

ISSN 2072-8387 (print)
ISSN 2310-7251 (online)



Вестник

МОСКОВСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
ОБЛАСТНОГО
УНИВЕРСИТЕТА

Серия

ФИЗИКА-
МАТЕМАТИКА

ГОМОТЕТИИ И ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПЕРЕНОСЫ
В ПРОЕКТИВНО СИММЕТРИЧЕСКИХ
ПРОСТРАНСТВАХ АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ

О МАКСИМУМЕ ЭФФЕКТА ВЫСОКОСКОРОСТНОЙ
ПОСТУПАТЕЛЬНОЙ НЕРАВНОВЕСНОСТИ
В УДАРНОЙ ВОЛНЕ

ТЕОРИЯ ТЕРМОФОРЕЗА ДУБЛЕТОВ КРУПНЫХ ТВЕРДЫХ
СФЕРИЧЕСКИХ МНОГОСЛОЙНЫХ АЭРОЗОЛЬНЫХ
ЧАСТИЦ ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ОРИЕНТАЦИИ ДУБЛЕТОВ



2016/ № 3

ВЕСТНИК
МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
ОБЛАСТНОГО УНИВЕРСИТЕТА

ISSN 2072-8387 (print)

2016 / № 3

ISSN 2310-7251 (online)

серия

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА

Научный журнал основан в 1998 г.

«Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика» включён в «Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертации на соискание учёной степени доктора и кандидата наук» Высшей аттестационной комиссии при Министерстве образования и науки Российской Федерации (см.: Список журналов на сайте ВАК при Минобрнауки России) по группе специальностей «Математика» (01.01.00), «Физика» (01.04.00), «Педагогические науки» (13.00.00).

The academic journal is established in 1998

«Bulletin of Moscow State Regional University. Series: Physics and Mathematics» is included by the Supreme Certifying Commission of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation into “the List of leading reviewed academic journals and periodicals recommended for publishing in corresponding series basic research thesis results for a Ph.D. Candidate or Doctorate Degree” (see: the online List of journals at the site of the Supreme Certifying Commission of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation) in Mathematics (01.01.00), Physics (01.04.00), Pedagogical Sciences (13.00.00).

ISSN 2072-8387 (print)

2016 / № 3

ISSN 2310-7251 (online)

series

PHYSICS AND MATHEMATICS

BULLETIN OF THE MOSCOW STATE
REGIONAL UNIVERSITY

Учредитель журнала «Вестник Московского государственного областного университета»:

Государственное образовательное учреждение высшего образования Московской области

Московский государственный областной университет

_____ Выходит 4 раза в год _____

**Редакционно-издательский совет
«Вестника Московского государственного
областного университета»**

Хроменков П.Н. — к.филол.н., проф., ректор МГОУ (председатель совета)

Ефремова Е.С. — к. филол. н., и.о. проректора по научной работе МГОУ (зам. председателя);

Клычников В.М. — к.ю.н., к.и.н., проф., проректор по учебной работе и международному сотрудничеству МГОУ (зам. председателя)

Антонова Л.Н. — д.пед.н., проф., академик РАО, Комитет Совета Федерации по науке, образованию и культуре

Асмолов А.Г. — д.псх.н., проф., академик РАО, директор Федерального института развития образования

Климов С.Н. — д.ф.н., проф., Московский государственный университет путей сообщения (МИИТ)

Клобуков Е.В. — д. филол. н., проф., Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Манойло А.В. — д.пол.н., проф., МГУ им. М.В. Ломоносова

Новоселов А.Л. — д.э.н., проф., Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова

Пасечник В.В. — д.пед.н., проф., МГОУ

Поляков Ю.М. — к. филол. н., главный редактор «Литературной газеты»

Рюмцев Е.И. — д.ф.-м.н., проф., Санкт-Петербургский государственный университет

Хухуни Г.Т. — д.филол.н., проф., МГОУ

Чистякова С.Н. — д. пед. н., проф., Российская академия образования (г. Москва)

**Редакционная коллегия серии
«Физика-Математика»**

Ответственный редактор серии:

Бугаев А.С. — д. ф.-м. н., академик РАН, МФТИ

Заместитель ответственного редактора:

Жачкин В.А. — д.ф.-м.н., проф. МГОУ

Ответственный секретарь:

Васильчикова Е.Н. — к. ф.-м. н., доц., МГОУ

Члены редакционной коллегии:

Беляев В.В. — д.т.н., проф., МГОУ;

Богданов Д.Л. — д. ф.-м. н., проф., МГОУ;

Бугримов А.Л. — д. т. н., проф., МГОУ;

Латышев А.В. — д. ф.-м. н., проф., МГОУ;

Рассудовская М.М. — к.п.н., проф., МГОУ;

Осипов М.А. — д. ф.-м. н., проф., Университет Стратклайд (Великобритания);

Чигринов В.Г. — д. ф.-м. н., проф., Гонконгский университет науки и технологий (Китай)

ISSN 2072-8387 (print)

ISSN 2310-7251 (online)

Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. — 2016. — № 3. — 168 с.

Журнал «Вестник Московского государственного областного университета. Серия «Физика-Математика» зарегистрирован в Федеральной службе по надзору за соблюдением законодательства в сфере массовых коммуникаций и охране культурного наследия. Регистрационное свидетельство ПИ № ФС77-26136

**Индекс серии «Физика-Математика»
по Объединенному каталогу «Пресса России» 40723**

© МГОУ, 2016.

© ИИУ МГОУ, 2016.

**Адрес Отдела по изданию научного журнала
«Вестник Московского государственного
областного университета»**

г. Москва, ул. Радио, д. 10А, офис 98

тел. (495) 723-56-31; (495) 780-09-42 (доб. 6101)

e-mail: vest_mgou@mail.ru; сайт: www.vestnik-mgou.ru

Журнал включен в базу данных Российского индекса научного цитирования (РИНЦ), имеет полнотекстовую сетевую версию в Интернете на платформе Научной электронной библиотеки (www.elibrary.ru), а также на сайте Московского государственного областного университета (www.vestnik-mgou.ru)

При цитировании ссылка на конкретную серию «Вестника Московского государственного областного университета» обязательна. Воспроизведение материалов в печатных, электронных или иных изданиях без разрешения редакции запрещено. Опубликованные в журнале материалы могут использоваться только в некоммерческих целях. Ответственность за содержание статей несут авторы. Мнение редколлегии серии может не совпадать с точкой зрения автора. Рукописи не возвращаются.

Founder of journal «Bulletin of the Moscow State Regional University»:
Moscow State Regional University

————— Issued 4 times a year —————

Series editorial board
«Physics and Mathematics»

Editor-in-chief:

A.S. Bugaev – Doctor of Physics and Mathematics, Academician of RAS, MIPT

Deputy editor-in-chief:

V.A. Zhachkin – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, MSRU
Executive secretary:

E.N. Vasilchikova – Ph.D. in Physics and Mathematics, Associate Professor, MSRU

Members of Editorial Board:

V.V. Belyaev – Doctor of Technical Sciences, Professor, MSRU

D.L. Bogdanov – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, MSRU

A.L. Bugrimov – Doctor of Technical Sciences, Professor, MSRU

A.V. Latyshev – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, MSRU

M.M. Rassudovskaya – Ph.D. in Pedagogical Sciences, Professor, MSRU

M.A. Osipov – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Strathclyde University (UK)

V.G. Chigrinov – University of Science and Technology (Hong Kong, China)

The journal is included into the database of the Russian Science Citation Index, has a full text network version on the Internet on the platform of Scientific Electronic Library (www.elibrary.ru), as well as at the site of the Moscow State Regional University (www.vestnik-mgou.ru)

At citing the reference to a particular series of «Bulletin of the Moscow State Regional University» is obligatory. The reproduction of materials in printed, electronic or other editions without the Editorial Board permission, is forbidden. The materials published in the journal are for non-commercial use only. The authors bear all responsibility for the content of their papers. The opinion of the Editorial Board of the series does not necessarily coincide with that of the author Manuscripts are not returned.

The Editorial Board address:
Moscow State Regional University

10A Radio st., office 98, Moscow, Russia

Phones: (495) 723-56-31; (495) 780-09-42 (add. 6101)

e-mail: vest_mgou@mail.ru; site: www.vestnik-mgou.ru

Publishing council «Bulletin of the
Moscow State Regional University»

P.N. Khromenkov – Ph. D. in Philology, Professor, Principal of MSRU (Chairman of the Council)

E.S. Yefremova – Ph. D. in Philology, Acting Vice-Principal for scientific work of MSRU (Vice-Chairman of the Council)

V.M. Klychnikov – Ph.D. in Law, Ph. D. in History, Professor, Vice-Principal for academic work and international cooperation of MSRU (Vice-Chairman of the Council)

L.N. Antonova – Doctor of Pedagogics, Professor, Member of the Russian Academy of Education, The Council of the Federation Committee on Science, Education and Culture

A.G. Asmolov – Doctor of Psychology, Professor, Member of the Russian Academy of Education, Principal of the Federal Institute of Development of Education

S.N. Klimov – Doctor of Philosophy, Professor, Moscow State University of Railway Engineering

E.V. Klobukov – Doctor of Philology, Professor, Lomonosov Moscow State University

A.V. Manoylo – Doctor of Political Science, Professor, Lomonosov Moscow State University

A.L. Novosjolov – Doctor of Economics, Professor, Plekhanov Russian University of Economics

V.V. Pasechnik – Doctor of Pedagogics, Professor, MSRU

Yu. M. Polyakov – Ph.D. in Philology, Editor-in-chief of “Literaturnaya Gazeta”

E.I. Rjuntsev – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Saint Petersburg State University

G. T. Khukhuni – Doctor of Philology, Professor, MSRU

S.N. Chistyakova – Doctor of Pedagogics, Professor, the Russian Academy of Education

ISSN 2072-8387 (print)

ISSN 2310-7251 (online)

Bulletin of the Moscow State Regional University. Series: Physics and Mathematics. – 2016. – № 3. – 168 p.

The series «Physics and Mathematics» of the Bulletin of the Moscow State Regional University is registered in Federal service on supervision of legislation observance in sphere of mass communications and cultural heritage protection. The registration certificate ПИ № 077-26136

Index of the series «Physics and Mathematics» according to the union catalog «Press of Russia» 40723

© MSRU, 2016.

© Information & Publishing department of MSRU, 2016.

СОДЕРЖАНИЕ

РАЗДЕЛ I. МАТЕМАТИКА

Андроникова Е.О., Дмитриева М.Н., Матвеев О.А., Матвеева Н.В. ГОМОТЕТИИ И ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПЕРЕНОСЫ В ПРОЕКТИВНО СИММЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ 8

РАЗДЕЛ II. ФИЗИКА

Зверев Н.В., Юшканов А.А. КВАНТОВАЯ ЭЛЕКТРОННАЯ ПЛАЗМА, МЕТАЛЛИЧЕСКАЯ ПЛЁНКА И ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ..... 18

Маркеев Б.М. КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ НЕОДНОРОДНЫХ И НЕРАВНОВЕСНЫХ ГАЗОВЫХ СМЕСЕЙ..... 30

Соломатин А.С. ЛИНЗЫ НА ОСНОВЕ ЖИДКИХ КРИСТАЛЛОВ С НЕОДНОРОДНЫМ РАДИАЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ДИРЕКТОРА 37

Хасанов А.С. ТЕОРИЯ ТЕРМОФОРЕЗА ДУБЛЕТОВ КРУПНЫХ ТВЕРДЫХ СФЕРИЧЕСКИХ МНОГОСЛОЙНЫХ АЭРОЗОЛЬНЫХ ЧАСТИЦ ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ОРИЕНТАЦИИ ДУБЛЕТОВ 46

Алиев И.Н., Докукин М.Ю., Самедова З.А. ТЕРМОДИНАМИКА СИСТЕМЫ НЕВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ СВОБОДНЫХ ЭЛЕКТРОНОВ 57

Завитаев Э.В., Русаков О.В., Харитонов К.Е. К ВОПРОСУ О РАСЧЕТЕ ПЛОТНОСТИ ТОКА ВНУТРИ ТОНКОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПРОВОЛОКИ ИЗ МЕТАЛЛА В ПРОДОЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ 72

Кузнецов М.М., Кулешова Ю.Д., Смотрова Л.В., Решетникова Ю.Г. О МАКСИМУМЕ ЭФФЕКТА ВЫСОКОСКОРОСТНОЙ ПОСТУПАТЕЛЬНОЙ НЕРАВНОВЕСНОСТИ В УДАРНОЙ ВОЛНЕ 84

Соломатин А.С., Беляев В.В., Рыбаков Д.О. ВЛИЯНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ОРИЕНТАЦИОННОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДИРЕКТОРА ЖИДКОГО КРИСТАЛЛА НА ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЯЧЕЙКИ ЖК..... 96

Зудина М.Н., Кухаренко А.П. ВИХРЕВЫЕ ДВИЖЕНИЯ В ПОЛУОГРАНИЧЕННОМ ГАЗОПОДОБНОМ НЕСТАЦИОНАРНОМ ОБЛАКЕ 111

РАЗДЕЛ III. ТЕОРИЯ И МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ И ВОСПИТАНИЯ

Власова Е.А., Попов В.С., Пугачев О.В. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЭЛЕКТРОННЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПАКЕТОВ ПРИ ОБУЧЕНИИ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ 120

Хасанов А.С. ОБ ОДНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ ПРАВИЛА КРАМЕРА НА БАЗЕ EXCEL 133

Синявина А.А., Озерова Е.Н. ИЗУЧЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКОГО МЕТОДА В КУРСЕ ФИЗИКИ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ 139

Шевченко В. Г., Шевчук М. В. ПРИМЕНЕНИЕ ОБЛАЧНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ КАК СРЕДСТВ ФОРМИРОВАНИЯ ИКТ-КОМПЕТЕНТНОСТИ БУДУЩИХ УЧИТЕЛЕЙ ИНФОРМАТИКИ..... 153

CONTENTS

SECTION I. MATHEMATICS

<i>E. Andronikova, M. Dmitrieva, O. Matveyev, N Matveyeva</i> HOMOTHEITIES AND PARALLEL TRANSLATIONS IN PROJECTIVE SYMMETRIC SPACES OF AFFINE CONNECTION.....	8
--	---

SECTION II. PHYSICS

<i>N. Zverev, A. Yushkanov</i> QUANTUM ELECTRON PLASMA, THIN METAL FILM AND ELECTROMAGNETIC RADIATION	18
<i>B. Markeev</i> KINETIC THEORY AND NONEQUILIBRIUM INHOMOGENEOUS GAS MIXTURES.....	30
<i>A. Solomatin</i> LC LENSES WITH VARIOUS RADIAL ORIENTATIONAL DISTRIBUTION	37
<i>A. Khasanov.</i> THE THEORY OF THERMOPHORESIS FOR DOUBLET OF LARGE SOLID SPHERICAL MULTILAYER AEROSOL PARTICLES FOR ANY ORIENTATION OF DOUBLET.....	46
<i>I. Aliev, M. Dokukin, Z. Samedova</i> THERMODYNAMICS OF THE SYSTEM OF NONINTERACTING FREE ELECTRONS	57
<i>E. Zavitaev, O. Rusakov, K. Kharitonov</i> CALCULATION OF THE CURRENT DENSITY IN A THIN CYLINDRICAL METAL WIRE IN THE LONGITUDINAL MAGNETIC FIELD	72
<i>M. Kuznetsov, Y. Kuleshova, L. Smotrova, Y. Reshetnicova</i> ON THE MAXIMUM EFFECT OF HIGH TRANSLATIONAL NONEQUILIBRIUM IN THE SHOCK WAVE	84
<i>A. Solomatin, V. Belyaev, D. Rybakov</i> LIQUID CRYSTAL SPACE ORIENTATIONAL DISTRIBUTION AND ITS INFLUENCE ON LC CELL'S DIELECTRICAL PROPERTIES.....	96

<i>M. Zudina, A. Kukhareno</i> VORTEX MOTIONS IN A NONSTATIONARY SEMI-INFINITE GAS-LIKED CLOUD	111
--	-----

SECTION III. THEORY AND METHODS OF TEACHING AND EDUCATION

<i>E. Vlasova, V. Popov, O. Pugachev</i> THE USE OF ELECTRONIC MATHEMATICAL SOFTWARE IN TEACHING MATHEMATICS	120
<i>A. Khasanov</i> AN EXCEL-BASED REALIZATION OF CRAMER'S ROOL	133
<i>A. Sinyavina, E. Ozerova.</i> THE STUDY OF STATISTICAL METHODS IN PHYSICS COURSES AT SECONDARY SCHOOL	139
<i>V. Shevchenko, M. Shevchuk</i> THE USE OF CLOUD TECHNOLOGIES AS A MEANS OF FORMATION OF ICT COMPETENCE OF FUTURE TEACHEARS OF INFORMATICS	153

РАЗДЕЛ I. МАТЕМАТИКА

УДК 514.76 + 512.54

DOI: 10.18384/2310-7251-2016-3-08-17

ГОМОТЕТИИ И ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПЕРЕНОСЫ В ПРОЕКТИВНО СИММЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ

Андроникова Е.О.¹, Дмитриева М.Н.², Матвеев О.А.³, Матвеева Н.В.¹

¹Московский государственный технологический университет «СТАНКИН»
127055, г. Москва, Вадковский переулок, д. 3а, Российская Федерация

²Рязанский государственный медицинский университет имени академика
И.П. Павлова

390026, г. Рязань, ул. Высоковольтная, д. 9, Российская Федерация

³Московский государственный областной университет
105005, г. Москва, ул. Радио, д. 10А, Российская Федерация

Аннотация. В работе рассматриваются алгебраические и геометрические свойства широкого класса проективно симметрических многообразий аффинной связности с ненулевым тензорным полем кручения, имеющих общие гомотетии с симметрическими пространствами. Такие пространства называются просимметрическими, они и различные подклассы этих пространств рассматриваются с точки зрения неассоциативных дифференцируемых универсальных алгебр, исследуются свойства параллельных переносов и гомотетий. Найдены необходимые и достаточные алгебраические условия, которым удовлетворяет геодезическая лупа в каждой точке просимметрического многообразия аффинной связности.

Ключевые слова: симметрические многообразия, пространства аффинной связности, геодезические отображения, универсальные алгебры, квазигруппы.

HOMOTHETIES AND PARALLEL TRANSLATIONS IN PROJECTIVE SYMMETRIC SPACES OF AFFINE CONNECTION

E. Andronikova,¹ M. Dmitrieva,² O. Matveyev,³ N Matveyeva¹

¹*Moscow State Technological University 'STANKIN', Vadkovsky pereulok 3a,
127055 Moscow, Russia;*

²*I.P. Pavlov Ryazan State Medical University, ul. Vysokovol'naya 9,
390026 Ryazan, Russia;*

³*Moscow State Regional University,
ul. Radio 10a, 105005 Moscow, Russia*

Abstract. The paper deals with the algebraic and geometric properties of a broad class of projective symmetric affine-connected manifolds with a nonzero torsion tensor field having common homotheties with symmetric spaces. Such spaces are called prosymmetric. Various subclasses of these spaces are discussed. We study the properties of parallel translations and homotheties from the viewpoint of differentiable unassociative universal algebras. The necessary and sufficient algebraic conditions, which a geodesic loop satisfies at each point in a prosymmetric manifold with affine connection, are obtained.

Key words: symmetric manifolds, affine connected spaces, geodesic mappings, universal algebra, quasigroup.

Применяются методы универсальных алгебр к исследованию некоторых классов пространств аффинной связности с ненулевым тензорным полем кручения, близких к симметрическим. Здесь мы приводим обзор некоторых результатов в этом направлении.

Определение 1 [12]. Частичную гладкую локальную алгебру $\chi = \langle X, \cdot, \backslash, (\omega_t)_{t \in R}, e \rangle$ с бинарными операциями умножения, левого деления, однопараметрическим семейством унарных операций $(\omega_t)_{t \in R}$ называют гладкой локальной левой лупой с гомотетиями (одулем) над полем действительных чисел, если: а) $\langle X, \cdot, \backslash, e \rangle$ – гладкая локальная левая лупа; б) существует такая открытая окрестность U нейтрала e , что для любого x из U и для любого вещественного числа t , принадлежащего некоторому открытому интервалу, содержащему отрезок $[0,1]$, $\omega_t = tx$, определённо и принадлежит U , в) если tx и ux ($t, u \in R$, $x \in X$) определены, то $tx \cdot ux$ определено тогда и только тогда, когда $(t + u)x$ определено, и в этом случае выполняется тождество

моноассоциативности: $x \cdot ux = (t + u)x$, г) если ty определено, то $u(ty)$ определено тогда и только тогда, когда $(ut)y$ определено, и в этом случае $u(ty) = (ut)y$, д) умножение каждого элемента x из X на единицу действительных чисел определено, и $1x = x, 1 \in R$. При фиксированном действительном числе t отображение $\omega_t: x \rightarrow tx$ называем гомотетией с центром в точке e с коэффициентом t . (Здесь и в дальнейшем изложении, для краткости, допуская вольность речи, мы опускаем символ умножения действительного числа на элемент из X).

Замечание. Лупа с гомотетиями – это естественное широкое обобщение понятия векторного пространства. Локальная группа Ли $G = \langle X, e \rangle$ всегда есть локальная лупа с гомотетиями, если определить умножение на действительные числа формулой: $tx = \text{Exp}(t \text{Exp}^{-1}x)$, где Exp есть экспоненциальное отображение группы Ли.

Замечание. В зарубежной литературе отмечено, что значения терминов «гладкая лупа» («smooth loop») и «лупа Ли» («Lie loop») близки.

Пусть (M, ∇) – гладкое многообразие аффинной связности, тогда для любой точки $y \in M$ в её нормальной выпуклой окрестности можно определить гладкие локальные операции формулами: $L_x^y z = \text{Exp}_x \tau_x^y \left((\text{Exp}_y)^{-1} z \right)$, $\omega_t(y, z) = t_y z = \text{Exp}_y \left(t (\text{Exp}_y)^{-1} z \right)$, где $\tau_x^y: T_y(M) \rightarrow T_x(M)$ – параллельный перенос касательных векторов вдоль единственного отрезка геодезической линии, принадлежащего этой окрестности точки y и соединяющего точки x и y . Так получается гладкое локальное многообразие $M = \langle M, L, (\omega_t)_{t \in R} \rangle$, в каждой точке которого определена геодезическая лупа с гомотетиями. Параллельные переносы и гомотетии связаны определёнными алгебраическими тождествами: $L_{t,x}^{u,x} L_{u,x}^y = L_{t,x}^y$, $L_x^y t_y = t_x L_x^y$. Обратно, в гладком локальном многообразии $M = \langle M, L, (\omega_t)_{t \in R} \rangle$ аффинная связность однозначно восстанавливается. В произвольном пространстве аффинной связности (M, ∇) гомотетии обладают следующими свойствами [1; 10]: а) для любого x из M существует такая открытая окрестность U_x , содержащая x , что для любых y из U_x , для любого вещественного числа $t \in [0, 1]$, $t_x y$ определено, и $t_x y \in U_x$, б) если $t_x y$ определено, а также определены $u_x(t_x y)$ и $(u \cdot t)_x y$, то $u_x(t_x y) = (ut)_x y$, $u, t \in R$ в) выполняется тождество $t_x y = (1 - t)_y x$, $t \in R$, $x, y \in M$, г) определено $1_x y$, и $1_x y = y$.

Заметим, что, если локально заданы дифференцируемые гомотетии, и выполняются свойства а)–г), то можно локально построить отрезки геодезических линий и однозначно восстановить аффинную связность с нулевым полем тензора кручения [1].

Определение 2 [13]. Лупа с гомотетиями $\mathcal{M}_e = \langle M, L^e, \{t_e\}_{t \in R}, e \rangle$ называется геометрической, если выполняется тождество: $l^e(x, t_e y)u_e = u_e l^e(x, t_x y)$, где $l(x, z)u = L_{L_x z}^{-1} L_x L_z u$ (Здесь мы для краткости пропустили символ нейтрала e).

Геометрическая лупа с гомотетиями порождает аффинно-связное пространство без кручения в некоторой открытой окрестности нейтрала e , и гомотетии, центры которых принадлежат этой окрестности, алгебраически выражаются через операции $\mathcal{M}_e = \langle M, L^e, \{t_e\}_{t \in R}, e \rangle$ [1; 12]. Дифференцируемая лупа с гомотетиями является геодезической некоторой (не обязательно единственной) аффинной связности, если и только если она является геометрической [12]. Гомотетии локально симметрического пространства удовлетворяют тождествам:

$$(-1)_x (-1)_{t_x y} = (-1)_{t_y x} (-1)_y, \quad (-1)_x \circ t_y = t_{(-1)_x y} \circ (-1)_x.$$

Это необходимые и достаточные условия для того, чтобы пространство аффинной связности без кручения было локально симметрическим [1; 10].

Определение 3 [2; 3; 6]. Пространство аффинной связности называется просимметрическим, если оно имеет общие геодезические линии с сохранением аффинного параметра (общие гомотетии) с локально симметрическим пространством.

Предложение 1 [11]. Локальное просимметрическое многообразие аффинной связности (M, ∇) характеризуется следующими дифференциально – геометрическими соотношениями:

$$(\nabla_X \bar{R})(Y, Z; W) + \frac{1}{2} \bar{R}(T(X, Y), Z)W + \frac{1}{2} \bar{R}(Y, T(X, Z))W + \\ + \frac{1}{2} \bar{R}(Y, Z)T(X, W) - \frac{1}{2} T(X, \bar{R}(Y, Z)W) = 0,$$

где

$$\bar{R}(X, Y)Z = R(X, Y)Z - \frac{1}{2}(\nabla_X T)(Y, Z) + \frac{1}{2}(\nabla_Y T)(X, Z) + \\ + \frac{1}{4}T(X, T(Y, Z)) - \frac{1}{4}T(Y, T(X, Z)) + \frac{1}{2}T(Z, T(X, Y)); \\ \bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - \frac{1}{2}T(X, Y); \quad \bar{\nabla} \bar{R} = 0,$$

R и T обозначают тензорные поля кривизны и кручения в (M, ∇) .

Предложение 2 [6]. Пусть $\mathcal{M}_e = \langle M, L^e, \{t_e\}_{t \in R}, e \rangle$ – геометрическая лупа с гомотетиями. Определим отображение $\Psi_x^e: M \rightarrow M$ формулой:

$$\begin{aligned} \Psi_x^e &= (-1)_e \circ (-1)_{\left(\frac{1}{2}\right)_e x} \circ L_x^e = (-1)_e \circ L_{\left(\frac{1}{2}\right)_e x}^e \circ \\ &\circ (-1)_e \circ \left(L_{\left(\frac{1}{2}\right)_e x}^e\right)^{-1} \circ L_x^e. \end{aligned} \quad (1)$$

Тогда $\mathcal{M}_e$ просимметрична, если и только если выполняются соотношения:

$$\begin{aligned} \Psi_{t_e x}^e(x) &= x, \Psi_x^e \circ t_e = t_e \circ \Psi_x^e \quad \text{и} \\ L_{t_e x}^e \circ (\Psi_{t_e x}^e)^{-1} \circ L_{u_e x}^e \circ (\Psi_{u_e x}^e)^{-1} &= L_{(t+u)_e x}^e \circ (\Psi_{(t+u)_e x}^e)^{-1} \end{aligned} \quad (2)$$

Предложение 3 [6]. Пусть $\mathcal{M}_e = \langle M, L^e, \{t_e\}_{t \in R}, e \rangle$ – геометрическая лупа с гомотетиями. Для произвольных x, y из M определим отображение:

$$g^e(x, y) = (L_y^e)^{-1} \circ (-1)_{\left(\frac{1}{2}\right)_x y} \circ L_x^e \circ (-1)_e. \quad (3)$$

Тогда $\mathcal{M}_e$ – просимметрична, если и только если справедливо:

$$\begin{aligned} g^e(L_x^e u_e y, L_x^e t_e y) \circ g^e(x, L_x^e u_e y) &= g^e(x, L_x^e t_e y), \\ g^e(x, y) \circ t_e &= t_e \circ g^e(x, y), \quad x, y \in M, u, t \in R. \end{aligned}$$

Предложение 4 [6]. Геометрическая лупа с гомотетиями просимметрична, если и только если выполняются тождества:

$$\begin{aligned} \left|L_{L_x^e(-1)_e y}^e\right|^{-1} \circ L_x^e \circ (-1)_e \circ (L_x^e)^{-1} \circ L_{L_x^e}^e \circ t_e &= \\ = t_e \circ \left|L_{L_x^e(-1)_e y}^e\right|^{-1} \circ L_x^e \circ (-1)_e \circ (L_x^e)^{-1} \circ L_{L_x^e y}^e, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} L_{L_x^e(t+1)_e y}^e \circ (-1)_e \circ \left|L_{L_x^e t_e(t+1)_e y}^e\right|^{-1} \circ L_{L_x^e t_e y}^e \circ (-1)_e \circ \left|L_{L_x^e t_e y}^e\right|^{-1} &= \\ = L_{L_x^e y}^e \circ (-1)_e \circ (L_{L_x^e y}^e)^{-1} \circ L_x^e \circ (-1)_e \circ (L_x^e)^{-1}. \end{aligned} \quad (5)$$

Следствие. Аналитическое многообразие аффинной связности является просимметрическим, если и только если геодезическая лупа в каждой точке многообразия удовлетворяет тождеству:

$$x[x \setminus [(xy)((xy) \setminus (xz))^{-1}]]^{-1} = (xy^{-1})[(xy^{-1}) \setminus (xz^{-1})]^{-1} \quad (6)$$

(Здесь мы для краткости опустили символ умножения лупы).

Определение 4 [7]. Геометрическая лупа с гомотетиями $\mathcal{M}_e = \langle M, L^e, \{t_e\}_{t \in R}, e \rangle$ называется *инвариантной*, если её левые сдвиги (параллельные переносы) $L_x^e: M \rightarrow M$ являются автоморфизмами порождаемого ей многообразия с геодезическими [1], то есть выполняется тождество: $L_x^e \circ t_y = t_{L_x^e y} \circ L_x^e$.

Предложение 5 [7]. Геометрическая лупа с гомотетиями $\mathcal{M}_e = \langle M, L^e, \{t_e\}_{t \in R}, e \rangle$ инвариантна, если и только если она удовлетворяет тождеству:

$$l^e(x, y) \circ t^e = t_e \circ l^e(x, y). \quad (7)$$

Предложение 6 [7]. Геометрическая лупа с гомотетиями является инвариантно просимметрической, если и только если выполняются тождество (7) и:

$$L_x^e \circ (-1)_e \circ L_x^e \circ t_e = t_e \circ L_x^e \circ (-1)_e \circ L_x^e, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} L_{t_e x}^e \circ L_x^e \circ (-1)_e \circ (L_x^e)^{-1} \circ (-1)_e = \\ = L_x^e \circ (-1)_e \circ (L_x^e)^{-1} \circ (-1)_e \circ L_{t_e x}^e \end{aligned} \quad (9)$$

Следствие. Аналитическое многообразие аффинной связности является инвариантно просимметрическим, если и только если каждая его геодезическая лупа удовлетворяет тождествам:

$$x(xy^{-1})^{-1} = [x(xy)^{-1}]^{-1}, [(xy) \setminus (x(yz))]^{-1} = (xy) \setminus [x(yz^{-1})]. \quad (10)$$

Предложение 7 [7]. Пусть геометрическая лупа с гомотетиями $\mathcal{M}_e = \langle M, L^e, \{t_e\}_{t \in R}, e \rangle$ является левомоноальтернативной и инвариантно просимметрической. Тогда она характеризуется тождествами (8) и:

$$\begin{aligned} L_{t_e x}^e \circ L_x^e = L_{(t+1)_e x}^e, \\ L_{t_e x}^e \circ (-1)_e \circ L_x^e \circ (-1)_e = (-1)_e \circ L_x^e \circ (-1)_e \circ L_{t_e x}^e. \end{aligned} \quad (11)$$

Следствие: Лупа с гомотетиями $\mathcal{M}_e = \langle M, L^e, \{t_e\}_{t \in R}, e \rangle$ является редуктивной и просимметрической тогда и только тогда, когда выполняются тождества (8), (11) и $l^e(x, y) \circ L_z^e = L_{l^e(x, y)z}^e \circ l^e(x, y)$.

Определение 5 [8; 9; 12]. Просимметрическое пространство аффинной связности называется почти симметрическим, если композиция двух геодезических симметрий является автоморфизмом геометрической структуры пространства.

Предложение 8 [8; 9]. Геометрическая лупа с гомотетиями $\mathcal{M}_e = \langle M, L^e, \{t_e\}_{t \in R}, e \rangle$ может быть реализована как геодезическая в пространстве почти симметрической аффинной связности тогда и только тогда, когда выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \varphi_{(t+u)_e x} &= \varphi_{t_e x} \circ \varphi_{u_e x}, \\ L_{t_e x}^e \circ \varphi_x &= L_x^e \circ \varphi_x \circ L_{(t-1)_e x}^e, \\ \bar{l}^e(x, y) \circ L_z^e &= L_{\bar{l}^e(x, y)z}^e \circ \bar{l}^e(x, y), \\ \bar{l}^e(x, y) \circ t^e &= t_e \circ \bar{l}^e(x, y), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\varphi_x &= (L_x^e)^{-1} S_x^e, \\ S_x^e &= (L^e)_{\left(\frac{1}{2}\right)_e x} \circ (-1)_e \circ \left(L_{\left(\frac{1}{2}\right)_e x}^e \right)^{-1} \circ (-1)_e; x, y, z \in M, \\ \bar{l}^e(x, y) &= (S_{S_{xy}^e}^e)^{-1} \circ S_x^e \circ S_y^e; \quad u, t \in R.\end{aligned}$$

Определение 6 [8; 9]. Многообразие аффинной связности (M, ∇) называется антисимметрическим, если геодезическая симметрия $S_a = (-1)_a$ относительно любой точки a пространства является локальным антиизоморфизмом операций умножения геодезических луп, то есть $\forall a, x, y, z \in M \quad S_a \left(\begin{smallmatrix} y \cdot z \\ x \end{smallmatrix} \right) = S_a z \cdot S_a y$.

Предложение 9 [8; 9]. Геодезическая лупа аналитического антисимметрического многообразия почти симметрична, бинарно-лиева, и справедливы следующие тождества:

$$\begin{aligned}b[(b^{-1}a^2b^{-2}a^2b^{-1})b^{-1}a[(a^{-1}b^2a^{-1}) \cdot (a^{-1}za^{-1})]a]b^{-1}b &= \\ &= a[(ab^2a) \cdot (a^{-1}za^{-1})]a, \quad (12)\end{aligned}$$

$$a[(a^{-1}b^2a^{-1})(az^{-1}a)]a = b^2[a^{-1}[(az^{-1}a)(ab^{-2}a)]a^{-1}]b^2, \quad (13)$$

$$x(y(xzx)y)x = (xyx)z(xy)x,$$

$$\begin{aligned}(xy^2x)^{-\frac{1}{2}}(x(y(zw)y)x)(xy^2x)^{-\frac{1}{2}} &= \\ = \left[(xy^2x)^{-\frac{1}{2}}(x(yzy)x)(xy^2x)^{-\frac{1}{2}} \right] \cdot \left[(xy^2x)^{-\frac{1}{2}}(x(ywy)x)(xy^2x)^{-\frac{1}{2}} \right] \quad (14)\end{aligned}$$

Свойства параллельных переносов и гомотетий просимметрических многообразий аффинной связности нулевой кривизны рассмотрены в работе [11]. Обобщение симметрических пространств, выходящее за рамки теории многообразий аффинной связности, приводится в работах [4; 5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Матвеев О.А. О многообразиях с геодезическими // Ткани и квазигруппы. Калинин: Изд-во КГУ. 1986. С. 44–49.
2. Матвеев О.А. О локально инвариантных аффинных связностях // Ткани и квазигруппы. Тверь: Изд-во ТГУ. 1991 С. 78–97.
3. Матвеев О.А. О пространствах аффинной связности, близких к симметрическим // Геометрия обобщенных пространств. Межвузовский сборник научных трудов. Пензенский государственный педагогический институт. Пенза 1992. С. 55–59.

4. Матвеев О.А. Квазигрупповые свойства многообразий с траекториями. // Вестник Московского педагогического университета. Серия: Физика-Математика. № № 3–4. 1998. С. 10–15.
5. Матвеев О.А., Матвеева Н.В., Паншина А.В. О квазигрупповой теории абелевых и симметрических механических систем // Фундаментальные физико-математические проблемы и моделирование технико-технологических систем. Выпуск 9. М.: МГТУ СТАНКИН. Институт математического моделирования Российской академии наук. 2005. С. 22–25.
6. Матвеев О.А., Нестеренко Е.Л. Просимметрические пространства. // Вестник РУДН. Серия: Математика. 7 (1). 2000. С. 114–126.
7. Матвеев О.А., Нестеренко Е.Л. О локально инвариантных пространствах аффинной связности // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика, № 2. 2010. С. 19–27.
8. Матвеев О.А., Нестеренко Е.Л. Алгебраическая теория пространств, близких к симметрическим: монография. Lap Lambert Academic Publishing, Germany, 2012. 125 с.
9. Матвеев О.А., Нестеренко Е.Л. Универсальные алгебры в теории пространств аффинной связности, близких к симметрическим: монография. М.: Московский государственный областной университет. 2012. 132 с.
10. Matveyev O.A. On quasigroup theory of manifolds with trajectories. // Webs and quasigroups. Tver. 2000. pp. 129–139.
11. Matveyev O.A., Nesterenko E.L. On the quasigroup properties of prosymmetric spaces with zero curvature. // Webs and quasigroups. Tver. 2002. pp. 78–84.
12. Sabinin L.V., Matveyev O.A. Geodesic loops and some classes of affine connected manifolds // Bulletin of Peoples Friendship University of Russia. Series: Mathematics 2 (1).1995. pp. 135–243.

REFERENCES

1. Matveev O.A. O mnogoobraziyakh s geodezicheskimi [On manifolds with geodesic] // Tkani i kvazigruppy [Fabric and quasigroups]. Kalinin, Izd-vo KGU, 1986. pp. 44–49.
2. Matveev O.A. O lokal'no invariantnykh affinykh svyaznostyakh [On locally invariant affine connections] // Tkani i kvazigruppy [Fabric and quasigroups]. Tver, Izd-vo TGU, 1991. pp. 78–97.
3. Matveev O.A. O prostranstvakh affinnoi svyaznosti, blizkikh k simmetricheskimi [On spaces with affine connection close to symmetric] // Geometriya obobshchennykh prostranstv. Mezhdvuzovskii sbornik nauchnykh trudov. Penzenskii gosudarstvennyi pedagogicheskii institut [Geometry of generalized spaces. Interuniversity collection of scientific works. Penza state pedagogical Institute]. Penza, 1992. pp. 55–59.

4. Matveev O.A. Kvazigruppovye svoistva mnogoobrazii s traektoriyami. [Quasigroup properties of manifolds with trajectories.] // Vestnik Moskovskogo pedagogicheskogo universiteta. Seriya: Fizika-Matematika. 1998. no. 3–4. pp. 10–15.
5. Matveev O.A., Matveeva N.V., Panshina A.V. O kvazigruppovoi teorii abelevykh i simmetricheskikh mekhanicheskikh sistem [About quasigroup theory of Abelian and symmetric mechanical systems] // Fundamental'nye fiziko-matematicheskie problemy i modelirovanie tekhniko-tekhnologicheskikh sistem. Vypusk 9. [Fundamental physical and mathematical problems and modeling of technical and technological systems. Issue 9]. M.: MGTU STANKIN Institute for mathematical modelling Russian Academy of Sciences, 2005. pp. 22–25.
6. Matveev O.A., Nesterenko E.L. Prosimmetricheskie prostranstva. [Procompetencia space.] // Vestnik RUDN. Seriya: Matematika [Bulletin of PFUR. Series: Mathematics]. 2000. pp. 114–126.
7. Matveev O.A., Nesterenko E.L. O lokal'no invariantnykh prostranstvakh affinnoi svyaznosti [On locally invariant spaces with affine connection] // Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika. 2010. no. 2. pp. 19–27.
8. Matveev O.A., Nesterenko E.L. Algebraicheskaya teoriya prostranstv, blizkikh k simmetricheskim: monografiya [Algebraic theory of spaces close to symmetric: monograph]. Lap Lambert Academic Publishing, Germany, 2012. 125 p.
9. Matveev O.A., Nesterenko E.L. Universal'nye algebry v teorii prostranstv affinnoi svyaznosti, blizkikh k simmetricheskim: monografiya [Universal algebra in the theory of spaces with affine connection close to symmetric: monograph]. M., Moskovskii gosudarstvennyi oblastnoi universitet, 2012. 132 p.
10. Matveyev O.A. On quasigroup theory of manifolds with trajectories. // Webs and quasigroups. Tver. 2000. pp. 129–139.
11. Matveyev O.A., Nesterenko E.L. On the quasigroup properties of prosymmetric spaces with zero curvature. // Werbs and quasigroups. Tver. 2002. pp. 78–84.
12. Sabinin L.V., Matveyev O.A. Geodesic loops and some classes of affine connected manifolds // Bulletin of Peoples Friendship University of Russia. Series: Mathematics 2 (1).1995. pp. 135–243.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Андроникова Екатерина Олеговна – магистр, аспирант Московского государственного технологического университета «СТАНКИН»;
e-mail: ya.kmatveyeva@yandex.ru

Дмитриева Мария Николаевна – кандидат педагогических наук, старший преподаватель Рязанского государственного медицинского университета;
e-mail: dmitrm05@mail.ru

Матвеев Олег Александрович – кандидат физико-математических наук, доцент Московского государственного областного университета;
e-mail: matveyeova@mail.ru

Матвеева Наталья Владимировна – старший преподаватель Московского государственного технологического университета «СТАНКИН»;
e-mail: veyevtam@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Andronikova Ekaterina Olegovna – magistr, post-graduate student, Moscow State University of Technology «STANKIN»;
e-mail: ya.kmatveyeva@yandex.ru

Dmitrieva Maria Nikolaevna – candidate of pedagogical sciences, senior lecture, Ryazan State Medical University;
e-mail: dmitrm05@mail.ru

Matveyev Oleg Alessandrovich – candidate of physical and mathematical sciences, Associate professor, Moscow State Regional University;
e-mail: matveyeova@mail.ru

Matveyeva Natalia Vladimirovna – senior lecturer, Moscow State University of Technology «STANKIN»;
e-mail: veyevtam@mail.ru

БИБЛИОГРАФИЧЕСКАЯ ССЫЛКА

Андроникова Е.О., Дмитриева М.Н., Матвеев О.А., Матвеева Н.В. Гомотетии и параллельные переносы в проективно симметрических пространствах аффинной связности // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2016. № 3. С. 8–17.

DOI: 10.18384/2310-7251-2016-3-08-17.

BIBLIOGRAPHIC REFERENCE

E. Andronikova, M. Dmitrieva, O. Matveyev, N. Matveyeva Homotheties and parallel translations in projective symmetric spaces of affine connection // Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics. 2016. no. 3. pp. 8–17.

DOI: 10.18384/2310-7251-2016-3-08-17.

РАЗДЕЛ II. ФИЗИКА

УДК: 517.958:537.84;535.3

DOI: 10.18384/2310-7251-2016-3-18-29

КВАНТОВАЯ ЭЛЕКТРОННАЯ ПЛАЗМА, МЕТАЛЛИЧЕСКАЯ ПЛЁНКА И ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ*

Зверев Н.В., Юшканов А.А.

*Московский государственный областной университет,
105005, г. Москва, ул. Радио, д. 10а, Российская Федерация*

Аннотация. С помощью численных расчётов изучено влияние квантовых волновых свойств электронов электронной плазмы на взаимодействие электромагнитного излучения с тонкой металлической плёнкой. Рассмотрены оптические коэффициенты отражения, прохождения и поглощения излучения. Показано, что данные коэффициенты для квантовой плазмы отличаются как от коэффициентов вырожденной классической электронной плазмы с учётом пространственной дисперсии, так и от коэффициентов для электронного газа в подходе Друде – Лоренца без учёта пространственной дисперсии.

Ключевые слова. квантовая плазма, металлическая плёнка, электромагнитное излучение, оптические коэффициенты.

© Зверев Н.В., Юшканов А.А., 2016

*Работа выполнена при поддержке грантов Президента РФ МК-2382.2014.9 и РФФИ №№ 15-37-20441 мол_а_вед, 14-47-03608 (совместно с правительством Московской области).

QUANTUM ELECTRON PLASMA, THIN METAL FILM AND ELECTROMAGNETIC RADIATION

N. Zverev, A. Yushkanov

Moscow State Regional University, ul. Radio 10a, 105005 Moscow, Russia

Abstract. The influence of the quantum wave properties of electrons in the electron plasma on the interaction of electromagnetic radiation with a thin metallic film is studied numerically. The optical coefficients of reflectance, transmittance and absorptance are considered. It is shown that for the quantum plasma these coefficients differ both from the coefficients of the degenerate classical electron plasma accounting for the spatial dispersion and from the coefficients of the classical electron gas in the Drude–Lorentz approach without the spatial dispersion.

Keywords: quantum plasma, metallic film, electromagnetic radiation, optical coefficients.

1. Введение

Исследования взаимодействия электромагнитного излучения с материалами малых размеров в настоящее время представляют большой интерес [1; 8]. Данные исследования имеют как теоретическое значение, так и практическое применение, направленное на создание микроскопических и наноразмерных оптических устройств.

Одним из таких исследований является изучение взаимодействия излучения с тонким металлическим слоем, находящимся между двумя диэлектриками. При этом используют кинетическое уравнение Больцмана и учитывают пространственную дисперсию электронной плазмы [2; 4].

Однако в данных исследованиях не учитываются квантовые волновые свойства электронов электронной плазмы. Это обусловлено трудностями получения приемлемых соотношений для продольной и поперечной диэлектрических проницаемостей квантовой электронной плазмы [9–14]. В то же время электроны в веществах подчиняются квантовым законам. Поэтому квантовые волновые свойства электронов в металлах могут оказывать влияние на взаимодействие излучения с металлическими объектами. Такое влияние может быть заметным в случае излучения высоких частот, начиная с инфракрасного диапазона, и для объектов нанометровых размеров. В настоящей работе изучается влияние квантовых волновых свойств вырожденного

электронного газа на взаимодействие излучения с плоской металлической плёнкой. При этом исследуются оптические коэффициенты отражения, прохождения и поглощения электромагнитного излучения.

2. Модель и оптические коэффициенты

Мы рассматриваем плоскую металлическую плёнку толщиной d , расположенную между двумя прозрачными диэлектрическими средами с диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2 (рис. 1). Считаем, что данные среды являются изотропными немагнитными веществами, а диэлектрические проницаемости данных сред являются положительными и постоянными.

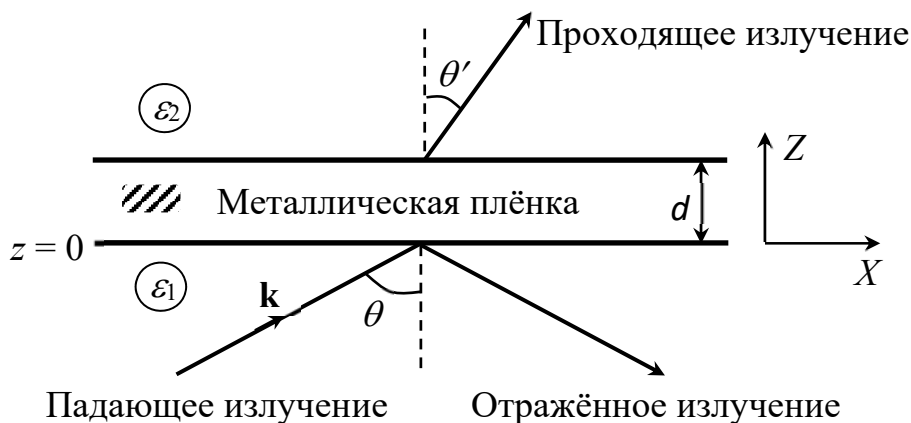


Рис. 1. Схема распространения электромагнитного излучения

Пусть электромагнитное излучение падает на металлическую плёнку под углом θ со стороны первой среды с ε_1 . Тогда оптические коэффициенты отражения излучения от плёнки R , прохождения через плёнку T и поглощения излучения в плёнке A определяются по формулам:

$$R = \left| \frac{U^{(1)} + U^{(2)}}{V^{(1)} + V^{(2)}} \right|^2, \quad (1a)$$

$$T = \operatorname{Re} \left(\frac{\cos \theta'}{\cos \theta} \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \left| \frac{U^{(1)} V^{(2)} - U^{(2)} V^{(1)}}{V^{(1)} + V^{(2)}} \right|^2 \right), \quad (16)$$

$$A = 1 - R - T, \quad (1b)$$

где величины $U^{(j)}$ и $V^{(j)}$ в случае Р-волны ($\mathbf{E}$ лежит в плоскости падения волны XZ) определяются формулами ($j = 1, 2$):

$$U^{(j)} = \frac{\cos \theta - Z_P^{(j)} \sqrt{\varepsilon_1}}{\cos \theta' + Z_P^{(j)} \sqrt{\varepsilon_2}}, \quad V^{(j)} = \frac{\cos \theta + Z_P^{(j)} \sqrt{\varepsilon_1}}{\cos \theta' + Z_P^{(j)} \sqrt{\varepsilon_2}}, \quad (2a)$$

а в случае S-волны (**H** лежит в плоскости падения):

$$U^{(j)} = \frac{1 + Z_S^{(j)} \sqrt{\varepsilon_1} \cos \theta}{1 - Z_S^{(j)} \sqrt{\varepsilon_2} \cos \theta'}, \quad V^{(j)} = \frac{1 - Z_S^{(j)} \sqrt{\varepsilon_1} \cos \theta}{1 - Z_S^{(j)} \sqrt{\varepsilon_2} \cos \theta'}. \quad (26)$$

В данных формулах θ' – угол преломления во вторую среду с ε_2 , определяемый соотношением:

$$\sqrt{\varepsilon_1} \sin \theta = \sqrt{\varepsilon_2} \sin \theta'.$$

В случае полного внутреннего отражения $\sin \theta' > 1$, величина $\cos \theta'$ является чисто мнимой с $\text{Im} \cos \theta' > 0$. Кроме того $Z_P^{(j)}$ и $Z_S^{(j)}$ – безразмерные поверхностные импедансы электромагнитного излучения, определяемые на поверхности падения на плёнку ($z = 0$) по формулам:

$$Z_P^{(j)} = \frac{1}{Z_0} \frac{E_x^{(j)}}{H_y^{(j)}} \bigg|_{z=0}, \quad Z_S^{(j)} = \frac{1}{Z_0} \frac{E_y^{(j)}}{H_x^{(j)}} \bigg|_{z=0}.$$

Здесь Z_0 – волновое сопротивление вакуума в системе СИ. Индекс $j = 1$ соответствует нечётным конфигурациям полей **E** и **H** внутри плёнки (область $0 \leq z \leq d$), а $j = 2$ – чётным конфигурациям:

$$E_x^{(j)}(x, y, d - z) = (-1)^j E_x^{(j)}(x, y, z) \quad (\text{P-волна}),$$

$$H_x^{(j)}(x, y, d - z) = (-1)^j H_x^{(j)}(x, y, z) \quad (\text{S-волна}).$$

Формулы (1a) и (16) для оптических коэффициентов отражения и прохождения соответствуют формулам, приведенным в работах [6; 7]. В случае вакуума или воздуха при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$ эти формулы переходят в соотношения, данные в работах [2; 3; 8].

