



ISSN 2072-8387 (print)  
ISSN 2310-7251 (online)

# Вестник

МОСКОВСКОГО  
ГОСУДАРСТВЕННОГО  
ОБЛАСТНОГО  
УНИВЕРСИТЕТА

*Серия*

**Ф**ИЗИКА-  
МАТЕМАТИКА

ТРАНСМУТАЦИЯ НУКЛИДОВ  
В БЛАНКЕТЕ ТЕРМОЯДЕРНОГО  
ИСТОЧНИКА НЕЙТРОНОВ

МОЛЕКУЛЯРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПОТОКА  
С РЕЛЬЕФНЫМ ТЕЛОМ



2023/№ 2

ВЕСТНИК  
МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО  
ОБЛАСТНОГО УНИВЕРСИТЕТА

ISSN 2072-8387 (print)

2023 / № 2

ISSN 2310-7251 (online)

серия

# ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА

**Рецензируемый научный журнал. Основан в 1998 г.**

Журнал «Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика» включён в «Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание учёной степени кандидата наук, на соискание учёной степени доктора наук» Высшей аттестационной комиссии при Министерстве науки и высшего образования Российской Федерации (См.: Список журналов на сайте ВАК при Минобрнауки России) по следующим научным специальностям: 1.3.3. – Теоретическая физика (физико-математические науки); 1.3.8. – Физика конденсированного состояния (физико-математические науки).

**The peer-reviewed journal was founded in 1998**

«Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics» is included by the Supreme Certifying Commission of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation into “the List of reviewed academic journals and periodicals recommended for publishing in corresponding series basic research thesis results for a Ph.D. Candidate or Doctorate Degree” (See: the online List of journals at the site of the Supreme Certifying Commission of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation) on the following scientific specialities: 1.3.3. – Theoretical physics (physical-mathematical sciences); 1.3.8. – Physics of the condensed state (physical-mathematical sciences) (See: the online List of journals at the site of the Supreme Certifying Commission of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation).

ISSN 2072-8387 (print)

2023 / № 2

ISSN 2310-7251 (online)

series

# PHYSICS AND MATHEMATICS

BULLETIN OF THE MOSCOW REGION  
STATE UNIVERSITY

## Учредитель журнала

«Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика»

Государственное образовательное учреждение высшего образования Московской области

Московский государственный областной университет

Выходит 4 раза в год

### Редакционная коллегия

*Главный редактор:*

**Бугаев А. С.** – д. ф.-м. н., академик РАН, Московский физико-технический институт (Государственный университет)

*Заместитель главного редактора:*

**Кузнецов М. М.** – д. ф.-м. н., проф., Государственный университет просвещения

*Ответственный секретарь:*

**Чукаловская Е. М.** – Государственный университет просвещения

*Члены редакционной коллегии:*

**Беляев В. В.** – д. т. н., проф., Государственный университет просвещения;

**Боголюбов Н. Н.** – д. ф.-м. н., проф., Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова;

**Бугримов А. Л.** – д. т. н., проф., Российский государственный университет имени А.Н. Косыгина (Технологии. Дизайн. Искусство);

**Гладков С. О.** – д. ф.-м. н., проф., Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет);

**Емельяненко А. В.** – д. ф.-м. н., проф., Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова;

**Жачкин В. А.** – д. ф.-м. н., проф., Государственный университет просвещения;

**Калашников Е. В.** – д. ф.-м. н., проф., Государственный университет просвещения;

**Осипов М. А.** – д. ф.-м. н., проф., Университет Стратклайд (Великобритания);

**Рыбаков Ю. П.**, – д. ф.-м. н., проф., Российский университет дружбы народов;

**Чаругин В. М.** – д. ф.-м. н., проф., Московский педагогический государственный университет;

**Чигринов В. Г.** – д. ф.-м. н., проф., Гонконгский университет науки и технологий (Китай)

ISSN 2072-8387 (print)

ISSN 2310-7251 (online)

Рецензируемый научный журнал «Вестник московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика» публикует статьи по математическим проблемам термодинамики, кинетики и статистической физики; теории конденсированного состояния классических и квантовых, макроскопических и микроскопических систем; изучению различных состояний вещества и физических явлений в них; статистической физике и кинетической теории равновесных и неравновесных систем; теоретическому и экспериментальному исследованию физических свойств неупорядоченных неорганических систем; изучению экспериментального состояния конденсированных веществ и фазовых переходов в них. Журнал адресован ученым, докторантам, аспирантам и всем, интересующимся достижениями физико-математических наук.

Журнал «Вестник Московского государственного областного университета. Серия «Физика-математика» зарегистрирован в Федеральной службе по надзору за соблюдением законодательства в сфере массовых коммуникаций и охране культурного наследия. Регистрационное свидетельство ПИ № ФС 77-73344.

**Индекс серии «Физика-математика» по Объединенному каталогу «Пресса России» 40723**

Журнал включён в базу данных Российского индекса научного цитирования (РИНЦ), имеет полнотекстовую сетевую версию в Интернете на платформе Научной электронной библиотеки ([www.elibrary.ru](http://www.elibrary.ru)), с августа 2017 г. на платформе Научной электронной библиотеки «КиберЛенинка» ([www.cyberleninka.ru](http://www.cyberleninka.ru)), а также на сайтах Вестника Московского государственного областного университета ([www.physmathmgou.ru](http://www.physmathmgou.ru), [www.vestnik-mgou.ru](http://www.vestnik-mgou.ru)).

При цитировании ссылка на конкретную серию «Вестника Московского государственного областного университета» обязательна. Публикация материалов осуществляется в соответствии с лицензией Creative Commons Attribution 4.0 (CC-BY).

Ответственность за содержание статей несут авторы. Мнение автора может не совпадать с точкой зрения редколлегии серии. Рукописи не возвращаются.

Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. – 2023. – № 2. – 78 с.

© ГУП, 2023.

**Адрес редакции:**

г. Москва, ул. Радио, д.10А, офис 98

тел.: (495) 780-09-42 (доб. 6101)

e-mail: [info@vestnik-mgou.ru](mailto:info@vestnik-mgou.ru); сайты: [www.physmathmgou.ru](http://www.physmathmgou.ru); [www.vestnik-mgou.ru](http://www.vestnik-mgou.ru)

**Founder of journal**  
**«Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics»**  
Moscow Region State University

————— Issued 4 times a year —————

**Editorial board**

*Editor-in-chief:*

**A. S. Bugaev** – Doctor of Physics and Mathematics, Academician of RAS, Moscow Institute of Physics and Technology (State University)

*Deputy editor-in-chief:*

**M. M. Kuznetsov** – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, State University of Education

*Executive secretary:*

**E. M. Chukalovskaya** – State University of Education

*Members of Editorial Board:*

**V. V. Belyaev** – Doctor of Technical Sciences, Professor, State University of Education;

**N. N. Bogolyubov** – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Lomonosov Moscow State University;

**A. L. Bugrimov** – Doctor of Technical Sciences, Professor, Kosygin State University of Russia;

**S. O. Gladkov** – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Moscow Aviation Institute (National Research University);

**A. V. Emelyanenko** – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Lomonosov Moscow State University;

**V. A. Zhachkin** – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, State University of Education;

**E. V. Kalashnikov** – Doctor of Physics and Mathematics, State University of Education;

**M. A. Osipov** – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Strathclyde University (Glasgow, UK);

**Yu. P. Rybakov** – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, RUDN University;

**V. M. Charugin** – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Moscow State Pedagogical University;

**V. G. Chigrinov** – Hong Kong University of Science and Technology (China)

**ISSN 2072-8387 (print)**

**ISSN 2310-7251 (online)**

The reviewed scientific journal “Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics” publishes articles on mathematical problems of thermodynamics, kinetics and statistical physics; the theory of the condensed state of classical and quantum, macroscopic and microscopic systems; the study of various states of substance and physical phenomena in them; statistical physics and the kinetic theory of equilibrium and non-equilibrium systems; theoretical and experimental research of physical features of disordered inorganic systems; the study of the experimental state of condensed substances and phase transitions in them. The journal is addressed to scientists, doctoral students, PhD students and everyone interested in the achievements of physical and mathematical sciences.

The series “Physics and Mathematics” of the Bulletin of the Moscow Region State University is registered in Federal service on supervision of legislation observance in sphere of mass communications and cultural heritage protection. The registration certificate ПИ № ФС 77 – 73344.

**Index series «Physics and Mathematics» according to the union catalog «Press of Russia» 40723**

The journal is included into the database of the Russian Science Citation Index, and its full texts are available through scientific electronic libraries “eLibrary” ([www.elibrary.ru](http://www.elibrary.ru)) and “CyberLeninka” (since August 2017; [www.cyberleninka.ru](http://www.cyberleninka.ru)), as well as on the journal’s sites ([www.physmathmgou.ru](http://www.physmathmgou.ru), [www.vestnikmgou.ru](http://www.vestnikmgou.ru)).

At citing the reference to a particular series of «Bulletin of the Moscow Region State University» is obligatory. Scientific publication of materials is carried out in accordance with the license of Creative Commons Attribution 4.0 (CC-BY).

The authors bear all responsibility for the content of their papers. The opinion of the Editorial Board of the series does not necessarily coincide with that of the author. Manuscripts are not returned.

Bulletin of the Moscow State Regional University. Series: Physics and Mathematics. – 2023. – № 2. – 78 p.

© SUE, 2023.

**The Editorial Board address:**

10A Radio st., office 98, Moscow, Russia

Phone: (495) 780-09-42 (add. 6101)

e-mail: [info@vestnik-mgou.ru](mailto:info@vestnik-mgou.ru); sites: [www.physmathmgou.ru](http://www.physmathmgou.ru); [www.vestnik-mgou.ru](http://www.vestnik-mgou.ru)

# СОДЕРЖАНИЕ

## ФИЗИКА

- Алиев И. Н., Лятифов Р. Э.* Простая модель механизма зарождения воздушных вихрей в атмосфере .....6
- Аскерова В. И., Калашников Е. В.* Влияние поляризуемости лёгкого атома (и его изотопов) на его перемещение в виде солитона Френкеля-Конторовой по алмазоподобной решётке .....20
- Волкова О. А., Хамис Хассан М. Х., Евдокимов Н. В., Камалов Ю. Т., Камалов Т. Ф.* Проблема темной материи и коррекции формулы гравитационного взаимодействия на межгалактических расстояниях ... 29
- Давиденко В. Д., Дьячков И. И., Иоаннисиан М. В.* Трансмутация нуклидов в blankets термоядерного источника нейтронов .....38
- Зубова Н. В., Амелюшкин И. А.* Молекулярное моделирование взаимодействия потока с рельефным телом. ....51
- Хасанов А. С.* Поля температуры и концентрации вокруг двух нагреваемых электромагнитным излучением капель .....65

# CONTENTS

## PHYSICS

- Aliev I. N., Lyatifov R. E.* A simple model of the mechanism for the generation of air vortices in the atmosphere .....6
- Gladkov S. O., Zaw Aung.* Kinetic approach taking into account the heterogeneities of higher orders in the Navier – Stokes equation .....20
- Volkova O. A., Khamis Hassan M. H., Evdokimov N. V., Kamalov Y. T., Kamalov T. F.* Problem of dark matter and correction of the formula for gravitational interaction at intergalactic distances. ....29
- Davidenko V. D., Dyachkov I. I., Ioannisian M. V.* Transmutation of nuclides in the blanket of a thermonuclear neutron source .....38
- Zubova N. V., Amelyushkin I. A.* Molecular modelling of a flow interaction with a relief body. ....51
- Khasanov A. S.* Temperature and concentration fields around two drops heated by electromagnetic radiation. ....65

УДК 551.51

DOI: 10.18384/2310-7251-2023-2-6-19

## ПРОСТАЯ МОДЕЛЬ МЕХАНИЗМА ЗАРОЖДЕНИЯ ВОЗДУШНЫХ ВИХРЕЙ В АТМОСФЕРЕ

**Алиев И. Н., Ляtifов Р. Э.**

*Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана  
(национальный исследовательский университет)  
105005, г. Москва, ул. 2-я Бауманская, д. 5, Российская Федерация*

### **Аннотация**

**Цель.** Рассмотрение простейшей модели движения точки в неинерциальной системе координат, объясняющей образование вихрей в атмосфере.

**Процедура и методы.** Проведено аналитическое решение для поставленной модели, получена оценка результатов модели и средних параметров реальных циклонов и антициклонов.

**Результаты.** Из полученного решения следует, что траектория имеет вид спирали, направление скрученности которой зависит от направлений силы Кориолиса и скорости точки, что связано с расположением области образования явления относительно полушарий Земли (северное – по часовой, южное – против). Рассмотрена зависимость решения от постановки граничных и начальных условий. Показано, что при математической постановке задач такого рода возникают трудности с введением граничных и начальных условий, связанных с сингулярностью в нулевой точке. На основе предложенной модели, а также из размерностных соображений получена оценка средних размеров циклонов и антициклонов.

**Теоретическая значимость** заключается в аналитическом обосновании связи движения точки в неинерциальной системе отсчёта с возникновением вихрей в атмосфере.

**Ключевые слова:** неинерциальная система, образование вихря, сила Кориолиса

## A SIMPLE MODEL OF THE MECHANISM FOR THE GENERATION OF AIR VORTICES IN THE ATMOSPHERE

*I. Aliev, R. Lyatifov*

*Bauman Moscow State Technical University  
ul. Vtoraya Baumanskaya 5, Moscow 105005, Russian Federation*

### **Abstract**

**Aim.** We consider the simplest model of point motion in a non-inertial coordinate system, which explains the formation of vortices in the atmosphere.

**Procedure and methods.** The given model is analytically solved, and the results and average parameters of real cyclones and anticyclones are assessed.

**Results.** It follows from the obtained solution that the trajectory has the form of a spiral, whose twisting direction depends on the directions of the Coriolis force and the speed of the point, which is associated with the location of the region of the phenomenon formation relative to the Earth hemispheres (northern, clockwise; and southern, counterclockwise). The dependence of the solution on the formulation of boundary and initial conditions is considered. It is shown that in the mathematical formulation of problems of this kind, difficulties arise with the introduction of boundary and initial conditions associated with a singularity at the zero point. The proposed model and dimensional considerations make it possible to estimate the average sizes of cyclones and anticyclones.

**Research implications.** The theoretical significance lies in the analytical substantiation of the connection between the motion of a point in a non-inertial frame of reference and the occurrence of vortices in the atmosphere.

**Keywords:** non-inertial system, vortex formation, Coriolis force

### **Введение**

Вихревое движение исследовали многие известные учёные. Теорий циклонов, начиная с середины XIX в. и по настоящее время, существует достаточно много [1–6], но большинство из них представляет лишь исторический интерес. Некоторые из этих теорий существовали достаточно длительное время, но законченной математической теории, учитывающей многочисленные физические факты, судя по всему, на сегодняшний день нет [7]. Изначально (в конце XIX в.) предполагалось, что вихри образуются за счёт вертикального градиента температур воздуха. Однако в начале XX века эта гипотеза была отвергнута [8]. В настоящее время считается наиболее приемлемым влияние вертикального перепада давлений как основной причины возникновения вихрей в атмосфере – циклонов, антициклонов, смерчей, тайфунов и ураганов [9].

Влияние незаслуженно забытой силы Кориолиса обычно считается вторичным [10]. Заметим, что вкратце влияние вращения Земли было упомянуто в работе [11].

Гидродинамическая теория вихрей получила подробное развитие (см. напр. [12]), причём этот подход имеет достаточно долголетнюю историю. Многочисленные приложения теоремы о циркуляции занимают большую часть статьи

В. Бьеркнеса, опубликованной ещё в 1898 г. [13]. В ней есть разделы, посвящённые созданию вращения посредством нагрева, принципу Архимеда, движению воздуха в дымоходе, пассатам, сухопутным и морским бризам, муссонам, циклонам, антициклонам и циркуляции в океанах. Интересно отметить, что статья многообещающе заканчивается заявлением “Fortsetzung folgt” или «продолжение следует». Современному развитию идей, изложенных в этой работе, была посвящена публикация А. Дж. Торпа, Х. Волкерта и М. Дж. Зимянски [14].

Однако во всех этих исследованиях подход к объяснению появления циклонов был чисто гидродинамический. В настоящем же исследовании решение частного случая задачи о движении точки в неинерциальной системе отсчёта приводит к выводу о связи этой силы с возникновением вихрей в атмосфере. Причём, что на наш взгляд существенно, теория вихрей не представляет возможным получения спиралеобразной структуры циклона, как это будет показано ниже (см. рис. 5).

*Замечание.* Хотелось бы обратить внимание на одно обстоятельство. Вихревые трубки или должны быть замкнуты, или начинаться и оканчиваться на поверхности [12; 18], причём не очень ясно, что должно быть на торцевых окончаниях этой трубки. Видимо, для поддержания этого режима там должны быть некоторые источники. Именно это обстоятельство нашло несколько неожиданное применение в другой области, что будет опубликовано в работе [19]. В этой статье теория сверхпроводимости Абрикосова объясняется наличием магнитных трубок, которые можно трактовать как нити с вихревыми токами с возможными источниками в виде магнитных монополей на торцах вихревых трубок, т. е. на поверхности.

В этом случае учёт коллективного влияния совокупности трубок приведёт к структуре магнитного поля сверхпроводника второго рода, квантование которого может подтвердить существование гипотетических монополей.

### Модель

Рассмотрим двумерное движение точки массы  $m$  в горизонтальной плоскости неинерциальной системы отсчёта, вращающейся с угловой скоростью  $\omega$  (рис. 1). Уравнение движения имеет вид:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{ц\acute{o}} + \vec{F}_k \quad (1)$$

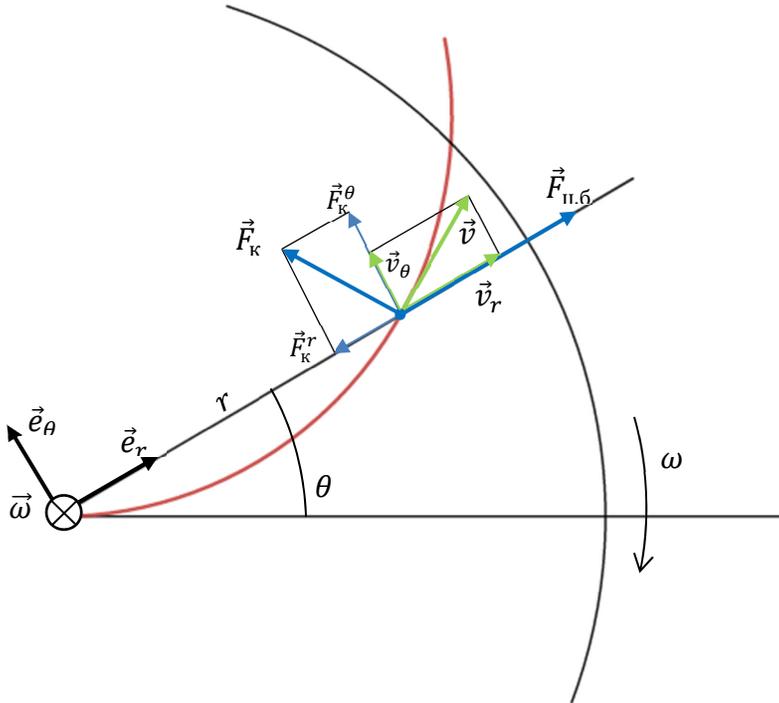
где:  $\vec{F}_{ц\acute{o}} = m\omega^2 \vec{r}$  – центробежная сила инерции,  
 $\vec{F}_k = -2m[\vec{\omega}, \vec{v}]$  – кориолисова сила.

Решая задачу в полярных координатах, скорость и, соответственно, кориолисову силу разбиваем на радиальную и трансверсальную составляющие:

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_\phi, \quad \vec{v}_r = \dot{r}\vec{e}_r, \quad \vec{v}_\phi = r\dot{\phi}\vec{e}_\phi, \quad (2)$$

$$\vec{F}_k = -2m[\vec{\omega}, \vec{v}_r] - 2m[\vec{\omega}, \vec{v}_\phi] = \vec{F}_k^\phi + \vec{F}_k^r \quad (3).$$

где  $\vec{e}_r$  и  $\vec{e}_\phi$  – соответствующие орты.



**Рис. 1 / Fig. 1.** Динамика движения точки в неинерциальной системе отсчёта / Dynamics of point motion in non-inertial frame of reference

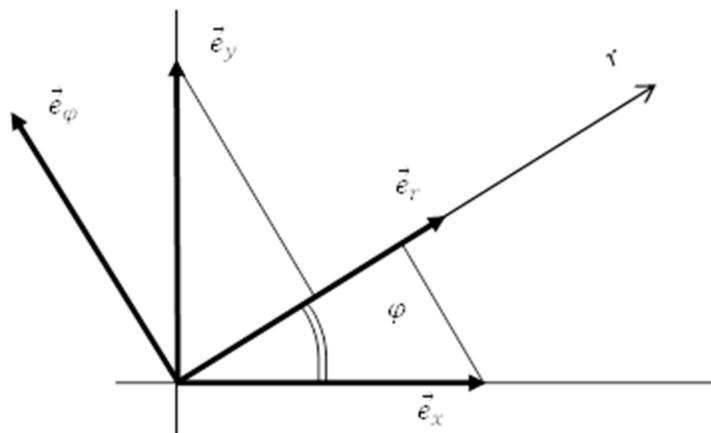
Источник: составлено авторами.

Объединяя (1) – (3), получаем:

$$\begin{aligned}
 m \frac{d}{dt} (\vec{v}_r + \vec{v}_\varphi) &= m\omega^2 \vec{r} - 2m[\vec{\omega}, \vec{v}] \\
 m \frac{d}{dt} (v_r \vec{e}_r + v_\varphi \vec{e}_\varphi) &= m\omega^2 r \vec{e}_r - 2m[\vec{\omega}, \vec{v}_r] - 2m[\vec{\omega}, \vec{v}_\varphi] \\
 \frac{d}{dt} (v_r \vec{e}_r + v_\varphi \vec{e}_\varphi) &= \omega^2 r \vec{e}_r + 2\omega v_r \vec{e}_\varphi - 2\omega v_\varphi \vec{e}_r \\
 \frac{dv_r}{dt} \vec{e}_r + v_r \frac{d\vec{e}_r}{dt} + \frac{dv_\varphi}{dt} \vec{e}_\varphi + v_\varphi \frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} &= \vec{e}_r (\omega^2 r - 2\omega v_\varphi) + \vec{e}_\varphi 2\omega v_r
 \end{aligned} \quad (4)$$

В последнее соотношение вошли производные от ортов в полярных координатах. В декартовых координатах этот вопрос не возникал, т. к. орты были жёстко привязаны к неподвижной системе координат и не менялись во времени по направлению.

Для вывода этих производных традиционно запишем, как видно из рис. 2, соотношения между ортами неподвижной декартовой и подвижной полярной системами координат и продифференцируем записанные соотношения с учётом того, что  $\dot{e}_x = 0, \dot{e}_y = 0$  (напомним, что точка означает производную по времени).



**Рис. 2 / Fig. 2.** К выводу производных ортов в полярных координатах / Derivation of derivatives of unit vectors in polar coordinates

Источник: по данным авторов.

$$\begin{cases} \vec{e}_r = \vec{e}_x \cos \varphi + \vec{e}_y \sin \varphi \\ \vec{e}_\varphi = -\vec{e}_x \sin \varphi + \vec{e}_y \cos \varphi \\ \dot{\vec{e}}_r = (-\vec{e}_x \sin \varphi + \vec{e}_y \cos \varphi) \dot{\varphi} = \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi \\ \dot{\vec{e}}_\varphi = (-\vec{e}_x \cos \varphi - \vec{e}_y \sin \varphi) \dot{\varphi} = -\dot{\varphi} \vec{e}_r \end{cases} \quad (5)$$

Подставив (5) в (4) и разделяя слагаемые на радиальную и тангенциальную составляющие, получаем систему:

$$\begin{cases} \dot{v}_r - \omega^2 r = v_\varphi (\dot{\varphi} - 2\omega) \\ \dot{v}_\varphi = v_r (2\omega - \dot{\varphi}) \end{cases} \quad (6)$$

Дальнейшее решение системы (6) можно провести двояко. На первом этапе, введя новые переменные  $z(t) = \frac{\dot{r}(t)}{r(t)}$  и  $y(t) = \dot{\varphi}(t) - \omega$  (соответственно,  $\dot{y} = \ddot{\varphi}$ ), из

(6) получаем систему:

$$\begin{cases} \dot{y} + z2y = 0 \\ \dot{z} + z^2 = y^2 \end{cases} \quad (7),$$

которая сводится к нелинейному дифференциальному уравнению:

$$2y\ddot{y} - 3\dot{y}^2 + 4y^4 = 0 \quad (8).$$

Введя новую функцию  $\dot{y}^2(y)$  уравнение (8) удаётся проинтегрировать с использованием метода варьирования постоянной:  $\dot{y}^2 = -4y^4 + C_1 y^3$  или что тоже самое:

$$\ddot{\phi}^2 = -4(\dot{\phi} - \omega)^4 + C_1(\dot{\phi} - \omega)^3 \quad (9).$$

Постоянную интегрирования найдём из следующих соображений. Пусть при  $t = 0_+$  (т. е. сразу после начала движения)  $\dot{\phi}(0_+) = \ddot{\phi}(0_+) = 0$ .

Второе из начальных условий, видимо, нуждается в некоторых разъяснениях: ввиду того, что  $r$  естественно положить равным нулю при  $t = 0$ , тогда обе составляющие сил инерции: центробежная и радиальная обращаются в ноль, что приводит к занулению всех составляющих ускорения. Тогда с учётом (9):  $C_1 = -4\omega$  и  $\ddot{\phi}^2 = -4(\dot{\phi} - \omega)^3 \dot{\phi}$  получаем:

$$\begin{cases} r(t) = \frac{v_0}{\omega} \sqrt{(\omega t)^2 + 1} \cdot \arctg \omega t \\ \phi(t) = \omega t - \arctg \omega t \end{cases} \xrightarrow{\omega t \gg 1} \begin{cases} r(t) = v_0 t \cdot \pi / 2 \\ \phi(t) = \omega t - \pi / 2 \end{cases} \quad (10).$$

Последнее уравнение подстановками  $p(t) = \dot{\phi}(t)$  и  $\frac{p(t)}{\omega} = \sin^2 \alpha(t)$  приводит

к решению вида:  $\pm \omega t + C_2 = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{\omega - p}}$ .

Константу интегрирования  $C_2$  вновь находим из начальных условий:  $p(0_+) = \dot{\phi}(0_+) = 0$ .

С учётом  $C_2 = 0$  получаем:

$$p = \dot{\phi} = \frac{d\phi}{dt} = \omega \frac{(\omega t)^2}{1 + (\omega t)^2} \quad (11).$$

После разделения переменных и несложного интегрирования:

$$\phi + C_3 = \omega t - \arctg \omega t.$$

С начальным условием  $\phi(0_+) = 0$ , окончательно для угла получаем зависимость:

$$\phi(t) = \omega t - \arctg \omega t \quad (12).$$

Далее перепишем первое из уравнений (6) в виде:  $\dot{v}_r - \omega^2 r = r\dot{\phi}(\dot{\phi} - 2\omega)$ , в которое подставим (11).

После преобразований и замены независимой переменной  $\tau = \omega t$  вновь получаем нелинейное дифференциальное уравнение:

$$(1 + \tau^2)^2 \frac{d^2 r}{d\tau^2} - r = 0 \quad (13).$$

Учитывая, что решение настоящей задачи и так изобилует математическими преобразованиями, для записи решения (13) воспользуемся готовым справочным материалом – формулой 2.365 при  $a = -1$  из [15].

