

ISSN 2072-8387
ISSN (online) 2310-7251



Вестник

МОСКОВСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
ОБЛАСТНОГО
УНИВЕРСИТЕТА

Серия

**Физика-
Математика**

ВАРИАЦИОННЫЙ ПОДХОД
В ТЕОРИИ ЖИДКИХ КРИСТАЛЛОВ

АНИЗОТРОПИЯ ЭЛЕКТРОННОЙ ПОЛЯРИЗУЕМОСТИ
ДИМЕРОВ КАРБОНОВЫХ КИСЛОТ

ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ
И ТОНКАЯ МЕТАЛЛИЧЕСКАЯ ПЛАСТИНА



2015/ № 4

ВЕСТНИК
МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
ОБЛАСТНОГО УНИВЕРСИТЕТА

ISSN 2072-8387

2015 / № 4

ISSN (online) 2310-7251

серия

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА

Научный журнал основан в 1998 г.

«Вестник Московского государственного областного университета» (все его серии) включён в «Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертации на соискание учёной степени доктора и кандидата наук» Высшей аттестационной комиссии при Министерстве образования и науки Российской Федерации (См.: Список журналов на сайте ВАК при Минобрнауки России) по наукам, соответствующим названию серии.

The academic journal is established in 1998

«Bulletin of Moscow State Regional University» (all its series) is included by the Supreme Certifying Commission of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation into "the List of leading reviewed academic journals and periodicals recommended for publishing in corresponding series basic research thesis results for a Ph.D. Candidate or Doctorate Degree" (See: the online List of journals at the site of the Supreme Certifying Commission of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation).

ISSN 2072-8387

2015 / № 4

ISSN (online) 2310-7251

series

PHYSICS AND MATHEMATICS

BULLETIN OF THE MOSCOW STATE
REGIONAL UNIVERSITY

Учредитель журнала «Вестник МГОУ»: Московский государственный областной университет

Выходит 4 раза в год

Редакционно-издательский совет «Вестника МГОУ»

Хроменков П.Н. — к.филол.н., проф., ректор МГОУ (председатель совета)

Ефремова Е.С. — к. филол. н., и.о. проректора по научной работе МГОУ (зам. председателя);

Клычников В.М. — к.ю.н., к.и.н., проф., проректор по учебной работе и международному сотрудничеству МГОУ (зам. председателя)

Антонова Л.Н. — д.пед.н., проф., академик РАО, Комитет Совета Федерации по науке, образованию и культуре

Асмолов А.Г. — д.псх.н., проф., академик РАО, директор Федерального института развития образования

Климов С.Н. — д.ф.н., проф., Московский государственный университет путей сообщения (МИИТ)

Клобуков Е.В. — д. филол. н., проф., Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Манойло А.В. — д.пол.н., проф., МГУ им. М.В. Ломоносова

Новоселов А.Л. — д.э.н., проф., Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова

Пасечник В.В. — д.пед.н., проф., МГОУ

Поляков Ю.М. — к. филол. н., главный редактор «Литературной газеты»

Рюмцев Е.И. — д.ф.-м.н., проф., Санкт-Петербургский государственный университет

Хухуни Г.Т. — д.филол.н., проф., МГОУ

Чистякова С.Н. — д. пед. н., проф., Российская академия образования (г. Москва)

Редакционная коллегия серии «Физика-Математика»

Ответственный редактор серии:

Бугаев А.С. — д. ф.-м. н., академик РАН, МФТИ

Заместитель ответственного редактора:

Жачкин В.А. — д.ф.-м.н., проф. МГОУ

Ответственный секретарь:

Васильчикова Е.Н. — к. ф.-м. н., доц., МГОУ

Члены редакционной коллегии:

Беляев В.В. — д.т.н., проф., МГОУ;

Богданов Д.Л. — д. ф.-м. н., проф., МГОУ;

Бугримов А.Л. — д. т. н., проф., МГОУ;

Латышев А.В. — д. ф.-м. н., проф., МГОУ;

Рассудовская М.М. — к.п.н., проф., МГОУ;

Осипов М.А. — д. ф.-м. н., проф., Университет Стратклайд (Великобритания);

Чигринов В.Г. — д. ф.-м. н., проф., Гонконгский университет науки и технологий (Китай)

ISSN 2072-8387

ISSN (online) 2310-7251

Вестник Московского государственного областного университета. Серия «Физика-Математика». 2015. № 4. М.: ИИУ МГОУ. 112 с.

Журнал «Вестник МГОУ» серия «Физика-Математика» зарегистрирован в Федеральной службе по надзору за соблюдением законодательства в сфере массовых коммуникаций и охране культурного наследия. Регистрационное свидетельство ПИ № ФС77-26136

Индекс серии «Физика-Математика»

по Объединенному каталогу «Пресса России» 40723

© МГОУ, 2015.

© Издательство МГОУ, 2015.

**Адрес Отдела по изданию научного журнала
«Вестник МГОУ»**

г. Москва, ул. Радио, д.10а, офис 98

тел. (499) 261-43-41; (495) 723-56-31

e-mail: vest_mgou@mail.ru; сайт: www.vestnik-mgou.ru

Журнал включен в базу данных Российского индекса научного цитирования (РИНЦ), имеет полнотекстовую сетевую версию в Интернете на платформе Научной электронной библиотеки (www.elibrary.ru), а также на сайте Московского государственного областного университета (www.vestnik-mgou.ru)

При цитировании ссылка на конкретную серию «Вестника МГОУ» обязательна. Воспроизведение материалов в печатных, электронных или иных изданиях без разрешения редакции запрещено. Опубликованные в журнале материалы могут использоваться только в некоммерческих целях. Ответственность за содержание статей несут авторы. Мнение редколлегии серии может не совпадать с точкой зрения автора. Рукописи не возвращаются.

The founder of journal «Bulletin of the MSRU»: Moscow State Regional University

Issued 4 times a year

Series editorial board «Physics and Mathematics»

Editor-in-chief:

A.S. Bugaev – Doctor of Physics and Mathematics, Academician of RAS, MIPT

Deputy editor-in-chief:

V.A. Zhachkin – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, MSRU

Executive secretary:

E.N. Vasilchikova – Ph.D. in Physics and Mathematics, Associate Professor, MSRU

Members of Editorial Board:

V.V. Belyaev – Doctor of Technical Sciences, Professor, MSRU

D.L. Bogdanov – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, MSRU

A.L. Bugrimov – Doctor of Technical Sciences, Professor, MSRU

A.V. Latyshev – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, MSRU

M.M. Rassudovskaya – Ph.D. in Pedagogical Sciences, Professor, MSRU

M.A. Osipov – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Strathclyde University (UK)

V.G. Chigrinov – University of Science and Technology (Hong Kong, China)

The journal is included into the database of the Russian Science Citation Index, has a full text network version on the Internet on the platform of Scientific Electronic Library (www.elibrary.ru), as well as at the site of the Moscow State Regional University (www.vestnik-mgou.ru)

At citing the reference to a particular series of «Bulletin of the Moscow State Regional University» is obligatory. The reproduction of materials in printed, electronic or other editions without the Editorial Board permission, is forbidden. The materials published in the journal are for non-commercial use only. The authors bear all responsibility for the content of their papers. The opinion of the Editorial Board of the series does not necessarily coincide with that of the author Manuscripts are not returned.

The Editorial Board address: Moscow State Regional University

10a Radio st., office 98, Moscow, Russia

Phones: (499) 261-43-41; (495) 723-56-31

e-mail: vest_mgou@mail.ru; site: www.vestnik-mgou.ru

Publishing council «Bulletin of the MSRU»

P.N. Khromenkov – Ph. D. in Philology, Professor, Principal of MSRU (Chairman of the Council)

E.S. Yefremova – Ph. D. in Philology, Acting Vice-Principal for scientific work of MSRU (Vice-Chairman of the Council)

V.M. Klychnikov – Ph.D. in Law, Ph. D. in History, Professor, Vice-Principal for academic work and international cooperation of MSRU (Vice-Chairman of the Council)

L.N. Antonova – Doctor of Pedagogics, Professor, Member of the Russian Academy of Education, The Council of the Federation Committee on Science, Education and Culture

A.G. Asmolov – Doctor of Psychology, Professor, Member of the Russian Academy of Education, Principal of the Federal Institute of Development of Education

S.N. Klimov – Doctor of Philosophy, Professor, Moscow State University of Railway Engineering

E.V. Klobukov – Doctor of Philology, Professor, Lomonosov Moscow State University

A.V. Manoylo – Doctor of Political Science, Professor, Lomonosov Moscow State University

A.L. Novosjolov – Doctor of Economics, Professor, Plekhanov Russian University of Economics

V.V. Pasechnik – Doctor of Pedagogics, Professor, MSRU

Yu. M. Polyakov – Ph.D. in Philology, Editor-in-chief of "Literaturnaya Gazeta"

E.I. Rjuntsev – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Saint Petersburg State University

G. T. Khukhuni – Doctor of Philology, Professor, MSRU

S.N. Chistyakova – Doctor of Pedagogics, Professor, the Russian Academy of Education

ISSN 2072-8387

Bulletin of the Moscow State Regional University. Series «Physics and Mathematics». 2015. № 4. M.: MSRU Publishing house. 112 p.

The series «Physics and Mathematics» of the Bulletin of the Moscow State Regional University is registered in Federal service on supervision of legislation observance in sphere of mass communications and cultural heritage protection. The registration certificate ПИ № 0С77-26136

Index of the series «Physics and Mathematics» according to the union catalog «Press of Russia» 40723

© MSRU, 2015.

© MSRU Publishing house, 2015.

СОДЕРЖАНИЕ

РАЗДЕЛ I. МАТЕМАТИКА

- Петрова В.Т., Сивиркина А.С., Дмитриева М.Н.** ПРОБЛЕМА КЛАССИФИКАЦИИ НЕДИАГОНАЛЬНЫХ РИМАНОВЫХ МЕТРИК С ФУНКЦИОНАЛЬНО АБЕЛЕВЫМИ СВЯЗНОСТЯМИ..... 8
- О. Matveyev, A. Pankratov, I. Pinchuk** TO THE EQUIVALENCE OF THE CATEGORIES OF MODELS AND UNIVERSAL ALGEBRAS. 21
- Акимов А.А., Абдуллина Р.И.** РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДАРБУ ДЛЯ ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ С ОТХОДОМ ОТ ХАРАКТЕРИСТИКИ..... 29
- Сучков М.В., Трифоненков В.П.** ОЦЕНКИ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ, ОТВЕЧАЮЩИХ ОБЫКНОВЕННОМУ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМУ ОПЕРАТОРУ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА, И ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРИ ПРОВЕРКЕ УСЛОВИЯ БАЗИСНОСТИ В.А. ИЛЬИНА В ПРОСТРАНСТВАХ L_p 36

РАЗДЕЛ II. ФИЗИКА

- Латышев А.В., Юшканов А.А.** НЕЛИНЕЙНЫЙ ПРОДОЛЬНЫЙ ТОК В КЛАССИЧЕСКОЙ И КВАНТОВОЙ ПЛАЗМЕ, ГЕНЕРИРУЕМЫЙ ДВУМЯ ПОПЕРЕЧНЫМИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМИ ВОЛНАМИ..... 44
- Соколов А.А., Ноа О.В., Дадиванян А.К.** АНИЗОТРОПИЯ ОПТИЧЕСКОЙ ПОЛЯРИЗУЕМОСТИ СОПОЛИМЕРОВ С РАЗЛИЧНОЙ СКЕЛЕТНОЙ ЖЕСТКОСТЬЮ 63
- Завитаев Э.В., Русаков О.В., Юшканов А.А.** МАГНИТНОЕ ДИПОЛЬНОЕ ПОГЛОЩЕНИЕ МЕЛКОЙ МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ ЧАСТИЦЫ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ СОФФЕРА 69
- Алиев И.Н., Меликянц Д.Г.** О ТЕОРЕМАХ ПОЙНТИНГА И АБРАГАМА В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ СВЕРХПРОВОДНИКОВ ЛОНДОНОВ 83

РАЗДЕЛ III.
ТЕОРИЯ И МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ И ВОСПИТАНИЯ

<i>Власова Е.А., Попов В.С., Латышев А.В.</i> ОЦЕНКА ЗНАНИЙ СТУДЕНТОВ В РАМКАХ МОДУЛЬНО-РЕЙТИНГОВОЙ СИСТЕМЫ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ В ВУЗЕ.....	92
<i>Исаев В.М.</i> Г. ГЕЛЬМГОЛЬЦ И ИСТОРИЯ ОСНОВАНИЯ ГЕРМАНСКОГО ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА.	101
<i>Наши авторы.</i>	109

CONTENTS

SECTION I. MATHEMATICS

V. Petrova, A. Sivirkina, M. Dmitrieva THE PROBLEM OF CLASSIFYING NONDIAGONAL RIEMANNIAN METRICS WITH FUNCTIONALLY ABELIAN CONNECTION.....	8
O. Matveyev, A. Pankratov, I. Pinchuk TO THE EQUIVALENCE OF THE CATEGORIES OF MODELS AND UNIVERSAL ALGEBRAS.	21
A. Akimov, R. Abdullina SOLUTION OF THE DARBOUX PROBLEM FOR THE TELEGRAPH EQUATION WITH DEVIATION FROM THE CHARACTERISTIC	29
M. Suchkov, V. Trifonenkov ESTIMATIONS OF EIGENFUNCTIONS OF ORDINARY FOURTH-ORDER DIFFERENTIAL OPERATOR AND THEIR USE WHEN CHECKING THE BASIS PROPERTY CONDITION BY V.A. IL'IN IN L_p SPACES	36

SECTION II. PHYSICS

A. Latyshev, A. Yushkanov NON-LINEAR LONGITUDINAL CURRENT IN CLASSICAL AND QUANTUM PLASMAS, GENERATING BY TWO TRANSVERSAL ELECTROMAGNETIC WAVES	44
A. Sokolov, O. Noah, A. Dadivanyan ANISOTROPY OF OPTICAL POLARIZABILITY OF COPOLYMERS WITH VARIOUS BACKBONE RIGIDITY OF COMPONENTS	62
E. Zavitaev, O. Rusakov, A. Yushkanov MAGNETIC DIPOLAR ABSORPTION BY A SMALL CYLINDRICAL METAL PARTICLE WITH SOFFER'S BOUNDARY CONDITIONS	69
I. Aliev, D. Melikyants. POYNTING AND ABRAHAM THEOREMS IN THE ELECTRODYNAMICS OF LONDON SUPERCONDUCTORS.....	83

**SECTION III.
THEORY AND METHODS OF TEACHING AND EDUCATION**

<i>E. Vlasova, V. Popov, A. Latyshev</i> ASSESSMENT OF STUDENTS' KNOWLEDGE WITHIN THE MODULE-RATING SYSTEM OF TEACHING MATHEMATICS AT HIGH SCHOOL	92
<i>V. Isaev</i> H. HELMHOLTZ AND HISTORY OF THE FOUNDATION OF THE GERMAN PHYSICAL TECHNICAL INSTITUTE	101
<i>Our authors</i>	109

РАЗДЕЛ I. МАТЕМАТИКА

УДК 514.7+517.3+517.926

DOI: 10.18384/2310-7251-2015-4-08-20

Петрова В.Т.¹, Сивиркина А.С.², Дмитриева М.Н.³

¹Московский физико-технический институт

²Рязанский институт (филиал) Университета Машиностроения

*³Рязанский государственный медицинский университет
имени академика И.П. Павлова*

ПРОБЛЕМА КЛАССИФИКАЦИИ НЕДИАГОНАЛЬНЫХ РИМАНОВЫХ МЕТРИК С ФУНКЦИОНАЛЬНО АБЕЛЕВЫМИ СВЯЗНОСТЯМИ

Аннотация. В статье ставится задача классификации произвольных метрик римановых пространств при условии, что их связность обладает свойством функциональной абелевости. Дается ее полное решение.

Ключевые слова: мультипликативный интеграл, функционально абелева функция, пространство аффинной связности, риманово пространство, метрика, матрица связности, жорданова клетка, жорданова матрица.

V. Petrova¹, A. Sivirina², M. Dmitrieva³

¹Moscow Physical Techniques Institute

²Ryazan Institute (branch) of Moscow state engineering University

³Ryazan State Medical University

THE PROBLEM OF CLASSIFYING NON-DIAGONAL RIEMANNIAN METRICS WITH FUNCTIONALLY ABELIAN CONNECTION

Abstract. *We have formulated the problem of classifying arbitrary metrics of Riemannian spaces under the condition that their connection has a functional property of commutativity. Its complete solution is presented.*

Key words: *multiplicative integral, functionally Abelian function, space of affine connection, Riemannian space, metric, connection matrix, Jordan block, Jordan matrix.*

В дифференциальной геометрии криволинейный мультипликативный интеграл был впервые применен Шлезингером [2]. Возможность описания геометрических свойств объектов в пространствах аффинной связности в терминах мультипликативного интеграла в значительной мере связана с мультипликативной интегрируемостью в конечном виде матричных функций определенного геометрического истолкования. Специфика этого интеграла определяется непрерывностью значений подынтегральной функции. Если же функция $f(t)$ – функционально абелева [8] (то есть $f(t_1) \cdot f(t_2) = f(t_2) \cdot f(t_1)$), то известно, что $f(t)$ конечно мультипликативно интегрируема [1]. В связи с этим и была поставлена [4] задача выделения римановых пространств, матрицы связности которых функционально абелевы. Настоящая статья продолжит ее решение, начатое в работе В.Т. Петровой [8].

1°. Пусть $g = \|g_{ij}\|$ – матрица недиагональной римановой метрики

$$ds^2 = d_{ij} dx^i dx^j, \quad i, j = 1, 2.$$

Обозначим $\det g = D$, $g_{11} = a$, $g_{22} = b$, $g_{12} = c$, $x^1 = x$, $y = x^2$.

Матрицы связности в этом случае:

$$\Gamma_1 = \frac{1}{2} g^{-1} \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ -a_y + 2c_x & b_x \end{vmatrix} = \frac{1}{2D} \begin{vmatrix} ba_x + ca_y - 2cc_x & ba_y - cb_x \\ -ca_x - aa_y + 2ac_x & -ca_y + ab_x \end{vmatrix};$$

$$\Gamma_2 = \frac{1}{2} g^{-1} \begin{vmatrix} a_y & -b_x + 2c_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} = \frac{1}{2D} \begin{vmatrix} ba_y - cb_x & -bb_x - cb_y + 2bc_y \\ -ca_y + ab_x & cb_x + ab_y - 2cc_y \end{vmatrix}.$$

Остановимся на нескольких возможностях:

1. Если матрицы Γ_1 и Γ_2 диагональные, то можно выделить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} ba_y - cb_x = 0 \\ -ca_x - aa_y + 2ac_x = 0 \end{cases} \wedge \begin{cases} -bb_x - cb_y + 2bc_y = 0 \\ -ca_y + ab_x = 0 \end{cases};$$

решая которую, получим, что $a_x = 2\frac{a}{c}c_x$, $a_y = 0$, $b_x = 0$, $b_y = 2\frac{b}{c}c_y$, откуда $a = a(x)$, $b = b(y)$ и $c^2 = a(x)b(y)k^2$, где $k \in \mathbb{R}$ – некоторая произвольная постоянная. Заменяя для удобства $a(x)$ на $a^2(x)$ и $b(y)$ на $b^2(y)$ получим метрику:

$$ds^2 = a^2(x)dx^2 + 2ka(x)b(y)dxdy + b^2(y)dy^2, \quad (1)$$

с матрицами связности $\Gamma_1 = \frac{a'}{a}E_1^1$, $\Gamma_2 = \frac{b'}{b}E_2^2$.

А так как матрицы Γ_1 и Γ_2 кратны постоянным и коммутируют, то они, конечно, являются и функционально абелевыми.

2. Если одна из матриц связности функционально кратна жордановой клетке, а вторая – диагональная, то из равенства $[\Gamma_1, \Gamma_2] = 0$ следует, что она кратна скалярной. При этом если $\Gamma_1 = \lambda E$, то получим систему уравнений:

$$\begin{cases} ba_y - cb_x = 0 \\ -ca_x - aa_y + 2ac_x = 0 \\ -bb_x - cb_y + 2bc_y = \delta D \\ -ca_y + ab_x = 0 \end{cases} \wedge \begin{cases} ba_x + ca_y - 2cc_x = \lambda D \\ -ca_y + ab_x = \lambda D \\ ba_y - cb_x = \mu D \\ cb_x + ab_y - 2cc_y = \mu D \end{cases}.$$

Отсюда легко видеть, что $\lambda = \mu = 0$ (а значит, $\Gamma_1 \equiv 0$), $D_x = 0$, $D_y = 0$, $a_x = 0$, $a_y = 0$, $b_x = 0$, $b_y = c\delta$, $c_x = 0$, $c_y = \frac{1}{2}a\delta$, значит, $a = \text{const}$, $b = b(y)$, $c = c(y)$, и $\delta = \delta(y)$. Тогда соответствующая метрика записывается в виде:

$$ds^2 = dx^2 + 2c(y)dxdy + (c^2(y) + D)dy^2. \quad (2)$$

Ее матрицы связности $\Gamma_1 \equiv 0$; $\Gamma_2 = c'(y)E_2^1$ и потому функционально абелевы.

Если же $\Gamma_2 = \lambda E$, то соответствующая система уравнений:

$$\begin{cases} ba_y - cb_x = \delta D \\ -ca_x - aa_y + 2ac_x = 0 \\ -bb_x - cb_y + 2bc_y = 0 \\ -ca_y + ab_x = 0 \end{cases} \wedge \begin{cases} ba_x + ca_y - 2cc_x = \lambda D \\ -ca_y + ab_x = \lambda D \\ ba_y - cb_x = \mu D \\ cb_x + ab_y - 2cc_y = \mu D \end{cases}.$$

Из нее следует, что $\mu = \delta$ и $\lambda = 0$. Тогда $D_x = 0$, $D_y = 2\delta D$, $a_x = 0$, $a_y = \delta a$, $b_x = \delta c$, $b_y = \delta b$, $c_x = \frac{1}{2}\delta a$, $c_y = \delta c$, а $\delta_x = 0$ и $\delta_y = 0$. Откуда:

$$a = ke^{\delta y}, \quad c = e^{\delta y} \left(\frac{1}{2}\delta kx + m \right), \quad b = \frac{1}{k}e^{\delta y} \left(\left(\frac{1}{2}\delta kx + m \right)^2 + p \right),$$

(где $k, p, m \in \mathbb{R}$, постоянные). Тем самым получена метрика:

$$ds^2 = ke^{\delta y} dx^2 + 2e^{\delta y} \left(\frac{1}{2} \delta kx + m \right) dx dy + \frac{1}{k} e^{\delta y} \left(\left(\frac{1}{2} \delta kx + m \right)^2 + p \right) dy^2,$$

которая постоянным преобразованием переменных может быть упрощена:

$$ds^2 = e^{2y} dx^2 + 2e^{2y} x dx dy + e^{2y} (x^2 + p) dy^2. \quad (3)$$

Ее матрицы связности тоже функционально абелевы: $\Gamma_1 = E_2^1$, $\Gamma_2 = E$.

3. Если обе матрицы связности функционально кратны жордановым клеткам, то соответствующая им система уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} ba_y - cb_x = \delta_1 D \\ -ca_x - aa_y + 2ac_x = 0 \\ -bb_x - cb_y + 2bc_y = \delta_2 D \\ -ca_y + ab_x = 0 \end{cases} \wedge \begin{cases} ba_x + ca_y - 2cc_x = \lambda D \\ -ca_y + ab_x = \lambda D \\ ba_y - cb_x = \mu D \\ cb_x + ab_y - 2cc_y = \mu D \end{cases} \quad (4)$$

Очевидно, $\lambda = 0$, $\mu = \delta$, $D_x = 0$, $D_y = \delta_1 D$, $a_x = 0$, $a_y = \delta_1 a$, $b_x = \delta_1 c$, $b_y = \delta_1 b + \delta_2 c$, $c_x = \frac{1}{2} \delta_1 a$, $c_y = \delta_1 c + \frac{1}{2} \delta_2 a$. Откуда получаем, что $\delta_{1x} = 0$, а приравнявая вторые производные b и, соответственно, c , получим, что $\delta_{1y} = \delta_{2x}$ и $\delta_1 \delta_2 = 0$. Но последнее означает, что при $\delta_1 = 0$ будем иметь метрику (2), а при $\delta_2 = 0$ – метрику (3). Таким образом, доказана лемма.

Лемма 1: Существует только три типа недиагональных римановых метрик, матрицы связности которых функционально абелевы и жордановы:

$$1. ds^2 = a^2(x) dx^2 + 2ka(x)b(y) dx dy + b^2(y) dy^2,$$

$$M_{g_1} = \begin{vmatrix} a^2(x) & ka(x)b(y) \\ ka(x)b(y) & b^2(y) \end{vmatrix}; \quad \begin{aligned} \Gamma_1 &= \frac{a'}{a} E_1^1, & k \in C, \\ \Gamma_2 &= \frac{b'}{b} E_2^2, & |k| = 1. \end{aligned}$$

$$2. ds^2 = dx^2 + 2c(y) dx dy + (c^2(y) + D) dy^2,$$

$$M_{g_2} = \begin{vmatrix} 1 & c(y) \\ c(y) & c^2(y) + D \end{vmatrix}; \quad \begin{aligned} \Gamma_1 &\equiv 0, & D \in C, \\ \Gamma_2 &= c'(y) E_2^1, & D \neq 0. \end{aligned}$$

$$3. ds^2 = e^{2y} dx^2 + 2e^{2y} x dx dy + e^{2y} (x^2 + p) dy^2,$$

$$M_{g_3} = e^{2y} \begin{vmatrix} 1 & x \\ x & x^2 + p \end{vmatrix}; \quad \begin{aligned} \Gamma_1 &\equiv E_2^1, & p \in C, \\ \Gamma_2 &\equiv E, & p \neq 0. \end{aligned}$$

Замечание 1: Тензор кривизны в двумерном случае имеет только одну компоненту: $R_{12} = [\Gamma_1, \Gamma_2] + \frac{\partial \Gamma_2}{\partial x} - \frac{\partial \Gamma_1}{\partial y}$, его равенство нулю для найденных метрик очевидно.

Таким образом, все двумерные римановы пространства с недиагональными метриками и функционально абелевыми связностями имеют нулевую

кривизну, если матрицы связности к тому же одновременно во всех точках могут быть приведены к жордановому виду.

При замене координат $x' = C^{-1}(x)x$, где $C = \|c_j^i\|$, матрица метрического тензора преобразуется по закону: $g \rightarrow g' = C^T g(C(x)x')C$, а матрицы связности – по правилу: $\Gamma_i \rightarrow \Gamma'_i = (C^{-1})'_{xi}C + C^{-1}\Gamma_j(C(x)x')C \cdot C_i^j$. Поэтому свойство функциональной абелевости наследуется, если преобразование координат C постоянно.

Согласно В.В. Морозову [7], множество матриц с функциональными элементами и перестановочных между собой есть некоторое множество линейных комбинаций постоянных попарно коммутирующих между собой матриц с функциональными коэффициентами. Если среди этих матриц найдется хотя бы одна со всеми различными собственными значениями, то все они могут быть одновременно приведены к диагональному виду, а значит, приведены к диагональному виду и их линейные комбинации. В нашем случае это следует отнести к матрицам связности, причем, так как диагонализация постоянных матриц достигается постоянным преобразованием, то оно же может быть применено к метрике и матрицам связности в любой точке с сохранением диагональности последних.

Если же среди постоянных попарно коммутирующих матриц, в линейные комбинации которых раскладываются матрицы связности Γ_i , не найдется матрицы со всеми различными собственными значениями, то в двумерном случае их можно одновременно привести к треугольному виду. При этом соответственно преобразованная метрика g' порождает матрицы связности Γ'_i – линейные комбинации приведенных к треугольному виду матриц связности $C^{-1}\Gamma_i C$ метрики g . Откуда следует, что функциональная кратность матрицам треугольного, то есть жорданового вида при этом тоже наследуется. Из этого следует утверждение.

Утверждение 1. Всякая двумерная недиагональная риманова метрика $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$ с матрицей $g = \|g_{ij}\|$ имеет функционально абелевы матрицы связности тогда и только тогда, когда найдется такая матрица $C \in GL(2, R)$, что $C^T g(Cx')C = \tilde{g}_k$, где $\tilde{g}_k$ ($k = 1, 2, 3$) определяется леммой 1.

2°. Пусть $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$ – n -мерная недиагональная риманова метрика, $n > 2$, $g = \|g_{ij}\|$, $g^{-1} = G = \|G_{ij}\|$. Обозначим i -ю строку матрицы G через $G_i = \|G_{i1}, \dots, G_{in}\|$, для матрицы $\Gamma_{*k} = \|\Gamma_{ijk}\|$, где $\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right)$

j -ый столбец – $\Gamma_{*jk} = \|\Gamma_{1jk} \quad \Gamma_{2jk} \quad \dots \quad \Gamma_{njk}\|^T$. Тогда матрицы связности этой метрики $\Gamma_k = g^{-1}\Gamma_{*k}$. Из симметрии элементов $\Gamma_{ijk} = \Gamma_{ikj}$ получим $\Gamma_{*jk} = \Gamma_{*kj}$.

i -ый элемент матрицы связности Γ_k будем обозначать λ_k^i , элемент, стоящий непосредственно над ним – δ_k^{i-1} , а E_i – однострочковая матрица, у которой все элементы нулевые, кроме i -ого, равного единице, E_j^i – как обычно, матрица со всеми нулевыми элементами, кроме стоящего на пересечении i -ой строки и j -ого столбца, равного единице.

Рассмотрим случаи, когда среди постоянных матриц, в линейные комбинации которых с функциональными коэффициентами раскладываются матрицы связности Γ_i , есть матрицы со всеми различными собственными значениями, и когда таких среди них не найдется.

1. Пусть все Γ_k – диагональны, то есть $\Gamma_k = \sum_{i=1}^n \lambda_k^i E_i^i$, тогда:

$$G_i \Gamma_{*jk} = \begin{cases} \lambda_k^i, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Отсюда при $i \neq k$ получим $\lambda_k^i = G_i \Gamma_{*ik} = G_i \Gamma_{*ki} = 0$, то есть $\Gamma_k = \lambda_k^k E_k^k$ и таким образом, матрицы Γ_k могут иметь только одно ненулевое значение λ_k^k . Тогда $G\Gamma_{*k} = \lambda_k^k E_k^k$, а значит, $G\Gamma_{*jk} = 0$ при $j \neq k$, а так как $\det G \neq 0$, то $\Gamma_{*jk} = 0$, откуда получим равенство нулю производных: $\frac{\partial g_{kk}}{\partial x^i} = 0$ и $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = 0$ при $i \neq k$, $j \neq k$, то есть $g_{ii} = g_{ii}(x^i)$, а $g_{ij} = g_{ij}(x^i, x^j)$. Обозначив $g_{ii} = g_i^2(x^i)$, получим для всех $k \leq n$, что $\Gamma_{*kk} = \left\| \frac{\partial g_{1k}}{\partial x^k} \quad \dots \quad \frac{\partial g_{kk}}{\partial x^k} g_k \quad \dots \quad \frac{\partial g_{nk}}{\partial x^k} \right\|^T$

Из соотношения же $G\Gamma_{*kk} = \lambda_k^k E_k^k$ будем иметь:

$$\frac{\partial g_k}{\partial x^k} = \lambda_k^k g_k \quad \text{и} \quad \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^i} = \lambda_k^k g_{ik}, \quad (5)$$

откуда следует, что $g_{ik} = g_i(x^i)g_k(x^k)a_{ik}$, причем $a_{ik} \in \mathbb{R}$ и $\det \|a_{ik}\| \neq 0$, а значения диагональных элементов: $\lambda_k^k = \frac{\partial g_k}{\partial x^k} g_k^{-1}$, а $\Gamma_k = \frac{\partial g_k}{\partial x^k} g_k^{-1} E_k^k$.

Очевидно, что матрицы Γ_k , как кратные постоянным коммутирующим матрицам, функционально абелевы и все компоненты тензора кривизны нулевые: $R_{ik} = [\Gamma_i, \Gamma_k] + \frac{\partial \Gamma_k}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_i}{\partial x^k} = 0$.

Таким образом, имеем метрику

$$ds^2 = g_i(x^i)g_j(x^j)a_{ij}dx^i dx^j \quad (6)$$

с матрицей $g = \|g_i g_j a_{ij}\|$, причем $\det \|a_{ij}\| \neq 0$.

2. Пусть $\Gamma_k = \sum_{i=1}^n \lambda_k^i E_i^i + \sum_{i=1}^{n-1} \delta_k^i E_i^{i+1}$.

