

ISSN 2072-8387 (print)
ISSN 2310-7251 (online)



Вестник

МОСКОВСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
ОБЛАСТНОГО
УНИВЕРСИТЕТА

Серия

ФИЗИКА-
МАТЕМАТИКА

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ
ВТОРОЙ ЗАДАЧИ СТОКСА ДЛЯ БОЗЕ-ГАЗОВ

О ЯВЛЕНИИ РЕКОННЕКЦИИ В НИЖНИХ СЛОЯХ
МАГНИТНОЙ ТРУБКИ. ЭКСПЕРИМЕНТ

ВЛИЯНИЕ СОСТАВА НА СЕГМЕНТНУЮ ОПТИЧЕСКУЮ
АНИЗОТРОПИЮ СОПОЛИМЕРОВ



2017/ № 1

ВЕСТНИК
МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
ОБЛАСТНОГО УНИВЕРСИТЕТА

ISSN 2072-8387 (print)

2017 / № 1

ISSN 2310-7251 (online)

серия

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА

Научный журнал основан в 1998 г.

Журнал «Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика» включён в «Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук» Высшей аттестационной комиссии при Министерстве образования и науки Российской Федерации (См.: Список журналов на сайте ВАК при Минобрнауки России) по наукам: Математика (01.01.00); Физика (01.04.00); Педагогические науки (13.00.00).

The academic journal is established in 1998

«Bulletin of Moscow State Regional University. Series: Physics and Mathematics» is included by the Supreme Certifying Commission of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation into "the List of leading reviewed academic journals and periodicals recommended for publishing in corresponding series basic research thesis results for a Ph.D. Candidate or Doctorate Degree" (See: the online List of journals at the site of the Supreme Certifying Commission of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation) in Physics and Mathematics: Mathematics (01.01.00); Physics (01.04.00); Pedagogics (13.00.00).

ISSN 2072-8387 (print)

2017 / № 1

ISSN 2310-7251 (online)

series

PHYSICS AND MATHEMATICS

BULLETIN OF THE MOSCOW STATE
REGIONAL UNIVERSITY

Учредитель журнала «Вестник Московского государственного областного университета»:

Государственное образовательное учреждение высшего образования Московской области

Московский государственный областной университет

Выходит 4 раза в год

Редакционно-издательский совет «Вестника Московского государственного областного университета»

Хроменков П.Н. — к.филол.н., проф., ректор МГОУ (председатель совета)

Ефремова Е.С. — к.филол.н., и.о. проректора по научной работе МГОУ (зам. председателя);

Клычников В.М. — к.ю.н., к.и.н., проф., проректор по учебной работе и международному сотрудничеству МГОУ (зам. председателя)

Антонова Л.Н. — д.пед.н., проф., академик РАО, Комитет Совета Федерации по науке, образованию и культуре

Асмолов А.Г. — д.псх.н., проф., академик РАО, директор Федерального института развития образования

Климов С.Н. — д.ф.н., проф., Московский государственный университет путей сообщения (МИИТ)

Клобуков Е.В. — д.филол.н., проф., Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Манойло А.В. — д.пол.н., проф., МГУ им. М.В. Ломоносова

Новоселов А.Л. — д.э.н., проф., Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова

Пасечник В.В. — д.пед.н., проф., МГОУ

Поляков Ю.М. — к.филол.н., главный редактор «Литературной газеты»

Рюмцев Е.И. — д.ф.-м.н., проф., Санкт-Петербургский государственный университет

Хухуни Г.Т. — д.филол.н., проф., МГОУ

Чистякова С.Н. — д.пед.н., проф., Российская академия образования (г. Москва)

Редакционная коллегия серии «Физика-Математика»

Ответственный редактор серии:

Бугаев А.С. — д.ф.-м.н., академик РАН, МФТИ

Заместитель ответственного редактора:

Жачкин В.А. — д.ф.-м.н., проф., МГОУ

Ответственный секретарь:

Васильчикова Е.Н. — к.ф.-м.н., доц., МГОУ

Члены редакционной коллегии:

Беляев В.В. — д.т.н., проф., МГОУ;

Богданов Д.Л. — д.ф.-м.н., проф., МГОУ;

Бугримов А.Л. — д.т.н., проф., МГОУ;

Латышев А.В. — д.ф.-м.н., проф., МГОУ;

Рассудовская М.М. — к.п.н., проф., МГОУ;

Осипов М.А. — д.ф.-м.н., проф., Университет Стратклайд (Великобритания);

Чигринов В.Г. — д.ф.-м.н., проф., Гонконгский университет науки и технологий (Китай)

ISSN 2072-8387 (print)

ISSN 2310-7251 (online)

Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. — 2017. — № 1. — 126 с.

Журнал «Вестник Московского государственного областного университета. Серия «Физика-Математика» зарегистрирован в Федеральной службе по надзору за соблюдением законодательства в сфере массовых коммуникаций и охране культурного наследия. Регистрационное свидетельство ПИ № ФС77-26136

**Индекс серии «Физика-Математика»
по Объединенному каталогу «Пресса России» 40723**

© МГОУ, 2017.

© ИИУ МГОУ, 2017.

**Адрес Отдела по изданию научного журнала
«Вестник Московского государственного
областного университета»**

г. Москва, ул. Радио, д.10А, офис 98

тел. (495) 723-56-31; (495) 780-09-42 (доб. 6101)

e-mail: vest_mgou@mail.ru; сайт: www.vestnik-mgou.ru

Журнал включен в базу данных Российского индекса научного цитирования (РИНЦ), имеет полнотекстовую сетевую версию в Интернете на платформе Научной электронной библиотеки (www.elibrary.ru), а также на сайте Московского государственного областного университета (www.vestnik-mgou.ru)

При цитировании ссылка на конкретную серию «Вестника Московского государственного областного университета» обязательна. Опубликованные в журнале материалы могут использоваться только в некоммерческих целях. Ответственность за содержание статей несут авторы. Мнение редколлегии серии может не совпадать с точкой зрения автора. Рукописи не возвращаются.

Founder of journal «Bulletin of the Moscow State Regional University»:
Moscow State Regional University

———— Issued 4 times a year ————

Series editorial board
«Physics and Mathematics»

Editor-in-chief:

A.S. Bugaev – Doctor of Physics and Mathematics, Academician of RAS, MIPT

Deputy editor-in-chief:

V.A. Zhachkin – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, MSRU

Executive secretary:

E.N. Vasilchikova – Ph.D. in Physics and Mathematics, Associate Professor, MSRU

Members of Editorial Board:

V.V. Belyaev – Doctor of Technical Sciences, Professor, MSRU

D.L. Bogdanov – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, MSRU

A.L. Bugrimov – Doctor of Technical Sciences, Professor, MSRU

A.V. Latyshev – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, MSRU

M.M. Rassudovskaya – Ph.D. in Pedagogical Sciences, Professor, MSRU

M.A. Osipov – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Strathclyde University (UK)

V.G. Chigrinov – University of Science and Technology (Hong Kong, China)

The journal is included into the database of the Russian Science Citation Index, has a full text network version on the Internet on the platform of Scientific Electronic Library (www.elibrary.ru), as well as at the site of the Moscow State Regional University (www.vestnik-mgou.ru)

At citing the reference to a particular series of «Bulletin of the Moscow State Regional University» is obligatory. The materials published in the journal are for non-commercial use only. The authors bear all responsibility for the content of their papers. The opinion of the Editorial Board of the series does not necessarily coincide with that of the author. Manuscripts are not returned.

The Editorial Board address:
Moscow State Regional University

10A Radio st., office 98, Moscow, Russia

Phones: (495) 723-56-31; (495) 780-09-42 (add. 6101)

e-mail: vest_mgou@mail.ru; site: www.vestnik-mgou.ru

Publishing council «Bulletin of the
Moscow State Regional University»

P.N. Khromenkov – Ph. D. in Philology, Professor, Principal of MSRU (Chairman of the Council)

E.S. Yefremova – Ph. D. in Philology, Acting Vice-Principal for scientific work of MSRU (Vice-Chairman of the Council)

V.M. Klychnikov – Ph.D. in Law, Ph. D. in History, Professor, Vice-Principal for academic work and international cooperation of MSRU (Vice-Chairman of the Council)

L.N. Antonova – Doctor of Pedagogics, Professor, Member of the Russian Academy of Education, The Council of the Federation Committee on Science, Education and Culture

A.G. Asmolov – Doctor of Psychology, Professor, Member of the Russian Academy of Education, Principal of the Federal Institute of Development of Education

S.N. Klimov – Doctor of Philosophy, Professor, Moscow State University of Railway Engineering

E.V. Klobukov – Doctor of Philology, Professor, Lomonosov Moscow State University

A.V. Manoylo – Doctor of Political Science, Professor, Lomonosov Moscow State University

A.L. Novosjolov – Doctor of Economics, Professor, Plekhanov Russian University of Economics

V.V. Pasechnik – Doctor of Pedagogics, Professor, MSRU

Yu. M. Polyakov – Ph.D. in Philology, Editor-in-chief of “Literaturnaya Gazeta”

E.I. Rjuntsev – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Saint Petersburg State University

G. T. Khukhuni – Doctor of Philology, Professor, MSRU

S.N. Chistyakova – Doctor of Pedagogics, Professor, the Russian Academy of Education

ISSN 2072-8387 (print)

ISSN 2310-7251 (online)

Bulletin of the Moscow State Regional University. Series: Physics and Mathematics. – 2017. – № 1. – 126 p.

The series «Physics and Mathematics» of the Bulletin of the Moscow State Regional University is registered in Federal service on supervision of legislation observance in sphere of mass communications and cultural heritage protection. The registration certificate ПИ № 07С77-26136

Index of the series «Physics and Mathematics» according to the union catalog «Press of Russia» 40723

© MSRU, 2017.

© Information & Publishing department of MSRU, 2017.

СОДЕРЖАНИЕ

РАЗДЕЛ I. МАТЕМАТИКА

Сучков М.В., Трифоненков В.П. О ПРИНЦИПЕ ЛОКАЛИЗАЦИИ
ДЛЯ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА С РАЗРЫВНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ
В ОБЛАСТЯХ, НЕ СОДЕРЖАЩИХ ТОЧЕК РАЗРЫВА8

Шабанова Г. И. СВОЙСТВА СПЕКТРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ ОПЕРАТОРА
ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ18

Бедрикова Е.А., Латышев А.В. СУЩЕСТВОВАНИЕ
И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ВТОРОЙ ЗАДАЧИ СТОКСА
ДЛЯ БОЗЕ–ГАЗОВ28

Латышев А.В., Сулейманова С. КРАЕВАЯ ЗАДАЧА РИМАНА
В ПРОБЛЕМЕ О КОЛЕБАНИЯХ ПЛАЗМЫ С РАВНОВЕСНЫМ
РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ФЕРМИ-ДИРАКА40

Андроникова Е.О. О ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ
ВСЕЛЕННОЙ ГЁДЕЛЯ51

Макарова А.В., Демчук А.А., Новикова С.С. О НЕКОТОРЫХ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЯХ, СВОДЯЩИХСЯ
К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ С ТЕКУЩИМИ
СКОРОСТЯМИ57

РАЗДЕЛ II. ФИЗИКА

Бегларян М.Е. О ЯВЛЕНИИ РЕКОННЕКЦИИ В НИЖНИХ СЛОЯХ
МАГНИТНОЙ ТРУБКИ. ЭКСПЕРИМЕНТ66

Терезанова К.В. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ КЮРИ
ДЛЯ ФЕРРОМАГНИТНОГО СПЛАВА С СОДЕРЖАНИЕМ Fe-B-Cr73

Горелик В.С., Яшин М.М. СПЕКТРОСКОПИЯ СТОП-ЗОН
ОДНОМЕРНОГО ФОТОННОГО КРИСТАЛЛА НА ОСНОВЕ ОКСИДА
АЛЮМИНИЯ.81

Дадиванян А.К., Соколов А.А., Васильчикова Е.Н., Богданов Д.Л.
ВЛИЯНИЕ СОСТАВА НА СЕГМЕНТНУЮ ОПТИЧЕСКУЮ
АНИЗОТРОПИЮ СОПОЛИМЕРОВ90

РАЗДЕЛ III. ТЕОРИЯ И МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ И ВОСПИТАНИЯ

Власова Е.А., Попов В.С. ИННОВАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ
И ТЕХНОЛОГИИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ В ТЕХНИЧЕСКОМ
ВУЗЕ100

Хасанов А.С. ОБ ОСОБЕННОСТЯХ АЛГОРИТМОВ РЕШЕНИЯ
ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ
С НЕОГРАНИЧЕННЫМИ ОБЛАСТЯМИ ДОПУСТИМЫХ
РЕШЕНИЙ113

ПАМЯТИ АНАТОЛИЯ ВАСИЛЬЕВИЧА ЛАТЫШЕВА124

CONTENTS

SECTION I. MATHEMATICS

M. Suchkov, V. Trifonenkov. ON THE LOCALIZATION PRINCIPLE
FOR THE LAPLACE OPERATOR WITH A DISCONTINUOUS
COEFFICIENT IN DOMAINS WITHOUT DISCONTINUITY POINTS8

G. Schabanowa. SOME PROPERTIES OF THE SPECTRAL FUNCTION
OF STURM – LIOUVILLE OPERATOR18

E. Bedrikova, A. Latyshev. EXISTENCE AND UNIQUENESS
OF THE SOLUTION TO THE SECOND STOKES PROBLEM FOR BOSE
GASES.28

A. Latyshev, S. Suleymanova. THE BOUNDARY VALUE RIEMANN
PROBLEM IN THE PROBLEM ABOUT OSCILLATIONS OF A PLASMA
WITH THE EQUILIBRIUM FERMI-DIRAC DISTRIBUTION.....40

E. Andronikova. ON GEOMETRIC PROPERTIES OF GODEL
UNIVERSE.....51

A. Makarova, A. Demchuk, S. Novikova. ON SOME DIFFERENTIAL INCLUSIONS,
WHICH REDUCE TO DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH THE CURRENT
VELOCITIES.....57

SECTION II. PHYSICS

M. Beglaryan. ABOUT THE RECONNECTION PHENOMENON
IN THE LOWER LAYERS OF A MAGNETIC TUBE. EXPERIMENT66

K. Terezanova. DETERMINATION OF THE CURIE TEMPERATURE
FOR THE FERROMAGNETIC ALLOY WITH Fe-B-Cr73

V. Gorelik, M. Yashin. SPECTROSCOPY OF STOP-BANDS
OF ONE-DIMENSION PHOTONIC CRYSTALS – POROUS ALUMINIUM
OXIDE81

A. Dadivanyan, A. Sokolov, Ye. Vasil'chikova, D. Bogdanov.
EFFECT OF COMPOSITION ON SEGMENTAL OPTICAL ANISOTROPY
OF COPOLYMERS90

SECTION III. THEORY AND METHODS TRAINING AND EDUCATION

E. Vlasova, V. Popov. INNOVATIVE METHODS AND TECHNOLOGIES
OF TEACHING MATHEMATICS IN TECHNICAL UNIVERSITY.....100

A. Khasanov. PECULIARITIES OF ALGORITHMS FOR SOLVING
LINEAR PROGRAMMING PROBLEMS WITH UNBOUNDED FEASIBLE
REGIONS113

IN MEMORY OF ANATOLY VASILIEVICH LATYSHEV124

РАЗДЕЛ I. МАТЕМАТИКА

УДК 517.927.25

DOI: 10.18384/2310-7251-2017-1-8-17

О ПРИНЦИПЕ ЛОКАЛИЗАЦИИ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА С РАЗРЫВНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ В ОБЛАСТЯХ, НЕ СОДЕРЖАЩИХ ТОЧЕК РАЗРЫВА

Сучков М.В., Трифоненков В.П.

Научно-исследовательский ядерный университет «МИФИ»

115409, Москва, Каширское шоссе, д. 31, Российская Федерация

Аннотация. В статье показывается, что для оператора Лапласа с разрывным коэффициентом для произвольных областей размерности $N = 2$ или $N = 3$ наличие разрыва не оказывает влияния на выполнение принципа локализации в областях, не содержащих точек разрыва. Если же $N \geq 5$, то даже наличие бесконечной гладкости разлагаемой функции не обеспечивает выполнения принципа локализации в точках, «далёких» от поверхности разрыва коэффициента.

Ключевые слова: оператор Лапласа с разрывным коэффициентом, принцип локализации, спектральное разложение функции.

ON THE LOCALIZATION PRINCIPLE FOR THE LAPLACE OPERATOR WITH A DISCONTINUOUS COEFFICIENT IN DOMAINS WITHOUT DISCONTINUITY POINTS

M. Suchkov, V. Trifonenkov

National Research Nuclear University MEPhI

Kashirskoe sh. 31, 115409 Moscow, Russian Federation

Abstract. This paper studies the Laplace operator with the discontinuous coefficient. We prove that for the case of arbitrary domains of dimension $N = 2$ or $N = 3$, the localization principle in domains without discontinuity points is preserved despite the discontinuity of the coefficient. If $N \geq 5$, then the localization principle is violated in points located "far" from the surface of the discontinuity of the coefficient, even in case of infinite smoothness of the decomposed function.

© Сучков М.В., Трифоненков В.П., 2017.

Keywords: Laplace operator with a discontinuous coefficient, localization principle, spectral decomposition of the function.

Хорошо известно, что в одномерном случае для любой интегрируемой функции $f(x)$ сходимость ряда Фурье этой функции в данной точке зависит лишь от поведения функции в достаточно малой окрестности этой точки. Это и называется принципом локализации. Для кратных тригонометрических рядов Фурье и разложений по собственным функциям самосопряжённых эллиптических операторов с гладкими коэффициентами для выполнения принципа локализации уже недостаточно гладкости разлагаемой функции в малой окрестности рассматриваемой точки. Нужна определённая гладкость функции, зависящая от размерности области, в точках, «далёких» от рассматриваемой [3]. Если же изучать спектральные разложения, отвечающие самосопряженным эллиптическим операторам с разрывными коэффициентами, то оказывается, что в условиях, при которых справедлив принцип локализации в областях, не содержащих точек разрыва, размерность рассматриваемой области играет более существенную роль. Этот эффект и обсуждается в данной статье.

Пусть N -мерная область g с границей Γ разбивается некоторой лежащей внутри неё замкнутой поверхностью C на две подобласти g_1 , лежащую внутри C , и g_2 . Рассмотрим в $(g + \Gamma)$ следующую задачу на собственные функции:

$$k_1 \Delta u + \lambda u = 0; x \in g_1$$

$$k_2 \Delta u + \lambda u = 0; x \in g_2 \quad (1)$$

$$u|_{C-0} = u|_{C+0}; k_1 \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{C-0} = k_2 \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{C+0}; u|_{\Gamma} = 0,$$

где k_1 и k_2 – положительные постоянные. Символы $C-0$ и $C+0$ означают предельные значения соответственно с внутренней и внешней стороны поверхности C по отношению к области g_1 ; $C, \Gamma \in C^{2,\alpha} (\alpha > 0)$.

Определение. Классической собственной функцией задачи (1) называется функция $u(x)$

1) $u(x) \not\equiv 0$; 2) $u(x) \in C^1(g_1 + C) \wedge C^2(g_1)$; 3) $u(x) \in C^1(g_2 + C + \Gamma) \wedge C^2(g_2)$; 4) $u(x) \in C(g + \Gamma)$; 5) $u(x)$ при некотором λ удовлетворяет всем условиям задачи (1).

Из работы [1] известно, что задача (1) имеет дискретный спектр, состоящий из положительных собственных значений λ_n (с единственной бесконечно удалённой предельной точкой), которым соответствует полная ортонормированная система в $L_2(g)$ собственных функций $u_n(x)$. Причём эта система совпадает с системой обобщённых собственных функций задачи (1) (в обычном смысле удовлетворяющих некоторому интегральному тождеству). Покажем, что если размерность N области g равна 2 или 3, то разрыв коэффициента не оказывает никакого влияния на выполнение принципа локализации, то есть условия на разлагаемую функцию будут такими же, как и для обычного оператора Лапласа с

задачей Дирихле. Для доказательства этого факта будем следовать терминологии В.А.Ильина. Пусть Ω – строго внутренняя подобласть областей g_1 или g_2 . Будем называть ФСФ (фундаментальной системой функций) оператора $k_1\Delta u(k_2\Delta u)$ относительно Ω полную ортонормированную в $L_2(g)$ систему функций, удовлетворяющих уравнению $k_1\Delta u + \lambda u = 0$ ($k_2\Delta u + \lambda u = 0$) в Ω .

Сформулируем теорему В.А. Ильина о сходимости спектральных разложений по указанной ФСФ.

Теорема (В.А.Ильин). Пусть $f(x) \in W_2^{\frac{N-1}{2}}(g)$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{\frac{N-1}{2}} f_n^2 < \infty$. Здесь f_n –

коэффициент Фурье функции $f(x)$ по ФСФ оператора $k_1\Delta u(k_2\Delta u)$ относительно Ω , λ_n – собственные значения задачи (1). Тогда в области Ω справедлив принцип локализации (то есть, если $f(x)$ обращается в нуль в области Ω , то ее ряд Фурье по рассматриваемой ФСФ равномерно стремится к нулю в любой строго внутренней подобласти области Ω).

Будем теперь в качестве ФСФ рассматривать нашу систему классических собственных функций задачи (1). Опираясь на сформулированную теорему В.А. Ильина, установим следующее утверждение.

Теорема. Пусть $f(x) \in \overset{\circ}{W}_2^1(g)$ $N=3$; $f(x) \in \tilde{W}_2^{\frac{1}{2}}(g)$ $N=2$; $(\tilde{W}_2^{\frac{1}{2}}(g))$ – класс функций из $W_2^{\frac{1}{2}}(R_2)$ с носителем в $(g + \Gamma)$. Тогда в области Ω справедлив принцип локализации для ФСФ задачи (1).

Доказательство.

Используя теорему В.А. Ильина, достаточно для $N=3$ установить оценку $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2 \lambda_n \leq C \cdot \|f\|_{W_2^1}^2$; $C > 0$ – константа. Так как ФСФ задачи (1) совпадает с системой обобщённых собственных функций задачи (1), то для этой системы такая классическая оценка хорошо известна [4]. Для $N=2$ оценка $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2 \lambda_n^{\frac{1}{2}} < \infty$ получается с помощью теоремы Лионса об интерполяции (одна пара пространств в этой теореме – это пространства функций, для которых сходятся ряды $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2 \lambda_n$ и, соответственно, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2$, а другая пара пространств – это пространства $\overset{\circ}{W}_2^1(g)$ и $L_2(g)$).

Таким образом, при $N=2,3$ условия, при которых выполнен принцип локализации для системы собственных функций задачи (1), в областях, не содержащих точек поверхности разрыва коэффициента, остаются точно такими же, как и для обычного оператора Лапласа (задача Дирихле). Причём эти условия неумлучшаемы в классах Соболева дробного порядка [2].

Покажем теперь, что при $N \geq 5$ даже бесконечная гладкость в области g и финитность функции $f(x)$ относительно g не гарантируют выполнения принципа локализации в областях, «далёких» от поверхности разрыва коэффициента. Приведём пример функции, сколь угодно гладкой в области g и финитной относительно этой области, обращающейся в нуль в некоторой подобласти $\Omega \subset g_1$, ряд Фурье по собственным функциям задачи (1) которой расходится в некоторой точке Ω .

Возьмём в качестве областей g_1 и g концентрические шары радиусов r_0 и R , соответственно, с центром в начале координат. Пусть C – сфера радиуса r_0 ; Γ – сфера с радиусом R . Тогда задача на собственные функции (1) переходит в задачу (2):

$$\begin{aligned} k_1 \Delta u + \lambda u &= 0 & 0 \leq r < r_0 \\ k_2 \Delta u + \lambda u &= 0 & r_0 < r < R \end{aligned} \quad (2)$$

$$u|_{C-0} = u|_{C+0}; k_1 \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{C-0} = k_2 \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{C+0}; u|_{\Gamma} = 0.$$

Перейдём к сферическим координатам и будем искать решение задачи (2) в виде: $u(r, \theta) = e(r) \cdot \varphi(\theta)$. Для собственных функций $e(r)$, обладающих сферической симметрией и зависящих только от радиуса r , получим следующую задачу:

$$\begin{aligned} e''(r) + \frac{N-1}{r} \cdot e'(r) + \frac{\lambda}{k_1} e(r) &= 0; 0 < r < r_0 \\ e''(r) + \frac{N-1}{r} \cdot e'(r) + \frac{\lambda}{k_2} e(r) &= 0; r_0 < r < R \end{aligned} \quad (3)$$

$$e|_{r_0-0} = e|_{r_0+0}; k_1 \frac{de}{dr} \Big|_{r_0-0} = k_2 \frac{de}{dr} \Big|_{r_0+0}; |e(r)| < \infty; 0 \leq r \leq R; e(R) = 0.$$

Покажем, что собственные функции задачи (3) образуют полную ортонормированную систему в пространстве с весом $L_2(0, R; r^{N-1})$. Обозначим через

$L_N e = -[r^{N-1} e']'$. Рассмотрим уравнение

$$L_N \omega = \tilde{g}, \quad (4)$$

$$\text{где } \tilde{g} = \begin{cases} \frac{g(r)}{k_1}; 0 \leq r < r_0; \\ \frac{g(r)}{k_2}; r_0 < r < R; \end{cases} \quad g(r) \in C[0, R]; |g(r)| r^{1-N} < \infty (0 \leq r \leq R).$$

Будем называть $\omega(r)$ решением уравнения (4), если

$$L_N \omega = \tilde{g}(r) (0 < r < r_0); (r_0 < r < R) \quad (5)$$

$$\omega|_{r_0-0} = \omega|_{r_0+0}; k_1 \frac{d\omega}{dr} \Big|_{r_0-0} = k_2 \frac{d\omega}{dr} \Big|_{r_0+0}; |\omega(r)| < \infty \text{ при } 0 \leq r \leq R; \omega(R) = 0.$$

Если в качестве $\tilde{g}(r)$ можно взять $\lambda \tilde{\omega}(r)$, то $\omega(r)$ будем называть собственной функцией задачи (5), а λ – соответствующим собственным значением. Причем, $\lambda = 0$ не является собственным значением задачи (5), ибо тогда $\lambda = 0$ было бы собственным значением задачи (3) и задачи (2), чего быть не может (задача Дирихле). Поэтому решение задачи (5) можно записать через функцию Грина $G(x, y)$ в виде:

$$\omega(y) = \int_0^R G(x, y) \tilde{g}(x) dx, \quad (6)$$

где $G(x, y)$ имеет вид:

$$\begin{aligned} & C_1 + C_2 y^{2-N} - (0 < x \leq y \leq r_0); C_1 + C_2 x^{2-N} - (0 < y \leq x \leq r_0); \\ & C_3 + C_4 y^{2-N} - [(r_0 \leq x \leq y \leq R) \cup (r_0 \leq y \leq R; x \leq r_0)]; \\ & C_3 + C_4 x^{2-N} - [(r_0 \leq y \leq x \leq R) \cup (r_0 \leq x \leq R; y \leq r_0)], \end{aligned}$$

$$\text{где } C_1 = \frac{1}{(N-1)k_1} \cdot \frac{(k_1 - k_2) - r_0^{N-2} \cdot k_1 R^{2-N}}{k_2 r_0^{N-2}},$$

$$C_2 = \frac{1}{(N-1)k_1}; C_3 = -R^{2-N}C_4; C_4 = \frac{1}{(N-1)k_2}.$$

Значения констант C_i получаются из подстановки вида решения (6) в (5). Таким образом, задача (3) эквивалентна интегральному уравнению

$$e(r) = \lambda \int_0^R x^{N-1} G(x, y) e(x) dx. \quad (7)$$

Сделаем замену $v(r) = r^{\frac{N-1}{2}} e(r)$. Тогда уравнение (7) примет вид:

$$v(r) = \lambda \int_0^R r^{\frac{N-1}{2}} x^{\frac{N-1}{2}} G(x, y) v(x) dx.$$

Ядро этого уравнения $r^{\frac{N-1}{2}} x^{\frac{N-1}{2}} G(x, r)$ симметрично и непрерывно в квадрате $[0, R] \times [0, R]$, поэтому к уравнению (7) применима теория Гильберта-Шмидта, из которой и вытекает полнота собственных функций задачи (3) в пространстве с весом $L_2(0, R; r^{N-1})$ и её ортогональность. Выпишем явный вид собственных функций задачи (3) [5, с. 332–333].

$$e_n(r) = \begin{cases} \frac{C_{1n} J_{\frac{N-2}{2}}(\sqrt{\lambda_n / k_1} \cdot r)}{r^{\frac{N-2}{2}}}; & 0 \leq r \leq r_0 \\ \frac{C_{2n} J_{\frac{N-2}{2}}(\sqrt{\lambda_n / k_2} \cdot r) + C_{3n} Y_{\frac{N-2}{2}}(\sqrt{\lambda_n / k_2} \cdot r)}{r^{\frac{N-2}{2}}}; & r_0 < r \leq R \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots$$

Здесь λ_n – последовательность собственных значений, отвечающих собственным функциям $e_n(r)$, обладающим сферической симметрией и зависящим только от радиуса, $J_{\frac{N-2}{2}}(\sqrt{\lambda_n / k_1} \cdot r)$ – функция Бесселя, $Y_{\frac{N-2}{2}}(\sqrt{\lambda_n / k_2} \cdot r)$ – функция Неймана, C_{1n} , C_{2n} , C_{3n} – константы.

Введём следующие обозначения: $\alpha_n = \sqrt{\lambda_n / k_1}$; $\beta_n = \sqrt{\lambda_n / k_2}$; W_{NR} – площадь поверхности N -мерной сферы радиуса R . Тогда граничные условия, условия сопряжения задачи (3) и нормировка собственных функций в шаре g дают четыре уравнения для определения C_{1n} , C_{2n} , C_{3n} , λ_n .

$$1) \quad C_{2n} J_{\frac{N-2}{2}}(\beta_n R) + C_{3n} Y_{\frac{N-2}{2}}(\beta_n R) = 0;$$

$$2) \quad C_{1n} J_{\frac{N-2}{2}}(\alpha_n r_0) = C_{2n} J_{\frac{N-2}{2}}(\beta_n r_0) + C_{3n} Y_{\frac{N-2}{2}}(\beta_n r_0);$$

$$3) \quad C_{1n} \sqrt{k_1} J_{\frac{N}{2}}(\alpha_n r_0) = \sqrt{k_2} [C_{2n} J_{\frac{N}{2}}(\beta_n r_0) + C_{3n} Y_{\frac{N}{2}}(\beta_n r_0)];$$

$$4) \quad \frac{r_0^2}{2} [C_{1n} J'_{\frac{N-2}{2}}(\alpha_n r_0)]^2 - \frac{r_0^2}{2} \left[\frac{(N-2)(k_2 - k_1)}{2\sqrt{\lambda_n} \sqrt{k_2} \cdot r_0} C_{1n} J_{\frac{N-2}{2}}(\alpha_n r_0) + \right. \\ \left. + C_{1n} \sqrt{\frac{k_1}{k_2}} J'_{\frac{N-2}{2}}(\alpha_n r_0) \right]^2 + \left(\frac{N-2}{2} \right)^2 \frac{C_{1n}^2}{2\lambda_n} [J_{\frac{N-2}{2}}(\alpha_n r_0)]^2 (k_2 - k_1) + \\ + \frac{R^2}{2} [C_{2n} J_{\frac{N}{2}}(\beta_n R) + C_{3n} Y_{\frac{N}{2}}(\beta_n R)]^2 = \frac{1}{W_{NR}}.$$

Пользуясь уравнениями (1)–(4) и асимптотикой цилиндрических функций, можно показать, что для достаточно больших номеров n справедливы оценки

$$S_1 n^2 \leq \lambda_n \leq S_2 n^2;$$

$$T_1 \lambda_n^{1/4} \leq |C_{1n}| \leq T_2 \lambda_n^{1/4}; \quad (8)$$

$$|C_{2n}|, |C_{3n}| \leq T_3 \lambda_n^{1/4};$$

где T_1 , T_2 , T_3 , S_1 , S_2 – положительные константы.

В частности, уравнение для определения собственных значений λ_n будет иметь вид:

$$\sqrt{\lambda_n} \left(\frac{R - r_0}{\sqrt{k_2}} + \frac{r_0}{\sqrt{k_1}} \right) = \left(\frac{N+1}{4} \right) \pi + (-1)^n.$$

$$\cdot \arcsin \left[\frac{\sqrt{k_1} - \sqrt{k_2}}{\sqrt{k_1}} \cdot \sin \left(\alpha_n r_0 - \left(\frac{N+1}{4} \right) \pi \right) \cos(\beta_n(r_0 - R)) + \underline{O} \left(\frac{1}{\lambda_n^{1/2}} \right) \right] + \pi n \quad (9)$$

Предположим, что $\frac{R-r_0}{\sqrt{k_2}} = \frac{r_0}{\sqrt{k_1}}$. Тогда из (9) будет следовать, что:

$$\alpha_n r_0 = \left(\frac{N+1}{8} \right) \pi + \frac{\pi n}{2} (1 + \bar{o}(1)) \quad (10)$$

Перейдём теперь к конструкции примера функции, упомянутой в начале этой статьи. Будем использовать схему, предложенную в работе [2, с. 168]. Пусть s – произвольное достаточно большое натуральное число. Рассмотрим функцию $f(r)$ специального вида, зависящую только от радиуса r ,

$$f(r) = \begin{cases} 0; & 0 \leq r \leq R_1 < r_0; \quad R_1 > 0 \\ a_0 + a_1 r^2 + \dots + a_{4s+3} r^{8s+6}; & R_1 \leq r \leq R_2; \quad r_0 < R_2 < R; \\ 0; & R_2 \leq r \leq R; \end{cases}$$

Постоянные a_i $i = 0, 1, \dots, 4s+3$; выберем так, чтобы: $f(r) \in C^{2s}[0, R]$; $f'_r(r_0) \neq 0$. Возможность выбора таких постоянных a_i доказывается так же, как и в работе [2, с. 168]. Пусть Γ_i – сфера радиуса R_i ; $i = 1, 2$; C – сфера радиуса r_0 ; Ω_i – шаровой слой с границами C и Γ_i ; $i = 1, 2$.

$$T_n(r) = \frac{C_{1n} J_{\frac{N-2}{2}}(\alpha_n r)}{r^{\frac{N-2}{2}}}; \quad 0 \leq r \leq r_0;$$

Обозначим:

$$Q_n(r) = \frac{C_{2n} J_{\frac{N-2}{2}}(\beta_n r)}{r^{\frac{N-2}{2}}} + \frac{C_{3n} Y_{\frac{N-2}{2}}(\beta_n r)}{r^{\frac{N-2}{2}}}; \quad r_0 < r \leq R; \quad n = 1, 2, \dots$$

Тогда собственные функции задачи (3) $e_n(r)$ будут иметь вид:

$$e_n(r) = \begin{cases} T_n(r); & 0 \leq r \leq r_0; \\ Q_n(r); & r_0 < r \leq R. \end{cases}$$

Подсчитаем коэффициенты Фурье функции $f(r)$ по собственным функциям $e_n(r)$. Применим вторую формулу Грина по областям Ω_1 и Ω_2 s раз (используя то, что $k_1 \Delta T_n(r) + \lambda_n T_n(r) = 0$; $0 < r < r_0$, $k_2 \Delta Q_n(r) + \lambda_n Q_n(r) = 0$; $r_0 < r < R$, и поэтому функции $T_n(r)$ и $Q_n(r)$ можно выразить через оператор Лапласа).

Тогда:

$$-f_n = \left[\frac{k_1^s}{\lambda_n^s} \int_{\Omega_1} (\Delta^s f) T_n d\Omega_1 + \frac{k_2^s}{\lambda_n^s} \int_{\Omega_2} (\Delta^s f) Q_n d\Omega_2 \right] (-1)^{s+1} +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=1}^s \left\{ (-1)^{i-1} \left[\frac{(k_2^i - k_1^i)}{\lambda_n^i} \int_C \frac{\partial}{\partial n} (\Delta^{i-1} f) T_n dC - \right. \right. \\
& - \frac{1}{\lambda_n^i} \int_C (\Delta^{i-1} f) \left(k_2^i \frac{\partial Q_n}{\partial n} - k_1^i \frac{\partial T_n}{\partial n} \right) dC + \frac{k_2^i}{\lambda_n^i} \int_{\Gamma_2} \left((\Delta^{i-1} f) \frac{\partial Q_n}{\partial n} - Q_n \frac{\partial (\Delta^{i-1} f)}{\partial n} \right) d\Gamma_2 - \\
& \left. \left. - \frac{k_2^i}{\lambda_n^i} \int_{\Gamma_1} \left(\Delta^{i-1} f \cdot \frac{\partial T_n}{\partial n} - T_n \frac{\partial (\Delta^{i-1} f)}{\partial n} \right) d\Gamma_1 \right] \right\} \quad (11)
\end{aligned}$$

Учтём, что: $\frac{\partial}{\partial n} = \frac{d}{dr}$; все подынтегральные функции зависят только от радиу-

са: $f|_{\Gamma_1} = \frac{df}{dr} \Big|_{\Gamma_1} = \dots = \frac{d^{2s} f}{dr^{2s}} \Big|_{\Gamma_1} = 0$; $f|_{\Gamma_2} = \frac{df}{dr} \Big|_{\Gamma_2} = \dots = \frac{d^{2s} f}{dr^{2s}} \Big|_{\Gamma_2} = 0$. Кроме того, учтём

условия сопряжения для функций $T_n(r)$ и $Q_n(r)$ на поверхности C , а также оценки (8). Тогда главный вклад, то есть член, медленнее всего стремящийся к нулю, даёт первое слагаемое в сумме (11) при $i = 1$. То есть:

$$f_n = \frac{(k_1 - k_2)}{\lambda_n} C_{1n} \frac{J_{\frac{N-2}{2}}(\alpha_n r_0)}{r_0^{\frac{N-2}{2}}} f_r'(r_0) \omega_{N_0} + O\left(\frac{1}{\lambda_n^{\frac{3}{2}}}\right).$$

Тогда общий член ряда Фурье в точке $r=0$, используя асимптотику функции Бесселя, приводится к виду:

$$\begin{aligned}
f_n e_n(0) = f_n T_n(0) &= \frac{M \cdot C_{1n}^2 (k_2 - k_1)}{\lambda_n^{\frac{5}{4}}} \cdot \lambda_n^{\frac{N-2}{4}} \cdot \sin\left(\alpha_n r_0 - \left(\frac{N+1}{4}\right)\pi\right) + \\
&+ \lambda_n^{\frac{N-2}{4}} \cdot O\left(\frac{1}{\lambda_n^{\frac{5}{4}}}\right) = M(k_2 - k_1) C_{1n}^2 \lambda_n^{\frac{N-7}{4}} \cdot \sin\left(\alpha_n r_0 - \left(\frac{N+1}{4}\right)\pi\right) + O\left(\lambda_n^{\frac{N-7}{4}}\right);
\end{aligned}$$

$M = \text{const.}$

В силу оценок (8) $T_1 \lambda_n^{\frac{1}{4}} \leq |C_{1n}| \leq T_2 \lambda_n^{\frac{1}{4}}$, следовательно, $T_1^2 \lambda_n^{\frac{N-5}{4}} \leq C_{1n}^2 \lambda_n^{\frac{N-7}{4}} \leq T_2^2 \lambda_n^{\frac{N-5}{4}}$

для достаточно больших n .