Тогда:  $\frac{r}{\sqrt{\tau^2 + 1}} = C_4 + C_5 \arctg \tau$  (14).

Учитывая, что  $r(0_+) = 0$  получаем, что  $C_4 = 0$ . Далее:

$$v_r(t) = \frac{dr}{dt} = C_5 \frac{d}{dt} \left[ \sqrt{(\omega t)^2 + 1} \cdot \operatorname{arctg}(\omega t) \right] =$$

$$= C_5 \left[ \frac{\omega^2 t}{\sqrt{(\omega t)^2 + 1}} \operatorname{arctg}(\omega t) + \sqrt{(\omega t)^2 + 1} \frac{\omega}{(\omega t)^2 + 1} \right].$$

Из  $v_r(0_+) = v_0$  следует, что  $C_5 = \frac{v_0}{\omega}$ . Окончательно (14) приобретает вид:

$$r(t) = \frac{v_0}{\omega} \sqrt{(\omega t)^2 + 1} \cdot \operatorname{arctg} \omega t \quad (15),$$

что совместно с (12) и является решением задачи.

Данное решение представляет собою спираль. Стоит также заметить, что при больших значениях времени система вырождается в классическую спираль Архимеда, сдвинутую по фазе:

$$\begin{cases} r(t) = \frac{v_0}{\omega} \sqrt{(\omega t)^2 + 1} \cdot \operatorname{arctg} \omega t \\ \varphi(t) = \omega t - \operatorname{arctg} \omega t \end{cases} \xrightarrow{\omega t \gg 1} \begin{cases} r(t) = v_0 t \cdot \pi / 2 \\ \varphi(t) = \omega t - \pi / 2 \end{cases} \quad (16).$$

После того как задача была решена и ответ в аналитическом виде (16) был получен, возник вопрос, как влияют начальные условия на структуру решения. Для этого начальную систему (6) преобразуем по-другому. Подставив определения составляющих скоростей (2) и введя замену  $y(t) = \dot{\varphi}(t) - \omega$ , приходим к:

$$\begin{cases} \ddot{r} - y^2 r = 0 \\ r\dot{y} + 2\dot{r}y = 0 \end{cases} \quad (17).$$

Разделив во втором уравнении переменные после интегрирования и подстановки в первое из уравнений (17), получаем:

$$-2 \frac{\dot{r}}{r} = \frac{\dot{y}}{y}$$

$$y = \frac{C}{r^2}$$

$$r^3 \ddot{r} = C \quad (18).$$

Если умножить обе части соотношения (18) на  $2r\dot{r}$ , то получается уравнение в полных дифференциалах. Однако проще вновь воспользоваться справочником [15], формула 6.209.

Решение выписывается в неявном виде:

$$(C_1 t - C_2)^2 + C_1 r^2 + C = 0.$$

Из начального условия

$$r(0) = 0 \quad (19)$$

следует  $C_2^2 + C = 0$  и соответственно:  $(C_1 t)^2 - 2C_1 C_2 t + C_1 r^2 = 0$  (20).

Продифференцировав (20) по времени и вновь воспользовавшись начальным условием (19), получаем  $C_1^2 2t - 2C_1 C_2 + 2C_1 r \frac{dr}{dt} = 0$  и соответственно  $C_1 C_2 = 0$ .

Очевидным образом  $C_1 \neq 0$ .

Тогда  $C_2 = 0$ , и несложно показать, что  $r = v_0 t$  (21).

Из первого из уравнений (17) с учётом того, что  $\ddot{r} = \frac{dv_0}{dt} = 0$ , легко получается  $\varphi = \omega t + C_3 = \omega t$  (22).

Совокупность решений (16) переходит (с точностью до несущественных множителей) в (21, 22) асимптотически при  $\omega t \gg 1$ . Учитывая, что уже через сутки  $\omega t \sim 6$ , можно считать, что полученные решения близки и потому модель может считаться приемлемой для объяснения циклона.

### **Замечание к определению начальных условий (математическое дополнение)**

Некоторое различие в решениях (16) и (21, 22), видимо, связано с начальными и граничными условиями, Дело в том, что при решении возникших дифференциальных уравнений они, естественно, потребовались. Однако, специфика задач решаемых в полярной (сферической, цилиндрической) системе координат предполагает появления сингулярности решения в точке  $r = 0$  ( $\rho = 0$ ). С этой точкой связана некоторая особенность. Так, если в декартовых координатах положить равной нулю одну из координат, например,  $x = 0$ , то другая координата  $y$  может принимать любое фиксированное значение. Если же в полярных координатах положить  $r$  равным нулю, то в отношении второй координаты  $\varphi$  возникает неопределённость. В силу этого, при записи начальных условий в задачах, подобных рассматриваемой, возникает проблема, связанная с  $\varphi(0_+) = ?$ , а тем более  $\dot{\varphi}(0_+)$  и  $\ddot{\varphi}(0_+)$ .

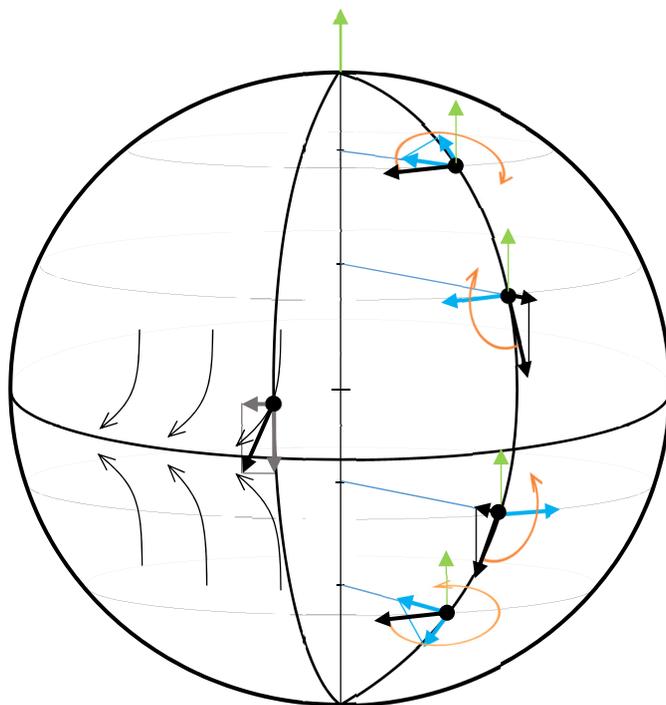
Подобная ситуация также имеет место при попытках определения понятия  $\delta$ -функции в упомянутых системах координат. Некоторые положения, связанные с этим вопросом, рассматриваются в задаче 2.7 [16, с. 103].

Причина этого достаточно серьёзна. Дело в том, что есть разница для предельного перехода  $r \rightarrow 0$  в математическом и физическом плане. Если в формальной математике ничто не мешает устремить  $r$  к нулю, причём  $r$  может принимать любые сколь угодно малые значения, то в физическом смысле есть всегда ограничения, связанные с размерами реальных физических объектов, фигурирующих в задаче или, что ещё серьёзнее, со структурой пространства. Вкратце этот вопрос был затронут в заключении пособия [16].

Поэтому более корректной была бы запись начального условия не  $r(0) = 0$ , а, например,  $r(0) = r_0$ , где  $r_0$  характерный минимальный размер задачи. Легко убедиться, что и подобное начальное условие по-прежнему приводит к решению спирального вида.

### Оценка размеров циклона

На рис. 3 схематически представлены соответствующие скорости и силы. Здесь скорость пассата  $\vec{v} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}$  разложена на составляющие вдоль меридиана и параллели, соответственно разлагается сила Кориолиса  $\vec{F}_k = \vec{F}_{\parallel} + \vec{F}_{\perp}$ .



**Рис. 3 / Fig. 3.** Распределение скоростей и сил Кориолиса при образовании вихрей в атмосфере / Distribution of velocities and Coriolis forces during the formation of vortices in the atmosphere.

Источник: составлено авторами.

*Замечание.* Судя по направлению сил Кориолиса по отношению к скоростям (рис. 3) завихрения в северном полушарии, вызванные силой Кориолиса направлены по часовой стрелке. Видимо, предложенная модель скорее объясняет образование антициклона. Аналогичная ситуация возникает в южном полушарии, но там вращение происходит против часовой стрелки (рис. 3). Ввиду некоторого разночтения терминологии будем считать, и это считается общепринятым, что единственно сколь-нибудь значительная разница между тропическими циклонами, циклонами, антициклонами, тайфунами и ураганами – это географическое расположение и направление кругового завихрения воздушных потоков.

Решение системы (12, 15), полученное численным моделированием (рис. 4), по форме действительно напоминает завихрения вихря в атмосфере (рис. 5). В

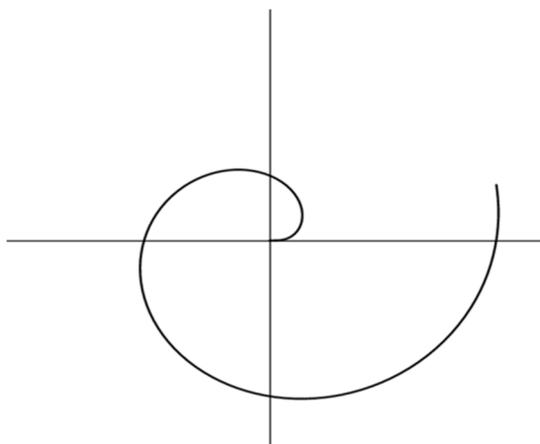
самом деле, большинство циклонов рождается в экваториальной области (тропические циклоны), где постоянно присутствуют ветры-пассаты. Их можно рассматривать в качестве первопричины образования вихревого движения масс воздуха по окружности.

В пользу последнего обстоятельства говорит и тот факт, что на экваторе горизонтальная составляющая силы Кориолиса равна нулю, поэтому в зоне  $0^{\circ} - 5^{\circ}$  широты мощных вихрей не наблюдается.

Рассматриваемая модель может быть применена к сильным мелкомасштабным вихрям (смерчи, торнадо, тромбы), которые могут вращаться в любую сторону. Вертикальное движение в них связано с термической стратифицированной неустойчивостью из-за перепада температур между грозовым облаком и землёй (или океаном). В этом случае завихрение вихря можно объяснить только силой Кориолиса. В случае принятия этой модели достаточно просто удаётся объяснить и горизонтальное же движение вихря как целого (с учётом эффекта Магнуса).

В связи с этим, уместно вспомнить лекцию, прочитанную Н. Е. Жуковским в 1891 г. в пользу гельмгольцовского фонда, цитату из которой мы сочли нужным привести: «... сложные аналитические формулы освящались и представлялись в ясной наглядной форме, благодаря удачным геометрическим представлениям» (подробнее см. в [17]).

При сравнении рис. 4 и рис. 5 видно, что характерным размером циклона можно считать оборот спирали за один период, тогда  $R = T v_0 \sim \frac{2\pi v_0}{\omega}$ , что также является следствием размерностных соображений.



**Рис. 4 / Fig. 4.** Траектория тела во вращающейся системе отсчёта / Body trajectory in a rotating frame of reference.

Источник: составлено авторами.



**Рис. 5 / Fig. 5.** Фотография циклона / Photo of a cyclone.

Источник: Tropical Cyclone Debbie (13P) over eastern Australia [Электронный ресурс] // Wikimedia Commons : [сайт]. URL: <https://clck.ru/34guQg> (дата обращения: 12.01.2023).

Проведём соответствующие оценки. Характерные скорости пассатов  $v_0 \sim 5-10 \text{ м/с}$ , угловая скорость вращения Земли  $\omega = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600} \approx 7.25 \cdot 10^{-5} \text{ 1/с}$ . Тогда средний размер циклона  $R \sim \frac{2\pi v_0}{\omega} \sim 400-800 \text{ км}$ . Учитывая, что, согласно экспериментальным данным, тропические циклоны в поперечине обычно 200–900 км, можно считать полученный результат вполне приемлемым, а решение задачи – простейшей моделью циклона или антициклона.

### Заключение

По причинам, частично изложенным во введении, в современной периодической литературе нет статей, посвящённых законченной физико-математической теории вихрей в атмосфере. Публикации, в основном, носят описательный характер метеорологических наблюдений. Связано это также с тем, что попытки расчёта трёхмерного термогазодинамического течения, привязанного к множеству физических факторов, которые надо ввести в уравнения или граничные и начальные условия задачи, практически неразрешимы даже для современных ЭВМ. Отметим ещё одно обстоятельство. В околонуучной литературе регулярно появляются гипотезы, строгость которых вызывает сомнение. Так в опубликованной книге [18] в качестве причины возникновения гигантского вихря называют взаимодействие дипольного электрического момента молекул воды с магнитным полем Земли. Подобная модель не выдерживает никакой критики, хотя

бы из-за несравнимости размеров причины и следствия, не говоря уж о коллективных эффектах.

*Статья поступила в редакцию 18.01.2023 г.*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гилл А. Динамика атмосферы и океана. М.: Мир, 1986. 415 с.
2. Frank W. M. The structure and energetics of the Tropical Cyclone I. Storm structure // Monthly Weather Review. 1977. Vol. 105. Iss. 9. P. 1119–1135. DOI: 10.1175/1520-0493(1977)105<1119:TSAEOT>2.0.CO;2.
3. Ooyama K. V. Conceptual evolution of the theory and modeling of the tropical cyclone // Journal of the Meteorological Society of Japan. Ser. II. 1982. Vol. 60. Iss. 1. P. 369–380. DOI: 10.2151/jmsj1965.60.1\_369.
4. Emanuel K. A. The finite-amplitude nature of tropical cyclogenesis // Journal of the Atmospheric Sciences. 1989. Vol. 46. No. 22. P. 3431–3456. DOI: 10.1175/1520-0469(1989)046<3431:TFANOT>2.0.CO;2.
5. Emanuel K. A. The theory of hurricanes // Annual Review of Fluid Mechanics. 1991. Vol. 23. P. 179–196. DOI: 10.1146/annurev.fl.23.010191.001143.
6. Chan J. C. L. The physics of tropical cyclone motion // Annual Review of Fluid Mechanics. 2005. Vol. 37 (1). P. 99–128. DOI: 10.1146/annurev.fluid.37.061903.175702.
7. Перевезенцев Ю. П., Мохов И. И., Елисеев А. В. Теория общей циркуляции атмосферы. Казань: Изд-во Казанского университета, 2013. 224 с.
8. Погосян Х. П. Общая циркуляция атмосферы. М.: Гидрометеиздат, 1972. 394 с.
9. Лучков Б. Можно ли укротить ураганы // Научная сессия МИФИ-2005: сборник научных трудов. Т. 7: Астрофизика и космонавтика. Математические методы. Ускорительная техника. М.: МИФИ, 2005. С. 62–63.
10. Пермяков М. С. Необходимые условия развития тропического циклона // Метеорология и гидрология. 1992. № 7. С. 54–60.
11. Мельников В. П., Смутьский И. И. Механизмы атмосферных вихрей // Криосфера Земли. 1997. Т. 1. № 1. С. 87–96.
12. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе И. В. Теоретическая гидромеханика. М.: ГИФМЛ, 1963. Т. 1. 584 с.
13. Bjerknes V. Uber einer hydrodynamischen Fundamentalsatz und seine Anwendung besonders auf die Mechanik der Atmosphäre und des Weltmeeres // Kongliga Svenska Vetenskaps-Academiens Nya Handlingar. 1898. Bd. 31. No. 4. P. 1–35.
14. Thorpe A. J., Volkert H., Ziemanski M. J. The Bjerknes' circulation theorem. A historical Perspective // Bulletin of the American Meteorological Society. 2003. Vol. 84. Iss. 4. P. 471–480. DOI: 10.1175/BAMS-84-4-471.
15. Камке Э. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1965. 703 с.
16. Алиев И. Н. Термодинамика и электродинамика сплошных сред: учебное пособие для студентов высших технических учебных заведений. М.: Издательство МГТУ, 2018. 406 с.
17. Жуковский Н. Е. Теоретические основы воздухоплавания. М.: Гостехиздат, 1925. 306 с.
18. Манташьян П. Н. Вихри: от молекул до галактик. Ставрополь: Юрсит, 2007. 106 с.
19. Алиев И. Н., Самедова С. А., Ляtifов Р. Э. Квазиклассическое квантовое обобщение уравнений Лондонов и гипотеза монополей. Вестник МГТУ им Н. Э. Баумана. Сер.

Естественные науки 2023 №4(109) С.39-51. DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2023-4-39-51>.

## REFERENCES

1. Gill A. *Atmosphere-ocean dynamics*. New York. Acad. Press, 1982. 662 p.
2. Frank W. M. The structure and energetics of the tropical cyclone I. Storm structure. In: *Monthly Weather Review*, 1977, vol. 105, iss. 9, pp. 1119–1135. DOI: 10.1175/1520-0493(1977)105<1119:TSAEOT>2.0.CO;2.
3. Ooyama K. V. Conceptual evolution of the theory and modeling of the tropical cyclone. In: *Journal of the Meteorological Society of Japan. Ser. II*, 1982, vol. 60, iss. 1, pp. 369–380. DOI: 10.2151/jmsj1965.60.1\_369.
4. Emanuel K. A. The finite-amplitude nature of tropical cyclogenesis. In: *Journal of the Atmospheric Sciences*, 1989, vol. 46, no. 22, pp. 3431–3456. DOI: 10.1175/1520-0469(1989)046<3431:TFANOT>2.0.CO;2.
5. Emanuel K. A. The theory of hurricanes. In: *Annual Review of Fluid Mechanics*, 1991, vol. 23, pp. 179–196. DOI: 10.1146/annurev.fl.23.010191.001143.
6. Chan J. C. L. The physics of tropical cyclone motion. In: *Annual Review of Fluid Mechanics*, 2005, vol. 37 (1), pp. 99–128. DOI: 10.1146/annurev.fluid.37.061903.175702.
7. Perevezentsev Yu. P., Mokhov I. I., Yeliseyev A. V. *Teoriya obshchei tsirkulyatsii atmosfery* [Theory of general circulation of the atmosphere]. Kazan. Kazan University Publ., 2013. 224 p.
8. Pogosyan Kh. P. *Obshchaya tsirkulyatsiya atmosfery* [General Atmospheric Circulation]. Moscow, Gidrometeoizdat Publ., 1972. 394 p.
9. Luchkov B. [Is it possible to tame hurricanes?]. In: *Nauchnaya sessiya MIFI-2005. T. 7: Astrofizika i kosmonavtika. Matematicheskie metody. Uskoritel'naya tekhnika* [Scientific session MEPhI-2005. Vol. 7: Astrophysics and astronautics. Mathematical methods. Accelerating technology]. Moscow, MEPhI Publ., 2005, pp. 62–63.
10. Permyakov M. S. [Necessary conditions for the development of a tropical cyclone]. In: *Meteorologiya i gidrologiya* [Meteorology and Hydrology], 1992, no. 7, pp. 54–60.
11. Melnikov V. P., Smulsky I. I. [Mechanisms of atmospheric vortices]. In: *Kriosfera Zemli* [Cryosphere of the Earth], 1997, vol. 1, no. 1, pp. 87–96.
12. Kochin N. E., Kibel I. A., Roze I. V. *Teoreticheskaya gidromekhanika* [Theoretical Hydro-mechanics]. Moscow, GIFML Publ., 1963. 584 p.
13. Bjerknæs V. Über einer hydrodynamischen Fundamentalsatz und seine Anwendung besonders auf die Mechanik der Atmosphäre und des Weltmeeres. In: *Kongliga Svenska Vetenskaps-Academiens Nya Handlingar*, 1898, Bd. 31, no. 4, pp. 1–35.
14. Thorpe A. J., Volkert H., Ziemianski M. J. The Bjerknæs' circulation theorem. A historical Perspective. In: *Bulletin of the American Meteorological Society*, 2003, vol. 84, iss. 4, pp. 471–480. DOI: 10.1175/BAMS-84-4-471.
15. Kamke E. *Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen, I, Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Leipzig, B. G. Teubner, 1977.
16. Aliev I. N. *Termodinamika i elektrodinamika sploshnykh sred* [Thermodynamics and electrodynamics of continuous media]. Moscow, Bauman Moscow State Technical University Publ., 2018. 406 p.
17. Zhukovsky N. E. *Teoreticheskie osnovy vozdukhoplavaniya* [Theoretical foundations of aeronautics]. Moscow, Gostekhizdat Publ., 1925. 306 p.
18. Mantash'yan P. N. *Vikhri: ot molekul do galaktik* [Vortices: from molecules to galaxies]. Stavropol, Yurkit Publ., 2007. 106 p.

19. Aliev I. N., Samedova S. A., Lyatifov R. E. [Quasi-classical quantum generalization of the London equations and the monopole hypothesis]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta im. N. E. Baumana. Seriya "Yestestvennye nauki"* [Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences], 2023, no. 4 (109), pp. 39–51. DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2023-4-39-51>.

---

### ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

*Алиев Исмаил Новруз оглы* – доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Физика» Московского государственного технического университета имени Н. Э. Баумана;

e-mail: [alievprof@yandex.ru](mailto:alievprof@yandex.ru);

*Ляtifов Роман Эйнулла оглы* – студент факультета фундаментальных наук Московского государственного технического университета имени Н. Э. Баумана;

e-mail: [lyatifovrea@student.bmstu.ru](mailto:lyatifovrea@student.bmstu.ru)

### INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

*Ismail Novruz oglu Aliev* – Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Department of Physics, Bauman Moscow State Technical University;

e-mail: [alievprof@yandex.ru](mailto:alievprof@yandex.ru);

*Roman Eynulla oglu Lyatifov* – Student, Department of Fundamental Sciences, Bauman Moscow State Technical University;

e-mail: [lyatifovrea@student.bmstu.ru](mailto:lyatifovrea@student.bmstu.ru)

---

### ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Алиев И. Н., Ляtifов Р. Э. Простая модель механизма зарождения воздушных вихрей в атмосфере // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2023. № 2. С. 6–19.

DOI: [10.18384/2310-7251-2023-2-6-19](https://doi.org/10.18384/2310-7251-2023-2-6-19).

### FOR CITATION

Aliev I. N., Lyatifov R. E. A simple model of the mechanism for the generation of air vortices in the atmosphere. In: *Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*, 2023, no. 2, pp. 6–19.

DOI: [10.18384/2310-7251-2023-2-6-19](https://doi.org/10.18384/2310-7251-2023-2-6-19).

УДК 538.9+538.931

DOI: 10.18384/2310-7251-2023-2-20-28

## ВЛИЯНИЕ ПОЛЯРИЗУЕМОСТИ ЛЁГКОГО АТОМА (И ЕГО ИЗОТОПОВ) НА ЕГО ПЕРЕМЕЩЕНИЕ В ВИДЕ СОЛИТОНА ФРЕНКЕЛЯ-КОНТОРОВОЙ ПО АЛМАЗОПОДОБНОЙ РЕШЁТКЕ

**Аскерова В. И., Калашников Е. В.**

*Государственный университет просвещения*

*141014, Московская обл., г. Мытищи, ул. Веры Волошиной, д. 24, Российская Федерация*

### **Аннотация**

**Цель:** выяснить, как сочетание массы атома водорода и гелия (с учётом его изотопов) и его поляризуемости влияют на перемещение солитона Френкеля-Конторовой.

**Процедура и методы.** Используются соотношения (полученные авторами ранее), связывающие характеристики атома и характеристики решётки, через которую перемещается солитон.

**Результаты.** Обнаружена сильная взаимосвязь между массой атома и его поляризуемостью, которая определяет строение солитона.

**Теоретическая и/или практическая значимость.** Показано, что возможность перемещения солитона определяется и массой атома и его поляризуемостью вплоть до того, что из-за поляризуемости, например, атом гелия перемещаться не будет.

**Ключевые слова:** Солитон Френкеля-Конторовой, поляризуемость атома, массы изотопов водорода и гелия

## EFFECT OF POLARIZABILITY OF A LIGHT ATOM (AND ITS ISOTOPES) ON ITS MOVEMENT IN THE FORM OF A FRENKEL-KONTOROVA SOLITON THROUGH A DIAMOND-LIKE LATTICE

**V. Askerova, E. Kalashnikov<sup>1</sup>**

*State University of Education*

*ul. Very Voloshinoi 24, Mytishchi 141014, Moscow Region, Russian Federation*

### **Abstract.**

**Aim.** An attempt is made to find how the combination of the mass of an atom of hydrogen and helium (taking into account its isotopes) and its polarizability affect the movement of a Frenkel-Kontorova soliton.

**Methodology.** Use is made of the relations (previously obtained by the authors) to relate the characteristics of the atom with the characteristics of the lattice through which the soliton moves.

**Results.** A strong relationship is found between the mass of an atom and its polarizability, which determines the soliton structure.

**Research implications.** It is shown that the possibility of moving a soliton is determined by both the mass of the atom and its polarisability; for example, due to polarizability, a helium atom will not move.

**Keywords:** Frenkel-Kontorova soliton, atom polarizability, masses of hydrogen and helium isotopes

### Введение

Лёгкие атомы (атомы водорода, гелия и их изотопов) могут перемещаться по решётке кремния в виде коллектива, состоящего из самого лёгкого атома и сопровождающих его обратимых смещений ближайших атомов решётки. Такое перемещение описывается солитоном Френкеля-Конторовой [3; 6] и имеет характеристики классической нелинейной механики.

Лёгкие атомы имеют изотопы. И масса такого атома влияет на перемещение солитона. Между тем, атомы водорода и гелия, помимо разных масс, могут быть в разных квантовых состояниях, определяемых состояниями электронов в атоме. Квантовые состояния определяют поляризуемость атома. Эти состояния не зависят от массы атома, поскольку отношение  $(\Delta E/E)$  изменения энергии  $\Delta E$  электрона к энергии его состояния  $E$  оказывается того же порядка, что и отношение массы электрона к массе ядра  $(\Delta E/E \sim m_e/M_n \sim 10^{-3})$  [1]. В таком случае, можно было бы ожидать, что поляризуемость атома не будет влиять на перемещения солитона. Но поляризуемость атома есть реакция атома на возможные изменения внутрикристаллического электрического поля. В таком случае важно выяснить как квантовое состояние (внутреннее состояние) атома, образующего коллектив вместе с обратимыми смещениями ближайших атомов решётки и перемещающегося в виде солитона, может сказываться на его перемещения.