Аналогично предыдущему случаю получим:

$$G_i \Gamma_{*jk} = \begin{cases} \lambda_k^i, & \text{если } j = i, \\ \delta_k^i, & \text{если } j = i + 1, \\ 0, & \text{если } j \neq i, i + 1. \end{cases}$$

Отсюда $\lambda_1^i = G_i \Gamma_{*i1} = G_i \Gamma_{*1i} = 0$, если $i \neq 1$. А при $k > 1$

$$\lambda_k^i = G_i \Gamma_{*ik} = G_i \Gamma_{*ki} = \begin{cases} \lambda_k^i, & \text{если } k = i, \\ \delta_k^{k-1}, & \text{если } k = i + 1, \\ 0, & \text{если } k \neq i, i + 1. \end{cases}$$

Таким образом, имеем, что $\Gamma_1 = \lambda_1^1 E_1^1 + \delta_2^1 E_2^1$,

$\Gamma_k = \delta_{k-1}^{k-1} E_{k-1}^{k-1} + \lambda_k^k E_k^k + \delta_k^{k-1} E_{k-1}^k + \delta_k^{k+1} E_{k+1}^k$, а $\Gamma_n = \delta_{n-1}^{n-1} E_{n-1}^{n-1} + \lambda_n^n E_n^n + \delta_n^{n-1} E_{n-1}^n$

($1 < k < n$), то есть каждая матрица связности Γ_k может иметь не более одной ненулевой жордановой клетки вида: $\Gamma_n = \delta_{n-1}^{n-1} E_{n-1}^{n-1} + \delta_n^{n-1} E_{n-1}^n +$

$\lambda_n^n E_n^n$, $\Gamma_1 = \lambda_1^1 E_1^1$ или $\Gamma_k = \begin{bmatrix} \delta_{n-1}^{n-1} & \delta_n^{n-1} & 0 \\ 0 & \lambda_n^n & \delta_n^n \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Из этого следует, что $[\Gamma_1, \Gamma_i] =$

0 при $i > 3$; если же $s \neq \pm 1, \pm 2$, то $[\Gamma_k, \Gamma_{k+s}] = 0$, и $[\Gamma_j, \Gamma_n] = 0$ при $j < n - 2$.

Приравнивая остальные коммутаторы к нулю, получим, что

$$\begin{aligned} \text{при } 1 < k < n \quad & \delta_k^{k-1} \delta_k^k = 0, \\ & \delta_k^{k-1} \delta_{k+1}^k = 0, \\ \text{при } k < n - 1 \quad & \delta_k^k \delta_{k+2}^{k+1} = 0, \\ \text{при } k < n \quad & \delta_k^k \delta_{k+1}^{k+1} = 0 \text{ и } \lambda_k^k \delta_{k+1}^k + \delta_k^k (\lambda_{k+1}^{k+1} - \delta_k^k) = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Тогда из соотношений $\delta_k^k \delta_k^{k-1} = 0$ и $\delta_k^k \delta_{k-1}^{k-1} = 0$ следует, что жордановы клетки могут быть не более, чем двумерны: $\begin{bmatrix} \delta_{k-1}^{k-1} & \delta_k^{k-1} \\ 0 & \lambda_k^k \end{bmatrix}$, или $\begin{bmatrix} \lambda_k^k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, или $\begin{bmatrix} 0 & \delta_k^k \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Но случай $\Gamma_k = \lambda_k^k E_k^k$ соответствует наличию среди матриц связности диагональных, при этом последнее из условий коммутирования (7) влечет выражение: $\Gamma_{k+1} = \lambda_{k+1}^{k+1} E_{k+1}^{k+1} + \delta_{k+1}^{k+1} E_{k+1}^{k+2}$.

Из системы (7) для двумерной недиагональной жордановой клетки вытекает, что она может встретиться только в последовательности:

$$\Gamma_{k-1} = \lambda_{k-1}^{k-1} E_{k-1}^{k-1} \text{ или } \Gamma_{k-1} = \delta_{k-2}^{k-2} E_{k-2}^{k-2} + E_{k-1}^{k-1}), \Gamma_k = \delta_k^k E_k^{k+1}, \\ \Gamma_{k+1} = \delta_k^k (E_k^k + E_{k+1}^{k+1}) + \delta_{k+1}^k E_k^{k+1}, \text{ а } \Gamma_{k+2} = \delta_{k+2}^{k+2} E_{k+2}^{k+3} \text{ или } \Gamma_{k+2} = \lambda_{k+2}^{k+2} E_{k+2}^{k+2}.$$

Таким образом, в матрицах Γ_i и Γ_{i+1} жордановы двумерные клетки либо расположены одинаково, либо в жордановых формах у них нет одинаковых ненулевых элементов. Перестановкой таких двумерных клеток, т.е. постоянным преобразованием, можем добиться, чтобы при $k > s \geq 2$ матрица $\Gamma_k = \lambda_k^k E_k^k$, а для $0 < k = 2m + 1 < s$ имели бы $\Gamma_k = \delta_k^k E_k^{k+1}$

и $\Gamma_{k+1} = \delta_k^k (E_k^k + E_{k+1}^{k+1}) + \delta_{k+1}^k E_k^{k+1}$. Но тогда $G\Gamma_{*k} = \lambda_k^k E_k^k$ при $k > S$, откуда $\frac{\partial g_{kk}}{\partial x^k} = 2\lambda_k^k g_{kk}$ и $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = 0$ при $i \neq k, j \neq k$ и $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^k} = \lambda_k^k g_{ik} + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{kk}}{\partial x^i}$.

Из равенств $G\Gamma_{*k} = \delta_k^k E_k^{k+1}$ и $G\Gamma_{*k+1} = \delta_k^k (E_{k-1}^{k-1} + E_k^k) + \delta_{k+1}^k E_k^{k+1}$ при $k = 2m + 1$ получим, что $\frac{\partial g_{ii}}{\partial x^k} = 0$, если $i \neq k + 1$,

$$\frac{\partial g_{k+1, k+1}}{\partial x^k} = 2\delta_k^k g_{k, k+1}, \quad \frac{\partial g_{k, k+1}}{\partial x^k} = 2\delta_k^k g_{kk}, \quad \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^k} = 0, \text{ если } i \neq k, k + 1, \\ \frac{\partial g_{kk}}{\partial x^{k+1}} = 2\delta_k^k g_{kk}, \quad \frac{\partial g_{k+1, k+1}}{\partial x^{k+1}} = 2(\delta_k^k g_{k+1, k+1} + \delta_{k+1}^k g_{k, k+1}), \quad \frac{\partial g_{k, k+1}}{\partial x^{k+1}} = 2\delta_k^k g_{kk} + \delta_{k+1}^k g_{kk}.$$

Если же $i \neq k + 1$, то $\frac{\partial g_{kk}}{\partial x^i} = 0$, а если $i \neq k, k + 1$, то $\frac{\partial g_{k+1, k+1}}{\partial x^i} = 0$ и $\frac{\partial g_{k, k+1}}{\partial x^i} = 0$.

Т.е. функции $g_{kk}, g_{k, k+1}, g_{k+1, k+1}$ зависят только от переменных x^k, x^{k+1} , и эта зависимость описывается системой уравнений случая 1⁰.3, решения которой известны, причем, как мы видели, с точностью до постоянного преобразования переменных реализуемы только две возможности:

$\delta_k^k = 0, \delta_{k+1}^k = g'_{k, k+1}(x^{k+1})$ – в этом случае будем говорить о клетках типа $\langle 0, g'_{k, k+1} \rangle$, – или $\delta_k^k = 1, \delta_{k+1}^k = 0$ – клетки типа $\langle 1, 0 \rangle$.

В то же время $g_{kk} = g_{kk}(x^k), \frac{\partial g_{kk}}{\partial x^k} = 2\lambda_k^k g_{kk}$ при $k > s$, а если $i > s$ и $j \leq s$, то $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} = 0$, кроме того $\frac{\partial g_{pk}}{\partial x^k} = \lambda_k^k g_{pk}$ при всех $s < k \neq p$. Это означает, что g_{ik} при $k, i > s$ не зависят от переменных с номерами, меньшими $s+1$ и описываются системой (5). Таким образом, получены все значения g_{ik} правой нижней клетки $(n-s) \times (n-s)$ матрицы метрики M_g , и все ее диагональные двумерные клетки. Сделав перестановку этих клеток, например, так, чтобы по

диагонали матрицы M сначала расположить все двумерные клетки типа $\langle 0, g'_{k\ k+1} \rangle$, потом типа $\langle 1, 0 \rangle$, установим канонический тип матрицы метрики ds^2 .

Из этого получим, что, $\Gamma_k = 0$, $\Gamma_{k+1} = g'_{k\ k+1} E_k^{k+1}$ при $k = 2m + 1 < s_1$, а $\Gamma_k = E_k^{k+1}$, $\Gamma_{k+1} = E_k^k + E_{k+1}^{k+1}$ при $s_1 < k = 2p + 1 < s$.

Чтобы заполнить неизвестные пока части матрицы M_g , выпишем системы дифференциальных уравнений для g_{ij} с условиями $1 \leq i \leq s$, $2 \leq j$ и $j \neq i + 1$, выделяя четыре случая, соответствующие заполнениям над двумерными клетками первого и второго типа и столбцы с номерами, превосходящими s .

1) $1 \leq i \leq s_1$, $1 < j \leq s_1$ – диагональные двумерные клетки типа $\langle 0, g'_{k\ k+1} \rangle$, где $k = 2m + 1 < s_1$.

Тогда $\Gamma_{2m+1} \equiv 0$, $\Gamma_{2m+2} = g'_{2m+1\ 2m+2} (x^{2m+2}) E_{2m+2}^{2m+1}$, из чего следует, что $\Gamma_{*i\ 2m+1} \equiv 0$ и $\Gamma_{*2m+2} = g'_{2m+1\ 2m+2} g_{2m+1}$. Приравнявая соответствующие значения Γ_{ijk} к нулю или $g'_{2m+1\ 2m+2} g_{i\ 2m+1}$, получим для $m \neq p$ соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{2p+1\ 2m+1}}{\partial x^i} &= 0 && \text{при } 2m + 1, 2p + 1 < s_1 \leq s, \\ \frac{\partial g_{2p+1\ 2m+2}}{\partial x^i} &= 0 && \text{при } i = 1, 2, \dots, n, \\ \frac{\partial g_{2p+1\ 2m+2}}{\partial x^{2m+2}} &= g'_{2m+1\ 2m+2} g_{2p+1\ 2m+1} && \text{при } i \neq 2m + 2 \\ \frac{\partial g_{2p+2\ 2m+1}}{\partial x^i} &= 0 && \text{при } i \neq 2p + 2, \\ \frac{\partial g_{2p+2\ 2m+1}}{\partial x^i} &= 2g'_{2p+1\ 2p+2} g_{2p+1\ 2p+2} && \text{и при } i \neq 2p + 2, 2m + 2; \\ \frac{\partial g_{2p+2\ 2m+2}}{\partial x^i} &= 0 \\ \frac{\partial g_{2p+2\ 2m+2}}{\partial x^{2p+2}} &= g'_{2p+1\ 2p+2} g_{2p+1\ 2m+2}, && \frac{\partial g_{2p+2\ 2m+2}}{\partial x^{2m+2}} = 2g'_{2p+1\ 2p+2} g_{2p+2\ 2m+1}. \end{aligned}$$

2) $s_1 < i, j \leq s$ – в этом случае диагональные двумерные клетки типа $\langle 1, 0 \rangle$ и $\Gamma_{2m+1} = E_{2m+1}^{2m+2}$, а $\Gamma_{2m+2} = E_{2m+1}^{2m+1} + E_{2m+2}^{2m+2}$.

Соответствующая система условий:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{2p+1\ 2m+1}}{\partial x^i} &= 0 \text{ при } i \neq 2p + 2, 2m + 2; \\ \frac{\partial g_{2p+1\ 2m+1}}{\partial x^{2p+2}} &= \frac{\partial g_{2p+1\ 2m+1}}{\partial x^{2m+2}} = g_{2p+1\ 2m+1}, \\ \frac{\partial g_{2p+1\ 2m+2}}{\partial x^i} &= 0 \text{ при } i \neq 2p + 2, 2p + 3, 2m + 2; \\ \frac{\partial g_{2p+1\ 2m+2}}{\partial x^i} &= g_{2p+1\ i}, \quad i = 2p + 2, 2p + 3; \quad \frac{\partial g_{2p+1\ 2m+2}}{\partial x^{2m+2}} = g_{2p+1\ 2m+1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_{2p+2, 2m+1}}{\partial x^i} &= 0 \text{ при } i \neq 2p+1, 2p+2, 2m+2; \\ \frac{\partial g_{2p+2, 2m+1}}{\partial x^{2p+2}} &= \frac{\partial g_{2p+2, 2m+1}}{\partial x^{2m+1}} = g_{2p+2, 2m+1}, \\ \frac{\partial g_{2p+2, 2m+2}}{\partial x^i} &= 0 \text{ при } i \neq 2p+1, 2p+2, 2m+1, 2m+2; \\ \frac{\partial g_{2p+2, 2m+2}}{\partial x^{2p+1}} &= g_{2p+1, 2m+2}, \quad \frac{\partial g_{2p+2, 2m+2}}{\partial x^{2m+2}} = g_{2p+2, 2m+2}; \\ \frac{\partial g_{2p+2, 2m+2}}{\partial x^{2p+2}} &= \frac{\partial g_{2p+2, 2m+2}}{\partial x^{2m+2}} = g_{2p+2, 2m+2}.\end{aligned}$$

3) Случай $i \leq s_1$, $s_1 < j \leq s$ соответствует двумерным клеткам на пересечении «строки», содержащей диагональную клетку типа $\langle 0, g'_{k, k+1} \rangle$, и «столбца», содержащего диагональную клетку типа $\langle 1, 0 \rangle$.

Уравнения, задающие элементы g_{ij} в этом случае, такие:

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_{2p+1, 2m+1}}{\partial x^i} &= 0 \text{ при } i \neq 2m+2; \\ \frac{\partial g_{2p+1, 2m+2}}{\partial x^i} &= 0 \text{ при } i \neq 2m+1, 2m+2; \\ \frac{\partial g_{2p+1, 2m+2}}{\partial x^{2m+2}} &= \frac{\partial g_{2p+1, 2m+2}}{\partial x^{2m+1}} = g_{2p+1, 2m+1}; \\ \frac{\partial g_{2p+i, 2m+2}}{\partial x^{2m}} &= g_{2p+i, 2m+2}, \quad i = 1, 2; \\ \frac{\partial g_{2p+2, 2m+1}}{\partial x^i} &= 0 \text{ при } i \neq 2p+2, 2m+2; \\ \frac{\partial g_{2p+2, 2m+1}}{\partial x^{2p+2}} &= \frac{\partial g_{2p+2, 2m+2}}{\partial x^{2m+1}} = g'_{2p+1, 2p+2} g_{2p+1, 2p+2}; \\ \frac{\partial g_{2p+2, 2m+1}}{\partial x^{2m+2}} &= \frac{\partial g_{2p+2, 2m+2}}{\partial x^{2m+1}} = g_{2p+2, 2m+1}; \\ \frac{\partial g_{2p+2, 2m+2}}{\partial x^i} &= 0 \text{ при } i \neq 2p+1, 2m+1, 2m+2.\end{aligned}$$

4) $j > s$, $1 \leq i \leq s$. Пусть $i \leq s_1$, тогда для $2p+1 < s_1$ и $j > s$ получим при $i \neq j$, то имеет место:

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_{2p+1, j}}{\partial x^i} &= 0 \text{ и } \frac{\partial g_{2p+2, j}}{\partial x^i} = 0, \text{ если } i \neq 2p+2; \\ \frac{\partial g_{2p+1, i}}{\partial x^i} &= \lambda_i^i g_{2p+1, i}; \quad \frac{\partial g_{2p+2, i}}{\partial x^{2p+2}} = g'_{2p+1, 2p+2} g_{2p+1, i}; \quad \frac{\partial g_{2p+2, i}}{\partial x^i} = \lambda_i^i g_{ii}.\end{aligned}$$

Если же $s_1 < 2m+1 \leq s$, то:

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_{2m+1, j}}{\partial x^i} &= 0, \text{ при } i \neq 2m+2, i \neq j; \\ \frac{\partial g_{2m+2, j}}{\partial x^i} &= 0, \text{ при } i \neq 2m+1, 2m+2, i \neq j; \\ \frac{\partial g_{2m+1, j}}{\partial x^{2m+2}} &= \frac{\partial g_{2m+2, j}}{\partial x^{2m+1}} = g_{2m+1, j}, \quad \frac{\partial g_{2m+2, j}}{\partial x^{2m+2}} = g_{2m+2, j}, \quad \frac{\partial g_{2m+1, j}}{\partial x^j} = \lambda_j^i g_{2m+1, j},\end{aligned}$$

$$\frac{\partial g_{2m+2}^j}{\partial x^j} = \lambda_j^i g_{2m+2}^j.$$

Проинтегрировав эти дифференциальные уравнения, установим зависимость элементов недиагональных клеток от определенных выше элементов диагональных двумерных и одномерных клеток.

Лемма 2: Элементы недиагональных клеток матрицы g метрики ds^2 , матрицы связности которой функционально абелевы и одновременно во всех точках приводимы к жордановому виду, определяются правилом:

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} g_{2k+1}^{2m+1} & g_{2k+1}^{2m+2} \\ g_{2k+2}^{2m+1} & g_{2k+2}^{2m+2} \end{vmatrix} \\ &= a_{km} \begin{vmatrix} g_{2k+1}^{2k+1} \\ g_{2k+2}^{2k+1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} g_{2m+1}^{2m+1} & g_{2m+1}^{2m+2} \end{vmatrix} + b_{km} E_2^2 \\ \text{и} \quad & \begin{vmatrix} g_{2k+1}^j \\ g_{2k+2}^j \end{vmatrix} = a_{kj} \begin{vmatrix} g_{2k+1}^{2k+1} \\ g_{2k+2}^{2k+1} \end{vmatrix} g_j \quad \text{при } 2k+1 < S \text{ и } j > S, \\ & a_{km}, a_{kj}, b_{km} \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Откуда следует, что доказано утверждение.

Утверждение 2: Если матрицы связности n -мерной недиагональной метрики $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$, $n > 2$, во всех точках одновременно приводимы к жордановому виду, то:

$$\begin{aligned} ds^2 = & \sum_{k=0}^S \left((dx^{2k+1})^2 + 2g_{2k+1}^{2k+2} (x^{2k+2}) dx^{2k+1} dx^{2k+2} + \right. \\ & + \left(g_{2k+1}^{2k+2} (x^{2k+2}) + g_{2k+1}^{2k+1} (x^{2k+2}) \right) (dx^{2k+2})^2 \Big) + \\ & + \sum_{k=S+1}^m e^{2x^{2k+2}} \left((dx^{2k+1})^2 + 2x^{2k+1} dx^{2k+1} dx^{2k+2} + \right. \\ & + \left(g_{2k+1}^{2k+2} (x^{2k+1}) + g_{2k+1}^{2k+1} (x^{2k+1}) \right) (dx^{2k+2})^2 \Big) + \\ & + \sum_{k=2m+3}^n g_k^2 (x^k) (dx^k)^2 + 2 \sum g_{ij} dx^i dx^j, \end{aligned} \quad (8)$$

где g_{ij} при $j \neq i+1$, $i \leq 2m+1$ или $i \geq 2m+2$ определяются леммой 2.

Замечание 2: Для найденных выше метрик (6) и (8) матрицы связности либо постоянны, либо матрицы Γ_k зависят только от переменной x^k , из этого и коммутирования всех матриц связности следует равенство нулю всех компонент тензора кривизны.

Поскольку при замене координат $x' = C^{-1}(x)x$ соответственно преобразованной метрикой $g'(x')$ порождаются матрицы связности Γ_i' , как линейные комбинации матриц $C^{-1}\Gamma_i C$ и матриц связности Γ_i метрики g , если

С постоянно, то Γ_i' сохраняют как кратность жордановому виду, так и функциональную абелевость. Таким образом, мы имеем возможность в многомерном случае выделить класс метрик, связности которых функционально абелевы, а именно, имеет место теорема.

Теорема: Если найдется $C \in GL(n, \mathbb{R})$, такое, что $C^T g(Cx')C = \tilde{g}(x')$, где $\tilde{g}$ определяется (6) или (8), то матрицы связности этой метрики функционально абелевы.

Известно [3], что если числовая матрица X приведена к жордановому виду и имеет собственные значения λ_α ($\alpha = 1, 2, \dots, u$), то всякая матрица Y , коммутирующая с ней, разбивается на u^2 блоков $Y_{\alpha\beta}$ в соответствии с разбиением на блоки жордановой матрицы X , при этом $Y_{\alpha\beta} = 0$, если $\lambda_\alpha \neq \lambda_\beta$ и $Y_{\alpha\beta}$ – произвольная правильная треугольная матрица, если собственные значения λ_α и λ_β совпадают. Число параметров в такой матрице Y равно $N = \sum_{\alpha, \beta=1}^u \delta_{\alpha\beta}$, где $\delta_{\alpha\beta}$ – степень наибольшего общего делителя многочленов $(\lambda - \lambda_\alpha)^{\rho_\alpha}$ и $(\lambda - \lambda_\beta)^{\rho_\beta}$. Если X не имеет равных собственных значений, то коммутирующая с ней матрица треугольная с нулевыми наддиагональными блоками $Y_{\alpha\beta}$. Таким образом, получаем представление об общем блочном виде матриц связности Γ_i при условии приведения к жордановому виду одной из ее компонент разложения в функциональную линейную комбинацию постоянных матриц. Последнее всегда можно считать достигнутым постоянным преобразованием в силу того, что такая компонента постоянна.

Так как Γ_{jk}^i – коэффициенты аффинной связности, согласованной с римановой метрикой, и, значит, $G_i \Gamma_{*jk}^i = G_i \Gamma_{*kj}^i$, то намечается возможность перейти к системе дифференциальных $\frac{n^2(n+1)}{2}$ уравнений, описывающих матрицу g .

ЛИТЕРАТУРА:

1. J. Dollard, Ch. Friedman. Product integration with application to differential equations // London: Addison-Wesley Publ. Comp. 1979. P. 254.
2. L. Schlesinger. Parallel Serschiebung und Krümmungstensor // Math. Ann. 1928. V.99. P. 413–434.
3. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. 5-е изд. М.: Физматлит, 2004. 560 с.
4. Козлов В.А., Паланджанц Л.Ж. Мультипликативный интеграл и представления групп и алгебр Ли. – Майкоп, 2011. С. 93.

5. Мантуров О.В., Паланджянц Л.Ж. Мультипликативный интеграл и уравнения нулевой кривизны // Дифференциальная геометрия и алгебры Ли. МОПИ. Деп. в ВИНТИ №2384–84 Деп.
6. Мантуров О.В. Мультипликативный интеграл // Итоги науки и техники. Серия: Проблемы геометрии. 1990. Т. 22. С. 167–215.
7. Морозов В.В. О коммутативных матрицах // Уч. записки КГУ. 1952. Т. 119. №5. С. 17–20.
8. Петрова В.Т. Классификация диагональных римановых метрик с функционально абелевыми связностями // Инвариантные тензоры на однородных пространствах. М.: МОПИ, 1988, С. 118–139. Деп. в ВИНТИ № 8355–В 88.
9. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1967. 667 с.
10. Черкасова В.В. Мультипликативный интеграл в дифференциальной геометрии и прикладных задачах // Вестник ТГГПУ. 2010. № 3(21). С. 79–83.

УДК 512.57 + 510.67

DOI: 10.18384/2310-7251-2015-4-21-28

O. Matveyev¹, A. Pankratov², I. Pinchuk¹*¹Moscow State Region University**²Russian Peoples Friendship University (Moscow)*

TO THE EQUIVALENCE OF THE CATEGORIES OF MODELS AND UNIVERSAL ALGEBRAS

Abstract. *The category equivalence of models and special universal algebras is proved. This result can be used to construct the processing algorithms of different intelligent relation databases. The purpose of this paper is to build the new category called U-ALGEBRAS, which is equivalent to the the MODELS category of the same signature with multivalued homomorphisms as morphisms. The objects of the U-ALGEBRAS category are the same type universal algebras; and morphisms are homomorphisms of universal algebras. The construction has the set-theoretic, algebraic character.*

Key words: *universal algebra, model, intelligent relational databases.*

Матвеев О.А.¹, Панкратов А.С.², Пинчук И.А.¹*¹Московский государственный областной университет**²Российский университет дружбы народов (г. Москва)*

К ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ КАТЕГОРИЙ МОДЕЛЕЙ И УНИВЕРСАЛЬНЫХ АЛГЕБР

Аннотация. *Доказывается эквивалентность категории моделей и специальной категории универсальных алгебр. Конструкция может быть использована для построения алгоритмов обработки реляционных баз знаний. Целью настоящей заметки является построение категории U-ALGEBRAS, эквивалентной категории моделей одной и той же сигнатуры с многозначными гомоморфизмами в качестве морфизмов. Объектами категории U-ALGEBRAS служат однотипные универсальные алгебры, морфизмами – гомоморфизмы универсальных алгебр. Конструкция носит теоретико-множественный, алгебраический характер.*

Ключевые слова: *универсальная алгебра, модель, реляционные базы знаний.*

The specification of U-ALGEBRAS category makes some interesting aspects, using the topology and fuzzy sets tools. To realize directed search option in any knowledge relational base, you need to select a semantic basis of the primary concepts. A choice of the appropriate topology on the main support of U-ALGEBRAS category is able to help here. That is, it should not to consider all possible subset but only closed in the selected topology. The search time in the one or other relational knowledge base depends essentially on how strong the selected topology is.

The interaction and interrelationship of the system approach, set theory and category theory, binary logic and the theory of algebraic systems, theory of fuzzy sets, multi-valued logic and topology lead to the necessity of constructing a generalized interpretation of the standard model of intellectual knowledge base. This model should be flexible and universal to describe adequately the different subject areas.

Synthetic modelling approach, which consists in the use of various powerful mathematical theories, leads to the formation of new mathematical tools. So, as we see, the concepts of topological model and topological relational system can be successfully used. Indeed, the semantic bases (linguistic thesaurus), hierarchical representation process of basic objects by sets of basic features with the given internal associative connections can be understood and exactly described in the language of topology. With this approach, feature space endowed with the topological structure and a variety of clear and / or fuzzy relations of different arity. State graph obtained by this approach is sufficiently the exact analogue of a simulated situation.

Creation of algorithms for processing relational knowledge base is an actual problem.

Next, we give a sketch of the construction of a joint theory of models and universal algebras.

Definition 1. Model (relational system) $M = \langle A, \Omega \rangle$ is set A with a predetermined set of relations of different arity. The set Ω is called the signature. Arity of relation will indicate superscript in parentheses: $R^{(n)} \in \Omega$.

Definition 2. The correspondence $\varphi \subset A \times B$ called multi-valued (reversible) homomorphism from the model $M_1 = \langle A, \Omega \rangle$ into the model $M_2 = \langle B, \Omega \rangle$ if for any n-ary relation $R^{(n)}$ of signature Ω

$$((a_1, b_1) \in \varphi) \wedge \dots \wedge ((a_n, b_n) \in \varphi) \Rightarrow [R^{(n)}(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow R^{(n)}(b_1, \dots, b_n)] \quad (1)$$

Models of the same signature with multi-valued homomorphisms as morphisms form a category, which we denote *MODELS*.

Definition 3. Universal algebra $A = \langle A, \Phi \rangle$ is the set A with a specified set of operations Φ of various arity. Under n -ary ($n \geq 1$) operation $\omega^{(n)} \in \Phi$ is meant a mapping $\omega^{(n)}: \underbrace{A \times \dots \times A}_n \rightarrow A$.

0-ary operation fixes a certain element in the set A .

From the definitions 1 and 3 it follows that the universal algebra is a special case of the model. Indeed, for each n -ary operation $\omega^{(n)} \in \Phi$ of universal algebra $A = \langle A, \Phi \rangle$ can be determined $(n+1)$ -ary relation $R^{(n+1)}$ on A by the following formula:

$$R^{(n+1)}(a_1, \dots, a_{n+1}) \Leftrightarrow a_{n+1} = \omega^{(n)}(a_1, \dots, a_n) \quad (2)$$

Definition 4. Mapping $f: A \rightarrow B$ is called homomorphism from universal algebra A into universal algebra B if for each $\omega^{(n)} \in \Phi$ and all $a_1, \dots, a_n \in A$

$$f(\omega^{(n)}(a_1, \dots, a_n)) = \omega^{(n)}(f(a_1), \dots, f(a_n)) \quad (3)$$

Proposition 1. Let $M = \langle A, \Omega \rangle$ is model. For each relation $R^{(n)}$ we define the $(n-1)$ -ary operation on the set 2^A of all subsets A by the following:

a) if $a_1, \dots, a_{n-1} \in A$ then

$$\omega^{(n-1)}(a_1, \dots, a_{n-1}) = \{a \in A : R^{(n)}(a_1, \dots, a_{n-1}, a)\}$$

b) if $M_1, \dots, M_{n-1} \in 2^A$, $M_k \neq \emptyset$, $k = \overline{1, n-1}$, then

$$\omega^{(n-1)}(M_1, \dots, M_{n-1}) = \bigcup_{a_1 \in M_1} \dots \bigcup_{a_{n-1} \in M_{n-1}} \omega^{(n-1)}(a_1, \dots, a_{n-1})$$

c) if at least one of the sets $M_k \in 2^A$, $k = \overline{1, n-1}$ is empty, then

$$\omega^{(n-1)}(M_1, \dots, M_{n-1}) = \emptyset$$

Let Φ be the set of all so defined operations on the set 2^A .

Then $A = \langle 2^A, \cup, \emptyset, \Phi \rangle$ is universal algebra, where $\cup$ is the binary operation of union, $\emptyset$ is 0-ary operation of taking the empty set and the following identities are valid:

$$\begin{aligned}\omega^{(n)}(\emptyset, M_2, \dots, M_n) &= \emptyset, \\ \omega^{(n)}(M_1, \emptyset, \dots, M_n) &= \emptyset, \\ \omega^{(n)}(M_1, M_2, \dots, \emptyset) &= \emptyset,\end{aligned}\tag{4}$$

$$\begin{aligned}\omega^{(n)}(M_1 \cup N_1, M_2, \dots, M_n) &= \\ &= \omega^{(n)}(M_1, M_2, \dots, M_n) \cup \omega^{(n)}(N_1, M_2, \dots, M_n), \\ \omega^{(n)}(M_1, M_2 \cup N_2, \dots, M_n) &= \\ &= \omega^{(n)}(M_1, M_2, \dots, M_n) \cup \omega^{(n)}(M_1, N_2, \dots, M_n), \\ &\dots\dots\dots \\ \omega^{(n)}(M_1, M_2, \dots, M_n \cup N_n) &= \\ &= \omega^{(n)}(M_1, M_2, \dots, M_n) \cup \omega^{(n)}(M_1, M_2, \dots, N_n),\end{aligned}\tag{5}$$

Proof. Identities (4) follow from the position c) determination of operations $\omega^{(n)}$. We prove that the identities (5) are valid:

$$\begin{aligned}\omega^{(n)}(M_1 \cup N_1, M_2, \dots, M_n) &= \bigcup_{a_1 \in M_1 \cup N_1} \bigcup_{a_2 \in M_2} \dots \bigcup_{a_n \in M_n} \omega^{(n)}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \\ &= [\bigcup_{a_1 \in M_1} \bigcup_{a_2 \in M_2} \dots \bigcup_{a_n \in M_n} \omega^{(n)}(a_1, a_2, \dots, a_n)] \cup [\bigcup_{a_1 \in N_1} \bigcup_{a_2 \in M_2} \dots \bigcup_{a_n \in M_n} \omega^{(n)}(a_1, a_2, \dots, a_n)] = \\ &= \omega^{(n)}(M_1, M_2, \dots, M_n) \cup \omega^{(n)}(N_1, M_2, \dots, M_n)\end{aligned}$$

The rest of (5) can be proved analogously.

Definition 5. Universal algebra will be called over model, if it can be obtained from some model $M = \langle A, \Phi \rangle$ by the construct described in Statement 1. In this case, we also say that the algebra is built over the model M .

Proposition 2. Universal algebra $A = \langle 2^A, \cup, \emptyset, \Phi \rangle$, in which $\cup$ is a binary operation of union, $\emptyset$ is a 0-ary operation of taking the empty set and for each operation $\omega^{(n)} \in \Phi$ identities (4) and (5) are valid, is over model algebra.

