Лоренца допускают альтернативную версию [5; 6]. Действительно, четыре координаты точки пространства Минковского можно записать не в виде 4-вектора, а в виде эрмитовой 2×2 матрицы:

$$V = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} ct+z & x+iy \\ x-iy & ct-z \end{pmatrix}, \tag{11}$$

причем $\sqrt{2}\det V = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2$. Множитель $1/\sqrt{2}$ введён для удобства в дальнейшем изложении. Ограниченное преобразование Лоренца соответствует [3] следующему действию комплексной *спин-матрицы* A: $\tilde{V} = AVA^{\dagger}$, или в компонентах

$$\begin{pmatrix} c\tilde{t}+\tilde{z} & \tilde{x}+i\tilde{y} \\ \tilde{x}-i\tilde{y} & c\tilde{t}-\tilde{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ct+z & x+iy \\ x-iy & ct-z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Поскольку преобразования Лоренца сохраняют норму Минковского, то $\det\tilde{V} = \det V$, поэтому $|\det A|^2 = 1$. Для ограниченных преобразования Лоренца получим условие на компоненты спин-матрицы:

$$ad - bc = 1. \tag{13}$$

Таким образом, 6 действительных параметров группы Лоренца кодируются 4 комплексными числами, связанными (комплексным) условием (13). Эти числа можно рассматривать [4] как параметры дробно-линейной функции

$$F(\zeta) = \frac{a\zeta+b}{c\zeta+d}, \tag{14}$$

действующей на комплексной плоскости с координатой ζ, и мы ставим в соответствие каждой спин-матрице A некоторую дробно-линейную функцию $F(\zeta)$:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto F = \frac{a\zeta+b}{c\zeta+d}. \tag{15}$$

Групповой операции умножения матриц $A = A_1A_2$ будет соответствовать операция композиции функций $F = F_1(F_2(\zeta))$:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2+b_1c_2 & a_1b_2+b_1d_2 \\ c_1a_2+d_1c_2 & c_1b_2+d_1d_2 \end{pmatrix} \mapsto$$

$$\mapsto F_1(F_2(\zeta)) = \frac{(a_1a_2+b_1c_2)\zeta + a_1b_2 + b_1d_2}{(c_1a_2+d_1c_2)\zeta + c_1b_2 + d_1d_2}.$$

Дополнив комплексную плоскость бесконечно удалённой точкой $\zeta = \infty$, после компактификации получим известную сферу Римана S, которую физически можно рассматривать как «небесную сферу» наблюдателя. Точки P этой сферы параметризуют лучи света, приходящие к наблюдателю, а преобразования Лоренца через соответствие (15) индуцируют конформные преобразования сферы Римана в себя. Рассмотрим эту конструкцию более детально.

Координаты изотропных векторов, задающих лучи света, приходящие к наблюдателю, расположенному в начале координат, удовлетворяют условию $(ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$. Положив, например, $ct = -1$, получим уравнение сферы $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$. Стереографическая проекция на комплексную плоскость выражает координаты $(-1, X, Y, Z)$ точки P сферы S следующим образом:

$$\zeta = \frac{X+iY}{1-Z}, \tag{16}$$

откуда несложно получить обратное соотношение

$$X = \frac{\zeta+\bar{\zeta}}{\zeta\bar{\zeta}+1}, \quad Y = \frac{\zeta-\bar{\zeta}}{i(\zeta\bar{\zeta}+1)}, \quad Z = \frac{\zeta\bar{\zeta}-1}{\zeta\bar{\zeta}+1}. \tag{17}$$