### 1. Модель

Внутри кристалла действуют сильные электрические поля порядка  $10^7 \div 10^8 \frac{V}{cm}$ . Такие поля в состоянии сделать из атома диполь. Превращение атома в диполь под воздействием внешнего электрического поля характеризуется поляризуемостью. Поле диполя будет стремиться уменьшить потенциальную энергию взаимодействия этого диполя с внешним по отношению к нему локальным электрическим полем, увеличивая при этом упругую энергию взаимодействия атома с окружением. В свою очередь, уменьшение упругой энергии происходит с переходом в соседнюю позицию и сопровождается возникновением диполя атома и его взаимодействием с локальным электрическим полем, вызванным возмущением электронной плотности в окружающем пространстве [6] и т. д. И такое поведение приводит к

перемещению коллектива, состоящего из самого лёгкого атома и сопровождающих его обратимых смещений ближайших атомов решётки. Перемещение лёгкого атома через кристалл описывается солитоном Френкеля-Конторовой [3; 6]:

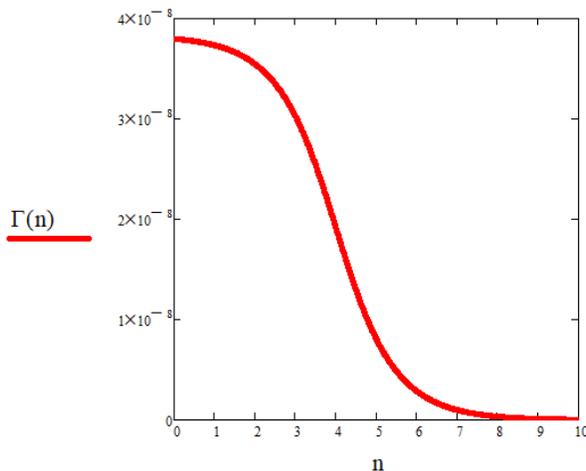
$$\Gamma_{z,n} = \left( 2a_{z,n}/\pi \right) \arctg \left( C_0 \exp \left( - \left( 2\pi/a_{z,n} \right) \sqrt{-A/m^\#} \cdot (t - n\tau) \right) \right). \quad (1)$$

Из этого соотношения следует, что солитон может перемещаться только при условии, что его эффективная масса  $m^\#$  будет иметь отрицательные значения ( $m^\# < 0$ ) [2; 3; 6]. Эффективная масса  $m^\#$  определяется массой самого атома водорода  $m$ , его  $\beta$  – поляризуемостью =  $0.667A^3$ , структурой решётки: числом связей  $Z$  атома водорода с окружением,  $a_n$  – расстоянием между междоузлиями решётки и модулем сдвига решётки  $G = 79.9 \cdot 10^{10} \text{ din/cm}^2$ :

$$m^\# = m \cdot \left( 1 - Z \cdot e^2 / \beta \cdot G \cdot a_n \right)^{-1} \quad (2)$$

Здесь значение  $A$  определяется модулем сдвига для кремния и численно равно  $G a_n^3 / 4\pi^2$ , заряд электрона:  $e = 4,8 \cdot 10^{-10} \text{ g}^{1/2} \cdot \text{cm}^{3/2} / \text{sec}$ .

Полученный солитон описывает движение коллектива, который состоит из самого атома и обратимых смещений окружения. Так, например, рис. 1 показывает переход атома водорода из одного положения в другое. Такой переход позволяет понять какое количество атомов окружения участвует в формировании солитона. В формировании солитона участвует от 9 (и более) атомов ближайшего окружения (хотя количество связей  $Z = 6$ ).



**Рис. 1 / Fig. 1** Часть солитона, образованного атомом водорода и сопровождающими его смещениями девяти ближайших атомов решётки кремния / Part of a soliton, which is formed by the hydrogen atom and the accompanying displacements of nine nearest lattice atoms

Источник: составлено авторами.

## 2. Влияние поляризуемости на перемещение водорода и его изотопов

Из соотношения (2) видно, что эффективную массу контролирует поляризуемость  $\beta$  – атома водорода (см. табл. 1).

Таблица 1 / Table 1

Соотношение поляризуемости и эффективной массы для водорода и его изотопов /  
Ratio of polarizability and effective mass for hydrogen and its isotopes

Атом	Поляризуемость, $\beta$ $10^{-24} \text{ (cm}^3\text{)}$	масса, $m$ , (g) $\times 10^{-24}$	эффективная масса $m^{\#}$ , (g). $\times 10^{-26}$
$^1\text{H}$	0.667	1.67	–2.5059
$^2\text{H}$	0.667	$2 \cdot 1.67$	–5.0118
$^3\text{H}$	0.667	$3 \cdot 1.67$	–7.5176

Источник: составлено авторами на основе [4].

Эффективные массы для водорода и его изотопов отрицательны, это означает, что солитон будет перемещаться.

Поляризуемости  $\beta$  и найденные эффективные массы существенно влияют на перемещение атомов. Так, например, для водорода и его изотопов графики перемещения будут иметь следующий вид, представленный на рис. 2, 2а и 2б.

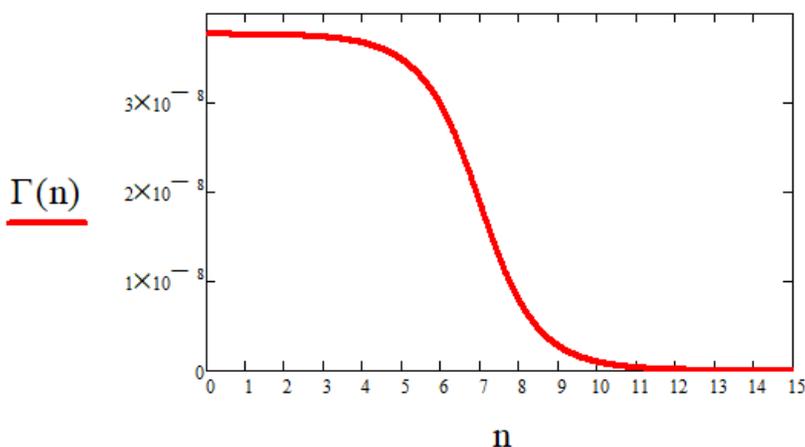
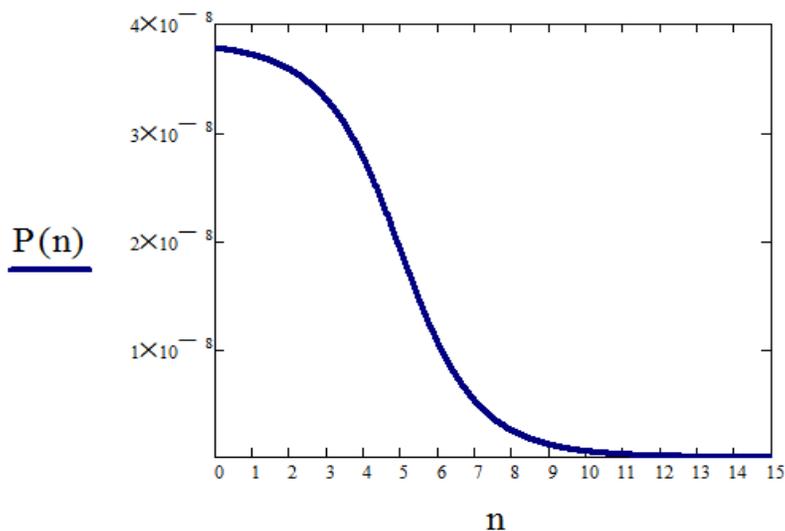


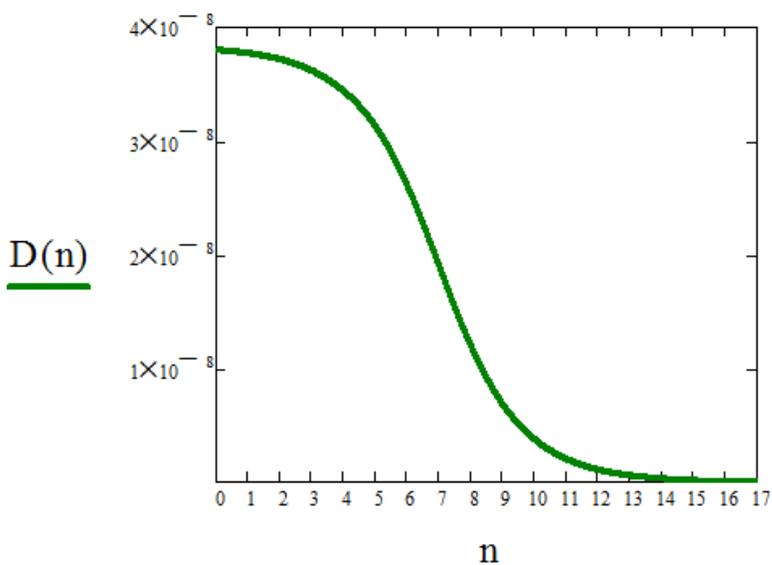
Рис. 2 / Fig. 2 Структура солитона, образованного атомом водорода с  $\beta$  для  $^1\text{H}$  /  
Structure of a soliton formed by a hydrogen atom with  $\beta$  for  $^1\text{H}$

Источник: составлено авторами.



**Рис. 2а / Fig. 2a** Структура солитона, образованного атомом дейтерия с  $\beta$  для  ${}^2\text{H}$  /  
Structure of a soliton formed by a deuterium atom with  $\beta$  for  ${}^2\text{H}$

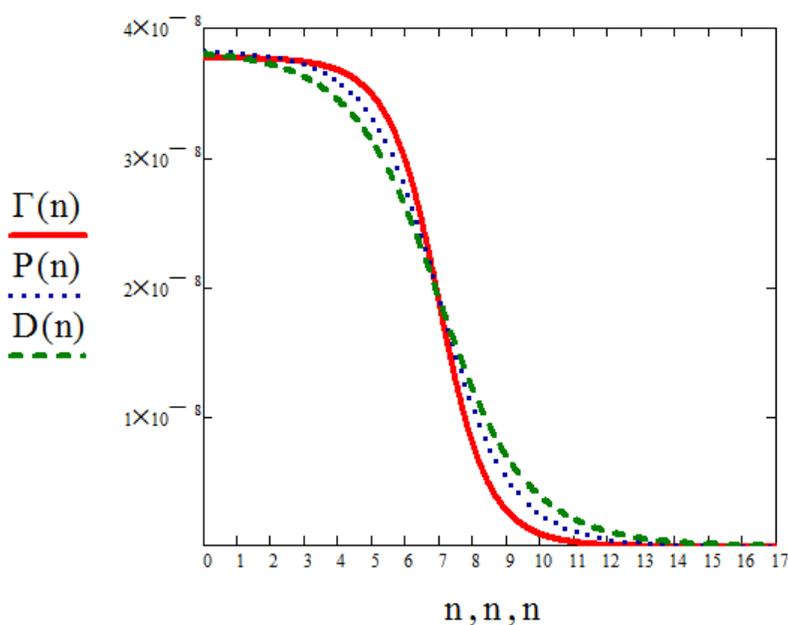
Источник: составлено авторами.



**Рис. 2б / Fig. 2b** Структура солитона, образованного атомом трития с  $\beta$  для  ${}^3\text{H}$  /  
Structure of a soliton formed by a tritium atom with  $\beta$  for  ${}^3\text{H}$

Источник: составлено авторами.

Солитоны, приведённые на рис. 2, 2a и 2b, движутся слева направо. Структура солитонов определяется зависимостью смещения  $\Gamma_{z,n}$  на каждом узле  $n$  виртуальной цепочки и организована числом  $n$  ближайших атомов окружения решётки кремния. Например, для водорода  $^1\text{H}$ , число атомов, участвующих в формировании «ступеньки» – солитона и его перемещения – равно 11. Для дейтерия  $^2\text{H}$  число участников, формирующих солитон, равно 13. А для трития  $^3\text{H}$  число ближайших атомов решётки кремния равно 15. При этом «темп» перехода в соседнее положение у всех этих солитонов разный (см. рис. 3) и определяется скоростью перемещения каждого из солитонов [3]. Верхняя часть (горизонтальная) соответствует ситуации, при которой атом водорода уже завершил переход на расстояние, равное междоузельному расстоянию. Остальные узлы виртуальной цепочки сразу начинают смещаться каждый на своё расстояние и со своей скоростью (например, на рис. 2b для трития узел с номером 7 теперь же сместился на расстояние равное  $2 \times 10^{-8}$  см). Эта часть солитона соответствует неустойчивым положениям атома водорода, которые завершатся достижением смещения, равного смещению на дистанцию, равную междоузельному расстоянию. Нижняя горизонтальная часть структуры солитона соответствует ситуации, при которой возмущение не достигло узла виртуальной цепочки.



**Рис. 3 / Fig. 3** Сопоставление форм перехода в соседнюю позицию для  $^1\text{H}$ ,  $^2\text{H}$ ,  $^3\text{H}$  /  
Comparison of the forms of transition to the neighboring position for  $^1\text{H}$ ,  $^2\text{H}$ ,  $^3\text{H}$

Источник: составлено авторами.

Для атомов гелия ситуация, связанная со строением солитона, аналогичная. Но влияние поляризуемости атома на возможность перемещений солитона более «жесткая», см. табл. 2.

Таблица 2 / Table 2

Соотношение поляризуемости и эффективной массы для гелия и его изотопов /  
Ratio of polarizability and effective mass for helium and its isotopes

Атом	Состояния	Поляризуемость, $\beta$ , ( $cm^3$ )	Масса, $m$ , ( $g$ ) $\times 10^{-24}$	Эффективная масса $m^{\#}$ , ( $g$ ). $\times 10^{-24}$
${}^2He$	$1^1S_0$	$2.03 \cdot 10^{-23}$	$2 \cdot 1.67$	$-2.73098$
${}^3He$	$1^1S_0$	$2.03 \cdot 10^{-23}$	$3 \cdot 1.67$	$-4.09647$
${}^4He$	$1^1S_0$	$2.03 \cdot 10^{-23}$	$4 \cdot 1.67$	$-5.46195$
${}^2He$	$2^1S_0$	$4.67 \cdot 10^{-21}$	$2 \cdot 1.67$	$3.372$
${}^3He$	$2^1S_0$	$4.67 \cdot 10^{-21}$	$3 \cdot 1.67$	$5.0589$
${}^4He$	$2^1S_0$	$4.67 \cdot 10^{-21}$	$4 \cdot 1.67$	$6.74525$

Источник: составлено авторами на основе [4; 5; 7].

Из табл. 2 следует, что атом гелия и его изотопы (первые три строки таблицы), находясь в основном состоянии  $1^1S_0$ , обеспечивают отрицательную эффективную массу солитона и благодаря этому солитон может перемещаться. Однако для метастабильного состояния  $2^1S_0$  (последние три строчки, табл. 2) изотопы гелия не могут перемещаться, поскольку эффективная масса солитона оказывается положительной.

### Заключение

Из сопоставления зависимостей (рис.2, 2a,2b) смещения  $\Gamma_{z,n}$  солитона Френкеля-Конторовой от числа возможных положений лёгких атомов в виртуальной цепи можно отметить: поляризуемость  $\beta$  в сочетании с реальной массой атома (водорода, дейтерия, трития, гелия и его изотопов) существенным образом влияет на эффективную массу солитона, на его формирование и на сам переход его в следующие позиции. При этом атом с малой массой не может обеспечить перемещение солитона, а атом с большой массой может двигаться в виде солитона. Но, опять же, перемещение солитона по решётке определяется несколькими независимыми факторами:

- 1) массой атома (его изотопом) и его квантовым состоянием (поляризуемостью);
- 2) свойствами решётки – её строением и её упругими свойствами.

Статья поступила в редакцию 02.05.2023 г.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: Механика. М.: Физматлит, 2018. 224 с.
2. Френкель Я. И. Введение в теорию металлов. М: Физматгиз, 1958. 368 с.
3. Askerova V., Kalashnikov E. Movement of a Hydrogen Atom through Interstices in a Diamond-Like Lattice // *Defect and Diffusion Forum*. Vol. 420. *Advances in Mass and Thermal Transport in Engineering Materials III*. Switzerland: Trans Tech Publications Ltd, 2022. P. 162–171. DOI: 10.4028/p-g1zj73.
4. Bethe H. A., Salpeter E. E. Atoms in external fields // Bethe H. A., Salpeter E. E. *Quantum Mechanics of One- and Two-Electron Atoms*. Berlin: Springer, 1957. P. 205–247.
5. Chang K. T., Hurst R. P. Dipole polarizabilities of the  $2^3S_1$  and  $2^1S_0$  states of He and  $Li^+$  // *Physical Review*. 1966. Vol. 152. Iss. 1. P. 35–41. DOI: 10.1103/PhysRev.152.35.
6. Helium transport along lattice channels in crystalline quartz / Kalashnikov E., Tolstikhin I., Lehmann B., Pevzner B. // *Journal of Physics and Chemistry of Solids*. 2003. Vol. 64. Iss. 11. P. 2293–2300. DOI: 10.1016/S0022-3697(03)00264-6.
7. Stewart A. L. Dipole polarizabilities of  $2^{1,3}S$  states in the helium isoelectronic sequence // *Journal of Physics B: Atomic and Molecular Physics*. 1969. Vol. 2. No. 12. P. 1309–1312. DOI: 10.1088/0022-3700/2/12/309.

### REFERENCES

1. Landau L. D., Lifshitz E. M. *Mechanics. Course of Theoretical Physics. Vol. 1*. Oxford, Elsevier Science Ltd., 2020.
2. Frenkel Ya. I. *Vvedenie v teoriyu metallov* [Introduction to the theory of metals]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1958. 368 p.
3. Askerova V., Kalashnikov E. Movement of a Hydrogen Atom through Interstices in a Diamond-Like Lattice. In: *Defect and Diffusion Forum. Vol. 420. Advances in Mass and Thermal Transport in Engineering Materials III*. Switzerland, Trans Tech Publications Ltd, 2022, pp. 162–171. DOI: 10.4028/p-g1zj73.
4. Bethe H. A., Salpeter E. E. Atoms in external fields. In: Bethe H. A., Salpeter E. E. *Quantum Mechanics of One- and Two-Electron Atoms*. Berlin, Springer, 1957, pp. 205–247.
5. Chang K. T., Hurst R. P. Dipole polarizabilities of the  $2^3S_1$  and  $2^1S_0$  states of He and  $Li^+$ . In: *Physical Review*, 1966, vol. 152, iss. 1, pp. 35–41. DOI: 10.1103/PhysRev.152.35.
6. Kalashnikov E., Tolstikhin I., Lehmann B., Pevzner B. Helium transport along lattice channels in crystalline quartz. In: *Journal of Physics and Chemistry of Solids*, 2003, vol. 64, iss. 11, pp. 2293–2300. DOI: 10.1016/S0022-3697(03)00264-6.
7. Stewart A. L. Dipole polarizabilities of  $2^{1,3}S$  states in the helium isoelectronic sequence. In: *Journal of Physics B: Atomic and Molecular Physics*, 1969, vol. 2, no. 12, pp. 1309–1312. DOI: 10.1088/0022-3700/2/12/309.

### ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

*Аскерова Вера Исламовна* – аспирант кафедры фундаментальной физики и нанотехнологии Государственного университета просвещения;

e-mail: vera\_askerova@mail.ru

*Калашников Евгений Владимирович* – доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительной математики и информационных технологий Государственного университета просвещения;

e-mail: ekevkalashnikov1@gmail.com

### INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

*Vera I. Askerova* – Postgraduate Student, Department of Fundamental Physics and Nanotechnology, State University of Education

e-mail: vera\_askerova@mail.ru

*Evgeniy V. Kalashnikov* – Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Department of Computational Mathematics and Information Technologies, State University of Education

e-mail: ekevkalashnikov1@gmail.com

---

### ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Аскерова В. И., Калашников Е. В. Влияние поляризуемости лёгкого атома (и его изотопов) на его перемещение в виде солитона Френкеля-Конторовой по алмазоподобной решётке // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2023. № 2. С. 20–28.

DOI: 10.18384/2310-7251-2023-2-20-28.

### FOR CITATION

Askerova V. I., Kalashnikov E. V. Effect of polarizability of a light atom (and its isotopes) on its movement in the form of a Frenkel-Kontorova soliton through a diamond-like lattice. In: *Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*, 2023, no. 2, pp. 20–28.

DOI: 10.18384/2310-7251-2023-2-20-28.

УДК 530.122

DOI: 10.18384/2310-7251-2023-2-29-37

## ПРОБЛЕМА ТЕМНОЙ МАТЕРИИ И КОРРЕКЦИИ ФОРМУЛЫ ГРАВИТАЦИОННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ НА МЕЖГАЛАКТИЧЕСКИХ РАССТОЯНИЯХ

**Волкова О. А.<sup>1</sup>, Хамис Хассан М. Х.<sup>1</sup>, Евдокимов Н. В.<sup>1</sup>, Камалов Ю. Т.<sup>1</sup>, Камалов Т. Ф.<sup>1,2</sup>**

<sup>1</sup> Государственный университет просвещения  
141014, Московская обл., г. Мытищи, ул. Веры Волошиной, д. 24,  
Российская Федерация

<sup>2</sup> Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)  
141700, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский пер., д. 9,  
Российская Федерация

### **Аннотация**

**Цель:** подобрать корректирующие поправки в виде дополнительных переменных в уравнениях движения для анализа проблемы тёмной материи.

**Процедура и методы.** Проведены исследования методом введения высших производных в виде нелокальных переменных для описания гравитационного взаимодействия на межгалактических расстояниях. Проведён анализ содержания работ в соотнесении формулы гравитационного взаимодействия на галактических расстояниях от ускорения и её высших производных по времени.

**Результаты.** Подобранный теоретическая поправка даёт хорошее совпадение теории с экспериментальными результатами и позволяет объяснить ранее необъяснимые эффекты, приводящие к понятию тёмной материи. Это становится возможным с помощью введения дополнительных переменных в виде высших производных.

**Теоретическая и/или практическая значимость** заключается в новых полученных нами результатах вычисления поведения галактик с помощью коррекционной поправки к формуле гравитационного взаимодействия на межгалактических расстояниях. Такие теоретические расчёты совпадают с экспериментальными данными.

**Ключевые слова:** высшие производные по времени уравнения движения, классическая механика, тёмная метрика для тёмной материи

## PROBLEM OF DARK MATTER AND CORRECTION OF GRAVITATIONAL INTERACTION AT GALACTIC DISTANCES

*O. Volkova<sup>1</sup>, M. H. Khamis Hassan<sup>1</sup>, N. Evdokimov<sup>1</sup>, Yu. Kamalov<sup>1</sup>, T. Kamalov<sup>1,2</sup>*

<sup>1</sup> State University of Education

*ul. Very Voloshinoy 24, Mytishchi 141014, Moscow Region, Russian Federation*

<sup>2</sup> Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University)

*Institutskii per. 9, Dolgoprudnyi 141701, Moscow Region, Russian Federation*

### **Abstract**

**Aim.** We select corrective corrections in the form of additional variables in the equations of motion to analyze the problem of dark matter.

**Methodology.** The research is based on the introduction of higher-order derivatives in the form of non-local variables to describe the gravitational interaction at intergalactic distances. Works are analyzed that correlate the formula of gravitational interaction at galactic distances from acceleration and its higher derivatives with respect to time.

**Results.** The selected theoretical formula yields good agreement between theory and the experimental results, and makes it possible to explain previously unexplained effects leading to the concept of dark matter. This becomes possible by introducing additional variables in the form of higher-order derivatives.

**Research implications.** We have obtained new results that allow the behavior of galaxies to be calculated using the correction formula for the gravitational interaction at intergalactic distances. Theoretical calculations coincide with the experimental data.

**Keywords:** higher time derivatives of the equation of motion, classical mechanics, dark metric for dark matter

### **Введение**

Проблема тёмной материи возникает в результате различия между теорией и данными наблюдений. Поиск частиц, которые могли бы объяснить это расхождение теории с экспериментом, не дал желаемых результатов [1–4]. Все попытки объяснить существование тёмной материи [5–8], включая поиск частиц, которые являются причиной тёмной материи – эксперименты с аксионами [9], не дали результатов. Объяснить топологическую скорость движения звёзд на окраинах галактик [10] без введения понятия тёмной материи не удаётся. В нашем случае предположение того, что необходимость введения тёмной материи можно заменить введением теоретических поправок к формуле гравитационного взаимодействия. Если провести расчёт коррекционной поправки с помощью дополнительных переменных в уравнения движения с использованием высших производных, известных как «формализм Остроградского», то формула зависимости скорости вращения галактик соответствует наблюдательным данным. Высшие производные координат по времени, описанные формализмом Остроградского, помогают найти соответствие теоретических и наблюдательных данных. Использование формализма Остроградского для объяснения разницы в результатах между

теорией и данными наблюдений помогает устранить необходимость вводить термин тёмной материи.

В публикациях М. Милгрота приводится модификация формулы гравитационного взаимодействия с помощью коррекции закона Ньютона. Коррекция формулы закона гравитационного взаимодействия объясняет вращение галактик без привлечения тёмной материи. В этом случае ускорение зависит нелинейно от создающей его массы для малых ускорений, а гравитационная сила, которая действует на движение звезды во внешних областях галактики, пропорциональна квадрату её центростремительного ускорения, если гравитационная сила изменяется обратно пропорционально, линейно радиусу [11].

Исследование вращательного движения спиральных галактик, проведенное Верой Рубин [12] в начале 1970-х годов, показало, что скорость вращения внешних окраин ближайшей к нам галактики Андромеды почти постоянна для всех её внешних частей и не зависит от расстояния от центра. Поскольку такая постановка вопроса противоречит ожиданиям, то скорость движения внешних окраин галактики должна зависеть от её расстояния до центра галактики.

Это подробно обсуждалось в работе Рами Ахмад Эль-Набулси [13], где основные теоретические свойства нелокального во времени подхода к кинетической энергии введены в рамках нелокальной классической ньютоновской механики.

Нелокальные переменные, рассмотренные в работе Анджеевского [14; 15], обеспечивают расширение теории с помощью высших производных. В работе обсуждаются свойства симметрии нелокальной теории на случай стандартного бесконечного числа степеней свободы генератора с частотами, пропорциональными последовательным нечётным целым числам ионных операторов.

Использование нелокальных переменных в виде высших производных может быть применено для коррекции формулы гравитационного взаимодействия на межгалактических расстояниях.

### **Корректирующая поправка формулы гравитационного взаимодействия на межгалактических расстояниях**

Можно ли подобрать корректирующий коэффициент для формулы гравитационного взаимодействия с целью объяснения проблемы тёмной материи? Модификация гравитационного взаимодействия путём введения корректирующего коэффициента или модифицирующей функции является одним из подходов, который был предложен в попытке объяснить проблему тёмной материи без введения новых форм материи. Однако такие модификации должны быть согласованы с множеством экспериментальных данных и ограничений и требуют серьёзных теоретических и экспериментальных исследований для их проверки и подтверждения.

Существует ряд моделей, предлагающих модификации гравитационного взаимодействия на космологических или галактических масштабах. Например, модифицированная теория Ньютона (Modified Newtonian Dynamics, MOND) и модифицированная теория гравитации (Modified Gravity, MG) предлагают изменения в гравитационных уравнениях, которые пытаются объяснить наблюдаемые аномалии в движении галактик без введения тёмной материи. В этих моделях вводятся дополнительные функции или параметры, которые изменяются в зависимости от масштаба или плотности вещества.

Однако такие модели также сталкиваются с определёнными ограничениями и трудностями. Они должны быть согласованы с множеством наблюдений, таких как космическое микроволновое фоновое излучение, скопления галактик, космологические наблюдения и другие, и также должны быть согласованы с экспериментальными данными внутри нашей Солнечной системы. Кроме того, такие модели могут сталкиваться с проблемами стабильности, противоречиями с общей теорией относительности и другими теоретическими и экспериментальными ограничениями.