Proof. We define $(n+1)$ -ary relation $R^{(n+1)}$ for each n -ary operation $\omega^{(n)} \in \Phi$ on the set 2^A by following:

$$R^{(n+1)}(M_1, \dots, M_{n+1}) \Leftrightarrow M_{n+1} \subset \omega^{(n)}(M_1, \dots, M_n). \quad (6)$$

Consider the restriction of relation $R^{(n+1)}$ to the set A . Thus, we obtain the model $M = \langle A, \Omega \rangle$ where the signature Ω consists of all so constructed operations $\omega^{(n)} \in \Phi$ or relations $R^{(n+1)}|_A$. According to the Statement 1, we construct the over-model universal algebra $\bar{A} = \langle 2^A, \cup, \emptyset, \tilde{\Phi} \rangle$ and prove that $\bar{A} = A$. To do this, make sure that there is one-to-one correspondence $\phi: \Phi \rightarrow \tilde{\Phi}$ such that for all $\omega^{(n)} \in \Phi$ the equality $\omega^{(n)} = \phi(\omega^{(n)})$ is valid. The correspondence ϕ is constructed as follows: according to formula (3) for any operation $\omega^{(n)} \in \Phi$ there is one-to-one relation $R^{(n+1)} \in \Omega$, and according to positions a) – c) of Proposition 1, for relation $R^{(n+1)}$ there is one-to-one operation $\bar{\omega}^{(n)} \in \tilde{\Phi}$. Let $\phi(\omega^{(n)}) = \bar{\omega}^{(n)}$. If $a_1, \dots, a_n \in A$, then

$$a_{n+1} \in \omega^{(n)}(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow R^{(n+1)}(a_1, \dots, a_{n+1}) \Leftrightarrow a_{n+1} \in \bar{\omega}^{(n)}(a_1, \dots, a_n).$$

If $M_1, \dots, M_n \in 2^A$, $M_k \neq \emptyset$, $k = \overline{1, n}$, then, according to position b) of Proposition 1,

$$\bar{\omega}^{(n)}(M_1, \dots, M_n) = \bigcup_{a_1 \in M_1} \dots \bigcup_{a_n \in M_n} \bar{\omega}^{(n)}(a_1, \dots, a_n).$$

On the other hand, by identities (5), we obtain

$$\omega^{(n)}(M_1, \dots, M_n) = \bigcup_{a_1 \in M_1} \dots \bigcup_{a_n \in M_n} \omega^{(n)}(a_1, \dots, a_n).$$

Therefore, $\bar{\omega}^{(n)}(M_1, \dots, M_n) = \omega^{(n)}(M_1, \dots, M_n)$.

If at least one of the sets $M_k \in 2^A$, $k = \overline{1, n}$ is empty, then, according to position b) of Statement 1, $\bar{\omega}^{(n)}(M_1, \dots, M_n) = \emptyset$. On the other hand, by identities (4), we obtain $\omega^{(n)}(M_1, \dots, M_n) = \emptyset$. So, we have proved that $\phi(\omega^{(n)}) = \omega^{(n)}$.

Example. Let $M = \langle A, \rho \rangle$ is a model with one binary relation, which is the quasi-order relation, i. e. the following conditions are valid:

$$a \rho a \text{ (reflexivity)} \quad (7)$$

$$(a \rho b) \wedge (b \rho c) \Rightarrow a \rho c \text{ (transitivity)}. \quad (8)$$

In this case, the over model of the universal algebra has the form:

$$A = \langle 2^A, \cup, \emptyset, \sigma \rangle,$$

where σ is unary operation on 2^A , satisfying the following identities:

$$\sigma(\emptyset) = \emptyset, \quad (9)$$

$$\sigma\left(\bigcup_{i \in I} M_i\right) = \bigcup_{i \in I} \sigma(M_i) \text{ (linearity identity)}, \quad (10)$$

(I is some set of indexes),

$$M \subset \sigma(M), \quad (11)$$

$$\sigma(\sigma(M)) = \sigma(M) \text{ (idempotency identity)}. \quad (12)$$

Identities (9) and (10) respectively follow identities (4) and (5), the identity (11) and (12) follow directly from (7) and (8).

Note that it follows from the identities (9) – (12), that σ is the Kuratowsky closure operator, with is well known in topology.

It is also easy to see that if in universal algebra with unary operation the identities (9) – (12) are valid, then there is a quasi-order relation ρ on A , such that algebra A is built over the model $M = \langle A, \rho \rangle$.

Proposition 3 follows the Propositions 1 and 2.

Proposition 3. There exists a one-to-one correspondence between models and universal algebras of the form $A = \langle 2^A, \cup, \emptyset, \Phi \rangle$, where $\cup$ is binary operation of union, $\emptyset$ is 0-ary operation of taking the empty set and for any operation identities (4) and (5) are valid.

Proposition 4. Let $M_1 = \langle A, \Omega \rangle$ and $M_2 = \langle B, \Omega \rangle$ are models with the same signature, $\varphi \subset A \times B$ is a multi-valued homomorphism from M_1 to M_2 . Let $A_1 = \langle 2^A, \cup, \emptyset, \Phi \rangle$ and $A_2 = \langle 2^B, \cup, \emptyset, \Phi \rangle$ are universal algebra

constructed over the models respectively M_1 and M_2 . Define mapping $f_\varphi : 2^A \rightarrow 2^B$ by follow:

$$\text{a) } f_\varphi(\emptyset) = \emptyset, \quad \text{b) } \forall a \in A \quad f_\varphi(a) = \{b \in B : (a, b) \in \varphi\},$$

$$\text{c) } \forall M \in 2^A \quad f_\varphi(M) = \bigcup_{a \in M} f_\varphi(a).$$

Then the mapping f_φ is a homomorphism of universal algebra A_1 into universal algebra A_2 .

Proof. We need to prove that the mapping has the following properties:

$$f_\varphi(\emptyset) = \emptyset, \tag{13}$$

$$f_\varphi(N \cup M) = f_\varphi(N) \cup f_\varphi(M), \tag{14}$$

$$f_\varphi(\omega^{(n)}(M_1, \dots, M_n)) = \omega^{(n)}(f_\varphi(M_1), \dots, f_\varphi(M_n)) \tag{15}$$

$$\forall \omega^{(n)} \in \Phi, \quad M_1, \dots, M_n \in 2^A.$$

The position a) of proposition 4 follows the property (13). Let's prove the property (14):

$$f_\varphi(N \cup M) = \bigcup_{a \in N \cup M} f_\varphi(a) = \left(\bigcup_{a \in N} f_\varphi(a) \right) \cup \left(\bigcup_{a \in M} f_\varphi(a) \right) = f_\varphi(N) \cup f_\varphi(M).$$

Let's prove the property (15):

$$\begin{aligned} b \in f_\varphi(\omega^{(n)}(M_1, \dots, M_n)) &\Leftrightarrow (\exists a \in \omega^{(n)}(M_1, \dots, M_n) : b \in f_\varphi(a)) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\exists a \in \omega^{(n)}(M_1, \dots, M_n) : (a, b) \in \varphi) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\exists a : R^{(n+1)}(M_1, \dots, M_n, a) \wedge ((a, b) \in \varphi)) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\exists a \in A : \forall a_1 \in M_1, \dots, \forall a_n \in M_n \quad R^{(n+1)}(a_1, \dots, a_n, a) \wedge ((a, b) \in \varphi)) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\forall a_1 \in M_1, \dots, \forall a_n \in M_n : ((a_1, b_1) \in \varphi) \wedge \dots \wedge ((a_n, b_n) \in \varphi) \wedge ((a, b) \in \varphi)) \Rightarrow \\ &\Rightarrow R^{(n+1)}(b_1, \dots, b_n, b) \Leftrightarrow R^{(n+1)}(f_\varphi(M_1), \dots, f_\varphi(M_n), b) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow b \in \omega^{(n)}(f_\varphi(M_1), \dots, f_\varphi(M_n)). \end{aligned}$$

Reversing the arguments of proposition 4, we obtain the following result:

Proposition 5. Let $A_1 = \langle 2^A, \cup, \emptyset, \Phi \rangle$ and $A_2 = \langle 2^B, \cup, \emptyset, \Phi \rangle$ are universal algebra constructed over the models $M_1 = \langle A, \Omega \rangle$ and $M_2 = \langle B, \Omega \rangle$. Let $f: A_1 \rightarrow A_2$ be a homomorphism. Then there exists the only multi-valued homomorphism φ from the model M_1 into the model M_2 , so that

$$a) \forall a \in A \quad f(a) = \{b \in B : (a, b) \in \varphi\},$$

$$6) \forall M \in 2^A \quad f(M) = \bigcup_{a \in M} f(a).$$

Definition 6. Category whose objects are universal algebra of the form $A = \langle 2^A, \cup, \emptyset, \Phi \rangle$, with the identities (4) and (5), and whose morphisms are homomorphisms will be called category *U-ALGEBRAS*.

Propositions 1 – 5 lead to the following result.

Theorem. The categories *MODELS* and *U-ALGEBRAS* are equivalent.

We formulate the main conclusions of the construction which is built above.

1) The equivalence of the category of models to some primitive class of universal algebras entails enrichment model theory; in particular, it is possible to transfer to the model concepts congruence, quotient algebra and so on. For example, the concept of congruence leads to a hierarchy of different types of relational systems.

2) The equivalence of the category of models to some category of universal algebra can be a basis for constructing algorithms for processing knowledge relational database.

REFERENCES:

1. Matveyev O. Topology relational systems// Bulletin of MSRU. Series Physics and mathematics (Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seria Fizika-matematika). 2010. № 2. P. 9–19.
2. Martynuk A., Matveyev O. The equivalence of the categories of models and of universal algebra as a basis for constructing algorithms for processing knowledge relational database// Bulletin of MSRU. Series Physics and mathematics (Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seria Fizika-matematika). 2010. № 2. P. 28–34.

УДК 517.95 5

DOI: 10.18384/2310-7251-2015-4-29-35

Акимов А.А., Абдуллина Р.И.*Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета*

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДАРБУ ДЛЯ ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ С ОТХОДОМ ОТ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Аннотация. В статье рассматривается проблема построения решения задачи Дарбу для телеграфного уравнения в случае отхода от характеристики. Данная задача возникает при доказательстве существования решения задачи Трикоми, где есть необходимость построения решения задачи Дарбу в явном виде. В статье предварительно построена функция Римана-Адамара и методом вспомогательных функций доказана теорема единственности решения задачи Дарбу. Затем с использованием функции Римана-Адамара было построено решение задачи Дарбу в виде ряда, содержащего функции Бесселя.

Ключевые слова: задача Дарбу, функция Римана-Адамара, телеграфное уравнение.

A. AKIMOV, R. ABDULLINA*Bashkir State University Sterlitamak Branch*

THE SOLUTION OF THE DARBOUX PROBLEM FOR THE TELEGRAPH EQUATION WITH DEVIATION FROM THE CHARACTERISTIC

Abstract. We consider the problem of constructing a solution of the Darboux problem for the telegraph equation for the case with deviation from the characteristic. This problem occurs in proving the existence of the solutions of the Tricomi problem where it becomes necessary to construct a solution of the Darboux problem explicitly. The Riemann–Hadamard function is preliminarily constructed and uniqueness theorem is established for the Darboux problem. Then, using the Riemann–Hadamard function the Darboux problem is explicitly solved in the form of a series containing Bessel functions.

Key words: Darboux problem, the Riemann–Hadamard function, telegraph equation.

В основе математических моделей многих явлений, имеющих место в жидком сосуде, и таких явлений, как сверхзвуковое течение газов, а также в основе ряда других моделей и процессов механики лежат уравнения в частных

производных второго порядка гиперболического типа. Задачи Гурса и Дарбу вместе с задачей Коши и смешанной задачей являются основными локальными краевыми задачами для уравнений гиперболического типа с двумя независимыми переменными. Одним из основных методов решения данных задач является метод Римана. При решении задачи Дарбу методом Римана возникает достаточно сложная задача построения вспомогательной функции, называемой функцией Римана-Адамара. Особенно затруднительно построить данную функцию в случае если граничное условие задается на кривой, не совпадающей с характеристикой. Построению функции Римана-Адамара и затем с помощью нее решению задачи Дарбу в случае отхода от характеристики для телеграфного уравнения посвящена эта статья.

Рассмотрим телеграфное уравнение:

$$L_0 v = v_{xx} - v_{yy} + cv = 0, \quad (1)$$

где c – произвольная действительная постоянная, в области D , ограниченной характеристикой CB ($x - y = 1$) уравнения (1), прямой AC

($kx + y = 0$, $k > 0$), и отрезком AB , лежащим на оси $y = 0$.

Задача D . В области D найти функцию $v(x, y)$, которая удовлетворяет условиям:

$$v(x, y) \in C(\bar{D}) \wedge C^1(D \cup AB) \wedge C^2(D); \quad (2)$$

$$Lv(x, y) \equiv 0, \quad (x, y) \in D; \quad (3)$$

$$v(x, 0) = \tau(x), \quad 0 < x < 1; \quad (4)$$

$$v(x, kx) = \varphi(x), \quad 0 < x < \frac{1}{1+k}, \quad (5)$$

где $\tau(x)$ и $\varphi(x)$ – заданные достаточно гладкие функции.

Отметим, что задача Дарбу для телеграфного уравнения рассматривалась ранее в работе К.Б. Сабитова [4], но в этой работе кривая AC являлась характеристикой уравнения (1). В данной статье рассмотрен более общий случай, когда кривая AC совпадает с характеристикой только в частном случае.

Определение. Назовем функцию $v(x, y)$ квазирегулярным решением уравнения (1), если выполняются следующие условия:

- i) $v(x, y)$ удовлетворяет условиям (2);

ii) к следующим интегралам можно применить формулу Грина:

$$\int_D \int v L_0 v dx dy, \quad \int_D \int v_x L_0 v dx dy, \quad \int_D \int v_y L_0 v dx dy;$$

iii) граничные интегралы понимаются как пределы интегралов на внутренних кривых при стремлении последних к границе.

Предположим, что v_1, v_2 – два решения **Задачи D** для уравнения (1). Положим $v = v_1 - v_2$. Тогда функция $v(x, y)$ в области D удовлетворяет уравнению (1) и следующим граничным условиям:

$$\begin{cases} v = 0 \text{ на } AC \\ v = 0 \text{ на } AB \end{cases}.$$

Поэтому для доказательства единственности решения **Задачи D** достаточно показать, что $v = 0$ в D .

Теорема 1. Если $v(x, y)$ – квазирегулярное решение уравнения (1) в области D и $v|_{AB \cup AC} = 0$, тогда, если $c > 0$, то $v(x, y) \equiv 0$ в D .

Доказательство. Доказательство теоремы проведем аналогично работе [1]. Пусть $v = v(x, y)$ квазирегулярное решение уравнения (1) определенное в D . Рассмотрим также интеграл:

$$2 \iint_D (bv_x + av_y)(v_{xx} - v_{yy} + cv) dx dy, \quad (6)$$

где a, b достаточно гладкие функции переменных (x, y) .

В силу (1) этот интеграл равен нулю. Функции a, b выберем таким образом, чтобы выражения, получившиеся после преобразования интеграла с помощью формулы Грина, были неотрицательными и обращались в нуль только, если $v \equiv 0$ в D , что равносильно единственности решения.

Рассмотрим тождества:

$$\begin{aligned} bv_x v_{xx} &= \frac{1}{2} (bv_x^2)_x - \frac{1}{2} b_x v_x^2, \quad av_y v_{yy} = \frac{1}{2} (av_y^2)_y - \frac{1}{2} a_y v_y^2, \\ av_y v_{xx} &= (av_x v_y)_x - \frac{1}{2} (av_x^2)_y + \frac{1}{2} a_y v_x^2 - a_x v_x v_y, \end{aligned}$$

$$bv_x v_{yy} = (bv_x v_y)_y - b_y v_x v_y - \frac{1}{2}(bv_y^2)_x + \frac{1}{2}b_x v_y^2,$$

$$bv_x v = \frac{1}{2}(bv^2)_x - \frac{1}{2}b_x v^2, \quad av_y v = \frac{1}{2}(v^2)_y - \frac{1}{2}a_y v^2.$$

Применяя формулу Грина к интегралу (6)

$$\oint_{\partial D} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

и используя приведенные выше тождества, получим следующее равенство:

$$J = \iint_D (b_x v_x^2 - a_y v_x^2 + 2a_x v_x v_y + b_x v_y^2 + b_x v^2 + a_y v^2) dx dy +$$

$$+ \int_{AC} + \int_{CB} + \int_{BA} (bv_x^2 + 2av_x v_y + bv_y^2 + bcv^2) dy + (av_y^2 + 2bv_x v_y + av_x^2 - acv^2) dx =$$

$$= I + J_1 + J_2 + J_3$$

Выберем теперь функции $a = a(x, y)$, $b = b(x, y)$ в области D следующим образом: $a = -kb$, $b = c$. Очевидно, что $I = 0$. Из условия $v(x, y) = 0$ на $AB \cup AC$ и факта, что

$$dy = -kdx \text{ (на } AC), \quad dy = dx \text{ (на } CB)$$

получим:

$$J_1 = \int_{\gamma_1} (kb + a)(1 - k^2)v_y^2 dx = 0,$$

$$J_2 = \int_{\gamma_2} [c(1 - k)(v_x + v_y)^2 + c^2 v^2 (1 + k)] dx \geq 0,$$

$$J_3 = kc \int_{AB} v_y^2 dx \geq 0.$$

На плоскости (x, y) перейдем к характеристическим координатам $\xi = x + y$, $\eta = x - y$. Тогда уравнение (1) примет вид:

$$Lu = u_{\xi\eta} + \frac{c}{4}u = 0,$$

где

$$u(\xi, \eta) = v\left(\frac{1}{2}(\xi + \eta), \frac{1}{2}(\xi - \eta)\right),$$

а область D отобразится в область

$$\Delta = \left\{ (\xi, \eta) \mid 0 < \xi < \eta < \alpha\xi < 1, \alpha = \frac{1-k}{1+k} > 1 \right\}$$

и, соответственно, **Задача D'** будет сформулирована так:

Задача D' . В области Δ найти функцию $u(x, y)$, которая удовлетворяет условиям:

$$u(\xi, \eta) \in C(\bar{\Delta}) \wedge C^1(\Delta \cup \{\eta = \alpha\xi\}) \wedge u_{\xi\eta} \in C(\Delta);$$

$$Lu(\xi, \eta) \equiv 0, (\xi, \eta) \in \Delta,$$

$$u(\xi, \alpha\xi) = \tau(\xi), 0 \leq \xi \leq \frac{1}{\alpha}; u(\xi, \xi) = \psi(\xi), 0 \leq \xi \leq 1; \psi(0) = \varphi(0).$$

Для решения задачи воспользуемся видоизмененным методом Римана.

Видоизмененный метод Римана предполагает использование функции $R(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0)$, известной как функция Римана-Адамара. Построение данной функции можно встретить в работах [2], [5]. В нашем случае функция Римана-Адамара должна удовлетворять следующим условиям.

Рассмотрим следующее тождество:

$$u \cdot LR - R \cdot Lu = \frac{1}{2}(uR_{\eta} - Ru_{\eta})_{\xi} + \frac{1}{2}(uR_{\xi} - Ru_{\xi})_{\eta}. \quad (7)$$

Используя соотношение (7), где u – регулярное решение уравнения (1) в области Δ , а R – функция Римана-Адамара, найденная ранее в работе [2], и применяя к нему формулу Грина по областям ω_k , σ_k , Δ_k , определенным также в работе [2], получим следующее равенство:

$$0 = \int_{(\cup \partial \Delta_i \cup \partial \omega_k \cup \partial \sigma_m)} (uR_{\xi} - Ru_{\xi})d\xi - (uR_{\eta} - Ru_{\eta})d\eta = \\ = I_{ED} + I_{DC} + I_{CA} + I_{AE},$$

где $D = (\xi_0, \eta_0)$, $C = \left(\frac{\eta_0}{\alpha}, \eta_0\right)$, $B = \left(\frac{\xi_0}{\alpha}, \xi_0\right)$, $A = (0, 0)$, $E = (\xi_0, \xi_0)$.

Преобразуя интегралы $I_{ED}, I_{DC}, I_{CA}, I_{AE}$, будем иметь:

$$I_{ED} = uR_1|_E^D = uR_1(D) - uR_1(E) = u(\xi_0, \eta_0) - \tau(\xi_0)$$

$$I_{DC} = -uR_1|_D^C = -uR_1(C) + uR_1(D) = -\psi\left(\frac{\eta_0}{\alpha}\right) + u(\xi_0, \eta_0).$$

Так как $d\eta = \alpha d\xi$ на AC , тогда:

$$I_{AC} = \int_0^{\frac{\eta_0}{\alpha}} u[(R_\xi - \alpha(R_\eta)]d\xi = \sum_{n=1}^{\infty} [P_n(\xi_0, \eta_0) - P_n(\eta_0, \xi_0)],$$

где $P_n(s, \mu) = \frac{c(\mu - \alpha^{2n-1}s)}{2} \int_0^{\frac{\mu}{\alpha^n}} \frac{J_1\left(\sqrt{c(\alpha^n t - \mu)(t\alpha^{1-n} - s)}\right)}{\sqrt{(\alpha^{n-1}t - \alpha^{2n-2}s)(\alpha^n \xi - \mu)}} \tau(t) dt.$

Аналогично на AE , $d\eta = d\xi$. Поэтому:

$$I_{AE} = \int_0^{\xi_0} u(R_\xi - R_\eta) d\xi = \frac{c(\eta - \xi)}{2} \int_0^{\xi} \frac{J_1\left(\sqrt{c(t - \xi)(t - \eta)}\right)}{\sqrt{(t - \xi)(t - \eta)}} \psi(t) dt +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} [Q_n(\xi_0, \eta_0) - Q_n(\eta_0, \xi_0)],$$

где $Q_n(s, \mu) = \frac{c(\mu - \alpha^{2n}s)}{2} \int_0^{\frac{\mu}{\alpha^n}} \frac{J_1\left(\sqrt{c(\alpha^n t - \mu)(t\alpha^{-n} - s)}\right)}{\sqrt{(\alpha^n t - \alpha^{2n}s)(\alpha^n \xi - \mu)}} \psi(t) dt.$

В силу приведенных вычислений окончательный вид решения задачи D' в координатах $(\xi, \eta) \in \Delta$ будет иметь вид:

$$u(\xi, \eta) = \tau(\xi) + \psi\left(\frac{\eta}{\alpha}\right) + \frac{c(\eta - \xi)}{2} \int_0^{\xi} \frac{J_1\left(\sqrt{c(t - \xi)(t - \eta)}\right)}{\sqrt{(t - \xi)(t - \eta)}} \psi(t) dt +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} [P_n(\xi, \eta) - P_n(\eta, \xi) + Q_n(\xi, \eta) - Q_n(\eta, \xi)] \quad (8)$$

Теорема 2. Если функции $\tau(\xi) \in C^1\left[0, \frac{1}{\alpha}\right]$, $\alpha > 1$, $\psi(\xi) \in C^2[0, 1]$ и

$c > 0$, тогда существует единственное решение **Задачи D'** , которое определяется по формуле (8).

Построение функции Римана-Адамара и задачи Дарбу в явном виде в случае отхода от характеристики позволяет найти общую формулу обращения интегрального уравнения с заданным ядром. Для этого достаточно выписать два решения задачи Дарбу – одно с условием на характеристике, а второе с условием на заданной кривой, не совпадающей с характеристикой. Данная методика позволяет обобщить результаты теории дробно-линейного интегрирования.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Акимов А.А. О единственности решения задачи типа Неймана для уравнения Чаплыгина // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика (Электронный журнал) 2013. № 4. URL: <http://vestnik-mgou.ru/Articles/View/486>.
2. Акимов А.А. Построение функции Римана-Адамара задачи Дарбу для телеграфного уравнения // Сборник научных трудов Sworld. 2014. Т.29. №4. С.48–50.
3. Акимов А.А., Галиаскарова Г.Р. Об одном соотношении задачи Дарбу для уравнения Трикоми // Журнал научных публикаций аспирантов и докторантов. 2010. № 12 (54). С. 113–115.
4. Сабитов К.Б. Построение в явном виде решений задач Дарбу для телеграфного уравнения и их применение при обращении интегральных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1990. Т. 26. № 6. С. 1023–1032.
5. Wood D.H. Simple Riemann functions // Bull. Amer. Math. Soc. 1976. Vol. 82. No. 5. Pp. 737–739.

УДК 517.927.25

DOI: 10.18384/2310-7251-2015-4-36-43

Сучков М.В., Трифоненков В.П.*Научно-исследовательский ядерный университет (г. Москва)*

ОЦЕНКИ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ, ОТВЕЧАЮЩИХ ОБЫКНОВЕННОМУ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМУ ОПЕРАТОРУ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА, И ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРИ ПРОВЕРКЕ УСЛОВИЯ БАЗИСНОСТИ В.А. ИЛЬИНА В ПРОСТРАНСТВАХ L_p

Аннотация. В статье устанавливаются оценки собственных функций для обыкновенных дифференциальных операторов четвертого порядка на конечном интервале. С помощью затих оценок и теоремы В.А.Ильина о базисности показывается базисность минимальной и замкнутой в L_p нормированной в L_2 системы собственных функций, отвечающих произвольному самосопряженному расширению рассматриваемого оператора в пространствах L_p .

Ключевые слова: обыкновенный дифференциальный оператор четвертого порядка, оценка собственных функций, базисность в пространствах L_p .

M. Suchkov, V. Trifonenkov*National Research Nuclear University (Moscow)*

ESTIMATIONS OF EIGENFUNCTIONS OF ORDINARY FOURTH-ORDER DIFFERENTIAL OPERATOR AND THEIR USE WHEN CHECKING THE BASIS PROPERTY CONDITION BY V.A. IL'IN IN L_p SPACES

Abstract. The eigenfunctions of the fourth-order ordinary differential operator are estimated on a finite interval. These estimates and theorem of Il'in basis property are used to prove the basis property of a minimal and closed in L_p and normalized in L_2 system of eigenfunctions corresponding to the arbitrary self-adjoint expansion of the above-mentioned operator in L_p spaces.

Key words: fourth-order ordinary differential operator, estimation of eigenfunctions, basis property in L_p spaces.

Введение

В 1983 г. В.А. Ильиным было получено необходимое и достаточное условие базисности для собственных и присоединенных функций обыкновенного несамосопряженного дифференциального оператора порядка n на любом компакте K основного интервала G в пространствах L_p [1, с. 789–793]. Для несамосопряженного оператора даже для случая $n = 2$ хорошо известно, что это условие не обязано выполняться (например, задача А.А. Самарского – Н.И. Ионкина [3, с. 294–304]). Для неотрицательного самосопряженного расширения оператора второго порядка из работы В. А. Ильина и И. Йо [2, с. 1113–1115] следует, что это условие всегда выполнено. Целью настоящей работы является доказательство выполнения этого условия для самосопряженных расширений обыкновенного дифференциального оператора четвертого порядка.

Рассмотрим обыкновенный дифференциальный оператор L четвертого порядка с действительными коэффициентами на конечном интервале G :

$$Lu(x) = u^{(4)}(x) + p_1(x)u^{(3)}(x) + p_2(x)u^{(2)}(x) + p_3(x)u'(x) + p_4(x)u(x), \quad (1)$$

где $p_s(x) \in C^{(5-s)} \cap L_1(G)$; $s = \overline{1,4}$; $x \in G$.

Собственная функция $u(x)$ оператора (1) определяется следующим образом:

- 1) $u(x) \in C^{(4)}(G) \cap L_\infty(G)$
- 2) $u(x) \not\equiv 0$; $x \in G$
- 3) $\exists$ число λ | $Lu(x) = \lambda u(x)$.

Так как в дальнейшем при проверке условия базисности В.А. Ильина мы будем рассматривать только самосопряженные расширения оператора (1), то можем считать число λ вещественным. Обозначим $\mu = (|\lambda|)^{1/4}$ – арифметический корень. Обозначим через $y_i(x)$ $i = \overline{1,4}$ некоторую фундаментальную систему решений, отвечающих оператору $(L - \lambda)$. Тогда

любая собственная функция оператора (1) с собственным значением λ может быть представлена в виде:

$$u(x) = \sum_{i=1}^4 C_i y_i(x); x \in G, \quad (2)$$

(C_i – не зависят от x).

Справедлива следующая теорема:

Теорема. Существует фундаментальная система решений $\{y_i(x)\}_{i=1}^4$ такая, что для коэффициентов C_i в равенстве (2) справедливы оценки:

$$|C_i| \leq \frac{A_i}{\|y_i(x)\|_{L_2(G)}} \|u(x)\|_{L_2(G)}; i = \overline{1,4}; \mu = \sqrt[4]{|\lambda|} \geq \mu_0, \quad (3)$$

где μ_0 – достаточно большое положительное число. Константы A_i не зависят ни от x , ни от μ .

Доказательство.

Случай $\lambda > 0$ рассмотрен в работе [6, с. 85–90], поэтому ограничимся доказательством теоремы только при $\lambda < 0$. Из асимптотических формул Биркгофа [4, с. 88] следует существование такой фундаментальной системы решений $y_i(x)$ $i = \overline{1,4}$, отвечающих оператору $(L - \lambda)$, что:

$$y_i(x) = \overset{\circ}{y}_i(x) \left(1 + \underline{O}\left(\frac{1}{\mu}\right) \right) \quad (4)$$

равномерно для $x \in G$, где $\overset{\circ}{y}_i(x)$ $i = \overline{1,4}$ – фундаментальная система

решений оператора $u^{(4)} - \lambda u$. Выпишем явно функции $\overset{\circ}{y}_i(x)$. Обозначим

через $w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}}; w_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}}; w_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}};$

$w_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}}$ – все корни четвертой степени из (-1). Тогда $\overset{\circ}{y}_i(x) = e^{w_i \mu x}$

; $i = \overline{1,4}$ и любая собственная функция оператора $\overset{\circ}{L} u = u^{(4)}$ с собственным значением λ может быть представлена в виде:

$$u(x) = \sum_{i=1}^4 C_i y_i(x) = \sum_{i=1}^4 C_i e^{w_i \mu x}. \text{ Без ограничения общности будем}$$

считать, что $G = (0, 1)$. (Общий случай $G = (a, b)$ сводится к этому заменой переменной $x = a + (b - a)t$; $t \in (0, 1)$).