На сфере Римана S вместо координаты ζ удобно ввести проективные координаты ξ и η так, что $\zeta = \xi/\eta$, т. е. мы будем рассматривать S как комплексную проективную прямую $\mathbb{CP}^1$. При произвольном комплексном числе λ пары (ξ, η) и $(\lambda\xi, \lambda\eta)$ параметризуют одну и ту же точку P сферы, а бесконечно удалённая точка $\zeta = \infty$ задаётся конечной парой, например (1,0). Тогда в проективных координатах выражения (17) принимают вид

$$X = \frac{\xi\bar{\eta}+\eta\bar{\xi}}{\xi\bar{\xi}+\eta\bar{\eta}}, \quad Y = \frac{\xi\bar{\eta}-\eta\bar{\xi}}{i(\xi\bar{\xi}+\eta\bar{\eta})}, \quad Z = \frac{\xi\bar{\xi}-\eta\bar{\eta}}{\xi\bar{\xi}+\eta\bar{\eta}}. \tag{18}$$

Поскольку точка $P(-1, X, Y, Z)$ на сфере S нужна только для параметризации лучей, приходящих в начало координат O, то можно выбрать любую другую точку V на прямой OP. Обозначив координаты этой точки как (ct, x, y, z), получим

$$ct = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\xi\bar{\xi} + \eta\bar{\eta}\right), \quad x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\xi\bar{\eta} + \eta\bar{\xi}\right),$$

$$y = \frac{1}{i\sqrt{2}}(\xi\bar{\eta} - \eta\bar{\xi}), \quad z = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi\bar{\xi} - \eta\bar{\eta}). \tag{19}$$

Подставляя эти выражения в (11) и учитывая, что точка V лежит на луче OP, т. е. $(ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$, получим для координат V следующее представление

$$V = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} ct+z & x+iy \\ x-iy & ct-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi\bar{\xi} & \xi\bar{\eta} \\ \eta\bar{\xi} & \eta\bar{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}(\bar{\xi} \quad \bar{\eta}) = \chi\chi^{\dagger}. \tag{20}$$

Здесь столбец

$$\chi = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x+iy)/\sqrt{ct-z} \\ \sqrt{ct-z} \end{pmatrix} \tag{21}$$

определяет координаты *спин-вектора* (спинора) χ, поэтому, имея в виду правую часть выражения (20), спинор иногда условно называют «корнем квадратным» из вектора.

Комплексная координата $\zeta = \xi/\eta$ характеризует направление на «небесной сфере» наблюдателя, задаваемое спинором χ, и для неё мы имеем выражение

$$\zeta = \frac{x+iy}{ct-z}, \tag{22}$$

или в обычных угловых сферических координатах φ, θ (угол φ отсчитывается от положительного направления оси x в плоскости xy, а угол θ – от положительного направления оси z):

$$\zeta = e^{i\varphi}\mathrm{ctg}(\theta/2). \tag{23}$$

Использование комплексной координаты ζ вместо угловых переменных (φ, θ) существенно упрощает многие вычисления, а угловые координаты несложно выразить через ζ:

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{\zeta-\bar{\zeta}}{i(\zeta+\bar{\zeta})}, \quad \theta = \arccos\frac{\zeta\bar{\zeta}-1}{\zeta\bar{\zeta}+1}. \tag{24}$$

При преобразованиях Лоренца, как следует из (12), мы получим

$$\tilde{V} = AVA^{\dagger} = A\chi\chi^{\dagger}A^{\dagger} = (A\chi)(A\chi)^{\dagger}, \tag{25}$$

откуда следует, что спинор χ преобразуется под действием спин-матрицы A, осуществляющей соответствующее *спиновое преобразование*:

$$\begin{pmatrix}\tilde{\xi}\\ \tilde{\eta}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}, \tag{26}$$

а координата ζ испытывает эквивалентное дробно-линейное преобразование $\tilde{\zeta} = (a\zeta + b)/(c\zeta + d)$.