Таким образом, модификация гравитационного взаимодействия для объяснения проблемы тёмной материи является интересным направлением, но требует дополнительных исследований, тестирования и согласования с экспериментальными данными, прежде чем она может быть однозначно принята или отклонена. В нашем подходе корректирующая поправка для гравитационного взаимодействия на галактических расстояниях имеет вид

$$F = m \frac{GM}{r^2} e^{\left(\frac{-\lambda}{r}\right)}. \quad (1)$$

В асимптотике такой корректирующий коэффициент должен стремиться к единице для справедливости формулы гравитационного взаимодействия Ньютона на малых расстояниях, т. е.  $e^0 \approx 1$ . Скорректированная формула Ньютона [16] имеет вид

$$G \frac{mM_g}{r_g^2} \left(1 - \frac{\lambda}{r} + \frac{\lambda^2}{r^2} - \dots\right) \approx \frac{mv^2}{r_g}, \quad (2)$$

где

$$v \approx \sqrt{\frac{GM_g}{r_g}} \left(1 - \frac{\lambda}{r} + \frac{\lambda^2}{r^2} - \dots\right) \quad (3)$$

с поправочным коэффициентом  $\left(1 - \frac{\lambda}{r} + \frac{\lambda^2}{r^2} - \dots\right)$  для гравитационного взаимодействия на больших расстояниях,  $r_g$  и  $M_g$  – радиус вращения Галактики и масса Галактики. Гравитационное взаимодействие на больших межгалактических расстояниях может не совпадать с гравитационным взаимодействием на малых расстояниях. По утверждению Эйнштейна известное гравитационное взаимодействие достоверно справедливо и оценивается в пределах Солнечной системы.

Сила гравитационного взаимодействия в нашем случае может выражаться с использованием бесконечного разложения в ряд Тейлора. Если этот ряд заменить экспонентой [17], то мы можем записать метрику

$$ds^2 = e^{-r_0/r} dt^2 - e^{r_0/r} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (4)$$

которую мы называем тёмной метрикой, где  $r_0 = 2GM$ .

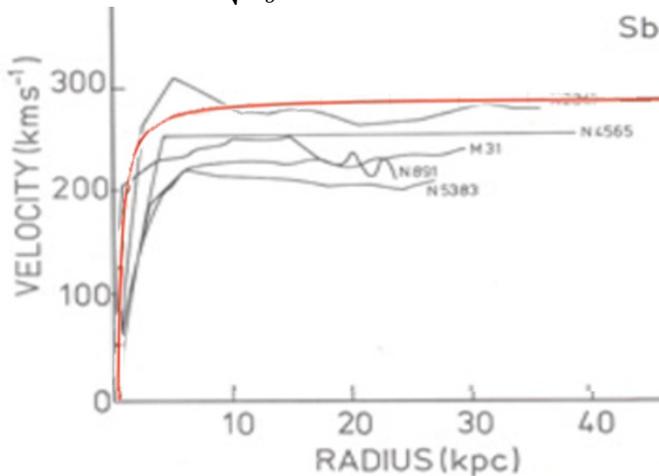
В нашем случае тёмная метрика является асимптотикой метрики Шварцшильда для  $r_0 < r$ .

Тёмную метрику также можно получить из стандартной метрики:

$$ds^2 = B(r)dt^2 - A(r)dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (5)$$

Условия  $A(r) = B(r) = 1$  и  $\lim A(r) = \lim B(r) = 1$  для  $r \rightarrow \infty$  должны выполняться для стандартной метрики. Тёмная метрика также удовлетворяет этим условиям. Гравитационные силы представлены в виде ряда с переменными знаками.

$$v \approx \sqrt{\frac{GM_g}{r_g}} e^{-\lambda/2r} \quad (6)$$



**Рис. 1 / Fig. 1.** График зависимости скоростей вращения галактик от их расстояния до центра. Результаты исследования авторов изображены красным цветом / Galaxy rotation speeds vs. their distance to the center. The authors' results are shown in red  
Источник: [1].

На рис. 1 чёрные линии – это кривые вращения 5 галактик, опубликованные Альбертом Босмой в 1978 году [1]. Красные линии – это наши результаты с коррекционной поправкой.

$$v = \sqrt{\frac{GM_g}{r_g}} e^{-\lambda/2r} = \sqrt{\frac{6,674 \cdot 10^{-11} \cdot 9 \cdot 10^{40}}{5 \cdot 10^{20}}} \cdot e^{-\frac{1}{2r}}. \quad (7)$$

Учёт высших производных в разложении Тейлора служит поправкой к наблюдаемому значению ускорения расширения Вселенной.

### Заключение

Любая теория должна иметь свои границы применимости. В работе показано, что необходимость введения понятия тёмная материя не является необходимым, а может быть заменено корректирующей поправкой к формуле гравитационного взаимодействия на межгалактических расстояниях. Подобранный теоретическая формула даёт хорошее совпадение с экспериментальными результатами. Мы надеемся, что гравитационная коррекция формулы на галактических расстояниях поможет решить проблему тёмной материи.

*Статья поступила в редакцию 24.11.2022 г.*

### ЛИТЕРАТУРА

1. Bertone G., Hooper D. History of Dark Matter // *Reviews of Modern Physics*. 2018. Vol. 90. Iss. 4. Article 045002. DOI: 10.1103/RevModPhys.90.045002
2. Popescu S. Nonlocality beyond quantum mechanics // *Nature Physics*. 2014. Vol. 10(4). P. 264–270. DOI: 10.1038/nphys2916.
3. El-Nabulsi R. A. Fractional nonlocal Newton's law of motion and emergence of Bagley-Torvik equation // *Journal of Peridynamics and Nonlocal Modeling*. 2020. Vol. 2. P. 50–58. DOI: 10.1007/s42102-019-00018-6.
4. Nonlocality and communication complexity / Buhrman H., Cleve R., Massar S., de Wolf R. // *Reviews of Modern Physics*. 2010. Vol. 82. Iss. 1. P. 665–698. DOI: 10.1103/RevModPhys.82.665.
5. El-Nabulsi R. A. Nonlocal approach to energy bands in periodic lattices and emergence of electron mass enhancement // *Journal of Physics and Chemistry of Solids*. 2018. Vol. 122. P. 167–173. DOI: 10.1016/j.jpcs.2018.06.028.
6. El-Nabulsi R. A. Massive photons in magnetic materials from nonlocal quantization // *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*. 2018. Vol. 458. P. 213–216. DOI: 10.1016/j.jmmm.2018.03.012.
7. El-Nabulsi R. A. Complex Backward–Forward Derivative Operator in Non-local-In-Time Lagrangians Mechanics // *Qualitative Theory of Dynamical Systems*. 2017. Vol. 16. Iss. 2. P. 223–234. DOI: 10.1007/s12346-016-0187-y.
8. El-Nabulsi R. A. Time-nonlocal kinetic equations, jerk and hyperjerk in plasmas and solar physics // *Advances in Space Research*. 2018. Vol. 61. Iss. 12. P. 2914–2931.
9. Sikivie P. Experimental Tests of the “Invisible” Axion // *Physical Review Letters*. 1983. Vol. 51. Iss. 16. P. 1415–1417. DOI: 10.1103/PhysRevLett.51.1415.
10. Delort T. Aether, Dark Matter, and the Topology of the Universe // *International Journal of Physics*. 2015. Vol. 3. Iss. 1. P. 17–28. DOI: 10.12691/ijp-3-1-4.
11. Milgrom M. Modification of Newtonian dynamics as a possible alternative to the hidden mass hypothesis // *Astrophysical Journal*. 1983. Vol. 270. P. 365–370.
12. Rubin V. C., Ford Jr. W. K. Rotation of the Andromeda Nebula from a Spectroscopic Survey of Emission Regions // *The Astrophysical Journal*. 1970. Vol. 159. P. 379. DOI: 10.1086/150317.
13. El-Nabulsi R. A. Nonlocal-in-time kinetic energy in nonconservative fractional systems, disordered dynamics, jerk and snap and oscillatory motions in the rotating fluid tube //

- International Journal of Non-Linear Mechanics. 2017. Vol. 93. P. 65–81. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2017.04.010.
14. Andrzejewski K. Nonlocal dynamics and infinite nonrelativistic conformal symmetries // *Physics Review D*. 2016. Vol. 93. Iss. 6. Article no. 065010. DOI: 10.1103/PhysRevD.93.065010.
15. El-Nabulsi R. A. From classical to discrete gravity through exponential nonstandard Lagrangians in general relativity // *Mathematics*. 2015. Vol. 3. Iss. 3. P. 727–745. DOI: 10.3390/math3030727
16. Kamalov T. F. Simulation of Nuclear Interaction // *Particle Physics on the Eve of LHC: Proceedings of the Thirteenth Lomonosov Conference on Elementary Particle Physics (Moscow, Russia, 23–29 August 2007)* / ed. A. Studenikin. Singapore: World Scientific Press editor, 2009. P. 439–442. DOI: 10.1142/9789812837592\_0076.
17. Kamalov T. F. Quantum correction for Newton's law of motion // *Symmetry*. 2020. Vol. 12. Iss. 1. P. 63. DOI: 10.3390/SYM12010063.

### REFERENCES

1. Bertone G., Hooper D. History of Dark Matter. In: *Reviews of Modern Physics*, 2018, vol. 90, iss. 4, article 045002. DOI: 10.1103/RevModPhys.90.045002.
2. Popescu S. Nonlocality beyond quantum mechanics. In: *Nature Physics*, 2014, vol. 10(4), pp. 264–270. DOI: 10.1038/nphys2916.
3. El-Nabulsi R. A. Fractional nonlocal Newton's law of motion and emergence of Bagley-Torvik equation. In: *Journal of Peridynamics and Nonlocal Modeling*, 2020, vol. 2, pp. 50–58. DOI: 10.1007/s42102-019-00018-6.
4. Buhrman H., Cleve R., Massar S., de Wolf R. Nonlocality and communication complexity. In: *Reviews of Modern Physics*, 2010, vol. 82, iss. 1, pp. 665–698. DOI: 10.1103/RevModPhys.82.665.
5. El-Nabulsi R. A. Nonlocal approach to energy bands in periodic lattices and emergence of electron mass enhancement. In: *Journal of Physics and Chemistry of Solids*, 2018, vol. 122, pp. 167–173. DOI: 10.1016/j.jpics.2018.06.028.
6. El-Nabulsi R. A. Massive photons in magnetic materials from nonlocal quantization. In: *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 2018, vol. 458, pp. 213–216. DOI: 10.1016/j.jmmm.2018.03.012.
7. El-Nabulsi R. A. Complex Backward–Forward Derivative Operator in Non-local-In-Time Lagrangians Mechanics. In: *Qualitative Theory of Dynamical Systems*, 2017, vol. 16, iss. 2, pp. 223–234. DOI: 10.1007/s12346-016-0187-y.
8. El-Nabulsi R. A. Time-nonlocal kinetic equations, jerk and hyperjerk in plasmas and solar physics. In: *Advances in Space Research*, 2018, vol. 61, iss. 12, pp. 2914–2931.
9. Sikivie P. Experimental Tests of the “Invisible” Axion. In: *Physical Review Letters*, 1983, vol. 51, iss. 16, pp. 1415–1417. DOI: 10.1103/PhysRevLett.51.1415.
10. Delort T. Aether, Dark Matter, and the Topology of the Universe. In: *International Journal of Physics*, 2015, vol. 3, iss. 1, pp. 17–28. DOI: 10.12691/ijp-3-1-4.
11. Milgrom M. Modification of Newtonian dynamics as a possible alternative to the hidden mass hypothesis. In: *Astrophysical Journal*, 1983, vol. 270, pp. 365–370.
12. Rubin V. C., Ford Jr. W. K. Rotation of the Andromeda Nebula from a Spectroscopic Survey of Emission Regions. In: *The Astrophysical Journal*, 1970, vol. 159, p. 379. DOI: 10.1086/150317.
13. El-Nabulsi R. A. Nonlocal-in-time kinetic energy in nonconservative fractional systems, disordered dynamics, jerk and snap and oscillatory motions in the rotating fluid tube. In:

- International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2017, vol. 93, pp. 65–81.  
DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2017.04.010.
14. Andrzejewski K. Nonlocal dynamics and infinite nonrelativistic conformal symmetries. In: *Physics Review D*, 2016, vol. 93, iss. 6, article no. 065010. DOI: 10.1103/PhysRevD.93.065010.
15. El-Nabulsi R. A. From classical to discrete gravity through exponential nonstandard Lagrangians in general relativity. In: *Mathematics*, 2015, vol. 3, iss. 3, pp. 727–745. DOI: 10.3390/math3030727
16. Kamalov T. F. Simulation of Nuclear Interaction. In: Studenikin A., ed. *Particle Physics on the Eve of LHC: Proceedings of the Thirteenth Lomonosov Conference on Elementary Particle Physics (Moscow, Russia, 23–29 August 2007)*. Singapore, World Scientific Press editor, 2009, pp. 439–442. DOI: 10.1142/9789812837592\_0076.
17. Kamalov T. F. Quantum correction for Newton's law of motion. In: *Symmetry*, 2020, vol. 12, iss. 1, pp. 63. DOI: 10.3390/SYM12010063.

---

### ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

*Камалов Тимур Фянович* – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры фундаментальной физики и нанотехнологии Государственного университета просвещения; доцент кафедры теоретической физики Московского физико-технического института (национального исследовательского университета);

e-mail: timkamalov@gmail.com;

*Волкова Ольга Алексеевна* – аспирант кафедры фундаментальной физики и нанотехнологии Государственного университета просвещения;

e-mail: olka.volkova96@yandex.ru;

*Евдокимов Николай Валерьевич* – аспирант кафедры фундаментальной физики и нанотехнологии Государственного университета просвещения;

e-mail: nv.evdokimov@gmail.com;

*Хамис Хассан Махер Хосни* – аспирант кафедры фундаментальной физики и нанотехнологии Государственного университета просвещения;

e-mail: m.khamis@yandex.ru.

*Камалов Юрий Тимурович* – аспирант кафедры фундаментальной физики и нанотехнологии Государственного университета просвещения;

e-mail: kamalov@gmail.com

### INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

*Timur F. Kamalov* – Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Prof., Department of Fundamental Physics and Nanotechnology, State University of Education, Assoc. Prof., Department of Theoretical Physics, Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University);

e-mail: timkamalov@gmail.com;

*Olga A. Volkova* – Postgraduate Student, Department of Fundamental Physics and Nanotechnology, State University of Education;

e-mail: olka.volkova96@yandex.ru;

*Nikolay V. Evdokimov* – Postgraduate Student, Department of Fundamental Physics and Nanotechnology, State University of Education;  
e-mail: nv.evdokimov@gmail.com;

*Maher Hosni Khamis Hassan* – Postgraduate Student, Department of Fundamental Physics and Nanotechnology, State University of Education;  
e-mail: m.khamis@yandex.ru;

*Yuriy T. Kamalov* – Postgraduate Student, Department of Fundamental Physics and Nanotechnology, State University of Education;  
e-mail: kamalov@gmail.com.

---

### ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Проблема темной материи и коррекции формулы гравитационного взаимодействия на межгалактических расстояниях/ Волкова О. А., Хамис Хассан М. Х., Евдокимов Н. В., Камалов Ю. Т., Камалов Т. Ф. // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2023. № 1. С. 29–37.  
DOI: 10.18384/2310-7251-2023-2-29-37.

### FOR CITATION

Volkova O. A., Khamis Hassan M. H., Evdokimov N. V., Kamalov Y. T., Kamalov T. F. Problem of dark matter and correction of the formula for gravitational interaction at intergalactic distances. In: *Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*, 2023, no. 1, pp. 29–37.  
DOI: 10.18384/2310-7251-2023-2-29-37.

УДК 539.12

DOI: 10.18384/2310-7251-2023-2-38-50

## ТРАНСМУТАЦИЯ НУКЛИДОВ В БЛАНКЕТЕ ТЕРМОЯДЕРНОГО ИСТОЧНИКА НЕЙТРОНОВ

*Давиденко В. Д., Дьячков И. И., Иоаннисян М. В.*

*Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт»  
123182, г. Москва, пл. Академика Курчатова, д. 1, Российская Федерация*

### **Аннотация**

**Цель.** Оценка неопределённостей современных библиотек ядерных данных и сравнительный анализ наведённой активности blankets термоядерного источника нейтронов, содержащего нуклиды U-238 и Th-232.

**Процедура и методы.** Проведены расчёты и анализ, полученных данных по активности нестабильных нуклидов, образующейся в blankets термоядерного реактора.

**Результаты** исследований показали, что остаточная активность выгружаемого blankets с U-238 примерно в 2–3 раза больше активности Th-232, нормированной на один образующийся делящийся нуклид. Для приведения активности выгружаемого уранового blankets к активности blankets на основе Th-232 потребуется несколько большее время выдержки.

**Теоретическая и / или практическая значимость.** Полученные результаты могут быть использованы при оптимизации blankets термоядерного источника нейтронов.

**Ключевые слова:** оценённые ядерные данные, нейтронные сечения, термоядерный реактор, blankets, энерговыделение, активность

**Благодарности:** исследование выполнено в рамках гранта РФФИ № 19-29-02011 «Разработка комплексной математической модели blankets термоядерного реактора для фундаментальных исследований физических процессов переноса излучения, изотопной эволюции и радиационных нагрузок»

## TRANSMUTATION OF NUCLIDES IN THE BLANKET OF A THERMONUCLEAR NEUTRON SOURCE

*V. Davidenko, I. Dyachkov, M. Ioannisian*

*National Research Center Kurchatov Institute  
pl. Akad. Kurchatova 1, Moscow 123182, Russian Federation*

### **Abstract**

**Aim.** We evaluate the uncertainties of modern nuclear data libraries and perform a comparative analysis of the induced activity of the blanket of a thermonuclear neutron source containing uranium-238 and thorium-232 nuclides.

**Methodology.** The obtained data on the activity of unstable nuclides formed in the blanket of a thermonuclear reactor are analyzed.

**Results.** The results of the studies show that the residual activity of the discharged blanket with U-238 is approximately two-to-three times greater than the activity of Th-232 normalized by one formed fissile nuclide. To make the activity of the unloaded uranium blanket similar to that of the Th-232-based blanket, a slightly longer exposure time is required.

**Research implications.** The obtained results can be used to optimize the blanket of a thermonuclear neutron source.

**Keywords:** estimated nuclear data, neutron cross sections, thermonuclear reactor, blanket, energy release, activity

**Acknowledgments:** This research was supported by an RFBR grant No.19-29-02011 “Development of a complex mathematical model of a thermonuclear reactor blanket for fundamental research of physical processes of radiation transfer, isotopic evolution and radiation loads”.

## Введение

В современных прогнозах развития мирового энергообеспечения, несмотря на постоянное развитие ядерных технологий, доля атомной составляющей систематически снижается. Связано это в том числе и с неопределённостями, возникающими при разработке топливных циклов ядерной энергетики, проблемами с переработкой отработавшего ядерного топлива, утилизацией отходов и радиационного воздействия на окружающую среду [1].

Традиционный, и практически единственный, рассматриваемый в настоящее время подход к широкомасштабному развитию ядерной энергетики как самодостаточной системы, связан с различными комбинациями тепловых и быстрых реакторов, в том числе и с последовательным вытеснением тепловых реакторов. Но современные проекты быстрых реакторов ориентируются на низкие коэффициенты воспроизводства топлива, приводящие к существенным увеличениям объёмов переработки, и, следовательно, увеличивающим радиационное воздействие на окружающую среду [2]. Тем не менее это направление развития ядерной энергетики как крупномасштабное и практически неограниченное по сырьевому ресурсу фактически рассматривается на текущий момент в качестве единственно верного и безальтернативного. В конечном итоге быстрые реакторы должны будут заменить собой тепловые практически полностью. Эта замена будет проходить постепенно, начнётся, как показывают результаты исследований [3], не ранее середины XXI в. и продлится не менее двухсот лет.

Концепция развития ядерной энергетики на основе реакторов синтеза-деления подразумевает наработку делящегося нуклида в blankets термоядерного источника нейтронов с последующим использованием в традиционных и (или) перспективных тепловых реакторах [4].

В работе [5] приведена концепция термоядерной установки ДЕМО-ТИН (Термоядерный Источник Нейтронов) как прототипа термоядерного реактора синтез-деления. Отличительной особенностью установки в сравнении с гибридной установкой токамак [6] является: стационарный режим работы,

наличие на наружном обводе камеры бланкета для воспроизводства трития, наработки делящихся изотопов или трансмутации минорных актинидов.

В качестве сырьевого нуклида рассматриваются как изотоп U-238, так и изотоп Th-232. Последний нуклид на первый взгляд является более предпочтительным, поскольку имеет меньшее сечение деления по сравнению с U-238 в области термоядерных энергий нейтронов (14 МэВ), и, следовательно, активность бланкета, поступающего на переработку, также будет меньше. Но, с другой стороны, за счёт большего деления общее число нарабатываемого делящегося нуклида Pu-239 будет больше при облучении U-238, чем при Th-232, т. е. и эффективность использования термоядерного нейтрона в бланкете с U-238 будет заведомо выше. На сегодняшний день за счёт этой особенности бланкета с U-238 практически не рассматриваются в стратегии развития ядерной энергетики [7], поэтому необходимо провести сравнительный анализ удельной активности, выделяющейся в бланкете как с сырьевым нуклидом U-238, так и Th-232.

Как известно, при взаимодействии с Th-232 термоядерного нейтрона образуется 0.45 ядра Th-230, 0.613 Th-231 и 2.53 ядра Th-233 [8]. Так же при взаимодействии делится 0.189 ядра Th-232. При взаимодействии одного термоядерного нейтрона с ураном-238 образуется 0.295 ядра U-236, 0.393 U-237 и 3.95 U-239. Так же делится 0.856 ядра U-238. В результате взаимодействия термоядерного нейтрона с Th-232 и U-238 за счёт реакций  $(n,2n)$ ,  $(n,3n)$  и  $(n,f)$  в конечном итоге образуется примерно 2.6 и 3.95 нейтрона, которые поглощаются в сырьевом нуклиде и дают соответственное количество ядер U-233 и Pu-239.

Таким образом, число делений на U-238 примерно в 4.5 раза больше, чем делений Th-232, соответственно, и энерговыделение продуктов деления U-238 также будет в 4.5 больше. Так же за счёт реакции  $(n,2n)$ ,  $(n,3n)$  образуются ядра тория и урана, которые тоже дают вклад в остаточное энерговыделение.

## 1. Неопределённости ядерных данных

Для расчётных исследований по оптимизации конструкции термоядерного источника нейтронов с целью увеличения эффективности наработки делящихся нуклидов в бланкете необходимо учитывать точность представленной в файлах оценённых ядерных данных информации о сечениях взаимодействия термоядерного нейтрона с материалом бланкета.

Следует отметить, что нейтронно-физические свойства Th-232 в области термоядерных энергий нейтрона изучены в существенно меньшей степени, чем свойства U-238. В частности, для такой важной реакции, как  $(n,3n)$ , существует только одна экспериментальная точка<sup>1</sup>, на основании которой в библиотеки ядерных данных вводятся соответствующие оценки, что явно недостаточно для получения объективной картины по сечениям данной реакции. Необходимы оценки неопределённостей современных библиотек ядерных данных,

<sup>1</sup> См.: Торий [Электронный ресурс]. URL. <https://www.ippe.ru/libr/pdf/90th.pdf> (дата обращения: 04.04.2023).

влияющих на точность расчётного моделирования процессов взаимодействия термоядерного нейтрона с материалом blankets.

Ниже приведён сравнительный анализ нейтронных сечений Th-232, представленных в современных файлах оценённых ядерных данных в области энергии термоядерного нейтрона (14.2 МэВ). Рассматриваются разные версии библиотек<sup>2</sup> ENDF-B, JEFF, JENDL и TENDL, отечественные библиотеки BROND и РОСФОНД, а также китайская библиотека CENDL. Общее число рассмотренных систем файлов оценённых ядерных данных равно 21. Предварительный анализ данных показал, что файл Th-232 библиотеки FENDL-3.0 полностью идентичен файлу библиотеки ENDF/B-VII.1, а файлы библиотек TENDL-2019 и TENDL-2017 используют данные ENDF/B-VIII.0 в области рассматриваемых в данной работе сечений. Поэтому из анализа данных они были исключены.

Для обработки файлов оценённых ядерных данных использовалась версия программы NJOY [9] 2016<sup>3</sup> года, для подготовки библиотек многогрупповых констант модуль, разработанный для программного комплекса UNK<sup>4</sup>. Сечения основных реакций для энергии нейтрона 14.2 МэВ приведены в табл. 1. Для расчётного анализа использовалась специально подготовленные многогрупповые библиотеки для программного комплекса UNK с более детальным описанием групповых сечений в быстрой области энергий (область реакций (n,2n) и (n,3n)), и был разработан специальный модуль расчёта замедления нейтронов и коэффициента размножения в бесконечной среде для решения задачи с источником по поколениям.

Таблица 1 / Table 1

**Сечения основных реакций Th-232, барн /**

**Cross sections of the main reactions of Th-232, barn**

Библиотека	Nu.eff	(n,2n)	(n,3n)	(n,fiss)	(n,g)	(n,elas)	(n,inel)
JENDLE.4.0	3.943	1.717	5.662E-01	3.667E-01	1.110E-03	2.752	4.646E-01
JENDLE.3.3	4.011	1.136	8.386E-01	3.596E-01	1.891E-03	2.693	7.199E-01
JENDLE.3.2	4.011	1.136	8.386E-01	3.596E-01	1.216E-05	2.695	7.199E-01
JEFF.3.3	3.925	1.487	6.531E-01	3.603E-01	1.167E-03	2.730	5.881E-01
JEFF.3.2	3.925	1.487	6.531E-01	3.603E-01	1.167E-03	2.730	5.881E-01
JEFF.3.1	3.915	1.436	7.549E-01	3.512E-01	9.971E-04	2.772	5.379E-01
JEFF.3.0	4.011	1.136	8.386E-01	3.596E-01	1.132E-06	2.695	7.199E-01

<sup>2</sup> См.: Evaluated Nuclear Data File (ENDF) [Электронный ресурс]. URL. <https://www-nds.iaea.org/exfor/endl.htm> (дата обращения 04.04.2022).

<sup>3</sup> См.: The NJOY Nuclear Data Processing System, Version 2016. Los Alamos National Laboratory. LA-UR-17-20093, November 7, 2019.

<sup>4</sup> См.: Davidenko V. D., Tsibulsky V. F. Detailed Calculation of Neutron Spectrum in Cell of a Nuclear Reactor // International Conference on the Physics of Nuclear Science and Technology (Oct. 5–8, 1997). Long Island, New York: American Nuclear Society, P. 1755–1760.

Библиотека	Nu.eff	(n,2n)	(n,3n)	(n,fiss)	(n,g)	(n,elas)	(n,inel)
ENDF/B-VII.0	3.925	1.479	6.544E-01	3.685E-01	1.164E-03	2.721	5.887E-01
ENDF/B-VII.1	3.925	1.487	6.532E-01	3.603E-01	1.169E-03	2.730	5.881E-01
ENDF/B-VIII.0	3.925	1.487	6.532E-01	3.603E-01	1.169E-03	2.730	5.881E-01
РОСФОНД-10	3.925	1.463	6.632E-01	3.502E-01	1.039E-03	2.944	3.878E-01
BROND.3.1	3.941	1.665	5.660E-01	3.715E-01	1.130E-03	2.799	4.646E-01
CENDL.3.1	3.925	1.462	6.418E-01	3.536E-01	1.672E-03	2.701	6.022E-01
TENDL-2015	3.925	1.482	5.758E-01	3.591E-01	1.126E-03	2.717	5.917E-01
Максимум	4.053	1.717	8.386E-01	3.715E-01	5.253E-03	2.944	7.199E-01
Минимум	3.915	1.136	5.423E-01	3.502E-01	1.132E-06	2.693	3.604E-01
Delta, %	3.54	51.1	54.7	6.09	4.64E+05	9.32	99.7

Источник: данные авторов

Представленные в табл. 1 сечения позволяют расчётным путём оценить число вторичных нейтронов, образующихся после взаимодействия одного термоядерного нейтрона с ядром Th-232. Эти значения приведены в табл. 2. Здесь под числом вторичных нейтронов понимается полное число нейтронов, образовавшиеся как за счёт деления Th-232, так и после реакций (n,2n) и (n,3n).