Тогда при $N \geq 5$ из (12) вытекает, что для того, чтобы общий член ряда Фурье $f_n e_n(0)$ стремился к нулю при $n \rightarrow \infty$, необходимо, чтобы $\sin\left(\alpha_n r_0 - \left(\frac{N+1}{4}\right)\pi\right) \rightarrow 0$,

но в силу (10):

$$\alpha_n r_0 - \left(\frac{N+1}{4}\right)\pi = -\left(\frac{N+1}{8}\right)\pi + \frac{\pi n}{2} (1 + o(1)) \text{ и поэтому } \sin\left(\alpha_n r_0 - \left(\frac{N+1}{4}\right)\pi\right) \text{ не}$$

стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, что и завершает конструкцию примера.

Замечание 1. При $N = 4$ вопрос остаётся открытым. Можно лишь утверждать для построенного примера абсолютную расходимость ряда Фурье в точке $r = 0$.

Замечание 2. Результаты при $N = 2$; $N = 3$ можно перенести на более общие эллиптические самосопряжённые операторы с разрывными коэффициентами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильин В.А. О системе классических собственных функций линейного самосопряжённого эллиптического оператора с разрывными коэффициентами // Доклады АН СССР. 1961. Т. 137. № 2. С. 272–275.
2. Ильин В.А. О сходимости разложений по собственным функциям оператора Лапласа // Успехи математических наук. 1958. Т. 13. Выпуск 1 (79). С. 87–180.
3. Ильин В.А. Проблемы локализации и сходимости для рядов Фурье по фундаментальным системам функций оператора Лапласа // Успехи математических наук. 1968. Т. 23. № 2. С. 61–120.
4. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973. 576 с.
5. Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных. М.: Высшая школа, 1977. 423 с.
6. Солдатова М.А. О некоторых точных по порядку оценках для неортонормированной фундаментальной системы функций (в смысле В.А. Ильина) для оператора Лапласа // Дифференциальные уравнения. 2002. Т. 38. № 4. С. 516–520.
7. Сучков М.В. О некоторых свойствах спектральных разложений, отвечающих самосопряжённому эллиптическому оператору второго порядка с разрывными коэффициентами // Доклады АН СССР. 1980. Т. 251. № 6. С. 1314–1316.
8. Сучков М.В., Трифоненков В.П. Оценки собственных функций, отвечающих обыкновенному дифференциальному оператору четвёртого порядка, и их использование при проверке условия базисности В.А. Ильина в пространствах L_p // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2015. № 4. С. 36–43.

REFERENCES

1. Il'in V.A. About the system of the classical eigenfunctions of a linear self-adjoint elliptic operator with discontinuous coefficients. In: Doklady AN SSSR [Reports of the USSR Academy of Sciences]. 1961, vol. 137, no. 2, pp. 272–275.
2. Il'in V.A. On convergence of expansions in eigenfunctions of the Laplace operator. In: Uspekhi matematicheskikh nauk [Successes of mathematical Sciences]. 1958, vol. 13, Issue 1 (79), pp. 87–180.
3. Il'in V.A. Problems of localization and convergence for Fourier series in fundamental systems of functions of the Laplace operator. In: Uspekhi matematicheskikh nauk [Successes of mathematical Sciences]. 1968, vol. 23, no. 2, pp. 61–120.
4. Ladyzhenskaya O.A., Ural'tseva N.N. Lineinye i kvazilineinye uravneniya ellipticheskogo tipa [Linear and quasi-linear equations of elliptic type]. Moscow, Nauka Publ., 1973. 576 p.
5. Mikhlin S.G. Lineinye uravneniya v chastnykh proizvodnykh [Linear partial differential equations]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1977. 423 p.
6. Soldatova M.A. Some exact order estimates for nonorthonormal fundamental system of functions (in the sense of V.A. Ilyin) of the Laplace operator. In: Differentsial'nye uravneniya [Differential equations]. 2002, vol. 38, no. 4, pp. 516–520.
7. Suchkov M.V. On some properties of spectral decompositions, corresponding to self-adjoint elliptic operator of the second order with discontinuous coefficients. In: Doklady AN SSSR [Reports of the USSR Academy of Sciences]. 1980, vol. 251, no. 6, pp. 1314–1316.

8. Suchkov M.V., Trifonenkov V.P. Estimations of eigenfunctions of the ordinary fourth-order differential operator and their use in checking the condition of Il'in basis property in L_p spaces. In: Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika [Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and mathematics]. 2015, no. 4, pp. 36–43.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Сучков Михаил Вадимович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики научно-исследовательского ядерного университета «МИФИ»; e-mail: mv_suchkov@mail.ru

Трифонов Владимир Петрович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики научно-исследовательского ядерного университета «МИФИ»; e-mail: snuclear@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Mikhail Suchkov – candidate of physico-mathematical sciences, associate professor, associate professor of the Department of Higher Mathematics at the National Research Nuclear University MEPhI; e-mail: mv_suchkov@mail.ru

Vladimir Trifonenkov – candidate of physico-mathematical sciences, associate professor, associate professor of the Department of Higher Mathematics at the National Research Nuclear University MEPhI; e-mail: snuclear@mail.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Сучков М.В., Трифонов В.П. О принципе локализации для оператора Лапласа с разрывным коэффициентом в областях, не содержащих точек разрыва // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2017. № 1. С. 8–17.

DOI: 10.18384/2310-7251-2017-1-8-17.

THE CORRECT REFERENCE TO ARTICLE

M. Suchkov, V. Trifonenkov. On the localization principle for the Laplace operator with a discontinuous coefficient in domains without discontinuity points. In: *Bulletin of Moscow Region State University*. Series: Physics and Mathematics, 2017, no. 1, pp. 8–17.

DOI: 10.18384/2310-7251-2017-1-8-17.

УДК 517. 946

DOI: 10.18384/2310-7251-2017-1-18-27

СВОЙСТВА СПЕКТРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ ОПЕРАТОРА ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ

Шабанова Г. И.*Сибирская Государственная Автомобильно-Дорожная Академия (СибАДИ),
644080, Омск-80, пр. Мира 5, Российская Федерация*

Аннотация. В статье исследуются вопросы, связанные со спектральной функцией оператора Штурма-Лиувилля и решением обратной задачи Штурма-Лиувилля на полупрямой $y \geq 0$ в специальных классах функций. Указан вид спектральной функции, условия непрерывности, дифференцируемости и аналитичности.

Ключевые слова: задача Штурма-Лиувилля, дифференциальный оператор, теорема, спектральная функция оператора.

SOME PROPERTIES OF THE SPECTRAL FUNCTION OF STURM – LIOUVILLE OPERATOR

G. Schabanowa*Siberian Automobile and highway Academy (SibAHI),
644080, Omsk-80, av. Mira 5, Russian Federation*

Abstract. This article examines the issues associated with the spectral function of Sturm-Liouville operator, the solution of the inverse Sturm-Liouville problem on the half line $y \geq 0$ in special classes of functions. There are pointed the form of spectral function, conditions of continuity, differentiability and analytically.

Keywords: the problem of Sturm-Liouville problem, differential operator, theorem, spectral function of the operator.

Введение

Рассмотрим задачу Штурма – Лиувилля

$$l_q \varphi = \lambda r(y) \varphi(y, \lambda), \quad (1)$$

$$\varphi(0, \lambda) = 1, \varphi'(0, \lambda) = 0 \quad (2)$$

на интервале $[0, b]$ с дополнительным граничным условием

$$\varphi'(b, \lambda) = 0. \quad (3)$$

Здесь $r = r(y) > 0$; $r(y), q(y) \in C^1[0, b]$; $l_q = -\frac{d^2}{dy^2} + q(y)$ – линейный непрерыв-

ный оператор Штурма – Лиувилля.

Основные спектральные соотношения для сингулярного оператора l_q получим, решая задачу (1)–(3) в регулярном случае на интервале $[0, b]$, устремляя параметр b к бесконечности. Изучение обратной задачи Штурма – Лиувилля в сингулярном случае необходимо для решения обратных задач математической физики, редуцируемых к обратной задаче Штурма – Лиувилля. Важно знать свойства спектральной функции, которая в обратных задачах математической физики восстанавливается по информации о решении прямой задачи [1].

Основные концепции, определения и теоремы

Пусть функция $q(y)$ удовлетворяет следующим требованиям:

1. $q(y) \in C^1[0, \infty) \cap L_1[0, \infty)$, $q(y)_{L_1[0, \infty)} \leq M$.
2. $q(y)$ имеет абсолютный минимум: $q_{\min abc} = q(b^*) = m < 0$.
3. Для больших значений аргумента $y \geq b^*$ функция $q(y)$ принимает отрицательные значения и монотонно стремится к нулю: $q(y) = o\left(-\frac{1}{y^2}\right), y \rightarrow \infty$.
4. Последовательность элементов линейного нормированного пространства $L_1[0, \infty)$ $q_n(y) = \begin{cases} q(y), & \text{если } y \in [0, b_n], \\ 0, & \text{если } y \in (b_n, \infty) \end{cases}$ сходится в пространстве $L_1[0, \infty)$ к элементу этого пространства $q(y)$ по норме: $\lim_{n \rightarrow \infty} \|q_n(y) - q(y)\|_{L_1[0, \infty)} = 0$.

Определение 1. Множество функций, удовлетворяющих свойствам 1–4, составляют класс Q_M .

Определение 2. За класс функций Q_M^a примем множество целых функций класса Q_M , таких, что $q(0) = A > 0$.

Теорема 1. Если функция $q(y)$ в задаче Штурма-Лиувилля принадлежит классу Q_M , то спектральная функция оператора l_q :

- 1) $\sigma(\lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(\lambda)$ в основном, то есть в точках непрерывности $\sigma_n(\lambda)$,
- 2) имеет вид $\sigma(\lambda) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \sqrt{\lambda} + \sigma_1(\lambda), & \text{если } \lambda \geq 0, \\ 0, & \text{если } \lambda < 0, \end{cases}$
- 3) $\sigma(\lambda) \in C(\lambda \geq 0) \cap C^1(\lambda > 0)$; $\sigma_1(s), s = \sqrt{\lambda}$, монотонно убывает на интервале $(0, \infty)$,
- 4) $\sigma_1(s)$ абсолютно непрерывна.

Доказательство. Если последовательность финитных функций

$$q_n(y) = \begin{cases} q(y), & \text{если } y \in [0, b_n], \\ 0, & \text{если } y \in (b_n, \infty) \end{cases}$$

сходится по норме (или сильно сходится) к $q(y) \in L_1[0, \infty)$ и $q(y)$ непрерывна в каждом конечном интервале, то, по первой теореме Хелли, из последовательности соответствующих спектральных функций оператора $l_q \sigma_1(\lambda), \sigma_2(\lambda), \dots, \sigma_n(\lambda), \dots$ – монотонных, неубывающих и ограниченных в совокупности на всюду плотном множестве D можно извлечь по крайней мере одну подпоследовательность $\sigma_{11}(\lambda), \sigma_{22}(\lambda), \dots, \sigma_{nn}(\lambda), \dots$, сходящуюся в основном к некоторой неубывающей функции $\sigma(\lambda)$ (то есть в точках непрерывности $\sigma(\lambda)$) [4, с. 236]. Впоследствии мы всегда будем считать, что функции $\sigma_n(\lambda)$ удовлетворяют дополнительному условию $\sigma_n(-\infty) = 0$ и непрерывны слева $\sigma_n(\lambda - 0) = \sigma_n(\lambda)$. По второй обобщённой теореме Хелли [4, с. 239]:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) d\sigma_n(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) d\sigma(\lambda),$$

если $f(\lambda)$ непрерывна и ограничена на всей прямой $-\infty < \lambda < \infty$, а последовательность ограниченных в совокупности, неубывающих функций $\sigma_1(\lambda), \sigma_2(\lambda), \dots, \sigma_n(\lambda), \dots$ сходится в основном к функции $\sigma_n(\lambda)$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(-\infty) = \sigma(-\infty), \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(\infty) = \sigma(\infty)$.

Построим спектральную функцию оператора Штурма-Лиувилля с коэффициентом $q(y) \in Q_M$. Преобразуем собственную функцию $\varphi_n(y, \lambda)$ – решение задачи (1)–(2) – к более удобному для исследований виду.

$$\begin{aligned} \varphi_n(y, \lambda) &= \cos \sqrt{\lambda} y + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^y \sin \sqrt{\lambda} (y - \tau) q_n(\tau) \varphi_n(\tau, \lambda) d\tau = \cos \sqrt{\lambda} y + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^{\infty} (\sin \sqrt{\lambda} y \cos \sqrt{\lambda} \tau - \cos \sqrt{\lambda} y \sin \sqrt{\lambda} \tau) q_n(\tau) \varphi_n(\tau, \lambda) d\tau - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_y^{\infty} \sin \sqrt{\lambda} (y - \tau) \times \\ &\times q_n(\tau) \varphi_n(\tau, \lambda) d\tau = \mu_n(\lambda) \cos \sqrt{\lambda} y + v_n(\lambda) \sin \sqrt{\lambda} y + o(1) = q_n(\tau) \varphi_n(\tau, \lambda) d\tau = \\ &= \mu_n(\lambda) \cos \sqrt{\lambda} y + v_n(\lambda) \sin \sqrt{\lambda} y + o(1) = \frac{\mu_n(\lambda) \cos \sqrt{\lambda} y + v_n(\lambda) \sin \sqrt{\lambda} y}{\sqrt{\mu_n^2(\lambda) + v_n^2(\lambda)}} \times \\ &\times \sqrt{\mu_n^2(\lambda) + v_n^2(\lambda)} + o(1) = [\sin \delta_n(\lambda) \cos \sqrt{\lambda} y + \cos \delta_n(\lambda) \sin \sqrt{\lambda} y] \times \\ &\times \sqrt{\mu_n^2(\lambda) + v_n^2(\lambda)} + o(1) = \sin [\delta_n(\lambda) + \sqrt{\lambda} y] \cdot \sqrt{\mu_n^2(\lambda) + v_n^2(\lambda)} + o(1), \end{aligned}$$

где

$$\mu_n(\lambda) = 1 - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^{\infty} \sin \sqrt{\lambda} \tau \cdot q_n(\tau) \varphi_n(\tau, \lambda) d\tau,$$

$$v_n(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^{\infty} \cos \sqrt{\lambda} \tau \cdot q_n(\tau) \varphi_n(\tau, \lambda) d\tau.$$

Функции $\mu_n(\lambda)$ и $v_n(\lambda)$ одновременно в нуль не обращаются [5, с. 269].

$$\sin \delta_n(\lambda) = \frac{\mu_n(\lambda)}{\sqrt{\mu_n^2(\lambda) + v_n^2(\lambda)}}, \quad \cos \delta_n(\lambda) = \frac{v_n(\lambda)}{\sqrt{\mu_n^2(\lambda) + v_n^2(\lambda)}}.$$

Выведем аналитическую формулу для $\sigma(\lambda)$ и докажем справедливость неравенства:

$$\mu^2(\lambda) + v^2(\lambda) > 1. \quad (4)$$

Запишем изменение спектральной функции $\sigma_b(\lambda)$ в интервале $(\lambda, \lambda + \Delta]$ интегралом Стильеса:

$$\Delta \sigma_b(\lambda) = \sigma_b(\lambda + \Delta) - \sigma_b(\lambda) = \int_{\lambda}^{\lambda + \Delta} d\sigma_b(\lambda) \quad (5)$$

и по определению

$$\begin{aligned} \Delta \sigma_b(\lambda) &= \sum_{\lambda < \lambda_{n,b} \leq \lambda + \Delta} \frac{1}{\varphi_n(y, \lambda)^2} = \\ &= \sum_{\lambda < \lambda_{n,b} \leq \lambda + \Delta} \frac{\lambda_{n+1,b} - \lambda_{n,b}}{b(\sqrt{\lambda_{n+1,b}} - \sqrt{\lambda_{n,b}})(\sqrt{\lambda_{n+1,b}} + \sqrt{\lambda_{n,b}})} \frac{1}{b} \int_0^b \varphi_n^2(y, \lambda_{n,b}) dy = \\ &= \sum_{\lambda < \lambda_{n,b} \leq \lambda + \Delta} \frac{\lambda_{n+1,b} - \lambda_{n,b}}{b\left(\frac{\pi}{b} + o\left(\frac{1}{b}\right)\right)(\sqrt{\lambda_{n+1,b}} + \sqrt{\lambda_{n,b}})} \frac{1}{b} \int_0^b \varphi_n^2(y, \lambda_{n,b}) dy. \end{aligned} \quad (6)$$

В преобразованиях использована асимптотическая формула для собственных значений [5, с. 270]:

$$\sqrt{\lambda_{n+1,b}} - \sqrt{\lambda_{n,b}} = \frac{\pi}{b} + o\left(\frac{1}{b}\right), \quad n = 1, 2, \dots \quad (7)$$

Вычислим интеграл

$$\begin{aligned} \frac{1}{b} \int_0^b \varphi_n^2(y, \lambda_{n,b}) dy &= \frac{1}{b} [\mu_n^2(\lambda_{n,b}) + v_n^2(\lambda_{n,b})] \int_0^b \sin^2 [\delta_n(\lambda_{n,b}) + \sqrt{\lambda_{n,b}} y] dy + \\ &+ o(1) = \frac{1}{2} [\mu_n^2(\lambda_{n,b}) + v_n^2(\lambda_{n,b})] - \frac{\mu_n^2(\lambda_{n,b}) + v_n^2(\lambda_{n,b})}{2b\sqrt{\lambda_{n,b}}} \sin \sqrt{\lambda_{n,b}} \times \\ &\times b \cos [2\delta_n(\lambda_{n,b}) + \sqrt{\lambda_{n,b}} b] + o(1) \end{aligned}$$

и подставим в формулу (6). Тогда

$$\Delta\sigma_b(\lambda) = \sum_{\lambda < \lambda_{n,b} \leq \lambda + \Delta} \frac{\lambda_{n+1,b} - \lambda_{n,b}}{b \left(\frac{\pi}{b} + o\left(\frac{1}{b}\right) \right) (\sqrt{\lambda_{n+1,b}} + \sqrt{\lambda_{n,b}})} \cdot 1 / \left(\frac{1}{2} [\mu_n^2(\lambda_{n,b}) + v_n^2(\lambda_{n,b})] - \frac{\mu_n^2(\lambda_{n,b}) + v_n^2(\lambda_{n,b})}{2b \cdot \sqrt{\lambda_{n,b}}} \sin \sqrt{\lambda_{n,b}} b \cos [2\delta_n(\lambda_{n,b}) + \sqrt{\lambda_{n,b}} b] + o(1) \right).$$

В равенстве (5) перейдём к пределу, учитывая полученный результат и вторую теорему Хелли:

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_{\lambda}^{\lambda+\Delta} d\sigma_b(\lambda) = \lim_{b \rightarrow \infty} \Delta\sigma_b(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_{\lambda}^{\lambda+\Delta} \frac{d\lambda}{2\sqrt{\lambda} [\mu^2(\lambda) + v^2(\lambda)]} = \int_{\lambda}^{\lambda+\Delta} d\sigma(\lambda).$$

Из последнего равенства выводим дифференциал спектральной функции

$$d\sigma(\lambda) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{d\lambda}{2\sqrt{\lambda} [\mu^2(\lambda) + v^2(\lambda)]} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{d\sqrt{\lambda}}{[\mu^2(\lambda) + v^2(\lambda)]}.$$

Функции

$$\mu(\lambda) = 1 - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^{\infty} \sin \sqrt{\lambda} \tau \cdot q(\tau) \varphi(\tau, \lambda) d\tau = 1 - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} g_1(\lambda), \quad (8)$$

$$v(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^{\infty} \cos \sqrt{\lambda} \tau \cdot q(\tau) \varphi(\tau, \lambda) d\tau = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} g_2(\lambda) \quad (9)$$

являются непрерывными функциями $\sqrt{\lambda} = s$, так как интегралы $g_1(\lambda)$, $g_2(\lambda)$, в формулах (8) и (9) равномерно сходятся при $s \geq \rho > 0$. Приведём $d\sigma(\lambda)$ к виду:

$$d\sigma(\lambda) = \frac{2}{\pi} \left[1 + \frac{1}{[\mu^2(\lambda) + v^2(\lambda)]} - 1 \right] d\sqrt{\lambda} = \frac{2}{\pi} d\sqrt{\lambda} + \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1 - [\mu^2(\lambda) + v^2(\lambda)]}{[\mu^2(\lambda) + v^2(\lambda)]} d\sqrt{\lambda} = d\sigma_0 + d\sigma_1 = \left[\frac{2}{\pi} + \sigma_1'(\lambda) \right] d\sqrt{\lambda} > 0. \quad (10)$$

$$\text{Тогда } \sigma(\lambda) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \sqrt{\lambda} + \sigma_1(\lambda), & \text{если } \lambda \geq 0, \\ 0, & \text{если } \lambda < 0. \end{cases}$$

Нетрудно заметить, что $\mu(\lambda)$, $v(\lambda)$, $\sigma_1(\lambda)$ фактически зависят от аргумента $s = \sqrt{\lambda}$, поэтому:

$$\sigma'_1(s) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1 - [\mu^2(s) + v^2(s)]}{[\mu^2(s) + v^2(s)]}. \quad (11)$$

Из определения спектральной функции и формулы (7) следует, что

$$\Delta\sigma_b(\lambda) < \Delta\sigma_{0,b}(\lambda) = \frac{2}{b} + o\left(\frac{1}{b}\right),$$

где $\sigma_{0,b}(\lambda)$ – спектральная функция оператора l_q с коэффициентом $q(y=0)$, $y \in [0, b]$

Тогда $\frac{2}{\pi} \cdot \frac{d\sqrt{\lambda}}{[\mu^2(\lambda) + v^2(\lambda)]} < \frac{2}{\pi} \cdot d\sqrt{\lambda}$ и для всех $\lambda > 0$ неравенство (4) имеет ме-

сто: $\mu^2(\lambda) + v^2(\lambda) > 1$.

Отметим свойства $\sigma'_1(s)$

1. $(\quad)$ непрерывна при $s > 0$. $\lim_{s \rightarrow \infty} \sigma'_1(s) = 0$.

$$\lim_{s \rightarrow 0+} \sigma'_1(s) = \lim_{s \rightarrow 0+} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2sg_1(s) - g_1^2(s) - g_2^2(s)}{s^2 - 2sg_1(s) + g_1^2(s) + g_2^2(s)} = -\frac{2}{\pi}.$$

2. $\sigma_1(s)$ монотонно убывает. В силу (4) и (11) $\sigma'_1(s) < 0$.

3. $\sigma_1(s)$ – абсолютно непрерывная функция. В силу неравенств (4), (10) и (11) $-\frac{2}{\pi} < \sigma'_1(s) < 0$. Функции с ограниченной производной составляют класс абсо-

лютно непрерывных функций [6, с. 194].

4. Любая абсолютно непрерывная функция является функцией ограниченной вариации и имеет абсолютно интегрируемую производную:

$$\int_0^\infty |\sigma'_1(s)| ds = \sigma'_1(s)_{L_1[0, \infty)} = |V_0^\infty \sigma_1(s)|.$$

Определение 3. Совокупность спектральных функций оператора Штурма – Лиувилля, удовлетворяющих условиям 1)-4) теоремы 1, составляет класс функций σ .

Теорема 2. Если функция $q(y)$ в задаче Штурма-Лиувилля принадлежит классу Q_M^a , то соответствующая спектральная функция оператора $l_q \sigma(\lambda) \in \sigma$ и имеет целую функцию $\sigma'_1(\lambda)$, $\lambda = s^2$, в интервале $[0, \infty) \ni \lambda$. $\sigma'_1(0) = \lim_{s \rightarrow 0+} \sigma'_1(s) = -\frac{2}{\pi}$.

Обратное утверждение верно.

Доказательство. Формула (11) $\sigma'_1(s) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1 - [\mu^2(s) + v^2(s)]}{[\mu^2(s) + v^2(s)]}$, где $\mu(s)$ и $v(s)$

определены равенствами (7) и (8), устанавливает взаимно однозначное соответ-

ствие между $q(y)$ и $\sigma_1'(s)$. Функция $\sigma_1'(s)$ доопределена по непрерывности в нуле справа и в силу (11) обладает свойством четности, как если бы эта функция была продолжена на отрицательную полуось.

Как отмечено выше, $\mu^2(s) + v^2(s) \neq 0$ ни при каком значении s .

Из классических источников, например [7, с. 83], известно, что аналитическая функция в точке представляется в окрестности этой точки в виде степенного ряда. Всякую целую функцию в области D можно разложить в степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n s^n, \text{ сходящийся во всей области } D \text{ и обратно, всякая функция, представи-}$$

мая в D сходящимся степенным рядом, является целой. Запишем формулу (11) в виде

$$\sigma_1'(s) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2sg_1(s) - g_1^2(s) - g_2^2(s)}{s^2 - 2sg_1(s) + g_1^2(s) + g_2^2(s)} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2sg_1(s) - g_1^2(s) - g_2^2(s)}{(s - g_1(s))^2 + g_2^2(s)}.$$

Если $q(y)$ – целая функция, то $g_1(s)$ и $g_2(s)$, а также $\varphi(\tau, s)$ являются целыми.

Функция $f_2(s) = \frac{1}{(s - g_1(s))^2 + g_2^2(s)}$ может быть разложена по степеням s в

окрестности точки $s = 0$. $f_2(s) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n s^n$, причём $b_0 \neq 0$.

Функция $f_1(s) = 2sg_1(s) - g_1^2(s) - g_2^2(s)$ также представима степенным рядом с

центром в нуле $f_1(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n$. Предположим, что $\sigma_1'(s)$ продолжена на отрица-

тельную полуось, тогда, в силу четности $\sigma_1'(s)$, ряд Маклорена для $\sigma_1'(s)$ содержит только чётные степени s .

$$\sigma_1'(s) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n s^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (\sqrt{\lambda})^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \lambda^n = \sigma_1'(\lambda);$$

$$c_0 = \lim_{\lambda \rightarrow 0+} \sigma_1'(\lambda), c_1 = \lim_{\lambda \rightarrow 0+} \frac{\sigma_1''(\lambda)}{1!}, \dots, c_n = \lim_{\lambda \rightarrow 0+} \frac{\sigma_1^{(n+1)}(\lambda)}{n!}, \dots -$$

коэффициенты разложения. $\sigma_1'(\lambda)$ – аналитическая в точке $\lambda = 0$, так как на полупрямой $\lambda > 0$ она представляется сходящимся степенным рядом. σ_1' – функция, целая по аргументу λ .

Доказательство обратного утверждения непосредственно следует из схемы восстановления $q(y)$ по известной спектральной функции [8, с. 418].

Определение 4. Совокупность спектральных функций из класса σ с целой функцией $\sigma_1'(\lambda)$ на полупрямой $\lambda \geq 0$ составляет класс σ^a .

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0+} \sigma_1'(\lambda) = -\frac{2}{\pi}.$$

Замечание. Собственные числа $\lambda_{n,b}$ оператора l_q обладают свойством: $\lambda_{n,b} \geq m$, где m – наименьшее значение функции $\frac{q(y)}{r(y)}$ в интервале $[0, b]$, $n = 0, 1, 2, \dots$ и $\lambda_{n,b} = \lambda_n(b)$ [9, с.169]. При $y \geq b^*$ функция $q(y)$ принимает отрицательные значения и монотонно стремится к нулю: $q(y) = o\left(-\frac{1}{y^2}\right), y \rightarrow \infty$. Следовательно,

$\lambda = 0$ является правой предельной точкой спектра. Это утверждение доказано в работе [10, с. 7–8].

Теорема 3. Между классами функций Q_M и σ , Q_M^a и σ^a устанавливается взаимно однозначное соответствие [11].

Результаты исследований по теме «Обратная задача Штурма-Лиувилля в сингулярном случае» опубликованы также в работах автора [12–14].

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М.М., Резницкая К.Г., Яхно В.Г. Одномерные обратные задачи математической физики. Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1980. 88 с.
2. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи: учебник для студентов ВУЗов. Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. 458 с.
3. Кабанихин С.И., Криворотько О.И. Сингулярное разложение в некорректных задачах: учебник для ВУЗов. Усть-Каменогорск, ВКГТУ, НГУ, 2014. 218 с.
4. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1969. 400 с.
5. Левитан Б.М., Саргсян И.С. Введение в спектральную теорию. М.: Наука, 1970. 671 с.
6. Соболев В.И. Лекции по дополнительным главам математического анализа. М.: Наука, 1968. 288 с.
7. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.
8. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 528 с.
9. Цлаф Л.Я. Вариационное исчисление и интегральные уравнения. М.: Наука, 1979. 191 с.
10. Шабанова Г.И. Исследование обратной задачи Штурма-Лиувилля в сингулярном случае // СибАК. Сборник статей по материалам XXXI научно-практической конференции «Естественные и математические науки в современном мире». Новосибирск. 2015. 6 (30). С. 6–16.
11. Шабанова Г.И. Некоторые классы функций, связанные с сингулярной задачей Штурма-Лиувилля // Вестник Сибирской государственной автомобильно-дорожной академии. Омск: Издательство СибАДИ. 2013, № 4 (32). С. 108–113.
12. Шабанова Г.И. Особенности и классификация спектральных функций оператора Штурма-Лиувилля // Вестник Сибирской государственной автомобильно-дорожной академии. Омск: Издательство СибАДИ. 2013. № 6 (34). С. 98–103.
13. Шабанова Г.И. Восстановление оператора Штурма-Лиувилля по его спектральной функции // Вестник Сибирской государственной автомобильно-дорожной академии. Омск. Издательство СибАДИ. 2014. № 1 (35). С. 109–113.

14. G. Schabanowa. The study of the inverse Sturm-Liouville problem in the singular case. *Austrian Journal of Technical and Natural Sciences*, May-June 2015, № 5–6. pp. 62–67.

REFERENCES

1. Lavrent'ev M.M., Reznitskaya K.G., Yakhno V.G. *Odnomernye obratnye zadachi matematicheskoi fiziki* [One-dimensional inverse problems of mathematical physics]. Novosibirsk, Nauka Publ., Sib. dep. 1980. 88 p.
2. Kabanikhin S.I. *Obratnye i nekorrektnye zadachi: uchebnyk dlya studentov VUZov* [Inverse and ill-posed problems: a textbook for University students]. Novosibirsk, Siberian scientific Publ., 2009. 458 p.
3. Kabanikhin S.I., Krivorot'ko O.I. *Singulyarnoe razlozhenie v nekorrektnykh zadachakh: uchebnyk dlya VUZov* [Singular value decomposition in incorrect problems: a textbook for high schools]. Ust-Kamenogorsk, EKSTU, NSU Publ., 2014. 218 p.
4. Gnedenko B.V. *Kurs teorii veroyatnostei* [Course of probability theory]. Moscow, Nauka Publ., 1969. 400 p.
5. Levitan B.M., Sargsyan I.S. *Vvedenie v spektral'nuyu teoriyu* [Introduction to spectral theory]. Moscow, Nauka Publ., 1970. 671 p.
6. Sobolev V.I. *Lektsii po dopolnitel'nym glavam matematicheskogo analiza* [Lectures on additional chapters of mathematical analysis]. Moscow, Nauka Publ., 1968. 288 p.
7. Lavrent'ev M.A., Shabat B.V. *Metody teorii funktsii kompleksnogo peremennogo* [Methods of the theory of functions of a complex variable]. Moscow, Nauka Publ., 1973. 736 p.
8. Naimark M.A. *Lineinye differentsial'nye operatory* [Linear differential operators]. Moscow, Nauka Publ., 1969. 528 p.
9. Tslaf L.YA. *Variatsionnoe ischislenie i integral'nye uravneniya* [Calculus of variations and integral equations]. Moscow, Nauka Publ., 1979. 191 p.
10. Shabanova G.I. The study of the inverse Sturm-Liouville problem in the singular case. In: *SibAK. Sbornik statei po materialam XXXI nauchno-prakticheskoi konferentsii «Estestvennyye i matematicheskie nauki v sovremennom mire»* [Siberian Academy. The proceedings of the XXXI scientific-practical conference "Natural and mathematical Sciences in the modern world"]. 2015, pp. 6–16.
11. Shabanova G.I. Some classes of functions associated with singular Sturm-Liouville. In: *Vestnik Sibirskoi gosudarstvennoi avtomobil'no-dorozhnoi akademii* [Bulletin of Siberian State Automobile and Highway Academy]. 2013, no. 4 (32), pp. 108–113.
12. Shabanova G.I. Features and classification of spectral functions of the operator of Sturm-Liouville. In: *Vestnik Sibirskoi gosudarstvennoi avtomobil'no-dorozhnoi akademii* [Bulletin of Siberian State Automobile and Highway Academy]. 2013, no. 6 (34), pp. 98–103.
13. Shabanova G.I. The restoration of the operator of Sturm-Liouville spectral functions. In: *Vestnik Sibirskoi gosudarstvennoi avtomobil'no-dorozhnoi akademii* [Bulletin of Siberian State Automobile and Highway Academy]. 2014, no. 1 (35), pp. 109–113.
14. G. Schabanowa. The study of the inverse Sturm-Liouville problem in the singular case. *Austrian Journal of Technical and Natural Sciences*, May-June 2015, no. 5–6, pp. 62–67.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Шабанова Галина Ивановна – старший преподаватель кафедры высшей математики Сибирской автомобильно-дорожной академии «СибАДИ»;
e-mail: gal_schabanowa2014@yandex.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Galina Schabanova – senior lecturer at the Department of high mathematics; Siberian Automobile and Pighway Academy (“SibADI”);
e-mail: gal_schabanowa2014@yandex.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Шабанова Г. И. Свойства спектральной функции оператора Штурма – Лиувилля // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2017. № 1. С. 18–27.

DOI: 10.18384/2310-7251-2017-1-18-27.

THE CORRECT REFERENCE TO ARTICLE

G. Schabanowa. Some properties of the spectral function of the Sturm – Liouville operator. In: *Bulletin of Moscow Region State University*. Series: Physics and Mathematics. 2017. no. 1. pp. 18–27.

DOI: 10.18384/2310-7251-2017-1-18-27.

УДК 533.72

DOI: 10.18384/2310-7251-2017-1-28-39

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ВТОРОЙ ЗАДАЧИ СТОКСА ДЛЯ БОЗЕ–ГАЗОВ

Бедрикова Е.А., Латышев А.В.*Московский государственный областной университет,
105005, Москва, ул. Радио, 10а, Российская Федерация*

Аннотация. Продолжается исследование решения полупространственной второй задачи Стокса¹ для бозе-газа. Вторая задача Стокса рассматривается в полупространстве и состоит в изучении сдвиговых волн, генерируемых колеблющейся плоскостью, ограничивающей бозе-газ. Доказано существование и единственность разложения решения этой задачи в виде спектрального разложения по собственным функциям (или решениям) соответствующего характеристического уравнения. В основе доказательства лежит краевая задача Римана для аналитических функций комплексного переменного.

Ключевые слова: вторая задача Стокса, бозе-газ, собственные функции, характеристическое уравнение, разложение по собственным функциям.

EXISTENCE AND UNIQUENESS OF THE SOLUTION TO THE SECOND STOKES PROBLEM FOR BOSE GASES

E. Bedrikova, A. Latyshev*Moscow Region State University
ul. Radio 10a, 105005 Moscow, Russian Federation*

Abstract. Research of the decision of half-space second Stokes' problem proceeds for bose-gas. Second Stokes' problem in half-space and consists in studying of the shift waves generated by the fluctuating plane, limiting bose-gas, is considered. Existence and uniqueness of expansion of the decision of this problem in the form of spectral decomposition on eigen functions (or decisions) the corresponding characteristic equation is proved. At the heart of the proof regional Riemann' problem for analytical functions of the complex variable lays. The analytical decision of second Stokes' problem for bose-gas is found.

Key words: the second Stokes problem, Bose gas, eigen solutions of kinetic equation, characteristic equation, dispersion function.

¹ См. Вестник Московского государственного областного университета. Серия Физика-Математика, 2016, № 2.

Проблема движения газа над колеблющейся поверхностью является весьма актуальной в связи с развитием современных технологий [1–8]. Такая проблема относится к классу фундаментальных проблем, называемых «Вторая задача Стокса». Эта задача была впервые поставлена свыше 150 лет тому назад для колеблющейся стенки в сплошной среде.

