ISSN 2072-8387 (print)
ISSN 2310-7251 (online)

Вестник

Московского государственного областного университета

Серия

Физика-математика

О ПРИМЕНИМОСТИ ДРОБНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ В ФИЗИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ

ДВА ТИПА ДЕФЕКТОВ, УЧАСТВУЮЩИХ В ПЕРЕМЕЩЕНИИ АТОМОВ ГЕЛИЯ В НЕУПОРЯДОЧЕННОЙ СТРУКТУРЕ КВАРЦА

ФОРМУЛА ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ВРЕМЕНИ ПОЛНОГО ИСПАРЕНИЯ АЭРОЗОЛЬНЫХ КАПЕЛЬ С УЧЁТОМ КОЭФФИЦИЕНТОВ ИСПАРЕНИЯ И ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ

2017/ № 3

ВЕСТНИК
МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
ОБЛАСТНОГО УНИВЕРСИТЕТА

ISSN 2072-8387 (print) 2017 / № 3 ISSN 2310-7251 (online)

серия

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА

Научный журнал основан в 1998 г.

Журнал «Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика» включён в «Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук» Высшей аттестационной комиссии при Министерстве образования и науки Российской Федерации (См.: Список журналов на сайте ВАК при Минобрнауки России) по наукам: Математика (01.01.00); Физика (01.04.00); Педагогические науки (13.00.00).

The academic journal is established in 1998

«Bulletin of Moscow State Regional University. Series: Physics and Mathematics» is included by the Supreme Certifying Commission of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation into "the List of leading reviewed academic journals and periodicals recommended for publishing in corresponding series basic research thesis results for a Ph.D. Candidate or Doctorate Degree" (See: the online List of journals at the site of the Supreme Certifying Commission of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation) in Physics and Mathematics: Mathematics (01.01.00); Physics (01.04.00); Pedagogics (13.00.00).

ISSN 2072-8387 (print) 2017 / № 3 ISSN 2310-7251 (online)

series

PHYSICS AND MATHEMATICS

BULLETIN OF THE MOSCOW STATE
REGIONAL UNIVERSITY

Учредитель журнала «Вестник Московского государственного областного университета»:
Государственное образовательное учреждение высшего образования Московской области
Московский государственный областной университет
Выходит 4 раза в год

ISSN 2072-8387 (print)
ISSN 2310-7251 (online)
Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. – 2017. – № 3. – 122 с.

Журнал «Вестник Московского государственного областного университета. Серия «Физика-Математика» зарегистрирован в Федеральной службе по надзору за соблюдением законодательства в сфере массовых коммуникаций и охране культурного наследия. Регистрационное свидетельство ПИ № ФС77-26136

Индекс серии «Физика-Математика» по Объединенному каталогу «Пресса России» 40723

Адрес Отдела по изданию научного журнала «Вестник Московского государственного областного университета»
г. Москва, ул. Радио, д.10А, офис 98
тел. (495) 723-56-31; (495) 780-09-42 (доб. 6101)
e-mail: vest_mgou@mail.ru; сайт: www.vestnik-mgou.ru

Журнал включен в базу данных Российского индекса научного цитирования (РИНЦ), имеет полнотекстовую сетевую версию в Интернете на платформе Научной электронной библиотеки (www.elibrary.ru), а также на сайте Московского государственного областного университета (www.vestnik-mgou.ru)

Founder of journal «Bulletin of the Moscow State Regional University»:
Moscow State Regional University

Issued 4 times a year

The journal is included into the database of the Russian Science Citation Index, has a full text network version on the Internet on the platform of Scientific Electronic Library (www.elibrary.ru), as well as at the site of the Moscow State Regional University (www.vestnik-mgou.ru)

The Editorial Board address:
Moscow State Regional University

10A Radio st., office 98, Moscow, Russia
Phones: (495) 723-56-31; (495) 780-09-42 (add. 6101)
e-mail: vest_mgou@mail.ru; site: www.vestnik-mgou.ru

ISSN 2072-8387 (print)
ISSN 2310-7251 (online)
Bulletin of the Moscow State Regional University. Series: Physics and Mathematics. – 2017. – № 3. – 122 p.

The series «Physics and Mathematics» of the Bulletin of the Moscow State Regional University is registered in Federal service on supervision of legislation observance in sphere of mass communications and cultural heritage protection. The registration certificate ПИ № ФС77-26136

Index of the series «Physics and Mathematics» according to the union catalog «Press of Russia» 40723

СОДЕРЖАНИЕ

РАЗДЕЛ I. МАТЕМАТИКА

РАЗДЕЛ II. ФИЗИКА

РАЗДЕЛ III. ТЕОРИЯ И МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ И ВОСПИТАНИЯ

CONTENTS

SECTION I. MATHEMATICS

SECTION II. PHYSICS

SECTION III. THEORY AND METHODS OF TEACHING AND EDUCATION

РАЗДЕЛ I.
МАТЕМАТИКА

УДК 514.76 + 512.54
DOI: 10.18384-2310-7251-2017-3-6-11

ЛЕВОЕ ТОЖДЕСТВО БОЛА В ТЕОРИИ СИММЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ

***Андроникова Е.О.*[1]*, Матвеев О.А.*[2]**

[1] *Московский государственный технологический университет «СТАНКИН»
127994, г. Москва, Вадковский пер., д. 1, Российская Федерация*

[2] *Московский государственный областной университет
105005, Москва, ул. Радио, д. 10А, Российская Федерация*

Аннотация. В работе рассматриваются геометрические и алгебраические свойства локально симметрического дифференцируемого многообразия аффинной связности. Обсуждаются тождества, выполняющиеся в геодезической лупе симметрического пространства аффинной связности. Используя левое тождество Бола, которому удовлетворяет геодезическая лупа в каждой точке пространства, можно вывести алгебраическое тождество, которому удовлетворяют геодезические симметрии локально плоских пространств. Полученные результаты применяются для решения задач на построение.

Ключевые слова: пространства аффинной связности, локально симметрические многообразия аффинной связности, геодезические линии, теория луп, геодезическая лупа, тождество Бола.

THE LEFT BOL IDENTITY IN THE THEORY OF SYMMETRIC SPACES WITH AN AFFINE CONNECTION

***E. Andronikova*[1]*, O. Matveyev*[2]**

[1] *Moscow State University of Technology "STANKIN"
Vadkovskii per. 1, 105005 Moscow, Russian Federation*

[2] *Moscow Region State University
ul. Radio 10A, 105005 Moscow, Russian Federation*

Abstract. We consider the geometric and algebraic properties of a locally symmetric differentiable manifold of an affine connection. The identities in the geodesic loop of a symmetric affine connection space are discussed. Using the left Bol identity, which the geodesic loop satisfies at each point of space, we derive an algebraic identity that is satisfied by the geodesic symmetries of locally flat spaces. The results obtained are used to solve construction problems.

Key words: spaces with affine connection, locally symmetric manifolds with affine connection, geodesic lines, loop theory, geodesic loop, Bol loops.

Тождества Бола (Bol, 1937) (левое и правое), обобщения тождества ассоциативности сначала изучались в рамках алгебраической теории луп вне какой-либо связи с геометрией. Позднее тождества Бола ярко проявили себя в теории тканей [1], а затем и в теории симметрических и некоторых других пространствах аффинной связности [2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10].

Выпишем левое тождество Бола в чисто алгебраической форме:

$$(x(zx))a = x(z(xa)), \tag{1}$$

(здесь мы ради краткости не пишем знак умножения). Если в левой лупе Бола выполняется тождество ассоциативности: $x(yz) = (xy)z$, то она является левой группой.

Определение 1. Пусть X – дифференцируемое многообразие. Частичную гладкую локальную алгебру $\chi = < X, (\omega_t)_{t\in R}$ с однопараметрическим семейством бинарных операций $(\omega_t)_{t\in R}$ на X называем многообразием с гомотетиями, если: а) для любой точки e из X существует такая открытая окрестность U, что для любых x и y из U и для любого вещественного числа t, принадлежащего некоторому открытому интервалу, содержащему отрезок [0,1], $\omega_t(x, y) = t_xy$ определенно и принадлежит U; б) если t_xy определенно, то $u_x(t_xy)$ определенно тогда и только тогда, когда $(ut)_xy$ определенно, и в этом случае $u_x(t_xy) = (ut)_xy$ ($t, u \in R$, $x \in X$, $y \in X$); в) локально выполняется тождество геометричности: $t_xy = (1 - t)_yx$; г) имеет место тождество: $1_xy = y$, $1 \in R$. При фиксированном действительным числе t, не равном нулю и единице, (локальное) отображение $\omega_t(x) : y \to t_xy$, определённое в достаточно малой открытой окрестности точки x, называем (локальной) гомотетией с центром в x с коэффициентом (растяжения или сжатия) t.

Предложение 1 [2]. Категория дифференцируемых многообразий с локальными гомотетиями эквивалентна категории многообразий аффинной связности с нулевым полем тензора кручения, причём множество точек вида $\{t_xy\}$, где действительное число t принадлежит связному открытому интервалу, содержащему отрезок [0,1], является геодезической линией, проходящей через точки x и y. Имеет место формула: $\omega_t(y, z) = t_yz = Exp_y(t(Exp_y)^{-1}z)$, где Exp – экспоненциальное отображение.

Определение 2 [9]. Дифференцируемое многообразие аффинной связности называется локально симметрическим, если его поле тензора кручения T нулевое, а первая ковариантная производная тензора кривизны равна нулю ($T = 0$, $\nabla R = 0$).

Определение 3 [2]. Многообразие с гомотетиями $\chi = < X, (\omega_t)_{t\in R} >$ называется локально симметрическим, если выполняются тождества (когда правые и левые части равенств одновременно имеют смысл):

$$\left(-1\right)_x\circ\left(-1\right)_{t_xy}=\left(-1\right)_{t_yx}\circ\left(-1\right)_{y,}\ \left(-1\right)_x\circ t_y=t_{(-1)_xy}\circ\left(-1\right)_x. \qquad (2)$$

Предложение 2 [2]. Категория дифференцируемых локально симметрических многообразий с гомотетиями эквивалентна категории локально симметрических многообразий аффинной связности.

Левые сдвиги (двусторонней) квазигруппы $M_{-1} = M, C, \omega, \backslash, /$ есть геодезические симметрии симметрического пространства аффинной связности (здесь в наших обозначениях $x\cdot y=\left(-1\right)_x y,\ x\backslash y=\left(-1\right)_x y,\ y\backslash x=\left(\frac{1}{2}\right)_x y$. Главный левый изотоп этой квазигруппы есть геодезическая лупа симметрического пространства аффинной связности, левые сдвиги L которой (параллельный перенос вдоль геодезического отрезка [y, x]) подчиняются формуле (формула Эли Картана):

$$L_x^y=\left(-1\right)_{\left(\frac{1}{2}\right)_y x}\circ\left(-1\right)_y. \qquad (3)$$

Геодезическая лупа в каждой точке симметрического пространства подчиняется левому тождеству Бола, т. е. для геодезической лупы с нейтралом y можно записать:

$$(x[y](z[y]x))[y]a = x[y](z[y](x[y]a)). \qquad (4)$$

В этой формуле выражение «x[y]z» обозначает умножение x на z в точке y, т. е. $L_x^y z$ = x[y]z, где $L_x^y z$ – левый сдвиг (параллельный перенос) точки z геодезической лупы с нейтралом y из точки y в x. (Подробнее, $L_x^y z = Exp_x\tau_x^y\left(\left(Exp_y\right)^{-1}z\right)$, где $\tau_x^y: T_y\left(M\right)\to T_x\left(M\right)$ – параллельный перенос касательных векторов вдоль отрезка геодезической линии, соединяющего точки y и x, T_y – пространство касательных векторов, выходящих из точки y, Exp – экспоненциальное отображение).

Если мы подставим формулу (3) в тождество Бола (4), то получится довольно громоздкое выражение, которое можно упростить. Используя тождество геометричности для геодезических линий, выполняющееся в любом пространстве аффинной связности: $t_c\, b = (1 - t)_b\, c$, где b, c – точки, t – действительное число, имеем: $(-1)_c\, b = (2)_b\, c$. Также применяется характеристическое свойство симметрического пространства аффинной связности: геодезическая симметрия $(-1)_b$: $M\to M$ есть изоморфизм геометрической структуры. После замены переменных приходим к тождествам:

$$(0,5)_y(-1)_a(-1)_b(-1)_a y = (0,5)_x(-1)_a(-1)_b(-1)_a x = (-1)_a b. \qquad (5)$$

Предложение 3. В локально симметрическом многообразии аффинной связности (локально) выполняются тождества (5).

Следствие. В локально плоском многообразии аффинной связности, в частности в аффинном и евклидовом пространствах, выполняются тождества:

$$(0,5)_y(-1)_a(-1)_b(-1)_c y = (0,5)_x(-1)_a(-1)_b(-1)_c x = (0,5)_c(-1)_a(-1)_b c. \qquad (6)$$

Задача 1. В локально плоском пространстве аффинной связности (на конической или на цилиндрической поверхностях, в аффинном или евклидовом пространствах) заданы три точки *d, e, f*, не лежащие на одной геодезической линии. Известно, что эти точки лежат на серединах сторон геодезического треугольника *abc*, расположение вершин которого неизвестно; причём *d* – середина [*ab*], *e* – середина [*cb*], *f* – середина [*ac*]. Используя геодезическую симметрию, построить вершины геодезического треугольника.

Решение. Вершины *a, b, c* можно построить по формулам:

$a = (0{,}5)_x(-1)_d(-1)_e(-1)_f x$, *x*-произвольная точка, $b = (-1)_d a$, $c = (-1)_e b$. Доказательство правильности построения использует тождества (6).

Задача 2. В локально плоском пространстве аффинной связности (на конической или на цилиндрической поверхностях, в аффинном или евклидовом пространствах) заданы $(2n + 1)$ точки. Известно, что эти точки лежат на серединах сторон геодезического $(2n + 1)$ – многоугольника. Используя геодезическую симметрию, построить вершины геодезического многоугольника.

Правое тождество Бола $((xz)a))z = x((za)z)$ также нашло своё применение в теории пространств аффинной связности. Интересно, что выполнение в лупе одновременно правого и левого тождеств Бола, равносильно справедливости тождества Муфанг:

$$(x\cdot y)\cdot(z\cdot x)=x\cdot((y\cdot z)\cdot x),$$

которое также хорошо известно в дифференциальной геометрии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Акивис М. А., Шелехов А.М. Замкнутые G-структуры, определяемые три-тканями // Учёные записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. Т. 153. 2011, К. 3. Казань, Издательство Казанского университета, 2011. С. 22–28.
2. Андроникова Е.О., Дмитриева М.Н., Матвеев О.А., Матвеева Н.В. Гомотетии и параллельные переносы в проективно симметрических пространствах аффинной связности // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2016. № 3. С. 8–17.
3. Матвеев О.А. Квазигрупповые свойства многообразий с траекториями // Вестник Московского педагогического университета. Серия: Физика-математика. № 3–4. 1998. С. 10–15.
4. Матвеев О.А., Нестеренко Е.Л. Алгебраическая теория пространств, близких к симметрическим: монография. Lambert Academic Publishing, Germany, 2012. 125 с.
5. Матвеев О.А., Нестеренко Е.Л. О локально инвариантных пространствах аффинной связности // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика и математика, № 2. 2010. С. 19–27.
6. Матвеев О.А., Нестеренко Е.Л. Просимметрические пространства // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Математика. № 7 (1). М.: Издательство Российского университета дружбы народов. 2000. С. 114–126.
7. Матвеев О.А., Нестеренко Е.Л. Универсальные алгебры в теории пространств аффинной связности, близких к симметрическим: монография. М.: Московский государственный областной университет, 2012. 132 с.

8. Matveyev O.A., Nesterenko E.L. On the quasigroup properties of prosymmetric spaces with zero curvature // Webs and quasigroups. Tver, 2002. P. 78–84.
9. Matveyev O.A., Nesterenko E.L. The real prosymmetric spaces // Non – Associative Algebra and Its Applications. A Series of Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics. Vol. 246. Chapter 19. CRS Press Taylor and Francis Group. 2006. P. 253–260.
10. Sabinin L.V., Matveyev O.A. Geodesic loops and some classes of affine connected manifolds // Bulletin of RUDN. Series: Mathematics. 1995. No. 2(1). P. 135–243.

REFERENCES

1. Akivis M.A., Shelekhov A.M. [Closed G-structures defined by three fabrics]. In: *Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta. Seriya: Fiziko-matematicheskie nauki* [Scientific notes of Kazan University. Series: physics and mathematics], vol. 153, 2011, b. 3. Kazan, Kazan University Publishing house Publ., 2011. pp. 22–28.
2. Andronikova E.O., Dmitrieva M.N., Matveev O.A., Matveeva N.V. [Homothety and parallel shifts in the projective symmetric spaces with an affine connection]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika* [Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], 2016, no. 3, pp. 8–17.
3. Matveev O.A. [Quasi-group properties of manifolds with trajectories]. In: *Vestnik Moskovskogo pedagogicheskogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika* [Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], no. 3–4, 1998, pp. 10–15.
4. Matveev O.A., Nesterenko E.L. [Algebraic theory of spaces close to symmetric: monograph]. Lambert Academic Publishing Publ., Germany, 2012. 125 p.
5. Matveev O.A., Nesterenko E.L. [On locally invariant spaces with an affine connection]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika i matematika* [Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], no. 2, 2010, pp. 19–27.
6. Matveev O.A., Nesterenko E.L. [Pro-symmetric space]. In: *Vestnik Rossiiskogo universiteta druzhby narodov. Seriya: Matematika*. [Bulletin of RUDN. Series: Mathematics], no. 7 (1). Moscow, Publishing house of the Russian University of Peoples' Friendship Publ., 2000. pp. 114–126.
7. Matveev O.A., Nesterenko E.L. *Universal'nyye algebry v teorii prostranstv affinnoy svyaznosti, blizkikh k simmetricheskim: monografiya* [Universal algebras in the theory of spaces with an affine connection close to symmetric: monograph]. Moscow, Moscow Region State University Publ., 2012. 132 p.
8. Matveyev O.A., Nesterenko E.L. On the quasi-group properties of prosymmetric spaces with zero curvature. In: *Webs and quasigroups*. Tver, 2002. Pp. 78–84.
9. Matveyev O.A., Nesterenko E.L. The real prosymmetric spaces. In: *Non. Associative Algebra and Its Applications. A Series of Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics*. Vol. 246, chapter 19. CRS Press Taylor and Francis Group Publ.. 2006. Pp. 253–260.
10. Sabinin L.V., Matveyev O.A. Geodesic loops and some classes of affine connected manifolds. In: *Bulletin of RUDN. Series: Mathematics*, 1995, no. 2 (1), pp. 135–243.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Андроникова Екатерина Олеговна – магистр, аспирант кафедры прикладной математики Московского государственного технологического университета «СТАНКИН»;
e-mail: ya.kmatveyeva@yandex.ru

Матвеев Олег Александрович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа и геометрии физико-математического факультета Московского государственного областного университета;
e-mail: matveyevoa@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Ekaterina O. Andronikova – Master of Mathematics, postgraduate student at the Department of Applied Mathematics, Moscow State University of Technology “STANKIN”;
e-mail: ya.kmatveyeva@yandex.ru

Oleg A. Matveyev – PhD in Physics and Mathematics, associate professor at the Department of Mathematical Analysis and Geometry of the Faculty of Physic and Mathematics, Moscow Region State University;
e-mail: matveyevoa@mail.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Андроникова Е.О., Матвеев О.А. Левое тождество Бола в теории симметрических пространств аффинной связности // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2017. № 3. С. 6–11.
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-3-6-11

CORRECT REFERENCE TO THE ARTICLE

Andronikova E.O., Matveyev O.A. The Left Bol Identity in the Theory of Symmetric Spaces with an Affine Connection. In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*, 2017, no. 3, pp. 6–11.
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-3-6-11

УДК 539.3
DOI: 10.18384-2310-7251-2017-3-12-22

О ПРИМЕНИМОСТИ ДРОБНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ В ФИЗИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ

***Боброва И.А.*[1]*, Бугримов А.Л.*[2]*, Кузнецов В.С.*[2]**

[1] *Общество с ограниченной ответственностью «Ноледж Лаб»*
141700, Московская область, г. Долгопрудный, Лихачевский проезд, д. 4 стр. 1, Российская Федерация

[2] *Московский государственный областной университет*
105005, г. Москва, ул. Радио, д. 10А, Российская Федерация

Аннотация. В статье рассмотрен вопрос физического содержания и допустимости дифференцирования дробного порядка. Продемонстрирован обобщающий характер применения аппарата производных и интегралов дробного порядка при описании модели среды, обладающей свойствами: упругость – вязкоупругость – вязкая жидкость. Авторы приходят к выводу, что, с одной стороны, проявляется общность физических моделей сплошной среды «упругость – вязкоупругость – вязкая жидкость», с другой стороны, демонстрируется случай обоснованности применения аппарата дробных производных и интегралов дробного порядка к этим задачам.

Ключевые слова: производная дробного порядка, интеграл дробного порядка, упругость, вязкоупругость, вязкая жидкость, канторово множество, фрактал.

APPLICATION OF FRACTIONAL DERIVATIVES IN PHYSICAL MODELS

***I. Bobrova*[1]*, A. Bugrimov*[2]*, V. Kuznetsov*[2]**

[1] *Limited Liability Company “Noledzh Lab”*
Likhachevsky proezd 4/1, 141700 Dolgoprudnyi, Moscow region, Russian Federation

[2] *Moscow Region State University*
ul. Radio 10A, 105005 Moscow, Russian Federation

Abstract. The problem of physical content and admissibility of differentiation of fractional order is considered. The generalizing character of the apparatus of derivatives and integrals of fractional order is demonstrated in describing the model of a medium with the elasticity – viscoelasticity – viscous liquid properties. A conclusion is made that, on the one hand, the generality of the physical models of a continuous ‘elasticity – viscoelasticity – a viscous liquid’ medium is manifested and, on the other hand, the case of the validity of the application of the apparatus of fractional derivatives and integrals of fractional order to these problems is demonstrated.

Key words: fractional derivative, fractional integral, elastic, viscoelasticity, viscous fluid, Cantor set, fractal.

Классические ситуации предусматривают применение производной для определения скорости протекания процесса (в направлении соответствующей оси). Производная второго порядка определяет ускорение, производная третьего порядка применяется для учёта вязкости среды. Вообще же производные более высоких (целочисленных) порядков применяются для разрешения внутренних проблем математических построений.

Аппарат производных и интегралов дробного порядка [11; 12] находит всё более широкое применение в моделировании физических процессов [2; 4; 6; 8; 10]. Поэтому важным является осознание того, в каких задачах и при каких условиях имеет смысл и допустимо применение этого аппарата.

Естественно, к производным и интегралам дробного порядка (далее – производным дробного порядка или дифференцированию дробного порядка) можно предъявить определенные требования. Одно из требований состоит в том, что в случае приближения порядка к целочисленному производная должна совпадать с обычной целочисленной. Это требование, как и другие свойства дифференцирования, выполняется [12].

Представляются обоснованными и другие требования, которые, скорее всего, следует назвать ожиданиями.

Например, производная порядка n функции $f(x) = x^n$, равна:

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(x^n\right)=n!$$

Дробные производные определяются различным образом. Здесь будет рассмотрено определение Римана – Лиувилля [12]:

$$D^{\alpha}_{a+}f\left(x\right)=\frac{1}{\Gamma\left(1-\alpha\right)}\frac{d}{dx}\int\limits_a^x\frac{f\left(t\right)dt}{\left(x-t\right)^{\alpha}} \tag{1}$$

и определение, основанное на обобщении целочисленной производной степенной функции x^n [2]:

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(x^k\right)=\frac{\Gamma\left(k+1\right)}{\Gamma\left(k-n+1\right)}x^{k-n}. \tag{2}$$

В случае дробной производной, порядок которой совпадает с порядком монома, ожидания оправдываются. Действительно, согласно (2):

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(x^n\right)=\frac{\Gamma\left(n+1\right)}{\Gamma\left(1\right)}=n!,$$

и поэтому:

$$\frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}}\left(x^{\alpha}\right)=\frac{\Gamma\left(\alpha+1\right)}{\Gamma\left(1\right)}=\Gamma\left(1+\alpha\right), \tag{3}$$

и, согласно (1), с учётом замены $t = ux$:

$$D_{0+}^{\alpha}\left(x^{\alpha}\right)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{t^{\alpha}dt}{(x-t)^{\alpha}}=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_0^1\frac{(ux)^{\alpha}\,xdu}{x^{\alpha}(1-u)^{\alpha}}=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^1\frac{u^{\alpha}}{(1-u)^{\alpha}}du=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\Gamma(1-\alpha)\cdot\Gamma(1+\alpha)=\Gamma(1+\alpha). \qquad (4)$$

На рис. 1 приведён график, построенный для (3) при $0 \le \alpha \le 3$.

При целочисленном дифференцировании, например, функции $y = \sin(x)$, получается точно такая же функция, но смещенная на величину $\frac{\pi}{2}n$:

$$\frac{d^n}{dx^n}\sin(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}n\right).$$

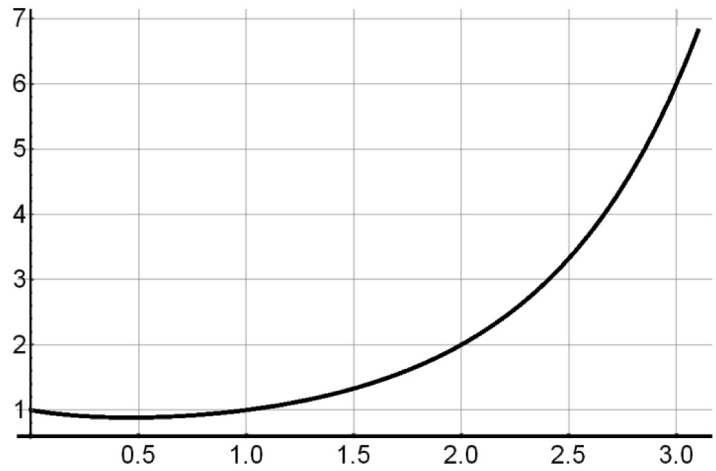


Рис. 1. Значения производной по (3) при совпадении порядка дифференцирования с порядком монома $0 \le \alpha \le 3$

Для дробного порядка α:

$$\frac{d^n}{dx^n}\sin(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}n\right). \qquad (5)$$

Но вычисление дробной производной Римана – Лиувилля функции $y = \sin(x)$ представляет определённые трудности (следует также заметить, что при $x \to 0$ $D_{0+}^{\alpha}(\sin x) \to 0$):

$$D_{0+}^{\alpha}(\sin x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{\sin t dt}{(x-t)^{\alpha}}=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\left[-\frac{1}{1-\alpha}(x-t)^{1-\alpha}\sin t\Big|_0^x+\frac{1}{1-\alpha}\int_0^x(x-t)^{1-\alpha}\cos t dt\right]=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{1-\alpha}\int_0^x (x-t)^{1-\alpha}\cos t dt\right]=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^x\frac{\cos t dt}{(x-t)^{\alpha}},\qquad (6)$$

в отличие от (5). Графики для (5) и построенный численным методом для (6) при $\alpha = 0{,}5$ приведены на рис. 2. Переходный процесс длится не менее периода.

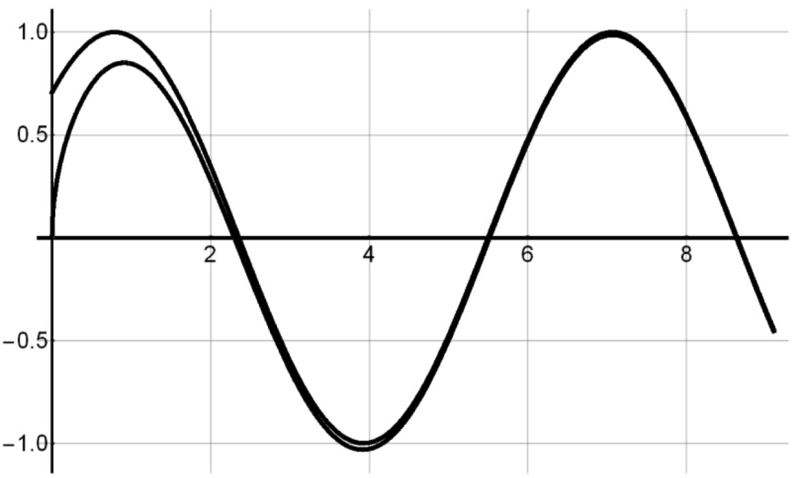


Рис. 2. Производные по (5) и (6) при порядке дифференцирования $\alpha = 0{,}5$

Аналогичная ситуация наблюдается при дифференцировании функции $y = e^x$, в результате которого хотелось бы ожидать инвариантности.

Желаемая инвариантность наблюдается асимптотически при $x \to \infty$:

$$D^{\alpha}_{0+}\left(e^x\right)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{e^t dt}{(x-t)^{\alpha}}=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\left[-\frac{1}{1-\alpha}(x-t)^{1-\alpha}e^t\Big|_0^x+\frac{1}{1-\alpha}\int_0^x(x-t)^{1-\alpha}e^t dt\right]=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{1-\alpha}x^{1-\alpha}+\frac{1}{1-\alpha}\int_0^x(x-t)^{1-\alpha}e^t dt\right]=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{1}{x^{\alpha}}+\int_0^x\frac{e^t}{(x-t)^{\alpha}}dt\right]=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{1}{x^{\alpha}}+\int_0^x\frac{e^{x-u}}{u^{\alpha}}du\right]=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{1}{x^{\alpha}}+e^x\int_0^x u^{1-\alpha-1}e^{-u}du\right]\to e^x,\qquad (7)$$

при $x \to \infty$.

Сравнение результатов для случая $\alpha = 0{,}5$ представлено на рис. 3.

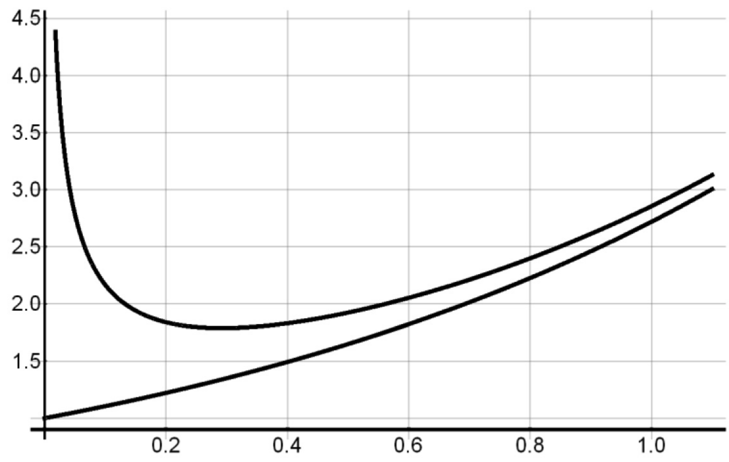


Рис. 3. График функции $y = ex$ и график её производной порядка $\alpha = 0{,}5$

Интересным является вопрос о применимости дифференцирования дробного порядка к фрактальным структурам.

Если рассмотреть процесс формирования фрактала по схеме Канторова множества из элементов единичной массы (рис. 4) и попытаться оценить его общую массу, то можно получить:

$$M = 2^k = e^{k\ln 2} = e^{\frac{\ln L}{\ln 3}\ln 2} = L^{\frac{\ln 2}{\ln 3}} = L^{d_H},$$

где d_H – размерность Хаусдорфа – Безиковича [14].

Рис. 4. Канторово множество (предфрактал четвертого поколения)

Возможны два варианта дифференцирования. Формальное дифференцирование по линейному размеру L, посредством которого определяется плотность (линейная):

$$\rho = \frac{dM}{dL} = \frac{\ln 2}{\ln 3} L^{\frac{\ln 2}{\ln 3}-1} \sim L^{d_H - d_T},$$

где d_T – топологическая размерность.

Такое же формальное дифференцирование применительно к представлению энтропии в пространстве дробной размерности [1] привело к результату, имеющему ясное физическое содержание.

Напротив, дифференцирование массы по фрактальной размерности d_H требует осмысления результата:

$$D_{0+}^{d_H}(M) = \Gamma(1 + d_H).$$

Аналогичное характерно, например, для ковра Серпинского и др.

Наконец, представляет интерес результат применения дифференцирования дробного порядка в теории вязкоупругости. Классический подход к решению задач подобного типа основан на том, что в пространстве образов Лапласа – Карсона постановка задачи вязкоупругости выглядит так же, как задача в упругой постановке (только с другими механическими характеристиками). Поэтому, взяв решение соответствующей упругой задачи, записав его в образах Лапласа – Карсона (при соответствующей замене констант механических характеристик) и применив обратное преобразование, получают решение вязкоупругой задачи [3; 9].

Применение аппарата дифференцирования дробного порядка позволяет расширить понимание постановки такого класса задач.

В механике сплошной среды имеется два (в известном смысле крайних) примера сплошной среды: это упругий материал со связью между деформацией ε и напряжением σ, определяемой законом Гука:

$$\sigma = E\varepsilon, \text{ или } \varepsilon = \frac{1}{E}\sigma,$$

и – в случае вязкой жидкости – законом Ньютона:

$$\sigma = \eta\frac{d\varepsilon}{dt}, \text{ или } \varepsilon = \frac{1}{\eta}\int_0^t \sigma(\xi)\,d\xi,$$

где E – модуль упругости, η – коэффициент вязкости.

Обобщение записи этих задач состоит в применении операций дифференцирования D^β и интегрирования I^α дробного порядка:

$$\sigma = BD^\beta\varepsilon, \text{ или } \varepsilon = AI^\alpha\sigma, \tag{8}$$

где $B = E$, $\beta = 0$, $A = 1/E$, $\alpha = 0$ дают закон Гука, а $B = \eta$, $\beta = 1$, $A = 1/\eta$, $\alpha = 1$ – закон Ньютона.

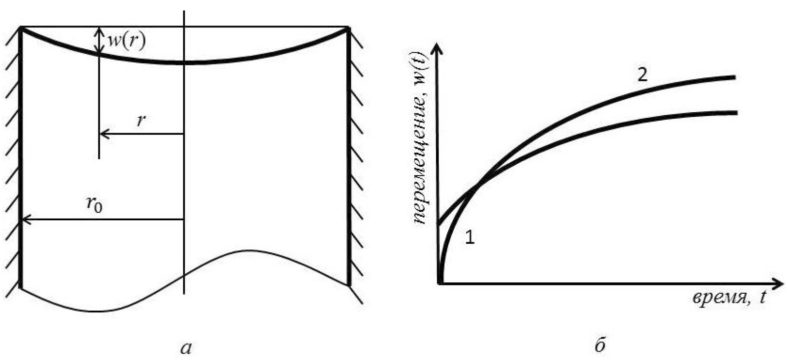


Рис. 5. Смещение материала цилиндра под действием собственного веса

Вертикальное перемещение слоёв цилиндра из закреплённого по внешней поверхности упругого материала с модулем сдвига G и плотностью ρ определяется соотношением [2; 4]:

$$w(r)=\frac{\rho}{4G}\left(r_0^2-r^2\right). \tag{9}$$

Решение соответствующей задачи в вязкоупругой постановке, в рамках которой связь между напряжением и деформацией даётся в форме [3; 9]:

$$\varepsilon(t)=\int_0^t \Pi(t-\xi)\,d\sigma(\xi), \tag{10}$$

в которой ядро ползучести, например, $\Pi(t)=\Pi_0 e^{-qt}$, (где Π_0 и q экспериментально определяемые параметры), имеет вид (кривая 2 на рис. 5, б) [2]:

$$w(r,t)=\frac{\rho}{4G}\left(r_0^2-r^2\right)\left[1-\frac{\Pi_0}{q}\left(1-e^{-qt}\right)\right]. \tag{11}$$

После замены соответствующих констант и обратного преобразования получается решение задачи в вязкоупругой постановке [2].

Следует заметить, что если в соотношении (10) взять ядро Дуффинга [12]: $\Pi(t)=\Pi_0 t^{\alpha}$, то решение примет вид:

$$w(r,t)=\frac{\rho}{4G}\left(r_0^2-r^2\right)t^{\alpha}. \tag{12}$$

Указанные подходы дают мощный метод решения задач теории вязкоупругости [3; 9]. Тем не менее они не дают представлений о возможности существования общей связи в цепочке задач «упругость – вязкоупругость – вязкая жидкость».

Такую связь даёт применение аппарата дробных производных (1) и интегралов дробного порядка [12]:

$$I_{a+}^{\alpha} f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \,. \tag{13}$$

В рамках такого подхода соотношение (12) следует переписать в виде [2]:

$$w(r,t)=\frac{1}{C}\left\{I^{\alpha}\left[\rho\frac{r_0^2-r^2}{2}(t)\right]\right\}=\frac{\rho}{C\Gamma(1+\alpha)}\frac{r_0^2-r^2}{2}\cdot t^{\alpha}. \tag{14}$$

Действительно, дифференцирование порядка $\alpha = 0$ даёт решение задачи упругости, дифференцирование порядка $\alpha \in (0, 1)$ даёт решение задачи теории вязкоупругости, но дифференцирование порядка $\alpha = 1$ приводит к выражению:

$$w(r,t)=\frac{\rho}{C\Gamma(1+\alpha)}\frac{r_0^2-r^2}{2}\cdot t, \quad (15)$$

первая производная по времени которого:

$$v(r)=\frac{dw(r,t)}{dt}=\frac{\rho}{C\Gamma(1+\alpha)}\frac{r_0^2-r^2}{2}, \quad (16)$$

при соответствующей замене констант даёт распределение скоростей при течении вязкой (коэффициент вязкости μ) жидкости по трубе при перепаде давления Δp на длине L [7; 13]:

$$v(r)=\frac{\rho p}{L}\frac{1}{4\mu}\left(r_0^2-r^2\right). \quad (17)$$

Для конкретного вязкоупругого материала параметры C и α соотношения (8) являются экспериментально определяемыми. Их можно определить по данным различных механических испытаний, например, из экспериментов на ползучесть, релаксацию [5]. Применительно к определению параметра α имеется ещё один подход. Он основан на анализе петли механического гистерезиса, имеющей место при циклическом нагружении с круговой частотой ω по закону:

$$\varepsilon(t)=\varepsilon_0\sin\omega t,$$

и поиске решения в виде (5) (в итоге и для (6) – пунктирная кривая на рис. 6):

$$\sigma(t)=\sigma_0\sin(\omega t+\varphi)=\sigma_0\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\alpha\right), \quad (18)$$

в котором сдвиг фазы записан в виде $\varphi=\frac{\pi}{2}\alpha,$ удобном для выделения дробного порядка дифференцирования α.

В этом случае петля механического гистерезиса имеет форму эллипса, главная ось которого наклонена под углом β (рис. 6), который связан со сдвигом фазы φ (с порядком дифференцирования α) соотношением [4]:

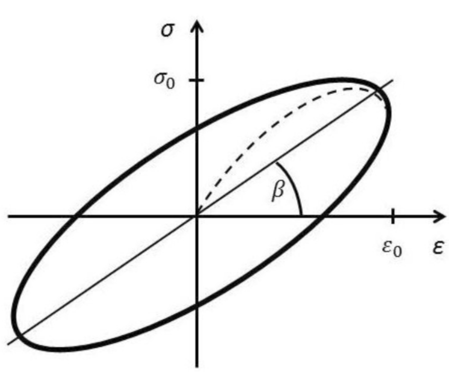


Рис. 6. Механический гистерезис вязкоупругого материала

$$\mathrm{tg}2\beta = \frac{2\varepsilon_0\sigma_0}{\varepsilon_0^2 - \sigma_0^2}\cos\varphi\ , \qquad (19)$$

в размерных осях или определяется радиусом окружности $R = \sin\varphi$ – в безразмерных осях.