3. Поверхностные импедансы и диэлектрические проницаемости электронной плазмы

Поверхностные импедансы $Z_P^{(j)}$ и $Z_S^{(j)}$ в случае зеркального отражения электронов от поверхности плёнки имеют вид [2; 3] ($j = 1, 2$):

$$Z_P^{(j)} = \frac{2i\Omega}{\beta W} \sum_n \frac{1}{Q_n^2} \left(\frac{Q_x^2}{\Omega^2 \varepsilon_l(\Omega, Q_n)} + \frac{(\pi n/W)^2}{\Omega^2 \varepsilon_{tr}(\Omega, Q_n) - (Q_n/\beta)^2} \right), \quad (3a)$$

$$Z_S^{(j)} = -\frac{2i\Omega}{\beta W} \sum_n \frac{1}{\Omega^2 \varepsilon_{tr}(\Omega, Q_n) - (Q_n/\beta)^2}. \quad (36)$$

В этих формулах при $j = 1$ суммирование ведётся по всем нечётным целым $n = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$, а в случае $j = 2$ – по всем чётным $n = 0, \pm 2, \pm 4, \dots$

Далее, ε_l и ε_{tr} – продольная и поперечная диэлектрические проницаемости электронной плазмы. Для квантовой вырожденной электронной плазмы с учётом волновых свойств электронов эти проницаемости найдены в работах [13; 14] в рамках подхода Мермина [10], в котором используется матрица плотности электронов в пространстве импульсов. Данные проницаемости при нулевой температуре в случае постоянного времени релаксации имеют следующий вид:

$$\varepsilon_l^{(qu)}(\Omega, Q) = 1 + \frac{3}{4Q^2} \frac{(\Omega + i\gamma)F(\Omega + i\gamma, Q)F(0, Q)}{\Omega F(0, Q) + i\gamma F(\Omega + i\gamma, Q)}, \quad (4a)$$

$$\varepsilon_{tr}^{(qu)}(\Omega, Q) = 1 - \frac{1}{\Omega^2} \left(1 + \frac{\Omega G(\Omega + i\gamma, Q) + i\gamma G(0, Q)}{\Omega + i\gamma} \right). \quad (4б)$$

Здесь F и G – функции, определённые соотношениями:

$$\begin{aligned} F(\Omega + i\gamma, Q) &= \frac{1}{r} [B_1(\Omega_+ + i\gamma, Q) - B_1(\Omega_- + i\gamma, Q)] + 2, \\ G(\Omega + i\gamma, Q) &= \frac{3}{16r} [B_2(\Omega_+ + i\gamma, Q) - B_2(\Omega_- + i\gamma, Q)] + \\ &+ \frac{9}{8} \left(\frac{\Omega + i\gamma}{Q} \right)^2 + \frac{3}{32} Q^2 r^2 - \frac{5}{8}, \end{aligned}$$

где обозначено:

$$\begin{aligned} B_\alpha(\Omega + i\gamma, Q) &= \frac{[(\Omega + i\gamma)^2 - Q^2]^\alpha}{Q^{2\alpha+1}} L(\Omega + i\gamma, Q) \quad (\alpha = 1, 2), \\ L(\Omega + i\gamma, Q) &= \ln \frac{\Omega + i\gamma - Q}{\Omega + i\gamma + Q}, \quad \Omega_\pm = \Omega \pm \frac{1}{2} Q^2 r. \end{aligned}$$

Кроме того, используются безразмерные величины и параметры:

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_p}, \quad \beta = \frac{v_F}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\omega_p \tau}, \quad r = \frac{\hbar \omega_p}{m_e v_F^2}, \quad W = \frac{\omega_p d}{v_F}, \quad (5)$$

$$Q = \frac{v_F |\mathbf{k}|}{\omega_p}, \quad Q_n = \sqrt{\left(\frac{\pi n}{W} \right)^2 + Q_x^2}, \quad Q_x = \frac{v_F k_x}{\omega_p}.$$

Здесь ω – циклическая частота излучения, ω_p – плазменная частота вырожденного электронного газа, v_F – скорость Ферми электронов, c – скорость света в вакууме, τ – время релаксации электронов вследствие их столкновений в плазме, m_e – эффективная масса электронов проводимости, $\hbar$ – постоянная Планка, k_x – проекция волнового вектора $\mathbf{k}$ падающего излучения на ось X в плоскости плёнки (см. рис. 1), равная:

$$k_x = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1} \sin \theta.$$

Тогда безразмерная величина Q_x с учётом (5) равна:

$$Q_x = \beta \Omega \sqrt{\varepsilon_1} \sin \theta.$$

Величину r мы в дальнейшем называем квантовым параметром.

Диэлектрические проницаемости (4а) и (4б) квантовой плазмы в пределе квантового параметра $r \rightarrow 0$ переходят в соответствующие выражения для диэлектрических проницаемостей $\varepsilon_l^{(cl)}(\Omega, Q)$ и $\varepsilon_{tr}^{(cl)}(\Omega, Q)$ вырожденной электронной плазмы без учёта волновых свойств электронов [2; 3]:

$$\varepsilon_l^{(cl)}(\Omega, Q) = 1 + \frac{3}{Q^2} \left(1 + \frac{\Omega + i\gamma}{2Q} L(\Omega + i\gamma, Q) \right) \times \\ \times \left(1 + \frac{i\gamma}{2Q} L(\Omega + i\gamma, Q) \right)^{-1}, \quad (6a)$$

$$\varepsilon_{tr}^{(cl)}(\Omega, Q) = 1 - \frac{3}{4\Omega} \left(\frac{2(\Omega + i\gamma)}{Q^2} + B_1(\Omega + i\gamma, Q) \right). \quad (6b)$$

Данную плазму называем классической вырожденной электронной плазмой с пространственной дисперсией.

В пределе $Q \rightarrow 0$ квантовые диэлектрические проницаемости (4а) и (4б), как и диэлектрические проницаемости (6а) и (6б) классической вырожденной плазмы, переходят в диэлектрическую проницаемость классического электронного газа в рамках подхода Друде-Лоренца без учёта пространственной дисперсии:

$$\varepsilon_l^{(DL)}(\Omega) = \varepsilon_{tr}^{(DL)}(\Omega) = 1 - \frac{1}{\Omega(\Omega + i\gamma)}. \quad (7)$$

4. Результаты расчётов

Нами выполнены численные расчёты оптических коэффициентов отражения R , прохождения T и поглощения A по формулам (1)–(4), (6) и (7) для диэлектрических проницаемостей электронной плазмы в различных подходах. Типичные результаты расчётов представлены на рис. 2 для S-волны и рис. 3 для Р-волны. Для расчетов использованы следующие данные, характерные для металла калия [2; 3]: $\omega_p = 6.61 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$, $v_F = 8.5 \cdot 10^5 \text{ м/с}$, эффективная масса электронов проводимости равна массе свободных электронов, и $\gamma = 10^{-3}$. Поэтому согласно (5) нами взяты безразмерные параметры $\beta = 2.83 \cdot 10^{-3}$ и $r = 1.07$. В качестве первой диэлектрической среды взят воздух или вакуум с $\varepsilon_1 = 1$, а второй диэлектрической средой, или подложкой, служит кварц с $\varepsilon_2 = 2$.

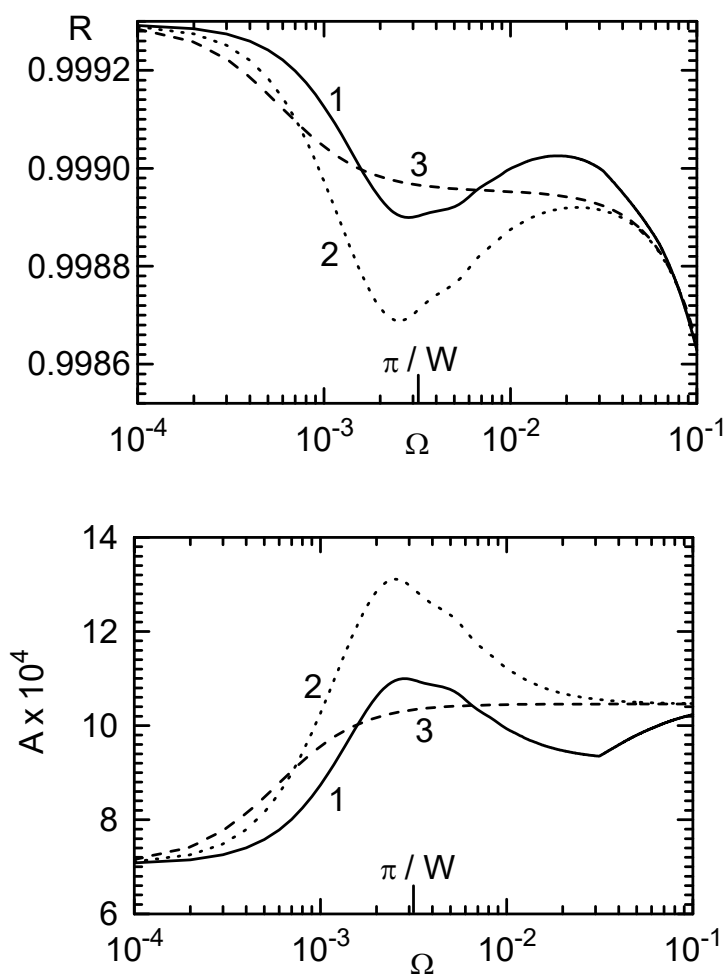


Рис. 2. Зависимости коэффициентов отражения R (верхний рисунок) и поглощения

A (нижний рисунок) для S -волны от безразмерной частоты Ω : 1 – квантовая плазма, 2 – классическая вырожденная плазма, 3 – подход Друде-Лоренца.

Величины $\theta = 60^\circ$, $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 2$, $W = 1000$, $\beta = 2.83 \cdot 10^{-3}$, $\gamma = 10^{-3}$, $r = 1.07$.

Расчёты показывают, что для безразмерных частот $\Omega \sim \frac{\pi}{W}$ (рис. 2) и $\Omega \sim 1$ (рис. 3) оптические коэффициенты отражения, прохождения и поглощения квантовой электронной плазмы отличаются от данных коэффициентов как классической вырожденной электронной плазмы с пространственной дисперсией, так и электронного газа в подходе Друде-Лоренца. Это отличие вызвано проявлением не только размерных эффектов пространственной

дисперсии [3; 5–8], но также и квантовых волновых свойств электронов в электронной плазме. Кроме того, при $\Omega > 1$ (рис. 3) данные волновые свойства электронов приводят к смещению, сглаживанию и устранению большинства классических резонансных пиков [3; 6], вызванных колебаниями электронной плазмы вдоль оси Z [1].

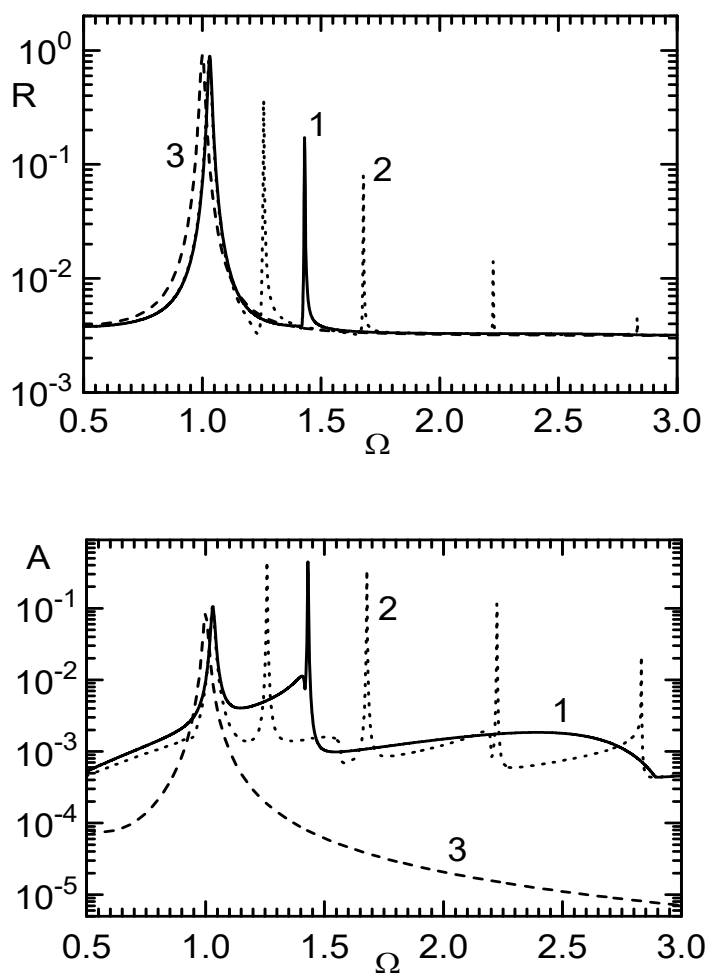


Рис. 3. Зависимости коэффициентов отражения R (верхний рисунок) и поглощения A (нижний рисунок) для Р-волны от безразмерной частоты Ω : 1 – квантовая плазма, 2 – классическая вырожденная плазма, 3 – подход Друде-Лоренца. Величины $\theta = 60^\circ$, $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 2$, $W = 10$, $\beta = 2.83 \cdot 10^{-3}$, $\gamma = 10^{-3}$, $r = 1.07$.

Стоит также отметить, что согласно (5) значения $W = 10$ и $W = 1000$ соответствуют толщине плёнки $d = 1.28$ нм и $d = 128$ нм соответственно. Поэтому квантовые волновые свойства электронов вместе с размерными эффектами пространственной дисперсии существенны в случае металлических плёнок нанометровых размеров. А поскольку плазменная частота электронов лежит в ультрафиолетовой области, данные квантовые свойства электронов заметны для частот от терагерцового и инфракрасного до видимого и ультрафиолетового диапазонов.

5. Заключение

В данной работе выполнены численные исследования влияния квантовых волновых свойств электронов вырожденной электронной плазмы на взаимодействие электромагнитного излучения с тонкой металлической плёнкой, расположенной между двумя прозрачными диэлектрическими средами. В результате исследований показано, что оптические коэффициенты с диэлектрическими проницаемостями квантовой плазмы отличаются от этих коэффициентов, рассчитанных для диэлектрических проницаемостей как классической вырожденной электронной плазмы с учётом пространственной дисперсии, так и классического электронного газа в подходе Друде - Лоренца без учёта пространственной дисперсии. Такое отличие наблюдается в областях частот от терагерцового и инфракрасного до видимого и ультрафиолетового диапазонов для плёнок нанометровых размеров.

Рассмотренные эффекты квантовых волновых свойств электронов в электронной плазме металлов необходимо принимать во внимание при изучении взаимодействия электромагнитного излучения с тонкими металлическими объектами, а также при конструировании оптических устройств с металлическими плёнками, работающими в качестве волноводов или управляемых оптических фильтров.

ЛИТЕРАТУРА

1. Pitarke J.M., Silkin V.M., Chulkov E.V. and Echenique P.M. Theory of surface plasmons and surface-plasmon polaritons // Rep. Progr. Phys. 2007. V. 70. P. 1–87.

2. Kliewer K.L. and Fuchs R. Anomalous Skin Effect for Specular Electron Scattering and Optical Experiments at Non-Normal Angles of Incidence // *Phys. Rev.* 1968. Vol. 172. no. 3. pp. 607–624.
3. Jones W.E., Kliewer K.L. and Fuchs R. Nonlocal Theory of the Optical Properties of Thin Metallic Films // *Phys. Rev.* 1969. Vol. 178. no. 3. pp. 1201–1203.
4. Kliewer K.L. and Fuchs R. Surface Plasmons in a Semi-Infinite Free Electron gas // *Phys. Rev. B.* 1971. Vol. 3. no. 7. pp. 2270–2278.
5. Парадес-Хуарес А., Диас-Монхе С., Макаров М.Н., Перес-Родригес Ф. Нелокальные эффекты в электродинамике металлических пластин // *Письма в Журнал экспериментальной и технической физики.* 2009. Т. 90. С. 687–692.
6. Латышев А.В., Юшканов А.А. Взаимодействие электромагнитной Е-волны с металлической плёнкой, расположенной между двумя диэлектрическими средами // *Оптика и спектроскопия.* 2012. Т. 112. № 1. С. 139–146.
7. Латышев А.В., Юшканов А.А. Взаимодействие электромагнитной Н-волны с металлической плёнкой, расположенной между двумя диэлектрическими средами // *Оптический журнал.* 2012. Т. 79. № 6. С. 1–9.
8. Зверев Н.В., Юшканов А.А. Электромагнитное излучение и тонкая металлическая пластина // *Вестник Московского областного государственного университета. Серия: Физика-математика.* 2015. № 3. С. 56–61.
9. Lindhard J. On the properties of a gas of charged particles // *Danske Vid. Selsk. Mat. -Fys. Medd.* 1954. Vol. 28. no. 8. pp. 1–57.
10. Mermin N.D. Lindhard Dielectric Function in the Relaxation-Time Approximation // *Phys. Rev. B.* 1970. Vol. 1. no. 5. pp. 2362–2363.
11. Латышев А.В., Юшканов А.А. Продольная диэлектрическая проницаемость квантовой вырожденной столкновительной плазмы // *Теоретическая и математическая физика.* 2011. Т. 169. № 3. С. 431–443.
12. Латышев А.В., Юшканов А.А. Поперечная электрическая проводимость в квантовой столкновительной плазме // *Физика плазмы.* 2012. Т. 38. № 11. С. 977–986.
13. Латышев А.В., Юшканов А.А. Поперечная электрическая проводимость квантовой столкновительной плазмы в подходе Мермина // *Теоретическая и математическая физика.* 2013. Т. 175. № 1. С. 132–143.
14. Латышев А.В., Юшканов А.А. Продольная электрическая проводимость в квантовой плазме с переменной частотой столкновений в рамках подхода Мермина // *Теоретическая и математическая физика.* 2014. Т. 178. № 1. С. 147–160.

REFERENCES

1. Pitarke J.M., Silkin V.M., Chulkov E.V. and Echenique P.M. Theory of surface plasmons and surface-plasmon polaritons // Rep. Progr. Phys. 2007. V. 70. P. 1–87.
2. Kliewer K.L. and Fuchs R. Anomalous Skin Effect for Specular Electron Scattering and Optical Experiments at Non-Normal Angles of Incidence // Phys. Rev. 1968. Vol. 172. no. 3. pp. 607–624.
3. Jones W.E., Kliewer K.L. and Fuchs R. Nonlocal Theory of the Optical Properties of Thin Metallic Films // Phys. Rev. 1969. Vol. 178. no. 3. pp. 1201–1203.
4. Kliewer K.L. and Fuchs R. Surface Plasmons in a Semi-Infinite Free Electron gas // Phys. Rev. B. 1971. Vol. 3. no. 7. pp. 2270–2278.
5. Parades-KHuares A., Dias-Monkhe S., Makarov M.N., Peres-Rodriges F. Nelokal'nye efekty v elektrodinamike metallicheskih plastin [Nonlocal effects in the electrodynamics of metal plates] // Pis'ma v Zhurnal eksperimental'noi i tekhnicheskoi fiziki. 2009. T. 90 [Letters to Journal of experimental and technical physics. 2009. Vol. 90]. pp. 687–692.
6. Latyshev A.V., Yushkanov A.A. Vzaimodeistvie elektromagnitnoi E-volny s metallicheskoj plenкой, raspolozhennoy mezhdu dvumya dielektricheskimi sredami [The interaction of electromagnetic E-waves by a metallic film sandwiched between two dielectric media] // Optika i spektroskopiya. 2012. T. 112. no. 1. pp. 139–146.
7. Latyshev A.V., Yushkanov A.A. Vzaimodeistvie elektromagnitnoi H-volny s metallicheskoj plenкой, raspolozhennoy mezhdu dvumya dielektricheskimi sredami [The interaction of electromagnetic H-waves with a metallic film sandwiched between two dielectric media] // Opticheskii zhurnal. 2012. T. 79. no. 6. pp. 1–9.
8. Zverev N.V., Yushkanov A.A. Elektromagnitnoe izluchenie i tonkaya metallicheskaya plastina [Electromagnetic radiation and a thin metal plate] // Vestnik Moskovskogo oblastnogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika. 2015. no. 3. pp. 56–61.
9. Lindhard J. On the properties of a gas of charged particles // Danske Vid. Selsk. Mat. -Fys. Medd. 1954. Vol. 28. no. 8. pp. 1–57.
10. Mermin N.D. Lindhard Dielectric Function in the Relaxation-Time Approximation // Phys. Rev. B. 1970. Vol. 1. no. 5. pp. 2362–2363.
11. Latyshev A.V., Yushkanov A.A. Prodol'naya dielektricheskaya pronitsaemost' kvantovoi vyrozhdennoi stolknovitel'noi plazmy [Longitudinal dielectric permeability of quantum degenerate collisional plasma] // Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika. 2011. Vol. 169. no. 3. pp. 431–443.
12. Latyshev A.V., Yushkanov A.A. Poperechnaya elektricheskaya provodimost' v kvantovoi stolknovitel'noi plazme [Transverse electric conductivity in quantum collisional plasma] // Fizika plazmy. 2012. Vol. 38. no. 11. pp. 977–986.
13. Latyshev A.V., Yushkanov A.A. Poperechnaya elektricheskaya provodimost' kvantovoi stolknovitel'noi plazmy v podkhode Mermina [Transverse electric conductivity in quantum collisional plasma in the approach Mermin] // Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika.

2013. Vol. 175. no. 1. pp. 132–143.

14. Latyshev A.V., Yushkanov A.A. Prodol'naya elektricheskaya provodimost' v kvantovoi plazme s peremennoi chastotoi stolknovenii v ramkakh podkhoda Mermina [Longitudinal electric conductivity in a quantum plasma with variable frequency of collisions in the approach Mermin] // Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika. 2014. Vol. 178. no. 1. pp. 147–160.

ИНФОМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Зверев Николай Витальевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической физики Московского государственного областного университета;
e-mail: zverev_nv@mail.ru

Юшканов Александр Алексеевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической физики, Московский государственный областной университет;
e-mail: yushkanov@inbox.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Zverev Nikolai Vital'evich – candidate of physical and mathematical sciences, associate professor of the Department of Theoretical Physics at the Moscow State Regional University;
e-mail: zverev_nv@mail.ru

Yushkanov Aleksandr Alekseevich – doctor of physical and mathematical sciences, professor of the Department of Theoretical Physics at the Moscow State Regional University;
e-mail: yushkanov@inbox.ru

БИБЛИОГРАФИЧЕСКАЯ ССЫЛКА

Зверев Н.В., Юшканов А.А. Квантовая электронная плазма, металлическая плёнка и электромагнитное излучение // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2016. № 3. С. 18–29.
DOI: 10.18384/2310-7251-2016-3-18-29.

BIBLIOGRAPHIC REFERENCE

N. Zverev, A. Yushkanov Quantum electron plasma, thin metal film and electromagnetic radiation // Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics. 2016. no. 3. pp. 18–29.
DOI: 10.18384/2310-7251-2016-3-18-29.

УДК 533.9(075.8)

DOI: 10.18384/2310-7251-2016-3-30-36

КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ НЕОДНОРОДНЫХ И НЕРАВНОВЕСНЫХ ГАЗОВЫХ СМЕСЕЙ

Маркеев Б.М.

*Московский государственный областной университет
105005, г. Москва, ул. Радио, д. 10А, Российская Федерация*

Аннотация. В работе развивается гидродинамическая теория течения сильнонеравновесной газовой смеси на основе разложения решения уравнения Больцмана по ортогональным полиномам в пространстве скоростей возле парциальной максвелловской функции. Классическим примером могут служить течения в области ударной волны, в слабоионизованном газе, помещённом в сильное электрическое поле, а также в кнудсеновском слое вблизи твёрдых поверхностей. Анализируются особенности обобщённого моментного метода решения кинетического уравнения по сравнению с классическим методом Чепмена-Энскога. Показано, что решения в рамках обобщённого моментного метода обладают для течения сильнонеравновесной газовой смеси более быстрой асимптотической сходимостью по сравнению с классическим методом Чепмена-Энскога.

Ключевые слова: классический метод Чепмена-Энскога, обобщенный моментный метод, уравнение Больцмана, максвелловская функция.

KINETIC THEORY AND NONEQUILIBRIUM INHOMOGENEOUS GAS MIXTURES

B. Markeev

*Moscow State Regional University, ul. Radio 10a,
105005 Moscow, Russia*

Abstract. We have developed the hydrodynamic theory of the flow of a strongly nonequilibrium gas mixture through the decomposition of the solution of the Boltzmann equation for orthogonal polynomials in the space of velocities near the partial Maxwellian function. A classic example is

the flow in the region of a shock wave in a weakly ionized gas placed in a strong electric field, and also in the Knudsen layer near the solid surfaces. We analyze the features of the generalized moment method for solving the kinetic equation as compared to the classical Chapman–Enskog method. It is shown that for the flow of a strongly nonequilibrium gas mixture, the solutions in the framework of the generalized torque method have a faster asymptotic convergence compared to the classical Chapman–Enskog method.

Keywords: classical Chapman-Enskog method, generalized moment method, the Boltzmann equation, Maxwellian function.

При исследовании потоков сильнонеравновесной газовой смеси удобно описывать каждую компоненту смеси парциальной функцией распределения $f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}_\alpha, t)$. Парциальная функция распределения определяется таким образом, что $f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}_\alpha, t)d\mathbf{r}d\mathbf{v}_\alpha$ представляет собой среднее число частиц сорта α в момент времени t , находящихся в объёме $d\mathbf{r}$ в окрестности точки $\mathbf{r}$ и интервале скоростей $d\mathbf{v}_\alpha$ в окрестности $\mathbf{v}_\alpha$. Функция распределения может также рассматриваться как плотность вероятности в $\mathbf{r}, \mathbf{v}_\alpha$ фазовом пространстве. Эволюция во времени парциальной функции распределения определяется как движением невзаимодействующих частиц в поле внешних сил, так и столкновениями между частицами. Математическое описание данной эволюции даётся хорошо известным уравнением Больцмана.

$$\nabla_t f_\alpha + \mathbf{v}_\alpha \nabla_r f_\alpha + [\mathbf{G} + (e_\alpha/m_\alpha)(\mathbf{E} + (1/c)[\mathbf{v}_\alpha \times \mathbf{B}])]\nabla_v f_\alpha = (\delta/\delta t) f_\alpha, \quad (1)$$

где e_α и m_α – заряд и масса частиц сорта α соответственно, $\mathbf{G}$ – массовая сила, $\mathbf{E}$ – электрическое поле, $\mathbf{B}$ – магнитное поле, c – скорость света, ∇_t – временная производная, ∇_r – градиент в пространстве координат, ∇_v – градиент в пространстве скоростей. Величина $(\delta/\delta t) f_\alpha$ в уравнении Больцмана представляет скорость изменения функции f_α в данной области фазового пространства за счёт столкновений. Для бинарных упругих столкновений между ионами и нейтралами и между нейтралами различных сортов используем интеграл столкновений Больцмана:

$$(\delta/\delta t) f_\alpha = \sum \int d\mathbf{v}_\beta d\Omega \mathbf{g}_{\alpha\beta} \sigma(\mathbf{g}_{\alpha\beta}, \delta) (f'_\alpha f'_\beta - f_\alpha f_\beta) = \sum I \quad (2)$$

где $d\mathbf{v}_{\alpha\beta}$ – элемент в пространстве скоростей частицы сорта α , $\mathbf{g}_{\alpha\beta}$ – относительная скорость сталкивающихся частиц сорта α и β , $\sigma(\mathbf{g}_{\alpha\beta}, \delta)$ – дифференциальное сечение рассеяния, $d\Omega$ – элемент телесного угла в системе центра масс, δ – угол рассеяния, штрих означает, что аргументом функции

распределения является скорость после столкновения. Хотя представляется заманчивым знать индивидуальное распределение частиц по скоростям, математические трудности, связанные с решением уравнения Больцмана, определили невозможность получения информации подобного рода для сильнонеравновесной смеси. В работах Чепмена, Энскога, Барнетта [1] основные физические величины были определены в системе координат, движущейся со среднемассовой скоростью газовой смеси:

$$\mathbf{u} = \sum n_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha} / \sum n_{\alpha} m_{\alpha}, \quad (3)$$

где n_{α} – плотность частиц сорта α , $\mathbf{u}_{\alpha}$ – средняя скорость частиц сорта α , которая определяется ниже. Тепловая скорость определяется относительно системы координат, движущейся со среднемассовой скоростью, соотношением:

$$\mathbf{c}_{\alpha}^{*} = \mathbf{v}_{\alpha} - \mathbf{u} \quad (4)$$

Для парциальной функции распределения имеют физический смысл следующие моменты:

парциальная дрейфовая скорость:

$$\mathbf{u}_{\alpha} = \langle \mathbf{v}_{\alpha} \rangle \quad (5)$$

парциальная температура:

$$(3/2) k_B T_{\alpha}^{*} = (m_{\alpha}/2) \langle \mathbf{c}_{\alpha}^{*2} \rangle \quad (6)$$

парциальный вектор теплового потока:

$$\mathbf{q}_{\alpha}^{*} = (1/2) n_{\alpha} m_{\alpha} \langle \mathbf{c}_{\alpha}^{*2} \mathbf{c}_{\alpha}^{*} \rangle \quad (7)$$

парциальный тензор давления:

$$P_{\alpha ik}^{*} = n_{\alpha} m_{\alpha} \langle c_{\alpha i}^{*} c_{\alpha k}^{*} \rangle \quad (8)$$

парциальный тензор напряжений:

$$\sigma_{\alpha ik}^{*} = \delta_{ik} p_{\alpha}^{*} - P_{\alpha ik}^{*} \quad (9)$$

парциальный тензор давления более высокого порядка:

$$\mu_{lik}^{*} = (1/2) n_{\alpha} m_{\alpha} \langle \mathbf{c}_{\alpha}^{*2} c_{\alpha i}^{*} \cdot \mathbf{c}_{\alpha k}^{*} \rangle \quad (10)$$

парциальный тензор третьего ранга

$$Q_{\alpha ijk}^{*} = n_{\alpha} m_{\alpha} \langle \mathbf{c}_{\alpha}^{*} c_{\alpha i}^{*} \mathbf{c}_{\alpha k}^{*} \rangle, \quad (11)$$

где $p_{\alpha} = n_{\alpha} k_B T_{\alpha}^{*}$ – парциальное давление частиц сорта α , k_B – постоянная Больцмана, δ_{ik} – символ Кронекера и угловые скобки означают усреднения:

$$\langle A \rangle = (1/n_{\alpha}) \int d\mathbf{v}_{\alpha} f_{\alpha} A. \quad (12)$$

Если в качестве одной гидродинамической переменной выбрана среднемассовая скорость, характеризующая движение смеси как целого, то

необходимо дополнительно к ней ввести диффузионные скорости, описывающие парциальные потоки индивидуальных компонент относительно системы координат, связанной со среднемассовой скоростью

$$W_{\alpha} = u_{\alpha} - u \quad (13)$$

В ранних работах Чепмена, Энскога, Барнетта уравнения переноса для гидродинамических переменных были получены в предположении, что величина диффузионных скоростей мала, поэтому членами, соответствующими моментам высокого порядка, произведению диффузионных скоростей, так же, как и произведению диффузионной скорости на моменты более высокого порядка q_{α}^* , $\sigma_{\alpha ik}^*$, μ_{lik}^* , Q_{aijk}^* , пренебрегали. Явления переноса в пределе малых диффузионных скоростей были изучены для различных газовых смесей, что нашло отражение в классической монографии Чепмена и Каулинга [2]. С другой стороны, система уравнений переноса для величин (1–9), предложенная в [3], описывает явления переноса в многокомпонентной газовой смеси при конечных числах Кнудсена, когда необходим учёт вязкого переноса импульса за счёт диффузионных скоростей, обусловленного взаимодействием между компонентами. Как альтернатива по отношению к транспортным свойствам смеси газов, определённым по отношению к среднемассовой скорости, в обобщённом методе моментов транспортные свойства компонентов газовой смеси определяются по отношению к средней парциальной скорости данной компоненты. Это предполагает, что для взаимодействующих компонент с конечными относительными скоростями парциальная функция распределения нулевого приближения более вероятно представляет собой максвелловскую функцию в системе, связанной с парциальной средней скоростью, а не со среднемассовой скоростью. И, как следствие, разложение функции распределения по скоростям для данного компонента частиц относительно парциальной максвелловской функции должно обеспечить более быструю асимптотическую сходимость, если парциальная скорость используется для определения транспортных свойств. По отношению к парциальной средней скорости хаотическая или тепловая средняя скорость определяется как

$$c_{\alpha} = v_{\alpha} - u_{\alpha}, \quad (14)$$

а моменты функции распределения, имеющие физический смысл, соответственно:

$$u_{\alpha} = \langle v_{\alpha} \rangle, \quad (15)$$

$$(3/2)k_B T_\alpha = \left(\frac{m_\alpha}{2}\right) < c_\alpha^2 >, \quad (16)$$

$$q_\alpha = (1/2) n_\alpha m_\alpha < c_\alpha^2 c_\alpha >, \quad (17)$$

$$P_{\alpha ik} = n_\alpha m_\alpha < c_{\alpha i} c_{\alpha k} >, \quad (18)$$

$$\sigma_{\alpha ik} = \delta_{ik} p_\alpha - P_{\alpha ik}, \quad (19)$$

$$\mu_{lik} = (1/2) n_\alpha m_\alpha < c_\alpha^2 c_{\alpha i} c_{\alpha k} >, \quad (20)$$

$$Q_{\alpha ijk} = n_\alpha m_\alpha < c_{\alpha i} c_{\alpha j} c_{\alpha k} >, \quad (21)$$

где $p_\alpha = n_\alpha k_B T_\alpha$. Отличие данного определения транспортных свойств от (4–11) можно выразить, используя величину диффузионной скорости

$$c_\alpha^* = c_\alpha + W_\alpha. \quad (22)$$

Подставляя (22) в (5–10) и учитывая (14–21), получим следующие соотношения в связи с различным определением транспортных свойств:

$$T_\alpha^* = T_\alpha + m_\alpha W_\alpha^2 / 3k_B, \quad (23)$$

$$q_{\alpha i}^* = q_{\alpha i} + \left(\frac{5}{2}\right) p_\alpha W_{\alpha i} - W_{\alpha k} \sigma_{\alpha ik} + \left(\frac{1}{2}\right) n_\alpha m_\alpha W_\alpha^2 W_{\alpha i}, \quad (24)$$

$$P_{\alpha ik}^* = P_{\alpha ik} + n_\alpha m_\alpha W_{\alpha i} W_{\alpha k}, \quad (25)$$

$$\sigma_{\alpha ik}^* = \sigma_{\alpha ik} - n_\alpha m_\alpha [W_{\alpha i} W_{\alpha k} - \delta_{ik} W_\alpha^2 / 3], \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \mu_{\alpha lik}^* &= \mu_{\alpha lik} + q_{\alpha i} W_{\alpha k} + W_{\alpha i} q_{\alpha k} + (3/2) p_\alpha W_{\alpha i} W_\alpha + W_{\alpha j} Q_{\alpha ijk} + \\ &+ 2P_{\alpha ij} W_{\alpha j} W_{\alpha k} + (1/2) W_\alpha^2 P_{\alpha ik} + (1/2) n_\alpha m_\alpha W_\alpha^2 W_{\alpha i} W_{\alpha k}, \end{aligned} \quad (27)$$

$$Q_{\alpha ijk}^* = Q_{\alpha ijk} + P_{\alpha ij} W_{\alpha k} + W_{\alpha i} P_{\alpha jk} n_\alpha m_\alpha < c_{\alpha i} W_{\alpha j} c_{\alpha k} > + n_\alpha m_\alpha W_{\alpha i} W_{\alpha j} W_{\alpha k}. \quad (28)$$

Как отмечалось выше, в методе Чепмена-Энскога-Барнетта для газовых смесей величина диффузной скорости предполагается достаточно малой, так что членами, содержащими моменты более высокого порядка и произведения диффузионных скоростей, можно пренебречь, как и членами, пропорциональными произведению W_α и моментов $q_\alpha, \sigma_{\alpha ik}, \mu_{\alpha lik}, Q_{\alpha ijk}$. Таким образом, в пределе малых диффузионных скоростей можно пренебречь отличием в определении транспортных свойств температуры, тензора давлений, тензора напряжений, тензора давлений более высокого порядка и тензора потока тепла. Представляется уместным отметить существенную разницу в определении потока тепла:

$$q_\alpha^* = q_\alpha + (5/2) p_\alpha W_\alpha. \quad (29)$$

Эту разницу в определении необходимо иметь в виду при сравнении коэффициентов переноса, полученных для (24), с соответствующими коэффициентами, которые следуют из теории Чепмена-Энскога. Классическим

примером сильнонеравновесной среды служит ударная волна в газовой смеси [4]. Одним из эффективных методов исследования явлений переноса в данной системе является метод Мотт-Смита, в рамках которого система характеризуется бимодальным распределением молекул по скоростям [5]:

$$f_{\alpha} = f_{\alpha}^{(1)} + f_{\alpha}^{(2)}, \quad f_{\alpha}^{(i)} = n_{\alpha} (m_{\alpha} / 2\pi k_B T_{\alpha})^{3/2} \exp \left\{ \frac{-m_{\alpha} (v_{\alpha} - u_{\alpha})^2}{2k_B T_{\alpha}} \right\}, \quad (30)$$

где $f_{\alpha}^{(1)}$ и $f_{\alpha}^{(2)}$ – максвелловские функции распределения относительно парциальных скоростей, определяющих состояние системы до ударной волны и после. Систему уравнений переноса, описывающую пространственную эволюцию функции распределения (30), полученной методом Мотт-Смита, замыкают обычно уравнением для переноса потока импульса, и величина изменения потока импульса (справедливая для конечных относительных скоростей) используется для определения толщины ударной волны. Её нетрудно обобщить на случай произвольных величин относительных скоростей, когда состояние системы характеризуется распределением (30). Другим классическим примером сильнонеравновесной среды может служить течение слабоионизированной плазмы в сильных электрических полях или течение газовой смеси в кнудсеновском слое вблизи поверхности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ender A., Ender I., Bakaleinikov L., Flegontova E. Recurrence relations between kernels of the nonlinear Boltzmann collision integral // *Europ. J. Mech.* – B/Fluids 36. 2012. pp. 17–24.
2. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. М.: Иностр. Лит., 1960. 510 с.
3. Маркеев Б.М. Спектры колебаний слабоионизированной столкновительной плазмы. Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2013. № 3. С. 78–81.
4. B. Schmidt, F. Seiler. M. Worner. Shock structure near a wall in pure inert gas and in inert gas mixtures. *J. Fluid Mech.* 1984. V. 143, pp. 305–326.
5. Франк-Каменецкий Д.А. Лекции по физике плазмы. Долгопрудный: Издательский дом «Интеллект», 2008. 280 с.

REFERENCES

1. Ender A., Ender I., Bakaleinikov L., Flegontova E. Recurrence relations between kernels of the nonlinear Boltzmann collision integral // *Europ. J. Mech.– B/Fluids* 36. 2012. pp. 17–24.
2. Chepmen S., Kauling T. *Matematicheskaya teoriya neodnorodnykh gazov* [The mathematical theory of nonuniform gases]. M., Inostr. Lit., 1960. 510 p.
3. Markeev B.M. *Spektry kolebaniy slaboionizirovannoi stolknovitel'noi plazmy* [Oscillation spectra slaboionizovannoi collisional plasma] // *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika*. 2013. no. 3. pp. 78–81.
4. B. Schmidt, F. Seiler. M. Worner. Shock structure near a wall in pure inert gas and in inert gas mixtures. *J. Fluid Mech.* 1984. Vol. 143. pp. 305–326.
5. Frank-Kamenetskii D.A. *Lektsii po fizike plazmy* [Lectures on plasma physics]. Dolgoprudny, Izdatel'skii dom «Intellect», 2008. 280 p.

ИНФОМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Маркеев Борис Михайлович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительной математики и методики преподавания информатики, Московский государственный областной университет, 105005, Москва, ул. Радио, 10А, Российская Федерация; e-mail: markeevb@gmail.com

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Markeev Boris Mikhajlovich – doctor of physical and mathematical sciences, professor, of the Department of Computational Mathematics and Methodology of Teaching Informatics at the Moscow State Regional University; e-mail: markeevb@gmail.com

БИБЛИОГРАФИЧЕСКАЯ ССЫЛКА

Маркеев Б. М. Кинетическая теория неоднородных и неравновесных газовых смесей // *Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика*. 2016. № 3. С. 30–36.

DOI: 10.18384/2310-7251-2016-3-30-36.

BIBLIOGRAPHIC REFERENCE

B. Markeev Kinetic theory and nonequilibrium inhomogeneous gas mixtures // *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*. 2016. no. 3. pp. 30–36.

DOI: 10.18384/2310-7251-2016-3-30-36.

УДК 771.36

DOI: 10.18384/2310-7251-2016-3-37-45

ЛИНЗЫ НА ОСНОВЕ ЖИДКИХ КРИСТАЛЛОВ С НЕОДНОРОДНЫМ РАДИАЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ДИРЕКТОРА

Соломатин А.С.

*Московский государственный областной университет,
Учебно-научная лаборатория теоретической и прикладной нанотехнологии.
105005, г. Москва, ул. Радио, д. 10А, Российская Федерация*

Аннотация. Получены расчётные данные о влиянии пространственного распределения директора ЖК на оптические свойства линзы ЖК. Предложены ориентационные распределения, пригодные к использованию как собирающая или как рассеивающая сферическая линза

Ключевые слова: линза ЖК, оптическая анизотропия, двулучепреломление, пространственно неоднородные структуры, оптические свойства.

LC LENSES WITH VARIOUS RADIAL ORIENTATIONAL DISTRIBUTION

A. Solomatina

*Education & Research Lab of Theoretical and Applied Nanotechnology,
Moscow State Regional University, ul. Radio 10a, 105005 Moscow, Russia*

Abstract. We have obtained data on the effect of the spatial distribution of the LC director on the optical properties of the LC lens. Orientation distributions are proposed, suitable for use as a collecting or scattering spherical lens.

Keywords: LC lens, optical anisotropy, birefringence, spatially inhomogeneous structure, optical properties.

1. Введение

Принципы и основы теории построения адаптивных линз (АЛ) рассмотрены в [1]. Повышение качества изображения, увеличение быстродействия и апертуры – основные тенденции их развития.

С изменением фазовой задержки слоя ЖК изменяется фокусное расстояние АЛ. Изменением параметров электрического поля (амплитуда, частота) осуществляется изменение фокусного расстояния АЛ. Фазовая задержка слоя ЖК изменяется при изменении зависящего от приложенного поля пространственного распределения директора ЖК.

Фокусное расстояние увеличивается с ростом диаметра микролинзы.

Если зависимость фазовой задержки от радиальной координаты квадратичная, то ЖК линза соответствует сферической линзе. Можно аналогично рассматривать зависимость необыкновенного показателя преломления от радиальной координаты, если толщина слоя ЖК одинакова по всему полю линзы и его радиальное ориентационное распределение одинаково по всему объёму ЖК слоя. Она соответствует сферической рассеивающей линзе, если разность показателей преломления возрастает квадратично от центра линзы (имеет форму параболы). Она соответствует сферической собирающей линзе, если разность показателей преломления убывает квадратично от центра линзы (имеет форму параболы).

2. Неоднородные ЖК структуры, формирующие микролинзу

В [2–6] рассмотрены нематические жидкокристаллические структуры с неоднородным распределением директора. На рис. 1 изображена предлагаемая ЖК структура.

Это упорядоченный (матрица из цилиндрических пор с ЖК микролинзами в них) блок микролинз, установленный перед матрицей фотоэлементов цифрового фотоаппарата на заранее определённом (толщина прозрачного слоя между матрицей линз и матрицей фотоэлементов) расстоянии, выбранном с учётом фокусного расстояния микролинз. Фотоэлементы стоят по осям микролинз, образуя матрицу с такими же пространственными характеристиками.

На рис. 2 представлена цилиндрическая пора, заполненная ЖК, для случая S распределения [2–6]. Это ЖК микролинза. У поверхности цилиндра угол директора ЖК отличается от угла посередине (на оси цилиндра, то есть линзы). Угол посередине равен нулю, то есть директор параллелен оси цилиндра (линзы).

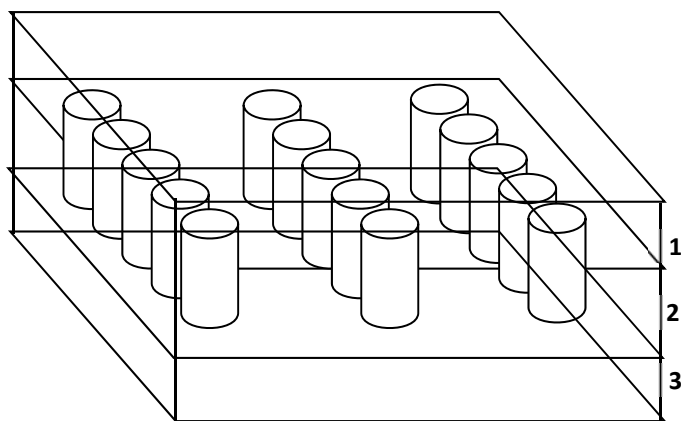


Рис. 1. Обозначения: 1 – прозрачный слой сверху (перед матрицей микролинз); 2 – непрозрачный слой, содержащий блок микролинз (цилиндрические поры, заполненные ЖК); 3 – прозрачный слой, отделяющий микролинзы от фотоэлементов. Фотоэлементы не показаны на рисунке. Свет падает сверху вниз.

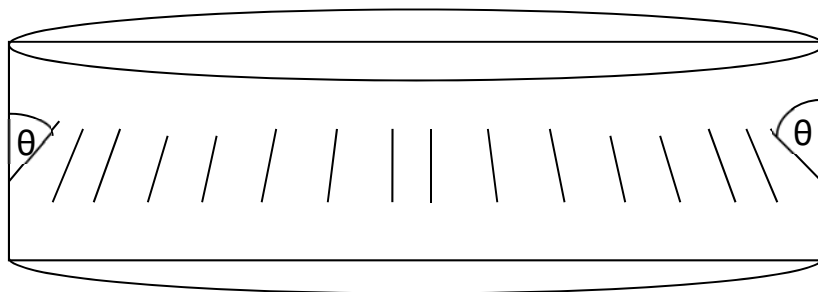


Рис. 2. ЖК микролинза. Цилиндрическая пора заполнена нематическим ЖК. Случай S распределения. Посередине директор ЖК параллелен оси линзы.

В данной работе распределение директора ЖК рассмотрено при отношении коэффициентов упругости от $K_{33}/K_{11}=0,5$ до $K_{33}/K_{11}=3$.

Распределения угла наклона директора ЖК по диаметру цилиндрической поры показаны на рис. 3. Приведены данные для S и B распределения [2–6].

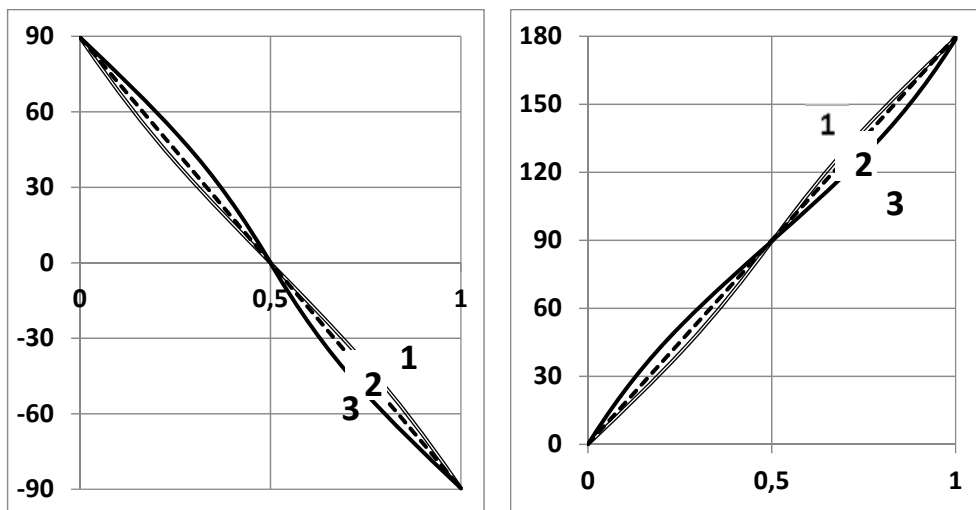


Рис. 3. Распределение угла наклона директора ЖК по диаметру микролинзы. Слева **S** распределение, справа **B** распределение. Отношение коэффициентов упругости: 1) $K_{33}/K_{11}=0,5$; 2) $K_{33}/K_{11}=1$; 3) $K_{33}/K_{11}=3$.