Настоящая статья является продолжением нашей работы [9]. В работе [9] нелинейное модельное кинетическое уравнение для бозе-газа линеаризуется по малому параметру, который является отношением скорости газа к его тепловой скорости (имеющей порядок скорости звука в бозе-газе). Сформулирована полупространственная граничная задача. Найдены собственные решения дискретного и непрерывного спектров. Общее решение задачи представлено в виде разложения по собственным решениям соответствующего характеристического уравнения.

В настоящей работе доказана теорема о существовании и единственности решения, представленного в виде разложения по собственным решениям, отвечающим непрерывному и дискретному спектрам.

Пусть разреженный одноатомный бозе-газ находится над твёрдой плоской границей в полупространстве $x > 0$. Граница совершает гармонические колебания вдоль оси y по закону:

$$u_s(t) = u_0 e^{-i\omega t},$$

где u_0 – амплитуда колебания газа, которая является постоянной величиной.

Задача сводится к решению кинетического уравнения

$$\mu \frac{\partial h}{\partial x_1} + z_0 h(x_1, \mu) = \int_{-\infty}^{\infty} K_B(\mu', \alpha) h(x_1, \mu') d\mu', \quad z_0 = 1 - i\omega_1, \quad (1)$$

с граничными условиями:

$$h(0, \mu) = 2qU_0 + (1 - q)h(0, -\mu), \quad \mu > 0, \quad (2)$$

$$h(x_1 \rightarrow \infty, \mu) = 0. \quad (3)$$

В равенствах (1) – (3) введены обозначения:

$$K_B(\mu, \alpha) = \frac{\ln(1 - \exp(\alpha - \mu^2))}{\int_{-\infty}^{\infty} \ln(1 - \exp(\alpha - \tau^2)) d\tau}, \quad x_1 = x\nu\sqrt{\beta},$$

$\nu = 1/\tau$ – эффективная частота столкновений молекул бозе-газа, τ – время между двумя последовательными столкновениями газовых молекул, $x_1 = x\nu\sqrt{\beta}$, – те-

пловая скорость молекул, $\beta = \frac{m}{2kT}$, m и T – масса молекулы и температура, k –

постоянная Больцмана, $\alpha = \frac{\mu}{kT}$, μ – химический потенциал газа.

В [9] показано, что уравнение (1) имеет континуальное семейство решений

$$h_{\eta}(x_1, \mu) = \exp\left(-\frac{x_1 z_0}{\eta}\right) \Phi(\eta, \mu),$$

где η – спектральный параметр (комплексный),

$$\Phi(\eta, \mu) = \eta^P \frac{1}{\eta - \mu} + \frac{\Lambda(\eta, \alpha) \delta(\eta - \mu)}{K_B(\eta, \alpha)},$$

где $\delta(x)$ – дельта функция Дирака, $\Lambda(z, \alpha)$ – дисперсионная функция задачи, символ $P(1/x)$ означает главное значение интеграла от $(1/x)$,

$$\Lambda(z, \alpha) = -i\omega_1 + \lambda_0(z, \alpha),$$

$$\lambda_0(z, \alpha) = 1 + z \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_B(\tau, \alpha) d\tau}{\tau - z} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_B(\tau, \alpha) \tau d\tau}{\tau - z}.$$

Кроме того, в [9] также показано, что на полуплоскости $\{\omega_1 \geq 0, \omega_1 = \omega\tau, \alpha < 0\}$ существует линия критических частот $\omega_1 = \omega_1^*(\alpha)$, такая, что при $0 \leq \omega_1 < \omega_1^*(\alpha)$ существует дискретный спектр характеристического уравнения, состоящий из двух нулей (дискретного уравнения) $\{\pm\eta_0(\omega_1, \alpha)\}$. Этим нулям отвечают собственные решения уравнения (1):

$$h_{\pm\eta_0}(x_1, \mu) = \Phi\left(\pm\eta_0(\omega_1, \alpha), \exp\left(-\frac{x_1 z_0}{\pm\eta_0}\right)\right),$$

где

$$\Phi = \frac{\eta_0(\omega_1, \alpha)}{\eta_0(\omega_1, \alpha) - \mu}.$$

При $\omega_1 > \omega_1^*(\alpha)$ дисперсионная функция нулей не имеет, то есть дискретный спектр пуст.

Отметим, что

$$\omega_1^*(\alpha) = \max_{\mu > 0} \sqrt{s^2(\mu, \alpha) - \lambda_0^2(\mu, \alpha)},$$

где $s(\mu, \alpha) = \pi \mu K_B(\mu, \alpha)$.

Кривая $\omega_1 = \omega_1^*(\alpha)$ разбивает полуплоскость параметров задачи $\{\omega_1 \geq 0, \alpha < 0\}$ на две области D^+ и D^- , такие, что если $(\omega_1, \alpha) \in D^+$, то дисперсионная функция имеет два нуля, а если $(\omega_1, \alpha) \in D^-$, то дисперсионная функция нулей в комплексной плоскости не имеет, за исключением, быть может, её разреза – действительной оси.

Лемма. Если $(\omega_1, \alpha) \in D^-$, то $\aleph = 0$, т.е. $\text{ind} \frac{\Lambda^+(\mu, \alpha)}{\Lambda^-(\mu, \alpha)} = 0$, если $(\omega_1, \alpha) \in D^+$, то $\aleph = 1$, т.е. $\text{ind} \frac{\Lambda^+(\mu, \alpha)}{\Lambda^-(\mu, \alpha)} = 1$, где $\aleph = \aleph \left(\frac{\Lambda^+}{\Lambda^-} \right) = \text{ind} \frac{\Lambda^+(\mu, \alpha)}{\Lambda^-(\mu, \alpha)}$.

Здесь $\text{ind} f(\mu)$ означает приращение функции $f(\mu)$ на положительной действительной полуоси, делённое на 2π .

Докажем следующую теорему.

Теорема. Задача с граничными условиями (1)–(3) имеет единственное решение, представимое в виде разложения по собственным решениям исходного уравнения (1)

$$h(x_1, \mu) = A_0 \exp\left(-\frac{x_1 z_0}{\eta_0}\right) \Phi(\eta_0, \mu) + \int_0^\infty \exp\left(-\frac{x_1 z_0}{\eta}\right) \Phi(\eta, \mu) A(\eta, \mu) d\eta. \quad (4)$$

Здесь $A(\eta, \alpha)$ – неизвестная функция, называемая коэффициентом непрерывного спектра $A_0(\omega_1, \alpha)$ – коэффициент дискретного спектра, неизвестная постоянная, причем $A_0(\omega_1, \alpha) = 0$, если $(\omega_1, \alpha) \in D^-$.

Доказательство. По построению собственных решений равенство (4) является решением уравнения (1). Подставляя собственные функции в (4), получаем явное разложение решения:

$$h(x_1, \mu) = \frac{\eta_0 A_0}{\eta_0 - \mu} \exp\left(-\frac{x_1 z_0}{\eta_0}\right) + \int_0^\infty \exp\left(-\frac{x_1 z_0}{\eta}\right) \frac{\eta A(\eta, \alpha) d\eta}{\eta - \mu} + \\ + \exp\left(-\frac{x_1 z_0}{\mu}\right) \frac{\Lambda(\mu, \alpha)}{K_B(\mu, \alpha)} A(\mu, \alpha) \theta_+(\mu), \quad (5)$$

где $\theta_+(\mu)$ – функция Хэвисайда: $\theta_+(\mu) = 1, \mu > 0, \theta_+(\mu) = 0, \mu < 0$.

Решение (4) (или (5)) содержит неизвестную постоянную $A_0(\omega_1, \alpha)$ и неизвестную функцию $A(\eta, \alpha)$.

Эти неизвестные находятся из граничных условий.

Заметим, что решение (5) автоматически удовлетворяет граничному условию (3) – условие «вдали от стенки».

Подставим решение (5) в граничное условие (2). Получаем сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши:

$$2U_0 = A_0 \frac{\eta_0}{\eta_0 - \mu} + \int_0^\infty \frac{\eta A(\eta, \alpha) d\eta}{\eta - \mu} + \frac{\Lambda(\mu, \alpha)}{K_B(\mu, \alpha)} A(\mu, \alpha), \quad \mu > 0. \quad (6)$$

Введём вспомогательную функцию

$$N(z, \alpha) = \int_0^\infty \frac{\eta A(\eta, \alpha)}{\eta - z} d\eta, \quad (7)$$

аналитическую в комплексной плоскости S , за исключением точек разреза $[0, +\infty]$.

Граничные значения этой функции (7) сверху и снизу на действительной полуоси связаны формулами Сохоцкого [10].

$$N^+(\mu, \alpha) - N^-(\mu, \alpha) = 2\pi i \mu A(\mu, \alpha), \mu > 0,$$

$$\frac{N^+(\mu, \alpha) + N^-(\mu, \alpha)}{2} = N(\mu, \alpha), N(\mu, \alpha) = \int_0^\infty \frac{\eta A(\eta, \alpha)}{\eta - \mu} d\eta,$$

где $N(\mu, \alpha)$ – особый интеграл в смысле главного значения по Коши.

Согласно формулам Сохоцкого граничные значения дисперсионной функции связаны соотношениями:

$$\Lambda^+(\mu, \alpha) - \Lambda^-(\mu, \alpha) = 2\pi i \mu K_B(\mu, \alpha), -\infty < \mu < +\infty,$$

$$\frac{\Lambda^+(\mu, \alpha) + \Lambda^-(\mu, \alpha)}{2} = \Lambda(\mu, \alpha),$$

где $\Lambda(\mu, \alpha) = \int_{-\infty}^\infty \frac{\tau K_B(\tau, \alpha)}{\tau - \mu} d\tau, -\infty < \mu < +\infty$, причём последний интеграл понимается как особый в смысле главного значения по Коши.

С помощью приведённых выше граничных значений вспомогательной и дисперсионной функции преобразуем сингулярное уравнение (6) к краевому условию:

$$2U_0 = A_0 \frac{\eta_0}{\eta_0 - \mu} + \frac{1}{2} (N^+(\mu, \alpha) + N^-(\mu, \alpha)) + \\ + \frac{1}{2} \frac{\Lambda^+(\mu, \alpha) + \Lambda^-(\mu, \alpha)}{\Lambda^+(\mu, \alpha) - \Lambda^-(\mu, \alpha)} (N^+(\mu, \alpha) - N^-(\mu, \alpha)), \mu > 0,$$

Это условие преобразуем к виду:

$$\Lambda^+(\mu, \alpha) \left(N^+(\mu, \alpha) + \frac{A_0 \eta_0}{\eta_0 - \mu} - 2U_0 \right) = \\ = \Lambda^-(\mu, \alpha) \left(N^-(\mu, \alpha) + \frac{A_0 \eta_0}{\eta_0 - \mu} - 2U_0 \right), \mu > 0. \quad (8)$$

Краевое условие (8) представим в виде неоднородной краевой задачи Римана:

$$\frac{\Lambda^+(\mu, \alpha)}{\Lambda^-(\mu, \alpha)} \left(N^+(\mu, \alpha) + \frac{A_0 \eta_0}{\eta_0 - \mu} - 2U_0 \right) = N^-(\mu, \alpha) + \frac{A_0 \eta_0}{\eta_0 - \mu} - 2U_0, \mu > 0. \quad (9)$$

Для решения краевой задачи (9) решим сначала соответствующую однородную краевую задачу Римана:

$$X^+(\mu, \alpha) = G(\mu, \alpha) X^-(\mu, \alpha), \mu > 0. \quad (10)$$

Коэффициентом краевой задачи (10) является соотношение:

$$G(\mu, \alpha) = \frac{\Lambda^+(\mu, \alpha)}{\Lambda^-(\mu, \alpha)}.$$

Логарифмируя краевое условие (10), получаем:

$$\ln X^+(\mu, \alpha) - \ln X^-(\mu, \alpha) = \ln |G(\mu, \alpha)| + i(\theta(\mu) + 2\pi k), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (11)$$

где $\theta(\mu) = \arg G(\mu, \alpha)$ – главная ветвь аргумента, фиксированная в нуле условием $\arg G(0, \alpha) = 0$.

В явном виде

$$\arg G(\mu, \alpha) = \arg \frac{\Lambda(\mu, \alpha) - i\omega_1 + i\pi\mu K_B(\mu, \alpha)}{\Lambda(\mu, \alpha) - i\omega_1 - i\pi\mu K_B(\mu, \alpha)}.$$

Далее следует рассмотреть два случая: $(\omega_1, \alpha) \in D^+$ и $(\omega_1, \alpha) \in D^-$. Рассмотрим сначала случай $(\omega_1, \alpha) \in D^-$. Здесь, согласно выше изложенной лемме, $\aleph = 0$, то есть $\theta(0) = \theta(+\infty) = 0$. Тогда решение задачи (11), как «задачи о скачке», даётся интегралом типа Коши:

$$\ln X(z, \alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \frac{\ln |G(\mu, \alpha)| + i\theta(\mu)}{\mu - z} d\mu.$$

Отсюда находим, что

$$X(z, \alpha) = e^{V(z, \alpha)},$$

где

$$V(z, \alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \frac{\ln |G(\tau, \alpha)| + i\theta(\tau)}{\tau - z} d\tau.$$

Рассмотрим второй случай, когда $(\omega_1, \alpha) \in D^+$. В этом случае $\theta(0) = 0$, $\theta(+\infty) = 2\pi$.

Чтобы решение задачи (11) выражалось сходящимся интегралом, возьмем в правой части (11) $k = -1$. Тогда решение задачи (11) будет выражаться сходящимся интегралом типа Коши:

$$\ln X(z, \alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \frac{\ln |G(\tau, \alpha)| + i(\theta(\tau) - 2\pi)}{\tau - z} d\tau.$$

Обозначим

$$\tilde{V}(z, \alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \frac{\ln |G(\tau, \alpha)| + i(\theta(\tau) - 2\pi)}{\tau - z} d\tau.$$

Рассмотрим полученное решение

$$X(z, \alpha) = e^{\tilde{V}(z, \alpha)}, \quad (12)$$

в окрестности начала координат

$$\tilde{V}(z, \alpha) = -\frac{i(\theta(0) - 2\pi)}{2\pi i} \ln z = \ln z + \theta(z),$$

где $\theta(z)$ – ограниченная функция в окрестности начала координат.

Следовательно, при $z \rightarrow 0$, $X(z) \sim z$. В связи с этим переопределим решение (12) следующим образом:

$$X(z, \alpha) = \frac{1}{z} e^{\tilde{V}(z, \alpha)}. \quad (13)$$

Теперь решение (10) не исчезает в начале координат.

С помощью решения задачи (10) преобразуем (9) к симметричному виду:

$$\begin{aligned} X^+(\mu, \alpha) \left(N^+(\mu, \alpha) + \frac{A_0 \eta_0}{\eta_0 - \mu} - 2U_0 \right) = \\ = X^-(\mu, \alpha) \left(N^-(\mu, \alpha) + \frac{A_0 \eta_0}{\eta_0 - \mu} - 2U_0 \right), \quad \mu > 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Умножив обе части равенства (14) на $(\eta_0 - \mu)$ и проведя преобразования, получим:

$$(\eta_0 - \mu) X(\mu, \alpha) \left(N(\mu, \alpha) + \frac{A_0 \eta_0}{\eta_0 - \mu} - 2U_0 \right) \equiv C,$$

где C – произвольная постоянная.

Следовательно,

$$N(z, \alpha) = 2U_0 - \frac{A_0 \eta_0}{\eta_0 - z} + \frac{C}{(\eta_0 - z) X(z, \alpha)}. \quad (15)$$

Устраним полюс в точке $z = \eta_0$ у решения $N(z, \alpha)$ за счет выбора произвольной постоянной C . Для этого представим (15) в виде:

$$N(z, \alpha) = 2U_0 - \frac{1}{\eta_0 - z} \left(-A_0 \eta_0 + \frac{C}{X(z, \alpha)} \right).$$

Отсюда видно, что для устранения полюса в точке η_0 необходимо потребовать, чтобы

$$C = A_0 \eta_0 X(\eta_0).$$

Теперь решение (15) запишем в виде:

$$N(z, \alpha) = 2U_0 + \frac{A_0 \eta_0}{\eta_0 - z} \left(-1 + \frac{X(\eta_0, \alpha)}{X(z, \alpha)} \right).$$

Потребуем, чтобы функция $N(z, \alpha)$ была исчезающей в окрестности бесконечно удалённой точки. Находя $N(\infty)$, получим:

$$N(\infty) = 2U_0 + \frac{A_0 \eta_0 X(\eta_0, \alpha)}{\lim_{z \rightarrow \infty} (\eta_0 - z) X(z, \alpha)}.$$

Ясно, что $\lim_{z \rightarrow \infty} (\eta_0 - z) X(z, \alpha) = -\lim_{z \rightarrow \infty} z X(z, \alpha) = -1$.

Таким образом, из условия $N(\infty) = 2U_0 - A_0 \eta_0 X(\eta_0, \alpha) = 0$ находим, что:

$$A_0 = \frac{2U_0}{\eta_0 X(\eta_0, \alpha)}.$$

Окончательно находим, что

$$N(z, \alpha) = 2U_0 \left[1 + \frac{1}{\eta_0 - z} \left(\frac{1}{X(z, \alpha)} - \frac{1}{X(\eta_0, \alpha)} \right) \right]. \quad (16)$$

Коэффициент непрерывного спектра найдём из формулы Сохоцкого для вспомогательных функций:

$$A(\eta, \alpha) = \frac{1}{2\pi i \eta} (N^+(\mu, \alpha) - N^-(\mu, \alpha)).$$

Здесь, согласно (16), граничные значения вспомогательной функции равны:

$$N^\pm(\mu, \alpha) = \left[2U_0 + \frac{2U_0}{(\eta_0 - \mu)} \frac{1}{X^\pm(\mu, \alpha)} - \frac{2U_0}{(\eta_0 - \mu) X(\eta_0, \alpha)} \right],$$

где

$$X^\pm(\mu, \alpha) = \frac{1}{\mu} e^{V^\pm(\mu, \alpha)} = \frac{1}{\mu} e^{V(\mu, \alpha) \pm q(\mu, \alpha)} = X(\mu) e^{\pm q(\mu, \alpha)},$$

$$V^\pm(\mu, \alpha) = \pm \frac{1}{2} [\ln |G(\mu, \alpha)| + i(\theta(\mu) - 2\pi)] + V(\mu, \alpha),$$

где

$$V(\mu, \alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \frac{\ln |G(\tau, \alpha)| + i(\theta(\tau) - 2\pi)}{\tau - \mu} d\tau, \mu \in (-\infty, +\infty),$$

$$q(\mu, \alpha) = \frac{1}{2} [\ln |G(\mu, \alpha)| + i(\theta(\mu) - 2\pi)].$$

Причём интеграл понимается как особый в смысле главного значения по Коши.

Теперь находим, что

$$N^+(\mu, \alpha) - N^-(\mu, \alpha) = \frac{2}{\eta - \mu} \left(\frac{1}{X^+(\mu, \alpha)} - \frac{1}{X^-(\mu)} \right) = \\ = \frac{2U_0}{\eta_0 - \mu} \exp(-V(\mu, \alpha)) [\exp(-q(\mu, \alpha)) - \exp(q(\mu, \alpha))] = \frac{4U_0}{\eta_0 - \mu} \frac{sh q(\mu, \alpha)}{(\mu, \alpha)}.$$

Итак, коэффициент непрерывного спектра равен:

$$A(\eta, \alpha) = -\frac{1}{\pi i \eta} \frac{2U_0}{(\eta_0 - \eta)} \frac{sh q(\eta, \alpha)}{X(\eta, \alpha)}.$$

Рассмотрим случай, когда $\aleph = 0$. В этом случае имеем задачу:

$$X^+(\mu, \alpha) (N^+(\mu, \alpha) - 2U_0) = X^-(\mu, \alpha) (N^-(\mu, \alpha) - 2U_0), \quad \mu > 0.$$

Отсюда получаем:

$$N(z, \alpha) = 2U_0 + \frac{C}{X(z, \alpha)}.$$

Из условия $N(\infty) = 0$ находим, что $C = -2U_0$, следовательно,

$$N(z, \alpha) = 2U_0 \left(1 - \frac{1}{X(z, \alpha)} \right).$$

Коэффициент непрерывного спектра равен:

$$A(\eta, \alpha) = -\frac{1}{2\pi i \eta} (N^+(\eta, \alpha) - N^-(\eta, \alpha)) = \frac{-2U_0}{2\pi i \eta} \left(\frac{1}{X^+(\eta, \alpha)} - \frac{1}{X^-(\eta, \alpha)} \right) = \\ = \frac{2U_0}{2\pi i \eta X(\eta, \alpha)} (e^{q(\eta, \alpha)} - e^{-q(\eta, \alpha)}) = \frac{2U_0 sh q(\eta, \alpha)}{2\pi i \eta X(\eta, \alpha)},$$

где

$$q(\tau, \alpha) = \frac{1}{2} [\ln |G(\tau, \alpha)| + i\theta(\tau)].$$

Итак, коэффициенты разложения (4) найдены в обоих случаях.

Единственность. Предположим, что помимо разложения (4) имеется ещё одно разложение решения граничной задачи (1)–(3):

$$h(x_1, \mu) = \tilde{A}_0 \exp\left(-\frac{x_1 z_0}{\eta_0}\right) \Phi(\eta_0, \mu) + \int_0^\infty \exp\left(-\frac{x_1 z_0}{\eta}\right) \Phi(\eta_0, \mu) \tilde{A}(\eta, \alpha) d\eta,$$

причём, по крайней мере, выполняется одно из неравенств:

$$A_0 \neq \tilde{A}_0, \quad A(\eta, \alpha) \neq \tilde{A}(\eta, \alpha). \quad (17)$$

Подставим решение (17) в граничные условия (2). Получаем систему интегральных сингулярных уравнений с ядром Коши:

$$2U_0 = \tilde{A}_0 \frac{\eta_0}{\eta_0 - \mu} + \int_0^{\infty} \frac{\eta \tilde{A}(\eta, \alpha) d\eta}{\eta - \mu} + \frac{\Lambda(\mu, \alpha)}{K_B(\mu, \alpha)} \tilde{A}(\mu, \alpha), \quad \mu > 0. \quad (18)$$

Составим разность уравнений (6) и (18):

$$\begin{aligned} & \frac{(A_0 - \tilde{A}_0)\eta_0}{\eta_0 - \mu} + \int_0^{\infty} \frac{\eta(A(\eta, \alpha) - \tilde{A}(\eta, \alpha)) d\eta}{\eta - \mu} + \\ & + \frac{\Lambda(\mu, \alpha)(A(\mu, \alpha) - \tilde{A}(\mu, \alpha))}{K_B(\mu, \alpha)} = 0, \quad \mu > 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Введём ещё одну вспомогательную функцию:

$$\tilde{N}(z, \alpha) = \int_0^{\infty} \frac{\eta \tilde{A}(\eta, \alpha)}{\eta - z} d\eta,$$

Рассуждая, как и выше, получаем решение уравнения (19):

$$N(z, \alpha) - \tilde{N}(z, \alpha) = -\frac{(A_0 - \tilde{A}_0)\eta_0}{\eta_0 - z} + \frac{\tilde{N}}{(\eta_0 - z)X(z, \alpha)}.$$

Из условия $\tilde{N}(\infty) = N(\infty) = 0$ сразу находим, что $C = 0$, а устраняя полюс в точке $z = \eta_0$, находим, что $A_0 = \tilde{A}_0$. Это означает, что $\tilde{N}(z, \alpha) \equiv N(z, \alpha)$. Отсюда следует, что $A(\eta, \alpha) = \tilde{A}(\eta, \alpha)$. Единственность доказана. Таким образом, теорема полностью доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Акимов В.А., Латышев А.В., Юшканов А.А. Аналитическое решение второй задачи Стокса о поведении газа над колеблющейся поверхностью // Известия РАН. Серия: Механика жидкости газов. 2013. № 1. С. 125–140.
2. Акимов В.А., Латышев А.В., Юшканов А.А. Вторая задача Стокса с зеркально-диффузными граничными условиями // Известия ВУЗов. Серия. Физика. № 3, т. 56. 2013. С. 101–105.
3. Stokes G.G. On the effect of internal friction of fluids on the motion of pendulums // Trans. Cambr. Phil. IX, 8 A851), Math, and Phys. Papers III, 1–141, Cambridge, 1901.
4. Asghar S., Nadeem S., Hanif K., Hayat T. Analytic solution of Stokes second problem for second grade fluid // Math. Probl. Eng. Vol. 2006, Article ID 72468, 8 p.
5. Siewert C.E., Sharipov F. Model equations in rarefied gas dynamics: viscous-slip and thermal-slip coefficients // Phys. Fluids. 2002. Vol. 14. No. 12. P. 4123–4129.
6. Дудко В.В., Юшканов А.А., Яламов Ю.И. Влияние свойств поверхности на характеристики сдвиговых волн // Журнал технической физики. 2005. Т. 75. Вып. 4. С. 134–135.
7. Дудко В.В., Юшканов А.А., Яламов Ю.И. Генерация колеблющейся поверхностью сдвиговых волн в газе // Теплофизика высоких температур. 2009. Т. 47. №. 2. С. 262–268.
8. Дудко В.В. Скольжение разреженного газа вдоль неподвижных и колеблющихся поверхностей: дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Москва, 2010. 108 с.

9. Бедрикова Е.А., Латышев А.В. Граничная задача о генерировании сдвиговых волн колеблющейся поверхностью в газах бозе // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2016. №2. С. 18–28.
10. Латышев А.В., Юшканов А.А. Аналитические методы в кинетической теории: монография. М.: Изд-во МГОУ. 2008. 280 с.

REFERENCES

1. Akimova V.A., Latyshev A.V., Yushkanov A.A. Analytical solution of the second Stokes problem on the behavior of a gas over an oscillating surface. In: Izvestiya RAN. Seriya: Mekhanika zhidkosti gazov [RAS News. Series: Mechanics of liquid gases]. 2013, no. 1, pp. 125–140.
2. Akimova V.A., Latyshev A.V., Yushkanov A.A. The second Stokes problem with mirror-diffuse boundary conditions. In: Izvestiya VUZov. Seriya: Fizika [Universities news. Series: Physics]. 2013, no. 3, vol. 56, pp. 101–105.
3. Stokes G.G. On the effect of internal friction of fluids on the motion of pendulums // Trans. Cambr. Phil. IX, 8 A851), Math, and Phys. Papers III, 1–141, Cambridge, 1901.
4. Asghar S., Nadeem S., Hanif K., Hayat T. Analytic solution of Stokes second problem for second grade fluid // Math. Probl. Eng. Vol. 2006, Article ID 72468, 8 p.
5. Siewert C.E., Sharipov F. Model equations in rarefied gas dynamics: viscous-slip and thermal-slip coefficients // Phys. Fluids. 2002. Vol. 14. No. 12. P. 4123–4129.
6. Dudko V.V., Yushkanov A.A., Yalamov Yu.I. The influence of surface properties on the characteristics of shear waves. In: Zhurnal tekhnicheskoi fiziki [Journal of technical physics]. 2005, vol. 75, no. 4, pp. 134–135.
7. Dudko V.V., Yushkanov A.A., Yalamov Yu.I. The generation of fluctuating surface shear waves in gas. In: Teplofizika vysokikh temperatur [Thermophysics of high temperatures]. 2009, vol. 47, no. 2, pp. 262–268.
8. Dudko V.V. Skol'zhenie razrezhennogo gaza vdol' nepodvizhnykh i koleblyushchikhsya poverkhnostei: diss. ... kand. fiz.-mat. nauk [The slip of a rarefied gas along stationary and oscillating surfaces: PhD thesis in Physico-mathematical sciences]. Moscow, 2010. 108 p.
9. Bedrikova E.A., Latyshev A.V. The boundary problem of generation of shear waves by an oscillating surface in the Bose gases. In: Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika [Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and mathematics]. 2016, no. 2, pp. 18–28.
10. Latyshev A.V., Yushkanov A.A. Analiticheskie metody v kineticheskoi teorii: monografiya [Analytical methods in kinetic theory: a monograph]. Moscow, MRSU Publ., 2008. 280 p.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Бедрикова Екатерина Алексеевна – старший преподаватель кафедры математического анализа и геометрии Московского государственного областного университета,
e-mail: bedrikova@mail.ru

Латышев Анатолий Васильевич – д.ф.-м.н., профессор кафедры математического анализа и геометрии Московского государственного областного университета, заслуженный деятель науки РФ,
e-mail: avlatyshev@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Ekaterina Bedrikova – senior lecturer of the Department of the Mathematical Analysis and Geometry at the Moscow Region State University;
e-mail: bedrikova@mail.ru

Anatoly Latyshev – doctor of physico-mathematical sciences, professor of the Department of Mathematical Analysis and Geometry at the Moscow Region State University;
e-mail: avlatyshev@mail.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Бедрикова Е.А., Латышев А.В. Существование и единственность решения второй задачи Стокса для бозе–газов // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2017. № 1. С. 28–39.
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-1-28-39.

THE CORRECT REFERENCE TO ARTICLE

E. Bedrikova, A. Latyshev. Existence and uniqueness of the decision of second Stokes' problem for bose-gases. In: *Bulletin of Moscow Region State University*. Series: Physics and Mathematics. 2017. no. 1. pp. 28–39.
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-1-28-39.

УДК 533.9.02

DOI: 10.18384/2310-7251-2017-1-40-50

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА РИМАНА В ПРОБЛЕМЕ О КОЛЕБАНИЯХ ПЛАЗМЫ С РАВНОВЕСНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ФЕРМИ-ДИРАКА

Латышев А.В., Сулейманова С.Ш.

Московский государственный областной университет,
105005, Москва, ул. Радио, 10а, Российская Федерация

Аннотация. Аналитически решена задача о колебаниях электронной плазмы с произвольной степенью вырождения электронного газа в полупространстве. Применяются кинетическое уравнение Власова-Больцмана с интегралом столкновений типа БГК (Бхатнагар, Гросс, Крук) и уравнение Максвелла для электрического поля. Найдены моды Друде и Ван Кампена и сформулированы условия существования моды Дебая.

Ключевые слова: уравнение Власова-Больцмана, уравнение Максвелла, частота столкновений, электромагнитное поле, моды Друде, Дебая, Ван Кампена, дисперсионная функция, краевая задача Римана.

THE BOUNDARY VALUE RIEMANN PROBLEM IN THE PROBLEM ABOUT OSCILLATIONS OF A PLASMA WITH THE EQUILIBRIUM FERMI-DIRAC DISTRIBUTION

A. Latyshev, S. Suleymanova

Moscow Region State University,
ul. Radio 10a, 105005 Moscow, Russian Federation

Abstract. The boundary problem about the behavior (oscillations) of electronic plasmas with an arbitrary degree of degeneration of the electronic gas in half-space is solved analytically. To this end, use is made of the Vlasov – Boltzmann equation with the integral of collisions of BGK (Bhatnagar, Gross, Krook) type and Maxwell's equation for the electric field. Drude and Van Kampen modes are found and conditions for existence of the Debye mode are formulated.

Keywords: Vlasov-Boltzmann equation; Maxwell's equation; frequency of collisions; electromagnetic field; Drude, Debaye, and Van Kampen modes; dispersion function; boundary value Riemann problem.

Введение

В настоящей работе рассматривается краевая задача Римана, лежащая в основе аналитического решения задачи о колебаниях плазмы с равновесным

распределением Ферми-Дирака, и поэтому вызывающая некоторый интерес. Используются кинетическое уравнение Власова-Больцмана с интегралом столкновений типа БГК (Бхатнагар, Гросс, Крук) и уравнение Максвелла для электрического поля.

Выяснена структура экранированного электрического поля. Оказалось, что существует область значений параметров задачи, в которой отсутствует мода Дебая.

Показано, что: во-первых, мода Друде, описывающая объёмную проводимость, существует при всех значениях параметров задачи; во-вторых, мода Дебая, описывающая экранировку электрического поля, существует при частотах колебания внешнего поля, меньших некоторой критической частоты, находящейся вблизи плазменного резонанса; в-третьих, моды Ван Кампена [1], представляющие собой смесь (хаотизацию) собственных решений Власова-Больцмана, также существуют при всех значениях параметров задачи. Оказалось, что моды Ван Кампена отвечают непрерывному спектру задачи, мода Друде – спектру, присоединённому к непрерывному.

Постановка задачи

В работах [2–4] трехмерная задача о колебаниях плазмы была сведена к одномерной и односкоростной, и были получены следующие уравнения:

$$\mu \frac{\partial H}{\partial x_1} + w_0 H(x_1, \mu) = \mu e(x_1) + \int_{-\infty}^{\infty} k(\mu', \alpha) H(x_1, \mu') d\mu', \quad (1.1)$$

$$\frac{de(x_1)}{dx_1} = \dot{u}^2(\alpha) \int_{-\infty}^{\infty} k(\mu', \alpha) H(x_1, \mu') d\mu'. \quad (1.2)$$

В уравнениях (1.1) и (1.2):

$$w_0 = 1 - i \frac{\omega}{\epsilon \omega_p}, \quad \dot{u}^2(\alpha) = \frac{\omega_p^2}{v^2} \cdot \frac{s_0(\alpha)}{s_2(\alpha)} = \frac{\omega_p^2}{v^2} \cdot \frac{1}{r(\alpha)} = \frac{1}{\epsilon^2 r(\alpha)},$$

где

$$r(\alpha) = \frac{s_2(\alpha)}{s_0(\alpha)}, \quad \epsilon = \frac{v}{\omega_p}, \quad s_n(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{\mu^n d\mu}{1 + e^{\mu^2 - \alpha}}.$$

Здесь ω_p – плазменная (ленгмюровская) частота. Известно, что частота плазменных колебаний, как правило, много больше частоты столкновений электронов в металле [5]. Поэтому в случае, когда $\omega \sim \omega_p$, выполняется условие $\omega \gg v$.

Граничные условия для поля на поверхности плазмы и функции распределения имеют вид:

$$e(0) = 1, \quad H(0, \mu) = A, \quad 0 < \mu < 1,$$

где A – неизвестная постоянная.

Вдали от поверхности поле предполагается ограниченным:

$$e(+\infty) = e_\infty, |e(+\infty)| < +\infty.$$

Далее возьмём условие непротекания электронов через границу плазмы:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mu' H(0, \mu') f_0(\mu', \alpha) d\mu' = 0.$$

Найдём общее решение системы уравнений (1.1) и (1.2) с помощью разделения переменных согласно общему методу Фурье, используя следующую подстановку:

$$H_\eta(x, \mu) = \exp\left(-\frac{w_0 x}{\eta}\right) \Phi(\eta, \mu), \quad e_\eta(x) = \exp\left(-\frac{w_0 x}{\eta}\right) E(\eta), \quad (1.3)$$

где η – спектральный параметр, или параметр разделения, вообще говоря комплексный. Подставим равенства (1.3) в уравнения (1.1) и (1.2). С помощью некоторых преобразований получаем:

$$(\eta - \mu) \Phi(\eta, \mu) = \frac{E(\eta)}{w_0} (\eta \mu - \eta_1^2), \quad (1.4)$$

где $\eta_1^2 \equiv \eta_1(\alpha) = w_0 \epsilon^2 r(\alpha)$.

При $\eta \in (-\infty, +\infty)$ ищем решение уравнения (1.4) в пространстве обобщённых функций [6]. Собственные функции характеристического уравнения (1.4) представим в виде

$$\Phi(\eta, \mu) = \frac{E(\eta)}{w_0} \left[P \frac{\mu \eta - \eta_1^2}{\eta - \mu} - w_0 \eta_1^2 \frac{\Lambda(\eta)}{\eta k(\eta, \alpha)} \delta(\eta - \mu) \right], \quad (1.5)$$

В равенстве (1.5) $\eta \in (-\infty, +\infty)$, $\mu \in (-\infty, +\infty)$ множество значений η , заполняющих числовую прямую, называют непрерывным спектром характеристического уравнения; $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака; символ Px^{-1} означает главное значение интеграла при интегрировании выражения x^{-1} ; $\Lambda(z)$ – дисперсионная функция

$$\Lambda(z) = \Lambda(z, \Omega, \epsilon, \alpha) = 1 + \frac{z}{w_0 \eta_1^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta_1^2 - \mu' z}{\mu' - z} k(\mu', \alpha) d\mu'.$$

Семейство собственных функций $\Phi(\eta, \mu)$ характеристического уравнения, отвечающих непрерывному спектру, называют «моды Ван Кампена» [1; 7].

Дисперсионную функцию задачи $\Lambda(z)$ можно представить следующим образом:

$$\Lambda(z) = 1 - \frac{1}{w_0} - \frac{z^2 - \eta_1^2}{w_0 \eta_1^2} \lambda_0(z, \alpha).$$

Здесь $\lambda_0(z, \alpha) = 1 + z \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k(\mu, \alpha) d\mu}{\mu - z}$.

Нули дисперсионной функции

Найдём нули дисперсионного уравнения

$$\frac{\Lambda(z)}{z} = 0. \quad (2.1)$$

Нетрудно видеть, что значение дисперсионной функции в бесконечно удалённой точке равно:

$$\Lambda_{\infty} = \Lambda(\infty) = 1 - \frac{1}{w_0} + \frac{1}{w_0^2 \epsilon^2}.$$

Отсюда получаем, что

$$\Lambda_{\infty} = \frac{-iv\omega + \omega_p^2 - \omega^2}{(v - i\omega)^2} \neq 0$$

при любых $v \neq 0$, то есть в любой столкновительной плазме.