Явно найдем $\|u\|_{L_2(0,1)}^2$.

$$\begin{aligned} \|u\|_{L_2(0,1)}^2 &= \int_0^1 u \bar{u} dx = \int_0^1 \left(|C_1|^2 e^{\sqrt{2}\mu x} + 2 \operatorname{Re}(C_1 \bar{C}_2) + 2 \operatorname{Re}(C_1 \bar{C}_3 e^{i\sqrt{2}\mu x}) + \right. \\ &\quad \left. + 2 \operatorname{Re}(C_1 \bar{C}_4 e^{\sqrt{2}\mu x + i\sqrt{2}\mu x}) + |C_2|^2 e^{-\sqrt{2}\mu x} + 2 \operatorname{Re}(C_2 \bar{C}_3 e^{-\sqrt{2}\mu x + i\sqrt{2}\mu x}) + \right. \\ &\quad \left. + 2 \operatorname{Re}(C_2 \bar{C}_4 e^{i\sqrt{2}\mu x}) + 2 \operatorname{Re}(C_3 \bar{C}_4) + |C_3|^2 e^{-\sqrt{2}\mu x} + |C_4|^2 e^{\sqrt{2}\mu x} \right) dx = \\ &= |C_1|^2 \frac{1}{\sqrt{2}\mu} (e^{\sqrt{2}\mu} - 1) + 2 \operatorname{Re}(C_1 \bar{C}_2) + 2 \operatorname{Re}(C_1 \bar{C}_3 \frac{1}{i\sqrt{2}\mu} (e^{i\sqrt{2}\mu} - 1)) + \\ &\quad + 2 \operatorname{Re}(C_1 \bar{C}_4 \frac{1}{\sqrt{2}\mu(1+i)} (e^{\sqrt{2}\mu + i\sqrt{2}\mu} - 1)) + |C_2|^2 \frac{1}{\sqrt{2}\mu} (1 - e^{-\sqrt{2}\mu}) + \\ &\quad + 2 \operatorname{Re}(C_2 \bar{C}_3 \frac{1}{\sqrt{2}\mu(i-1)} (e^{-\sqrt{2}\mu + i\sqrt{2}\mu} - 1)) + 2 \operatorname{Re}(C_2 \bar{C}_4 \frac{1}{i\sqrt{2}\mu} (e^{i\sqrt{2}\mu} - 1)) + \\ &\quad + 2 \operatorname{Re}(C_3 \bar{C}_4) + |C_3|^2 \frac{1}{\sqrt{2}\mu} (1 - e^{-\sqrt{2}\mu}) + |C_4|^2 \frac{1}{\sqrt{2}\mu} (e^{\sqrt{2}\mu} - 1) \geq \\ &\geq |C_1|^2 \frac{1}{\sqrt{2}\mu} (e^{\sqrt{2}\mu} - 1) + |C_2|^2 \frac{1}{\sqrt{2}\mu} (1 - e^{-\sqrt{2}\mu}) + |C_3|^2 \frac{1}{\sqrt{2}\mu} (1 - e^{-\sqrt{2}\mu}) + \\ &\quad + |C_4|^2 \frac{1}{\sqrt{2}\mu} (e^{\sqrt{2}\mu} - 1) - 2 |\operatorname{Re}(C_1 \bar{C}_2)| - 2 \left| \operatorname{Re}(C_1 \bar{C}_3 \frac{1}{i\sqrt{2}\mu} (e^{i\sqrt{2}\mu} - 1)) \right| - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2 \left| \operatorname{Re}(C_1 \bar{C}_4 \frac{1}{2\mu} (e^{\sqrt{2}\mu + i\sqrt{2}\mu} - 1)) \right| - 2 \left| \operatorname{Re}(C_2 \bar{C}_3 \frac{1}{2\mu} (e^{-\sqrt{2}\mu + i\sqrt{2}\mu} - 1)) \right| - \\
& - 2 \left| \operatorname{Re}(C_2 \bar{C}_4 \frac{1}{\sqrt{2}\mu} (e^{i\sqrt{2}\mu} - 1)) \right| - 2 \left| \operatorname{Re}(C_3 \bar{C}_4) \right|. \quad (5)
\end{aligned}$$

Далее воспользуемся неравенством: $|\operatorname{Re}(z_1 \cdot z_2)| \leq |z_1| \cdot |z_2|$ для комплексных чисел z_1 и z_2 . Тогда:

$$\begin{aligned}
2 \left| \operatorname{Re}(C_1 \bar{C}_2) \right| & \leq 2 |C_1| |C_2| = 2 |C_1| \mu \frac{|C_2|}{\mu} \leq \mu^2 |C_1|^2 + \frac{1}{\mu^2} |C_2|^2, \\
2 \left| \operatorname{Re}(C_1 \bar{C}_3 \frac{1}{i\sqrt{2}\mu} (e^{i\sqrt{2}\mu} - 1)) \right| & \leq A(|C_1|^2 + \frac{1}{\mu^2} |C_3|^2),
\end{aligned}$$

где константа $A > 0$ – не зависит от μ ,

$$\begin{aligned}
2 \left| \operatorname{Re}(C_1 \bar{C}_4 \frac{1}{2\mu} (e^{\sqrt{2}\mu + i\sqrt{2}\mu} - 1)) \right| & \leq \frac{e^{\sqrt{2}\mu}}{\mu} \left(1 + o\left(\frac{1}{\mu}\right) \right) \frac{1}{2} (|C_1|^2 + |C_4|^2), \\
2 \left| \operatorname{Re}(C_2 \bar{C}_3 \frac{1}{2\mu} (e^{-\sqrt{2}\mu + i\sqrt{2}\mu} - 1)) \right| & \leq \frac{1}{\mu} \left(1 + o\left(\frac{1}{\mu}\right) \right) \frac{1}{2} (|C_2|^2 + |C_3|^2), \\
2 \left| \operatorname{Re}(C_2 \bar{C}_4 \frac{1}{\sqrt{2}\mu} (e^{i\sqrt{2}\mu} - 1)) \right| & \leq B(|C_4|^2 + \frac{1}{\mu^2} |C_2|^2),
\end{aligned}$$

где константа $B > 0$ не зависит от μ ,

$$2 \left| \operatorname{Re}(C_3 \bar{C}_4) \right| \leq \frac{1}{\mu^2} |C_3|^2 + \mu^2 |C_4|^2. \quad (6)$$

Подставляя оценки (6) в (5) и учитывая, что

$$\begin{aligned}
\left\| \overset{\circ}{y}_1(x) \right\|_{L_2(0,1)}^2 & = \left\| \overset{\circ}{y}_4(x) \right\|_{L_2(0,1)}^2 = \frac{1}{\sqrt{2}\mu} (e^{\sqrt{2}\mu} - 1), \\
\left\| \overset{\circ}{y}_2(x) \right\|_{L_2(0,1)}^2 & = \left\| \overset{\circ}{y}_3(x) \right\|_{L_2(0,1)}^2 = \frac{1}{\sqrt{2}\mu} (1 - e^{-\sqrt{2}\mu}),
\end{aligned}$$

получаем оценки (3) для оператора $(\overset{\circ}{L} - \lambda)$. Для общего оператора $(L - \lambda)$, повторяя те же рассуждения и учитывая асимптотический вид функций $y_i(x)$ (4), получим оценки (3) в общем случае.

Похожие оценки, но другими методами, получены в работе И.С. Ломова, М.В. Сучкова [5, с. 16–21]. Обратимся теперь к условию базисности В.А. Ильина [1, с. 789–793]. Пусть $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – замкнутая в $L_p(G)$ и минимальная система нормированных в $L_2(G)$ собственных функций самосопряженного расширения оператора (1). Тогда, если выполнены условия на спектр этого оператора:

$$\begin{aligned} |\operatorname{Im}(\lambda_n)^{1/4}| &\leq C_1, \quad C_1 > 0, \\ \sum_{t \leq |\operatorname{Re}(\lambda_n)^{1/4}| \leq t+1} 1 &\leq C_2; \quad C_2 > 0; \quad \forall t \geq 0, \end{aligned} \quad (7)$$

то система $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ образует базис в $L_p(K)$, где K – любой компакт интервала G , тогда и только тогда, когда существует постоянная $C(K)$, такая, что выполнено неравенство:

$$\|u_n(x)\|_{L_p(K)} \|u_n(x)\|_{L_q(G)} \leq C(K), \quad (8)$$

где при $1 < p; \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, при $p = 1; q = \infty$.

Хорошо известно, что для самосопряженного расширения дифференциального оператора второго порядка неравенство (8) выполняется всегда. Вернемся к оператору четвертого порядка. Пусть сначала $\lambda < 0$. Оценим $\|u_n\|_{L_p(G)}$. Используем теорему, неравенство Минковского и оценки для функций $y_i(x)$. Получим:

$$\|u_n(x)\|_{L_p(G)} \leq C \mu_n^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}}; \quad p \geq 1$$

(здесь и далее считаем, что $\|u_n(x)\|_{L_2(G)} = 1$). Поэтому неравенство (8):

$$\|u_n(x)\|_{L_p(K)} \|u_n(x)\|_{L_q(G)} \leq \|u_n(x)\|_{L_p(G)} \|u_n(x)\|_{L_q(G)} \leq C_1 \mu_n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \mu_n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}} = C_1$$

выполняется всегда. Пусть теперь $\lambda > 0$. Тогда, как следует из работы [6, с. 85–90], фундаментальная система решений для оператора (1) будет иметь вид:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= e^{i\mu x} \left(1 + \underline{O}\left(\frac{1}{\mu}\right) \right); \quad y_2(x) = e^{-i\mu x} \left(1 + \underline{O}\left(\frac{1}{\mu}\right) \right); \\ y_3(x) &= e^{-\mu x} \left(1 + \underline{O}\left(\frac{1}{\mu}\right) \right); \quad y_4(x) = e^{\mu x} \left(1 + \underline{O}\left(\frac{1}{\mu}\right) \right). \end{aligned}$$

Опять применяя теорему, неравенство Минковского и учитывая оценки норм этих функций в пространствах L_p , получим:

$$\|u_n(x)\|_{L_p(K)} \leq C_0 (1 + \mu_n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} e^{-\varepsilon \mu_n}); \quad C_0 > 0, \quad \varepsilon > 0$$

(зависит от компакта F),

$$\|u_n(x)\|_{L_q(G)} \leq C_1 (1 + \mu_n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}).$$

Следовательно, $\|u_n(x)\|_{L_p(K)} \|u_n(x)\|_{L_q(G)} \leq C_2 \quad p \geq 2 \quad (q \leq 2)$.

Поэтому, при $p \geq 2$ и при $\lambda < 0$, и при $\lambda > 0$ неравенство (8) будет выполнено и, следовательно, система $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ будет образовывать базис на компакте K в $L_p(K)$ при $p \geq 2$.

Заключение. Полученный результат можно распространить на самосопряженные расширения обыкновенных дифференциальных операторов порядка $2n$. Остался невыясненным вопрос, что будет, когда $1 \leq p < 2$. Повидимому, можно построить пример, показывающий, что в этом случае рассматриваемое условие может и не выполняться, но это пока не сделано.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Ильин В.А. Необходимые и достаточные условия базисности в L_p и равносходимости с тригонометрическим рядом спектральных разложений по системам экспонент // ДАН СССР. 1983. Т. 273. С. 789–793.
2. Ильин В.А., Йо И. Равномерная оценка собственных функций и оценка сверху числа собственных значений оператора Штурма-Лиувилля // ДАН СССР. 1978. Т. 243. № 5. С. 1113–1115.
3. Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Диф. ур. 1977. Т.13. № 2. С. 294–304.
4. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 525 с.
5. Ломов И.С., Сучков М.В. О справедливости необходимого и достаточного условия базисности Ильина для обыкновенных самосопряженных дифференциальных операторов // Использование спектральной теории при решении задач математической физики. М.: МЭИ, 1984. С. 16–21.
6. Сучков М.В. О базисности системы собственных функций, отвечающих обыкновенному дифференциальному оператору четвертого порядка // Теоретико-функциональные методы в задачах математической физики. М.: Энергоатомиздат, 1986. С. 85–90.

РАЗДЕЛ II. ФИЗИКА

УДК 533.9.02

DOI: 10.18384/2310-7251-2015-4-44-62

Латышев А. В., Юшканов А. А.

Московский государственный областной университет

НЕЛИНЕЙНЫЙ ПРОДОЛЬНЫЙ ТОК В КЛАССИЧЕСКОЙ И КВАНТОВОЙ ПЛАЗМЕ, ГЕНЕРИРУЕМЫЙ ДВУМЯ ПОПЕРЕЧНЫМИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМИ ВОЛНАМИ

Аннотация. Рассматриваются бесстолкновительные классическая и квантовая плазма с произвольной степенью вырождения электронного газа. В плазме распространяются две коллинеарные электромагнитные волны. Требуется найти отклик плазмы на эти волны. Сначала рассматривается случай классической плазмы. Из уравнения Власова получена функция распределения в квадратичном приближении по малым параметрам задачи. Выведена формула для вычисления электрического тока. Затем из кинетического уравнения Вигнера для квантовой плазмы получена функция распределения также в квадратичном приближении. Выведена формула для вычисления электрического тока при произвольной температуре. Показано, что учет нелинейности приводит к появлению продольного электрического тока, направленного вдоль направления распространения волн. Рассмотрен случай малых значений волновых чисел. Этот продольный ток ортогонален известному поперечному току, получаемому при линейном анализе. Показано, что в случае малых значений волновых чисел продольный ток в квантовой плазме совпадает с продольным током в классической плазме.

Ключевые слова: уравнение Власова, уравнение Вигнера, классическая плазма, квантовая плазма, поперечный и продольный электрический ток, внешние электромагнитные поля.

A. Latyshev, A. Yushkanov
Moscow State Regional University

NON-LINEAR LONGITUDINAL CURRENT IN CLASSICAL AND QUANTUM PLASMAS, GENERATING BY TWO TRANSVERSAL ELECTROMAGNETIC WAVES

Abstract. Collisionless classical and quantum plasmas with an arbitrary degree of degeneration of the electronic gas are considered. In plasma two external collinear electromagnetic waves propagate. It is required to find the response of plasma to these waves. First, the case of classical plasma is considered. The distribution function in the quadratic approximation in the small parameters of the problem is obtained from the Vlasov equation. The formula for calculating the electric current is derived. Then, from the kinetic Wigner equation for quantum plasma we have also obtained the distribution function in the quadratic approximation. The formula for calculating the electric current at an arbitrary temperature is deduced. It is shown that the allowance for the nonlinearity leads to appearance of the longitudinal electric current along the wave propagation direction. This longitudinal current is orthogonal to the known transverse current obtained in the case of the linear analysis. The case of small values of the wave number is considered. It is shown that in the case of small values of the wave numbers, the longitudinal current in quantum plasma coincides with that in classical plasma.

Keywords: Vlasov equation, Wigner equation, classical plasma, quantum plasma, transversal and longitudinal electric current, external electromagnetic waves.

Введение

В настоящей работе с помощью нелинейного анализа выводятся формулы для вычисления электрического тока сначала в классической, а затем и в квантовой бесстолкновительной плазме Ферми-Дирака. При решении кинетических уравнений Власова и Вигнера, описывающих поведение плазмы, мы учитываем, как в разложении функции распределения, так и в разложении силы Лоренца и интеграла Вигнера величины, пропорциональные квадратам векторных потенциалов, составляющих внешнего электрического поля и произведению этих потенциалов.

При таком нелинейном подходе оказывается, что электрический ток имеет две ненулевые компоненты. Одна компонента электрического тока направлена вдоль векторных потенциалов составляющих электромагнитного поля. Эта компонента электрического тока точно такая же, как и в линейном анализе. Это «поперечный» ток. Таким образом, в линейном приближении мы получаем известное выражение поперечного электрического тока.

Вторая ненулевая компонента электрического тока имеет второй порядок малости относительно величин напряженностей составляющих электрического поля. Вторая компонента электрического тока направлена вдоль волнового вектора. Этот ток ортогонален первой компоненте. Это «продольный» ток. Появление продольного тока выявляется проведенным нелинейным анализом взаимодействия электромагнитных полей с плазмой.

Нелинейные эффекты в плазме изучаются уже длительное время [1–10]. В работе Л. Коврижных, В. Цытовича [2] нелинейный ток использовался, в частности, в вопросах вероятности распадных процессов. Отметим, что в этой работе указывается на существование нелинейного тока вдоль волнового вектора (см. формулу (2.9) [2]). В экспериментальной работе [3] выяснен вклад нормальной компоненты поля в нелинейный поверхностный ток в сигнале второй гармоники. В работах [4;5] изучалась генерация нелинейного поверхностного тока при взаимодействии лазерного импульса с металлом.

Квантовая плазма изучалась в работах [10–21]. Столкновительная квантовая плазма начала изучаться в работе Мермина [15]. Затем квантовая столкновительная плазма изучалась в наших работах [16–19]. Нами изучалась квантовая столкновительная плазма с переменной частотой столкновений. В работах [20] и [21] было исследовано генерирование продольного тока поперечным электромагнитным полем в классической и квантовой плазме Ферми-Дирака [20] и в вырожденной плазме [21].

В настоящей работе выводятся формулы для вычисления электрического тока в квантовой бесстолкновительной плазме при произвольной температуре, то есть при произвольной степени вырождения электронного газа.

1. Уравнение Власова

Будем считать, что в плазме распространяются две электромагнитные волны с напряженностями $\mathbf{E}_j = \mathbf{E}_{0j} e^{i(\mathbf{k}_j \mathbf{r} - \omega_j t)}$, $\mathbf{H}_j = \mathbf{H}_{0j} e^{i(\mathbf{k}_j \mathbf{r} - \omega_j t)}$, $j = 1, 2$.

Предположим, что направления распространения волн коллинеарны, то есть $\mathbf{k}_1 \parallel \mathbf{k}_2$. Кроме того, будет рассмотрен случай, когда направления электрических (и магнитных) полей волн тоже коллинеарны $\mathbf{E}_1 \parallel \mathbf{E}_2$ ($\mathbf{H}_1 \parallel \mathbf{H}_2$). Электрические и магнитные напряженности связаны между собой через соответствующие векторные потенциалы:

$$\mathbf{E}_j = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}_j}{\partial t} = \frac{i\omega_j}{c} \mathbf{A}_j, \quad \mathbf{H}_j = \text{rot } \mathbf{A}_j, \quad j = 1, 2.$$

Возьмем уравнение Власова, описывающее поведение бесстолкновительной плазмы:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + e \left(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2] \right) \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0. \quad (1.1)$$

В уравнении (1.1) f – функция распределения электронов плазмы, $\mathbf{E}_j, \mathbf{H}_j$ ($j = 1, 2$) – компоненты электромагнитного поля, c – скорость света, $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ – импульс электронов, $\mathbf{v}$ – скорость электронов, функция распределения электронов Ферми-Дирака, $f^{(0)} = f_{eq}(\mathbf{r}, v)$ ($eq \equiv \text{equilibrium}$) – локально равновесное распределение Ферми-Дирака,

$$f_{eq}(\mathbf{r}, v) = \left[1 + \exp \left(\frac{\mathcal{E} - \mu(\mathbf{r})}{k_B T} \right) \right]^{-1} = [1 + \exp(P^2 - \alpha(\mathbf{r}))]^{-1} = f_{eq}(\mathbf{r}, P),$$

$\mathcal{E} = mv^2/2$ – энергия электронов, μ – химический потенциал электронного газа, k_B – постоянная Больцмана, T – температура плазмы, $\mathbf{P} = \mathbf{p}/p_T$ – безразмерный импульс электронов, $p_T = mv_T$, v_T – тепловая скорость электронов, $v_T = \sqrt{2k_B T/m}$, $\alpha = \mu/(k_B T)$ – безразмерный химический потенциал, $k_B T = \mathcal{E}_T = mv_T^2/2$ – тепловая кинетическая энергия электронов.

Ниже нам понадобится абсолютное распределение Ферми-Дирака:

$$f_0(v) = \left[1 + \exp \left(\frac{\mathcal{E} - \mu}{k_B T} \right) \right]^{-1} = [1 + \exp(P^2 - \alpha)]^{-1} = f_0(P).$$

Будем считать, что векторный потенциал $\mathbf{A}_j(\mathbf{r}, t)$ составляющей электромагнитного поля ортогонален соответствующему волновому вектору $\mathbf{k}_j$, т.е. $\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{A}_j(\mathbf{r}, t) = 0, j = 1, 2$. Это значит, что волновой вектор $\mathbf{k}_j$ ортогонален соответствующей составляющей электрического и магнитного поля: $\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{E}_j(\mathbf{r}, t) = 0, \mathbf{k}_j \cdot \mathbf{H}_j(\mathbf{r}, t) = 0, j = 1, 2$. Для определенности будем считать, что волновые векторы обеих электромагнитных волн направлены вдоль оси x , а составляющие электромагнитного поля направлены вдоль оси y , т.е. $\mathbf{k}_j = k_j(1, 0, 0)$, $\mathbf{E}_j = E_j(x, t)(0, 1, 0)$. Следовательно,

$$\mathbf{E}_j = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}_j}{\partial t} = \frac{i\omega_j}{c} \mathbf{A}_j, \mathbf{H}_j = \frac{ck_j}{\omega_j} E_j \cdot (0,0,1), [\mathbf{v}, \mathbf{H}_j] = \frac{ck_j}{\omega_j} E_j \cdot (v_y, -v_x, 0),$$

$$E_j = E_j(x, t) = E_{0j} e^{i(k_j x - \omega_j t)} \quad (j = 1, 2),$$

$$e \left(\mathbf{E}_j + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{H}_j] \right) \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = \frac{e}{\omega_j} E_j \left[k_j v_y \frac{\partial f}{\partial p_x} + (\omega_j - k_j v_x) \frac{\partial f}{\partial p_y} \right],$$

а также:

$$[\mathbf{v}, \mathbf{H}_j] \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} = 0, \quad \text{так как} \quad \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} \sim \mathbf{v}.$$

Уравнение (1.1) может быть переписано в виде:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_x \frac{\partial f}{\partial x} + e \sum_{j=1}^2 \frac{E_j}{\omega_j} \left[k_j v_y \frac{\partial f}{\partial p_x} + (\omega_j - k_j v_x) \frac{\partial f}{\partial p_y} \right] = 0. \quad (1.2)$$

Будем искать решение уравнения (1.2) в виде:

$$f = f_0(P) + f_1 + f_2, \quad (1.3)$$

где

$$f_1 = E_1 \varphi_1 + E_2 \varphi_2, \quad (1.4)$$

$$f_2 = E_1^2 \psi_1 + E_2^2 \psi_2 + E_1 E_2 \psi_0. \quad (1.5)$$

2. Первое приближение

В задаче имеется четыре параметра размерности длины $\lambda_j = v_T / \omega_j$ и $l_j = 1/k_j$. Будем полагать, что как на длинах λ_j , так и на длинах l_j изменение энергии электрона под действием соответствующего электрического поля много меньше тепловой энергии электронов $k_B T$, т.е. будем считать малыми параметры $\alpha_j = |eE_j| v_T / (k_B T \omega)$ и $\beta_j = |eE_j| / (k_B T k)$. Будем действовать методом последовательных приближений, считая, что $\alpha_j \ll 1$, $\beta_j \ll 1$. Тогда уравнение (1.2) с помощью (1.3) эквивалентно следующим уравнениям:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + v_x \frac{\partial f_1}{\partial x} = -e \sum_{j=1}^2 \frac{E_j}{\omega_j} \left[k_j v_y \frac{\partial f_0}{\partial p_x} + (\omega_j - k_j v_x) \frac{\partial f_0}{\partial p_y} \right] \quad (2.1)$$

и

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} + v_x \frac{\partial f_2}{\partial x} = -e \sum_{j=1}^2 \frac{E_j}{\omega_j} \left[k_j v_y \frac{\partial f_1}{\partial p_x} + (\omega_j - k_j v_x) \frac{\partial f_1}{\partial p_y} \right]. \quad (2.2)$$

Из уравнения (2.1) получаем:

$$[E_1(-i\omega_1 + ik_1 v_x) \varphi_1 + E_2(-i\omega_2 + ik_2 v_x) \varphi_2] =$$

$$= -e \sum_{j=1}^2 \frac{E_j}{\omega_j} \left[k_j v_y \frac{\partial f_0}{\partial p_x} + (\omega_j - k_j v_x) \frac{\partial f_0}{\partial p_y} \right].$$

Введем безразмерные параметры $\Omega_j = \omega_j / k_T v_T$, $q_j = k_j / k_T$. Здесь q_j – безразмерное волновое число, $k_T = m v_T / \hbar$ – тепловое волновое число, Ω_j – безразмерная частота колебаний составляющей электромагнитного поля E_j .

В уравнении (2.3) перейдем к безразмерным параметрам. В результате получим уравнение:

$$i[E_1(q_1 P_x - \Omega_1)\varphi_1 + E_2(q_2 P_x - \Omega_2)\varphi_2] = -\frac{e}{k_T p_T v_T} \sum_{j=1}^2 \frac{E_j}{\Omega_j} \left[q_j P_y \frac{\partial f_0}{\partial P_x} + (\Omega_j - q_j P_x) \frac{\partial f_0}{\partial P_y} \right].$$

Заметим, что $\frac{\partial f_0}{\partial P_x} \sim P_x$, $\frac{\partial f_0}{\partial P_y} \sim P_y$. Следовательно,

$$\left[q_j P_y \frac{\partial f_0}{\partial P_x} + (\Omega_j - q_j P_x) \frac{\partial f_0}{\partial P_y} \right] = \Omega_j \frac{\partial f_0}{\partial P_y},$$

и уравнение (2.4) упрощается:

$$i[E_1(q_1 P_x - \Omega_1)\varphi_1 + E_2(q_2 P_x - \Omega_2)\varphi_2] = -\frac{e}{k_T p_T v_T} (E_1 + E_2) \frac{\partial f_0}{\partial P_y}. \quad (2.5)$$

Из уравнения (2.5) находим, что

$$\varphi_j = \frac{ie}{k_T p_T v_T} \cdot \frac{\partial f_0 / \partial P_y}{q_j P_x - \Omega_j}, \quad j = 1, 2. \quad (2.6)$$

Теперь из уравнения (2.6) находим, что

$$f_1 = \frac{ie}{k_T p_T v_T} \cdot \left[\frac{E_1}{q_1 P_x - \Omega_1} + \frac{E_2}{q_2 P_x - \Omega_2} \right]. \quad (2.7)$$

3. Второе приближение

Перейдем ко второму приближению. В левую часть уравнения (2.2) подставим (1.5). Получим уравнение:

$$\begin{aligned} & E_1^2(-2i\omega_1 + 2ik_1 v_x)\psi_1 + E_2^2(-2i\omega_2 + 2ik_2 v_x)\psi_1 \\ & + E_1 E_2(-i(\omega_1 + \omega_2) + i(k_1 + k_2)v_x)\psi_0 = \\ & = -\frac{eE_1}{\omega_1} \left[k_1 v_y \frac{\partial f_1}{\partial p_x} + (\omega_1 - k_1 v_x) \frac{\partial f_1}{\partial p_y} \right] - \frac{eE_2}{\omega_2} \left[k_2 v_y \frac{\partial f_1}{\partial p_x} + (\omega_2 - k_2 v_x) \frac{\partial f_1}{\partial p_y} \right]. \end{aligned}$$

Перейдем в этом уравнении к безразмерным параметрам и введем обозначения $q = (q_1 + q_2)/2$, $\Omega = (\Omega_1 + \Omega_2)/2$. Получим уравнение:

$$\begin{aligned} & E_1^2(q_1 P_x - \Omega_1)\psi_0 + E_2^2(q_2 - \Omega_2)\psi_2 + E_1 E_2(q P_x - \Omega)\psi_0 = \\ & = -\frac{e^2}{2k_T^2 p_T^2 v_T^2} \left\{ \frac{E_1^2}{\Omega_1} \left[q_1 P_y \frac{\partial}{\partial P_x} \left(\frac{\partial f_0 / \partial P_y}{q_1 P_x - \Omega_1} \right) - \frac{\partial^2 f_0}{\partial P_y^2} \right] \right. \\ & \quad + \frac{E_2^2}{\Omega_2} \left[q_2 P_y \frac{\partial}{\partial P_x} \left(\frac{\partial f_0 / \partial P_y}{q_2 P_x - \Omega_2} \right) - \frac{\partial^2 f_0}{\partial P_y^2} \right] \\ & \quad + \frac{E_1 E_2}{\Omega_1} \left[q_1 P_y \frac{\partial}{\partial P_x} \left(\frac{\partial f_0 / \partial P_y}{q_2 P_x - \Omega_2} \right) + \frac{\Omega_1 - q_1 P_x}{q_2 P_x - \Omega_2} \frac{\partial^2 f_0}{\partial P_y^2} \right] \\ & \quad \left. + \frac{E_1 E_2}{\Omega_2} \left[q_2 P_y \frac{\partial}{\partial P_x} \left(\frac{\partial f_0 / \partial P_y}{q_1 P_x - \Omega_1} \right) + \frac{\Omega_2 - q_2 P_x}{q_1 P_x - \Omega_1} \frac{\partial^2 f_0}{\partial P_y^2} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Из этого уравнения находим:

$$\psi_1 = -\frac{e^2}{2k_T^2 p_T^2 v_T^2 \Omega_1} \cdot \frac{\Xi_1(\mathbf{P})}{q_1 P_x - \Omega_1}, \quad (3.1)$$

$$\psi_2 = -\frac{e^2}{2k_T^2 p_T^2 v_T^2 \Omega_2} \cdot \frac{\Xi_2(\mathbf{P})}{q_2 P_x - \Omega_2}, \quad (3.2)$$

$$\psi_0 = -\frac{e^2}{2k_T^2 p_T^2 v_T^2} \cdot \left[\frac{1}{\Omega_1} \cdot \frac{\Xi_{12}(\mathbf{P})}{q P_x - \Omega} + \frac{1}{\Omega_2} \cdot \frac{\Xi_{21}(\mathbf{P})}{q P_x - \Omega} \right], \quad (3.3)$$

где

$$\begin{aligned} \Xi_j(\mathbf{P}) &= q_j P_y \frac{\partial}{\partial P_x} \left(\frac{\partial f_0 / \partial P_y}{q_j P_x - \Omega_j} \right) - \frac{\partial^2 f_0}{\partial P_y^2}, \\ \Xi_{12}(\mathbf{P}) &= q_1 P_y \frac{\partial}{\partial P_x} \left(\frac{\partial f_0 / \partial P_y}{q_2 P_x - \Omega_2} \right) + \frac{\Omega_1 - q_1 P_x}{q_2 P_x - \Omega_2} \frac{\partial^2 f_0}{\partial P_y^2}, \\ \Xi_{21}(\mathbf{P}) &= q_2 P_y \frac{\partial}{\partial P_x} \left(\frac{\partial f_0 / \partial P_y}{q_1 P_x - \Omega_1} \right) + \frac{\Omega_2 - q_2 P_x}{q_1 P_x - \Omega_1} \frac{\partial^2 f_0}{\partial P_y^2}. \end{aligned}$$

Функция распределения во втором приближении по полю построена и определяется равенством (1.3), в котором функция f_1 определяется равенством (1.4), а функция f_2 определяется равенствами (1.5) и (3.1) – (3.3).

4. Плотность поперечного электрического тока

Найдем плотность электрического тока

$$\mathbf{j} = e \int \mathbf{v} f \frac{2d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{2p_T^3 v_T}{(2\pi\hbar)^3} \int f \mathbf{P} d^3 P. \quad (4.1)$$

Из равенств (1.3) – (1.5) и (4.1) видно, что вектор плотности тока имеет две ненулевые компоненты $\mathbf{j} = (j_x, j_y, 0)$. Здесь j_y – плотность поперечного тока, j_x – плотность продольного тока,

$$j_y = e \int v_y f \frac{2d^3p}{(2\pi\hbar)^3} = e \int v_y f_1 \frac{2d^3p}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{2p_T^3 v_T}{(2\pi\hbar)^3} \int f_1 P_y d^3P,$$

$$j_x = e \int v_x f \frac{2d^3p}{(2\pi\hbar)^3} = e \int v_x f_2 \frac{2d^3p}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{2p_T^3 v_T}{(2\pi\hbar)^3} \int f_2 P_x d^3P.$$

В явном виде поперечный ток равен:

$$j_y = \frac{2ie^2 p_T^3}{(2\pi\hbar)^2 k_T p_T} \int \left(\frac{E_1}{q_1 P_x - \Omega_1} + \frac{E_2}{q_2 P_x - \Omega_2} \right) \frac{\partial f_0}{\partial P_y} P_y d^3P.$$

Этот ток направлен вдоль электромагнитного поля, его плотность определяется только первым приближением функции распределения. Второе приближение функции распределения вклада в плотность поперечного тока не вносит. Упростим последнюю формулу. Тогда получаем, что:

$$j_x = -\frac{2\pi i e^2 p_T^2}{(2\pi\hbar)^3 k_T} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{E_1}{q_1 P_x - \Omega_1} + \frac{E_2}{q_2 P_x - \Omega_2} \right) \ln(1 + e^{\alpha - P_x^2}) dP_x. \quad (4.2)$$

5. Плотность продольного электрического тока

Перейдем к исследованию продольного тока. С помощью разложения (1.5) представим продольный ток в виде трех слагаемых: $j_x = j_1 + j_2 + j_3$. Здесь

$$j_j = E_j^2 \frac{2ep_T v_T}{(2\pi\hbar)^3} \int P_x \psi_j d^3P, \quad j_2 = E_2^2 \frac{2ep_T v_T}{(2\pi\hbar)^3} \int P_x \psi_2 d^3P.$$

Представим составляющие продольного тока равенствами в явном виде:

$$j_j = -\frac{e^3 p_T E_j^2}{(2\pi\hbar)^3 k_T^2 v_T \Omega_j} \int \frac{\Xi_j(\mathbf{P}) P_x d^3P}{q_j P_x - \Omega_j},$$

$$j_0 = -\frac{e^3 p_T E_1 E_2}{(2\pi\hbar)^3 k_T^2 v_T} \int \left[\frac{1}{\Omega_1} \frac{\Xi_{12}(\mathbf{P})}{q P_x - \Omega} + \frac{1}{\Omega_2} \frac{\Xi_{21}(\mathbf{P})}{q P_x - \Omega} \right] P_x d^3P.$$

Заметим, что в этих выражениях одномерный внутренний интеграл по P_y равен нулю, а внутренние интегралы по P_x вычисляются по частям. Следовательно, предыдущие равенства для составляющих продольного тока упрощаются. Затем внутренний интеграл по переменной P_y проинтегрируем снова по частям. После этого внутренние интегралы в плоскости (P_y, P_z) вычислим в полярных координатах. В результате предыдущие равенства сводятся к одномерному интегралу:

$$j_j = \frac{\pi e^3 E_j^2 p_T q_j}{(2\pi\hbar)^3 k_T^2 v_T} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(1 + e^{\alpha - P_x^2}) dP_x}{(q_j P_x - \Omega_j)^3},$$

$$j_0 = j_{12} + j_{21},$$

$$j_{12} = \frac{\pi e^3 E_1 E_2 p_T q_1 \Omega}{(2\pi\hbar)^3 k_T^2 v_T \Omega_1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(1 + e^{\alpha - P_x^2}) dP_x}{(q_2 P_x - \Omega_2)(q_1 P_x - \Omega)^2},$$

$$j_{21} = \frac{\pi e^3 E_1 E_2 p_T q_2 \Omega}{(2\pi\hbar)^3 k_T^2 v_T \Omega_2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(1 + e^{\alpha - P_x^2}) dP_x}{(q_1 P_x - \Omega_1)(q_2 P_x - \Omega)^2}.$$

Найдем числовую плотность (концентрацию) частиц плазмы, отвечающую распределению Ферми-Дирака

$$N = \int f_0(P) \frac{2d^3p}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{8\pi p_T^3}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{\infty} \frac{e^{\alpha - P^2} P^2 dP}{1 + e^{\alpha - P^2}} = \frac{k_T^3}{2\pi^2} l_0(\alpha),$$

где $l_0(\alpha) = \int_0^{\infty} \ln(1 + e^{\alpha - \tau^2}) d\tau$.