Таблица 2 / Table 2

**Число вторичных нейтронов после взаимодействия одного термоядерного нейтрона с Th-232 / Number of secondary neutrons after the interaction of one thermonuclear neutron with Th-232**

Библиотека	N1
JENDLE.4.0	1.669
JENDLE.3.3	1.677
JENDLE.3.2	1.678
JEFF.3.3	1.660
JEFF.3.2	1.660
JEFF.3.1	1.678
JEFF.3.0	1.678
ENDF/B-VII.0	1.665
ENDF/B-VII.1	1.660
ENDF/B-VIII.0	1.660
РОСФОНД-10	1.656
BROND.3.1	1.663
CENDLE.3.1	1.655

Библиотека	N1
ENDF/B-6	1.666
ENDF/B-6-R7	1.666
ENDF/B-6-R8	1.666
FENDL.3.0	1.660
Максимум	1.678
Минимум	1.655
Delta,%	1.36

Источник: данные авторов

Как следует из табл. 2, несмотря на достаточно существенные различия в парциальных сечениях все рассматриваемые библиотеки достаточно хорошо согласуются по значениям вторичных нейтронов, различия лежат в пределах 1.5%. Данные, полученные с использованием разных библиотек, в целом хорошо согласуются с результатами, приведёнными в [10]. В расчётах по программе MCU [11] и MCNP<sup>6</sup> были получены значения 1.62 и 1.53 соответственно.

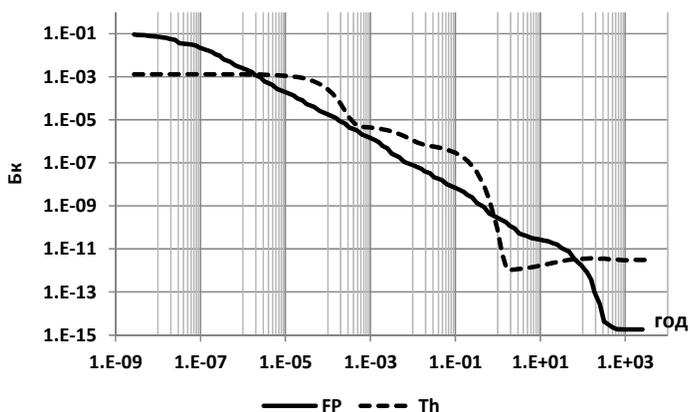
В результате взаимодействия термоядерного нейтрона с ядром Th-232 за счёт реакций (n,2n), (n,3n) и реакции деления образуется примерно 1.67 нейтронов, из которых только 0.25 нейтрона образуется непосредственно за счёт деления. Часть нейтронов (за счёт реакций упругого и неупругого рассеяния) остаётся в области пороговых реакций (n,2n) и (n,3n), что приводит к дальнейшему увеличению числа нейтронов после второго взаимодействия (второе столкновение или поколение нейтронов), часть захватывается Th-232. В конечном итоге все вторичные нейтроны поглощаются в Th-232 с последующим образованием 2.6 ядер U-233.

## 2. Активность нестабильных нуклидов в бланкете

С помощью комплекса UNK были проведены расчёты активности нестабильных нуклидов, образующихся в бланкете термоядерного источника нейтронов.

На рис. 1 показана суммарная активность нестабильных нуклидов тория (231, 230 и 233), продуктов их распада, а так же продуктов его деления (время в годах) после взаимодействия с термоядерным нейтроном.

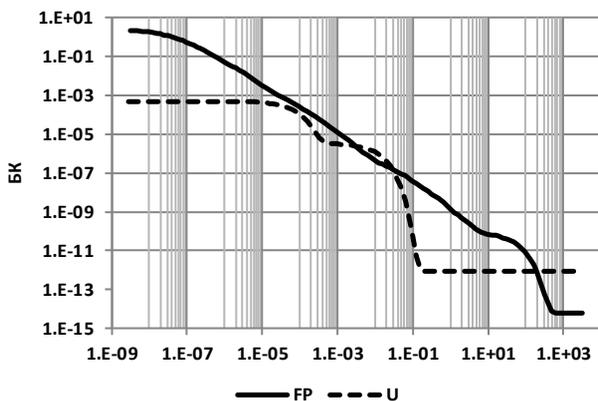
<sup>6</sup> См.: MCNP – a General Monte Carlo N-Particle Transport Code. Vers. 5. X-5 Monte Carlo Team. LA-UR-03-1987.



**Рис. 1 / Fig. 1.** Активность продуктов взаимодействия (Бк) одного термоядерного нейтрона с ториевым бланкетом в зависимости от времени (годы), FP – продукты деления, Th – активность нуклидов тория / Activity of interaction products (Bq) of one thermonuclear neutron with a thorium blanket as a function of time (years): FP, fission products and Th, activity of thorium nuclides.

Источник: данные авторов.

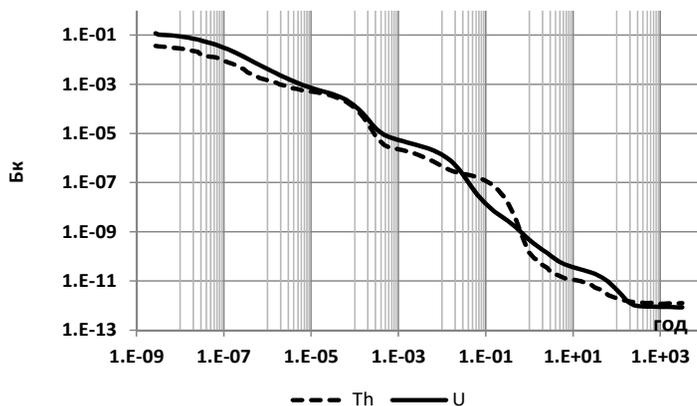
На рис. 2 показана активность (Бк) нестабильных изотопов урана (236, 237 и 239) и продуктов их распада + активность продуктов деления урана-238 в зависимости от времени выдержки (год) после взаимодействия одного термоядерного нейтрона в бланкете.



**Рис. 2 / Fig. 2.** Активность продуктов взаимодействия (Бк) одного термоядерного нейтрона с урановым бланкетом в зависимости от времени (годы), FP – продукты деления, U – активность нуклидов урана / Activity of interaction products (Bq) of one thermonuclear neutron with a uranium blanket as a function of time (years): FP, fission products and U, activity of uranium nuclides

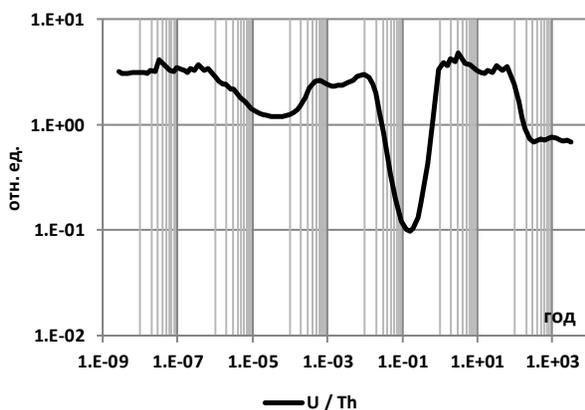
Источник: данные авторов.

Отметим, что интерес представляет не абсолютная активность blankets с сырьевым нуклидом, а относительная, т. е. нормированная на один образующийся делящийся нуклид (U-233 или Pu-239). На рис. 3 приведена удельная активность (на одно образующееся ядро делящегося нуклида U-233 и Pu-239), на рис. 4 – их отношение.



**Рис. 3 / Fig. 3.** Удельная активность продуктов взаимодействия (Бк) одного термоядерного нейтрона с урановым и ториевым blanketом на одно ядро образовавшегося делящегося изотопа в зависимости от времени (годы) / Specific activity of interaction products (Bq) of one thermonuclear neutron with uranium and thorium blanket per one nucleus of the formed fissile isotope as a function of time (years)

Источник: данные авторов.

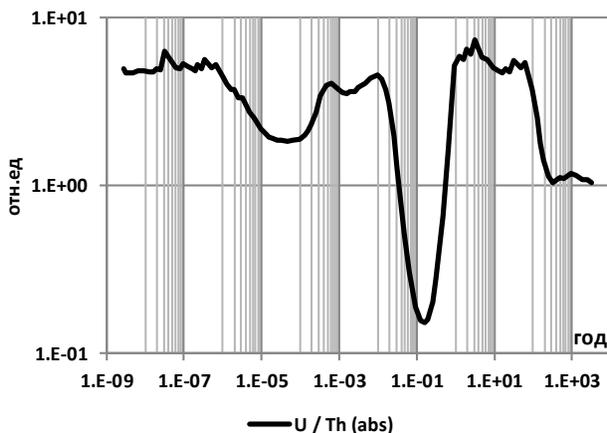


**Рис. 4 / Fig. 4.** Отношение активности при образования одного ядра Pu-239 к активности при образовании одного ядра U-233 в зависимости от времени (годы) / Ratio of activity during the formation of one Pu-239 nucleus to activity during the formation of one U-233 nucleus as a function of time (years).

Источник: данные авторов.

Таким образом, при взаимодействии одного термоядерного нейтрона с blanketом активность образования одного ядра Pu-239 примерно в 2–3 раза больше активности, выделяющейся при образовании одного ядра U-233. Отметим, что в районе 0.1 года (36.5 суток) эта активность примерно на порядок меньше.

Абсолютное отношение активностей, образовавшееся при взаимодействии одного термоядерного нейтрона, ведёт себя примерно так же в урановом blanketе, как и было указано выше, примерно в 3–4 раза больше (рис. 5).



**Рис. 5 / Fig. 5.** Отношение активности в урановом blanketе по отношению к активности в ториевом blanketе в зависимости от времени (годы) / Ratio of activity in the uranium blanket to activity in the thorium blanket as a function of time (years)

Источник: данные авторов.

Учитывая, что при облучении уранового blanketа не образуется U-232, а также тот факт, что период полураспада Pa-233 равен 27 дней, а Np-239 – 2.4 дня, урановый blanket может оказаться предпочтительнее ториевого и позволит более эффективно использовать термоядерный нейтрон, из которого можно получить 3.96 ядра Pu-239 против 2.56 ядра U-233.

### Заключение

Результаты анализа современных файлов оценённых ядерных данных выявили существенные расхождения в оценках сечений Th-232 в области энергий 14.2 МэВ, что необходимо учитывать в расчётных исследованиях нейтронно-физических свойств термоядерного источника нейтронов. Различия в оценке сечений реакций  $(n,2n)$  и  $(n,3n)$  составляют порядка 50%, упругого и неупругого рассеяния 9 и 95% соответственно, полного сечения – 5%. Различия в оценке числа вторичных нейтронов, образующихся в результате деления Th-232, составляют 3.5%, а в сечении деления – 6%. Тем не менее выявленные различия слабо сказываются на значении общего числа вторичных нейтронов,

образующихся как за счёт реакций  $(n,2n)$ ,  $(n,3n)$ , так и деления при взаимодействии термоядерного нейтрона с ядром Th-232. Различия в оценке составляют 1.5%. При этом разброс в оценке общего числа нейтронов, родившихся и, следовательно, поглотившихся в Th-232, составляют примерно 15%. Если же учитывать только последние версии библиотек (ENDF/B-VIII.0, JENDL.4.0, JEFF.3.3 и т. п.), что в целом не совсем корректно, то различия в оценке общего числа образовавшихся дополнительных нейтронов на один термоядерный сокращаются до 5%.

Сравнительный анализ активации бланкета термоядерного источника нейтронов с сырьевыми нуклидами U-238 и Th-232 показывает, что остаточная активность выгружаемого бланкета с U-238 примерно в 2–3 раза больше активности Th-232, нормированной на один образующийся делящийся нуклид. Для приведения активности выгружаемого уранового бланкета к активности бланкета на основе Th-232 потребуется несколько большее время выдержки. Таким образом, за счёт большего накопления Pu-239 в урановом бланкете он может оказаться более предпочтительным по сравнению с бланкетом из Th-232. Также следует учитывать, что при облучении U-238 не образуется U-232, на который существуют нормативные ограничения по содержанию в топливных композициях.

*Статья поступила в редакцию 03.04.2023 г.*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Приемлемость замыкания топливного цикла ядерной энергетики / Велихов Е. П., Гольцев А. О., Давиденко В. Д., Ельшин А. В., Ковалишин А. А., Родионова Е. В., Цибульский В. Ф. // Вопросы Атомной науки и техники. Серия: Термоядерный синтез. 2021. Т. 44. № 1. С. 5–12. DOI: 10.21517/0202-3822-2021-44-1-5-12.
2. Ядерная энергетическая система с реакторами деления и синтеза – стратегический ориентир развития отрасли / Велихов Е. П., Ковальчук М. В., Ильгисонис В. И., Игнатъев В. В., Цибульский В. Ф., Андрианова Е. А., Бландинский В. Ю. // Вопросы Атомной науки и техники. Серия: Термоядерный синтез. 2017. Т. 40. № 4. С. 5–13. DOI: 10.21517/0202-3822-2017-40-4-5-13.
3. Андрианова Е. А., Цибульский В. Ф. Быстрые реакторы с умеренным воспроизводством и структура ядерной энергетики // Атомная энергия. 2018. Т. 125. № 2. С. 71–74.
4. Гибридный термоядерный реактор-токамак для производства делящегося топлива и электроэнергии / Велихов Е. П., Глухих В. А., Гурьев В. В., Кадомцев Б. Б., Колбасов Б. Н., Котов В. В., Моносзон Н. А. и др. // Атомная энергия. 1978. Т. 45. № 1. С. 3–9.
5. Токамак ДЕМО-ТИН: концепция электромагнитной системы и вакуумной камеры / Азизов Э. А., Ананьев С. С., Беляков В. А., Бондарчук Э. Н., Воронова А. А. и др. // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Термоядерный синтез. 2015. Т. 38. № 2. С. 5–18. DOI: 10.21517/0202-3822-2015-38-2-5-18.

6. Орлов В. В., Пономарев Л. И. Ядерные проблемы термоядерной энергетики // Атомная энергия. 2018. Т. 124. № 2. С. 105–114.
7. Гибридная «синтез-деление» реакторная установка на ториевом топливе с источником дополнительных термоядерных нейтронов / Шаманин И. В., Аржанников А. В., Приходько В. В., Шамаков В. М., Модестов Д. Г., Луцик И. О., Полозков С. Д., Беденко С. В. // Сибирский физический журнал. 2021. Т. 16. № 1. С. 21–43. DOI: 10.25205/2541-9447-2021-16-1-21-43.
8. Оценка возможности наработки делящихся изотопов для реакторов деления в бланкете термоядерного реактора / Моряков А. В., Зинченко А. С., Цибульский В. Ф., Давиденко В. Д., Чукбар Б. К. // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Ядерно-реакторные константы. 2019. № 2. С. 38–48. DOI: 10.55176/2414-1038-2019-2-38-48.
9. MacFarlane R. E., Boicourt R. M. NJOY: A neutron and photon processing system // Transactions of the American Nuclear Society. 1975. Vol. 22. P. 720.
10. Энергетические перспективы термоядерного синтеза / Бландинский В. Ю., Давиденко В. Д., Зинченко А. С., Моряков А. В., Родионова Е. В., Чукбар Б. К., Цибульский В. Ф. // Атомная энергия. 2020. Т. 128. № 1. С. 37–40.
11. Статус МСУ-5. / Алексеев Н. И., Большагин С. Н., Гомин Е. А., Городков С. С., Гуревич М. И., Калугин М. А., Кулаков А. С. и др. // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Физика ядерных реакторов. 2011. № 4. С. 4–23.

#### REFERENCES

1. Velikhov E. P., Goltsev A. O., Davidenko V. D., Elshin A. V., Kovalishin A. A., Rodionova E. V., Tsibul'skiy V. F. [Admissibility of the closed fuel cycle of nuclear power engineering]. In: *Voprosy Atomnoi nauki i tekhniki. Seriya: Termoyadernyi sintez* [Problems of atomic science and technology. Series: Thermonuclear fusion], 2021, vol. 44, no. 1, pp. 5–12. DOI: 10.21517/0202-3822-2021-44-1-5-12.
2. Velikhov E. P., Kovalchuk M. V., Ilgisonis V. I., Ignat'ev V. V., Tsibul'skiy V. F., Andrianova Ye. A., Blandinskiy V. Yu. [Nuclear energy system based on fission and fusion reactors as a strategic line of nuclear power engineering development]. In: *Voprosy Atomnoi nauki i tekhniki. Seriya: Termoyadernyi sintez* [Problems of atomic science and technology. Series: Thermonuclear fusion], 2017, vol. 40, no. 4, pp. 5–13. DOI: 10.21517/0202-3822-2017-40-4-5-13.
3. Andrianova E. A., Tsibul'skiy V. F. [Moderate-breeding fast reactors and structure of nuclear power]. In: *Atomnaya energiya* [Atomic Energy], 2018, vol. 125, no. 2, pp. 71–74.
4. Velikhov E. P., Glukhikh V. A., Gur'yev V. V., Kadomtsev B. B., Kolbasov B. N., Kotov V. V., Monoszon N. A. et al. [Hybrid thermonuclear tokamak reactor for the production of fissile fuel and electricity]. In: *Atomnaya energiya* [Atomic Energy], 1978, vol. 45, no. 1, pp. 3–9.
5. Azizov E. A., Anan'ev S. S., Belyakov V. A., Bondarchuk E. N., Voronova A. A. et al. [Tokamak DEMO-FNS: concepts of magnet system and vacuum chamber]. In: *Voprosy atomnoi nauki i tekhniki. Seriya: Termoyadernyi sintez* [Problems of atomic science and technology. Series: Thermonuclear fusion], 2015, vol. 38, no. 2, pp. 5–18. DOI: 10.21517/0202-3822-2015-38-2-5-18.
6. Orlov V. V., Ponomarev L. I. [Nuclear problems of thermonuclear power generation]. In: *Atomnaya energiya* [Atomic Energy], 2018, vol. 124, no. 2, pp. 105–114.
7. Shamanin I. V., Arzhannikov A. V., Prikhod'ko V. V., Shmakov V. M., Modestov D. G., Lutsik I. O., Polozkov S. D., Bedenko S. V. [Hybrid “fusion-fission” reactor facility on

- thorium fuel with a source of additional thermonuclear neutrons]. In: *Sibirskii fizicheskii zhurnal* [Siberian journal of physics], 2021, vol. 16, no. 1, pp. 21–43. DOI: 10.25205/2541-9447-2021-16-1-21-43.
8. Moryakov A. V., Zinchenko A. S., Tsibul'skiy V. F., Davidenko V. D., Chukbar B. K. [Estimation of reproduction fission isotopes for a nuclear reactor in a blanket thermonuclear reactor]. In: *Voprosy atomnoi nauki i tekhniki. Seriya: Yaderno-reaktornyye konstanty* [Problems of atomic science and technology. Series: Nuclear and reactor constants], 2019, no. 2, pp. 38–48. DOI: 10.55176/2414-1038-2019-2-38-48.
  9. MacFarlane R. E., Boicourt R. M. NJOY: A neutron and photon processing system. In: *Transactions of the American Nuclear Society*, 1975, vol. 22, P. 720.
  10. Blandinskiy V. Yu., Davidenko V. D., Zinchenko A. S., Moryakov A. V., Rodionova Ye. V., Chukbar B. K., Tsibul'skiy V. F. [Energy outlook for thermonuclear fusion]. In: *Atomnaya energiya* [Atomic Energy], 2020, vol. 128, no. 1, pp. 37–40.
  11. Alekseev N. I., Bolshagin S. N., Gomin E. A., Gorodkov S. S., Gurevich M. I., Kalugin M. A., Kulakov A. S. et al. [The status of the MCU-5]. In: *Voprosy atomnoi nauki i tekhniki. Seriya: Fizika yadernykh reaktorov* [Problems of Atomic Science and Engineering. Series: Physics of Nuclear Reactors], 2011, no. 4, pp. 4–23.
- 

### ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

*Давиденко Владимир Дмитриевич* – доктор технических наук, руководитель отделения физики и моделирования энергетики Национального исследовательского центра «Курчатовский институт»;

e-mail: Davidenko\_VD@nrcki.ru

*Дьячков Иван Игоревич* – младший научный сотрудник лаборатории моделирования развития энергетики Национального исследовательского центра «Курчатовский институт»;

e-mail: Djachkov\_ii@nrcki.ru;

*Иоаннисуан Михаил Викторович* – кандидат физико-математических наук, начальник лаборатории моделирования развития энергетики Национального исследовательского центра «Курчатовский институт»;

e-mail: Ioannisian\_MVI@nrcki.ru

### INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

*Vladimir D. Davidenko* – Dr. Sci. (Engineering), Departmental Head, Department of Physics and Energy Modeling, National Research Center “Kurchatov Institute”;

e-mail: Davidenko\_VD@nrcki.ru

*Ivan I. Dyachkov* – Research Assistant, Laboratory for Modeling Energy Development, National Research Center “Kurchatov Institute”;

e-mail: Djachkov\_ii@nrcki.ru;

*Mihail V. Ioannisian* – Cand. Sci. (Phys.-Math.), Laboratory Head, Laboratory for Modeling Energy Development, National Research Center “Kurchatov Institute”;

e-mail: Ioannisian\_MVI@nrcki.ru

### ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Давиденко В. Д., Дьячков И. И., Иоаннисиан М. В. Трансмутация нуклидов в blankets термоядерного источника нейтронов // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2023. № 2. С. 38–50.  
DOI: 10.18384/2310-7251-2023-2-38-50.

### FOR CITATION

Davidenko V. D., Dyachkov I. I., Ioannisian M. V. Transmutation of nuclides in the blanket of a thermonuclear neutron source. In: *Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*, 2023, no. 2, pp. 38–50.  
DOI: 10.18384/2310-7251-2023-2-38-50.

УДК 532.529:536.24

DOI: 10.18384/2310-7251-2023-2-51-64

## МОЛЕКУЛЯРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПОТОКА С РЕЛЬЕФНЫМ ТЕЛОМ

*Н. В. Зубова<sup>1</sup>, И. А. Амелюшкин<sup>2</sup>*

<sup>1</sup> *Московский государственный университет технологий и управления им. К. Г. Разумовского*

*109004, г. Москва, ул. Земляной Вал, д. 73, Российская Федерация*

<sup>2</sup> *Московский физико-технический институт*

*(национальный исследовательский университет)*

*141701, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., д. 9,*

*Российская Федерация*

### **Аннотация**

**Цель:** создание алгоритмов, позволяющих рассчитывать взаимодействие гетерогенного потока с наноструктурированными поверхностями твёрдых веществ из различных материалов, процессов смачивания и движения частиц на поверхности в потоке воздуха. Процедуры и методы. Используются методы молекулярного моделирования, известные физические закономерности и анализ исследований других авторов.

**Результаты.** В настоящей работе развит метод расчёта взаимодействия потока твёрдым телом, покрытие которого имеет рельеф и обладает различной степенью гидрофобности. Методом молекулярной динамики проведены параметрические исследования.

Теоретическая и практическая значимость. Результаты могут быть использованы при исследовании возможностей управления состоянием пограничного слоя и зарождением турбулентности на молекулярном уровне.

**Ключевые слова:** рельефное тело, молекулярное моделирование, потенциалы взаимодействия, атомы кристаллической решётки

**Благодарности:** Исследование выполнено при поддержке РФФИ в рамках проекта № 19–29–13024

## MOLECULAR MODELLING OF A FLOW INTERACTION WITH A RELIEF BODY

*N. Zubova<sup>1</sup>, I. Amelyushkin<sup>2</sup>*

<sup>1</sup> *Moscow State University of Technology and Management  
Zemlyanoi Val 73, Moscow 109004, Russian Federation*

<sup>2</sup> *Moscow Institute of Physics and Technology  
Institutskii per. 9, Dolgoprudnyi 117303, Moscow Region, Russian Federation*

### **Abstract**

**Aim.** We construct algorithms that allow calculating the interaction of a heterogeneous flow with nanostructured surfaces of solids made of various materials, as well as wetting processes and movement of particles on the surface in an air flow.

**Methodology.** Use is made of methods of molecular modeling and known physical laws; studies performed by other authors are analyzed.

**Results.** A method is developed for calculating the interaction of a flow with a solid body, whose coating has a relief and a different degree of hydrophobicity. Parametric studies are performed using the molecular dynamics method.

**Research implications.** The results can be used to study the possibilities of controlling the state of the boundary layer and the initiation of turbulence at the molecular level.

**Keywords:** relief body, molecular modeling, interaction potentials, crystal lattice atoms

**Acknowledgments:** The study was supported by the Russian Foundation for Basic Research under project No. 19-29-13024

### **Введение**

Моделирование управления взаимодействием потока с обтекаемой поверхностью представляет большой интерес в различных областях науки и техники: разработка противообледенительных покрытий, изменение теплообмена, транспорт веществ по каналам, ламинаризация и турбулизация потока, управление пограничным слоем и ряд других приложений.

Развиваемый в настоящей работе подход позволяет учесть возможность прилипания молекул к поверхности обтекаемого тела для различных режимов взаимодействия, например, формирования пограничного слоя у рельефного тела, образования инея и конденсации.

В работе [1] представлены результаты молекулярно-динамического моделирования пограничного слоя однокомпонентной жидкости на волнистой поверхности с использованием упрощённого расчёта с помощью известного термостата Ланжевена и искусственного коэффициента трения. Взаимодействие твёрдых микрочастиц с шероховатой поверхностью исследовалось ранее теоретически и экспериментально [2; 3].

Принятая в настоящей работе расчётная область (рис. 1) – параллелепипед  $x_{\max} \cdot y_{\max} \cdot z_{\max} = L \cdot H \cdot D$ , длина расчётной области  $L = 2H$ , ширина расчётной области  $D = H = 20 \div 100$  нм. Граничные условия в плоскостях  $z = 0$  и  $z = D$  являются периодическими с характерным периодом шероховатости  $\lambda$ . В

плоскости  $x = 0$  задаётся массовый поток  $q_x = \rho V_x$ . По мере прохождения плоскостей  $x = L$  и  $y = H$  молекулы покидают расчётную область. В этом случае в плоскостях  $x = 0$ ,  $x = L$  и  $y = H$  задаются дополнительные плотности потоков, обусловленные тепловым движением молекул  $q_x = q_y = \rho \langle V \rangle / 2 \sqrt{3} = \rho \sqrt{RT} / 2$ . Здесь  $\langle V \rangle$  – средняя скорость теплового движения молекул газа,  $T$  – температура.

Нижней границей расчётной области (рис. 1) является шероховатая поверхность обтекаемого тела, взаимодействие с которой описывается математическими моделями, определёнными далее. В этой области молекулы воды и воздуха взаимодействуют с атомами твёрдого тела с учётом их физических свойств и температуры. Тепловые скорости всех молекул газа и частиц определяются в соответствии с максвелловским распределением скоростей.