Таким образом, на основании изложенного, можно сделать вывод, что, с одной стороны, проявляется общность физических моделей сплошной среды «упругость – вязкоупругость – вязкая жидкость», с другой стороны, демонстрируется случай обоснованности применения аппарата дробных производных и интегралов дробного порядка к этим задачам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баланкин А.С., Бугримов А.Л. Фрактальная теория пластичности полимеров // Высокомолекулярные соединения. Серия А: Физика полимеров. Т. 34. 1992. № 5. С. 129–132.
2. Бугримов А.Л. Об одном подходе к построению физических соотношений обобщенного вида в механике деформируемого твёрдого тела // Каучук и резина. 1994. № 4. С. 28–32.
3. Ильюшин А.А., Победря Б.Е. Основы математической теории термовязко-упругости. М.: Наука. 1970. 280 с.
4. Колотилов А.В., Бугримов А.Л. Прочность и механическая надёжность зарядов твердого топлива и средств пироавтоматики. М.: Министерство обороны СССР, 1990. 135 с.
5. Колтунов М.А. Ползучесть и релаксация. М.: Высшая школа, 1976. 277 с.
6. Корчагина А.Н. Использование производных дробного порядка для решения задач механики сплошных сред // Известия Алтайского государственного университета. Т. 1. 2014. № 1 (81). С. 65–67.
7. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика / учеб. под ред. И.А. Кибеля; 4-е изд., перераб. и доп. М.: Физматгиз, 1963. 728 с.
8. Мержиевский Л.А., Корчагина А.Н. Моделирование распространения теплового импульса во фрактальной среде // Экстремальные состояния вещества. Детонация. Ударные волны. Труды международной конференции «XI Харитоновские тематические научные чтения», Саров, 16–20 марта 2009 г. Саров, 2009. С. 250–254.
9. Москвитин В.В. Сопротивление вязко-упругих материалов применительно к зарядам ракетных двигателей на твердом топливе. М.: Наука, 1972. 328 с.
10. Нигматуллин Р.Р. Дробный интеграл и его физическая интерпретация // Теоретическая и математическая физика. Т. 90. 1992. № 3. С. 354–368.
11. Риман Б. Опыт обобщения действий интегрирования и дифференцирования // Риман Б. Сочинения / пер с нем. под ред. В.Л. Гончарова, М.; Л.: Государственное издательство теоретико-технической литературы, 1948. С. 262–275.
12. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
13. Седов Л.И. Механика сплошной среды: в 2 т. Т. 2. М.: Наука. 1976. 568 с.
14. Федер Е. Фракталы / пер. с англ. М.: Мир. 1991. 254 с.

REFERENCES

1. Balankin A.S., Bugrimov A.L. [The fractal theory of plasticity of polymers]. In: *Vysokomolekulyarnye soedineniya. Seriya A: Fizika polimerov* [High-molecular compounds. Series A: Physics of Polymers], vol. 34, 1992, no. 5, pp. 129–132.

2. Bugrimov A.L. [About one approach to the construction of the physical proportions of generalized form of the mechanics of deformable solids]. In: *Kauchuk i rezina* [Rubber and rubber], 1994, no. 4, pp. 28–32.
3. Il'yushin A.A., Pobedrya B.E. *Osnovy matematicheskoi teorii termovyazko-uprugosti* [Foundations of the mathematical theory of thermovisco-elasticity]. Moscow, Nauka Publ., 1970. 280p.
4. Kolotilov A.V., Bugrimov A.L. *Prochnost' i mekhanicheskaya nadezhnost' zaryadov tverdogo topliva i sredstv piroavtomatiki* [Durability and mechanical reliability of the charge of solid fuel and means of pyroautomatics]. Moscow, Ministry of Defense of the USSR Publ., 1990. 135 p.
5. Koltunov M.A. *Polzuchest' i relaksatsiya* [Creep and relaxation]. Moscow, Higher school Publ., 1976. 277 p.
6. Korchagina A.N. [The use of fractional order derivatives for solving problems of continuum mechanics]. In: *Izvestiya Altaiskogo gosudarstvennogo universiteta* [Proceedings of the Altai State University], vol. 1, 2014, no. 1 (81), pp. 65–67.
7. Kochin N.E., Kibel' I.A., Roze N.V. *Teoreticheskaya gidromekhanika* [Theoretical fluid mechanics] Moscow, Physico-mathematical state publishing house Publ., 1963. 728 p.
8. Merzhievskii L.A., Korchagina A.N. [Modeling of the propagation of a heat pulse in fractal environment]. In: *Ekstremal'nye sostoyaniya veshchestva. Detonatsiya. Udarnye volny. Trudy mezhdunarodnoi konferentsii «XI Kharitonovskie tematicheskie nauchnye chteniya», Sarov, 16–20 marta 2009 g* [Extreme States of Matter. Detonation. Shock Waves. Proceedings of the International Conference "XI Kharitonov thematic scientific readings". Sarov, March 16–20, 2009]. Sarov, 2009. pp. 250–254.
9. Moskvitin V.V. *Soprotivleniye vyazko-uprugikh materialov primenitel'no k zaryadam raketnykh dvigateley na tverdom toplive* [Resistance of viscoelastic materials as applied to charges of solid-propellant rocket engines]. Moscow, Nauka Publ., 1972. 328 p.
10. Nigmatullin R.R. [Fractional integral and its physical interpretation]. In: *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika* [Theoretical and Mathematical Physics], vol. 90, 1992, no. 3, pp. 354–368.
11. Riemann B. [The experience of generalization of the action of integration and differentiation]. In: *Riemann B. Sochineniya* [Works]. Moscow, Leningrad, State Publishing House of Teoretiko-technical Literature Publ., 1948. pp. 262–275.
12. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. *Integraly i proizvodnye drobnogo poryadka i nekotorye ikh prilozheniya* [Integrals and derivatives of fractional order and some of their applications]. Minsk, Science and Publ., 1987. 688 p.
13. Sedov L.I. *Mekhanika sploshnoy sredy: v 2 t. T. 2* [Mechanics of the continuous medium: in 2 vols.]. Vol. 2. Moscow, Nauka Publ., 1976. 568 p.
14. Feder J. *Fractals*. New York: Plenum Press, 1988.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Бугримов Анатолий Львович – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой вычислительной математики и методики преподавания математики Московского государственного областного университета;
e-mail: al.bugrimov@mgou.ru

Кузнецов Вячеслав Сергеевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры вычислительной математики и методики преподавания математики Московского государственного областного университета;
e-mail: vskusn@mail.ru

Боброва Ирина Александровна – разработчик алгоритмов по математике Общества с ограниченной ответственностью «Ноледж Лаб»;
e-mail: ia.bobrova94@gmail.com

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Anatoly L. Bugrimov – Doctor in Technical Sciences, professor, head of the Department of Computational Mathematics and Methods of Teaching Mathematics, Moscow State Regional University;
e-mail: al.bugrimov@mgou.ru

Vyacheslav S. Kuznetsov – PhD in Physics and Mathematics, associate professor of the Department of Computational Mathematics and Methods of Teaching Mathematics, Moscow Region State University;
e-mail: vskusn@mail.ru

Irina A. Bobrova – Developer of algorithms for mathematics of the Limited Liability Company "Noledzh Lab";
e-mail: ia.bobrova94@gmail.com

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Боброва И.А., Бугримов А.Л., Кузнецов В.С. О применимости дробных производных в физических моделях // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2017. № 3. С. 12–22.
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-3-12-22

CORRECT REFERENCE TO THE ARTICLE

Bobrova I.A., Bugrimov A.L., Kuznetsov V.S. Application of Fractional Derivatives in Physical Models. In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*, 2017, no. 3, pp. 12–22.
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-3-12-22

УДК 517.9, 519.6
DOI: 10.18384-2310-7251-2017-3-23-33

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ЧЕТЫРЁХМЕРНОЙ МОДЕЛИ МЕЖВИДОВОЙ КОНКУРЕНЦИИ С ПОМОЩЬЮ ПЕРВОГО МЕТОДА ЛЯПУНОВА

Масина О.Н., Сидоров А.В., Токарев А.М.
Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина
399770, Липецкая область, г. Елец, ул. Коммунаров, д. 28, Российская Федерация

Аннотация. В работе проведён анализ устойчивости модели популяционной динамики взаимодействия четырёх конкурентов. Модель представляет собой автономную систему обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений. С помощью вычислительного пакета найдены состояния равновесия исследуемой системы. Получены условия устойчивости на основе первого метода Ляпунова. Результаты исследования могут быть использованы при решении задач устойчивости нелинейных моделей динамики популяций.

Ключевые слова: популяционная динамика, устойчивость, нелинейные дифференциальные уравнения, конкуренция, математическое моделирование.

ANALYSIS OF STABILITY OF A FOUR-DIMENSIONAL MODEL OF TRANS-SPECIES COMPETITION BY LYAPUNOV’S FIRST METHOD

O. Masina, A. Sidorov, A. Tokarev
I.A. Bunin Yelets State University
ul. Kommunarov 28, 399770 Yelets, Lipetsk region, Russian Federation

Abstract. We report the analysis of stability for the population dynamics model of four competitors. The model represents an autonomous system of ordinary nonlinear differential equations. The equilibrium states of the system under study are found by means of a computational package. The conditions of stability are obtained on the basis of Lyapunov’s first method. The results of the study can be used for solving stability problems of nonlinear models of the population dynamics.

Key words: population dynamics, stability, nonlinear differential equations, competition, mathematical modeling.

Одной из актуальных задач при исследовании моделей популяционной динамики является анализ их устойчивости [1; 2; 4; 6], позволяющий оценить способность экологической системы противостоять неблагоприятным внешним факторам окружающей среды.

В настоящее время динамическая теория биологических популяций представляет собой самостоятельное научное направление. Для популяций характерны разнообразные процессы и взаимодействия, определяющие вид математической модели, такие как рождение и гибель организмов, хищничество, паразитизм, мутуализм, миграция, конкуренция и другие.

Модели, учитывающие конкуренцию видов, рассматривались во многих работах, например, [2; 5; 7–10; 12]. Детально исследованными являются двумерные модели [2; 5]. Показано, что в двумерных системах возможно существование устойчивых положений равновесия, при которых сосуществуют оба вида. Данный режим реализуется, если произведение интенсивностей внутривидовой регуляции превышает произведение интенсивностей межвидовой регуляции. В противном случае возможно существование только одного конкурента.

Возникновение конкуренции более двух видов в природе встречается достаточно редко, однако исследование многомерных математических моделей конкуренции по ряду причин представляет определенный интерес. В частности, анализ двумерных моделей демонстрирует возможность существования устойчивых положений равновесия в указанных системах.

Исследование моделей межвидовой конкуренции трёх и более видов проводилось в [7; 8; 10; 12]. В [12] путём изучения изоклин проанализировано поведение решений системы с тремя конкурентами. В [7; 8; 10] проводилось исследование многомерных систем Лотки–Вольтерра. В [7] показана возможность существования периодических решений в системах трёх конкурентов. В [9] получены условия устойчивости обобщенной модели Колмогорова.

При изучении моделей популяционной динамики представляет интерес исследование многомерных моделей конкуренции, в которых, помимо конкурентов, присутствуют виды, оказывающие положительное или нейтральное влияние на численность конкурирующих видов. В [2] рассмотрена модель, описывающая динамику системы «хищник–жертва–жертва» с учётом межвидовой конкуренции жертв. Для указанной модели установлено, что при некоторых значениях параметров присутствие хищника в сообществе может обеспечить сосуществование конкурирующих популяций жертв, невозможное в отсутствие хищника. Четырёхмерная модель «хищник–хищник–жертва–жертва» с учётом конкуренции жертв рассмотрена в [11]. Получены условия, при которых ни один из видов не находится на грани вымирания, приведена геометрическая интерпретация указанных условий, построены фазовые портреты.

В настоящей работе рассматривается популяционная модель четырёх конкурирующих видов, взаимодействующих согласно приведенной схеме рис. 1.

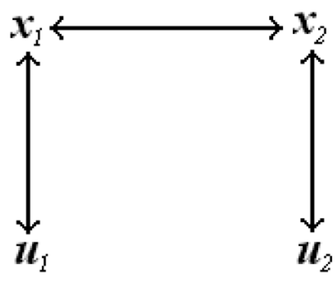


Рис. 1. Схема взаимодействия между популяциями в рассматриваемой модели

Здесь x_1, x_2, u_1, u_2 – плотности численностей видов. Согласно модели, вид x_1 конкурирует с особями x_2, u_1. Вид x_2 конкурирует с особями x_1, u_2, вид u_1 конкурирует только с особями x_1, а вид u_2 только с особями x_2. Популяции u_1 и u_2 нейтральны друг по отношению к другу. Стрелки означают конкуренцию между видами. Модель не учитывает неоднородность распределения популяций в пространстве и внутривидовую конкуренцию. Предполагается, что размножающие свойства каждого вида определяются только их численностями.

При построении математической модели будем исходить из обобщенной системы уравнений Лотки–Вольтерра, которая в двумерном случае выглядит следующим образом [2]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1\left(\alpha_{11}+\alpha_{12}x_1+\alpha_{13}x_2\right), \\ \dot{x}_2 &= x_2\left(\alpha_{21}x_1+\alpha_{22}+\alpha_{23}x_2\right). \end{aligned} \tag{1}$$

В системе уравнений (1) x_1, x_2, – численности взаимодействующих видов. В зависимости от соотношения между знаками параметров α_{11}, α_{12}, α_{13}, α_{21}, α_{22}, α_{23} модель (1) может описать:

– конкуренцию, если параметры при различных переменных имеют отрицательные знаки ($\alpha_{13}, \alpha_{21} < 0$);

– взаимодействие типа «хищник–жертва», если параметры при различных переменных имеют противоположные знаки ($\alpha_{13} > 0$, $\alpha_{21} < 0$ или $\alpha_{13} < 0$, $\alpha_{21} > 0$);

– симбиоз, если параметры при различных переменных положительны ($\alpha_{13}, \alpha_{21} > 0$);

– взаимодействие, при котором только один вид оказывает отрицательное влияние на другой, если один из коэффициентов при различных переменных равен нулю, а второй меньше нуля ($\alpha_{13} = 0$, $\alpha_{21} < 0$ или $\alpha_{13} < 0$, $\alpha_{21} = 0$).

Модель (1) допускает естественное обобщение на случай многомерных систем путём добавления соответствующего количества переменных и параметров. Руководствуясь описанными выше принципами, запишем систему уравнений Лотки–Вольтерра для случая взаимодействия четырёх популяций x_1, x_2, u_1, u_2:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1\left(\alpha_{11}+\alpha_{12}x_1+\alpha_{13}x_2+\alpha_{14}u_1+\alpha_{15}u_2\right), \\ \dot{x}_2 &= x_2\left(\alpha_{21}x_1+\alpha_{22}+\alpha_{23}x_2+\alpha_{24}u_1+\alpha_{25}u_2\right), \\ \dot{u}_1 &= u_1\left(\alpha_{31}x_1+\alpha_{32}x_2+\alpha_{33}+\alpha_{34}u_1+\alpha_{35}u_2\right), \\ \dot{u}_2 &= u_2\left(\alpha_{41}x_1+\alpha_{42}x_2+\alpha_{43}u_1+\alpha_{44}+\alpha_{45}u_2\right). \end{aligned} \tag{2}$$

В рассматриваемой модели (см. рис. 1) не учитывается внутривидовая конкуренция, поэтому коэффициенты $\alpha_{12} = \alpha_{23} = \alpha_{34} = \alpha_{45} = 0$. Виды u_1, u_2 конкурируют только с видами x_1, x_2, соответственно, не оказывая никакого влияния на остальные популяции, поэтому коэффициенты $\alpha_{15} = \alpha_{24} = \alpha_{32} = \alpha_{35} = \alpha_{41} = \alpha_{43} = 0$. Поскольку рассматривается модель конкуренции, коэффициенты α_{13}, α_{14}, α_{21}, α_{25}, α_{31}, $\alpha_{42} = 0$. Рассмотрим случай, когда интенсивность взаимодействия популяций u_2, x_2 одинакова ($\alpha_{25} = \alpha_{42}$) и введём обозначения $\alpha_{11} = -b$, $\alpha_{22} = -a$, $\alpha_{33} = -m$, $\alpha_{44} = -c$, $\alpha_{13} = \alpha_{31} = -1$, $\alpha_{14} = -\beta$, $\alpha_{21} = -\alpha$, $\alpha_{25} = \alpha_{42} = -\gamma$, где параметры b, β, a, α, γ, m, c – положительные постоянные. Тогда систему уравнений (2) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_1 = x_1 \cdot (b - x_2 - \beta u_1),\\
&\dot{x}_2 = x_2 \cdot (a - \alpha x_1 - \gamma u_2),\\
&\dot{u}_1 = u_1 \cdot (m - x_1),\\
&\dot{u}_2 = u_2 \cdot (c - \gamma x_2),
\end{aligned} \qquad (3)$$

Анализ на выживаемость представленной модели сводится к исследованию устойчивости системы в положениях равновесия (особых точках). Положения равновесия, найденные с помощью математического пакета MathCAD, представлены ниже:

$$P_1(0,0,0,0),\ P_2\left(m, \frac{c}{\gamma}, \frac{b - c/\gamma}{\beta}, \frac{a-\gamma m}{\gamma}\right),\ P_3\left(m, 0, \frac{b}{\beta}, 0\right),$$

$$P_4\left(0, \frac{c}{\gamma}, 0, \frac{a}{\gamma}\right),\ P_5\left(\frac{a}{\gamma}, b, 0, 0\right). \qquad (4)$$

Согласно [3], проведём линеаризацию нелинейной системы (3) в окрестности состояний равновесия. Характеристическое уравнение имеет вид:

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} b - x_2 - \beta u_1 - \lambda & -x_1 & -\beta x_1 & 0 \\ -\alpha x_2 & a - \alpha x_1 - \gamma u_2 - \lambda & 0 & -\gamma x_2 \\ -u_1 & 0 & m - x_1 - \lambda & 0 \\ 0 & -\gamma u_2 & 0 & c - \gamma x_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0. \qquad (5)$$

Исследуем устойчивость состояния равновесия P_1. Характеристическое уравнение в этом случае представляет собой алгебраическое уравнение четвёртой степени:

$$a_0\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0, \qquad (6)$$

где полиномиальные коэффициенты имеют вид

$$\begin{aligned}
&a_0 = 1,\\
&a_1 = -a - b - c - m,\\
&a_2 = ab + fc + bc + am + bm + cm,\\
&a_3 = abc + abm + acm + bcm,\\
&a_4 = abcm.
\end{aligned} \qquad (7)$$

Согласно критерию Гурвица [3], $\Delta_1 = a_1 < 0$ для любых a, b, c, $m > 0$, поэтому обязательно найдётся хотя бы один корень уравнения (6), который будет иметь положительную действительную часть, и в соответствии с методом первого приближения состояние равновесия P_1 является неустойчивым.

Рассмотрим поведение фазовых траекторий системы в окрестности критической точки P_1. Для значений параметров $b = 15$, $\beta = \alpha = \gamma = m = c = 5$, $a = 35$ все корни характеристического уравнения (3) будут действительными и положительными.

На (рис. 2) представлена трёхмерная проекция фазового портрета (x_1, x_2, u_1) для состояния равновесия P_1.

Траектории построены на основе численного решения системы (1) методом Рунге–Кутта в пакете Mathcad. По виду траекторий можно заключить, что состояние равновесия является неустойчивым узлом. Аналогичный тип имеют фазовые траектории и в других трёхмерных проекциях.

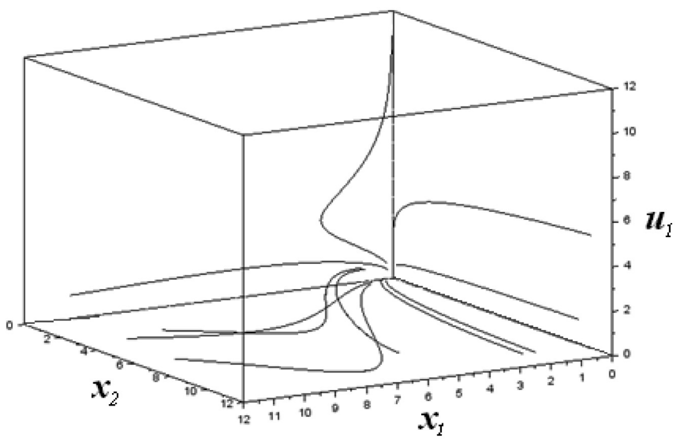


Рис. 2. Трёхмерная проекция фазового портрета системы (1), соответствующая состоянию равновесия P_1

Исследуем устойчивость положения равновесия $P_2\left(m, \dfrac{c}{\gamma}, \dfrac{b - c/\gamma}{\beta}, \dfrac{a-\gamma m}{\gamma}\right)$.

Коэффициенты характеристического уравнения (4), которое в данном случае является биквадратным уравнением, равны

$$a_0 = 1,$$
$$a_1 = 0,$$
$$a_2 = \alpha cm - bm - ac + \frac{cm}{\gamma} - \frac{\alpha cm}{\gamma},$$
$$a_3 = 0,$$
$$a_4 = \frac{\alpha c^2 m^2}{\gamma} - \frac{ac^2 m}{\gamma} - \alpha bcm^2 + abcm. \qquad (7)$$

По критерию Гурвица $\Delta_1 = a_1 = 0$, поэтому положение равновесия P_2 является неустойчивым.

Проанализируем характер решения в данной точке, построив проекции фазового портрета системы. Для значений параметров

$b = 15$, $\beta = \alpha = \gamma = m = c = 5$, $a = 35$ все корни уравнения (6) действительны, $\lambda_{1,3} > 0$, $\lambda_{2,4} < 0$.

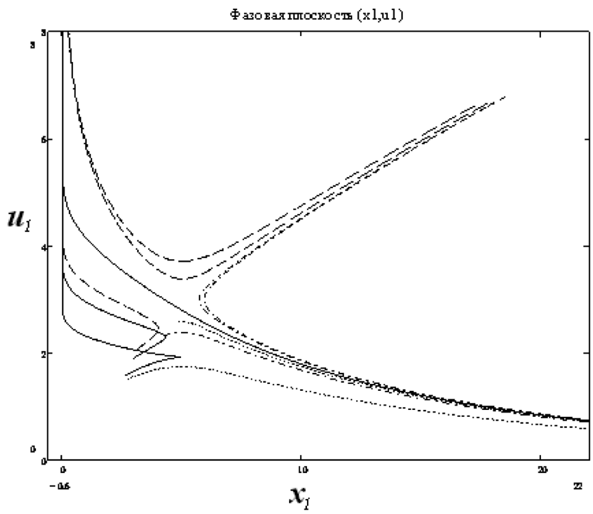


Рис. 3. Проекция фазового портрета, соответствующего состоянию равновесия P_2, на плоскость (x_1, u_1)

На рис. 3 представлена проекция фазового портрета системы в точке P_2 на плоскость (x_1, u_1). В соответствии с [1] такое состояние равновесия является седлом.

На рис. 4 приведена трёхмерная проекция фазового портрета (x_1, x_2, u_1) в состоянии равновесия P_2. Можно выделить траектории, соответствующие как седлу, так и неустойчивому узлу.

Таким образом, построенные проекции фазового портрета в точке P_2 подтверждают выводы, полученные на основе качественного анализа поведения системы вблизи состояния равновесия P_2.

Рассмотрим положение равновесия $P_3\left(m, 0, \dfrac{b}{\beta}, 0\right)$. Коэффициенты характеристического уравнения (4) в этом случае имеют вид:

$$\begin{aligned}
a_0 &= 1,\\
a_1 &= \alpha m - c - a,\\
a_2 &= ac - bm - \alpha cm,\\
a_3 &= abm + bcm - \alpha bm^2,\\
a_4 &= \alpha bcm^2 - abcm.
\end{aligned} \tag{9}$$

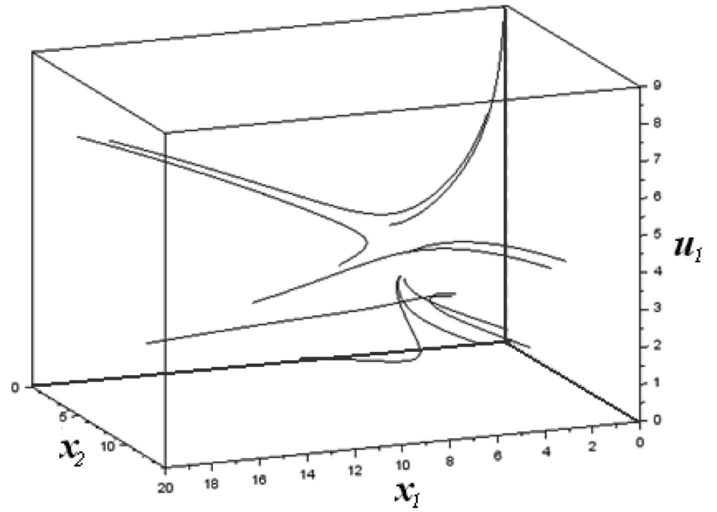


Рис. 4. Трёхмерная проекция фазового портрета (x_1, x_2, u_1) системы (1), соответствующего состоянию равновесия P_2

Применение теоремы Гурвица в общем виде приводит к значительным трудностям, т. к. приходится решать систему 4-х нелинейных неравенств с шестью переменными. Поэтому ограничимся исследованием устойчивости системы (1) для значений коэффициентов $b = 15$, $\beta = \alpha = \gamma = m = c = 5$, $a = 35$. Характеристическое уравнение в этом случае имеет три положительных и один отрицательный корень, что соответствует неустойчивому положению равновесия. На рис. 5 изображена трёхмерная проекция фазового портрета (x_1, x_2, u_1) для этого случая. Фазовые траектории соответствуют неустойчивому седлу с узлом.

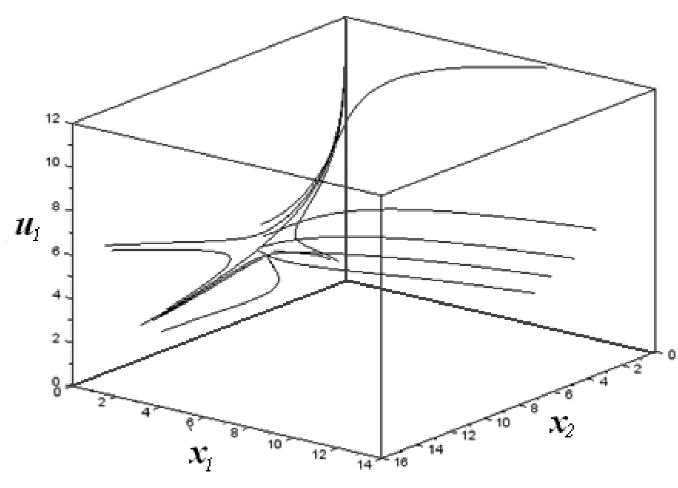


Рис. 5 Трёхмерная проекция фазового портрета (x_1, x_2, u_1) системы (1), соответствующего состоянию равновесия P_3

В точке $P_4\left(0,\dfrac{c}{\gamma},0,\dfrac{a}{\gamma}\right)$ характеристическое уравнение для тех же значений коэффициентов системы (1) также имеет три положительных и один отрицательный корень. Поэтому характер решения соответствует положению равновесия P_2.

Исследуем состояние равновесия $P_5\left(\dfrac{a}{\gamma},b,0,0\right)$. Для значений параметров $b = 15$, $\beta = \alpha = \gamma = m = c = 5$, $a = 35$ характеристическое уравнение имеет три отрицательных и один положительный корень, поэтому положение равновесия является неустойчивым.

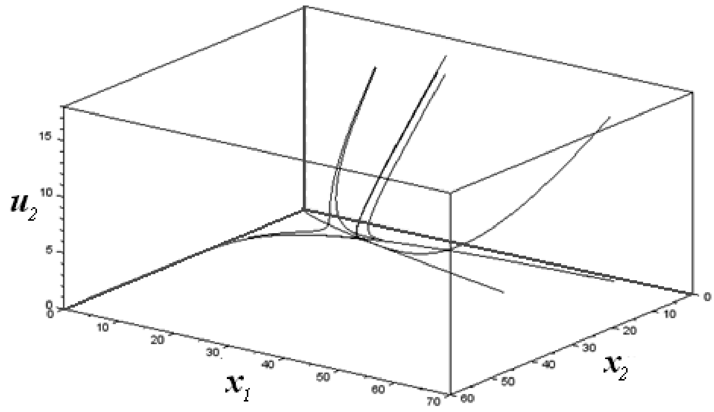


Рис. 6. Трёхмерная проекция фазового портрета (x_1, x_2, u_2) системы (1), соответствующего состоянию равновесия P_5

На рис. 6 приведена трёхмерная проекция (x_1, x_2, u_2) фазового портрета в окрестности точки P_5. В этом случае траектории, приближаясь к критической точке, далее удаляются от неё, что соответствует неустойчивому положению равновесия типа седло.

Таким образом, на основании вышеизложенного можно заключить:

– в системе, описываемой дифференциальными уравнениями (3), нулевое положение равновесия всегда неустойчиво. Для случая $b = 15$, $\beta = \alpha = \gamma = m = c = 5$, $a = 35$, все корни характеристического уравнения положительны, а сама критическая точка является неустойчивым узлом, численности выживших популяций неограниченно возрастают;

– положение равновесия, в котором начальные численности всех особей не равны нулю, также является всегда неустойчивым. Для значений коэффициентов $b = 15$, $\beta = \alpha = \gamma = m = c = 5$, $a = 35$ системы (1) два корня характеристического уравнения положительны и два корня отрицательны. На двумерных и трёхмерных проекциях фазового портрета в окрестности положения равновесия можно выделить траектории типа седло и неустойчивый узел, соответствующие случаю выживания двух или одной популяций при неограниченном возрастании численностей выживших видов;

– показано, что критические точки $P_3\left(m, 0, \frac{b}{\beta}, 0\right)$; $P_4\left(0, \frac{c}{\gamma}, 0, \frac{a}{\gamma}\right)$; $P_5\left(\frac{a}{\gamma}, b, 0, 0\right)$ для значений коэффициентов $b = 15$, $\beta = \alpha = \gamma = m = c = 5$, $a = 35$, также являются неустойчивыми. Для более детальных выводов об устойчивости этих точек при произвольных значениях параметров системы (1) требуются дополнительные аналитические исследования.

Полученные результаты свидетельствуют, что в зависимости от соотношения между значениями начальных численностей, возможно существование одной или двух популяций. Причём способны выживать одновременно только нейтральные друг по отношению к другу виды, численности которых при этом неограниченно возрастают, что является следствием неустойчивости исследуемой модели (3). Данные результаты могут быть использованы для дальнейшего развития методов построения и анализа устойчивости нелинейных моделей популяционной динамики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров А.Ю., Платонов А.В., Старков В.Н., Степенко Н.А. Математическое моделирование и исследование устойчивости биологических сообществ. СПб.: Соло, 2006. 272 с.
2. Базыкин А.Д. Нелинейная динамика взаимодействующих популяций: монография. Сер. Математическая биология, физика. Москва, Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2003. 368 с.
3. Ла-Салль Ж., Лефшец С. Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. М.: Мир, 1964. 168 с.
4. Пых Ю.А. Равновесие и устойчивость в моделях популяционной динамики. М.: Наука, 1983. 182 с.
5. Разжевайкин В.Н. Модели динамики популяций. М.: Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН, 2006. 88 с.
6. Свирежев Ю.М., Логофет Д.О. Устойчивость биологических сообществ. М.: Наука, 1978. 352 с.
7. Arnedo A., Coullet P., Peyraud J., Tresser C. Strange attractors in Volterra equations for species in competition // J. Math. Biol. Vol. 14. 1982. No. 2. P. 153–157.
8. Coste J., Peyraud J, Coullet P. Asyptotic bahaviors in the dynamics of competing species // SIAM J. Vol. 36. Appl. Math. 1979. P. 516–543.
9. Fredman H.I., Waltman P. Persistence in a Model of Three Competitive Populations // Mathematical Biosciences. Vol. 73. 1985. P. 89–101.
10. Gilpin M.E. Limit cycles in competitive communities // Amer. Natur. Vol. 109. 1975. P. 51–60.
11. Kirlinger G. Permanence in Lotka–Volterra Equations: Linked Prey–Predator Systems // Mathematical Biosciences. Vol. 82. 1986. No. 2. P. 165–191.
12. Resigno A. The struggle for life: II. Three competitors // Bull. Math. Biophys. 1968. Vol. 30. P. 291–298.

REFERENCES

1. Aleksandrov A.Yu., Platonov A.V., Starkov V.N., Stepenko N.A. *Matematicheskoe modelirovaniye i issledovanie ustoichivosti biologicheskikh soobshchestv* [Mathematical modeling and study of stability of biological communities]. St. Petersburg, Solo Publ., 2006. 272 p.
2. Bazykin A.D. *Nelineynaya dinamika vzaimodeistvuyushchikh populyatsii* [Nonlinear dynamics of interacting populations]. Moscow, Izhevsk, Institute of Computer Research Publ., 2003. 368 p.
3. La Salle J., Lefschetz S. Stability by Lyapunov's direct method with Applications (New York: Academic Press, 1961).
4. Pykh Yu.A. *Ravnovesie i ustoichivost' v modelyakh populyatsionnoi dinamiki* [Equilibrium and stability in models of population dynamics]. Moscow, Nauka Publ., 1983. 182 p.
5. Razzhevaikin V.N. *Modeli dinamiki populyatsii* [Model for the dynamics of populations]. Moscow, Computing center after named A.A. Dorodnicyn RAS, 2006. 88 p.
6. Svirezhev Yu.M., Logofet D.O. *Ustoichivost' biologicheskikh soobshchestv* [Stability of biological communities]. Moscow, Nauka Publ., 1978. 352 p.
7. Arnedo A., Coullet P., Peyraud J., Tresser C. Strange attractors in Volterra equations for species in competition. In: *J. Math. Biol.*, vol. 14, 1982, no. 2, pp. 153–157.
8. Coste J. Peyraud J, and Coullet P. Asyptotic bahaviors in the dynamics of competing species. In: *SIAM J*, vol. 36, Appl. Math. 1979, pp. 516–543.
9. Fredman H.I., Waltman P. Persistence in a Model of Three Competitive Populations. In: *Mathematical Biosciences*, vol. 73, 1985, pp. 89–101.
10. Gilpin M.E. Limit cycles in competitive communities. In: *Amer. Natur.*, vol. 109, 1975, pp. 51–60
11. Kirlinger G. Permanence in Lotka–Volterra Equations: Linked Prey–Predator Systems. In: *Mathematical Biosciences*, vol. 82, 1986, no. 2, pp. 165–191.
12. Resigno A. The struggle for life: II. Three competitors. In: *Bull. Math. Biophys*, 1968, vol. 30, pp. 291–298.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Масина Ольга Николаевна – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического моделирования и компьютерных технологий Елецкого государственного университета им. И.А. Бунина;
e-mail: olga121@inbox.ru

Сидоров Александр Валентинович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физики и её преподавания Елецкого государственного университета им. И.А. Бунина;
e-mail: dirnusir@mail.ru

Токарев Андрей Михайлович – аспирант кафедры математического моделирования и компьютерных технологий Елецкого государственного университета им. И.А. Бунина;
e-mail: dirnusir@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Olga N. Masina – Doctor in Physics and Mathematics, professor, head of the Department of Mathematical Modeling and Computer Technologies, I.A. Bunin Yelets State University;
e-mail: olga121@inbox.ru

Alexander V. Sidorov – PhD in Physics and Mathematics, associate professor at the Department of Physics and its Teaching, I.A. Bunin Yelets State University;
e-mail: dirnusir@mail.ru

Andrei M. Tokarev – postgraduate student at the Department of Mathematical Modeling and Computer Technologies, I.A. Bunin Yelets State University;
e-mail: dirnusir@mail.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Масина О.Н., Сидоров А.В., Токарев А.М. Анализ устойчивости четырёхмерной модели межвидовой конкуренции с помощью первого метода Ляпунова // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2017. № 3. С. 23–33.
DOI: 10.18384-2310-7251-2017-3-23-33

CORRECT REFERENCE TO THE ARTICLE

Masina O.N, Sidorov A.V., Tokarev A.M. Analysis of Stability of a Four-Dimensional Model of the Trans-Species Competition by Lyapunov's First Method. In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics,* 2017, no. 3, pp. 23–33.
DOI: 10.18384-2310-7251-2017-3-23-33

УДК 517.956.35
DOI: 10.18384-2310-7251-2017-3-34-42

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯ С НЕЛИНЕЙНОЙ ДИССИПАЦИЕЙ И НЕЛИНЕЙНЫМ ИСТОЧНИКОМ

Рустамова С.О.
Институт Математики и Механики НАН Азербайджана
AZ 1141, г. Баку, ул. Б. Вахабзаде, д. 9, Азербайджанская Республика

Аннотация. В работе исследуется смешанная задача для систем полулинейных гиперболических уравнений с нелинейной диссипацией и фокусирующими, а также с “дефокусирующими” источниками. Теорема о локальной разрешимости доказана на основе комбинированного метода регуляризации и метода Галеркина. Для систем с фокусирующим источником получена априорная оценка, из которой следует соответствующая теорема о глобальной разрешимости. В случае систем гиперболических уравнений с «дефокусирующими» источником доказано, что если порядок роста по совокупности переменных не превышает порядок роста диссипативного слагаемого, то имеет место глобальная разрешимость.

Ключевые слова: гиперболическая система, смешанная задача, глобальная разрешимость, нелинейная диссипация.

A MIXED PROBLEM FOR SYSTEMS OF SEMILINEAR HYPERBOLIC EQUATIONS WITH NONLINEAR DISSIPATION AND NONLINEAR SOURCE

S. Rustamova
Institute of Mathematics and Mechanics of NAN Azerbaijan
9, B. Vahabzadeh st., Baku, AZ 1141, Republic of Azerbaijan

Abstract. We study a mixed problem for systems of semilinear hyperbolic equations with nonlinear dissipation and focusing, as well as with ‘defocusing’ sources. Using the combined method of regularization and the Galerkin method, the theorem of local solvability is proved. For systems with a focusing source, an a priori estimate is obtained, from which follows the corresponding theorem on global solvability. In the case of systems of hyperbolic equations with a ‘defocusing’ source, it is proven that if the order of growth of the variables does not exceed the order of growth of the dissipative term, then there is global solvability.

Key words: hyperbolic system, mixed problem, global solvability, nonlinear dissipation.