Достаточно обширны возможности управления ориентацией ЖК с помощью цилиндрического электрода (проводящего покрытия) на стенках цилиндрической поры и другого электрода, контакт которого расположен [1] на торцах цилиндра точно по оси. Так может прилагаться неоднородное электрическое поле. Электрическое поле может прилагаться и однородное с помощью прозрачных электродов [2–6] на торцах цилиндрической поры. Изменением параметров электрического поля (амплитуда, частота) осуществляется изменение фокусного расстояния адаптивной линзы (АЛ) [1]. Таким образом возможно управление оптическими свойствами микролинзы.

Можно получить микролинзу, аналогичную сферической, и без приложения поля. ЖК линза, как уже упоминалось выше, соответствует сферической линзе, если квадратична зависимость от радиальной координаты для необыкновенного показателя преломления.

В данной работе впервые предложены микролинзы ЖК **S** и **B** типов.

3. Микролинзы ЖК **S** и **B** типов

Для различных ЖК линз (различных ориентационных распределений) зависимости показателя преломления от радиальной координаты были

смоделированы. На рис.4 приведены данные для ориентационных распределений S типа.

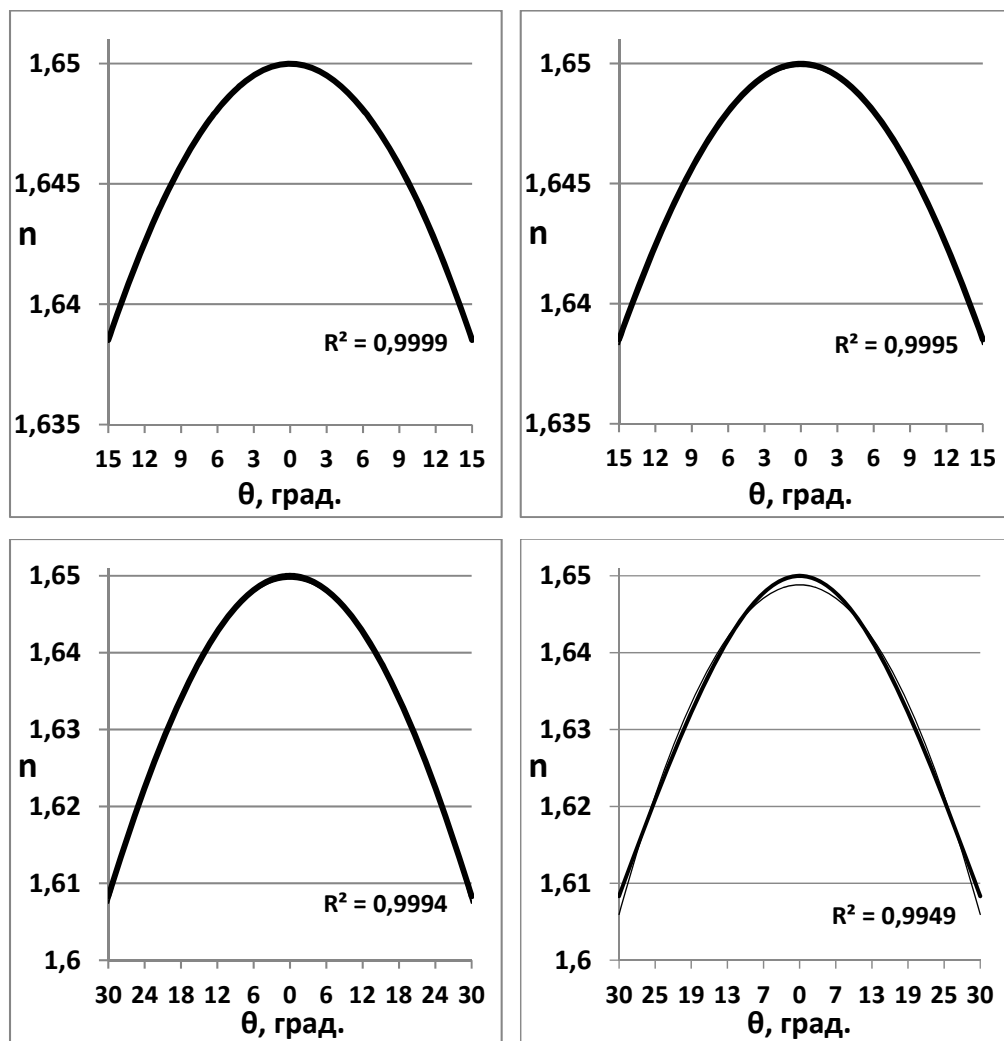


Рис. 4. Зависимость показателя преломления от угла наклона директора ЖК для цилиндрической поры с S распределением.

Слева $K_{33}/K_{11}=0,5$. Справа $K_{33}/K_{11}=3$.

На рис. 5 приведены данные для распределений B типа. Показатель преломления n вычисляется [1] по формуле:

$$n = \frac{n_o n_e}{\sqrt{n_o^2 \cos^2 \theta + n_e^2 \sin^2 \theta}},$$

где угол θ зависит от радиальной координаты.

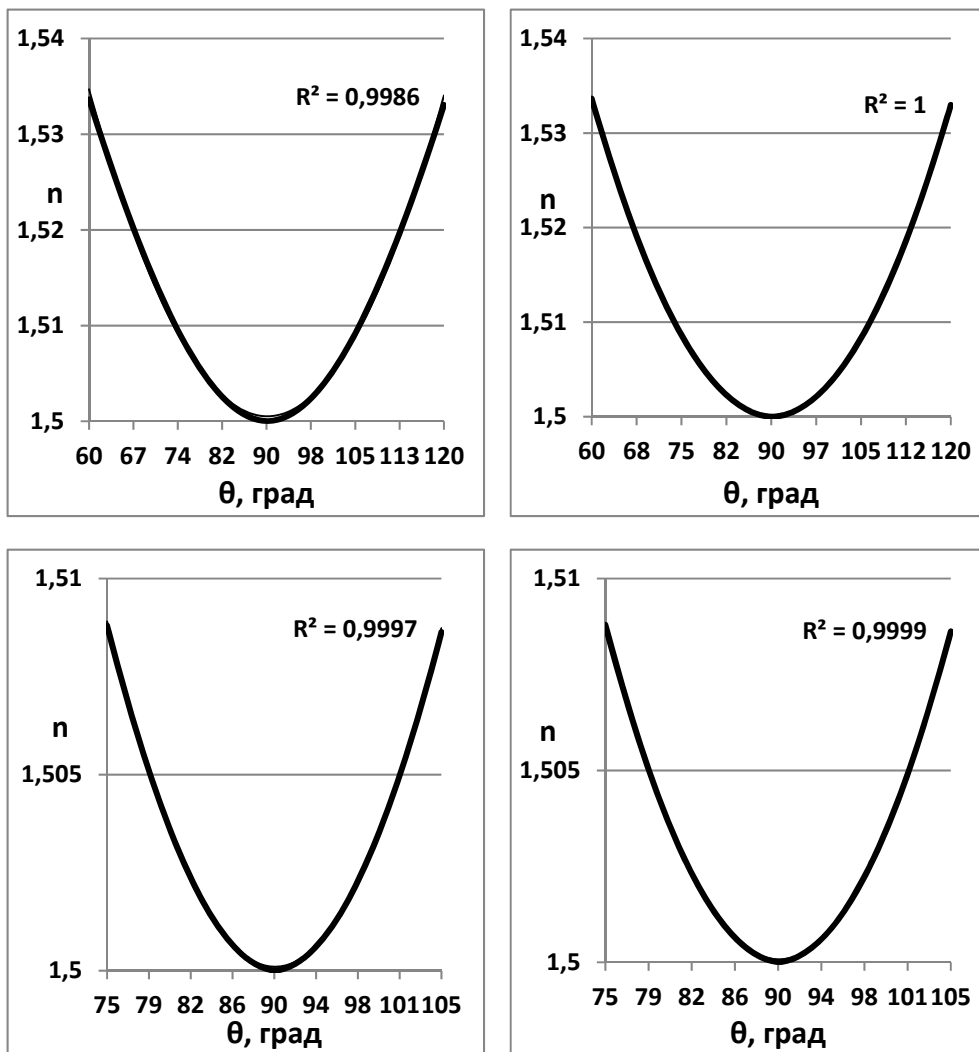


Рис. 5. Зависимость показателя преломления от углов наклона директора ЖК. Микролинзы с B распределением директора ЖК. Слева $K_{33}/K_{11}=0,5$. Справа $K_{33}/K_{11}=3$

Значения отношения коэффициентов упругости K_{33}/K_{11} в пределах от $K_{33}/K_{11}=0,5$ до $K_{33}/K_{11}=3$. Угол наклона директора ЖК, как показано на рис.3,

распределен по радиальной координате нелинейно при K_{33}/K_{11} отличном от единицы. В связи с этим по горизонтальной оси на рис.4 и рис.5 указаны углы наклона директора.

Для радиальной координаты по горизонтальной оси выбран линейный масштаб. Вследствие нелинейности зависимости углов наклона директора от радиальной координаты, они распределены вдоль горизонтальной оси неравномерно. Показано сравнение с квадратичной функцией для зависимости $n(r)$ показателя преломления от радиальной координаты. Параметр R^2 , показывающий их расхождение, крайне близок к единице. Радиальная координата на горизонтальной оси не подписана.

Зависимость показателя преломления от радиальной координаты, как видно из рис. 4, квадратична при небольших угловых диапазонах. Микролинза ЖК аналогична сферической линзе при приповерхностных углах до 30° . На практике механообработкой (формированием микрорельефа) и выбором покрытия (ориентанта) цилиндрической поверхности такие приповерхностные углы для S распределения вполне реализуемы [2–6].

Она соответствует сферической собирающей линзе, так как разность показателей преломления убывает квадратично от центра линзы.

Зависимость показателя преломления от радиальной координаты, как видно из рис. 5, квадратична при небольших угловых диапазонах. Таким образом, микролинза ЖК аналогична сферической линзе при приповерхностных углах более 60° . Для B распределения вполне реализуемы такие приповерхностные углы [2–6] на практике. Микролинза соответствует сферической рассеивающей линзе, разность показателей преломления возрастает квадратично от центра.

Отношение K_{33}/K_{11} играет, в целом, важную роль для оптических свойств ЖК слоя, но, как видно из рис. 4 и рис. 5, при небольших угловых диапазонах эффект от изменения K_{33}/K_{11} небольшой.

4. Выводы

Впервые предложены микролинзы ЖК S и B типов.

Смоделированы зависимости показателя преломления от радиальной координаты для различных ЖК линз.

Показано, что есть достаточно обширные возможности управления оптическими свойствами микролинзы, изменяя приложенным полем ориентацию ЖК.

Показано, что микролинзу, аналогичную сферической, можно получить и без приложения поля. Указаны диапазоны углов и оценено влияние упругих свойств ЖК.

Предложен блок микролинз, установленный перед матрицей фотоэлементов цифрового фотоаппарата.

ЛИТЕРАТУРА

1. Невская Г.Е., Томилин М.Г. Адаптивные линзы на основе жидких кристаллов // Оптический журнал. 2008. Т. 75. № 9. С. 35–48.
2. Belyaev V., Solomatin A., Chausov D. Phase retardation vs. pretilt angle in liquid crystal cells with homogeneous and inhomogeneous LC director configuration // Optics Express. 2013. Vol. 21, pp. 4244–4249.
3. Belyaev V.V., Solomatin A.S., Kurilov A.D., Chausov D.N., Mazaeva V.G. Optical Properties of Hybrid Aligned Nematic (HAN) Cells with Different Pretilt Angles // Applied Optics. 2014. Vol. 53. Issue 29. pp. H51–H57.
4. Беляев В.В., Соломатин А.С. Оптические свойства гибридных жидкокристаллических ячеек при различных углах падения света // Оптический Журнал. 2015. Т. 82. № 1. С. 41–48.
5. Belyaev V.V., Solomatin A.S., Chausov D.N., Phase retardation difference of liquid crystal cells with symmetric and asymmetric boundary conditions // Molecular Crystals & Liquid Crystals. 2014. Vol. 596. pp. 22–29.
6. Беляев В.В., Соломатин А.С., Чаусов Д.Н. Оптические свойства ЖК ячеек с произвольным краевым углом наклона директора // Вестник Московского государственного областного университета. Серия «Физика-Математика». 2013. № 1. С. 32–41.

REFERENCES

1. Nevskaya G.E., Tomilin M.G. Adaptivnye linzy na osnove zhidkikh kristallov [Adaptive lenses based on liquid crystals] // Opticheskii zhurnal. Vol. 75. 2008. no. 9. pp. 35–48.
2. Belyaev V., Solomatin A., Chausov D. Phase retardation vs. pretilt angle in liquid crystal cells with homogeneous and inhomogeneous LC director configuration // Optics Express. 2013. Vol. 21, pp. 4244–4249.

3. Belyaev V.V., Solomatin A.S., Kurilov A.D., Chausov D.N., Mazaeva V.G. Optical Properties of Hybrid Aligned Nematic (HAN) Cells with Different Pretilt Angles // *Applied Optics*. 2014. Vol. 53. Issue 29. pp. H51–H57.
4. Belyaev V.V., Solomatin A.S. Opticheskie svoistva gibridnykh zhidkokristallicheskih yacheek pri razlichnykh uglakh padeniya sveta [Optical properties of hybrid liquid crystal cell at various angles of incidence of light] // *Opticheskii Zhurnal*. Vol. 82. 2015. no. 1. pp. 41–48.
5. Belyaev V.V., Solomatin A.S., Chausov D.N. Opticheskie svoistva ZHK yacheek s proizvol'nym kraevym uglom naklona direktora [The optical properties of the LCD cell with arbitrary boundary angle of the Director] // *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya «Fizika-Matematika»*. 2013. no. 1. pp. 32–41.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Соломатин Алексей Сергеевич – кандидат физико-математических наук, инженер учебно-научной лаборатории теоретической и прикладной нанотехнологии, Московский государственный областной университет;
e-mail: Sotrudnica_UNC@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Solomatin Aleksei Sergeevich – candidate of physical and mathematical sciences, engineer of the Education & Science Lab for Theoretical and Applied Nanotechnology at the Moscow State Regional University;
e-mail: Sotrudnica_UNC@mail.ru

БИБЛИОГРАФИЧЕСКАЯ ССЫЛКА

Соломатин А.С. Линзы на основе жидких кристаллов с неоднородным радиальным распределением директора. // *Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика*. 2016. № 3. С. 37–45.
DOI: 10.18384/2310-7251-2016-3-37-45.

BIBLIOGRAPHIC REFERENCE

A. Solomatin LC lenses with various radial orientational distribution. // *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*. 2016. no. 3. pp. 37–45.
DOI: 10.18384/2310-7251-2016-3-37-45.

УДК 533.72

DOI: 10.18384-2310-7251-2016-3-46-56

ТЕОРИЯ ТЕРМОФОРЕЗА ДУБЛЕТОВ КРУПНЫХ ТВЕРДЫХ СФЕРИЧЕСКИХ МНОГОСЛОЙНЫХ АЭРОЗОЛЬНЫХ ЧАСТИЦ ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ОРИЕНТАЦИИ ДУБЛЕТОВ

Хасанов А.С.*Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова**117997, г. Москва, Стремянный пер., 36, Российская Федерация*

Аннотация. Решение задачи о термифорезе двух крупных твердых сферических гидродинамически взаимодействующих многослойных аэрозольных частиц получено операторным методом для произвольной ориентации дублетов. Формулы для скорости термифореза и угловой скорости вращения частиц для дублетов однородных и двухслойных частиц обобщены для многослойных частиц.

Ключевые слова: термифорез, аэрозольная частица, гидродинамическое взаимодействие.

THE THEORY OF THERMOPHORESIS FOR DOUBLETS OF LARGE SOLID SPHERICAL MULTILAYER AEROSOL PARTICLES FOR ANY ORIENTATION OF DOUBLETS

A. Khasanov*Plekhanov Russian University of Economics,**Stremyannyyi per. 36, 117997 Moscow, Russia*

Abstract. The problem of thermophoresis is solved by the operational method for two large solid spherical hydrodynamic interacting multilayer aerosol particles for any orientation of doublets. Formulas for the rate of the thermophoresis and angular velocity of rotation of particles for doublets of homogeneous and two-layer hydrodynamic interacting aerosol particles are generalized for multilayer particles.

Key words: thermophoresis, aerosol particles, hydrodynamic interaction.

1. Введение

Движение аэрозольной частицы в газовых средах под действием постоянного на большом удалении от частицы градиента температуры ∇T называется термофорезом. Причиной такого движения является неоднородность поля температуры на поверхности частицы. На неоднородность поля температуры на поверхности частицы влияют как близко расположенные другие частицы, так и неоднородность частиц по теплопроводности. В данной работе рассматриваются крупные [1] твёрдые сферические аэрозольные частицы. В случае таких частиц число Кнудсена $\lambda/a \ll 1$, где λ – средняя длина свободного пробега молекул окружающего частицу газа, a – радиус частицы. При описании движения крупных частиц газ рассматривается как сплошная среда и применяются методы гидродинамики. Взаимодействие газа с неоднородно нагретой поверхностью частицы приводит к тепловому скольжению [1] газа по её поверхности. В этих условиях создается действующий на частицу импульс, под действием которого она приходит в ускоренное движение. На частицу также действует сила вязкого сопротивления внешней среды, которая увеличивается с ростом скорости [2] и уравнивает термофоретическую силу, что позволяет определить мгновенную термофоретическую скорость частицы, используя условие равенства нулю действующей на нее результирующей силы. В общем случае частица совершает и вращательное движение вокруг оси, проходящей через её центр масс. Мгновенную угловую скорость вращения частицы можно определить из условия равенства нулю действующего на нее результирующего крутящего момента.

Если аэрозольные частицы расположены близко, то возмущение в газе, вызванное движением одной частицы, влияет на движение другой частицы. Частицы начинают взаимодействовать гидродинамически. Термофоретическое движение двух одинаковых гидродинамически взаимодействующих крупных твердых сферических однородных аэрозольных частиц рассмотрено приближёнными методами в работе [3]. В работе [4] рассмотрено термофоретическое движение двух одинаковых гидродинамически взаимодействующих крупных твёрдых сферических многослойных аэрозольных частиц операторным методом в случае, когда движение дублета происходит вдоль линии центров параллельно градиенту температуры ∇T (в этом случае движение является осесимметрическим, вращение частиц отсутствует). Под

многослойной частицей имеется в виду частица, состоящая из k сферических слоев: $0 \leq r \leq a_1$, $a_1 \leq r \leq a_2$, $a_2 \leq r \leq a_3$, ..., $a_{k-1} \leq r \leq a_k$, где $0 < a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_k = a$, $k \leq 3$. Сферические слои считаются однородными. Коэффициент теплопроводности i -го слоя равен κ_i . В работе [5] рассмотрено термофоретическое движение двух одинаковых гидродинамически взаимодействующих крупных твердых сферических двухслойных аэрозольных частиц при произвольной ориентации дублета. Целью данной работы является обобщение результатов работ [4; 5] на случай дублетов многослойных частиц при произвольной ориентации дублета относительно градиента температуры ∇T .

2. Уравнения и граничные условия для полей температур

Пусть две одинаковые крупные твердые сферические многослойные аэрозольные частицы взвешены в однокомпонентном газе (воздух тоже приближённо можно рассматривать как однокомпонентный газ), в котором на большом удалении от этих частиц поддерживается постоянный градиент температуры ∇T . Поле температуры в газе, в котором градиент температуры постоянен и равен ∇T , а аэрозольные частицы отсутствуют, обозначим через T_∞ . Пусть T_e – поле температуры в газе с учётом рассматриваемых аэрозольных частиц, T_0 – средняя температура газа в рассматриваемом объёме в поле T_∞ , $T_a = |\nabla T|a$. Величина T_a/T_0 характеризует относительный перепад температуры на расстоянии в один радиус частицы. В реальных условиях $T_a/T_0 \ll 1$ [1].

Пусть O_1 и O_2 – центры частиц, O – середина отрезка O_1O_2 , l – расстояние между центрами частиц, $\vec{l}$ – вектор O_1O_2 , α – угол между векторами ∇T и $\vec{l}$. Выберем декартову систему координат $Oxyz$, в которой направление оси Oz совпадает с направлением вектора $\vec{l}$, координатная плоскость Oxz параллельна вектору ∇T . Везде, далее, r , θ , φ – сферические координаты точки в системе координат с началом в точке O . Нумерация частиц и направление оси Ox выбраны так, что углы между вектором ∇T и единичными векторами $\vec{i}$, $\vec{k}$ не превосходят $\pi/2$. Путём параллельного переноса системы $Oxyz$ в точки O_1 и O_2 получим системы координат, в которых записываются граничные условия на поверхностях частиц и их слоев. Везде далее r_j , θ_j , φ_j – сферические координаты точки в системе координат с началом в точке O_j , где $j \in \{1, 2\}$.

Пусть $T_i^{(j)}$ – поле температуры в i -м слое j -й частицы, где $1 \leq i \leq k, j \in \{1, 2\}$. Так как $T_a/T_0 \ll 1$, то поля $T_e, T_i^{(j)}$ можно изучать [1], решая уравнения $\nabla^2 T_e = 0, \nabla^2 T_i^{(j)} = 0$, где $1 \leq i \leq k, j \in \{1, 2\}$. Граничные условия на поверхностях слоев имеют следующий вид: $T_{i-1}^{(j)} = T_i^{(j)}$ и $\kappa_{i-1} \frac{\partial T_{i-1}^{(j)}}{\partial r_j} = \kappa_i \frac{\partial T_i^{(j)}}{\partial r_j}$ при $r_j = a_{i-1}$, где $2 \leq i \leq k, j \in \{1, 2\}$. На поверхностях частиц выполняются граничные условия $T_e = T_k^{(j)}$ и $\kappa_e \frac{\partial T_e}{\partial r_j} = \kappa_k \frac{\partial T_k^{(j)}}{\partial r_j}$ при $r_j = a$ где κ_e – коэффициент теплопроводности газа, $j \in \{1, 2\}$. На большом удалении от частиц возмущение поля температуры T_∞ , вызванное аэрозольными частицами, исчезает: $\lim_{r \rightarrow \infty} (T_e - T_\infty) = 0$.

3. Решение уравнений теплопроводности

Поле температуры в газе T_e можно представить в виде [3] $T_e = T_\infty + \varepsilon^{(1)} + \varepsilon^{(2)}$, где $\varepsilon^{(j)}$ – возмущение поля T_∞ , вызванное j -й частицей и удовлетворяющее условиям $\nabla^2 \varepsilon^{(j)} = 0$ и $\lim_{r \rightarrow \infty} \varepsilon^{(j)} = 0$. Пусть, для определённости, T_0 – температура в точке O_1 в поле T_∞ . Ясно, что $T_\infty = T_0 + \delta_{2j} \vec{l} \cdot \nabla T + \vec{r}_j \cdot \nabla T$, где δ_{ij} – символ Кронекера, а запись $\vec{a} \cdot \vec{b}$ означает скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Пусть N – множество натуральных чисел, $Z_+ = N \cup \{0\}, n \in Z_+, m \in Z_+, m \leq n, P_n(x)$ – многочлен Лежандра,

$P_n^{(m)}(x) = (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^m P_n(x)}{dx^m}$ – присоединенная функция Лежандра первого рода, $Y_n^{(-m,j)} = P_n^{(m)}(\cos \theta_j) \cos m \varphi_j, Y_n^{(+m,j)} = P_n^{(m)}(\cos \theta_j) \sin m \varphi_j$ – сферические функции, $H_n^{(\pm m,j)} = r^n Y_n^{(\pm m,j)}$ и $H_{-n-1}^{(\pm m,j)} = r^{-n-1} Y_n^{(\pm m,j)}$ – объёмно-сферические функции, $j \in \{1, 2\}$. Поля температур $T_i^{(j)}$ и возмущения $\varepsilon^{(j)}$ поля температуры T_∞ ищем в виде [6]

$$\begin{aligned} T_1^{(1)} &= T_0 + T_a \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n x_{nm}^{(1,1)} (r_1/a)^n Y_n^{(-m,1)}, \\ T_i^{(1)} &= T_0 + T_a \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n [x_{nm}^{(i,1)} (r_1/a)^n + y_{nm}^{(i,1)} (a/r_1)^{n+1}] Y_n^{(-m,1)}, \text{ где } 2 \leq i \leq k, \\ T_1^{(2)} &= T_0 + \vec{l} \cdot \nabla T + T_a \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n x_{nm}^{(1,2)} (r_2/a)^n (-1)^{n+m} Y_n^{(-m,2)}, \\ T_i^{(2)} &= T_0 + \vec{l} \cdot \nabla T + T_a \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n [x_{nm}^{(i,2)} (r_2/a)^n + y_{nm}^{(i,2)} (a/r_2)^{n+1}] (-1)^{n+m} Y_n^{(-m,2)}, \text{ где } 2 \leq i \leq k, \\ \varepsilon^{(1)} &= T_a \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n x_{nm}^{(e1)} (a/r_1)^{n+1} Y_n^{(-m,1)}, \\ \varepsilon^{(2)} &= T_a \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n x_{nm}^{(e2)} (a/r_2)^{n+1} (-1)^{n+m} Y_n^{(-m,2)}, \text{ где } x_{nm}^{(i,j)}, y_{nm}^{(i,j)} \text{ и } x_{nm}^{(ej)} - \\ &\text{неопределённые коэффициенты } (1 \leq i \leq k, j \in \{1, 2\}). \text{ Так как [2]} \end{aligned}$$

$$(-1)^{n+m} Y_n^{(\pm m, 2)} (a/r_2)^{n+1} = \sum_{s=m}^{\infty} C_{n+s}^{n-m} t^{n+s+1} (r_1/a)^s Y_s^{(\pm m, 1)}$$

при $r_1 < l$, где $t = a/l$, и $T_{\infty} = T_0 + \delta_{2j} \vec{l} \cdot \nabla T + \vec{r}_j \cdot \nabla T$, то в системе координат с центром в точке O_1 :

$$T_e = T_0 + \vec{r}_1 \cdot \nabla T + T_a \left[\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n x_{nm}^{(e1)} (a/r_1)^{n+1} Y_n^{(-m, 1)} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{s=m}^{\infty} x_{nm}^{(e2)} C_{n+s}^{n-m} t^{n+s+1} (r_1/a)^s Y_s^{(-m, 1)} \right]$$

при $r_1 < l$. Так как [2]

$$Y_n^{(\pm m, 1)} (a/r_1)^{n+1} = \sum_{s=m}^{\infty} C_{n+s}^{n-m} t^{n+s+1} (r_2/a)^s (-1)^{s+m} Y_s^{(\pm m, 2)}$$

при $r_2 < l$, то в системе координат с центром в точке O_2 при $r_2 < l$

$$T_e = T_0 + \vec{l} \cdot \nabla T + \vec{r}_2 \cdot \nabla T + T_a \left[\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n x_{nm}^{(e2)} (a/r_2)^{n+1} (-1)^{n+m} Y_n^{(-m, 2)} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{s=m}^{\infty} x_{nm}^{(e1)} C_{n+s}^{n-m} t^{n+s+1} (r_2/a)^s (-1)^{s+m} Y_s^{(-m, 2)} \right].$$

Из граничных условий для полей температур можно найти неопределённые коэффициенты операторным методом [5], в котором нахождение неопределённых коэффициентов сводится к нахождению бесконечномерных векторов. Пусть l_1 – полное линейное нормированное пространство [7], состоящее из векторов $X = (x_1, x_2, \dots)^T$, для которых $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| < +\infty$. В l_1 $\|X\| = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|$. Ясно, что $E = (1, 0, 0, \dots)^T \in l_1$, пусть L – пространство ограниченных линейных операторов, действующих из l_1 в l_1 , а $L_1^{(M)}$ – пространство матриц A с бесконечным числом строк и столбцов с нормой $\|A\| = \sup_n \sum_{s=1}^{\infty} |a_{sn}|$. Любой оператор $B \in L$ можно задать с помощью матрицы $A \in L_1^{(M)}$ по формуле $BX = AX$, где $X \in l_1$, AX – произведение матрицы A на вектор X . Норма такого оператора, согласованная с нормой вектора X , совпадает с нормой $\|A\| = \sup_n \sum_{s=1}^{\infty} |a_{sn}|$. Основываясь на этом взаимно-однозначном соответствии между $L_1^{(M)}$ и L , для матрицы и соответствующего ей линейного оператора будем использовать одно и то же обозначение.

Определим матрицы, которые будут нужны для решения уравнений теплопроводности. Везде, далее, запись $(A)_{sn}$ означает элемент с индексами s и n матрицы A , где $s \in N$, $n \in N$. Определим сначала диагональную матрицу $\Lambda_e^{(k)}$. Для любого i , где $0 \leq i \leq k-1$, определим величины $\chi_i = \frac{a_i}{a_{i+1}}$ и $\tau_i = \frac{\kappa_{i+1}}{\kappa_i}$, где $a_0 = 0$, $\kappa_0 = \kappa_1$. Ясно, что $\chi_0 = 0$, $\tau_0 = 1$. Пусть $\tau = \frac{\kappa_e}{\kappa_k}$ и $\varphi_s = (1-x)/[1+(1+1/s)x]$, где s - произвольное натуральное число, а $x \neq -s/(s+1)$. Для любого натурального числа s определим еще один набор из k чисел по рекуррентной формуле $\tau'_{is} = \tau_i \varphi_s (\chi_{i-1}^{2s+1} \varphi_s (\tau'_{i-1,s}))$, где $1 \leq i \leq k-1$, а $\tau'_{0s} = \tau_0 = 1$. Элементы диагональной матрицы $\Lambda_e^{(k)}$ определяются по формуле $(\Lambda_e^{(k)})_{sn} = \varphi_s (\tau \varphi_s (\chi_{k-1}^{2s+1} \varphi_s (\tau'_{k-1,s}))) \delta_{sn}$. Пусть матрицы $M^{(m)}$ при $m \in \{0,1\}$ определены по формулам $(M^{(m)})_{sn} = C_{n+s}^{n-m} t^{n+s+1}$. Можно доказать, что операторы $M^{(m)}$ при $m \in \{0,1\}$ являются сжимающими, а так как $\|\Lambda_e^{(k)}\| \leq 1$, то отсюда следует [7], что $(E \pm M^{(0)} \Lambda_e^{(k)})^{-1} \in L$, $(E \pm M^{(1)} \Lambda_e^{(k)})^{-1} \in L$, где E - единичный оператор. Диагональную матрицу $\Lambda^{(2)}$ определим по формуле $(\Lambda^{(2)})_{sn} = s(s+1) \delta_{sn}$.

Пусть линейное пространство l'_1 состоит из векторов $X = (x_1, x_2, \dots)^T$, для которых $\sum_{i=1}^{\infty} |i^\alpha x_i| < +\infty$ при $\forall \alpha \in \mathbb{Z}_+$. Ясно, что l'_1 является подпространством пространства l_1 . Можно доказать, что $\Lambda^{(2)}(E - \Lambda_e^{(k)})(E + M^{(1)} \Lambda_e^{(k)})^{-1} E_1 \in l'_1$, $\Lambda^{(2)}(E - \Lambda_e^{(k)})(E - M^{(0)} \Lambda_e^{(k)})^{-1} E_1 \in l'_1$. Зафиксируем значения θ_j и φ_j . Пусть R^∞ - линейное пространство всевозможных бесконечных числовых последовательностей $X = (x_1, x_2, \dots)$, а запись $[X]_i$ означает i -ю координату элемента $X \in R^\infty$. Для значений $m \in \{0,1\}$ и $j \in \{1,2\}$ определим четыре элемента $P^{(m,j)}$ (т.е. $P^{(0,1)}$, $P^{(1,1)}$, $P^{(0,2)}$, $P^{(1,2)}$) пространства R^∞ по формулам $[P^{(m,1)}]_i = Y_i^{(-m,1)}$, $[P^{(m,2)}]_i = (-1)^{i+m} Y_i^{(-m,2)}$. Так как $Y_n^{(-m,j)} = P_n^{(m)}(\cos \theta_j) \cos m \varphi_j$, а $|P_n^{(0)}(\cos \theta_j)| \leq 1$ и $|P_n^{(1)}(\cos \theta_j)| \leq n(n+1)/2$, то этим четырём элементам $P^{(m,j)}$ соответствуют линейные функционалы, определённые на линейном пространстве l'_1 по формулам $P^{(m,j)} X = \sum_{i=1}^{\infty} [P^{(m,j)}]_i x_i$, где $X = (x_1, x_2, \dots)^T \in l'_1$. Для обозначения элемента пространства R^∞ и порожденного им линейного функционала на l'_1 будем использовать одно и то же обозначение. Мы не будем приводить формулу для поля температуры в газе T_e , записанную с использованием линейных операторов и функционалов, а приведём только две

формулы, которые нам нужны будут для решения гидродинамической части задачи. На поверхности первой частицы, т.е. при $r_1 = a$ и любых θ_1, φ_1

$$\nabla^2(T_e|_{r_1=a}) = -|\nabla T|/a [\sin \alpha P^{(1,1)} \Lambda^{(2)} (E - \Lambda_e^{(k)}) (E + M^{(1)} \Lambda_e^{(k)})^{-1} E_1 + \cos \alpha P^{(0,1)} \Lambda^{(2)} (E - \Lambda_e^{(k)}) (E - M^{(0)} \Lambda_e^{(k)})^{-1} E_1]. \quad (1)$$

На поверхности второй частицы, т.е. при $r_2 = a$ и любых θ_2, φ_2

$$\nabla^2(T_e|_{r_2=a}) = -|\nabla T|/a [\sin \alpha P^{(1,2)} \Lambda^{(2)} (E - \Lambda_e^{(k)}) (E + M^{(1)} \Lambda_e^{(k)})^{-1} E_1 - \cos \alpha P^{(0,2)} \Lambda^{(2)} (E - \Lambda_e^{(k)}) (E - M^{(0)} \Lambda_e^{(k)})^{-1} E_1]. \quad (2)$$

4. Уравнения и граничные условия для полей скорости и давления

Зная поле температуры в газе T_e , можно решать гидродинамическую часть задачи. Из условия $T_a/T_0 \ll 1$ следует, что число Рейнольдса является величиной малой [1], поля скорости и давления в газе могут быть определены при граничных условиях, имеющих место в данный момент времени, из квазистационарных уравнений Стокса $\eta \nabla^2 \vec{v} = \nabla p$, $\nabla \cdot \vec{v} = 0$, где $\lim_{r \rightarrow \infty} |\vec{v}| = 0$ (газ покоится вдали от частиц) и $\lim_{r \rightarrow \infty} p = p_{e\infty}$ (вдали от частиц возмущение поля давления, исходящее от движущихся частиц, исчезает). Пусть $\vec{U}^{(j)}$ – мгновенная термофоретическая скорость j -й частицы, а $\vec{\omega}^{(j)}$ – её мгновенная угловая скорость вращения. На поверхности движущейся j -й частицы генерируется поле скорости $\vec{V}^{(j)}$ в газе:

$$\vec{V}^{(j)} = \vec{U}^{(j)} + [\vec{\omega}^{(j)}, \vec{r}_j] + \frac{K_{Tsl}\eta}{T_0\rho_e a} \nabla_{\theta_j, \varphi_j} T_e, \quad (3)$$

где $r_j = a$, $[\vec{\omega}^{(j)}, \vec{r}_j]$ – векторное произведение $\vec{\omega}^{(j)}$ и $\vec{r}_j$, $\nabla_{\theta, \varphi} T_e = \vec{l}_\theta \frac{\partial T_e}{\partial \theta} + \vec{l}_\varphi \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial T_e}{\partial \varphi}$, а K_{Tsl} , ρ_e , η – соответственно, коэффициент теплового скольжения, плотность и динамическая вязкость газа. Поле $\vec{v}$ удовлетворяет граничным условиям $\vec{v} = \vec{V}^{(j)}$ при $r_j = a$, где $j \in \{1, 2\}$. Термофоретическая скорость j -й частицы $\vec{U}^{(j)}$ определяется из условия равенства нулю действующей на нее результирующей силы $\vec{F}^{(j)}$. Угловая скорость вращения $\vec{\omega}^{(j)}$ j -й частицы определяется из условия равенства нулю действующего на неё результирующего крутящего момента $\vec{T}^{(j)}$.

5. Решение уравнений гидродинамики

Поля скорости $\vec{v}$ и давления p в газе будем искать в виде $\vec{v} = \vec{v}^{(1)} + \vec{v}^{(2)}$, $p = p_{e\infty} + p^{(1)} + p^{(2)}$, где $\vec{v}^{(j)}$, $p^{(j)}$ – возмущения, вызванные движением j -й частицы и определяемые из уравнений $\eta \nabla^2 \vec{v}^{(j)} = \nabla p^{(j)}$, $\nabla \cdot \vec{v}^{(j)} = 0$, где $\lim_{r_j \rightarrow \infty} |\vec{v}^{(j)}| = 0$ и $\lim_{r_j \rightarrow \infty} p^{(j)} = 0$. Поля $\vec{v}^{(j)}$, $p^{(j)}$ ищем в виде [2-3]:

$$\vec{v}^{(j)} = \sum_{n=1}^{\infty} [\nabla \Phi_{-n-1}^{(j)} + \nabla \times (\vec{r}_j \chi_{-n-1}^{(j)}) - \frac{(n-2)r_j^2}{2\eta n(2n-1)} \nabla p_{-n-1}^{(j)} + \frac{(n+1)\vec{r}_j}{\eta n(2n-1)} p_{-n-1}^{(j)}],$$

$$p^{(j)} = \sum_{n=1}^{\infty} p_{-n-1}^{(j)},$$

где $\Phi_{-n-1}^{(j)} = r_j^{-n-1} \sum_{m=0}^n A_{nm}^{(j)} Y_n^{(-m,j)}$, $p_{-n-1}^{(j)} = r_j^{-n-1} \sum_{m=0}^n D_{nm}^{(j)} Y_n^{(-m,j)}$, $\chi_{-n-1}^{(j)} = r_j^{-n-1} \sum_{m=0}^n C_{nm}^{(j)} Y_n^{(+m,j)}$, а $A_{nm}^{(j)}$, $D_{nm}^{(j)}$, $C_{nm}^{(j)}$ – неопределённые коэффициенты.

Неопределённые коэффициенты можно найти из граничных условий $\vec{v} = \vec{V}^{(j)}$ при $r_j = a$, учёт которых равносильно [2] учёту следующих трех условий при $r_j = a$: $v_{r_j} = r_j^{-1} \vec{r}_j \cdot \vec{V}^{(j)}$, $r_j \frac{\partial v_{r_j}}{\partial r_j} = -r_j \nabla \cdot \vec{V}^{(j)}$, $\vec{r}_j \cdot \nabla \times \vec{v} = \vec{r}_j \cdot \nabla \times \vec{V}^{(j)}$, где $j \in \{1, 2\}$. Из этих условий можно найти неопределённые коэффициенты операторным методом, в котором нахождение неопределённых коэффициентов сводится к нахождению бесконечномерных векторов [5]. При записи граничного условия (3) на операторном языке используются формулы (1)–(2).

Приведём только окончательные формулы для скоростей $\vec{U}^{(j)}$ и $\vec{\omega}^{(j)}$. Для этого введём определения. Пусть $m \in \{0, 1\}$,

$$\gamma_{sn}^{(m)} = \frac{(s-m)(s+m)[sn-2(s+n)+1]}{s(2s-1)(n+1)(n+s)} + \frac{2-n}{2(n+1)}, \beta_{sn} = \frac{n(2n-1)}{2(n+1)(2s+3)}, \text{ где } s \in n, n \in N.$$

Определим матрицы с бесконечным числом строк и столбцов по формулам

$$(M_{\beta}^{(m)})_{sn} = C_{n+s}^{n-m} t^{n+s+1} \beta_{sn}, (M_{\gamma}^{(m)})_{sn} = C_{n+s}^{n-m} t^{n+s-1} \gamma_{sn}^{(m)},$$

$$(M_{\omega 1}^{(m)})_{sn} = C_{n+s}^{n-m} t^{n+s} m/s, (M_{\omega 2}^{(m)})_{sn} = C_{n+s}^{n-m} t^{n+s+1} n/(s+1),$$

$$(M_{\omega 3}^{(m)})_{sn} = C_{n+s}^{n-m} t^{n+s} m(2n-1)/[s(s+1)(n+1)].$$

Следующие матрицы являются диагональными и определены по формулам

$$(\Lambda_1)_{sn} = -(s+1)/s \delta_{sn}, (\Lambda_4)_{sn} = (s+1) \delta_{sn}, (\Lambda_5)_{sn} = (2s+3) \delta_{sn}, (\Lambda_6)_{sn} = (2s+1) \delta_{sn}.$$

Пусть:

$$R^- = \Lambda_5 M_{\beta}^{(0)} + \Lambda_6 M_{\gamma}^{(0)} - \Lambda_6 M^{(0)} \Lambda_1^{-1} (E - M^{(0)} \Lambda_1^{-1})^{-1} (0,5E - M_{\beta}^{(0)} - M_{\gamma}^{(0)}),$$

$$R^+ = \Lambda_5 M_\beta^{(1)} + \Lambda_6 M_\gamma^{(1)} + \Lambda_6 M_{\omega 1}^{(1)} (E + M_{\omega 2}^{(1)})^{-1} M_{\omega 3}^{(1)} - \Lambda_6 M^{(1)} \Lambda_1^{-1} (E + M_{\omega 1}^{(1)} \Lambda_1^{-1})^{-1} [0,5E + M_\beta^{(1)} + M_\gamma^{(1)} + M_{\omega 1}^{(1)} (E + M_{\omega 2}^{(1)})^{-1} M_{\omega 3}^{(1)}].$$

Для $\Lambda \in \{\Lambda_1^{-1}, \Lambda_e^{(k)}\}$ определим функции:

$$f^-(t, \Lambda) = E_1^T (E - R^-)^{-1} \Lambda_4 (E - \Lambda) (E - M^{(0)} \Lambda)^{-1} E_1,$$

$$f^+(t, \Lambda) = E_1^T (E + R^+)^{-1} \Lambda_4 (E - \Lambda) (E + M^{(1)} \Lambda)^{-1} E_1,$$

$$f^{+\omega}(t, \Lambda) = E_1^T (E + M_{\omega 2}^{(1)})^{-1} M_{\omega 3}^{(1)} (E + R^+)^{-1} \Lambda_4 (E - \Lambda) (E + M^{(1)} \Lambda)^{-1} E_1,$$

$$f_\omega^+(t, \Lambda) = E_1^T (E + R^+)^{-1} \Lambda_4 (E - \Lambda) (E + M^{(1)} \Lambda)^{-1} M_{\omega 1}^{(1)} (E + M_{\omega 2}^{(1)})^{-1} E_1,$$

$$f_\omega^{+\omega}(t, \Lambda) = E_1^T (E + M_{\omega 2}^{(1)})^{-1} E_1 + E_1^T (E + M_{\omega 2}^{(1)})^{-1} M_{\omega 3}^{(1)} (E + R^+)^{-1} \Lambda_4 (E - \Lambda) (E + M^{(1)} \Lambda)^{-1} M_{\omega 1}^{(1)} (E + M_{\omega 2}^{(1)})^{-1} E_1,$$

$$h^+(t, \Lambda) = f^{+\omega}(t, \Lambda) / f^+(t, \Lambda), g^+(t, \Lambda) = f_\omega^{+\omega}(t, \Lambda_1^{-1}) - h^+(t, \Lambda) f_\omega^+(t, \Lambda_1^{-1}).$$

Можно доказать корректность всех приведенных формул [5]. Пусть

$$u^-(t, \Lambda_e^{(k)}) = \frac{f^-(t, \Lambda_e^{(k)}) f^-(0, \Lambda_1^{-1})}{f^-(t, \Lambda_1^{-1}) f^-(0, \Lambda_e^{(k)})}, u^+(t, \Lambda_e^{(k)}) = \frac{f^+(t, \Lambda_e^{(k)}) f^+(0, \Lambda_1^{-1}) g^+(t, \Lambda_e^{(k)})}{f^+(t, \Lambda_1^{-1}) f^+(0, \Lambda_e^{(k)}) g^+(t, \Lambda_1^{-1})}.$$

После нахождения неопределённых коэффициентов и выражений для результирующей силы $\vec{F}^{(j)}$ и результирующего крутящего момента $\vec{T}^{(j)}$, находим формулы для скоростей $\vec{U}^{(j)}$ и $\vec{\omega}^{(j)}$:

$$\vec{U}^{(j)} = -\frac{2K_{Tsl}\eta|\nabla T|}{3T_0\rho_e} [1 - (\Lambda_e^{(k)})_{11}] [u^+(t, \Lambda_e^{(k)}) \sin \alpha \vec{i} + u^-(t, \Lambda_e^{(k)}) \cos \alpha \vec{k}], \quad (4)$$

$$\vec{\omega}^{(j)} = (-1)^j \frac{K_{Tsl}\eta|\nabla T|}{T_0\rho_e a} \frac{f^+(t, \Lambda_e^{(k)})}{g^+(t, \Lambda_1^{-1})} [h^+(t, \Lambda_1^{-1}) - h^+(t, \Lambda_e^{(k)})] \sin \alpha \vec{j}. \quad (5)$$

6. Заключение

Решение задачи о термофорезе двух крупных твёрдых сферических многослойных аэрозольных частиц может быть получено операторным методом при любой ориентации дублета относительно градиента температуры ∇T . Формулы (4)–(5) содержат бесконечномерные матрицы. Но на основе этих точных формул можно составить вычислительные схемы для приближённых вычислений с любой степенью точности, для которых достаточны возможности программы Excel [5]. Из них могут быть выведены формулы для скоростей $\vec{U}^{(j)}$ и $\vec{\omega}^{(j)}$ с точностью до $o(t^n)$, где n – заданное натуральное число. Так как коэффициенты теплопроводности слоев частицы могут совпадать, из формул (4)–(5) можно вывести формулы для дублетов однородных и двухслойных

частиц при любой ориентации дублетов. Путём предельного перехода при $t \rightarrow 0$ из них можно получить формулы для скорости термофореза одиночных однородных, двухслойных и многослойных частиц. Практически любую неоднородную частицу можно приближённо рассматривать как многослойную, разбивая её на большое количество слоев. Полученные формулы позволяют учитывать неоднородность частиц при описании движения дублета при любой её ориентации. Расчёты показывают, что игнорировать объёмные особенности частиц нельзя.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Яламов Ю.И., Галоян В.С. Динамика капель в неоднородных вязких средах. Ереван: Луйс, 1985. 208 с.
2. Хаппель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976. 632 с.
3. Яламов Ю.И., Мелехов А.П., Гайдуков М.Н. Термофорез гидродинамически взаимодействующих аэрозольных частиц // Доклады АН СССР. 1986. Т. 287. № 2. С. 337–341.
4. Яламов Ю.И., Хасанов А.С. Теория термофореза двух гидродинамически взаимодействующих многослойных аэрозольных частиц // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика. 2007. № 1. С. 30–41.
5. Хасанов А.С., Арсланов И.М. Теория термофореза дублетов двухслойных частиц с учётом скачка температуры на их поверхности при произвольной ориентации дублетов // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2009. № 1–2. С. 31–45.
6. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 735 с.
7. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 542 с.

REFERENCES

1. Yalamov YU.I., Galoyan B.C. Dinamika kapel' v neodnorodnykh vyazkikh sredakh [Dynamics of droplets in an inhomogeneous viscous media]. Yerevan, Luis, 1985. 208 p.
2. KHappel' Dzh., Brenner G. Gidrodinamika pri malykh chislakh Reinol'dsa [Hydrodynamics at small Reynolds numbers]. M., Mir, 1976. 632 p.
3. Yalamov YU.I., Melekhov A.P., Gaidukov M.N. Termoforez gidrodinamicheskii vzaimodeistvuyushchikh aerazol'nykh chastits [The thermophoresis of hydrodynamically

- interacting particles] // Doklady AN SSSR. Vol. 287. 1986. no. 2. pp. 337–341.
4. Yalamov YU.I., Khasanov A.S. Teoriya termoforeza dvukh gidrodinamicheski vzaimodeistvuyushchikh mnogoslownykh aerazol'nykh chastits [Theory of thermophoresis of two hydrodynamically interacting multi-layered aerosol particles] // Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika. 2007. no. 1. pp. 30–41.
 5. Khasanov A.S., Arslanov I.M. Teoriya termoforeza dubletov dvukhsloinykh chastits s uchetom skachka temperatury na ikh poverkhnosti pri proizvol'noi orientatsii dubletov [Theory of thermophoresis of doublets of two-layer particles taking into account the jump of the temperature on the surface at an arbitrary orientation of the doublets] // Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-Matematika. 2009. no. 1–2. pp. 31–45.
 6. Tikhonov A.N., Samarskii A.A. Uravneniya matematicheskoi fiziki [Equations of mathematical physics]. M., Nauka, 1972. 735 p.
 7. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Elementy teorii funktsii i funktsional'nogo analiza [Elements of the theory of functions and functional analysis]. M., Nauka, 1976. 542 p.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Хасанов Анис Салыхович - доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики ФГБОУ ВО «Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова»;
e-mail: ankhasanov@yandex.ru.

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Khasanov Anis Salyakhovich - doctor of physical and mathematical sciences, Professor of Higher Mathematics Department, Plekhanov Russian University of Economics;
e-mail: ankhasanov@yandex.ru.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКАЯ ССЫЛКА

Хасанов А.С. Теория термофореза дублетов крупных твердых сферических многослойных аэрозольных частиц для произвольной ориентации дублетов // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2016. № 3. С. 46-56.
DOI: 10.18384-2310-7251-2016-3-46-56.

BIBLIOGRAPHIC REFERENCE

A. *Khasanov*. The theory of thermophoresis for doublets of large solid spherical multilayer aerosol particles for any orientation of doublets // Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics. 2016. no. 3. pp. 46-56.
DOI: 10.18384-2310-7251-2016-3-46-56.