Это значит, что точка $z_i = \infty$ является нулём дисперсионного уравнения. Можно считать, что эта точка принадлежит спектру, присоединённому к непрерывному спектру, составляющему открытую часть числовой оси. Точке $z_i = \infty$ отвечает следующее решение уравнения (1.4):

$$H_{\infty}(x, \mu) = \frac{E_{\infty}}{w_0} \cdot \mu, \quad e_{\infty} = E_{\infty}. \quad (2.2)$$

Здесь E_{∞} – произвольная постоянная.

Решение (2.2) называется модой Друде. Оно не зависит от химического потенциала и описывает объёмную проводимость плазмы полуметалла, рассмотренную Друде [8].

По определению, дискретным спектром характеристического уравнения (1.4) называется множество конечных комплексных нулей дисперсионного уравнения (2.1), не лежащих на действительной оси (разрезах дисперсионной функции).

Найдём нули дисперсионного уравнения. Для этого напомним разложение дисперсионной функции в асимптотический ряд Лорана:

$$\Lambda(z) = \Lambda_{\infty} + \frac{\Lambda_2}{z^2} + \frac{\Lambda_4}{z^4} + \dots, \quad z \rightarrow \infty. \quad (2.3)$$

В (2.3) введены обозначения:

$$\Lambda_2 = \frac{s_4(\alpha) - \eta_1^2 s_2(\alpha)}{w_0 \eta_1^2 s_0(\alpha)}, \quad \Lambda_4 = \frac{s_6(\alpha) - \eta_1^2 s_4(\alpha)}{w_0 \eta_1^2 s_0(\alpha)}, \quad \dots, \quad s_n(\alpha) = \int_0^{\infty} \mu^n f_0(\mu, \alpha) d\mu.$$

Из разложения (2.3) видно, что в окрестности бесконечно удалённой точки существует два нуля $\pm \eta_0$ дисперсионной функции $\Lambda(z)$:

$$\pm \eta_0 \approx \sqrt{-\frac{\Lambda_2}{\Lambda_4}}. \quad (2.4)$$

В силу четности дисперсионной функции её нули различаются лишь знаком. Под нулем η_0 будем понимать такое значение радикала из (2.4), что $\text{Re}(w_0/\eta_0) > 0$. Для такого нуля экспонента $\exp[-(w_0/\eta_0)x]$ является монотонно убывающей при $x \rightarrow +\infty$.

Нулю η_0 отвечает следующее уравнение

$$H_{\eta_0}(x, \mu) = \exp\left(-\frac{w_0}{\eta_0}x\right) \Phi(\eta_0, \mu), \quad e_{\eta_0}(x) = \exp\left(-\frac{w_0}{\eta_0}x\right) E_0.$$

$$\text{Здесь } \Phi(\eta_0, \mu) = \frac{E_0}{w_0} \frac{\eta_0 \mu - \eta_1^2}{\eta_0 - \mu}.$$

Это решение называется модой Дебая (это – плазменная мода). В низкочастотном случае она описывает известное экранирование Дебая [8].

Равенство (2.4) представим в явном виде:

$$\eta_0 = \eta_0(\alpha, \Omega, \varepsilon) \approx \sqrt{\frac{(\Omega + i\varepsilon)^2 [\eta_1^2 s_2(\alpha) - s_4(\alpha)]}{w_0 \eta_1^2 s_0(\alpha) (\Omega^2 - 1 + i\varepsilon \Omega)}}. \quad (2.5)$$

Из (2.5) видно, что вблизи плазменного резонанса, то есть при $\Omega \approx 1$, и при $\omega \approx \omega_p$ модуль нуля $|\eta_0(\alpha, \Omega, \varepsilon)|$ становится неограниченным при любых значениях безразмерного химического потенциала α в случае $\varepsilon \rightarrow 0$.

О существовании плазменной моды

Ноль η_0 является функцией параметров исходной системы уравнений μ , ω и v , или функцией параметров α , Ω , ε . Требуется найти область $D^+(\alpha)$, лежащую в плоскости параметров (Ω, ε) , такую, что если $(\Omega, \varepsilon) \in D^+(\alpha)$, то число нулей N дисперсионной функции $\Lambda(z)$ равно двум: $N = 2$. Через $D^+(\alpha)$ обозначим такую область на плоскости параметров, что число нулей дисперсионной функции равно нулю: $N = 0$. Кривую, являющуюся границей этих областей, обозначим через $L = L(\alpha)$.

Пусть множество физически значимых параметров (Ω, ε) заполняет четверть-плоскость $\mathbb{R}_+^2 = \{(\Omega, \varepsilon) : \Omega \geq 0, \varepsilon \geq 0\}$. Случай $\Omega \geq 0$ (или $\omega = 0$) отвечает внешнему стационарному электрическому полю, а случай $\varepsilon = 0$ (или $v = 0$) отвечает случаю бесстолкновительной плазмы.

Возьмём контур $\Gamma_\rho = C_\rho^+ \cup C_\rho^-$, состоящий из двух замкнутых полуокружностей C_ρ^+ и C_ρ^- радиуса $R = 1/\rho$, лежащих соответственно в верхней и нижней полуплоскостях; ρ – достаточно малое действительное положительное число;

$C_\rho^+ = \left\{ z = x + iy, |z| = \frac{1}{\rho}, |x \pm iy| \leq \frac{1}{\rho} \right\}$. Число R возьмём достаточно большим, что-

бы нули дисперсионной функции (если они существуют), лежали внутри области D_ρ , ограниченной контуром Γ_ρ . Заметим, что в пределе при $\rho \rightarrow 0$ область D_ρ переходит в область D_0 , ограниченную контуром $\Gamma_0 = \lim_{\rho \rightarrow 0} \Gamma_\rho$. Эта область совпадает с комплексной плоскостью с разрезом вдоль действительной оси.

В силу принципа аргумента число [9] нулей N дисперсионной функции в области D_ρ равно:

$$N = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_\rho} d \ln \Lambda(z).$$

После некоторых преобразований получаем:

$$N = \frac{1}{\pi i} \int_0^\infty d \ln \frac{\Lambda^+(\tau)}{\Lambda^-(\tau)} = 2\dot{u}_{\mathbb{R}_+}(G). \quad (3.1)$$

Здесь $\dot{u}_{\mathbb{R}_+}(G)$ – индекс функции $G(\tau) = \Lambda^+(\tau)/\Lambda^-(\tau)$, вычисленный вдоль положительной действительной полуоси.

Рассмотрим в комплексной плоскости кривую $\Gamma_\alpha = \Gamma(\alpha)$,

$$\Gamma(\alpha): z = G(\tau), 0 \leq \tau \leq +\infty.$$

Ясно, что $G(0) = 1$, $\lim_{\tau \rightarrow +\infty} G(\tau) = 1$. Следовательно, согласно (3.1), число нулей N равно удвоенному числу оборотов кривой $\Gamma(\alpha)$ вокруг начала координат, то есть

$$N = 2\dot{u}(G), \dot{u}(G) = \text{ind}_{[0, +\infty]} G(\tau).$$

Выделим у функции $G(\mu)$ действительную и мнимую части. Сначала представим функцию $G(\mu)$ в виде:

$$G(\mu) = \frac{\Omega^+(\mu)}{\Omega^-(\mu)},$$

где $\Omega^\pm(\mu) = (w_0 - 1)\eta_\Pi^2 + (\eta_\Pi^2 - \mu^2)\lambda_0(\mu, \alpha) \pm is(\mu, \alpha)(\eta_\Pi^2 - \mu^2)$,

$$s(\mu, \alpha) = \frac{\pi}{2s_0(\alpha)} \mu f_0(\mu, \alpha).$$

Заметим, что

$$w_0 - 1 = i \frac{\Omega}{\varepsilon}, \eta_\Pi^2 = \varepsilon r(\alpha)(\varepsilon - i\Omega), (w_0 - 1)\eta_\Pi^2 = -\Omega(\Omega + i\varepsilon)r(\alpha).$$

Выделим действительную и мнимую части у функций $\Omega^\pm(\mu)$. Имеем:

$$\Omega^{\pm}(\mu) = -P^{\pm}(\mu) - iQ^{\pm}(\mu),$$

где

$$P^{\pm}(\mu) = (1 + \gamma)^2 r(\alpha) + \lambda_0(\mu, \alpha)(\mu^2 - \varepsilon^2 r(\alpha)) \mp \varepsilon(1 + \gamma)r(\alpha)s(\mu, \alpha),$$

$$Q^{\pm}(\mu) = \varepsilon(1 + \gamma)r(\alpha)(1 + \lambda_0(\mu, \alpha)) \pm (\mu^2 - \varepsilon^2 r(\alpha))s(\mu, \alpha).$$

Коэффициент $G(\mu)$ представим в виде:

$$G(\mu) = \frac{P^+(\mu) + iQ^+(\mu)}{P^-(\mu) + iQ^-(\mu)}.$$

Тогда легко выделить действительную и мнимую части функции $G(\mu)$:

$$G(\mu) = \frac{P^+P^- + Q^+Q^-}{(P^-)^2 + (Q^-)^2} + i \frac{P^-Q^+ - P^+Q^-}{(P^-)^2 + (Q^-)^2},$$

или, кратко $G(\mu) = G_1(\mu) + iG_2(\mu)$,

$$\text{где } G_1(\mu) = \frac{g_1(\mu)}{g(\mu)}, \quad G_2(\mu) = \frac{g_2(\mu)}{g(\mu)}.$$

Здесь

$$\begin{aligned} g(\mu) &= [P^-(\mu)]^2 + [Q^-(\mu)]^2 = \\ &= [\Omega^2 r(\alpha) + \lambda_0(\mu, \alpha)(\mu^2 - \varepsilon^2 r(\alpha)) + \varepsilon \Omega r(\alpha)s(\mu, \alpha)]^2 + \\ &\quad + [\varepsilon \Omega (1 + \lambda_0(\mu, \alpha)) - s(\mu, \alpha)(\mu^2 - \varepsilon^2 r(\alpha))]^2, \\ g_1(\mu) &= P^+P^- + Q^+Q^- = [\Omega^2 r(\alpha) + \lambda_0(\mu, \alpha)(\mu^2 - \varepsilon^2 r(\alpha))]^2 + \\ &\quad + \varepsilon^2 \Omega^2 r^2(\alpha) \left[(1 + \lambda_0(\mu, \alpha))^2 - s^2(\mu, \alpha) \right] - (\mu^2 - \varepsilon^2 r(\alpha))^2 s^2(\mu, \alpha). \\ g_2(\mu) &= P^-Q^+ - P^+Q^- = 2s(\mu, \alpha) \{ [2\Omega r(\alpha) + \\ &\quad + \lambda_0(\mu, \alpha)(\mu^2 - \varepsilon^2 r(\alpha))] (\mu^2 - \varepsilon^2 r(\alpha)) + \varepsilon^2 \Omega^2 r^2(\alpha) (1 + \lambda_0(\mu, \alpha)) \}. \end{aligned}$$

Выделим (рис. 1, 2) на плоскости параметров (Ω, ε) однопараметрическое семейство кривую $L_\alpha = L(\Omega, \varepsilon)$, определяемую неявно заданными параметрическими уравнениями:

$$L_\alpha = L(\Omega, \varepsilon): g_1(\mu, \alpha, \Omega, \varepsilon) = 0, \quad g_2(\mu, \alpha, \Omega, \varepsilon) = 0, \quad 0 \leq \mu \leq +\infty,$$

такую, что при переходе через эту кривую индекс функции $G(\mu)$ на положительной полуоси меняется скачком.

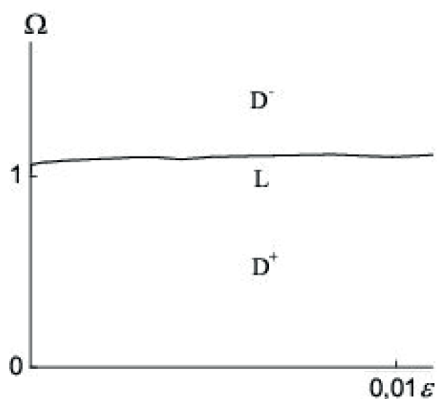


Рис. 1. Кривая L разделяет области D^+ и D^- . Случай $\alpha = -3$.

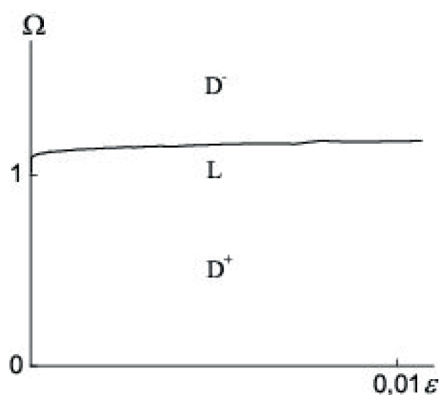


Рис. 1. Кривая L разделяет области D^+ и D^- . Случай $\alpha = 3$.

Каждая кривая L_α разбивает плоскость параметров (Ω, ε) на две области $D^+(\alpha)$ и $D^-(\alpha)$, такие, что при переходе точки (Ω, ε) из одной области в другую индекс функции $G(\mu)$ на положительной полуоси меняется скачком.

Так же, как и в [10], можно показать, что если $(\Omega, \varepsilon) \in D^+(\alpha)$, то $\dot{u}_{[0,+\infty]}(G) = 1$, а если $(\Omega, \varepsilon) \in D^-(\alpha)$, то $\dot{u}_{[0,+\infty]}(G) = 0$. В первом случае (индекс равен единице) замкнутая кривая Γ_α , введенная выше, один раз охватывает начало координат. Во втором случае (индекс равен нулю) замкнутая кривая не охватывает начало координат.

Из равенства (3.1) вытекает, что число нулей дисперсионной функции равно двум ($N = 2$), если $(\Omega, \varepsilon) \in D^+(\alpha)$, и дисперсионная функция нулей не имеет, если $(\Omega, \varepsilon) \in D^-(\alpha)$.

Отметим, что в работе [10] разработан метод исследования граничного режима, когда $(\Omega, \varepsilon) \in L_\alpha$.

Выведем явные параметрические уравнения кривой L_α , разделяющей четверть-плоскость параметров (Ω, ε) на две области $D^+(\alpha)$ и $D^-(\alpha)$.

Из уравнения $g_2 = (\mu, \alpha, \Omega, \varepsilon) = 0$ находим:

$$\Omega^2 = -\frac{1}{r(\alpha)} \cdot \frac{\lambda_0(\mu, \alpha)(\mu^2 - \varepsilon^2 r(\alpha))}{\mu^2 + \varepsilon^2 r(\alpha) \lambda_0(\mu, \alpha)}. \quad (3.2)$$

Возьмем уравнение $g_1 = (\mu, \alpha, \Omega, \varepsilon) = 0$. Преобразуем это уравнение с помощью равенства (3.2). Проведем эту выкладку в общем виде. Из уравнения $g_2 = P^+P^- - Q^+Q^-$ находим, что $P^- = P^+(Q^-/Q^+)$. Далее находим, что

$$g_1 \Big|_{g_2=0} = \left[P^+ P^- + Q^+ Q^- \right] \Big|_{P^- = \frac{Q^-}{Q^+} P^+} = \frac{Q^-}{Q^+} \left[(P^+)^2 + (P^-)^2 \right].$$

Ясно, что уравнение $g_1 \Big|_{g_2} = 0$ эквивалентно уравнению $Q^-(\mu) = 0$. Из этого уравнения и (3.2) находим параметрические уравнения семейства кривых L_α :

$$L_\alpha : \Omega = \sqrt{L_1(\mu)}, \varepsilon = \sqrt{L_2(\mu)}, 0 \leq \mu \leq +\infty. \quad (3.3)$$

В (3.3) введены обозначения:

$$L_1(\mu) = \frac{s_0(\alpha)}{s_2(\alpha)} \cdot \frac{\mu^2 \left[\lambda_0(\mu, \alpha) (1 + \lambda_0(\mu, \alpha)) + s^2(\mu, \alpha) \right]^2}{\left[-\lambda_0(\mu, \alpha) \right] \left[(1 + \lambda_0(\mu, \alpha))^2 + s^2(\mu, \alpha) \right]}$$

и

$$L_2(\mu) = \frac{s_0(\alpha)}{s_2(\alpha)} \cdot \frac{\mu^2 s^2(\mu, \alpha)}{\left[-\ddot{e}_0(\mu, \alpha) \right] \left[(1 + \ddot{e}_0(\mu, \alpha))^2 + s^2(\mu, \alpha) \right]}.$$

Итак, нами построена кривая L_α , являющаяся границей областей $D^+(\alpha)$ и $D^-(\alpha)$. Кривая Γ_α на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ определяется уравнениями:

$$\Gamma_\alpha : x = \operatorname{Re} \frac{\Lambda^+(\mu)}{\Lambda^-(\mu)}, y = \operatorname{Im} \frac{\Lambda^+(\mu)}{\Lambda^-(\mu)}, 0 \leq \mu \leq +\infty.$$

Подчеркнём, что кривая L_α на плоскости параметров (Ω, ε) определяется параметрическими уравнениями:

$$L_\alpha : \operatorname{Re} \frac{\Lambda^+(\mu, \alpha, \Omega, \varepsilon)}{\Lambda^-(\mu, \alpha, \Omega, \varepsilon)} = 0, \operatorname{Im} \frac{\Lambda^+(\mu, \alpha, \Omega, \varepsilon)}{\Lambda^-(\mu, \alpha, \Omega, \varepsilon)} = 0, 0 \leq \mu \leq +\infty.$$

Значение приведённого химического потенциала α при этом заполняет всю замкнутую числовую прямую: $-\infty \leq \alpha \leq +\infty$. При этом случай $\alpha = -\infty$ отвечает максвелловской плазме, а случай $\alpha = +\infty$ отвечает полностью вырожденной плазме.

Сформулируем выводы в терминах плазменной (дебаевской, или дискретной) моды: плазменная мода существует (или число нулей дисперсионной функции равно двум, или индекс коэффициента $G(\mu) = \Lambda^+(\mu)/\Lambda^-(\mu)$ равен единице на действительной полуоси), если $(\Omega, \varepsilon) \in D^+(\alpha)$, и плазменная мода отсутствует (или число нулей дисперсионной функции равно нулю, или индекс коэффициента равен нулю на действительной полуоси), если $(\Omega, \varepsilon) \in D^-(\alpha)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ван Кампен Н.Г.. Дисперсионное уравнение для волн в плазме. К теории стационарных волн в плазме // Сб. статей «Колебания сверхвысоких частот в плазме» / под. ред. Бернашевского Г.А. и Чернова З.С. М.: ИИЛ, 1961. С. 37–70.
2. Latyshev A.V., Suleimanova S. The analytical solution of the problem on plasma oscillations in half-space with diffusion boundary conditions [2016]. URL: <https://arxiv.org/abs/1701.01145>.
3. Латышев А.В., Юшканов А.А. Генерирование продольного тока поперечным электромагнитным полем в столкновительной вырожденной плазме // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2016. Т. 56. Вып. 9. С. 1667–1676.
4. Латышев А.В., Юшканов А.А. Продольный электрический ток в столкновительной плазме, генерируемый поперечным электромагнитным полем // Теоретическая и математическая физика. 2016. Т. 187. Вып. 1. С. 127–138.
5. Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Физическая кинетика. М.: Наука, 1979. 528 с.
6. Владимиров В.С., Жаринов В.В. Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 2000. 399 с.
7. Кадомцев Б.Б. Коллективные явления в плазме. М.: Наука, 1976. 238 с.
8. Ашкрофт Н., Мермин Н. Физика твердого тела. М.: Наука, 1970. 458 с.
9. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
10. Латышев А.В., Юшканов А.А. Нестационарная граничная задача для модельных кинетических уравнений при критических параметрах // Теоретическая и математическая физика. 1998. Т. 116. Вып. 2 (август). С. 305–320.

REFERENCES

1. Van Kampen N.G. The dispersion equation for plasma waves. In: Physica. 1957, Vol. XXIII, pp. 641–650.
2. Latyshev A.V., Suleimanova S. The analytical solution of the problem on plasma oscillations in half-space with diffusion boundary conditions [2016] [E-source]. URL: <https://arxiv.org/abs/1701.01145>.
3. Latyshev A.V., Yushkanov A.A. The generation of the longitudinal current by a transverse electromagnetic field in the collisional degenerate plasma. In: Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki [Computational mathematics and mathematical physics]. 2016, vol. 56, no. 9, pp. 1667–1676.
4. Latyshev A.V., Yushkanov A.A. Longitudinal electric current in the collisional plasma generated by the transverse electromagnetic field. In: Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika [Theoretical and mathematical physics]. 2016, vol. 187, no. 1, pp. 127–138.
5. Lifshits E.M., Pitaevskii L.P. Physical kinetics. Oxford, Pergamon Press., 1981.
6. Vladimirov V.S., Zharinov V.V. Uravneniya matematicheskoi fiziki [Equations of mathematical physics]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2000. 399 p.
7. Kadomtsev B.B. Kollektivnye yavleniya v plazme [Collective phenomena in plasma]. Moscow, Nauka Publ., 1976. 238 p.
8. Ashcroft N., Mermin N. Fizika tverdogo tela [Solid state physics]. Moscow, Nauka Publ., 1970. 458 p.
9. Gakhov F.D. Kraevye zadachi [Boundary value problems]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 640 p.
10. Latyshev A.V., Yushkanov A.A. Nonstationary boundary problem for model kinetic equations at critical parameters. In: Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika [Theoretical and mathematical physics]. 1998, vol. 116, no. 2 (August), pp. 305–320.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Латышев Анатолий Васильевич – д.ф.-м.н., профессор кафедры математического анализа и геометрии Московского государственного областного университета, заслуженный деятель науки РФ,
e-mail: avlatyshev@mail.ru

Сулейманова Севда Ширин кызы – аспирант кафедры математического анализа и геометрии Московского государственного областного университета,
e-mail: sevda-s@yandex.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Anatoly Latyshev – Doctor of Physico-mathematical sciences, full professor at the Department of mathematical analysis and geometry, Moscow Region State University;
e-mail: avlatyshev@mail.ru

Sevda Suleymanova – postgraduate student at the Department of mathematical analysis and geometry, Moscow Region State University;
e-mail: sevda-s@yandex.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Латышев А.В., Сулейманова С.Ш. Краевая задача Римана в проблеме о колебаниях плазмы с равновесным распределением Ферми-Дирака // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2017. № 1. С. 40–50.
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-1-40-50.

THE CORRECT REFERENCE TO ARTICLE

A. Latyshev, S. Suleymanova. Boundary value Riemann problem in the problem about oscillations of the plasma with the equilibrium distribution of Fermi-Dirac. In: *Bulletin of Moscow Region State University*. Series: Physics and Mathematics, 2017, no. 1, pp. 40–50.
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-1-40-50.

УДК 621.378+514.76

DOI: 10.18384/2310-7251-2017-1-51-56

О ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ ВСЕЛЕННОЙ ГЁДЕЛЯ

Андроникова Е.О.*Московский государственный технологический университет «СТАНКИН»,
127994, Москва, Вадковский пер., д. 1*

Аннотация. В работе рассматриваются геометрические свойства псевдориманова многообразия из серии «вселенные Гёделя». Устанавливается приводимость этого пространства. Доказывается, что вселенная Гёделя представляет собой двухпараметрическое семейство плоских двумерных вполне геодезических подмногообразий аффинной связности. Интегрируется система уравнений геодезических линий в элементарных функциях.

Ключевые слова: пространства аффинной связности, псевдоримановы многообразия, вселенная Гёделя, геодезические линии, квантовая теория информации, телепортация.

ON GEOMETRIC PROPERTIES OF GODEL UNIVERSE

E. Andronikova*Moscow State University of Technology «STANKIN»,
Vadkovskii per. 1, 105005 Moscow, Russian Federation*

Abstract. The paper examines the geometric properties of the pseudo-Riemannian affine connected manifold known as the 'Gödel Universe'. The reducibility of this space is established. It is proved that the Gödel Universe is a two-parameter family of two-dimensional flat geodesic submanifolds of affine connection. The system of equations, which determines geodesic lines, is solved in elementary functions.

Keywords: affine connected spaces, pseudo-Riemannian manifold, Gödel Universe, geodesic lines, quantum information theory, teleportation.

В настоящее время обострился интерес сообщества серьёзных и честных учёных к завлекательным тайнам мироздания. Революция в информатике, неуклонная эволюция в теоретической физике, в частности, в общей теории относительности, загадки, парадоксы и отчаянные гипотезы космологии (как будто строго теоретически доказана и частично экспериментально подтверждена возможность телепортации материальных тел, жаркая дискуссия о существовании и, вообще, проблематике «чёрных дыр», тополого-геометрическое решение проблем, сформулированных Анри Пуанкаре) – всё это стимулирует развитие классических и построение новых математических моделей, в первую очередь

в области дифференциальной геометрии. Свойства того, или иного «пространства – времени», на фоне которого разворачиваются конкретные материальные физические явления, оказывают существенное влияние на оценку результирующих параметров, необходимых для оптимального управления процессом.

В классической и широко известной работе [4] даётся полный вывод серии метрик псевдоримановых многообразий аффинной связности лоренцева типа. Каждое из этих пространств носит название вселенная Гёделя. В статье [6] рассматривается энергетический спектр заряженных скалярных частиц в одной из вселенных Гёделя из этого ряда – простейшей модели с космологическим вращением. В работе [3] выдвигается гипотеза о возможности телепортации в дифференциально-геометрической модели «Вселенная Гёделя». Обсуждаются особенности физического явления «мгновенного» распространения световых сигналов в пространстве-времени [5]. Приводится система обыкновенных дифференциальных уравнений, которая определяет уравнения геодезических линий пространства Гёделя, выведены некоторые первые интегралы. Настоящая статья является продолжением работы [3], в ней описываются некоторые дальнейшие результаты исследований. Система уравнений геодезических линий интегрируется в элементарных функциях.

Геометрия многообразия аффинной связности Гёделя в некоторой системе координат задается фундаментальной квадратичной формой:

$$ds^2 = (dt)^2 - (dx)^2 + \frac{1}{2} \exp(2\sqrt{2}\omega x) (dy)^2 + 2 \exp(2\sqrt{2}\omega x) dt dy - (dz)^2, \quad (1)$$

где ω – положительная постоянная, являющаяся угловой скоростью вращения вектора потока идеальной жидкости, заполняющей Вселенную Гёделя [6]. В выбранной системе координат ненулевые компоненты метрического тензора имеют вид:

$$g_{11} = 1, \quad g_{13} = g_{31} = \exp(\sqrt{2}\omega x),$$

$$g_{22} = -1, \quad g_{33} = (1/2) \exp(2\sqrt{2}\omega x), \quad g_{44} = -1.$$

$$\text{Инвариант } g = \det(g_{ii}) = -2^{-1} \exp(2\sqrt{2}\omega x).$$

Поскольку все компоненты метрического тензора с индексом 4, кроме g_{44} , равны нулю, то пространство Гёделя приводимо, то есть является декартовым произведением $M^3 \times R$, где M^3 – трёхмерное некомпактное псевдориманово многообразие сигнатуры $(+, -, -)$, а R – одномерное действительное пространство.

Уравнения геодезических линий в этой метрике имеют вид [3]:

$$\begin{cases} t'' = -\sqrt{2}\omega x' (2t' + \exp(\sqrt{2}\omega x) y'), \\ x'' = -\frac{1}{\sqrt{2}}\omega \exp(\sqrt{2}\omega x) y' (2t' + \exp(\sqrt{2}\omega x) y'), \\ y'' = 2\sqrt{2}\omega \exp(-\sqrt{2}\omega x) t' x', \\ z'' = 0, \end{cases} \quad (2)$$

где $t' = \frac{dt}{du}$, u -аффинный параметр вдоль геодезической линии; аналогично, производные от x, y, z берутся по u .

Первый интеграл этой системы уравнений геодезических линий имеет вид [3]:

$$\begin{aligned} (t')^2 + 2 \exp(\sqrt{2}\omega x) t' y' - (x')^2 + \frac{1}{2} \exp(2\sqrt{2}\omega x) (y')^2 - (z')^2 = \\ = \varepsilon k^2 = \text{const}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь индекс ε принимает значения -1 (временоподобная геодезическая линия), 0 (изотропная), 1 (пространственноподобная).

ТЕОРЕМА. Система дифференциальных уравнений геодезических линий (2) вселенной Гёделя в выбранной системе координат интегрируется в элементарных функциях.

Приведём эскиз доказательства теоремы. Частными решениями системы (2) являются следующее семейство:

$$\begin{cases} t = \gamma_1 u + \gamma_2, \\ x = \gamma_1 u + \gamma_3, \\ y = \frac{\sqrt{2}}{\omega} e^{-\sqrt{2}\omega(\gamma_1 u + \gamma_3)} + \gamma_4, \\ z = \gamma_5 u + \gamma_6, \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = c_1, \\ x = c_2 u + c_3, \\ y = c_4, \\ z = c_5 u + c_6. \end{cases} \quad (4)$$

В этих семействах решений индекс ε отрицателен, то есть эти семейства состоят из временоподобных незамкнутых геодезических линий. Из формул (4) следует, что вселенная Гёделя представляет собой двухпараметрическое семейство плоских двумерных вполне геодезических подмногообразий аффинной связности.

Найдём общее решение системы (2). Производя замену $v = y' \exp(\sqrt{2}\omega x)$, упрощаем исходную систему дифференциальных уравнений и получаем следующие первые интегралы:

$$t' + y' \exp(\sqrt{2}\omega x) = \frac{1}{2}m, \quad (5)$$

где $m = \text{const}$,

$$(x')^2 + \frac{1}{2}v^2 = \alpha, \quad (6)$$

где α – положительная константа. Без ограничения общности, далее можно считать, что α не равно нулю, иначе мы приходим к решению (4);

$$v = e^{\sqrt{2}\omega x} y' = m + ce^{-\sqrt{2}\omega x}, \quad (7)$$

где c – константа интегрирования. Решение исходной системы (2) имеет следующий вид в случае, когда $\alpha - \frac{m^2}{2} = 0$:

$$\begin{cases} t(u) = -\frac{mu}{2} + \frac{2}{\omega} \arctg(\omega m(u+d)) + \mu_2, \\ x(u) = \frac{1}{\sqrt{2}\omega} \left(\ln[\omega^2 m^2 (u+d)^2 + 1] + \ln\left[-\frac{c}{2m}\right] \right), \\ y(u) = \frac{2m^2(u+d)}{c(\omega^2 m^2 (u+d)^2 + 1)} + \mu_1, \\ z(u) = \mu_3 u + \mu_4, \end{cases} \quad (8)$$

где $\omega, c, m, d, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ – константы. Эти геодезические линии также являются временноподобными. Система (2) также допускает решение:

$$\begin{cases} t(u) = -\frac{mu}{2} + \frac{2}{\omega\gamma^2} \arctg\left[\gamma^{-1}\left(m\operatorname{tg}\left(2^{-1}\omega\gamma(u+\psi)\right) + \sqrt{2\alpha}\right)\right] + \psi_2, \\ x(u) = \frac{1}{\sqrt{2}\omega} \ln\left[c\left(-m - \sqrt{2\alpha}\right)\sin(\omega\gamma(u+\psi))\right] - \frac{\sqrt{2}}{\omega} \ln\gamma, \\ y(u) = \frac{\gamma\sqrt{2\alpha}}{c\omega} \frac{\cos(\omega\gamma(u+\psi))}{m + \sqrt{2\alpha}\sin(\omega\gamma(u+\psi))} + \psi_1, \\ z(u) = \psi_3 u + \psi_4. \end{cases} \quad (9)$$

Здесь $m, c, \alpha, \psi, \psi_1 - \psi_4$, – константы, $m^2 - 2\alpha > 0; \gamma = \sqrt{m^2 - 2\alpha} = \text{const}$

Замечание. Если $m^2 - 4\alpha - 4\psi_3^2 > 0$, то геодезическая линия пространственноподобная. Если $m^2 - 4\alpha - 4\psi_3^2 = 0$, то геодезическая линия изотропная. Если $m^2 - 4\alpha - 4\psi_3^2 < 0$, то геодезическая линия временноподобная.

В случай, когда $\alpha - \frac{m^2}{2} > 0$, система (2) допускает следующее решение:

$$\begin{cases} t(u) = -\frac{mu}{2} - \frac{2}{\omega\lambda} \arctg \left[(\lambda c)^{-1} \left[\exp(\omega\lambda(u+\psi)) + mc \right] \right] + \mu_1, \\ x(u) = -\frac{1}{\sqrt{2\omega}} \ln \frac{2 \exp(\omega\lambda(u+\psi))}{\left[\exp(\omega\lambda(u+\psi)) + mc \right]^2 + 2}, \\ y(u) = -\frac{2\lambda}{\omega} \frac{m \exp(\omega\lambda(u+\psi)) + 2c}{\left[\exp(\omega\lambda(u+\psi)) + mc \right]^2 + 2} + \mu_2, \\ z(u) = \mu_3 u + \mu_4, \end{cases} \quad (10)$$

где $\lambda = \sqrt{2\alpha - m^2}$, $2\alpha - m^2 > 0$, $m, \omega, c, \psi, \alpha, \mu_1 - \mu_4$ – константы.

Мы перебрали все возможные варианты, тем самым обзор доказательства теоремы завершается.

В явном виде посчитаны компоненты основных тензорных характеристик пространства Гёделя с метрикой (1). (При этом использован пакет программ «Математика–8»). Определенно прослеживается устойчивая аналогия исследуемого псевдориманова многообразия с пространством постоянной кривизны гиперболического типа (в частности скалярная кривизна $R = 2\omega^2$ постоянна). Вселенная Гёделя попадает в широкий класс многообразий аффинной связности, близких к симметрическим [1; 2]. Модели вселенных Гёделя (наряду с Миром де Ситтера, метрикой Шрёдингера и т.д.) безусловно уже востребованы в теоретической физике, общей теории относительности, космологии, информатике и в смежных науках. Исследование геометрических свойств всей серии пространств Гёделя актуально. Представляется, что в ближайшем будущем целесообразно: 1) уточнить геометрические свойства группы Ли (и соответствующей ей алгебры Ли) движений псевдориманова многообразия M^3 ; 2) найти касательную алгебру M^3 , используя технику теории неассоциативных универсальных алгебр; 3) подробно рассмотреть свойства (инфинитезимальных) гомотетий и параллельных переносов M^3 , опираясь на теорию дифференцируемых квазигрупп и луп.

ЛИТЕРАТУРА

1. Матвеев О.А., Нестеренко Е.Л. Алгебраическая теория пространств, близких к симметрическим: монография. Lap Lambert Academic Publishing, Germany, 2012. 125 с.
2. Матвеев О.А., Нестеренко Е.Л. Универсальные алгебры в теории пространств аффинной связности, близких к симметрическим: монография. М.: Изд-во МГОУ. 2012. 132 с.
3. Матвеева Е.О. Квантово-информационный подход к распространению сигналов во Вселенной Гёделя // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2013. № 2. С. 34–38.
4. Синг Дж. Л. Общая теория относительности. М.: ИЛ. 1963. 432 с.
5. Холево А.С. Квантовые системы, каналы, информация. М.: МЦНМО. 2010. 128 с.
6. Шикин Г.Н., Ющенко. Л.П. Энергетический спектр заряженных скалярных частиц во вселенной Гёделя // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Математика. Физика. 2011. № 3. С. 112–118.

REFERENCES

1. Matveev O.A., Nesterenko E.L. Algebraicheskaya teoriya prostranstv, blizkikh k simmetricheskim: monografiya [Algebraic theory of close-to-symmetric spaces: monograph]. Germany, Lap Lambert Academic Publishing, 2012. 125 p.
2. Matveev O.A., Nesterenko E.L. Universal'nye algebrы v teorii prostranstv affinnoi svyaznosti, blizkikh k simmetricheskim: monografiya [Universal algebras in the theory of close-to-symmetric spaces with affine connection: monograph]. Moscow, MRSU Publ., 2012. 132 p.
3. Matveeva E.O. The quantum-information approach to the distribution of signals in the Gödel Universe. In: Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika [Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics]. 2013, no. 2, pp. 34–38.
4. Synge J.L. Relativity: The General Theory. New York, North-Holland, Amsterdam, Interscience, 1960.
5. Kholevo A.S. Kvantovye sistemy, kanaly, informatsiya [Quantum systems, channels, information]. Moscow, MTSNMO Publ., 2010. 128 p.
6. Shikin G.N., Yushchenko. L.P. The energy spectrum of charged scalar particles in the Gödel universe. In: Vestnik Rossiiskogo universiteta druzhby narodov. Seriya: Matematika. Fizika [Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia. Series: Mathematics. Physics]. 2011, no. 3, pp. 112–118.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Андроникова Екатерина Олеговна – магистр, аспирант Московского государственного технологического университета «СТАНКИН»;
e-mail: ya.kmatveyeva@yandex.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Ekaterina Andronikova – postgraduate student, degree seeking candidate at the Moscow State University of Technology «STANKIN»;
e-mail: ya.kmatveyeva@yandex.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Андроникова Е.О. О геометрических свойствах вселенной Гёделя // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2017. № 1. С. 51–56.
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-1-51-56.

THE CORRECT REFERENCE TO ARTICLE

E. Andronikova. On geometric properties of the Gödel Universe. In: *Bulletin of Moscow Region State University*. Series: Physics and Mathematics. 2017. no. 1. pp. 51–56.
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-1-51-56.

УДК 519.216.2

DOI: 10.18384/2310-7251-2017-1-57-65

О НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЯХ, СВОДЯЩИХСЯ К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ С ТЕКУЩИМИ СКОРОСТЯМИ*

Макарова А.В., Демчук А.А., Новикова С.С.

Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина
394064, г. Воронеж, ул. Старых Большевиков, 54 «А», Российская Федерация

Аннотация. В работе рассматриваются дифференциальные включения с текущими скоростями в случае, когда правые части многозначны и удовлетворяют некоторым условиям. В этих условиях мы можем свести включения к дифференциальным уравнениям с текущими скоростями, для которых существование решений известно.