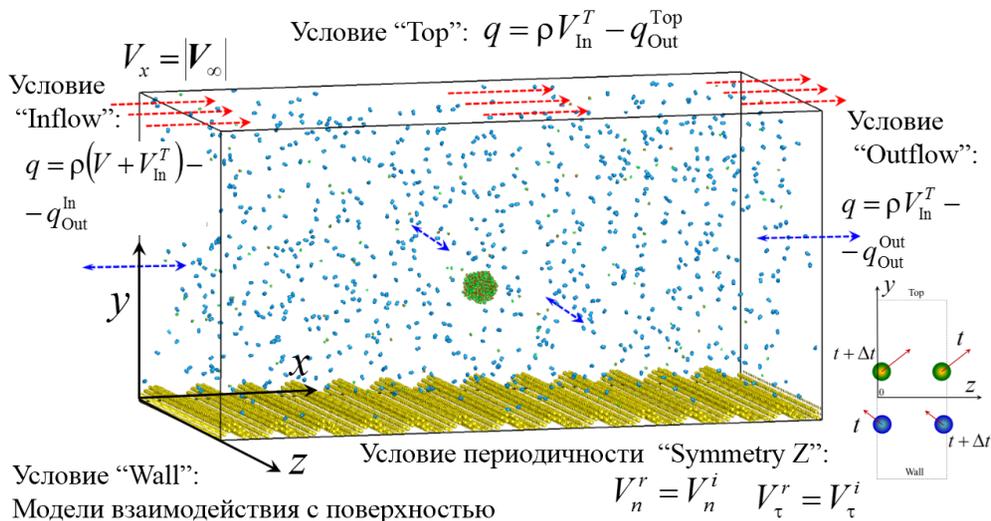


Рис. 1 / Fig. 1. Расчётная область и граничные условия / Computational domain and boundary conditions

Источник: подготовлен авторами

### Математическая модель и численный метод

В рассматриваемом подходе важную роль играют параметры межмолекулярного взаимодействия, которые могут быть получены как на основе квантовомеханических расчетов, так и из уравнения состояния реального газа, например, Ван-дер-Ваальса:

$$(P - a\rho / V\mu) (1 - b\rho / \mu) = \rho R_0 T / \mu, \tag{1}$$

где

$$a = -2\pi N_A^2 \int_d^\infty U(r)r^2 dr = \pi N_A^2 \frac{10\sqrt{2}}{9} \epsilon \sigma_0^3 = N_A \frac{5}{3} b\epsilon, \tag{2}$$

$$b = N_A \frac{2}{3} \pi d^3, \quad \sigma_0 = \frac{d}{\sqrt[5]{2}} = \frac{1}{\sqrt[5]{2}} \sqrt[3]{\frac{3b}{2\pi N_A}}. \quad (3)$$

Здесь предполагается, что потенциал взаимодействия молекул сферически симметричный и описывается законом Леннарда-Джонса (см., напр., [4]), параметры которого связаны с константами уравнения состояния реального газа Ван-дер-Ваальса. Сферическая симметрия потенциала существенно упрощает молекулярное моделирование микро- и макроскопических аэрогидродинамических явлений. В приведённых выше формулах  $\mu$  – молярная масса,  $d$  – «диаметр» молекулы.

В более общем случае сферически симметричный потенциал имеет вид:

$$U(r) = A \left( \chi \left( \frac{\sigma}{r} \right)^p - \left( \frac{\sigma}{r} \right)^q \right), \quad (4)$$

В настоящей работе в предположении о потенциальной природе взаимодействия между атомами или молекулами протестированы различные схемы интегрирования уравнений молекулярной динамики [4] и выбор был сделан в пользу схемы Хокни-Иствуда (Hockney-Eastwood) [4].

Предполагается, что частица аэрозольного потока, соударяющаяся с поверхностью твёрдого тела, ускорена обтекающим его воздухом, представляющим собой смесь азота (79%) и кислорода (21%) с параметрами газа Ван-дер-Ваальса, которые вычислялись по правилу смешения Лоренца-Бертло:

$$a = \left( \sum \alpha_j \mu_j \right)^2 \cdot \left( \sum \frac{\alpha_j}{\mu_j} \sqrt{a_j} \right)^2; \quad b = \left( \sum \alpha_j \mu_j \right) \cdot \sum \frac{\alpha_j}{\mu_j} b_j; \quad R = R_0 \sum \frac{\alpha_j}{\mu_j} \quad (5)$$

Вещество стенки описывается параметром, введённым ранее [5],

$$AK = \epsilon_{w-m} / \epsilon_{m-m} \approx 0.5 (1 + \cos \theta_0) \quad (6)$$

коэффициентом растекания, который можно рассматривать как отношение энергии  $\epsilon_{w-m}$  взаимодействия ( $A$  – адгезия) между молекулой потока (индекс  $m$ ) и поверхностью атома (индекс  $w$ ) к характерной энергии  $\epsilon_{m-m}$  взаимодействия молекул потока друг с другом ( $K$  – когезия). Этот параметр характеризует свойства материала твёрдого тела, определяющие интенсивность прилипания к нему жидкости. Рассматриваются взаимодействия молекул, принадлежащих ко всем трём фазовым состояниям веществ: газа, налетающей частицы, жидкой или твёрдой, и поверхности обтекаемого тела.

Таблица 1 / Table 1

**Характерные масштабы физических величин /  
Characteristic scales of physical quantities**

Физическая величина	Формула	Значение
Координата	$\sigma_0$	$2.6 \cdot 10^{-10}$ м
Скорость	$V_0 = \sqrt{\epsilon_0 / m_0}$	612.023 м/с
Время	$t_0 = \sigma_0 / V_0$	$0.425 \cdot 10^{-12}$ с
Угловая скорость	$t_0^{-1}$	$2.3529 \cdot 10^{12}$ с <sup>-1</sup>
Энергия межмолекулярного взаимодействия	$\epsilon_0$	$1.12 \cdot 10^{-20}$ Дж
Ускорение молекул	$V_0 / t_0$	$1466 \cdot 10^{12}$ м/с <sup>2</sup>
Плотность	$m_0 / \sigma_0^3$	1701 кг/м <sup>3</sup>
Температура	$\epsilon_0 / 3k_B$	270.39 °К
Давление поверхностных сил	$\epsilon_0 / \sigma_0^3$	$6.828 \cdot 10^5$ Па
Сила межмолекулярного взаимодействия	$\epsilon_0 / \sigma_0$	$4.308 \cdot 10^{-11}$ Н
Поверхностное натяжение	$\epsilon_0 / \sigma_0^2$	0.165 Н/м
Период решётки тела	$a = 1.0954 \sigma_0$	$2.848 \cdot 10^{-10}$ м
Амплитуда колебаний атомов тела	$\Delta a = 0.2319 \sigma_0$	$0.603 \cdot 10^{-10}$ м
Скорость колебаний атомов	$V_A = \sqrt{k / m_0} \Delta a_0 = 13.16 \cdot V_0$	8055.160 м/с
Период колебаний атомов тела	$T_A = \sqrt{m_0 / k} = 0.3411 t_0$	$0.145 \cdot 10^{-12}$ с
Жёсткость модельной пружины	$k = Ea = 8.5949 \cdot \epsilon_0 / \sigma_0^2$	1.424 Н/м
Энергия колебаний	$k \Delta a^2 / 2 = Ea \Delta a^2 / 2 = 0.2312 \epsilon_0$	$0.2589 \cdot 10^{-20}$ Дж

Источник: [5]

С использованием выражения для потенциала взаимодействия, амплитуды колебаний атомов решётки твёрдого тела  $\Delta a$ , теплопроводности и теплоёмкости веществ в настоящей работе получены значения коэффициентов взаимодействия молекул воды с твёрдым телом в предположении, что характерные размеры рельефа поверхности  $\lambda$ ,  $h$  (рис. 1) значительно превышают размеры молекул. Исходя из закона изменения импульса, выражение для скорости отражённых (верхний индекс  $r$  – reflected) от поверхности тела молекул частицы в зависимости от их начальной (верхний индекс  $i$  – incident) скорости можно получить в следующем виде:

$$V^r = \frac{V^i (1 - \mu_A / \mu) + (2 / \sqrt{3}) (\mu_A / \mu) (\mathbf{n} + 2\boldsymbol{\tau}) \Delta a \omega \sin \omega t}{1 + \mu_A / \mu}. \quad (7)$$

Здесь  $\mathbf{n}$  и  $\boldsymbol{\tau}$  – орты нормали и касательной. Для взаимодействия воды с алюминиевой поверхностью имеем  $V^r = -0.2V^i + 0.693(\mathbf{n} + 2\boldsymbol{\tau}) \Delta a \omega \sin \omega t$ ,

$\omega = \frac{\sqrt{3R_0T / \mu_A}}{\Delta a \sqrt{2}}$  – циклическая частота колебаний атомов кристаллической

решётки обтекаемого тела. Отметим, что второе слагаемое в числителе

выражения для  $V^r$  содержит одну степень свободы колебаний по нормали и две – по касательной к поверхности, описывающие вклад колебаний атомов кристаллической решётки рельефного тела (рис. 2) по направлениям колебаний поверхности. Индекс  $A$  означает атом твёрдого тела. Амплитуда колебаний атомов поверхности  $\Delta a$  в зависимости от температуры  $T$  определяется известным выражением из физики твёрдого тела:

$$\Delta a^2(T) = \frac{9\hbar^2}{4m_A k_B \theta_D} \left( 1 + 4 \left( \frac{T}{\theta_D} \right)^2 \int_0^{\frac{\theta_D}{T}} \frac{x dx}{e^x - 1} \right). \quad (8)$$

Здесь  $\theta_D$  – температура Дебая материала твёрдого тела,  $k_B$ ,  $\hbar$  – постоянные Больцмана и Планка, соответственно. В расчётах использовались данные табл. 1. Достоинством такой модели является возможность учёта тепловых колебаний атомов и более приближенное к реальности (по сравнению с традиционными моделями) описание взаимодействия молекул потока с твёрдым телом. К её недостаткам следует отнести большие вычислительные затраты при расчёте потоков в крупной расчётной области. Так, например, при моделировании двух слоёв поверхности обтекаемого тела (алюминий) размером  $100 \cdot 100 \text{ нм}^2$  требуется порядка  $10^5$  атомов, с которыми взаимодействуют молекулы потока. С увеличением шероховатости эта цифра значительно увеличивается.

В случае плоской поверхности и в предположении, что взаимодействие молекулы воды с атомом описывается потенциалом Леннарда-Джонса с параметрами  $\varepsilon_w = AK \cdot \varepsilon_{H_2O}$  (индекс  $w \equiv \text{wall}$ ), выражение для потенциала взаимодействия между молекулой потока и поверхностью обтекаемого тела имеет следующий вид [5]:

$$U(h) = \frac{8}{15} \frac{\rho_w}{m_A} \pi \varepsilon_w \sigma_w^3 \left( \frac{5}{33} \left( \frac{\sigma_w}{h} \right)^9 - \left( \frac{\sigma_w}{h} \right)^3 \right). \quad (9)$$

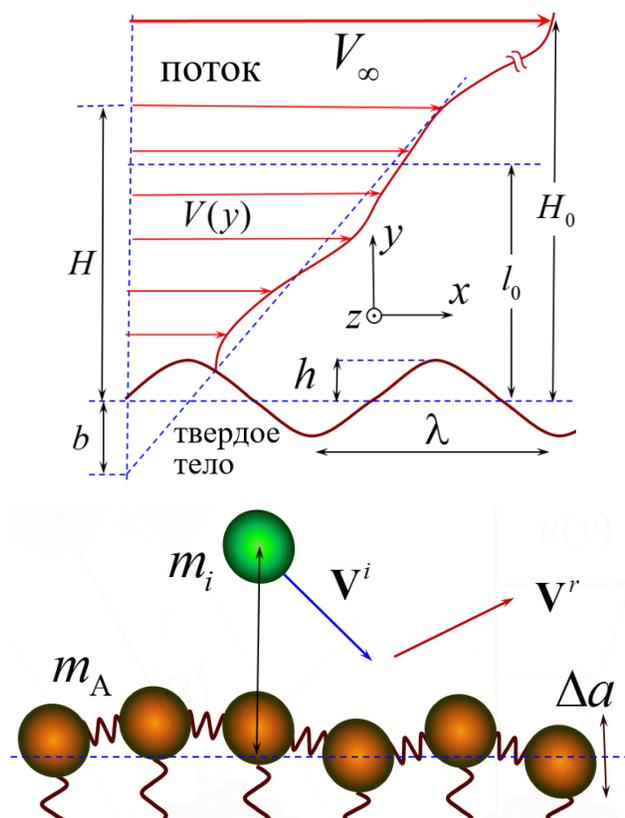
Для оценки плотности энергии взаимодействия частиц, размер которых значительно больше размера молекулы, используем модель двух плоских поверхностей – твёрдого тела и «подножия» частицы. Заметим, что выражение для поверхностной плотности сил  $P$ -взаимодействия между пластиной заданного материала и плоской поверхностью воды имеет следующий вид:

$$P = -\frac{1}{S} \frac{\rho}{m_m} \frac{\partial}{\partial h} Y(h) = B \left( \frac{5}{33} \left( \frac{\xi \sigma_0}{h} \right)^9 - \left( \frac{\xi \sigma_0}{h} \right)^3 \right), \quad (10)$$

$$B = \frac{8}{15} \frac{\rho_w \rho \pi \xi^3}{m_A m_m} AK \varepsilon_0 \sigma_0^3 \quad (11)$$

$$\frac{Y(h)}{S} = \frac{\rho}{m_m} \int_{y=h}^{\infty} U(y) dy = \frac{B \sigma_0}{2} \left( \frac{5}{132} \left( \frac{\xi \sigma_0}{h} \right)^8 - \left( \frac{\xi \sigma_0}{h} \right)^2 \right). \quad (12)$$

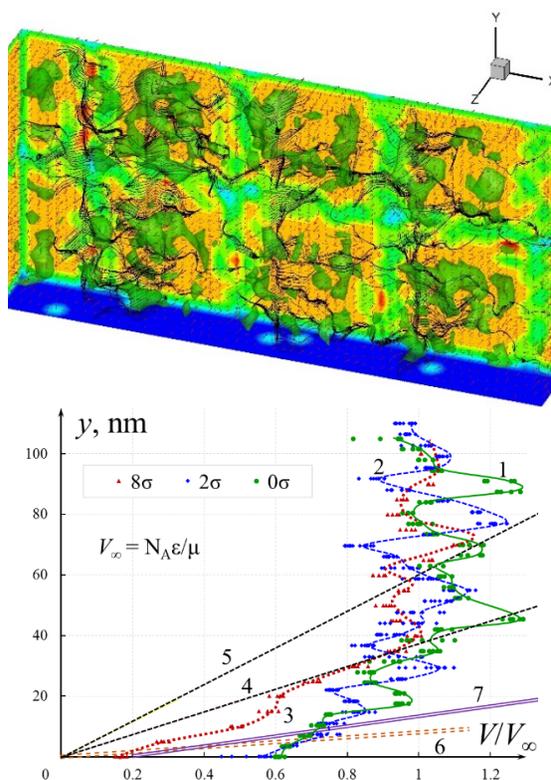
Из последних соотношений определяется равновесное расстояние между двумя поверхностями при отсутствии внешних сил:  $h_* = \xi \sigma_0 (5/33)^{1/6}$ . Здесь  $\xi$  – безразмерная величина, равная отношению характерной длины взаимодействия молекулы обтекаемого тела с молекулой воды, к характерной длине взаимодействия молекул воды друг с другом. Для алюминия  $\xi \approx 1.19$ .



**Рис. 2 / Fig. 2.** Схема взаимодействия молекул потока  $m_i$  с атомами твёрдого тела  $m_A$ . Углы  $\alpha^i$ ,  $\alpha^r$  – между вектором скорости частицы и нормалью к средней поверхности тела. Справа – схема взаимодействия потока с твёрдым телом / Scheme of interaction of flow molecules  $m_i$  with atoms of a solid body  $m_A$ . Angles  $\alpha^i$  and  $\alpha^r$  are between the particle velocity vector and the normal to the average surface of the body. On the right is a diagram of the interaction of a flow with a solid body

Отметим, что используемый в настоящей работе подход позволяет преодолеть трудности учёта непарного характера взаимодействия молекул, а также угловой зависимости межмолекулярных сил, для определения которых, строго говоря, необходимы методы квантовой химии решения уравнения Шредингера для многоэлектронной системы атомов. Этот подход позволяет рассчитывать как континуальный, так и свободномолекулярный режимы взаимодействия частиц и капель с твёрдым телом, учитывая ряд физических

явлений: фазовые переходы, зависимость коэффициента поверхностного натяжения от кривизны межфазной границы, процессы дробления, коагуляции и теплообмена с рельефным телом, атомы которого находятся в тепловом движении. При этом достоверность полученных в настоящей работе результатов обоснована сравнением с теоретическими и с экспериментальными оценками других исследователей, описанными в [2; 5] (рис. 3). Развитые в настоящей работе численные алгоритмы и программное обеспечение позволяют использовать различные потенциалы взаимодействия молекул и схемы интегрирования уравнений движения.



**Рис. 3 / Fig. 3.** Слева – поверхности равных значений скорости потока, трёхмерное векторное поле скорости, линии тока и сетка, в ячейках которой проходило осреднение; справа – влияние шероховатости поверхности (кривые 1–3) обтекаемого тела на профиль скорости в пограничном слое воздуха, сравнение расчётов с аналитическими решениями [6] (4, 5) и результатами (6, 7 [1]) / (on the left) Surfaces of equal values of the flow velocity, a three-dimensional vector velocity field, streamlines and a grid, in the cells of which the averaging took place; (on the right) effect of surface roughness (curves 1–3) of a streamlined body on the velocity profile in the boundary layer of air, comparison of calculations with analytical solutions [6] (4, 5) and results (6, 7 [1])

Источник: авторские результаты и [1; 6]

### Результаты численных исследований

Ниже даны иллюстрации результатов расчётов, которые получены на основе разработанной в рамках настоящего исследования программы, которая написана на языке C++. Во всех расчётах угол падения частицы  $\alpha_i = \pi/4$ , модуль её скорости  $|V| = 50$  м/с; число молекул в частице  $N = 650, 1100$  и  $4660$ ; твёрдое тело – алюминий (табл. 2). Согласно [7], угол  $\theta_0$  смачивания водой гладкой поверхности алюминия приблизительно равен  $110$  град. Параметры газового потока определялись температурой и атмосферным давлением, используемый в работе численный алгоритм и программа ЭВМ позволяют определять параметры состояния пограничного слоя в расчётных областях, размеры которых значительно превышают длину свободного пробега молекул.

Таблица 2 / Table 2

Свойства кристаллических решёток Al и H<sub>2</sub>O при температуре  $-10^\circ\text{C}$  /

Properties of crystal lattices of Al and H<sub>2</sub>O at a temperature of  $-10^\circ\text{C}$

Материал	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	$\mu$ , г/моль	$m$	$a_c$ , Å	$E$ , ГПа	$\theta_D$ , К	$\Delta a$ , Å	$\omega$ , $10^{12}$ с <sup>-1</sup>
Al	2700	27	4	4.05	68	394	0.14	48
H <sub>2</sub> O (лёд)	917	18	2	2.85	5	192	0.51	17

Источник: [5]

Понятно, что чем мельче частица, тем скорее она тормозится в пограничном слое на обтекаемом теле, но тем большую роль в её динамике играют тепловые флуктуации (броуновское движение). Если для молекулы воды средняя скорость теплового движения около  $600$  м/с, то для рассмотренных кластеров её значения составляют приблизительно  $25, 20$  и  $10$  м/с. Таким образом, несмотря на быструю релаксацию мелких частиц вблизи поверхности твёрдого тела, суммарная скорость их соударения с твёрдым телом может достигать десятков метров в секунду.

Отметим, что реальный газ состоит не только из молекул, но содержит также их агломераты – молекулярные кластеры (ди-, три-, ...,  $N$ -меры), причём их концентрация и количество составляющих их молекул  $N$  растёт с понижением температуры. Это касается в особенности паров воды, находящихся в предконденсационном состоянии; их кластеры, обтекающие вместе с несущим воздухом элементы конструкции летательного аппарата, могут участвовать в «подготовке» последних к обледенению.

Под наночастицами [8; 9] обычно понимают частицы размером от  $1$  до  $100$  нанометров. В то же время под кластерами понимают скопления молекул, а под большими молекулярными кластерами [10] скопления молекул, число которых  $100$ – $1000$  молекул.

Между объектами, входящими в понятие кластер и объектами, входящими в понятие наночастица, есть пересечение, т. к. кластер в  $1000$  молекул может

заметно превышать минимальный размер наночастицы, т. е. 1 нанометр. Так, кластер воды из  $N = 333$  молекул (999 атомов) имеет размер порядка

$$D = 2 \sqrt[3]{\frac{3\mu_{\text{H}_2\text{O}}N}{4\pi\rho_l N_A}} \cong 2.7 \text{ нм, где } \mu_{\text{H}_2\text{O}} - \text{молярная масса воды, } \rho_l - \text{её плотность, } N_A -$$

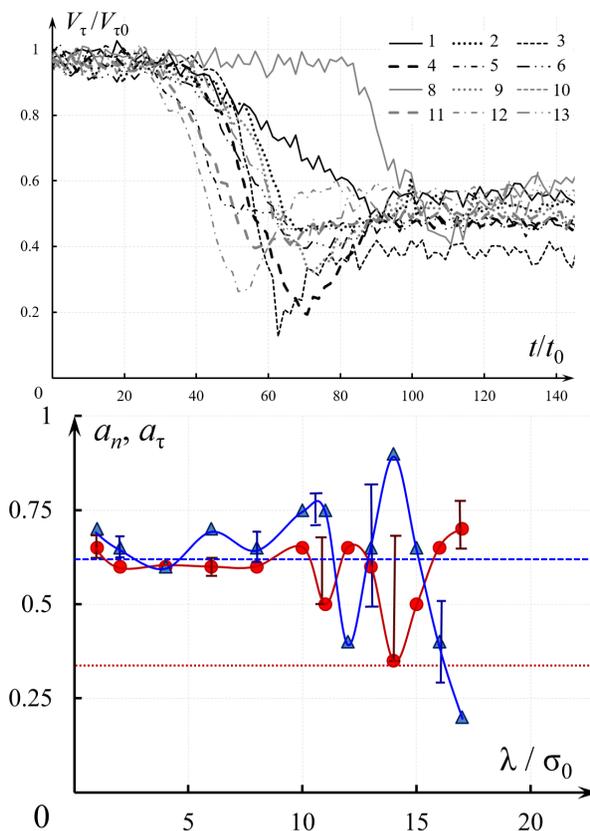
число Авогадро. Таким образом, под наночастицами подразумеваются молекулярные кластеры размером до 100 нанометров, в которых число молекул  $N \gg 10$ . Под частицами аэрозольного потока подразумеваются твёрдые тела, размеры которых на порядки превосходят размеры молекул.

Хотя метод молекулярной динамики применим для описания поведения как отдельных молекул, так и их объединений – молекулярных кластеров, в настоящей работе метод молекулярной динамики применяется к описанию поведения частиц произвольного размера при выполнении следующих условий: 1) число молекул в частице  $\gg 10$ ; 2) размер частицы значительно превышает толщину  $\delta_\sigma$  поверхностного слоя, в котором действуют поверхностные силы; 3) при выполнении первых двух условий и основных критериев подобия (число Вебера  $We = D\rho_l V^2/\sigma_l$  и капиллярности) результаты, полученные для наночастиц, справедливы для микро- и макро частиц, здесь  $D$  – диаметр капли,  $\sigma_l$  – коэффициент поверхностного натяжения,  $V$  – скорость удара капли; 4) взаимодействие молекул парное, потенциал симметричный, не учитывается распределение зарядов, но обеспечивается соответствие упругих, гидродинамических и термодинамических свойств дисперсной фазы аэрозольного потока.

Строго говоря, молекулярное моделирование удара капель и кристаллов льда требует учёта непарности потенциала межмолекулярного взаимодействия, зависимости его от ориентации и образования водородных связей, не говоря о более тонких физических эффектах, таких как квантово-химические явления и электризация. Необходимость развития алгоритмов численного метода вызвана тем, что моделирование описанных выше явлений даже для малых молекулярных соединений, например, для исследования удара капли радиусом в несколько нанометров, требует колоссальных вычислительных затрат, не говоря о корректности постановки задачи, в которой могут иметь место множество неустойчивых конфигураций молекулярных объединений – кластеров.

На рис. 4 показаны зависимости коэффициентов изменения скорости (отношения компонент скорости после удара к соответствующему значению до удара) частиц от относительных значений параметра шероховатости поверхности твёрдого тела  $\lambda/\sigma_0$ . Соединяющие их линии проведены лишь для более чёткой привязки к одному из двух семейств точек; на самом деле между каждой их парой следовало бы указать значения коэффициентов ещё при нескольких значениях  $\lambda/\sigma_0$ . Коэффициенты изменения скорости частиц при их ударе о поверхность оценены для частиц радиусом  $a_p = 3.2$  нм и 20 мкм также на основе выражений, приведённых в [5] для плоской поверхности при

одинаковых значениях числа Вебера для частиц, и отмечены горизонтальными точечными прямыми. В расчётах были использованы параметры, которые приведены в табл. 2.



**Рис. 4 / Fig. 4.** Зависимость полученных в настоящей работе коэффициентов восстановления компонент скорости частиц на поверхности  $s$  ( $h = 1$  нм) при различных значениях параметра шероховатости поверхности; кружки – нормальная компонента скорости, треугольники – тангенциальная. / Dependence of the recovery coefficients of the particle velocity components on the surface which were obtained in the present study ( $h = 1$  nm) for different values of the surface roughness parameter; circles, normal velocity component and triangles, tangential

Источник: составлено авторами по результатам исследования

Вопрос о фазовом состоянии рассмотренных частиц нетривиален. Еще М. Фарадей предполагал (в 1842 г.) существование жидких слоёв на поверхности кристалла льда ниже температуры замерзания. В недавней работе [11] существование таких слоёв подтверждено в диапазоне температур от  $-90$  до  $-1$  °C. Ситуация аналогична отсутствию резкой границы между жидкостью и паром [12]. Однако, поскольку размеры рассмотренных кластеров имеют

порядок толщины переходных межфазных слоёв, в настоящей работе такие молекулярные образования называются просто частицами.

### Заключение

Развит метод, позволяющий моделировать гидромеханические свойства жидкости со свободными границами, используя осесимметричные потенциалы, параметры которых определены из макроскопических табличных значений параметров, характеризующих гидродинамические свойства жидкости. Используемый в работе метод учитывает свободномолекулярные явления, реологические свойства жидкости, тепломассообмен на межфазных границах, особенности граничных условий на обтекаемом теле, обладающем гидрофобными свойствами, зависимость коэффициента поверхностного натяжения от радиуса кривизны межфазной границы жидкости и ряд других явлений. При этом, в отличие от метода молекулярной динамики, пренебрегается атомарной структурой молекул воды, т.е. асимметрией и непарностью потенциалов межмолекулярного взаимодействия, а также квантово-химическими явлениями. Такое пренебрежение вполне оправдано в задачах молекулярного моделирования макроскопических явлений, т.к. позволяет с высокой точностью моделировать гидродинамические процессы в движущейся жидкости.