УДК 537.61

DOI: 10.18384/2310-7251-2016-3-57-71

ТЕРМОДИНАМИКА СИСТЕМЫ НЕВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ СВОБОДНЫХ ЭЛЕКТРОНОВ

Алиев И.Н., Докукин М.Ю., Самедова З.А.

*Московский Государственный Технический Университет имени Н.Э. Баумана,
105005, г. Москва, 2-я Бауманская, д. 5, Российская Федерация*

Аннотация. В работе в рамках большого канонического распределения с помощью потенциалов Гиббса проводится детальный анализ термодинамических характеристик ансамбля невзаимодействующих свободных электронов с последующей целью развития модернизированной классической теории сверхпроводимости.

Ключевые слова. свободные электроны, термодинамические потенциалы Гиббса, теплоёмкость

THERMODYNAMICS OF THE SYSTEM OF NONINTERACTING FREE ELECTRONS

I. ALIEV, M. DOKUKIN, Z. SAMEDOVA

*Bauman Moscow State Technical University,
105005 Moscow, 2nd Baumanskaya st., 5, Russian Federation*

Abstract. Within the limits of the large canonical distribution by means of Gibbs potentials, a detailed analysis is performed of the thermodynamic characteristics of an ensemble of noninteracting free electrons with the subsequent purpose of the development of the modernised classical theory of superconductivity.

Keywords: free electrons, thermodynamic Gibbs potentials, heat capacity.

Введение

В последнее время вновь усилился интерес к классической теории сверхпроводимости, в частности к вопросам, связанным с двухфазной термодинамической моделью Гортера-Казимира, описывающей

сверхпроводник как смесь двух электронных жидкостей, каждая из которых по-разному ведет себя во внешнем магнитном поле, то есть, фактически, речь идет о двухфазной системе [1]. Различные подходы при анализе этой проблемы разбирались в работах последних лет [2-4]. Исследования в этой области были инициированы тем обстоятельством, что был получен с помощью термодинамического условия равновесия Гиббса несколько неожиданный результат – а именно, что в случае достаточно хорошо проводящего тела (не обязательно сверхпроводника) постоянный электрический ток, а вместе с ним и магнитное поле вытесняются на поверхность [5]. В связи с этим возникает необходимость по-новому взглянуть на базовые работы по сверхпроводимости [6-7]. Дело в том, что прямого измерения объёмного тока в сплошном твёрдом проводнике не существует и, скорее всего, это измерение принципиально не может быть проведено. В самом деле, начиная с классических экспериментов Мейсснера-Оксенфельда [8], измерялись лишь магнитные поля вокруг проводников, т.е. интегральные характеристики. Так, например, в опубликованной недавно работе [9] измерялось, как обычно, магнитное поле, а затем в рамках так называемой обратной задачи Био-Савара-Лапласа делался вывод о распределении токов. На наш взгляд, это не совсем корректно: по значению определённого интеграла, как правило, нельзя делать вывод о виде подынтегральной функции.

Напомним, что Лондоны исходили из простой идеи, казавшейся после открытия эффекта Мейсснера очень естественной: в теории сверхпроводимости в первую очередь надо учитывать свойство сверхпроводников выталкивать постоянные магнитные поля (то есть свойство идеального диамагнетика), а уж затем объяснять свойство нулевого электросопротивления, или обращения в бесконечность электропроводности. Однако, в недавней работе авторов [5] с помощью магнитного принципа виртуальных работ и, используя термодинамическую гипотезу Гиббса, вычислялось равновесное распределение поверхностных и объёмных стационарных токов и было показано, что постоянные токи действительно выдавливаются на поверхность. Но постоянство токов возможно в двух случаях: либо требуется наличие регулируемых источников тока, что весьма трудно учесть, либо мало электрическое сопротивление тела.

В связи с вышесказанным возникла необходимость детального анализа квантово-механического поведения ансамбля электронов в широком диапазоне температур, в частности, анализ термодинамических характеристик. В недавней работе [10] представлен анализ равновесного состояния двухфазной термодинамически равновесной системы, в настоящей же работе предпринята попытка детального анализа указанных свойств на основе квантово-механического описания на базе операторов вторичного квантования, как это было сделано для электрических свойств твердого тела при низких температурах.

В связи с этим появилась также необходимость рассмотрения классической термодинамической двух жидкостной теории Гортера-Казимира [11-12]. Детальный анализ этой работы представлен авторами в недавних публикациях [1; 5]. В настоящей работе предпринята попытка дополнения этих исследований выводом из условия термодинамического равновесия выражений для термодинамических потенциалов, энтропии и теплоёмкости в широком диапазоне температур. Полученный результат имеет смысл применить для дальнейших попыток развития модернизированной классической теории сверхпроводимости, основы которой изложены в работах [13-14].

В целях полноты изложения остановимся вначале на общих вопросах термодинамики намагничивающегося вещества. Для железосодержащих материалов этот вопрос довольно подробно разбирался в работе [15], причём предложен перенос этого метода на магнитные элементы (Ni, Co) и композитные материалы (Fe_3C).

В любом случае вопрос о первопричине сверхпроводимости и связанными с ней эффектами остаётся открытым, поэтому столь важны, на наш взгляд, разнообразные попытки анализа смежных вопросов.

Система невзаимодействующих электронов

Поместим систему, состоящую из N невзаимодействующих электронов в среду с заданной абсолютной температурой T и заданным химическим потенциалом μ . Система может, таким образом, обмениваться со средой энергией и самими электронами, так что теперь число электронов в системе неопределённое, и можно говорить только о среднем их числе, также не определена точно энергия системы. Температуру будем выражать в

энергетических единицах и использовать так называемую «энергетическую» температуру $\theta = kT$, где k – постоянная Больцмана.

Хотя теперь число электронов в системе не фиксировано, объём V , занимаемый системой невзаимодействующих свободных электронов, остаётся строго определённым и неизменным.

Термодинамический потенциал Ω (свободная энергия Гиббса, потенциал Гиббса) системы, соответствующий взятому её окружению, зависит от θ, V, μ и связан с обычной свободной энергией Гельмгольца F системы соотношением (при пренебрежении флуктуациями числа N) [16]:

$$\Omega = F - \mu N, \text{ где } N = -\left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mu}\right)_{\theta, V}. \quad (1)$$

Зная свободную энергию, можно вычислить энтропию и теплоёмкость по формулам:

$$S = -k \left(\frac{\partial F}{\partial \theta}\right)_{V, N} = -k \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \theta}\right)_{V, \mu} \\ C_V = \theta \left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)_{V, N} \quad (2)$$

Термодинамический потенциал Ω рассчитывается по формуле [17]:

$$\Omega(\theta, V, \mu) = -\theta \ln(Sp[e^{-\beta(\hat{H}_0 - \mu N)}]), \quad (3)$$

в которой $\beta = \frac{1}{\theta}$ – обратная температура. Под знаком логарифма стоит статистическая сумма, которая представляет собой след (шпур) оператора $\exp(-\beta \hat{H})$ ($\hat{H}$ – гамильтониан системы). Шпур берётся по всему пространству, в котором действуют электронные операторы рождения и уничтожения, то есть по всему квантово-механическому пространству, содержащему состояния всех многоэлектронных систем невзаимодействующих электронов (содержащих произвольное число электронов $N=0,1,2$ и т.д.).

Собственные состояния невозмущенного гамильтониана $\hat{H}_0$ в данном N -электронном подпространстве характеризуются совокупностями $\{\dots n_{\vec{p},s} \dots\}$ чисел заполнения $n_{\vec{p},s}$, рассматриваемых для различных состояний $\vec{p}, s$ ($\vec{p}$ – импульс электрона), каждое из которых может быть равным либо 0, либо 1, причём в нужном нам N -электронном подпространстве надо рассматривать только такие совокупности чисел заполнения, для которых

$$\sum_{\vec{p},s} n_{\vec{p},s} = N, \quad (4)$$

где суммирование ведётся по $\vec{p}, s$, то есть по всем возможным одноэлектронным состояниям.

Напомним, что каждый электрон обладает спином, равным $s = \frac{1}{2}$, проекция которого σ , например, на ось z в пространстве декартовой системы может принимать только два значения: $\sigma = \pm \frac{1}{2}$.

Для свободных электронов в объёме $V = L^3$ одноэлектронные волновые функции запишутся в стандартном виде:

$$\Psi_{\vec{p},s}(\vec{r}, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}, \vec{r})} \delta_{s,\sigma},$$

причём они образуют полный квантово-механический набор ортонормированных одноэлектронных функций:

$$\sum_{\sigma} \int_V \Psi_{\vec{p}',s'}^*(\vec{r}, \sigma) \Psi_{\vec{p},s}(\vec{r}, \sigma) dV = \delta_{\vec{p}',\vec{p}} \delta_{s',s},$$

где $dV = dx dy dz = d^3r = d\vec{r}$, а $\delta_{\vec{p}',\vec{p}}$ и $\delta_{s',s}$ – импульсный и спиновый символы Кронекера ($\delta_{\vec{p}',\vec{p}} = 1$ при $\vec{p}' = \vec{p}$ и $\delta_{\vec{p}',\vec{p}} = 0$ при $\vec{p}' \neq \vec{p}$).

Для собственных значений энергии имеем следующие выражения:

$$E_{\dots n_{\vec{p},s} \dots} = \sum_{\vec{p},s} E(\vec{p}) n_{\vec{p},s} \quad (5)$$

Здесь $E(\vec{p}) = \frac{p^2}{2m}$ кинетическая энергия электрона.

Вычислим статистическую сумму – выражение, стоящее в правой части формулы (3), с использованием нумерации многоэлектронных состояний совокупностями чисел заполнения, причём суммирование будем производить как по всем квантовым состояниям, так и по всем значениям чисел заполнения. Для гамильтониана $\hat{H}_0$ собственные значения энергии записываем с учётом (4), а величину N , соответственно, через (5), используя формализм чисел заполнения $n_{\vec{p},s}$. В результате несложных вычислений получим:

$$\begin{aligned} Sp[e^{-\beta(\hat{H}_0 - \mu N)}] &= \sum_{\{n_{\vec{p},s}\}} e^{-\beta \sum_{\vec{p},s} (E(\vec{p}) - \mu) n_{\vec{p},s}} = \\ &= \prod_{\vec{p},s} \sum_{n_{\vec{p},s}} e^{-\beta(E(\vec{p}) - \mu) n_{\vec{p},s}} = \prod_{\vec{p},s} (1 + e^{-\beta(E(\vec{p}) - \mu)}). \end{aligned}$$

Таким образом, для термодинамического потенциала $\Omega(\theta, V, \mu)$ системы невзаимодействующих электронов имеем выражение:

$$\Omega(\theta, V, \mu) = -\theta \sum_{\vec{p},s} \ln(1 + e^{-\beta(E(\vec{p}) - \mu)}) = -2\theta \sum_{\vec{p}} (1 + e^{-\beta(E(\vec{p}) - \mu)}).$$

Переходя к пределу бесконечно большой системы $N \rightarrow \infty, V \rightarrow \infty$ при $\frac{N}{V} = n = \text{const}$, запишем выражение для объёмной плотности термодинамического потенциала:

$$\frac{\Omega}{V} = -\frac{\theta}{\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty p^2 dp \ln(1 + e^{-\beta(E(p)-\mu)}) \quad (6)$$

Вычислим среднее число N электронов в системе. С учётом (1) получаем:

$$N = 2 \sum_{\vec{p}} \frac{1}{e^{\beta(E(p)-\mu)} + 1}.$$

Вновь переходя к пределу бесконечно большой системы $N \rightarrow \infty, V \rightarrow \infty$ при $\frac{N}{V} = n = \text{const}$, получаем соотношение, связывающее μ и n :

$$n = \frac{1}{\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty p^2 dp \frac{1}{e^{\beta(E(p)-\mu)} + 1}. \quad (7)$$

Выражение (7) представляет собой трансцендентное уравнение, с помощью которого можно отыскивать функцию $\mu = \mu(\theta, n)$, то есть зависимость химического потенциала от объёмной плотности электронов и от температуры.

Исследуем это уравнение. Рассмотрим отдельно случаи низких и высоких температур. Как известно, при нулевой температуре химический потенциал принимает некоторое значение $\mu = \mu_0$, называемое уровнем Ферми E_F при нулевой температуре. Тогда:

$$\frac{1}{e^{\beta(E(p)-\mu)}} = \begin{cases} 0 & \text{при } E(p) > \mu_0 \\ 1 & \text{при } E(p) < \mu_0 \end{cases}.$$

Соотношение (7) принимает вид:

$$n = \frac{1}{\pi^2 \hbar^3} \int_0^{p_F} p^2 dp = \frac{p_F^3}{3\pi^2 \hbar^3} = \frac{1}{3\pi^2 \hbar^3} (2m\mu_0)^{3/2},$$

где фермиевский импульс p_F связан с уровнем Ферми μ_0 условием:

$$E_F = E(p_F) = \frac{p_F^2}{2m} = \mu_0 = \mu = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 n)^{2/3} \quad (8)$$

При низких температурах можно считать, что $\mu = \mu_0 + \Delta\mu$, где $\Delta\mu \ll \mu_0$ – малая добавка. Тогда подынтегральную функцию трансцендентного уравнения (5) разложим в ряд Тейлора по малому параметру:

$$n = \frac{1}{\pi^2 \hbar^3} I_1 + \beta \Delta\mu \frac{1}{\pi^2 \hbar^3} I_2, \quad (9)$$

где $I_1 = \int_0^\infty p^2 dp \frac{1}{e^{\beta(E(p)-\mu_0)} + 1}$ и $I_2 = \int_0^\infty p^2 dp \frac{e^{\beta(E(p)-\mu_0)}}{(e^{\beta(E(p)-\mu_0)} + 1)^2}$.

Далее разложим полученные интегралы по малому параметру $\theta = \frac{1}{\beta}$. Для этого первый интеграл представим в более удобном виде, выделив из него главную часть:

$$I_1 = \int_0^\infty p^2 dp \frac{1}{e^{\beta(E(p)-\mu_0)} + 1} = \int_0^{p_F} p^2 dp + \int_0^{p_F} p^2 dp \left[\frac{1}{e^{\beta(E(p)-\mu_0)} + 1} - 1 \right] + \\ + \int_{p_F}^\infty p^2 dp \frac{1}{e^{\beta(E(p)-\mu_0)} + 1}.$$

При низких температурах основные вклады во второй и третий интегралы в правой части даёт только окрестность точки $p = p_F$. Поэтому в подынтегральных выражениях рассматриваемых интегралов удобно сделать растягивающую эту окрестность замену переменной интегрирования $p = p_F + \frac{m\theta}{p_F}x$. Коэффициент при x в этой замене подобран с таким расчётом, чтобы получить соотношение: $\beta[E(p) - \mu_0] = x + \frac{m\theta}{2p_F^2}x^2$, удобное для работы при низких температурах. После указанной замены разложим новые получившиеся подынтегральные выражения по малому θ и оставим только главные члены этих разложений. Так мы получим приближённую формулу, справедливую при низких температурах:

$$I_1 = \frac{1}{3}p_F^3 + A + B, \quad (10)$$

где

$$A = \int_0^{p_F} p^2 dp \left[\frac{1}{e^{\beta(E(p)-\mu_0)} + 1} - 1 \right] = \\ = \int_{-\frac{p_F^2}{m\theta}}^0 \left(p_F + \frac{m\theta}{p_F}x \right)^2 \frac{m\theta}{p_F} dx \left[\frac{1}{e^{x + \frac{m\theta}{2p_F^2}x^2} + 1} - 1 \right] = \\ = \int_{-\infty}^0 p_F m\theta dx \left[\frac{1}{e^{x + \frac{m\theta}{2p_F^2}x^2} + 1} - 1 \right] + \int_{-\infty}^0 2 \frac{m^2\theta^2}{p_F} dx \left[\frac{1}{e^{x + \frac{m\theta}{2p_F^2}x^2} + 1} - 1 \right] + \theta^3(\dots) \\ = p_F m\theta \int_{-\infty}^0 dx \left[\frac{1}{e^x + 1} - 1 \right] - \frac{m^2\theta^2}{2p_F} \int_{-\infty}^0 dx \frac{x^2 e^x}{(e^x + 1)^2} + \\ + 2 \frac{m^2\theta^2}{p_F} \int_{-\infty}^0 x dx \left[\frac{1}{e^x + 1} - 1 \right] + \theta^3(\dots), \\ B = \int_{p_F}^\infty p^2 dp \frac{1}{e^{\beta(E(p)-\mu_0)} + 1} = \int_0^\infty \left(p_F + \frac{m\theta}{p_F}x \right)^2 \frac{m\theta}{p_F} dx \left[\frac{1}{e^{x + \frac{m\theta}{2p_F^2}x^2} + 1} - 1 \right] \\ = p_F m\theta \int_0^\infty \frac{dx}{e^x + 1} + \frac{2m^2\theta^2}{p_F} \int_0^\infty \frac{x dx}{e^x + 1} + \theta^3(\dots).$$

При вычислении слагаемого A нижний предел интегрирования был заменен с $-\frac{p_F^2}{m\theta}$ на $-\infty$ в рамках разложения по параметру малости $\theta \rightarrow 0$. Отдельно выписаны не интересующие нас слагаемые более высокой степени (начиная с третьей) по θ .

При сложении выражений A и B первые интегралы взаимно уничтожаются:

$$\int_{-\infty}^0 dx \left[\frac{1}{e^{x+1}} - 1 \right] = (\text{замена } x \text{ на } -x) = - \int_{\infty}^0 dx \left[\frac{1}{e^{-x+1}} - 1 \right] = - \int_0^{\infty} dx \frac{1}{e^{x+1}}.$$

Тогда с учётом (8) получаем:

$$I_1 = \frac{1}{3} p_F^3 - \frac{m^2 \theta^2}{2 p_F} \int_{-\infty}^0 dx \frac{x^2 e^x}{(e^x + 1)^2} + \\ + 2 \frac{m^2 \theta^2}{p_F} \int_{-\infty}^0 x dx \left[\frac{1}{e^{x+1}} - 1 \right] + \frac{2 m^2 \theta^2}{p_F} \int_0^{\infty} \frac{x dx}{e^{x+1}} + \theta^3(\dots)$$

При вычислении выражения I_2 воспользуемся теми же соображениями, что и в предыдущем случае. Как следует из выражения (7), во втором слагаемом уже есть в качестве множителя малая величина $\Delta\mu$. Поэтому в рамках принятого нами приближения будут опущены слагаемые, пропорциональные старшим степеням θ :

$$I_2 = \int_0^{\infty} p^2 dp \frac{e^{\beta(E(p)-\mu_0)}}{(e^{\beta(E(p)-\mu_0)} + 1)^2} + \int_{-\frac{p_F^2}{m\theta}}^{\infty} \left(p_F + \frac{m\theta}{p_F} x \right)^2 \frac{m\theta}{p_F} dx \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} = \\ = p_F m \theta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} dx + \frac{m^2 \theta^2}{p_F} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^x}{(e^x + 1)^2} dx + \theta^3(\dots)$$

$$\text{Далее: } \beta \Delta\mu \frac{1}{\pi^2 \hbar^3} I_2 = \frac{\Delta\mu}{\pi^2 \hbar^3} \left[p_F m \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} dx + \theta(\dots) + \theta^2(\dots) \right].$$

Все полученные соотношения подставим в (9):

$$n = \frac{1}{3\pi^2 \hbar^3} p_F^3 - \frac{m^2 \theta^2}{2 p_F \pi^2 \hbar^3} \int_{-\infty}^0 dx \frac{x^2 e^x}{(e^x + 1)^2} + \\ + 2 \frac{m^2 \theta^2}{p_F \pi^2 \hbar^3} \int_{-\infty}^0 x dx \left[\frac{1}{e^{x+1}} - 1 \right] + \frac{2 m^2 \theta^2}{p_F \pi^2 \hbar^3} \int_0^{\infty} \frac{x dx}{e^{x+1}} + \frac{\Delta\mu m p_F}{\pi^2 \hbar^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} dx. \quad (11)$$

Вычислим стандартным образом определённые интегралы из (11):

$$\int_0^{\infty} \frac{x dx}{e^x + 1} = \frac{\pi^2}{12}; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{(e^x + 1)^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t dt}{(t + 1)^2} = 1; \\ \int_{-\infty}^0 x dx \left[\frac{1}{e^{x+1}} - 1 \right] = \int_{-\infty}^0 x dx \frac{1}{e^{-x} + 1} = (x \rightarrow -x) = \frac{\pi^2}{12};$$

$$\int_{-\infty}^0 \frac{x^2 e^x dx}{(e^x + 1)^2} = (x \rightarrow -x) = \int_0^{\infty} \frac{x^2 e^x dx}{(e^x + 1)^2} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 e^x dx}{(e^x + 1)^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Подставляя приведенные значения несобственных интегралов в трансцендентное уравнение (11), приходим к следующей приближённой формуле:

$$n = \frac{1}{3\pi^2 \hbar^3} p_F^3 + \frac{m^2 \theta^2}{6 p_F \hbar^3} + \frac{p_F \Delta \mu m}{\pi^2 \hbar^3}.$$

Далее с учётом (8) окончательно получаем первую исчезающую поправку к химическому потенциалу, которая оказалась отрицательной и пропорциональной квадрату температуры:

$$\mu - \mu_0 = \Delta \mu = -\frac{\pi^2 \theta^2}{12 \mu} + \theta^3(\dots). \quad (12)$$

Рассмотрим теперь уравнение (9) для случая высоких температур. При больших θ оно принимает простой вид:

$$\begin{aligned} n &= \frac{1}{\pi^2 \hbar^3} \int_0^{\infty} p^2 dp \frac{e^{-\beta(E(p)-\mu)}}{1 + e^{-\beta(E(p)-\mu)}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\pi^2 \hbar^3} \int_0^{\infty} p^2 dp e^{-\beta(E(p)-\mu)} \\ &= \frac{e^{\mu/\theta}}{2\pi^2 \hbar^3} \int_0^{\infty} p^2 dp e^{-\frac{E(p)}{\theta}} \\ &= \frac{e^{\mu/\theta}}{2\pi^2 \hbar^3} (2m\theta)^{3/2} \int_0^{\infty} t^2 e^{-t^2} dt = \frac{e^{\frac{\mu}{\theta}}}{8} \left(\frac{2m\theta}{\pi \hbar^2} \right)^{3/2} \end{aligned} \quad (13)$$

Таким образом, при высоких температурах μ выражается простой формулой:

$$\mu \cong \theta \ln \left[8n \left(\frac{\pi \hbar^2}{2m\theta} \right)^{3/2} \right]. \quad (14)$$

На рис. 1 приведена зависимость химического потенциала μ от температуры при фиксированной плотности числа электронов n .

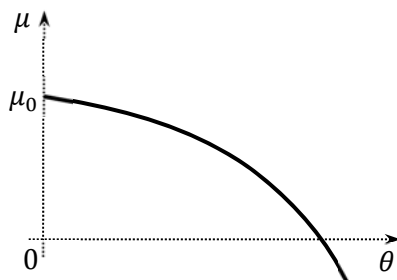


Рис. 1. Температурная зависимость химического потенциала.

Видно, что химический потенциал плавно убывает от значения μ_0 при нулевой температуре до бесконечно больших отрицательных значений при высоких температурах.

Получим теперь приближённые формулы для термодинамического потенциала Ω , а, следовательно, для свободной энергии Гельмгольца F , энтропии S и теплоёмкости при постоянном объёме C_V .

В случаях низких температур удобно выделить из исходного выражения (6) для объёмной плотности термодинамического потенциала его значение при $\theta = 0$ и записать полученное соотношение в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\Omega}{V} &= -\frac{\theta}{\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty p^2 dp \ln(1 + e^{-\beta(E(p)-\mu)}) = \\ &= \frac{1}{\pi^2 \hbar^3} \int_0^{p_F} p^2 dp (E(p) - \mu) \\ &\quad - \frac{\theta}{\pi^2 \hbar^3} \int_0^{p_F} p^2 dp \{ \ln(1 + e^{-\beta(E(p)-\mu)}) + \beta(E(p) - \mu) \} \\ &\quad - \frac{\theta}{\pi^2 \hbar^3} \int_{p_F}^\infty p^2 dp \ln(1 + e^{-\beta(E(p)-\mu)}). \end{aligned}$$

Во втором и третьем интегралах, которые являются поправками к первому, основной вклад снова дают только области, расположенные в непосредственной окрестности точки $p = p_F + \frac{m\theta}{p_F} x$. В результате получаем для термодинамического потенциала в расчёте на один электрон следующую приближённую формулу:

$$\begin{aligned} \frac{\Omega}{N} = \frac{\Omega}{V} n &= -\frac{2\mu_0}{5} + \frac{\pi^2 \theta^2}{12 \mu_0} - \frac{3\theta^2}{2\mu_0} \int_{-\infty}^0 dx [\ln(1 + e^{-x}) + x] - \frac{3\theta^2}{2\mu_0} \int_{-\infty}^0 dx \ln(1 + \\ &\quad + e^{-x}) + \theta^3(\dots) = -\frac{2\mu_0}{5} - \frac{\pi^2 \theta^2}{6 \mu_0} + \theta^3(\dots). \end{aligned} \quad (15)$$

Свободная энергия Гельмгольца, энтропия и теплоёмкость в расчёте на один электрон выводятся достаточно просто с учётом (2), (12), (15):

$$\begin{aligned} \frac{F}{N} = \frac{\Omega + \mu N}{N} = \frac{\Omega}{N} + \mu &= -\frac{2\mu_0}{5} - \frac{\pi^2 \theta^2}{6 \mu_0} + (\mu_0 + \Delta\mu) = \frac{3\mu_0}{5} - \frac{\pi^2 \theta^2}{4 \mu_0} + \theta^3(\dots) \\ \frac{S}{N} = \frac{C_V}{N} &= k \frac{\pi^2 \theta}{\mu_0} + \theta^3(\dots) \end{aligned} \quad (16)$$

Видно, что энтропия S и теплоёмкость C_V системы свободных электронов (отнесенные к одному электрону) в нормальном металле при температуре, стремящейся к нулю, обращается в нуль по линейному закону. В случаях высоких температур выражение для термодинамического потенциала (6) можно приближённо представить в виде:

$$\frac{\Omega}{V} = -\frac{\theta e^{\mu/\theta}}{\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty p^2 dp e^{-\beta E(p)},$$

с учетом (13), выражение для термодинамического потенциала в расчёте на один электрон при высоких температурах приобретает вид:

$$\frac{\Omega}{N} \cong -2\theta. \quad (17)$$

Для свободной энергии Гельмгольца, энтропии и теплоёмкости в расчёте на один электрон при высоких температурах с учётом (14) и (16) получаем следующие приближённые формулы:

$$\frac{F}{N} \cong -2\theta + \theta \ln \left[8n \left(\frac{\pi \hbar^2}{2m\theta} \right)^{3/2} \right]; \quad \frac{S}{N} \cong \frac{5}{2}k - k \ln \left[8n \left(\frac{\pi \hbar^2}{2m\theta} \right)^{3/2} \right]; \quad \frac{C_V}{N} \cong \frac{3}{2}k \quad (18)$$

На рис. 2 схематически приведена полученная зависимость теплоёмкости от температуры.

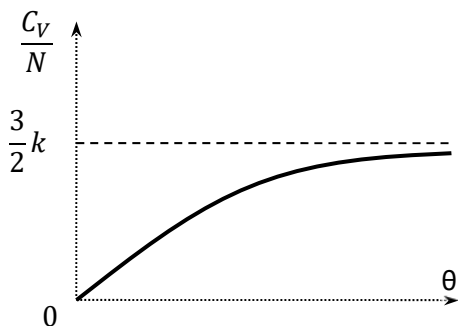


Рис. 2. Температурная зависимость теплоёмкости, приходящейся на один электрон.

При нулевой температуре она равна нулю, далее идет линейное возрастание (16), а затем при высоких температурах достигает постоянного значения $\approx \frac{3}{2}k$ (18).

Заключение

Температурная зависимость теплоемкости для ансамбля невзаимодействующих электронов, полученная с использованием аппарата квантовой механики, совпадает с аналогичной зависимостью, полученной в классической физике. При низких температурах теплоемкость пропорциональна абсолютной температуре, что соответствует экспериментальным данным, полученным для металлов, в то время как для диэлектриков теплоемкость пропорциональна третьей степени температуры.

При высоких температурах полученная зависимость достигает насыщения, что находится в согласии с законом Дюлонга-Пти.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алиев И.Н., Копылов И.С. Об электродинамике модели Лондонов и двухжидкостной теории Гортера-Казимира // Поверхность. 2016. № 14. С. 20–31.
2. Müller K.-H. Magnetic viscosity // Reference Module in Materials Science and Materials Engineering. 2016. (Current as of 28 October 2015). 341 p.
3. Fabrizio M., Giorgi C., Morro A. A thermodynamic approach to ferromagnetism and phase transitions // International Journal of Engineering Science. 2009. Vol. 47. Iss. 9. pp. 821–839.
4. Hallatshek K. Thermodynamic potential in local turbulence simulations // Physical Review Letters. 2004. Vol. 93. Iss. 12. pp. 125001-1–125001-4.
5. Алиев И.Н., Копылов И.С. Применение метода множителей Лагранжа к вычислению магнитного поля постоянного тока // Динамика сложных систем. 2015. Т.9, № 4. С. 3–10.
6. Моргулис В.А., Миронов В.А. Магнитный момент кольца Волкано. // Физика твердого тела. 2008. Т. 50, В. 1. С. 148–153.
7. Николаев В.И. Термодинамический квадрат // Физическое образование в вузах. 1999. Т. 5, № 2. С. 40–51.
8. Meissner W., Ochsenfeld R. Ein neuer effect bei eintritt der supraleitfähigkeit // Naturwissenschaften. 1933. V. 21. Iss. 44. pp. 787–788.
9. Руднев И.А., Осипов М.А., Подливаев А.И., Покровский С.В. Визуализация протекания электрического тока в проводящих структурах с применением техники магнито-силовой микроскопии // Поверхность. 2015. № 9. С. 19–26.
10. Алиев И.Н., Докукин М.Ю., Самедова З.А. Применение двойного квантования в диамагнетизме Ландау. Вестник Московского государственного технического университета им. Баумана. Серия: Естественные науки. 2016. № 4. С. 14–27.

11. Gorter C.J. Theory of supraconductivity // *Nature*. 1933. Vol. 132. P. 931.
12. Gorter C.J., Casimir H. Onsupraconductivity // *Physica*. 1934. Vol. 1. pp. 306–320.
13. Алиев И.Н., Меликянц Д.Г. О потенциалах в электродинамике Лондонов // *Вестник Московского государственного технического университета им. Баумана. Серия: Естественные науки*. 2016. № 2. С. 42–51.
14. Алиев И.Н., Меликянц Д.Г. О теоремах Пойнтинга и Абрагама в электродинамике сверхпроводников Лондонов // *Вестник Московского областного государственного университета. Серия: Физика-математика*. 2015. № 4. С. 83–91.
15. Körmann F., Hickel T., Neugebauer J. Influence of magnetic excitations on the phase stability of metals and steels // *Current Opinion in Solid State and Materials Science*. 2016. Vol. 20. Iss. pp. 77–84.
16. Кубо Р. Термодинамика. М.: Мир, 1970. С. 195–200.
17. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Статистическая физика. М.: Наука. 1964. Т. 5. С. 231–300.
18. Пайерлс Р. Квантовая теория твердых тел. М.: Иностранная литература. 1956. С. 156–200.

REFERENCES:

1. Aliev I.N., Kopylov I.S. Ob elektrodinamike modeli Londonov i dvukhzhidkostnoi teorii Gortera-Kazimira [Electrodynamics model, London theory and the two-fluid Gorter-Casimir] // *Poverkhnost'*. 2016. no. 14. pp. 20–31.
2. Müller K.-H. Magnetic viscosity // *Reference Module in Materials Science and Materials Engineering*. 2016. (Current as of 28 October 2015). 341 p.
3. Fabrizio M., Giorgi C., Morro A. A thermodynamic approach to ferromagnetism and phase transitions // *International Journal of Engineering Science*. 2009. Vol. 47. Iss. 9. pp. 821–839.
4. Hallatshek K. Thermodynamic potential in local turbulence simulations // *Physical Review Letters*. 2004. Vol. 93. Iss. 12. pp. 125001-1-125001-4.
5. Aliev I.N., Kopylov I.S. Primenenie metoda mnozhitelei Lagranzha k vychisleniyu magnitnogo polya postoyannogo toka [The application of the method of Lagrange multipliers to the calculation of DC magnetic field] // *Dinamika slozhnykh sistem*. Vol. 9. 2015. no. 4. pp. 3–10.
6. Morgulis V.A., Mironov V.A. Magnitnyi moment kol'tsa Volkano. [The magnetic moment of the ring Volcano.] // *Fizika tverdogo tela*. T. 50, V. 1. [Physics of the solid state. Vol. 50, Iss. 1.]. 2008. pp. 148–153.
7. Nikolaev V.I. Termodinamicheskii kvadrat [The thermodynamic square] // *Fizicheskoe obrazovanie v vuzakh*. Vol. 5. 1999. no. 2. pp. 40–51.

8. Meissner W., Ochsenfeld R. Ein neuer effect bei eintritt der supraleitfähigkeit // Naturwissenschaften. 1933. V. 21. Iss. 44. pp. 787–788.
9. Rudnev I.A., Osipov M.A., Podlivaev A.I., Pokrovskii S.V. Vizualizatsiya protekaniya elektricheskogo toka v provodyashchikh strukturakh s primeneniem tekhniki magnito-silovoi mikroskopii [Visualization of electrical current flow in conducting structures using the technique of magnetic force microscopy] // Poverkhnost'. 2015. no. 9. pp. 19–26.
10. Aliev I.N., Dokukin M.YU., Samedova Z.A. Primenenie dvoynogo kvantovaniya v diamagnetizme Landau. [Use of double quantization in Landau diamagnetism.] // Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta im. Baumana. Seriya: Estestvennye nauki. 2016. no. 4. pp. 14–27.
11. Gorter C.J. Theory of supraconductivity // Nature. 1933. Vol. 132. P. 931.
12. Gorter C.J., Casimir H. Onsupraconductivity // Physica. 1934. Vol. 1. pp. 306–320.
13. Aliev I.N., Melikyants D.G. O potentsialakh v elektrodinamike Londonov [Of the potentials in electrodynamics of London] // Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta im. Baumana. Seriya: Estestvennye nauki. 2016. no. 2. pp. 42–51.
14. Aliev I.N., Melikyants D.G. O teoremakh Pointinga i Abrahama v elektrodinamike sverkhprovodnikov Londonov [On the theorem of Poynting and Abraham in the electrodynamics of superconductors London] // Vestnik Moskovskogo oblastnogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika. 2015. no. 4. pp. 83–91.
15. Körmann F., Hickel T., Neugebauer J. Influence of magnetic excitations on the phase stability of metals and steels // Current Opinion in Solid State and Materials Science. 2016. Vol. 20. Iss. pp. 77–84.
16. Kubo R. Termodinamika [Thermodynamics]. M., Mir, 1970. pp. 195–200.
17. Landau L.D., Lifshits E.M. Statisticheskaya fizika. T. 5 [Statistical physics. Vol. 5] M., Nauka, 1964. pp. 231–300.
18. Паерлс R. Квантовая теория твердых тел [Quantum theory of solids] M., Иностранная литература, 1956. pp. 156–200.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Алиев Исмаил Новруз оглы – доктор физико-математических наук, профессор кафедры физики, Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана;
e-mail: alievprof@yandex.ru

Докукин Михаил Юрьевич – кандидат технических наук, доцент кафедры физики, Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана;
e-mail: DMU252@yandex.ru

Самедова Зарифа Алышан кызы – магистрант по специальности «Техническая физика»
Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана;
e-mail: samezara@bk.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Aliev Ismail Novruz ogly – doctor of physical and mathematical sciences, professor of the Department of Physics at the Bauman Moscow State University;
e-mail: alievprof@yandex.ru

Dokukin Mikhail Yur'evich – candidate of technical sciences, associate professor of the Department of Physics at the Bauman Moscow State University;
e-mail: DMU252@yandex.ru

Samedova Zarifa Alishan kyzy – post-graduate student of Technical Physics at the Bauman Moscow State University
e-mail: samezara@bk.ru

БИБЛИОГРАФИЧЕСКАЯ ССЫЛКА

Алиев И.Н., Докукин М.Ю., Самедова З.А. Термодинамика системы невзаимодействующих свободных электронов // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2016. № 3. С. 57–71.
DOI: 10.18384/2310-7251-2016-3-57-71.

BIBLIOGRAPHIC REFERENCE

I. Aliev, M. Dokukin, Z. Samedova Thermodynamics of the system of noninteracting free electrons // Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics. 2016. no. 3. pp. 57–71.
DOI: 10.18384/2310-7251-2016-3-57-71.

УДК 539.23+539.216.1+537.311.31

DOI: 10.18384/2310-7251-2016-3-72-83

К ВОПРОСУ О РАСЧЁТЕ ПЛОТНОСТИ ТОКА ВНУТРИ ТОНКОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПРОВОЛОКИ ИЗ МЕТАЛЛА В ПРОДОЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Завитаев Э.В., Русаков О.В., Харитонов К.Е.

*Государственный гуманитарно-технологический университет,
164010, Московская обл., г. Орехово-Зуево, ул. Зелёная, д. 22, Российская
Федерация*

Аннотация. Выполнен расчёт плотности тока внутри тонкой цилиндрической проволоки из металла, помещенной в продольное магнитное поле. Рассмотрен общий случай, когда отношение длины свободного пробега электронов к радиусу проволоки может принимать произвольные значения. В качестве граничных условий задачи принято условие учитывающее зависимость коэффициента зеркальности от угла падения между вектором скорости электрона и нормалью к поверхности металла. Проведено сравнение полученных результатов с теоретическими расчётами для модели зеркально-диффузных граничных условий. Рассмотрен предельный случай и проведено обсуждение полученных результатов.

Ключевые слова: тонкая проволока, плотность тока, магнитная индукция.

CALCULATION OF THE CURRENT DENSITY IN A THIN CYLINDRICAL METAL WIRE IN THE LONGITUDINAL MAGNETIC FIELD

E. Zavitaev, O. Rusakov, K. Kharitonov

*Moscow Regional Institution of Higher Education "University for Humanities and
Technologies"
ul. Zelenaya 22, 164010 Orekhovo-Zuyevo, Moscow region, Russia*

Abstract. The current density in a thin cylindrical metal wire placed in a longitudinal magnetic field is calculated. The general case is considered when the relation of a free run length of electrons to the radius of a wire can take arbitrary values. As boundary statements of the problem, use is made of the condition taking into account the dependence of the coefficient of a smooth surface on the angle of incidence between the vector of the electron velocity and the

normal to a metal surface. The results obtained are compared with theoretical calculations for a model of mirror and diffusion boundary conditions. The limiting case is considered and the results obtained are discussed.

Keywords: thin wire, current density, magnetic induction.

Введение

Электрические и магнитные свойства проводников, линейный размер которых сравним с длиной свободного пробега электронов, существенно отличаются от свойств «массивных» проводящих объектов [1].

Вопросы, касающиеся расчёта электрической проводимости тонких проволок, обсуждались в работах [2–9]. В упомянутых работах применяется подход, основанный на решении кинетического уравнения Больцмана для электронов в металле или полупроводнике. В частности, в работе [3] изучалась зависимость электрической проводимости тонкой цилиндрической проволоки в продольном магнитном поле от характера отражения электронов. Для выявления этой зависимости использовались зеркально-диффузные граничные условия (модель Фукса).

В настоящей работе выполнен расчёт плотности тока внутри тонкой цилиндрической проволоки из металла, помещённой в продольное магнитное поле с учётом зависимости коэффициента зеркальности q от дефектов поверхности и угла падения электронов на внутреннюю поверхность проволоки (модель Соффера) [7; 9].

Математическая модель и расчёт

Рассматривается прямая цилиндрическая проволока из немагнитного металла радиуса R и длины L (считаем, что $L \gg R$), помещённая в магнитное поле с индукцией $\mathbf{B}$, к концам которой приложено переменное напряжение частоты ω . При этом направления электрического и магнитного полей совпадают с осью симметрии проволоки. Скин-эффект не учитывается (предполагается, что $R < \gamma$ – глубины скин-слоя).

Однородное периодическое по времени электрическое поле

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t) \quad (1)$$

действует на электроны проводимости (они рассматриваются как вырожденный ферми-газ) внутри проволоки и вызывает отклонение f_1 их функции распределения f от равновесной фермиевской f_0 :

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = f_0(\varepsilon) + f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}), \quad \varepsilon = \frac{m\mathbf{v}^2}{2},$$

где $\mathbf{r}$ – радиус-вектор (начало системы координат выбирается на оси проволоки), $\mathbf{v}$ – скорость электрона, m – эффективная масса электрона в металле.

Это приводит к возникновению высокочастотного тока плотности

$$\mathbf{j} = e \int \mathbf{v} f \frac{2d^3(m\mathbf{v})}{h^3} = 2e \left(\frac{m}{h}\right)^3 \int \mathbf{v} f_1 d^3v, \quad (2)$$

где e – заряд электрона, h – постоянная Планка.

В формуле (2) используется стандартная нормировка функции распределения f , при которой плотность электронных состояний равна $2/h^3$.

Для равновесной функции $f_0(\varepsilon)$ далее используется ступенчатая аппроксимация [10]:

$$f_0(\varepsilon) = \theta(\varepsilon_F - \varepsilon) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_F, \\ 0, & \varepsilon_F < \varepsilon \end{cases},$$

где $\varepsilon_F = mv_F^2/2$ – энергия Ферми (v_F – скорость Ферми). Предполагается, что ферми-поверхность имеет сферическую форму.

Задача сводится к отысканию отклонения f_1 функции распределения электронов от равновесной f_0 , возникающего под действием высокочастотного поля (1). В линейном приближении по электрическому полю функция f_1 удовлетворяет кинетическому уравнению [10–12]:

$$-i\omega f_1 + \mathbf{v} \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{r}} + e(\mathbf{v}\mathbf{E}) \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} + \frac{e}{m} [\mathbf{v}, \mathbf{B}] \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{v}} = -\frac{f_1}{\tau}, \quad (3)$$

где предполагается стационарная зависимость от времени ($f_1 \sim \exp(-i\omega t)$), а интеграл столкновений взят в приближении времени релаксации электронов τ :

$$\left(\frac{df_1}{dt}\right)_s = -\frac{f_1}{\tau}.$$

Для однозначного определения функции f_1 зададим следующее граничное условие, которое учитывает зависимость коэффициента зеркальности q от дефектов поверхности и угла падения электронов θ на внутреннюю поверхность проволоки (модель Соффера) [7; 9]:

$$f_1(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{v}_\perp, \mathbf{v}_z) = q(G, \cos\theta) f_1(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{v}'_\perp, \mathbf{v}_z) \quad \text{при} \quad \begin{cases} |\mathbf{r}_\perp| = R, \\ \mathbf{r}_\perp \mathbf{v}_\perp < 0, \end{cases} \quad (4)$$

$$q(G, \cos\theta) = \exp[-(4\pi G)^2 \cos^2\theta], \quad G = \frac{h_s}{\lambda_F},$$

где $\mathbf{r}_\perp$ и $\mathbf{v}_\perp$ – соответственно, проекции радиус-вектора электрона $\mathbf{r}$ и его скорости $\mathbf{v}$ на плоскость, перпендикулярную оси проволоки:

$$\mathbf{v}'_\perp = \mathbf{v}_\perp - \frac{2\mathbf{r}_\perp(\mathbf{r}_\perp \mathbf{v}_\perp)}{R^2}.$$

$\mathbf{v}'_\perp$ – вектор скорости, который при зеркальном отражении от внутренней поверхности в точке $\mathbf{r}_\perp$ ($|\mathbf{r}_\perp| = R$) переходит в вектор $\mathbf{v}_\perp$, $\mathbf{v}_z$ – составляющая скорости электрона вдоль оси; h_s – среднеквадратичная высота поверхностного рельефа, λ_F – длина волны де-Бройля электрона на поверхности Ферми.

После решения кинетического уравнения (3) методом характеристик [3] с учётом граничного условия (4), получаем:

$$f_1(t) = -\frac{A}{v} \left\{ \frac{(q-1)\exp(-vt')}{1-q\exp(-vT)} + 1 \right\}, \quad (5)$$

где

$$v = \frac{1}{\tau} - i\omega, \quad A = ev_z E_z \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}.$$

Параметр t' в выражении (5) имеет смысл времени движения электрона вдоль траектории от границы, на которой происходит отражение, до точки $\mathbf{r}$ со скоростью $\mathbf{v}$. Параметр T – период движения электрона, то есть промежуток времени между двумя последовательными столкновениями электрона с поверхностью проволоки.

Определение параметров t' и T является центральным моментом данной задачи, так как наличие продольного магнитного поля приводит к тому, что часть электронов при отражении от границы проволоки двигается до следующего соударения с границей по винтовой линии, а траектории остальных электронов с границей проволоки не пересекаются ($t' \rightarrow \infty$)!

Рассмотрим проекцию траектории электрона на плоскость перпендикулярную оси проволоки. Эта проекция имеет вид дуги окружности. Понятно, что в случае пересечения с границей:

$$t' = \frac{\delta\varphi}{v_\perp}, \quad (6)$$

где $\delta = mv_\perp/eB$ – радиус дуги, а φ – соответствующий данной дуге центральный угол.

При вычислении интеграла (2) удобно перейти к цилиндрическим координатам в пространстве скоростей ($v_{\perp}, \alpha, v_z$; полярная ось – ось v_z). Ось симметрии проволоки совпадает с осью Z . Поле (1) в цилиндрических координатах имеет лишь z -компоненту:

$$\mathbf{E} = E_z \mathbf{e}_z; \quad E_z = E_0 \exp(-i\omega t).$$

Соответственно, и плотность тока (2) обладает лишь z -компонентой (линии тока являются прямыми параллельными оси Z):

$$j_z = \frac{3ne^2}{4\pi v_F^3} E_z \int v_F^2 \delta(\varepsilon - \varepsilon_F) \left[\frac{(q-1)\exp(-vt')}{1 - q\exp(-vT)} + 1 \right] d^3v.$$

Воспользовавшись свойствами δ -функции и проинтегрировав по переменной v_z , имеем:

$$j_z = \frac{3ne^2 E_z}{2\pi m v_F^3} \iint_0^{v_F} v_{\perp} \sqrt{v_F^2 - v_{\perp}^2} \left[\frac{(q-1)\exp(-vt')}{1 - q\exp(-vT)} + 1 \right] dv_{\perp} d\alpha. \quad (7)$$

Здесь мы учли, что концентрация электронов проводимости в металлах определяется как:

$$n = 2 \frac{m^3}{h^3} \int f_0 d^3v = 2 \frac{m^3}{h^3} \frac{4\pi v_F^3}{3}.$$

Для дальнейших вычислений и анализа результатов введем новые переменные:

$$\xi = \frac{r_{\perp}}{R}, \rho = \frac{v_{\perp}}{v_F}, \mu = \frac{eR}{mv_F} B, \\ \Omega = v \frac{R}{v_F} = \left(\frac{1}{\tau} - i\omega \right) \frac{R}{v_F} = \frac{R}{\tau v_F} - i \frac{R\omega}{v_F} = \frac{R}{\Lambda} - i \frac{R\omega}{v_F} = x - iy.$$

Учтём также, что

$$\cos\theta = \frac{v_{\perp}}{v_F} \cos\alpha = \rho \cos\alpha.$$

Тогда формулу (7) можно представить в виде:

$$j_z = \frac{3ne^2 R E_z}{2\pi m v_F \Omega} \iint_0^{1} \int_0^{2\pi} \rho \sqrt{1 - \rho^2} \left[\frac{(q-1)\exp(-\Omega \varphi/\mu)}{1 - q\exp(-\Omega \varphi^*/\mu)} + 1 \right] d\rho d\alpha. \quad (8)$$

При интегрировании в выражении (8) углы φ (центральный угол дуги окружности, по которой движется электрон в случае пересечения его траектории с границей проволоки) и φ^* (через этот угол выражается период движения электрона T) необходимо связать с углом α в пространстве скоростей (это угол между векторами $\mathbf{r}_{\perp}$ и $\mathbf{v}_{\perp}$, причём $\mathbf{r}_{\perp} \mathbf{v}_{\perp} = r_{\perp} v_{\perp} \cos\alpha$).

Для определения угла φ получаем следующее выражение [3]:

$$\varphi = 2 \operatorname{arccctg} \left[\frac{2\rho\xi\mu\cos\alpha - \sqrt{D}}{\mu^2(\xi^2 - 1)} \right],$$

$$D = 4\rho^2(\rho^2 - 2\rho\xi\mu\sin\alpha + \xi^2\mu^2) - [\xi^2\mu^2 + 2\rho^2 - 2\rho\xi\mu\sin\alpha - \mu^2]^2.$$

Траектория электронов пересекается с границей проволоки, когда $D > 0$. При этом время движения электронов по траектории (параметр t') – конечная положительная величина.

Когда $D < 0$, траектория электронов не пересекается с границей проволоки ($t' \rightarrow \infty$). В этом случае при проведении вычислений нужно учесть, что в выражении (8) пропадает член, содержащий экспоненту.

Период движения электрона, то есть промежуток времени между двумя последовательными столкновениями электрона с поверхностью проволоки:

$$T = \frac{\delta\varphi^*}{v_{\perp}} = \frac{\Omega}{\mu} \varphi^*, \quad \varphi^* = 2\pi - (\varphi_2 - \varphi_1).$$

Здесь центральные углы $\varphi_1 \equiv \varphi$ и φ_2 определяют точки пересечения траектории электрона с границей проволоки, причём

$$\varphi_1 = 2 \operatorname{arccctg} \left[\frac{2\rho\xi\mu\cos\alpha - \sqrt{D}}{\mu^2(\xi^2 - 1)} \right], \quad \varphi_2 = 2 \operatorname{arccctg} \left[\frac{2\rho\xi\mu\cos\alpha + \sqrt{D}}{\mu^2(\xi^2 - 1)} \right].$$

Плотность тока (8) (заметим, что она является комплексной величиной) представим в виде:

$$j = j_0 F(\xi, x, y, \mu, G), \quad (9)$$

где

$$j_0 = \frac{3 n e^2 R E_z}{2 \pi m v_F},$$

$$F(\xi, x, y, \mu, G) =$$

$$= \frac{1}{\Omega} \int_0^{1/2\pi} \int_0^{2\pi} \rho \sqrt{1 - \rho^2} \left[\frac{(\exp(-(4\pi G \rho \cos\alpha)^2) - 1) \exp(-\Omega \varphi / \mu)}{1 - \exp(-(4\pi G \rho \cos\alpha)^2) \exp(-\Omega \varphi^* / \mu)} + 1 \right] d\rho d\alpha.$$

Полагая в формуле (9), что $q = \text{const}$ ($0 < q < 1$), приходим к выражению для расчёта плотности тока внутри цилиндрической проволоки из металла в продольном магнитном поле, полученному ранее на основе модели зеркально-диффузных граничных условий Фукса [3].