Ключевые слова: квадратичная производная в среднем, дифференциальные включения, текущая скорость.

ON SOME DIFFERENTIAL INCLUSIONS, WHICH REDUCE TO DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH THE CURRENT VELOCITIES

A. Makarova, A. Demchuk, S. Novikova

Zhukovsky – Gagarin Air Force Academy
ul. Starykh Bolshevikov 54A, 394064 Voronezh, Russian Federation

Abstract. We consider the differential inclusion with current velocities in the case when the right-hand side parts are multivalued and satisfy some conditions. In these conditions we can reduce the inclusion to a differential equation with current velocities for which the existence of solutions is known.

Key words: mean derivatives, current velocities, differential inclusions.

Многие важные в практическом отношении задачи сводятся к исследованию нового класса дифференциальных включений с производными в среднем. Понятие производных в среднем было введено Э. Нельсоном [8; 9; 10]. В последнее время большое развитие получила теория дифференциальных включений со стохастическими интегралами. Теория включений с производными в среднем является достаточно новым направлением. Огромный интерес для приложений представляют дифференциальные уравнения и включения с симметрической производной в среднем – текущей скоростью. Это прямой аналог обычной ско-

* Исследование частично поддержано грантами РФФИ 15-01-00620.

рости не случайных процессов. Такая аналогия позволяет рассматривать более широкий класс задач, чем стохастические дифференциальные включения в интегральной форме.

В работах Гликлиха Ю.Е. [2; 6] исследуются дифференциальные включения с производными в среднем справа, но при исследовании дифференциальных включений с текущими скоростями, не удаётся напрямую использовать стохастические интегралы, то есть для их исследования необходимы новые методы.

В данной работе исследуется специальный класс включений с многозначными правыми частями, удовлетворяющими некоторым условиям.

Предварительные сведения

Пусть T^n – плоский n -мерный тор (компактное многообразие, на котором все гладкие объекты ограничены и геометрические свойства унаследованы из $\mathbb{R}^n$ при факторизации по целочисленной решетке). Рассмотрим случайные процессы, заданные на некотором вероятностном пространстве (Ω, F, P) , $t \in [0, T] \subset \mathbb{R}$. Пусть $\xi(t)$ – такой процесс.

Обозначим через P_t^ξ σ -подалгебру F , порождённую прообразами борелевских множеств в T^n отображением $\xi(s) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ при $0 \leq s \leq t$. P_t^ξ называется «прошлым» для $\xi(t)$.

Обозначим через N_t^ξ σ -подалгебру F , порождённую прообразами борелевских множеств в T^n отображением $\xi(t) : \Omega \rightarrow T^n$; N_t^ξ называется «настоящим» для $\xi(t)$. P_t^ξ и N_t^ξ при всех t предполагаются полными, т.е. содержащими все множества вероятности ноль. Очевидным образом N_t^ξ – σ -подалгебра в P_t^ξ , E_t^ξ – условное математическое ожидание относительно N_t^ξ для $\xi(t)$.

Производная справа $D\xi(t)$ задаётся формулой

$$D\xi(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow +0} E_t^\xi \left(\frac{\xi(t + \Delta t) - \xi(t)}{\Delta t} \right), \quad (1)$$

где предел предполагается существующим в $L_1(\Omega, F, P)$.

Производная слева $D_*\xi(t)$ задаётся формулой

$$D_*\xi(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow +0} E_t^\xi \left(\frac{\xi(t) - \xi(t - \Delta t)}{\Delta t} \right). \quad (2)$$

Симметрическая производная $D_S = \frac{1}{2}(D + D_*)$ и антисимметрическая производная $D_A = \frac{1}{2}(D - D_*)$. Введём векторы $v^\xi(t, m)$ и $u^\xi(t, m)$ такие, что $D_S\xi(t) = v^\xi(t, m)$ и $D_A\xi(t) = u^\xi(t, m)$. Эти векторы существуют и называются регрессиями. Вектор $v^\xi(t) = v^\xi(t, \xi(t)) = D_S\xi(t)$ – текущая скорость процесса $\xi(t)$, а $u^\xi(t) = u^\xi(t, \xi(t)) = D_A\xi(t)$ – осмотическая скорость процесса $\xi(t)$.

Следуя [3], зададим дифференцирование D_2 формулой

$$D_2\xi(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow +0} E_t^\xi \left(\frac{(\xi(t + \Delta t) - \xi(t))(\xi(t + \Delta t) - \xi(t))^*}{\Delta t} \right), \quad (3)$$

где $(\xi(t + \Delta t) - \xi(t))$ – вектор-столбец (вектор в $\mathbb{R}^n$), а $(\xi(t + \Delta t) - \xi(t))^*$ – вектор строка (транспонированный или сопряжённый вектор). Результат этого матричного произведения – матрица ранга 1, но после взятия условного математического ожидания и перехода к пределу $D_2\xi(t)$ становится симметрической неотрицательно определенной матричной функцией на $[0, T] \times \mathbb{R}^n$. D_2 называется квадратичной производной в среднем. Она принимает значения во множестве симметрических неотрицательно определенных $(2, 0)$ тензоров.

В работе С. Азариной и Ю.Е. Гликлиха [5] утверждается: если известны текущая скорость и квадратичная производная в среднем (информация о коэффициенте диффузии процесса), то при некоторых условиях можно построить процесс, имеющий заданную текущую скорость и квадратичную производную.

Дифференциальные уравнения с текущими скоростями

Пусть $v(t, m)$ – векторное поле, $\alpha(t, m)$ – симметрическое неотрицательно определённое $(2, 0)$ -тензорное поле на торе T^n . Система

$$\begin{cases} D_S \xi(t) = v(t, \xi(t)) \\ D_2 \xi(t) = \alpha(t, \xi(t)) \end{cases} \quad (4)$$

называется *уравнением с текущими скоростями первого порядка*.

Определение 1. Говорят, что (4) на T^n имеет решение на $[0, T]$ с начальным условием $\xi(0) = \xi_0$, если существует вероятностное пространство (Ω, F, P) и процесс $\xi(t)$, заданный на (Ω, F, P) и принимающий значения в T^n , такой, что $\xi(0) = \xi_0$ и для почти всех $t \in [0, T]$ уравнение (4) выполняется P-п.н. для $\xi(t)$.

Замечание 1. В работе используется единственная известная в настоящее время теорема существования решений уравнения (4), доказанная С.В. Азариной и Ю.Е. Гликлихом [5], в предположениях, что правые части (4) гладки и ограничены вместе с первыми частными производными, а плотность распределения начального условия гладка и нигде не равна нулю.

Дифференциальные включения с текущими скоростями

Пусть $v(t, m)$ – многозначное векторное поле, $\alpha(t, m)$ – многозначное симметрическое положительно определённое $(2, 0)$ – тензорное поле на T^n .

Система вида

$$\begin{cases} D_S \xi(t) \in v(t, \xi(t)), \\ D_2 \xi(t) \in \alpha(t, \xi(t)). \end{cases} \quad (5)$$

называется дифференциальным включением с текущими скоростями первого порядка. Понятие решение включения (5) в точности аналогично понятию решения для уравнения с текущими скоростями, введённому в определении 1.

Рассматривается случай отсутствия гладких селекторов правых частей, но при этом существуют гладкие – ε_k аппроксимации с равномерно ограниченными первыми частными производными (откуда следует, что правые части имеют непрерывные селекторы).

Необходимо выполнение следующих условий:

условие 1. Векторное поле $v(t, m)$ на T^n – многозначно, автономно, равномерно ограничено и имеет замкнутые образы.

условие 2. $(2, 0)$ -тензорное поле $\alpha(t, m)$ на T^n – многозначно, автономно, равномерно ограничено и имеет замкнутые образы.

В этих условиях справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $v(t, m)$ удовлетворяет условию 1. $\alpha(t, m)$ удовлетворяет условию 2. Пусть существует последовательность положительных чисел $\varepsilon_k \rightarrow 0$ такая, что для любого ε_k поле $v(t, m)$ ($\alpha(t, m)$) имеет гладкую ε_k -аппроксимацию $v_i(t)$ ($\alpha_i(t)$, соответственно) и все эти аппроксимации имеют равномерно ограниченные одной и той же константой первые частные производные $\frac{\partial v^i}{\partial x^j}$

$(\frac{\partial \alpha^{ij}}{\partial x^l}, \text{соответственно})$. Рассмотрим случайный элемент ξ_0 со значениями в T^n , у которого распределение относительно формы объема Λ_E , подробнее в [5], равно $\sqrt{C\rho_0}$, где ρ_0 гладко и нигде не равно нулю. Тогда для начального условия $\xi(0) = \xi_0$ включение (4) имеет решение, определённое на всем интервале $t \in [0, T]$.

Доказательство. Из условия данной теоремы для последовательности положительных чисел $\varepsilon_i \rightarrow 0$ существуют последовательности $v_i(t)$ ($\alpha_i(t)$, соответственно) гладкие α_k -аппроксимаций. Тогда, согласно теореме Асколи, эти наборы аппроксимаций компактны относительно равномерной нормы, то есть можно выделить подпоследовательности v_k (соответственно, α_k) сходящиеся к непрерывным селекторам $v(t)$ ($\alpha(t)$, соответственно) в $v(t)$ ($\alpha(t)$, соответственно).

Обозначим компоненты поля $(\alpha_k(t))$ через α_k^{ij} . Из тензорных полей $\alpha_k(t)$ построим Римановы метрики $\alpha_k(\cdot, \cdot)$. Рассмотрим последовательность уравнений типа (4).

Для всех этих уравнений можно рассматривать одно и то же начальное условие ξ_0 , так как его плотности относительно $\alpha_k(\cdot, \cdot)$ совпадают между собой.

Известно, что аппроксимации v_k и α_k равномерно ограничены одной и той же константой, так как они являются ε_k -аппроксимациями равномерно ограниченных многозначных отображений. Также все эти ε_k -аппроксимации (по условию теоремы), заданные на компактном торе, для любого k , имеют равномерно ограниченные одной и той же константой первые частные производные $\frac{\partial v^i}{\partial x^j}$ ($\frac{\partial \alpha^{ij}}{\partial x^l}$, соответственно). Таким образом, уравнения (4) удовлетворяют условиям теоре-

мы о существовании решений, доказанной в [5]. То есть для каждого уравнения существует решение. Пусть ξ_k – решение k -го уравнения.

На Банаховом многообразии $C^0([0, T], T^n)$ непрерывных кривых в T^n введем σ -алгебру $\mathcal{C}$, порожденную цилиндрическими множествами, и обозначим через μ_k меру на $C^0([0, T], T^n, \mathcal{C})$, порожденную решением $\xi_k(t)$. Также введём семейство полных σ -подалгебр P_t , порождённых цилиндрическими множествами с основаниями над $[0, t]$, $t \in [0, T]$, и семейство полных σ подалгебр N_t , порождённых прообразами Борелевских множеств в T^n при отображении $x(\cdot) \rightarrow x(t)$. Ясно, что N_t является σ -подалгеброй в P_t и что P_t есть «прошлое», а N_t – «настоящее» для координатного процесса на $(C^0([0, T], T^n), \mathcal{C}, \mu_k)$.

В [7] было доказано следующее условие: множество мер $\{\mu_k\}$ на $C^0([0, T], T^n, \mathcal{C})$ слабо компактно. Исходя из этого можно выбрать подпоследовательность, которая слабо сходится к некоторой мере μ . Без ограничения общности, мы можем предположить, что последовательность μ_k слабо сходится к μ . Рассмотрим координатный процесс $\xi(t)$ на вероятностном пространстве $(C^0([0, T], T^n), \mathcal{C}, \mu)$, то есть для каждого элементарного события $x(\cdot) \in C^0([0, T], T^n)$ по определению $\xi(t, x(\cdot)) = m(t)$. Напомним, P_t – «прошлое» $\xi(t)$, а N_t – «настоящее» для этого же координатного процесса.

По построению $\xi_k(t)$ его квадратичная производная равна $\alpha_k(\xi(t))$. Таким образом, для любой ограниченной непрерывной вещественной функции f на $C^0([0, T], T^n)$, измеримой относительно N_t , при всех k выполняется равенство

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{C^0([0, T], T^n)} \left[\frac{(m(t + \Delta t) - m(t))(m(t + \Delta t) - m(t))^*}{\Delta t} - \alpha_k(m(t)) \right] f(m(\cdot)) d\mu_k = 0$$

Так как $\alpha_k(t, m)$ сходятся равномерно к $\alpha(t, m)$ при $k \rightarrow \infty$, выводим, что $\alpha_k(t, m(t))$ стремится к $\alpha(t, m(t))$ равномерно для всех μ_k включая μ .

Поле $\alpha(m(t))$ непрерывно на множестве полной меры μ на $(C^0([0, T], T^n))$, так как $\alpha(m)$ непрерывно на T^n .

Из равномерной сходимости при всех $m(\cdot)$ выводим, что при достаточно больших k

$$\sup_{m(\cdot), t} \|\alpha_k(m(t)) - \alpha(m(t))\| < \delta.$$

Поскольку $f(m(\cdot))$ ограничено, имеется некоторое число $\Xi > 0$ такое, что $|f(m(\cdot))| < \Xi$ для всех $(m(\cdot))$. Тогда

$$\left\| \int_{C^0([0, T], T^n)} [\alpha_k(m(t)) - \alpha(m(t))] f(m(\cdot)) d\mu_k \right\| < 2\delta\Xi$$

при всех достаточно больших k . Так как δ – произвольное положительное число, то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{C^0([0, T], T^n)} [\alpha_k(m(t)) - \alpha(m(t))] f(m(\cdot)) d\mu_k = 0.$$

Тогда $\alpha(m(t))$ – μ -п.н. непрерывна и ограничена на $(C^0([0, T], T^n))$. Так как меры μ_k слабо сходятся к μ , по Теореме 2 [1, параграф 1, гл. VI] имеем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{C^0([0, T], T^n)} \alpha(m(t)) f(m(\cdot)) d\mu_k = \int_{C^0([0, T], T^n)} \alpha(m(t)) f(m(\cdot)) d\mu.$$

Очевидно

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{C^0([0, T], T^n)} \left[(m(t + \Delta t) - m(t))(m(t + \Delta t) - m(t))^* \right] f(m(\cdot)) d\mu_k = \\ = \int_{C^0([0, T], T^n)} \left[(m(t + \Delta t) - m(t))(m(t + \Delta t) - m(t))^* \right] f(m(\cdot)) d\mu. \end{aligned}$$

Таким образом

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{C^0([0, T], T^n)} \left[\frac{(m(t + \Delta t) - m(t))(m(t + \Delta t) - m(t))^*}{\Delta t} - \alpha(m(t)) \right] f(m(\cdot)) d\mu = 0.$$

Так как $f(m(\cdot))$ – произвольная ограниченная непрерывная функция, измеримая относительно N_b , это означает, что $D_2 \xi(t) = \alpha(\xi(t))$. Но по построению $\alpha(\xi(t)) \in \alpha(\xi(t))\mu$ -п.н.

Далее нас будет интересовать текущая скорость решения.

По построению $D_S \xi_k(t) = v_k(t, \xi_k(t))$ для всех k . Это означает, что для любой вещественной ограниченной непрерывной функции f на $(C^0([0, T], T^n))$, измеримой относительно N_b , при любом k выполняется равенство

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{C^0([0, T], T^n)} \left[\frac{(m(t + \Delta t) - m(t - \Delta t))}{\Delta t} - v_k(m(t)) \right] f(m(\cdot)) d\mu_k = 0.$$

Выберем произвольное $\varepsilon > 0$. Т.к. μ_k слабо сходятся к μ , существует $K(\varepsilon)$ такое, что при $k > K(\varepsilon)$.

$$\begin{aligned} \left\| \int_{C^0([0, T], T^n)} [m(t + \Delta t) - m(t - \Delta t)] f(m(\cdot)) d\mu_k - \right. \\ \left. - \int_{C^0([0, T], T^n)} [m(t + \Delta t) - m(t - \Delta t)] f(m(\cdot)) d\mu \right\| < \varepsilon \end{aligned}$$

и

$$\left\| \int_{C^0([0, T], T^n)} f(m(\cdot)) v(m(t)) d\mu_k - \int_{C^0([0, T], T^n)} f(m(\cdot)) v(m(t)) d\mu \right\| < \varepsilon.$$

Таковыми же рассуждениями, как и выше, используя теорему Егорова, докажем, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{C^0([0, T], T^n)} [v_k(m(t)) - v(m(t))] f(m(\cdot)) d\mu_k = 0$$

и что v непрерывна на множестве полной меры. Напомним, что v ограничено как селектор ограниченного многозначного отображения.

Тогда по Теореме 2 [1, параграф 1, гл. VI] получаем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{C^0([0, T], T^n)} v(m(t)) f(m(\cdot)) d\mu_k = \int_{C^0([0, T], T^n)} v(m(t)) f(m(\cdot)) d\mu.$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{C^0([0, T], T^n)} [m(t + \Delta t) - m(t - \Delta t)] f(m(\cdot)) d\mu_k = \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{C^0([0, T], T^n)} [m(t + \Delta t) - m(t - \Delta t)] f(m(\cdot)) d\mu. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{C^0([0, T], T^n)} \left[\frac{(m(t + \Delta t) - m(t - \Delta t))}{\Delta t} - v(m(t)) \right] f(m(\cdot)) d\mu = 0,$$

так как $f(m(\cdot))$ – произвольная ограниченная непрерывная функция, измеримая относительно N_t . Это означает, что $D_s \xi_k(t) = v(\xi(t))$. Но по построению $v(\xi(t)) \in v(\xi(t))\mu$ -п.н. Теорема доказана.

Данный результат был анонсирован в тезисах [4].

ЛИТЕРАТУРА:

1. Гихман И.И., Скороход А.В. Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 1971. Т. 1. 496 с.
2. Гликлик Ю.Е. Глобальный и стохастический анализ в задачах математической физики. М.: Комкнига. 2005. 416 с.
3. Гликлик Ю.Е. Стохастические уравнения в производных в среднем и их приложения. II // Известия РАЕН, Серия МММИУ. 2000. Т. 4, № 4. С. 17-36.
4. Макарова А.В. О существовании решений стохастических дифференциальных включений с текущими скоростями I // Математика. Экономика Образование. IX Международный симпозиум «Ряды Фурье и их приложения». Материалы XXIV международной конференции по стохастическим методам. Ростов н/Д, 2016. С. 63.
5. Azarina S.V., Gliklikh Yu.E. On existence of solutions to stochastic differential equations with current velocities // Bulletin of the South Ural State University. Series Mathematical Modelling, Programming & Computer Software. 2015. Vol. 8. № 4. P. 100-106.
6. Gliklikh Yu.E. Global and Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Physics. Springer-Verlag London, 2011. 460p.
7. Makarova A.V., Yu.E. Gliklikh On stochastic differential inclusions with current velocities // Journal of Computational and Engineering Mathematics. 2015. Vol. 2, № 3. P. 25-33.
8. Nelson E. Derivation of the Schrodinger equation from Newtonian mechanics // Phys. Reviews. 1966. Vol. 150, №. 4.- P. 1079-1085.
9. Nelson E. Dynamical theory of Brownian motion. Princeton: Princeton University Press, 1967. 142 p.
10. Nelson E. Quantum fluctuations. Princeton: Princeton University Press, 1985. 147 p.

REFERENCES

1. Gikhman I.I., Skorokhod A.V. Teoriya sluchainykh protsessov. [The theory of random processes]. Vol. 1. Moscow, Fizmatlit, 1971. 496 p.

2. Gliklikh Yu.E. Global'nyi i stokhasticheskii analiz v zadachakh matematicheskoi fiziki [Global and stochastic analysis in problems of mathematical physics]. Moscow, Komkniga Publ., 2005. 416 p.
3. Gliklikh Yu.E. Stochastic equations in mean derivatives and their applications. II. In: Izvestiya RAEN, Seriya MMMIU [RAEN News, Series MMMIU]. Vol. 4. 2000, no. 4, pp. 17–36.
4. Makarova A.V. On the existence of solutions to stochastic differential inclusions with current velocities of I. In: Matematika. Ekonomika Obrazovanie. IX Mezhdunarodnyi simpozium "Ryady Fur'e i ikh prilozheniya". Materialy XXIV mezhdunarodnoi konferentsii po stokhasticheskim metodam [Math. Economy Education. IX international Symposium "Fourier Series and their applications". Materials of the XXIV international conference on stochastic methods]. Rostov n/D, 2016, p. 63.
5. Azarina S.V., Gliklikh Yu.E. On existence of solutions to stochastic differential equations with current velocities. In: Bulletin of the South Ural State University. Series Mathematical Modelling, Programming & Computer Software. 2015, vol. 8, no 4, pp. 100–106.
6. Gliklikh Yu. E. Global and Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Physics. Springer-Verlag London, 2011. 460 p.
7. Makarova A.V., Yu.E. Gliklikh. On stochastic differential inclusions with current velocities. In: Journal of Computational and Engineering Mathematics. 2015, vol. 2, no. 3, pp. 25–33.
8. Nelson E. Derivation of the Schrodinger equation from Newtonian mechanics. In: Phys. Reviews. 1966, vol. 150, no. 4, pp. 1079–1085.
9. Nelson E. Dynamical theory of Brownian motion. Princeton: Princeton University Press, 1967. 142 p.
10. Nelson E. Quantum fluctuations. Princeton: Princeton university press, 1985. 147 p.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Макарова Алла Викторовна – кандидат физико-математических наук, преподаватель 206 кафедры математики ВУНЦ ВВС «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина»;
e-mail: allagm@mail.ru

Демчук Анжелика Анатольевна – кандидат педагогических наук, доцент 206 кафедры математики ВУНЦ ВВС «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина»;
e-mail: angel_2268@mail.ru

Новикова Светлана Сергеевна – кандидат педагогических наук, старший научный сотрудник 21 НИО, 2 научно-исследовательского управления научно-исследовательского центра (проблем применения, обеспечения и управления авиацией ВВС) ВУНЦ ВВС «ВВА имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина»;
e-mail: sv281174@rambler.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Alla Makarova – PhD of Physico-mathematical sciences, lecturer of 206 Department of Math, MESCF AF "N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin Air Force Academy" (Voronezh);
e-mail: allagm@mail.ru

Anzhelika Demchuk – PhD of Pedagogic sciences, docent of 206 Department of Math, MESC AF “N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin Air Force Academy” (Voronezh);
e-mail: angel_2268@mail.ru

Svetlana Novikova – PhD of Pedagogic sciences, Senior researcher of the 21 Scientific and Research department of Scientific and Research Center, MESC AF “N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin Air Force Academy” (Voronezh);
e-mail: sv281174@rambler.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Макарова А.В., Демчук А.А., Новикова С.С. О некоторых дифференциальных включениях, сводящихся к дифференциальным уравнениям с текущими скоростями // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2017. № 1. С. 57–65.
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-1-57-65

THE CORRECT REFERENCE TO ARTICLE

A. Makarova, A. Demchuk, S. Novikova. On some differential inclusions, which reduce to differential equations with the current velocities. In: *Bulletin of Moscow Region State University*. Series: Physics and Mathematics. 2017. no. 1. pp. 57–65.
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-1-57-65

РАЗДЕЛ II. ФИЗИКА

УДК 523.9

DOI: 10.18384/2310-7251-2017-1-66-72

О ЯВЛЕНИИ РЕКОННЕКЦИИ В НИЖНИХ СЛОЯХ МАГНИТНОЙ ТРУБКИ. ЭКСПЕРИМЕНТ

Бегларян М.Е.

*Российского государственного университета правосудия (Северо-Кавказский филиал)
350002, г. Краснодар, ул. Леваневского, 187/1, Российская Федерация*

Аннотация: Как было показано ранее [1; 2], вариации интенсивностей γ -квантов аксионного происхождения, индуцированные посредством вариаций магнитного поля в тахоклине с посредством термомангнетного Эттингсгаузена-Нернста эффекта, вызывают вариации светимости Солнца и, в конечном счёте, характеризуют изменения активного и спокойного состояний Солнца. В работе показано, что полученные из уравнений с γ -квантами аксионного происхождения теоретические оценки хорошо согласуются с экспериментальными оценками времени и скорости подъёма всплывающих магнитных потоков до их появления на фотосфере.

Ключевые слова: динамо, магнитная трубка, магнитоконвекция, реконнекции, солнечные пятна, солнечные циклы, тахоклин.

ABOUT THE RECONNECTION PHENOMENON IN THE LOWER LAYERS OF A MAGNETIC TUBE. EXPERIMENT

M. Beglaryan

*North Caucasus Branch of the Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education "Russian State University of Justice"
ul. Levanevskogo 187/1, 350002 Krasnodar, Russian Federation*

Abstract: As previously shown [1; 2], variations in γ -quanta intensities of axion origin, induced by magnetic field variations in a tachocline by means of thermomagnetic Ettingshausen – Nernst effect, cause variations in solar luminosity and ultimately characterize the changes in active and

quiet Sun conditions. It is shown that the theoretical evaluation derived from the equations with γ -quanta of axion origin are in agreement with the experimental time evaluation and rise speed of emerging magnetic streams before they appear on the photosphere.

Keywords: dynamo, magnetic tube, magnetoconvection, rekonnektion, solar cycles, solar spots, tachocline.

Рассмотрим несколько важных вопросов, касающихся проблемы появления турбулентной реконнекции и деталей превращения Ω -подобной петли в O -подобную резким соединением «ножек», восстанавливающих исходное состояние азимутального поля и создающих условия для формирования следующей Ω -подобной петли в том же месте. Для этой цели, используя предельную концентрацию азимутального магнитного потока $B_{over} \sim 4 \cdot 10^7$ G (см. уравнение (27) в [1]) вблизи тахоклина, мы попытаемся дать физическую интерпретацию процесса овершута при тахоклине, а также сделать оценки скорости v_{rise} и времени τ_{rise} подъёма магнитной трубки из пограничного слоя овершута (рис. 1а).

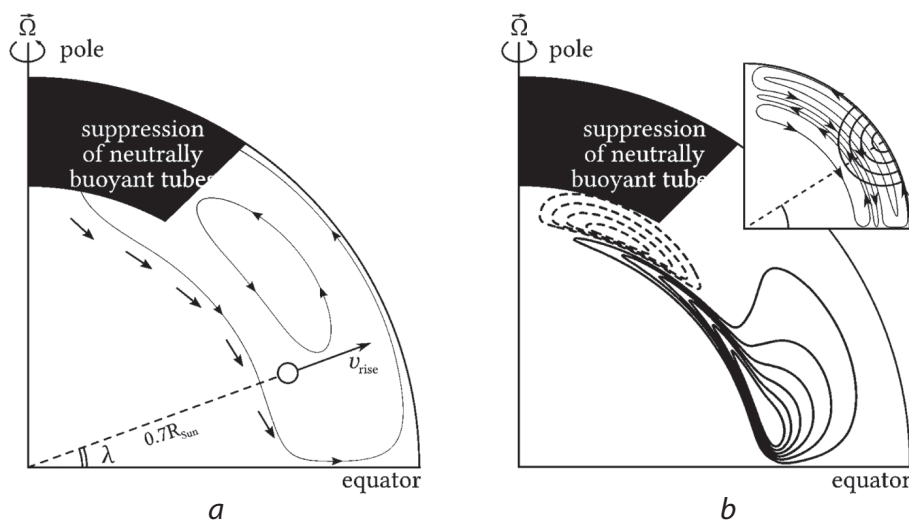


Рис. 1. (а) Меридиональное сечение северного полушария Солнца. Поток тороидальной трубки расположен на широте λ . Адаптировано из [3].

(b) Конфигурация тороидального поля в некоторый момент времени показывает пояс отрицательного тороидального поля (штриховые линии), вытесняемый ниже тахоклина (в стабильную область) проникающим потоком на высоких широтах, в то время как на низких широтах пояс положительного тороидального поля (сплошные линии) вытесняется в конвективную зону, откуда он может вырваться в виде солнечных пятен. Адаптировано из [4]. Вставка: диаграмма глубокой фокусировки схемы измерения времени-расстояния. Полуокруглыми кривыми показаны некоторые образцы траекторий акустических волн. Обтекаемые замкнутые кривые линии со стрелками, иллюстрирующие наши результаты, показывают принципиальную структуру меридиональной циркуляции. Серая область показывает нижнюю часть конвективной зоны – тахоклин – на уровне $0,7 R_{Sun}$.

Предположение о том, что почти пустые магнитные трубки (см. рис. 5а в [1]) являются нейтрально плавучими ($\rho_{\text{int}} = \rho_{\text{ext}}$ [5]), подразумевает, что температура внутри трубок ниже, чем температура во внешней среде (см. рис. 5а в [1]). Это приводит к притоку тепла и, следовательно, поток трубок из слоя овершута поднимается вверх [6]. Для горизонтальной трубки с поперечным сечением (радиус a) скорость подъёма следует из анализа Паркера [6], уравнения (60) из [3] и рис.1:

$$v_{\text{rise}} = 2 \frac{H_p}{\tau_d} \frac{B^2}{8\pi p_{\text{ext}}} \left(\delta + 0,12 \frac{B^2}{8\pi p_{\text{ext}}} \right)^{-1}, \quad (1)$$

где $H_p = \mathcal{R}T_{\text{ext}}/g = p_{\text{ext}}/gp_{\text{ext}} = 0,08R_{\text{Sun}}$ [7–9] – высота шкалы давления при тахоклине, T_{ext} и p_{ext} – температура и давление внешнего газа, $\delta \equiv Y = \nabla_e - \nabla_{\text{ad}} = -c_p^{-1} dS/d\xi = -c_p^{-1} H_p ds/dz$ – безразмерный градиент энтропии [3; 10; 11], $\nabla_e \equiv d\ln T_e/d\ln p_e$ и $\nabla_{\text{ad}} \equiv (\partial \ln T_e / \partial \ln p_e)_s$ – локальный и адиабатический градиенты температуры внешней и внутренней среды плазмы [3; 12; 13], s – удельная энтропия, c_p – удельная теплоёмкость при постоянном давлении, τ_d – время жизни радиационной и / или конвективной диффузии в пограничном слое овершута:

$$\tau_d = \frac{c_p \rho a^2}{\langle K \rangle} \left[1 + \left(\frac{dO}{dt} \right)_2 / \left(\frac{dO}{dt} \right)_1 \right]^{-1} \equiv \\ \equiv c_p \rho a^2 \left\{ \left[1 + \left(\frac{dO}{dt} \right)_2 / \left(\frac{dO}{dt} \right)_1 \right] \frac{c_p |F_{\text{tot}}|}{g} \left(1 + \frac{2}{5} \frac{\ell_{\text{ov}}}{H_p} \right)^{3.5} \right\}^{-1}, \quad (2)$$

где для полностью ионизированного газа $c_p = 2,5\mathcal{R}$, а $\mathcal{R}$ – газовая постоянная в уравнении состояния $p = \rho \mathcal{R} T$; $T(z)$ и $\rho(z)$ – средняя температура и плотность; $\langle K \rangle$ – усреднённая радиационная проводимость; $\ell_{\text{ov}} \approx 0,37 H_p$ [3; 14] – толщина овершутного слоя; F_{tot} – тотальная радиационная энергия потока, где величина $F_{\text{tot}} = L/(4\pi r^2)$ зависит от светимости Солнца (L); g – ускорение силы тяжести; $(dQ/dt)_1 = \nabla \cdot (\kappa_e \nabla T_e)$ – интенсивность радиационного нагрева, которая зависит только от термодинамических величин κ_e и T_e внешней плазмы, изменяющихся только от радиального расстояния от центра Солнца [3; 12]; второй член, впоследствии называемый $(dQ/dt)_2 (\approx 5,76 \kappa_e \delta T/a^2)$, представляет собой диффузное излучение через трубку потока из-за разницы температур ($\delta T = T - T_e$) между трубкой потока и внешней плазмы [15].

Используя условия гидростатического равновесия $dp/dz = \rho g$, при котором можно применить адиабатический градиент температуры $((dT/dz)_{\text{ad}} = g/c_p)$ и нейтральной плавучести потока трубки в овершутной области $(\delta T/T_e)^{-1} \sim \beta \equiv p_e/(B^2/8\pi)$, нетрудно получить оценку времени жизни радиационной диффузии в пограничном слое овершута:

$$\tau_d \approx |\delta T| c_p \rho \frac{a^2}{\delta z |F_{\text{tot}}|} \left[1 + \left(\frac{dO}{dt} \right)_2 / \left(\frac{dO}{dt} \right)_1 \right] \approx \frac{1}{2\beta} T_e \left[\frac{1}{c_p \rho_e} \left(\frac{dO}{dt} \right) \right]^{-1}, \quad (3)$$

где

$$\delta z \sim 1,25 \cdot 10^{-3} a \cong 10(\nabla_e / \nabla_{rad}) \cdot 1,25 \cdot 10^{-3} a, \quad (4)$$

$$\rho T \frac{dS}{dt} = \frac{dO}{dt} = \left(\frac{dO}{dt} \right)_1 \left[1 + \left(\frac{dO}{dt} \right)_2 / \left(\frac{dO}{dt} \right)_1 \right] \approx \left(\frac{dO}{dt} \right)_1 \left[1 + 14,5 \frac{1}{\beta} \left(\frac{H_p}{a} \right)^2 \right], \quad (5)$$

$$\left(\frac{dO}{dt} \right)_1 \approx F_{tot} \frac{\nabla_e}{\nabla_{rad}} \frac{1}{H_p}, \quad (6)$$

где вместо dT/dz применяли приближенное отношение $\delta T/\delta z$; $10\nabla_e \sim \nabla_{rad}$ – отношение локального и радиационного градиентов температуры внешней и внутренней среды плазмы (см. табл. 2 в [8]); $\delta z \sim 1,25 \cdot 10^{-3} H_p \sim 0,125a$ (по предположению); отношение $(dQ/dt)_1/(dQ/dt)_2 \approx (\nabla_e/5,76)(\delta T/T)^{-1}(a/H_p)^2$ [15]; $H_p/a \sim 100$ – фактор-множитель в нижней части конвективной зоны [3, с. 99–113].

Как следствие, с помощью уравнений (6) и (8–11) нетрудно показать, что с помощью уравнения (10) скорость подъема практически пустой магнитной трубки:

$$v_{rise} = H_p \nabla_{ad} \frac{1}{p_{ext}} \left(\frac{dO}{dt} \right) \left(\delta + 0,12 \frac{B^2}{8\pi p_{ext}} \right)^{-1}, \quad (7)$$

где $\nabla_{ad} \cong 0,4$, можно получить при условии $H_p/a \sim 100$ и любых значениях тороидального магнитного поля ($B \leq B_{over} \sim 4 \cdot 10^7$ G), которое, например, для малых полей $B \leq 10^4$ G, то есть при условии $(dQ/dt)_2/(dQ/dt)_1 \sim 0,1$ и, следовательно, при $(dQ/dt) \sim (dQ/dt)_1$, полностью совпадает с уравнением (30) из [15].

Учитывая следствия нелокальной теории длины перемешивания [3; 5; 12], что тонкие, нейтрально плавучие трубки в стабильно стратифицированной среде являются устойчивыми, можно считать, что напряженность поля находится ниже критического значения B_c , которое оценивается как:

$$\frac{B_c^2}{8\pi p_{ext}} = \gamma \delta = \frac{5}{3} \delta. \quad (8)$$

При этом из (1) и (8) следует, что трубки, находящиеся на грани устойчивости с $B \cong B_c$, будут подниматься со скоростью $v_{rise} \cong 2,8 H_p / \tau_d$. Поскольку напряжённость поля трубки находится в устойчивом состоянии в тонком слое овершута (толщина $l_{ov} = v_{rise} \cdot \tau_{rise} \approx 0,37 H_p$), магнитные трубки будут покидать слой овершута за время

$$\tau_{rise} \cong 0,13 \tau_d. \quad (9)$$

Согласно расчётам [3] можно показать, что с помощью предполагаемого радиуса магнитной трубки $a \sim 0,01 H_p$ нетрудно с помощью уравнения (9) получить оценки времени жизни радиационной диффузии в пограничном слое овершута

та – $\tau_d \sim 7,6$ года и времени подъёма магнитной трубки из пограничного слоя овершута – $\tau_{rise} \sim 1$ год.

Интересно отметить, что здесь имеется красивая и очень нужная нам задача, которая и связана с проблемой практически полного подавления радиационного нагрева в почти пустой магнитной трубке (см. рис. 2 в [1]). Напоминаем, что вблизи тахоклина фотоны, появляющиеся из приповерхностной радиационной области и проходящие через горизонтальное магнитное поле О-петли (см. рис. 5а в [1]), конвертируются в аксионы и, тем самым, практически полностью подавляют радиационный нагрев в почти пустой магнитной трубке. Но, с другой стороны, небольшой поток фотонов все-таки проходит через некоторое «кольцо» магнитной трубки, которое пропускает фотоны слева и справа между О-петлей и стенками трубки (рис. 5а в [1]), и доходит до полутени (пелумбра).

Отсюда понятно, что радиационный нагрев, проходящий через пограничный слой овершута, может пройти только через поперечное сечение горизонтального «кольца» магнитной трубки, при котором наша оценка зависит от теоретического значения площади «кольца» магнитной трубки

$$a_{axion}^2 \approx 2\pi a \cdot (0,8 - 3,5) \cdot 10^{-4} a \approx (0,5 - 2,2) \cdot 10^{-3} a^2 \quad (10)$$

для потока плавучих трубок со значительным супер-равнораспределением напряжённости магнитного поля [16]

$$B_{over} \approx 4 \cdot 10^7 G \geq \left(\frac{H_p}{a_{axion}} \right)^{1/2} B_{eq}, \quad (11)$$

где $B_{eq} \approx 6,1 \cdot 10^4 G$ находится в равнораспределении с кинетической энергией конвективных нисходящих потоков, при которой магнитная плавучесть трубки доминирует нисходящую гидродинамическую силу над конвективными нисходящими потоками и, как следствие, потоки трубок могут подниматься на поверхность независимо от конвекции [16].