1. Введение

Рассмотрим смешанную задачу для полулинейных гиперболических уравнений с нелинейной диссипацией:

$$\left.\begin{aligned} u_{1tt}+(-1)^{k_1}\Delta^{k_1}u_1+\alpha_1\left|u_{1t}\right|^{r_1-1}u_{1t}=g_1(u_1,u_2)\\ u_{2tt}+(-1)^{k_2}\Delta^{k_2}u_2+\alpha_2\left|u_{2t}\right|^{r_2-1}u_{2t}=g_2(u_1,u_2)\end{aligned}\right\},\quad x\in\Omega,\quad t>0, \tag{1.1}$$

$$u_i\left(0,x\right)=\varphi_i\left(x\right),\, u_{it}\left(0,x\right)=\psi_i\left(x\right),\, x\in\Omega,\ i=1,2, \tag{1.2}$$

$$\Delta^s u_i\left(t,x\right)=0,\ t>0,\ x\in\Gamma, s=1,2,...,k_i-1,\ i=1,2, \tag{1.3}$$

где $\Omega\subset R^n$ ограниченная область с гладкой границей Γ, (u_1, u_2) пара вещественных функций $(t, x)\in R_+\cdot\Omega$, $\alpha_j>0$, $r_j\geq 1$, $j=1,2$, $0<k_1\leq k_2$. Функции g_1 и g_2 имеют следующие формы:

$$g_1(u_1,u_2)=a_1\left|u_1+u_2\right|^{p_1+p_2}\left(u_1+u_2\right)+b_1\left|u_1\right|^{p_1-1}\left|u_2\right|^{p_2+1}u_1,$$
$$g_2(u_1,u_2)=a_2\left|u_1+u_2\right|^{p_1+p_2}\left(u_1+u_2\right)+b_2\left|u_1\right|^{p_1+1}\left|u_2\right|^{p_2-1}u_2,$$

где a_i, b_i, p_i некоторые константы, $i=1,2$.

Цель данной работы – исследовать существование локальных и глобальных решений. Вопрос о существовании локальных и глобальных решений для нелинейного волнового уравнения с нелинейной диссипацией исследован достаточно подробно [4–6; 8–12; 15].

Для различных систем гиперболических уравнений аналогичная задача исследована в работах [2; 7; 13; 14]. В работе [3] исследована система типа (1.1) в случае, когда $k_1=k_2=1$, а в работе [7] исследован случай $p_1=p_2$.

Введём следующие обозначения. Через $W_2^k(\Omega)$ обозначим пространство Соболева, а через $\hat{W}_2^k\Omega)$ обозначим подпространство $\hat{W}_2^k\Omega)=\left\{v: v\in W_2^k(\Omega),\right.$ $\left.\Delta^s v(x)=0,\ x\in\Gamma,\ s=0,1,...,k-1\right\}$. Через $\|\cdot\|$ обозначим норму в пространстве $L_2(\Omega)$.

2. Существование локальных решений

Сформулируем теорему о существовании локальных решений.

Теорема 2.1. Предположим, что

$$p_1\geq 0,\quad p_2\geq 0\ \text{ при }\ \frac{n}{2}<k_1\leq k_2, \tag{2.1}$$

или

$$p_1\geq 0,\, p_2\geq 0,\, p_1+p_2\leq\frac{2k_1}{n-2k_1}\ \text{ при }\ k_1<\frac{n}{2}. \tag{2.2}$$

Тогда для любых $\varphi_i(.)\in\hat{W}_2^{k_i}(\Omega), \psi_i(.)\in L_2(\Omega),\ i=1,2$ существует такое $T>0$, что задача (1.1)–(1.3) имеет решение $(u_1(t,x), u_2(t,x))$, где $u_i(.)\in C\left(\left[0,T\right);\hat{W}_2^{k_i}(\Omega)\right)$, $u_{it}(.)\in C\left(\left[0,T\right);L_2(\Omega)\right)\cap L_{m_i+1}(\left[0,T\right]\times\Omega)$, $i=1,2$.

Если $T' > 0$ длина максимального интервала существования локального решения $(u_1(t, x), u_2(t, x))$, то выполняется одна из следующих альтернатив:

$$1) \lim_{t\to T-0} \sum_{i=1}^{2} \left[\left\| u_{it}(t,,) \right\|^2 + \left\| \nabla^{k_i} u_i(t,.) \right\|^2 \right] = +\infty;$$

$$2)\ T = +\infty.$$

Схема доказательства. Исходно: начальные данные аппроксимируются более гладкими функциями, например, из $\hat{W}_2^{k_i+2}(\Omega)\times\hat{W}_2^{k_i+1}(\Omega)$. Соответствующая аппроксимированная задача решается методом Галеркина и доказывается существование локального решения на некотором полуинтервале $[0, T')$. Далее получаются некоторые априорные оценки для решения аппроксимированной задачи, которые позволяют выделить слабо сходящиеся подпоследовательности в $L_\infty(0,T;\hat{W}_2^{k_1}(\Omega)\times\hat{W}_2^{k_2}(\Omega))$ и доказать их фундаментальность в $C([0,T];\widehat{W}_2^{k_1}(\Omega)\times\widehat{W}_2^{k_2}(\Omega))\cap C^1([0,T];L_2\Omega)\times L_2\Omega))$ для любого $T_0 \in (0, T')$. Далее по стандартной схеме доказывается, что предельная пара $(u_1(t, x), u_2(t, x))$ является решением задачи (1.1), (1.2).

3. Существование глобальных решений

Из теоремы 2.1 следует, что если имеет место априорная оценка:

$$\sum_{i=1}^{2} \frac{p_i+1}{2b_i'} \left[\left\| u_{it}(t,.) \right\|^2 + \left\| \nabla^{k_i} u_i(t,.) \right\|^2 \right] \le c_1,\ t\in[0,\infty), \tag{3.1}$$

где $c_1 > 0$ не зависит от t, то соответствующее решение можно продолжить на $[0, T]$, для любого $T > 0$.

Теорема 3.1. Пусть выполнены условия (2.1), (2.2). Предположим, что:

$$\tilde{}_i \Im 0, \quad _i \quad 0, \qquad 1,2 \text{ и } \lambda = \frac{a_1(p_1+1)}{b_1} = \frac{a_2(p_2+1)}{b_2}. \tag{3.2}$$

Тогда для любых $T>0, \varphi_i(.)\in\hat{W}_2^{k_i}(\Omega), \psi_i(.)\in L_2(\Omega), i=1,2,$ $\psi_i(.)\in L_2(\Omega)$, $i = 1,2$ задача (1.1)–(1.3) имеет решение $(u_1(t, x), u_2(t, x))$, где $u_i(.)\in C\left([0,T);\hat{W}_2^{k_i}(\Omega)\right)$, $u_{it}(.)\in C\left([0,T);L_2(\Omega)\right)\cap L_{m_i+1}([0,T]\times\Omega), i=1,2.$

Доказательство. Умножим первое уравнение системы (1.1) на $\dfrac{(p_1+1)}{b_1'}u_{1t}(t,x)$, а второе уравнение на $\dfrac{(p_1+1)}{b_2'}u_{2t}(t,x)$, где $b_1'=-b_1, b_2'=-b_2$ и интегрируем полученные равенства по области $[0, t] \cdot \Omega$. После интегрирования по частям и, суммируя полученные равенства, получим тождество:

$$\sum_{i=1}^{2}\frac{p_i+1}{2b_i'}\left[\left\|u_{it}(t,.)\right\|^2+\left\|\nabla^{k_i}u_i(t,.)\right\|^2\right]+\sum_{i=1}^{2}\frac{p_i+1}{b_i'}\int_\Omega\left|u_{it}(t,x)\right|^{r_i+1}dx+$$

$$+\frac{\lambda}{p_1+p_2+2}\int_\Omega\left|u_1+u_2\right|^{p_1+p_2+2}dx+\int_\Omega\left|u_1\right|^{p_1+1}\left|u_2\right|^{p_2+1}dx=\sum_{i=1}^{2}\frac{p_i+1}{2b_i'}\left[\left\|\psi_{it}(\cdot)\right\|^2+\left\|\nabla^{k_i}\phi_i(\cdot)\right\|^2\right]+$$

$$+\frac{\lambda}{p_1+p_2+2}\int_\Omega\left|\varphi_1(x)+\varphi_2(x)\right|^{p_1+p_2+2}dx+\int_\Omega\left|\varphi_1(x)\right|^{p_1+1}\left|\varphi_2(x)\right|^{p_2+1}dx.$$

Отсюда получаем априорную оценку. Таким образом, в виду теоремы 2.1 $T=+\infty$.

Интересным является случай $p_1+p_2\le\min\{r_1,r_2\}$ и когда знак λ не определён. В этом случае справедлив следующий результат.

Теорема 3.2. Предположим, что выполнены условия теоремы 2.1 и дополнительно выполнено условие $p_1+p_2\le\min\{r_1,r_2\}$. Тогда локальное решение, которое определяется теоремой 2.1, можно глобально продолжить.

Доказательство. Если $a_i<0$, $b_i<0$, $i=1,2$, то справедливость утверждения теоремы является следствием теоремы 3.1. Рассмотрим случай $a_i<0$, $b_i<0$, $i=1,2$. Другие случаи рассматриваются аналогичным образом.

Пусть $\{u_1(t,x),u_2(t,x)\}$ решение задачи (1.1)–(1.3) в области $[0,t]\cdot\Omega$, определяемой теоремой 2.1. Умножим обе части первого уравнения системы (1.1) на $\frac{(p_1+1)}{b_1}u_{1t}(t,x)$, а второе уравнение на $\frac{(p_1+1)}{b_2}u_{2t}(t,x)$ и проинтегрируем полученные равенства по области $[0,t]\cdot\Omega$. После интегрирования по частям и суммирования полученных равенств, получим тождество:

$$\sum_{i=1}^{2}\frac{\lambda}{2a_i}\left[\left\|u_{it}(t,,)\right\|^2+\left\|\nabla u_i(t,,)\right\|^2\right]+\frac{1}{p_1+p_2+2}\int_\Omega G(u_1,u_2)dx+$$

$$+\sum_{i=1}^{2}\frac{\lambda}{2a_i}\int_0^t\int_\Omega\left|u_i(t,x)\right|^{r_i+1}dxdt=\sum_{i=1}^{2}\frac{\lambda}{2a_i}\left[\left\|\psi_i(.)\right\|^2+\left\|\nabla\varphi_i(,)\right\|^2\right]+$$

$$+\frac{1}{p_1+p_2+2}\int_\Omega G(\varphi_1,\varphi_2)dx+\frac{2}{p_1+p_2+2}\int_0^t\int_\Omega\frac{\partial}{\partial t}G(u_1(t,x),u_2(t,x))dxdt, \qquad (3.3)$$

где

$$G(u_1(t,x),u_2(t,x))=\lambda\int_\Omega\left|u_1+u_2\right|^{p_1+p_2+2}dx+(p_1+p_2+2)\int_\Omega\left|u_1\right|^{p_1+1}\left|u_2\right|^{p_2+1}dx,$$

$$G(\varphi_1(x),\varphi_2(x))=\lambda\int_\Omega\left|\varphi_1(x)+\varphi_2(x)\right|^{p_1+p_2+2}dx+(p_1+p_2+2)\int_\Omega\left|\varphi_1(x)\right|^{p_1+1}\left|\varphi_2(x)\right|^{p_2+1}dx.$$

Из определения $G(u_1(t,x),u_2(t,x))$ получим, что:

$$J=\frac{2}{p_1+p_2+2}\int_0^t\int_\Omega \frac{\partial}{\partial t}G(u_1(t,x),u_2(t,x))dxdt=$$

$$=2\lambda\int_0^t\int_\Omega |u_1+u_2|^{p_1+p_2}(u_1+u_2)(u_{1t}+u_{2t})dxdt+$$

$$+(p_1+1)\int_0^t\int_\Omega |u_1|^{p_1-1}|u_2|^{p_2+1}u_1u_{1t}dxdt+(p_2+1)\int_0^t\int_\Omega |u_1|^{p_1+1}|u_2|^{p_2-1}u_2u_{2t}dxdt= J_1+J_2+J_3+J_4.$$

Применяя неравенство Гельдера с показателями $q=\frac{r_1+1}{r_1}$, $q'=r_1+1$, имеем:

$$J_1\le 2\lambda\int_0^t\int_\Omega |u_1+u_2|^{p_1+p_2+1}|u_{1t}|dxdt\le$$

$$\le 2\lambda\left(\int_0^t\int_\Omega |u_1+u_2|^{(p_1+p_2+1)\frac{r_1+1}{r_1}}dxdt\right)^{\frac{r_1}{r_1+1}}\cdot\left(\int_0^t\int_\Omega |u_{1t}|^{r_1+1}dxdt\right)^{\frac{1_1}{r_1+1}}.$$

Применим неравенство Юнга с параметрами $\eta=\varepsilon^{\frac{1}{r_1+1}}(r_1+1)^{\frac{1}{r_1+1}}$, $\eta'=\frac{\eta}{\eta-1}$ в правой части данного неравенства. Имеем:

$$J_1\le 2\lambda\varepsilon^{-r_1}\int_0^t\int_\Omega |u_1+u_2|^{(p_1+p_2+1)\frac{r_1+1}{r_1}}dxdt+2\lambda\varepsilon\int_0^t\int_\Omega |u_{1t}|^{r_1+1}dxdt.$$

Так как $p_1+p_2+1\le r_1$, отсюда получим, что:

$$\int_0^t\int_\Omega |u_1+u_2|^{(p_1+p_2+1)\frac{r_1+1}{r_1}}dxdt\le C_{11}+C_{12}\int_0^t\int_\Omega |u_1+u_2|^{p_1+p_2+2}dxdt,$$

где $C_{11}=0$, $C_{12}=1$, если $p_1+p_2+1\le r_1$,

$$C_{11}=\frac{\left[r_1-(p_1+p_2+1)\right]T\ mes\Omega}{(p_1+p_2+1)r_1},\ C_{12}=\frac{(p_1+p_2+1)r_1}{(p_1+p_2+1)(r_1+1)},\ \text{если } p_1+p_2+1\le r_1.$$

Следовательно,

$$J_1\le 2C_{11}\lambda\varepsilon^{-r_1}+2C_{12}\lambda\varepsilon^{-r_1}\int_0^t\int_\Omega |u_1+u_2|^{(p_1+p_2+1)\frac{r_1+1}{r_1}}dxdt+2\lambda\varepsilon\int_0^t\int_\Omega |u_{1t}|^{r_1+1}dxdt.$$

Аналогично имеем:

$$J_2\le 2C_{21}\lambda\varepsilon^{-r_2}+2C_{22}\lambda\varepsilon^{-r_2}\int_0^t\int_\Omega |u_1+u_2|^{(p_1+p_2+1)\frac{r_2+1}{r_2}}dxdt+2\lambda\varepsilon\int_0^t\int_\Omega |u_{2t}|^{r_2+1}dxdt.$$

Далее, применяя неравенство Гельдера с показателями $q=\frac{r_1+1}{r_1}$, $q'=r_1+1$ и неравенства Юнга с параметром $\eta=\varepsilon^{\frac{1}{r_1+1}}$, получим, что:

$$J_3\le(p_1+1)\int_0^t\int_\Omega|u_1|^{p_1}|u_2|^{p_2+1}|u_{1t}|dxdt\le(p_1+1)\left(\int_0^t\int_\Omega|u_1|^{p_1\frac{r_1+1}{r_1}}|u_2|^{(p_2+1)\frac{r_1+1}{r_1}}dxdt\right)^{\frac{r_1}{r_1+1}}\times$$

$$\times\left(\int_0^t\int_\Omega|u_{1t}|^{r_1+1}dxdt\right)^{\frac{1}{r_1+1}}\le\frac{r_1(p_1+1)}{(r_1+1)\varepsilon^{r_1}}\int_0^t\int_\Omega|u_1|^{p_1\frac{r_1+1}{r_1}}|u_2|^{(p_2+1)\frac{r_1+1}{r_1}}dxdt+\frac{\varepsilon(p_1+1)}{r_1+1}\int_0^t\int_\Omega|u_{1t}|^{r_1+1}dxdt.$$

Применяя неравенства Гельдера с показателями

$$\rho=\frac{r_1(p_1+p_2+2)}{(p_2+1)(r_1+1)},\ \rho'=\frac{r_1(p_1+p_2+2)}{r_1(p_1+p_2+2)-(p_2+1)(r_1+1)}=\frac{r_1(p_1+p_2+2)}{r_1p_1-p_2+r_1-1}$$

и неравенства Юнга, получим, что

$$\int_0^t\int_\Omega|u_1|^{p_1\frac{r_1+1}{r_1}}|u_2|^{(p_2+1)\frac{r_1+1}{r_1}}dxdt\le\left(\int_0^t\int_\Omega|u_1|^{p_1\frac{r+1}{r_1}\rho'}dxdt\right)^{\frac{1}{\rho'}}\left(\int_0^t\int_\Omega|u_2|^{p_1+p_2+2}dxdt\right)^{\frac{1}{\rho}}\le$$

$$\le\frac{1}{\rho'}\int_0^t\int_\Omega|u_1|^{p_1\frac{r_1+1}{r_1}\rho'}dxdt+\frac{1}{\rho}\int_0^t\int_\Omega|u_2|^{p_1+p_2+2}dxdt.$$

Так как $p_1+p_2+1\le r_1$, поэтому:

$$p_1\frac{r_1+1}{r_1}\rho'=p_1\frac{(r_1+1)(p_1+p_2+1)}{r_1(p_1+p_2+1)-(p_2+1)(r_1+1)}\le p_1+p_2+2.$$

Итак, применяя неравенства Гельдера, имеем:

$$\int_0^t\int_\Omega|u_1|^{p_1\frac{r+1_1}{r_1}\rho'}dxdt\le C_{31}+C_{32}\int_0^t\int_\Omega|u_1|^{p_1+p_2+2}dxdt,$$

где $C_{31}=0$, $C_{32}=1$ если $p_1+p_2+1\le r_1$ и

$$C_{31}=\frac{[r_1-(p_1+p_2+1)T]\ mes\Omega}{r_1p_1-p_2+r_1-1},C_{32}=\frac{p_1(r_1+1)}{r_1p_1-p_2+r_1-1},$$

если $p_1+p_2+1\le r_1$. Таким образом,

$$\sum_{i=1}^{2}\frac{\lambda}{2a_i}\left[\left\|u_{it}(t,,)\right\|^2+\left\|\nabla^{k_i}u_i(t,,)\right\|^2\right]+\frac{1}{p_1+p_2+2}\int_{\Omega}G(u_1(t,x),u_2(t,x))dx+$$

$$+\sum_{i=1}^{2}(\frac{\lambda}{2a_i}-4\lambda\varepsilon)\int_0^t\int_{\Omega}\left|u_i(t,x)\right|^{r_i+1}dxdt\le\sum_{i=1}^{2}\frac{\lambda}{2a_i}\left[\left\|\psi_i(.)\right\|^2+\left\|\nabla^{k_i}\varphi_i(,)\right\|^2\right]+$$

$$+\frac{1}{p_1+p_2+2}\int_{\Omega}G(\varphi_1(x),\varphi_2(x))dx+c_2+c_3\int_0^t\int_{\Omega}G(u_1(t,x),u_2(t,x))dxdt, \qquad (3.4)$$

где $c_2 > 0$, $c_3 > 0$ не зависят от t.

Применяя лемму Гронуола, из (3.4) получим, что

$$\sum_{i=1}^{2}\frac{\lambda}{2a_i}\left[\left\|u_{it}(t,,)\right\|^2+\left\|\nabla^{k_i}u_i(t,,)\right\|^2\right]+\frac{1}{p_1+p_2+1}\int_{\Omega}G(u_1(t,x),u_2(t,x))dx+$$

$$+\sum_{i=1}^{2}(\frac{\lambda}{2a_i}-4\lambda\varepsilon)\int_0^t\int_{\Omega}\left|u_i(t,x)\right|^{r_i+1}dxdt\le c_4.$$

Применяя теорему 2.1, получим, что данное решение $\{u_1(t, x), u_2\ (t, x)\}$ можно продолжить глобально на всю область $[0, t] \cdot \Omega$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алиев А.Б., Казимов А.А. Глобальные слабые решения задачи Коши для полулинейных псевдо гиперболических уравнений // Дифференциальные уравнения.Т. 45. 2009. № 2. С. 169–179.
2. Agre K., Rammaha M.A. Systems of nonlinear wave equations with damping and source terms // Differential Integral Equations. Vol. 19. 2006. No. 11. Pp. 1235–1270.
3. Aliev A.B., Rustamova S.O. Global existence, asymptotic behavior and blow-up of solutions for mixed problem for the coupled wave equations with nonlinear damping and source terms // Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics. National Academy of Sciences of Azerbaijan Vol. 42. 2016. No. 2. P. 188–201.
4. Ang D.D., Dinh A.P. Strong solutions of a quasilinear wave equation with nonlinear damping // SIAM Journal on Mathematical Analysis. Vol. 19. 1988. No. 2. P. 337–347.
5. Georgiev V., Todorova G. Existence of a solution of the wave equation with nonlinear damping and source term // J. Differential Equations. Vol. 109. 1994. No. 2. P. 295–308.
6. Messaoudi A. Blow up of solutions with positive initial energy in a nonlinear viscoelastic wave equation // J. Math. Anal. Appl.Vol. 320. 2006. P. 902–915.
7. Said-Houari B. Global nonexistence of positive initial-energy solutions of a system of nonlinear wave equations with damping and source terms // Differential Integral Equations. Vol. 23. 2010. No. 1–2. P. 79–92.
8. Serrin J., Todorova G., Vitillaro E. Existence for a nonlinear wave equation with damping and source terms // Differential Integral Equations. Vol. 16. 2003. No. 1. P. 13–50.
9. Todorova G. Stable and unstable sets for the Cauchy problem for a nonlinear wave with nonlinear damping and source terms // J. Math. Anal. Appl. Vol. 239. 1999. P. 213–226.
10. Vitillaro E. Global existence theorems for a class of evolution equations with dissipation // Arch. Ration. Mech. Anal. Vol. 149. 1999. No. 2. P. 155–182.

11. Wang Y. A sufficient condition for finite time blow up of the nonlinear Klein–Gordon equations with arbitrarily positive initial energy // Amer. Math. Soc. Vol. 136. 2008. No. 10. P. 3477–3482.
12. Yang Z.J., Chen G.W. Global existence of solutions for quasi-linear wave equations with viscous damping // J. Math. Anal. Appl. Vol. 285. 2003. No. 2. P. 604–618.
13. Ye Y.J. Global existence and asymptotic behavior for systems of nonlinear hyperbolic equations // Applicable Analysis. Vol. 92. 2013. No. 11. Pp. 2424–2437.
14. Ye Y.J. Global existence and nonexistence of solutions for coupled nonlinear wave equations with damping and source terms // Bull. Korean Math. Soc. Vol. 51. 2014. No. 6. P. 1697–1710.

REFERENCES

1. Aliev A.B., Kazimov A.A. [Global weak solutions of the Cauchy problem for semilinear pseudo-hyperbolic equations]. In: *Differentsial'nye uravneniya* [Differential equations], vol. 45, 2009, no. 2, pp. 169–179.
2. Agre K., Rammaha M.A. Systems of nonlinear wave equations with damping and source terms. In: *Differential Integral Equations*, vol. 19, 2006, no. 11, pp. 1235–1270.
3. Aliev A.B., Rustamova S.O. Global existence, asymptotic behavior and blow-up of solutions for mixed problem for the coupled wave equations with nonlinear damping and source terms. In: *Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics. National Academy of Sciences of Azerbaijan,* vol. 42, 2016, no. 2, pp. 188–201.
4. Ang D.D., Dinh A.P. Strong solutions of a quasilinear wave equation with nonlinear damping. In: *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, vol. 19, 1988, no. 2, pp. 337–347.
5. Georgiev V., Todorova G. Existence of a solution of the wave equation with nonlinear damping and source term. In: *J. Differential Equations*, vol. 109, 1994, no. 2, pp. 295–308.
6. Messaoudi A. Blow up of solutions with positive initial energy in a nonlinear viscoelastic wave equation. In: *J. Math. Anal. Appl*, vol. 320, 2006, pp. 902–915.
7. Said-Houari B. Global nonexistence of positive initial-energy solutions of a system of nonlinear wave equations with damping and source terms. In: *Differential Integral Equations*, vol. 23, 2010, no. 1–2, pp. 79–92.
8. Serrin J., Todorova G., Vitillaro E. Existence for a nonlinear wave equation with damping and source terms. In: *Differential Integral Equations,* vol. 16, 2003, no. 1, pp. 13–50.
9. Todorova G. Stable and unstable sets for the Cauchy problem for a nonlinear wave with nonlinear damping and source terms. In: *J. Math. Anal. Appl*, Vol. 239, 1999, pp. 213–226.
10. Vitillaro E. Global existence theorems for a class of evolution equations with dissipation. In: *Arch. Ration. Mech. Anal*, vol. 149, 1999, no. 2, pp. 155–182.
11. Wang Y. A sufficient condition for finite time blow up of the nonlinear Klein–Gordon equations with arbitrarily positive initial energy. In: *Amer. Math. Soc*, vol. 136, 2008, no. 10, pp. 3477–3482.
12. Yang Z.J., Chen G.W. Global existence of solutions for quasi-linear wave equations with viscous damping. In: *J. Math. Anal. Appl*, vol. 285, 2003, no. 2, pp. 604–618.
13. Ye Y.J. Global existence and asymptotic behavior for systems of nonlinear hyperbolic equations. In: *Applicable Analysis*, vol. 92, 2013, no. 11, pp. 2424–2437.
14. Ye Y.J. Global existence and nonexistence of solutions for coupled nonlinear wave equations with damping and source terms. In*: Bull. Korean Math. Soc*, vol. 51, 2014, no. 6, pp. 1697–1710.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Рустамова Самира Октай кызы – аспирант Института математики и механики Национальной академии наук Азербайджана;
e-mail: samira.rustamova.1979@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Samira O. kizi Rustamova – postgraduate student of the Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan;
e-mail: samira.rustamova.1979@mail.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Рустамова С.О. Смешанная задача для систем полулинейных гиперболических уравнения с нелинейной диссипацией и нелинейным источником // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2017. № 3. С. 34–42.
DOI: 10.18384-2310-7251-2017-3-34-42

CORRECT REFERENCE TO THE ARTICLE

Rustamova S.O. A Mixed Problem for Systems of Semilinear Hyperbolic Equations with Nonlinear Dissipation and NonLinear Source. In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*, 2017, no. 3, pp. 34–42.
DOI: 10.18384-2310-7251-2017-3-34-42

УДК 517.956.35
DOI: 10.18384-2310-7251-2017-3-43-52

О ПРИБЛИЖЁННО-АНАЛИТИЧЕСКОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ОДНОРОДНЫМИ НАЧАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Бозиев О.Л.
Кабардино-Балкарский государственный университет
360016, Кабардино-Балкарская Республика, г. Нальчик, ул. Чернышевского, д. 173, Российская Федерация

Аннотация. В статье предлагается метод решения смешанной задачи с однородными начальными условиями для нагруженного гиперболического уравнения, содержащего интеграл натуральной степени модуля неизвестной функции. Приближённое решение ищется с помощью априорных оценок решения поставленной задачи. Получена формула, выражающая это решение через решение обыкновенного дифференциального уравнения, ассоциированного с исходным нагруженным уравнением.

Ключевые слова: нелинейные уравнения в частных производных, нагруженные уравнения в частных производных, априорные оценки, приближенные решения.

ON THE APPROXIMATE-ANALYTIC METHOD OF SOLVING A NONLINEAR HYPERBOLIC EQUATION WITH HOMOGENEOUS INITIAL CONDITIONS

O. Boziev
Kabardino-Balkarian State University
ul. Chernyshevskogo 173, 360016 Nalchik, Kabardino-Balkar Republic, Russian Federation

Abstract. The paper presents a method for solving a mixed problem with homogeneous initial conditions for a loaded hyperbolic equation with an integral natural degree modulus of unknown function. An approximate solution is sought for by means of a priori estimates of the solution to the problem. A formula expressing the solution through the solution to the ordinary differential equation associated with the initial loaded equation is obtained.

Key words: nonlinear partial differential equations, loaded partial differential equations, a priori estimates, approximate solutions.

Введение

Нелинейное уравнение

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} + b|u|^p u_t = 0, \tag{1}$$

с положительными параметрами a и b, натуральным p и начально-краевыми условиями различного вида в прямоугольной области является математической моделью различных нестационарных процессов. В частности, при $p \geq 0$ неоднородное уравнение вида (1) возникает в релятивистской квантовой механике [6, с. 16]. При $p = 1$ уравнение (1) моделирует неустановившееся течение жидкости в трубе со скоростью $u(x,t)$ [4, с. 42]. Для нахождения приближенного решения (1) с соответствующими условиями, как правило, используются трудоёмкие численные методы. В данной статье предлагается приближенно-аналитический метод решения уравнения (1). Для его применения необходимо сначала от (1) перейти к нагруженному [7, с. 17] уравнению:

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} + b u_t \int_{\Omega} |u|^p dx = 0, \qquad (2)$$

которое рассматривается в качестве аппроксимирующего относительно (1) при исходных начальных и граничных условиях. Уравнения вида (2) и его обобщения представляют самостоятельный интерес и исследованы, например, в [8; 9], где доказаны теоремы существования и единственности обобщенных решений соответствующих краевых задач. Переход от (1) к (2) позволяет «ослабить» нелинейность исходного уравнения и при этом избежать чрезмерного искажения сути моделируемого процесса. Найденное впоследствии точное или приближенное решение нагруженного уравнения (2) в дальнейшем можно принять за приближенное решение исходного нелинейного уравнения (1). Такой подход применён в [2; 3], где получены формулы общих членов последовательностей приближенных решений начально-краевых задач для некоторых нагруженных уравнений, аппроксимирующих исходные нелинейные уравнения. В [1] для нахождения приближенного решения первой смешанной задачи с однородными граничными условиями для уравнения (2) используются априорные оценки решения поставленной задачи. Ниже используется комбинация этих подходов, в которой для запуска итерационного процесса приближения к регулярному решению задачи (1), (3), (4) предварительно ищется решение задачи (2) – (4) с использованием его же априорных оценок.

Априорные оценки

В области $Q = \{(x, t) : 0 < x < l, 0 < t < T\}$ рассмотрим уравнение (2) с натуральной степенью $p \geq 3$. Требуется найти интегрируемую функцию $u(x,t) \in C^{2,2}(\overline{Q})$, удовлетворяющую уравнению (2) в области Q, а также условиям

$$u(x,0) = 0, u_t(x,0) = 0, 0 \leq x \leq l, \qquad (3)$$

$$u(0,t) = \psi_1(t), u(l,t) = \psi_2(t), 0 \leq t \leq T, \qquad (4)$$

с функциями $\psi_1(t), \psi_2(t) \in C^1(0,T)$.

Установим некоторые априорные оценки решения задачи (2) – (4), необходимые для нахождения её приближенного решения.

Умножая (2) скалярно на u_t с помощью стандартных для подобных случаев преобразований, получаем следующие неравенства, выполняющиеся для всех значений $t \in [0, T]$:

$$\int_{\Omega}(u_t^2 + a^2 u_x^2)dx \le C_1, \left\| u_t \right\|_{2,\Omega}^2 \le C_1, \left\| u_x \right\|_{2,\Omega}^2 \le \frac{C_1}{a^2}. \qquad (5)$$

Здесь и далее равенством

$$\left\| v \right\|_{p,\Omega}^p = \int_{\Omega} \left| v \right|^p dx$$

выражается норма функции $v(t)$ в пространстве $L_p(\Omega)$, $\Omega = [0, l]$.

Теорема. Пусть функция $u \in L_{p-2}(\Omega)$ является решением задачи (2) – (4), а неубывающие функции $\psi_1(t)$, $\psi_2(t) \in L_{p-1}[0, T]$. Тогда функция $\left\| u \right\|_{p,\Omega}^p$ ограничена константой, зависящей только от t.

Доказательство. Умножим уравнение (2) скалярно на функцию u^{p-1}

$$(u_{tt}, u^{p-1}) - a^2(u_{xx}, u^{p-1}) + b\int_{\Omega} \left| u \right|^p dx (u_t, u^{p-1}) = 0. \qquad (6)$$

Преобразуем по отдельности каждое слагаемое:

$$(u_{tt}, u^{p-1}) = \frac{1}{p}\frac{d^2}{dt^2}\int_{\Omega} u^p dx - (p-1)\int_{\Omega} u_t^2 u^{p-2} dx,$$

$$(u_{xx}, u^{p-1}) = u_x(l,t)\psi_2^{p-1}(t) - u_x(0,t)\psi_1^{p-1}(t) - (p-1)\int_{\Omega} u_x^2 u^{p-2} dx,$$

$$\int_{\Omega} \left| u \right|^p dx (u_t, u^{p-1}) = \frac{1}{p}\int_{\Omega} \left| u \right|^p dx \cdot \frac{d}{dt}\int_{\Omega} u^p dx.$$

Вернёмся к (6) и умножим его на $\operatorname{sgn}^p u$, чтобы перейти к уравнению:

$$\frac{d^2}{dt^2}\int_{\Omega} \left| u \right|^p dx + \frac{b}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_{\Omega} \left| u \right|^p dx \right)^2 = p(p-1)\int_{\Omega} \left| u \right|^{p-2} \left(u_t^2 - a^2 u_x^2 \right) dx + F_1(t),$$

$$F_1(t) = pa^2(u_x(l,t)\psi_2^{p-1}(t) - u_x(0,t)\psi_1^{p-1}(t)) \operatorname{sgn}^p u,$$

после интегрирования которого по t с учётом однородности начальных условий получаем:

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega} \left| u \right|^p dx + \frac{b}{2}\left(\int_{\Omega} \left| u \right|^p dx \right)^2 = p(p-1)\int_0^t \int_{\Omega} \left| u \right|^{p-2} \left(u_t^2 - a^2 u_x^2 \right) dx dt + \int_0^t F_1(t) dt. \qquad (7)$$

К первому слагаемому в правой части (7) применим неравенство Гёльдера:

$$\int_0^t \int_\Omega |u|^{p-2}(u_t^2 - a^2u_x^2)dxdt \le \left(\int_0^t \left|\int_\Omega |u|^{p-2}dx\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \left|\int_\Omega \left|u_t^2 - a^2u_x^2\right|dx\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Сомножители правой части полученного неравенства ограничены: первый в силу $u \in L_{p-2}(\Omega)$:

$$\left(\int_0^t \left|\int_\Omega |u|^{p-2}dx\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\int_0^t |C_2|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \le \sqrt{t}C_2,$$

а второй – в силу первой из оценок (5):

$$\left(\int_0^t \left|\int_\Omega \left|u_t^2 - a^2u_x^2\right|dx\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\int_0^t \left|\int_\Omega \left|u_t^2 + a^2u_x^2\right|dx\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\int_0^t |C_1|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \le \sqrt{t}C_1.$$

Следовательно,

$$\int_0^t \int_\Omega |u|^{p-2}(u_t^2 - a^2u_x^2)dxdt \le C_1C_2t,$$

что позволяет перейти от уравнения (7) к неравенству

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega |u|^p dx + \frac{b}{2}\left(\int_\Omega |u|^p dx\right)^2 \le p(p-1)C_1C_2t + \int_0^t |F_1(t)|dt. \tag{8}$$

Используя свойства функций $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$, можно убедиться в том, что:

$$\int_0^t |F_1(t)|dt \le pa^2\left(\int_0^t |u_x(l,t)|\left|\psi_2^{p-1}(t)\right|dt + \int_0^t |u_x(0,t)|\left|\psi_1^{p-1}(t)\right|dt\right) \le$$

$$\le pa^2\left(\int_0^T |\psi_2(t)|^{p-1}dt + \int_0^T |\psi_1(t)|^{p-1}dt\right)C_3,$$

$$C_3 = \max\left\{\max_{t\in[0,T]}|u_x(l,t)|, \max_{t\in[0,T]}|u_x(0,t)|\right\}.$$

С учётом этого проинтегрируем (8) и получим соотношение:

$$\int_\Omega |u|^p dx + \frac{b}{2}\int_0^t \left(\int_\Omega |u|^p dx\right)^2 dt \le \int_\Omega |u(x,0)|^p dx + F(t), \tag{9}$$

в котором первое слагаемое правой части равно нулю в силу первого условия (3), а

$$F(t) = \frac{1}{2}p(p-1)C_1C_2t^2 + pa^2\left(\int_0^T |\psi_2(t)|^{p-1}dt + \int_0^T |\psi_1(t)|^{p-1}dt\right)C_3t. \tag{10}$$

Заметим, что $F(t) \le F(T)$, в силу чего перейдем от (9) к неравенству:

$$\|u\|_{p,\Omega}^{p} \le \frac{b}{2}\int_{0}^{t}\left(\|u\|_{p,\Omega}^{p}\right)^{2}dt + F(T).$$

Применяя к нему следствие из леммы Бихари [5, с. 112], получаем оценку:

$$\|u\|_{p,\Omega}^{p} \le K(t), \tag{11}$$

с правой частью:

$$K(t) = \frac{2F(T)}{2 - F(T)bt}, \tag{12}$$

выполняющуюся для всех $t \in [0, T]$, $T<2/(bF(T))$.

Таким образом, теорема доказана.

Начальное приближённое решение

Для нахождения начального приближённого решения задачи (2) – (4) перейдём от (2) к ассоциированному с ним обыкновенному дифференциальному уравнению. Для этого проинтегрируем (2) в границах от 0 до x:

$$u_x(x,t) = \frac{1}{a^2}\int_{0}^{x}\left(u_{tt} + bu_t\|u\|_{p,\Omega}^{p}\right)dx + A(t).$$

Применяя к интегралу теорему о среднем значении, запишем последнее равенство в виде:

$$u_x(x,t) = \frac{x}{la^2}\int_{0}^{l}\left(u_{tt} + bu_t\|u\|_{p,\Omega}^{p}\right)dx + A(t).$$

После повторного интегрирования по x и удовлетворения условий (3) приходим к соотношению:

$$u(x,t) = \frac{x}{2a^2}\left(\frac{x}{l} - 1\right)\left(\overline{u}'' + b\overline{u}'\|u\|_{p,\Omega}^{p}\right) + x\frac{\psi_2 - \psi_1}{l} + \psi_1, \tag{13}$$

в котором

$$\overline{u}(t) = \int_{\Omega} u dx. \tag{14}$$

Применим преобразование (14) к функции (13) для того, чтобы перейти к обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$\overline{u}'' + b\|u\|_{p,\Omega}^{p}\,\overline{u}' + \frac{12a^2}{l^2}\overline{u} = \frac{6a^2}{l}(\psi_1 + \psi_2). \tag{15}$$

Начальные условия, необходимые для его интегрирования, получаются из условий (3):

$$\overline{u}(0)=\int_{\Omega}u(x,0)dx=0,\overline{u}'(0)=\int_{\Omega}u_t(x,0)dx=0. \tag{16}$$

Для решения полученной задачи выберем в (11) верхнюю границу неравенства, что позволяет сделать замену:

$$\left\|u\right\|_{p,\Omega}^{p}=K(t), \tag{17}$$

приводящую от (15) к линейному уравнению:

$$\overline{u}''+bK(t)\overline{u}'+\frac{12a^2}{l^2}\overline{u}=F_2(t), \tag{18}$$

$$F_2(t)=\frac{6a^2}{l}(\psi_1+\psi_2).$$

Как известно, единственное решение задачи (18), (16) существует для непрерывных функций $K(t)$ и $F_2(t)$ при $t \in (0,T)$. После его подстановки вместе с (17) в формулу (13) будет найдена функция:

$$u(x,t)=\frac{3x}{l}\left(\frac{x}{l}-1\right)\left(\psi_1+\psi_2-\frac{2}{l}\overline{u}\right)+x\frac{\psi_2-\psi_1}{l}+\psi_1, \tag{19}$$

которую примем за приближенное решение как задачи (2) – (4) и начальное приближение аппроксимируемой ею задачи (1), (3), (4).