Вращения

Несложно показать (см. например [3]), что спиновые преобразования, соответствующие элементарным вращениииям (4), (5), (6), могут быть представлены следующими (унитарными, т. е. $A^{\dagger} = A^{-1}$) матрицами и ассоциированными с ними дробно-линейными функциями:

$$A_{Rx} = \pm\begin{pmatrix}\cos\frac{\varphi_x}{2} & i\sin\frac{\varphi_x}{2}\\ i\sin\frac{\varphi_x}{2} & \cos\frac{\varphi_x}{2}\end{pmatrix} \quad \mapsto \quad F_{Rx}(\zeta) = \frac{\cos\frac{\varphi_x}{2}\zeta + i\sin\frac{\varphi_x}{2}}{i\sin\frac{\varphi_x}{2}\zeta + \cos\frac{\varphi_x}{2}} \tag{27}$$

$$A_{Ry} = \pm\begin{pmatrix}\cos\frac{\varphi_y}{2} & -\sin\frac{\varphi_y}{2}\\ \sin\frac{\varphi_y}{2} & \cos\frac{\varphi_y}{2}\end{pmatrix} \quad \mapsto \quad F_{Ry}(\zeta) = \frac{\cos\frac{\varphi_y}{2}\zeta - \sin\frac{\varphi_y}{2}}{\sin\frac{\varphi_y}{2}\zeta + \cos\frac{\varphi_y}{2}} \tag{28}$$

$$A_{Rz} = \pm\begin{pmatrix}e^{i\varphi_z/2} & 0\\ 0 & e^{-i\varphi_z/2}\end{pmatrix} \quad \mapsto \quad F_{Rz}(\zeta) = e^{i\varphi_z}\zeta. \tag{29}$$

Здесь знаки $\pm$ означают, что каждому ограниченному преобразованию Лоренца соответствует два и только два спиновых преобразования, отличающихся знаками. Это является конкретной реализацией хорошо известного факта, что группа $SL(2,\mathbb{C})$ (группа спиновых преобразований) является двукратно накрывающей группы Лоренца [7; 8].

Заметим, что для нетривиальных поворотов $\varphi_x \neq 2\pi n$, $\varphi_y \neq 2\pi m$, где $n, m \in \mathbb{Z}$ функции $F_{Rx}(\zeta)$ и $F_{Ry}(\zeta)$ можно переписать в виде

$$F_{Rx}(\zeta)=\frac{\sin^{-2}\frac{\varphi_x}{2}}{\zeta-i\mathrm{ctg}\frac{\varphi_x}{2}}-i\mathrm{ctg}\frac{\varphi_x}{2},\quad F_{Ry}(\zeta)=\mathrm{ctg}\frac{\varphi_y}{2}-\frac{\sin^{-2}\frac{\varphi_y}{2}}{\zeta+\mathrm{ctg}\frac{\varphi_y}{2}}. \tag{30}$$

В частности, при $\varphi_x=\pi$ получим функцию $F_{Rx}(\zeta)=1/\zeta$, а при $\varphi_y=\pi$ получим $F_{Ry}(\zeta)=-1/\zeta$.

Матрицу произвольного поворота можно представить в виде произведения матриц элементарных вращений. Поскольку произведение унитарных матриц так же является унитарной матрицей, то любое вращение соответствует унитарному преобразованию. Обратное тоже верно – любая унитарная матрица в $SL(2,\mathbb{C})$ описывает пространственный поворот. Действительно, поскольку унитарное преобразование сохраняет след матрицы, то след $\mathrm{Tr}V=\sqrt{2}ct$ матрицы координат (11) не изменяется при унитарных преобразованиях (12), а значит сохраняется величина $x^2+y^2+z^2$.