Отсюда нетрудно показать, что с помощью горизонтальной трубки с поперечным сечением (15) скорость и время подъёма магнитной трубки следуют из оценки [3; 6] (см. наши уравнения (3) и (1)) или (8) и (12) (аналог [15]):

$$(\tau_{rise})_{axion} \cong 0,13(\tau_d)_{axion} \sim (0,25 - 1) day, \quad (12)$$

$$(v_{rise})_{axion} \cong \frac{0,37 H_p}{(\tau_{rise})_{axion}} = \frac{2,8 H_p}{(\tau_d)_{axion}} \sim (0,3 - 1,2) km/s. \quad (13)$$

Недавно были проведены наблюдения [17–20], в которых были зарегистрированы значительные магнитные возмущения на глубине около 42–75 Mm (т.е. $\sim 0,9 R_{Sun}$) и было показано, что эти возмущения связаны с магнитными образованиями, поднимающимися со средней скоростью 0,3 – 1,4 км/с и выходящими на поверхность за время от нескольких часов до 2 дней после регистрации этих возмущений. Интересно отметить, что теоретические оценки, полученные с помощью уравнений (12) и (13) удивительно хорошо согласуются с экспериментальными оценками времени и скорости подъёма всплывающих магнитных потоков [17–20].

ЛИТЕРАТУРА/REFERENS

1. Rusov V.D., Sharph I.V., Eingorn M.V., Smolyar V.P., Beglaryan M.E. Thermomagnetic Ettingshausen – Nernst effect in tachocline and axion mechanism of Sun luminosity. arXiv:1508.03836.
2. Giannotti M., Irastorza I., Redondo J., Ringwald A.. Cool WISPs for stellar cooling excesses. JCAP 05. 2016. 057. arXiv:1512.08108.
3. Van Ballegoijen A.A.. The overshoot layer at the base of the solar convective zone. Astron. Astrophys. 113. 1982. pp. 99–112.
4. Nandy D. and Choudhuri A.R. “Explaining the Latitudinal Distribution of Sunspots with Deep Meridional Flow”. In: Science, 2002, Vol. 296, no. 5573, pp. 1671–1673. doi:10.1126/science.1070955.
5. Spruit H.C., van Ballegoijen A.A.. Stability of toroidal flux tubes in stars. In: Astronomy Astrophysics, 1982, Vol. 106, pp. 58–66.
6. Parker E.N.. Sunspots and the physics of magnetic flux tubes. I – The general nature of the sunspot. II – Aerodynamic drag. In: Astrophysical Journal. 1979, Vol. 230, pp. 905–923.
7. Böhm-Vitense E.. Über die Wasserstoffkonvektionszone in Sternen verschiedener Effektivtemperaturen und Leuchtkräfte. In: Z. Astrophysics. 1958, no. 46, pp. 108–143.
8. Spruit H.C.. Magnetic Flux Tubes and Transport of Heat, PhD Thesis, Utrecht University. The Netherlands. 1977.
9. Brun A.S., Miesch M.S., Toomre J. Modeling the dynamical coupling of solar convection with the radiative interior. In: Astrophysical journal. 742. 79. 2011. doi:10.1088/0004-637X/742/2/79.
10. Smolec R., Moscalik P. Convective hydrocodes for radial stellar pulsation. Physical and numerical formation. In: Acta Astronomica. 2008, no. 58, pp. 193–232.
11. Smolec R., Moscalik P. Non-linear modelling of beat Cepheids: resonant and non-resonant models. A&A 524, A40. 2010.
12. Spruit H.C. A model of the solar convective zone. In: Solar Physics. 1974, no. 34, pp. 277–290.
13. Christensen-Dalsgaard J., Monteiro M.J.P.F.G., Thompson M.J. Helioseismic estimation of convective overshoot in the Sun. In: Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 1995, no. 276, pp. 283–292.
14. Christensen-Dalsgaard J., Monteiro M.J.P.F.G., Rempel M., Thompson M.J. A more realistic representation of overshoot at the base of the solar convective envelope as seen by helioseismology. In: Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2011, no. 414, pp. 1158–1174.
15. Fan Y., Fisher G.H. Radiative Heating and the Buoyant Rise of Magnetic Flux Tubes in the Solar interior. In: Solar Physics. 166, 17. 1996.
16. Fan Yu. Magnetic Fields in the Solar Convection Zone. Living Reviews in Solar Physics. 2009. 6, 4. doi: 10.12942/lrsp-2009-4.
17. Ilonidis S., Zhao J., Kosovichev A. Detection of Emerging Sunspot Regions in the Solar Interior. Science 333. 2011. P. 993. doi:10.1126/science.1206253.
18. Ilonidis S., Zhao J., Kosovichev A. Response to Comment on “Detection of Emerging Sunspot Regions in the Solar Interior”. 2012. Science 336. P. 296.
19. Ilonidis S., Zhao J., Hartlep T. Helioseismic investigation of emerging magnetic flux in the solar convective zone. The Astrophysical Journal. 777:138. 2013.
20. Kosovichev A.G., Zhao J., Ilonidis S. Local Helioseismology of Emerging Active Regions: A Case Study. arXiv:1607.04987.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Бегларян Маргарита Евгеньевна – кандидат физико-математических наук, доцент, профессор кафедры, заведующий кафедрой социально-гуманитарных и естественнонаучных дисциплин Северо-Кавказского филиала ФГБОУВО «Российский государственный университет правосудия»;
e-mail: rita_beg@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Margarita Beglaryan – candidate of physico-mathematical sciences, assistant Professor, Professor & Head of the Department of the Humanities, Social and Scientific Studies of the North Caucasus Branch of the Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education “Russian State University of Justice”, Head of the HSSS, NCB “Russian State University of Justice”;
e-mail: rita_beg@mail.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Бегларян М.Е. О явлении реконнекции в нижних слоях магнитной трубки. Эксперимент // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2017. № 1. С. 66–72.
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-1-66-72.

THE CORRECT REFERENCE TO ARTICLE

M. Beglaryan. About the reconnection phenomenon in the lower layers of a magnetic tube. Experiment. In: *Bulletin of Moscow Region State University*. Series: Physics and Mathematics. 2017. no. 1. pp. 66–72.
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-1-66-72.

УДК 538.9

DOI: 10.18384/2310-7251-2017-1-73-80

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ КЮРИ ДЛЯ ФЕРРОМАГНИТНОГО СПЛАВА С СОДЕРЖАНИЕМ Fe-B-Cr

Терезанова К.В.

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
10500, г. Москва, 2-я Бауманская, д. 5, Российская Федерация

Аннотация. В статье приводится анализ мессбауэровского спектра аморфного сплава $\text{Fe}_{70}\text{Cr}_{15}\text{B}_{15}$ и восстановленных распределений изомерных и квадрупольных сдвигов, магнитных сверхтонких полей в диапазоне температур от 16 до 293 К. Рассматриваются температурные зависимости ширины линии полученного спектра и восстановленных из него распределений его основных характеристик, что позволило определить температуру Кюри. Полученные данные позволили установить количество состояний атомов железа, которыми описывается локальная структура сплава $\text{Fe}_{70}\text{Cr}_{15}\text{B}_{15}$.

Ключевые слова: температура Кюри, эффект Мессбауэра, магнитные сверхтонкие структуры, изомерный сдвиг, магнитное квадрупольное взаимодействие.

DETERMINATION OF THE CURIE TEMPERATURE FOR THE FERROMAGNETIC ALLOY WITH Fe-B-Cr

K. Terezanova

Bauman Moscow State Technical University
2-ya Baumanskaya ul. 5/1, 105005 Moscow, Russian Federation

Abstract. In this article is represented the analysis of Mossbauer spectrum of amorphous alloy $\text{Fe}_{70}\text{Cr}_{15}\text{B}_{15}$ and recovered distributions of isomer shifts and quadrupole, magnetic hyperfine fields in the range of temperatures from 16 to 293 K. We are explored the temperature dependence of the line width of the obtained spectrum and recovered from it the distribution of its main characteristics. The data obtained allowed to set the number of States of iron atoms, which describes the local structure of the alloy $\text{Fe}_{70}\text{Cr}_{15}\text{B}_{15}$. Also at the end of the work is made the conclusion about the position of the point of transition of the alloy from ferromagnetic to paramagnetic state, i.e. the behavior of the temperature dependencies determined for the amorphous sample the Curie temperature.

Key words: Curie temperature, Mossbauer effect, magnetic hyperfine structure, isomer shift, magnetic-quadrupole interaction.

Введение

Аморфные сплавы FeB имеют широкий спектр различных физических свойств. В ряде работ были исследованы фазовый состав, намагниченность, температура магнитного перехода (температура Кюри) и другие характеристики аморфных сплавов [1–6]. Присутствие в таких сплавах дополнительно s-, p-, d-атомов приводит к изменению локальной структуры, что, в свою очередь, существенным образом влияет на физические свойства материалов. Влияние этих примесных атомов на локальную атомную и магнитную структуру, а также на ближний порядок аморфных сплавов на основе Fe-B практически не исследовано.

Локальная структура и ближний порядок в аморфных сплавах являются определяющими для получения необходимых физических свойств, в том числе и магнитных. Исследования структуры материалов Fe-B показали, что добавление в такие сплавы примеси переходных 3d-атомов приводит к изменению их магнитных свойств. Это привело к разработке новых магнитомягких аморфных сплавов для радиотехники, электроники, находящих широкое применение в промышленности [6; 7]. Таким образом, детальные исследования локальной атомной и магнитной структуры аморфных сплавов на основе железа и бора, а также состава локальных фаз в этих сплавах являются актуальной задачей современной физики.

В данной статье описаны результаты обработки спектров ленточек сплава $\text{Fe}_{70}\text{Cr}_{15}\text{B}_{15}$, а также приведён анализ полученных из них температурных зависимостей ширины мессбауэровского спектра, восстановленных распределений магнитных сверхтонких полей, изомерных и квадрупольных сдвигов. Образцы аморфных сплавов толщиной 20 мкм и шириной 10 мм были получены стандартным методом закалки из расплава поливом тонкой струйки жидкого металла на быстровращающийся охлаждаемый диск (методом спиннингования). Мессбауэровские спектры поглощения измерялись при температурах от 16K до 293K с помощью спектрометра MS-1104Ем в режиме постоянной скорости. Для восстановления распределения сверхтонких полей $P(H)$, изомерных $P(\delta)$ и квадрупольных $P(\epsilon)$ сдвигов из мессбауэровских спектров использовалась программа DISTRI [8].

Результаты

Мессбауэровские спектры на ядрах ^{57}Fe сплава $\text{Fe}_{70}\text{Cr}_{15}\text{B}_{15}$ и восстановленные с помощью программы DISTRI распределения изомерных и квадрупольных сдвигов и магнитных сверхтонких полей были исследованы в работах [9–13].

На рис. 1 представлены мессбауэровский спектр и восстановленные распределения изомерного и квадрупольного сдвигов для рассматриваемого образца $\text{Fe}_{70}\text{Cr}_{15}\text{B}_{15}$ в ферромагнитном состоянии при комнатной температуре. Спектр данного образца имеет форму дублета со смещённым центром тяжести, то есть спектр является асимметричным (рис. 1а).

На рис. 1б представлено распределение изомерных сдвигов, причем изомерные пики в распределении $P(\delta)$ принадлежат соответствующим квадрупольным дублетам. Изомерный сдвиг определяется значением центра тяжести каждой

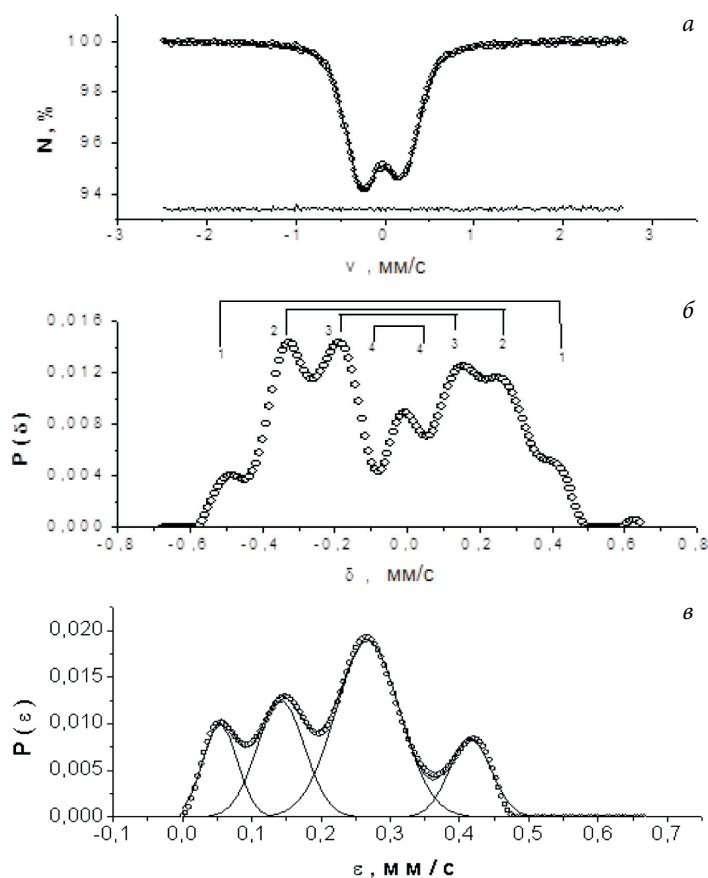


Рис. 1. Для сплава $\text{Fe}_{70}\text{Cr}_{15}\text{B}_{15}$ при комнатной температуре приведены:

- а) мессбауэровский спектр на ядрах ^{57}Fe ;
- б) восстановленное распределение изомерных сдвигов $P(\delta)$;
- в) восстановленное распределение квадрупольных сдвигов $P(\epsilon)$.

пары дублетов. Расстояние между соответствующей парой изомерных сдвигов определяет значение квадрупольного сдвига дублета. Как видно из рис. 1б, наиболее вероятное число таких пар не менее четырёх.

Из рис. 1в при разложении распределения $P(\epsilon)$ квадрупольных сдвигов на парциальные компоненты по Гауссу видно, что число таких компонент равно четырём. Это говорит, о том, что аморфный сплав $\text{Fe}_{70}\text{Cr}_{15}\text{B}_{15}$ состоит из четырёх наиболее вероятных локальных состояний атомов железа, различающихся значениями как квадрупольных, так и изомерных сдвигов.

На рис. 2 приведены спектры сплава при температурах 200K, 90K и 16K и соответствующие им восстановленные распределения сверхтонких полей, разложенные на компоненты по Гауссу. Распределения $P(H)$ ведут себя по-разному при трёх представленных температурах. При низких температурах наблюдается широкое распределение магнитных сверхтонких полей. Число наиболее вероятных магнитных состояний железа равно четырём.

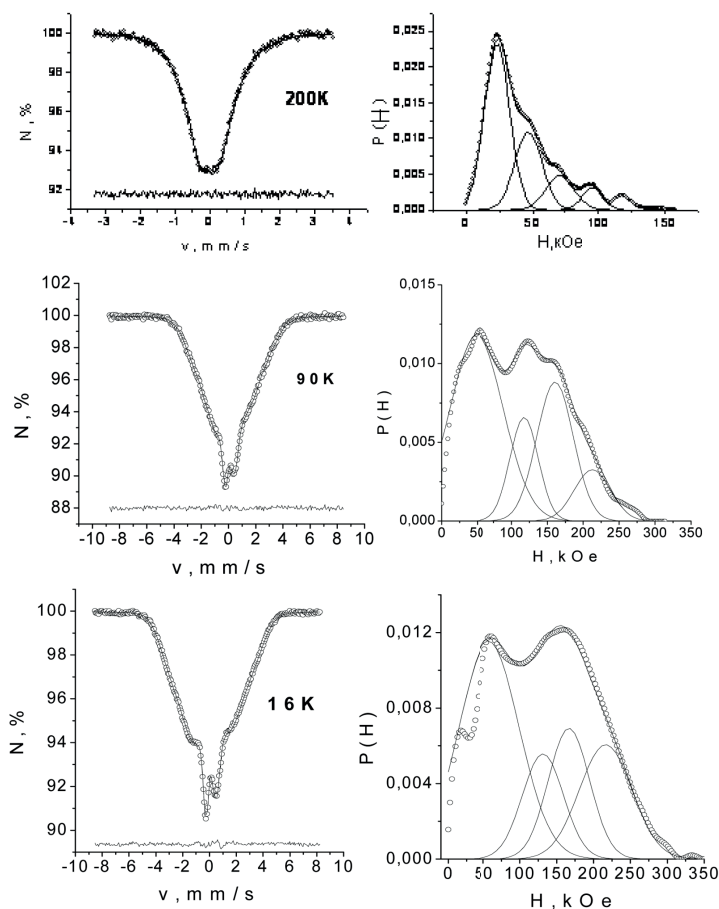


Рис. 2. Мессбауэровские спектры на ядрах ^{57}Fe сплава $\text{Fe}_{70}\text{Cr}_{15}\text{B}_{15}$ и разложения распределений $P(H)$ на парциальные составляющие Гаусса при 200К, 90К и 16К.

При $T = 200\text{K}$ наблюдается узкое распределение сверхтонких полей $P(H)$ с четырьмя наиболее вероятными состояниями железа. При этой температуре наиболее вероятные состояния атомов железа (максимумы в $P(H)$) имеют сверхтонкие поля в области значений 20–40 кЭ.

Максимум $P(H)$ при 16К приходится на область полей 150–200 кЭ. При низких температурах наибольший вклад в распределение $P(H)$ дают состояния атомов железа с высокими значениями сверхтонких полей.

На рис. 3 приводятся температурные зависимости ширины $\Delta P(I)$ мессбауэровского спектра, максимальных H_m и средних H_{cp} сверхтонких полей, максимальных δ_m и средних δ_{cp} изомерных сдвигов, максимальных ϵ_m и средних ϵ_{cp} квадрупольных сдвигов аморфного сплава $\text{Fe}_{70}\text{Cr}_{15}\text{B}_{15}$ в области температур 16–293К.

Основная задача изучения данных температурных зависимостей состояла в исследовании характера поведения приводимых графиков и определении из них точки Кюри – температуры, при которой ферромагнитные сплавы переходят в парамагнитное состояние и соответственно меняют свои свойства.

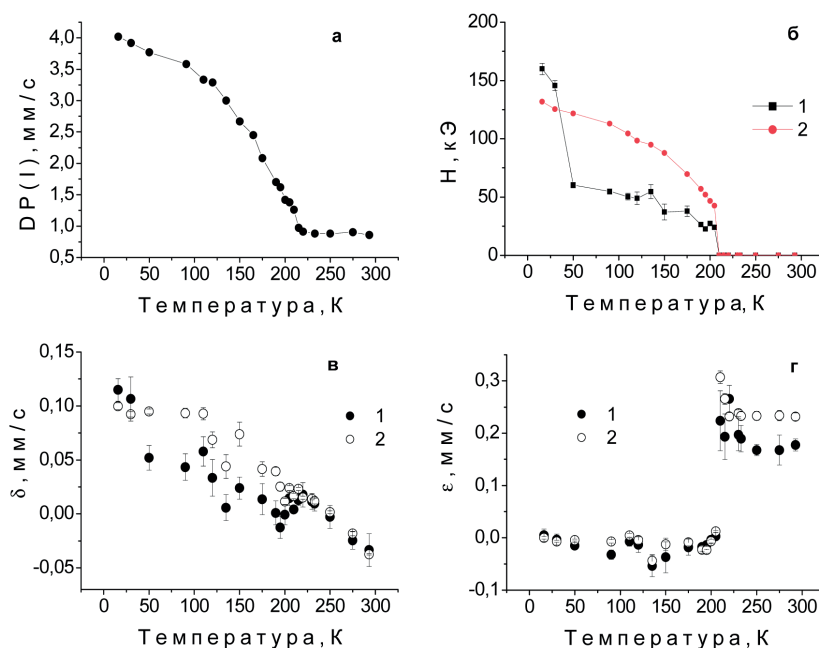


Рис. 3. Температурная зависимость (данные для аморфного сплава $\text{Fe}_{70}\text{Cr}_{15}\text{B}_{15}$): а) ширины $\Delta P(I)$ спектра; б) максимальных H_m (1) и средних H_{cp} (2) сверхтонких полей; в) максимальных δ_m (1) и средних δ_{cp} (2) изомерных сдвигов; г) максимальных ϵ_m (1) и средних ϵ_{cp} (2) квадрупольных сдвигов.

Температура магнитного перехода для сплавов, содержащих Fe и B хорошо изучена в работах [1–3; 16; 17]. Как показано в данных статьях, температура Кюри таких сплавов превышает 500 K и изменяется в зависимости от количественного содержания железа и бора в образцах. Однако при добавлении примесей температура магнитного упорядочения значительно изменяется. Известно, что обмен, происходящий между атомами железа и хрома, является антиферромагнитным. Следовательно, обменное взаимодействие такого рода приводит к снижению температуры Кюри ферромагнитного образца. Рассмотрим подробно, как влияет присутствие хрома в сплаве $\text{Fe}_{70}\text{Cr}_{15}\text{B}_{15}$ на его температуру магнитного перехода.

На рис. 3а представлена температурная зависимость ширины спектра. В парамагнитном состоянии ширина не меняется при варьировании температуры. До точки Кюри образец находится в ферромагнитном состоянии, и за счёт магнитной составляющей ширина спектра изменяется в зависимости от температуры. Это объясняет характер поведения приведённого графика для сплава $\text{Fe}_{70}\text{Cr}_{15}\text{B}_{15}$. При повышении температуры от 0 K до 215 K ширина уменьшается, а при дальнейшем повышении температуры становится постоянной, что и свидетельствует о наличии температуры Кюри в точке 215(2) K.

В парамагнитном состоянии магнитных сверхтонких полей нет, поскольку необходимым условием их существования является наличие у данного атома или у соседних ему атомов ненулевого электронного магнитного момента. Из рис. 3б

видно, что при температуре выше 215K значения максимальных H_m и средних H_{cp} сверхтонких полей принимают нулевые значения, что и свидетельствует о переходе сплава в парамагнитное состояние. Стоит также обратить внимание на поведение графиков в ферромагнитном состоянии, то есть при температуре ниже предполагаемой температуры Кюри. График максимальных распределений $P(H)$ на достаточно большом интервале температур располагается значительно ниже, чем график средних значений сверхтонких полей, отвечающих центрам тяжести распределений $P(H)$. При температуре 90K значения максимальных и средних сверхтонких полей приближаются друг к другу, а в области низких температур (ниже 16K) значения сверхтонких полей H_m больше H_{cp} . Это говорит о том, что при низких температурах в распределении сверхтонких полей наиболее вероятны состояния атомов Fe с наибольшими локальными магнитными моментами.

На рис. 3в показаны изменения значений максимальных и средних изомерных сдвигов в зависимости от температуры. Как видно из приведённого графика, характер поведения значений максимальных и средних изомерных сдвигов практически одинаковый в достаточно большом диапазоне температур. А именно, в диапазоне от 0K до 215K максимальные δ_m (1) и средние δ_{cp} (2) изомерные сдвиги претерпевают спад с увеличением температуры. При этом максимальные значения изомерных сдвигов практически всегда находятся ниже средних значений. Однако при переходе образца из ферромагнитного в парамагнитное состояние оба набора значений практически совпадают.

Как показано на рис. 3г, при температуре 215K наблюдается изменение характера поведения температурных зависимостей максимальных и средних квадрупольных сдвигов. Так, обе зависимости ведут себя при увеличении температуры примерно одинаково, имея на всем диапазоне температур практически одно и то же значение квадрупольного сдвига. При прохождении точки со значением $T = 215K$ оба набора значений квадрупольных сдвигов претерпевают резкий скачок, и средние значения квадрупольного сдвига оказываются выше их максимальных значений.

Заключение

Изучение мессбауэровских спектров и температурных зависимостей сверхтонких магнитных полей, изомерных и квадрупольных сдвигов в диапазоне температур от 16 до 293K в аморфном сплаве $Fe_{70}Cr_{15}B_{15}$ показали, что:

- 1) локальная структура аморфных сплавов может быть описана четырьмя состояниями атомов железа;
- 2) температура Кюри аморфного сплава $Fe_{70}Cr_{15}B_{15}$ составляет $215 (\pm 2)$ K.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Покатилов В.С. Ближний атомный порядок в аморфных сплавах Fe-B // Металлофизика. 1983. Т. 5. Вып. 6. С. 96–100.
2. Елсуков Е.П., Ульянов А.Л., Колодкин Д.А., Порсев В.Е. Кинетика механохимического растворения хрома в железе // Коллоидный журнал. 2016. Т. 78. Вып. 4. С. 426–430.
3. Удовский А.Л., Васильев Д.А. Применение физических моделей для компьютерного моделирования термодинамических свойств и фазовых равновесий ОЦК-растворов

- системы Fe-Cr // Вестник Новгородского государственного университета им. Ярослава Мудрого. 2013. Т. 73-2. С. 51–56.
4. Pokatilov V.S., Dmitrieva T.G. Ближний порядок в аморфных ферромагнитных сплавах Fe-B // Известия РАН. 2009. Т. 73. Вып. 8. С. 1159–1162.
 5. Chien C.L., Musser D., Gyorgy E.M., Sherwood R.C., Chien H.S., Luborsky F.E., Walter J.L. Magnetic properties of amorphous Fe_xB_{100-x} and crystalline Fe₃B // Phys. Rev. B. 1979. Vol. 20. No 1. P. 283–295.
 6. Пустов Ю.А., Балдохин Ю.В., Опара Б.К., Колотыркин П.Я., Овчаров В.П., Кислогубов И.А. О термической стабильности аморфного сплава Fe-Cr-B // Физика металлов и металловедение. 1988. Т. 65. Вып. 1. С. 159–167.
 7. Глезер А.М., Молотиллов Б.В., Овчаров В.П., Утевская О.Л., Чичерин Ю.Е. Структура и механические свойства сплавов Fe-Cr-B при переходе из аморфного состояния в кристаллическое // Физика металлов и металловедение. 1987. Т. 64. Вып. 6. С. 1106–1109.
 8. Русаков В.С. Восстановление функций распределения сверхтонких параметров мессбауэровских спектров локально неоднородных систем // Известия РАН. Серия физическая. 1999. Т. 63. Вып. 7. С. 1389–1396.
 9. Вертхейм Г. Эффект Мессбауэра. М.: Мир, 1966. 172 с.
 10. Кузьмин Р.Н., Винтайкин Б.Е. Мессбауэровская спектроскопия сплавов. М.: Изд-во Московского университета, 1991. 96 с.
 11. Винтайкин, Б. Е. Физика твёрдого тела: учеб. пособие. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2008. 360 с.
 12. Русаков В.С. Мёссбауэровская спектроскопия локально неоднородных систем. Алматы: Институт ядерной физики, 2000. с. 430.
 13. Винтайкин Б.Е. Беляков Н.А., Чудаков И.Б., Саидахметов П.А., Турмамбеков Т.А. Физическое моделирование получения наноструктур в сплавах с высокой демпфирующей способностью на основе системы Fe-Cr // Инженерный журнал: наука и инновации. 2015. Вып. 4. С. 1–12.
 14. Дроздова М.А., Батырев И.Г., Прокошин А.Ф., Махоткин В.Е., Корытов В.В. Магнитная и электронная структура аморфных сплавов Fe-M-B (M = V, Cr, Mn) // Физика твёрдого тела. 1986. Т. 28. Вып 8. С. 2486–2491.

REFERENCES

1. Pokatilov V.S. The near atomic order in amorphous Fe-B alloys. In: Metallofizika [Metallophysics]. 1983, vol. 5, iss. 6. pp. 96–100.
2. Kinetics of mechanic-chemical dissolution of chromium in iron, Elsukov E.P., Ul'yanov A.L., Kolodkin D.A., Porsev V.E. In: Kolloidnyi zhurnal [Colloid journal]. 2016, vol. 78, iss. 4. pp. 426–430.
3. Udovskii A.L., Vasil'ev D.A. The use of physical models for computer simulation of the thermodynamic properties and phase equilibria of BCC solutions of the Fe – Cr system. In: Vestnik Novgorodskogo gosudarstvennogo universiteta im. Yaroslava Mudrogo [Bulletin of Novgorod State University n.a. Yaroslav The Wise]. 2013, vol. 73-2, pp. 51–56.
4. Pokatilov V.S., Dmitrieva T.G. Short-range order in amorphous ferromagnetic Fe – B alloys. In: Izvestiya RAN [News of Russian Academy of Sciences]. 2009, vol. 73, iss. 8, pp. 1159–1162.
5. Chien C.L., Musser D., Gyorgy E.M., Sherwood R.C., Chien H.S., Luborsky F.E., Walter J.L. Magnetic properties of amorphous Fe_xB_{100-x} and crystalline Fe₃B In: Phys. Rev. B. 1979, vol. 20, iss. 1, pp. 283–295.

6. On thermal stability of amorphous Fe – Cr – B alloy, Pustov Yu.A., Baldokhin Yu.V., Opara B.K., Kolotyркиn P.Ya., Ovcharov V.P., Kislogubov I.A. In: Fizika metallov i metallovedenie [Physics of metals and metallography]. 1988, vol. 65, iss. 1, pp. 159–167.
7. Structure and mechanical properties of Fe – Cr – B alloys at the transition from the amorphous state to the crystalline, Glezer A.M., Molotilov B.V., Ovcharov V.P., Utevsкая O.L., Chicherin Yu.E. In: Fizika metallov i metallovedenie [Physics of metals and metallography]. 1987, vol. 64, iss. 6, pp. 1106–1109.
8. Rusakov V.S. Restoration of distribution functions of hyperfine parameters of Mossbauer spectra of locally inhomogeneous systems. In: Izvestiya RAN. Seriya fizicheskaya [News of Russian Academy of Sciences. Series physical]. 1999, vol. 63, iss. 7, pp. 1389–1396.
9. Vertkheim G. Effekt Messbauera [Mossbauer Effect]. M., Mir, 1966. 172 p.
10. Kuz'min R.N., Vintaikin B.E. Messbauerovskaya spektroskopiya splavov [Mossbauer spectroscopy of alloys]. Moscow, Moscow University Publ., 1991. 96 p.
11. Vintaikin B. E. Fizika tverdogo tela: uchebnoe posobie [Solid state physics: textbook]. Moscow, MGTU im. N. E. Baumana Publ., 2008. 360 p.
12. Rusakov V.S. Messbauerovskaya spektroskopiya lokal'no neodnorodnykh sistem [Mossbauer spectroscopy of locally inhomogeneous systems]. Almaty, Instituty of Nucleous physics Publ., 2000. 430 p.
13. Physical modeling of nanostructures in alloys with high damping capacity based on the Fe – Cr system, Vintaikin B.E., Belyakov N.A., Chudakoev I.B., Saidakhmetov P.A., Turmambekov T.A. In: Inzhenernyi zhurnal: nauka i innovatsii [Engineering journal: science and innovation]. 2015, iss. 4, pp. 1–12.
14. Magnetic and electronic structure of amorphous Fe – M – B alloys (M=V, Cr, Mn), Drozdova M.A., Batyrev I.G., Prokoshin A.F., Makhotkin V.E., Korytov V.V. In: Fizika tverdogo tela [Physics of the solid state]. 1986, vol. 28, iss. 8, pp. 2486–2491.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Терезанова Ксения Васильевна – магистрант кафедры физика Московского государственного технического университета имени Н.Э. Баумана;
e-mail: kseniya-t94@yandex.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Kseniya Terezanova – postgraduate student of the Department of Technical Physics at the Bauman Moscow State Technical University;
e-mail: kseniya-t94@yandex.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Терезанова К. В. Определение температуры Кюри для ферромагнитного сплава с содержанием Fe-B-Cr // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2017. № 1. С. 73–80.
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-1-73-80.

THE CORRECT REFERENCE TO ARTICLE

K. Terezanova. Determination of the Curie temperature for the ferromagnetic Fe – B – Cr alloy. In: *Bulletin of Moscow Region State University*. Series: Physics and Mathematics, 2017, no. 1, pp. 73–80.
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-1-73-80.

УДК: 535

DOI: 10.18384/2310-7251-2017-1-81-89

СПЕКТРОСКОПИЯ СТОП-ЗОН ОДНОМЕРНОГО ФОТОННОГО КРИСТАЛЛА НА ОСНОВЕ ОКСИДА АЛЮМИНИЯ

Горелик В.С.^{1,2}, Яшин М.М.²

¹ *Физический институт имени П.Н. Лебедева РАН,
119991, Москва, Ленинский проспект, д. 53, Российская Федерация*

² *Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана,
105005, г. Москва, 2-я Бауманская, д. 5, Российская Федерация*

Аннотация. Зарегистрированы спектры отражения широкополосного излучения от поверхности одномерного фотонного кристаллов на основе оксида алюминия. Установлена угловая зависимость спектральных положений второй стоп-зоны одномерного фотонного кристалла. Рассчитан закон дисперсии электромагнитных волн в исследуемом образце. Анализируется возможность применений мезопористых одномерных фотонных кристаллов на основе оксида алюминия в качестве селективных узкополосных светофильтров.

Ключевые слова: фотонный кристалл, стоп-зона, узкополосный фильтр, формула Френеля, формула Брэгга.

SPECTROSCOPY OF STOP-BANDS OF ONE-DIMENSION PHOTONIC CRYSTALS – POROUS ALUMINIUM OXIDE

V. Gorelik^{1,2}, M. Yashin²

¹ *P.N. Lebedev Physical Institute of the Russian Academy of Sciences,
Leninsky prosp. 53, 119991 Moscow, Russian Federation*

² *Bauman Moscow State Technical University,
2-ya Baumanskaya ul. 5/1, 105005 Moscow, Russian Federation*

Abstract. Reflectance spectra of broadband radiation from the surface of one-dimensional photonic aluminum oxide crystals are investigated. The angular dependence of the second stop-band spectral position is estimated. The dispersion law of electromagnetic waves in the samples is calculated. The possibility of application of mesoporous one-dimensional photonic aluminum oxide crystals as selective narrow-band filters is analyzed.

Keywords: photonic crystal, stop-band, narrow-band filter, Fresnel formula, Bragg formula.

Введение

В настоящее время весьма актуальным является создание диэлектрических материалов с управляемыми оптическими свойствами. В связи с этим большой интерес исследователей вызывают так называемые фотонные кристаллы [1–4] – среды, диэлектрическая проницаемость которых периодически изменяется в пространстве с периодом, допускающим брэгговскую дифракцию света. Простейшим представителем фотонных кристаллов являются одномерные фотонные кристаллы, построенные из чередующихся слоев с двумя различными показателями преломления n_1 и n_2 . В спектре отражения такого кристалла наблюдаются так называемые запрещённые зоны (стоп-зоны). Стоп-зона представляет собой интервал частот, в пределах которого свет, распространяющийся в определённых направлениях, экспоненциально затухает. Спектральное положение стоп-зон зависит от показателей преломления слоёв, периода соответствующей кристаллической решётки и угла падения излучения на поверхность кристалла.

К настоящему времени разработан способ создания одномерных мезопористых фотонных кристаллов, основанный на электрохимическом травлении слоев оксида алюминия во время его анодирования из электролита [5; 6]. Тем самым реализуется «двухкомпонентный» одномерный фотонный кристалл, состоящий из большого числа двойных слоёв с различной степенью пористости. В результате были сформированы одномерные фотонные кристаллы на основе пористого оксида алюминия [5].

В данной работе была поставлена задача исследования спектров стоп-зон пористого одномерного фотонного кристалла на основе оксида алюминия и установления возможности управления его оптических свойствами.

Экспериментальная часть

На рис. 1 приведена экспериментальная схема установки для электрохимического травления алюминиевой пластины. При этом осуществляется периодическое изменение силы тока в цепи для изменения степени пористости смежных слоёв формируемой наноструктуры.

В результате процесса окисления алюминия в кислоте электролита происходит формирование мезопористого оксида алюминия с периодическим изменением степени пористости в смежных слоях. После многочасового процесса травления образуется мезопористый одномерный фотонный кристалл с конечным (200–300) числом периодов. Величина периода кристаллической решётки зависит от режима травления и составляет 200–400 нм.

На рис. 2 представлена фотография поверхности алюминиевой пластины, протравленной в процессе анодирования. В центре образца (область 3) находится фотонно-кристаллическая пленка пористого оксида алюминия. Данная плёнка окружена кольцевым слоем (область 2), состоящим из фотонно-кристаллической пленки пористого оксида алюминия, находящейся на алюминиевой подложке. Оставшаяся часть поверхности образца (область 1) соответствует чистому алюминию.

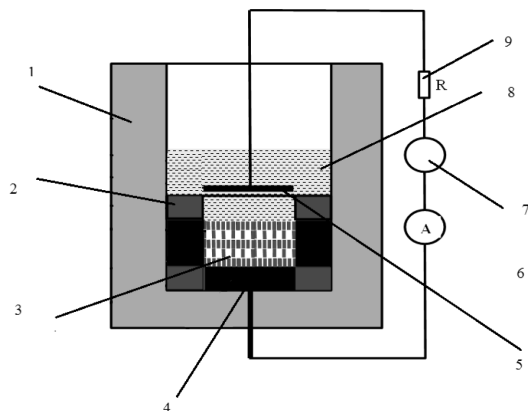


Рис. 1. Экспериментальная схема получения мезопористых фотонно-кристаллических плёнок оксида алюминия при электрохимическом травлении алюминиевой пластины;

1 – цилиндрический сосуд; 2 – диэлектрик; 3 – образец; 4 – анод; 5 – катод;
6 – амперметр; 7 – источник тока; 8 – кислота; 9 – сопротивление

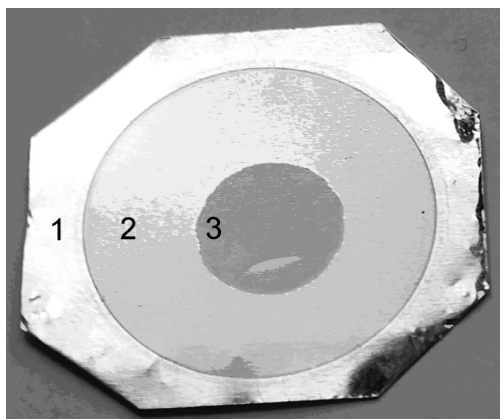


Рис. 2. Вид поверхности пористого фотонного кристалла на основе оксида алюминия;

1 – поверхность алюминия; 2 – поверхность фотонно-кристаллической плёнки, протравленной на алюминии; 3 – поверхность фотонно-кристаллической плёнки.