Итерационный процесс

Функцию (19) примем за нулевое приближение $u^{(0)}$ в итерационном процессе поиска решения задачи (1), (3), (4), состоящем в нахождении «улучшенных» приближенных решений путём последовательного решении задач вида:

$$u_{tt}^{(k)}-a^2u_{xx}^{(k)}+b\left|u^{(k-1)}\right|^p u_t^{(k)}=0, \tag{1'}$$

$$u^{(k)}(x,0)=0, u_t^{(k)}(x,0)=0, 0\le x\le l, \tag{3'}$$

$$u^{(k)}(0,t)=\psi_1(t), u^{(k)}(l,t)=\psi_2(t), 0\le t\le T, \tag{4'}$$

где k = 1, 2, … – итерационный индекс. Процесс завершится при выполнении условия:

$$\left|u^{(k)}(x,t)-u^{(k-1)}(x,t)\right|\le\varepsilon$$

с достаточно малым наперёд заданным числом ε или по достижении заданного количества итераций.

Таким образом, задача решения нелинейного уравнения (1) сводится к последовательному решению линейных уравнений (1′) при соответствующих условиях.

Пример

Абстрагируясь от смысла уравнения (1), примем в нём для упрощения выкладок $a = b = 1$. Будем искать решение задачи (2) – (4), рассматривая уравнение (2) в качестве аппроксимирующего для (1).

Пусть $p = 3$. Положим $l = 1$ и выберем граничные условия (4) в виде $\psi_1(t) = \psi_2(t) = 1$, тогда в (18) правая часть $F_2(t) = 12$, а величина $F(T)$, задаваемая формулой (10), определяется как:

$$F(T) = CT^2,\ C = 3(C_1C_2 + 2C_3).$$

При этом функция (19) запишется как:

$$u(x,t) = 6x\left(x-1\right)\left(1-\overline{u}\right)+1. \tag{21}$$

Перейдем к определению постоянных, входящих в эти выражения. Из (12) следует условие положительности функции $K(t)$, а именно $F(T)t < 2$, т. е. $t < 2/CT^2$. Так как $t \le T$, то должно быть $T < 2/CT^2$, откуда следует, что $C < 2/T^3$. Положим $T = 1$ и выберем, например, $C = 1{,}8$. Затем последовательно найдем $F(T) = 1{,}8$, $K(t) = 1{,}8/(1 - 0{,}9t)$. Непрерывность $K(t)$ нарушается лишь при $t = 10/9 < T = 1$. Теперь задача (18), (16) принимает вид:

$$\overline{u}'' + \frac{1{,}8}{1-0{,}9t}\overline{u}' + 12\overline{u} = 12,$$

$$\overline{u}(0) = 0, \overline{u}'(0) = 0.$$

Её решением является функция:

$$\overline{u}(t) = \left(\frac{9}{10}t - 1\right)\cos\left(2\sqrt{3}t\right) - \frac{3\sqrt{3}}{20}\sin\left(2\sqrt{3}t\right) + 1,$$

подстановка которой в (21) даёт приближенное решение задачи (2) – (4):

$$u(x,t) = 6x\left(x-1\right)\left(\frac{3\sqrt{3}}{20}\sin\left(2\sqrt{3}t\right) - \left(\frac{9}{10}t-1\right)\cos\left(2\sqrt{3}t\right)\right)+1. \tag{21}$$

Так как уравнение (2) является аппроксимирующим по отношению к уравнению (1) и его интегрирование проводится при тех же условиях (3), (4), что и для уравнения (1), то функцию (21) будем считать начальным приближением решения задачи (1), (3), (4). Чтобы найти «улучшенные» решения, функцию (21), принимаемую за $u^{(0)}$, необходимо подставить в (1′) для запуска соответствующего итерационного процесса.

На рис. 1–3 приведены графики функций $u(x,t)$ и $u^{(1)}(x,t)$ при $t = 0{,}5$, $1{,}0$ и $1{,}8$ соответственно, полученные путём численного решения задачи (1), (3), (4) и задачи (1′), (3′), (4′) с функцией $u^{(0)}$, определяемой по формуле (21). Сплошная линия соответствует функции $u(x,t)$, а пунктирная – $u^{(1)}(x,t)$.

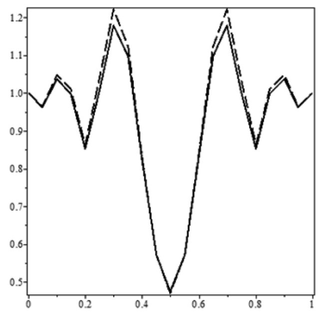


Рис. 1. $t = 0{,}5$

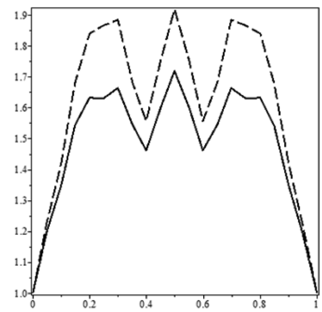


Рис. 2. $t = 1{,}0$

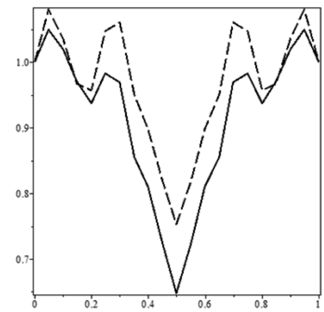


Рис 3. $t = 1{,}8$

Результаты вычислений показывают, что при $t \le 0{,}3$ значения этих функций практически совпадают, а их графики не различимы. Увеличение t приводит к росту относительной погрешности вычислений, не превышающей 13,25%. Ожидается, что к её уменьшению приведёт продолжение итерационного процесса.

Заключение

В работе предложен приближенно-аналитический метод нахождения решения задачи (1), (3), (4), состоящий, во-первых, в переходе от исходного нагруженного уравнения (2) к ассоциированному с ним обыкновенному дифференциальному уравнению (15), а во-вторых, в линеаризации (15) с помощью априорной оценки решения исходной задачи вида (11). Полученное начальное приближенное решение выражается аналитически функцией (21). Данная функция используется для запуска итерационного процесса (1′), (3′), (4′), предназначенного для последовательного приближения к решению задачи (1), (3), (4).

Данный метод применим к нагруженным дифференциальным уравнениям в частных производных, содержащим интеграл по пространственной переменной от p-й степени неизвестной функции при некоторых допущениях относительно p. Основную сложность в реализации метода представляют процедуры установления априорной оценки (11) и подбора констант, входящих в это и другие необходимые неравенства.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бозиев О.Л. Приближенное решение нагруженного гиперболического уравнения с однородными краевыми условиями // Вестник Южноуральского государственного университета. Серия: Математика, механика, физика. Т. 8. 2016. № 2. С. 14–18.
2. Бозиев О.Л. Применение нагруженных уравнений к приближенному решению дифференциальных уравнений в частных производных со степенной нелинейностью // Вестник Тверского государственного университета. Серия: Прикладная математика. 2015. № 1. С. 127–136.
3. Бозиев О.Л. Решение начально-краевой задачи для нелинейного гиперболического уравнения с помощью двойной редукции к нагруженным уравнениям // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. 2014. № 4(60). С. 7–12.

4. Вишневский К.П. Переходные процессы в напорных системах водоподачи. М: Агропромиздат, 1986. 132 с.
5. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.
6. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / пер. с фр.; 3-е изд. М: Едиториал УРСС, 2010. 586 с.
7. Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их применение. М: Наука, 2012. 232 с.
8. Lourкdo A.T., Siracusa G., Silva Filho C.A. On a Nonlinear Degenerate Evolution Equation with Nonlinear Boundary Damping [Electronic Source] // Journal of Applied Mathematics 2015. URL: https://projecteuclid.org/euclid.jam/1429105047 (request date: 08.10.2017).
9. Medeiros L.A. On the weak solutions of nonlinear partial differential equations // Anais da Academia Brasileira de Ciencias. 1981. Vol. 53. No. 1. P. 13–15.

REFERENCES

1. Boziev O.L. [An approximate solution of the loaded hyperbolic equations with homogeneous boundary conditions]. In: *Vestnik Yuzhnoural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematika, mekhanika, fizika* [Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematics, Mechanics, Physics], vol. 8, 2016, no. 2, pp. 14–18.
2. Boziev O.L. [The use of loaded equations to approximate the solution of differential equations with power nonlinearity]. In: *Vestnik Tverskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Prikladnaya matematika* [Bulletin of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2015, no. 1, pp. 127–136.
3. Boziev O.L. [The solution to the initial-boundary value problem for nonlinear hyperbolic equation with double reduction to the loaded equations]. In: *Izvestiya Kabardino-Balkarskogo nauchnogo tsentra RAN* [News of the Kabardino-Balkarian Science Center of the Russian Academy of Sciences], 2014, no. 4(60), pp. 7–12.
4. Vishnevskii K.P. *Perekhodnye protsessy v napornykh sistemakh vodopodachi* [Transient processes in pressure systems of water supply]. Moscow, Agrarian and industrial publishing house Publ., 1986. 132 p.
5. Demidovich B.P. *Lektsii po matematicheskoi teorii ustoichivosti* [Lectures on mathematical theory of stability]. Moscow, Nauka Publ., 1967. 472 p.
6. Lions J.-L. Problиmes aux Limites dans *les* Equations aux Dйrivйes Partielles (Montreal: Presses de l'Universitй de Montreal, 1962).
7. Nakhushev A.M. *Nagruzhennye uravneniya i ikh primenenie* [Loaded equations and their applications]. Moscow, Nauka Publ., 2012. 232 p.
8. Lourкdo A.T., Siracusa G., Silva Filho C.A. On a Nonlinear Degenerate Evolution Equation with Nonlinear Boundary Damping. In: *Journal of Applied Mathematics*. 2015. Available at: https://projecteuclid.org/euclid.jam/1429105047 (accessed: 08.10.2017).
9. Medeiros L.A. On the weak solutions of nonlinear partial differential. In: *Anais da Academia Brasileira de Ciencias*, 1981, vol. 53, no. 1, pp. 13–15.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Бозиев Олег Людинович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры информатики и технологий программирования Института информатики, электроники и компьютерных технологий Кабардино-Балкарского государственного университета;
e-mail: boziev@yandex.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Oleg L. Boziev – PhD in Physics and Mathematics, associate professor at the Department of Informatics and Programming Technology, Institute of Informatics, Electronics and Computer Technologies, Kabardino-Balkarian State University;
e-mail: boziev@yandex.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Бозиев О.Л. О приближённо-аналитическом методе решения нелинейного гиперболического уравнения с однородными начальными условиями // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2017. № 3. С. 43–52.
DOI: 10.18384-2310-7251-2017-3-43-52

CORRECT REFERENCE TO THE ARTICLE

Boziev O.L. On the Approximate-Analytic Method of Solving a Nonlinear Hyperbolic Equation with Homogeneous Initial Conditions. In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*, 2017, no. 3, pp. 43–52.
DOI: 10.18384-2310-7251-2017-3-43-52

РАЗДЕЛ II.
ФИЗИКА

УДК 538.91+538.931
DOI: 10.18384-2310-7251-2017-3-53-67

ДВА ТИПА ДЕФЕКТОВ, УЧАСТВУЮЩИХ В ПЕРЕМЕЩЕНИИ АТОМОВ ГЕЛИЯ В НЕУПОРЯДОЧЕННОЙ СТРУКТУРЕ КВАРЦА

Калашников Е.В., Крылова Н.А.
Московский государственный областной университет
105005, г. Москва, ул. Радио, д. 10А, Российская Федерация

Аннотация. В статье исследуется перемещение атома гелия через неупорядоченную структуру кварца. Для этого развивается приближение локальных цепочек. Число этих цепочек равно числу ближайших соседей, окружающих атом гелия. Каждая такая цепочка непременно содержит атом гелия. При переходе атома гелия в соседнее положение рассматриваются две ситуации: (*i*) ближний порядок сохраняется, (*ii*) ближний порядок не сохраняется. Нарушение ближнего порядка ведёт к появлению дефекта (избытка или недостатка атомов кислорода, принадлежащих тетраэдру SiO_4) в окружении атома гелия. Увеличение дефектов ведёт к генерации пустот с площадью поверхности пропорциональной квадрату числа дефектов. В этом случае возникают два типа дефектов, точнее пустот, – затягивающих и выталкивающих атом гелия. Авторы приходят к выводу, что приближение локальных цепочек показывает, что атом гелия движется через неупорядоченную структуру кварца как солитон Френкеля–Конторовой с энергией покоя (активации), зависящей от числа дефектов, площади и формы возникших пустот вокруг атома гелия.

Ключевые слова: атом гелия, тетраэдр SiO4, локальные цепочки, системы нелинейных, зацепляющихся дифференциальных уравнений, солитон Френкеля–Конторовой, энергия покоя (активации) солитона.

TWO TYPES OF DEFECTS INVOLVED IN THE TRANSPORTATION OF HELIUM ATOMS IN THE DISORDERED STRUCTURE OF QUARTZ

E. Kalashnikov, N. Krylova
Moscow Region State University
ul Radio 10A, 105005 Moscow, Russian Federation

Abstract. The motion of the helium atom through a disordered quartz structure, described by the local chain approximation, is investigated. The number of local chains is equal to the number of nearest neighbours surrounding the He atom. Each local chain includes the He atom. Upon a transition of the He atom from one to another nearest location, two different situations are considered: (*i*) short order is conserved, and (*ii*) short order is changed. Distortion of short order leads to the appearance of a defect (excess or deficit of O atoms of SiO_4 tetrahedrons) around the He atom. Increasing the number of defects creates voids with a surface area proportional to the square of the number of defects. In this case, two types of defects arise, more precisely voids, which involve and push out the helium atom. A conclusion is drawn that the approximation of local chains shows that the helium atom moves through a disordered quartz structure as a Frenkel–Kontorova soliton with rest (activation) energy, depending on the number of defects as well as the area and the shape of the emerging voids around the helium atom.

Key words: He atom, SiO_4 tetrahedron; local chain, system of linked nonlinear differential equations, Frenkel–Kontorov soliton, rest (activation) energy of soliton.

Введение

Реальные кристаллы кварца обладают различными дефектами – от вакансий в узлах решётки и атомов внедрения до дислокаций и межкристаллитных границ. Сами дислокации могут служить каналами для транспорта атомов гелия, обеспечивая соответствующую конфигурацию и внутренние размеры такого канала. Введение определённого количества дислокаций ведёт к разупорядочению кристаллической структуры [1] и возникновению в асимптотике нового, стеклообразного состояния [2]. В стеклообразном состоянии структурные единицы кварца, тетраэдры SiO_4, образуют неупорядоченную структуру кластеров пустот [3; 4]. Но как столь различные по строению и размерам (от размеров, сравнимых с атомом гелия, до наноразмеров) дефекты кварцевой структуры влияют на перемещение атома гелия? Будут ли дефекты способствовать или препятствовать перемещению атома гелия – не совсем понятно.

Цель настоящей работы – понять, как дефекты кварцевой структуры и при каких условиях влияют на перемещение атома гелия при переходе от идеальной кристаллической структуры к неупорядоченной (стеклообразной) структуре.

1. Модель

Для обеспечения однообразия при описании поведения атома гелия в структурах кварца атом гелия рассматривается в триплетном состоянии [5], а само перемещение атома гелия рассматривается как движение «классической частицы» массой m. *He*-атом окружён *O*-атомами (атомами кислорода, точнее, ионами кислорода, принадлежащими тетраэдрам SiO_4). Смещение *He*-атома $\vec{\Gamma}$ вызывает обратимые смещения $\vec{\xi}_n$ *O*-атомов ближайшего окружения *He*-атома. После каждого шага смещения *He*-атома в следующее положение *O*-атомы возвращаются в исходное положение. (Взаимодействие *He*-атома с атомом кремния Si в тетраэдре SiO_4 возникает через его дипольный момент, вызванный смещением *O*-атома [5]). В таком случае лагранжиан в общем виде для перемещения *He*-атома в произвольной структуре кварца может быть записан как:

$$L=\frac{1}{2}m\dot{\vec{\Gamma}}^2-\mathcal{U}\left(\vec{\Gamma},\{\xi_n\}\right)+\sum_n\left[\frac{M_n\dot{\vec{\xi}}_n^2}{2}-\frac{1}{2}\sum_\beta\alpha_c\left(\vec{\xi}_n-\vec{\xi}_{n-1}\right)_\beta\left(\vec{\xi}_{n+1}-\vec{\xi}_n\right)_\beta\right]. \quad (1)$$

Теперь самым важным шагом в рассмотрении перемещения *He*-атома через кристалл является раскрытие его потенциала взаимодействия $\mathcal{U}\left(\vec{\Gamma},\{\xi_n\}\right)$ с решёткой. Третье слагаемое в (1) – лагранжиан решётки, учитывающий в явном виде смещения *O*-атомов. Раскрытие $\mathcal{U}\left(\vec{\Gamma},\{\xi_n\}\right)$ должно учитывать переход окружения *He*-атома к неупорядоченной структуре. Эту операцию удобно выполнять с выделения начальной (невозмущённой – рис. 1*a*) регулярной структуры окружения *He*-атома $Z = 3$ [5], а затем разупорядочивать её путём введения дислокаций [1].

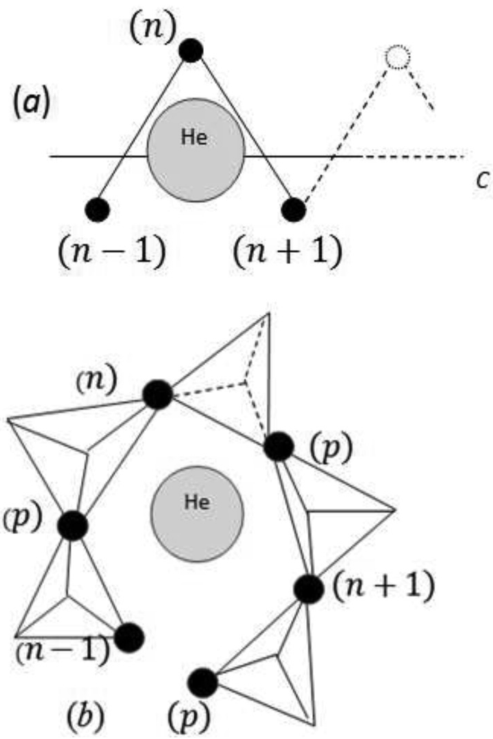


Рис. 1. He-атом (большой серый круг) в окружении тетраэдров.
Малые чёрные кружки в положениях (*n*-1), (*n*), (*n*+1) и т. д. обозначают атомы кислорода тетраэдров SiO_4, контактирующих непосредственно с *He*-атомом.
(*a*) Часть регулярного канала вдоль *c*-оси кристаллографического канала.
(*b*) Неупорядоченная структура: позиции (*p*) могут появиться в результате ввода дислокаций вдоль направлений нормальных к *c*-оси регулярного канала (*a*) [1] (здесь не соблюдается пространственная ориентация тетраэдров SiO_4)

Потенциал $\mathcal{U}\left(\vec{\Gamma},\{\xi_n\}\right)$ можно разложить на две составляющие:

$$\mathcal{U}\left(\vec{\Gamma},\{\xi_n\}\right)=\mathcal{U}_1+\mathcal{U}_2. \qquad (2)$$

Потенциал $\mathcal{U}_1$ вызывает трансляционное перемещение *He*-атома из одного положения в соседнее положение (немного ниже этот потенциал будет раскрыт – пункт 2c). $\mathcal{U}_2$ выражает взаимодействие между атомом гелия и окружающими его *O*-атомами (рис. 1). Чтобы раскрыть $\mathcal{U}_2$ воспользуемся подходом [1; 5], описывающим взаимодействие между *He*-атомом и окружающими его тетраэдрами SiO_4.

1a. Локальные цепи

Потенциальное поле $\mathcal{U}_2$ характеризует сильное взаимодействие *He*-атома с окружением. Представим его в гармоническом приближении. Пусть в некоторый момент времени *He*-атом окружён *Z* ближайшими *O*-атомами тетраэдров SiO_4. Тогда *He*-атом связан независимо с *Z O*-атомами следующим образом:

$O_{n-1}He$ и HeO_n, O_nHe и HeO_{n+1} и т. д.

Это удобнее рассматривать как *Z* локальных цепочек, обязательно включающих атом гелия, например, для *Z* = 3 (рис. 1*a*):

$$O_{n-2}O_{n-1}HeO_nO_{n+1}O_{n+2};$$

$$\cdot\cdot O_{n-2}O_{n-1}O_n\ HeO_{n+1}O_{n+2};$$

$$\cdot\cdot O_{n-2}O_{n-1}HeO_{n+1}O_{n+2}\cdots \qquad (3a)$$

Чтобы сократить обозначения цепей (3), оставим только ближайшие к атому гелия атомы кислорода:

$$O_{n-1}HeO_n\,;\ O_nHeO_{n+1};\ \ldots;\ O_{n-1}HeO_{n+1}. \qquad (3b)$$

При перемещении атома гелия через неупорядоченную структуру можно выделить два варианта: (*i*) ближний порядок окружения *He*-атома сохраняется и (*ii*) ближний порядок не сохраняется.

1b. Возмущение ближнего порядка

Возмущение локального порядка *He*-атома предполагает удаление или добавление тетраэдров непосредственно в окружении атома гелия. В таком случае потенциал $\mathcal{U}$ из (2) зависит от числа *p* избыточных (либо удалённых) *O*-атомов, окружающих *He*-атом (рис. 1).

Соответственно, число локальных цепочек, включающих атом гелия, также меняется. Чтобы учесть эти изменения, представим локальные цепи как матрицу (4), учитывая сокращения (3*b*). Матричные элементы над толстой чёрной линией соответствует координационному числу *Z* = 3. Ступенька между толстой пунктирной линией и сплошной толстой линией (содержащая O_{n+2}) соответствует дополнительному четвёртому атому кислорода, связанному с дополнительным тетраэдром. Такой дополнительный к регулярной структуре атом кислорода будем называть дефектом. (Такой дефект непосредственно связан с дислокацией [1]).

$O_{n-1}HeO_n$	O_nHeO_{n+1}	$O_{n+1}HeO_{n+2}$	$O_{n+2}HeO_{n+3}$	$O_{n+3}HeO_{n+4}$	
$O_{n-1}HeO_{n+1}$	O_nHeO_{n+2}	$O_{n+1}HeO_{n+3}$	$O_{n+2}HeO_{n+4}$	…………	
$O_{n-1}HeO_{n+2}$	O_nHeO_{n+3}	$O_{n+1}HeO_{n+4}$	…………	…………	(4)
$O_{n-1}HeO_{n+3}$	O_nHeO_{n+4}	…………	…………	…………	
$O_{n-1}HeO_{n+4}$	…………	…………	…………	…………	

Поскольку смещения атома гелия рассматриваются независимо в каждой локальной цепочке (3) и (4), то потенциал $\mathcal{U}_2$ в (2) записывается в виде приведённой билинейной формы:

$$\mathcal{U}_2 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=Z}\sum_{\beta} U_{k-1,k;\beta\beta}\left(\vec{\gamma}_{k-1,k} - \vec{\xi}_{k-1}\right)_{\beta}\left(\vec{\xi}_k - \vec{\gamma}_{k-1,k}\right)_{\beta}, \tag{5}$$

где $U_{k-1,k;\beta\beta}$ – постоянная взаимодействия *He*-атома в соответствующей цепочке с ближайшими *O*-атомами в позициях $k-1$ и k; $\beta = x, y, z$; $\vec{\xi}_k$ – вектор смещения k-ого *O*-атома; $\vec{\gamma}_{k,k-1}$ – вектор смещения *He*-атома, заключённого в k-ую локальную цепочку, указывающий направление выхода из неё. Например, вектор $\vec{\gamma}_{n,n-1}$ соответствует выходу *He*-атома из цепочки $O_{n-2}O_{n-1}HeO_nO_{n+1}O_{n+2}$, а вектор $\vec{\gamma}_{n,n+1}$ соответствует выходу *He*-атома из цепочки $O_{n-2}O_{n-1}O_n\ HeO_{n+1}O_{n+2}$.

Соответственно, полный вектор смещения *He*-атома $\vec{\Gamma}$ выражается как:

$$\vec{\Gamma} = \sum_{k=1}^{n}\vec{\gamma}_{k,k-1} \tag{6}$$

при $\vec{\gamma}_{k,k-1}\cdot\vec{\gamma}_{k,k+1} = 0$.

Запись (5) означает, что характеристическая матрица $(\mathcal{U}_2 - \lambda E)$ вся состоит из нулей (λ – собственное значение: E – единичная матрица). Ранг характеристической матрицы равен нулю. Это предполагает, что все собственные значения λ_j равны между собой $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \ldots = \lambda$. В таком случае все элементы $U_{k-1,k;\beta\beta}$ билинейной формы равны между собой:

$$U_{k-1,k;\beta\beta} = \alpha_\gamma,$$

а билинейная форма (5) приобретает следующий вид:

$$\mathcal{U}_2 = \frac{1}{2}\alpha_\gamma\sum_{k=1}^{k=Z}\sum_{\beta}\left(\vec{\gamma}_{k-1,k} - \vec{\xi}_{k-1}\right)_{\beta}\left(\vec{\varepsilon}_k - \vec{\gamma}_{k-1,k}\right)_{\beta}. \tag{7}$$

Билинейная форма $\mathcal{U}_2$ характеризуется одной и той же постоянной взаимодействия α_γ атома гелия с окружением для всех локальных цепочек.

Если же в окружении атома гелия окажутся другие атомы (не атомы кислорода, а заместившие их), то в таком случае $\mathcal{U}_2$ из (7) распадётся на две или три аналогичные суммы, каждая из которых будет характеризоваться своей постоянной взаимодействия $\alpha_{\gamma,j}$, где j = 0, 1, 2, … – число типов атомов в окружении атома гелия, отличных от атомов кислорода.

1c. Делокализация дефекта

Потенциал $\mathcal{U}_2$ из (7) можно разложить на две части: регулярную $\mathcal{U}_2(Z)$ и возмущённую $\mathcal{U}_2(\zeta)$, вызванную, например, вводом дислокаций [1]:

$$\mathcal{U}_2 = \mathcal{U}_2\left(Z\right) + \mathcal{U}_2\left(\zeta\right). \tag{8}$$

Число слагаемых в $\mathcal{U}_2(Z)$ равно числу локальных цепочек Z ближайшего окружения атома гелия в невозмущённой структуре (рис. 1). Число слагаемых в $\mathcal{U}_2(\zeta)$ равно числу локальных цепочек ζ, возникших от избыточных атомов кислорода, находящихся, например, в позициях (p) (рис. 1b) тетраэдров SiO_4 из-за введённых дислокаций. В таком случае число локальных цепочек ζ сопоставимо с квадратом числа избыточных (по отношению к регулярной структуре) атомов кислорода p [1], возникших на новых позициях (p) (рис. 1b): $\zeta = \zeta(p) \sim p^2$ (рис. 2). Тогда возмущённая часть $\mathcal{U}_2(\zeta)$ может быть представлена в одной из форм соотношений:

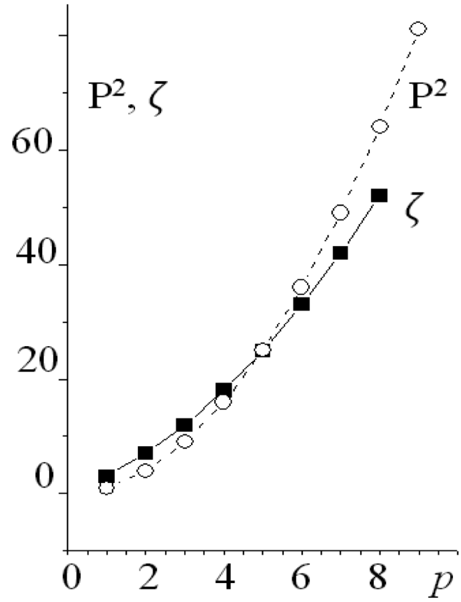


Рис. 2. Общее число добавленных локальных цепочек ζ, охватывающих атом гелия и «площадь поверхности полости» p^2, возникшей из дефектов в зависимости от числа p добавленных атомов кислорода тетраэдров SiO_4

$$\mathcal{U}_2(\zeta) \sim \sum_k \sum_\beta \left(\vec{\gamma}_{k,k-1} - \vec{\xi}_{k-1}\right)_\beta \left(\vec{\xi}_k - \vec{\gamma}_{k,k-1}\right)_\beta$$

$$\sim \zeta \sum_\beta \left(\vec{\gamma}_{j,j-1} - \vec{\xi}_{j-1}\right)_\beta \left(\vec{\xi}_j - \vec{\gamma}_{j,j-1}\right)_\beta$$

$$\sim p^2 \sum_\beta \left(\vec{\gamma}_{j,j-1} - \vec{\varepsilon}_{j-1}\right)_\beta \left(\vec{\varepsilon}_j - \vec{\gamma}_{j,j-1}\right)_\beta$$

$$\sim \sigma \sum_\beta \left(\vec{\gamma}_{j,j-1} - \vec{\varepsilon}_{j-1}\right)_\beta \left(\vec{\varepsilon}_j - \vec{\gamma}_{j,j-1}\right)_\beta \qquad (9)$$

Другими словами, возмущающий потенциал $\mathcal{U}_2(\zeta)$ оказывается пропорциональным произведению квадрата p^2 числа p добавленных атомов кислорода тетраэдров SiO_4 (или произведению площади σ поверхности полости, возникшей из дефектов) на разность смещений атома гелия и любых двух ближайших атомов кислорода в любой цепочке, принадлежащей возникшей из дефектов полости, безотносительно к месту j или k в этой полости. Эти заключения позволяют сделать эквивалентную замену в билинейной форме (9):

$$\left(\vec{\gamma}_{j,j-1} - \vec{\varepsilon}_{j-1}\right)_\beta \left(\vec{\varepsilon}_j - \vec{\gamma}_{j,j-1}\right)_\beta \approx$$

$$\approx \left(1/3\right)[\left(\vec{\gamma}_{k,k-1} - \vec{\varepsilon}_{k-1}\right)_\beta \left(\vec{\varepsilon}_k - \vec{\gamma}_{k,k-1}\right)_\beta +$$

$$+\left(\vec{\gamma}_{k+1,k} - \vec{\varepsilon}_k\right)_\beta \left(\vec{\varepsilon}_{k-1} - \vec{\gamma}_{k+1,k}\right)_\beta +$$

$$+\left(\vec{\gamma}_{k-1,k+1} - \vec{\varepsilon}_{k+1}\right)_\beta \left(\vec{\varepsilon}_k - \vec{\gamma}_{k,k+1}\right)_\beta]. \qquad (10)$$

Выражение в квадратных скобках (10) соответствует невозмущённому кристаллографическому каналу вдоль c – оси (рис. 1*а*) при исходной координации $Z = 3$. В таком случае:

$$\mathcal{U}_2(\zeta) = \left(1/3\right) p^2 \mathcal{U}_2(Z),$$

и выражение (8) принимает форму:

$$\mathcal{U}_2 = \mathcal{U}_2(Z) + \left(1/3\right) p^2 \mathcal{U}_2(Z). \qquad (11)$$

Тогда сила $\vec{F}$, действующая на атом гелия со стороны окружения в соответствии с (10) и (11), может быть представлена в виде:

$$\vec{F} = -\alpha_\gamma[\left(\vec{\gamma}_{n,n-1} - \vec{\xi}_{n-1}\right) - \left(\vec{\xi}_n - \vec{\gamma}_{n,n-1}\right) +$$

$$+\left(\vec{\gamma}_{n+1,n} - \vec{\xi}_n\right) - \left(\vec{\xi}_{n+1} - \vec{\gamma}_{n+1,n}\right) +$$

$$+\left(\vec{\gamma}_{n-1,n+1}-\vec{\xi}_{n+1}\right)-\left(\vec{\xi}_{n-1}-\vec{\gamma}_{n-1,n+1}\right)]-$$
$$-p^2\alpha_\gamma\left(1/3\right)[\left(\vec{\gamma}_{n,n-1}-\vec{\xi}_{n-1}\right)-\left(\vec{\xi}_n-\vec{\gamma}_{n,n-1}\right)+$$
$$+\left(\vec{\gamma}_{n+1,n}-\vec{\xi}_n\right)-\left(\vec{\xi}_{n+1}-\vec{\gamma}_{n+1,n}\right)+$$
$$+\left(\vec{\gamma}_{n-1,n+1}-\vec{\xi}_{n+1}\right)-\left(\vec{\xi}_{n-1}-\vec{\gamma}_{n-1,n+1}\right)] \qquad (12)$$

Уравнения (11) и (12) показывают, что потенциальная энергия взаимодействия *He*-атома с окружением будет расти с увеличением числа дефектов (избыточных атомов кислорода) пропорционально p^2. Это обнаруживает аналогию с полостью вокруг атома гелия, которая имеет площадь поверхности p^2, эквивалентную квадрату с длиной стороны, равной p. Таким образом, появление добавочного *O*-атома в окружении *He*-атома производит «поверхность» или «полость» с площадью $\sigma \sim (p)^2$. Возрастание числа «полостей» генерирует избыточную энергию. Это возрастание энергии может быть компенсировано слиянием «полостей». И силу, пропорциональную p^2, bp^2, будет компенсировать сила, пропорциональная произведению двух ближайших полостей $\left(p_j^2\cdot p_{j+1}^2\right)\sim c\cdot p^4$. В таком случае возмущение вызывает силу, пропорциональную разности $bp^2 - cp^4$. Полная сила, приложенная к атому гелия со стороны неоднородной (гетерогенной), неупорядоченной структуры, в которой число дефектов может меняться, выражается в виде:

$$\vec{F}\approx -a_\gamma\vec{f}-a_\gamma\left(bp^2-cp^4\right)\left(1/3\right)\vec{f}, \qquad (13)$$

где

$$\vec{f}=\Big[\left(\vec{\gamma}_{n,n-1}-\vec{\xi}_{n-1}\right)-\left(\vec{\xi}_n-\vec{\gamma}_{n,n-1}\right)+$$
$$+\left(\vec{\gamma}_{n+1,n}-\vec{\xi}_n\right)-\left(\vec{\xi}_{n+1}-\vec{\gamma}_{n+1,n}\right)+$$
$$+\left(\vec{\gamma}_{n-1,n+1}-\vec{\xi}_{n+1}\right)-\left(\vec{\xi}_{n-1}-\vec{\gamma}_{n-1,n+1}\right)\Big].$$

Из (13) следует, что влияние разупорядоченной структуры на атом гелия может быть выражено через изменение постоянной взаимодействия *He*-атома с окружением.

1d. Два типа дефектов

Из (13) следует, что постоянная взаимодействия *He*-атома с окружением, α_γ заменяется на некоторую эффективную постоянную взаимодействия, зависящую от числа дефектов p:

$$-\alpha_\gamma\left[1+\left(bp^2-cp^4\right)/3\right]. \qquad (13a)$$

Эта ситуация соответствует затягиванию *He*-атома в полость (в ядро дислокации или в общем в полость).

Существует и противоположная ситуация:

$$-\alpha_\gamma\left[1-\left(bp^2-cp^4\right)/3\right]. \qquad (13b)$$

Этот случай соответствует выталкиванию *He*-атома из полости [1].

2. Уравнения движения

2а. Система нелинейных зацепляющихся дифференциальных уравнений

Разупорядочение структуры, окружающей *He*-атом, приводит также и к изменению постоянной взаимодействия α_c между *O*-атомами самого окружения. А это опять же сказывается на перемещении *He*-атома через неупорядоченную среду. Чтобы учесть в явном виде разупорядочение структуры и сохранить её в уравнениях движения *He*-атома в случае отсутствия самого атома гелия, воспользуемся приёмом, рассмотренным в (4)–(13), но в отношении *O*-атома. В таком случае изменится эффективная масса атомов кислорода (см. ниже, (19)). С учётом всех поправок уравнения движения *He*-атома в неупорядоченной и неоднородной среде запишутся следующим образом:

$$\begin{cases} md^2\Gamma_z/dt^2=-\partial U_1/\partial\Gamma_z-\alpha_\gamma\left[1+\left(bp^2-cp^4\right)(1/3)\right]f_z \\ md^2\Gamma_j/dt^2=-\alpha_\gamma\left[1+\left(bp^2-cp^4\right)(1/3)\right]f_j \qquad j=x,y \\ Md^2\xi_{e,j}/dt^2=-\alpha_c\left\{\left[\left(\xi_{n+1,j}+\xi_{n-1,j}-2\xi_{e1,j}\right)+\right.\right. \\ +\left(\xi_{n,j}+\xi_{n-1,j}-2\xi_{e2,j}\right)+ \\ \left.+\left(\xi_{n+1,j}+\xi_{n-1,j}-2\xi_{e3,j}\right)\right]+ \\ +\alpha_c\left(bp^2-cp^4\right)\left\{\left[\left(\xi_{n+1,j}+\xi_{n-1,j}-2\xi_{e1,j}\right)+\right.\right. \\ +\left(\xi_{n,j}+\xi_{n-1,j}-2\xi_{e2,j}\right)+ \\ \left.\left.+\left(\xi_{n+1,j}+\xi_{n-1,j}-2\xi_{e3,j}\right)\right]\right\}+ \\ +\alpha_\gamma\left[1+\left(bp^2-cp^4\right)(1/3)\right]f_j \\ j=x,y,z \end{cases} \qquad (14)$$

Здесь m – масса атома гелия; M – масса атома кислорода; f_j – определена в (13); α_γ и α_c – постоянные взаимодействия *He*-атома с окружением и взаимодействия *O*-атомов между собой, соответственно, $\{x,y,z\}$ – локальная система отсчёта. Здесь намеренно смещения избыточного *O*-атома кислорода, возникшего при разупорядочении структуры (рис. 1*b*), обозначены через $\vec{\xi}_e=\left\{\xi_{e1,j};\xi_{e2,j};\xi_{e3,j}\right\}$, $j=x,y,z$, с тем, чтобы отличить добавленные атомы кислорода от уже имеющихся. Для учёта изменений, возникающих при разупорядочении, необходимо перенумеровать смещения *O*-атомов, при этом индекс «*e*» сменится по порядку их учёта на одно из значений «*n*».

2b. Адиабатическое приближение

Чтобы найти решение этой системы нелинейных зацепляющихся дифференциальных уравнений, воспользуемся адиабатическим приближением [1; 5]. Оно основано на двух положениях:

(a) – различия в смещениях центров тяжестей соседних атомов кислорода ξ_n и ξ_{n+1} незначительны;

(b) – смещение *O*-атомов не превышает смещений *He*-атома за время $\tau \sim 10^{-13}s$ (порядка перехода атома между соседними положениями).