В заключение заметим, что независимо от характера отражения (при любом q) с ростом характерного поперечного размера проволоки (при $x \gg 1$) имеет место макроскопическая асимптотика безразмерной плотности тока

$$F(x, y) = \frac{2\pi}{3} \frac{x + iy}{x^2 + y^2},$$

причём, как видно из последней формулы, относительный вклад поверхностных эффектов убывает как x^{-1} ($|\Omega| \sim x$).

Обсуждение результатов

Сравним результаты численного расчёта модуля безразмерной плотности тока внутри тонкой цилиндрической проволоки, выполненные с применением моделей Фукса и Соффера.

На рис. 1 приведено отношение модуля безразмерной плотности тока $F(\mu, \xi, q)$, вычисленной с помощью модели граничных условий Фукса, к модулю безразмерной плотности тока $F(\mu, \xi, G)$, вычисленной в рамках модели граничных условий Соффера, как функции параметра шероховатости поверхности частицы G , причём $q = 1 - G$.

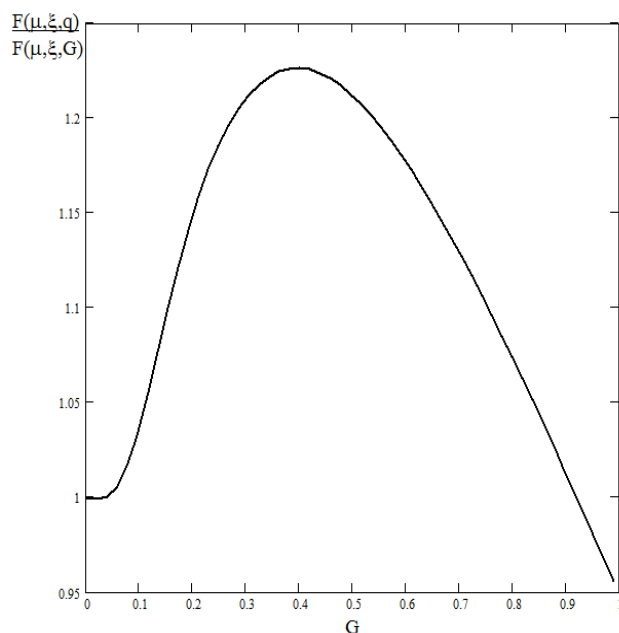


Рис. 1. Зависимость отношения модуля безразмерной плотности тока $F(\mu, \xi, q)$ к модулю безразмерной плотности тока $F(\mu, \xi, G)$ от параметра шероховатости поверхности частицы G ($q = 1 - G$) при постоянных значениях безразмерного текущего расстояния от оси симметрии проволоки ξ , безразмерной магнитной индукции μ , безразмерной обратной длины свободного пробега электронов x и безразмерной частоты электрического поля y : ($\xi = 0.95$; $\mu = 1$; $x = 0.1$; $y = 1$).

Из анализа хода кривой можно сделать вывод о том, что отличие модуля безразмерной плотности тока, рассчитанной с использованием различных моделей граничных условий, при фиксированных значениях параметров расчёта составляет от 5 до 23 %.

На рис. 2 такое сравнение проводится по безразмерному текущему расстоянию ξ , отсчитываемому от оси симметрии проволоки, а на рис. 3 – по безразмерной магнитной индукции μ внешнего продольного магнитного поля.

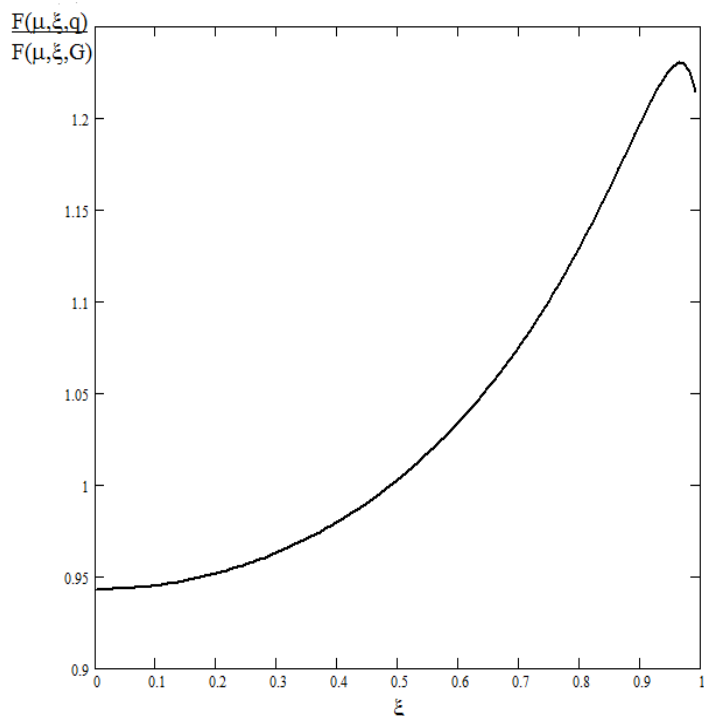


Рис. 2. Зависимость отношения модуля безразмерной плотности тока $F(\mu, \xi, q)$ к модулю безразмерной плотности тока $F(\mu, \xi, G)$ от безразмерного текущего расстояния от оси симметрии проволоки ξ при постоянных значениях параметра шероховатости поверхности частицы G ($q = 1 - G$), безразмерной магнитной индукции μ , безразмерной обратной длины свободного пробега электронов x и безразмерной частоты электрического поля y : ($G = 0.4$; $\mu = 1$; $x = 0.1$; $y = 1$).

Из хода кривой на рис. 2 видно, что расчёт модуля безразмерной плотности тока на основе модели граничных условий Фукса в середине проволоки даёт несколько заниженное (порядка 6%), а вблизи её поверхности несколько

завышенное значение (порядка 20%) по отношению к аналогичному расчёту с применением модели граничных условий Соффера.

Кривая, представленная на рис. 3, показывает, как отношение модулей безразмерной плотности тока, рассчитанной с использованием различных моделей граничных условий, зависит от безразмерной магнитной индукции μ внешнего продольного магнитного поля. Из хода кривой на рисунке видно, что модуль безразмерной плотности тока, рассчитанный с помощью модели граничных условий Фукса, превосходит соответствующий модуль безразмерной плотности тока (с переходом через максимум), рассчитанный в рамках модели граничных условий Соффера, при всех значениях величины безразмерной магнитной индукции.

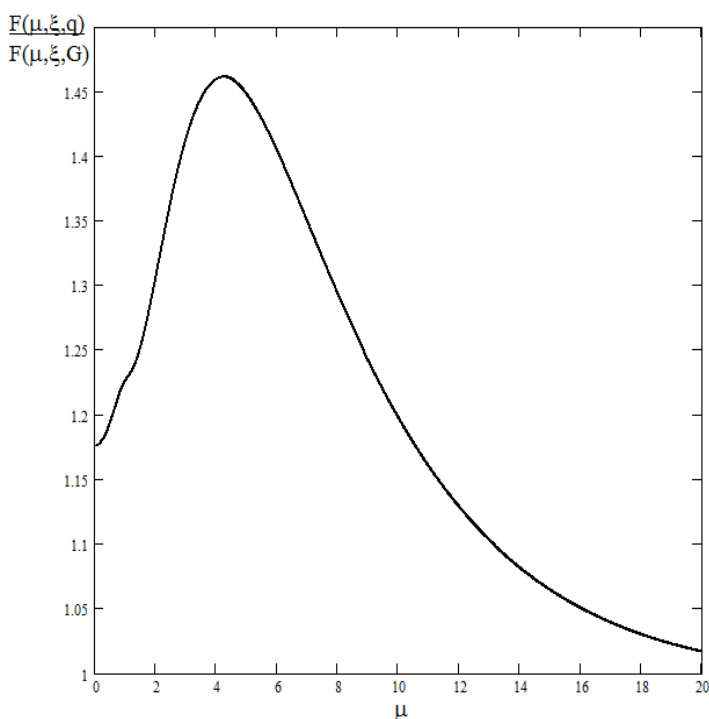


Рис. 3. Зависимость отношения модуля безразмерной плотности тока $F(\mu, \xi, q)$ к модулю безразмерной плотности тока $F(\mu, \xi, G)$ от безразмерной магнитной индукции μ при постоянных значениях безразмерного текущего расстояния от оси симметрии проволоки ξ , параметра шероховатости поверхности частицы G ($q = 1 - G$), безразмерной обратной длины свободного пробега электронов x и безразмерной частоты электрического поля y : ($\xi = 0.95$; $G = 0.4$; $x = 0.1$; $y = 1$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Петров Ю.И. Физика малых частиц. М.: Наука, 1982. 360 с.
2. Завитаев Э.В., Юшканов А.А. Высокочастотная проводимость тонкой проволоки из металла прямоугольного сечения // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 2006. Т. 129. Вып. 5. С. 938–944.
3. Завитаев Э. В., Юшканов А. А. Зависимость электрической проводимости тонкой цилиндрической проволоки в продольном магнитном поле от характера отражения электронов. // Журнал экспериментальной и теоретической физики 2006. Т. 130. Вып. 5 (11). С. 887–894.
4. Завитаев Э.В., Юшканов А.А. Высокочастотная проводимость тонкой цилиндрической проволоки из металла // Микроэлектроника. 2008. Т. 37. № 6. С. 429–438.
5. Кузнецова И.А., Юшканов А.А., Хадчукаев Р.Р. Высокочастотная проводимость тонкой полупроводниковой цилиндрической проволоки при произвольной температуре // Физика и техника полупроводников. 2009. Т. 43. Вып. 5. С. 645–650.
6. Кузнецова И.А., Хадчукаев Р.Р., Юшканов А.А. Влияние поверхностного рассеяния носителей заряда на высокочастотную проводимость тонкой цилиндрической полупроводниковой проволоки // Физика твёрдого тела. 2009. Т. 51, Вып. 10. С. 2022–2027.
7. Кузнецова И.А., Чапкин А.В., Юшканов А.А. Влияние механизма поверхностного рассеяния электронов на высокочастотную проводимость тонкой металлической проволоки // Микроэлектроника. 2011. Т. 40. № 1. С. 45–51.
8. Русаков О.В., Завитаев Э.В., Юшканов А.А. Скин-эффект в тонкой цилиндрической проволоке из металла // Физика твердого тела. 2012. Т. 54. Вып. 6. С. 1041–1047.
9. Кузнецова И.А., Савенко О.В., Юшканов А.А. Влияние граничных условий на электропроводность тонкой цилиндрической проволоки // Микроэлектроника. 2016. Т. 45. № 2. С. 126–134.
10. Харрисон У. Теория твёрдого тела. Мир, М. 1972. 616 с.
11. Займан Дж. Электроны и фононы. М.: ИЛ, 1962. 488 с.
12. Лифшиц И.М., Азбель М.Я., Каганов М.И. Электронная теория металлов. М.: Наука, 1971. 415 с.

REFERENCES

1. Petrov YU.I. Fizika malykh chastits [Physics of small particles]. M., Nauka, 1982. 360 p.
2. Zavitaev E.V., Yushkanov A.A. Vysokochastotnaya provodimost' tonkoi provoloki iz metalla pryamougol'nogo secheniya [High-frequency conductivity of a thin metal wire of rectangular cross section] // Zhurnal eksperimental'noi i teoreticheskoi fiziki. Vol. 129.

2006. no. 5. pp. 938–944.
3. Zavitaev E.V., Yushkanov A.A. Zavisimost' elektricheskoi provodimosti tonkoi tsilindricheskoi provoloki v prodol'nom magnitnom pole ot kharaktera otrazheniya elektronov. [The dependence of electrical conductivity of a thin cylindrical wire in a longitudinal magnetic field on the character of reflection of electrons] // Zhurnal eksperimental'noi i teoreticheskoi fiziki. Vol. 130. 2006. no. 5 (11). pp. 887–894.
 4. Zavitaev E.V., Yushkanov A.A. Vysokochastotnaya provodimost' tonkoi tsilindricheskoi provoloki iz metalla [High-frequency conductivity of a thin cylindrical metal wire] // Mikroelektronika. Vol. 37. 2008. no. 6. pp. 429–438.
 5. Kuznetsova I.A., Yushkanov A.A., Khadchukaev R.R. Vysokochastotnaya provodimost' tonkoi poluprovodnikovoi tsilindricheskoi provoloki pri proizvol'noi temperature [High conductivity semiconductor thin cylindrical wire at an arbitrary temperature] // Fizika i tekhnika poluprovodnikov. Vol. 43. 2009. no. 5. pp. 645–650.
 6. Kuznetsova I.A., Khadchukaev R.R., Yushkanov A.A. Vliyanie poverkhnostnogo rasseyaniya nositelei zaryada na vysokochastotnyuyu provodimost' tonkoi tsilindricheskoi poluprovodnikovoi provoloki [The effect of surface scattering of charge carriers on the high-frequency conductivity of a thin cylindrical semiconductor wire] // Fizika tverdogo tela. Vol. 51. 2009. no. 10. pp. 2022–2027.
 7. Kuznetsova I.A., Chapkin A.V., Yushkanov A.A. Vliyanie mekhanizma poverkhnostnogo rasseyaniya elektronov na vysokochastotnyuyu provodimost' tonkoi metallicheskoii provoloki [The influence of the mechanism of surface scattering of electrons on high-frequency conductivity of thin metal wire] // Mikroelektronika. Vol. 40. 2011. no. 1. pp. 45–51.
 8. Rusakov O.V., Zavitaev E.V., Yushkanov A.A. Skin-effekt v tonkoi tsilindricheskoi provoloke iz metalla [The skin effect in thin cylindrical wire of metal] // Fizika tverdogo tela. Vol. 54. 2012. no. 6. pp. 1041–1047.
 9. Kuznetsova I.A., Savenko O.V., Yushkanov A.A. Vliyanie granichnykh uslovii na elektroprovodnost' tonkoi tsilindricheskoi provoloki [Influence of boundary conditions on the conductivity of a thin cylindrical wire] // Mikroelektronika. Vol. 45. 2016. no. 2. pp. 126–134.
 10. Kharrison U. Teoriya tverdogo tela [Theory of solids]. M., Mir, 1972. 616 p.
 11. Zaiman Dzh. Elektrony i fonony [Electrons and phonons]. M., IL, 1962. 488 p.
 12. Lifshits I.M., Azbel' M.YA., Kaganov M.I. Elektronnaya teoriya metallov [Electron theory of metals]. M., Nauka, 1971. 415 p.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Завитаев Эдуард Валерьевич – доктор физико-математических наук, профессор, Государственный гуманитарно-технологический университет;
e-mail: eduardzavitaev@yandex.ru

Русаков Олег Владимирович – кандидат физико-математических наук, старший преподаватель, Государственный гуманитарно-технологический университет;
e-mail: olegrusmail@mail.ru

Харитонов Кирилл Евгеньевич – лаборант, Государственный гуманитарно-технологический университет;
e-mail: kirillharitonov1@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Zavitaev Eduard Valerjevich – doctor of physical and mathematical sciences, professor, University for Humanities and Technologies;
e-mail: eduardzavitaev@yandex.ru

Rusakov Oleg Vladimirovich – candidate of physical and mathematical sciences, University for Humanities and Technologies;
e-mail: olegrusmail@mail.ru

Kharitonov Kirill Evgenjevich - laboratory assistant, University for Humanities and Technologies;
e-mail: kirillharitonov1@mail.ru

БИБЛИОГРАФИЧЕСКАЯ ССЫЛКА

Завитаев Э.В., Русаков О.В., Харитонов К.Е. К вопросу о расчёте плотности тока внутри тонкой цилиндрической проволоки из металла в продольном магнитном поле // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2016. № 3. С. 72–83.
DOI: 10.18384/2310-7251-2016-3-72-83.

BIBLIOGRAPHIC REFERENCE

E. Zavitaev, O. Rusakov, K. Kharitonov. Calculation of the current density in a thin cylindrical metal wire in the longitudinal magnetic field // Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics. 2016. no. 3. pp. 72–83.
DOI: 10.18384/2310-7251-2016-3-72-83.

УДК533.6.011

DOI: 10.18384/2310-7251-2016-3-84-95

О МАКСИМУМЕ ЭФФЕКТА ВЫСОКОСКОРОСТНОЙ ПОСТУПАТЕЛЬНОЙ НЕРАВНОВЕСНОСТИ В УДАРНОЙ ВОЛНЕ*

Кузнецов М.М., Кулешова Ю.Д., Смотров Л.В., Решетникова Ю.Г.

Московский государственный областной университет

105005, г. Москва, ул. Радио, д. 10А, Российская Федерация

Аннотация. Доказаны две теоремы о максимуме относительной величины высокоскоростного «перехлёста» функции распределения пар молекул в однокомпонентном газе в бимодальной гиперзвуковой ударной волне. Метод распространён на аналитическое исследование ударной волны в бинарной смеси газов с внутренними степенями свободы.

Ключевые слова: кинетический, уравнение, неравновесный, смесь газов, ударная волна.

ON THE MAXIMUM EFFECT OF HIGH TRANSLATIONAL NONEQUILIBRIUM IN THE SHOCK WAVE

M. Kuznetsov, Y. Kuleshova, L. Smotrova, Y. Reshetnicova

Moscow State Regional University,

ul. Radio 10a, 105005 Moscow, Russia

Abstract. Two theorems on the maximum of a relative high-velocity “overshoot” in the relative velocity distributions of pairs of particles in the one-component gas in bimodal hypersonic shock wave are proved. This method is extended to the analytical study of the shock wave in a mixture of two gases with internal degrees of freedom.

Keywords: kinetic, equation, nonequilibrium, gas mixture, shock wave.

1. Введение

Эффект высокоскоростной поступательной неравновесности в ударно сжатой смеси газов был установлен ранее в численных исследованиях структуры

ударных волн методом статистического моделирования Монте-Карло. Этот эффект сводится к преобладанию числа N_{neq} высокоскоростных пар внутри фронта волны над числом N_{eq} в поступательно равновесной зоне за фронтом [1].

Ранее данный результат был получен аналитически в работе авторов [2].

При этом в работе [2] было также дополнительно установлено, что эффект имеет строгий максимум по величине N_{neq} / N_{eq} , зависящий от степени сжатия в сильной ударной волне.

В данной работе показано, что эффект «перехлёста» может быть рассмотрен также аналитически и в бинарной смеси газов.

2. Теоремы о необходимых и достаточных условиях эффекта «перехлёста» в эволюции функции распределения пар молекул однокомпонентного газа внутри фронта ударной волны

Вспользуемся аппроксимацией Тамма-Мотт-Смита для одночастичной функции распределения $F(b, c)$ и функции распределения пар молекул $\tilde{G}(\bar{g}, b)$, следуя работе [3]:

$$F(b, c) = \{(1 - b)n_0F_0(c) + bn_1F_1(c)\}[(1 - b)n_0 + bn_1]^{-1}. \quad (1)$$

Здесь F_0, F_1 – «холодное» и «горячее» распределения перед и за волной:

$$F_i(c) = \left(\frac{m}{2\pi kT_i}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left[-\frac{m(c - u_i)^2}{2kT_i}\right], \quad (2)$$

m – масса молекулы; u_i, T_i, n_i – скорости, температуры и концентрации газового потока перед ($i=0$) и за ($i=1$) волной, k – постоянная Больцмана, $(c - u_i)$ – собственная скорость молекулы, коэффициент b задавался параметрически в интервале $0 \leq b \leq 1$ при прохождении газа через фронт ударной волны [3].

Величина относительной функции распределения $\tilde{G}(\bar{g}, b)$ пар молекул имеет вид:

$$\tilde{G} = [(1 - b)^2 \varepsilon_0^2 \tilde{G}_0 + b^2 + 2b(1 - b)\varepsilon_0 \tilde{G}_{01}] \cdot [\varepsilon_0 + (1 - \varepsilon_0)b]^{-2}, \quad (3)$$

где $\tilde{G} = \frac{G}{G_1}$, $\tilde{G}_0 = \frac{G_0}{G_1}$, $\tilde{G}_1 = 1$, $\tilde{G}_{01} = \frac{G_{01}}{G_1}$, G_0, G_1, G_{01} – соответственно «холодная» (перед волной), «горячая» (за волной) и «перекрёстная» моды распределений.

Распределения G_0 и G_1 являются максвелловскими функциями по относительным скоростям g :

$$G_i(g) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{kT_i}\right)^{\frac{3}{2}} g^2 \exp\left[-\frac{mg^2}{4kT_i}\right]. \quad (4)$$

Перекры́стная мода имеет вид [3]:

$$G_{01}(g) = \left[\frac{m}{2\pi k(T_0 + T_1)} \right]^{\frac{3}{2}} \frac{g}{u} \left\{ \exp \left[-\frac{m(g-u)^2}{2k(T_0 + T_1)} \right] - \exp \left[\frac{m(g+u)^2}{(T_0 + T_1)} \right] \right\}. \quad (5)$$

Макроскопические параметры, входящие в соотношения (1)–(3), связаны законами сохранения потоков массы, импульса и энергии в сечениях $i = 0$ (перед волной) и $i = 1$ (за волной):

$$\begin{aligned} \frac{T_1}{T_0} &= 1 + m_0(1 - \varepsilon_0^2) \\ \frac{n_0}{n_1} &= \frac{u_1}{u_0} = \varepsilon_0 = \varepsilon(1 + m_0^{-1}) \\ u &= u_0 - u_1 = u_0(1 - \varepsilon_0). \end{aligned}$$

Здесь $m_0 = \varepsilon(1 - \varepsilon)^{-1}M_0^2$, $\varepsilon = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}$, γ – отношение удельных теплоёмкостей при постоянном давлении c_p и объёме c_v , $\gamma = \frac{c_p}{c_v} = (1 + \varepsilon)(1 - \varepsilon)^{-1}$, M_0 – число

Маха перед волной, $M_0 = \frac{u_0}{a_0}$, a_0 – скорость звука перед волной, $a_0 = \sqrt{\frac{\gamma k T_0}{m}}$.

Выражение (3) позволяет сформулировать следующие теоремы о «перехлёсте» сверхскоростной поступательной неравновесности в бимодальной ударной волне [4].

Теорема 1. Для сверхскоростного превышения («перехлеста», $\tilde{G}_{max} > 1$) величины поступательно неравновесной функции распределения пар молекул внутри фронта ударной волны над соответствующей равновесной величиной за волной необходимо, чтобы величина перекры́стной моды $\tilde{G}_{01}$ удовлетворяла соотношению

$$2\tilde{G}_{01} > 1 + \tilde{G}_0 \quad (6)$$

и достаточно, чтобы величина этой моды была больше единицы

$$\tilde{G}_{01} > 1 \quad (7)$$

Теорема 2. Величина сверхскоростного превышения ($\tilde{G}_{max} > 1$) в бимодальном однокомпонентном газе при выполнении соотношения (4) достигает своего максимального значения

$$\tilde{G} = \tilde{G}_{max} = \frac{\tilde{G}_{01}^2 - \tilde{G}_0}{(2\tilde{G}_{01} - 1 - \tilde{G}_0)}. \quad (8)$$

Доказательство теорем 1–2: перейдём к переменной:

$$\chi = \frac{(1 - b)\varepsilon_0}{\varepsilon_0 + (1 - \varepsilon_0)b}, \quad (9)$$

причём $0 \leq \chi \leq 1$ при $0 \leq b \leq 1$

Одночастичная функция распределения по собственным «тепловым» скоростям молекул (1) и функция распределения пар молекул по их относительным скоростям (3), записанные через переменную (9), примут соответственно вид:

$$F(\chi, c) = \chi F_0(c) + (1 - \chi) F_1(c), \quad (10)$$

$$\tilde{G} = \chi^2 \tilde{G}_0 + 2\chi(1 - \chi) \tilde{G}_{01} + (1 - \chi)^2 \quad (11)$$

Тогда на основании соотношений (10)–(11) для функции $\tilde{G}$ можно записать:

$$(\tilde{G} - 1) + \chi(1 - \tilde{G}_0) = (\chi - \chi^2)(2\tilde{G}_{01} - 1 - \tilde{G}_0), \quad (12)$$

или

$$(\tilde{G} - 1) = \chi(2\tilde{G}_{01} - 1 - \tilde{G}_0)(\chi_b - \chi), \quad (13)$$

где $0 \leq \chi \leq 1$,

$$\chi_b = 2(\tilde{G}_{01} - 1)(2\tilde{G}_{01} - 1 - \tilde{G}_0)^{-1}. \quad (14)$$

В итоге при $(\tilde{G}_1 - 1) > 0$ из соотношений (12)–(13) следует выполнение необходимого неравенства $(2\tilde{G}_{01} - 1 - \tilde{G}_0) > 0$, поскольку функция $\tilde{G}_0$ всегда меньше 1 и $0 \leq \chi \leq 1$.

И, наоборот, неравенство $(\tilde{G} - 1) > 0$ следует из соотношений (13)–(14) при выполнении достаточного условия теоремы 1.

Максимальное значение величины $(\tilde{G} - 1)_{max}$ достигается при $\chi = \frac{\chi_b}{2}$ так как при этом значении величины χ на основании соотношений (13) и (14) выполняются обычные условия максимума функции одной переменной $\tilde{G} = \tilde{G}(\chi)$:

$$\left. \frac{d\tilde{G}}{d\chi} \right|_{\frac{\chi_b}{2}} = 0, \quad \left. \frac{d^2\tilde{G}}{d\chi^2} \right|_{\frac{\chi_b}{2}} = -2(2\tilde{G}_{01} - 1 - \tilde{G}_0) < 0.$$

Для представления о том, как выполняется неравенство (7), рассмотрим асимптотический гиперзвуковой предельный переход функции распределения пар молекул (3):

$$M_0 \gg 1, \quad (M_0 \rightarrow \infty) \\ m_0 \equiv \frac{\gamma - 1}{2} M_0^2 = \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} M_0^2 \gg 1, \quad (m_0 \rightarrow \infty).$$

Физически этот предельный переход соответствует случаю бесконечно сильной гиперзвуковой ударной волны, когда $M_0 \rightarrow \infty$, $\frac{T_0}{T_1} \rightarrow 0$.

В результате для выражений, входящих в формулы (2)–(3), получим:

$$\begin{aligned}\frac{n_0}{n_1} &= \frac{u_1}{u_0} \rightarrow \varepsilon, \\ u &\rightarrow u_0(1 - \varepsilon), \\ \tilde{G}_0 &\rightarrow m_0^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{\gamma M_0^2}{4} g^{-2}\right), \\ \tilde{G}_{01} &\rightarrow \sqrt{2}\varepsilon(1 - \varepsilon)\bar{g}^{-1} \left\{1 - \exp\left[\frac{-2g}{\varepsilon(1 - \varepsilon)}\right]\right\} \exp\left[\frac{2 - (\bar{g} - 2)^2}{4\varepsilon(1 - \varepsilon)}\right].\end{aligned}$$

Применение асимптотического гиперзвукового предельного перехода позволяет получить простое аналитическое выражение для величины высокоскоростного «перехлёста» функции пар молекул [2]:

$$\bar{G}_{*,max} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} e^{\frac{1}{2\varepsilon}}, \quad (15)$$

где $\varepsilon = \frac{\rho_0}{\rho_1}$, ε^{-1} – степень сжатия в волне [5].

Из формулы (15) следует, что в однокомпонентном (простом) газе эффект высокоскоростной поступательной неравновесности ($\bar{G} > 1$) сильно зависит от числа внутренних степеней свободы молекул, непосредственно влияющего на величину сжатия в ударной волне ε^{-1} .

3. Необходимые и достаточные условия эффекта высокоскоростного перехлёста в бинарной смеси газов

Теоремы 1–2 допускают обобщение на случай бинарной смеси газов с различными, в общем случае, концентрациями n_γ и массами m_γ молекул ($\gamma = \alpha, \beta$).

В этом случае бимодальное распределение, записанное для каждого сорта молекул ($\gamma = \alpha, \beta$), можно представить в следующем виде:

$$F^{(\gamma)} = \chi^{(\gamma)} F_0^{(\gamma)} + (1 - \chi^{(\gamma)}) F_1^{(\gamma)}, \quad (16)$$

где

$$\chi^{(\gamma)} = \frac{n_0^\gamma}{n_0^\gamma + n_1^\gamma},$$

причём концентрации n_0^γ , n_1^γ являются, как и в простом газе ($\alpha=\beta$), функциями переменной x , то есть меняются по ширине ударной волны.

В смеси газов весовые множители $F_0^{(\gamma)}$, $F_1^{(\gamma)}$, входящие в (16), в отличие от их аналогов в простом газе, являются в общем случае функциями переменной x [6]. Это и представляет главную сложность при выводе необходимых и достаточных условий высокоскоростной поступательной неравновесности в смеси газов [7]. Функции распределения пар молекул $G^{(\alpha,\beta)}$, обобщающие соответствующие функции для (10)–(11) простого газа, примут вид:

$$G^{(\alpha,\beta)} = \chi^{(\alpha)}\chi^{(\beta)}G_0^{(\alpha,\beta)} + \chi^{(\alpha)}(1 - \chi^{(\beta)})G_{01}^{(\alpha,\beta)} + (1 - \chi^{(\alpha)})\chi^{(\beta)}G_{10}^{(\alpha,\beta)} + (1 - \chi^{(\alpha)})(1 - \chi^{(\beta)})G_1^{(\alpha,\beta)} \quad (17)$$

Раскроем скобки в соотношении (17):

$$G^{(\alpha,\beta)} = \chi^{(\alpha)}\chi^{(\beta)}G_0^{(\alpha,\beta)} + (\chi^{(\alpha)} - \chi^{(\alpha)}\chi^{(\beta)})G_{01}^{(\alpha,\beta)} + (\chi^{(\beta)} - \chi^{(\beta)}\chi^{(\alpha)})G_{10}^{(\alpha,\beta)} + G_1^{(\alpha,\beta)} - \chi^{(\beta)}G_1^{(\alpha,\beta)} + \chi^{(\alpha)}G_1^{(\alpha,\beta)} + \chi^{(\alpha)}\chi^{(\beta)}G_1^{(\alpha,\beta)} \quad (18)$$

Необходимые условия высокоскоростного перехлёста ($\tilde{G} > 1$).

Преобразуем соотношение (18), стремясь выделить множитель:

$$(\chi^{(\alpha)} + \chi^{(\beta)} - \chi^{(\alpha)}\chi^{(\beta)})G_{ij}, \quad (19)$$

где каждый индекс i, j принимает попеременно значения 0 и 1. Получим:

$$\begin{aligned} (G^{(\alpha,\beta)} - G_1^{(\alpha,\beta)}) + \chi^{(\beta)}(G_{01}^{(\alpha,\beta)} - G_0^{(\alpha,\beta)}) + \chi^{(\alpha)}(G_{10}^{(\alpha,\beta)} - G_0^{(\alpha,\beta)}) = (\chi^{(\alpha)} + \\ + \chi^{(\beta)} - \chi^{(\alpha)}\chi^{(\beta)})(G_{01}^{(\alpha,\beta)} + G_{10}^{(\alpha,\beta)} - G_1^{(\alpha,\beta)} - G_0^{(\alpha,\beta)}) \end{aligned} \quad (20)$$

Покажем, что выделенный множитель (19) в правой части равенства (20) всегда будет положительно определённым.

С этой целью воспользуемся известным неравенством:

$$\frac{\chi^{(\alpha)} + \chi^{(\beta)}}{2} \geq \sqrt{\chi^{(\alpha)}\chi^{(\beta)}}, \quad (21)$$

выражающим тот факт, что среднее арифметическое больше среднего геометрического при $\chi^{(\alpha)} \neq \chi^{(\beta)}$ (смесь) или равно при $\chi^{(\alpha)} = \chi^{(\beta)}$ (простой газ) [8]. Таким образом:

$$\frac{\chi^{(\alpha)} + \chi^{(\beta)}}{2} \geq \frac{2\chi^{(\alpha)}\chi^{(\beta)}}{\chi^{(\alpha)} + \chi^{(\beta)}}.$$

Отсюда следует:

$$\frac{1}{4} \geq \frac{\chi^{(\alpha)}\chi^{(\beta)}}{(\chi^{(\alpha)} + \chi^{(\beta)})^2}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 \chi^{(\alpha)} + \chi^{(\beta)} - \chi^{(\alpha)}\chi^{(\beta)} &= (\chi^{(\alpha)} + \chi^{(\beta)}) \left(1 - \frac{\chi^{(\alpha)}\chi^{(\beta)}}{\chi^{(\alpha)} + \chi^{(\beta)}} \right) = \\
 &= (\chi^{(\alpha)} + \chi^{(\beta)}) \left(1 - \frac{\chi^{(\alpha)}\chi^{(\beta)}}{(\chi^{(\alpha)} + \chi^{(\beta)})^2} (\chi^{(\alpha)} + \chi^{(\beta)}) \right) \geq \\
 &\geq (\chi^{(\alpha)} + \chi^{(\beta)}) \left(1 - \frac{1}{4} (\chi^{(\alpha)} + \chi^{(\beta)}) \right) > 0,
 \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Для получения искоемых необходимых условий осталось проанализировать знаки выражений, стоящих в скобках левой и правой части равенства (20).

Положительность первой скобки в левой части равенства (20) является заданной при поиске необходимых условий. Положительность второй и третьей скобок всегда выполняется в простом газе, а в смеси газов следует из того, что эффективные температуры [9]:

$$T_{01}^{\varepsilon} = \frac{m_{\alpha}T_0^{\beta} + m_{\beta}T_1^{\alpha}}{m_{\alpha} + m_{\beta}}, \quad (22)$$

$$T_{10}^{\varepsilon} = \frac{m_{\alpha}T_1^{\beta} + m_{\beta}T_0^{\alpha}}{m_{\alpha} + m_{\beta}}, \quad (23)$$

от которых зависят, соответственно, перекрёстные моды $G_{01}^{(\alpha,\beta)}, G_{10}^{(\alpha,\beta)}$ [2], больше эффективной температуры:

$$T_0^{\varepsilon} = \frac{m_{\alpha}T_0^{\beta} + m_{\beta}T_0^{\alpha}}{m_{\alpha} + m_{\beta}}, \quad (24)$$

от которой зависит мода $G_0^{(\alpha,\beta)}$ в холодном крыле функции распределения пар молекул $G^{(\alpha,\beta)}$.

С учётом положительности выражения (19) получим в итоге искомые необходимые условия эффекта перехлёста из правой части соотношения (20):

$$\left(G_{01}^{(\alpha,\beta)} + G_{10}^{(\alpha,\beta)} - G_1^{(\alpha,\beta)} - G_0^{(\alpha,\beta)} \right) > 0. \quad (25)$$

В случае простого газа, когда:

$$\begin{aligned}
 G_{01}^{(\alpha,\beta)} + G_{10}^{(\alpha,\beta)} &= 2G_{01} = 2G_{10}, \\
 G_1^{(\alpha,\beta)} &= G_1 \\
 G_0^{(\alpha,\beta)} &= G_0
 \end{aligned}$$

из выражения (25) будет следовать установленное ранее необходимое условие эффекта перехлёста (6).

Достаточные условия высокоскоростного перехлёста ($\tilde{G} > 1$)

Введём в соотношения (17) переменные:

$$\chi = \chi^{(\alpha)} + \chi^{(\beta)}, \quad (26)$$

$$\eta^{(\alpha)} = \frac{\chi^{(\alpha)}}{\chi^{(\alpha)} + \chi^{(\beta)}}. \quad (27)$$

Для случая простого газа переменная (26) будет совпадать с переменной (9), а переменная (27) становится числом, равным 1.

Тогда:

$$\begin{aligned} (G^{(\alpha,\beta)} - G_1^{(\alpha,\beta)}) + (1 - \eta^{(\alpha)})\chi(G_{01}^{(\alpha,\beta)} - G_0^{(\alpha,\beta)}) + \eta^{(\alpha)}(G_{10}^{(\alpha,\beta)} - G_0^{(\alpha,\beta)})\chi = \\ = (\chi - \eta^{(\alpha)}(1 - \eta^{(\alpha)})\chi^2 (G_{01}^{(\alpha,\beta)} + G_{10}^{(\alpha,\beta)} - G_1^{(\alpha,\beta)} - G_0^{(\alpha,\beta)})). \end{aligned} \quad (28)$$

Отсюда:

$$\begin{aligned} (G^{(\alpha,\beta)} - G_1^{(\alpha,\beta)}) = \chi \left[(1 - \eta^{(\alpha)}(1 - \eta^{(\alpha)})\chi) (G_{01}^{(\alpha,\beta)} + G_{10}^{(\alpha,\beta)} - G_1^{(\alpha,\beta)} - \right. \\ \left. - G_0^{(\alpha,\beta)}) - (1 - \eta^{(\alpha)}) (G_{01}^{(\alpha,\beta)} - G_0^{(\alpha,\beta)}) - \eta^{(\alpha)} (G_{01}^{(\alpha,\beta)} - G_0^{(\alpha,\beta)}) \right] \end{aligned} \quad (29)$$

Введём функцию $\chi^{(b)}$, определяемую из соотношения:

$$\begin{aligned} [1 - \eta^{(\alpha)}(1 - \eta^{(\alpha)})\chi^{(b)}] \left((G_{01}^{(\alpha,\beta)} + G_{10}^{(\alpha,\beta)} - G_1^{(\alpha,\beta)} - G_0^{(\alpha,\beta)}) \right. \\ \left. - (1 - \eta^{(\alpha)}) (G_{01}^{(\alpha,\beta)} - G_0^{(\alpha,\beta)}) - \eta^{(\alpha)} (G_{01}^{(\alpha,\beta)} - G_0^{(\alpha,\beta)}) \right) = 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Заметим, что при этом значении переменной χ эффект перехлёста обращается в нуль внутри ударной волны. При этом из формулы (30) следует, что:

$$\begin{aligned} \chi^{(b)} = \\ = \frac{(G_{01}^{(\alpha,\beta)} + G_{10}^{(\alpha,\beta)} - G_1^{(\alpha,\beta)} - G_0^{(\alpha,\beta)}) - (1 - \eta^{(\alpha)}) (G_{01}^{(\alpha,\beta)} - G_0^{(\alpha,\beta)}) - \eta^{(\alpha)} (G_{10}^{(\alpha,\beta)} - G_0^{(\alpha,\beta)})}{\eta^{(\alpha)}(1 - \eta^{(\alpha)}) (G_{01}^{(\alpha,\beta)} + G_{10}^{(\alpha,\beta)} - G_1^{(\alpha,\beta)} - G_0^{(\alpha,\beta)})}. \end{aligned} \quad (31)$$

Сумму в знаменателе выражения (31) $(G_{01}^{(\alpha,\beta)} + G_{10}^{(\alpha,\beta)} - G_1^{(\alpha,\beta)} - G_0^{(\alpha,\beta)})$

представим в следующем виде:

$$\begin{aligned} (G_{01}^{(\alpha,\beta)} + G_{10}^{(\alpha,\beta)} - G_1^{(\alpha,\beta)} - G_0^{(\alpha,\beta)}) = (G_{01}^{(\alpha,\beta)} - G_1^{(\alpha,\beta)}) + (G_{01}^{(\alpha,\beta)} - G_1^{(\alpha,\beta)}) + \\ + (G_1^{(\alpha,\beta)} - G_0^{(\alpha,\beta)}). \end{aligned} \quad (32)$$

В правой части равенства (32) все три скобки будут больше нуля, если потребовать выполнение следующих неравенств:

$$(G_{01}^{(\alpha,\beta)} - G_1^{(\alpha,\beta)}) > 0, \quad (33)$$

$$(G_{01}^{(\alpha,\beta)} - G_1^{(\alpha,\beta)}) > 0, \quad (34)$$

$$(G_1^{(\alpha,\beta)} - G_0^{(\alpha,\beta)}) > 0. \quad (35)$$

Поэтому положительно определённой будет и левая часть выражения (32), то есть:

$$(G_{01}^{(\alpha,\beta)} + G_{10}^{(\alpha,\beta)} - G_1^{(\alpha,\beta)} - G_0^{(\alpha,\beta)}) > 0. \quad (36)$$

Выделим полный квадрат в выражении (29).

Тогда получим:

$$G^{(\alpha,\beta)} - G_1^{(\alpha,\beta)} = \eta^{(\alpha)}(1 - \eta^{(\alpha)}) (G_{01}^{(\alpha,\beta)} + G_{10}^{(\alpha,\beta)} - G_1^{(\alpha,\beta)} - G_0^{(\alpha,\beta)}) \chi \cdot \left\{ -\chi + \frac{\eta^{(\alpha)}(G_{01}^{(\alpha,\beta)} - G_1^{(\alpha,\beta)}) + (1 - \eta^{(\alpha)})(G_{10}^{(\alpha,\beta)} - G_1^{(\alpha,\beta)})}{\eta^{(\alpha)}(1 - \eta^{(\alpha)})(G_{01}^{(\alpha,\beta)} - G_1^{(\alpha,\beta)}) + (G_{10}^{(\alpha,\beta)} - G_1^{(\alpha,\beta)}) + (G_1^{(\alpha,\beta)} - G_0^{(\alpha,\beta)})} \right\} \quad (37)$$

Введём следующие обозначения:

$$\begin{aligned} G_{01}^{(\alpha,\beta)} - G_1^{(\alpha,\beta)} &\equiv g_{01}^{(\alpha,\beta)}, \\ G_{10}^{(\alpha,\beta)} - G_1^{(\alpha,\beta)} &\equiv g_{10}^{(\alpha,\beta)}, \\ G_1^{(\alpha,\beta)} - G_0^{(\alpha,\beta)} &\equiv g_1^{(\alpha,\beta)}, \end{aligned}$$

тогда выражение (37) примет следующий вид:

$$G^{(\alpha,\beta)} - G_1^{(\alpha,\beta)} = \eta^{(\alpha)}(1 - \eta^{(\alpha)})(g_{01}^{(\alpha,\beta)} + g_{10}^{(\alpha,\beta)} + g_1^{(\alpha,\beta)}) \chi \cdot \left\{ -\chi + \frac{\eta^{(\alpha)}g_{01}^{(\alpha,\beta)} + (1 - \eta^{(\alpha)})g_{10}^{(\alpha,\beta)}}{\eta^{(\alpha)}(1 - \eta^{(\alpha)})(g_{01}^{(\alpha,\beta)} + g_{10}^{(\alpha,\beta)} + g_1^{(\alpha,\beta)})} \right\}. \quad (38)$$

Положительность первых двух и четвёртого сомножителей в правой части равенства (38) следует из диапазона их изменения:

$$0 < \eta^{(\alpha)} < 1, \quad 0 < (1 - \eta^{(\alpha)}) < 1, \quad 0 \leq \chi \leq \chi^{(b)}.$$

Третий сомножитель совпадает с правой частью выражения (32) и, ввиду изложенного выше, так же положителен.

Таким образом, для положительности правой части выражения (38) достаточно потребовать выполнение неравенств (33)–(35).

Неравенства (33)–(35) и являются искомыми достаточными условиями эффекта высокоскоростной поступательной неравновесности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Генич А.П., Куликов С.В., Манелис Г.Б., Черешнев С.Л. Поступательная релаксация в ударных волнах // Черногловка: Препринт ОИХФ АН СССР, 1991. 68 с.
2. Кузнецов М.М., Кулешова Ю.Д., Смотров Л.В. Эффект высокоскоростной поступательной неравновесности в бимодальной ударной волне. Вестник Московского государственного университета. Серия: Физика-математика. 2012. № 2. С. 108–115.

3. Куликов С.В., Терновая О.Н., Черешнев С.Л. Специфика поступательной неравновесности во фронте ударной волны в однокомпонентном газе // Химическая физика. 1993. Т. 12, № 3. С. 340–342.
4. Кузнецов М.М., Кулешова Ю.Д., Смотров Л.В. Эффект поступательной неравновесности в Тамм-Мотт-Смитовской модели ударной волны. // Вестник СПбГУ сер. 1, 2012. Вып. 3. С. 84–86.
5. Агафонов В.П., Вертушкин В.К., Гладков А.А., Полянский О.Ю. Неравновесные физико-химические процессы в газодинамике. М.: Машиностроение. 1972. 344с.
6. Oberai M.M. A Mott-Smith distribution to describe the structure of a plane shock wave in binary mixture // Phys Fluids. 1966. Vol. 9. pp. 1634–1637.
7. Кузнецов М. М., Матвеев С. В., Молостин Е. В., Решетникова Ю. Г., Смотров Л.В. Выход скорости поступательная неравновесность смеси газов в аналитической модели ударной волны [Электронный ресурс] // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2016. Т. 17, вып. 1. URL: <http://chemphys.edu.ru/issues/2016-17-1/articles/613/>
8. Беккенбах Э., Беллман Р. Неравенства / Пер. с англ. Под ред. В.И. Левина. М.: Мир. 1965. 276 с.
9. Башлыков А.М., Великодный В.Ю. Структура ударных волн в газовой смеси // Журнал технической физики. 1991. Т. 61. № 8. С. 33–42.

REFERENCES

1. Postupatel'naya relaksatsiya v udarnykh volnakh [Progressive relaxation in shock waves]. Genich A.P., Kulikov S.V., Manelis G.B., Chereshev S.L., Preprint OIKHF AN SSSR, 1991. 68 p.
2. Kuznetsov M.M., Kuleshova YU.D., Smotrova L.V. Effekt vysokoskorostnoi postupatel'noi neravnovesnosti v bimodal'noi udarnoi volne [Effect of high-speed translational nonequilibrium in bimodal shock wave] // Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika. 2012. no. 2. pp. 108–115.
3. Kulikov S.V., Ternovaya O.N., Chereshev S.L. Spetsifika postupatel'noi neravnovesnosti vo fronte udarnoi volny v odnokomponentnom gaze [The specificity of translational nonequilibrium in the shock wave front in a single-component gas] // Khimicheskaya fizika. Vol. 12. 1993. no. 3. pp. 340–342.
4. Kuznetsov M.M., Kuleshova YU.D., Smotrova L.V. Effekt postupatel'noi neravnovesnosti v Tamm-Mott-Smitovskoi modeli udarnoi volny. [The effect of translational nonequilibrium in the Tamm-Mott-Shmitovskii shock wave model.] // Vestnik SPbGU ser. 1. 2012. no. 3. pp. 84–86.
5. Neravnovesnye fiziko-khimicheskie protsessy v gazodinamike [Nonequilibrium physico-

- chemical processes in gas dynamics]. Agafonov V.P., Vertushkin V.K., Gladkov A.A., Polyanskii O.YU. M., Mashinostroenie, 1972. 344 p.
6. Oberai M.M. A Mott-Smith distribution to describe the structure of a plane shock wave in binary mixture // *Phys Fluids*. 1966. Vol. 9. pp. 1634–1637.
 7. Kuznetsov M. M., Matveev S. V., Molostvin E. V., Reshetnikova YU. G., Smotrova L.V. Vysokoskorostnaya postupatel'naya neravnovesnost' smesi gazov v analiticheskoi modeli udarnoi volny [Elektronnyi resurs] [High-speed translational nonequilibrium of gas mixture in the analytical shock wave model [E-source]] // *Fiziko-khimicheskaya kinetika v gazovoi dinamike*. 2016. T. 17, vyp. 1. [Physico-chemical kinetics in gas dynamics. 2016. Vol. 17, issue. 1.]. URL: <http://chemphys.edu.ru/issues/2016-17-1/articles/613/>
 8. Bekkenbakh E., Bellman R. Neravenstva [Inequality] / Transl. from English. Ed. by V.I. Levin. M., Mir, 1965. 276 p.
 9. Bashlykov A.M., Velikodnyi V.YU. Struktura udarnykh voln v gazovoi smesi [Structure of shock waves in the gas mixture] // *Zhurnal tekhnicheskoi fiziki*. Vol. 61. 1991. no. 8. pp. 33–42.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Кузнецов Михаил Михайлович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической физики, Московский государственный областной университет;
e-mail: kuznets-omn@yandex.ru

Кулешова Юлия Дмитриевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей алгебры, элементарной математики и методики преподавания математики Московского государственного областного университета;
e-mail: juliaybogdanova@mail.ru

Смотрова Лилия Владимировна – аспирант кафедры теоретической физики, Московский государственный областной университет;
e-mail: lilysmotrova@mail.ru

Решетникова Юлия Геннадьевна – аспирант кафедры теоретической физики, Московский государственный областной университет;
e-mail: gau1972@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTORS

Kuznetsov Mihail Mihailovich – doctor of physical and mathematical sciences, professor of the Department of Theoretical Physics at the Moscow State Regional University;
e-mail: kuznets-omn@yandex.ru

Kuleshova Yuliya Dmitrievna – candidate of physical and mathematical sciences, associate professor of the Department of the Higher algebra, Elementary Mathematics and Technique of Teaching of Mathematics, Moscow State Regional University;

e-mail: juliaybogdanova@mail.ru

Smotrova Liliya Vladimirovna – postgraduate student, Moscow State Regional University;

e-mail: lilysmotrova@mail.ru

Reshetnicova Yuliya Gennadevna – postgraduate student, Moscow State Regional University;

e-mail: gau1972@mail.ru

БИБЛИОГРАФИЧЕСКАЯ ССЫЛКА

Кузнецов М.М., Кулешова Ю.Д., Смотров Л.В., Решетникова Ю.Г. О максимуме эффекта высокоскоростной поступательной неравновесности в ударной волне // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2016. №3. С. 84–95.