Таким образом, произвольный поворот определяется двумя унитарными матрицами второго порядка с единичным определителем, отличающимися знаками, так что общая спин-матрица вращений и ассоциированная функция имеют вид

$$A_R=\pm\begin{pmatrix}a & b\\ -\bar{b} & \bar{a}\end{pmatrix}\quad\mapsto\quad F_R(\zeta)=\frac{a\zeta+b}{\bar{a}-\bar{b}\zeta},\quad |a|^2+|b|^2=1. \tag{31}$$

Бусты

Спиновые преобразования и ассоциированные функции, соответствующие бустам (7), (8) и (9), имеют вид

$$A_{Bx}=\pm\begin{pmatrix}\mathrm{ch}\frac{\vartheta_x}{2} & \mathrm{sh}\frac{\vartheta_x}{2}\\ \mathrm{sh}\frac{\vartheta_x}{2} & \mathrm{ch}\frac{\vartheta_x}{2}\end{pmatrix}\quad\mapsto\quad F_{Bx}(\zeta)=\frac{\mathrm{ch}\frac{\vartheta_x}{2}\zeta+\mathrm{sh}\frac{\vartheta_x}{2}}{\mathrm{sh}\frac{\vartheta_x}{2}\zeta+\mathrm{ch}\frac{\vartheta_x}{2}} \tag{32}$$

$$A_{By}=\pm\begin{pmatrix}\mathrm{ch}\frac{\vartheta_y}{2} & i\mathrm{sh}\frac{\vartheta_y}{2}\\ -i\mathrm{sh}\frac{\vartheta_y}{2} & \mathrm{ch}\frac{\vartheta_y}{2}\end{pmatrix}\quad\mapsto\quad F_{By}(\zeta)=\frac{\mathrm{ch}\frac{\vartheta_y}{2}\zeta+i\mathrm{sh}\frac{\vartheta_y}{2}}{\mathrm{ch}\frac{\vartheta_y}{2}-i\mathrm{sh}\frac{\vartheta_y}{2}\zeta} \tag{33}$$

$$A_{Bz}=\pm\begin{pmatrix}e^{\vartheta_z/2} & 0\\ 0 & e^{-\vartheta_z/2}\end{pmatrix}\quad\mapsto\quad F_{Bz}(\zeta)=e^{\vartheta_z}\zeta. \tag{34}$$

Учитывая, что $\mathrm{ch}\vartheta=\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, $\beta=\frac{v}{c}$ и $e^{\vartheta}=\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}=\gamma(1+\beta)$, получим

$$\mathrm{ch}\frac{\vartheta}{2}=\sqrt{\frac{\mathrm{ch}\vartheta+1}{2}}=\sqrt{\frac{\gamma+1}{2}}, \tag{35}$$

$$\mathrm{sh}\frac{\vartheta}{2}=\sqrt{\frac{\mathrm{ch}\vartheta-1}{2}}=\sqrt{\frac{\gamma-1}{2}}, \tag{36}$$

откуда

$$F_{Bx}(\zeta)=\frac{\gamma\beta\zeta+\gamma-1}{(\gamma-1)\zeta+\gamma\beta},\quad F_{By}(\zeta)=\frac{\gamma\beta\zeta+i(\gamma-1)}{i(1-\gamma)\zeta+\gamma\beta},\quad F_{Bz}(\zeta)=\gamma(1+\beta)\zeta. \tag{37}$$

Последняя формула описывает *аберрацию* света для движущегося наблюдателя. Действительно, если наблюдатель движется в z-направлении со скоростью v, то $\tilde{\zeta}=\gamma(1+\beta)\zeta$, или, используя формулу (23), получим:

$$e^{i\tilde{\varphi}}\mathrm{ctg}(\tilde{\theta}/2)=\gamma(1+\beta)e^{i\varphi}\mathrm{ctg}(\theta/2), \tag{38}$$

откуда следует, что если в неподвижной системе отсчёта луч света приходил из точки с угловыми координатами (φ,θ), то в движущейся системе направление на источник света будет иметь координаты $(\tilde{\varphi},\tilde{\theta})$, причём $\tilde{\varphi}=\varphi$, а $\mathrm{ctg}(\tilde{\theta}/2)=\gamma(1+\beta)\mathrm{ctg}(\theta/2)$. После несложных тригонометрических преобразований отсюда можно получить хорошо известную формулу аберрации