Эти приближения приводят к двум важным соотношениям:

$$\xi_{n+1,j} + \xi_{n-1,j} - 2\xi_{n,j} = \left(d^2\xi_{n,j} / dt^2\right)\tau^2, \tag{15}$$

$$\xi_{n+1,j} + \xi_{n-1,j} - 2\gamma_j \approx \left(d^2\gamma_j / dt^2\right)\tau^2. \tag{16}$$

При использовании этих двух приближений система уравнений (14) сводится к новой системе:

$$\begin{cases} m^{\#} d^2\Gamma_z / dt^2 = -\partial U_1 / \partial\Gamma_z \\ m^{\#} d^2\Gamma_x / dt^2 = 0 \\ m^{\#} d^2\Gamma_y / dt^2 = 0 \\ M^{\#} d^2\xi_{n,y} / dt^2 = 0 \\ M^{\#} d^2\xi_{n,x} / dt^2 = 0 \\ M^{\#} d^2\xi_{n,z} / dt^2 = \left[\alpha_\gamma\tau^2 + \left(bp^2 - cp^4\right)\alpha_\gamma\tau^2\left(1/3\right)\right] d^2\Gamma_z / dt^2, \end{cases} \tag{17}$$

где

$$m^{\#} = m - \alpha_\gamma\left[1 + \left(bp^2 - cp^4\right)/3\right]\tau^2, \tag{18}$$

$m^{\#}$ – эффективная масса *He*-атома;

$$M^{\#} = M - \alpha_c\left[1 + \left(bp^2 - cp^4\right)/3\right]\tau^2, \tag{19}$$

$M^{\#}$ – эффективная масса *O*-атома из тетраэдра SiO_4.

Закон сохранения импульса (в локальной форме [5], который следует из последнего уравнения системы (17)) при взаимодействии *He*-атома с O_n-атомами ведёт к соотношениям:

$$\Gamma_z = \Gamma_{z,n};\ \vec{\Gamma} = \vec{\Gamma}_n. \tag{20}$$

Это значит, что смещения *He*-атома оказываются дискретными и управляются взаимодействием с ближайшими O_n-атомами.

Теперь первое уравнение из (17) при условии (20) даёт:

$$m^{\#}\, d^2\vec{\Gamma}_{\mathrm{n}} / dt^2 = -\,\partial\mathcal{U}_1 / \partial\vec{\Gamma}_n \tag{21}$$

2c. Раскрытие потенциала $\mathcal{U}_1$

Включение добавочных тетраэдров позволяет, тем не менее, рассматривать перемещение атома гелия так, как если бы ближний порядок атомов, участвующих в его перемещении, сохранялся. Это следует из преобразований (3)–(9). Причина такой кажущейся инвариантности заключается в том, что все особенности структуры (её неоднородность и нарушения) переносятся либо в перестройку постоянных взаимодействия α_γ и α_c (13) и (19), либо в перестройку эффективных масс самого *He*-атома и *O*-атома окружения (18) и (19). Сохранение ближнего порядка при переходе *He*-атома из одного состояния в другое, например, как в (3) и (3*a*), предполагает существование оператора перехода $\hat{T}$ такого, что:

$$\hat{T}\left(\vec{a}_{\boldsymbol{n}}\right)\mathcal{U}_1\left(\vec{\Gamma}\right)=\mathcal{U}_1\left(\vec{\Gamma}+\vec{a}_{\boldsymbol{n}}\right),$$

где $\vec{a}_n$ – минимальный вектор смещения *He*-атома в направлении *n*-ой позиции. Теперь разложим $\mathcal{U}_1\left(\vec{\Gamma}+\vec{a}_{\boldsymbol{n}}\right)$ в ряд в точке, определяемой концом вектора $\vec{\Gamma}$:

$$\mathcal{U}_1\left(\vec{\Gamma}+\vec{a}_{\boldsymbol{n}}\right)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\frac{\partial^m}{\partial\vec{\Gamma}^m}\mathcal{U}_1\left(\vec{\Gamma}\right)a_n^m=\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\frac{\partial^m}{\partial\vec{\Gamma}^m}a_n^m\right)\mathcal{U}_1\left(\vec{\Gamma}\right)=$$
$$=\hat{T}\left(\vec{a}_{\boldsymbol{n}}\right)\mathcal{U}_1\left(\vec{\Gamma}\right). \tag{22}$$

Ближайший член ряда (22), который в неупорядоченной системе не зависит от направления перехода в соседнее положение, а зависит только от квадрата расстояния $\left(a_n^2\right)$, содержит оператор второго порядка с той же собственной функцией. Из (22) следует, что оператор $\hat{T}\left(\vec{a}_{\boldsymbol{n}}\right)$ коммутирует с оператором $\partial^2/\partial\vec{\Gamma}^2$, и оба имеют одинаковые собственные функции. Собственной функцией в этом случае является $\mathcal{U}_1\left(\vec{\Gamma}\right)$, которая выражает потенциальное поле, действующее на *He*-атом со стороны окружения. В таком случае поведение функций $\mathcal{U}_1\left(\vec{\Gamma}\right)$ можно представить как задачу на собственные значения:

$$\partial^2\mathcal{U}_1/\partial\vec{\Gamma}^2=-\Lambda\mathcal{U}_1,$$

где Λ – собственное значение. Так что собственные функции имеют вид:

$$\mathcal{U}_1\left(\vec{\Gamma}_{\boldsymbol{k}}\right)\sim exp\left[\pm j2\pi\Gamma_k/a_n\right].$$

Таким образом, сохранение ближнего порядка при произвольных переходах между пространственными позициями приводит к периодическим функциям потенциала $\mathcal{U}_1\left(\vec{\Gamma}_{\boldsymbol{k}}\right)$ вдоль «кусков» длины ломаной линии $\vec{\Gamma}_k=\vec{\Gamma}_n+k\vec{a}_n$. В качестве такого потенциала выберем косинусоидальный тип этого потенциала [6]:

$$\mathcal{U}_1 = A\left[1-\cos\left(2\pi\vec{\Gamma}_n / \vec{a}_n\right)\right]. \qquad (23)$$

В таком случае получаем уравнение модели Френкеля–Конторовой:

$$m^{\#} d^2\vec{\Gamma}_n / dt^2 = -2\pi A a_n^{-1} \sin\left(2\pi\vec{\Gamma}_n / \vec{a}_n\right). \qquad (24)$$

Здесь $m^{\#}$ – эффективная масса, определённая в (13) и (18), A – амплитуда периодического потенциала, определяемая свойством решётки и (или) соотношением «радиусов» атома гелия и охватывающего его объёма [1]. Движение атома гелия через неупорядоченную среду описывается солитоном Френкеля–Конторовой, эффективная масса которого определяется числом дефектов и их формой.

2d. Лагранжиан и энергия активации солитона

Учитывая все выше проведённые преобразования, получим новый лагранжиан $\mathcal{L}_s$, описывающий перемещение атома гелия через неупорядоченную структуру кварца в виде солитона Френкеля–Конторовой:

$$\mathcal{L}_s = \sum_n \left[\frac{m}{2}\left(\frac{d\vec{\Gamma}_\text{n}}{dt}\right)^2 - \frac{1}{2}\alpha_\gamma\left(1+\frac{bp^2-cp^4}{3}\right)\left(\vec{\Gamma}_n - \vec{\Gamma}_{n-1}\right)^2 - A\left(1-\cos\left(2\pi\Gamma_n / a_n\right)\right)\right] \qquad (25)$$

Здесь p – число дефектов (избыточных тетраэдров, окружающих атом гелия в неупорядоченной структуре кварца). Активационная энергия (энергия покоя) солитона равна [1]:

$$E_p = 8A\sqrt{1-{m}/{m^{\#}}} \qquad (26)$$

Для расчёта полной энергии солитона рассматриваем время $t >> \tau$, [τ – раздел ***2b***, пункт (*ii*)], складываем все векторы $\vec{a}_n$ элементарных переходов между соседними положениями *He*-атома, совершённых за время t. Это позволяет перейти к интегрированию и выразить энергию солитона в релятивистской форме [6]:

$$E = E(p)/\left(1-(v/c)^2\right)^{1/2}.$$

E(p) имеет разрывной характер (рис. 3).

Добавление тетраэдров в окружение *He*-атома вплоть до $p = 10$ ведёт к появлению полости вокруг *He*-атома. Это находится в согласии с рис. 2, показывающим, что увеличение числа локальных цепочек ζ (рис. 2) ведёт к появлению и разрастанию площади поверхности полости вокруг *He*-атома для $p < 10$ и способствует перемещению солитона для втягивающего дефекта (13a) (рис. 4).

Однако изменение p в обоих случаях ведёт к разному перемещению солитона. В случае «выталкивающего» дефекта (13b) и линия 2 (рис. 4) новый дефект (сочетание полостей) пропускает атом гелия только в интервалах $0 \le p < 2$ и $p > 9{,}5$. В случае «втягивающего» дефекта (13*a*) и линия 1 (рис. 4) дефекты, в виде сочетания полостей, пропускают атомы гелия при $0 \le p < 10$, а при $p > 10$ – ещё активнее, и $E(p)$ выходит на стабильное значение (рис. 3), поскольку $\left(m/m^{\#}\right) \to 0$ из (26) при $p \to \infty$, (18).

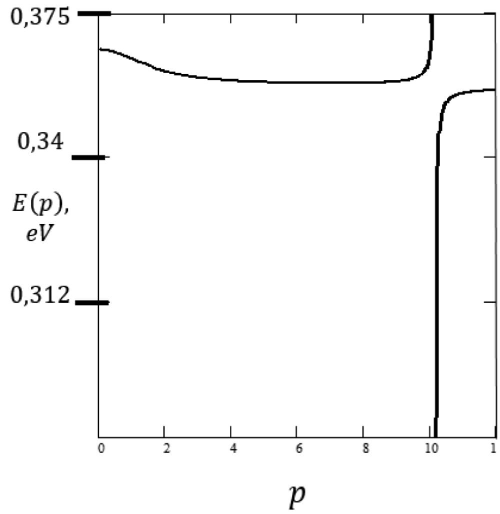


Рис. 3. Энергия активации солитона Френкеля-Конторовой в зависимости от числа избыточных тетраэдров вокруг *He*-атома.
Эта зависимость вычислена для атома гелия с массой $m = 6{,}7 \cdot 10^{-24} g$, поляризуемости $\beta = 46{,}7\dot{A}^3$ [5], $b = 1$; $c = 0{,}01$; $\tau = 10^{-13}s$; $Z = 3$ [1]

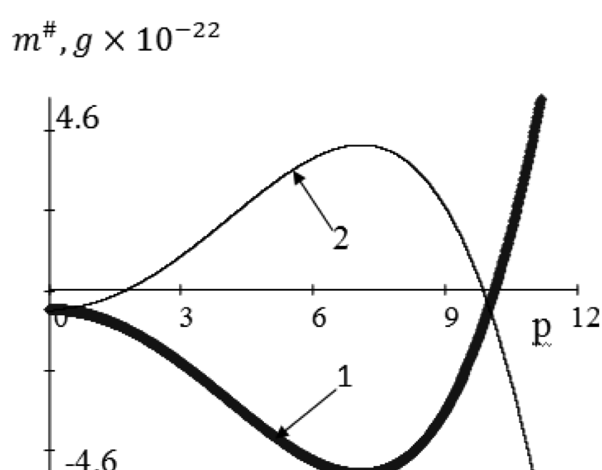


Рис. 4. Эффективная масса в зависимости от числа дефектов *p*.
Линия 1 соответствует (13*a*); линия 2 соответствует (13*b*).
Отрицательные значения эффективной массы обеспечивают перемещение солитона.

Заключение

В работе показано, что атом гелия перемещается в неупорядоченной структуре как солитон Френкеля-Конторовой. Особую роль играют дефекты (дислокации, пустоты, трещины и т. д.), которые могут втягивать атом гелия или препятствовать его входу. Полученное решение в виде ФК-солитона по своей сути существенно отличается от общепринятого ФК-солитона тем, в первую очередь, что каноническая форма ФК-солитона предполагает прямолинейное движение. В нашем случае аналог ФК-солитона – это всего лишь переход атома между двумя соседними положениями. Полученные соотношения позволяют анализировать перемещения не только атомов гелия, но и любых других атомов через совершенно произвольные по структуре вещества.

ЛИТЕРАТУРА

1. Калашников Е.В., Толстихин И.Н., Певзнер Б.З. Перемещение атома гелия через кристалл кварца с дислокациями // Физика твёрдого тела. Т. 52. 2010. Вып. 7. С. 1283–1290.
2. Edwards S.F., Warner M. A dislocation theory of crystal melting and of glasses // Journ. Philosophical Magazine A. Vol. 40. 1979. P. 257–278.
3. Shackelford J.F. Triangle Rafts-Extended Zachariasen Schematics for Structure Modeling // Journal of Non-Crystalline Solids. Vol. 49. 1982. No. 19. P. 19–28.
4. Бойко Г.Г., Бережной Г.В., Пути миграции гелия в α-кварце и стеклообразном кремнезёме по данным метода молекулярной динамики // Физика и химия стекла. Т. 29. 2003. № 1. С. 65–75.
5. Kalashnikov E., Tolstikhin I., Lehman B., Pevzner B. Helium transport along lattice channels in crystalline quartz // Journal of Physics and Chemistry of Solids. Vol. 64. 2003. No. 11. P. 2293–2300.
6. Конторова Т.А., Френкель Я.И. К теории пластической деформации и двойникования // Журнал экспериментальной и теоретической физики. Т. 8. 1938. Вып. 1. С. 89–95.

REFERENCES

1. Kalashnikov E.V., Tolstikhin I.N., Pevzner B.Z. [The movement of a helium atom through a quartz crystal with dislocations]. In: *Fizika tverdogo tela* [Solid State Physics], vol. 52, 2010, no. 7, pp. 1283–1290.
2. Edwards S.F., Warner M. A dislocation theory of crystal melting and of glasses. In: *Journ. Philosophical Magazine A*, vol. 40, 1979, pp. 257–278.
3. Shackelford J.F. Triangle Rafts-Extended Zachariasen Schematics for Structure Modeling. In: *Journal of Non-Crystalline Solids*, vol. 49, 1982, no. 19, pp. 19–28.
4. Boiko G.G., Berezhnoi G.V. [Migration paths of helium in α-quartz and vitreous silica according to the method of molecular dynamics]. In: *Fizika i khimiya stekla* [Glass Physics and Chemistry], vol. 29, 2003, no. 1, pp. 65–75.
5. Kalashnikov E., Tolstikhin I., Lehman B., Pevzner B. Helium transport along lattice channels in crystalline quartz. In: *Journal of Physics and Chemistry of Solids*, vol. 64, 2003, no. 11, pp. 2293–2300.
6. Kontorova T.A., Frenkel' Ya.I. [On the theory of plastic deformation and twinning]. In: *Zhurnal eksperimental'noi i teoreticheskoi fiziki* [Journal of Experimental and Theoretical Physics], vol. 8, 1938, no. 1, pp. 89–95.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Калашников Евгений Владимирович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры вычислительной математики и методики преподавания информатики Московского государственного областного университета;
e-mail: ekevkalashnikov1@gmail.com

Крылова Надежда Александровна – аспирант кафедры теоретической физики Московского государственного областного университета;
e-mail: krylova_nadya_1993@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Evgenii V. Kalashnikov – Doctor in Physics and Mathematics, professor, professor at the Department of Computational Mathematics and Methods of Teaching Informatics, Moscow Region State University;
e-mail: ekevkalashnikov1@gmail.com

Nadezhda A. Krylova– postgraduate student at the Department of Theoretical Physics, Moscow Region State University;
e-mail: krylova_nadya_1993@mail.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Калашников Е.В., Крылова Н.А. Два типа дефектов, участвующих в перемещении атомов гелия в неупорядоченной структуре кварца // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2017. № 3. С. 53–67.
DOI: 10.18384-2310-7251-2017-3-53-67

CORRECT REFERENCE TO THE ARTICLE

Kalashnikov E.V., Krylova N.A. Two Types of Defects Involved in the Transportation of Helium Atoms in the Disordered Structure of Quartz. In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*, 2017, no. 3, pp. 53–67.
DOI: 10.18384-2310-7251-2017-3-53-67

УДК 533.72
DOI: 10.18384-2310-7251-2017-3-68-75

ФОРМУЛА ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ВРЕМЕНИ ПОЛНОГО ИСПАРЕНИЯ АЭРОЗОЛЬНЫХ КАПЕЛЬ С УЧЁТОМ КОЭФФИЦИЕНТОВ ИСПАРЕНИЯ И ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ

Кузьмин М.К.[1], Хасанов А.С.[2]

[1] *Московский государственный областной университет*
105005, г. Москва, ул. Радио, д. 10А, Российская Федерация

[2] *Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова*
117997, г. Москва, Стремянный пер., д. 36, Российская Федерация

Аннотация. Авторами статьи получена приближённая формула для времени полного испарения аэрозольных капель воды в воздушную среду в виде функции от их начальных радиусов. Для мелких и крупных капель формула выведена на основе модели нестационарного процесса испарения, учитывающей коэффициент испарения, коэффициент поверхностного натяжения и теплоту фазового перехода вещества капли. Формула для капель с промежуточными размерами выведена на основе формул для крупных и мелких капель с использованием непрерывности, гладкости и монотонности времени полного испарения капель как функции от их начальных радиусов. Приведены соответствующие графики.

Ключевые слова: аэрозольные капли, время полного испарения, нестационарный процесс испарения.

FORMULA FOR CALCULATING THE COMPLETE EVAPORATION TIME OF AEROSOL DROPS WITH ALLOWANCE FOR THE EVAPORATION AND SURFACE TENSION COEFFICIENTS

M. Kuzmin[1], A. Khasanov[2]

[1] *Moscow Region State University*
ul Radio 10A, 105005 Moscow, Russian Federation

[2] *Plekhanov Russian University of Economics*
Stremyannyi pereulok 36, 117997 Moscow, Russian Federation

Abstract. An approximate formula for the time of complete evaporation of aerosol water drops into the atmosphere is obtained as a function of their initial radii. For small and large drops the formula is derived on the basis of the model of the unsteady evaporation process, taking into account the evaporation coefficient, the coefficient of surface tension and the specific heat of the phase transition. The formula for drops of intermediate size is obtained on the basis of the formulas for large and small drops with the use of continuity, smoothness and monotonicity of the complete evaporation time of drops as a function of their initial radii. The corresponding graphs are presented.

Key words: aerosol drops, complete evaporation time, unsteady evaporation process.

Введение

Процесс испарения аэрозольной капли в атмосфере зависит от многих факторов. Этот процесс, в том числе и задача о времени существования (полного испарения) капель, рассматривался в ряде работ. Применялись как математические модели этого процесса [4; 6], так и экспериментальные [5] и численные [3] методы. В работе [7] рассмотрена модель нестационарного процесса испарения аэрозольной капли, взвешенной в однокомпонентном газе, с учётом теплоты фазового перехода вещества капли, коэффициента испарения, коэффициента поверхностного натяжения и получена формула для скорости изменения $\frac{dR}{dt}$ радиуса капли $R = R(t)$, который в нестационарном процессе зависит от времени t. Заметим, что воздух приближенно можно рассматривать как однокомпонентный газ, так как он преимущественно состоит из азота. Целью данной работы является дальнейшее развитие результатов работы [7]. Перед записью формулы для величины $\frac{dR}{dt}$, полученной в этой работе, введём обозначения.

Пусть ρ_i и m_1 – плотность и масса молекул вещества капли, n_1 и n_2 – численная концентрация молекул первого компонента (пара) и второго компонента (газа) внешней парогазовой смеси, $n = n_1 + n_2$, κ и ρ_e – коэффициент теплопроводности и плотность парогазовой смеси. Величина D определяется по формуле $D = nm_1D_{12}/\rho_e$, где D_{12} – коэффициент взаимной диффузии компонентов парогазовой смеси.

Поле температуры T в парогазовой смеси в сферической системе координат с началом в центре неподвижной капли является функцией двух переменных r и t: $T = T(r, t)$, причём $\lim_{t\to 0} T(r,t) = \lim_{r\to+\infty} T(r,t) = T_0$, где T_0 – постоянная. Это верно и для поля концентрации $c_1 = n_1/n$ первого компонента (пара) парогазовой смеси:

$$c_1 = c_1(r,t), \lim_{t\to 0} c_1(r,t) = \lim_{r\to+\infty} c_1(r,t) = c_{10},$$

где c_{10} – постоянная.

Пусть k – постоянная Больцмана, $\nu = \left[kT_0/(2\pi m_1)\right]^{1/2}$ – одна четвёртая средней абсолютной тепловой скорости молекул пара, α – коэффициент испарения, σ – коэффициент поверхностного натяжения, q – удельная теплота фазового перехода вещества капли, $\overline{c}_{1s0}$ – концентрация насыщенных паров вещества капли у поверхности с малой кривизной при температуре T_0, $k_\sigma = 2m_1\sigma/(kT_0\rho_i)$. Концентрация насыщенных паров вещества капли у её поверхности при температуре T_0 определяется по формуле $c_{1s0} = \overline{c}_{1s0}\left(1 + k_\sigma / R\right)$. Определим ещё четыре величины: $\varepsilon = \alpha\nu(c_{10} - c_{1s0})$, $k_q = \left(qm_1 - kT_0\right)/\left(kT_0^2\right)$, $\gamma = Dm_1nq$, $\kappa_{q\sigma} = c_{1s0}k_q\gamma$.

Тогда формулу для величины $\frac{dR}{dt}$ из работы [7] можно записать в виде:

$$\frac{dR}{dt} = \left(\varepsilon nm_1 / \rho_i\right) F\left(t, R\right), \tag{1}$$

где $F(t, R)$ – функция, удовлетворяющая двум условиям:

$$\lim_{t \to 0} F\left(t, R\right) = 1, \tag{2}$$

$$\lim_{t \to +\infty} F\left(t, R\right) = D\kappa / \left[D\kappa + \alpha\nu\left(\kappa + \kappa_{q\sigma}\right)R\right]. \tag{3}$$

Точное выражение для функции $F(t, R)$ нам не понадобится, так как целью данной работы является получение, основыванное на уравнении (1) и условиях (2) и (3), приближенной формулы для зависимости времени полного испарения τ аэрозольной капли воды в воздушную среду от её начального радиуса R_0, т. е. функции $\tau = \tau(R_0)$.

Формула для времени полного испарения малых капель

Оценки показывают, что при $R_0 \le R_1$, где $R_1 = 10^{-7}$, для получения приближенной формулы $\tau = \tau(R_0)$ функцию $F(t, R)$ в дифференциальном уравнении (1) можно заменить на её предельное выражение $\lim\limits_{t \to 0} F\left(t, R\right) = 1$ из формулы (2) (время полного испарения таких капель является достаточно малой величиной). В результате получим дифференциальное уравнение $\frac{dR}{dt} = \varepsilon nm_1 / \rho_i$ с начальным условием $R(0) = R_0$. Так как $\varepsilon = \alpha\nu(c_{10} - c_{1s0})$, а $c_{1s0} = \overline{c}_{1s0}\left(1 + k_\sigma / R\right)$, то это дифференциальное уравнение является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными. После разделения переменных, интегрирования обеих частей уравнения от 0 до τ и учёта условий $R(0) = R_0$, $R(\tau) = 0$, получим формулу:

$$\tau = \varphi_1\left(x\right) = U\left[x - \ln\left(1 + lx\right)/l\right], \tag{4}$$

где $U = \rho_i R_1 / \left[\alpha\nu nm_1\left(\overline{c}_{1s0} - c_{10}\right)\right]$, $x = R_0 / R_1$, $l = bR_1 / k_\sigma$, $b = 1 - c_{10} / \overline{c}_{1s0}$. В формуле (4) x принадлежит отрезку $0 \le x \le 1$, так как $R_0 \le R_1$.

Формула для времени полного испарения крупных капель

Время полного испарения крупной капли является величиной на порядок большей по сравнению со временем испарения малых капель. Поэтому для вывода приближенной формулы для капель, радиусы которых на порядок больше радиуса $R_1 = 10^{-7}$ м, т. е. в случае $R_0 \ge R_2$, где $R_2 = 10R_1 = 10^{-6}$, функцию $F(t, R)$ в дифференциальном уравнении (1) заменим на её предельное выражение $\lim\limits_{t\to+\infty} F(t,R) = D\kappa / \left[D\kappa + \alpha\nu(\kappa + \kappa_{q\sigma})R\right]$ из формулы (3). Так как $\kappa_{q\sigma} = c_{1s0}k_q\gamma = \overline{c}_{1s0}(1 + k_\sigma / R)k_q\gamma$, то в результате также получим дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. После разделения переменных интегрируем обе части уравнения также от 0 до τ, считая, что вклад той части процесса испарения, когда радиус капли становится малым, в рассматриваемом случае не является существенным. Из условий $R(0) = R_0$, $R(\tau) = 0$ получим формулу:

$$\tau = \frac{U\alpha\nu}{R_1 D\kappa}\left[\frac{\overline{\kappa}_0 R_0^2}{2} + \left(\frac{D\kappa}{\alpha\nu} - \frac{\kappa_0 k_\sigma}{b}\right)\left(R_0 + \frac{k_\sigma}{b}\ln\left(\frac{k_\sigma}{bR_0 + k_\sigma}\right)\right)\right], \quad (5)$$

где $\overline{\kappa}_0 = \kappa + k_q\gamma\overline{c}_{1s0}$, $\kappa_0 = \kappa + k_q\gamma c_{10}$.

При $R_0 \ge R_2$ оценки показывают, что в правой части формулы (5) от множителя $\frac{D\kappa}{\alpha\nu} - \frac{\kappa_0 k_\sigma}{b}$ можно оставить только величину $\frac{D\kappa}{\alpha\nu}$, так как вклад величины $\frac{\kappa_0 k_\sigma}{b}$ мал, а от множителя $R_0 + \frac{k_\sigma}{b}\ln\left(\frac{k_\sigma}{bR_0 + k_\sigma}\right)$ для приближенных вычислений можно оставить только первое слагаемое R_0. В результате вместо формулы (5) получим более простую формулу:

$$\tau = \frac{U\alpha\nu}{R_1 D\kappa}\left(\frac{\overline{\kappa}_0 R_0^2}{2} + \frac{D\kappa}{\alpha\nu}R_0\right). \quad (6)$$

Перейдя в формуле (6) к переменной $x = R_0/R_1$, получим формулу:

$$\tau = \varphi_2(x) = U\left(x + 0{,}5ux^2\right), \quad (7)$$

где $u = \overline{\kappa}_0\alpha\nu R_1 / (D\kappa)$. В формуле (7) безразмерный радиус x принадлежит промежутку $10 \le x < +\infty$, так как $R_0 \ge R_2$.

Формула для времени полного испарения капель с промежуточными радиусами

Перейдём к выводу формулы для времени полного испарения τ в случае, когда радиус капли принадлежит промежутку $R_1 \le R_0 \le R_2$, т. е. $1 \le x \le 10$. Формулу для зависимости времени полного испарения аэрозольной капли τ от её начального радиуса R_0 будем искать в классе гладких возрастающих функций. Если перейти к безразмерному радиусу $x = R_0/R_1$, то функция $\tau = \varphi_1(x)$ на промежутке $0 \le x \le 1$ и функция $\tau = \varphi_2(x)$ на промежутке $10 \le x < +\infty$ являются гладкими возрастающими функциями. Построим гладкую возрастающую функцию $\tau = \varphi_3(x)$, определённую на промежутке $1 \le x \le 10$. Эту функцию построим на основе найденных формул (4) и (7). Зависимость $\tau = \varphi_3(x)$ на отрезке $1 \le x \le 10$ будем искать в виде:

$$\tau = \varphi_3(x) = U\left[d_0(x-1)^3 + d_1(x-1)^2 + d_2(x-1) + d_3\right], \tag{8}$$

где d_0, d_1, d_2, d_3 – неизвестные коэффициенты, которые определяются из двух условий непрерывности $\varphi_3(1) = \varphi_1(1)$, $\varphi_3(10) = \varphi_2(10)$ и двух условий гладкости $\varphi_3'(1) = \varphi_1'(1)$, $\varphi_3'(10) = \varphi_2'(10)$ искомой зависимости τ от x на всем промежутке $0 \le x < +\infty$. Легко получить следующие формулы для неизвестных коэффициентов:

$$d_0 = \frac{1}{729}\left[-10u - \frac{9}{1+l} - \frac{2}{l}\ln(1+l)\right], \tag{9}$$

$$d_1 = \frac{1}{27}\left[20u + \frac{6}{1+l} + \frac{1}{l}\ln(1+l)\right], \tag{10}$$

$$d_2 = \frac{l}{1+l}, \tag{11}$$

$$d_3 = 1 - \frac{1}{l}\ln(1+l). \tag{12}$$

Функция $\tau = \tau(x)$, определенная на промежутке $0 \le x \le +\infty$, должна быть не только непрерывной и гладкой, но и возрастающей. Функция $\tau = \varphi_3(x)$ возрастает на промежутке $1 \le x \le 10$. Действительно, найдём производную функции $\tau = \varphi_3(x)$:

$$\tau' = \varphi_3'(x) = U[3d_0(x-1)^2 + 2d_1(x-1) + d_2]. \tag{13}$$

Правая часть формулы (13) является квадратным трехчленом. Легко доказать его положительность на промежутке $1 \le x \le 10$. Следовательно, функция $\tau = \varphi_3(x)$ возрастает на этом промежутке.

Заключение

Построенная нами приближенная зависимость времени полного испарения τ аэрозольной капли в воздушную среду от безразмерного начального радиуса капли $x = R_0/R_1$ имеет вид:

$$\tau = \begin{cases} U\left[x - \ln(1+lx)/l\right], \text{ если } 0 \le x \le 1, \\ U\left[d_0(x-1)^3 + d_1(x-1)^2 + d_2(x-1) + d_3\right], \text{ если } 1 < x < 10, \\ U\left(x + 0{,}5ux^2\right), \text{ если } 10 \le x < +\infty. \end{cases} \tag{14}$$

Так как коэффициенты d_0, d_1, d_2, d_3 зависят только от величин l и u, то для вычислений по формуле (14) достаточно знать три параметра: $U = \rho_i R_1 / \left[\alpha \nu n m_1 \left(\overline{c}_{1s0} - c_{10}\right)\right]$, $l = bR_1 / k_\sigma$, $u = \overline{\kappa}_0 \alpha \nu R_1 / (D\kappa)$. Рассмотрим процесс нестационарного испарения одиночных капель воды в воздушную среду 50% влажности при двух значениях температуры T = 293 K и T = 323 K, когда давление среды P = 0,1 МПа. При этом, основываясь на данных, приведённых в работе [1] для коэффициента испарения воды, полагаем, что α = 0,034 при T = 293 K и α = 0,026 при T = 323 K. Для других величин используем значения, приведённые в работе [2]. При T = 293 K легко найти значения перечисленных выше трёх параметров: $U = 2{,}3212 \cdot 10^{-3}$, $l = 4{,}6266 \cdot 10^{1}$, $u = 6{,}8112 \cdot 10^{-2}$. При T=323 K получим следующие значения: $U = 5{,}9500 \cdot 10^{-4}$, $l = 5{,}0499 \cdot 10^{1}$, $u = 1{,}4223 \cdot 10^{-1}$. На основе формулы (14) можно построить графики зависимости τ от x при T = 293 K и T = 323 K (рис. 1).

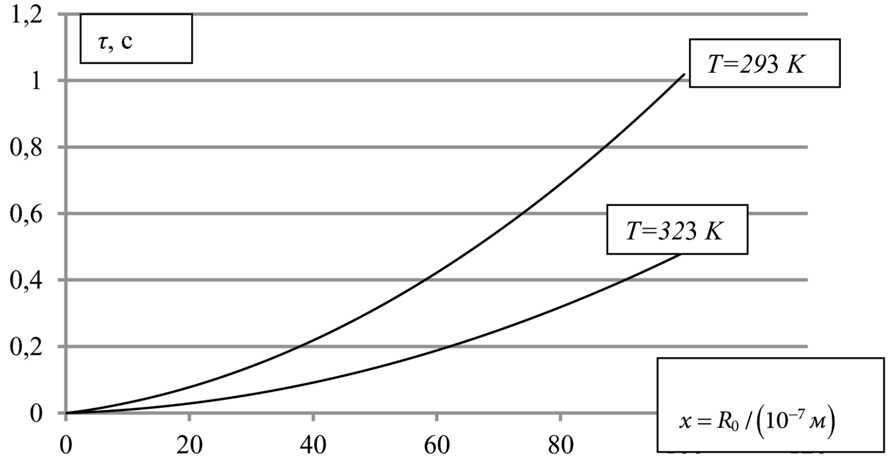


Рис. 1. График зависимости времени полного испарения τ капли воды в воздушную среду от безразмерного начального радиуса капли $x = R_0/(10^{-7}$ м), где R_0 – начальный радиус капли

ЛИТЕРАТУРА

1. Амелин А.Г. Теоретические основы образования тумана при конденсации пара. Изд. 3-е, доп. и перераб. М.: Химия. 1972. 304 с.
2. Варгафтик Н.Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. 2-е изд., доп. и перераб. М.: Наука. 1972. 720 с.
3. Высокоморная О.В., Кузнецов Г.В., Стрижак П.А. Испарение капель воды в высокотемпературной газовой среде // Инженерно-физический журнал. Т. 89 2016. № 1. С. 133–142.
4. Высокоморная О.В., Кузнецов Г.В., Стрижак П.А. Прогностическое определение интегральных характеристик испарения капель воды в газовых средах с различной температурой // Инженерно-физический журнал. Т. 90. 2017. № 3. С. 648–657.
5. Захаревич А.В., Кузнецов Г.В., Стрижак П.А. Экспериментальное исследование изменения температуры в центре капли воды в процессе её испарения в разогретом воздухе // Инженерно-физический журнал. Т. 89. 2016. № 3. С. 537–541.
6. Кочурова Н.Н., Коротких О.П., Абдуллин Н.Г., Айрапетова Е.Р., Караев Р.Р., Petzold G. Влияние поверхностных явлений на испарение и конденсацию водных систем // Инженерно-физический журнал. Т. 89, 2016, № 1. С. 104–108.

7. Кузьмин М.К. Теория нестационарного процесса испарения сферической аэрозольной капли с учётом зависимости давления насыщенного пара от кривизны её поверхности // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2012. № 3. С. 39–49.

REFERENCES

1. Amelin A.G. *Teoreticheskiye osnovy obrazovaniya tumana pri kondensatsii para* [The theoretical basis for the formation of fog in the condensation of vapor]. Moscow, Chemistry Publ., 1972. 304 p.
2. Vargaftik N.B. *Spravochnik po teplofizicheskim svoistvam gazov i zhidkostei* [Handbook on thermophysical properties of gases and liquids]. Moscow, Nauka Publ., 1972. 720 p.
3. Vysokomornaya O.V., Kuznetsov G.V., Strizhak P.A. [Evaporation of water droplets in high temperature gas environment]. In: *Inzhenerno-fizicheskii zhurnal* [Journal of Engineering Physics and Thermophysics], vol. 89, 2016, no. 1, pp. 133–142.
4. Vysokomornaya O.V., Kuznetsov G.V., Strizhak P.A. [Prognostic determination of the integral characteristics of evaporation of water droplets in gaseous media at different temperatures]. In: *Inzhenerno-fizicheskii zhurnal* [Engineering and Physics Journal], vol. 90, 2017, no. 3, pp. 648–657.
5. Zakharevich A.V., Kuznetsov G.V., Strizhak P.A. [Experimental study of temperature change in the center of a water drop in the process of evaporation in a heated air]. In: *Inzhenerno-fizicheskii zhurnal* [Journal of Engineering Physics and Thermophysics], vol. 89, 2016, no. 3, pp. 537–541.
6. Kochurova N.N., Korotkikh O.P., Abdullin N.G., Airapetova E.R., Karaev R.R., Petzold G. [The influence of surface phenomena on the evaporation and condensation of water systems]. In: *Inzhenerno-fizicheskii zhurnal* [Journal of Engineering Physics and Thermophysics], vol. 89, 2016, no. 1, pp. 104–108.
7. Kuz'min M.K. [Theory of a nonstationary process of evaporation of a spherical aerosol droplet with allowance for the dependence of the vapor pressure on the curvature of its surface]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika* [Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], 2012, no. 3, pp. 39–49.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Кузьмин Михаил Кузьмич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа и геометрии Московского государственного областного университета;
e-mail: lesir179@infoline.su

Хасанов Анис Саляхович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики Российского экономического университета им. Г.В. Плеханова;
e-mail: ankhasanov@yandex.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Mikhayil K. Kuzmin – Doctor in Physics and Mathematics, professor at the Department of Mathematical Analysis and Geometry, Moscow Region State University;
e-mail: lesir179@infoline.su

Anis S. Khasanov – Doctor in Physics and Mathematics, professor at the Department of Higher Mathematics, Plekhanov Russian University of Economics;
e-mail: ankhasanov@yandex.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Кузьмин М.К., Хасанов А.С. Формула для вычисления времени полного испарения аэрозольных капель с учётом коэффициентов испарения и поверхностного натяжения // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2017. № 3. С. 68–75.
DOI: 10.18384-2310-7251-2017-3-68-75

CORRECT REFERENCE TO THE ARTICLE

Kuzmin M.K., Khasanov A.S. Formula for Calculating the Complete Evaporation Time of Aerosol Drops with Allowance for the Evaporation and Surface Tension Coefficients. In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*, 2017, no. 3, pp. 68–75.
DOI: 10.18384-2310-7251-2017-3-68-75

УДК: 538.911
DOI: 10.18384-2310-7251-2017-3-76-83

УПРАВЛЯЕМЫЕ ДИФРАКЦИОННЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ НА ОСНОВЕ ЖИДКОКРИСТАЛЛИЧЕСКИХ КОМПОЗИТОВ

Соломатин А.С.[1], Мащенко В.И.[1], Беляев В.В.[1], Маргарян А.Л.[2], Акопян Н.Г.[2]

*[1] Московский государственный областной университет,
учебно-научная лаборатория теоретической и прикладной нанотехнологии
105005, г. Москва, ул. Радио, д. 10А, Российская Федерация*

*[2] Ереванский государственный университет,
центр полупроводниковых приборов и нанотехнологий
0025, г. Ереван, ул. Алекса Манукяна, д. 1, Республика Армения*

Аннотация. Авторами предложены новые управляемые ЖК-композитные дифракционные оптические элементы на основе нового явления формования в матрице боросилоксана микронитей ЖК с длинной до нескольких сантиметров. Материалы на базе исследованных ЖК-композитов могут быть использованы в дисплейной технике и оптоэлектронике, например, в качестве микрорезонаторов и электронно-оптических датчиков.

Ключевые слова: жидкокристаллический композит, нематический жидкий кристалл, боросилоксан, микроструктура, дифракция.

CONTROLLABLE LC-COMPOSITE DIFFRACTIVE OPTICAL ELEMENTS

A. Solomatin[1], V. Mashchenko[1], V. Belyaev[1], A. Margaryan[2], N. Hakobyan[2]

*[1] Moscow Region State University,
Education & Science Lab for Theoretical and Applied Nanotechnology
ul Radio 10A, 105005 Moscow, Russian Federation*

*[2] Yerevan State University,
Center of Semiconductor Devices and Nanotechnologies
1, Alex Manoogian st., Yerevan, 0025, Republic of Armenia*

Abstract. We propose new controllable LC-composite diffractive optical elements based on a new phenomenon of forming LC microfilaments with a length of up to several centimeters in a borosiloxane matrix. Materials based on the investigated LC composites can be used in display technology and optoelectronics, for example, as microresonators and electron-optical sensors.