DOI: 10.18384/2310-7251-2016-3-84-95.

BIBLIOGRAPHIC REFERENCE

M. Kuznetsov, Y. Kuleshova, L. Smotrova, Y. Reshetnicova On the maximum effect of high translational nonequilibrium in the shock wave // Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics. 2016. no 3. pp. 84–95.

DOI: 10.18384/2310-7251-2016-3-84-95.

УДК 538.956 + 621.362.1

DOI: 10.18384/2310-7251-2016-3-96-110

ВЛИЯНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ОРИЕНТАЦИОННОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДИРЕКТОРА ЖИДКОГО КРИСТАЛЛА НА ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЯЧЕЙКИ ЖК

Соломатин А.С., Беляев В.В., Рыбаков Д.О.

*Московский государственный областной университет,
Учебно-научная лаборатория теоретической и прикладной нанотехнологии.
105005, г. Москва, ул. Радио, д. 10А, Российская Федерация*

Аннотация. Данная статья посвящена исследованию зависимости диэлектрических свойств нематических ЖК ячеек с различным пространственным ориентационным распределением от температуры. Приведены результаты эксперимента по изучению температурной зависимости диэлектрического отклика ЖК материала в мостовой схеме. Показано, что предложенная структура с комбинированной ориентацией ЖК даёт возможность формировать сигналы высокого уровня в мезофазе и низкого уровня в изотропной фазе при изменении температуры. Смоделирована зависимость диэлектрических свойств от ориентационного распределения.

Ключевые слова: жидкие кристаллы, диэлектрические свойства, краевые углы, датчик температуры, комбинированная ориентация ЖК.

LIQUID CRYSTAL SPACE ORIENTATIONAL DISTRIBUTION AND ITS INFLUENCE ON LC CELL'S DIELECTRICAL PROPERTIES

A. Solomatin, V. Belyaev, D. Rybakov

*Education & Research Lab of Theoretical and Applied Nanotechnology,
Moscow State Regional University,
ul. Radio 10a, 105005 Moscow, Russia*

Abstract. We report a study of the liquid crystal space orientational distribution and its influence on the LC cell's dielectrical properties. We present the results of an experimental study of the temperature dependence of the dielectric response of the LCD material in the bridge circuit. It is shown that the proposed structure with the LC combined alignment allows one to generate

high-level signals in the mesophase and low-level signals in the isotropic phase at a varying temperature. The dependence of the dielectric properties on the orientation distribution is simulated.

Key words: liquid crystal, dielectric properties, LC combined alignment.

1. Введение

Для разработки матричных ЖК дисплеев и других устройств с ЖК необходимо изучать непосредственно связанные с ними ёмкостные эффекты [1 –9]. В данной работе решена практическая задача моделирования ёмкостных свойств ЖК ячеек с различными приповерхностными углами и пространственным ориентационным распределением.

Моделировалось влияние приповерхностных углов наклона директора ЖК на реакцию (отклик) ЖК материала в комбинированной плоской ячейке, разработанной для ёмкостного датчика температуры [1]. Была построена модель, показывающая, как углы наклона влияют на уровень сигнала в нематической и изотропной фазах.

2. Методика экспериментальных измерений и исследуемые матричные ЖК ячейки

Конструкция и электрическая схема ячейки показана на рис. 1а; 1б. Конструкция, методика изготовления и принцип работы комбинированных ячеек подробно описаны в работе [1].

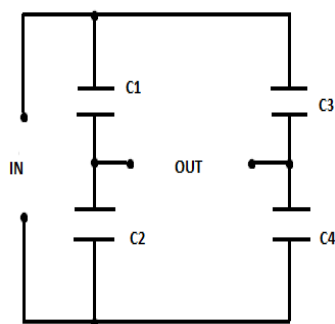


Рис. 1а. Электрическая схема комбинированной ЖК ячейки.

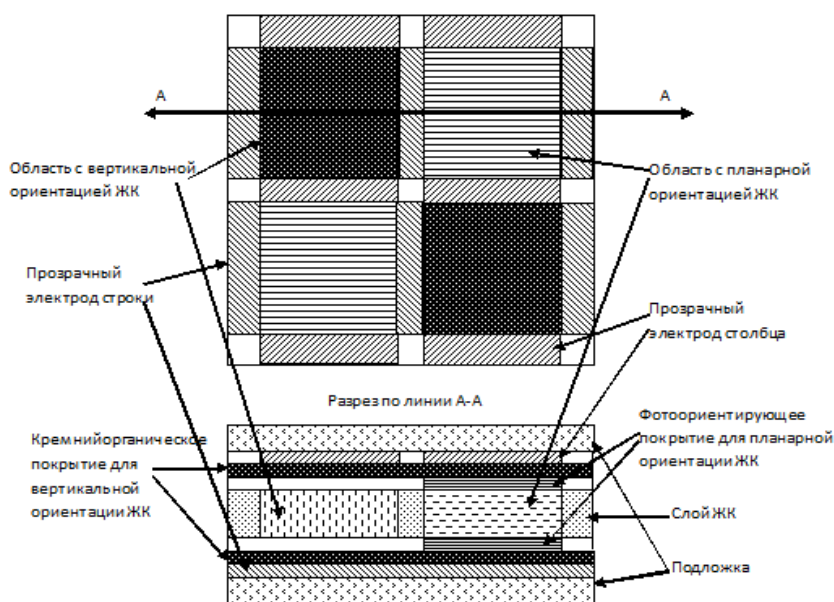


Рис. 16. Конструкция комбинированной ЖК ячейки.

Для изучения диэлектрических свойств ЖК ячейки была использована установка на базе платы аналогового входа-выхода DAC-NI PCI-6281, National Instruments, США. Рабочей средой ячейки является ЖК с положительной диэлектрической анизотропией НЖК-1289 ($\Delta\epsilon = \epsilon_{\parallel} - \epsilon_{\perp} > 0$), где $\epsilon_{\parallel}$ и $\epsilon_{\perp}$ – параллельная и перпендикулярная составляющие диэлектрической проницаемости, соответственно).

На ячейку с комбинированной ориентацией подаётся импульсный сигнал, удовлетворяющий условиям, описанным в статье [1].

Теоретически искомая амплитуда отклика определяется эффективной диэлектрической проницаемостью в соответствии с соотношением:

$$\epsilon_V = \frac{\epsilon_{\theta_1}^{eff} - \epsilon_{\theta_2}^{eff}}{\epsilon_{\theta_1}^{eff} + \epsilon_{\theta_2}^{eff}}, \quad (1)$$

где величины $\epsilon_{\theta_1}^{eff}$ и $\epsilon_{\theta_2}^{eff}$ вычисляются по формулам, приведённым в [1] для значений $\epsilon_{\parallel}$ и $\epsilon_{\perp}$ и θ – угла наклона директора ЖК. $\epsilon_{\theta_1}^{eff}$ – эффективная диэлектрическая проницаемость пары областей с вертикальной ориентацией, $\epsilon_{\theta_2}^{eff}$ – эффективная диэлектрическая проницаемость пары областей с планарной ориентацией (рис. 2).

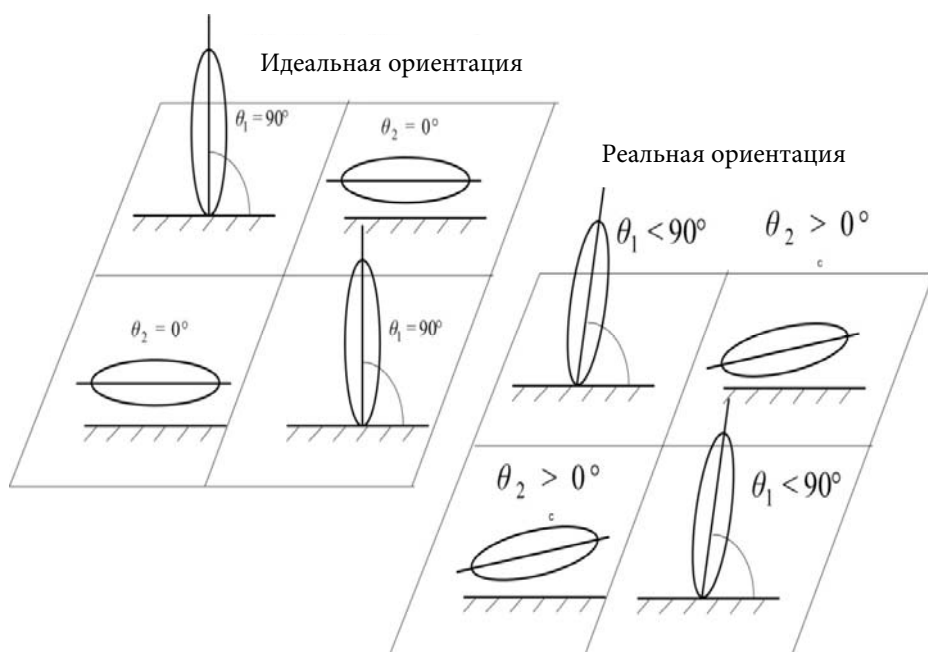


Рис. 2. Матричная ячейка с комбинированной ориентацией.

3. Результаты эксперимента и их обсуждение

Зависимость отклика ЖК ячеек ΔU от температуры показана в [1]. Однако в большой серии экспериментов с широким рядом матричных ячеек с неидеальной ориентацией (рис. 2) были получены результаты, существенно отличающиеся от приведённых в [1] для практически идеально ориентированных.

В ходе эксперимента для гибридных ЖК ячеек получаются результаты, значительно отличающиеся от результатов для ячеек, имеющих области с чисто планарной и гомеотропной ориентациями директора ЖК. Гибридные ЖК ячейки показаны на рис. 3.

Гибридная ориентация ЖК ячеек обеспечивается [10–15] созданием различных приповерхностных углов наклона директора ЖК путём нанесения различных ориентирующих покрытий и / или различной их поверхностной обработкой, формирующей различные типы ориентирующего микрорельефа. Если же углы $\theta_0^{(1)} \neq \theta_0^{(2)}$, то тогда получаем несимметричный случай распределения углов.

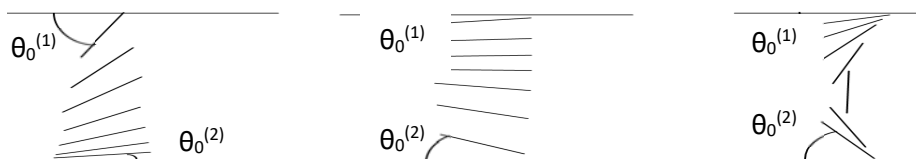


Рис. 3. Разносторонние ЖК ячейки с несимметричными углами преднаклона директора ЖК на противоположных сторонах (гибридные ЖК ячейки). Слева направо: *HybH*, *HybS* (*Splay*), *HybB* (*Bend*).

4. Моделирование гибридных ЖК ячеек

Были смоделированы ячейки ЖК как с симметричным (для S и B распределений), так и с асимметричным (для НубН) распределением директора ЖК по толщине ячейки. На рис. 4а показано распределение директора ЖК по толщине НубН ячейки с несимметричными приповерхностными углами, при угле директора от 0° до 90° и отношением коэффициентов упругости K_{33}/K_{11} от 0,5 до 3. На рис. 4б показано распределение директора ЖК по толщине НубS ячейки с симметричными приповерхностными углами, при приповерхностных углах 90° и K_{33}/K_{11} от 0,5 до 3. На рис. 4в показано распределение директора ЖК по толщине НубB ячейки с симметричными приповерхностными углами, при приповерхностных углах 0° и K_{33}/K_{11} от 0,5 до 3.

5. Моделирование зависимости диэлектрических свойств гибридных ЖК ячеек от ориентационных и диэлектрических параметров ЖК

Для схемы с ячейками, представленной на рис. 1, рис. 2, на рис. 5 показана зависимость величины ϵ_v (см. формулу 1) от углов наклона ЖК и от диэлектрических констант $\epsilon_{||}$, $\epsilon_{\perp}$, значения которых соответствуют различным значениям температуры в соответствии с зависимостью диэлектрических констант от температуры такого вида, как приведенная в [1]. Моделируемые ячейки имеют НубН ориентацию с симметричными краевыми углами.

По одной из осей показан приповерхностный угол одной из пар ячеек, по другой оси показан приповерхностный угол другой пары ячеек.

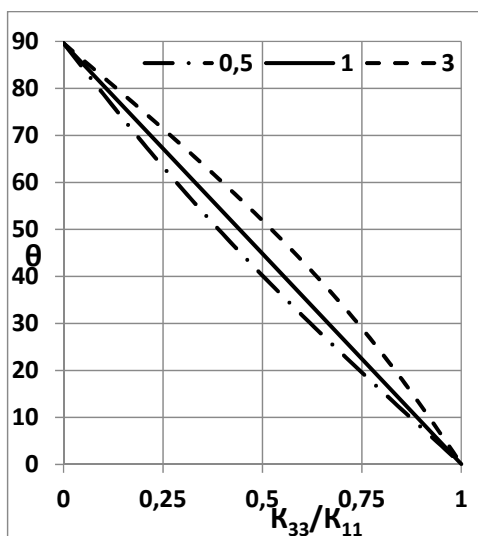


Рис. 4а. Распределение директора ЖК по толщине HybN ячейки с несимметричными приповерхностными углами при угле директора от 0° до 90° и K_{33}/K_{11} от 0,5 до 3.

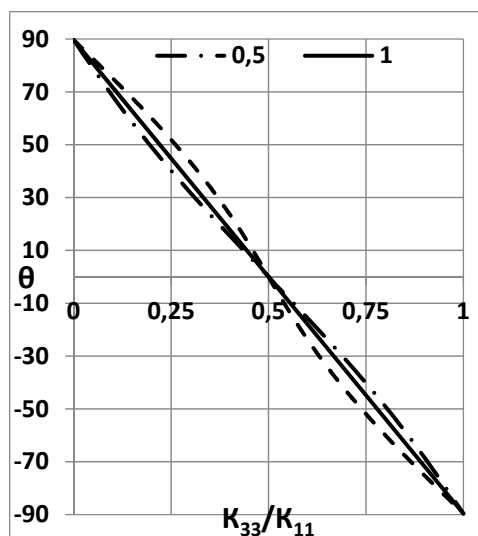


Рис. 4б. Распределение директора ЖК по толщине HybS ячейки с симметричными приповерхностными углами при K_{33}/K_{11} от 0,5 до 3.

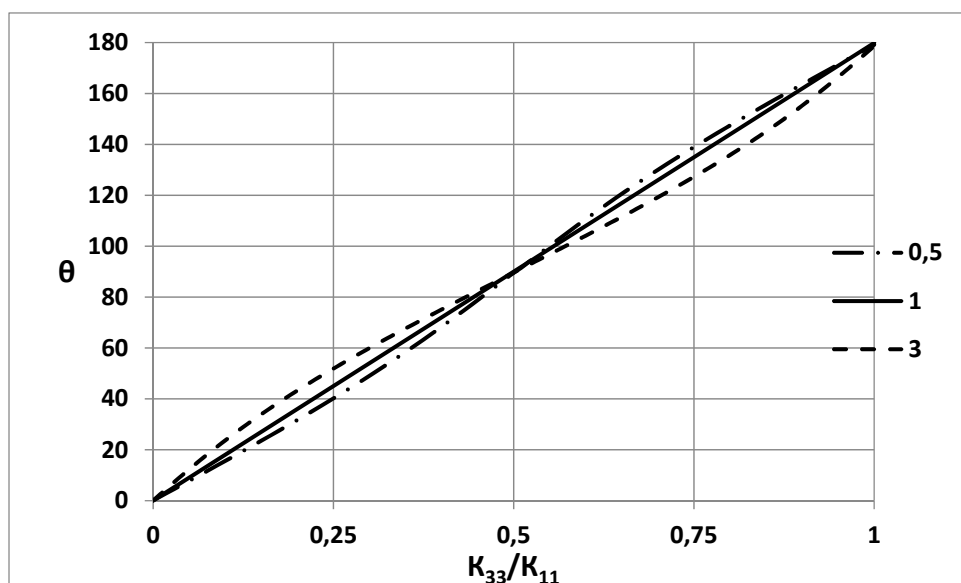


Рис. 4в. Распределение директора ЖК по толщине HybV ячейки с симметричными приповерхностными углами, при приповерхностных углах 0° и K_{33}/K_{11} от 0,5 до 3.

По вертикальной оси показан отклик ϵ_v . Справа – его же профили относительно одной из осей приповерхностных углов, значения по другой оси (краевые углы второй пары ячеек) показаны в подписях к линиям графиков.

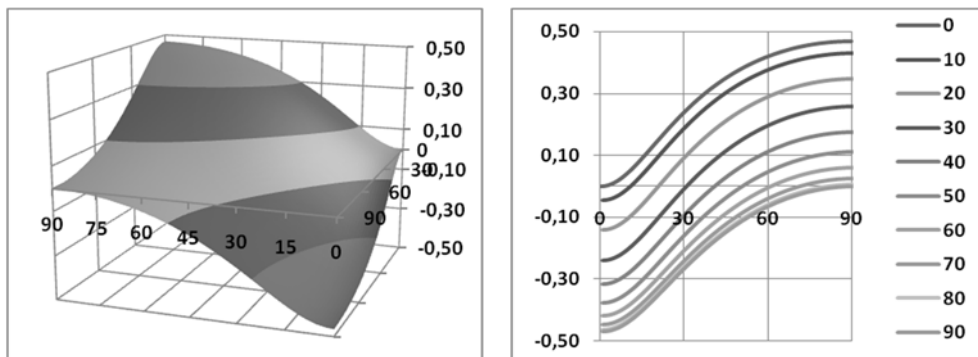


Рис. 5а. Зависимость отклика ϵ_v от углов наклона ЖК при значениях $\epsilon_{||}=10,2$; $\epsilon_{\perp}=3,7$.

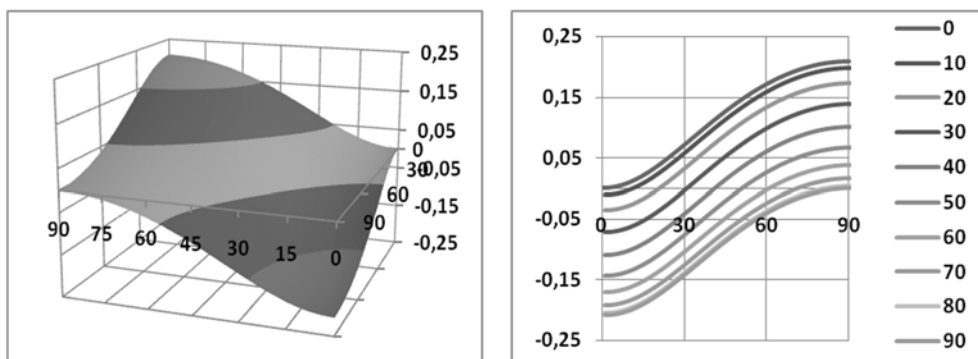


Рис. 5б. Зависимость отклика ϵ_v от углов наклона ЖК при значениях $\epsilon_{||}=8,24$, $\epsilon_{\perp}=5,4$

Как видно из рисунков, с ростом температуры вид зависимости отклика от приповерхностных углов в схеме с ЖК ячейками НубН типа с симметричными приповерхностными углами остаётся качественно тем же, хотя некоторые количественные изменения очевидны.

В то же время необходимо отметить, что величина отклика, в зависимости от приповерхностных углов в ячейках, может изменяться в широких пределах.

В теоретической модели [10–15] использовалось одноконстантное приближение (константы упругости Франка для нематических ЖК $K_{11}=K_{33}$) для упрощения расчётов. Условие $K_{11}=K_{33}$ означает линейное распределение угла наклона директора ЖК по оси координат, перпендикулярной поверхностям ЖК ячейки.

При одноконстантном приближении, упругая энергия ЖК не зависит от локального угла наклона директора, и угол линейно зависит от координаты по толщине ячейки. Углы рассматривались в диапазоне от 0° до 90° .

Однако в практическом применении важен случай нематических ЖК с $K_{11} \neq K_{33}$. В связи с этим необходимо уточнить, каковы диапазоны параметров ячеек нематических ЖК с $K_{11} \neq K_{33}$, при которых актуальна используемая в данной работе модель.

Типичная зависимость $\epsilon^{\text{eff}}(K_{33}/K_{11})$ для НубS, НубВ и НубН распределений изображена на рис. 6.1, рис. 6.2 и рис. 6.3, для $\epsilon_{//}=14,4$, $\epsilon_{\perp}=5,6$ (ЖК-1289 при 23°C)

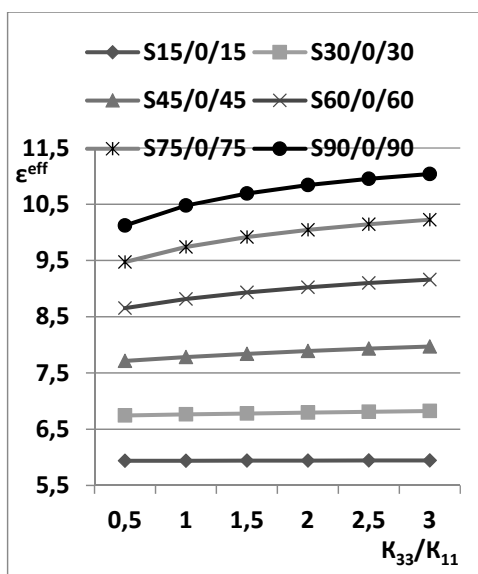


Рис. 6.1. Зависимость $\epsilon^{\text{eff}}(K_{33}/K_{11})$ для НубS распределения с симметричными приповерхностными углами от 15° до 90° и K_{33}/K_{11} от 0,5 до 3.

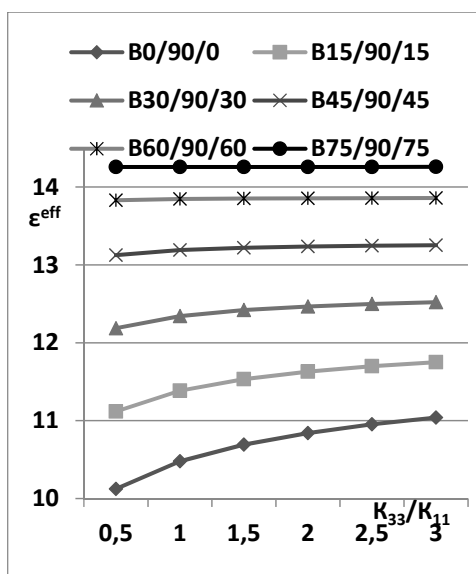


Рис. 6.2. Зависимость $\epsilon^{\text{eff}}(K_{33}/K_{11})$ для НубВ распределения с симметричными приповерхностными углами от 0° до 75° и K_{33}/K_{11} от 0,5 до 3.

Хорошо видно, что ϵ^{eff} остаётся близка к случаю $K_{33}/K_{11}=1$ для многих смоделированных распределений, например, $S15/0/15$, $S30/0/30$, $B60/90/60$, $B75/90/75$. Отсюда можно сделать вывод, что при разнице приповерхностных углов и угла посередине ячейки до 30° предложенная в [10-15] модель (одноконстантная) вполне пригодна.

Таким образом, предложенная методика определения диэлектрических свойств ЖК ячеек мостовым методом адекватна для реально существующих ЖК

систем в диапазоне разности приповерхностных углов и угла посередине ячейки не менее, чем в 30° .

В то же время необходимо отметить, что зависимость $\epsilon^{\text{eff}}(K_{33}/K_{11})$ для В0/90/0 и для S90/0/90 распределения демонстрирует изменение на 10% при изменении K_{33}/K_{11} от 0,5 до 3. Таким образом, показана возможность задания диэлектрических свойств ЖК ячейки НyS и НyBВ типов путём задания величины приповерхностного угла.

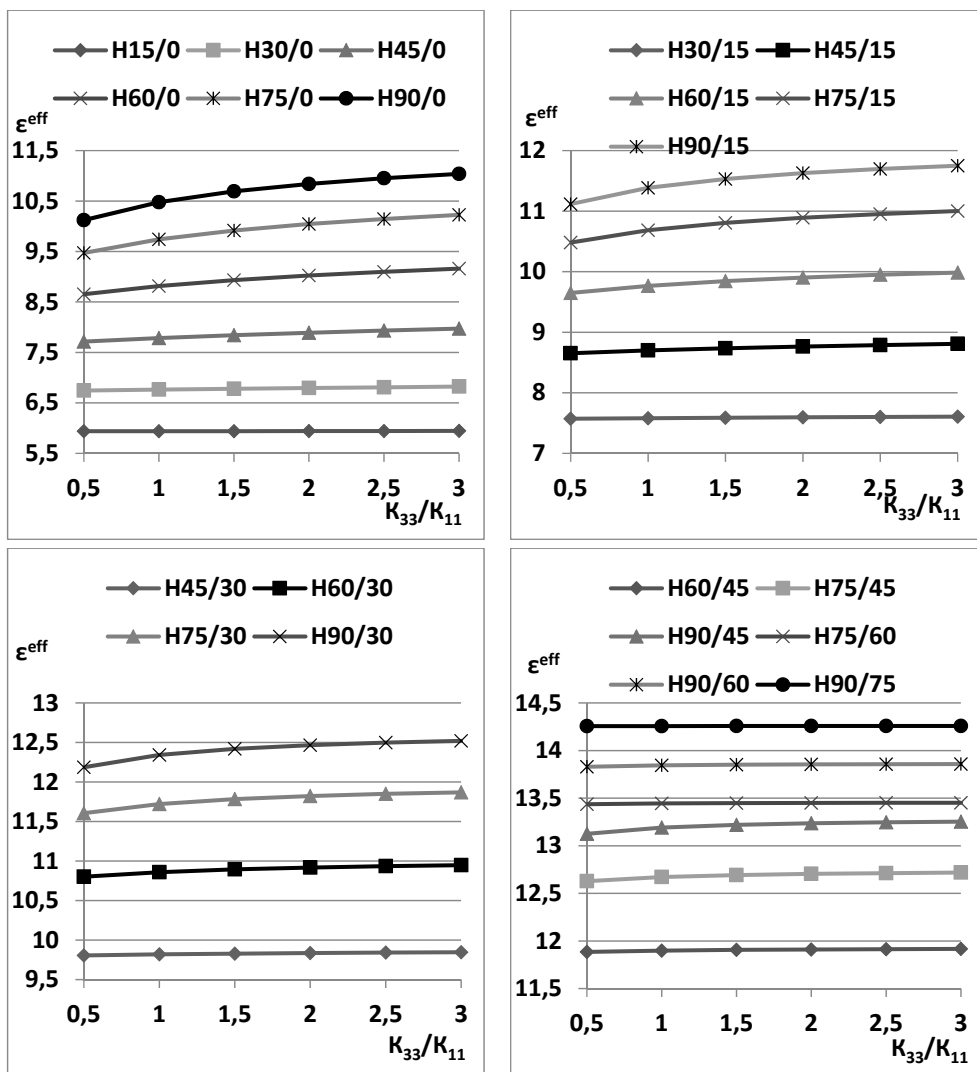


Рис. 6.3. Зависимость $\epsilon^{\text{eff}}(K_{33}/K_{11})$ для НyBН распределения с несимметричными приповерхностными углами (ориентационными) от 0° до 90° и K_{33}/K_{11} от 0,5 до 3. $\epsilon_{//} = 14,4$, $\epsilon_{\perp} = 5,6$ (ЖК-1289 при 23°C).

Хорошо видно, что ϵ^{eff} остаётся близка к случаю $K_{33}/K_{11}=1$ для многих смоделированных распределений, например, Н15/0, Н30/0, Н30/15, Н45/15, Н45/30, Н60/30, Н60/45, Н75/45, Н75/60, Н90/60, Н90/75. Из этого можно сделать вывод, что при разнице приповерхностных углов до 30° предложенная в работах [10-15] модель (одноконстантная) вполне пригодна.

В то же время необходимо отметить, что зависимость $\epsilon^{\text{eff}}(K_{33}/K_{11})$ для НубН распределения демонстрирует изменение на 10% при изменении K_{33}/K_{11} от 0,5 до 3, например для гомеопланарной ячейки (Н90/0).

Таким образом, показана возможность задания диэлектрических свойств ЖК ячейки НубН типа путём задания величины приповерхностного угла.

На рис. 7 показана величина ϵ_v для различных НубS и НубВ распределений, рассмотренных выше. Над каждым графиком указана величина K_{33}/K_{11} .

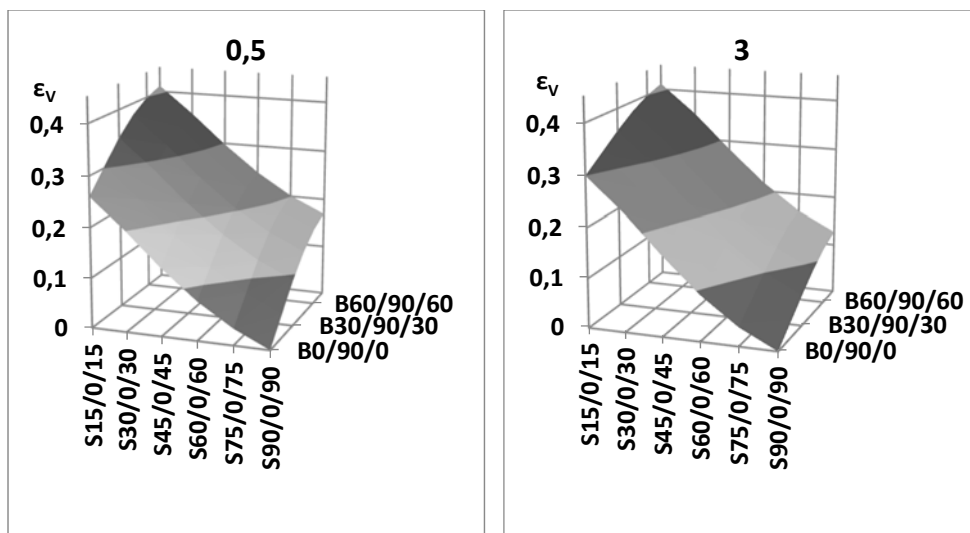


Рис. 7. Величина ϵ_v для различных НубS и НубВ распределений при значениях K_{33}/K_{11} от 0,5 до 3. $\epsilon_{//}=14,4$, $\epsilon_{\perp}=5,6$ (ЖК-1289 при 23°C).

Как показано на рис. 7, вполне можно пользоваться одноконстантной моделью [10–15] для расчёта отклика ϵ_v при различных упругих характеристиках ЖК материала и НубS или НубВ конфигурациях.

Надо отметить, что для той ЖК ячейки, которая ближе к планарной ориентации, более вероятной является НубS конфигурация, а для той ЖК ячейки, которая ближе к гомеотропной, более вероятной является НубВ

конфигурация. Таким образом, наиболее вероятные варианты пар ячеек для расчёта отклика приведены на рис. 7. В таблице 1 приведены данные для отклика, рассчитанного по одноконстантной модели ЖК ячеек. Они же использованы для соответствующего из графиков на рис. 7.

Таблица 1.

Величина ϵ_V , рассчитанная при значении $K_{33}/K_{11} = 1$, $\epsilon_{//} = 14,4$, $\epsilon_{\perp} = 5,6$ (ЖК-1289 при 23°C).

	<i>S15/0/15</i>	<i>S30/0/30</i>	<i>S45/0/45</i>	<i>S60/0/60</i>	<i>S75/0/75</i>	<i>S90/0/90</i>
<i>B0/90/0</i>	0,27	0,21	0,15	0,09	0,04	0
<i>B15/90/15</i>	0,31	0,25	0,19	0,13	0,08	0,04
<i>B30/90/30</i>	0,35	0,29	0,23	0,17	0,12	0,08
<i>B45/90/45</i>	0,38	0,32	0,26	0,20	0,15	0,11
<i>B60/90/60</i>	0,40	0,34	0,28	0,22	0,17	0,14
<i>B75/90/75</i>	0,41	0,36	0,29	0,24	0,19	0,15

6. Выводы

Показано экспериментально, что предложенная структура с комбинированной ориентацией ЖК даёт возможность формировать сигналы высокого уровня в мезофазе и низкого уровня в изотропной фазе при изменении температуры.

Построена модель, которая позволяет определить, какие краевые углы в ЖК ячейках следует задать для формирования заданных ёмкостных свойств и значения отклика.

Это моделирование также может использоваться для произвольных слоев жидкого кристалла с большим диапазоном их краевых углов. Таким образом можно построить новые конструкции ЖК экранов с активной жидкокристаллической матрицей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Муравский Ан.Ал., Муравский Ал.Ан., Беляев В.В., Рыбаков Д.О., Мазаева В.Г., Соломатин А.С., Чаусов Д.Н., Шошин В.М., Бобылев Ю.П. Жидкокристаллический ёмкостной датчик температуры // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2014. № 1. С. 40–47.

2. Беляев В.В., Карлашук В.И. Технические средства систем управления. Часть 1. Операционные усилители и измерительные преобразователи // Учебное пособие: М: РУДН. 2009. С. 1–100.
3. Гребенкин М.Ф., Иващенко А.В. Жидкокристаллические материалы. М.: Химия. 1989. 288 с.
4. Maier W., Meier G. Eine einfache Theorie der dielektrischen Eigenschaften homogen orientierter kristallinlüssiger Phasen des nematischen Typs. // Z. Naturforsch. 1961. Vol. 16a. P. 262.
5. Maier W., Meier G. Hauptdielektrizitätskonstanten der kristallinlüssiger Phasen des nematischen Typs. // Z. Naturforsch. 1961. Vol. 16a. P. 470.
6. Адоменас П., Беляев В.В., Иванов С.А., Кузнецов А.Б., Ковтонюк Н.Ф., Шешкаускас В., Безбородов В.С., Пашконене Р. Жидкокристаллический материал с положительной диэлектрической анизотропией для оптоэлектронных устройств // Положит. реш. по заявке на Авторское свидетельство СССР № 4821614/04 от 30.07.91, приор. 03.05.90.
7. Belyaev V.V., Solomatin A.S., Chausov D.N., Shoshin V.M., Bobylev Y.P., Muravskii A.A., Muravskii A.A., Mazaeva V.G., Natsyuk S.N., Gorbunov A.A. Different Polarity NLC Alignment on Organosilicon Films of Varying Molecular Structure // Proc. XXXI IDRC Eurodisplay 2011 (Arcachon, France, 19-22 September 2011), pp. 17–19.
8. Muravsky A.I., Murauski A.N., Mazaeva V., Belyaev V. Parameters on the LC alignment of organosilicon compound films // J. Soc. Inf. Display. 2005. Vol. 13. pp. 349–354.
9. de Jen W.H. Physical Properties of Liquid Crystalline Materials. New York.: Gordon & Breach. 1980.
10. Belyaev V., Solomatin A., Chausov D. Phase retardation vs. pretilt angle in liquid crystal cells with homogeneous and inhomogeneous LC director configuration // Optics Express. 2013. Vol. 21. pp. 4244–4249.
11. Belyaev V.V., Solomatin A.S., Kurilov A.D., Chausov D.N., Mazaeva V.G. Optical Properties of Hybrid Aligned Nematic (HAN) Cells with Different Pretilt Angles // Applied Optics. 2014. Vol. 53. Issue 29. pp. H51–H57.
12. Беляев В.В., Соломатин А.С. Оптические свойства гибридных жидкокристаллических ячеек при различных углах падения света // Оптический Журнал. 2015. Т. 82. № 1. С. 41–48.
13. Belyaev V.V., Solomatin A.S., Chausov D.N. Phase retardation difference of liquid crystal cells with symmetric and asymmetric boundary conditions // Molecular Crystals & Liquid Crystals. 2014. Vol. 596. no. 1. pp. 22–29.
14. Беляев В.В., Соломатин А.С., Чаусов Д.Н. Оптические свойства ЖК ячеек с произвольным краевым углом наклона директора // Вестник Московского

государственного областного университета. Серия Физика-Математика. 2013. №1. С. 32–41.

15. Беляев В.В., Соломатин А.С. Ориентационные и оптические свойства слоев жидкого кристалла с одной ориентирующей и одной неориентирующей поверхностью // Жидкие кристаллы и их практическое применение. 2014. Т. 14. №2. С. 4–20.

REFERENCES

1. Zhidkokristallicheskiei emkostnoi datchik temperatury [LCD capacitive temperature sensor], Muravskii An.Al., Muravskii Al.An., Belyaev V.V., Rybakov D.O., Mazaeva V.G., Solomatin A.S., Chausov D.N., Shoshin V.M., Bobylev YU.P. // Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika. 2014. no. 1. pp. 40–47.
2. Belyaev V.V., Karlashchuk V.I. Tekhnicheskie sredstva sistem upravleniya. CHast' 1. Operatsionnye usiliteli i izmeritel'nye preobrazovateli: uchebnoe posobie [Technical means of control systems. Part 1. Operational amplifiers and measuring transducers: a tutorial]. M., RUDN, 2009.
3. Grebenkin M.F., Ivashchenko A.V. Zhidkokristallicheskie materialy [Liquid crystal materials]. M., Khimiya, 1989. 288 p.
4. Maier W., Meier G. Eine einfache Theorie der dielektrischen Eigenschaften homogen orientierter kristallinglüssiger Phasen des nematischen Typs. // Z. Naturforsch. 1961. Vol. 16a. P. 262.
5. Maier W., Meier G. Hauptdielektrizitätskonstanten der kristallinglüssiger Phasen des nematischen Typs. // Z. Naturforsch. 1961. Vol. 16a. P. 470.
6. Zhidkokristallicheskiei material s polozhitel'noi dielektricheskoi anizotropiei dlya optoelektronnykh ustroystv [Liquid crystal material with positive dielectric anisotropy for optoelectronic devices], Adomenas P., Belyaev V.V., Ivanov S.A., Kuznetsov A.B., Kovtonyuk N.F., Sheshkauskas V., Bezborodov V.S., Pashkonene R. // Polozhit. resh. po zayavke na Avtorskoe svidetel'stvo SSSR. . no. 4821614/04 ot 30.07.91, prior. 03.05.90.
7. Belyaev V.V., Solomatin A.S., Chausov D.N., Shoshin V.M., Bobylev Y.P., Muravskii A.A., Muravskii A.A., Mazaeva V.G., Natsyuk S.N., Gorbunov A.A. Different Polarity NLC Alignment on Organosilicon Films of Varying Molecular Structure // Proc. XXXI IDRC Eurodisplay 2011 (Arcachon, France, 19-22 September 2011), pp. 17–19.
8. Muravsky Al., Murauski An., Mazaeva V., Belyaev V. Parameters on the LC alignment of organosilicon compound films // J. Soc. Inf. Display. 2005. Vol. 13. pp. 349–354.
9. de Jen W.H. Physical Properties of Liquid Crystalline Materials. New York.: Gordon & Breach. 1980.

10. Belyaev V., Solomatin A., Chausov D. Phase retardation vs. pretilt angle in liquid crystal cells with homogeneous and inhomogeneous LC director configuration // Optics Express. 2013. Vol. 21. pp. 4244–4249.
11. Belyaev V.V., Solomatin A.S., Kurilov A.D., Chausov D.N., Mazaeva V.G. Optical Properties of Hybrid Aligned Nematic (HAN) Cells with Different Pretilt Angles // Applied Optics. 2014. Vol. 53. Issue 29. pp. H51–H57.
12. Belyaev V.V., Solomatin A.S. Opticheskie svoistva gibridnykh zhidkokristallicheskih yacheek pri razlichnykh uglakh padeniya sveta [Optical properties of hybrid liquid crystal cell at various angles of incidence of light] // Opticheskii Zhurnal. Vol. 82. 2015. no. 1. pp. 41–48.
13. Belyaev V.V., Solomatin A.S., Chausov D.N. Phase retardation difference of liquid crystal cells with symmetric and asymmetric boundary conditions // Molecular Crystals & Liquid Crystals. 2014. Vol. 596. no. 1. pp. 22–29.
14. Belyaev V.V., Solomatin A.S., Chausov D.N. Opticheskie svoistva ZHK yacheek s proizvol'nym kraevym uglom naklona direktora [The optical properties of the LCD cell with arbitrary boundary angle of the Director] // Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya Fizika-Matematika. 2013. no. 1. pp. 32–41.
15. Belyaev V.V., Solomatin A.S. Orientatsionnye i opticheskie svoistva sloev zhidkogo kristalla s odnoi orientiruyushchei i odnoi neorientiruyushchei poverkhnost'yu [Orientational and optical properties of layers of liquid crystal with one orientation and one georienteerde surface] // Zhidkie kristally i ikh prakticheskoe primeneniye. Vol. 14. 2014. no. 2. pp. 4–20.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Соломатин Алексей Сергеевич – кандидат физико-математических наук, инженер учебно-научной лаборатории теоретической и прикладной нанотехнологии, Московский государственный областной университет;
e-mail: Sotrudnica_UNC@mail.ru

Беляев Виктор Васильевич – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической физики, Московский государственный областной университет;
e-mail: vic_belyaev@mail.ru

Рыбаков Дмитрий Олегович – аспирант, Московский государственный областной университет;
e-mail: rubakov_lis@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Solomatin Aleksei Sergeevich – candidate of physical and mathematical sciences, engineer of the Education & Science Lab for Theoretical and Applied Nanotechnology at the Moscow State Regional University;
e-mail: Sotrudnica_UNC@mail.ru

Victor Vasilyevich Belyaev – doctor of technical sciences, professor, head of the Department of Theoretical Physics at the Moscow State Regional University;
e-mail: vic_belyaev@mail.ru

Rybakov Dmitry – post-graduate student, State Moscow Regional University;
e-mail: rubakov_lis@mail.ru

БИБЛИОГРАФИЧЕСКАЯ ССЫЛКА

Соломатин А.С., Беляев В.В., Рыбаков Д.О. Влияние пространственного ориентационного распределения директора жидкого кристалла на диэлектрические свойства ячейки ЖК // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2016. № 3. С. 96–110.

DOI: 10.18384/2310-7251-2016-3-96-110.

BIBLIOGRAPHIC REFERENCE

A. Solomatin, V. Belyaev, D. Rybakov. Liquid crystal space orientational distribution and its influence on LC cell's dielectrical properties // Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics. 2016. no. 3. pp. 96–110.

DOI: 10.18384/2310-7251-2016-3-96-110.

УДК.533.72.

DOI: 10.18384/2310-7251-2016-3-111-119

ВИХРЕВЫЕ ДВИЖЕНИЯ В ПОЛУОГРАНИЧЕННОМ ГАЗОПОДОБНОМ НЕСТАЦИОНАРНОМ ОБЛАКЕ

Зудина М.Н., Кухаренко А.П.

*Московский государственный областной университет
105005, г. Москва, ул. Радио, д. 10А, Российская Федерация*

Аннотация. Рассмотрена эволюция нестационарного широкого газоподобного облака в полупространстве. Теоретически найдены выражения компонент вихря для этого облака. Дан анализ и графическое представление полученных формул.

Ключевые слова: кинетика, вихревые движения, газоподобная среда.

VORTEX MOTIONS IN A NONSTATIONARY SEMI-INFINITE GAS-LIKED CLOUD

M. Zudina, A. Kukhareenko

*Moscow State Regional University,
ul. Radio 10A, 105005 Moscow, Russia*

Abstract. The evolution of the nonstationary wide gas-like cloud, expanded into a half-space, is analyzed. The expressions for vortex components of this cloud are found theoretically. The analysis and graphical presentation of the obtained formulae are performed.

Key-words: kinetics, vortex motion, gas-liked medium

1. Введение

Целью данной работы является теоретическое описание вихревых движений, возникающих в полугораниченном газоподобном нестационарном облаке, состоящем из большого числа частиц N , исходя из микроскопической статистической теории. В целом, явления полугораниченного расширения такого облака наблюдаются, например, при испарении, возгонке или быстром

диспергировании слоёв конденсированного вещества, нанесённых на непроницаемую подложку. Такие явления широко распространены в природе, а также происходят в некоторых технологических процессах. Актуальность исследования определяется его практическими приложениями в физике газодисперсных систем, в статистической газодинамике, а также теоретическим интересом. Эволюция облаков, образованных дисперсными частицами, теоретически мало исследована. Теоретическое рассмотрение вихревых течений в газах обычно исходит из уравнений динамики сплошной среды, не углубляясь в её молекулярную структуру. Поэтому остаётся актуальным исследование таких движений на основе микроскопической теории. Предлагаемая ниже модель применима как к облакам атомарно-молекулярного состава, так и к системам более крупных дисперсных частиц.

2. Рассматриваемая модель

В отличие от ранее решённых задач [1–4] используются формулы для плотности и плотности потока среды, найденные для случая полуограниченного газоподобного облака в [5–7]. Как и в указанных работах, рассматривается нестационарная газоподобная система частиц, образованная весьма быстрым разрушением плоского слоя конденсированного вещества массой M и толщиной L в вакууме, причём подложка (далее – стенка) сохраняется и является непроницаемой. Площадь слоя S считается столь большой, что для характерных интегралов Пуассона в его плоскости XY пределы можно принять бесконечными с хорошим приближением. Слой объёмом $V_0 = LS$ принят однородным, его объёмная плотность ρ_0 – константа. Пусть в момент $t = 0$ происходит весьма быстрое разрушение слоя вследствие некоторого воздействия, и вещество превращается в расширяющееся газоподобное облако, которое может состоять как из молекулярных, так и из более крупных дисперсных частиц. Считаем образовавшиеся частицы массы m однородными и бесструктурными. Поскольку межчастичные силы – короткодействующие, а с расширением облака быстро уменьшается его плотность, полагаем в дальнейшей эволюции частицы не взаимодействующими иначе, как через упругие столкновения, как в модели идеального газа. Внешние поля отсутствуют, но облако не является изолированным, так как находится в контакте со стенкой. Столкновения частиц

со стенкой считаем упругими. Данная модель отличается от рассмотренных в [1–4] именно полуограниченностью, то есть распространением облака в полуобъём.

3. Случай с начальной скоростью облака ортогональной стенке

Ранее для задачи полуограниченного расширения была получена формула плотности облака, которая имеет вид[5]:

$$\rho = \frac{2mNB^{3/2}\exp\{-B[x^2 + y^2 + (z - Q)^2]\}}{\pi^{3/2}[1 + \operatorname{erf}(Q\sqrt{B})]}, \quad (1)$$

где: x, y, z – координаты точки в физическом пространстве, причём z – ортогональна плоскости стенки XY, $\operatorname{erf}(Q\sqrt{B})$ – интеграл вероятности,

$$B = \frac{bw}{u}; \quad u = 1 + \frac{ct}{am} + \frac{bt^2}{am^2}; \quad w = 1 - \frac{c^2}{4ab},$$

$Q = \frac{p_3 \cdot t}{m}$ – координата сдвига максимума; $p_3 = mv_0$, v_0 – начальная массовая скорость слоя в момент его отрыва от стенки, ортогональная к стенке; a, b и c – масштабные константы, введенные из соображений размерности и определяемые из дополнительных условий.

Формула (1) отлична от формул, полученных ранее для неограниченного двустороннего расширения облака наличием интеграла вероятности в знаменателе.

Проекции плотности потока массы, найденные при решении предыдущей задачи, имеют вид:

$$\begin{aligned} j_x &= -\frac{k_3 x \rho}{2aum} \\ j_y &= -\frac{k_3 y \rho}{2aum} \\ j_z &= -\frac{(k_2 + k_3 z) \rho}{2aum}, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$k_2 = -2p_3 a - \frac{cp_3 t}{m}, \quad k_3 = -\frac{2bt}{m} - c.$$

Найдём компоненты вектора вихря плотности потока массы для выбранной модели. Отметим, что этот вектор не только не тождественен, но, вообще, даже не пропорционален обычно рассматриваемому в динамике сплошных сред вихрю скорости. Такая пропорциональность имеет место лишь в частном случае движения несжимаемой среды без учёта неконвективного движения.

Компоненты вектора вихря выражаются через частные производные от проекций исходного вектора. Находя частные производные по координатам от (2), получим проекции вихря плотности потока вещества:

$$R_x = - \frac{4v_0 y m N B^{(5/2)} \exp[-B(x^2 + y^2 + (z - v_0 t)^2)]}{\left(1 + \operatorname{erf}(v_0 t \sqrt{B})\right) \pi^{(3/2)}}, \quad (3)$$

$$R_y = \frac{4v_0 x m N B^{(5/2)} \exp[-B(x^2 + y^2 + (z - v_0 t)^2)]}{\left(1 + \operatorname{erf}(v_0 t \sqrt{B})\right) \pi^{(3/2)}}, \quad (4)$$

$$R_z = 0, \quad (5)$$

где v_0 – начальная массовая скорость облака, принятая ортогональной стенке.

Заметим, что для неограниченного двустороннего расширения облака все компоненты вихря равны нулю. Искомый вихрь определяется совокупностью всех 3-х компонент (3–5) и лежит в плоскости, ортогональной OZ. Его проекции пропорциональны плотности вещества, кроме того имеют дополнительную зависимость от координат перед экспонентой. Вектор вихря:

$$\mathbf{rot} \mathbf{j} = \mathbf{e}_x \cdot R_x + \mathbf{e}_y \cdot R_y.$$

Так как найденные величины (3) и (4) есть функции времени, то для данной модели теория описывает возникновение, развитие и затухание вихревых движений среды в ходе эволюции системы. Физической причиной эволюции вихрей является перераспределение импульса и массы среды вследствие одновременно присутствующих хаотического и направленного движения её частиц (молекул или мелкодисперсных частиц), а также характерного для данной задачи влияния стенки.

4. Случай с дополнительной начальной скоростью, параллельной стенке

Рассмотрим более сложный случай, когда облако, помимо начальной массовой скорости, направленной ортогонально стенке, обладает также начальной массовой скоростью V , параллельной стенке и направленной по оси OX. Этот случай может соответствовать наличию бокового «ветра» вдоль OX. В таком случае z -компонента вихря плотности потока среды не равна нулю:

$$R_z = - \frac{4y N B^{(5/2)} \exp[-B((x - Vt)^2 + y^2 + (z - v_0 t)^2)](amu + k_3 t)V}{\pi^{(3/2)} au \left(1 + \operatorname{erf}(v_0 t \sqrt{B})\right)}, \quad (6)$$

где v_0 – как и ранее, начальная скорость облака, ортогональная стенке. Таким образом, боковой «ветер» приводит для полуограниченного облака к появлению

компоненты вихря, ортогональной плоскости стенки, и возникающей вследствие влияния стенки на движение среды. Выражение (6) меняет знак на линии $y=0$, так что в полуплоскостях $y>0$ и $y<0$ имеем пару противоположно ориентированных вихрей.