В выражении перед интегралами выделим плазменную (ленгмюровскую) частоту $\omega_p = \sqrt{4\pi e^2 N/m}$ и числовую плотность (концентрацию) N , причем последнюю выразим через тепловое волновое число. Получим:

$$\frac{\pi p_T e^3 q_j}{(2\pi\hbar)^3 k_T^2 v_T} = \frac{e\Omega_p^2}{p_T k_T} \cdot \frac{k_j}{16\pi l_0(\alpha)} = \sigma_{l,tr} \cdot \frac{k_j}{16\pi l_0(\alpha)}.$$

Здесь $\Omega_p = \omega_p/k_T v_T = \hbar\omega_p/mv_T^2$ – безразмерная плазменная частота, $\sigma_{l,tr}$ – продольно-поперечная проводимость, $\sigma_{l,tr} = e\Omega_p^2/p_T k_T$. Теперь составляющие продольного тока записываются в виде:

$$j_j = E_j^2 \sigma_{l,tr} k_j J_j, \quad j_0 = E_1 E_2 \sigma_{l,tr} (k_1 J_{12} + k_2 J_{21}), \quad (5.1)$$

где

$$J_j = \frac{1}{16\pi l_0(\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(1 + e^{\alpha - P_x^2}) dP_x}{(q_j P_x - \Omega_j)^3},$$

$$J_{12} = \frac{\Omega}{16\pi l_0(\alpha) \Omega_1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(1 + e^{\alpha - P_x^2}) dP_x}{(q_2 P_x - \Omega_2)(q_1 P_x - \Omega)^2},$$

$$J_{21} = \frac{\Omega}{16\pi l_0(\alpha) \Omega_2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(1 + e^{\alpha - P_x^2}) dP_x}{(q_1 P_x - \Omega_1)(q_2 P_x - \Omega)^2}.$$

В равенствах (5.1) величины J_1, J_2, J_{12}, J_{21} – безразмерные части плотности продольного тока.

Таким образом, продольная часть тока окончательно равна:

$$j_x = \sigma_{l, tr} [E_1^2 k_1 J_1 + E_2^2 k_2 J_2 + E_1 E_2 (k_1 J_{12} + k_2 J_{21})]. \quad (5.2)$$

Если ввести поперечные поля $\mathbf{E}_j^{\text{tr}} = \mathbf{E}_j - \mathbf{k}_j(\mathbf{E}_j \mathbf{k}_j)/k_j^2$, то равенство (5.2) можно записать в инвариантной форме:

$$j_{\text{long}} = \sigma_{l, tr} [(\mathbf{E}_1^{\text{tr}})^2 \mathbf{k}_1 J_1 + (\mathbf{E}_2^{\text{tr}})^2 \mathbf{k}_2 J_2 + \mathbf{E}_1^{\text{tr}} \mathbf{E}_2^{\text{tr}} (\mathbf{k}_1 J_{12} + \mathbf{k}_2 J_{21})].$$

Перейдем к рассмотрению случая малых значений волнового числа. Из (5.2) вытекает, что при малых значениях волновых чисел для плотности продольного тока получаем:

$$j_x = -\frac{\sigma_{l, tr}}{8\pi} \left[E_1^2 \frac{k_1}{\Omega_1^3} + E_2^2 \frac{k_2}{\Omega_2^3} + 2E_1 E_2 \frac{k_1 + k_2}{\Omega_1 \Omega_2 (\Omega_1 + \Omega_2)} \right]. \quad (5.3)$$

Замечание 1. При вычислении интегралов, входящих в безразмерные части плотности продольного тока, следует воспользоваться известным правилом Ландау. Согласно правилу Ландау, например, для интегралов J_1 и J_2 имеем:

$$J_j = \frac{1}{16\pi l_0(\alpha)} \left[-i \frac{\pi}{2q_j^3} [\ln(1 + e^{\alpha - \tau^2})]''_{r=\Omega_j/q_j} + \text{в.р.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(1 + e^{\alpha - \tau^2}) d\tau}{(q_j \tau - \Omega_j)^3} \right].$$

6. Уравнение Вигнера

Покажем, что в случае квантовой плазмы, описываемой кинетическим уравнением Вигнера, также генерируется продольный ток, и вычислим его плотность. Будем считать, что, как и в случае классической плазмы, квантовая плазма находится во внешнем электромагнитном поле. Векторные потенциалы составляющих поля представляют собой бегущие гармонические волны: $\mathbf{A}_j(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}_{0j} e^{i(\mathbf{k}_j \mathbf{r} - \omega_j t)}$ ($j = 1, 2$). Соответствующие составляющие электрического и магнитного поля $\mathbf{E}_j(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_{0j} e^{i(\mathbf{k}_j \mathbf{r} - \omega_j t)}$ и $\mathbf{H}_j(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}_{0j} e^{i(\mathbf{k}_j \mathbf{r} - \omega_j t)}$ ($j = 1, 2$) связаны с векторными потенциалами равенствами $\mathbf{E}_j = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}_j}{\partial t} = \frac{i\omega_j}{c} \mathbf{A}_j$, $\mathbf{H}_j = \text{rot } \mathbf{A}_j$, $j = 1, 2$. Будем также считать, что векторный потенциал электромагнитного поля ортогонален волновому вектору.

Для определенности будем считать, что волновые векторы составляющих поля направлены вдоль оси x , а электромагнитные поля направлены вдоль оси y , т.е.

$$\mathbf{k}_j = k_j(1, 0, 0), \quad \mathbf{E}_j = E_j(x, t)(0, 1, 0), \quad E_j(x, t) = E_{0j} e^{i(k_j x - \omega_j t)}.$$

Возьмем уравнение Вигнера, описывающее поведение квантовой бесстолкновительной плазмы:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + W[f] = 0 \quad (6.1)$$

с нелинейным интегралом Вигнера:

$$\begin{aligned} W[f] = & \mathbf{p} \sum_{j=1}^2 \frac{ie\mathbf{A}_j}{mc\hbar} \left[f\left(\mathbf{r}, \mathbf{p} + \hbar \frac{\mathbf{k}_j}{2}, t\right) - f\left(\mathbf{r}, \mathbf{p} - \hbar \frac{\mathbf{k}_j}{2}, t\right) \right] - \\ & - \frac{ie^2}{2mc^2\hbar} \sum_{j=1}^2 \mathbf{A}_j^2 [f(\mathbf{r}, \mathbf{p} + \hbar \mathbf{k}_j, t) - f(\mathbf{r}, \mathbf{p} - \hbar \mathbf{k}_j, t)] - \\ & - \frac{2ie^2\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2}{2mc^2\hbar} \left[f\left(\mathbf{r}, \mathbf{p} + \hbar \frac{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2}{2}, t\right) - f\left(\mathbf{r}, \mathbf{p} - \hbar \frac{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2}{2}, t\right) \right]. \end{aligned}$$

Этот интеграл Вигнера построен по аналогии с интегралом Вигнера, выведенным в работе [10] с использованием одного векторного потенциала. В уравнении (6.1) f – аналог квантовой функции распределения электронов плазмы (так называемая функция Вигнера), c – скорость света, $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ – импульс электронов, $\mathbf{v}$ – скорость электронов.

Ниже нам понадобится локально равновесное распределение Ферми-Дирака, $f^{(0)} = f_{eq}(\mathbf{r}, t)$ (eq= equilibrium), $f^{(0)} = \left[1 + \exp \frac{\mathcal{E} - \mu(\mathbf{r})}{k_B T}\right]^{-1}$, где $\mathcal{E} = mv^2/2$ – энергия электронов, $\mu(\mathbf{r})$ – химический потенциал электронного газа, k_B – постоянная Больцмана, T – температура плазмы, $\alpha = \mu(\mathbf{r})/k_B T$ – безразмерный химический потенциал, v_T – тепловая скорость электронов, $v_T = \sqrt{2k_B T/m}$, $k_B T = \mathcal{E}_T = mv_T^2/2$ – тепловая кинетическая энергия электронов.

В квантовой плазме скорость электронов связана с его импульсом и векторными потенциалами составляющих электромагнитного поля равенством $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}}{m} - \frac{e(\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2)}{cm}$. Введем безразмерный импульс электронов $\mathbf{P} = \frac{\mathbf{p}}{p_T}$, $p_T = mv_T$ и абсолютное распределение Ферми-Дирака $f_0(P) = 1/(1 + e^{P^2 - \alpha})$. В уравнении (6.1) и в интеграле Вигнера перейдем к безразмерному импульсу. Получим уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + v_T \mathbf{P} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \frac{iev_T}{c\hbar} \mathbf{P} \sum_{j=1}^2 \mathbf{A}_j [f(\mathbf{r}, \mathbf{P} + \mathbf{q}_j/2, t) - f(\mathbf{r}, \mathbf{P} - \mathbf{q}_j/2, t)] - \\ - \frac{2ie^2}{2mc^2\hbar} \sum_{j=1}^2 \mathbf{A}_j [f(\mathbf{r}, \mathbf{P} + \mathbf{q}_j, t) - f(\mathbf{r}, \mathbf{P} - \mathbf{q}_j, t)] - \\ - \frac{2ie^2\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2}{2mc^2\hbar} \left[f\left(\mathbf{r}, \mathbf{P} + \frac{\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2}{2}, t\right) - f\left(\mathbf{r}, \mathbf{P} - \frac{\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2}{2}, t\right) \right]. \quad (6.2) \end{aligned}$$

Здесь $\mathbf{q}_j$ – безразмерные волновые числа, $\mathbf{q}_j = \mathbf{k}_j / \mathbf{k}_T$, $\mathbf{k}_T$ – тепловое волновое число, $\mathbf{k}_T = m v_T / \hbar$.

Будем искать решение уравнения (6.2) в виде:

$$f = f_0(P) + f_1 + f_2, \quad (6.3)$$

где

$$f_1 = A_1 \varphi_1 + A_2 \varphi_2, \quad (6.4)$$

$$f_2 = A_1^2 \psi_1 + A_2^2 \psi_2 + A_1 A_2 \psi_0. \quad (6.5)$$

Будем действовать методом последовательных приближений, считая малыми параметры, введенные ранее в случае классической плазмы, т.е. что $\alpha_j \ll 1$, $\beta_j \ll 1$. В первом приближении ищем решение уравнения Вигнера (6.2) в виде $f = f^{(1)} = f_0(P) + f_1$, где f_1 определяется согласно (6.4). Из уравнения (6.2) получаем, что:

$$f_1 = -\frac{e}{c \hbar k_T} \sum_{j=1}^2 \mathbf{P} \mathbf{A}_j \frac{f_F\left(\mathbf{P} + \frac{\mathbf{q}_j}{2}\right) - f_F\left(\mathbf{P} - \frac{\mathbf{q}_j}{2}\right)}{\mathbf{q}_j \mathbf{P}_j - \Omega_j}. \quad (6.6)$$

Здесь $\Omega_j = \omega_j / (v_T k_T)$ – безразмерная частота колебаний составляющей поля $\mathbf{E}_j$.

Во втором приближении ищем решение уравнения Вигнера (6.2) в виде (6.3), в котором f_1 вычисляется согласно (7.1), а f_2 определяется равенством (6.5). Уравнение (6.2) распадается на три уравнения. Из полученных уравнений находим составляющие слагаемые равенства (6.5):

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \psi_0 = & \frac{e^2}{2c^2 p_T^2} (\mathbf{P} \mathbf{A}_1) (\mathbf{P} \mathbf{A}_2) \left[\frac{f_0\left(\mathbf{P} + \frac{\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2}{2}\right) - f_0\left(\mathbf{P} - \frac{\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2}{2}\right)}{\mathbf{P} \mathbf{q}_2 - \Omega_2 + \frac{\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2}{2}} - \right. \\ & - \frac{f_0\left(\mathbf{P} - \frac{\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2}{2}\right) - f_0\left(\mathbf{P} - \frac{\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2}{2}\right)}{\mathbf{P} \mathbf{q}_2 - \Omega_2 + \frac{\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2}{2}} + \\ & + \frac{f_0\left(\mathbf{P} + \frac{\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2}{2}\right) - f_0\left(\mathbf{P} - \frac{\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2}{2}\right)}{\mathbf{P} \mathbf{q}_1 - \Omega_1 + \frac{\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2}{2}} - \\ & \left. - \frac{f_0\left(\mathbf{P} + \frac{\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2}{2}\right) - f_0\left(\mathbf{P} - \frac{\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2}{2}\right)}{\mathbf{P} \mathbf{q}_1 - \Omega_1 + \frac{\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2}{2}} \right] \frac{1}{\mathbf{P} \mathbf{q} - \Omega} + \\ & + \frac{e^2 A_1 A_2}{2c^2 p_T^2} \frac{f_0(\mathbf{P} + \mathbf{q}) - f_0(\mathbf{P} - \mathbf{q})}{\mathbf{P} \mathbf{q} - \Omega} \end{aligned}$$

и

$$A_j^2 \psi_j = \frac{e^2}{2c^2 p_T^2} \left[(\mathbf{P} \mathbf{A}_j)^2 \frac{f_0(\mathbf{P} + \mathbf{q}_j) - f_0(\mathbf{P} - \mathbf{q}_j)}{\mathbf{P} \mathbf{q}_j - \Omega + \mathbf{q}_j^2/2} + \right. \\ \left. + \frac{A_j^2}{2} (f_0(\mathbf{P} + \mathbf{q}_j) - f_0(\mathbf{P} - \mathbf{q}_j)) \right] \frac{1}{\mathbf{P} \mathbf{q}_j - \Omega_j}, \quad j = 1, 2.$$

Здесь

$$\mathbf{q} = \frac{\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2}{2}, \quad \Omega = \frac{\Omega_1 + \Omega_2}{2}.$$

Таким образом, решение уравнения Вигнера построено и во втором приближении. Оно определяется равенствами (6.3) – (6.6), в которых функции ψ_j ($j = 1, 2$) и ψ_0 определяются двумя последними равенствами.

7. Электрический ток в квантовой плазме

Плотность электрического тока, согласно его определению, равна:

$$\mathbf{j} = e \int f \mathbf{v} \frac{2d^3 p}{(2\pi\hbar)^3}.$$

В работе [10] показано, что в нулевом приближении электрический ток в квантовой плазме равен нулю:

$$j^{(0)} = e \int f_0(P) \mathbf{v} \frac{2d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} = 0.$$

Поэтому плотность электрического тока в квантовой плазме равна:

$$\mathbf{j} = \frac{2ev_T p_T^3}{(2\pi\hbar)^3} \int (f_1 + f_2) \left[\mathbf{P} - \frac{e(\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2)}{mcv_T} \right] d^3 P.$$

Это равенство можно представить в виде:

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}^{\text{linear}} + \mathbf{j}^{\text{quadr}}.$$

Здесь

$$\mathbf{j}^{\text{linear}} = \frac{2ev_T p_T^3}{(2\pi\hbar)^3} \int f_1 \mathbf{P} d^3 P$$

означает часть электрического тока, получаемую в результате линейного анализа с использованием первого приближения функции распределения, а

$$\mathbf{j}^{\text{quadr}} = \frac{2ev_T p_T^3}{(2\pi\hbar)^3} \int \left[f_2 \mathbf{P} - \frac{e(\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2)}{mcv_T} f_1 \right] d^3 P$$

означает часть электрического тока, получаемую в результате нелинейного анализа с использованием второго, квадратичного разложения функции распределения.

Итак, электрический ток в квантовой плазме есть сумма двух слагаемых, линейного и квадратичного. Линейное слагаемое есть плотность тока, направленного вдоль векторного потенциала электромагнитного поля (т.е. вдоль вектора напряженности поля). Оно состоит из членов, пропорциональных первой степени векторных потенциалов. Квадратичное слагаемое есть плотность тока, ортогонального линейной плотности тока. Оно направлено вдоль волнового вектора. Квадратичное слагаемое состоит из членов, пропорциональных квадрату векторных потенциалов тока и их произведению.

Представим линейную часть плотности тока в явном виде:

$$\mathbf{j}^{\text{linear}} = - \frac{2ev_T p_T^3}{(2\pi\hbar)^3 c \hbar k_T} \sum_{j=1}^2 \int \mathbf{P} (\mathbf{P} \mathbf{A}_j) \frac{f_0\left(\mathbf{P} + \frac{\mathbf{q}_j}{2}\right) - f_0\left(\mathbf{P} - \frac{\mathbf{q}_j}{2}\right)}{\mathbf{P} \mathbf{q}_j - \Omega_j} d^3 P.$$

Это векторное выражение имеет одну ненулевую компоненту:

$$\mathbf{j}^{\text{linear}} = j_y(0,1,0),$$

где

$$j_y = - \frac{2ev_T p_T^3}{(2\pi\hbar)^3 c \hbar k_T} \times \\ \times \sum_{j=1}^2 A_j \int \frac{f_0\left(P_x + \frac{q_j}{2}, P_y, P_z\right) - f_0\left(P_x - \frac{q_j}{2}, P_y, P_z\right)}{P_x q_j - \Omega_j} P_y^2 d^3 P.$$

Здесь введено обозначение:

$$f_0\left(P_x \pm \frac{q_j}{2}, P_y, P_z\right) = \left[1 + \exp((P_x \pm \frac{q_j}{2})^2 + P_y^2 + P_z^2)\right]^{-1}.$$

Заметим, что интеграл от второго слагаемого в выражении для $\mathbf{j}^{\text{quadr}}$ равен нулю. Поэтому продольный ток в квантовой плазме, генерируемый двумя электромагнитными волнами, равен:

$$\mathbf{j}^{\text{quadr}} = \mathbf{j}^{\text{long}} = \frac{2ev_T p_T^3}{(2\pi\hbar)^3} \int f_2 \mathbf{P} d^3 P.$$

Таким образом, продольный ток определяется только вторым приближением функции распределения.

Векторное равенство для $\mathbf{j}^{\text{quadr}}$ имеет только одну ненулевую компоненту: $\mathbf{j}^{\text{quadr}} = j_x(1,0,0)$, где

$$j_x = \frac{2ev_T p_T^3}{(2\pi\hbar)^3} \int f_2 P_x d^3 P.$$

Продольный ток представим в виде суммы трех слагаемых:

$$j_x = j_1 + j_2 + j_0. \quad (7.1)$$

Здесь

$$j_l = A_l^2 \frac{2ev_T p_T^3}{(2\pi\hbar)^3} \int \psi_l P_x d^3P, \quad l = 1, 2, \quad (7.2)$$

$$j_0 = A_1 A_2 \frac{2ev_T p_T^3}{(2\pi\hbar)^3} \int \psi_0 P_x d^3P. \quad (7.3)$$

Из трех последних равенств (7.2) и (7.3) вытекает, что продольный ток представляет собой сумму трех токов. Первые два тока j_1 и j_2 генерируются соответствующими векторными потенциалами составляющих электромагнитного поля. Их величины пропорциональны квадратам этих векторных потенциалов. Третий ток j_0 , который назовем перекрестным, генерируется взаимодействием электромагнитных волн и пропорционален произведению величин векторных потенциалов.

Представим в явном виде формулы (7.2) для первых двух токов:

$$j_l = A_l^2 \frac{e^3 v_T p_T}{(2\pi\hbar)^3 c^2} \int \left[\left(\frac{f_0(P_x + q_j) - f_0(P)}{q_j P_x - \Omega_j + q_j^2/2} - \frac{f_0(P) - f_0(P_x - q_j)}{q_j P_x - \Omega_j - q_j^2/2} \right) P_y^2 + \frac{f_0(P_x + q_j) - f_0(P_x - q_j)}{2} \right] \frac{P_x d^3P}{q_j P_x - \Omega_j}.$$

Здесь

$$f_0(P_x \pm q_j) = [1 + \exp((P_x \pm q_j)^2 + P_y^2 + P_z^2)]^{-1}.$$

Преобразуем выражение, стоящее перед интегралом в предыдущей формуле. Для этого воспользуемся связью между концентрацией (числовой плотностью), тепловым волновым числом и химическим потенциалом:

$$N = \frac{k_T^3 l_0(\alpha)}{2\pi^2}, \quad l_0(\alpha) = \int_0^\infty \ln(1 + e^{\alpha - u^2}) du.$$

Тогда:

$$\begin{aligned} C &= A_l^2 \frac{e^3 v_T p_T}{(2\pi\hbar)^3 c^2} = A_l^2 \frac{2\pi^2 e^3 v_T N}{8\pi^3 c^2 p_T^2 l_0(\alpha)} = -E_l^2 \frac{e \omega_p^2}{16\pi^2 p_T l_0(\alpha) \omega_l} = \\ &= -E_l^2 \frac{e \Omega_p^2}{16\pi^2 p_T l_0(\alpha) \Omega_l}. \end{aligned}$$

Здесь введена безразмерная плазменная частота $\Omega_p = \frac{\omega_p}{v_T k_T}$.

Если ввести продольно-поперечную проводимость $\sigma_{l,tr}$,

$$\sigma_{l,tr} = \frac{e\hbar}{p_T^2} \left(\frac{\hbar\omega_p}{mv_T^2} \right)^2 = \frac{e}{k_T p_T} \left(\frac{\omega_p}{k_T v_T} \right)^2 = \frac{e\Omega_p^2}{k_T p_T},$$

то константа C равна:

$$C = -\frac{E_j^2 k_T \sigma_{l,tr}}{16\pi^2 l_0(\alpha) \Omega_1 \Omega_2} = -\frac{E_j^2 k_j \sigma_{l,tr}}{16\pi^2 l_0(\alpha) \Omega_j^2 q_j}, \quad j = 1, 2.$$

Теперь формула для токов j_1 и j_2 может быть представлена как

$$j_m = J_m \sigma_{l,tr} k_m E_m^2, \quad m = 1, 2. \quad (7.4)$$

Здесь J_m – безразмерная плотность тока,

$$J_m = -\frac{1}{16\pi^2 l_0(\alpha) \Omega_j q_j} \times \\ \times \int \left[\left(\frac{f_0(P_x + q_j) - f_0(P)}{q_j P_x - \Omega_j + \frac{q_j^2}{2}} - \frac{f_0(P) - f_0(P_x - q_j)}{q_j P_x - \Omega_j - \frac{q_j^2}{2}} \right) P_y^2 + \right. \\ \left. + \frac{f_0(P_x + q_j) - f_0(P_x - q_j)}{2} \right] \frac{P_x d^3 P}{q_j P_x - \Omega_j}.$$

После длительных преобразований эти интегралы можно свести к одномерным интегралам:

$$J_m = -\frac{1}{16\pi l_0(\alpha) \Omega_j} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{L(\tau)}{(q_j \tau - \Omega_j) \left[(q_j \tau - \Omega_j)^2 - \frac{q_j^4}{4} \right]} + \frac{\ln(1 + e^{\alpha - \tau^2})}{(q_j \tau - \Omega_j)^2 - q_j^4} \right] d\tau.$$

Формулу (7.3) для перекрестного тока представим в виде:

$$j_0 = J_0 \sigma_{l,tr} E_1 E_2 (k_1 + k_2), \quad (7.5)$$

где J_0 – безразмерная часть перекрестного тока, $J_0 = J_1^+ - J_1^- + J_2^+ - J_2^- + J_3$.

Здесь

$$J_1^{\pm} = \int \frac{f_0(P_x + q^{\pm}) - f_0(P_x - q^{\mp})}{q_1 P_x - \Omega_1 \pm q_1 q_2 / 2} \frac{P_y^2 P_x d^3 P}{q P_x - \Omega}, \\ J_2^{\pm} = \int \frac{f_0(P_x \pm q^{\pm}) - f_0(P_x \pm q^{\mp})}{q_2 P_x - \Omega_2 \pm q_1 q_2 / 2} \frac{P_y^2 P_x d^3 P}{q P_x - \Omega}, \\ J_3 = \int \frac{f_0(P_x + q) - f_0(P_x - q)}{q P_x - \Omega} P_x d^3 P,$$

а также введены обозначения $q^\pm = (q_1 \pm q_2)/2$, $\Omega = (\Omega_1 + \Omega_2)/2$.

После длительных преобразований предыдущие интегралы можно свести к одномерным интегралам:

$$J_1^\pm = \pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{l_1(\tau, q^\pm)}{q_1 \tau - \Omega_1 \pm q_1 q_2/2} \frac{\tau d\tau}{q\tau - \Omega},$$

$$J_2^\pm = \pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{l_2(\tau, q^\pm)}{q_2 \tau - \Omega_2 \pm q_1 q_2/2} \frac{\tau d\tau}{q\tau - \Omega},$$

$$J_3 = 2\pi q \Omega \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(1 + e^{\alpha - u^2}) du}{(qu - \Omega)^2 - q^4}.$$

В этих интегралах

$$l_1(\tau, q^\pm) = \int_0^\infty \rho \ln \left(\frac{1 + e^{\alpha - (\tau + q^\pm)^2 - \rho^2}}{1 + e^{\alpha - (\tau - q^\pm)^2 - \rho^2}} \right) d\rho,$$

$$l_2(\tau, q^\pm) = \int_0^\infty \rho \ln \left(\frac{1 + e^{\alpha - (\tau \pm q^\pm)^2 - \rho^2}}{1 + e^{\alpha - (\tau \mp q^\pm)^2 - \rho^2}} \right) d\rho.$$

Таким образом, продольный ток (7.1) окончательно равен:

$$j_x = \sigma_{l, tr} [E_1^2 k_1 J_1 + E_2^2 k_2 J_2 + E_1 E_2 (k_1 + k_2) J_0]. \quad (7.6)$$

Если ввести поперечные составляющие электромагнитного поля:

$$\mathbf{E}_j^{\text{tr}} = \mathbf{E}_j - \frac{\mathbf{k}_j (\mathbf{E}_j \mathbf{k}_j)}{k_j^2} = \mathbf{E}_j - \frac{\mathbf{q}_j (\mathbf{E}_j \mathbf{q}_j)}{q_j^2},$$

то равенство (7.6) можно записать в инвариантной форме:

$$\mathbf{j}^{\text{long}} = \sigma_{l, tr} [(\mathbf{E}_1^{\text{tr}})^2 \mathbf{k}_1 J_1 + (\mathbf{E}_2^{\text{tr}})^2 \mathbf{k}_2 J_2 + \mathbf{E}_1^{\text{tr}} \mathbf{E}_2^{\text{tr}} (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) J_0]. \quad (7.7)$$

В случае малых значений волновых чисел величины токов, пропорциональных квадратам напряженностей электрических полей, фактически вычислены в нашей работе [20]:

$$j_m = -\frac{\sigma_{l, tr}}{8\pi\Omega_m^3} k_m E_m^2, \quad q_m \rightarrow 0 \quad (m = 1, 2).$$

Опуская вычисления, сообщим без вывода, что при малых значениях волновых чисел для плотности перекрестного тока получаем:

$$j_0 = -\frac{\sigma_{l, tr} E_1 E_2 (k_1 + k_2)}{4\pi\Omega_1 \Omega_2 (\Omega_1 + \Omega_2)}, \quad q_1, q_2 \rightarrow 0.$$

Из двух последних полученных выражений вытекает, что при малых значениях волновых чисел для плотности продольного тока получаем:

$$\mathbf{j}^{\text{long}} = -\frac{\sigma_{l, \text{tr}}}{8\pi} \left[(\mathbf{E}_1^{\text{tr}})^2 \frac{\mathbf{k}_1}{\Omega_1^3} + (\mathbf{E}_2^{\text{tr}})^2 \frac{\mathbf{k}_2}{\Omega_2^3} + 2 \frac{\mathbf{E}_1^{\text{tr}} \mathbf{E}_2^{\text{tr}} (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)}{\Omega_1 \Omega_2 (\Omega_1 + \Omega_2)} \right], q_1, q_2 \rightarrow 0.$$

Эта формула в точности совпадает с формулой (5.3) для классической плазмы. Это означает, что при малых значениях волновых чисел величина плотности продольного тока в классической и квантовой плазме совпадает.

Замечание 2. При вычислении сингулярных интегралов, входящих в безразмерные части плотности продольного тока, следует воспользоваться известным правилом Ландау.

Заключение

В настоящей работе решена следующая задача: в квантовой плазме с произвольной степенью вырождения электронного газа, распространяются две электромагнитные волны с коллинеарными волновыми векторами. Уравнение Вигнера решается методом последовательных приближений. Используется квадратичное разложение функции распределения. Оказалось, что учет нелинейности задачи обнаруживает генерирование электрического тока, ортогонального к направлению электрического поля (т.е. направлению известного классического поперечного электрического тока). Найдена величина поперечного и продольного электрических токов. Рассмотрен случай малых значений волновых чисел. Оказалось, что величина продольного тока в классической и квантовой плазме совпадает в случае малых значений волновых чисел.

В дальнейшем авторы намерены рассмотреть задачи о колебаниях плазмы и о скин-эффекте с использованием квадратичного по потенциалу разложения функции распределения.

ЛИТЕРАТУРА:

1. V. Ginsburg, A. Gurevich. The non-linear phenomena in the plasma which is in the variable electromagnetic field // Uspekhy Fiz. Nauk, 70(2) 1960. P. 201–246 (in Russian).
2. L. Kovrizhnykh, V. Tsytovich. Effects of transverse electromagnetic wave decay in a plasma // Soviet physics JETP. 1965. V. 20. No. 4. P. 978–983.
3. N. Akhmediev, I. Mel'nikov, L. Robur. Second-Harmonic Generation by a Reflecting Metal Surface // Laser Physics. Vol. 4. No. 6. 1994. P. 1194–1197.
4. Бежанов С.Г., Урюпин С.А. Генерация нелинейных токов и низкочастотного излучения при взаимодействии лазерного импульса с металлом // Квант. электроника, 43:11 (2013). С. 1048–1054.
5. Урюпин С.А., Бежанов С.Г. Генерация второй гармоники и тока увлечения быстро греющей металл s-поляризованной волной // Квант. электроника, 40:1 (2010). С. 51–58.

6. V. Zytovich. Nonlinear effects in plasmas // *Uspekhy Fiz. Nauk.* 90(3). 1966. P. 435–489 (in Russian).
7. V. Zytovich. Nonlinear effects in plasmas. Moscow. Publ. Leland. 2014. 287 p. (in Russian).
8. P. Shukla, B. Eliasson. Nonlinear aspects of quantum plasma physics // *Uspekhy Fiz. Nauk*, 53(1) 2010. [V. 180. No. 1. P. 55–82 (2010) (in Russian)].
9. P. Shukla, B. Eliasson. Dispersion properties of electrostatic oscillations in quantum plasmas // *arXiv:0911.4594v1 [physics.plasm-ph]* 24 Nov 2009.
10. Latyshev A., Yushkanov A. Transverse Electric Conductivity in Collisional Quantum Plasma // *Plasma Physics Report.* 2012. Vol. 38. No. 11. P. 899–908.
11. De Andres P., Monreal R., Flores F. Relaxation-time effects in the transverse dielectric function and the electromagnetic properties of metallic surfaces and small particles // *Phys. Rev. B.* 1986. Vol. 34. No. 10. P. 7365–7366.
12. Fuchs R., Kliever K. Surface plasmon in a semi-infinite free-electron gas // *Phys. Rev. B.* 1971. V. 3. No 7. P. 2270–2278.
13. Brodin G., Marklund M., Manfredi G. Quantum Plasma Effects in the Classical Regime // *Phys. Rev. Letters.* 100, (2008). P. 175001-1-175001-4.
14. Manfredi G. How to model quantum plasmas // *arXiv: quant-ph/0505004.*
15. Mermin N. Lindhard Dielectric Functions in the Relaxation-Time Approximation // *Phys. Rev. B.* 1970. V. 1. No. 5. P. 2362–2363.
16. Latyshev A. V., Yushkanov A. A. Transverse electrical conductivity of a quantum collisional plasma in the Mermin approach // *Theor. and Math. Phys.* 175(1): P. 559–569 (2013).
17. Latyshev A. V., Yushkanov A. A. Longitudinal Dielectric Permeability of a Quantum Degenerate Plasma with a Constant Collision Frequency // *High Temperature.* 2014. Vol. 52. No 1. P. 128–128.
18. Latyshev A. V., Yushkanov A. A. Longitudinal electric conductivity in a quantum plasma with a variable collision frequency in the framework of the Mermin approach // *Theor. and Mathem. Physics* 178(1): 131–142 (2014).
19. Latyshev A. V., Yushkanov A. A. Transverse Permittivity of Quantum Collisional Plasma with an Arbitrary Collision Frequency // *Plasma Physics Reports.* 2014. Vol. 40. No. 7. P. 564–571.
20. Латышев А.В., Юшканов А.А. Генерирование продольного тока поперечным электромагнитным полем в классической и квантовой плазме // *Физика плазмы.* 2015. Т. 41. № 9. С. 778–787.
21. Латышев А.В., Юшканов А.А. Нелинейный продольный ток в максвелловской плазме, возникающий под действием поперечной электромагнитной волны // *Известия РАН. Сер. МЖГ.* 2015. № 6. С. 139–156.