*Статья поступила в редакцию 24.04.2023 г.*

### ЛИТЕРАТУРА

1. Priezjev N. V. Collective nonaffine displacements in amorphous materials during large-amplitude oscillatory shear // *Physical Review E*. 2017. Vol. 95. Iss. 2. P. 023002\_1–023002\_7. DOI: 10.1103/PhysRevE.95.023002.
2. Лашков В. А. Взаимодействие твердых частиц газозвеси с поверхностью сложного профиля // *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия*. 2008. № 4. С. 125–130.
3. Panfilov S. V., Tsirkunov Yu. M. Scattering of nonspherical particles rebounding from a smooth and a rough surface in a high-speed gas-particle flow // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2008. Vol. 49. P. 222–230. DOI: 10.1007/s10808-008-0032-4.
4. Allen M., Tildesley D. *Computer Simulation of Liquids*. London: Clarendon Press, 1987. 385 p.
5. Амелюшкин И. А., Стасенко А. Л. Взаимодействие нанокнопель аэрозольного потока с твердым телом // *Наноструктуры. Математическая физика и моделирование*. 2016. Т. 14. № 2. С. 5–23.
6. Blasius H. Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung // *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*. 1908. Vol. 56. P. 1–37.
7. A comparison of contact angle measurement results obtained on bare, treated, and coated alloy samples by both dynamic sessile drop and Wilhelmy method / Románszki L.,

- Mohos M., Telegdi J., Keresztes Zs., Nyiko L. // *Periodica Polytechnica. Chemical Engineering*. 2014. Vol. 58 (Supplement). P. 53–59. DOI: 10.3311/PPch.7188.
8. ISO/TS 27687:2008. Nanotechnologies – Terminology and definitions for nano-objects – Nanoparticle, nanofibre and nanoplate [Электронный ресурс]. <https://www.iso.org/obp/ui/#iso:std:iso:ts:27687:ed-1:v2:en> (дата обращения: 20.02.2020).
  9. Batista C. A. S., Larson R. G., Kotov N. A. Nonadditivity of nanoparticle interactions // *Science*. 2015. Vol. 350 (6257). P. 1242477. DOI: 10.1126/science.1242477.
  10. Rattunde O., Haberland H. Clusterphysik [Электронный ресурс] // *Spektrum*: [сайт]. URL: <https://www.spektrum.de/lexikon/physik/clusterphysik/2464> (дата обращения: 19.01.2022).
  11. Two types of quasiliquid crystals are formed kinetically / Asakava H., Sazaki G., Nagashima K., Nakatsubo S., Furukava Y. // *Proceedings of the National Academy of Sciences (PNAS)*. 2016. Vol. 113 (7). P. 1749–1753. DOI: 10.1073/pnas.1521607113.
  12. Радченко И. В. Молекулярная физика. М.: Наука, 1965. 480 с.

### REFERENCES

1. Priezjev N. V. Collective nonaffine displacements in amorphous materials during large-amplitude oscillatory shear. In: *Physical Review E*, 2017, vol. 95, iss. 2, pp. 023002\_1–023002\_7. DOI: 10.1103/PhysRevE.95.023002.
2. Lashkov V. A. [Interaction of solid particles of two-phase flow with a surface of complicated profile]. In: *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Astronomiya* [Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy], 2008, no. 4, pp. 125–130.
3. Panfilov S. V., Tsirkunov Yu. M. Scattering of nonspherical particles rebounding from a smooth and a rough surface in a high-speed gas-particle flow. In: *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2008, vol. 49, pp. 222–230. DOI: 10.1007/s10808-008-0032-4.
4. Allen M., Tildesley D. *Computer Simulation of Liquids*. London, Clarendon Press, 1987. 385 p.
5. Amelyushkin I. A., Stasenko A. L. [Interaction of aerosol flow nanodroplets with a solid body]. In: *Nanostruktury. Matematicheskaya fizika i modelirovaniye* [Nanostuctures. Mathematical physics and Modelling], 2016, vol. 14, no 2, pp. 5–23.
6. Blasius H. Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung. In: *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, 1908, vol. 56, pp. 1–37.
7. Románszki L., Mohos M., Telegdi J., Keresztes Zs., Nyiko L. A comparison of contact angle measurement results obtained on bare, treated, and coated alloy samples by both dynamic sessile drop and Wilhelmy method. In: *Periodica Polytechnica. Chemical Engineering*, 2014, vol. 58 (Supplement), pp. 53–59. DOI: 10.3311/PPch.7188.
8. ISO/TS 27687:2008. Nanotechnologies – Terminology and definitions for nano-objects – Nanoparticle, nanofibre and nanoplate. available at: <https://www.iso.org/obp/ui/#iso:std:iso:ts:27687:ed-1:v2:en> (accessed: 20.02.2020).
9. Batista C. A. S., Larson R. G., Kotov N. A. Nonadditivity of nanoparticle interactions. In: *Science*, 2015, vol. 350 (6257), pp. 1242477. DOI: 10.1126/science.1242477.
10. Rattunde O., Haberland H. Clusterphysik. In: *Spektrum*. Available at: <https://www.spektrum.de/lexikon/physik/clusterphysik/2464> (accessed: 19.01.2022).

11. Asakava H., Sazaki G., Nagashima K., Nakatsubo S., Furukava Y. Two types of quasiliquid crystals are formed kinetically. In: *Proceedings of the National Academy of Sciences (PNAS)*, 2016, vol. 113 (7), pp. 1749–1753. DOI: 10.1073/pnas.1521607113.
12. Radchenko I. V. *Molekulyarnaya fizika* [Molecular physics]. Moscow, Nauka Publ., 1965. 480 p.

---

### ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

*Зубова Наталья Валерьевна* – кандидат педагогических наук, доцент кафедры физики Московского государственного университета технологий и управления им. К. Г. Разумовского;

e-mail: Na448@yandex.ru;

*Амелюшкин Иван Алексеевич* – кандидат физико-математических наук, программист лаборатории информационных технологий и прикладной математики Физтех-школы аэрокосмических технологий Московского физико-технического института (национального исследовательского университета);

e-mail: Amelyushkin\_Ivan@mail.ru

### INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

*Natalya V. Zubova* – Cand. Sci. (Education), Assoc. Prof., Department of Physics, Moscow State University of Technology and Management;

e-mail: Na448@yandex.ru;

*Ivan A. Amelyushkin* – Cand. Sci. (Phys.-Math.), Programmer, Laboratory of Information Technologies and Applied Mathematics, Phystech School of Aerospace Technology, Moscow Institute of Physics and Technology

e-mail: Amelyushkin\_Ivan@mail.ru

---

### ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Зубова Н. В., Амелюшкин И. А. Молекулярное моделирование взаимодействия потока с рельефным телом // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2023. № 2. С. 51–64.

DOI: 10.18384/2310-7251-2023-2-51-64.

### FOR CITATION

Zubova N. V., Amelyushkin I. A. Molecular modelling of a flow interaction with a relief body. In: *Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*, 2023, no. 2, pp. 51–64.

DOI: 10.18384/2310-7251-2023-2-51-64.

УДК 533.72

DOI: 10.18384/2310-7251-2023-2-65-77

## ПОЛЯ ТЕМПЕРАТУРЫ И КОНЦЕНТРАЦИИ ВОКРУГ ДВУХ НАГРЕВАЕМЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ ИЗЛУЧЕНИЕМ КАПЕЛЬ

**Хасанов А. С.**

*Российский экономический университет имени Г. В. Плеханова  
117997, г. Москва, Стремянный пер., д. 36, Российская Федерация*

### **Аннотация**

**Цель.** Формулы для полей температуры и концентрации вокруг двух испаряющихся одинаковых аэрозольных капель в поле электромагнитного излучения обобщаются на случай двух капель с произвольными радиусами.

**Процедура и методы.** Коэффициенты в разложениях полей температуры и концентрации по сферическим функциям рассматриваются как координаты векторов бесконечномерного линейного нормированного пространства, которые находятся из граничных условий операторными методами.

**Результаты.** Формулы для полей температуры и концентрации вокруг двух одинаковых капель обобщены для двух капель с произвольными радиусами. Проведены расчёты по этим формулам и приведены графики профилей полей температуры и концентрации для двух капель с неодинаковыми радиусами для разных расстояний между центрами капель.

**Теоретическая и практическая значимость.** Полученные теоретические формулы позволяют составить простые алгоритмы для практических расчётов.

**Ключевые слова:** аэрозольные капли, испарение капель, взаимодействующие капли

## TEMPERATURE AND CONCENTRATION FIELDS AROUND TWO DROPS HEATED BY ELECTROMAGNETIC RADIATION

**A. Khasanov**

*Plekhanov Russian University of Economics  
Stremyanniy per. 36, Moscow 117997, Russian Federation*

### **Abstract**

**Aim.** Formulae for temperature and concentration fields around two evaporating identical aerosol drops in the electromagnetic radiation field are generalized to the case of two drops with arbitrary radii.

**Methodology.** Coefficients in expansions of temperature and concentration fields by spherical functions are considered as coordinates of vectors of an infinite-dimensional linear normalized space, which are found from boundary conditions by means of linear operators.

**Results.** Generalized formulae for temperature and concentration fields around two drops with arbitrary radii are obtained. Calculations are carried out using these formulae and graphs of

temperature and concentration field profiles for two unequal drops for different distances between drop centers are given.

**Research implications.** The obtained theoretical formulae for temperature and concentration fields around two drops with arbitrary radii allow one to make simple algorithms for practical calculations.

**Keywords:** aerosol drops, evaporation of drops, interacting drops

## Введение

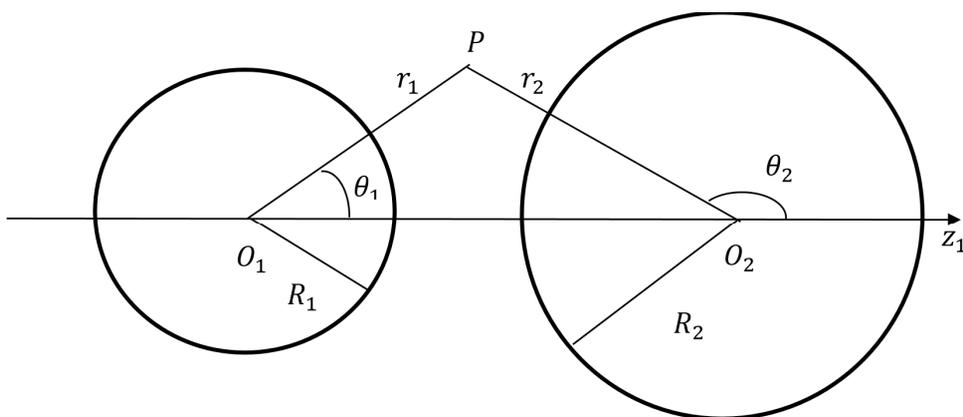
Задача об испарении одиночных капель в поле электромагнитного излучения решалась в работах [1–2]. Задача об испарении двух взаимодействующих капель рассматривалась в работах [3–6] с применением биполярной системы координат. Для понимания процесса испарения двух взаимодействующих испаряющихся капель важным является исследование полей температуры и концентрации вокруг этих капель. Наиболее сильно это взаимодействие выражено на линии центров капель. В работе [7] нами были получены формулы для этих профилей полей температуры и концентрации вокруг двух одинаковых капель методами теории линейных операторов. Этот метод достаточно прост и может быть использован при решении и других задач об аэрозольных частицах [8–11]. Задача об испарении аэрозольных капель с учётом различных эффектов остаётся актуальной [12–16]. Целью настоящей работы является обобщение результатов работы [7] на случай двух капель с произвольными радиусами.

## Методы

В задаче рассматриваются две неподвижные капли чистого вещества, взвешенные в бинарной газовой смеси. Первый компонент смеси образован молекулами вещества капель, а второй компонент состоит из молекул несущего газа. На капли падает монохроматическое излучение, которое нагревает их. Предполагается, что коэффициент теплопроводности вещества капель значительно больше коэффициента теплопроводности несущего газа. В этих условиях распределение температуры вдоль поверхности любой из двух капель можно считать однородным. Молекулы вещества капель могут испаряться с поверхностей капель или конденсироваться на них. Молекулы несущего газа не испытывают фазового перехода на поверхностях капель. Радиусы капель будем считать достаточно большими по сравнению со средней длиной свободного пробега молекул бинарной смеси. В этом случае при записи граничных условий на поверхностях капель мы можем пренебречь влиянием скачков температуры и концентрации на процессы испарения и конденсации. При этом мы считаем, что радиусы капель достаточно малы, чтобы можно было пренебречь временами релаксаций полей температуры и концентрации. Это позволяет нам процессы испарения и конденсации описывать в квазистационарном приближении. Пусть  $n_1$  и  $n_2$  – численные концентрации молекул первого и второго компонентов бинарной смеси и  $n = n_1 + n_2$ . Тогда относительные концентрации этих компонентов определяются по формулам  $c_1 = \frac{n_1}{n}$  и  $c_2 = \frac{n_2}{n}$ , где  $c_1 + c_2 = 1$ . Будем считать, что  $c_1 \ll 1$ . В этом случае определяющим механизмом переноса

молекул в бинарной смеси является диффузия, т. е. процессы испарения (или конденсации) происходят в диффузионном режиме.

Пусть  $O_1$  и  $O_2$  – центры капель,  $R_1$  и  $R_2$  – радиусы капель ( $R_1 \leq R_2$ ). В декартовой системе координат  $O_1x_1y_1z_1$  направление оси  $O_1z_1$  совпадает с направлением вектора  $\overline{O_1O_2}$ . Декартова система координат  $O_2x_2y_2z_2$  получена путем параллельного переноса системы координат  $Ox_1y_1z_1$ . Пусть  $P$  – точка плоскости, проходящей через линию центров капель,  $r_1, \theta_1, \varphi_1$  – сферические координаты этой точки в системе координат с началом в точке  $O_1$ , а  $r_2, \theta_2, \varphi_2$  – с центром в точке  $O_2$ , где  $r_1 \geq R_1$  и  $r_2 \geq R_2$ .



**Рис. 1 / Fig. 1.** Сферические координаты  $r_1, \theta_1$  и  $r_2, \theta_2$  одной и той же точки  $P$  в бинарной смеси в сферических системах координат с началами в точках  $O_1$  и  $O_2$  / Spherical coordinates  $r_1, \theta_1$  and  $r_2, \theta_2$  of the same point  $P$  in a binary mixture in spherical coordinate systems with origins at points  $O_1$  and  $O_2$ .

Источник: составлено автором.

Пусть  $T$  – распределение температуры в бинарной смеси. Прямая  $O_1O_2$  является осью симметрии полей  $T$  и  $c_1$ , следовательно, эти поля не зависят от сферической координаты  $\varphi$ . Будем считать, что на большом удалении от капель величины  $T$  и  $c_1$  равны постоянным величинам  $T_\infty$  и  $c_{1\infty}$ . Предполагается, что процессы испарения и конденсации происходят при малых относительных перепадах температуры, т. е.  $\left| \frac{T-T_\infty}{T_\infty} \right| \ll 1$ . Пусть  $T_{s,1}$  и  $T_{s,2}$  – температуры поверхностей первой и второй капель. Эти величины являются неизвестными задачи и будут найдены из граничных условий. Относительные концентрации молекул насыщенных паров вещества капель при температурах  $T_{s,1}$  и  $T_{s,2}$  обозначим символами  $c_{1s}(T_{s,1})$  и  $c_{1s}(T_{s,2})$ . При одновременном выполнении условий  $\left| \frac{T-T_\infty}{T_\infty} \right| \ll 1$  и  $c_1 \ll 1$  мы приходим к следующей граничной задаче [6]:

$$\Delta T = 0, \quad (1)$$

$$\Delta c_1 = 0, \quad (2)$$

$$T = T_{s,1}, c_1 = c_{1s}(T_{s,1}) \text{ на поверхности первой капли,} \quad (3)$$

$$T = T_{s,2}, c_1 = c_{1s}(T_{s,2}) \text{ на поверхности второй капли,} \quad (4)$$

$$T = T_\infty \text{ на большом расстоянии от капель,} \quad (5)$$

$$c_1 = c_{1\infty} \text{ на большом расстоянии от капель.} \quad (6)$$

Решения уравнений (1) – (2) ищем в виде [17]:

$$T = T_\infty + (T_{s,1} - T_\infty) \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)} \left(\frac{R_1}{r_1}\right)^{n+1} P_n(\cos\theta_1) + \\ + (T_{s,2} - T_\infty) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n^{(2)} \left(\frac{R_2}{r_2}\right)^{n+1} P_n(\cos\theta_2), \quad (7)$$

$$c_1 = c_{1\infty} + (c_{1s}(T_{s,1}) - c_{1\infty}) \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(1)} \left(\frac{R_1}{r_1}\right)^{n+1} P_n(\cos\theta_1) + \\ + (c_{1s}(T_{s,2}) - c_{1\infty}) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n^{(2)} \left(\frac{R_2}{r_2}\right)^{n+1} P_n(\cos\theta_2), \quad (8)$$

где  $a_n^{(1)}$ ,  $a_n^{(2)}$ ,  $b_n^{(1)}$ ,  $b_n^{(2)}$  – неопределённые коэффициенты,  $P_n$  – полином Лежандра. Пусть  $A_1 = (a_0^{(1)}, a_1^{(1)}, \dots)^T$ ,  $A_2 = (a_0^{(2)}, a_1^{(2)}, \dots)^T$ ,  $B_1 = (b_0^{(1)}, b_1^{(1)}, \dots)^T$ ,  $B_2 = (b_0^{(2)}, b_1^{(2)}, \dots)^T$ . Из предположения об абсолютной сходимости рядов в разложениях (7)–(8) на поверхностях капель следует, что эти четыре вектора являются элементами линейного нормированного пространства  $l_1$  [18] бесконечномерных векторов  $X = (x_1, x_2, \dots)^T$  с нормой  $\|X\| = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|$ .

В разложениях (7)–(8) уже учтены условия (5)–(6). При рассмотрении граничного условия (3) на поверхности первой капли, слагаемые в разложениях (7)–(8) полей  $T$  и  $c_1$ , записанные через координаты  $r_2$ ,  $\theta_2$ , записываются через координаты  $r_1$ ,  $\theta_1$  с использованием формулы [17]

$$(-1)^n \left(\frac{l}{r_2}\right)^{n+1} P_n(\cos\theta_2) = \sum_{s=0}^{\infty} C_{n+s}^n \left(\frac{r_1}{l}\right)^s P_s(\cos\theta_1), \quad (9)$$

справедливой вблизи первой капли, где  $C_{n+s}^n$  – биномиальные коэффициенты,  $l$  – расстояние между центрами капель. Аналогично, при рассмотрении условия (4) на поверхности второй капли, слагаемые в разложениях (7)–(8), записанные через координаты  $r_1$ ,  $\theta_1$ , записываются через координаты  $r_2$ ,  $\theta_2$  с использованием формулы [17]

$$\left(\frac{l}{r_1}\right)^{n+1} P_n(\cos\theta_1) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s C_{n+s}^n \left(\frac{r_2}{l}\right)^s P_s(\cos\theta_2), \quad (10)$$

справедливой вблизи второй капли. Так как  $\left(\frac{R_2}{r_2}\right)^{n+1} = \left(\frac{l}{r_2}\right)^{n+1} \left(\frac{R_2}{l}\right)^{n+1}$ , то формулы (7)–(8) вблизи первой капли могут быть записаны в виде

$$T = T_\infty + (T_{s,1} - T_\infty) \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)} \left(\frac{R_1}{r_1}\right)^{n+1} P_n(\cos\theta_1) +$$

$$+(T_{S,2} - T_\infty) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} a_n^{(2)} C_{n+s}^n \left(\frac{R_2}{l}\right)^{n+1} \left(\frac{r_1}{l}\right)^s P_s(\cos\theta_1), \quad (11)$$

$$c_1 = c_{1\infty} + (c_{1s}(T_{S,1}) - c_{1\infty}) \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(1)} \left(\frac{R_1}{r_1}\right)^{n+1} P_n(\cos\theta_1) + \\ + (c_{1s}(T_{S,2}) - c_{1\infty}) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} b_n^{(2)} C_{n+s}^n \left(\frac{R_2}{l}\right)^{n+1} \left(\frac{r_1}{l}\right)^s P_s(\cos\theta_1). \quad (12)$$

Аналогично, так как  $\left(\frac{R_1}{r_1}\right)^{n+1} = \left(\frac{l}{r_1}\right)^{n+1} \left(\frac{R_1}{l}\right)^{n+1}$ , то вблизи второй капли

$$T = T_\infty + (T_{S,2} - T_\infty) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n^{(2)} \left(\frac{R_2}{r_2}\right)^{n+1} P_n(\cos\theta_2) + \\ + (T_{S,1} - T_\infty) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s a_n^{(1)} C_{n+s}^n \left(\frac{R_1}{l}\right)^{n+1} \left(\frac{r_2}{l}\right)^s P_s(\cos\theta_2), \quad (13)$$

$$c_1 = c_{1\infty} + (c_{1s}(T_{S,2}) - c_{1\infty}) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n^{(2)} \left(\frac{R_2}{r_2}\right)^{n+1} P_n(\cos\theta_2) + \\ + (c_{1s}(T_{S,1}) - c_{1\infty}) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s b_n^{(1)} C_{n+s}^n \left(\frac{R_1}{l}\right)^{n+1} \left(\frac{r_2}{l}\right)^s P_s(\cos\theta_2). \quad (14)$$

Запишем граничные условия (3)–(4) в виде матричных уравнений относительно четырёх неизвестных векторов  $A_1, A_2, B_1, B_2$ . Для этого введём матрицы  $C_1$  и  $C_2$  с бесконечным числом строк и столбцов, элементы которых с индексами  $i \in N$  и  $j \in N$  определяются по формулам:

$$(C_1)_{ij} = C_{i+j-2}^{j-1} \left(\frac{R_1}{l}\right)^{i-1} \left(\frac{R_2}{l}\right)^j, \quad (15)$$

$$(C_2)_{ij} = C_{i+j-2}^{j-1} \left(\frac{R_2}{l}\right)^{i-1} \left(\frac{R_1}{l}\right)^j. \quad (16)$$

Можно доказать, что эти матрицы принадлежат линейному нормированному пространству  $M$  матриц  $C$  с бесконечным числом строк и столбцов с нормой  $\|C\| = \sup \sum_{s=1}^{\infty} |c_{sn}|$ . При этом, если  $X \in l_1$  и  $C \in M$ , то матричный оператор, определённый по формуле  $Y = CX$ , где  $CX$  – произведение матрицы  $C$  на вектор  $X$ , действует из  $l_1$  в  $l_1$ . В дальнейшем для матрицы и порождённого ею матричного оператора будем использовать одно и то же обозначение. Можно показать, что норма матричного оператора  $C$ , согласованная с нормой вектора  $X$ , равна  $\|C\| = \sup \sum_{s=1}^{\infty} |c_{sn}|$ . После подстановки разложений (11)–(14) в граничные условия (3)–(4) и изменения порядка суммирования в двойных суммах, приравнивание коэффициентов при одинаковых многочленах Лежандра в правых и левых частях условий (3)–(4) приводит к следующим уравнениям, записанным в матричной форме:

$$A_1 + \frac{T_{S,2} - T_\infty}{T_{S,1} - T_\infty} C_1 A_2 = E_1, \quad B_1 + \frac{c_{1s}(T_{S,2}) - c_{1\infty}}{c_{1s}(T_{S,1}) - c_{1\infty}} C_1 B_2 = E_1, \\ A_2 + \frac{T_{S,1} - T_\infty}{T_{S,2} - T_\infty} C_2 A_1 = E_1, \quad B_2 + \frac{c_{1s}(T_{S,1}) - c_{1\infty}}{c_{1s}(T_{S,2}) - c_{1\infty}} C_2 B_1 = E_1,$$

где  $E_1 = (1, 0, 0, \dots)^T \in l_1$ . Решение этой системы простым методом подстановки приводит к следующему ответу:

$$A_1 = (E - C_1 C_2)^{-1} E_1 - \frac{T_{S,2} - T_\infty}{T_{S,1} - T_\infty} (E - C_1 C_2)^{-1} C_1 E_1, \quad (17)$$

$$A_2 = (E - C_2 C_1)^{-1} E_1 - \frac{T_{s,1} - T_\infty}{T_{s,2} - T_\infty} (E - C_2 C_1)^{-1} C_2 E_1, \quad (18)$$

$$B_1 = (E - C_1 C_2)^{-1} E_1 - \frac{c_{1s}(T_{s,2}) - c_{1\infty}}{c_{1s}(T_{s,1}) - c_{1\infty}} (E - C_1 C_2)^{-1} C_1 E_1, \quad (19)$$

$$B_2 = (E - C_2 C_1)^{-1} E_1 - \frac{c_{1s}(T_{s,1}) - c_{1\infty}}{c_{1s}(T_{s,2}) - c_{1\infty}} (E - C_2 C_1)^{-1} C_2 E_1, \quad (20)$$

где  $E$  – единичная матрица с бесконечным числом строк и столбцов. В нашей задаче предполагается, что капли не касаются друг друга, т. е.  $R_1 + R_2 < l$ . В этом случае простыми приёмами нахождения сумм числовых рядов можно доказать, что  $\|C_1\| < 1$ ,  $\|C_2\| < 1$ . Ясно, что  $E \in M$ ,  $\|E\| = 1$ ,  $C_1 C_2 \in M$ ,  $\|C_1 C_2\| \leq \|C_1\| \cdot \|C_2\| < 1$ ,  $C_2 C_1 \in M$ ,  $\|C_2 C_1\| \leq \|C_2\| \cdot \|C_1\| < 1$ . Следовательно,  $(E - C_1 C_2)^{-1} \in M$ ,  $(E - C_2 C_1)^{-1} \in M$  [18]. Таким образом,  $A_1 \in l_1$ ,  $A_2 \in l_1$ ,  $B_1 \in l_1$ ,  $B_2 \in l_1$ .

Для перехода от векторных величин к скалярным величинам введём линейное нормированное пространство ограниченных последовательностей  $m$  [18]. Если  $V = (v_1, v_2, \dots) \in m$ , то  $\|V\| = \sup |v_k|$ . Если фиксированную последовательность  $V \in m$  рассматривать как матрицу, состоящую из одной строки с бесконечным числом элементов, то по формуле  $y = VX$ , где  $X \in l_1$ , а  $VX$  – произведение матриц, можно определить матричный оператор (в данном случае это будет функционал), действующий из  $l_1$  в  $(-\infty, +\infty)$ . Этот функционал будем обозначать тоже буквой  $V$ . Его норма, согласованная с нормой вектора  $X \in l_1$ , совпадает с числом  $\|V\| = \sup |v_k|$ .

Определим в точке  $kP$  бинарной смеси вектор-строку  $V^{(1)}(P) = (v_1^{(1)}, v_2^{(1)}, \dots) \in m$ , где

$$v_k^{(1)} = \left(\frac{R_1}{r_1}\right)^k P_{k-1}(\cos\theta_1). \quad (21)$$

Аналогично определяется вектор-строка  $V^{(2)}(P) = (v_1^{(2)}, v_2^{(2)}, \dots) \in m$ , где

$$v_k^{(2)} = (-1)^{k-1} \left(\frac{R_2}{r_2}\right)^k P_{k-1}(\cos\theta_2). \quad (22)$$

Из формул (11)–(14) и (17)–(20) получим следующие формулы для полей  $T$  и  $c_1$ :

$$T(P) = T_\infty + V^{(1)}(P)[(T_{s,1} - T_\infty)(E - C_1 C_2)^{-1} E_1 - (T_{s,2} - T_\infty)(E - C_1 C_2)^{-1} C_1 E_1] + V^{(2)}(P)[(T_{s,2} - T_\infty)(E - C_2 C_1)^{-1} E_1 - (T_{s,1} - T_\infty)(E - C_2 C_1)^{-1} C_2 E_1], \quad (23)$$

$$c_1(P) = c_{1\infty} + V^{(1)}(P)[(c_{1s}(T_{s,1}) - c_{1\infty})(E - C_1 C_2)^{-1} E_1 - (c_{1s}(T_{s,2}) - c_{1\infty})(E - C_1 C_2)^{-1} C_1 E_1] + V^{(2)}(P)[(c_{1s}(T_{s,2}) - c_{1\infty})(E - C_2 C_1)^{-1} E_1 - (c_{1s}(T_{s,1}) - c_{1\infty})(E - C_2 C_1)^{-1} C_2 E_1]. \quad (24)$$

Путём предельного перехода при  $l \rightarrow \infty$  из формул (23)–(24) можно получить формулы для одиночной капли. При  $R_1 = R_2$  мы получим формулы, приведённые в работе [7] для случая двух одинаковых капель.