$$\cos\tilde{\theta}=\frac{\cos\theta-\beta}{1-\beta\cos\theta}. \tag{39}$$

Буст B_ψ вдоль произвольного направления ψ относительно выбранной координатной оси можно записать как композицию буста B вдоль этой оси и поворотов R на угол $\pm\psi$: $B_\psi=R(\psi)BR(-\psi)$. Например, легко видеть, что $A_{Bx}=A_{Ry}(\frac{\pi}{2})A_{Bz}A_{Ry}(-\frac{\pi}{2})$:

$$\begin{pmatrix}\mathrm{ch}\frac{\vartheta}{2} & \mathrm{sh}\frac{\vartheta}{2}\\ \mathrm{sh}\frac{\vartheta}{2} & \mathrm{ch}\frac{\vartheta}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4}\\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{\vartheta/2} & 0\\ 0 & e^{-\vartheta/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{4} & \sin\frac{\pi}{4}\\ -\sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4}\end{pmatrix}. \tag{40}$$

Вигнеровское вращение

Хорошо известно [6], что бусты не образуют подгруппы группы Лоренца, т. е. совокупность двух бустов в неколлинеарных направлениях уже не является бустом, а образует композицию буста и поворота, так называемого вигнеровского вращения. Продемонстрируем это явление.

Пусть первый буст B_x осуществляется с быстротой ϑ_1 вдоль оси x, а второй – с быстротой ϑ_2 в направлении α, а именно вдоль прямой, лежащей в плоскости

xy и повернутой относительно оси x на угол α. Соответствующая спин-матрица B_α будет иметь вид

$$B_\alpha = \begin{pmatrix} e^{\frac{i\alpha}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\alpha}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\frac{\vartheta_2}{2} & \operatorname{sh}\frac{\vartheta_2}{2} \\ \operatorname{sh}\frac{\vartheta_2}{2} & \operatorname{ch}\frac{\vartheta_2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\frac{i\alpha}{2}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i\alpha}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\frac{\vartheta_2}{2} & e^{i\alpha}\operatorname{sh}\frac{\vartheta_2}{2} \\ e^{-i\alpha}\operatorname{sh}\frac{\vartheta_2}{2} & \operatorname{ch}\frac{\vartheta_2}{2} \end{pmatrix}$$

Последовательное применение этих двух бустов даст матрицу

$$B = B_\alpha B_x = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\frac{\vartheta_2}{2} & e^{i\alpha}\operatorname{sh}\frac{\vartheta_2}{2} \\ e^{-i\alpha}\operatorname{sh}\frac{\vartheta_2}{2} & \operatorname{ch}\frac{\vartheta_2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\frac{\vartheta_1}{2} & \operatorname{sh}\frac{\vartheta_1}{2} \\ \operatorname{sh}\frac{\vartheta_1}{2} & \operatorname{ch}\frac{\vartheta_1}{2} \end{pmatrix}.$$

Эту матрицу можно записать как буст B_ψ с быстротой ϑ_3 в направлении ψ и последующий поворот $R(\omega)$ в плоскости xy на угол вигнеровского вращения ω:

$$B = R(\omega)B_\psi = \begin{pmatrix} e^{i\omega/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\frac{\vartheta_3}{2} & e^{i\psi}\operatorname{sh}\frac{\vartheta_3}{2} \\ e^{-i\psi}\operatorname{sh}\frac{\vartheta_3}{2} & \operatorname{ch}\frac{\vartheta_3}{2} \end{pmatrix}.$$

Приравнивая верхние левые ячейки в этих матричных произведениях, получим уравнение

$$\operatorname{ch}\frac{\vartheta_1}{2}\operatorname{ch}\frac{\vartheta_2}{2} + e^{i\alpha}\operatorname{sh}\frac{\vartheta_1}{2}\operatorname{sh}\frac{\vartheta_2}{2} = \operatorname{ch}\frac{\vartheta_3}{2}e^{i\omega/2},$$