УДК 539.6:539.22

DOI: 10.18384/2310-7251-2015-4-63-68

Соколов А.А.¹, Ноа О.В.², Дадиванян А.К.³¹Ростехнадзор (г. Москва)²Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова³Московский государственный областной университет

АНИЗОТРОПИЯ ОПТИЧЕСКОЙ ПОЛЯРИЗУЕМОСТИ СОПОЛИМЕРОВ С РАЗЛИЧНОЙ СКЕЛЕТНОЙ ЖЕСТКОСТЬЮ КОМПОНЕНТОВ*

Аннотация. Определена сегментная оптическая анизотропия макромолекул сополимеров в случаях, когда скелетная жесткость макромолекул меняется непрерывно и дискретно. Показано, что по зависимости сегментной оптической анизотропии макромолекул от состава можно судить об относительном вкладе компонентов в суммарную жесткость полимерной цепи.

Ключевые слова: сополимеры, поляризуемость, оптическая анизотропия, скелетная жесткость.

A. Sokolov¹, O. Noah², A. Dadivanyan³¹Rostekhnadzor (Moscow)²Lomonosov Moscow State University³Moscow State Regional University

ANISOTROPY OF OPTICAL POLARIZABILITY OF COPOLYMERS WITH VARIOUS BACKBONE RIGIDITY OF COMPONENTS

Abstract. Segmental optical anisotropy of copolymer macromolecules is determined for cases of a continuous and discrete change in the backbone rigidity. It is shown that the dependence of segmental optical anisotropy of copolymers on their composition permits assessing the relative contribution of components into the total rigidity of a copolymer chain.

Keywords: copolymers, polarization, optical anisotropy, backbone rigidity.

Анизотропия оптической поляризуемости, или оптическая анизотропия макромолекулы, является одной из ее наиболее существенных характеристик.

© Соколов А.А., Ноа О.В., Дадиванян А.К., 2015.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты №14-07-00574_а и №15-37-50388 мол_нр) и РФФИ и Правительства Московской области (проект №14-47-03608).

Исследования оптической анизотропии позволяют определить структуру макромолекулы, ее форму, скелетную жесткость полимерной цепи [1], корреляцию ориентаций полимерных цепей и окружающих их молекул растворителя [2].

Исследование оптической анизотропии сополимеров может дать важную информацию об их структуре. Однако до последнего времени было недостаточно изучено влияние на оптическую анизотропию как состава сополимеров, так и распределения звеньев сомономеров вдоль цепи.

Этот вопрос представляет особенный интерес при изучении ориентации жидких кристаллов (ЖК) относительно поверхности полимеров, так как она зависит как от структуры молекул мезогенов, так и от свойств вещества, с которым граничит ЖК [3]. При этом важную роль играют как структура и свойства полимерной цепи, такие как полярность, наличие гидрофильных и гидрофобных групп, дипольный момент мономерного звена, так и анизотропия поляризуемости макромолекул, определяющая двойное лучепреломление в ориентирующем полимерном слое, которое надо учитывать при определении параметра порядка в ЖК.

В связи с вышеизложенным представляет интерес исследование зависимости сегментной оптической анизотропии сополимеров от мономерного состава. Распределение мономерных звеньев в цепи сополимера может быть различным, что может сильно влиять на скелетную жесткость полимерной цепи [4, 5]. При различных распределениях она может меняться в зависимости от состава как непрерывно, так и иметь разрыв при некоторой концентрации x_0 .

Найдем оптическую анизотропию сополимера при равномерном распределении мономерных звеньев по длине цепи состава x . Рассмотрим при этом два крайних случая влияния состава сополимера на скелетную жесткость цепи макромолекулы.

1. Число мономерных звеньев в статистическом сегменте макромолекулы S , которое определяет скелетную жесткость полимерной цепи, меняется пропорционально доле одного из компонентов – x .

2. Величина S равна S_1 до некоторой концентрации компонента 1, а при концентрации x_0 меняется скачкообразно и выше этой концентрации имеет значение S_2 .

В первом случае величина S будет равна:

$$S = S_1x + S_2(1 - x),$$

где S_1 и S_2 – числа мономерных звеньев в статистическом сегменте гомополимеров 1 и 2 соответственно.

Эффективная разность поляризуемостей мономерного звена сополимера $\Delta a_{эф} = a_{\parallel} - a_{\perp}$ в направлениях параллельном статистическому сегменту и перпендикулярном ему будет равна:

$$\Delta a_{эф} = \Delta a_1x + \Delta a_2(1 - x),$$

где Δa_1 и Δa_2 – разности поляризуемостей в параллельном и перпендикулярном направлениях мономерных звеньев компонентов 1 и 2.

Величина оптической анизотропии сегмента сополимера $\alpha_1 - \alpha_2$ может быть записана следующим образом:

$$\alpha_1 - \alpha_2 = S\Delta a_{эф} = (\alpha_1 - \alpha_2)_1 \left\{ x^2 + \left[\frac{S_1(\alpha_1 - \alpha_2)_2}{S_2(\alpha_1 - \alpha_2)_1} + \frac{S_2}{S_1} \right] x(1 - x) + \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)_2}{(\alpha_1 - \alpha_2)_1} (1 - x)^2 \right\},$$

где $(\alpha_1 - \alpha_2)_1$ – оптическая анизотропия сегмента гомополимера 1, а $(\alpha_1 - \alpha_2)_2$ – оптическая анизотропия сегмента гомополимера 2.

Введем $A = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{(\alpha_1 - \alpha_2)_1}$, $S' = \frac{S_1}{S_2}$ и $a = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)_1}{(\alpha_1 - \alpha_2)_2}$.

Тогда:

$$A = x^2 + \left(\frac{S'}{a} + \frac{1}{S'} \right) x(1 - x) + \frac{1}{a} (1 - x)^2. \quad (1)$$

Во втором случае величина сегментной оптической анизотропии будет равна в интервале $(0, x_0)$:

$$\begin{aligned} \alpha_1 - \alpha_2 &= S_1[\Delta a_1x + \Delta a_2(1 - x)] \\ A &= x \left(1 - \frac{S'}{a} \right) + \frac{S'}{a}, \end{aligned} \quad (2a)$$

а в интервале $(x_0, 1)$:

$$\begin{aligned} \alpha_1 - \alpha_2 &= S_2[\Delta a_1x + \Delta a_2(1 - x)] \\ A &= \frac{1}{S'} \left[x \left(1 - \frac{S'}{a} \right) + \frac{S'}{a} \right]. \end{aligned} \quad (26)$$

На рис. 1 и 2 приведены зависимости величины $A = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{(\alpha_1 - \alpha_2)_1}$ от мольной доли компонента $1 - x$ при различных значениях S' и a , рассчитанные по уравнениям (1) и (2).

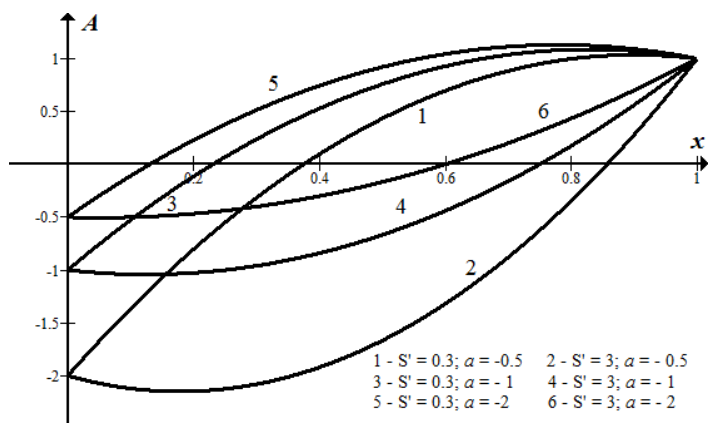


Рис. 1. Зависимость величины $A = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{(\alpha_1 - \alpha_2)_1}$ от мольной доли компонента $1 - x$ при различных значениях $S' = \frac{S_1}{S_2}$ и $a = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)_1}{(\alpha_1 - \alpha_2)_2}$, рассчитанная по уравнению (1).

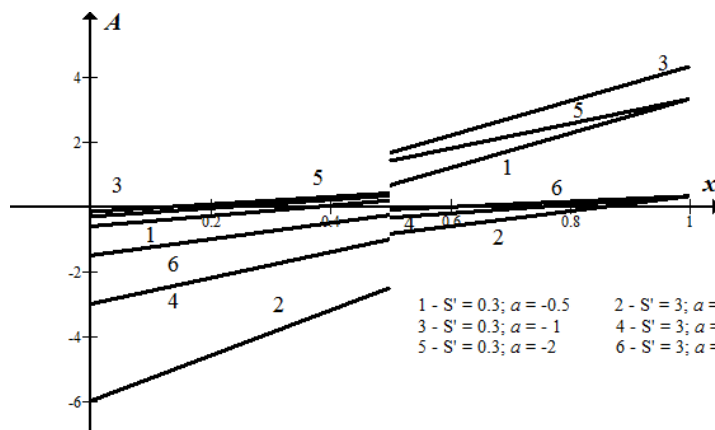


Рис. 2. Зависимость величины $A = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{(\alpha_1 - \alpha_2)_1}$ от мольной доли компонента $1 - x$ при различных значениях $S' = \frac{S_1}{S_2}$ и $a = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)_1}{(\alpha_1 - \alpha_2)_2}$, рассчитанная по уравнениям (2).

При расчетах величины Δa_1 и Δa_2 брали различающимися по знаку, так как в этом случае при одинаковой погрешности эксперимента абсолютное значение

оптической анизотропии может быть определено намного точнее, как это было показано при исследовании ближнего ориентационного порядка в смеси растворителей [2].

Как видно из приведенных рисунков, в первом случае величина $\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{(\alpha_1 - \alpha_2)_1}$ меняется непрерывно, а во втором – скачкообразно. Сравнение кривых, приведенных на рис. 1 и 2, с экспериментально полученными зависимостями оптической анизотропии сополимеров от их состава позволит сделать заключение об относительном влиянии компонентов сополимера на скелетную жесткость полимерной цепи, а при известных значениях оптической анизотропии и величины статистического сегмента гомополимеров 1 и 2 – оценить характер взаимодействия между мономерными звеньями сополимера и возможность влияния их распределения на скелетную жесткость.

Выводы

1. Определена сегментная оптическая анизотропия макромолекул сополимеров в случаях, когда скелетная жесткость макромолекул меняется непрерывно и дискретно.

2. Установлено, что в случае, когда скелетная жесткость цепи сополимера в зависимости от состава меняется непрерывно, зависимость сегментной анизотропии от состава также является непрерывной, а при скачкообразном изменении жесткости терпит разрыв при составе сополимера, соответствующем этому скачку. При этом и до, и после точки разрыва зависимости являются линейными.

3. Показано, что по зависимости сегментной оптической анизотропии макромолекул от состава можно судить об относительном вкладе компонентов в суммарную жесткость полимерной цепи.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Цветков В.Н., Эскин В.Е., Френкель С.Я. Структура макромолекул в растворах. М.: Наука. 1964. 720 с.
2. Дадиванян А.К., Грищенко А.Е., Цветков Н.В., Рюмцев Е.И. Ближний ориентационный порядок в системах полимер-растворитель // Высокомолек. соед. 2008. Б. Т.50, №10. С. 1870–1904.
3. Васильчикова Е.Н., Барабанова Н.Н., Козеева М.И., Богданов Д.Л., Беляев В.В., Дадиванян А.К. Ориентационный порядок в поверхностных слоях мезогенов при

переходе изотропная фаза – нематический жидкий кристалл // Жидкие кристаллы и их практическое использование. 2015. Т. 15. № 3. С. 103–108.

4. Платэ Н.А., Литманович А.Д., Ноа О.В. Макромолекулярные реакции. М.: Химия. 1977. 255 с.
5. Plate N.A, Litmanovich A.D., Noah O.V. Macromolecular Reactions. Peculiarities, Theory and Experimental Approaches. John Wiley and Sons Ltd., Chichester – New York – Brisbane – Toronto – Singapore, 1995. 438 p.

УДК 539.23; 539.216.1; 537.311.31

DOI: 10.18384/2310-7251-2015-4-69-82

Завитаев Э.В.¹, Русаков О.В.¹, Юшканов А.А.²¹Государственный гуманитарно-технологический университет (г. Орехово-Зуево)²Московский государственный областной университет

МАГНИТНОЕ ДИПОЛЬНОЕ ПОГЛОЩЕНИЕ МЕЛКОЙ МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ ЧАСТИЦЫ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ СОФФЕРА

Аннотация. Рассчитано сечение магнитного дипольного поглощения металлической частицы цилиндрической формы. Рассмотрен общий случай, когда отношение длины свободного пробега электронов к поперечному размеру частицы может принимать произвольные значения. В качестве граничных условий задачи принято условие, учитывающее зависимость коэффициента зеркальности от угла падения между вектором скорости электрона и нормалью к поверхности металла. Проведено сравнение полученных результатов с теоретическими расчетами для модели диффузно-зеркальных граничных условий Фукса. Рассмотрен предельный случай и проведено обсуждение полученных результатов.

Ключевые слова: мелкая металлическая частица, функция распределения, сечение поглощения.

E. Zavitaev¹, O. Rusakov¹, A. Yushkanov²¹Moscow Regional Institution of Higher Education «University for Humanities and Technologies» (Orekhovo-Zuyevo)²Moscow State Regional University

MAGNETIC DIPOLAR ABSORPTION OF THE SMALL METAL PARTICLE OF THE CYLINDRICAL FORM WITH BOUNDARY CONDITIONS OF SOFFER

Abstract. The section of magnetic dipolar absorption by a cylindrical metal particle is calculated. The general case, when the ratio of the length of the free run of electrons to the transverse size of the particle can take arbitrary values, is considered. The condition taking

into account the dependence of the coefficient of a smooth surface on a hade between a vector of speed of an electron and a normal to a metal surface is used as a boundary condition of the problem. The results obtained are compared with theoretical calculations for the model of diffusion and mirror boundary conditions of Fuchs. The limiting case is considered and the obtained results are discussed.

Key words: *small metal particle, cumulative distribution curve, absorption section.*

Введение

Электромагнитные свойства малых металлических частиц обладают рядом особенностей [1; 2]. Эти особенности связаны с тем, что длина свободного пробега электронов в таких частицах оказывается одного порядка с их линейными размерами. При этом существенную роль начинают играть нелокальные эффекты. Классическая теория взаимодействия электромагнитного излучения с металлическими частицами (теория Ми) [3], основанная на локальных уравнениях макроскопической электродинамики, оказывается неприменимой.

В работах [4; 5] рассмотрен вопрос о магнитном дипольном поглощении инфракрасного излучения сферическими частицами. При этом для описания электромагнитного отклика частицы применялась стандартная кинетическая теория вырожденного ферми-газа электронов проводимости в металлах [6]. Рассмотрение было ограничено случаем чисто диффузного отражения электронов проводимости от внутренней поверхности частицы.

В последующих работах [7–9] поднимался вопрос о влиянии зеркального отражения электронов на электромагнитные свойства малых металлических частиц. В работах [10; 11] было проведено подробное рассмотрение магнитного дипольного поглощения сферической и цилиндрических частиц при условии, что отражение электронов от поверхности частицы носит смешанный, т. е. зеркально-диффузный характер (модель Фукса) [12].

В данной работе построена теория взаимодействия электромагнитного излучения с цилиндрической частицей с учетом зависимости коэффициента зеркальности q от дефектов поверхности и угла падения электронов на внутреннюю поверхность частицы (модель Соффера) [13; 14]. Следует отметить, что применение такой модели граничных условий для неравновесной функции распределения электронов позволило выявить целый ряд важных физических особенностей при учете влияния поверхностного рассеяния

электронов на электрическое поглощение мелкой металлической цилиндрической частицы [15].

Постановка задачи

Рассматривается бесконечный металлический цилиндр радиуса R и длины L ($R \gg L$) в поле плоской электромагнитной волны (предполагается, что магнитное поле волны направлено вдоль оси цилиндра). Его магнитное поглощение обусловлено возникновением вихревых токов. В дипольном приближении и в пренебрежении скин-эффектом (считается, что $R < \delta$ – глубины скин-слоя) вихревое электрическое поле, вызывающее появление этих токов, имеет вид

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2c} \left[\mathbf{r}, \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right] = \frac{\omega}{2ic} [\mathbf{r}, \mathbf{H}_0] \exp(-i\omega t), \quad (1)$$

где $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \exp(-i\omega t)$ – напряженность магнитного поля; $\mathbf{r}$ – радиус-вектор (начало координат выбирается на оси частицы), $\mathbf{H}_0$ – амплитуда магнитного поля волны, ω – угловая частота волны, c – скорость света в вакууме.

Средняя диссипируемая мощность $\overline{Q}$ в частице находится по формуле [16]:

$$\overline{Q} = \int (\overline{\text{Re } \mathbf{E}})(\overline{\text{Re } \mathbf{j}}) d^3r = \frac{1}{2} \text{Re} \int \mathbf{j} \mathbf{E}^* d^3r, \quad (2)$$

здесь чертой обозначено усреднение по времени, а звездочкой – комплексное сопряжение; $\mathbf{j}$ – плотность вихревого тока.

Если для нахождения плотности тока $\mathbf{j}$ применить локальный закон Ома в виде:

$$\mathbf{j} = \Sigma(\omega) \mathbf{E}; \quad \Sigma(\omega) = \frac{\Sigma(0)}{1 - i\omega\tau}, \quad (3)$$

где $\Sigma(\omega)$ – проводимость Друде [6], $\Sigma(0) = e^2 n \tau / m$ – статическая проводимость металла, то, разделив $\overline{Q}$ на средний поток энергии в волне $cH_0^2 / 8\pi$, получим классическую формулу для сечения $\sigma_{\text{кл}}$ магнитного поглощения частицы [16]:

$$\sigma_{\text{кл}} = \frac{\pi^2 e^2 n R^4 L}{2 m c^3} \frac{\tau \omega^2}{1 + \omega^2 \tau^2},$$

где e , m и n – соответственно, заряд, масса и концентрация электронов проводимости; τ – электронное время релаксации.

В данной работе рассмотрим случай, когда радиус частицы R сравним с длиной свободного пробега электронов в металле L или меньше ее: $R < L$. Тогда закон Ома (3) необходимо уточнять, т.к. связь между $\mathbf{E}$ и $\mathbf{j}$ на таких расстояниях оказывается существенно нелокальной. Для описания этой связи применим кинетическое уравнение (в приближении времени релаксации) к вырожденному ферми-газу электронов проводимости в цилиндрической частице. Заметим, что такой подход справедлив при исследовании образцов, линейный размер которых много больше длины волны де Бройля на поверхности Ферми.

Для достаточно слабых внешних полей $\mathbf{E}$ это уравнение можно линеаризовать по внешнему полю $\mathbf{E}$ и по малым отклонениям от равновесной фермиевской функции распределения:

$$-i\omega f_1 + \mathbf{v} \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{r}} + e(\mathbf{v} \mathbf{E}) \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} = -\frac{f_1}{\tau}. \quad (4)$$

Здесь $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = f_0(\varepsilon) + f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ – функция распределения электронов; $f_0(\varepsilon)$ – равновесная фермиевская функция распределения электронов по энергиям, причем далее рассматривается квадратичная зависимость энергии от скорости: $\varepsilon = m \mathbf{v}^2 / 2$, и используется ступенчатая аппроксимация для равновесной функции $f_0(\varepsilon)$ [17]:

$$f_0(\varepsilon) = \Theta(\varepsilon_F - \varepsilon) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_F \\ 0, & \varepsilon_F < \varepsilon \end{cases},$$

$\varepsilon_F = m \mathbf{v}_F^2 / 2$ – энергия Ферми; $f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ – малое отклонение f от равновесного значения $f_0(\varepsilon)$, возникающее под действием поля и приводящее к появлению вихревого тока плотности:

$$\mathbf{j} = en \langle \mathbf{v} \rangle = en \left[\int f_0 d^3 v \right]^{-1} \int f_1 \mathbf{v} d^3 v. \quad (5)$$

Концентрация электронов n определяется по стандартной формуле, согласно которой:

$$n = 2 \frac{m^3}{h^3} \int f_0 d^3 v = 2 \frac{m^3}{h^3} \frac{4\pi v_F^3}{3},$$

где h – постоянная Планка, v_F – скорость Ферми.

Взяв в уравнении (4) поле $\mathbf{E}$ в виде (1), найдем f_1 как решение уравнения (4). После этого из соотношения (5) найдем плотность тока и сечение поглощения:

$$\sigma = \frac{8\pi Q}{c H_0^2}. \quad (6)$$

Однозначное решение поставленной задачи возможно при выборе граничного условия на поверхности частицы для неизвестной функции f_1 . Физически это означает, что при выполнении условия $R < \lambda$ поглощение энергии частицей существенно зависит от характера взаимодействия электронов проводимости с границей частицы.

Зададим следующее граничное условие, которое учитывает зависимость коэффициента зеркальности q от дефектов поверхности и угла падения электронов θ на внутреннюю поверхность частицы (модель Соффера) [13; 14]:

$$f_1(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{v}_\perp, \mathbf{v}_z) = q(G, \cos \theta) f_1(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{v}'_\perp, \mathbf{v}_z) \quad \text{при} \quad \begin{cases} |\mathbf{r}_\perp| = R, \\ \mathbf{r}_\perp \mathbf{v}_\perp < 0 \end{cases}, \quad (7)$$

$$q(G, \cos \theta) = \exp[-(4\pi G)^2 \cos^2 \theta], \quad G = \frac{h_s}{\lambda_F},$$

где $\mathbf{r}_\perp$ и $\mathbf{v}_\perp$, соответственно, проекции радиус-вектора электрона $\mathbf{r}$ и его скорости $\mathbf{v}$ на плоскость, перпендикулярную оси цилиндра,

$$\mathbf{v}'_\perp = \mathbf{v}_\perp - \frac{2\mathbf{r}_\perp(\mathbf{r}_\perp \mathbf{v}_\perp)}{R^2}$$

– вектор скорости, который при зеркальном отражении от внутренней поверхности цилиндра в точке $\mathbf{r}_\perp$ ($|\mathbf{r}_\perp| = R$) переходит в вектор $\mathbf{v}_\perp$, $\mathbf{v}_z$ – составляющая скорости электрона вдоль оси частицы; h_s –

среднеквадратичная высота поверхностного рельефа, λ_F – длина волны де Бройля электрона на поверхности Ферми.

Функция распределения

Кинетическое уравнение (4) решается методом характеристик [18]. Изменение f_1 вдоль траектории (характеристики)

$$d\mathbf{r} = \mathbf{v} dt$$

определяется уравнением:

$$df_1 = -(\mathbf{v}f_1 + e(\mathbf{v} \mathbf{E}) \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}) dt, \quad (8)$$

где

$$\mathbf{v} = \frac{1}{\tau} - i\omega$$

есть комплексная частота рассеяния электронов.

Граничное условие (7) позволяет проследить за изменением f_1 вдоль зеркально отражающейся траектории. В точке отражения $t = t_n$ функция $f_1(t)$ испытывает скачок:

$$f_1(t_n + 0) = q f_1(t_n - 0). \quad (9)$$

Знак +/- обозначает предел функции f_1 в точке отражения t_n справа или слева по времени пролета.

При зеркальном отражении сохраняется угловой момент $[\mathbf{r}_\perp, \mathbf{v}_\perp] = [\mathbf{r}_\perp, \mathbf{v}'_\perp]$, поэтому на рассматриваемой траектории $[\mathbf{r}_\perp, \mathbf{v}_\perp] = \text{const}$.

Разность $t_n - t_{n-1}$ не зависит от номера n точки отражения:

$$t_n = nT + \text{const}, \quad n \in Z,$$

где T – время пролета электрона со скоростью $\mathbf{v}_\perp$ от точки $\mathbf{r}_{n-1\perp}$ до точки $\mathbf{r}_{n\perp}$:

$$T = -\frac{2(\mathbf{v}_{n\perp} \mathbf{r}_{n\perp})}{v_\perp^2}.$$

Величина $\mathbf{v} \mathbf{E}$ также постоянна на траектории

$$\mathbf{v} \mathbf{E} = \frac{\omega}{2ic} [\mathbf{r}, \mathbf{H}] \mathbf{v} = \frac{i\omega}{2c} [\mathbf{r}, \mathbf{v}] \mathbf{H} = \text{const}.$$

Решением уравнения (8), в общем виде, является функция:

$$f_1 = C \exp(-v t) - \frac{A}{v}, \quad A = e(v E) \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}.$$

Проведем решение этого уравнения на интервале (t_{n-1}, t_n) . В момент начала отсчета времени ($t=0$):

$$f_1(t_{n-1} + 0) = C - \frac{A}{v},$$

откуда ищется значение постоянной C :

$$C = \frac{A}{v} + f_1(t_{n-1} + 0).$$

Теперь получим связь между начальными значениями функции f_1 на двух соседних звеньях траектории. Поскольку $t_n - 0 = t_{n-1} + T$, то:

$$\begin{aligned} f_1(t_n - 0) &= \left(\frac{A}{v} + f_1(t_{n-1} + 0) \right) \exp(-vT) - \frac{A}{v} = \\ &= -\frac{A}{v} (1 - \exp(-vT)) + f_1(t_{n-1} + 0) \exp(-vT). \end{aligned}$$

Применяя условие (9), получаем:

$$f_1(t_n + 0) = q \left\{ -\frac{A}{v} (1 - \exp(-vT)) + f_1(t_{n-1} + 0) \exp(-vT) \right\}.$$

Выражая затем с помощью этого рекуррентного соотношения $f_1(t_{n-1} + 0)$ через $f_1(t_{n-2} + 0)$ и т.д., приходим к выражению для $f_1(t_n + 0)$ через сумму бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем $q \exp(-vT)$. Суммируя ее, имеем:

$$f_1(t_n + 0) = \frac{-q A (1 - \exp(-vT))}{v(1 - q \exp(-vT))}. \quad (10)$$

Чтобы найти конкретный вид решения уравнения (8), воспользуемся начальным условием (10). Когда $t = 0$:

$$\frac{-q A (1 - \exp(-vT))}{v(1 - q \exp(-vT))} = C - \frac{A}{v},$$

откуда:

$$C = \frac{A}{v} \left\{ 1 - \frac{q(1 - \exp(-vT))}{1 - q \exp(-vT)} \right\} = \frac{A}{v} \left\{ \frac{1 - q}{1 - q \exp(-vT)} \right\}.$$

Поэтому:

$$f_1(t) = \frac{A}{v} \left\{ \frac{1 - q}{1 - q \exp(-vT)} \right\} \exp(-vt) - \frac{A}{v} = \frac{A}{v} \left\{ \frac{(1 - q) \exp(-vt)}{1 - q \exp(-vT)} - 1 \right\} \quad (11)$$

Параметры t и T можно связать с координатами точки $(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{v}_\perp)$ в фазовом пространстве (при $n=0$ $\mathbf{v}_{0\perp} = \mathbf{v}_\perp$) условиями:

$$\mathbf{r}_\perp = \mathbf{r}_{0\perp} + \mathbf{v}_\perp t; \quad \mathbf{v}_\perp \mathbf{r}_{0\perp} < 0; \quad r_{0\perp}^2 = R^2; \quad T = -\frac{2(\mathbf{v}_\perp \mathbf{r}_{0\perp})}{v_\perp^2},$$

где $\mathbf{r}_{0\perp}$ – проекция радиус-вектора электрона в момент отражения от границы частицы на плоскость перпендикулярную оси цилиндра. Исключая отсюда $\mathbf{r}_{0\perp}$, получаем:

$$t = \left\{ \mathbf{r}_\perp \mathbf{v}_\perp + \left[(\mathbf{r}_\perp \mathbf{v}_\perp)^2 + (R^2 - r_\perp^2) v_\perp^2 \right]^{1/2} \right\} / v_\perp^2, \quad (12)$$

$$T = 2 \left[(\mathbf{r}_\perp \mathbf{v}_\perp)^2 + (R^2 - r_\perp^2) v_\perp^2 \right]^{1/2} / v_\perp^2. \quad (13)$$

Соотношения (11), (12) и (13) полностью определяют функцию $f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v})$.

Сечение поглощения

Найденная функция распределения позволяет рассчитать плотность вихревого тока (5) и среднюю диссипируемую мощность (2), а также сечение поглощения (6).

При вычислении интегралов (5), (2) удобно перейти к цилиндрическим координатам как в пространстве координат $(r_\perp, \varphi, r_z)$; полярная ось – ось Z ; вектор $\mathbf{H}_0$ параллелен оси Z), так и в пространстве скоростей $(v_\perp, \alpha, v_z)$. Ось цилиндра совпадает с осью Z . Поле (1) в цилиндрических координатах имеет лишь φ -компоненту:

$$\mathbf{E} = E_\varphi \mathbf{e}_\varphi; \quad E_\varphi = \frac{i\omega}{2c} r_\perp H_0 \exp(-i\omega t).$$

Соответственно, и плотность тока (5) обладает лишь φ -компонентой (линии тока являются замкнутыми окружностями с центрами на оси Z , в плоскостях перпендикулярных оси Z):

$$j_{\varphi} = E_{\varphi} 2e^2 \left(\frac{m}{h} \right)^3 \frac{1}{v} \left(\frac{2}{m} \right) \int_0^{v_F} \int_0^{2\pi} \frac{v_{\perp}^3}{\sqrt{v_F^2 - v_{\perp}^2}} \left\{ 1 - \frac{(1-q) \exp(-vt)}{1-q \exp(-vT)} \right\} \sin^2 \alpha \, dv_{\perp} \, d\alpha. \quad (14)$$

В силу симметрии задачи интегрирование по всему диапазону скоростей v_z заменяется интегрированием по положительному диапазону, и результат удваивается.

Преобразуем выражения (12) и (13), приняв следующие обозначения: $\xi = r_{\perp} / R$, $\rho = v_{\perp} / v_F$ и пользуясь тем, что $\mathbf{r}_{\perp} \mathbf{v}_{\perp} = r_{\perp} v_{\perp} \cos \alpha$. Получаем:

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{v_{\perp}}{v_F} \cos \alpha = \rho \cos \alpha, \\ t &= R \left(\xi \cos \alpha + \sqrt{1 - \xi^2 \sin^2 \alpha} \right) / v_{\perp}, \\ T &= 2R \sqrt{1 - \xi^2 \sin^2 \alpha} / v_{\perp}. \end{aligned}$$

Введем новую переменную:

$$z = \frac{R}{v_F} \left(\frac{1}{\tau} - i\omega \right) = \frac{R}{\Lambda} - i \frac{R\omega}{v_F} = x - iy.$$

Тогда выражение (14) принимает следующий вид:

$$j_{\varphi} = 2e^2 E_{\varphi} \left(\frac{m}{h} \right)^3 \frac{R}{z v_F} \frac{2v_F^3}{m} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{\rho^3}{\sqrt{1 - \rho^2}} \left\{ 1 - \frac{(1-q) \exp(-vt)}{1-q \exp(-vT)} \right\} \sin^2 \alpha \, d\rho \, d\alpha.$$

Сечение поглощения вычислим, пользуясь формулами (2) и (6):

$$\sigma = \left(\frac{8\pi}{cH_0^2} \right) \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int \mathbf{j} \mathbf{E}^* d^3 r = \sigma_0 F(x, y, G),$$

где размерная составляющая:

$$\sigma_0 = \frac{3\pi n e^2 R^3 L v_F}{m c^3},$$

безразмерная составляющая (физический смысл имеет ее реальная часть):

$$F(x, y, G) = \frac{y^2}{z} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{2\pi} \xi^3 d\xi \frac{\rho^3}{\sqrt{1-\rho^2}} \times \\ \times \left\{ 1 - \frac{\exp(-(4\pi G \rho \cos \alpha)^2) (1 - \exp(-vt))}{1 - \exp(-(4\pi G \rho \cos \alpha)^2) \exp(-vT)} \right\} \sin^2 \alpha d\rho d\alpha. \quad (15)$$

Результаты численного расчета безразмерного сечения поглощения $F(x, y, G)$ представлены на рисунках ниже.

Полагая в формуле (15), что $q = \text{const}$ ($0 < q < 1$), приходим к выражению для расчета безразмерного сечения поглощения $F(x, y, q)$ мелкой металлической частицы цилиндрической формы, полученному ранее на основе модели зеркально-диффузных граничных условий Фукса [11].