Key words: liquid crystal composite, neumatic liquid crystal, borosiloxane, microstructure, diffraction.

Введение

Широкое применение в дисплейной технике и других устройствах нашли ЖК и композиты на их основе (ЖК-композиты) [2; 9]. Получению и исследованию

ЖК-композитов, где ЖК равномерно диспергированы в инертной среде, например, в полимерной матрице, посвящено большое количество работ [2; 11]. Формированию в таких композитах микроструктуры, которая бы обусловила получение требуемых макрохарактеристик материала или устройства придаётся большое значение [10].

Системы, где отдельная микронить или микроучасток поверхности ЖК используется в качестве функционального элемента микроустройства, представляют научный и практический интерес наряду с макрохарактеристиками материалов ввиду широкого развития миниатюризации, микро- и нанотехнологий.

Силиконовые масла и полимеры часто используются в широком интервале температур в качестве инертной среды для размещения капли ЖК ввиду их высокой прозрачности (вследствие аморфности структуры), инертности, постоянства параметров и технологичности. Силиконы обладают хорошей теплопередачей, являются отличными электрическими изоляторами, не являются легковоспламеняющимися, обладают эластичностью, долговечностью, био- и химической инертностью, экологичностью. Они обладают показателем преломления около 1,4, что меньше показателя преломления большинства традиционных ЖК (обычно более 1,5).

Получают боросилоксан (БС) реакцией силоксанов с борангидридом, борной кислотой и др. соединениями бора. Боросилоксан, сохраняя все достоинства силиконовых материалов, интересен в качестве матрицы ЖК-композита, т. к. он обладает каучукоподобной способностью к растяжению при резком воздействии и маслообразной текучестью при статической нагрузке, т. е. уникальными механическими свойствами дилатантной жидкости.

Целью данной работы является разработка новых управляемых ЖК-композитных дифракционных оптических элементов на основе боросилоксана.

Экспериментальная часть

Боросилоксан получен по методике, адаптированной для данной задачи согласно патенту РФ [3].

В качестве ЖК была использована нематическая смесь ЖК-1282 (T_{CN} = 253,1 К; T_{NI} = 335,1 К), которая состоит из алкоксицианбифенилов (80% массовой доли), эфира Демуса (16%) и эфира Грея (4%) производства ФГУП «НИОПИК» (РФ).

Микроструктура и оптические свойства ЖК-композитов

Боросилоксан представляет собой неньютоновскую (дилатантную) жидкость, которая при отсутствии внешнего напряжения ведёт себя подобно вязкому силиконовому маслу, растекаясь по поверхности подложки, а при растяжении ведёт себя подобно жевательной резинке.

ЖК-композит является молочно-белым, в то время как исходный боросилоксан является прозрачным материалом, напоминающим силиконовый герметик. Важно отметить, что у БС, наполненного 40 масс. % ЖК, способность к вытяжке сохраняется. Окраска ЖК-композита связана, скорее всего, с обусловленным разницей в показателях преломления рассеянием на границе раздела фаз БС –

ЖК. По-видимому, данное явление связано с микроструктурой композита, где, не нарушая целостность боросилоксановой матрицы, изолированно друг от друга распределены капли ЖК.

На данный способ получения ЖК-композитов подана заявка на патент РФ [1; 6]. В настоящий момент решение о выдаче патента РФ уже принято Федеральным институтом промышленной собственности.

Исходный БС, как показали микроскопические исследования в поляризованном свете, не обладает двулучепреломлением. Таким образом, структура данного композита, где капли ЖК распределены в матрице боросилоксана, является двухфазной.

Структура композитов, по-видимому, такова, что силиконовый материал, обволакивая и смачивая ЖК во внутреннем объёме, постоянно присутствует только на поверхности. Композит имеет показатель преломления на уровне концентрации ЖК в материале 2,13 масс. % при содержании ЖК 41,2 масс. %. По-видимому, при комнатной температуре в боросилоксане 2,13 масс. % – это то количество ЖК, которое растворяется, что в целом хорошо согласуется с литературными данными. Следует отметить, что, по данным научного источника [7], растворимость в силиконах ЖК близкого химического состава обычно составляет около 4 масс. %.

Механизм образования и разрушения микрофиламентов ЖК

Была предложена схема для описания процесса образования цилиндров (рис. 1) и капель ЖК. К формированию капель ЖК в объёме БС приводит изначальное механическое смешивание компонентов. Далее капли сильно вытягиваются за счёт механического воздействия (одноосного растяжения), прикладываемого к композиту, становясь длинными цилиндрами с заострёнными конусами на концах (нитевидными объектами).

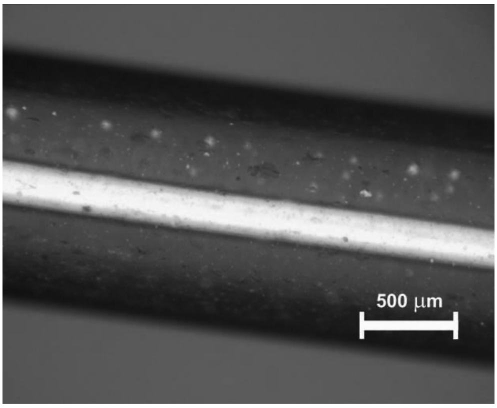


Рис. 1. Микрофотография в скрещённых поляризаторах вытянутого образца БС, наполненного ЖК-1282. Видны выстроенные вдоль одной линии микрокапли уже разделившегося более тонкого микрофиламента ЖК в БС, а также яркий микрофиламент

Далее, когда механическое воздействие прекращается, БС перестаёт вести себя подобно эластомеру и превращается в вязкую жидкость. Начинает проявляться известный эффект деления растянутой капли внутри другой несмешиваемой с ней жидкости [8]. Однако длину таких нитей до нескольких сантиметров обычно не удавалось получить. Длина вытянутой нити ЖК практически равна длине всего вытянутого объекта. В нашем случае при толщине нити около 2–10 мкм длина нити доходит до 10 и более сантиметров.

Неоднородные композитные структуры, формирующие твист-ячейку

Можно предложить способ изготовления твист-структуры на основании полученных экспериментальных результатов. Содержащую тонкий ЖК цилиндр композитную нить следует изготавливать короткой (длиной меньше 1 мм). Затем следует повернуть на π/2 один её конец. В результате при прохождении луча света вдоль ЖК цилиндра будет происходить поворот плоскости поляризации, как в 90° твист-ячейке. При меньшем угле закрутки поворот плоскости поляризации будет, соответственно, меньше.

Предлагаемая в данной работе ЖК структура изображена на рис. 2. Она представляет собой подобную описанной в [5] матрицу из цилиндрических пор с нитями вышеописанного (рис. 1) композита в них. Это установленный перед дифракционной решёткой упорядоченный блок ЖК твист-ячеек.

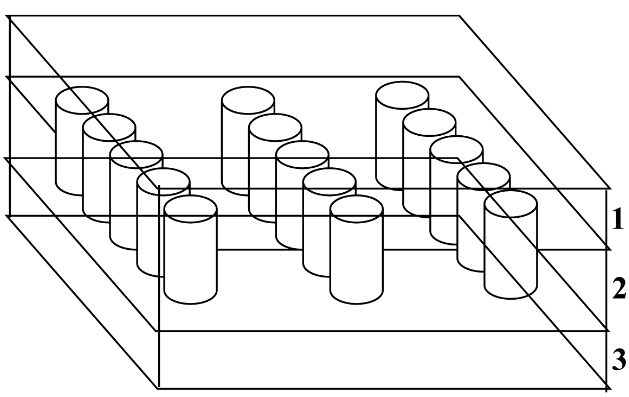


Рис. 2. Блок ЖК твист-ячеек. Обозначения: 1 – прозрачный слой сверху (перед матрицей твист-ячеек); 2 – непрозрачный слой, содержащий блок твист-ячеек (цилиндрические поры, заполненные ЖК); 3 – прозрачный слой, отделяющий блок от дифракционной решётки. Решётка не показана на рисунке. Свет падает сверху вниз

Композитные матричные структуры с контролем поляризации падающего на дифракционную решётку луча света

Дифракционные свойства оптически анизотропных полимерных структур периодическим микрорельефом были смоделированы в [4] для различных типов периодических микроструктур.

В [6] были рассчитаны характеристики пропускания поляризованного света цилиндрическими анизотропными ЖК структурами в оптически изотропном окружении.

Как следует из [4; 6], можно изготовить дифракционную решётку из параллельно расположенных нитей вышеописанного ЖК-композита на основе борсилоксана таким образом, что свет будет проходить только через анизотропные цилиндрические структуры.

Управление поляризацией падающего на дифракционную решётку луча света может быть осуществлено с помощью матричной структуры, предложенной выше. На рис. 3 показан блок из четырёх элементов с различной поляризацией луча на выходе, благодаря различному углу твист-закрутки. На такие блоки разбивается матричная структура. Каждый блок задаёт поляризацию проходящего через него луча света, регулируя пропускание составляющих блок твист-ячеек электрическим полем. Затем луч света с заданной поляризацией поступает на дифракционную решётку.

Управление интенсивностью света, с той или иной поляризацией падающего на дифракционную решетку, осуществляется следующим образом. Каждая твист-ячейка имеет на выходе анализатор, плоскость пропускания которого соответствует плоскости поляризации выходящего из данной ячейки света. При приложении к твист-ячейке управляющего поля интенсивность пропускания будет снижаться. Для обеспечения полного погашения света ячейкой, необходимы углы закрутки твиста больше или равные $\pi/2$.

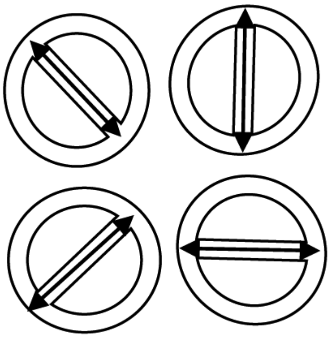


Рис. 3. Блок из четырёх элементов матрицы твист-ячеек с различной поляризацией луча на выходе благодаря различному углу твист-закрутки

Задавая различные комбинации поляризации и интенсивности света, падающего на дифракционную решётку из оптически анизотропного материала, можно добиться чрезвычайно широкого разнообразия возможных распределений интенсивности и поляризации в дифракционной картине.

Выводы

Разработана конструкция и методика использования ячеек ЖК с электроуправляемыми оптическими свойствами, регулирующих поляризацию луча света, падающего на дифракционную решётку, актуальных для элементной базы средств отображения и обработки информации.

Разработана конструкция и методика использования дифракционной решётки.

* * *

Работа выполнена при поддержке проекта РФФИ и Правительства Московской области № 17-47-500752.

ЛИТЕРАТУРА

1. Беляев В.В., Мащенко В.И., Соломатин А.С., Чаусов Д.Н. Заявка на патент РФ № 2015107901 от 10.03.2015 // Способ получения смеси жидкого кристалла с полимером для дисплейной техники и оптоэлектроники.
2. Жаркова Г.М., Сонин А.С. Жидкокристаллические композиты. Новосибирск: Наука. 1994. 214 с.
3. Мащенко В.И., Алексеев А.Н., Картавенко Т.В., Оленин А.В. Патент РФ №2473216 // Способ получения масс для лепки с биоцидными свойствами.
4. Соломатин А.С. Влияние профиля микрорельефа периодических анизотропных структур на их дифракционные свойства // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2016. № 1. С. 74–87.
5. Соломатин А.С. Линзы на основе жидких кристаллов с неоднородным радиальным распределением директора // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2016. № 3. С. 37–45.
6. Соломатин А.С., Беляев В.В. Ориентационные и оптические свойства сферических доменов жидкого кристалла с центральной ориентирующей и внешней неориентирующей поверхностью // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2016. № 4. С. 32–42.
7. Bedjaouia L., Gogibusb N., Ewenb B., Pakulab T., Coqueretc X., Benmounaa M., Maschkec U. Preferential solvation of the eutectic mixture of liquid crystals E7 in a polysiloxane // Polymer. 2004. Vol. 45. P. 6555–6560.
8. Lekkerkerker H.W., Verhoefl A.A. Droplet snap-off in fluids with nematic liquid crystalline ordering. // New Journal of Physics. 2012. Vol. 14. P. 12–20.
9. Parab S.S., Malik M.K., Deshmukh R.R. Dielectric relaxation and electro-optical switching behavior of nematic liquid crystal dispersed in poly(methyl methacrylate) // Journal of Non-Crystalline Solids. 2012. Vol. 358. No. 18–19. P. 2713–2722.
10. Ralesh K., Kikuchi H., Stark M., Guckenberger R., Kajiyama T. Morphology and Interface of Liquid Crystal / Polymer Composite System at Nano Scale: A Model Investigation // Mol. Cryst. Liq. Cryst. 1999. Vol. 329. P. 171–180.
11. Su Y.-C., Chu C.-C., Chang W.-T., Hsiao V.K.S. Characterization of optically switchable holographic polymer-dispersed liquid crystal transmission gratings // Optical Materials. 2011. Vol. 34. No. 1. P. 251–255.

REFERENCES

1. Belyaev V.V., Mashchenko V.I., Solomatin AS, Chausov D.N. [Patent application of the Russian Federation no. 2015107901 of 10.03.2015] In: *Sposob polucheniya smesi zhidkogo kristalla s polimerom dlya displeinoi tekhniki i optoelektroniki* [Method of obtaining a mixture of a liquid crystal with a polymer for display technology and optoelectronics].

2. Zharkova G.M., Sonin A.S. *Zhidkokristallicheskie kompozity* [Liquid crystal composites]. Novosibirsk, Nauka Publ.. 1994. 214 p.
3. Mashchenko V.I., Alekseev A.N., Kartavenko T.V., Olenin A.V. [Patent of the Russian Federation no. 2473216]. In: *Sposob polucheniya mass dlya lepki s biotsidnymi svoystvami.* [Method for obtaining masses for modeling with biocidal properties].
4. Solomatin A.S. [Influence of the microrelief profile of periodic anisotropic structures on their diffraction properties]. In*: Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-Matematika* [Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], 2016, no. 1, pp. 74–87.
5. Solomatin A.S. [Lenses based on liquid crystals with a non-uniform radial distribution of the director]. In*: Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-Matematika* [Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], 2016, no. 3, pp. 37–45.
6. Solomatin A.S., Belyaev V.V. [Orientational and optical properties of the domains of the liquid crystal with a central orienting and external non-orienting surface]. In*: Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-Matematika* [Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], 2016, no. 4, pp. 32–42.
7. Bedjaouia L., Gogibusb N., Ewenb B., Pakulab T., Coqueretc X., Benmounaa M., Maschkec U. Preferential solvation of the eutectic mixture of liquid crystals E7 in a polysiloxane. In: *Polymer*, 2004, vol. 45, pp. 6555–6560.
8. Lekkerkerker H.W., Verhoefl A.A. Droplet snap-off in fluids with nematic liquid crystalline ordering. In: *New Journal of Physics*, 2012, vol. 14, pp. 12–20.
9. Parab S.S., Malik M.K., Deshmukh R.R. Dielectric relaxation and electro-optical switching behavior of nematic liquid crystal dispersed in poly(methyl methacrylate). In: *Journal of Non-Crystalline Solids*, 2012, vol. 358, no. 18–19, pp. 2713–2722.
10. Ralesh K., Kikuchi H., Stark M., Guckenberger R., Kajiyama T. Morphology and Interface of Liquid Crystal. Polymer Composite System at Nano Scale: A Model Investigation. In: *Mol. Cryst. Liq. Cryst.,* 1999, vol. 329, pp. 171–180.
11. Su Y.-C., Chu C.-C., Chang W.-T., Hsiao V.K.S. Characterization of optically switchable holographic polymer-dispersed liquid crystal transmission gratings. In: *Optical Materials*, 2011, vol. 34, no. 1, pp. 251–255.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Соломатин Алексей Сергеевич – кандидат физико-математических наук, инженер учебно-научной лаборатории теоретической и прикладной нанотехнологии Московского государственного областного университета;
e-mail: Sotrudnica_UNC@mail.ru

Мащенко Владимир Игоревич – кандидат химических наук, старший научный сотрудник учебно-научной лаборатории теоретической и прикладной нанотехнологии Московского государственного областного университета;
e-mail: mashchenko@genebee.msu.su

Беляев Виктор Васильевич – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической физики Московского государственного областного университета;
e-mail: vic_belyaev@mail.ru

Маргарян Акоп Левонович – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник центра полупроводниковых приборов и нанотехнологий Ереванского государственного университета, Республика Армения;
e-mail: marhakob@ysu.am

Акопян Нуне Грантовна – младший научный сотрудник центра полупроводниковых приборов и нанотехнологий Ереванского государственного университета, Республика Армения;
e-mail: nune.hakobyan@ysu.am

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Aleksei S. Solomatin – PhD in Physics and Mathematics, engineer of the Education & Science Lab for Theoretical and Applied Nanotechnology, Moscow Region State University;
e-mail: Sotrudnica_UNC@mail.ru

Vladimir I. Mashchenko – PhD in Chemistry, senior researcher of the Education & Science Lab for Theoretical and Applied Nanotechnology, Moscow Region State University;
e-mail: mashchenko@genebee.msu.su

Victor V. Belyaev – Doctor in Engineering, professor, head of the Department of Theoretical Physics, Moscow Region State University;
e-mail: vic_belyaev@mail.ru

Akob L. Margaryan – PhD in Physics and Mathematics, senior researcher of the Center of Semiconductor Devices and Nanotechnologies, Yerevan State University, Republic of Armenia;
e-mail: marhakob@ysu.am

Nune H. Hakobyan – junior researcher of the Center of Semiconductor Devices and Nanotechnologies, Yerevan State University, Republic of Armenia;
e-mail: nune.hakobyan@ysu.am

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Соломатин А.С, Мащенко В.И., Беляев В.В., Маргарян А.Л., Акопян Н.Г. Управляемые дифракционные элементы на основе жидкокристаллических композитов // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2017. № 3. С. 76–83.
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-3-76-83

CORRECT REFERENCE TO THE ARTICLE

Solomatin A.S., Mashchenko V.I., Belyaev V.V., Margaryan A.L., Hakobyan N.H. Controllable LC-Composite Diffractive Optical Elements. In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics,* 2017, no. 3, pp. 76–83.
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-3-76-83

УДК 533.72
DOI: 10.18384-2310-7251-2017-3-84-96

ПРИБЛИЖЁННЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ МОДУЛЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ ДИФФУЗИОФОРЕТИЧЕСКОЙ СКОРОСТИ ТВЁРДОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ЧАСТИЦЫ

Ефремов В.Е.[1], Кузьмин М.К.[2]
[1] *Российский государственный социальный университет*
129226, г. Москва, ул. Вильгельма Пика, д. 4, стр. 1, Российская Федерация
[2] *Московский государственный областной университет*
105005, г. Москва, ул. Радио, д. 10А, Российская Федерация

Аннотация. В работе продолжается построение теории нестационарного диффузиофореза крупных твёрдых нелетучих частиц сферической формы в вязкой газовой среде методом интегральных преобразований Лапласа. Получены приближенные формулы для расчёта модуля нестационарной составляющей диффузиофоретической скорости сферической частицы в конкретном случае диффузиофореза. Проведено исследование нестационарной составляющей диффузиофоретической скорости по её приближенным формулам при больших и малых значениях времени. Авторы пришли к выводу о зависимости модуля нестационарной составляющей скорости диффузиофореза от свойств вещества частицы и параметров газовой смеси.

Ключевые слова: нестационарный диффузиофорез, сферическая частица, нестационарная составляющая скорости.

APPROXIMATE FORMULAE FOR CALCULATING THE MODULUS OF A NONSTATIONARY DIFFUSIOPHORESIS VELOCITY COMPONENT OF A SOLID SPHERICAL PARTICLE

V. Efremov[1], M. Kuzmin[2]
[1] *Russian State Social University*
ul. Vil'gel'ma Pika 4/1, 129226 Moscow, Russian Federation
[2] *Moscow Region State University*
ul. Radio 10A, 105005 Moscow, Russian Federation

Abstract. We continue to construct a theory of nonstationary diffusiophoresis of large solid non-volatile spherical particles in a viscous gas medium by the method of Laplace integral transforms. Approximate formulae are obtained for calculating the modulus of a nonstationary diffusiophoresis velocity component of a spherical particle in a particular case of diffusiophoresis. The nonstationary diffusiophoresis velocity component from its approximate formulae for long and short times is investigated. A conclusion is drawn that the nonstationary diffusiophoresis

velocity component module depends on the properties of a particle substance and parameters of the gas mixture.

Key words: nonstationary diffusiophoresis, spherical particle, nonstationary velocity component.

1. Основные формулы

Изучению движения сферических аэрозольных частиц во внешних полях посвящён целый ряд работ [5; 6; 8; 9; 11–16]. В работах [2–4] была поставлена задача построения теории нестационарного диффузиофоретического движения крупной твердой нелетучей сферической частицы в вязкой газовой среде и решены гидродинамическая и диффузионная задачи. Рассматривалась твёрдая одиночная нелетучая частица сферической формы радиуса R, взвешенная в неоднородной по концентрации бинарной вязкой несжимаемой газовой смеси. Во внешней газовой среде на относительно большом удалении от аэрозольной частицы ($r >> R$) предполагалось наличие градиентов концентраций $\left[\nabla C_2(t)\right]_\infty$ и $\left[\nabla C_2(t)\right]_\infty$ (t – время), причём

$$\left[\nabla C_1(t)\right]_\infty = -\left[\nabla C_2(t)\right]_\infty .$$

При построении общей теории предполагалось, что нестационарный диффузиофорез является непосредственным продолжением стационарного процесса диффузиофореза [3; 4]. Градиент концентрации $\left[\nabla C_1(t)\right]_\infty$ был представлен в виде суммы стационарного и строго нестационарного градиентов:

$$\left[\nabla C_1(t)\right]_\infty = \left(\nabla C_1^{(1)}\right)_\infty + \left[\nabla C_1^{(2)}(t)\right]_\infty ,$$

где

$$\left(\nabla C_1^{(1)}\right)_\infty = \left\{\left[\nabla C_1(t)\right]_\infty\right\}_{|t=0} ,$$

следовательно,

$$\left\{\left[\nabla C_1^{(2)}(t)\right]_\infty\right\}_{|t=0} = 0.$$

В соответствии с нашим предположением, диффузиофоретическая скорость аэрозольной частицы $\vec{u}_D(t)$ состоит из стационарной и строго нестационарной составляющих:

$$\vec{u}_D(t) = \vec{u}_{1D} + \vec{u}_{2D}(t),$$

где

$$\vec{u}_{1D} = \vec{u}_D(t)_{|t=0} ,$$

следовательно,

$$\vec{u}_{2D}\left(t\right)_{|t=0}=0.$$

Гидродинамическая и диффузионная задачи нестационарного диффузиофореза твёрдой крупной нелетучей сферической аэрозольной частицы в несжимаемой вязкой газовой среде были разделены на стационарную и строго нестационарную части. В результате решения стационарных частей этих задач была получена окончательная формула для определения стационарной составляющей скорости диффузиофореза сферической частицы:

$$\vec{u}_{1D}=-K_{sl}D_{12}\left(\nabla C_1^{(1)}\right)_{\infty},$$

где K_{sl} – коэффициент диффузионного скольжения газа вдоль поверхности аэрозольной частицы, D_{12} – коэффициент взаимной диффузии.

Для решения нестационарных дифференциальных уравнений в работах [2–4] было использовано интегральное преобразование Лапласа следующего вида:

$$F\left(p\right)=L\left\{f\left(t\right)\right\}=\int_0^{\infty}f\left(t\right)\exp\left(-pt\right)dt,$$

где p – комплексный параметр. Приведём формулу для определения нестационарной составляющей скорости диффузиофореза рассматриваемой сферической частицы в пространстве лапласовых изображений [2; 3]:

$$U_2=K_{sl}D_{12}F_U\left(p\right)\cdot F_S\left(p\right)\cdot G_{\infty}\left(p\right), \tag{1.1}$$

где

$$F_U\left(p\right)=\frac{6\rho_e\left(\nu+R\sqrt{\nu\cdot p}\right)}{2R^2\left(\rho_e-\rho_i\right)p+9\rho_e\left(\nu+R\sqrt{\nu\cdot p}\right)},$$

$$F_S\left(p\right)=1+\frac{2K_{3/2}}{K_{3/2}-2R\sqrt{p/D_{12}}\,K'_{3/2}}, \tag{1.2}$$

$$U_2=U_2\left(p\right)=L\left\{\left|\vec{u}_{2D}\left(t\right)\right|\right\},$$

$$G_{\infty}\left(p\right)=L\left\{\left|\left[\nabla C_1^{(2)}\left(t\right)\right]_{\infty}\right|\right\}.$$

Далее, ρ_i, ρ_e – плотности вещества частицы и газовой среды соответственно, ν – коэффициент кинематической вязкости среды. В выражении (1.2) фигурирует модифицированная функция Бесселя второго рода:

$$K_{3/2}\left(z\right)=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}\left(1+\frac{1}{z}\right)e^{-z},$$

а также её производная. Она зависит от параметра p следующим образом:

$$K_{3/2} = K_{3/2}(z),$$

$$K'_{3/2} = K'_{3/2}(z),$$

$$z = R\sqrt{p/D_{12}}.$$

Чтобы упростить форму записи в дальнейшем довольно часто будем использовать обозначение неотрицательной функции $\left|\left[\nabla C_1^{(2)}(t)\right]_\infty\right|$ через $g_\infty(t)$.

В работе [1] путём перехода в формуле (1.1) в пространство оригиналов были получены общие формулы для определения модуля строго нестационарной составляющей скорости диффузиофореза сферической аэрозольной частицы:

$$\left|\vec{u}_{2D}(t)\right| = K_{sl} D_{12} f_{uD}(t) * g_\infty(t) \left(\rho_e \neq \rho_i\right), \tag{1.3}$$

$$\left|\vec{u}_{2D}(t)\right| = \frac{2}{3} K_{sl} D_{12} \left[g_\infty(t) + \tilde{f}(t) * g_\infty(t)\right] \left(\rho_e = \rho_i\right). \tag{1.4}$$

В формулах (1.3) и (1.4):

$$L^{-1}\left\{F_U(p)\cdot F_S(p)\right\} = f_{uD}(t) = L^{-1}\left\{F_U(p)\right\} + L^{-1}\left\{F_U(p)\cdot \tilde{F}(p)\right\},$$

$$\tilde{F}(p) = \frac{\dfrac{R}{\sqrt{D_{12}}}\sqrt{p} + 1}{\dfrac{R^2}{D_{12}} p + \dfrac{2R}{\sqrt{D_{12}}}\sqrt{p} + 2}, \quad \tilde{f}(t) = \frac{\sqrt{D_{12}}}{2R}\left(\frac{2}{\sqrt{\pi t}} + \sum_{j=3}^{4} z_j \varphi(z_j, t)\right),$$

где

$$\varphi(z_j, t) = \exp\left(z_j^2 t\right)\cdot erfc\left(-z_j\sqrt{t}\right), \tag{1.5}$$

причём

$$z_j = -\frac{3\rho_e\sqrt{\nu}}{4R(\rho_e - \rho_i)}\left[3 + (-1)^j \sqrt{1 + 8\rho_i/\rho_e}\right] \quad (j = 1,\ 2),$$

символ * обозначает операцию свёртывания.

В работе [1] был рассмотрен конкретный случай диффузиофореза, когда градиент концентрации задается с помощью функции:

$$g_\infty(t) = \left|\left[\nabla C_1^{(2)}(t)\right]_\infty\right| = A\cdot\left(1 - e^{-\omega t}\right),$$

где A и ω – постоянные положительные величины, имеющие размерности1/м и 1/с соответственно.

Вычислением свёрток в выражениях (1.3), (1.4) были получены формулы для нахождения модуля строго нестационарной составляющей диффузиофоретической скорости для рассматриваемого случая. Если $\rho_e \neq \rho_i$, то

$$\left|\vec{u}_{2D}(t)\right| = AK_{sl}D_{12} - AK_{sl}D_{12}\cdot\left(\sum_{j=1}^{2}\lambda_j \frac{\omega}{\omega+z_j^2} + 2\Delta\frac{\omega^2R^4}{\omega^2R^4+4D_{12}^2}\right)\cdot\psi(\omega,t) +$$

$$+AK_{sl}D_{12}\sum_{j=1}^{2}\lambda_j\frac{\omega}{z_j\left(\omega+z_j^2\right)}\varphi(z_j,t) + AK_{sl}D_{12}\cdot\left(\sum_{j=1}^{2}\lambda_j\frac{z_j}{\omega+z_j^2} -\right.$$

$$\left.-2\Delta\frac{R\left(\omega R^2+2D_{12}\right)\sqrt{D_{12}}}{\omega^2R^4+4D_{12}^2}\right)\cdot e^{-\omega t} - \Delta\frac{AK_{sl}\omega R^5\sqrt{D_{12}}}{\omega^2R^4+4D_{12}^2}\left\{\left(\omega+\frac{2D_{12}}{R^2}\right)\cdot\sin\left(\frac{2D_{12}}{R^2}t\right)+\right.$$

$$+\left(\omega-\frac{2D_{12}}{R^2}\right)\cdot\cos\left(\frac{2D_{12}}{R^2}t\right)+2S\left(\frac{2D_{12}}{R^2}t\right)\cdot\left[\frac{2D_{12}}{R^2}\cdot\cos\left(\frac{2D_{12}}{R^2}t\right)-\omega\cdot\sin\left(\frac{2D_{12}}{R^2}t\right)\right]-$$

$$\left.-2C\left(\frac{2D_{12}}{R^2}t\right)\cdot\left[\omega\cdot\cos\left(\frac{2D_{12}}{R^2}t\right)+\frac{2D_{12}}{R^2}\cdot\sin\left(\frac{2D_{12}}{R^2}t\right)\right]\right\}. \qquad (1.6)$$

Если $\rho_e = \rho_i$, то формула имеет вид:

$$\left|\vec{u}_{2D}(t)\right| = AK_{sl}D_{12} - \frac{2}{3}AK_{sl}D_{12}\frac{\omega^2R^3\sqrt{D_{12}}}{\omega^2R^4+4D_{12}^2}\psi(\omega,t) -$$

$$-\frac{2}{3}AK_{sl}D_{12}\left[1+\frac{D_{12}\left(\omega\cdot R^2+2\cdot D_{12}\right)}{\omega^2R^4+4D_{12}^2}\right]e^{-\omega t} -$$

$$-\frac{2}{3}AK_{sl}D_{12}\frac{\omega\cdot R^4}{\omega^2R^4+4D_{12}^2}\left\{\left(\frac{\omega}{2}+\frac{D_{12}}{R^2}\right)\cdot\sin\left(\frac{2D_{12}}{R^2}t\right)+\left(\frac{\omega}{2}-\frac{D_{12}}{R^2}\right)\times\right.$$

$$\times\cos\left(\frac{2D_{12}}{R^2}t\right)+S\left(\frac{2D_{12}}{R^2}t\right)\cdot\left[\frac{2\cdot D_{12}}{R^2}\cdot\cos\left(\frac{2D_{12}}{R^2}t\right)-\omega\cdot\sin\left(\frac{2D_{12}}{R^2}t\right)\right]-$$

$$\left.-C\left(\frac{2D_{12}}{R^2}t\right)\cdot\left[\omega\cdot\cos\left(\frac{2D_{12}}{R^2}t\right)+\frac{2\cdot D_{12}}{R^2}\sin\left(\frac{2D_{12}}{R^2}t\right)\right]\right\}. \qquad (1.7)$$

В формулах (1.6), (1.7):

$$\psi(\omega,t) = \frac{e^{-\omega t}\cdot erfi\left(\sqrt{\omega\cdot t}\right)}{\sqrt{\omega}}, \qquad (1.8)$$

$C(z)$, $S(z)$ – интегралы Френеля, они имеют вид:

$$C(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^z\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx,\quad S(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^z\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx.$$

2. Приближённые формулы для вычисления модуля нестационарной составляющей диффузиофоретической скорости частицы сферической формы в конкретном случае диффузиофореза

Формулы (1.6) и (1.7) очень сложны для проведения расчётов. Получим приближенные формулы для вычисления модуля нестационарной составляющей скорости диффузиофореза рассматриваемой частицы при малых и больших значениях времени.

В выражениях (1.6), (1.7) фигурируют функции (1.5), (1.8). Воспользуемся асимптотическими приближениями этих функций при $t \to 0$ и $t \to \infty$. Приведём формулы для их представления при больших и малых значениях аргумента, которые основаны на асимптотических разложениях интеграла вероятности. Для малых значений аргумента t имеем:

$$\varphi\left(z_j,t\right)=\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(z_j^2 t\right)^k}{k!}\right]\cdot\left\{1+2z_j\sqrt{\frac{t}{\pi}}\cdot\left[1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^m\cdot\left(z_j^2 t\right)^m}{m!\cdot\left(2m+1\right)}\right]\right\}, \tag{2.1}$$

$$\psi\left(\omega,t\right)=2\sqrt{\frac{t}{\pi}}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n\cdot\left(2\omega\cdot t\right)^n}{\left(2n+1\right)!!}. \tag{2.2}$$

Для больших значений аргумента t справедливы следующие формулы:

$$\varphi\left(z_j,t\right)=-\frac{1}{z_j\sqrt{\pi t}}\cdot\left[1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^m\cdot\left(2m+1\right)!!}{\left(2m+1\right)\cdot\left(2z_j^2 t\right)^m}\right], \tag{2.3}$$

$$\psi\left(\omega,t\right)=-\frac{i\cdot e^{-\omega t}}{\sqrt{\omega}}+\frac{1}{\omega\sqrt{\pi t}}\cdot\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(2n-1\right)!!}{\left(2\omega\cdot t\right)^n}\right]. \tag{2.4}$$

Хорошо известно следующее разложение функции $e^{-\omega t}$:

$$e^{-\omega t}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^k\left(\omega\cdot t\right)^k}{k!} \quad \left(\omega\cdot t<\infty\right). \tag{2.5}$$

Заметим, что имеет место соотношение:

$$e^{-\omega t}=o\left(\frac{1}{t^k\sqrt{t}}\right) \quad \left(t\to\infty,\ \ k=0,1,2,\ldots\right). \tag{2.6}$$

Из разложений (2.1)-(2.5), принимая во внимание соотношение (2.6), возьмем следующие приближения:

$$\varphi\left(z_j,t\right)\approx 1+2z_j\sqrt{\frac{t}{\pi}}+z_j^2\cdot t \quad \left(t\to 0\right), \tag{2.7}$$

$$\varphi\left(z_j,t\right)\approx -\frac{1}{z_j\sqrt{\pi t}}\left(1-\frac{1}{2z_j^2 t}\right)\quad \left(t\to\infty\right), \tag{2.8}$$

$$\psi\left(\omega,t\right)\approx 2\sqrt{\frac{t}{\pi}}\quad \left(t\to 0\right), \tag{2.9}$$

$$\psi\left(\omega,t\right)\approx \frac{1}{\omega\sqrt{\pi t}}\left(1+\frac{1}{2\omega\cdot t}\right)\quad \left(t\to\infty\right), \tag{2.10}$$

$$e^{-\omega t}\approx 1-\omega\cdot t\quad \left(t\to 0\right), \tag{2.11}$$

$$\sin\left(\frac{2D_{12}}{R^2}t\right)\approx \frac{2D_{12}}{R^2}t\quad \left(t\to 0\right), \tag{2.12}$$

$$C\left(\frac{2D_{12}}{R^2}t\right)\approx \frac{2}{R}\sqrt{\frac{D_{12}\cdot t}{\pi}}\quad \left(t\to 0\right). \tag{2.13}$$

Далее для ссылок приведём следующие предельные равенства:

$$\lim_{t\to 0}\cos\left(\frac{2D_{12}}{R^2}t\right)=1, \tag{2.14}$$

$$\lim_{t\to 0}S\left(\frac{2D_{12}}{R^2}t\right)=0, \tag{2.15}$$

$$\lim_{t\to\infty}C\left(\frac{2D_{12}}{R^2}t\right)=\lim_{t\to\infty}S\left(\frac{2D_{12}}{R^2}t\right)=\frac{1}{2}, \tag{2.16}$$

$$\lim_{t\to\infty}e^{-\omega t}=0. \tag{2.17}$$

Теперь, пользуясь равенствами (1.6), (1.7) и соотношениями (2.7)-(2.17), составим приближенные формулы для вычисления модуля нестационарной составляющей скорости диффузиофореза частицы при больших и малых значениях времени. Получаем:

$$\left|\vec{u}_{2D}\left(t\right)\right|\approx \frac{16}{\sqrt{\pi}}\frac{\Delta\cdot AK_{sl}\cdot\omega\cdot D_{12}^3}{\omega^2R^4+4D_{12}^2}t\sqrt{t}\quad \left(\rho_e\neq\rho_i,\ \ t\to 0\right), \tag{2.18}$$

$$\left|\vec{u}_{2D}\left(t\right)\right|\approx AK_{sl}D_{12}\left\{1-\left[\sum_{j=1}^{2}\frac{\lambda_j}{z_j^2}+2\Delta\frac{\omega\cdot R^4}{\omega^2R^4+4D_{12}^2}\right]\frac{1}{\sqrt{\pi t}}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\left[\sum_{j=1}^{2}\lambda_j\frac{\omega-z_j^2}{z_j^4\omega}-2\Delta\frac{R^4}{\omega^2R^4+4D_{12}^2}\right]\frac{1}{t\sqrt{\pi t}}\right\}\quad \left(\rho_e\neq\rho_i,t\to\infty\right), \tag{2.19}$$

$$\left|\vec{u}_{2D}\left(t\right)\right| \approx \frac{2}{3} A K_{sl} D_{12} \omega \cdot t \cdot \left\{1 + \frac{8}{R\sqrt{\pi}} \frac{D_{12}^2 \sqrt{D_{12} \cdot t}}{\omega^2 R^4 + 4D_{12}^2}\right\} \quad \left(\rho_e = \rho_i, t \to 0\right),$$

$$\left|\vec{u}_{2D}\left(t\right)\right| \approx A K_{sl} D_{12} \left\{1 - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{D_{12}}{\pi t}} \frac{\omega \cdot R^3}{\omega^2 R^4 + 4D_{12}^2}\left(1 + \frac{1}{2\omega \cdot t}\right)\right\} \quad \left(\rho_e = \rho_i, t \to \infty\right).$$

3. Исследование нестационарной составляющей скорости диффузиофореза по её приближенным формулам для различных газов и для сферических частиц, которые состоят из конкретных материалов

Как известно, одним из опасных факторов металлообрабатывающего производства является повышенная загазованность и запыленность воздуха рабочей зоны.

Рассмотрим плазменную резку алюминиевых сплавов и газовую резку легированной стали. При резке выделяются диоксид азота (NO_2), оксид углерода (CO) и пыль оксида алюминия (Al_2O_3 (корунд), ρ_i = 3965 кг/м^3) или оксида железа

(Fe_2O_3, ρ_i = 5240 кг/м^3) соответственно. Именно поэтому в качестве примеров будем рассматривать комбинации частиц данных оксидов металлов с указанными газами.