Формула аналогичная (6) получается также для случая, когда по оси Z нет начальной скорости, но на все частицы действует однородное внешнее поле. В этом случае $v_0 t$ заменяется на $ft^2/2m$:

$$R_z = - \frac{4yNB^{(5/2)} \exp \left[-B \left((x - Vt)^2 + y^2 + \left(z - \frac{ft^2}{2m} \right)^2 \right) \right] mV}{\pi^{(3/2)} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{ft^2 \sqrt{B}}{2m} \right) \right] \left(1 + \operatorname{erf}(v_0 t \sqrt{B}) \right)}, \quad (7)$$

В обоих случаях эффект появления z -компоненты вихря возникает только при наличии непроницаемой стенки.

5. Графическое представление полученных результатов

Для нахождения рельефа z -проекции вихря над плоскостью XY для случая с дополнительной начальной скоростью, параллельной стенке, в полученной ранее формуле (6) примем $z=1$. Будем рассматривать зависимость R_z от переменных x и y в последовательные моменты времени. Аналогично построены рельефы вихря над двумя другими плоскостями (рис. 1–3).

Для построения графиков принята удобная система единиц $a=1$, $b=1$, $c=1$, в соответствии с ней определялись масштабы и размерности других величин. Значения координат x , y и z , равные 1, мы выбираем, исходя из удобства сравнения полученных графиков, а также чтобы исключить случай аннулирования рельефов и случай весьма малых значений амплитуд при больших координатах. Время выбираем, исходя из соображений удобства масштабирования.

Для всех трёх рассмотренных случаев очевиден сдвиг максимума по оси x , а также уменьшение амплитуды вихря для случаев а) и б). Из рис. 1в, 2в, 3в видно, что в процессе эволюции z -проекция вихря меняет знак. Это происходит за счёт изменения знака множителя, содержащего k_z . Сначала вихрь обнуляется, а потом меняет свое направление, соответственно бугры и ямы в полуплоскостях меняются местами. Следует отметить, что сдвиг максимума происходит только по оси x . По оси y такого сдвига нет ввиду отсутствия скорости по этой оси.

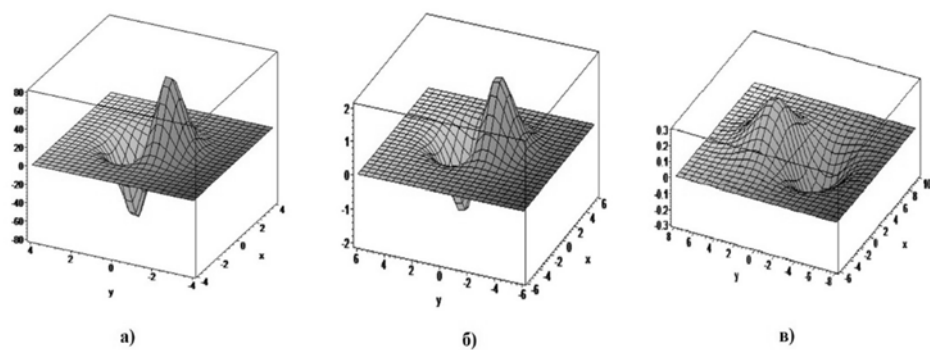


Рис. 1. Рельеф вихря над плоскостью XY при а) $z=1, t=0$; б) $z=1, t=4/5$; в) $z=1, t=2$.

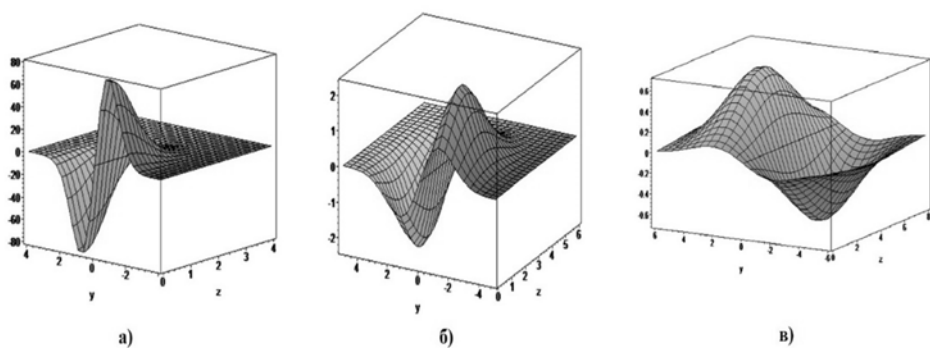


Рис. 2. Рельеф вихря над плоскостью YZ при а) $x=1, t=0$; б) $x=1, t=4/5$; в) $x=1, t=2$.

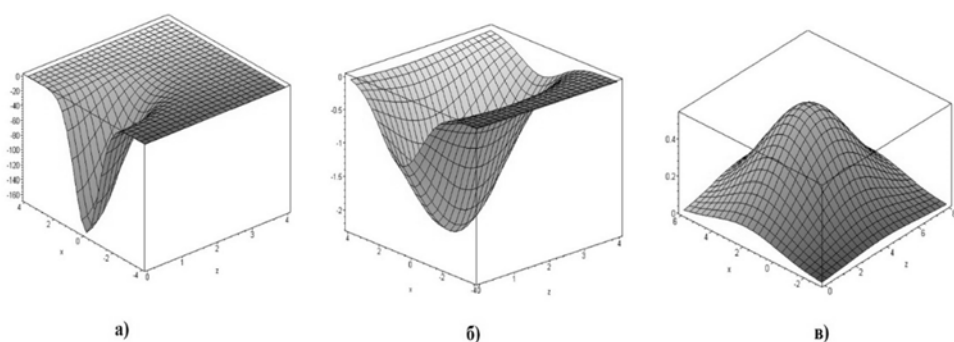


Рис. 3. Рельеф вихря над плоскостью XZ при а) $y=1, t=0$; б) $y=1, t=4/5$; в) $y=1, t=2$.

6. Заключение

В отличие от ранее решённых задач, в данном случае были использованы формулы для плотности и плотности потока массы, найденные для случая полуограниченного газоподобного облака в [5; 6].

Показано, что в случае, когда облако имеет начальную массовую скорость ортогональную к пластине (или находится во внешнем поле, ортогональном к пластине), вихрь плотности потока среды для принятой модели имеет только компоненты параллельные плоскости пластины. В случае же, когда облако имеет также начальную массовую скорость параллельную плоскости пластины, возникает компонента вихря плотности потока среды, ортогональная плоскости пластины. Получена строгая аналитическая формула для этой компоненты.

Если расширение по оси z идет без начальной массовой скорости, но в силовом поле, то, при наличии ветра по оси x , так же будет возникать третья (z -я) компонента вихря, которая отсутствует для случая без бокового ветра.

ЛИТЕРАТУРА

1. Голов А.Н., Зудина М.Н. Кинетика вихревых движений газоподобной среды в постоянном потенциальном поле // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2012. № 1. С. 39–43.
2. Голов А.Н., Зудина М.Н. Вихревые движения газоподобного облака с начальной скоростью в однородном постоянном поле // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2012. № 3. С. 50–55.
3. Голов А.Н., Зудина М.В., Перов А.А., Шутов А.И. Кинетическая теория вихревых движений газоподобного облака, движущегося в потенциальном поле с начальной скоростью, ортогональной полю // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2013. № 2. С. 11–16.
4. Голов А.Н., Зудина М.Н. Статистическая теория вихревых движений в нестационарных газоподобных системах // Реферативный журнал Всероссийского института научной и технической информации. 2014. С. 26.
5. Голов А.Н. Эволюция полуограниченного нестационарного плоского газоподобного облака // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2014. № 2. С. 69–78.
6. Голов А.Н., Филиппова А.П. Получение и исследование формулы плотности потока вещества в нестационарном полуограниченном газоподобном облаке // Вестник

Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2015. № 2. С. 107–119.

7. Голов А.Н., Кухаренко А.П. Кинетика эволюции полуограниченного газоподобного облака // Естественные и технические науки. 2015. № 11. С. 60–70.

REFERENCES

1. Golov A.N., Zudina M.N. Kinetika vikhrevykh dvizhenii gazopodobnoi sredy v postoyannom potentsial'nom pole [Kinetics of vortex motions of the gas environment in a constant potential field] // Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-Matematika. 2012. no. 1. pp. 39–43.
2. Golov A.N., Zudina M.N. Vkhrevye dvizheniya gazopodobnogo oblaka s nachal'noi skorost'yu v odnorodnom postoyannom pole [Vortex motion of gas clouds with an initial velocity in a homogeneous constant field] // Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-Matematika. 2012. no. 3. pp. 50–55.
3. Golov A.N., Zudina M.V., Perov A.A., Shutov A.I. Kineticheskaya teoriya vikhrevykh dvizhenii gazopodobnogo oblaka, dvizhushchegosya v potentsial'nom pole s nachal'noi skorost'yu, ortogonal'noi polyu [Kinetic theory of vortex motions of the gas clouds moving in a potential field with an initial velocity orthogonal to the field] // Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-Matematika. 2013. no. 2. pp. 11–16.
4. Golov A.N., Zudina M.N. Statisticheskaya teoriya vikhrevykh dvizhenii v nestatsionarnykh gazopodobnykh sistemakh [Statistical theory of vortex motions in non-stationary gas engines] // Referativnyi zhurnal Vserossiiskogo instituta nauchnoi i tekhnicheskoi informatsii [Abstract journal of all-Russian Institute of scientific and technical information]. 2014. P. 26.
5. Golov A.N. Evolyutsiya poluogranichennogo nestatsionarnogo ploskogo gazopodobnogo oblaka [Evolution of non-stationary semi-infinite flat gas cloud] // Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-Matematika. 2014. no. 2. pp. 69–78.
6. Golov A.N., Filippova A.P. Poluchenie i issledovanie formuly plotnosti potoka veshchestva v nestatsionarnom poluogranichennom gazopodobnom oblake [Obtaining and study of the formula of the flux density of substances in non-stationary bounded gas cloud] // Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-Matematika. 2015. no. 2. pp. 107–119.
7. Golov A.N., Kukharenko A.P. Kinetika evolyutsii poluogranichennogo gazopodobnogo oblaka [The kinetics of the evolution of semi-infinite gas cloud] // Estestvennye i tekhnicheskie nauki. 2015. no. 11. pp. 60–70.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Зудина Марина Николаевна – аспирант, Московский государственный областной университет;
e-mail: marishkazudina@yandex.ru

Кухаренко Александра Петровна – аспирант, Московский государственный областной университет;
e-mail: a.renard04@yandex.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Zudina Marina Nikolaevna – postgraduate student, Moscow State Regional University;
e-mail: marishkazudina@yandex.ru

Kukharensko Aleksandra Petrovna – postgraduate student, Moscow State Regional University;
e-mail: a.renard04@yandex.ru

БИБЛИОГРАФИЧЕСКАЯ ССЫЛКА

Зудина М.Н., Кухаренко А.П. Вихревые движения в полугораниченном газоподобном нестационарном облаке // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2016. № 3. С. 111–119.
DOI: 10.18384/2310-7251-2016-3-111-119.

BIBLIOGRAPHIC REFERENCE

M. Zudina, A. Kukharensko Vortex motions in a nonstationary semi-infinite gas-liked cloud // Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics. 2016. no. 3. pp. 111–119.
DOI: 10.18384/2310-7251-2016-3-111-119.

РАЗДЕЛ III.

ТЕОРИЯ И МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ И ВОСПИТАНИЯ

УДК 517

DOI: 10.18384/2310-7251-2016-3-120-132

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЭЛЕКТРОННЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПАКЕТОВ ПРИ ОБУЧЕНИИ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Власова Е.А., Попов В.С., Пугачев О.В.

*Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана
105005, Москва, ул. 2-я Бауманская, 5, Российская Федерация*

Аннотация. Авторы делятся опытом использования возможностей интерактивных компьютерных систем MathCAD и MatLab при решении математических задач в процессе обучения будущих инженеров. Авторы утверждают, что применение математических пакетов в обучении существенно активизирует освоение математических понятий, теорем и методов решения задач, а также способствует дальнейшему их применению для выполнения инженерных и научных расчётов.

Ключевые слова. MathCAD, MatLab, модульно-рейтинговая система, операционная среда, методы вычислений.

THE USE OF ELECTRONIC MATHEMATICAL SOFTWARE IN TEACHING MATHEMATICS

E. Vlasova, V. Popov, O. Pugachev

*Bauman Moscow State Technical University,
2-ya Baumanskaya ul. 5, 105005 Moscow, Russia*

Abstract. We share our experience in the use of interactive computer MathCAD and MatLab systems in solving mathematical problems in the training process of future engineers. The application of mathematical packages in education significantly stimulates the development of mathematical concepts, theorems and methods for solving problems, and also contributes to their further application to perform engineering and scientific calculations

Keywords: MathCAD, MatLab, module-rating system, operating environment, methods of computation.

Целью данной работы является описание опыта применения в учебном процессе интерактивных компьютерных систем MathCAD и MatLab в рамках дисциплин математического образования.

На факультете фундаментальных наук МГТУ им. Н.Э. Баумана проводится экспериментальная работа по использованию возможностей математических пакетов (МП) при решении математических задач в процессе обучения будущих инженеров. Посредством систематического решения задач в значительной степени решаются важные дидактические задачи при обучении математике – овладение студентами глубокими и прочными знаниями, формирование у них сознательных и прочных умений и навыков, развитие продуктивного, эвристического, творческого мышления. Использование МП существенно активизирует освоение математических понятий, теорем и методов решения задач, а также способствует дальнейшему применению МП для выполнения инженерных и научных расчётов. В совокупности с модульно-рейтинговой системой организации учебного процесса использование МП эффективно способствует развитию мотивационных стимулов обучения студентов [1–3].

Надо отметить, что с точки зрения использования в обучении математики, наиболее перспективными в настоящий момент мы считаем интенсивно развивающиеся системы MathCAD и MatLab, обладающие следующими преимуществами:

- содержат встроенную матричную и комплексную арифметику;
- поддерживают выполнение операций с векторами, матрицами и массивами данных, реализуют спектральное и сингулярное разложения, расчёт ранга матриц, поддерживают работу с алгебраическими полиномами, решение нелинейных уравнений и задач оптимизации, интегрирование функций в квадратурах, численное интегрирование дифференциальных и разностных уравнений, построение разнообразных видов графиков функций, трехмерных поверхностей и линий уровня;
- используют общепринятый способ изображения математических объектов и удобную операционную среду, которая позволяет формулировать проблемы и получать решения в обычной математической форме, не прибегая к рутинному программированию;
- позволяют решать многие вычислительные задачи с высокой точностью и за значительно меньшее время, чем то, которое необходимо для написания соответствующих программ на языках программирования;
- отличаются «открытостью», то есть легкостью их модификаций и адаптации к конкретным задачам пользователя; пользователь может ввести в систему любую новую команду, оператор или функцию и пользоваться потом ими так же просто, как и встроенными операторами и функциями.
- имеют собственные весьма простые пользовательские языки программирования, близкие к языку BASIC, посильному любому начинающему;
- дают возможность редактировать программы при помощи любого текстового редактора, в том числе Word;
- обладают широкими возможностями создания разнообразных плоских и пространственных графиков с их последующим форматированием и просмотром, а также получения в одной графической области комбинации нескольких кривых или поверхностей разного типа с быстрым построением трёхмерных графиков.

Так, работа в среде MatLab может осуществляться в двух режимах:

- 1) в режиме калькулятора, когда вычисления осуществляются сразу после набора очередного оператора или команды MatLab;

2) путём вызова имени программы, написанной на языке MatLab, предварительно составленной и записанной на диске, которая содержит все необходимые команды, обеспечивающие ввод данных, организацию вычислений и вывод результатов на экран (программный режим).

В обоих режимах пользователю доступны практически все вычислительные возможности системы, в том числе по выводу информации в графической форме.

Возможности такой системы огромны, а по скорости выполнения задач она опережает многие другие подобные системы. Все эти особенности делают систему MatLab весьма привлекательной для использования в учебном процессе высших учебных заведений.

На начальном этапе эксперимента стояли вопросы, связанные с методологией использования математических пакетов в учебном процессе: излагать или не излагать на лекциях принципы работы МП; как должно проходить ознакомление и приобретение навыков работы с МП (в частности, с MatLab); как, где и при решении каких математических задач надо оправданно использовать возможности МП; какие цели должны быть достигнуты при разумной интеграции традиционных учебных занятий и занятий с использованием современных компьютерных средств.

Ещё одна проблема, которую нужно было решать, состояла в том, что многие преподаватели, включая даже тех, кто был знаком с МП, использовали их в своих узких сиюминутных целях, далёких от учебного процесса, не знали всех возможностей математических пакетов. В этих условиях пришлось обратиться за помощью в представительство разработчиков MatLab и организовать для преподавателей курсы по освоению возможностей этой системы. Такие занятия, несомненно, принесли огромную пользу не только в изучении тонкостей системы MatLab, но и помогли обрисовать сферы применимости её в учебном процессе.

Стало понятным, что для того, чтобы сохранить уровень знаний студентов, который мы имеем на сегодняшний день, нужно постепенно внедрять в учебный процесс новые методы преподавания, включающие использование современных компьютерных средств. Если форсировать процесс широкого применения МП в учебном процессе, то можно скатиться к обучению тупому нажиманию на

кнопки, после которого интеграл в голове студента, кроме как ассоциации с крючком, ничего не вызовет.

В связи с этим было решено:

1. На лекциях по курсам математики принципы работы математических пакетов не излагать, но изыскать возможность включить в лекции темы: численные методы решения нелинейных уравнений, аппроксимация функций, СЛАУ, численное интегрирование, численное решение дифференциальных уравнений.
2. Разработать краткие инструкции по использованию математических пакетов, дать ссылки на интернет-ресурсы, обучающие программы и т.д.
3. Решать проблемы с техническими средствами обучения – увеличить количество персональных компьютеров, переоборудовать аудитории под возможность использовать ПЭВМ в учебном процессе.
4. Ознакомление студентов с математическими пакетами, их возможностями и принципами работы с ними должно проходить на специальных тематических факультативных лекциях-семинарах и закрепляться в ходе их самостоятельной работы при консультативной поддержке со стороны преподавателей.
5. По теме каждого занятия часть задач необходимо решать в среде MathCAD или MatLab.
6. Выполнение домашних заданий (типовых и текущих) предполагает применение МП.

Решение математических задач с использованием MathCAD и MatLab позволяет проанализировать возможность либо точного решения задачи, либо применение численного метода на основе оценки степени сложности такого решения. При возможности точного решения задачи системы имеют средства её решения, а при решении задачи только численным методом системы допускают как прямые, так и итерационные методы вычислений.

При использовании МП открылась возможность уделять больше времени методологии решения математической задачи (обсуждать условия задачи, возможные методы её решения, полученные результаты), переложив выполнение рутинных операций на вычислительную среду.

Применение МП позволило создавать для некоторых типов задач шаблоны решения, позволяющие изменяя исходные данные задачи, получать полное

решение с изменением промежуточных и конечных результатов в виде аналитических зависимостей или графических изображений.

Есть интересные задачи, включающие иллюстрацию теоретического материала (техника « $\varepsilon - \delta$ », геометрический смысл теоремы Лагранжа, теоремы о среднем и т.д.) [4].

В качестве иллюстрации применения МП в учебном процессе рассмотрим выполнение типового домашнего задания по исследованию функций и решение прикладных задач на экстремум.

Исследование функций и построение графиков

Рассмотрим типовое домашнее задание по исследованию функций.

Постановка задачи: дана функция $f(x)$, нужно найти её область определения, область значений, интервалы постоянного знака и нули, асимптоты, промежутки монотонности и точки экстремума, промежутки выпуклости и точки перегиба.

Все эти пункты удобно выполняются при помощи MathCAD. В случае трансцендентных уравнений, когда корень не удастся найти аналитически, MathCAD позволяет найти его с высокой точностью.

Пример. Исследовать функцию и построить график

$$y = f(x) = \frac{x(x - 3\operatorname{arctg} x)}{x - 2}$$

Область определения $D(f) = \mathbf{R} \setminus \{2\}$. Сначала построим график $y = f(x)$. В меню axes (оси) выберем crossed («крестовина») и grid lines (координатная сетка). Рамки графика удобно задавать двумя параметрами a и b : $-a < x < a$, $-b < y < b$ (рис.1). График помогает найти нули функции $f(x)$ и интервалы постоянного знака. К сожалению, команда solve, имеющаяся в MathCAD, не всегда даёт правильный ответ. Например, для рассматриваемой функции solve нашла только точку $x_2 = 0$, хотя, как видно по графику, есть еще две точки $x_1 \approx -4$ и $x_3 \approx 4$. Чтобы найти значения x_1 и x_3 с интересующей нас точностью, нужно рассмотреть поведение функции $f(x)$ в их окрестностях.

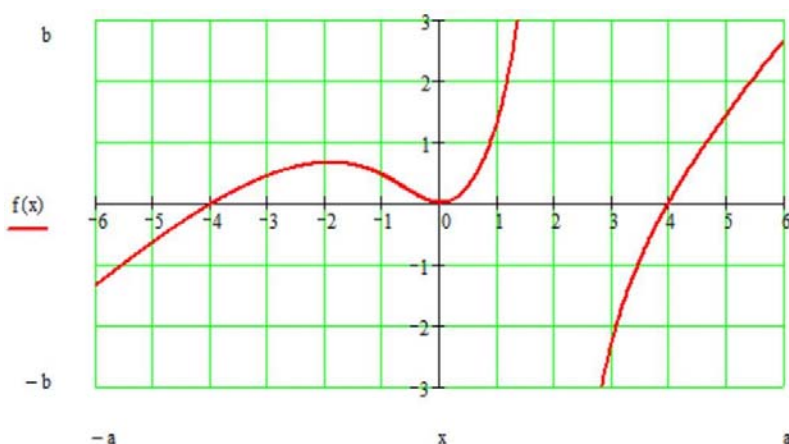


Рис. 1

При этом, чтобы чётче видеть точку пересечения графика с осью Ox , деформируем график по вертикали, заменив значение $y = f(x)$ на его кубический корень, тогда пересечение кривой с осью Ox будет перпендикулярным (рис. 2).

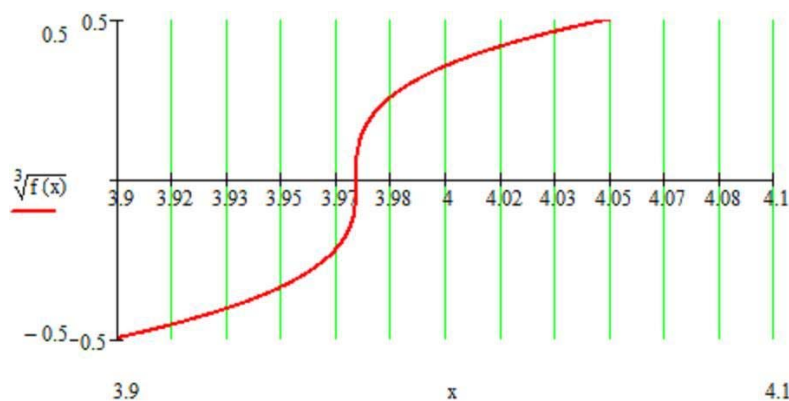


Рис. 2

Получаем $x_1 \approx -3,974$, $x_3 \approx 3,974$. Интервалы постоянного знака: $f(x) > 0$ на $(x_1; 0)$, $(0; 2)$ и $(x_3; +\infty)$; $f(x) < 0$ на $(-\infty; x_1)$ и $(2; x_3)$.

Очевидно, вертикальная асимптота – прямая $x = 2$. Найдем уравнения горизонтальных и/или наклонных асимптот $y = k_1x + b_1y$:

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1; \quad b_{1,2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = 2 \mp \frac{3\pi}{2};$$

Построим график $y = f(x)$ вместе с асимптотами (рис. 3) в более мелком масштабе.

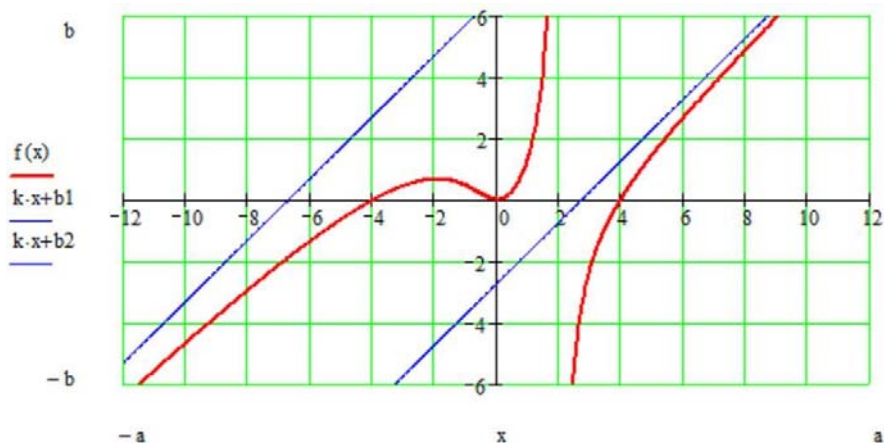


Рис. 3

Далее исследуем функцию с помощью производных.

$$v(x) := \frac{d}{dx} f(x) = \frac{x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 2x + 6\arctg(x)(x^2 + 1)}{(x - 2)^2(x^2 + 1)}$$

Построим график производной (рис. 4).

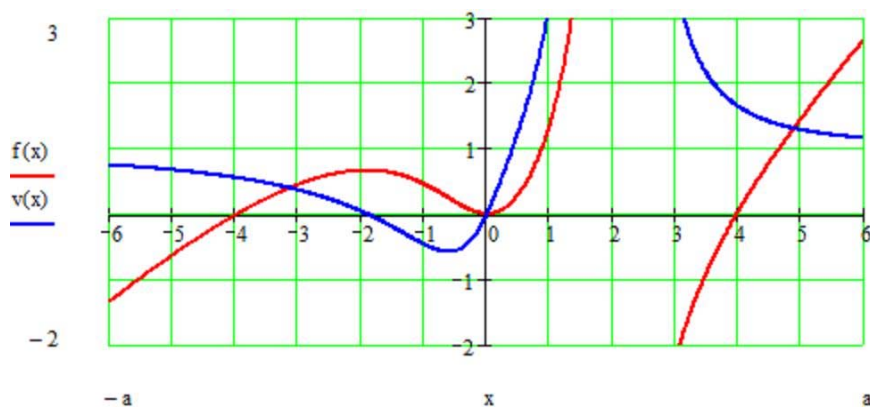


Рис. 4

Производная обращается в нуль при $x = 0$ и при $x = x'_1 \approx -2$. Найдём x'_1 таким же способом, как нули самой функции $f(x)$ (рис. 5). Получаем $x'_1 \approx -1,919$. Как видно по графику, x'_1 – точка максимума, 0 – точка минимума.

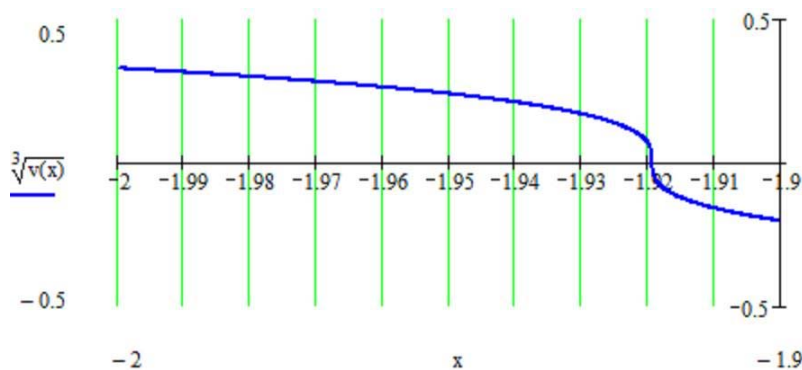


Рис. 5

Промежутки монотонности: $f(x)$ возрастает на промежутках $(-\infty; x'_1)$, $[0; 2)$ и $(2; +\infty)$; убывает на $[x'_1; 0]$. Теперь найдем вторую производную:

$$w(x) := \frac{d^2}{dx^2} f(x) = 2 \cdot \frac{7x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 6x - 8 + 6\arctg(x)(x^2 + 1)^2}{(x - 2)^3(x^2 + 1)^2}.$$

На рис. 6 показано, как находится точка перегиба $x''_1 \approx -0,615$.

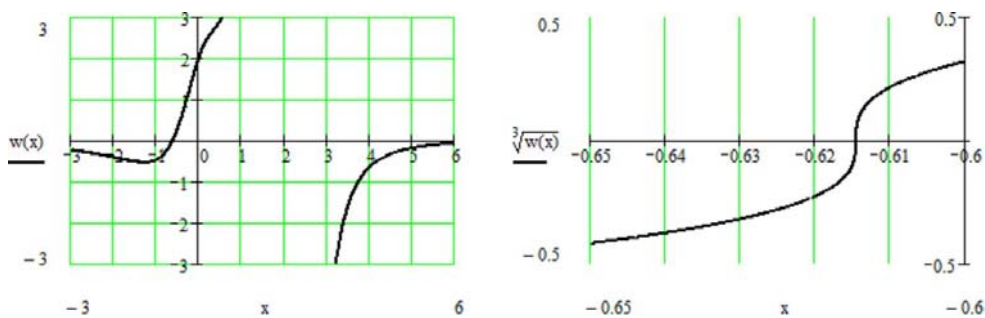


Рис.6

Функция выпукла вниз на промежутке $[x''_1; 2)$ и выпукла вверх на $(-\infty; x''_1)$ и $(2; +\infty)$.

Прикладные задачи на экстремум

Решение прикладной задачи на экстремум (геометрической, физической, экономической и т.п.) состоит из следующих этапов:

1. Выбор параметра x , который нужно будет оптимизировать (если этот параметр не указан в задаче явно).
2. Нахождение промежутка D допустимых значений параметра x .
3. Определение целевой функции $f(x)$.
4. Нахождение максимума или минимума $f(x)$ на D .

Как правило, функция f непрерывна. Если D – отрезок, то на нем обязательно f достигает минимума и максимума. Если D – интервал, то для удобства к нему добавляют концы, чтобы иметь дело с отрезком.

Применить MathCAD можно только на 4-м этапе решения, тогда как первые три этапа требуют творческого подхода, и здесь уместно вспомнить слова П.Л. Чебышёва: «правильно поставить задачу – значит наполовину её решить».

Пример. В полушар радиуса 1 вписать усечённый конус максимального объёма (рис. 7).

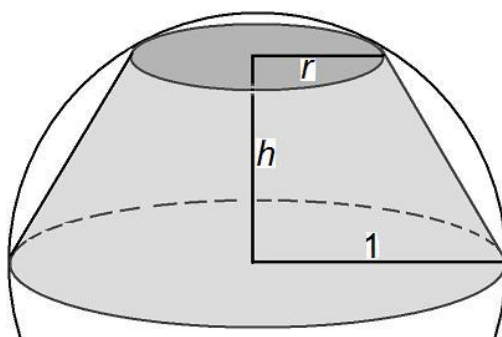


Рис. 7

В качестве параметра x можно взять либо высоту усеченного конуса h ($0 < h < 1$), либо радиус верхнего основания r ($0 < r < 1$). Выберем второй вариант:

$$r = x; \quad h = \sqrt{1 - x^2}; \quad V(x) = \frac{\pi(1^2 + 1 \cdot r + r^2)h}{3} = \frac{\pi}{3}(1 + x + x^2)\sqrt{1 - x^2}.$$

К интервалу допустимых значений $0 < x < 1$ добавим концы: $x = 0$ (конус не усеченный) и $x = 1$ (усеченный конус выродился в круг). Построим график зависимости объёма от x и его производной (рис. 8)

$$W(x) = V'(x) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{1 + x - 2x^2 - 3x^3}{\sqrt{1 - x^2}}$$

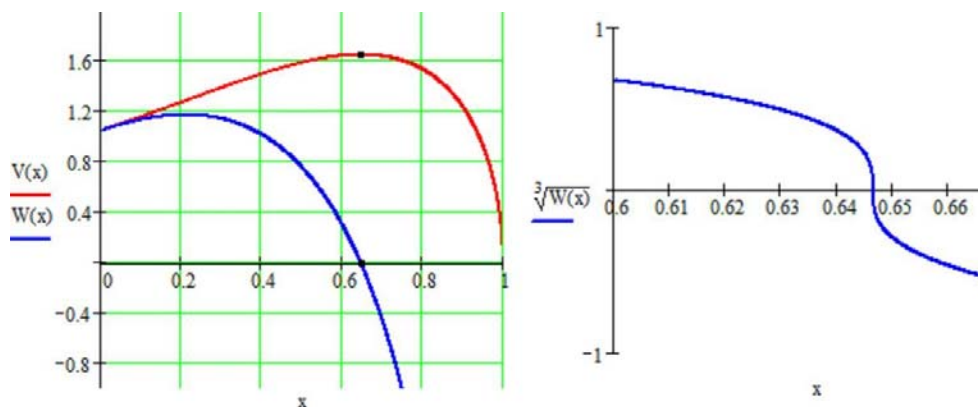


Рис.8

По графику мы видим, что точка максимума расположена между $x = 0,6$ и $x = 0,7$. Увеличив фрагмент графика, находим с точностью 0,001 значение $x_1 \approx 0,646$. Максимальный объём усеченного конуса:

$$V_{max} = V(x_1) \approx 1,649.$$

Поскольку функция $V(x)$ дважды дифференцируема, погрешность V_{max} имеет 2-й порядок малости по сравнению с погрешностью x_1 .

Подводя итог, заметим, что использование математических пакетов при решении математических задач приводит к их непрерывному применению в обучении математики. Целесообразно проводить часть практических занятий по математике в форме вычислительного практикума или лабораторных работ, что позволяет научить студентов самостоятельно решать математические задачи с помощью МП.

ЛИТЕРАТУРА

1. Власова Е.А., Грибов А.Ф., Попов В.С., Латышев А.В. Принципы модульно-рейтинговой системы преподавания высшей математики // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2013. №3. С. 93–99.
2. Власова Е.А., Грибов А.Ф., Попов В.С., Латышев А.В. Развитие мотивационных стимулов обучения в рамках модульно-рейтинговой системы организации учебного

- процесса // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2014. №1. С. 48–53.
3. Власова Е.А., Попов В.С., Латышев А.В. Методические аспекты обеспечения дисциплины «Линейная алгебра» в техническом университете // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2015. №3. С. 69–85.
4. Лукашенко А.Г. Опыт использования системы MathCAD 11 при обучении высшей математике // Математика в высшем образовании. 2005. № 3. С. 53–64.

REFERENCES

1. Vlasova E.A., Gribov A.F., Popov V.S., Latyshev A.V. Printsipy modul'no-reitingovoi sistemy prepodavaniya vysshei matematiki [Principles of module-rating system of teaching mathematics] // Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya Fizika-matematika. 2013. no. 3. pp. 93–99.
2. Vlasova E.A., Gribov A.F., Popov V.S., Latyshev A.V. Razvitie motivatsionnykh stimulov obucheniya v ramkakh modul'no-reitingovoi sistemy organizatsii uchebnogo protsessa [The development of motivational incentives for learning within module-rating system of organization of educational process] // Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika. 2014. no. 1. pp. 48–53.
3. Vlasova E.A., Popov V.S., Latyshev A.V. Metodicheskie aspekty obespecheniya distsipliny «Lineinaya algebra» v tekhnicheskoy universitete [Methodological aspects of the discipline "Linear algebra" at the technical University] // Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika. 2015. no. 3. pp. 69–85.
4. Lukashenko A.G. Opyt ispol'zovaniya sistemy MathCAD 11 pri obuchenii vysshei matematike [Experience in the use of MathCAD 11 in teaching higher mathematics] // Matematika v vysshem obrazovanii. 2005. no. 3. pp. 53–64.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Власова Елена Александровна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана;
e-mail: elena.a.vlasova@yandex.ru;

Попов Владимир Семенович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана;
e-mail: vsopov@bk.ru;

Пугачев Олег Всеволодович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана
e-mail: opugachev@yandex.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Dr. Vlasova Elena – candidate of physical and mathematical sciences, assistant professor of the Applied Mathematics Department, Bauman Moscow State Technical University;
e-mail: elena.a.vlasova@yandex.ru;

Dr. Popov Vladimir – candidate of physical and mathematical sciences, assistant professor of the Applied Mathematics Department, Bauman Moscow State Technical University;
e-mail: vspopov@bk.ru;

Prof. Pugachev Oleg – doctor of physical and mathematical sciences, professor of the Applied Mathematics Department, Bauman Moscow State Technical University;
e-mail: opugachev@yandex.ru

БИБЛИОГРАФИЧЕСКАЯ ССЫЛКА

Власова Е.А., Попов В.С., Пугачев О.В. Использование электронных математических пакетов при обучении высшей математике // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2016. № 3. С. 120–132.
DOI: 10.18384/2310-7251-2016-3-120-132.

BIBLIOGRAPHIC REFERENCE

E. Vlasova, V. Popov, O. Pugachev The use of electronic mathematical software in teaching mathematics // Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics. 2016. no. 3. pp. 120–132.
DOI: 10.18384/2310-7251-2016-3-120-132.

$D_1, \dots, D_i, \dots, D_n$, где матрица D_i получена из матрицы A путём замены i -го столбца на столбец B . При $i = 1$ и $i = n$ эти матрицы имеют вид $D_1 = (B, A_2, \dots, A_n)$, $D_n = (A_1, \dots, A_{n-1}, B)$. В случае $n > 2$ остальные $n - 2$ матрицы имеют вид $D_i = (A_1, \dots, A_{i-1}, B, A_{i+1}, \dots, A_n)$, где $1 < i < n$. Пусть $\Delta = \det A$ – определитель матрицы A . Если $\Delta \neq 0$, то система уравнений (1) имеет единственное решение и неизвестные x_i могут быть вычислены по формулам Крамера [1] $x_i = \Delta_i / \Delta$, где $\Delta_i = \det D_i$. Если вычисления проводить с использованием программы Excel, то объём работы по формированию матриц $D_1, \dots, D_i, \dots, D_n$ и вычислению их определителей быстро растёт с ростом n , следовательно, нужна более простая вычислительная схема для реализации правила Крамера.

2. Вычислительная схема для реализации правила Крамера

Рассмотрим матрицу $C = (A_1, \dots, A_n, B, A_1, \dots, A_n)$ с размерами $n \times (2n + 1)$. Определим n квадратных матриц $C_1, \dots, C_i, \dots, C_n$, где матрица C_i состоит из первых n столбцов матрицы, полученной из матрицы C путём вычеркивания первых i её столбцов. При $i = 1$ и $i = n$ эти матрицы имеют вид $C_1 = (A_2, \dots, A_n, B)$, $C_n = (B, A_1, \dots, A_{n-1})$. В случае $n > 2$ остальные $n - 2$ матрицы имеют вид $C_i = (A_{i+1}, \dots, A_n, B, A_1, \dots, A_{i-1})$, где $1 < i < n$. Пусть $\Delta'_i = \det C_i$. Покажем, что $\Delta_i = (-1)^{ni+1} \Delta'_i$. Пусть $1 < i < n$. Матрицу $D_i = (A_1, \dots, A_{i-1}, B, A_{i+1}, \dots, A_n)$ можно получить из матрицы $C_i = (A_{i+1}, \dots, A_n, B, A_1, \dots, A_{i-1})$, используя перестановки двух соседних столбцов. Для этого, используя $n - i$ перестановок соседних столбцов матрицы C_i , выведем столбец B в позицию первого столбца. В результате получим матрицу $(B, A_{i+1}, \dots, A_n, A_1, \dots, A_{i-1})$. Аналогично, в позицию первого столбца последовательно выведем $i - 1$ столбцов $A_{i-1}, \dots, A_1$, используя для этого каждый раз $n - 1$ перестановок. Таким образом, после выполнения $n - i + (i - 1)(n - 1) = ni + 1 - 2i$ перестановок соседних столбцов получим матрицу $D_i = (A_1, \dots, A_{i-1}, B, A_{i+1}, \dots, A_n)$. Так как при перестановке двух столбцов определитель меняет знак [1], то $\Delta_i = (-1)^{ni+1-2i} \Delta'_i$ при $1 < i < n$. При $i = 1$ и $i = n$ матрицу D_i можно получить из матрицы C_i путём $n - 1$ перестановок двух соседних столбцов, т.е. $\Delta_i = (-1)^{n-1} \Delta'_i$ при $i = 1$ и $i = n$. Так как при $i = 1$

$(-1)^{ni+1-2i} = (-1)^{n-1}$ и при $i = n$ $(-1)^{ni+1-2i} = (-1)^{(n-1)^2} = (-1)^{n-1}$, то $\Delta_i = (-1)^{ni+1-2i} \Delta'_i = (-1)^{ni+1} (-1)^{-2i} \Delta'_i = (-1)^{ni+1} \Delta'_i$ при $1 \leq i \leq n$.

Перейдем к описанию вычислительной схемы в программе Excel, основанной на формуле $\Delta_i = (-1)^{ni+1} \Delta'_i$. Так как $x_i = \Delta_i / \Delta$, а $\Delta_i = (-1)^{ni+1} \Delta'_i$, то $x_i = (-1)^{ni+1} \Delta'_i / \Delta$. В первой строке свободного листа, начиная со второй ячейки, отведем блок из n ячеек для номеров неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_n$. Эти ячейки легко заполнить с помощью функции «Автозаполнение». В первую ячейку первой строки введем символ Δ . Во второй строке, начиная с первой ячейки, отведем блок из $n + 1$ ячеек для определителя системы Δ и для искомых значений неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_n$:

Таблица 1

	A	B	C	...	N'
1	Δ	1	2	...	n
2					

Пусть, для определённости, значение n расположено в ячейке N'1. После всех вычислений в ячейке A2 будет значение определителя системы Δ , а в ячейках B2, C2, ..., N'2 - искомые значения неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_n$. На этом же рабочем листе, ниже второй строки, отведем блок ячеек с размерами $n \times (n + 1)$ для матрицы $(A_1, \dots, A_n, B)$. Если ввести в эти ячейки исходные данные $(A_1, \dots, A_n, B)$, а затем копию матрицы $A = (A_1, \dots, A_i, \dots, A_n)$ расположить справа от столбца B в тех же строках, то получим матрицу $C = (A_1, \dots, A_n, B, A_1, \dots, A_n)$. Поставим курсор в ячейку A2 и введём в эту ячейку функцию МОПРЕД, вычисляющую определитель системы Δ . Для этого нажмем кнопку «Вставка функции» (f_x). В появившемся диалоговом окне «Мастер функций» в рабочем поле «Категория» выберем «Математические», а в рабочем поле «Функция» – имя функции МОПРЕД. После этого нажмем кнопку ОК. В появившемся диалоговом окне МОПРЕД в рабочее поле «Массив» введем диапазон матрицы $A = (A_1, \dots, A_i, \dots, A_n)$ и нажмем кнопку ОК. В результате в ячейке A2 появится значение определителя Δ . Если $\Delta \neq 0$, то правило Крамера применимо. Пусть $\Delta \neq 0$. Формулу, введенную в ячейку A2, скопируем в ячейку B2. В ячейке B2 появится значение $\Delta'_1 = \det C_1$. Поставим курсор в ячейку B2 и в строке формул перед функцией МОПРЕД поставим дополнительный

множитель $(-1)^{(\$N'\$1*B1+1)/\$A\$2}$. Заметим, что в формуле используются абсолютные адреса ячеек, в которых находятся значения Δ и n , т.е. адреса $\$A\2 и $\$N'\1 , а перед дополнительным множителем и исходной функцией МОПРЕД ставится знак умножения «*». После нажатия кнопки ОК в ячейке B2 получим значение x_1 . Формулу, введенную в ячейку B2, скопируем в остальные ячейки C2, ..., N'2. В результате в ячейках второй строки под номерами 1,2,...,n получим значения неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_n$, так как $x_i = (-1)^{ni+1}\Delta'_i/\Delta$. Ответ легко проверить, используя функцию СУММПРОИЗВ.

3. Пример применения описанной выше вычислительной схемы

Рассмотрим решение системы уравнений

$$\begin{cases} 5x_1 - 6x_2 + 10x_3 - 7x_4 - 2x_5 = 12, \\ -3x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 4, \\ -2x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 5x_4 - 3x_5 = 9, \\ 6x_1 - 8x_2 + 7x_3 - 4x_4 - x_5 = -2, \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 + 5x_5 = -15. \end{cases}$$

На свободном листе в ячейку A1 введем символ Δ , а в ячейки B1, C1, D1, E1, F1 введем номера неизвестных x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 . Ячейку A2 отведём для значения определителя системы Δ , а ячейки B2, C2, D2, E2, F2 – для значений неизвестных x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 :

Таблица 2.

	A	B	C	D	E	F
1	Δ	1	2	3	4	5
2						

На этом же рабочем листе, в блок ячеек B4:F8 введем матрицу A , а в блок ячеек G4:G8 – вектор-столбец B . Скопируем блок ячеек B4:F8 и расположим эту копию справа от столбца B в блоке ячеек H4:L8:

Поставим курсор в ячейку A2 и введем в эту ячейку функцию МОПРЕД, вычисляющую определитель матрицы системы Δ ($f_x \rightarrow$ категория «Математические» $\rightarrow$ функция «МОПРЕД» $\rightarrow$ массив B4:F8 $\rightarrow$ ОК). В ячейке A2 получим значение $\Delta = -43$. Формулу МОПРЕД (B4:F8), введенную в ячейку A2, скопируем в ячейку B2. Поставим курсор в ячейке B2 и в строке формул перед

формулой для ячейки B2 поставим множитель $(-1)^{(\$F\$1*B1+1)/\$A\$2}$. В результате для ячейки B2 получим окончательную формулу:

$$(-1)^{(\$F\$1*B1+1)/\$A\$2} \cdot \text{МОПРЕД}(C4:G8).$$

После нажатия кнопки ОК в ячейке B2 появится значение $x_1 = 314,047$. Формулу, введенную в ячейку B2, скопируем в остальные ячейки C2, D2, E2, F2. В результате в этих ячейках появятся значения остальных неизвестных: $x_2 = 192,907$, $x_3 = -83$, $x_4 = -46,744$, $x_5 = -51$. Ответ проверяем с помощью функции СУММПРОИЗВ.

Таблица 3.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Δ	1	2	3	4	5						
2												
3												
4		5	-6	10	-7	-2	12	5	-6	10	-7	-2
5		-3	4	-2	2	-2	4	-3	4	-2	2	-2
6		-2	2	-4	5	-3	9	-2	2	-4	5	-3
7		6	-8	7	-4	-1	-2	6	-8	7	-4	-1
8		2	1	7	0	5	-15	2	1	7	0	5

4. Заключение

В стандартной схеме решения системы n линейных уравнений с n неизвестными, основанной на вычислении определителей $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$, выполняется n копирований матрицы n -го порядка. Приведенная нами вычислительная схема показывает, что эту задачу можно решить, используя только одно копирование этой матрицы. Такая схема полезна и для проведения математического практикума в компьютерных классах по теме «Правило Крамера». В некоторых вузах такой практикум на базе Excel вводится как продолжение стандартного курса высшей математики. Целью такого практикума [2] является не только формирование навыков использования процедур и функций программы Excel, но и изучение эффективных вычислительных схем для решения математических задач, требующих большой объём вычислений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1965. 431 с.
2. Практикум по высшей математике для студентов экономических специальностей: методические указания к самостоятельной работе студентов под ред. Сагитова Р.В. / РЭА им. Г.В. Плеханова. М.: Издательство «Менеджер». 2008. 207 с.

REFERENCES

1. Kurosh A.G. Kurs vysshei algebry [Course of higher algebra]. M., Nauka, 1965. 431 p.
2. Praktikum po vysshei matematike dlya studentov ekonomicheskikh spetsial'nostei: metodicheskie ukazaniya k samostoyatel'noi rabote studentov pod red. Sagitova R.V. / REA im. G.V. Plekhanova [Workshop on higher mathematics for students of economic specialties: methodical instructions for independent work of students ed. by R. V. Sagitov / REA n.a. G. V. Plekhanov]. M., Izdatel'stvo «Menedzher», 2008. 207 p.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Хасанов Анис Салыхович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики ФГБОУ ВО «Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова»;
e-mail: ankhasanov@yandex.ru.

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Khasanov Anis Salyakhovich – doctor of physical and mathematical sciences, professor of Higher Mathematics Department, Plekhanov Russian University of Economics;
e-mail: ankhasanov@yandex.ru.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКАЯ ССЫЛКА

Хасанов А.С. Об одной реализации правила Крамера на базе Excel // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2016. № 3. С. 133-138.
DOI: 10.18384/2310-7251-2016-3-133-138.

BIBLIOGRAPHIC REFERENCE

A. Khasanov An Excel-based realization of Cramer's rool // Bulletein of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics. 2016. no. 3. pp. 133-138.
DOI: 10.18384/2310-7251-2016-3-133-138.

УДК37.016:53

DOI: 10.18384/2310-7251-2016-3-139-152

ИЗУЧЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКОГО МЕТОДА В КУРСЕ ФИЗИКИ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

Синявина А.А.¹, Озерова Е.Н.²

¹*Московский государственный областной университет
105005, Москва, ул. Радио, д. 10а, Российская Федерация*

²*МОУ «Онуфриевская СОШ»*

143573, Московская область, Истринский район, село Онуфриево, ул. Центральная, д.4

Аннотация. В статье проанализированы некоторые исторические аспекты возникновения статистического метода на примере научных трудов известных учёных-физиков. Отражены этапы ознакомления со статистическим методом при изучении различных разделов курса физики основной и профильной школы, а также его значение в формировании вероятностного стиля мышления обучающихся. Показана последовательность изучения статистического метода с использованием приёмов, характерных для него, и теоретической схемы, включающей факты, модель, понятия, закономерности, практические применения, идеи естественнонаучной картины мира. Приведены примеры способов деятельности обучающихся на уровне учебных действий как средства достижения результатов освоения статистического метода в курсе физики средней школы.