В заключение заметим, что независимо от характера отражения (при любом q) с ростом размера частицы (при $x \gg 1$) имеет место макроскопическая асимптотика безразмерного сечения поглощения частицы

$$F(x, y) = \frac{\pi y^2}{6(x - iy)},$$

причем, как видно из последней формулы, относительный вклад поверхностных эффектов убывает как x^{-1} ($|z| \sim x$).

Обсуждение результатов

На рисунке 1 приведено сравнение результатов численного расчета безразмерного сечения поглощения, полученных с использованием различных моделей граничных условий. Отношение безразмерного сечения поглощения $F(x, y, G)$ вычисленного с помощью модели Соффера к безразмерному сечению поглощения $F(x, y, q)$, вычисленному по модели Фукса, определялось при фиксированной безразмерной обратной длине свободного пробега электронов x для трех значений безразмерной частоты внешнего поля y .

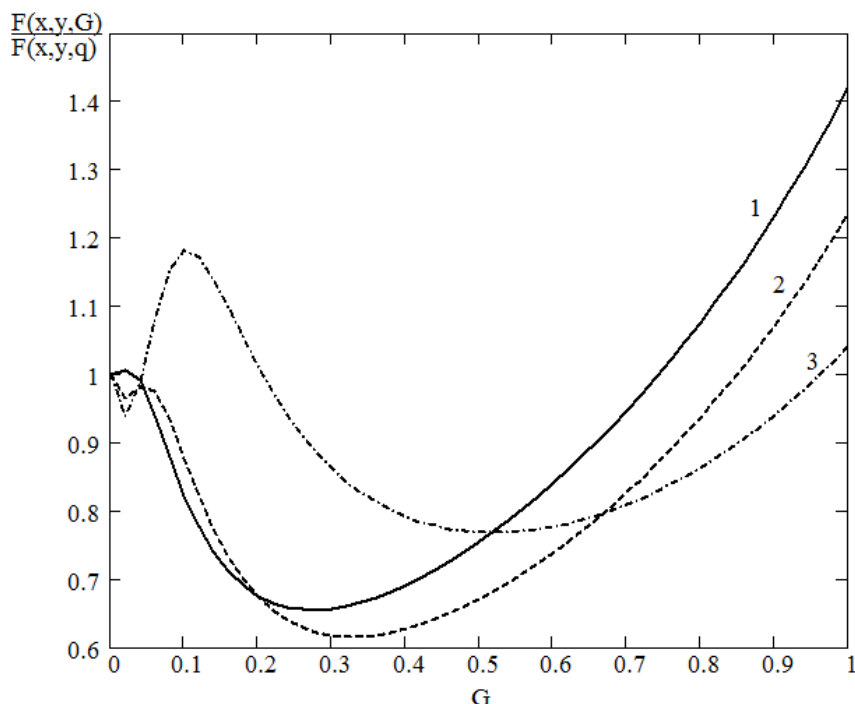


Рис. 1. Зависимость отношения безразмерного сечения поглощения $F(x, y, G)$ к безразмерному сечению поглощения $F(x, y, q)$ от параметра шероховатости поверхности частицы G ($q=1-G$) при фиксированном значении безразмерной обратной длины свободного пробега электронов x и постоянных значениях безразмерной частоты y : 1 – ($x = 0.1, y = 0.1$), 2 – ($x = 0.1, y = 0.2$), 3 – ($x = 0.1, y = 0.5$).

Из анализа хода кривых можно сделать вывод о том, что безразмерные сечения поглощения, рассчитанные с использованием различных моделей граничных условий, могут превалировать друг над другом в зависимости от величины безразмерной частоты внешнего поля и параметра шероховатости.

На рисунке 2 отображена зависимость безразмерного сечения поглощения частицы $F(x, y, G)$ от параметра шероховатости ее поверхности для случая, когда все кривые построены при одинаковом значении безразмерной обратной длины свободного пробега электронов x . Безразмерная частота внешнего поля y варьируется для каждой кривой.

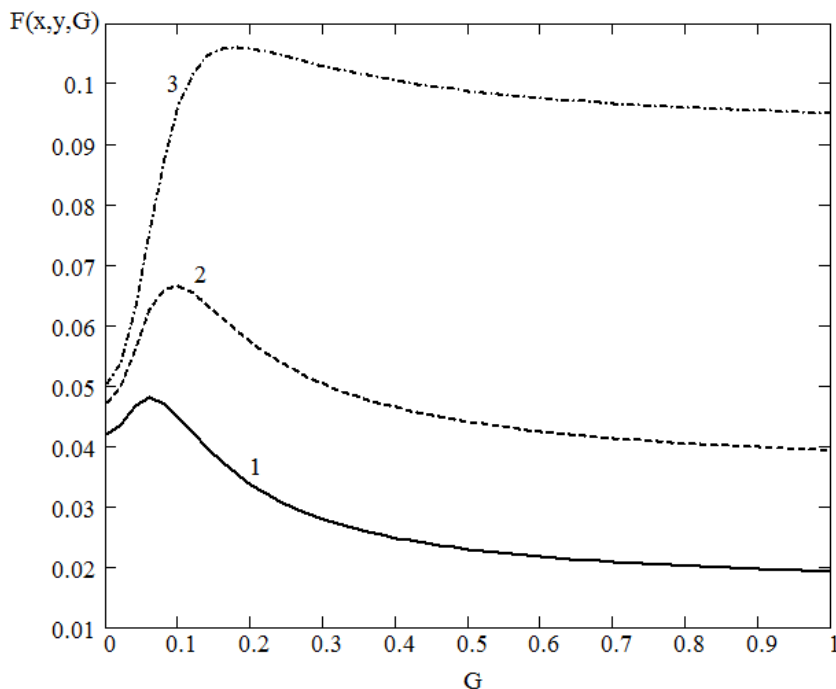


Рис. 2. Зависимость безразмерного сечения поглощения $F(x, y, G)$ от параметра шероховатости поверхности частицы G при фиксированном значении безразмерной обратной длины свободного пробега электронов x и постоянных значениях безразмерной частоты y : 1 – ($x = 0.1, y = 0.2$), 2 – ($x = 0.1, y = 0.3$), 3 – ($x = 0.1, y = 0.5$).

Из рисунка видно, что по мере увеличения параметра шероховатости G , безразмерное сечение поглощения плавно достигает максимума (для всех значений G его величина доминирует у кривых, соответствующих более высокой безразмерной частоте), а затем выходит на некоторое постоянное значение, характерное для каждой безразмерной частоты внешнего поля.

На рисунке 3 представлена зависимость безразмерного сечения поглощения частицы $F(x, y, G)$ от параметра шероховатости поверхности G при фиксированной безразмерной частоте внешнего поля y .

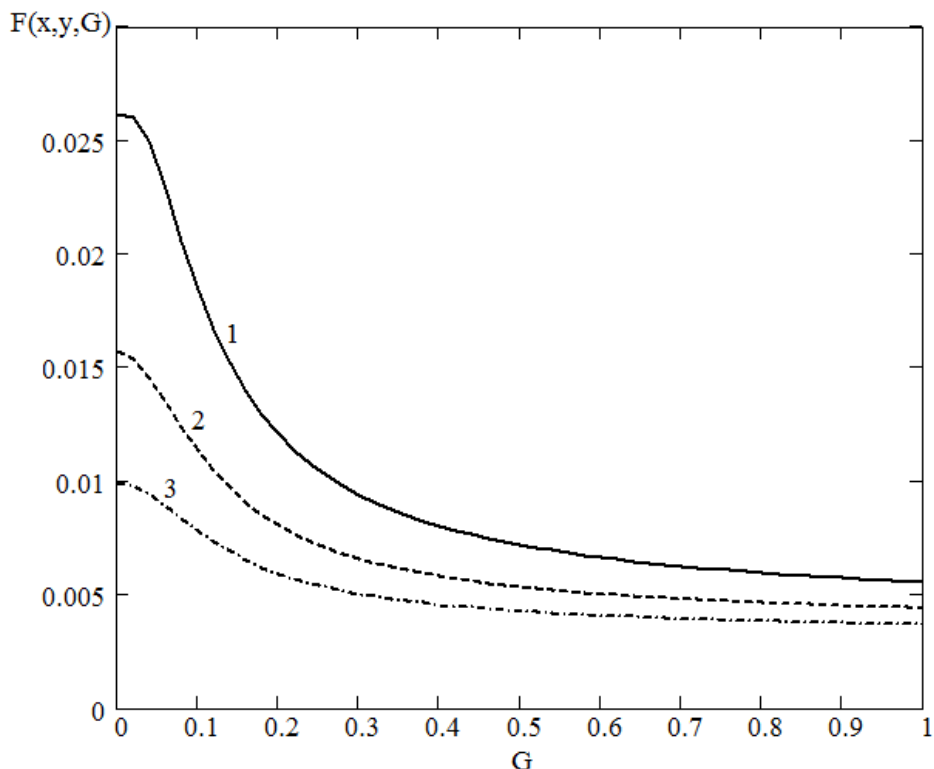


Рис. 3. Зависимость безразмерного сечения поглощения $F(x, y, G)$ от параметра шероховатости поверхности частицы G при фиксированном значении безразмерной частоты y и постоянных значениях безразмерной обратной длины свободного пробега электронов x : 1 – ($x = 0.1, y = 0.1$), 2 – ($x = 0.3, y = 0.1$), 3 – ($x = 0.5, y = 0.1$).

Каждой кривой на рисунке соответствуют различные значения безразмерной обратной длины свободного пробега электронов x . Из хода кривых следует, что при небольших значениях параметра G безразмерное сечение поглощения частиц уменьшается с увеличением их радиуса. По мере возрастания степени шероховатости поверхности все три кривые сближаются друг с другом.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Петров Ю. И. Физика малых частиц. М.: Наука, 1982. 360 с.
2. Морохов И. Д., Петин В. И., Трусов Л. И., Петрунин В. Ф. Структура и свойства малых металлических частиц // УФН. 1981. Т. 133. С. 653–692.
3. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1973. 721 с.

4. Trodahl H. J. Eddy currents in ultrafine metal particles // *Phys. Rev.* 1979. V.19, №2. P. 1316–1317.
5. Лесскис А. Г., Пастернак В. Е., Юшканов А. А. Поглощение инфракрасного излучения в мелкой металлической частице // *ЖЭТФ*. 1982. Т. 83. Вып. 1. С. 310–317.
6. Займан Дж. Электроны и фононы. М.: ИЛ, 1962. 488 с.
7. Trodahl H. J. Far-infrared absorption by eddy currents in ultrafine metal particles // *J. Phys. C: Sol. St. Phys.* 1982. V. 15. № 35. P. 7245–7254.
8. Mal'shukov A. G. Far-infrared absorption in small metal particles: non- local theory // *Sol. State. Commun.* 1982. V. 44. № 8. P. 1257–1260.
9. Мальшуков А. Г. Инфракрасное поглощение в малых металлических частицах // *ЖЭТФ*, 1983, т. 85, № 2(8), с. 700–707.
10. Лесскис А. Г., Юшканов А. А., Яламов Ю. И. Магнитное дипольное поглощение инфракрасного излучения мелкой металлической частицей // *Поверхность*. 1987. № 11. С. 115–121.
11. Завитаев Э. В., Юшканов А. А., Яламов Ю. И. Влияние характера отражения электронов от поверхности на электромагнитные свойства цилиндрических частиц // *ЖТФ*. 2003. Т. 73. Вып. 3. С. 16–22.
12. Fuchs K. The conductivity of thin metallic films according to the electron theory of metals // *Proc. Cambridge Phil. Soc.* 1938. V. 34. № 1. P. 100–108.
13. Soffer S.B. Statistical Model for the Size Effect in Electrical Conduction // *J. Appl. Phys.* 1967. V. 38. № 4. P. 1710–1715.
14. Чопра К. Л. Явления в тонких пленках. М.: Мир, 1972. 424 с.
15. Лебедев М.Е., Кузнецова И. А. Влияние поверхностного рассеяния электронов на электрическое поглощение мелкой металлической цилиндрической частицы // *Вестник ЯрГУ. Серия «Естественные и технические науки»*. 2012. № 1. С. 24–30.
16. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1992. 620 с.
17. Харрисон У. Теория твердого тела. М.: Мир, 1972. 616 с.
18. Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 843 с.

УДК 538.945

DOI: 10.18384/2310-7251-2015-4-83-91

Алиев И.Н., Меликянц Д.Г.*Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана*

О ТЕОРЕМАХ ПОЙНТИНГА И АБРАГАМА В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ СВЕРХПРОВОДНИКОВ ЛОНДОНОВ *

Аннотация: Как сейчас хорошо известно, последовательная теория явления сверхпроводимости должна быть квантовой, однако феноменологическая электродинамика сверхпроводников может быть построена на базе классических представлений, причем, несмотря на крупные успехи в объяснении явления сверхпроводимости, элементарная классическая теория требует существенных уточнений и усовершенствований. С учетом сказанного важно вновь проанализировать базовые законы электродинамики жидкости сверхпроводящих электронов. В настоящей работе выведены в системе СИ теоремы Пойнтинга (закон сохранения энергии) и Абрагама (закон сохранения импульса). Показано, что объемная плотность механического импульса жидкости сверхпроводящих электронов в непосредственном виде не входит в конечный результат. Она учитывается через тензор напряжений электронной жидкости. Заметим, что также учтен чисто конвективный поток импульса, который втекает внутрь объема вместе с электронной жидкостью.

Ключевые слова: уравнения Максвелла, уравнения Лондонов, сверхпроводящие электроны, плотность потока энергии, тензор электромагнитных напряжений, электромагнитный механический импульс, тензор напряжений жидкости.

I. Aliev, D. Melikyants*Bauman Moscow State Technical University*

POYNTING AND ABRAHAM THEOREMS IN THE ELECTRODYNAMICS OF LONDON SUPERCONDUCTORS

Abstract. As is now well known, a consistent theory of superconductivity should be quantum; however, the phenomenological electrodynamics of superconductors can be built on the basis of classical concepts and, despite major successes in explaining the phenomenon of superconductivity, elementary classical theory requires significant refinements and

© И.Н. Алиев, Д. Меликянц, 2015.

*Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (Проект №3.1526.2014/К).

improvements. With the above-said taken into account, it is important to re-examine the basic laws of electrodynamics of fluids of superconducting electrons. Using the SI system, the Poynting theorem (the energy conservation law) and Abraham theorem (the law of conservation of momentum) are derived. It is shown that the bulk density of the mechanical momentum of the fluid of superconducting electrons in the direct form is not included in the final result. It is taken into account by using the electronic stress tensor of the fluid. Note that a purely convective momentum flux, which flows inside the volume together with the e-liquid, is considered.

Keywords: *Maxwell's equations, London equations, superconducting electrons, energy flux density, stress tensor of electromagnetic, electromagnetic and mechanical momentum, stress tensor of the fluid.*

Рассмотрим, как выглядят теоремы сохранения энергии и импульса в классической теории сверхпроводимости. За основу мы возьмем уравнения Максвелла. Классическая электродинамика сверхпроводников совершенно необычна и своеобразна, если ее сравнивать с классической электродинамикой нормальных, несверхпроводящих материалов. Вместе с тем, следует подчеркнуть, что все равно и для сверхпроводников выполняются фундаментальные законы электродинамики, то есть справедливы общие уравнения Максвелла. Конечно, можно было бы сомневаться в применимости этих уравнений к сверхпроводникам. Однако, как показало все развитие теории сверхпроводимости, можно с определенностью сказать, что общие уравнения Максвелла справедливы и для сверхпроводников. Представляется поистине удивительным, что эти замечательные уравнения обладают столь универсальной применимостью буквально ко всем физическим явлениям окружающей природы. Они абсолютны и строги всегда. Хотя мы до конца не понимаем еще заложенный в них глубокий смысл. Пока что, оказывается, вообще невозможно добавить к ним никаких поправочных членов. Можно изменять только материальные соотношения, характеризующие различные среды. Как известно, их три:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}, \quad \vec{j} = \sigma \vec{E}, \quad (1)$$

причем последнее выражает закон Ома (σ - проводимость), который в случае сверхпроводников не работает. Поэтому обычную систему уравнений Максвелла замыкают на уравнения Лондонов и получают полную систему уравнений классической теории сверхпроводимости. Указанный подход в

настоящее время считается общепринятым, несмотря на существенные несообразности, о которых шла речь в разобранный ранее работе [1].

1. Посмотрим, как выглядит закон сохранения энергии в электродинамике Лондонов. Для этого рассмотрим первую пару уравнений Максвелла:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (2)$$

Под $\vec{j}$ здесь понимается плотность тока сверхпроводящих электронов. Для получения простых в физическом понимании соотношений примем, что выполняются первые два соотношения (1), причем, не вникая подробно в значения проницаемостей, считаем, что рассматриваемая структура однородна (диамагнетизм сверхпроводников общеизвестен). Рассматриваемое допущение само по себе является достаточно сильным, однако общепринятым. Тогда система приобретает вид:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \vec{B} &= \mu\mu_0 \vec{j} + \frac{1}{v^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \end{aligned}$$

Здесь $v = \frac{1}{\sqrt{\mu\mu_0\epsilon\epsilon_0}}$ – скорость распространения электромагнитных волн в

среде. Далее, по стандартной процедуре, умножаем первое уравнение на $\vec{B}$, второе – на $\vec{E}$ и вычтем из одного уравнения другое. После несложных преобразований получаем соотношение:

$$\operatorname{div}[\vec{E}, \vec{H}] = -(\vec{j}, \vec{E}) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{B}\vec{H}}{2} + \frac{\vec{E}\vec{D}}{2} \right),$$

представляющее собой, по существу, теорему Пойнтинга. Так как рассматриваемая среда сверхпроводящая, воспользуемся уравнениями

Лондонов. Из первого из них имеем: $\vec{E} = \frac{\partial}{\partial t}(\Lambda \vec{j})$, где $\Lambda = \frac{m}{e^2 n}$ (n –

концентрация сверхпроводящих электронов) – так называемая постоянная Лондонов. Тогда:

$$(\vec{j}, \vec{E}) = \Lambda \left(\vec{j}, \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\Lambda j^2}{2} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{m}{2e^2 n} e^2 n^2 v^2 \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(n \frac{mv^2}{2} \right).$$

Таким образом, теорема Пойнтинга в нашем случае приобретает вид:

$$-div[\vec{E}, \vec{H}] = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{B}\vec{H}}{2} + \frac{\vec{E}\vec{D}}{2} + \frac{\Lambda j^2}{2} \right),$$

физический смысл которой вполне понятен: поток электромагнитной энергии, *втекающей* через поверхность образца, идет на увеличение энергии электромагнитного поля и кинетической энергии сверхпроводящих электронов

($n \frac{mv^2}{2}$ – объемная плотность кинетической энергии). Напомним, что,

согласно одному из постулатов электродинамики Максвелла, выражение $\vec{S} = [\vec{E}, \vec{H}]$ представляет собой вектор объемной плотности потока энергии электромагнитного поля.

2. Рассмотрим теперь закон сохранения импульса (теорема Абрагама [2]) применительно к электродинамике сверхпроводников Лондонов. Введем тензор электромагнитных напряжений [3]:

$$T_{ik} = T_{ik}^B + T_{ik}^E,$$

$$T_{ik}^B = H_i B_k - \frac{1}{2} (\vec{H}, \vec{B}) \delta_{ik},$$

$$T_{ik}^E = E_i D_k - \frac{1}{2} (\vec{E}, \vec{D}) \delta_{ik}.$$

С учетом того, что $\frac{\partial B_k}{\partial x_k} \equiv div \vec{B} = 0$, и (2) получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{ik}^B}{\partial x_k} &= B_k \frac{\partial H_i}{\partial x_k} + H_i \frac{\partial B_k}{\partial x_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} (\vec{H}, \vec{B}) = B_k \frac{\partial H_i}{\partial x_k} - \frac{\mu \mu_0}{2} \frac{\partial H^2}{\partial x_i} = \\ &= \mu \mu_0 \left[H_k \frac{\partial H_i}{\partial x_k} - H_k \frac{\partial H_k}{\partial x_i} \right] = \mu \mu_0 [rot \vec{H}, \vec{H}]_i. \end{aligned}$$

Докажем последнее соотношение:

$$\begin{aligned} [\text{rot}\vec{H}, \vec{H}]_i &= \varepsilon_{ijk} (\text{rot}\vec{H})_j H_k = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{j\alpha\beta} H_k \frac{\partial}{\partial x_\alpha} H_\beta = \varepsilon_{jki} \varepsilon_{j\alpha\beta} H_k \frac{\partial}{\partial x_\alpha} H_\beta = \\ &= (\delta_{k\alpha} \delta_{i\beta} - \delta_{k\beta} \delta_{i\alpha}) H_k \frac{\partial}{\partial x_\alpha} H_\beta = \frac{\partial H_i}{\partial x_k} H_k - \frac{\partial H_k}{\partial x_i} H_k. \end{aligned} \quad (3)$$

Далее:

$$\frac{\partial T_{ik}^B}{\partial x_k} = [\text{rot}\vec{H}, \vec{B}]_i = [\vec{j}, \vec{B}]_i + \left[\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \vec{B} \right]_i.$$

Аналогично, с учетом (2):

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{ik}^E}{\partial x_k} &= D_k \frac{\partial E_i}{\partial x_k} + E_i \frac{\partial D_k}{\partial x_k} - \frac{\varepsilon \varepsilon_0}{2} \frac{\partial E^2}{\partial x_i} = \\ &= E_i \text{div} \vec{D} - \varepsilon \varepsilon_0 [\text{rot} \vec{E}, \vec{E}]_i = E_i \text{div} \vec{D} - \left[\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \vec{D} \right]_i. \end{aligned}$$

Собирая полученные выражения, с учетом того, что $\text{div} \vec{D} = \rho_s$, $\rho_s = en$ – объемная плотность электрических зарядов сверхпроводящих электронов, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} &= [\vec{j}, \vec{B}]_i + \left[\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \vec{B} \right]_i + E_i \rho_s - \left[\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \vec{D} \right]_i = [\vec{j}, \vec{B}]_i + \frac{\partial}{\partial t} [\vec{D}, \vec{B}]_i + E_i \rho_s = \\ &= [\vec{j}, \vec{B}]_i + E_i \rho_s + \mu \mu_0 \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} [\vec{E}, \vec{H}]_i = [\vec{j}, \vec{B}]_i + E_i \rho_s + \frac{1}{v^2} \frac{\partial S_i}{\partial t}. \end{aligned}$$

Окончательно:

$$\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = [\vec{j}, \vec{B}]_i + E_i \rho_s + \frac{\partial g_i}{\partial t}. \quad (4)$$

Здесь $\vec{g} = \frac{1}{v^2} [\vec{E}, \vec{H}]$ – объемная плотность механического импульса электромагнитного поля.

Далее воспользуемся уравнениями Лондонов, учитывая, что мы имеем дело со сверхпроводником:

$$\vec{E} = \frac{\partial}{\partial t}(\Lambda \vec{j}), \quad \vec{B} = -\text{rot}(\Lambda \vec{j}).$$

Тогда:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} &= -\Lambda [\vec{j}, \text{rot} \vec{j}]_i + \rho_s \Lambda \frac{\partial j_i}{\partial t} + \frac{\partial g_i}{\partial t}, \\ \rho_s \Lambda \frac{\partial j_i}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(en \frac{m}{e^2 n} env_i \right) = \frac{\partial}{\partial t} (mnv_i). \end{aligned}$$

Введя $\vec{g}_s = mn\vec{v}$ – объемную плотность механического импульса жидкости сверхпроводящих электронов, получим следующее соотношение:

$$\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = -\Lambda [\vec{j}, \text{rot} \vec{j}]_i + \frac{\partial}{\partial t} (g_{si} + g_i). \quad (5)$$

Для дальнейшего анализа удобно ввести следующий тензор:

$$S_{ik} = \Lambda j_i j_k - \frac{\Lambda}{2} j^2 \delta_{ik}.$$

С учетом того, что $\frac{\partial j_k}{\partial x_k} \equiv \text{div} \vec{j} = 0$, далее рассмотрим:

$$\frac{\partial S_{ik}}{\partial x_k} = \Lambda \frac{\partial j_i}{\partial x_k} j_k + \Lambda j_i \frac{\partial j_k}{\partial x_k} - \frac{\Lambda}{2} \frac{\partial j^2}{\partial x_i} = \Lambda \left(j_k \frac{\partial j_i}{\partial x_k} - j_k \frac{\partial j_k}{\partial x_i} \right) = -\Lambda [\vec{j}, \text{rot} \vec{j}]_i.$$

Последнее преобразование легко проверяется по аналогии с выводом формулы (3). Подставляя полученный результат в (5), получаем:

$$\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = \frac{\partial S_{ik}}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial t} (g_{si} + g_i). \quad (6)$$

Для того, чтобы выяснить физический смысл последнего соотношения, обратимся к гидродинамическому подходу Лондонов системы сверхпроводящих электронов, в основу которой положена модель идеальной несжимаемой жидкости, несущей электрический заряд. Подробную запись этой модели с анализом всех приближений, допущений и связанных физических неточностей можно посмотреть в [1, (1)].

Уравнение Эйлера в этом случае приобретает вид:

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho_s [\vec{v}, \vec{B}]_i + \rho_s E_i, \quad (7)$$

где $\rho = nm$ – объемная плотность сверхпроводящих электронов. С учетом несжимаемости электронной жидкости: $\frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0$, $\vec{g}_s = mn\vec{v}$ и $\vec{j} = en\vec{v} = \rho_s \vec{v}$

уравнение (7) перепишется в следующем виде:

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x_k} (p \delta_{ik} + \rho v_i v_k) + [\vec{j}, \vec{B}]_i + \rho_s E_i$$

или, что то же самое:

$$\frac{\partial g_{si}}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} = [\vec{j}, \vec{B}]_i + \rho_s E_i,$$

где $\Pi_{ik} = p \delta_{ik} + \rho v_i v_k$ – тензор напряжений электронной жидкости. Отметим одно важное обстоятельство. Для корректного получения второго уравнения Лондонов нами было принято вынужденно бездоказательное предположение о равенстве нулю давления сверхпроводящих электронов [1, (10)]. Для дальнейшего анализа вернемся к уравнению (7), которое перепишем в другом виде:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial x_i} - [\vec{v}, \text{rot} \vec{v}]_i = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{en}{mn} [\vec{v}, \text{rot} \vec{j}]_i \Lambda + \frac{en}{mn} E_i.$$

Отсюда, учитывая, что $\Lambda = \frac{m}{e^2 n}$, получаем:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) + \frac{e}{m} E_i. \quad (8)$$

Вернемся к промежуточному тензору S_{ik} :

$$S_{ik} = \Lambda j_i j_k - \frac{\Lambda}{2} j^2 \delta_{ik} = \frac{m}{e^2 n} \left(n^2 e^2 v_i v_k - \frac{1}{2} n^2 e^2 v^2 \delta_{ik} \right) = \rho v_i v_k - \frac{1}{2} \rho v^2 \delta_{ik}.$$

Далее:

$$\frac{\partial S_{ik}}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_i v_k) - \rho \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{v^2}{2}. \quad (9)$$

Из уравнений (8) и (9) исключим слагаемое $-\rho \frac{\partial v^2}{\partial x_i} \frac{1}{2}$:

$$\frac{\partial S_{ik}}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_i v_k) + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{e}{m} mn E_i.$$

Объединив полученное уравнение с (6), получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} &= \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_i v_k + p \delta_{ik}) - en E_i + \frac{\partial}{\partial t} (g_{si} + g_i) = \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} - en E_i + \frac{\partial}{\partial t} (g_{si} + g_i) = \\ &= \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} - en \frac{\partial}{\partial t} (\Lambda_j) + \frac{\partial g_{si}}{\partial t} + \frac{\partial g_i}{\partial t} = \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} - en \frac{m}{e^2 n} \frac{\partial}{\partial t} (env_i) + \frac{\partial g_{si}}{\partial t} + \frac{\partial g_i}{\partial t} = \\ &= \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} - \cancel{\frac{\partial}{\partial t} (mnv_i)} + \cancel{\frac{\partial g_{si}}{\partial t}} + \frac{\partial g_i}{\partial t}. \end{aligned}$$

Получили в дифференциальной форме закон сохранения импульса:

$$\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} + \frac{\partial g_i}{\partial t}.$$

Для того, чтобы вскрыть физический смысл последнего соотношения, проинтегрируем его с использованием теоремы Гаусса по некоторому фиксированному объему V , ограниченному поверхностью S с внешней нормалью $\vec{n}$:

$$\begin{aligned} \int_V \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} dV - \int_V \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} dV &= \int_V \frac{\partial g_i}{\partial t} dV, \\ \oint_S (T_{ik} - \Pi_{ik}) n_k dS &= \frac{d}{dt} \int_V g_i dV. \end{aligned}$$

Итак, физический смысл полученного закона сохранения достаточно прост: втекающий в образец посредством электромагнитного поля механический импульс идет на увеличение механического импульса электромагнитного поля внутри образца. Интересно отметить, что, в отличие от других форм записи полученного закона [2], объемная плотность механического импульса жидкости сверхпроводящих электронов в непосредственном виде не вошла в конечный результат. Она учтена через тензор напряжений электронной жидкости. Заметим, что также учтен чисто конвективный поток импульса, который втекает внутрь объема вместе с электронной жидкостью.

Мы приносим благодарности В.В. Толмачеву, при обсуждении с которым статьи [5] и родилась идея настоящего исследования, А.М. Макарову и А.Н. Морозову за постоянный интерес к работе и С.О. Юрченко, дискуссии с которым явно обогатили рассматриваемый материал.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Алиев И.Н., Копылов И.С. Применение метода множителей Лагранжа к вычислению магнитного поля постоянного тока // Динамика сложных систем. 2015. № 4. С. 12–27.
2. M. Abragam, R. Becker. Theorie der Elektrizität, Bd.1 Einführung in die Maxwellsche theorie der Elektrizität, Leipzig, 1932 [М. Абрагам, Р. Беккер. Теория электричества. М.-Л.: ОНТИ, 1936. 281 с.].
3. Скобельцын Д.В. О тензоре импульс-энергии электромагнитного поля // УФН. 1973. Т. 110. Вып. 2. С. 253–292.
4. Джексон Д. Классическая электродинамика. М.: Мир, 1965. 702 с.
5. M. Llano, V. Tolmachev. Multiple phases in a new statistical boson-fermion model of superconductivity // Physica. 2003. V. A317. P. 546–564.

РАЗДЕЛ III.

ТЕОРИЯ И МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ И ВОСПИТАНИЯ

УДК 378

DOI: 10.18384/2310-7251-2015-4-92-100

Власова Е.А.¹, Попов В.С.¹, Латышев А.В.²

¹Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана

²Московский государственный областной университет

ОЦЕНКА ЗНАНИЙ СТУДЕНТОВ В РАМКАХ МОДУЛЬНО-РЕЙТИНГОВОЙ СИСТЕМЫ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ В ВУЗЕ

Аннотация. Обобщен опыт преподавания высшей математики в техническом вузе в рамках модульно-рейтинговой системы. Сформулированы правила начисления рейтинговых баллов за отдельные модули математических дисциплин с учетом зачетных и экзаменационных требований. Показано использование модульно-рейтинговой системы при изучении дисциплины «Математический анализ» (с экзаменом), дисциплины «Аналитическая геометрия» (с дифференцированным зачетом), курса «Основы теории вероятностей и математической статистики» (с недифференцированным зачетом).

Ключевые слова: методические проблемы преподавания, приемы обучения, оценочные средства, модульно-рейтинговая система.

E. Vlasova¹, V. Popov¹, A. Latyshev²

¹Bauman Moscow State Technical University

²Moscow State Regional University

ASSESSMENT OF STUDENTS' KNOWLEDGE WITHIN THE MODULE-RATING SYSTEM OF TEACHING MATHEMATICS IN HIGH SCHOOL

Abstract. *We summarize the experience of teaching mathematics at a Technical University in the framework of the module-rating system. The rules of calculation of rating points are formulated for the individual modules of mathematical disciplines including test and examination requirements. We substantiate the use of the module-rating system in the study of the discipline "Mathematical analysis" (with exam), the discipline of "Analytical geometry" (with differentiated credit), course "Foundations of probability theory and mathematical statistics" (with undifferentiated offset).*

Keywords: *methodical problems of teaching, techniques of teaching, evaluation tools, module-rating system.*

Введение

Основными целями введения модульно-рейтинговой системы (МРС) в образование являются: стимулирование систематической работы студентов, равномерное распределение учебной нагрузки, связанной с самостоятельной работой, в течение всего семестра, снижение роли случайностей при сдаче экзаменов и зачетов, повышение состоятельности в учебе. Блочно-модульная система преподавания позволяет осуществлять проверку полученных студентами теоретических и практических знаний более одного раза в течение семестра, и тем самым неоднократно в семестр объективно оценивать уровень таких знаний и принимать меры по корректировке учебного материала индивидуально для каждого студента [1;2].