откуда можно найти быстроту ϑ_3 и угол ω вигнеровского вращения. Для последнего получим

$$\omega = 2\arg(\operatorname{ch}\frac{\vartheta_1}{2}\operatorname{ch}\frac{\vartheta_2}{2} + e^{i\alpha}\operatorname{sh}\frac{\vartheta_1}{2}\operatorname{sh}\frac{\vartheta_2}{2}) =$$
$$= 2\arg(1 + e^{i\alpha}\operatorname{th}\frac{\vartheta_1}{2}\operatorname{th}\frac{\vartheta_2}{2}) =$$
$$= 2\operatorname{arctg}\frac{\sin\alpha}{\operatorname{cth}(\vartheta_1/2)\operatorname{cth}(\vartheta_2/2) + \cos\alpha},$$

где в силу соотношений (35), (36) $\operatorname{cth}(\vartheta_1/2)\operatorname{cth}(\vartheta_2/2) = \sqrt{\frac{(\gamma_1+1)(\gamma_2+1)}{(\gamma_1-1)(\gamma_2-1)}}$.

Таким образом, мы видим, что комплексное (спиновое) представление преобразований Лоренца позволяет очень быстро получить элегантное выражение для угла вигнеровского поворота, которое обычно выводится в векторной форме в результате весьма громоздких вычислений.

Заключение

В заключение напомним несколько хорошо известных свойств дробно-линейной функции (см., например, [1]) и дадим их интерпретацию с точки зрения преобразований Лоренца. Во-первых, дробно-линейная функция полностью определяется заданием своего действия на трёх произвольных несовпадающих точках. Это означает, что наблюдатель с помощью выбора своей скорости (модуля и направления) может добиться, чтобы любые три источника света оказались в трёх заранее заданных точках его небесной сферы.

Во-вторых, нетривиальная дробно-линейная функция имеет две, и только две неподвижные точки (возможно совпадающие). Следовательно, любое нетривиальное преобразование Лоренца сохраняет два, и только два (возможно совпадающих) направления на небесной сфере наблюдателя.

Во-третьих, поскольку действие дробно-линейной функции является конформным на сфере Римана, в частности, она отображает окружности в окружности, то форма изображения объекта, наблюдаемого под малым углом, будет одинаковой для всех наблюдателей – отличаться будут только видимый угловой размер и направление. В частности, изображения сфер (любых размеров) будут представлять собой окружности для всех подвижных инерциальных наблюдателей, несмотря на лоренцево сокращение длины.

В предсталенной работе в явной форме описано действие дробно-линейной функции на расширенной комплексной плоскости (сфере Римана) как эквивалентное действие преобразований Лоренца на небесной сфере наблюдателя в специальной теории относительности. Данный подход может быть использован в университетах как при проведении занятий со студентами по курсу ТФКП, так и на занятиях по теоретической физике, способствуя лучшему усвоению учебного материала за счёт установления взаимосвязей между разными предметными курсами.

Статья поступила в редакцию 10.07.2023 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.
2. Румер Ю. Б., Фет А. И. Теория групп и квантованные поля. М.: Наука, 1977. 248 с.
3. Carmeli M. Group theory and general relativity. London: Imperial College Press, 1977. 391 p.
4. Needham T. Visual Complex Analysis. Oxford: Oxford University Press, 2000. 592 p.
5. Пенроуз Р., Риндлер В. Спиноры и пространство-время: в 2 т. Т. 1. Два-спинорное исчисление и релятивистские поля / пер. с англ. М.: Мир, 1987. 528 с.
6. Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. Гравитация: в 3 т. / пер. с англ. М.: Мир, 1977. Т. 3. 510 с.
7. Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я. Представления группы вращений и группы Лоренца, их применения. М.: Физматгиз, 1958. 368 с.
8. Наймарк М. А. Линейные представления группы Лоренца. М.: Физматгиз, 1958. 376 с.