### Поиск неизвестных температур $T_{s,1}$ и $T_{s,2}$ поверхностей капель

Пусть  $H_{w,1}$  и  $H_{w,2}$  – тепло, выделяющееся в единицу времени в объёме первой и второй каплей соответственно. Эти величины равны суммарной мощности тепловых источников, которые возникают вследствие поглощения каплями

монохроматического излучения. Величины  $H_{w,1}$  и  $H_{w,2}$  могут быть найдены по формулам [6]

$$H_{w,1} = \pi R_1^2 I K_{w,1}, \quad (25)$$

$$H_{w,2} = \pi R_2^2 I K_{w,2}, \quad (26)$$

где  $I$  – интенсивность излучения, а  $K_{w,1}$  и  $K_{w,2}$  – факторы поглощения первой и второй каплей. Пусть  $H_1$  и  $Q_{1,1}$  – потоки тепла и первого компонента газовой смеси через поверхность первой капли. Аналогичные потоки через поверхность второй капли обозначим через  $H_2$  и  $Q_{1,2}$ . Тогда

$$H_{w,1} = L_1 m_1 Q_{1,1} + H_1, \quad (27)$$

$$H_{w,2} = L_1 m_1 Q_{1,2} + H_2, \quad (28)$$

где  $L_1$  и  $m_1$  – удельная теплота фазового перехода и масса молекул первого компонента бинарной смеси. На основе разложений (23)-(24) полей  $T$  и  $c_1$ , величины  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $Q_{1,1}$  и  $Q_{1,2}$  могут быть найдены путем простых вычислений соответствующих поверхностных интегралов. С учётом условия  $\left| \frac{T-T_\infty}{T_\infty} \right| \ll 1$ , из уравнений (27)–(28) могут быть выведены следующие уравнения относительно неизвестных температур  $T_{s,1}$  и  $T_{s,2}$  поверхностей капель. Для нахождения температуры  $T_{s,1}$  получим уравнение

$$\begin{aligned} T_{s,1} - T_\infty + \frac{L_1 m_1 n D_{12}}{\kappa_e} (c_{1s}(T_{s,1}) - c_{1\infty}) = \\ = \frac{(IR_1 K_{w,1}/4\kappa_e) E_1^T (E - C_2 C_1)^{-1} E_1 + (IR_2 K_{w,2}/4\kappa_e) E_1^T (E - C_1 C_2)^{-1} C_1 E_1}{[E_1^T (E - C_1 C_2)^{-1} E_1] \cdot [E_1^T (E - C_2 C_1)^{-1} E_1] - [E_1^T (E - C_1 C_2)^{-1} C_1 E_1] \cdot [E_1^T (E - C_2 C_1)^{-1} C_2 E_1]}. \end{aligned} \quad (29)$$

Температуру  $T_{s,2}$  можно найти из уравнения

$$\begin{aligned} T_{s,2} - T_\infty + \frac{L_1 m_1 n D_{12}}{\kappa_e} (c_{1s}(T_{s,2}) - c_{1\infty}) = \\ = \frac{(IR_2 K_{w,2}/4\kappa_e) E_1^T (E - C_1 C_2)^{-1} E_1 + (IR_1 K_{w,1}/4\kappa_e) E_1^T (E - C_2 C_1)^{-1} C_2 E_1}{[E_1^T (E - C_1 C_2)^{-1} E_1] \cdot [E_1^T (E - C_2 C_1)^{-1} E_1] - [E_1^T (E - C_1 C_2)^{-1} C_1 E_1] \cdot [E_1^T (E - C_2 C_1)^{-1} C_2 E_1]}, \end{aligned} \quad (30)$$

где  $D_{12}$  – коэффициент взаимной диффузии компонентов бинарной смеси,  $\kappa_e$  – коэффициент теплопроводности несущего газа,  $E_1^T = (1, 0, 0, \dots) \in m$ . В случае капель воды величины  $K_{w,1}$  и  $K_{w,2}$  могут быть найдены по формулам [6]

$$K_{w,1} = \exp \left[ -0,2 \left( \sqrt{n_\lambda^2 + m_\lambda^2} - 1 \right) \right] \cdot [1 - \exp \left( -8\pi m_\lambda \frac{R_1}{\lambda} \right)], \quad (31)$$

$$K_{w,2} = \exp \left[ -0,2 \left( \sqrt{n_\lambda^2 + m_\lambda^2} - 1 \right) \right] \cdot [1 - \exp \left( -8\pi m_\lambda \frac{R_2}{\lambda} \right)], \quad (32)$$

где  $n_\lambda$ ,  $m_\lambda$  – действительная и мнимая части показателя преломления воды для длины волны  $\lambda$ . Путём предельного перехода при  $l \rightarrow \infty$  из формулы (29) можно получить уравнение для одиночной капли.

### Расчёт профилей полей температуры и концентрации

Так как наиболее сильное взаимодействие капель проявляется на линии их центров, то рассмотрим поля  $T$  и  $c_1$  на этой линии. Так мы получим профили температуры и концентрации. В этом случае координаты  $\theta_1$  и  $\theta_2$ , в зависимости от положения точки  $P$  на линии центров, принимают только два значения 0 и  $\pi$ , а координаты  $r_1$  и  $r_2$  легко выражаются через координату  $z_1$  системы координат

$O_1x_1y_1z_1$  (см. рис. 1). Так как  $P_{k-1}(\cos 0) = 1$ ,  $P_{k-1}(\cos \pi) = (-1)^{k-1}$ , то формулы (21)–(22) приобретают вид:

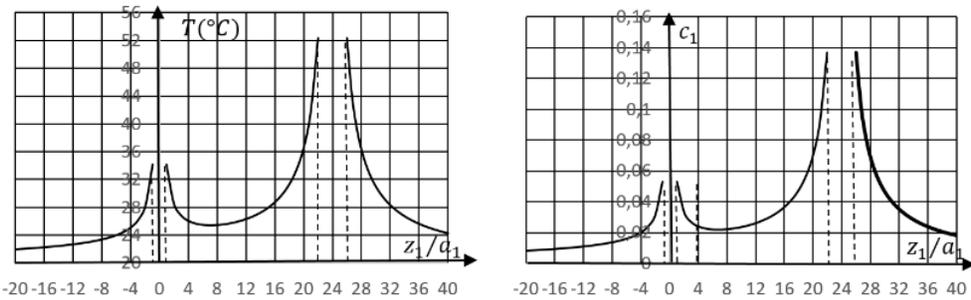
$$v_k^{(1)} = \begin{cases} -\left(\frac{R_1}{z_1}\right)^k & \text{при } z_1 \in (-\infty, -R_1], \\ \left(\frac{R_1}{z_1}\right)^k & \text{при } z_1 \in [R_1, l - R_2] \cup [l + R_2, +\infty). \end{cases} \quad (33)$$

$$v_k^{(2)} = \begin{cases} \left(\frac{R_2}{l-z_1}\right)^k & \text{при } z_1 \in (-\infty, -R_1] \cup [R_1, l - R_2], \\ -\left(\frac{R_2}{l-z_1}\right)^k & \text{при } z_1 \in [l + R_2, +\infty). \end{cases} \quad (34)$$

Расчёты были проведены для капель воды в атмосфере [19] (при значении давления  $p = 101325$  Па). Пусть, для определённости,  $T_\infty = 20^\circ\text{C}$ ,  $c_{1\infty} = 0$ ,  $a_1 = 2,5$  мкм,  $a_2 = 5$  мкм,  $\lambda = 10,6$  мкм,  $I = 1000 \frac{\text{Вт}}{\text{см}^2}$ . Тогда [20]  $n_\lambda = 1,1750$  и  $m_\lambda = 0,0802$ . Все расчёты можно выполнить в Excel с большой точностью, используя в расчётах урезанные матрицы. Для достижения высокой точности в матрицах нами были оставлены первые 52 строки и 52 столбца, а у вектор-строк  $V^{(1)}(P)$ ,  $V^{(2)}(P)$  были оставлены первые 52 элемента. Уравнения (29)–(30) при известном значении  $l$  легко решить в Excel относительно температур  $T_{s,1}$  и  $T_{s,2}$  поверхностей капель. На рисунках 2–4 приведены профили полей температуры и концентрации для трёх значений расстояния  $l$  между центрами капель:  $l = 24R_1$ ,  $l = 12R_1$ ,  $l = 6R_1$  (по горизонтальной оси отложена величина  $z_1/R_1$ , где  $z_1$  – координата точки  $P$  на оси  $O_1z_1$ ). Результаты расчётов близки к соответствующим значениям, полученным в работе [6] с использованием биполярной системы координат.

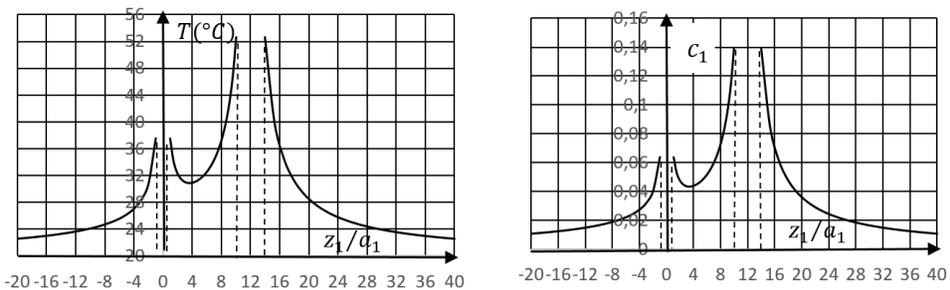
### Заключение

При  $l = 24a_1$  на рис. 2 видно слабое влияние большей капли на процесс испарения меньшей капли (профили вблизи меньшей капли рассматриваемой пары капель незначительно отличаются от профилей вокруг одиночной меньшей капли). При  $l = 12a_1$  на рис. 3 мы видим, что сближение капель приводит к повышению температуры поверхности меньшей капли, повышается и концентрация  $c_1$  на её поверхности. Это происходит из-за затруднения отвода тепла и испаряющейся воды от поверхности меньшей капли. Этот эффект ещё сильнее заметен на рис. 4 при  $l = 6a_1$ . Сближение двух капель может привести к существенному увеличению времени испарения меньшей капли.



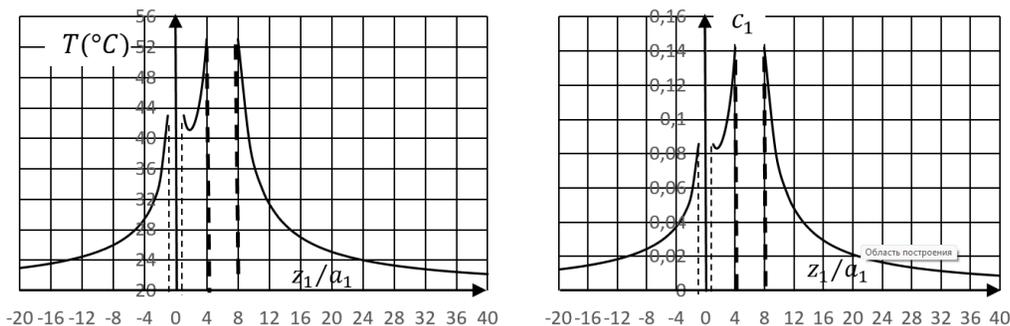
**Рис. 2 / Fig. 2.** Профили полей температуры и концентрации в воздухе вокруг двух испаряющихся капель воды с радиусами  $a_1 = 2,5$  мкм и  $a_2 = 5$  мкм, нагреваемых излучением с длиной волны  $\lambda = 10,6$  мкм и с интенсивностью  $I = 1000 \frac{\text{Вт}}{\text{см}^2}$  при значениях  $p = 101325$  Па,  $T_\infty = 20^\circ\text{C}$ ,  $c_{1\infty} = 0$ ,  $l = 24a_1$  / Temperature and concentration profiles around two evaporating water droplets of radii  $a = 2.5 \mu\text{m}$  and  $a = 5 \mu\text{m}$  in air, heated by radiation with a wavelength  $\lambda = 10.6 \mu\text{m}$  and an intensity  $I = 1000 \text{ w/cm}^2$  at  $p = 101325$  Pa,  $T_\infty = 20^\circ\text{C}$ ,  $c_{1\infty} = 0$ , and  $l = 24a_1$ .

Источник: составлено автором.



**Рис. 3 / Fig. 3.** Профили полей температуры и концентрации в воздухе вокруг двух испаряющихся капель воды с радиусами  $a_1 = 2,5$  мкм и  $a_2 = 5$  мкм, нагреваемых излучением с длиной волны  $\lambda = 10,6$  мкм и с интенсивностью  $I = 1000 \frac{\text{Вт}}{\text{см}^2}$  при значениях  $p = 101325$  Па,  $T_\infty = 20^\circ\text{C}$ ,  $c_{1\infty} = 0$ ,  $l = 12a_1$  / Temperature and concentration profiles around two evaporating water droplets of radii  $a = 2.5 \mu\text{m}$  and  $a = 5 \mu\text{m}$  in air, heated by radiation with a wavelength  $\lambda = 10.6 \mu\text{m}$  and an intensity  $I = 1000 \text{ w/cm}^2$  at  $p = 101325$  Pa,  $T_\infty = 20^\circ\text{C}$ ,  $c_{1\infty} = 0$ , and  $l = 12a_1$ .

Источник: составлено автором.



**Рис. 4 / Fig. 4.** Профили полей температуры и концентрации в воздухе вокруг двух испаряющихся каплей воды с радиусами  $a_1 = 2,5$  мкм и  $a_2 = 5$  мкм, нагреваемых излучением с длиной волны  $\lambda = 10,6$  мкм и с интенсивностью  $I = 1000 \frac{\text{Вт}}{\text{см}^2}$  при значениях  $p = 101325$  Па,  $T_\infty = 20^\circ\text{C}$ ,  $c_{1\infty} = 0$ ,  $l = 6a_1$  / Temperature and concentration profiles around two evaporating water droplets of radii  $a = 2.5 \mu\text{m}$  and  $a = 5 \mu\text{m}$  in air, heated by radiation with a wavelength  $\lambda = 10.6 \mu\text{m}$  and an intensity  $I = 1000 \text{ w/cm}^2$  at  $p = 101325$  Pa,  $T_\infty = 20^\circ\text{C}$ ,  $c_{1\infty} = 0$ , and  $l = 6a_1$ .

Источник: составлено автором

*Статья поступила в редакцию 14.04.2023 г.*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Кузиковский А. В. Динамика сферической частицы в мощном оптическом поле // Известия вузов. Физика. 1970. № 5. С. 89–94.
2. Яламов Ю. И., Шукин Е. Р., Уварова Л. А. Теория испарения капель произвольных размеров в поле электромагнитного излучения // Инженерно-физический журнал. 1978. Т. 34. № 3. С. 439–443.
3. Carstens J. C., Williams A., Zung J. T. Theory of droplet growth in clouds: II. Diffusional interaction between two growing droplets // Journal of the Atmospheric Sciences. 1971. Vol. 27. Iss. 5. P. 798–803. DOI: 10.1175/1520-0469(1970)027<0798:TODGIC>2.0.CO;2.
4. Williams A., Carstens J. C. A note concerning the interaction of two growing water droplets // Journal of the Atmospheric Sciences. 1971. Vol. 28. Iss. 7. P. 1298–1299. DOI: 10.1175/1520-0469(1971)028<1298:ANCTIO>2.0.CO;2.
5. Теория испарения двух капель, находящихся на произвольных расстояниях друг от друга / Яламов Ю. И., Барина М. Ф., Островский Ю. К., Шукин Е. Р. // Доклады Академии наук СССР. 1985. Т. 284. № 2. С. 341–344.
6. Шукин Е. Р., Яламов Ю. И., Шулиманова З. Л. Избранные вопросы физики аэрозолей: учебное пособие. М.: МПУ, 1992. 297 с.
7. Хасанов А. С. Формулы для профилей температуры и концентрации вокруг двух нагреваемых электромагнитным излучением одинаковых испаряющихся капель // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2021. № 1. С. 64–76. DOI: 10.18384/2310-7251-2021-1-64-76.

8. Яламов Ю. И., Хасанов А. С. Теория движения сублимирующих и взаимодействующих твердых сферических неоднородных аэрозольных частиц во внешних полях: монография. М.: МГОУ, 2006. 221 с.
9. Яламов Ю. И., Хасанов А. С. Фотофорез крупных сублимирующих аэрозольных частиц // Теплофизика высоких температур. 2006. Т. 44. № 2. С. 293–297.
10. Яламов Ю. И., Хасанов А. С. Теория термофореза неоднородных аэрозольных частиц // Теплофизика высоких температур. 1996. Т. 34. № 6. С. 929–935.
11. Яламов Ю. И., Хасанов А. С. Термофорез твердой сферической крупной аэрозольной частицы с учётом инерционных эффектов в уравнениях гидродинамики. М.: Московский педагогический университет, 1995. 33 с. Деп. в ВИНТИ № 3196-В95.
12. Кузнецов М. М., Кузьмин М. К., Кулешова Ю. Д. О формуле, приемлемой для вычисления времени полного испарения как мелких, так и крупных сферических капель воды // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2022. № 2. С. 56–69. DOI: 10.18384/2310-7251-2022-2-56-69.
13. Прогностическая модель исследования процессов испарения капель воды / Антонов Д. В., Высокоморная О. В., Кузнецов Г. В., Пискунов М. В. // Инженерно-физический журнал. 2019. Т. 92. № 4. С. 936–944.
14. Особенности методики исследования процесса испарения подвешенных капель жидкости / Бочкарева Е. М., Лей М. К., Терехов В. В., Терехов В. И. // Инженерно-физический журнал. 2019. Т. 92. № 5. С. 2208–2217.
15. Высокоморная О. В., Кузнецов Г. В., Стрижак П. А. Прогностическое определение интегральных характеристик испарения капель воды в газовых средах с различной температурой // Инженерно-физический журнал. 2017. Т. 90. № 3. С. 648–657.
16. Кузнецов Г. В., Стрижак П. А. Испарение капель воды при движении через высокотемпературные газы // Инженерно-физический журнал. 2018. Т. 91. № 1. С. 104–111.
17. Хаппель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976. 632 с.
18. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 542 с.
19. Варгафтик Н. Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. М.: Наука, 1972. 720 с.
20. Centeno M. V. The Refractive Index of Liquid Water in the Near Infra-Red Spectrum // Journal of the Optical Society of America. 1941. Vol. 31. Iss. 3. P. 244–247. DOI: 10.1364/JOSA.31.000244.

## REFERENCES

1. Kuzikovskiy A. V. [Dynamics of a spherical particle in a powerful optical field]. In: *Izvestiya vuzov. Fizika* [Russian Physics Journal], 1970, no. 5, pp. 89–94.
2. Yalamov Yu. I., Shchukin E. R., Uvarova L. A. [The theory of evaporation of drops of arbitrary dimensions in the field of electromagnetic radiation]. In: *Inzhenerno-fizicheskii zhurnal* [Journal of engineering physics and thermophysics], 1978, vol. 34, no. 3, pp. 439–443.
3. Carstens J. C., Williams A., Zung J. T. Theory of droplet growth in clouds: II. Diffusional interaction between two growing droplets. In: *Journal of the Atmospheric Sciences*, 1971, vol. 27, iss. 5, pp. 798–803. DOI: 10.1175/1520-0469(1970)027<0798:TODGIC>2.0.CO;2.

4. Williams A., Carstens J. C. A note concerning the interaction of two growing water droplets. In: *Journal of the Atmospheric Sciences*, 1971, vol. 28, iss. 7, pp. 1298–1299. DOI: 10.1175/1520-0469(1971)028<1298:ANCTIO>2.0.CO;2.
5. Yalamov Yu. I., Barinova M. F., Ostrovskiy Yu. K., Shchukin E. R. [Theory of the evaporation of two droplets with arbitrary distances between them]. In: *Doklady Akademii nauk SSSR* [Soviet Physics. Doklady], 1985, vol. 284, no. 2, pp. 341–344.
6. Shchukin E. R., Yalamov Yu. I., Shulimanova Z. L. *Izbrannyye voprosy fiziki aerolei* [Selected Problems of Aerosol Physics]. Moscow, Moscow Pedagogical University Publ., 1992. 297 p.
7. Khasanov A. S. [Formulae for temperature and concentration profiles around two identical evaporating drops heated by electromagnetic radiation]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-Matematika* [Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics-Mathematics], 2021, no. 1, pp. 64–76. DOI: 10.18384/2310-7251-2021-1-64-76.
8. Yalamov Yu. I., Khasanov A. S. *Teoriya dvizheniya sublimiruyushchikh i vzaimodeystvuyushchikh tverdykh sfericheskikh neodnorodnykh aerolei v vneshnikh pol'yakh* [The theory of movement of sublimating and interacting solid spherical inhomogeneous aerosol particles in external fields]. Moscow, Moscow Region State University Publ., 2006. 221 p.
9. Yalamov Yu. I., Khasanov A. S. [Photophoresis of large sublimating aerosol particles]. In: *Teplofizika vysokikh temperature* [High Temperature], 2006, vol. 44, no. 2, pp. 293–297.
10. Yalamov Yu. I., Khasanov A. S. [The theory of thermophoresis of inhomogeneous aerosol particles]. In: *Teplofizika vysokikh temperature* [High Temperature], 1996, vol. 34, no. 6, pp. 929–935.
11. Yalamov Yu. I., Khasanov A. S. *Termoforez tverdoi sfericheskoi krupnoi aerolei s uchotom inertsiykh efektov v uravneniyakh gidrodinamiki* [Thermophoresis of a solid spherical large aerosol particle with allowance for inertial effects in hydrodynamic equations]. Moscow, Moscow Pedagogical University Publ., 1995. 33 p. Dep. in VINITI no. 3196-V95.
12. Kuznetsov M. M., Kuz'min M. K., Kuleshova Yu. D. [On the formula acceptable for calculating the time of complete evaporation of both small and large spherical water droplets]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-Matematika* [Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics-Mathematics], 2022, no. 2, pp. 56–69. DOI: 10.18384/2310-7251-2022-2-56-69.
13. Antonov D. V., Vysokomornaya O. V., Kuznetsov G. V., Piskunov M. V. [Prognosis model for investigating the evaporation of water droplets]. In: *Inzhenerno-fizicheskii zhurnal* [Journal of Engineering Physics and Thermophysics], 2019, vol. 92, no. 4, pp. 936–944.
14. Bochkareva E. M., Ley M. K., Terekhov V. V., Terekhov V. I. [Methodological characteristics of an experimental investigation of the process of evaporation of suspended liquid droplets]. In: *Inzhenerno-fizicheskii zhurnal* [Journal of Engineering Physics and Thermophysics], 2019, vol. 92, no. 5, pp. 2208–2217.
15. Vysokomornaya O. V., Kuznetsov G. V., Strizhak P. A. [Predictive determination of the integral characteristics of evaporation of water droplets in gas media with a varying temperature]. In: *Inzhenerno-fizicheskii zhurnal* [Journal of Engineering Physics and Thermophysics], 2017, vol. 90, no. 3, pp. 648–657.
16. Kuznetsov G. V., Strizhak P. A. [Evaporation of water droplets moving through high-temperature gases]. In: *Inzhenerno-fizicheskii zhurnal* [Journal of Engineering Physics and Thermophysics], 2018, vol. 91, no. 1, pp. 104–111.

17. Happel J., Brenner H. *Low Reynolds number hydrodynamics*. New York, Prentice-Hall, 1965. 553 p.
18. Kolmogorov A. N., Fomin S. V. *Elementy teorii funktsii i funktsional'nogo analiza* [Elements of the theory of functions and functional analysis]. Moscow, Nauka Publ., 1976. 542 p.
19. Vargaftik N. B. *Spravochnik po teplofizicheskim svoistvam gazov i zhidkosti* [Reference book on thermophysical properties of gases and liquids]. Moscow, Nauka Publ., 1972. 720 p.
20. Centeno M. V. The Refractive Index of Liquid Water in the Near Infra-Red Spectrum. In: *Journal of the Optical Society of America*, 1941, vol. 31, iss. 3, pp. 244–247. DOI: 10.1364/JOSA.31.000244.

---

### ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Хасанов Анис Саляхович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики Российского экономического университета имени Г. В. Плеханова; e-mail: ankhasanov@yandex.ru

### INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Anis S. Khasanov – Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Department of Higher Mathematics, Plekhanov Russian University of Economics; e-mail: ankhasanov@yandex.ru.

---

### ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Хасанов А. С. Поля температуры и концентрации вокруг двух нагреваемых электромагнитным излучением капель // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2023. № 2. С. 65-77. DOI: 10.18384/2310-7251-2023-2-65-77.

### FOR CITATION

Khasanov A. S. Temperature and concentration fields around two drops heated by electromagnetic radiation. In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*, 2023, no. 2, pp. 65-77. DOI: 10.18384/2310-7251-2023-2-65-77.

# ВЕСТНИК МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ОБЛАСТНОГО УНИВЕРСИТЕТА

Рецензируемый научный журнал «Вестник Московского государственного областного университета» основан в 1998 г.

Сегодня Государственным университетом просвещения выпускается одиннадцать научных журналов по разным отраслям науки. Журналы включены в Перечень ВАК (составленный Высшей аттестационной комиссией при Минобрнауки РФ Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание учёной степени кандидата наук, на соискание учёной степени доктора наук). Журналы включены в базу данных Российского индекса научного цитирования (РИНЦ).

Печатные версии журналов зарегистрированы в Федеральной службе по надзору за соблюдением законодательства в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.

Полнотекстовые версии журналов доступны в интернете на сайтах Вестника Московского государственного областного университета ([www.physmathmgou.ru](http://www.physmathmgou.ru); [www.vestnik-mgou.ru](http://www.vestnik-mgou.ru)), а также на платформах Научной электронной библиотеки ([www.elibrary.ru](http://www.elibrary.ru)) и Научной электронной библиотеки «КиберЛенинка» ([www.cyberleninka.ru](http://www.cyberleninka.ru)).

---

## ВЕСТНИК МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ОБЛАСТНОГО УНИВЕРСИТЕТА

СЕРИЯ: ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА  
2023. № 2

Над номером работали:

Литературный редактор М. С. Тарасова  
Переводчик И. А. Улиткин  
Корректор М. С. Тарасова  
Компьютерная вёрстка – Д. А. Заботина

Адрес редакции:

105005, г. Москва, ул. Радио, д. 10А, офис 98  
тел.: (495) 780-09-42 (доб. 6101)  
e-mail: [info@vestnik-mgou.ru](mailto:info@vestnik-mgou.ru)

Сайты: [www.physmathmgou.ru](http://www.physmathmgou.ru); [www.vestnik-mgou.ru](http://www.vestnik-mgou.ru)

Формат 70x108/16. Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура «Minion Pro».

Тираж 500 экз. Усл. п. л. 5, уч.-изд. л. 3,75.

Подписано в печать: 30.06.2023. Дата выхода в свет: 19.07.2023. Заказ № 2023/06-03.

Отпечатано в Государственном университете просвещения  
105005, г. Москва, ул. Радио, 10А