Рассмотрим одиночные сферические частицы ($R = 10^{-5}$ м), которые взвешены в смеси воздуха и диоксида азота или оксида углерода. Причём считаем, что давление P = 0,1 МПа и температура T = 293 К. Отметим, что коэффициент диффузии для рассматриваемых бинарных газовых смесей мы вычисляли, пользуясь подходом Чена и Отмера, по формуле:

$$D_{12} = \frac{0,43\left(\frac{T}{100}\right)^{1,81}\left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2}\right)^{0,5}}{P\left(\frac{T_{\text{кр.1}} T_{\text{кр.2}}}{10000}\right)^{0,1406}\left[\left(\frac{V_{\text{мкр.1}}}{100}\right)^{0,4} + \left(\frac{V_{\text{мкр.2}}}{100}\right)^{0,4}\right]^2},$$

где $T_{\text{кр.1}}$ и $T_{\text{кр.2}}$ – критические температуры газов, M_1, M_2 – молекулярные массы газов, $V_{\text{мкр.1}}$ и $V_{\text{мкр.2}}$ – критические объёмы газов. Для системы «воздух – CO» находим $D_{12} = 0{,}087 \cdot 10^{-4}$ м^2/с, а для системы «воздух – NO_2» – $D_{12} = 0{,}065 \cdot 10^{-4}$ м^2/с.

Пользуясь формулой (2.18), построим графики, которые отражают изменение скорости движения сферических частиц при малых значениях времени (рис. 1).

Из рис. 1 видно, что движение частиц при малых значениях времени является ускоренным. Сравнив линии 1 и 2 или 3 и 4, можно прийти к выводу, что модуль нестационарной составляющей скорости диффузиофореза частицы больше, когда коэффициент диффузии больше. При сравнении линий 1 и 3 или 2 и 4 замечаем, что модуль нестационарной составляющей скорости диффузиофореза частицы будет больше, когда плотность частицы меньше.

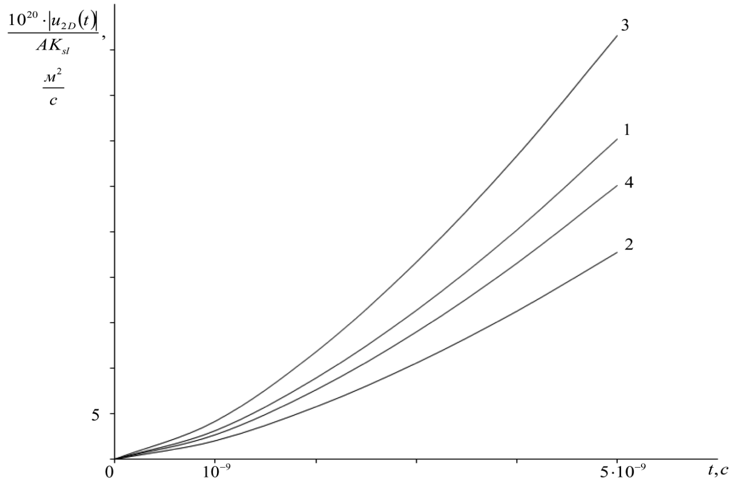


Рис. 1. Линии 1–4 показывают изменение модуля нестационарной составляющей скорости диффузиофореза сферической аэрозольной частицы при малых значениях времени в следующих случаях: 1) воздух – CO, Fe_2O_3; 2) воздух – NO_2, Fe_2O_3; 3) воздух – CO, Al_2O_3; 4) воздух – NO_2, Al_2O_3

Далее, переходим к исследованию диффузиофоретической скорости частицы сферической формы при больших значениях времени. С помощью формулы (2.19) построим графики функций для каждого из примеров по выражению $\left|\vec{u}_{2D}\left(t\right)\right| - AK_{sl}D_{12}$ (т. е. совмещаем все асимптоты с осью времени) (рис. 2). Очевидно, что при больших временах будет происходить замедление движения частиц. Сравнивая линии 1 и 2 или 3 и 4, можем заметить, что модуль нестационарной составляющей скорости диффузиофореза частицы больше, когда коэффициент диффузии меньше. После сравнения линий 1 и 3 или 2 и 4, можем сделать вывод, что модуль нестационарной составляющей скорости диффузиофореза рассматриваемой частицы больше, когда плотность частицы больше.

Следует заметить, что при изменении давления или температуры картина протекания процесса не будет меняться существенно. При понижении давления модуль нестационарной составляющей диффузиофоретической скорости частицы увеличивается, при понижении или повышении температуры модуль нестационарной составляющей диффузиофоретической скорости частицы соответственно уменьшается или увеличивается.

При стремлении времени к бесконечности строго нестационарный градиент концентрации стремится к постоянному вектору. Следовательно, нестационарный процесс перейдёт в стационарный. Таким образом, установленная зависимость между величинами давления и модуля нестационарной составляющей диффузиофоретической скорости частицы должна иметь место и в случае стационарного диффузиофореза.

В экспериментальной работе А.И. Сторожиловой [7] скорость диффузиофореза определялась по отклонению тонкой аэрозольной струи. При измерениях был использован аэрозоль вазелинового масла, полученный конденсационным методом. Была рассмотрена зависимость скорости диффузиофореза аэрозольных частиц от величины $1/p^2$, где p – давление.

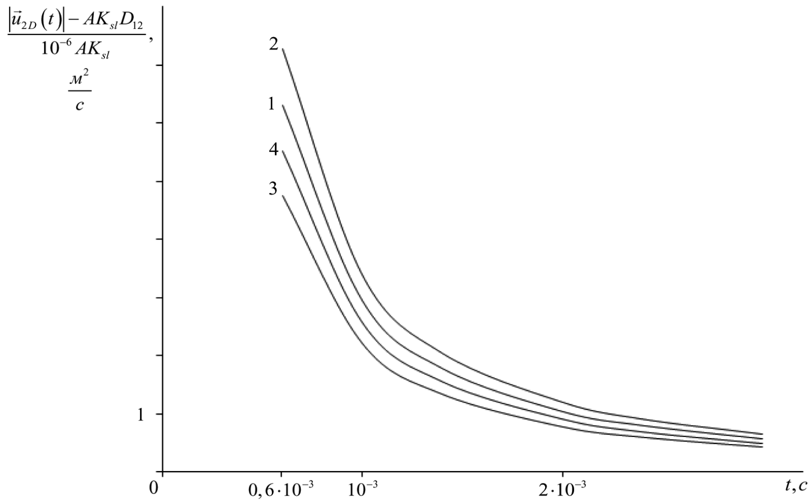


Рис. 2. Линии 1–4 показывают изменение нестационарной составляющей скорости диффузиофореза сферической аэрозольной частицы при больших временах в следующих случаях: 1) воздух – CO, Fe_2O_3; 2) воздух – NO_2, Fe_2O_3; 3) воздух – CO, Al_2O_3; 4) воздух – NO_2, Al_2O_3

Б.В. Дерягин и Ю.И. Яламов установили, что построенная ими теория диффузиофореза больших нелетучих аэрозольных частиц согласуется с экспериментальными данными, полученными А.И. Сторожиловой для чисел Кнудсена $K_n < 0,5$[10]. Следует заметить, что в соответствии с данными, полученными в работе [7], при понижении давления диффузиофоретическая скорость увеличивается, что согласуется с результатами, полученными в настоящей работе.

Заключение

В заключение отметим, что проведенное исследование нестационарной составляющей диффузиофоретической скорости частицы по её приближенным формулам позволяет сделать вывод о том, что модуль нестационарной составляющей скорости диффузиофореза существенно зависит от плотности частицы и параметров газовой смеси.

Также заметим, что построенная теория нестационарного диффузиофореза крупной твёрдой нелетучей частицы сферической формы согласуется с экспериментальными данными и может служить основой для исследования движения аэрозольных частиц в вязкой газовой среде под действием любого заданного нестационарного градиента концентрации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ефремов В.Е. О нестационарной составляющей диффузиофоретической скорости твердой сферической частицы. М.: Московский государственный областной университет, 2013. 19 с. Деп. в ВИНИТИ 21.03.2013 № 82-В 2013.
2. Ефремов В.Е. Решение задач нестационарного диффузиофореза // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2013. № 3. С. 20–28.
3. Ефремов В.Е., Кузьмин М.К. Гидродинамическая и диффузионная задачи в теории нестационарного диффузиофореза сферических частиц // Инженерно-физический журнал. Т. 87. 2014. № 4. С. 919–928.
4. Ефремов В.Е., Кузьмин М.К. Решение гидродинамической задачи в теории нестационарного диффузиофореза крупной твердой нелетучей сферической частицы // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2012. № 2. С. 15–29.
5. Малай Н.В., Калюжная Е.В., Морель Д.А., Щукин Е.Р. К вопросу о термофорезе нагретых крупных аэрозольных частиц сферической формы // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. Т. 20. 2015. № 1. С. 92–97.
6. Малай Н.В., Лиманская А.В., Щукин Е.Р. Термофоретическое движение нагретых крупных аэрозольных частиц сферической формы // Прикладная механика и техническая физика. Т. 57. 2016. № 2 (336). С. 164–171.
7. Сторожилова А.И. Измерение скорости движения аэрозольных частиц в поле диффузии водяного пара // Докл. АН СССР. Т. 155. 1964. № 2. С. 426–429.
8. Щукин Е.Р., Малай Н.В., Шулиманова З.Л., Стукалов А.А. О фотофорезе однородной по теплопроводности умеренно крупной чёрной аэрозольной частицы // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. Т. 43. 2016. № 13 (234). С. 96–103.
9. Щукин Е.Р., Малай Н.В., Шулиманова З.Л. Фотофоретическое движение твёрдой умеренно крупной аэрозольной частицы в поле электромагнитного излучения // Вестник Московского государственного технологического университета «СТАНКИН». 2016. №3 (38). С. 92–96.
10. Яламов Ю.И., Дерягин Б.В. Теория диффузиофореза больших нелетучих аэрозольных частиц. Докл. АН СССР. Т. 165. 1965. № 2. С. 364–367.
11. Яламов Ю.И., Хасанов А.С. Термофорез неоднородных по теплопроводности сублимирующих аэрозольных частиц // Журнал технической физики. Т. 74. 2004. № 7. С. 13–18.
12. Яламов Ю.И., Хасанов А.С. Термофорез твёрдой сферической крупной аэрозольной частицы с переменной теплопроводностью с учётом скачка температуры на поверхности. М.: Московский педагогический университет, 1995. 23 с. Деп. в ВИНИТИ № 3194-В95.
13. Яламов Ю.И., Хасанов А.С. Термофорез твердой сферической крупной аэрозольной частицы с учётом инерционных эффектов в уравнениях гидродинамики. М.: Московский педагогический университет, 1995. 33 с. Деп. в ВИНИТИ № 3196-В95.
14. Яламов Ю.И., Хасанов А.С. Теория движения сублимирующих и взаимодействующих твёрдых сферических неоднородных аэрозольных частиц во внешних полях: монография. М.: Московский государственный областной университет, 2006. 221 с.
15. Яламов Ю.И., Хасанов А.С. Теория термофореза неоднородных аэрозольных частиц // Теплофизика высоких температур. Т. 34. 1996. № 6. С. 929–935.
16. Яламов Ю.И., Хасанов А.С. Фотофорез крупных сублимирующих аэрозольных частиц // Теплофизика высоких температур. Т. 44. 2006. № 2. С. 293–297.

REFERENCES

1. Efremov V.E. *O nestatsionarnoi sostavlyayushchei diffuzioforeticheskoi skorosti tverdoi sfericheskoi chastitsy* [On a nonstationary diffusiophoresis velocity component of a solid spherical particle]. Moscow, Moscow Region State University Publ., 2013. 19 p. DEP. in VINITI 21.03. 2013. no. 82-B 2013.
2. Efremov V.E. [The solution of problems of nonstationary diffusiophoresis]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika* [Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], 2013, no. 3, pp. 20–28.
3. Efremov V.E., Kuz'min M.K. [Hydrodynamic and diffusion problems in the theory of nonstationary diffusiophoresis of spherical particles]. In: *Inzhenerno-fizicheskii zhurnal* [Journal of Engineering Physics and Thermophysics], vol. 87, 2014, no. 4, pp. 919–928.
4. Efremov V.E., Kuz'min M.K. [The solution of the hydrodynamic problem in the theory of nonstationary diffusiophoresis of large non-volatile solid spherical particles]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika* [Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], 2012, no. 2, pp. 15-29.
5. Malai N.V., Kalyuzhnaya E.V., Morel' D.A., Shchukin E.R. [To the problem of the thermophoresis of heated large spherical aerosol particles]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika* [Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], vol. 20, 2015, no. 1, pp. 92-97.
6. Malai N.V., Limanskaya A.V., Shchukin E.R. [The thermophoretic movement of heated large spherical aerosol particles]. In: *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika* [Applied Mathematics and Engineering Physics], vol. 57, 2016, no. 2 (336), pp. 164-171.
7. Storozhilova A.I. [Measurement of the velocity of movement of aerosol particles in a diffusion field of water vapor]. *Dokl. AN SSSR* [Report of the USSR Academy of Sciences], vol. 155, 1964, no. 2, pp. 426-429.
8. Shchukin E.R., Malai N.V., Shulimanova Z.L., Stukalov A.A. [On the photophoresis of a homogeneous thermal conductivity of moderately large black aerosol particles]. In: *Nauchnye vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematika. Fizika* [Scientific bulletins of the Belgorod State University. Series: Mathematics. Physics], vol. 43, 2016, no. 13 (234), pp. 96-103.
9. Shchukin E.R., Malai N.V., Shulimanova Z.L. [Photophoretic motion of moderately large solid aerosol particles in the field of electromagnetic radiation]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo tekhnologicheskogo universiteta "STANKIN"* [Bulletin of the Moscow State University of Technology "STANKIN"], 2016, no. 3 (38), pp. 92-96.
10. Yalamov Yu.I., Deryagin B.V. [The theory of diffusiophoresis of large non-volatile aerosol particles]. In: *Dokl. AN SSSR* [Report of the USSR Academy of Sciences]. vol. 165, 1965, no. 2, pp. 364-367.
11. Yalamov Yu.I., Khasanov A.S. [The thermophoresis of inhomogeneous thermal conductivity sublimating aerosol particles]. In: *Zhurnal tekhnicheskoi fiziki* [Journal of Technical Physics], vol. 74, 2004, no. 7, pp. 13-18.
12. Yalamov Yu.I., Khasanov A.S. *Termoforez tvordoi sfericheskoi krupnoi aerozol'noi chastitsy s peremennoi teploprovodnost'yu s uchetom skachka temperatury na poverkhnosti* [The thermophoresis of a large solid spherical aerosol particle with variable thermal conductivity taking into account the jump of the temperature on the surface]. Moscow, Moscow Pedagogical University Publ., 1995. 23 p. DEP. in VINITI no. 3194-B95.
13. Yalamov Yu.I., Khasanov A.S. *Termoforez tverdoi sfericheskoi krupnoi aerozol'noi chastitsy s uchetom inertsionnykh effektov v uravneniyakh gidrodinamiki* [The thermophoresis of a large

solid spherical aerosol particle taking into account the inertial effects in the equations of hydrodynamics]. Moscow, Moscow Pedagogical University Publ., 1995. 33 p. DEP. in VINITI. no. 3196-B95.
14. Yalamov Yu.I., Khasanov A.S. *Teoriya dvizheniya sublimiruyushchikh i vzaimodeystvuyushchikh tverdykh sfericheskikh neodnorodnykh aerozol'nykh chastits vo vneshnikh polyakh: monografiya* [The theory of movement of sublimating and interacting rigid spherical inhomogeneous aerosol particles in external fields: a monograph]. Moscow, Moscow Region State University Publ., 2006. 221 p.
15. Yalamov Yu.I., Khasanov A.S. [Theory of thermophoresis of aerosol particles heterogeneous]. In: *Teplofizika vysokikh temperatur* [High Temperature], vol. 34, 1996, no. 6, pp. 929–935.
16. Yalamov Yu.I., Khasanov A.S. [Photophoresis of large sublimating aerosol particles]. In: *Teplofizika vysokikh temperatur* [High Temperature], vol. 44, 2006, no. 2, pp. 293–297.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Ефремов Владимир Евгеньевич – программист, Российский государственный социальный университет;
e-mail: vefremov1986@mail.ru

Кузьмин Михаил Кузьмич – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры математического анализа и геометрии Московского государственного областного университета;
e-mail: lesir179@infoline.su

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Vladimir E. Efremov – programmer, Russian State Social University;
e-mail: vefremov1986@mail.ru;

Mikhail K. Kuzmin – PhD in Physics and Mathematics, associate professor, professor at the Department of Mathematical Analysis and Geometry, Moscow Region State University;
e-mail: lesir179@infoline.su

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Ефремов В.Е., Кузьмин М.К. Приближенные формулы для вычисления модуля нестационарной составляющей диффузиофоретической скорости твердой сферической частицы // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2017. № 3. С. 84–96.
DOI: 10.18384-2310-7251-2017-3-84-96

CORRECT REFERENCE TO THE ARTICLE

Efremov V.E., Kuzmin M.K. Approximate Formulae for Calculating the Modulus of a Nonstationary Diffusiophoresis Velocity Component of a Solid Spherical Particle In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*, 2017, no. 3, pp. 84–96.
DOI: 10.18384-2310-7251-2017-3-84-96

УДК: 535.3 + 535.5
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-3-97-107

МИКРОСТРУКТУРЫ ЖИДКОКРИСТАЛЛИЧЕСКИХ КОМПОЗИТОВ НА ОСНОВЕ БОРОСИЛОКСАНА. ОПТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ДИСПЕРСНОЙ ЖИДКОКРИСТАЛЛИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ НА ИХ ОСНОВЕ

Мащенко В.И., Соломатин А.С., Шашкова Ю.О., Беляев В.В.
Московский государственный областной университет,
учебно-научная лаборатория теоретической и прикладной нанотехнологии
105005, г. Москва, ул. Радио, д. 10А, Российская Федерация

Аннотация. Статья посвящена комплексному исследованию вопроса получения и использования жидкокристаллических композитов на основе боросилоксана. Авторами по оригинальной методике были получены жидкокристаллические композиты. Теоретически и экспериментально исследована их микроструктура. Смоделированы оптические свойства нематических ЖК доменов в изотропной фазе. Материалы на базе исследованных ЖК-композитов, а также разработанные методы определения оптических характеристик и размеров ЖК доменов имеют прикладное значение при проектировании ЖК индикаторных средств, например микрорезонаторов и электрооптических датчиков.

Ключевые слова: жидкокристаллический оптически анизотропный композит, боросилоксан, домены ЖК, моделирование оптических свойств.

MICROSTRUCTURES OF LIQUID CRYSTALLINE COMPOSITES BASED ON BOROSILOXANE. OPTICAL PROPERTIES OF THEIR DISPERSION LIQUID CRYSTALLINE STRUCTURE

V. Mashchenko, A. Solomatin, Yu. Shashkova, V. Belyaev
ul Radio 10A, 105005 Moscow, Russian Federation
Education & Research Lab of Theoretical and Applied Nanotechnology

Abstract. We report a complex study of the problem of obtaining and using borosiloxane-based liquid crystalline composites. Using an original method, we have obtained liquid crystal composites. Their microstructure is theoretically and experimentally studied. Optical properties of nematic LC domains in the isotropic phase are simulated. Materials on the basis of the investigated LC composites, as well as developed methods for determining the optical characteristics and sizes of LC domains, can have practical importance in the design of LC indicators, for example, microresonators and electro-optical sensors.

Key words: liquid crystal optically anisotropic composite, borosiloxane, LC domains, simulation of optical properties.

Введение

ЖК-композиты, где в качестве функционального элемента оптического или электрооптического устройства используются капли ЖК, известны достаточно давно [1; 3]. В последнее время в связи с миниатюризацией электронных устройств развитие получили подходы, где рабочим элементом устройства является единичная микрокапля ЖК, заключённая в поддерживающую матрицу. В качестве такой матрицы часто используются силиконовые материалы [7] благодаря их оптической прозрачности, доступности и технологичности. К новым материалам, где в качестве работающего элемента используется единичная капля, относятся микрорезонаторы, работающие на эффекте шепчущей галереи (Whispering-gallery mode (WGM)) [10]. Волны шепчущей галереи – физический эффект (рис. 1; 2), состоящий в распространении волн вблизи изогнутых границ раздела двух сред [2].

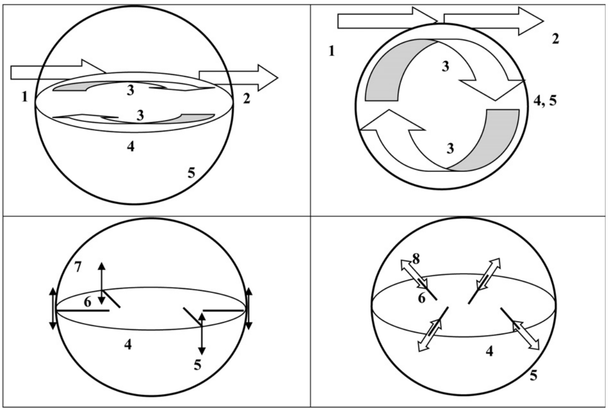


Рис. 1. Ход лучей WGM резонанса в малых (диаметр 11,7 мкм) ЖК каплях-резонаторах и ориентация молекул ЖК в них. 1 – падающий по касательной луч; 2 – выходящий (тоже по касательной) луч; 3 – луч, претерпевающий многократное полное внутреннее преломление в ЖК капле и обходящий её вокруг; 4 – диаметральная плоскость капли (в неё входит луч 1 и выходит луч 2), содержащая луч 3; 5 – капля ЖК; 6 – гомеотропно (радиально) ориентированная молекула ЖК; 7 – поляризация луча перпендикулярна оси ЖК молекул; 8 – поляризация луча в плоскости осей ЖК молекул

Как показано на рис. 2, зависимость резонанса WGM в нематической ЖК капле от направления поляризации входящего и исходящего пучков демонстрирует изменение интенсивности света, излучённого модами шепчущей галереи резонанса, в зависимости от направления поляризации входящего и исходящего пучка света. Горизонтальное направление соответствует TM модам шепчущей галереи.

Возможные волны в диэлектрическом шаре подразделяются на два класса. Один из этих классов не имеет составляющих (проекций) электрического поля по направлению радиуса шара. Такой класс волн получил название поперечно-электрического и обозначается символом TE. Другой класс волн не имеет радиальной составляющей магнитного поля. Он называется поперечно-магнитным и обозначается символом ТМ.

Если диэлектрический шар будет подвержен воздействию внешней электромагнитной волны, то в шаре возникнет (возбудится) тот тип волны, для которого частота воздействующего поля является резонансной, то есть близкой к его собственной частоте. Это, конечно, не означает, что другие типы волн совсем не возбудятся, но их амплитуды будут значительно меньше амплитуды резонансного типа. Именно это и показано на рис. 2.

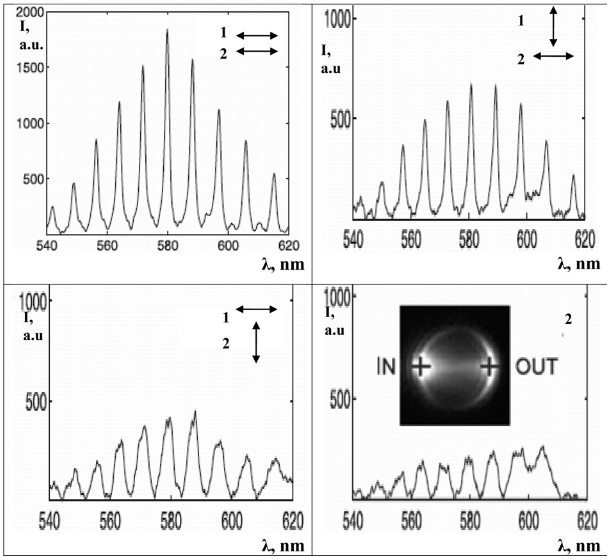


Рис. 2. Поляризационные свойства WGM резонанса в малых (диаметр 11,7 мкм) ЖК каплях-резонаторах. 1 – поляризация падающего луча (лазер); 2 – плоскость анализатора

Длина волны видимого электромагнитного излучения (света) меньше микрона. Поэтому в диэлектрическом шаре, радиус которого порядка десятка микрон, уже может существовать электромагнитная (световая) волна шепчущей галереи.

Полупроводниковые лазеры генерируют сравнительно широкий спектр частот. Это обстоятельство ограничивает возможность их применений для точных частотных измерений. Поэтому исследователи и инженеры разрабатывают методы сужения спектра генерации полупроводниковых лазеров с помощью внешних резонансных устройств. Моды шепчущей галереи в диэлектрических микрошарах являются одним из лучших кандидатов для решения проблемы частотной стабилизации полупроводникового лазера.

Важным параметром для использования микрокапли ЖК в качестве элемента электронно-оптического устройства является ориентация молекул ЖК на поверхности и в объёме капли.

Целью данной работы является экспериментальное исследование микроструктуры жидкокристаллических композитов на основе боросилоксана и сравнение полученных данных с результатами моделирования оптических свойств.

Экспериментальная часть

В качестве ЖК была использована нематическая смесь ЖК-1282 (T_{CN} = 253,1 K; T_{NI} = 335,1 K), которая состоит из алкоксицианбифенилов (80% массовой доли), эфира Демуса (16%) и эфира Грея (4%), производства ФГУП «НИОПИК» (РФ). Боросилоксан получен по методике (рис. 3), адаптированной для данной задачи согласно патенту РФ [4].

Микроскопические снимки сделаны с использованием оптического поляризационного микроскопа – Альтами Полар 3 (РФ).

Моделирующие оптические свойства программы предоставлены группой разработки программного обеспечения Учебно-научной лаборатории теоретической и прикладной нанотехнологии Московского государственного областного университета.

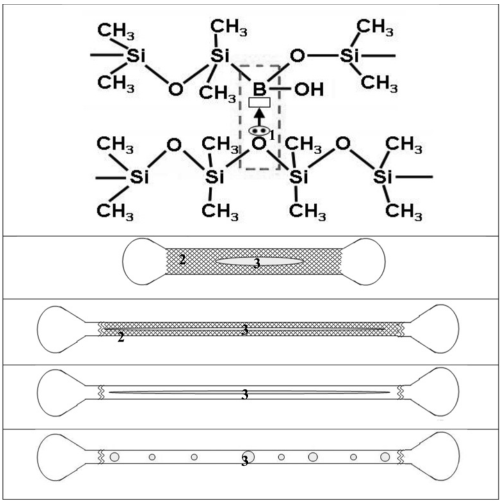


Рис. 3. Схема формирования микрокапель ЖК в матрице на основе БС.
1 – нековалентная связь между молекулами БС; 2 – динамическая сетка зацеплений, индуцированная вытяжкой образца; 3 – образование микрофиламента ЖК, сверху вниз деление филамента на капли в течение нескольких часов

Для формирования микрокапель ЖК в силиконовой матрице применён оригинальный подход. Для этого получены ЖК-композиты на основе БС и нематического жидкого кристалла ЖК-1282. Схема получения данных образцов представлена на рис. 3. Каплю ЖК-1282 с помощью микрошприцевания помещали в БС и далее участок образца с каплей подвергали одноосной вытяжке. При такой вытяжке БС приобретал свойства эластомера [5] благодаря образованию нековалентных связей между молекулами боросилоксана (см. рис. 3) и растягивался подобно жевательной резинке. Помещённая в образец капля ЖК вытягивалась вместе с БС и приобретала форму длинного цилиндра с заостренями на концах. Далее растягивающее напряжение прекращали, динамическая сетка зацеплений, образовавшаяся в боросилоксане за счёт вытягивающего напряжения исчезала, и БС приобретал свойства вязкого масла, в котором образованный микрофиламент ЖК распадался во времени на капли в соответствии с явлениями, описывающимися в рамках концепции неустойчивости Рэлея–Тейлора.

Методом оптической поляризационной микроскопии охарактеризовали микроструктуру образцов ЖК-композитов (рис. 4).

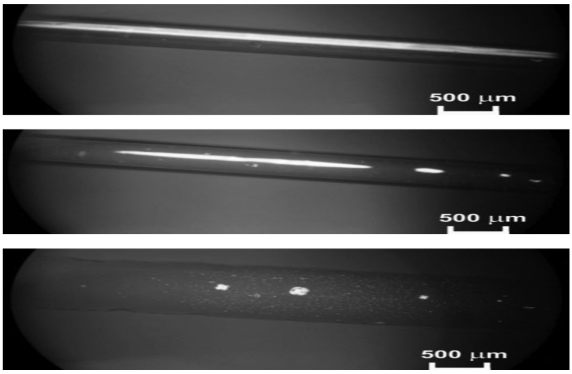


Рис. 4. Микрофотографии хронологии последовательного формирования цилиндрических и сферических структур образцов ЖК-композитов на основе БС и ЖК-1282. Сверху вниз виден процесс превращения во времени цилиндра с ЖК в микрокапли: 1 минута; 10 минут; 3 часа

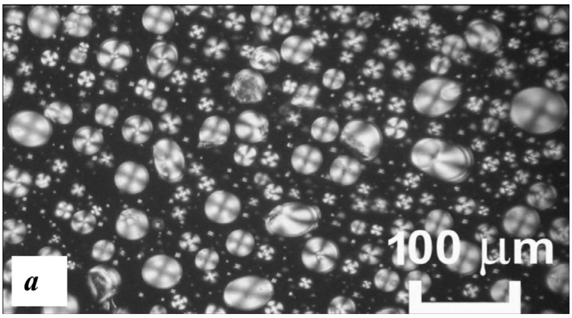


Рис. 5. Микрофотография сферических капель в ЖК-композитах на основе БС и ЖК-1282

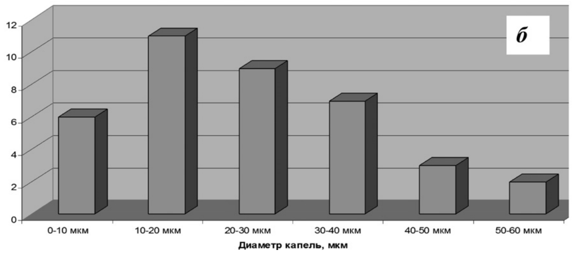


Рис. 6. Гистограмма статистического распределения диаметра сферических капель

На рис. 6 показано статистическое распределение сферических капель по величине, которое можно увидеть на рис. 5.

Моделирование оптических свойств ЖК-композитов

Как было показано выше, получены экспериментальные данные (оптические) о пропускании поляризованного света через вышеописанную пространственно неоднородную оптически анизотропную среду при скрещённых поляризаторах.

В работах [6; 8; 9] были получены результаты моделирования оптических свойств для различных пространственно-ориентированных ЖК структур как осесимметричных (цилиндрических), так и сферических.

Смоделированы домены нематического ЖК, внешняя сторона которых не оказывает заметного ориентирующего влияния, а центральная часть (ядро) доменов покрыта гомеотропно ориентирующим покрытием. Ячейка ЖК помещалась между скрещенными поляризатором и анализатором. Были приняты (рис. 7) следующие условия для компьютерной модели оптически анизотропного цилиндрического нематического ЖК домена (образующегося вокруг цилиндрического тела, введённого в изотропную среду).

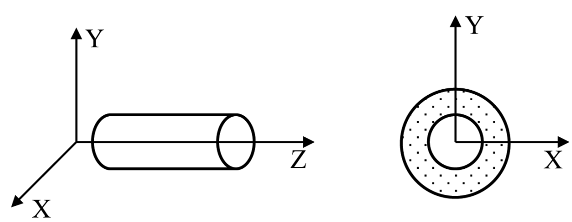


Рис. 7. Цилиндрический домен: центр системы координат в центре домена, оси OX и OZ лежат в плоскости слоя ЖК в ячейке

Ось OY перпендикулярна двум другим осям и плоскости ячейки, оси OX и OZ лежат в плоскости ячейки ЖК. Луч света падает нормально (вдоль оси OY). Директор ЖК в цилиндрическом домене ориентирован радиально, так как поверхность центрального тела ориентирует гомеотропно прилегающий слой ЖК. Посередине между поверхностями ячейки находится цилиндрическое тело с осью, совпадающей с OZ, и оптически оно аналогично изотропной среде (имеет такой же показатель преломления). Изотропная и анизотропная среда полностью прозрачна. Расчётные данные интенсивности для света, прошедшего через анизотропный ЖК домен, приведены на рис. 8 (приведены нормированные величины интенсивности света). Толщина слоя ЖК L = 1 мкм. Нематический ЖК домен во всю толщину слоя ЖК в ячейке, радиус домена L/2. Обыкновенный показатель преломления нематического ЖК n_o = 1,5, необыкновенный n_e = 1,55. Длина волны λ = 630 нм. Домен ЖК не искажает свою радиально ориентированную структуру там, где он прилегает к поверхности ячейки.

Для рассмотренных в данной работе параметров преломляющих систем по формуле линзы

$$\frac{n_o}{f} = (n - n_o)\left\{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{(n - n_0)d}{nR_1R_2}\right\}$$

фокусное расстояние составляет около 80 мкм для $n_o = 1,5$, $n_e = 1,55$. Поэтому пренебрегаем нелинейностью распространения света.

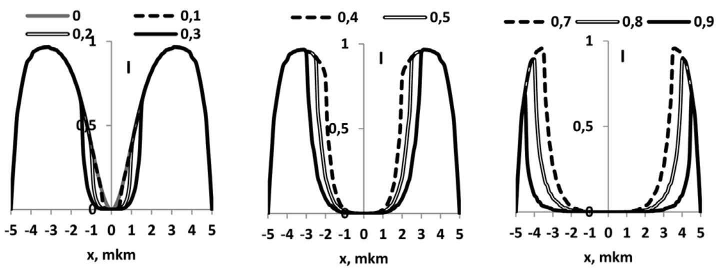


Рис. 8. Интенсивность света, прошедшего через цилиндрический домен, в зависимости от относительного диаметра центрального тела. L = 10 мкм, $n_o = 1,5$, $n_e = 1,55$. Те же результаты были получены и для $n_o = 1,5$, $n_e = 1,45$

Условия для модели образующегося вокруг сферического тела, введённого в изотропную среду, оптически анизотропного нематического ЖК домена (рис. 9) аналогичны рассмотренным выше случаям. Центр сферического тела находится посередине слоя ЖК в ячейке, на расстоянии L/2 от каждой из сторон ячейки. В областях, где сферический ЖК домен прилегает к поверхности, он не искажает свою радиально ориентированную структуру.

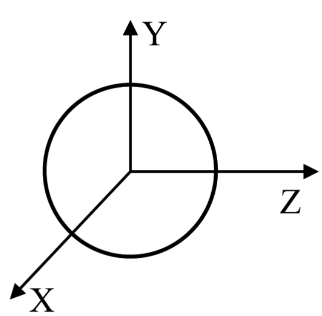


Рис. 9. Сферический домен: оси OX и OZ лежат в плоскости слоя ЖК в ячейке

На рис. 10 показана интенсивность света, прошедшего через сферический домен.

Толщина слоя ЖК на рис. 10 L = 10 мкм (слева) или 20 мкм (справа), $n_o = 1,5$, $n_e = 1,65$. Те же результаты получаются и для $n_o = 1,5$, $n_e = 1,35$.

Если вышеописанные сферические и цилиндрические домены рассматривать при радиусе центрального тела, равном нулю (рис. 11), то пропускание ими луча света в скрещённых поляроидах будет такое же, как в доменах ЖК в полимерной изотропной матрице, при гомеотропно ориентирующей поверхности домена, состоящей из полимерного материала (при радиально ориентированном директоре ЖК), и при показателе преломления полимерного материала, равном обыкновенному показателю преломления ЖК материала.

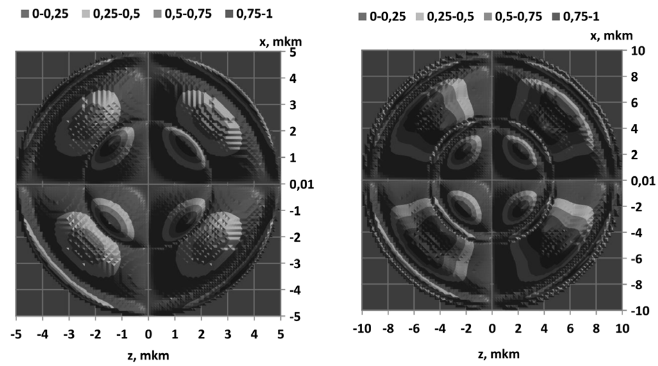


Рис. 10. Интенсивность света, прошедшего через сферический домен, диаметр центрального тела 0,5 от диаметра домена

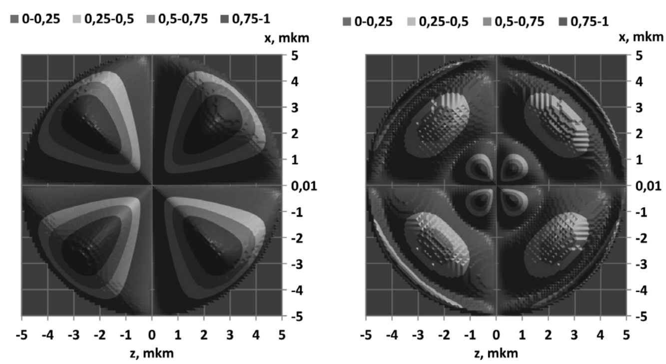


Рис. 11. Интенсивность света, прошедшего через сферический домен, диаметр 10 мкм, n_o=1,5, n_e=1,55 (слева) или 1,65 (справа). Нет центрального тела

Анализ экспериментальных и смоделированных оптических свойств ЖК-композитов

Таким образом, луч лазера, превосходя по диаметру капли ЖК, будет как проходить их насквозь на большей части площади их сечения (большей частью своей энергии), так и формировать WGM-спектр (рис. 1, рис. 2) меньшей частью своей энергии.

Луч лазера будет формировать при анализаторе, скрещённом с плоскостью поляризации входящего луча, как изображенные на рис. 5–6, рис. 7, рис. 10, рис. 11 зависимости интенсивности прошедшего луча, так и изображенные на рис. 2 спектры WGM-резонансных лучей для скрещённых плоскостей поляризации луча и анализатора. Будет формироваться многополосный спектр с неравномерной интенсивностью полос.

При достаточной концентрации капель (рис. 5) в достаточно толстом слое композита прошедший одну каплю луч будет снова трансформироваться на следующей капле, WGM-спектр которой зависит от её диаметра и не совпадает (в общем случае) с WGM-спектром предыдущей капли.

Таким образом, в толстых ПДЖК плёнках будет формироваться широкополосный спектр прошедшего света. По мере роста толщины ПДЖК, свет будет распределяться всё более равномерно в пределах полосы частот ниже частоты исходного луча лазера.

Однако если обеспечить равномерность капель ЖК, то, наоборот, луч лазера постепенно трансформируется в узкий (по полосе частот) луч WGM-резонансного максимума.

Если обеспечить несколько фиксированных диаметров капель ЖК, то получим соответствующие несколько лучей WGM-резонансных максимумов для капель с заранее предопределенной пропорцией их интенсивностей.

Выводы

Впервые предложен на основе ЖК-композита оптический трансформатор (преобразователь) луча лазера в заранее предопределенную совокупность поляризованных лучей с заданными узкими частотными полосами, плоскостями поляризации и интенсивностями.

Предложен метод формирования ЖК-композита.

* * *

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 16-57-00089Бел_а и гранта Президента № МК-7359.2016.9.