REFERENCES

1. Lavrent'yev M. A., Shabat B. V. *Metody teorii funktsiy kompleksnogo peremennogo* [Methods of the theory of functions of a complex variable]. Moscow, Nauka Publ., 1973. 736 p.
2. Rumer Yu. B., Fet A. I. *Teoriya grupp i kvantovannyye polya* [Group theory and quantized fields]. Mosocw, Nauka Publ., 1977. 248 p.
3. Carmeli M. Group theory and general relativity. London, Imperial College Press, 1977. 391 p.
4. Needham T. Visual Complex Analysis. Oxford, Oxford University Press, 2000. 592 p.
5. Penrose R., Rindler V. *Spinory i prostranstvo-vremya: v 2 t. T. 1. Dva-spinornoye ischisleniye i relyativistskiye polya* [Spinors and Space-Time: in 2 vols. Vol. 1. Two-Spinor calculus and relativistic fields]. Moscow, Mir Publ., 1987. 528 p.
6. Misner Ch., Thorne K., Wheeler J. *Gravitatsiya: v 3 t.* [Gravitation: in 3 vols.]. Moscow, Mir Publ., 1977. Vol. 3. 510 p.
7. Gelfand I. M., Minlos R. A., Shapiro Z. Ya. *Predstavleniya gruppy vrashcheniy i gruppy Lorentsa, ikh primeneniya* [Representations of the rotation group and the Lorentz group, their applications]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1958. 368 p.
8. Naimark M. A. *Lineynyye predstavleniya gruppy Lorentsa* [Linear representations of the Lorentz group]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1958. 376 p.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Тришин Владимир Николаевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры вычислительной математики и математической физики Московского государственного технического университета имени Н. Э. Баумана (национального исследовательского университета);
e-mail: trishinvn@bmstu.ru;

Тришина Наталия Евгеньевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры вычислительной математики и математической физики Московского государственного технического университета имени Н. Э. Баумана (национального исследовательского университета); доцент Высшего химического колледжа Российского химико-технологического университета имени Д. И. Менделеева;
e-mail: ntrishina@bmstu.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Vladimir N. Trishin – Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Prof., Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University;
e-mail: trishinvn@bmstu.ru;

Natalia E. Trishina – Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Prof., Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University; Assoc. Prof., High Chemical College of Mendeleev University of Chemical Technology of Russia;
e-mail: ntrishina@bmstu.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Тришин В. Н., Тришина Н. Е. Группа Лоренца и дробно-линейные преобразования комплексной плоскости // Вестник Государственного университета просвещения. Серия: Физика-Математика. 2023. № 3. С. 57–69.
DOI: 10.18384/2949-5067-2023-3-57-69

FOR CITATION

Trishin V. N., Trishina N. E. The Lorentz group and linear fractional transformations of the complex plane. In: *Bulletin of State University of Education. Series: Physics and Mathematics*, 2023, no. 3, pp. 57–69.
DOI: 10.18384/2949-5067-2023-3-57-69

ПРО СВЕТ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ
ПРОСВЕЩЕНИЯ

ВЕСТНИК
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА ПРОСВЕЩЕНИЯ
СЕРИЯ: ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА
2023. № 3

Над номером работали:
Литературный редактор М. С. Тарасова
Переводчик В. А. Дворянов
Корректор М. С. Тарасова
Компьютерная вёрстка – Д. А. Заботина

Адрес редакции:
105005, г. Москва, ул. Радио, д. 10А, офис 98
тел. (495) 780-09-42 доб. 6101
e-mail: info@vestnik-mgou.ru
Сайты: www.physmathmgou.ru;
www.vestnik-mgou.ru

Формат 70x108/16. Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура "Minion Pro".
Тираж 500 экз. Усл. п. л. 4,5, уч.-изд. л. 3,75.
Подписано в печать: 31.10.2023 г. Дата выхода в свет: 26.01.2024 г. Заказ № 2023/10-10.
Отпечатано в ГУП
105005, г. Москва, ул. Радио, д. 10А