Правила начисления рейтинговых баллов за отдельный модуль дисциплины

Модульно-рейтинговая система оценки знаний студентов по математическим дисциплинам 1 – 2 курсов предполагает деление дисциплины на **два модуля**, каждый из которых включает изучение некоторого законченного раздела дисциплины. Контроль знаний, умений и навыков в течение одного модуля осуществляются на базе домашних заданий (ДЗ),

контрольных работ (КР), рубежного контроля (РК) и итогового контроля по модулю (КМ) [3].

Домашнее задание в модуле состоит из задач, охватывающих фактически весь материал мини-курса, что предполагает его равномерное выполнение и поэтапную проверку преподавателем. Если к окончательному сроку сдачи ДЗ студент представляет правильное решение, то ему за это задание выставляется максимальный балл. После срока сдачи ДЗ студент, не набравший минимального балла за ДЗ, может продолжить работу над заданием. При этом в случае успешной работы студенту начисляется минимальный балл за ДЗ [4].

Как правило, контрольные мероприятия (КР и РК) внутри модуля соответствуют домашнему заданию и состоят из одной КР или одного РК. Все контрольные мероприятия (всего их не более трех внутри одного модуля с оценкой в баллах) проводятся во всех группах в одни и те же сроки по единым комплектам заданий и оцениваются по единой системе. Каждое задание контрольного мероприятия оценивается в трехбалльной системе: 0, 1, 2 (возможно, с некоторым весом), что дает возможность уменьшить субъективность при выставлении оценок разными преподавателями. Контрольное мероприятие считается сданным, если за него студент получил балл K не ниже K_{min} – минимально разрешенного по данному мероприятию. При этом K_{min} в среднем составляет не менее 60% от максимального числа K_{max} . Если студент сдал контрольное мероприятие в срок, то за него дополнительно начисляется призовой балл P .

В случае если студент в срок не набирает минимального балла за КР или РК, то он может переписать эту работу. При положительном результате (наборе баллов не менее установленного минимального) студенту выставляется минимальный балл за КР или РК. Если минимальный балл был получен к сроку окончания модуля, то студент не теряет право на получение призового балла P .

Итоговый контроль по модулю проводится после всех контрольных мероприятий в виде письменной работы с обязательным включением теоретических вопросов. Если студент не набирает установленного минимума за эту работу, он может в течение следующей после срока недели один раз переписать эту работу, при этом не теряя права на получение призового балла P .

Балл R_M за каждый модуль равен сумме рейтинговых баллов (с учетом призовых) за все контрольные мероприятия, предусмотренные при изучении данного модуля. Для каждого модуля устанавливается **минимальный балл** m_M . Изучение модуля считается успешным, т.е. студент положительно аттестован по данному модулю, если $R_M \geq m_M$. По итогам работы в течение модуля студенту может быть добавлен дополнительный балл P_M ($P_M \leq 3$) за прилежание, посещаемость, активность, работу на КСР и т.п.

После планового срока окончания модуля в случае незакрытых контрольных мероприятий студент может доработать их и получить **минимальный балл**.

Правила начисления рейтинговых баллов за дисциплину с экзаменом

Максимальная сумма баллов, которую студент может набрать по дисциплине, составляет 100 баллов. Необходимым условием положительной аттестации студента по дисциплине является выполнение условия $R_{M_i} \geq m_{M_i}$ для каждого i -го модуля. Сумма баллов R_D по дисциплине вычисляется по формуле:

$$R_D = \sum_i (R_{M_i} + P_{M_i}) + R_E,$$

где R_{M_i} – сумма баллов за i -й модуль, P_{M_i} – призовой балл за i -й модуль, R_E – балл за итоговый контроль (экзамен).

Окончательная оценка за дисциплину выставляется согласно шкале перевода рейтингового балла R_D в экзаменационную оценку. Для всех дисциплин имеется **единая шкала выставления экзаменационных оценок**:

Рейтинг	Экзаменационная оценка
90 – 100	отлично
75 – 89	хорошо
60 – 74	удовлетворительно
0 – 59	неудовлетворительно

Все контрольные мероприятия и модули, указанные в программе дисциплины, являются обязательными. При наличии задолженностей по одному или нескольким модулям во время экзамена студент сдает эти

задолженности в соответствии с программой дисциплины, после чего получает допуск к экзамену.

Студент, удаленный с экзамена за списывание, получает неудовлетворительную оценку.

Пример по использованию МРС при изучении дисциплины «Математический анализ» с экзаменом приведен в приложении 1.

Правила начисления рейтинговых баллов за дисциплину с дифференцированным зачетом

Максимальная сумма баллов, которую студент может набрать по дисциплине, составляет 100 баллов. Необходимым условием положительной аттестации студента по дисциплине является выполнение условия $R_{M_i} \geq m_{M_i}$ для каждого i -го модуля. Сумма баллов R_D по дисциплине вычисляется по формуле:

$$R_D = \sum_i R_{M_i},$$

где R_{M_i} – сумма баллов за i -й модуль.

Окончательная оценка за дисциплину выставляется согласно шкале перевода рейтингового балла R_D в зачетную оценку. Для всех дисциплин имеется **единая шкала выставления оценок дифференцированного зачета:**

Рейтинг	Зачетная оценка
90 – 100	отлично
75 – 89	хорошо
60 – 74	удовлетворительно
0 – 59	неудовлетворительно

Оценка выставляется по результатам работы в семестре. Если к моменту закрытия зачетной ведомости сумма баллов по модулям $\sum_i R_{M_i} \geq 60$, то студент получает удовлетворительную, хорошую или отличную оценку, согласно представленной выше шкале. **Если студент все модули сдал в срок, то он по желанию может повысить свою оценку.** Для этого он сдает итоговый контроль в виде письменной итоговой зачетной работы. При выполнении определенных требований для повышения оценки студент получает более

высокую оценку любого достоинства. В противном случае ему выставляется оценка по результатам работы в семестре.

При наличии задолженностей по одному или нескольким модулям без уважительной причины к моменту закрытия зачетной ведомости студент получает оценку «неудовлетворительно». В дальнейшем студент сдает эти задолженности в соответствии с программой дисциплины и может претендовать только на оценку «удовлетворительно».

Пример по использованию МРС при изучении дисциплины «Аналитическая геометрия» с дифференцированным зачетом приведен в приложении 2.

Правила начисления рейтинговых баллов за дисциплину с недифференцированным зачетом

Максимальная сумма баллов, которую студент может набрать по дисциплине, составляет 100 баллов. Необходимым условием положительной аттестации студента по дисциплине является выполнение условия $R_{M_i} \geq m_{M_i}$ для каждого i -го модуля. Сумма баллов R_D по дисциплине вычисляется по формуле:

$$R_D = \sum_i R_{M_i},$$

где R_{M_i} – сумма баллов за i -й модуль.

Окончательная оценка за дисциплину выставляется согласно шкале перевода рейтингового балла R_D в зачетную оценку. Для всех дисциплин имеется **единая шкала выставления оценок недифференцированного зачета**:

Рейтинг	Зачетная оценка
60 – 100	зачет
0 – 59	незачет

Оценка выставляется по результатам работы в семестре. Если к моменту закрытия зачетной ведомости сумма баллов по модулям $\sum_i R_{M_i} \geq 60$, то студент получает «зачет».

При наличии задолженностей по одному или нескольким модулям без уважительной причины к моменту закрытия зачетной ведомости студент получает оценку «незачет». В дальнейшем студент сдает эти задолженности в соответствии с программой дисциплины.

Пример по использованию МРС при изучении дисциплины «Основы теории вероятностей и математической статистики» с недифференцированным зачетом приведен в приложении 3.

Приложение 1

Математический анализ

1 курс, 1 семестр

Рейтинговая система контроля освоения дисциплины с экзаменом

	Неделя проведения контроля	Рейтинговые баллы	Оценка в баллах		
			Минимальная K_{min}	Максимальная K_{max}	Повышенная P в срок (+ призовой балл)
Семестр 1					
ДЗ №1	4	$K_{11} + P_{11}$	4	6	+1
ДЗ №2	9	$K_{12} + P_{12}$	4	6	+1
Контроль по модулю	9	$K_{13} + P_{13}$	17	28	+5
Сумма баллов за КМ		$R_{M1} = \sum_i (K_{1i} + P_{1i})$	25	40	+7 (max)
Призовой балл по итогам		P_{M1}	0	3	+3 (max)
Модуль 1	9	$R_{M1} + P_{M1}$	25	40	50 (max)
КР	12	$K_{21} + P_{21}$	9	14	+2
ДЗ №3	16	$K_{22} + P_{22}$	4	6	+1
Контроль по модулю	16	$K_{23} + P_{23}$	12	20	+5
Сумма баллов за КМ		$R_{M2} = \sum_i (K_{2i} + P_{2i})$	25	40	+7 (max)
Призовой балл по итогам		P_{M2}	0	3	+3 (max)

Модуль 2	17	$R_{M2} + P_{M2}$	25	40	50 (max)
Экзамен	Экз. сессия	R_E	10	20	
Итоговый рейтинг		$R_D = \sum_i (R_{M_i} + P_{M_i}) + R_E$	60	100	100

Приложение 2

Аналитическая геометрия

1 курс, 1 семестрРейтинговая система контроля освоения дисциплины с
дифференцированным зачетом

	Неделя проведения контроля модуля	Оценка за модуль в баллах	
		Максимальная	Минимальная
Семестр 1			
ДЗ №1	9	15	10
Контроль по модулю №1	10	35	20
Модуль 1	10	50	30
ДЗ №2	12	10	6
РК	13	18	11
Контроль по модулю №2	16	22	13
Модуль 2	16	50	30
Итоговый рейтинг		100	60

Студентам, сдавшим все модули в срок, предоставляется возможность на 17 неделе повысить свой рейтинг и итоговую оценку.

Приложение 3

Основы теории вероятностей и математической статистики

2 курс, 3 семестрРейтинговая система контроля освоения дисциплины
с недифференцированным зачетом

	Неделя проведения контроля модуля	Оценка за модуль в баллах	
		Максимальная	Минимальная
Семестр 3			
ДЗ №1, часть 1	9	20	12
Рубежный контроль	9	30	18
Модуль 1	9	50	30
ДЗ №1, часть 2	14	10	5
Рубежный контроль	16	40	25
Модуль 2	17	50	30
Итоговый рейтинг		100	60

ЛИТЕРАТУРА:

1. Власова Е.А., Попов В.С. Принципы блочно-модульной системы преподавания математики // Проблемы совершенствования качества образования в вузе: материалы второй научно-практической. конференции, Орехово-Зуево, 05.02.2010. Орехово-Зуево: Изд-во Орехово-Зуевского филиала института экономики и предпринимательства, 2010. С. 88–93.
2. Власова Е.А., Попов В.С. О разработке вузовских учебных программ математических дисциплин // Проблемы совершенствования качества образования: материалы четвертой международной науч.-практической конференции, Орехово-Зуево, 17.02.2012. Орехово-Зуево: Изд-во Орехово-Зуевского филиала института экономики и предпринимательства, 2012. С. 52–57.
3. Власова Е.А., Грибов А.Ф., Попов В.С., Латышев А.В. Принципы модульно-рейтинговой системы преподавания высшей математики // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2013. № 3. С. 93–99.
4. Власова Е.А., Грибов А.Ф., Попов В.С., Латышев А.В. Развитие мотивационных стимулов обучения в рамках модульно-рейтинговой системы организации учебного процесса // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2014. № 1. С. 48–53.

УДК 530.145 (09)

DOI: 10.18384/2310-7251-2015-4-101-108

Исаев В.И.*Независимый исследователь (г. Москва)*

Г. ГЕЛЬМГОЛЬЦ И ИСТОРИЯ ОСНОВАНИЯ ГЕРМАНСКОГО ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

Аннотация. В работе рассмотрена биография выдающегося немецкого ученого XIX века Г. Гельмгольца и история основания Германского физико-технического института. Кратко отмечены главные научные достижения Г. Гельмгольца в физике, а также его роль при основании Германского физико-технического института. Гельмгольц являлся научным руководителем исследований немецкого физика В. Вина по тепловому излучению, в результате которых В. Вин в 1893-1894 гг. установил законы теплового излучения и впоследствии в 1895 г. совместно с немецким физиком О. Люммером сконструировал лабораторный источник теплового излучения.

Ключевые слова: теория теплового излучения, Кирхгоф, Гельмгольц, Вин, Планк.

V. Isaev*Independent researcher (Moscow)*

H. HELMHOLTZ AND HISTORY OF THE FOUNDATION THE GERMAN PHYSICAL TECHNICAL INSTITUTE

Abstract. We consider the biography of eminent German nineteenth-century scientist H. Helmholtz and history of the foundation of the German physical technical institute. H. Helmholtz's main scientific achievements in physics and physiology as well as his role in the foundation of the German physical technical institute are briefly discussed. H. Helmholtz was a supervisor of a scientific research on thermal radiation by German physicist W. Wien, as a result of which W. Wien established laws of thermal radiation in 1893–1894 and subsequently together with German physicist O. Lummer designed a laboratory source of thermal radiation in 1895.

Key words: the theory of thermal radiation, Kirchhoff, Helmholtz, Wien, Planck.

Настоящая работа является кратким изложением одного из разделов лекционного курса по истории квантовой теории, разрабатываемого автором.

Необходимость создания такого курса диктуется тем, что квантовая теория – это наука, которая не имеет прямых аналогов в классической физике, и для облегчения понимания автор предлагает читать студентам одновременно курс истории квантовой теории. Актуальность создания такого курса связана с тем, что квантовая теория занимает особое место в курсе физики, открывая студентам пути изучения мира молекулярных и атомных явлений и имеет множество приложений в современном мире – таких как компьютеры, мобильная связь и т.д.

Две работы автора [1;2] были посвящены описанию основных проблем физики теплового излучения конца XIX века, а также вкладу российских физиков В.А. Михельсона [1] и Б.Б. Голицына [2] в теорию теплового излучения и, в частности, в решение проблемы определения вида универсальной функции Кирхгофа. После работ Л. Больцмана, В.А Михельсона и Б.Б. Голицына по тепловому излучению следующим этапом в проблеме



Г. Гельмгольц

определения универсальной функции Кирхгофа стали работы немецкого физика Вильгельма Вина 1893–1896 гг. В 1890–1894 гг. В. Вин работал ассистентом известного немецкого физика Германа Гельмгольца в Германском физико-техническом институте. Рассмотрим кратко биографию Г. Гельмгольца и его роль при основании Германского физико-технического института.

Герман Людвиг Фердинанд Гельмгольц родился 31 августа 1821 года в Потсдаме. Его отец Август Фердинанд Гельмгольц,

окончивший Берлинский университет, по образованию был философом и работал учителем Потсдамской гимназии. Его мать Каролина Пенн была дочерью артиллерийского офицера, имевшего английских и французских предков. [3;4;5].

В 1830 г. Герман Гельмгольц поступил в Потсдамскую гимназию, до этого с 1828 по 1829 г. он обучался в начальной школе. Наибольший интерес при обучении в гимназии у Гельмгольца вызывали геометрия, физика и химия. Уже в гимназии он пытался конструировать простейшие оптические системы, состоящие из разных линз, и изучал оптические теоремы, что помогло ему впоследствии при изобретении глазного зеркала. Отец настоял, чтобы Гельмгольц после окончания гимназии занялся медициной, а не физикой, поскольку занятия физикой не могли, по его мнению, обеспечить жизнь молодого человека [3;4;5].

26 сентября 1838 г. Герман Гельмгольц поступил в Военно-медицинский институт в Берлине. Для лучшего ознакомления с научной литературой Герман становится помощником библиотекаря в институтской библиотеке и изучает в свободное время труды Бернулли, Эйлера, Лагранжа, д'Аламбера и других ученых. Гельмгольц знакомится с известным физиологом Иоганном Мюллером (1801–1858), профессором Берлинского университета, и его учениками – Э. Дюбуа-Реймоном, Р. Вирховым и Э. Брюкке. Молодые физиологи стремились изучать физику и объяснять физиологические процессы на физическом языке и впоследствии вошли вместе с группой учеников и сотрудников профессора Берлинского университета Густава Магнуса (1802–1870) в Берлинское физическое общество, образованное в 1845 г. [3;4;5].

2 ноября 1842 г. Гельмгольц защитил диссертацию на тему «О строении нервной системы у беспозвоночных» и получил степень доктора. После окончания института по условиям казенного обучения Гельмгольц должен был отработать восемь лет в армии и 1 октября 1843 г. Он становится военным врачом в полку, расквартированном в Потсдаме. Несмотря на то, что он был вынужден заниматься врачебной практикой, Гельмгольц не прекратил занятий наукой, организовал домашнюю лабораторию и занимался вопросами исследования сокращений мышц и распространения нервных возбуждений в мышцах. В 1845 г. Гельмгольц был командирован в Берлин на полгода для сдачи экзамена на звание врача-хирурга. Это время Гельмгольц использовал для работы в физической лаборатории профессора Берлинского университета Г. Магнуса и участия в работах Берлинского физического общества [3;4;5].

23 июля 1847 г. на заседании Берлинского физического общества Гельмгольц прочитал доклад «О сохранении силы», в котором он сформулировал и

математически обосновал применимость закона сохранения энергии в явлениях природы. Через физика Г. Магнуса Гельмгольц передал текст работы для опубликования редактору и основателю журнала «Annalen der Physik» И. Поггендорфу (1796–1877), однако тот отказался печатать работу Гельмгольца вследствие загруженности журнала экспериментальными работами и посоветовал Гельмгольцу издать его работу отдельной брошюрой. В 1847 г. Гельмгольц напечатал работу «О сохранении силы», однако многими физиками она была воспринята с сомнениями, и только математик К. Якоби (1804–1851) поддержал Гельмгольца. [5;6].

В 1848 г. по ходатайству своего учителя – физиолога И. Мюллера и вследствие поддержки известного немецкого естествоиспытателя А. Гумбольдта (1769–1859) Гельмгольц был освобожден от военной службы и получил место преподавателя анатомии в Берлинской академии художеств, что давало ему возможность для дальнейшей научной работы. В сентябре 1849 г. Гельмгольц становится профессором физиологии Кенигсбергского университета, и в этой должности он оставался 6 лет. [3;4;5]. В конце 1850 г. Г. Гельмгольц изобрел глазное зеркало – офтальмоскоп, позволивший впервые увидеть глазное дно человека, и занимался теорией цветового зрения человека. В 1851 г. он также изобрел офтальмометр – прибор для определения радиуса кривизны глазной роговицы. При поддержке А. Гумбольдта 25 марта 1855 г. состоялось назначение Гельмгольца профессором анатомии и физиологии Боннского университета [3;4;5].

В 1856 г. выходит из печати первая часть фундаментального труда Гельмгольца – «Физиологическая оптика», в котором были изложены полученные Гельмгольцем результаты исследований человеческого глаза и теории зрительного восприятия. Впоследствии две другие части этого труда были опубликованы в 1860 и 1867 гг. В это время научные интересы Гельмгольца смещаются в область акустики и гидродинамики. Гельмгольца интересовали вопросы возникновения комбинационных тонов и восприятия звука человеком. К этому времени относится конструирование Гельмгольцем шаровых акустических резонаторов – резонаторов Гельмгольца, необходимых ему для исследований возникновения гласных звуков в человеческой речи [3;4;5].

В 1858 г. Гельмгольц принимает предложение Гейдельбергского университета и осенью становится профессором физиологии в этом университете. В это же время в Гейдельбергском университете работали профессора Г. Кирхгоф и Р. Бунзен, чьи спектральные исследования в 1859-1860 гг. привели к открытию спектрального анализа и способствовали бурному прогрессу физики. К этому периоду относится известная математическая работа Гельмгольца по установлению законов поведения вихрей в гидродинамике, нашедшая позднее приложения в гидродинамике и научной метеорологии.

В 1863 г. был напечатан фундаментальный труд Гельмгольца «Учение о звуковых ощущениях как физиологической основе теории музыки», в котором были изложены исследования Гельмгольца по акустике, теории звуковых тонов и обертонов, анатомии и физиологии человеческого уха. Постепенно научные интересы Гельмгольца все более смещаются из области акустических и оптических проблем физиологии в область физики, механики и электродинамики. Следует отметить, что с 1870 г. Гельмгольц в основном занимается физическими исследованиями.

В 1870 г. после смерти профессора Г. Магнуса освободилась кафедра физики в Берлинском университете. Предложение занять эту кафедру было направлено сначала профессору Гейдельбергского университета Г. Кирхгофу. После отказа Кирхгофа покинуть Гейдельбергский университет, где он проводил спектральные исследования вместе с профессором Р. Бунзеном, предложение занять кафедру физики в Берлинском университете было направлено Г. Гельмгольцу.

Гельмгольц согласился занять кафедру физики в Берлинском университете, оговорив одним из условий своего согласия строительство нового Физического института при Берлинском университете для развития экспериментальных и теоретических исследований по физике и должность директора в этом институте [3;4;5].

Германский министр образования принял эти условия и 13 февраля 1871 г. императором Вильгельмом «...было подписано назначение, имевшее место впервые в истории Берлинского университета: – врач и профессор физиологии был назначен на кафедру теоретической физики» [4]. Однако кредиты на строительство нового Физического института при Берлинском университете

были отпущены с опозданием, и с 1871 по 1875 г. Гельмгольцу пришлось проводить экспериментальные исследования и занятия физического практикума в небольшой и плохо оборудованной физической лаборатории Г. Магнуса [4;5].

К 1871 г. относится доклад Гельмгольца в Берлинской Академии наук «О скорости распространения электродинамических действий», в котором Гельмгольц показал, что скорость распространения электромагнитных возмущений велика и приближается к скорости света. Эта работа оказалась одной из важных электродинамических работ Гельмгольца и впоследствии ассистент Гельмгольца известный физик Генрих Герц (1857–1894) продолжил и развил эти работы Гельмгольца, открыв электромагнитные волны.

В 1876 г. новое здание Физического института при Берлинском университете было построено, и в нем начались исследования Гельмгольца и его сотрудников, в частности в 1880–1883 гг. там проводил свои исследования электромагнитных волн Генрих Герц, который позже, в 1888 г., обнаружил, что быстрые электромагнитные колебания в незамкнутых цепях испускают в окружающее пространство электромагнитные волны, что явилось доказательством правильности электромагнитной теории Дж. Максвелла. Необходимость создания Физико-технического института, не связанного с педагогической работой и разрабатывающего только научные и технологические проблемы, была обоснована Гельмгольцем министру образования в 1872 г., и была создана комиссия по решению этого вопроса. Однако чиновники долго не могли принять решение о строительстве нового института, и в реальности создание Физико-технического института началось с того, что Эрнст Вернер Сименс (1816–1892), известный электротехник и один из основателей электротехнических фирм «Сименс и Гальске» и «Сименс и Шуккерт», в мае 1884 г. пожертвовал прусскому правительству гектар свободной земли в пригороде Берлина Шарлоттенбурге и 500 тысяч марок как основание капитала, необходимого для постройки Физико-технического института. [4;5].

Германский Физико-технический институт начал свою работу осенью 1887 г. во временном помещении в Высшей технической школе. Президентом нового Физико-технического института был назначен Г. Гельмгольц. В 1888 г. здание

Физико-технического института было построено, и Физико-технический институт обосновался в Шарлоттенбурге, предместье Берлина [4;5].

Германский физико-технический институт – это один из первых научно-технических институтов в мире, основанный в 1887 г. Германом Гельмгольцем для решения научных и технических проблем в области физики и сыгравший значительную роль как в исследованиях прикладных проблем светотехники, так и в исследованиях фундаментальных проблем физики теплового излучения. Институт состоял из двух отделений – физического и метрологического. В метрологическом отделении создавались методики измерений и стандарты различных физических величин, это отделение состояло из пяти отделов: механического, электрического, оптического, химического и термометрического. Физическое отделение разрабатывало только научные проблемы [4;5;6].

В конце 1887 г. Гельмгольц создал кураторий (научный совет) Физико-технического института для научного руководства и отбора наиболее перспективных проблем физики и техники. В кураторий вошли известные немецкие ученые – В. Рентген, А. Кундт, Ф.Кольрауш, Р. Клаузиус, Э. Аббе, В. Бецольд, а также ученики и ассистенты Гельмгольца – А. Кениг, О. Люммер, М. Планк [4;5;6].

В 1890–1894 гг. Вильгельм Вин работал ассистентом Гельмгольца в Германском физико-техническом институте. В Физико-техническом институте В. Вин теоретически установил в 1893 г. закон смещения максимума температуры излучения от длины волны, а в 1896 г. он же получил приближенную формулу для распределения энергии в спектре излучения абсолютно черного тела. В этом же институте В. Вин и О. Луммер в 1895 г. экспериментально осуществили излучение абсолютно черного тела – сконструировали лабораторный источник теплового излучения. В 1899 г. О. Люммер и Г. Принсгейм провели прецизионные измерения кривой спектра излучения абсолютно черного тела, которые совместно с данными измерений сотрудников Берлинского университета Г. Рубенса и Ф. Курлбаума в 1900 г. легли в основу вывода М. Планком теоретической формулы спектрального распределения энергии излучения абсолютно черного тела. 1894 год стал последним годом жизни Г. Гельмгольца, годом, в котором ему пришлось пережить тяжелые удары судьбы: 1 января 1894 г. скончался его друг и

сотрудник Генрих Герц, 21 мая 1894 г. – его друг и заместитель Август Кундт, сам Гельмгольц скончался 8 сентября 1894 г. Жизнь и научная деятельность Германа Гельмгольца представляет яркий пример постоянного интеллектуального развития этого выдающегося человека, прошедшего долгий путь от военного врача в начале своей деятельности до Президента Германского Физико-технического института в конце жизни.

Одним из российских учеников Г. Гельмгольца был московский профессор физики В.А. Михельсон. [1;7]. Большое влияние на формирование философских взглядов В.А. Михельсона оказал Герман Гельмгольц, которого интересовали не только конкретные проблемы экспериментальной и теоретической физики XIX века, но и общие философские проблемы естествознания. В своей речи «О целях и успехах естествознания», прочитанной в 1869 г., Гельмгольц отмечал, что задачей естествознания является поиск законов природы, и «ценны не отдельные наблюдаемые факты и опыты, хотя бы число их было еще более велико; сами по себе они приобретают как практическую, так и теоретическую ценность тем, что дают возможность узнать Закон целого ряда однородных повторяемых явлений» и далее «...найти закон явлений, значит их понять. Таким образом, наше стремление понять явления природы, т.е. найти управляющие ими законы, может быть сформулировано иначе; вопрос сводится к отысканию сил, служащих причиной явлений...»[8].

ЛИТЕРАТУРА:

1. Исаев В.И. История поисков и открытия универсальной функции Кирхгофа и вклад В.А. Михельсона и Б.Б. Голицына в теорию теплового излучения. Часть 1 // Физическая мысль России. 2004. №1. С. 79–98.
2. Исаев В.И. История поисков и открытия универсальной функции Кирхгофа и вклад В.А. Михельсона и Б.Б. Голицына в теорию теплового излучения. Часть 2 // Физическая мысль России. 2005. №1. С. 39–57.
3. Грановский В.Л., Старокадомская Е.Л. Герман Гельмгольц. М.: Московский рабочий, 1930. 184 с.
4. Зернов В. Герман Гельмгольц. М.–Л.: Госиздат, 1925. 100 с.
5. Лебединский А.В., Франкфурт У.И., Френк А.М. Гельмгольц. М.: Наука, 1966. 318 с.
6. Тредер Г.Ю. Эволюция основных физических идей. М.: Мир, 1988. 368 с.
7. Михельсон В.А. Физика перед судом прошедшего и запросы на будущее // Физическое обозрение. 1900. Т. 1. №5. С. 227–241; №6. С. 251–265.
8. Гельмгольц Г. Популярные речи. Ч.1. Изд. 2. СПб: Изд-во Риккер.1898, С. 80–82.

НАШИ АВТОРЫ

Абдуллина Руфина Игоревна – студент, Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета; e-mail: rufina.abdullina.94@mail.ru

Акимов Андрей Анатольевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического моделирования, Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета; e-mail: andakm@rambler.ru

Алиев Исмаил Новруз оглы – доктор физико-математических наук, профессор кафедры физики, Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана; e-mail: alievprof@yandex.ru

Власова Елена Александровна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики, Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана; e-mail: elena.a.vlasova@yandex.ru

Дадиванян Артем Константинович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической физики, Московский государственный областной университет; e-mail: dadivank@mail.ru

Дмитриева Мария Николаевна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры математики, физики и медицинской информатики, Рязанский государственный медицинский университет им. И.П. Павлова; e-mail: dmitrm05@mail.ru

Завитаев Эдуард Валерьевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики и физики, Государственный гуманитарно-технологический университет (г. Орехово-Зуево); e-mail: EduardZavitaev@yandex.ru

Исаев Вячеслав Игоревич – кандидат физико-математических наук, независимый исследователь, e-mail: vis961@yandex.ru

Латышев Анатолий Васильевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа и геометрии, Московский государственный областной университет, e-mail: avlatyshev@mail.ru

Матвеев Олег Александрович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа и геометрии, Московский государственный областной университет; e-mail: matveyevoa@mail.ru

Меликянц Давид Георгиевич – бакалавр, Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана; e-mail: lion_paint@mail.ru

Ноа Ольга Викторовна – кандидат химических наук, старший научный сотрудник кафедры высокомолекулярных соединений химического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова; e-mail: dadivank@mail.ru

Панкратов Александр Серафимович – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедры информационных технологий, Российский университет дружбы народов (г. Москва); e-mail: sasha.pankratov@gmail.com

Петрова Вера Тимофеевна – доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, профессор Московского физико-технического института; e-mail: petrovavt@gmail.com

Пинчук Ирина Александровна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей алгебры, элементарной математики и методики преподавания математики, Московский государственный областной университет; e-mail: irenepin@yandex.ru

Попов Владимир Семенович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики, Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана; e-mail: vsoprov@bk.ru

Русаков Олег Владимирович – кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры математики и физики, Государственный гуманитарно-технологический университет (г. Орехово-Зуево); e-mail: olegrusmail@mail.ru

Сивиркина Анна Сергеевна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры высшей математики и информатики, Рязанский институт (филиал) Московского университета машиностроения; e-mail: SivirkinaAS@yandex.ru

Соколов Алексей Александрович – заместитель руководителя центрального межрегионального территориального управления по надзору за ядерной и радиационной безопасностью Ростехнадзора (г. Москва); e-mail: dadivank@mail.ru

Сучков Михаил Вадимович – кандидат физико-математических наук, доцент, Национальный исследовательский ядерный университет (г. Москва); e-mail: mv_suchkov@mail.ru

Трифоненков Владимир Петрович – кандидат физико-математических наук, доцент, Национальный исследовательский ядерный университет (г. Москва); e-mail: snuclear@mail.ru

Юшканов Александр Алексеевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической физики, Московский государственный областной университет; e-mail: yushkanov@inbox.ru



ВЕСТНИК МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ОБЛАСТНОГО УНИВЕРСИТЕТА

Научный журнал «Вестник МГОУ» основан в 1998 г. На сегодняшний день выходят десять серий «Вестника»: «История и политические науки», «Экономика», «Юриспруденция», «Философские науки», «Естественные науки», «Русская филология», «Физика-математика», «Лингвистика», «Психологические науки», «Педагогика». Все серии включены в составленный Высшей аттестационной комиссией Перечень ведущих рецензируемых научных журналов, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертации на соискание ученой степени доктора и кандидата наук по наукам, соответствующим названию серии. Журнал включен в базу данных Российского индекса научного цитирования (РИНЦ).

Печатная версия журнала зарегистрирована в Федеральной службе по надзору за соблюдением законодательства в сфере массовых коммуникаций и охране культурного наследия. Полнотекстовая версия журнала доступна в Интернете на платформе Научной электронной библиотеки (www.elibrary.ru), а также на сайте Московского государственного областного университета (www.vestnik.mgou.ru).

ВЕСТНИК МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ОБЛАСТНОГО УНИВЕРСИТЕТА

СЕРИЯ «ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА»
2015. N 4

Над номером работали:

менеджер Отдела по изданию журнала «Вестник МГОУ» И.А. Потапова
корректор Е.В. Хомякова
компьютерная верстка Е.Н. Васильчикова

Отдел по изданию научного журнала «Вестник МГОУ»
105005, г. Москва, ул. Радио, д.10а, офис 98
тел. (499) 261-43-41; (495) 723-56-31
e-mail: vest_mgou@mail.ru
Сайт: www.vestnik-mgou.ru

Формат 70x108/16. Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура «Minion Pro».

Тираж 500 экз. Уч.-изд. л. 3,5, усл. пл. 7.

Подписано в печать 22.12.2015. Заказ № 2015/12-14.

Отпечатано в типографии МГОУ
105005, г. Москва, ул. Радио, 10а