ЛИТЕРАТУРА

1. Беляев В.В. Дисплеи 90-х годов. М.: Российское отделение общества информационных дисплеев, 2000. 92 с.
2. Виноградов А.В., Ораевский А.Н. Волны шепчущей галереи // Соросовский образовательный журнал. Т. 7. 2001. № 2. С. 96–102.
3. Жаркова Г.М., Сонин А.С. Жидкокристаллические композиты / отв. ред. В.П. Шибаев; Рос. АН, Сиб. отд-ние, Ин-т теорет. и прикл. механики. Новосибирск: Наука: Сиб. изд. фирма, 1994. 211 с.
4. Мащенко В.И., Алексеев А.Н., Картавенко Т.В., Оленин А.В. Способ получения масс для лепки с биоцидными свойствами. Патент РФ №2473216. Дата публикации патента: 27 января 2013 г.
5. Митрофанов Л.А., Сидорович Е.А., Карлин А.В., Марей А.И. К вопросу о межмолекулярном взаимодействии в полибордиметилсилоксанах // Высокомолекулярные соединения. Т. (А) 11. 1969. № 4. С. 782–788.
6. Соломатин А.С. Ориентационные и оптические свойства доменов жидкого кристалла с центральной ориентирующей и внешней неориентирующей поверхностью // Жидкие кристаллы и их практическое применение. Т. 16. 2016. № 3. С. 39–48.
7. Bedjaoui L., Benmouna M., Maschke U. Thermophysical analysis of polysiloxane and nematic liquid crystal mixture // Physical Chemical News. Vol. 49. 2009. P. 121–124.
8. Belyaev V.V., Gorbunov A., Solomatin A.S., Suarez D. Light propagation through composite heterophase objects with liquid crystal material // Procedia Computer Science. Vol. 103. 2017. P. 556–561. DOI: 10.1016/j.procs.2017.01.060
9. Belyaev V.V., Solomatin A.S., Suarez D., Molina F., Smirnov A. Light Propagation through Composite Heterophase Objects with Liquid Crystal Material // SID'16 Digest. 2016. P. 1632–1635. DOI: 10.1002/sdtp.11045.
10. Humar M., Ravnik M., Pajk S., Muševič I. Electrically tunable liquid crystal optical microresonators // Nat. Photonics. Vol. 3. 2009. P. 595–600.

REFERENCES

1. Belyaev V.V. *Displei 90-kh godov* [Displays the 1990s]. Moscow, Russian Branch of the Information Display Society Publ., 2000. 92 p.
2. Vinogradov A.V., Oraevsky A.N. [Whispering gallery waves]. In: *Sorosovskii obrazovatel'nyi zhurnal* [Soros Educational Journal], vol. 7, 2001, no. 2, pp. 96–102.
3. Zharkova G.M., Sonin A.S. *Zhidkokristallicheskiye kompozity* [Liquid crystal composites]. Novosibirsk, Science: Sib. ed. firm Publ., 1994. 211 p.
4. Mashchenko V.I., Alekseev A.N., Kartavenko T.V., Olenin A.V. [A method for producing masses for modeling with biocidal properties. Patent of the Russian Federation no. 2473216. Patent publication date: January 27, 2013].
5. Mitrofanov L.A., Sidorovich E.A., Karlin A.V., Marei A.I. [The problem of intermolecular interaction in polybordimethylsiloxane]. In: *Vysokomolekulyarnye soedineniya* [High-molecular weight compounds], vol. (A) 11, 1969, no. 4, pp. 782–788.
6. Solomatin A.S. [Orientational and optical properties of the domains of the liquid crystal with a central orienting and external non-orienting surface]. In: *Zhidkie kristally i ikh prakticheskoe primenenie* [Liquid crystals and their practical application], vol. 16, 2016, no. 3, pp. 39–48.
7. Bedjaoui L., Benmouna M., Maschke U. Thermophysical analysis of polysiloxane and nematic liquid crystal mixture. In: *Physical Chemical News*, vol. 49, 2009, pp. 121–124.
8. Belyaev V.V., Gorbunov A., Solomatin A.S., Suarez D. Light propagation through composite heterophase objects with liquid crystal material. In: *Procedia Computer Science*, vol. 103, 2017, pp. 556–561. DOI: 10.1016/j.procs.2017.01.060.
9. Belyaev V.V., Solomatin A.S., Suarez D., Molina F., Smirnov A. Light Propagation through Composite Heterophase Objects with Liquid Crystal Material. In: *SID'16 Digest*, 2016, pp. 1632–1635. DOI: 10.1002/sdtp.11045.
10. Humar M., Ravnik M., Pajk S., Muševič I. Electrically tunable liquid crystal optical microresonators. In: *Nat. Photonics*, vol. 3, 2009, pp. 595–600.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Мащенко Владимир Игоревич – кандидат химических наук, старший научный сотрудник учебно-научной лаборатории теоретической и прикладной нанотехнологии Московского государственного областного университета;
e-mail: mashchenko@genebee.msu.su

Соломатин Алексей Сергеевич – кандидат физико-математических наук, инженер учебно-научной лаборатории теоретической и прикладной нанотехнологии Московского государственного областного университета;
e-mail: Sotrudnica_UNC@mail.ru

Шашкова Юлия Олеговна – инженер учебно-научной лаборатории теоретической и прикладной нанотехнологии Московского государственного областного университета;
e-mail: pirmir123@mail.ru

Беляев Виктор Васильевич – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической физики Московского государственного областного университета;
e-mail: vic_belyaev@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Vladimir I. Mashchenko – PhD in Chemistry, senior researcher of the Education & Science Lab for Theoretical and Applied Nanotechnology, Moscow Region State University;
e-mail: mashchenko@genebee.msu.su

Aleksei S. Solomatin – PhD in Physics and Mathematics, engineer of the Education & Science Lab for Theoretical and Applied Nanotechnology, Moscow Region State University;
e-mail: Sotrudnica_UNC@mail.ru

Julia O. Shashkova – engineer of the Education & Science Lab for Theoretical and Applied Nanotechnology, Moscow Region State University;
e-mail: pirmir123@mail.ru

Victor V. Belyaev – Doctor of Engineering, professor, head of the Department of Theoretical Physics, Moscow Region State University;
e-mail: vic_belyaev@mail.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Мащенко В.И., Соломатин А.С., Шашкова Ю.О., Беляев В.В. Микроструктуры жидкокристаллических композитов на основе боросилоксана. Оптические свойства дисперсной жидкокристаллической структуры на их основе // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2017. № 3. С. 97–107.
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-3-97-107

CORRECT REFERENCE TO THE ARTICLE

Mashchenko V.I., Solomatin A.S., Shashkova Yu.O., Belyaev V.V. Microstructures of Liquid Crystalline Composites Based on Borosiloxane. Optical Properties of Their Dispersion Liquid Crystalline Structure. In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics,* 2017, no. 3, pp. 97–107.
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-3-97-107

РАЗДЕЛ III. ТЕОРИЯ И МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ И ВОСПИТАНИЯ

УДК 372.851
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-3-108-119

О МАТЕМАТИЧЕКИХ ОЛИМПИАДАХ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ТЕХНИЧЕСКИХ ВУЗОВ

Власова Е.А., Попов В.С., Пугачёв О.В.
Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана
105005, г. Москва, ул. 2-я Бауманская, д. 5, Российская Федерация

Аннотация. В статье рассмотрена роль математических олимпиад в развитии у студентов творческих и профессиональных компетенций, углублении знаний и умений. Описаны особенности подбора задач, проанализированы мотивация студентов к участию в олимпиадах и их способности решать нестандартные задачи. Показан способ оценки уровня сложности предлагаемых к решению задач. Приведены варианты задач, которые предлагались на внутривузовских, региональных и всероссийских математических олимпиадах и различные методы их решения, предложенные участниками олимпиад. Авторы приходят к выводу, что математические олимпиады, проводимые в технических вузах и содержащие, в том числе задачи прикладной направленности, несомненно, способствуют развитию творческого и профессионального потенциала студентов, что в дальнейшем поможет будущим инженерам решать технические задачи, применяя нестандартные методы и подходы.

Ключевые слова: студенческая математическая олимпиада, нестандартные задачи, уровень сложности задач, творческое мышление, кумулятивный рейтинг.

ON MATHEMATICAL OLYMPIADS FOR STUDENTS OF TECHNICAL UNIVERSITIES

E. Vlasova, V. Popov, O. Pugachev
Bauman Moscow State Technical University
Vtoraya Baumanskaya ul. 5, 105005 Moscow, Russian Federation

Abstract. We consider the role of mathematical Olympiads in the development of students' creative and professional skills as well as in deepening their knowledge. We describe the features of selection of tasks, motivation to participate in the Olympiads, and the ability of students to solve non-standard problems. We show how to assess the level of complexity of the problems proposed to be solved. We list some problems offered to mathematical Olympiads at university, regional and federal stages, and various methods for their solution proposed by the participants. A conclusion is made that Mathematical Olympiads held in technical colleges and containing, among other things, applied problems, undoubtedly contribute to the development of creative and professional potential of students, which will help future engineers solve technical problems using non-standard methods and approaches.

Key words: student mathematical Olympiad, non-standard problems, task complexity level, creative thinking, cumulative rating.

Введение

Выпускник втуза должен обладать общими и специальными знаниями, уметь работать с научной литературой, быть психологически готовым к любому объёму работы. Важное место во всех этих вопросах отводится математике как основному инструменту в руках инженера.

Практическая направленность использования математических знаний - важнейшая составляющая инженерной деятельности. Выпускники технического вуза должны уметь:

а) чётко формулировать ту или иную техническую задачу;

б) строить математические модели;

в) выбирать соответствующий поставленной задаче математический метод и алгоритм решения;

г) использовать для решения задач численные методы;

д) на основе математического анализа вырабатывать и выбирать практические рекомендации.

Математика – идеальное средство для мозгового тренинга. Занятия математикой способствуют достижению высокого уровня мыслительной концентрации, устойчивости внимания, способности в течение длительного времени заниматься определённым видом деятельности.

Одна из важнейших особенностей технических университетов – фундаментальная подготовка будущих инженеров на основе углубленного и расширенного цикла математических, естественнонаучных и общеинженерных дисциплин. Курс математики в техническом вузе является примером гармоничного сочетания строгого, доказательного изложения материала и прикладной направленности многочисленных примеров и задач, рассматриваемых в ходе учебного процесса, что, в свою очередь, повышает мотивацию к освоению математики, способствует осознанию учащимися необходимости получения глубоких математических знаний для успешного овладения выбранной инженерной профессией.

Студенческие математические олимпиады, проводимые в технических вузах, направлены на развитие у студентов творческих и профессиональных компетенций, углубление теоретических и практических знаний, умений. Участие в олимпиадах приобщает студентов к научно-исследовательской работе, прививает навыки индивидуальной работы и работы в коллективе. Математическая олимпиада – это соревнование как в совершенстве владения базовыми знаниями, так и в умении решать нестандартные задачи. Участвуя в олимпиадах, учащиеся вынуждены за ограниченное время решать ряд сложных творческих задач, выбирать наиболее эффективные способы и алгоритмы их решения в зависимости от конкретных условий. Творческий подход к решению математических задач способствует умению нестандартно решать также и технические задачи, видоизменять заданную ситуацию, создавать условия для применимости того или иного метода, конструировать на базе данной задачи новые, исследовать результат решения.

Серьёзным стимулом студентов к участию в олимпиадах является индивидуальный рейтинг студента [1; 2]. Учитывая тот факт, что многим учащимся важно общественное признание, каждый студент должен иметь интегрированный рейтинг, напрямую связанный со всякого рода поощрениями. Индивидуальный (кумулятивный) рейтинг студента может непосредственно влиять на выдвижение на именные и президентские стипендии, на зачисление на программы двойных дипломов и направление на стажировки. Кумулятивный рейтинг используется и как один из показателей при отборе на программы магистерской подготовки. Введение индивидуального рейтинга стимулирует студентов к освоению образовательных программ на базе глубокой дифференциации оценки результатов их учебной работы. Рейтинг показывает реальное место, которое занимает студент среди сокурсников в соответствии со своими успехами в учёбе, способствует формированию навыков самоорганизации учебного труда и самооценки у студентов.

Подготовка олимпиадных задач

Студенческие математические олимпиады включают выполнение теоретических и практических конкурсных заданий, которые отражают содержание следующих разделов курса высшей математики: векторная и линейная алгебра, дифференциальное исчисление функций одного и нескольких переменных с приложениями, кратные и криволинейные интегралы, ряды, дифференциальные уравнения, комплексные числа и простейшие функции комплексного переменного, теория вероятностей. Теоретическими считаются задания, сформулированные в виде теорем, требующих доказательства.

В силу большой продолжительности курса математики и с целью равноправного участия студентов разных курсов студенческая олимпиада по математике может включать в себя раздельные конкурсы для студентов 1-го, 2-го и старших курсов [3; 4; 7; 9–12].

Для внутривузовских математических олимпиад в Московском государственном техническом университете им. Н.Э. Баумана имеется банк задач, пополняемый по мере их составления и расходуемый по мере надобности. Задачи делятся на три категории:

а) для всех студентов;

б) только для первого курса;

в) только для 2–5 курсов.

С годами выработалась схема деления каждой категории на подкатегории по темам и по уровню сложности (табл. 1), чтобы каждый раз были и лёгкие подкатегории, и трудные с охватом всех разделов математики [8].

Таблица 1.
Категории и подкатегории олимпиадных задач

Категории	Подкатегории
а) для всех	1. Лёгкие по математическому анализу. 2. Лёгкие по алгебре и геометрии. 3. Трудные по математическому анализу. 4. Трудные по алгебре, геометрии и комплексным числам. 5. Комбинаторика и дискретная математика (только осенью).
б) только для 1 курса	1. Лёгкие по математическому анализу. 2. Лёгкие по алгебре и геометрии. 3. Трудные по всем темам (только весной).
в) только для 2–5 курсов	1. Лёгкие по математическому анализу, включая кратные интегралы и ряды. 2. Трудные по математическому анализу, включая кратные интегралы и ряды, функции комплексного переменного. 3. Теория вероятностей (только весной).

При составлении комплекта задач для каждого из двух туров внутривузовской олимпиады из каждой подкатегории берётся по одной задаче.

Оценка уровня сложности задач

Задачи на математической олимпиаде должны иметь разный уровень сложности: с одной стороны, если все задачи лёгкие, то сильным студентам будет неинтересно; с другой стороны, отсутствие задач умеренной сложности отпугнёт студентов, неуверенных в своих силах. От сложности задачи зависит количество баллов, которые получит участник.

Определять уровень сложности предлагаемых задач можно разными способами. Например, уровень сложности задачи может быть определён по формуле $(px + qy)/(p + q)$, где p, q – весовые коэффициенты; x и y – оценки соответственно концептуальной (связанной с пониманием и формализацией условия) и технической (связанной с объёмом необходимых вычислений) сложностей. Для x, y допускаются целые и полуцелые значения от 1 до 5, коэффициенты выбираются так, что $p + q = 1$ и $p > q$ (т. е. более весомой считается концептуальная сложность). При сделанных предположениях уровень сложности может принимать значения от 2 до 5 [5].

Есть и другой подход: цена задачи не назначается заранее, а определятся на основе статистики: сколько студентов и насколько хорошо её решили. Так делается на внутривузовской математической олимпиаде в МГТУ им. Н.Э. Баумана. Конкретнее: если c_{ij} – коэффициент, выражающий, насколько i-й из n студентов решил j-ю задачу ($0 \le c_{ij} \le 1$), то цена j-й задачи пропорциональна

$$(c_{1j} + c_{2j} + \ldots + c_{nj})^a,$$

при этом показатель степени a $(-1 < a < 0)$ подбирается так, что самая сложная задача оценивается примерно вдвое выше, чем самая лёгкая. Такой расчёт проводится отдельно для первокурсников и студентов 2–5 курсов.

Примеры вариантов задач

Приведём задачи, предлагавшиеся на втором (весеннем) отборочном туре внутривузовской математической олимпиады студентов МГТУ им. Н.Э. Баумана в 2017 г.

Для первого курса

1. В I четверти плоскости Оxy изобразить геометрическое место точек, равноудалённых от отрезка $\{x = 0 \le y \le 2\}$ и луча $\{x \ge 1; y = 0\}$.

2. Дана рекуррентная последовательность: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 1/a_n$. Доказать, что $a_{1438} > 50$.

3. Составить неравенство, задающее фигуру на плоскости, полученную объединением всех отрезков AB длины 1, где A лежит на оси Оx, B на оси Оy.

4. Решить уравнение $A^2 - 3A + 2E = 0$, где A – симметричная матрица 2Ч2 из действительных чисел.

5. Через точку $A(1, 2, 4)$ провести плоскость, отсекающую от октанта $\{x, y, z > 0\}$ тетраэдр минимального объёма.

6. Пусть многочлен $P(x) = x^7 + px^6 + qx^5 + \ldots$ имеет 7 разных действительных корней. Доказать, что $q < p^2/2$.

7. Пусть попарные расстояния между точками A, B, C, D заданы так, что для каждой тройки точек выполнено строгое неравенство треугольника. Всегда ли существует тетраэдр с заданными длинами ребер?

Для старших курсов

Задачи 1–4 те же, что и для первокурсников.

5. Пусть $y(x)$ – решение дифференциального уравнения $xy'' + y' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$. Доказать, что $0{,}2 < y(1) < 0{,}25$.

6. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\operatorname{tg}^9 x}$.

7. В 15 ведёр насыпали примерно по 10 кг песка. Доказать, что с вероятностью более 60% найдутся два ведра, число песчинок в которых делится на 100 с одинаковым остатком.

Для ряда задач участники олимпиады предложили оригинальные решения, проявив не только хорошее владение математическим аппаратом, но и способность выбрать наиболее рациональный путь к намеченной цели.

Например, авторское решение задачи 5 для первокурсников использовало известное неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим, но некоторые студенты применили метод множителей Лагранжа, хотя пройти его предстояло лишь через два месяца. В задаче 6 немногие нашли решение, идентичное авторскому: применить теорему Ролля пять раз; большинство применили теорему Виета.

Призёры внутривузовской олимпиады, вошедшие в сборную команду, проявили способности находить оригинальные решения и на олимпиадах более высокого уровня. Для примера рассмотрим задачи, предлагавшиеся 9 апреля 2017 г. на городской математической олимпиаде в Зеленограде.

Для первого курса

1. Можно ли найти в 3-мерном пространстве пять векторов таких, что длина суммы любых трёх из них меньше длины суммы остальных двух?

2. Вычислить предел

$$\lim_{n\to\infty} n^3\left(\operatorname{arctg}(n+2) - 2\operatorname{arctg}(n+1) + \operatorname{arctg} n\right).$$

3. Вычислить интеграл

$$\int_0^1 \left(2^{x^2} + \sqrt{\log_2(x+1)}\right)dx.$$

4. Даны функции $f(x) = x + 1/x$ и $g(x) = x^2$. Существует ли многочлен $P(u, v)$ такой, что $P(f(x), g(x)) = x + 1$ при $x \neq 0$?

Для старших курсов

1. Пусть A, B – матрицы размера nЧn, $n > 1$; E – единичная матрица n Ч n. Доказать, что если $(AB - E)^{2017} = E$, то $(BA - E)^{2017} = E$.

2. Упростить выражение

$$\sum_{j=1}^{t} \frac{j^t}{t} \sum_{k=0}^{t-j} (-1)^k\, C_{t-j}^k.$$

3. Пусть $a_1, a_2, a_3, \ldots$ – все натуральные числа, имеющие в десятичной записи лишь цифры 0 и 1. Сходится ли ряд $1/a_1 + 1/a_2 + 1/a_3 + \ldots$?

4. Вычислить интеграл функции $1/(x + y + z)^4$ по трёхмерной области G, заданной неравенствами $x, y, z \geq 0$, $x + y + z \geq 1$.

Оргкомитет олимпиады предполагал решение задачи 2 для первого курса, в котором дважды применяется теорема Лопиталя–Бернулли. Однако студент МГТУ им. Н.Э. Баумана Антон Малинский с факультета специального машиностроения применил другое решение, в котором использовал разложение функции $\operatorname{arctg}(n(1 + x))$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x = 0$:

$$\operatorname{arctg} n(1+x) = \operatorname{arctg} n + \frac{n}{1+n^2}x - \frac{2n^3}{(1+n^2)^2}\frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Подставив $x = 1/n$ и $x = 2/n$, получил

$$\operatorname{arctg}(n+1) = \operatorname{arctg} n + \frac{1}{1+n^2} - \frac{n}{(1+n^2)^2} + o(1/n^2),$$

$$\operatorname{arctg}(n+2) = \operatorname{arctg} n + \frac{2}{1+n^2} - \frac{4n}{(1+n^2)^2} + o(1/n^2),$$

откуда и пришёл к верному ответу: предел равен –2.

Были предложены и другие решения, например, с применением теоремы Лагранжа.

Для решения задачи 4 старших курсов также предлагались разные способы. В авторском решении область G разбивалась на три области:

$G_1 = \{0 \le x < 1,\ 0 < y < 1 - x,\ z > 1 - x - y\}$,

$G_2 = \{0 \le x < 1,\ y \ge 1 - x,\ z \ge 0\}$,

$G_3 = \{x \ge 1,\ y \ge 0,\ z \ge 0\}$.

Но студент-бауманец Иван Баранов с 5 курса факультета информатики и управления нашёл способ упростить вычисления, применив замену переменных: $x = x$, $y = y$, $h = x + y + z$, в результате которой область G перешла в перевернутую усечённую пирамиду с сечениями в виде прямоугольного равнобедренного треугольника при каждом $h \ge 1$.

Прикладные математические задачи

Изучая математику в техническом вузе, необходимо делать акцент на её прикладное значение, особое внимание уделять межпредметным связям, показывать, как используются методы и приёмы математики при изучении других дисциплин учебного плана [6]. Решая практикоориентированные задачи на математических олимпиадах, студенты приобретают профессиональные навыки, умения использовать и комбинировать приобретённые математические знания при решении различных технических заданий. Выполнение подобных заданий является определяющим условием успешности профессиональной деятельности будущего инженера. Поэтому на математических олимпиадах для студентов технических специальностей необходимо предлагать задачи прикладной направленности. Приведём примеры таких задач и их решения.

Задача 1 (Ярославль, межрегиональная математическая олимпиада, 2015). По прямому каналу шириной 5 м плывёт плот 6 м × 4 м. Канал поворачивает под прямым углом. Пройдет ли там плот?

Решение. Выберем оси координат, как показано на рис. 1.

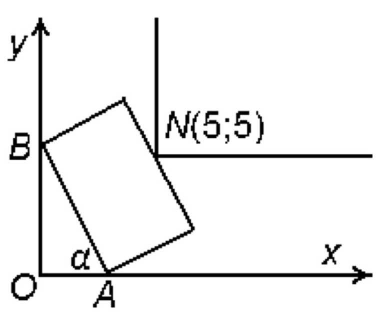


Рис. 1. Выбор системы координат

Тогда $OA = 6 \cos \alpha$, $OB = 6 \sin \alpha$, и уравнение прямой AB

$x \sin\alpha + y \cos\alpha - 6 \sin\alpha \cos\alpha = 0$.

Обозначим $s(\propto) = \sin\propto + \cos\propto$. Тогда расстояние от угловой точки $N(5;5)$ до прямой AB равно

$$d(\propto) = |5s - 6\sin\propto\cos\propto| = \left|5s - 3\left(s^2 - 1\right)\right| = -3s^2 + 5s + 3 \leq$$

$$\leq \min_{1\leq s\leq\sqrt{2}}\left(-3s^2 + 5s + 3\right) = 5\sqrt{2} - 3 > 4.$$

Поэтому при всех $\propto \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ расстояние от плота до точки N и тем более до любой другой точки внутреннего берега канала будет положительным.

Ответ: плот сможет развернуться на повороте.

Задача 2 (Иркутск, Всероссийская математическая олимпиада, 2013). Треугольный лоскут съезжает с высокого стола под действием силы тяжести и без трения так, что сторона AB параллельна краю стола (рис. 2). Определить скорость лоскута в момент, когда AB окажется на краю стола. В начале движения лоскут был неподвижен и свешивался на половину высоты. Размеры лоскута заданы, $AD = BD$.

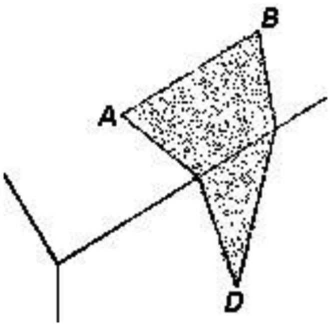


Рис. 2. Положение лоскута на поверхности стола

Решение. Обозначим через M массу всего лоскута, через m массу свешивающейся части, через x – расстояние от края стола до центра тяжести свешивающейся части (рис. 3).

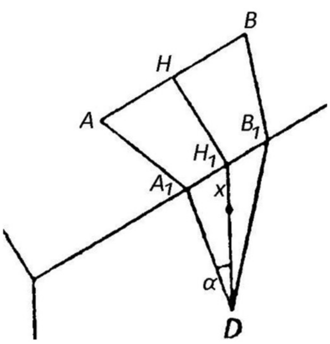


Рис. 3. Введение обозначений

Тогда $M = \sigma h^2 \mathrm{tg} \propto$, $m = \sigma D H_1{}^2 \mathrm{tg} \propto$, $x = DH_1 / 3$, где $h = DH$ – высота лоскута, σ – его поверхностная плотность. Уравнение движения лоскута $M\ddot{x} = gm$. Подставляя значения масс, получаем

$$\sigma h^2 \mathrm{tg} \propto \ddot{x} = \sigma \cdot 9gx^2 \mathrm{tg} \propto,\ h^2\ddot{x} = h^2 v\frac{dv}{dx} = 9gx^2,\ vdv = \frac{9g}{h^2}x^2dx.$$

Интегрируя последнее выражение по v от 0 до конечной скорости V, а затем по x от начального положения центра тяжести $h/6$ до конечного $h/3$, найдём

$$\frac{V^2}{2} = \frac{9g}{h^2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_{\frac{h}{6}}^{\frac{h}{3}} = \frac{7gh}{72}.$$

Ответ: лоскут соскользнет со стола со скоростью $\frac{1}{6}\sqrt{7gH}$, где H – высота лоскута.

Формирование сборной команды и поощрения

Сборная команда студентов МГТУ им. Н.Э. Баумана из 10–12 первокурсников и 8–10 студентов 2–5 курсов формируется на основе итоговых рейтингов по двум отборочным турам – осеннему и весеннему. В команду могут войти также прошлогодние победители (не более 2 человек). Эта команда почти в полном составе участвует во втором этапе – московской городской олимпиаде.

В то же время из этой двадцатки лидеров набираются сборные команды для участия в третьем этапе – всероссийских математических олимпиадах, которые проходят в разных городах и в разные времена года; в один год можно участвовать в нескольких олимпиадах. Команды формируются в основном по итогам первого этапа, т. к. итоги второго этапа (городской олимпиады) подводятся только в конце мая.

Призёры городских и всероссийских олимпиад получают дипломы, которые дают им право на повышение баллов на экзаменах по математике, а также учитываются при выдвижении на повышенную стипендию и в индивидуальном рейтинге. На некоторых всероссийских олимпиадах предусмотрены денежные призы от Министерства науки и образования.

Заключение

Математические олимпиады, проводимые в технических вузах и содержащие, в том числе задачи прикладной направленности, несомненно, способствуют развитию творческого и профессионального потенциала студентов, что в дальнейшем поможет будущим инженерам решать технические задачи, применяя нестандартные методы и подходы. Студенческие олимпиады по математике с их разнообразием по подбору задач, уровню их сложности позволяют выявлять творчески мыслящих, одарённых, хорошо овладевающих знаниями студентов, которые в дальнейшем могут успешно заниматься научной деятельностью, продолжая учёбу в аспирантуре.

ЛИТЕРАТУРА

1. Власова Е.А., Грибов А.Ф., Попов В.С., Латышев А.В. Развитие мотивационных стимулов обучения в рамках модульно-рейтинговой системы организации учебного процесса // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2014. № 1. С. 48–53.
2. Власова Е.А., Попов В.С. Инновационные методы и технологии обучения математике в техническом вузе // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2017. № 1. С. 100–112.
3. Задачи студенческих математических олимпиад ЯГТУ: учеб. пособие / В.Ш. Ройтенберг, Ю.К. Оленикова, Л.А. Сидорова. Ярославль, ЯГТУ, 2015. 150 с.
4. Кожухов И.Б., Свентковский В.А., Соколова Т.В. Московские городские студенческие олимпиады по математике за 1996–2009 гг. М.: Техполиграфцентр, 2010. 230 с.
5. Лукьянов В.Д., Спектор В.Е., Фаллер О.В. XVII Всеармейская олимпиада по математике для курсантов высших военно-учебных заведений Министерства обороны Российской Федерации // Математика в высшем образовании. 2012. № 10. С. 67–77.
6. Никитина М.Г., Павлова Е.С. Роль практических заданий в курсе высшей математики в методической системе модульного обучения и при подготовке студентов инженерных специальностей к математической олимпиаде // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. 2008. № S8. С. 205–210.
7. Оленикова Ю.К. Математические олимпиады и образование // Математика и математическое образование. Теория и практика. Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 9. Ярославль: ЯГТУ, 2014. С. 138–153.
8. Пугачёв О.В. Подготовка сборной команды МГТУ им. Н.Э.Баумана к всероссийской олимпиаде по математике // Гуманитарный вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2015. № 11 (37). С. 1–7.
9. Студенческие математические олимпиады. Ч. 1: учеб. пособие / В.А. Амбарцумян, Е.А. Андрющенко, К.В. Бухенский, Е.А. Дворецкова, А.Б. Дюбуа, М.А. Зилотова, С.Н. Машнина, А.С. Сафошкин. Рязань: Типография РГРТУ, 2014. 128 с.
10. Студенческие математические олимпиады. Ч. 2: учеб. пособие / В.А. Амбарцумян, Е.А. Андрющенко, К.В. Бухенский, Е.А. Дворецкова, А.Б. Дюбуа, С.Н. Машнина, А.С. Сафошкин. Рязань: РГРТУ, 2015. 96 с.
11. Студенческие математические олимпиады города Кирова: учеб. пособие для студентов математических направлений подготовки высших учебных заведений / В.В. Сидоров. Киров: Радуга-ПРЕСС, 2015. 95 с.
12. Студенческие олимпиады по математике УГТУ–УПИ им. Б.Н. Ельцина / Б.М. Веретенников, Л.П. Мохрачева, А.Б. Соболев, Г.Л. Ходак. 2-е изд., доп. и испр. М.: Физматлит, 2009. 253 с.

REFERENCES

1. Vlasova E.A., Gribov A.F., Popov V.S., Latyshev A.V. [The development of motivational incentives for learning within module-rating system of organization of educational process]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika* [Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], 2014, no. 1, pp. 48–53.
2. Vlasova E.A., Popov V.S. [Innovative methods and technologies of teaching mathematics in a technical University]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika* [Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], 2017, no. 1, pp. 100–112.

3. Rautenberg V.S., Oleinikova J.K., Sidorova L.A. *Zadachi studencheskikh matematicheskikh olimpiad YAGTU* [Problems of student mathematical Olympiads of the Yaroslavl State Technical University]. Yaroslavl, Yaroslavl State Technical University Publ., 2015. 150 p.
4. Kozhukhov I.B., Sventkovskii V.A., Sokolova T.V. *Moskovskie gorodskie studencheskie olimpiady po matematike za 1996–2009 gg* [Moscow city student Olympiad on mathematics 1996–2009]. Moscow, Tekhpoligraftsentr Publ., 2010. 230 p.
5. Luk'yanov V.D., Spektor V.E., Faller O.V. [XVII all-Army Olympiad in mathematics for cadets of higher military educational institutions of the Ministry of Defence of the Russian Federation]. In: *Matematika v vysshem obrazovanii* [Mathematics in Higher Education], 2012, no. 10, pp. 67–77.
6. Nikitina M.G., Pavlova E.S. [The role of practical tasks in higher mathematics course in the methodical system modular training and in the preparation of engineering students for mathematical Olympiad]. In: *Izvestiya Samarskogo nauchnogo tsentra Rossiiskoi akademii nauk* [News of the Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences], 2008, no. S8, pp. 205–210.
7. Olenikova Yu.K. [Mathematical Olympiad and education]. In: *Matematika i matematicheskoe obrazovanie. Teoriya i praktika. Mezhvuz. sb. nauch. tr.* [Mathematics and mathematical education. Theory and practice. Interuniversity collection of scientific works], no. 9. Yaroslavl, Yaroslavl State Technical University Publ., 2014. pp. 138–153.
8. Pugachev O.V. [Preparation of a national team of Bauman MSTU to the all-Russian Olympiad in mathematics]. In: *Gumanitarnyi vestnik MGTU im. N.E. Baumana* [Humanitarian bulletin of the Bauman MSTU], 2015, no. 11 (37), pp. 1–7.
9. Ambartsumyan V.A. et al. *Studencheskie matematicheskie olimpiady Ch. 1* [Student mathematical Olympiad. P. 1.]. Ryazan, RSRTU Publ., 2014. 128 p.
10. Ambartsumyan V.A. et al. *Studencheskie matematicheskie olimpiady. Ch. 2* [Student mathematical Olympiad. P. 2]. Ryazan, RSRTU Publ., 2015. 96 p.
11. Sidorov V.V. *Studencheskiye matematicheskie olimpiady goroda Kirova* [Student mathematical Olympiad of the city of Kirov]. Kirov, Raduga-PRESS Publ., 2015. 95 p.
12. Veretennikov B.M. et al. *Studencheskie olimpiady po matematike UGTU–UPI im. B.N. Yel'tsina* [Student Olympiad in mathematics at B.N. Yeltsin Ural State Technical University]. Moscow, Physics and mathematics literature Publ., 2009. 253 p.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Власова Елена Александровна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана;
e-mail: elena.a.vlasova@yandex.ru

Попов Владимир Семёнович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана;
e-mail: vspopov@bk.ru

Пугачёв Олег Всеволодович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана;
e-mail: opugachev@yandex.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Elena A. Vlasova – PhD in Physics and Mathematics, associate professor at the Department of Applied Mathematics, Bauman Moscow State Technical University;
e-mail: elena.a.vlasova@yandex.ru

Vladimir S. Popov – PhD in Physics and Mathematics, associate professor at the Department of Applied Mathematics, Bauman Moscow State Technical University;
e-mail: vspopov@bk.ru

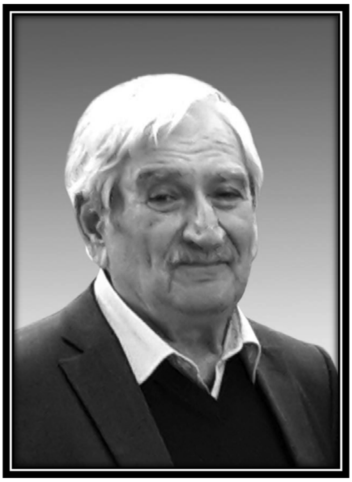
Oleg V. Pugachev – Doctor in Physics and Mathematics, professor at the Department of Bauman Moscow State Technical University;
e-mail: opugachev@yandex.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Власова Е.А., Попов В.С., Пугачёв О.В. О математических олимпиадах для студентов технических вузов // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2017. № 3. С. 108–119.
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-3-108-119

THE CORRECT REFERENCE TO THE ARTICLE

Vlasova E.A, Popov V.S., Pugachev O.V. On Mathematical Olympiads for Students of Technical Universities. In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*, 2017, no. 3, pp. 108–119
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-3-108-119



Памяти
Дадиваняна Артёма Константиновича
08.11.1939 – 06.08.2017

6 августа 2017 г. ушёл из жизни замечательный учёный, доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической физики Московского государственного областного университета Дадиванян Артём Константинович.

А.К. Дадиванян окончил физический факультет Ленинградского государственного университета и аспирантуру Научно-исследовательского физического института Ленинградского государственного университета. В 1966 г. защитил диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук в Ленинградском государственном университете, а в 1980 г. – диссертацию на соискание учёной степени доктора физико-математических наук в Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова.

В 1965–1982 гг. А.К. Дадиванян работал старшим преподавателем, доцентом и профессором в Ереванском государственном университете, в 1982–1999 гг. заведовал кафедрой физики и математики Ереванского зоотехническо-ветеринарного института, кафедрой рационального использования ресурсов и охраны окружающей среды в Московском институте повышения квалификации Минхимпрома СССР, кафедрой экологического менеджмента в Международной академии предпринимательства. С 2000 г. А.К. Дадиванян работал профессором кафедры теоретической физики МГОУ.

Сфера научных интересов А.К. Дадиваняна включала в себя широкий круг проблем современной теоретической и экспериментальной физики полимеров и жидких кристаллов, биофизики, физики и химии полимерных покрытий, взаимодействия вещества с лазерным излучением, экологии.

А.К. Дадиваняном был открыт ближний ориентационный порядок в растворах полимеров и было обнаружено его влияние на оптические, спектральные, термодинамические и релаксационные свойства полимерных растворов (эффект Фрисман–Дадиваняна). Работа была зарегистрирована Госкомитетом СССР по изобретениям и открытиям (1987 г.).

А.К. Дадиванян – автор более 200 научных работ, под его руководством защищено 8 кандидатских диссертаций.

Светлая память об Артёме Константиновиче Дадиваняне навсегда останется в наших сердцах.

ВЕСТНИК
МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
ОБЛАСТНОГО УНИВЕРСИТЕТА

Научный журнал «Вестник Московского государственного областного университета» основан в 1998 г. Выпускается десять серий журнала: «История и политические науки», «Экономика», «Юриспруденция», «Философские науки», «Естественные науки», «Русская филология», «Физика-математика», «Лингвистика», «Психологические науки», «Педагогика». Все серии включены в составленный Высшей аттестационной комиссией Перечень ведущих рецензируемых научных журналов, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертации на соискание ученой степени доктора и кандидата наук по наукам, соответствующим названию серии. Журнал включен в базу данных Российского индекса научного цитирования (РИНЦ).

Печатная версия журнала зарегистрирована в Федеральной службе по надзору за соблюдением законодательства в сфере массовых коммуникаций и охране культурного наследия. Полнотекстовая версия журнала доступна в Интернете на платформе Научной электронной библиотеки (www.elibrary.ru), а также на сайте журнала www.vestnik-mgou.ru.

ВЕСТНИК
МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ОБЛАСТНОГО УНИВЕРСИТЕТА

СЕРИЯ: ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА
2017. N 3

Над номером работали:

Литературный редактор Д.Д. Дрошнев
Переводчик И.А. Улиткин
Корректор Д.Д. Дрошнев
Компьютерная верстка Н.Н. Жильцов

Отдел по изданию научного журнала
«Вестник Московского государственного областного университета»
Информационно-издательского управления МГОУ
105005, г. Москва, ул. Радио, д. 10А, офис 98
тел. (495) 723-56-31; (495) 780-09-42 (доб. 6101)
e-mail: vest_mgou@mail.ru
сайт: www.vestnik-mgou.ru

Формат 70x108/16. Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура «Minion Pro».
Тираж 500 экз. Уч.-изд. л. 6,8, усл. п. л. 7,75.
Подписано в печать: 31.10.2017. Дата выхода в свет: 30.11.2017. Заказ № 2017/10-09.
Отпечатано в ИИУ МГОУ
105005, г. Москва, ул. Радио, 10А