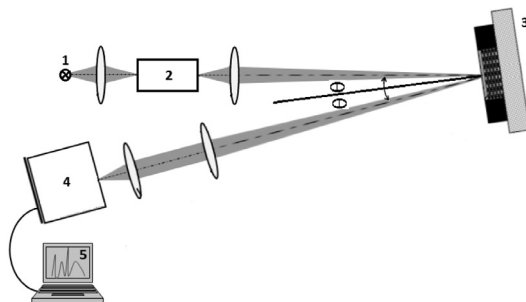


Рис. 3. Схема экспериментальной установки. 1 – ксеноновая лампа, 2 – монохроматор, 3 – фотонный кристалл, 4 – приёмник излучения, 5 – компьютер.

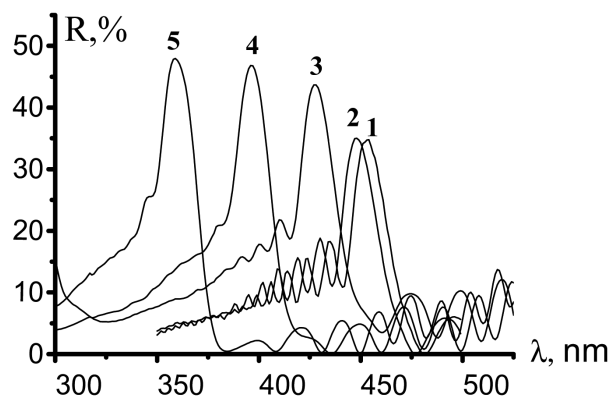


Рис. 4. Спектры отражения широкополосного излучения от поверхности фотонно-кристаллического образца при различных углах падения θ (Рис. 3) излучения на поверхность фотонного кристалла;

1 – $\theta = 8^\circ$, 2 – $\theta = 15^\circ$, 3 – $\theta = 30^\circ$, 4 – $\theta = 45^\circ$, 5 – $\theta = 60^\circ$ градусов.

Схема экспериментальной установки для получения спектров зеркального отражения широкополосного излучения от поверхности фотонно-кристаллической плёнки при различных углах падения приведена на рис. 3.

Методика получения спектров отражения при нормальном падении этого излучения на поверхность фотонного кристалла изложена ранее в работе [9]. Спектры отражения излучения ксеноновой лампы от поверхности исследуемого образца, зарегистрированные при различных углах падения на поверхность плёнки (8° , 15° , 30° , 45° , 60°), соответствующие второй стоп-зоне, приведены на рис. 4.

Из известного соотношения [7] для угловой зависимости спектрального положения стоп-зон одномерного фотонного кристалла получаем:

$$m\lambda_B = 2a\sqrt{n_{ef}^2 - \sin^2 \theta}; \quad m = 1, 2. \quad (1)$$

Здесь a – период кристаллической решётки фотонного кристалла,

$$n_{ef}^2 = n_1^2 \eta + n_2^2 (1 - \eta); \quad \eta = 1/2.$$

В рассматриваемом случае анализа второй стоп-зоны ($m = 2$) получаем:

$$\lambda_B^2 = a^2 n_{ef}^2 - a^2 \sin^2 \theta. \quad (2)$$

В связи с этим была построена зависимость квадрата длины волны λ_B^2 от $\sin^2 \theta$. Как видно из рис. 5, такая зависимость носит линейный характер, что согласуется с соотношениями (1) и (2).

Для нормального падения соотношение (1) при $m = 2$ принимает вид:

$$\lambda_B = a n_{ef}. \quad (3)$$

На основе полученных данных об угловой зависимости длин волн λ_B максимумов интенсивности спектров отражения и соотношений (2) и (3) были вы-

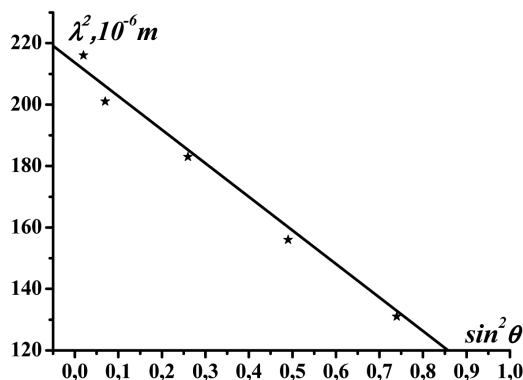


Рис. 5. Линейная зависимость квадрата длины волны λ_B^2 от $\sin^2 \theta$.

числены значения периода исследуемого фотонного кристалла и эффективного показателя преломления: $n_{ef} = 1,7$; $a = 270$ нм; $n_1 = 1,60$, $n_2 = 1,79$.

Теоретический анализ

Для анализа наблюдаемых оптических свойств одномерного фотонного кристалла воспользуемся моделью Кронига-Пенни. При этом закон дисперсии электромагнитных волн в одномерном фотонном кристалле с бесконечным числом слоёв определяется выражением [8]:

$$\cos ka = \cos k_1 a_1 \times \cos k_2 a_2 - \frac{1}{2} \left(\frac{n_1}{n_2} + \frac{n_2}{n_1} \right) \sin k_1 a_1 \cdot \sin k_2 a_2. \quad (4)$$

Здесь n_1 и n_2 – показатели преломления слоёв композита, толщины которых равны a_1 и a_2 , $k_1 = \frac{\omega}{c} n_1$; $k_2 = \frac{\omega}{c} n_2$; $c = 3 \times 10^8$ м/с – скорость света в вакууме;

$a = a_1 + a_2$ — период кристаллической структуры.

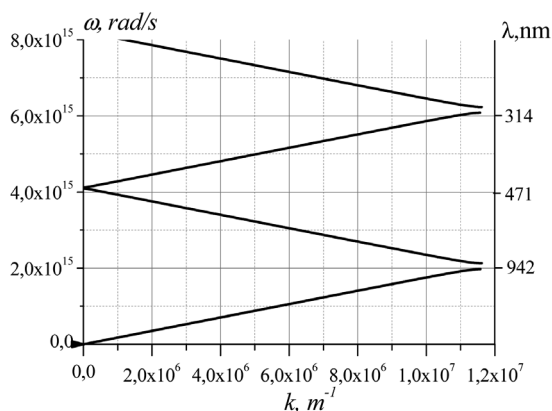


Рис. 6. Дисперсионная зависимость $\omega(k)$ мезопористого фотонного кристалла на основе оксида алюминия.

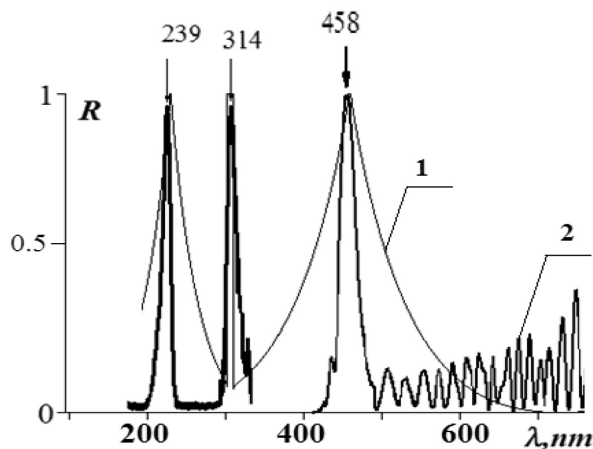


Рис. 7. Расчётный теоретический спектр (кривая 1) в сравнении с экспериментальным спектром отражения (кривая 2) для бесконечного кристалла при заданном угле θ .

Рис. 6 иллюстрирует вид рассчитанных дисперсионных ветвей фотонного кристалла при следующих параметрах: $a_1 = a_2 = 135$ нм, $n_1 = 1,60$; $n_2 = 1,79$.

Коэффициент отражения излучения от поверхности одномерного фотонного кристалла при нормальном падении излучения на поверхность определяется по формуле Френеля:

$$R(\omega) = \left| \frac{\frac{ck(\omega)}{\omega} - 1}{\frac{ck(\omega)}{\omega} + 1} \right|^2 \quad (5)$$

На рис. 7 приведены рассчитанные по соотношению (5) спектры отражения и экспериментальные данные по спектрам отражения от поверхности анализируемого фотонного кристалла для второй, третьей и четвёртой стоп-зон при нормальном падении на поверхность.

Как видно из этого рисунка, наблюдается удовлетворительное согласие теории с экспериментом для положений максимумов интенсивности в спектрах отражения. В то же время наблюдается существенное различие в форме экспериментальных и теоретических зависимостей (рис. 7), особенно для второй и третьей стоп-зон.

Нами был проведён анализ характеристик узкополосного светофильтра, создаваемого на основе обсуждаемого фотонного кристалла, обеспечивающего селективное отражение лазерного излучения с длиной волны $\lambda = 440$ нм. При этом за счёт изменения угла падения лазерного излучения на поверхность фотонного кристалла изменяется спектральное положение соответствующей стоп-зоны для обеспечения селективного отражения лазерного излучения. Схема экспериментальной установки для исследования спектров комбинационного рассеяния света с использованием такого рода светофильтра приведена на рис. 8.

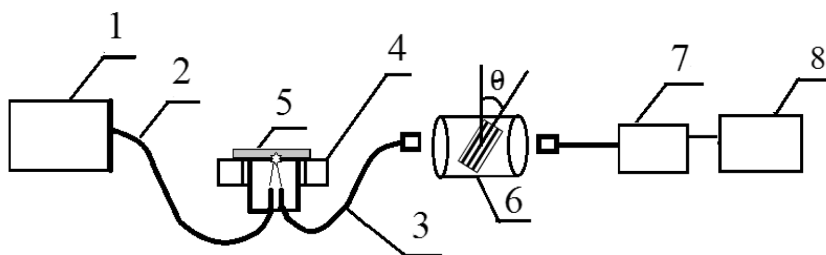


Рис. 8. Схема экспериментальной установки с использованием светофильтра на основе фотонного кристалла; 1 – лазерное излучение; 2–3 – световоды; 4 – фторопластовая пластина; 5 – исследуемый образец; 6 – рефокусатор с внедрённым фотонным кристаллом; 7 – спектрометр; 8 – компьютер.

Свет от лазера (1) с заданной длиной волны (440 нм) распространяется по световоду (2) и попадает на поверхность исследуемого образца (5), закреплённого с помощью фторопластовой пластины (4). Сигнал комбинационного рассеяния попадает на световод (3) и пропускается через рефокусатор (6) со встроенным фотонным кристаллом, повернутым на определённый угол θ . Излучение от лазерного источника попадает в область второй стоп-зоны исследуемого фотонного кристалла и полностью им отражается. Дальнейшее излучение от исследуемого объекта анализируется с помощью миниспектрометра (7) и компьютера (8).

С учётом соотношения (1) угол **поворота** θ фотонного кристалла для отражения лазерного излучения от источника 1 (рис. 8) с длиной волны $\lambda = 440$ нм составляет: $\theta = 23^\circ$.

Заключение

Таким образом, были зарегистрированы спектры отражения широкополосного излучения от поверхности одномерного мезопористого фотонного кристалла, созданного на основе электрохимического травления пластин. Установлены спектральные положения второй, третьей и четвёртой стоп-зон одномерного фотонного кристалла. На основе использования теории спектров отражения широкополосного излучения от поверхности одномерного фотонного кристалла рассчитаны спектры отражения в широком диапазоне. На основе полученных экспериментальных данных о спектрах отражения от поверхности фотонного кристалла и соответствующей теории рассчитаны параметры фотонного кристалла для второй стоп-зоны: эффективный коэффициент преломления $n_{ef} = 1,7$; период кристаллической решётки фотонного кристалла $a = 270$ нм; показатели преломления слоёв $n_1 = 1,60$ и $n_2 = 1,79$. Изменение характеристик мезопористого одномерного фотонного кристалла может быть достигнуто при внедрении в поры такого кристалла других веществ. При этом изменяется эффективный показатель преломления, что приводит в соответствии с соотношением (1) к изменению спектрального положения стоп-зон и их спектральной ширины. Изменение угла падения θ также позволяет изменять спектральные характеристики обсуждаемых фотонных кристаллов. Таким образом, открывается возможность для использования мезопористых одномерных фотонно-кристаллических плёнок

в качестве узкополосных светофильтров с управляемыми характеристиками в различных оптических устройствах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Быков В.П. Спонтанное излучение в периодической структуре // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1972. Т. 62. С. 505–512.
2. Yablonovitch E. Inhibited Spontaneous Emission in Solid-State Physics and Electronics // Physical Review Letters. 1987, vol. 58, pp. 2059–2062.
3. John S. Strong localization of photons in certain disordered dielectric superlattices // Physical Review Letters. 1987, vol. 58, pp. 2486–2489.
4. Горелик В.С. Оптика глобулярных фотонных кристаллов // Квантовая электроника. 2007. Т. 37. С. 409–432.
5. Liu Yisen, Chang Yi, Ling Zhiyuan, Hu Xing, Li Yi. Structural coloring of aluminum // Electrochemistry Communications. 2011, vol. 13, pp. 1336–1339.
6. Svyakhovskiy S.E., Maydykovsky A.I., Murzina T.V. Mesoporous silicon photonic structures with thousands of periods // Journal of Applied Physics. 2012, vol. 112, p. 013106.
7. Горелик В.С., Лепнев Л.С., Литвинова А.О. Конверсия электромагнитного излучения в глобулярных фотонных кристаллах SiO₂ при коротковолновом излучении // Неорганические материалы. 2014, Т. 50, С. 1086–1090.
8. Yariv A., Yeh P. Optical waves in crystals. Propagation and control of laser radiation. New York: Wiley. 1984. 589 p.
9. Горелик В. С., Климонский С. О., Филатов В. В., Напольский К. С. Оптические свойства одномерных фотонных кристаллов на основе пористых пленок анодного оксида алюминия // Оптика и спектроскопия. 2016. Т. 120. № 4. С. 562–568.

REFERENCES

1. Bykov V.P. Spontaneous emission in a periodic structure. In: Zhurnal eksperimental'noi i teoreticheskoi fiziki [Journal of experimental and theoretical physics]. 1972, no. 62, pp. 505–512.
2. Yablonovitch E. Inhibited Spontaneous Emission in Solid-State Physics and Electronics. In: Physical Review Letters. 1987, vol. 58, pp. 2059–2062.
3. John S.. Strong localization of photons in certain disordered dielectric superlattices. In: Physical Review Letters. 1987, vol. 58, pp. 2486–2489.
4. Gorelik V.S. Optics of globular photonic crystals. In: Kvantovaya elektronika [Quantum electronics]. 2007, no. 37, pp. 409–432.
5. Liu Yisen, Chang Yi, Ling Zhiyuan, Hu Xing, Li Yi. Structural coloring of aluminum. In: Electrochemistry Communications. 2011, vol. 13, pp. 1336–1339.
6. Svyakhovskiy S.E., Maydykovsky A.I., Murzina T.V. Mesoporous silicon photonic structures with thousands of periods. In: Journal of Applied Physics. 2012, vol. 112, p. 013106.
7. Gorelik V.S., Lepnev L.S., Litvinova A.O. Conversion of electromagnetic radiation in globular photonic SiO₂ crystals under short wavelength irradiation. In: Neorganicheskie materialy [Inorganic materials]. 2014, no. 50, pp. 1086–1090.
8. Yariv A., Yeh P. Optical waves in crystals. Propagation and control of laser radiation. New York: Wiley. 1984. 589 p.
9. Optical properties of one-dimensional photonic crystals based on porous films of anodic alumina. Gorelik V.S., Klimonskii S.O., Filatov V.V., Napol'skii K.S. In: Optika i spektroskopiya [Optics and spectroscopy]. 2016, vol. 120, no. 4, pp. 562–568.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Горелик Владимир Семенович – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана;
e-mail: gorelik@sci.lebedev.ru

Яшин Максим Михайлович – студент, Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана;
e-mail: ihkamax@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Vladimir Gorelik – doctor of physico-mathematical sciences, professor at the Bauman Moscow State Technical University and P.N. Lebedev Physical Institute of the Russian Academy of Sciences;
e-mail: gorelik@sci.lebedev.ru

Maxim Yashin – student at the Bauman Moscow State Technical University;
e-mail: ihkamax@mail.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Горелик В.С., Яшин М.М. Спектроскопия стоп-зон одномерного фотонного кристалла на основе оксида алюминия // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2017. № 1. С. 81–89.
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-1-81–89.

THE CORRECT REFERENCE TO ARTICLE

V. Gorelik, M. Yashin. Spectroscopy of stop-bands of one-dimension photonic aluminum oxide crystals. In: *Bulletin of Moscow Region State University*. Series: Physics and Mathematics. 2017, no. 1, pp. 81–89.
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-1-81–89.

УДК 539.6:539.22

DOI: 10.18384/2310-7251-2017-1-90-99

ВЛИЯНИЕ СОСТАВА НА СЕГМЕНТНУЮ ОПТИЧЕСКУЮ АНИЗОТРОПИЮ СОПОЛИМЕРОВ*

Дадиванян А.К.¹, Соколов А.А.², Васильчикова Е.Н.¹, Богданов Д.Л.¹

¹ *Московский государственный областной университет,
105005, Москва, ул. Радио, 10А, Российская Федерация*

² *Федеральная служба по экологическому, технологическому и атомному надзору
(Ростехнадзор),
105066, Москва, ул. А. Лукьянова, д. 4, стр. 1, Российская Федерация*

Аннотация. Методом фотоупругости определены значения сегментной оптической анизотропии макромолекул сополимеров винилацетата и винилового спирта. Показано, что при мольной доли звеньев винилового спирта от 0,2 до 0,75 зависимость оптической анизотропии от состава существенно отклоняется от линейной. Найден интервал состава, в котором происходит переход от конформации цепи ПВА к конформации цепи ПВС.

Ключевые слова: сополимеры, фотоупругость, поляризуемость, оптическая анизотропия, скелетная жесткость.

EFFECT OF COMPOSITION ON SEGMENTAL OPTICAL ANISOTROPY OF COPOLYMERS

A. Dadivanyan¹, A. Sokolov², Ye. Vasil'chikova², D. Bogdanov²

¹ *Moscow Region State University,
ul. Radio 10a, 105005 Moscow, Russian Federation*

² *Federal Service for Ecological, Technological and Atomic Supervision (Rostekhnadzor),
ul. A. Lukyanova 4/1, 105066 Moscow, Russian Federation*

Abstract. Values of segmental optical anisotropy of macromolecules of vinyl acetate – vinyl alcohol copolymers are determined by the photoelasticity method. It is shown that in the range of 0,2 – 0,75 mole fraction of vinyl alcohol units, the dependence of segmental optical anisotropy of copolymers on their composition is essentially nonlinear. It is found that the transition of PVA conformation into PVAl conformation proceeds in the same composition range.

Keywords: copolymers, photoelasticity, polarization, optical anisotropy, backbone rigidity.

* Работа выполнена при поддержке РФФИ: гранты 14-07-00574_а и 16-57-00089_Бел_а.

В последнее время сильно возрос интерес к связи структуры сополимеров с их свойствами из-за возможности их использования в электронике, нанотехнологиях и для получения материалов с заранее заданными свойствами.

Анизотропия оптической поляризуемости, или оптическая анизотропия макромолекул, являясь одной из их главных характеристик, весьма чувствительна к изменению структуры полимерных цепей. Исследования оптической анизотропии позволили определить форму макромолекулярного клубка [1], получить ценные сведения о структуре макромолекул [1], обнаружить существование ближнего ориентационного порядка в растворах полимеров [2].

Изучение оптической анизотропии сополимеров может дать ценные сведения о структуре и скелетной жесткости как статистических, так и блок- и привитых сополимеров, что особенно важно при сильно различающейся жесткости цепи соответствующих гомополимеров [1; 3]. Однако до настоящего времени нет достоверных экспериментальных данных, позволяющих определить зависимость этой величины от состава статистических сополимеров с различной сегментной жесткостью.

Настоящая работа посвящена изучению влияния состава сополимера поли(винилацетат – виниловый спирт) на оптическую анизотропию и скелетную жесткость полимерной цепи. Выбор объекта обусловлен тем, что скелетные жесткости поливинилацетата (ПВА) и поливинилового спирта (ПВС) сильно различаются (величина статистического сегмента ПВА в 5 раз больше, чем ПВС [1; 4]). Кроме того, оптическая анизотропия ПВА отрицательна [2], а ПВС – положительна [4], что приводит к увеличению точности измерений, особенно при концентрациях компонентов, при которых знак оптической анизотропии меняется.

Сополимеры ПВА – ПВС получали омылением растворов ПВА в метаноле концентрации 7,5% водным раствором аммиака. Сополимеры различного состава получали, прерывая процесс омыления через определённые промежутки времени. Сополимеры с большим содержанием ВА осаждали водой, с малым – метанолом. Осадок высушивали до постоянной массы.

Молекулярную массу ПВА определяли по характеристической вязкости раствора в ацетоне, используя соотношение $[\eta] = 1,58 \cdot 10^{-4} M^{0,74}$ [1], а ПВС – по вязкости водных растворов, используя соотношение $[\eta] = 5,95 \cdot 10^{-4} M^{0,63}$ [4]. Молекулярные массы ПВА и ПВС оказались равными $2,4 \cdot 10^5$ и $5,6 \cdot 10^4$, соответственно. Мольную долю ВА групп в сополимере определяли титрованием.

Плёнки сополимера с мольной долей ВА звеньев до 0,2 получали выпариванием водных растворов, с мольной долей ВА звеньев от 0,2 до 0,4 – выпариванием водно-этанольных растворов (объёмная доля этанола 0,6), с мольной долей ВА звеньев больше 0,4 – выпариванием растворов полимера в хлороформе. При получении плёнок использовали тефлоновую или полиэтиленовую подложку. Толщина полученных плёнок варьировалась от 0,8 до 1 мм.

Анизотропию сегментной оптической поляризуемости $\Delta\alpha = (\alpha_1 - \alpha_2)$ рассчитывали из результатов исследования двойного лучепреломления Δn в высокоэластичной плёнке при растягивающем напряжении σ по соотношению [1]:

$$\frac{\Delta n}{\sigma} = \frac{2\pi}{45kT} \left(\frac{\bar{n}^2 + 2}{\bar{n}} \right) \Delta\alpha, \quad (1)$$

где k – постоянная Больцмана, T – температура, $\bar{n}$ – средний показатель преломления образца, α_1 и α_2 – оптические поляризуемости в направлении параллельном и перпендикулярном сегменту, соответственно.

Так как температуры стеклования ПВА, ПВС и сополимеров выше комнатной, измерения проводили при температуре 310 К, при которой ПВА и сополимеры с мольной долей ВА больше 0,7 находятся в высокоэластичном состоянии. Высокоэластичное состояние ПВС и сополимеров с мольной долей ВА меньше 0,7 достигалось пластификацией глицерином и смесью глицерин – вода. Величину оптической анизотропии определяли с учетом концентрации пластификатора, которая не превышала 0,25, что незначительно влияет на результаты измерений.

Величину двойного лучепреломления измеряли на стандартной установке с компенсатором Брейса, состоящей из тонкой слюдяной пластинки с максимальной разностью хода $0,07 \lambda$ и тонкой слюдяной пластинки с разностью хода $10^{-3} \lambda$, покрывающей половину поля зрения. Величину Δn определяли по соотношению:

$$\Delta n = \frac{\lambda \delta}{2\pi l}, \quad (2)$$

где λ – длина световой волны в вакууме, l – толщина пленки, δ – разность фаз, создаваемая компенсатором, равная:

$$\delta = \sin \delta_0 \sin 2(\varphi - \varphi_0), \quad (3)$$

δ_0 – максимальная разность фаз, создаваемая компенсатором, φ и φ_0 – полутеневые азимуты компенсатора при наличии и отсутствии напряжения, соответственно.

На рис. 1 приведены экспериментальные зависимости величины двойного лучепреломления Δn от растягивающего напряжения σ для ПВА, ПВС и ряда сополимеров.

По значениям величины $\Delta n/\sigma$ были рассчитаны значения сегментной оптической анизотропии, которые приведены на рис. 2. Отметим, что оптическая анизотропия сополимеров ВА – ВС исследовалась также в работе [5], однако в этой работе измерения проводились при различных температурах, что не позволяет адекватно сравнивать экспериментальные результаты.

Как видно из рис. 2, зависимость сегментной оптической анизотропии от состава сополимера не является линейной. Рассмотрим причины такой нелинейности.

Вопрос о зависимости оптической анизотропии от структуры молекул сополимеров рассматривался в ряде работ [3; 6–7]. В работе [6] высказана гипотеза о зависимости скелетной жёсткости и оптической анизотропии макромолекул от амплитуды крутильных колебаний звеньев полимерной цепи. Для среднеква-

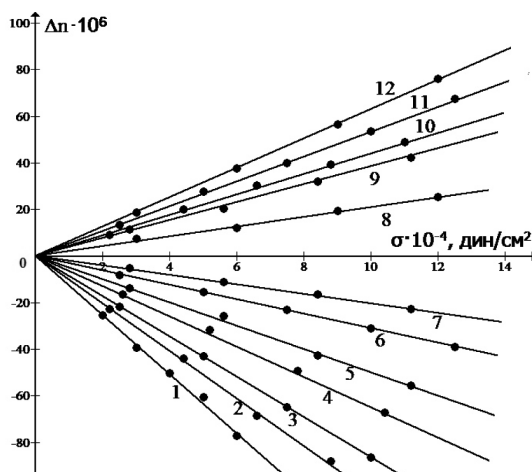


Рис. 1. Зависимости величины двойного лучепреломления Δn от растягивающего напряжения σ для сополимеров разных составов. Мольная доля звеньев ВС $x = 0$ (1); 0,06 (2); 0,1 (3); 0,15 (4); 0,2 (5); 0,31 (6); 0,45 (7); 0,62 (8); 0,74 (9); 0,8 (10); 0,9 (11); 1,0 (12).

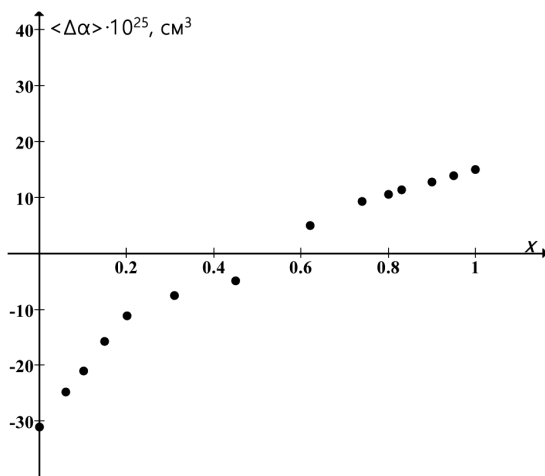


Рис. 2. Зависимость сегментной оптической анизотропии от мольной доли звеньев ВС.

дратичного расстояния между концами цепи $\overline{h^2}$ и среднего значения поляризуемости $\langle \Delta \alpha \rangle$ были получены выражения:

$$\overline{h^2} = \frac{24}{\varphi^2} N l^2, \quad (4)$$

$$\langle \alpha \rangle = \frac{15}{\varphi^2} \cdot \alpha = \frac{5}{6} n \cdot \alpha \frac{\overline{h^2}}{h_{\max}^2}, \quad (5)$$

где $N = 2n$, N – число валентных связей в основной цепи, n – степень полимеризации, l – длина звена цепи, h – расстояние между концами цепи, $h_{max} = \sqrt{\frac{2}{3}}Nl$ – длина максимально вытянутой плоской транс-цепи, $\langle \rangle$ – усреднение по составу цепи.

Поскольку в разных работах авторы рассматривают сополимеры, различающиеся по химическому составу, для сопоставления результатов удобно ввести безразмерную величину $\frac{\langle \Delta\alpha \rangle}{\Delta\alpha_1}$.

Согласно теории, развитой в работе [6]:

$$\frac{\langle \Delta\alpha \rangle}{\Delta\alpha_1} = \frac{\left[1 - x \left(1 - \frac{\Delta\alpha_2}{\Delta\alpha_1} \frac{S_1}{S_2} \right) \right]}{\left[1 - x \left(1 - \frac{S_1}{S_2} \right) \right]}, \quad (6)$$

где $\Delta\alpha_1$ и $\Delta\alpha_2$ – сегментная анизотропия сомономеров 1 и 2, соответственно, S_1 и S_2 – число мономерных звеньев в статистическом сегменте гомополимеров 1 и 2, x – мольная доля сомономеров 2 в сополимере.

Согласно работе [7]:

$$\langle \Delta\alpha \rangle = \frac{\sum_i N_i \Delta\alpha_i A_i^2}{\sum_i N_i A_i^2},$$

где N_i – число сегментов i -ого сомономеров, A_i – длина сегмента, $\Delta\alpha_i$ – оптическая анизотропия сегмента длины A_i .

В этом случае для цепи, состоящей из звеньев двух типов:

$$\frac{\langle \Delta\alpha \rangle}{\Delta\alpha} = \frac{\left[1 - \left(1 - \frac{\Delta\alpha_2}{\Delta\alpha_1} \frac{1}{2} \right) \right]}{\left[1 - \left(1 - \frac{1}{2} \right) \right]} \quad (7)$$

Согласно подходу, предложенному нами [3], если оптическая анизотропия статистического сегмента и число мономерных звеньев в сегменте меняются линейно с изменением состава, то:

$$\frac{\langle \Delta\alpha \rangle}{\Delta\alpha_1} = (1-x)^2 + \left[\frac{S_1 \Delta\alpha_2}{S_2 \Delta\alpha_1} + \frac{S_2}{S_1} \right] x(1-x) + \frac{\Delta\alpha_2}{\Delta\alpha_1} x^2. \quad (8)$$

Если же скелетная жёсткость цепи изменяется скачкообразно, то в интервале концентраций $(0, x_0)$, в котором $S = S_1$, справедливо соотношение:

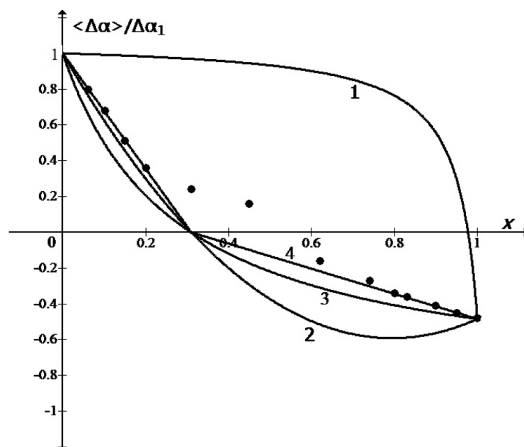


Рис. 3. Зависимость отношения сегментной оптической анизотропии сополимера $\langle \Delta\alpha \rangle / \Delta\alpha_1$ от мольной доли ВС, рассчитанная по уравнениям (6) – 3, (7) – 1, (8) – 2, (9) – (10) – 4. Точки – экспериментальные данные.

$$\frac{\langle \Delta\alpha \rangle}{\Delta\alpha_1} = 1 - \left(1 - \frac{S_1 \Delta\alpha_2}{S_2 \Delta\alpha_1} \right) x, \quad (9)$$

а в интервале $(x_0, 1)$, в котором $S = S_2$, справедливо соотношение:

$$\frac{\langle \Delta\alpha \rangle}{\Delta\alpha_1} = \frac{S_2}{S_1} + \left(\frac{\Delta\alpha_2}{\Delta\alpha_1} - \frac{S_2}{S_1} \right) x \quad (10)$$

На рис. 3 приведена зависимость отношения сегментной оптической анизотропии сополимера $\langle \Delta\alpha \rangle / \Delta\alpha_1$ от мольной доли ВС, рассчитанная по уравнениям (6)–(10) и полученная экспериментально.

Из рисунка видно, что величина $\langle \Delta\alpha \rangle / \Delta\alpha_1$ в интервале x от 0 до 0,2 меняется линейно, в интервале от 0,2 до 0,75 зависимость существенно отклоняется от линейной, а при $0,75 < x < 1$ снова становится линейной. При этом меняется не только число мономерных звеньев в сегменте, но и оптическая анизотропия мономерного звена, по крайней мере, одного из них. Действительно, если бы анизотропия мономерного звена каждого компонента не менялась, средняя оптическая анизотропия сегмента, а, следовательно, и сегментная анизотропия сополимера $\Delta\alpha$ равнялась бы нулю при мольной доле звеньев ВС x_0 , соответствующей условию $\Delta\alpha_1(1-x_0) + \Delta\alpha_2 x_0 = 0$, то есть при $x_0 = 0,31$. Однако, согласно экспериментальным данным, $\langle \Delta\alpha \rangle / \Delta\alpha_1 = 0$ при $0,45 < x < 0,6$. Изменение оптической анизотропии мономерного звена может быть обусловлено как изменением конформации цепи главных валентностей, так и изменением среднего значения угла между плоской ацетатной группой звена ВА и главной цепью валентностей [2].

Полученные нами данные позволяют получить зависимость скелетной жёсткости от состава сополимера. Строение цепи сополимеров ВА – ВС изучалось в

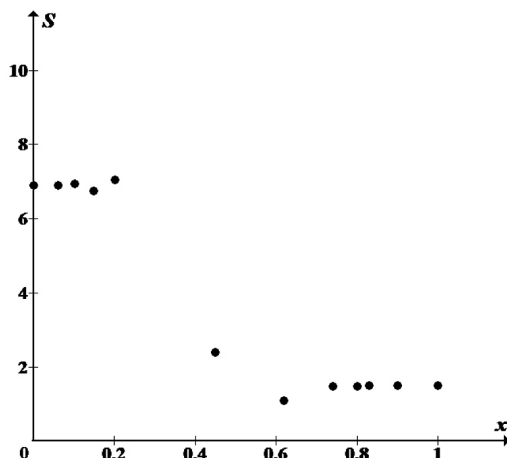


Рис. 4. Зависимость числа мономерных звеньев в сегменте от мольной доли ВС.

ряде работ [8–9]. Однако использованные ранее методы не позволяют оценить жесткость цепи.

На рис. 4 приведена зависимость числа мономерных звеньев в сегменте, рассчитанного по соотношению $S = \langle \Delta\alpha \rangle / \langle \Delta a \rangle$, где $\langle \Delta a \rangle$ – среднее значение оптической анизотропии мономерного звена, вычисленное в предположении линейной зависимости этой величины от состава цепи x .

Как видно из рисунка, при мольной доле ВС от 0 до 0,2 величина S совпадает с соответствующей величиной для ПВА, затем в интервале x от 0,2 до 0,7 резко уменьшается до величины, соответствующей её значению для ПВС. Такая зависимость S от состава сополимера свидетельствует о том, что скелетная жёсткость цепи сополимера сначала не меняется, затем резко падает, а потом вновь остаётся постоянной.

Это означает, что при высоком содержании звеньев ВА мономерные звенья ВС встраиваются в цепь, не меняя конформацию цепи ПВА, а при высоком содержании звеньев ВС мономерные звенья ВА не меняют конформацию, соответствующую ПВС.

Выводы

1. Методом фотоупругости определены значения сегментной оптической анизотропии макромолекул сополимеров ВА – ВС.
2. Показано, что в интервале мольной доли звеньев ВС от 0 до 0,2 величина оптической анизотропии линейно зависит от доли звеньев ВС, тогда как при её большем значении эта зависимость существенно отклоняется от линейной до мольной доли ВС, равной 0,75, выше которой опять становится линейной.
3. Установлено, что в интервале мольной доли звеньев ВС от 0 до 0,2 конформация цепи сополимера совпадает с конформацией цепи ПВА, в интервале (0,75–1,0) – с конформацией цепи ПВС, а в интервале (0,2–0,75) происходит конформационный переход.

ЛИТЕРАТУРА

1. Цветков В.Н., Эскин В.Е., Френкель С.Я. Структура макромолекул в растворах. М.: Наука. 1964. 720 с.
2. Дадиванян А.К., Грищенко А.Е., Цветков Н.В., Рюмцев Е.И. Ближний ориентационный порядок в системах полимер-растворитель // Высокомолекулярные соединения. 2008. Б. Т. 50. № 10. С. 1870–1904.
3. Соколов А.А., Ноа О.В., Дадиванян А.К. Анизотропия оптической поляризуемости сополимеров с различной скелетной жёсткостью // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2015. № 4. С. 63–68.
4. Дадиванян А.К., Сагателян В.В., Саакян Г.П., Бадалян Р.А., Парсян А.С. Исследование заторможенности вращения в молекулах поливинилового спирта // Учёные записки Ереванского государственного университета. Естественные науки. 1968. № 1. С. 33–35.
5. Гарибян В.Х. Исследование внутри- и межмолекулярных взаимодействий полимерных систем методами двойного лучепреломления и ИК-дихроизма: дисс. ... канд. физ.-матем. наук. Ереван, 1978.
6. Бирштейн Т.М., Будтов В.П., Фрисман Э.В., Яновская Н.К. Влияние состава сополимера на оптическую анизотропию его молекул // Высокомолекулярные соединения. 1962. Т. 4. № 3. С. 455–462.
7. Shindo Y., Stein R.S. Birefringence and dichroism of rubbery copolymers // J. Polymer Sci. Part A-2. 1969, Vol. 7, pp. 2115–2138.
8. Plate N.A., Litmanovich A.D., Noah O.V. Macromolecular Reactions. Peculiarities, Theory and Experimental Approaches. John Wiley and Sons Ltd., Chichester – New York – Brisbane – Toronto – Singapore. 1995. 438 p.
9. Денисова Ю.И., Кренцель Л.Б., Перегудов А.С., Литманович Е.А., Подбельский В.В., Литманович А.Д., Кудрявцев Я.В. О статистике цепи мультиблок-сополимеров винилацетат – виниловый спирт. // Высокомолекулярные соединения. Серия А. 2012. Т. 54. № 7. С. 1193–1200.