Ключевые понятия. случайное событие, вероятность, микросостояние, макросостояние, закон статистического распределения, способы деятельности, учебные действия.

THE STUDY OF STATISTICAL METHODS IN PHYSICS COURSES AT SECONDARY SCHOOL

A. Sinyavina¹, E. Ozerova²

¹*Moscow State Regional University,
ul. Radio 10a, 105005 Moscow, Russia*

²*Municipal educational institution "Onufrievskaya Secondary School",
ul. Tsentral'naya 4, 143753 Onufriev village, Istra municipal district, Moscow region,
Russia*

Abstract. We analyze some historical aspects of the emergence of the statistical method by example of research papers of famous physicists. We consider the stages of familiarization with the statistical method for the study of various topics of physics at general and specialised schools, as well as its importance in the formation of the probabilistic style of thinking of students. We show the sequence of study of the statistical method with the use of characteristic techniques, and a theoretical scheme that includes facts, models, concepts, regularities, practical applications, and ideas of the natural-scientific picture of the world. Examples are presented of students' activities at the level of educational activities as a means of mastering the statistical method in physics at a secondary school.

Keywords: random event, the probability, microstate, macrostate, law of statistical distribution, ways of activity, educational actions.

Федеральные государственные образовательные стандарты основного и среднего (полного) общего образования ориентированы на становление личностных характеристик выпускника, отражающих направленность на образование и самообразование в течение всей своей жизни. Примером таких характеристик являются владение основами научных методов познания окружающего мира, мотивированность на творчество и современную инновационную деятельность. Действительно, любой метод познания является одним из факторов творческой деятельности человека, которая включает в себя и другие факторы, например, глубину воображения исследователя, его способность к интуиции. Поэтому изучение методов познания природы становится актуальной проблемой при изучении курса физики средней школы [5; 6].

В философии метод трактуется как способ деятельности, совокупность приёмов, применяемых исследователем для получения определённого результата. Как определённый вид деятельности метод включает объект, субъект, цель познания, средства познания, условия познания, результат познавательной деятельности. Основательность метода обусловлена глубиной и адекватностью знаний об объекте, так как любое знание выступает, во-первых, как информация об объекте, а, во-вторых, как метод познания. Наиболее глубоким основанием научного метода является теория [1].

Основная функция метода состоит в организации и регулировании процесса познания или практического преобразования объекта исследования. Метод представляет собой систему правил, предписаний, которые служат средствами

дальнейшего познания и изменения действительности, и направлен на выявление способов и механизмов его исследования [2].

С.П. Капица, отмечая вклад американского физика-теоретика Дж. Гиббса в становление и развитие статистического метода, писал: «Метод, развитый Гиббсом в термодинамике, стал основным методом статистической физики, и появление позднее квантовой механики и квантовой статистики сохранило и лишь развило подход, указанный Гиббсом» [3]. Однако сам Дж. Гиббс в предисловии к своей работе «Элементарные принципы статистической механики» утверждает: «Такие исследования Максвелл называл *статистическими*. Они принадлежат к отрасли механики, обязанной своим происхождением стремлению объяснить законы термодинамики, исходя из механических принципов, и основанной главным образом Клаузиусом, Максвеллом и Больцманом. <...> В дальнейшем статистические исследования были распространены на фазы (или состояния по конфигурации и скорости), сменяющие одна другую в данной системе с течением времени. Явное рассмотрение большого числа систем, их распределения по фазам и постоянства или изменения этого распределения с течением времени приведено в статье Больцмана «О связи между теоремой об отношении теплоёмкости многоатомных молекул газа и принципом последнего множителя Якоби» [3].

Современная естественнонаучная картина мира основана на фундаментальном вероятностном принципе обобщения закономерностей.

Статистические законы формулируются на языке вероятностных распределений и проявляются как законы массовых явлений на базе больших чисел. Считается, что их действие обнаруживается там, где на фоне множества случайных причин существуют глубокие необходимые связи. Они не дают абсолютной повторяемости, однако, в общем случае правомерна их оценка как закономерностей постоянных величин [4; 7].

Статистический метод используется при рассмотрении систем, состоящих из большого числа частиц, ансамблей частиц. Статистический ансамбль относится к понятиям статистической физики, изучающей свойства макроскопических систем, состоящих из очень большого числа одинаковых частиц, обладающих определёнными свойствами и взаимодействующих друг с другом. Статистическая физика применяет к решению физических задач методы теории вероятностей.

Новым качественным скачком познавательной деятельности учащихся основной школы является переход от усвоения динамических закономерностей, отражающих причинно-следственные связи механических явлений (законы Ньютона), к особенностям статистических закономерностей. Такими закономерностями, например, являются пропорциональная зависимость между давлением газа и числом молекул в единице объёма, средней кинетической энергии движения молекул; между средней кинетической энергией поступательного хаотического движения молекул газа и абсолютной температурой.

Ознакомление со статистическим методом при изучении курса физики основной школы начинается с изучения броуновского движения, что позволяет ввести представление о беспорядочном (хаотическом) движении молекул вещества. Движение броуновских частиц может быть использовано как модель теплового движения молекул.

На рис. 1 приведены примеры использования статистического метода при изучении основных вопросов молекулярной физики в основной школе.

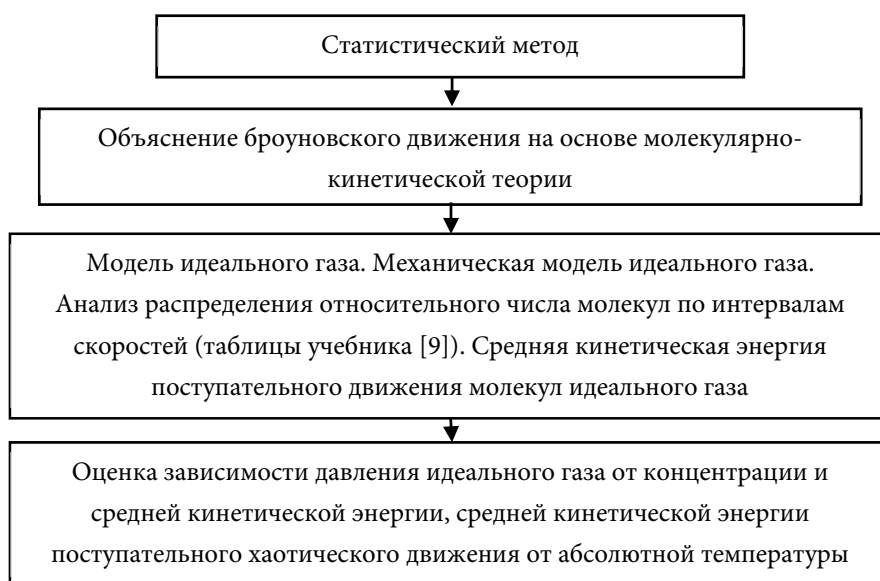


Рис. 1

Одним из важнейших понятий при изучении статистического метода является понятие случайного события. В физике под событием понимают

явление, происходящее в данный момент времени и в данной точке пространства. При этом какое-либо событие может произойти, а может и не произойти по тем или иным причинам. Такие события принято называть случайными. Так, столкновение молекул газа – случайное событие. Появление того или иного события часто бывает непредсказуемо. Направление скоростей молекул газа и их модули можно рассматривать как случайные величины.

Для изучения свойств реального газа в курсе физики используется физическая модель – идеальный газ. Эта модель удовлетворяет определённым условиям, например, предполагается, что расстояния между молекулами много больше их размеров, средняя кинетическая энергия частиц много больше энергии их взаимодействия. В ней направления и значения скоростей молекул имеют случайный непредсказуемый характер. Представление о распределении скоростей теплового движения молекул газа в курсе физики восьмого класса формируются на основе анализа данных таблицы [9], в которой приведены интервалы скоростей и относительное число молекул, движущихся с соответствующими этим интервалам скоростями. Из анализа таблицы следует, что для описания свойств макроскопических тел важно знать не поведение отдельных молекул, а средний результат их совокупного движения. Система из большого числа молекул характеризуется средними величинами: средним квадратом скорости и средней кинетической энергией молекул газа. Физическая величина – давление идеального газа – связана со средней кинетической энергией движения молекул, а абсолютная температура рассматривается как мера средней кинетической энергии молекул. Таким образом, учащиеся при изучении курса физики восьмого класса знакомятся с элементами статистического метода [9; 10].

В курсе физики десятого класса большое внимание уделено изучению методов познания природы, в том числе статистическому методу. Развивая понятие случайного события, рассматривается его характеристика – вероятность случайного события, определяемая как количественная мера возможности его появления. Вероятность случайного события – исходное понятие, поэтому нельзя указать родовое понятие, к которому оно принадлежит, формально-логическое определение дать невозможно. Вероятность относится к общенаучным понятиям.

Различают вероятность термодинамическую и вероятность математическую. Под термодинамической вероятностью понимают число способов, которыми может быть реализовано данное состояние макроскопической системы. Известно, что в термодинамике состояние физической системы характеризуется определёнными значениями величин, например, плотности, давления, температуры, которые определяют её макросостояние. Микросостояние системы зависит от распределения её частиц, например, по объёму. Вероятность термодинамическая определяется числом микросостояний, поэтому она всегда больше или равна единице. Вероятность того, что данный исход произойдёт, на шкале вероятностей лежит между 0 и 1. Если вероятность по шкале ближе к нулю, менее вероятно, что данный исход произойдёт, а если ближе к 1 – более вероятно [8].

Существует несколько подходов к определению вероятности случайного события как количественной меры того, что событие произойдёт или не произойдёт. Наиболее доступным для обучающихся является частотное определение, применимое для равновесных систем. При этом рассматривается идеальный газ, заключённый в некотором сосуде объёмом V . Допускается, что можно отследить перемещение одной молекулы газа. Определяется вероятность появления молекулы в некотором малом объёме ΔV , являющемся частью объёма V , как их отношение. Затем понятие вероятности используется для характеристики распределения частиц газа по объёму сосуда. Для этого проводится серия мысленных экспериментов по распределению молекул идеального газа в двух равных частях сосуда. Сначала предполагается, что в сосуде находится одна частица, затем – две, четыре. Изучение способов размещения молекул идеального газа между двумя частями сосуда позволяет сделать два ключевых вывода: 1) каждое макросостояние системы может быть реализовано определённым числом различных микросостояний; 2) равномерное распределение молекул газа в сосуде является наиболее вероятным состоянием. В качестве примера предлагается таблица, в которой приведены интервалы скоростей молекул кислорода и вероятность микросостояний молекул кислорода, имеющих скорости в данных интервалах [8]. Анализируется распределение молекул кислорода по скоростям с помощью графиков зависимостей вероятности того, что число молекул кислорода находится в данном интервале, от интервалов скоростей. Это позволяет сделать вывод, что

распределение молекул газа по скоростям зависит от температуры. При повышении температуры кривая смещается в область больших значений скоростей.

Наглядно статистическую закономерность распределения молекул можно проиллюстрировать с помощью механической модели – доски Гальтона. Если всыпать в воронку дробинку и предоставить ей возможность падать в отсеки сквозь заслон гвоздей, то она будет испытывать множество столкновений с гвоздями и, в конце концов, попадёт в одну из ячеек. Предсказать, в какую ячейку попадёт частица, невозможно из-за множества случайных факторов, влияющих на её движение. Можно лишь утверждать, что попадание частицы в центральные ячейки более вероятно, чем в крайние. Если насыпать в воронку множество частиц, то оказывается, в центральные ячейки попадает наибольшее число частиц, а в крайние – наименьшее. При очень большом числе частиц, прошедших через воронку, наблюдается статистическая закономерность распределения их по ячейкам. Процесс распределения случайных отклонений координаты дробинки от некоторого среднего значения подчиняется закону распределения.

Изучая основы термодинамики, обучающиеся на примере явления диффузии двух газов знакомятся с необратимыми процессами при переходе термодинамической системы из упорядоченного состояния в неупорядоченное, характеризующееся взаимным проникновением молекул и отсутствием границ между молекулами разных газов. При этом трактуется, что система самостоятельно переходит из менее вероятного состояния в более вероятное состояние. Это позволяет ознакомить обучающихся со вторым законом термодинамики как статистическим законом необратимых процессов. Второй закон термодинамики является фундаментальным законом природы, охватывающим многочисленные явления окружающего мира [11].

Развитие знаний о статистическом методе осуществляется при изучении других разделов курса физики. Так, при изучении понятия электронной проводимости металлов вводится физическая величина – средняя скорость упорядоченного движения электронов под действием электрического поля – скорость дрейфа.

При изучении физики атомного ядра обучающиеся усваивают, что радиоактивный распад является самопроизвольным процессом, который носит

статистический характер. В нём нельзя предсказать, какие именно ядра атомов в радиоактивном образце, состоящем в начальный момент времени из определённого числа радиоактивных атомов, распадутся за указанное время. Любое из ядер с одинаковой вероятностью может распасться в любой момент времени. Физический смысл имеют утверждения о поведении в среднем большой совокупности атомов. Закон радиоактивного распада определяет среднее число атомов, распадающееся за данный интервал времени. Однако всегда имеются неизбежные отклонения от среднего значения.

Если поднести радиоактивный образец с малой активностью к счётчику Гейгера, то звуковые сигналы (щелчки) будут следовать один за другим нерегулярно, хаотически. Это означает, что один из большой совокупности атомов образца самопроизвольно взрывается, выбрасывая быструю частицу. Щелчки, следуя друг за другом беспорядочно, хаотически, на опыте непосредственно подтверждают вероятностный характер распада.

При изучении волновых свойств частиц, анализируя дифракцию фотонов, обучающиеся знакомятся с тем, что при их движении невозможно заранее установить, в какую точку после дифракции на узкой щели попадёт фотон. В этом случае можно лишь говорить о вероятности попадания фотона в окрестность определённой точки. При ознакомлении с двойственной природой света, показано, как с учётом волновых свойств микрочастиц немецкий физик В. Гейзенберг пришёл к выводу о том, что невозможно одновременно с заданной точностью измерить координату частицы и проекцию её импульса на ту же ось. Результат опыта можно предсказать только в вероятностной форме [12].

Вероятностные представления формируются при выполнении лабораторных работ. Каждая лабораторная работа включает формулировку гипотезы исследования, а гипотеза – это всегда вероятностное знание, она может подтвердиться, а может и не подтвердиться. Кроме того, в каждой лабораторной работе, в которой необходимо измерить физическую величину, результат измерения записывается с учётом максимальной абсолютной погрешности, а это означает, что никакое измерение не даёт точного значения измеряемой величины. Оно находится в некотором интервале, границами которого служит эта погрешность [10; 11].

Таким образом, при изучении статистического метода в курсе физики средней школы можно выделить следующую последовательность: факты →

модель → понятия → закономерности → практические применения → идеи естественнонаучной картины мира (рис. 2).



Рис. 2

Федеральные государственные образовательные стандарты включают в себя требования к результатам освоения основных образовательных программ. Так, при изучении молекулярно-кинетической теории идеального газа в курсе физики основной школы обучающиеся освоят следующие элементы статистического метода. Они научатся:

- распознавать и объяснять основные свойства тепловых явлений, например, таких, как диффузия, большая сжимаемость газов, испарение, конденсация, кипение;

- описывать свойства тел и тепловые явления, используя физические величины: температура, среднее значение квадрата скорости молекул идеального газа, средняя кинетическая энергия молекул идеального газа;
- анализировать тепловые явления, используя статистический метод познания природы;
- формулировать основные признаки физических моделей, например, модель теплового движения молекул вещества (броуновское движение), модель идеального газа.

Принимая за основу системно-деятельностный подход, обеспечивающий формирование готовности к саморазвитию, активную познавательную деятельность учащихся, при ознакомлении со статистическим методом в курсе физики основной школы можно выделить следующие способы деятельности на уровне учебных действий [10]:

- ознакомиться со статистическим методом исследования огромной совокупности частиц;
- наблюдать движение броуновских частиц на модели;
- изучать модель идеального газа;
- оценивать средние значения величин, характеризующих тепловое движение молекул;
- анализировать зависимости относительного числа молекул идеального газа от интервала скоростей с помощью таблиц;
- вычислять средний квадрат скорости и среднюю кинетическую энергию поступательного движения молекул одноатомного газа;
- наблюдать зависимость давления идеального газа от концентрации молекул с помощью механической модели;
- объяснять зависимости давления идеального газа от средней кинетической энергии молекул и температуры от средней кинетической энергии молекул идеального газа.

Учитывая преемственность основных образовательных программ основного общего и среднего общего образования по физике и их вариативность [13], развитие знаний о статистическом методе в курсе физики средней школы осуществляется в соответствии с планируемыми результатами. Так, выпускник средней школы научится:

- анализировать модель идеального газа, исходя из термодинамического и статистического методов исследования;
- наблюдать и объяснять на механической модели броуновское движение, зависимость давления газа от концентрации и средней кинетической энергии движения молекул;
- устанавливать связи между макроскопическими параметрами термодинамической системы и её микроскопическими параметрами;
- изучать понятия случайного события, вероятности случайного события и использовать их для характеристики распределения частиц газа по объёму сосуда;
- различать макросостояния и микросостояния термодинамической системы;
- анализировать графики распределения молекул по скоростям при разных температурах;
- наблюдать и объяснять распределение молекул газа по скоростям с помощью механической модели – доски Гальтона;
- анализировать результаты опыта Перрена – график зависимости распределения броуновских частиц в эмульсии от высоты;
- анализировать результаты опытов Штерна и пользоваться соответствующим графиком распределения молекул по скоростям при определённой температуре;
- исследовать зависимость давления от средней кинетической энергии движения молекул газа и его концентрации на механической модели;
- обсуждать понятие температуры как меры средней кинетической энергии движения частиц вещества;
- устанавливать формулу пропорциональной зависимости средней кинетической энергии поступательного хаотического движения молекул идеального газа и абсолютной температуры;
- обсуждать границы применимости модели идеального газа;
- различать среднюю квадратичную и среднюю скорости молекул;
- выводить формулу связи среднего квадрата проекции скорости молекул и среднего квадрата скорости;
- объяснять результаты опытов Штерна, исходя из закона распределения числа молекул по скоростям, полученного теоретически Дж. Максвеллом;

объяснять с помощью статистического метода второе начало термодинамики.

Изучение статистического метода имеет большое практическое значение, так как вероятностные методы широко используются не только наукой о природе, но и об обществе, где также исследуются сложные системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горбачёв В.В. Концепции современного естествознания: учеб. пособие для студентов вузов. М.: ООО «Издательство Оникс»; ООО «Издательство «Мир и образование», 2008, 704 с.
2. Иллюстрированный словарь. Математика / Пер. с англ. А. Банкрашкова. М.: АСТ: Астрель, 2007. 127 с.
3. Капица С.П. Жизнь науки. Москва: Издательский дом ТОНЧУ, 2008. 592 с.
4. Кохановский В.П. Основы философии науки: Учебное пособие для аспирантов. Изд. 2-е. Ростов-на Дону: Феникс, 2005. 608 с.
5. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего (полного) общего образования [Электронный ресурс]. URL: <http://standart.edu.ru/>. (дата обращения: 15.11.14).
6. Федеральный закон «Об образовании в Российской Федерации». М.: Ось – 89. 2013. 208 с. (Федеральный закон).
7. Физика: Энциклопедия. Под ред. Ю.В. Прохорова. М.: Большая Российская энциклопедия, 2003. 944 с.
8. Хижнякова Л.С., Синявина А.А. Физика: 8 класс: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений. М.: Вентана-Граф, 2011. 224 с.
9. Хижнякова Л.С. Физика: 8 класс: методика и технологии обучения: методическое пособие. М.: Вентана-Граф, 2012. 232 с.
10. Хижнякова Л.С., Синявина А.А., Холина С.А., Кудрявцев В.В. Физика: 9 класс: методическое пособие. М.: Вентана-Граф, 2013. 280 с.
11. Хижнякова Л.С. Физика: 10 класс: базовый и углублённый уровни: учебник для учащихся общеобразовательных организаций. М.: Вентана-Граф, 2014. 400 с.
12. Хижнякова Л.С. Физика: 11 класс: базовый и углублённый уровни: учебник для учащихся общеобразовательных организаций. М.: Вентана-Граф, 2014. 408 с.
13. Хижнякова Л.С., Синявина А.А., Кудрявцев В.В. и др. Физика: программы: 7–9 классы, 10–11 классы. М.: Вентана-Граф, 2014. 288 с.

REFERENCES

1. Gorbachev V.V. Kontseptsii sovremennogo estestvoznaniya: ucheb. posobie dlya studentov vuzov [The concept of modern science: proc. textbook for University students]. M., OOO «Izdatel'stvo Oniks»; OOO «Izdatel'stvo «Mir i obrazovanie», 2008. 704 p.
2. Illyustrirovannyi slovar'. Matematika [An illustrated dictionary. Mathematics] / Transl. from English by A. Bankrashkov. M., AST: Astrel', 2007. 127 p.
3. Kapitsa S.P. ZHizn' nauki [Life science]. M., Izdatel'skii dom TONCHU, 2008. 592 p.
4. Kokhanovskii V.P. Osnovy filosofii nauki: uchebnoe posobie dlya aspirantov [The foundations of the philosophy of science: a textbook for graduate students]. Ed. 2nd. Rostov-on-Don, Feniks, 2005. 608 p.
5. Federal'nyi gosudarstvennyi obrazovatel'nyi standart srednego (polnogo) obshchego obrazovaniya [Elektronnyi resurs]. [Federal state educational standard of secondary (complete) General education [E-source]]. URL: <http://standart.edu.ru/> (request date 15.11.2014)
6. Federal'nyi zakon «Ob obrazovanii v Rossiiskoi Federatsii» [Federal law "On education in Russian Federation"]. M., Os'-89, 2013. 208 p.
7. Fizika: Entsiklopediya [Physics: Encyclopedia] / Ed. by Yu.V. Prokhorov. M., Bol'shaya Rossiiskaya entsiklopediya, 2003. 944 p.
8. Khizhnyakova L.S., Sinyavina A.A. Fizika: 8 klass: uchebnik dlya uchashchikhsya obshcheobrazovatel'nykh uchrezhdenii [Physics: grade 8: textbook for students of educational institutions]. M., Ventana-Graf, 2011. 224 p.
9. Khizhnyakova L.S. Fizika: 8 klass: metodika i tekhnologii obucheniya: metodicheskoe posobie [Physics: grade 8: methods and techniques of teaching: a methodological guide]. M., Ventana-Graf, 2012. 232 p.
10. Khizhnyakova L.S., Sinyavina A.A., Kholina S.A., Kudryavtsev V.V. Fizika: 9 klass: metodicheskoe posobie [Physics: 9th grade: manual]. M., Ventana-Graf, 2013. 280 p.
11. Khizhnyakova L.S. Fizika: 10 klass: bazovyi i uglublennyyi urovni: uchebnik dlya uchashchikhsya obshcheobrazovatel'nykh organizatsii [Physics: 10th grade: basic and advanced levels: a textbook for students of educational organizations]. M., Ventana-Graf, 2014. 400 p.
12. Khizhnyakova L.S. Fizika: 11 klass: bazovyi i uglublennyyi urovni: uchebnik dlya uchashchikhsya obshcheobrazovatel'nykh organizatsii [Physics: grade 11: basic and advanced levels: a textbook for students of educational organizations]. M., Ventana-Graf, 2014. 408 p.
13. Fizika: programmy: 7–9 klassy, 10–11 klass [Physics: a program: 7-9 grades and 10-11 grades]. Khizhnyakova L.S. and others M., Ventana-Graf, 2014. 288 p.

ИНФОМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Синявина Анна Афанасьевна – доктор педагогических наук, профессор кафедры методики преподавания физики Московского государственного областного университета;
e-mail: aas_47@mail.ru

Озерова Екатерина Николаевна – учитель информатики МОУ «Онуфриевская СОШ» Истринского района Московской области;
e-mail: ozerovaen@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Sinyavina Anna Afanas'evna – doctor of pedagogical sciences, professor of the Department of Methodology of Teaching Physics at the Moscow State Regional University;
e-mail: aas_47@mail.ru

Ozerova Ekaterina Nikolaevna – teacher of informatics, Municipal educational institution “Onufrievskaya Secondary School”, Istra municipal district, Moscow region;
e-mail: ozerovaen@mail.ru

БИБЛИОГРАФИЧЕСКАЯ ССЫЛКА

Синявина А.А., Озерова Е.Н. Изучение статистического метода в курсе физики средней школы // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2016. № 3. С. 139–152.
DOI: 10.18384/2310-7251-2016-3-139-152.

BIBLIOGRAPHIC REFERENCE

A. Sinyavina, E. Ozerova The study of statistical methods in physics courses at secondary school // Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics. 2016. no. 3. pp. 139–152.
DOI: 10.18384/2310-7251-2016-3-139-152.

УДК 378.14.015.62

DOI: 10.18384/2310-7251-2016-3-153-167

ПРИМЕНЕНИЕ ОБЛАЧНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ КАК СРЕДСТВ ФОРМИРОВАНИЯ ИКТ-КОМПЕТЕНТНОСТИ БУДУЩИХ УЧИТЕЛЕЙ ИНФОРМАТИКИ

Шевченко В.Г., Шевчук М.В.

Московский государственный областной университет

105005, г. Москва, ул. Радио, д. 10а, Российская Федерация

Аннотация. В статье даётся обоснование актуальности проблемы формирования ИКТ-компетентности будущих учителей информатики в условиях модернизации системы образования и развития сетевых технологий. Рассматриваются специальные компетенции в области облачных технологий, выделенные в структуре ИКТ-компетентности учителя информатики, как одни из важнейших компонентов ИКТ-компетентности современного учителя информатики. Приводятся уровни сформированности специальных компетенций и требования к ним.

Ключевые слова. облачные технологии, облачные сервисы, компетентностный подход, ИКТ-компетентность, специальные компетенции, учитель информатики.

THE USE OF CLOUD TECHNOLOGIES AS A MEANS OF FORMATION OF ICT COMPETENCE OF FUTURE TEACHERS OF INFORMATICS

V. Shevchenko, M. Shevchuk

Moscow State Regional University

ul. Radio 10 a, 105005 Moscow, Russia

Abstract. We have substantiated the importance of the problem of the formation of the ICT competence of future teachers of informatics under conditions of modernization of the education system and the development of network technologies. We consider special competences in the field of cloud computing, dedicated to the structure of the ICT competence of the teacher, as one of the most important components of the ICT competence of the modern

teacher of informatics. We present the levels of the formation of special competences and requirements to these competences.

Key words: cloud technologies, cloud services, competence-based approach, ICT competence, special competences, teacher of informatics.

Основные направления модернизации образования, отраженные в Концепции Федеральной целевой программы развития образования на 2013-2020 года, в Национальном проекте «Образование», в модели «Российское образование 2020», в Федеральных государственных образовательных стандартах (ФГОС ВО), указывают на необходимость обеспечения современного качества образования в рамках существующих образовательных систем, при этом определяя результат подготовки выпускников в виде необходимости формирования общекультурных (ОК) и профессиональных компетенций (ПК).

Современная трактовка структуры и содержания профессиональной компетентности будущего учителя у различных авторов представлена неоднозначно. На основе анализа ряда исследований можно выделить следующие компоненты в профессиональной компетентности будущего учителя информатики: предметная, методическая и ИКТ.

ИКТ-составляющая определяется необходимостью применения педагогом в своей деятельности современных информационных и коммуникационных технологий. В Профессиональном стандарте педагога [4] также подчёркивается важность формирования ИКТ-компетентности.

При этом постоянно актуализируются и повышаются требования к ИКТ-компетентности современного педагога в связи с непрерывным развитием информационных и коммуникационных технологий, необходимостью реализации федеральных и региональных программ в области информатизации образования. Сформированная компетентность в области ИКТ позволит будущему специалисту быть конкурентоспособным на рынке труда, быть готовым к постоянному профессиональному росту и профессиональной мобильности в соответствии с потребностями современной системы образования [4]. Как показывает анализ компетенций, представленных в ФГОС ВО, существующих методических подходов и дидактических разработок явно недостаточно для обеспечения современных и постоянно возрастающих требований к ИКТ-компетентности будущего учителя.

Одной из актуальных и перспективных информационных технологий, которой практически не уделяется внимание в сфере образования, а использование которой подразумевается существующей Концепцией развития единой информационной образовательной среды в Российской Федерации, является технология облачных вычислений.

Согласно определению из Концепции развития, единой информационной образовательной среды в Российской Федерации [2], под облачными технологиями (вычислениями) понимается инфраструктура, предназначенная для обеспечения повсеместного доступа, с использованием сети Интернет, к устройствам хранения данных, приложениям и сервисам.

Исходя из требований ФГОС ВО и в соответствии с современными направлениями модернизации системы образования, считаем целесообразным формирование специальных компетенций, направленных на использование облачных технологий в образовательной деятельности будущего учителя информатики, которые выделяются нами в структуре ИКТ-компетентности. В выделенных специальных компетенциях основное внимание уделяется использованию облачных технологий в образовательной деятельности и обучению на их основе.

Выделение таких компетенций в отдельную группу и их формирование в образовательном процессе является целесообразным, так как такие компетенции будут включать в себя систему базовых теоретических знаний, способов практической деятельности (умений и навыков) и мотивационно-ценностных отношений (личностные качества), которые необходимы для продуктивной профессиональной деятельности выпускника.

Перечислим специальные компетенции будущего учителя информатики, формированию которых должно быть уделено особое внимание:

1. Способность отбирать сетевые сервисы на основе облачных технологий в соответствии с поставленными образовательными задачами (СК-1).
2. Способность применять средства облачных технологий для организации и реализации образовательного процесса на различных образовательных уровнях в различных образовательных организациях (СК-2).
3. Способность использовать облачные технологии для осуществления образовательной деятельности в рамках дистанционного обучения (СК-3).

4. Способность проводить анализ безопасности сетевых сервисов на основе облачных технологий с учётом требований информационной безопасности для сферы образования (СК-4).

Согласно ФГОС ВО результаты освоения дисциплины определяются приобретаемыми выпускником компетенциями, то есть его способностью применять полученные знания, умения и навыки в соответствии с выбранными видами профессиональной деятельности. Исходя из этого сформированные специальные компетенции будут являться планируемыми результатами освоения дисциплины и характеризовать будущего учителя информатики как компетентного в области использования облачных технологий в образовательном процессе.

Использование облачных технологий и сетевых сервисов на их основе в процессе обучения, а также построение методической системы обучения на их основе будет являться эффективным инструментом формирования нормативных компетенций (ОК, ПК) и выделенных специальных компетенций.

Проанализировав различные источники, описывающие уровни сформированности компетенций будущих выпускников вузов, можно сделать вывод о целесообразности использования трёх уровней сформированности специальных компетенций: базового, среднего и высокого. Раскроем содержание каждого уровня.

Низкий уровень – уровень, обязательный для всех обучающихся. Предполагает способность обучающихся воспроизводить базовые понятия в области облачных технологий и выполнять задания, предусматривающие умения действовать по образцу в качестве исполнителя в строго определённых условиях и получающие определённый, заранее известный результат.

Средний уровень – предполагает способность обучающихся выполнять задания, выявляющие умение самостоятельно организовать свою деятельность в соответствии с поставленной целью в различных условиях, а также самостоятельно выявлять проблему и определять пути её решения.

Высокий уровень – предполагает способность обучающихся выполнять задачи повышенной сложности, принимать решения в условиях неполной определённости при недостаточном документальном, нормативном и методическом обеспечении.

Раскроем основные признаки каждого уровня для выделенных специальных компетенций. Ниже представлена таблица (Таблица 1), отражающая уровни сформированности компетенций и основные признаки уровня.

Таблица 1

Содержание и уровни сформированности специальных компетенций

Низкий	Средний	Высокий
СК-1 «Способность отбирать сетевые сервисы на основе облачных технологий в соответствии с поставленными образовательными задачами»		
<u>Знать:</u> – базовые понятия и классификации облачных технологий; – основные характеристики и функциональные возможности современных облачных сервисов. <u>Уметь:</u> – выявлять функциональность, определяющую инструментальные возможности сетевых сервисов; – отбирать сетевые сервисы на основе облачных технологий целесообразно поставленным образовательным задачам. <u>Владеть:</u>	<u>Знать:</u> – основные модели предоставления облачных услуг и их особенности; – критерии отбора сетевых сервисов на основе облачных технологий. <u>Уметь:</u> – осуществлять сравнительный анализ функциональных возможностей сетевых сервисов на основе облачных технологий; – оценивать перспективы использования облачных сервисов с учётом решаемых образовательных задач. <u>Владеть:</u> – навыками использования облачных сервисов в	<u>Знать:</u> – методические требования к разработке учебных материалов с использованием средств облачных технологий; – основные этапы проектирования ЭОР с применением сетевых сервисов на основе технологии облачных вычислений. <u>Уметь:</u> – определять наиболее функционально подходящие облачные сервисы в соответствии с видами и формами организации учебной деятельности; – проектировать и разрабатывать учебные материалы с использованием средств облачных технологий. <u>Владеть:</u>

– навыками работы с некоторыми сетевыми сервисами сети Интернет; – умениями определять функциональные возможности и целевое назначение сетевых сервисов.	образовательной деятельности; – приёмами отбора сетевых сервисов на основе облачных технологий в соответствии с поставленными образовательными задачами.	– умениями работы с платформами для разработки и использования облачных сервисов; – технологиями разработки учебных материалов с использованием сетевых сервисов на основе технологии облачных вычислений.
СК-2 «Способность применять средства облачных технологий для организации и реализации образовательного процесса на различных образовательных уровнях в различных образовательных организациях»		
<u>Знать:</u> – возможности сетевых сервисов на основе облачных технологий для организации образовательной деятельности; – способы взаимодействия педагогического работника с различными субъектами образовательного процесса в сетевой среде средствами облачных технологий. <u>Уметь:</u> – использовать возможности облачных технологий в учебной и внеурочной	<u>Знать:</u> – основы профессионально-педагогического общения и ведения диалога в различных коммуникативных ситуациях на основе сетевой среды; – основные модели построения сетевого взаимодействия с применением облачных сервисов. <u>Уметь:</u> – анализировать учебную ситуацию и проектировать дальнейшую деятельность на основе использования облачных технологий;	<u>Знать:</u> – практические способы организации сотрудничества обучающихся и обучаемых в разных видах образовательной деятельности посредством сетевого взаимодействия с использованием облачных сервисов; – возможности облачных технологий для разработки учебных материалов для обучения. <u>Уметь:</u> – интегрировать современные сетевые сервисы в образовательную деятельность при разработке учебных материалов с использованием облачных технологий;

деятельности для решения образовательных задач; – проектировать и организовывать сетевое взаимодействие педагогического коллектива и обучающихся на основе использования облачных сервисов. <u>Владеть:</u> – навыками организации общения обучающихся и педагогических работников при помощи сетевых сервисов на основе облачных технологий; – приёмами использования облачных сервисов и веб-приложений в образовательном процессе.	– организовать проектную и инновационную деятельность в образовательной среде средствами облачных сервисов. <u>Владеть:</u> – умениями взаимодействия с субъектами образовательного процесса для реализации конкретных видов образовательной деятельности с использованием сетевых сервисов на основе облачных технологий; – способами, стимулирующими и поддерживающими активность обучающихся средствами сетевых технологий.	– совместно решать учебно-воспитательные и организационные вопросы с представителями педагогического коллектива, обучающимися и их родителями при сетевом взаимодействии с применением облачных сервисов. <u>Владеть:</u> – умениями обобщения и адаптации учебного материала в соответствии с возрастными особенностями обучающихся, а также достижениями науки и практики с использованием современных облачных технологий; – методами активизации аудитории с использованием современных сетевых технологий, обеспечивающими интерес к информатике.
СК-3 «Способность использовать облачные технологии для осуществления образовательной деятельности в рамках дистанционного обучения»		
<u>Знать:</u> – особенности организации системы дистанционного обучения средствами сетевых технологий; – функциональные возможности сетевых	<u>Знать:</u> – методические требования к организации дистанционного обучения с использованием сетевых	<u>Знать:</u> – практические способы сетевого взаимодействия при дистанционном обучении с использованием облачных технологий; – особенности использования

сервисов на основе облачных технологий для организации взаимодействия обучающихся и педагогических работников при дистанционном обучении. <u>Уметь:</u> – организовывать взаимодействие субъектов образовательного процесса при дистанционном обучении с применением облачных средств; – использовать сетевые сервисы на основе облачных технологий в качестве объекта и средства дистанционного обучения. <u>Владеть:</u> – приемами организации образовательной деятельности с применением сетевых сервисов и веб-приложений в рамках	сервисов на основе облачных технологий; – современные тенденции развития системы дистанционного обучения на основе современных облачных технологий. <u>Уметь:</u> – разрабатывать учебные материалы для дистанционного применения с использованием облачных технологий; – интегрировать облачные сервисы и веб-приложения в существующую среду системы дистанционного обучения. <u>Владеть:</u> – облачными средствами для адаптации существующих курсов к условиям дистанционного обучения средствами облачных технологий; – способами проектной и инновационной деятельности на основе облачных технологий в дистанционном обучении.	разработанных учебных материалов на основе облачных сервисов и веб-технологий в рамках дистанционного подхода к обучению. <u>Уметь:</u> – использовать возможности облачных платформ в реализации задач инновационной образовательной политики в области дистанционного обучения; – проектировать, разрабатывать и размещать ЭОР в облачной среде для дистанционного обучения. <u>Владеть:</u> – технологиями разработки и реализации учебных материалов на основе облачных сервисов и веб-приложений для системы дистанционного обучения; – методами активизации самостоятельной деятельности в сетевой среде при дистанционном обучении с применением облачных сервисов.
---	---	---

дистанционного подхода к обучению; – навыками использования средств облачных технологий для сетевого общения обучающихся и педагогических работников при дистанционном обучении.		
СК-4 «Способность проводить анализ безопасности сетевых сервисов на основе облачных технологий с учётом требований информационной безопасности для сферы образования»		
<u>Знать:</u> – нормативно-правовые документы, обеспечивающие соблюдение информационной безопасности образовательной деятельности; – основные типы угроз информационной безопасности в сети Интернет. <u>Уметь:</u> – осознавать опасности и угрозы, возникающие при работе с сетевыми сервисами при осуществлении образовательной деятельности;	<u>Знать:</u> – требования к соблюдению информационной безопасности при работе с сетевыми сервисами на основе облачных технологий в сети Интернет; – основные подходы к безопасному взаимодействию в компьютерных сетях с применением облачных технологий. <u>Уметь:</u> – проводить анализ безопасности сетевых сервисов на основе облачных технологий согласно предъявляемым	<u>Знать:</u> – организационно-технические и режимные меры и методы обеспечения информационной безопасности при работе с облачными сервисами и веб-приложениями; – основные этапы проведения анализа безопасности сетевых сервисов на основе облачных технологий с учётом требований информационной безопасности для сферы образования. <u>Уметь:</u> – проектировать основные этапы сетевого взаимодействия всех

– проводить отбор наиболее безопасных сервисов на основе облачных технологий для их использования в учебном процессе. <u>Владеть:</u> – знаниями в области информационных и коммуникационных технологий, позволяющими обеспечить приемлемый уровень информационной безопасности при работе с сетевыми сервисами, – приёмами работы с информацией, имеющей определённую степень защиты и требующей безопасного обращения при работе с ней в компьютерной сети.	требованиям к сетевым ресурсам; – пользоваться программными средствами для обеспечения безопасного взаимодействия в сети Интернет при работе с облачными ресурсами. <u>Владеть:</u> – способами защиты конфиденциальной информации при работе с ней в среде сетевых сервисов на основе облачных технологий; – навыками принятия обоснованных решений и действия в конкретной опасной ситуации при обнаружении угрозы информационной безопасности в сети Интернет с учётом своих возможностей.	участников образовательного процесса с применением облачных сервисов и веб-приложений; – создавать учебные материалы с учётом требований по информационной безопасности с использованием сетевых сервисов на основе облачных технологий. <u>Владеть:</u> – практическими способами обеспечения безопасного общения обучающихся и педагогических работников при работе с неизвестными ранее ресурсами сетевых сервисов на основе облачных технологий в сети Интернет; – технологией разработки содержательного, доступного и безопасного учебного материала на основе использования облачных технологий.
---	--	--

Уровень сформированности специальных компетенций оценивается по трем критериям: ценностно-мотивационному, когнитивному и деятельностному.

Ценностно-мотивационный критерий включает мотивы, цели, потребности в активной познавательной деятельности в образовательном процессе на основе использования облачных технологий, саморазвитии, самосовершенствовании. Он предполагает наличие интереса и стремления личности заниматься выбранной профессиональной деятельностью.

В *когнитивном критерии* обычно выделяется несколько групп знаний, включенных в ФГОС ВО: базовые знания по информационным и коммуникационным технологиям; знания в области стандартного программного обеспечения; знания из области специальных программных продуктов, характерных для области профессиональной деятельности будущего учителя информатики. Кроме того, сюда же можно добавить и знания в области использования в образовательной деятельности облачных технологий. К таким знаниям можно отнести знания:

- базовых понятий и классификаций облачных технологий;
- основных моделей предоставления облачных услуг и их особенности;
- основных характеристик и функциональных возможностей современных облачных сервисов;
- возможностей сетевых сервисов на основе облачных технологий для организации образовательной деятельности;
- критериев отбора сетевых сервисов на основе облачных технологий;
- методических требований к разработке учебных материалов с использованием средств облачных технологий;
- возможности облачных технологий для разработки учебных материалов для обучения;
- основных этапов проектирования ЭОР с применением сетевых сервисов на основе технологии облачных вычислений;
- способов взаимодействия педагогического работника с различными субъектами образовательного процесса в сетевой среде средствами облачных технологий;
- особенностей организации системы дистанционного обучения средствами сетевых технологий;

- особенностей использования разработанных учебных материалов на основе облачных сервисов и веб-технологий в рамках дистанционного подхода к обучению;
- требований к соблюдению информационной безопасности при работе с сетевыми сервисами на основе облачных технологий в сети Интернет;
- основных этапов проведения анализа безопасности сетевых сервисов на основе облачных технологий с учётом требований информационной безопасности для сферы образования.

В *деятельностный критерий* включены умения и практические навыки использования обучающимися информационных и коммуникационных технологий, в частности, облачных технологий, в своей профессиональной деятельности. Так, обучающиеся по направлению подготовки «Педагогическое образование» должны уметь не только сами использовать современные информационные и коммуникационные технологии в своей профессиональной деятельности, но и уметь обучить их использованию обучающихся общеобразовательных организаций.

Ниже представлена таблица 2, которая отражает взаимосвязь критериев, показателей и методов диагностики уровня сформированности специальных компетенций в области облачных технологий у будущих учителей информатики.

Таблица 2

Критерии и показатели сформированности специальных компетенций у будущих учителей информатики

№	Критерии	Показатели	Методы диагностики
1	Мотивационный	Наличие мотива к изучению современных информационных и коммуникационных технологий, в частности, облачных технологий, познавательная потребность.	Анкетирование
2	Когнитивный	Наличие знаний в области использования в образовательной деятельности облачных технологий.	Тестирование

№	Критерии	Показатели	Методы диагностики
3	Деятельностный	Наличие умений в области использования в образовательной деятельности облачных технологий.	Проверка отчетов по лабораторным работам, проект

Выделение специальных компетенций в сфере облачных технологий в структуре ИТК-компетентности будущего учителя информатики, а также поэтапный контроль их формирования позволит подготовить будущих учителей информатики не только к работе с профессионально-ориентированными программными продуктами, но и сформировать у студентов целостное представление о современных облачных технологиях и возможностях их применения в профессиональной педагогической деятельности, что особенно важно для преодоления трудностей, обусловленных необходимостью применения современных информационных технологий в практико-ориентированной профессиональной деятельности учителя информатики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Государственная программа Российской Федерации «Развитие образования» на 2013-2020 годы [Электронный ресурс] // Официальный ресурс Министерства образования и науки Российской Федерации: [сайт]. URL: <http://минобрнауки.рф/документы/2474> (дата обращения: 20.08.2016).
2. Концепция развития единой образовательной среды (разработчик – Министерство образования и науки) [Электронный ресурс] // Официальный веб-сайт Российской Ассоциации Электронных Коммуникаций (РАЭК): [сайт]. URL: http://raec.ru/upload/files/eios_conception.pdf (дата обращения: 20.08.2016).
3. Облачные сервисы. Взгляд из России / под ред. Е. Гребнева. М.: Сnews, 2011. 282 с.
4. Профессиональный стандарт педагога: офиц. Текст [Электронный ресурс] // Официальный ресурс Министерства образования и науки Российской Федерации: [сайт]. URL: минобрнауки.рф/документы/3071/печать (дата обращения: 19.07.2016).
5. Риз Дж. Облачные вычисления: пер. с англ. СПб.: БХВ-Петербург, 2011. 288 с.

REFERENCES

1. Gosudarstvennaya programma Rossiiskoi Federatsii «Razvitie obrazovaniya» na 2013-2020 gody [Elektronnyi resurs] [State program of the Russian Federation "Development of education" for 2013-2020 [E-source]] // Ofitsial'nyi resurs Ministerstva obrazovaniya i nauki Rossiiskoi Federatsii: [sait]. [The official resource of the Ministry of education and science of the Russian Federation: [site]]. URL: <http://минобрнауки.рф/документы/2474> (request date 20.08.2016).
2. Kontseptsiya razvitiya edinoi obrazovatel'noi sredy (razrabotchik – Ministerstvo obrazovaniya i nauki) [Elektronnyi resurs] [The concept of development of unified educational environment (developed by the Ministry of education and science) [E-source]] // Ofitsial'nyi veb-sait Rossiiskoi Assotsiatsii Elektronnykh Kommunikatsii (RAEK): [sait]. [Official web site of the Russian Association for Electronic Communications (RAEC): [website]]. URL: http://raec.ru/upload/files/eios_conception.pdf (request date 20.08.2016).
3. Oblachnye servisy. Vzgljad iz Rossii / Pod red. E. Grebneva [Cloud services. A view from Russia / Ed. by E. Grebnev]. M., Cnews, 2011. 282 p.
4. Professional'nyi standart pedagoga: ofits. Tekst [Elektronnyi resurs] [Teacher professional standard: official text [E-source]] // Ofitsial'nyi resurs Ministerstva obrazovaniya i nauki Rossiiskoi Federatsii: [sait]. [The official resource of the Ministry of education and science of the Russian Federation: [site]]. URL: [минобрнауки. рф/документы/3071/печать](http://минобрнауки.рф/документы/3071/печать) (request date 19.07.2016).
5. Riz Dzh. Oblachnye vychisleniya: per. s angl. [Reese John. Cloud computing. Transl. from English]. SPb., BKHV-Peterburg, 2011. 288 p.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Шевченко Виктория Геннадьевна – аспирант кафедры вычислительной математики и методики преподавания информатики, Московский государственный областной университет;
e-mail: vg.shevchenko@mgou.ru

Шевчук Михаил Валерьевич – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры вычислительной математики и методики преподавания информатики, Московский государственный областной университет;
e-mail: mv.shevchuk@mgou.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Shevchenko Victoria Gennadevna – post-graduate student of the Department of Computer Sciences and Teaching Methods at the Moscow State Regional University;
e-mail: vg.shevchenko@mgou.ru

Shevchuk Mihail Valerevich – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Computer Science and Teaching Methods at the Moscow State Regional University;
e-mail: mv.shevchuk@mgou.ru

БИБЛИОГРАФИЧЕСКАЯ ССЫЛКА

Шевченко В. Г., Шевчук М. В. Применение облачных технологий как средств формирования икт-компетентности будущих учителей информатики // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2016. № 3. С. 153–167.
DOI: 10.18384/2310-7251-2016-3-153-167.

BIBLIOGRAPHIC REFERENCE

V. Shevchenko, M. Shevchuk The use of cloud technologies as a means of formation of ICT competence of future teachers of informatics // Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics. 2016. no. 3. pp. 153–167.
DOI: 10.18384/2310-7251-2016-3-153-167.



ВЕСТНИК МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ОБЛАСТНОГО УНИВЕРСИТЕТА

Научный журнал «Вестник Московского государственного областного университета» основан в 1998 г. Выпускается десять серий журнала: «История и политические науки», «Экономика», «Юриспруденция», «Философские науки», «Естественные науки», «Русская филология», «Физика-математика», «Лингвистика», «Психологические науки», «Педагогика». Все серии включены в составленный Высшей аттестационной комиссией Перечень ведущих рецензируемых научных журналов, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертации на соискание ученой степени доктора и кандидата наук по наукам, соответствующим названию серии. Журнал включен в базу данных Российского индекса научного цитирования (РИНЦ).

Печатная версия журнала зарегистрирована в Федеральной службе по надзору за соблюдением законодательства в сфере массовых коммуникаций и охране культурного наследия. Полнотекстовая версия журнала доступна в Интернете на платформе Научной электронной библиотеки (www.elibrary.ru), а также на сайте журнала www.vestnik-mgou.ru.

ВЕСТНИК МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ОБЛАСТНОГО УНИВЕРСИТЕТА

СЕРИЯ: ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА
2016. N 3

Над номером работали:

Литературный редактор Д.Д. Дрошнев
Переводчик И.А. Улиткин
Корректор Д.Д. Дрошнев
Компьютерная верстка Е.Н. Васильчикова

Отдел по изданию научного журнала
«Вестник Московского государственного областного университета»
Информационно-издательского управления МГОУ
105005, г. Москва, ул. Радио, д.10А, офис 98
тел. (495) 723-56-31; (495) 780-09-42 (доб. 6101)
e-mail: vest_mgou@mail.ru
сайт: www.vestnik-mgou.ru

Формат 70x108/₁₆. Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура «Minion Pro».
Тираж 500 экз. Уч.-изд. л. 7,5, усл. п. л. 10,5.

Подписано в печать: 31.10.2016. Дата выхода в свет: 28.11.2016. Заказ № 2016/10-15.
Отпечатано в ИИУ МГОУ
105005, г. Москва, ул. Радио, 10А