REFERENCES

1. Tsvetkov V.N., Eskin V.E., Frenkel' S.Ya. Structure of macromolecules in solutions. Moscow, Nauka Publ., 1964. 720 p.
2. Middle orientational order in polymer – solvent systems. Dadivanyan A.K., Grishchenko A.E., Tsvetkov N.V., Ryumtsev E.I. In: Vysokomolekulyarnye soedineniya. [High molecular weight compounds]. 2008. B, vol. 50, no. 10, pp. 1870–1904.
3. Sokolov A.A., Noa O.V., Dadivanyan A.K. Anisotropy of optical polarizability of copolymers with different skeletal rigidity. In: Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika [Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and mathematics]. 2015, no. 4, pp. 63–68.
4. A study of retardation of rotation in molecules of polyvinyl alcohol. Dadivanyan A.K., Sagatelyan V.V., Saakyan G.P., Badalyan R.A., Parsyan A.S. In: Uchenye zapiski Erevanskogo gosudarstvennogo universiteta. Estestvennye nauki [Scientific notes of Yerevan State University. Natural Sciences]. 1968. no. 1. pp. 33–35.
5. Garibyan V.Kh. Issledovanie vnutri- i mezhmolekulyarnykh vzaimodeistvii polimernykh sistem metodami dvoynogo lucheprelomleniya i IK-dikhroizma: diss. ... kand. fiz.-matem. nauk [The study of intra – and intermolecular interactions of polymer systems using birefringence and infrared dichroism: PhD thesis in Physico-mathematical sciences]. Yerevan, 1978.

6. The influence of copolymer composition on the optical anisotropy of molecules, Birshtein T.M., Budtov V.P., Frisman E.V., Yanovskaya N.K. In: *Vysokomolekulyarnye soedineniya* [HMS]. 1962, vol. 4, no. 3, pp. 455–462.
7. Shindo Y., Stein R.S. Birefringence and dichroism of rubbery copolymers // *J. Polymer Sci. Part A-2*. 1969, Vol. 7, pp. 2115–2138.
8. Plate N.A., Litmanovich A.D., Noah O.V. *Macromolecular Reactions. Peculiarities, Theory and Experimental Approaches*. John Wiley and Sons Ltd., Chichester – New York – Brisbane – Toronto – Singapore. 1995. 438 p.
9. Chain statistics in vinyl acetate – vinyl alcohol multiblock copolymers. Denisova Yu.I., Krentsel' L.B., Peregudov A.S., Litmanovich E.A., Podbel'skii V.V., Litmanovich A.D., Kudryavtsev YA.V. In: *Vysokomolekulyarnye soedineniya. Seriya A. [High molecular weight compounds. Series A]*. 2012, vol. 54, no. 7, pp. 1193–1200.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Дадиванян Артём Константинович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической физики Московского государственного областного университета;

e-mail: dadivank@mail.ru

Соколов Алексей Александрович – заместитель руководителя центрального межрегионального территориального управления по надзору за ядерной и радиационной безопасностью Ростехнадзора (г. Москва);

e-mail: dadivank@mail.ru

Васильчикова Елена Николаевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей физики Московского государственного областного университета;

e-mail: envas2011@yandex.ru

Богданов Дмитрий Леонидович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры общей физики Московского государственного областного университета;

e-mail: dadivank@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Artyom Dadivanyan – doctor of physico-mathematical sciences, professor of the Department of Theoretical Physics at the Moscow Region State University;

e-mail: dadivank@mail.ru

Alexey Sokolov – deputy director of the central interregional territorial administration on supervision of nuclear and radiation safety at Rostekhnadzor;

e-mail: dadivank@mail.ru

Elena Vasilchikova – doctor of physico-mathematical sciences, associate professor of the Department of General Physics at the Moscow Region State University;

e-mail: envas2011@yandex.ru

Dmitry Bogdanov – doctor of physico-mathematical sciences, professor of the Department of General Physics at the Moscow Region State University;

e-mail: dadivank@mail.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Дадиванян А.К., Соколов А.А., Васильчикова Е.Н., Богданов Д.Л. Влияние состава на сегментную оптическую анизотропию сополимеров // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2017. № 1. С. 90–99.
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-1-90–99.

THE CORRECT REFERENCE TO ARTICLE

A. Dadivanyan, A. Sokolov, Ye. Vasil'chikova, D. Bogdanov. Effect of composition on segmental optical anisotropy of copolymers. In: *Bulletin of Moscow Region State University*. Series: Physics and Mathematics. 2017. no. 1. pp. 90–99.
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-1-90–99.

РАЗДЕЛ III.

ТЕОРИЯ И МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ И ВОСПИТАНИЯ

УДК 378.147

DOI: 10.18384/2310-7251-2017-1-100-112

ИННОВАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ И ТЕХНОЛОГИИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ В ТЕХНИЧЕСКОМ ВУЗЕ

Власова Е.А., Попов В.С.

*Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана
105005, Москва, ул. 2-я Бауманская, 5, Российская Федерация*

Аннотация. В статье рассматриваются некоторые инновационные методы и технологии обучения в контексте философских проблем математической подготовки будущих инженеров. Использование в обучении новых образовательных технологий и методов способствует повышению эффективности учебного процесса, достижению необходимых компетенций, умений и навыков студентов, повышает уровень эффективности контроля за получаемыми ими знаниями. Особое внимание уделено внедрению в учебный процесс модульно-рейтинговой системы организации обучения, введению индивидуального рейтинга студента, использованию в учебном процессе интерактивных компьютерных систем и информационно-компьютерных технологий в рамках дисциплин математического образования. Подчеркивается значение и роль контролируемой самостоятельной работы студентов, проведения тестовых мероприятий в оценке текущих знаний обучающихся.

Ключевые слова: рейтинг, модульно-рейтинговая система, информационно-коммуникационные технологии, компьютерные системы, технология, инновация, эффективность.

INNOVATIVE METHODS AND TECHNOLOGIES OF TEACHING MATHEMATICS IN TECHNICAL UNIVERSITY

E. Vlasova, V. Popov

*Bauman Moscow State Technical University
2-ya Baumanskaya ul. 5, 105005 Moscow, Russian Federation*

© Власова Е.А., Попов В.С., 2017.

Abstract. The paper considers some innovative methods and technologies of teaching in the context of philosophical problems of mathematical training of future engineers. Use of new educational technologies and methods enhances the effectiveness of the educational process, helps to achieve the necessary competencies, abilities and skills of students, as well as improves the control of received knowledge. Special attention is paid to the rating systems integrated in the educational process: module-rating system and individual student rating. Use of interactive computer systems as well as information and computer technology in the learning process within the disciplines of mathematics is discussed in detail. The importance of controlled independent work of students and periodical tests of their current knowledge is emphasized.

Keywords: rating, module-rating system, information and communication technology, computer systems, technology, innovation, efficiency.

Будущий выпускник вуза должен быть подготовлен к успешному вхождению на рынок труда, должен обладать активной жизненной позицией, иметь представление о путях личного развития, быть готов к постоянному повышению уровня своих знаний. Следует учитывать, что постепенное усиление конкуренции на рынке образовательных услуг неизбежно потребует от вуза разработки мер, обеспечивающих высокий интерес абитуриентов к предлагаемым образовательным программам, а также удовлетворённость выпускников и работодателей качеством обучения.

Привлечение студентов к формированию своих индивидуальных учебных планов, обеспечение объективности оценки знаний по дисциплине, предоставление академической мобильности, признание выдаваемых дипломов, как правило, находят положительный отклик среди студентов, способствуют повышению их интереса к учебе, стимулируют к систематической и эффективной самостоятельной работе на протяжении всего периода обучения.

Внедрение в обучение новых образовательных технологий и методов способствует повышению эффективности учебного процесса, формированию необходимых компетенций, умений и навыков студентов, повышает уровень эффективности контроля за получаемыми ими знаниями.

Остановимся на некоторых, на наш взгляд, важных технологических инновациях, принципах и методах, связанных с математическим образованием студентов технических вузов.

Модульно-рейтинговая система

Введение модульно-рейтинговой системы (МРС) обучения продиктовано присоединением России к Болонской Конвенции по высшему образованию. Такая система призвана активизировать и систематизировать учебную работу студентов, повысить мотивацию студентов к получению знаний и поднять их уровень, способствовать повышению качества образования. Проведение промежуточных рейтинговых аттестационных оценок полученных знаний, несомненно, способствует равномерному освоению дисциплин, снижает перегрузки и напряжённость в работе студентов, позволяет упорядочить самостоятельную учебную работу обучаемых.

МРС предполагает, что учебная дисциплина (курс) делится на модули (блоки), состоящие из логически завершённых частей курса. Модуль (блок) содержит набор контрольных мероприятий, каждое из которых оценивается некоторым числом баллов, называемое рейтингом. Суммарный балл по всем отдельным модулям, входящим в состав учебного курса, определяет рейтинг студента за работу в течение семестра (промежуточный рейтинг). Студент считается аттестованным по модулю, если он на 100% выполнил домашнее задание, контрольную работу (если она предусмотрена планом) и написал аттестационную работу. Итоговый рейтинг за изучение дисциплины складывается из промежуточных рейтингов и рубежного рейтинга – баллов, набранных студентом за сдачу экзамена (зачёта). В дальнейшем итоговый рейтинг переводится согласно принятой таблицы в пятибалльную оценку [1].

МРС преподавания позволяет осуществлять проверку полученных студентами теоретических и практических знаний более одного раза в течение семестра, и тем самым неоднократно в семестр объективно оценить уровень таких знаний и принять меры по корректировке учебного материала индивидуально для каждого студента.

Таким образом, использование МРС в преподавании улучшает объективность контроля и оценки знаний студентов; позволяет своевременно осуществлять диагностику уровня знаний студентов на всех этапах обучения; повышает качество обучения. Конечно, для эффективности функционирования такой системы обучения при большом количестве студентов необходимо использование информационно-коммуникационных технологий (ИКТ).

Одной из проблем использования МРС в учебном процессе является создание логически завершённых по содержанию модулей, которые должны уместиться в жесткие временные рамки; это, в свою очередь, приводит к увеличению числа модулей и изменению сроков проведения промежуточных аттестаций.

Кумулятивный рейтинг студента

Серьёзным мотивационным стимулом студентов к освоению образовательных программ является индивидуальный рейтинг студента. Учитывая тот факт, что многим учащимся важно общественное признание, каждый студент должен иметь интегрированный рейтинг, напрямую связанный со всякого рода поощрениями. Индивидуальный (кумулятивный) рейтинг студента может непосредственно влиять: на получение именных и президентских стипендий; на зачисление в программы двойных дипломов с направлением на различного рода стажировки (в том числе и в зарубежные вузы); на перевод на бюджетные места лучших студентов, обучающихся на договорной основе с оплатой стоимости обучения. Кумулятивный рейтинг используется и как один из показателей при отборе на программы магистерской подготовки. Введение индивидуального рейтинга стимулирует каждого студента к освоению образовательных программ на базе глубокой дифференциации оценки результатов их учебной работы. Рейтинг показывает реальное место, которое занимает студент среди сокурсников в со-

ответствии со своими успехами в учёбе, что способствует формированию навыков самоорганизации учебного труда и самооценки у студентов [2].

Таким образом, введение индивидуального рейтинга позволяет более объективно оценить уровень знаний обучающегося, его стремление (или не стремление) к получению углублённых знаний по предмету. Индивидуальный рейтинг – это мотивационный стимул, направленный на освоение образовательных программ, который показывает реальные достижения обучающихся, их успехи в учёбе, способствует формированию самооценки студентов, что в конечном результате положительно сказывается на повышении качества обучения.

Многоуровневая система изучения дисциплин

В новые учебные планы предлагается включить дисциплины, имеющие одно название, но разные уровни сложности программы. Для их описания удобно использовать индикаторы учебных дисциплин, согласованные в рамках международного проекта «Тюнинг». Так, для дисциплины устанавливается базовый уровень (А), если целью её изучения является введение в предмет. Дисциплина имеет продвинутый уровень (В), если целью её изучения является получение углублённых знаний по предмету. Дисциплина имеет специальный уровень (С), если целью её изучения является получение специальных знаний по предмету. Система уровней индикаторов дисциплин используется при формировании индивидуальных планов студентов и для *перезачёта* студентам зачётных единиц, полученных ими ранее при обучении.

Введение учебных дисциплин с уровневой индикацией также направлено на решение проблемы большого отсева студентов на младших курсах. Известно, что в последние годы низкая степень школьной подготовки по математике встречается у значительной части студентов в учебных группах, от 20 до 50 процентов. Поэтому за выделенное время учебный материал, содержащийся в программах учебных дисциплин математического цикла, такие студенты не усваивают. Простое сокращение объёма материала или снижение требований неизбежно приведет к снижению качества подготовки у всех студентов группы, что недопустимо. При индивидуально-ориентированной организации учебного процесса каждому студенту предоставляется возможность посещать занятия по дисциплине определённого уровня, то есть обучение организуется с учётом индивидуальных возможностей студента в текущий период времени. На младших курсах можно ограничиться введением базовых (А) и продвинутых (В) уровней по дисциплинам естественнонаучного и профессионального циклов.

Программы разных уровней сложности могут иметь одинаковую трудоёмкость, что обеспечит единство структуры учебного плана. Отличия могут заключаться в количестве модулей. Например, программа дисциплины продвинутого уровня содержит дополнительный модуль. Отличия возможны в содержании модулей. Например, в количестве и степени подробности изложения отдельных теорем, методик, алгоритмов. Задания для самостоятельной работы также могут отличаться в зависимости от уровня дисциплины, например, количеством и сложностью входящих в них задач.

Для проведения оценки результатов обучения применяется модульно-рейтинговая система [1]. Особое внимание следует уделить разработке методики, позволяющей обеспечить полноценный и объективный контроль знаний студентов по дисциплине. Возможно, что аттестационное задание в форме письменной контрольной работы следует составить только для уровня (А). Отдельное аттестационное задание для уровня (В) не составляется. Установленное учебным планом для дисциплины количество зачетных единиц начисляется студенту только при положительном результате выполнения им аттестационного задания уровня (А), то есть с результатом не ниже установленных граничных зачетных баллов. Указанная сумма баллов соответствует оценке «удовлетворительно». Таким образом, при аттестации минимальный уровень знаний каждого студента по дисциплине оценивается по единообразной, формализованной, стабильной мере, которая инвариантна к уровню программы. Для получения повышенной оценки по дисциплине студенту необходимо в установленные сроки выполнить дополнительные задания, которые зависят от уровня программы и постоянно доступны для ознакомления.

Использование интерактивных компьютерных систем

Будущему инженеру необходимо наиболее оптимальным и коротким способом овладеть математическим аппаратом, достаточным для последующего его использования в процессе изучения других дисциплин, а также применения к моделированию и решению конкретных прикладных задач. Для успешного формирования в процессе обучения необходимых профессиональных компетенций и учёта межпредметных связей математики и других дисциплин необходимо использовать дидактические возможности систем компьютерной алгебры. Использование в учебном процессе интерактивных компьютерных систем (или математических пакетов (МП)) в рамках дисциплин математического образования способствует формированию у студентов глубоких и прочных знаний, умений и навыков, развивает продуктивное, эвристическое, творческое мышление.

Использование МП существенно активизирует освоение математических понятий, теорем и методов решения задач, а также способствует дальнейшему применению МП для выполнения инженерных и научных расчетов. В совокупности с модульно-рейтинговой системой организации учебного процесса использование МП эффективно способствует развитию мотивационных стимулов обучения студентов.

Надо отметить, что с точки зрения использования в обучении математики наиболее перспективными в настоящий момент мы считаем интенсивно развивающиеся системы MathCAD и MatLab, обладающие следующими преимуществами:

- содержат встроенную матричную и комплексную арифметику;
- поддерживают выполнение операций с векторами, матрицами и массивами данных, реализуют спектральное и сингулярное разложения, расчёт ранга матриц;

- поддерживают работу с алгебраическими полиномами, решение нелинейных уравнений и задач оптимизации, интегрирование функций в квадратурах, численное интегрирование дифференциальных и разностных уравнений, построение разнообразных видов графиков функций, трёхмерных поверхностей и линий уровня;

- используют общепринятый способ изображения математических объектов и удобную операционную среду, которая позволяет формулировать проблемы и получать решения в обычной математической форме, не прибегая к рутинному программированию;

- позволяют решать многие вычислительные задачи с высокой точностью и за значительно меньшее время, чем то, которое необходимо для написания соответствующих программ на языках программирования;

- «открытостью», то есть лёгкостью их модификаций и адаптации к конкретным задачам пользователя (пользователь может ввести в систему любую новую команду, оператор или функцию и пользоваться потом ими так же просто, как и встроенными операторами и функциями).

- имеют собственные весьма простые языки программирования, близкие к языку BASIC, посильные любому начинающему;

- дают возможность редактировать программы при помощи любого текстового редактора, в том числе Word;

- обладают широкими возможностями создания разнообразных плоских и пространственных графиков с их последующим форматированием и просмотром, а также получения в одной графической области комбинации нескольких кривых или поверхностей разного типа с быстрым построением трёхмерных графиков.

Работа в среде MatLab может осуществляться в двух режимах:

- в режиме калькулятора, когда вычисления осуществляются сразу после набора очередного оператора или команды MatLab;

- путём вызова имени программы, написанной на языке MatLab, предварительно составленной и записанной на диске, которая содержит все необходимые команды, обеспечивающие ввод данных, организацию вычислений и вывод результатов на экран (программный режим).

В обоих режимах пользователю доступны практически все вычислительные возможности системы, в том числе по выводу информации в графической форме.

Возможности такой системы огромны, а по скорости выполнения задач она опережает многие другие подобные системы. Все эти особенности делают систему MatLab весьма привлекательной для использования в учебном процессе высших учебных заведений [3].

Важным является решение вопроса о методологии использования математических пакетов в учебном процессе: излагать или не излагать на лекциях принципы работы МП; как должно проходить ознакомление и приобретение навыков работы с МП (в частности, с Matlab); как, где и при решении каких математических задач надо оправданно использовать возможности МП; какие цели должны

быть достигнуты при разумной интеграции традиционных учебных занятий и математических пакетов.

Ещё одна проблема, которую нужно решать, состоит в том, что многие преподаватели, включая даже тех, кто был знаком с МП, использовали их в своих узких сиюминутных целях, далёких от учебного процесса, не знали всех возможностей математических пакетов. В нашем случае пришлось обратиться за помощью в представительство разработчиков Matlab и организовать для преподавателей курсы по освоению возможностей этой системы. Такие занятия, несомненно, принесли огромную пользу не только в изучении тонкостей системы Matlab, но и помогли обрисовать сферы применимости её в учебном процессе.

Для того чтобы сохранить уровень знаний студентов, который мы имеем на сегодняшний день, нужно постепенно внедрять в учебный процесс новые методы преподавания, включающие использование современных компьютерных средств. Если же форсировать процесс широкого применения МП в учебном процессе, то можно скатиться к обучению тупому нажиманию на кнопки, что не принесёт ожидаемого результата.

Поэтому было решено, что на лекциях по курсам математики принципы работы математических пакетов не излагать, но изыскать возможность включить в лекции темы: численные методы решения нелинейных уравнений, аппроксимация функций, СЛАУ, численное интегрирование, численное решение дифференциальных уравнений; разработать краткие инструкции по использованию математических пакетов, дать ссылки на интернет-ресурсы, обучающие программы и т.д. Ознакомление студентов с математическими пакетами, их возможностями и принципами работы с ними должно проходить на специальных тематических факультативных лекциях-семинарах и закрепляться в ходе их самостоятельной работы при консультативной поддержке со стороны преподавателей; по теме каждого занятия часть задач необходимо решать в среде MathCAD или Matlab; выполнение домашних заданий (типовых и текущих) предполагает обязательное применение МП.

При использовании МП открылась возможность уделять больше времени методологии решения математической задачи (обсуждать условия задачи, возможные методы её решения, полученные результаты), переложив выполнение рутинных операций на вычислительную среду.

Применение МП позволило создавать для некоторых типов задач шаблоны решения, позволяющие, варьируя исходные данные задачи, получать полное решение с изменением промежуточных и конечных результатов в виде аналитических зависимостей или графических изображений.

Контролируемая самостоятельная работа (КСР)

Большое значение в учебном процессе играет правильная организация аудиторной самостоятельной работы студентов под контролем преподавателя (КСР-занятия). Роль преподавателя здесь заключается в управлении познавательной деятельностью учащихся, в помощи выбора индивидуальной траекто-

рии самоподготовки и самообразования студентов. Одной из самых перспективных форм самостоятельной подготовки студентов является использование информационно-коммуникационных технологий (ИКТ), требующих от преподавателей создания соответствующего методического обеспечения изучения дисциплины.

Во время изучения курса на занятиях, проводимых под контролем преподавателя (КСР), можно проводить консультации по теоретическим и практическим вопросам, а также устраивать тестирование студентов.

При проведении КСР-занятий необходимо использовать дифференцированный подход, при котором для каждого студента, учитывая его индивидуальные особенности, определяется наиболее рациональный характер работы на занятии. Преподаватель может предложить студентам выполнение индивидуальных заданий, активно используя при этом информационные технологии. Комплекты индивидуальных заданий должны быть разного уровня сложности, от самого низкого до продвинутого. Менее подготовленным учащимся можно сначала предложить для самостоятельной работы задания, уровень сложности которых ниже базового. Постепенно повышая сложность заданий, таких учащихся можно в итоге привести к базовому уровню знаний. Хорошо успевающим студентам, сдающим все контрольные мероприятия вовремя, можно предложить задания повышенной сложности, с творческой компонентой, устанавливающие междисциплинарные связи, практико-ориентированные задания. База таких индивидуальных заданий постоянно должна обновляться.

КСР-занятия необходимо использовать для подготовки и проведения студентами докладов, презентаций по темам, выделенным на самостоятельное изучение. Подготовка доклада, презентации, сообщения – это своего рода творческие задания, активизирующие деятельность учащихся, в результате которой ими создаётся продукт, обладающий субъективной, а иногда и объективной новизной. Такие задания могут быть выполнены индивидуально или группой учащихся с использованием ИКТ. Цель таких заданий – сформировать у студентов систему интеллектуальных и профессиональных знаний, умений и навыков, способствовать развитию креативности, инициативности и самостоятельности. При выполнении творческих заданий студенты приобретают умение диагностировать и оценивать аудиторию слушателей (уровень интеллектуального восприятия информации, практическую направленность и т.д.), умение подбирать для конкретного вида презентации информацию (теоретическую и практическую), умение использовать разнообразные средства, позволяющие эффективно представлять информацию.

При организации внеаудиторной самостоятельной работы студентов необходимо максимально использовать образовательные возможности сети Интернет и основных видов телекоммуникаций. Положительно сказывается на учебном процессе организация личных страничек преподавателей на сайтах кафедры, проведение Web-форумов, использование e-mail, в том числе рассылок образовательной направленности, обмен файлами преподавателей с учащимися. В современных условиях преподаватель должен активно использовать веб-

технологии в он-лайнном и офф-лайнном режимах при проведении электронных семинаров, интерактивного тестирования, электронных конференций, чат-конференций. Для успешной работы в этом направлении необходимо развивать материально-техническую базу учебного процесса, регулярно проводить обучение профессорско-преподавательского состава новым формам организации учебной работы, приветствовать и поощрять преподавателей, использующих в своей профессиональной деятельности новые образовательные технологии.

Тестирование

Одним из важных методов проверки знаний является тестирование. Этот метод имеет ряд преимуществ перед традиционными устными и письменными экзаменами, недостатками которых является высокая организационная сложность, большая трудоёмкость работ, ограниченное (регламентированное) время проверки, присутствие субъективного и психологического факторов. Он также стимулирует учебно-познавательную активность студентов. Тестирования должны быть как промежуточными, так и итоговыми.

Контроль в форме тестирования позволяет выявить уровень усвоения материала, скорректировать методику и технологию преподавания. Тестовый контроль позволяет оперативно проверить знания студентов, психологически меньше нагружает и студентов, и преподавателей. Тестовый материал должен содержать задания, проверяющие знание и понимание определений и теорем, предлагающие устанавливать причинно-следственные отношения, позволяющие проводить сравнения, сопоставления, распознавать противоречия в предлагаемых вариантах решений. Тестовые задания должны быть наглядными и несложными для выполнения. Для проверки терминологии это могут быть задания *открытой формы* с пропусками слов. Знание определений можно эффективно проверить с помощью заданий *закрытого типа* с большим набором ответов. Понять, как идёт процесс освоения теоретического материала – осознанно или чисто механически, помогут задания *на соответствие*. Для диагностирования причинно-следственных знаний и умений можно конструировать *цепные задания*, в которых правильный ответ на последующее задание зависит от ответа на предыдущее. Для формирования навыков сравнения геометрических объектов, сопоставления, соотнесения, представления объекта в разных формах используются тестовые задания *идентификации*, содержащие графические элементы [4].

Процесс тестирования предполагает наличие большого банка задач для каждого раздела тестируемых математических курсов. Создание банка задач – довольно сложная процедура, требующая соблюдения определённых требований к содержанию и виду таких задач: однозначность их формулировки, определённость метода решений, единственность получаемого результата. Создание «вручную» набора тестового материала во многих случаях оказывается малоэффективным занятием и отнимает довольно много времени у преподавателя. Поэтому использование современных математических пакетов (МП) существенно облегчает процесс создания такого рода тестовых наборов

задач. Для создания банка тестовых задач могут быть использованы системы MathCad и Matlab.

Использование информационно-коммуникационных технологий

Развитие творческих способностей и мотивационных стимулов обучения студентов в настоящее время невозможно без активного внедрения современных информационно-коммуникационных технологий (ИКТ) в организацию учебного процесса. Большое значение в процессе обучения студентов имеют средства визуализации информации, которые дают возможность полнее и глубже, доходчивее и проще изложить содержание излагаемого материала, способствуют формированию положительных мотивов учения. Для наиболее полного использования ИКТ необходимо создавать мультимедийные аудитории, оснащённые мультимедийным проектором, документом-камерой, интерактивной доской, имеющие возможность осуществлять интернет-трансляцию занятий, видеозапись, создавать электронные библиотеки лекционных материалов, размещать видеозаписи лекций в Интернете.

Грамотное использование ИКТ в учебном процессе, несомненно, оказывает положительное воздействие на развитие мышления, воображения, творческих способностей, активности учащихся, а преподавателям позволяет сделать процессы обучения и преподавания более эффективными.

Ясно, что чем раньше учащиеся научатся использовать современные технологии, тем легче им будет овладевать новейшими способами получения информации и преобразовывать её в знания. Информационные технологии значительно повышают у молодого поколения уровень информированности, развивают необходимые практические навыки и профессиональные качества.

Обновление образования предполагает необходимость значительных изменений при условии использования ИКТ в качестве опорного механизма его развития, поскольку учащийся должен развивать свои знания и умения, получать огромное количество разнообразной информации под влиянием интереса и внутренней мотивации, а не под влиянием внешней необходимости соответствовать образовательным стандартам.

Использование ИКТ открывает огромные возможности для создания качественно новых форм и методов подготовки, учащихся к дальнейшему обучению.

Использование ИКТ способствует постепенному трансформированию образования из процесса передачи знаний в процесс их развития: обучение идёт гораздо активнее, студенты и преподаватели, работая вместе, составляют так называемое образовательное сообщество. С развитием функциональных возможностей ИКТ и появлением экспертных систем, компьютерного моделирования, мультимедийных программ и систем виртуальной реальности расширились возможности для совершенствования традиционного образования – активизировать самостоятельную познавательную деятельность учащихся, развивать психологические установки на творческую деятельность, оказывать влияние на развитие культуры обучения.

Средства ИКТ помогают заинтересовать учащегося, пробудить стремление познать неизвестное, становятся связующим звеном между стремлением студента к знанию и решением иных жизненно важных для него задач. Важно, чтобы студент попал в такое образовательное сообщество, где он научится не просто поглощать информацию, а критически мыслить, давать оценку явлениям и находить решение проблем.

Обучение и развитие людей, формирование социальных и профессиональных требований к ним во многом зависит от уровня применимости ИКТ в образовании. Но было бы ошибочно считать, что использование ИКТ в обучении автоматически повысит качество образования. Уникальная роль ИКТ состоит в том, что эти технологии одновременно могут способствовать обеспечению и необходимых, и достаточных условий повышения качества образования [5].

В сфере *необходимых* условий применение ИКТ:

- обеспечивает эффективную учебно-методическую базу;
- совершенствует оперативные возможности и эффективность образовательной системы;
- способствует интеграции национальной системы образования в мировую сеть, обеспечивает доступ к международным информационным ресурсам.

В сфере *достаточных* условий применение ИКТ:

- способствует развитию интеллектуальных свойств личности;
- активизирует умственную деятельность и придает обучению активный и творческий характер;
- обеспечивает взаимодействие учащихся и преподавателя.

Таким образом, ИКТ вносят радикальные изменения, как в процесс получения знаний, так и в преобразование этих знаний в образование, применение их на практике; они не только улучшают возможности обучения, но и помогают учащимся совершенствовать свое восприятие в целом.

Резюмируя, надо подчеркнуть, что обучение – процесс, несомненно, творческий и развивающийся. Инновационные технологии будут пополняться новыми приемами и методами, но их цель – поднять эффективность и качество образования, останется неизменной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Власова Е.А., Попов В.С. Принципы блочно-модульной систем преподавания математики // Проблемы совершенствования качества образования в вузе: материалы второй науч.-практ. конф., Орехово-Зуево, 5 февраля 2010 г. Орехово-Зуево: Изд-во Орехово-Зуевского филиала института экономики и предпринимательства, 2010. С. 88–93.
2. Власова Е.А., Грибов А.Ф., Попов В.С., Латышев А.В. Развитие мотивационных стимулов обучения в рамках модульно-рейтинговой системы организации учебного процесса // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2014. № 1. С. 48–53.
3. Лукашенко А.Г. Опыт использования системы MathCAD 11 при обучении высшей математике // Математика в высшем образовании. 2005. № 3. С. 53–64.

4. Власова Е.А., Латышев А.В., Попов В.С., Солдатенко И.Г. Методические аспекты обеспечения дисциплины «Аналитическая геометрия» в техническом университете // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2016. № 2. С. 111–124.
5. Коммерс П., Симмерлинг М. Информационные и коммуникационные технологии для среднего образования // Специализированный учебный курс. М.: Изд. дом «Обучение-Сервис». 2005. С. 128.

REFERENCES

1. Vlasova E.A., Popov V.S. The principles of the modular system of teaching mathematics. In: Problemy sovershenstvovaniya kachestva obrazovaniya v vuze: materialy vtoroi nauch.-prakt. konf., Orekhovo- Zuevo, 5 fevralya 2010 g [Problems of improving the quality of education at aUniversity: proceedings of the second scientific.-pract. conf. Orekhovo-Zuevo, 5 Feb 2010]. Orekhovo-Zuevo, Orekhovo-Zuevo branch of Institute of economics and business Publ., 2010, pp. 88–93.
2. The development of motivational incentives for learning within the module-rating system of organization of the educational process. Vlasova E.A., Gribov A.F., Popov V.S., Latyshev A.V. In: Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika [Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and mathematics]. 2014, no. 1, pp. 48–53.
3. Lukashenko A.G. Experience in the use of MathCAD 11 in teaching higher mathematics. In: Matematika v vysshem obrazovanii [Mathematics in higher education]. 2005, no. 3, pp. 53–64.
4. Methodological aspects of the discipline “Analytical geometry” at the technical University. Vlasova E.A., Latyshev A.V., Popov V.S., Soldatenko I.G. In: Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika [Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and mathematics]. 2016. no. 2. pp. 111–124.
5. Kommers P., Simmerling M. Informatsionnye i kommunikatsionnye tekhnologii dlya srednego obrazovaniya: spetsializirovannyi uchebnyi kurs [Information and communication technologies for secondary education: specialized training course]. Moscow, «Obuchenie-Servis» Publ., 2005, p. 128.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Власова Елена Александровна – к.ф.-м.н., доцент каф. «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана;
e-mail: elena.a.vlasova@yandex.ru

Попов Владимир Семенович – к.ф.-м.н., доцент каф. «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана;
e-mail: vspopov@bk.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Elena Vlasova – candidate of physico-mathematical sciences, assistant professor of the Applied Mathematics Department at the Bauman Moscow State Technical University;
e-mail: elena.a.vlasova@yandex.ru

Vladimir Popov – candidate of physico-mathematical sciences, assistant professor of the Applied Mathematics Department at the Bauman Moscow State Technical University;
e-mail: vspopov@bk.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Власова Е.А., Попов В.С. Инновационные методы и технологии обучения математике в техническом вузе // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2017. № 1. С. 100–112.
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-1-100-112.

THE CORRECT REFERENCE TO ARTICLE

E. Vlasova, V. Popov. Innovative methods and technologies of teaching mathematics at a technical university. In: *Bulletin of Moscow Region State University*. Series: Physics and Mathematics. 2017, no. 1, pp. 100–112.
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-1-100-112.

УДК 519.852

DOI: 10.18384-2310-7251-2017-1-113-123

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ АЛГОРИТМОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С НЕОГРАНИЧЕННЫМИ ОБЛАСТЯМИ ДОПУСТИМЫХ РЕШЕНИЙ

Хасанов А.С.

*Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова
117997, Москва, Стремянный пер., 36, Российская Федерация*

Аннотация. В работе рассмотрены особенности алгоритмов графического метода, метода простого перебора всех опорных решений и симплекс-метода для решения задач линейного программирования в случае задач с неограниченными областями допустимых решений. Приведены соответствующие примеры решённых задач.

Ключевые слова: линейное программирование, опорное решение, оптимальное решение.

PECULIARITIES OF ALGORITHMS FOR SOLVING LINEAR PROGRAMMING PROBLEMS WITH UNBOUNDED FEASIBLE REGIONS

A. Khasanov

*Plekhanov Russian University of Economics
Stremyanniy per. 36, 117997 Moscow, Russian Federation*

Abstract. The peculiarities of the algorithms of the graphical method, the method of iteration over all basic feasible solutions, and the simplex method for solving linear programming problems are considered in the case of problems with unbounded feasible regions. The appropriate examples of solved problems are presented.

Keywords: linear programming, basic feasible solution, optimal solution.

Введение

Задача линейного программирования (ЛП) может быть записана в виде

$$Z(X) = c_0 + c_1x_1 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max(\min), \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \dots, \\ a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n = b_k, \\ a_{k+1,1}x_1 + \dots + a_{k+1,n}x_n \leq (\geq) b_{k+1}, \\ \dots, \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \leq (\geq) b_m, \end{array} \right. \quad (2)$$

$$x_j \geq 0, j \in I. \quad (3)$$

Запись (1)–(3) (общая задача ЛП) означает следующее: найти максимум (минимум) целевой функции $Z(X) = c_0 + c_1x_1 + \dots + c_nx_n$ ($n \geq 2$) n переменных $x_1, \dots, x_n$ при условии, что эти переменные удовлетворяют системе ограничений (2) и условиям неотрицательности (3). В соотношении (1) $X = (x_1, \dots, x_n)$ – n -мерный вектор. Последовательность $(x_1, \dots, x_n)$ можно интерпретировать и как n -мерную точку, и как n -мерный вектор с началом в начале координат и с концом в точке с координатами $(x_1, \dots, x_n)$. Допустимым решением задачи ЛП называется любой вектор $X = (x_1, \dots, x_n)$, координаты которого удовлетворяют системе ограничений (2) и условиям (3). Множество допустимых решений задачи образует область допустимых решений (ОДР). Оптимальным решением задачи ЛП называется такое допустимое решение, при котором целевая функция достигает искомого экстремума. Будем считать, что ОДР не является пустым множеством и требование $x_j \geq 0$ в условиях (3) относится ко всем переменным [1] ($x_j \geq 0 \forall j$).

ОДР задачи (1)–(3) является общей частью полупространств вида $a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \leq (\geq) b_i$ и гиперплоскостей вида $a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = b_i$ (является выпуклым многогранным множеством [1]). Если ОДР является неограниченным множеством, то оно совпадает [1] с множеством точек

$$X = \sum_{i=1}^{N_1} \alpha_i X_i + \sum_{i=1}^{N_2} \beta_i R_i, \quad (4)$$

где $X_1, \dots, X_{N_1}$ – вершины ОДР, $R_1, \dots, R_{N_2}$ – направляющие векторы неограниченных рёбер ОДР, $\alpha_i \geq 0, \beta_i \geq 0, \sum_{i=1}^{N_1} \alpha_i = 1$. Наличие в представлении (4) вто-

рой суммы вносит свои особенности в алгоритмы решения задач ЛП. Пусть $C = (c_1, \dots, c_n)$ – вектор коэффициентов целевой функции. Если в задаче на максимум (минимум) существует вектор R_i , для которого скалярное произведение $(C, R_i) > 0$ ($(C, R_i) < 0$), то задача неразрешима [1]. Если в задаче на максимум (минимум) $(C, R_i) \leq 0$ ($(C, R_i) \geq 0$) при всех i , то задача разрешима и совокупность всех оптимальных решений совпадает [1] с множеством точек вида

$$X^* = \sum_{\lambda=1}^{m_1} \alpha_{i_\lambda} X_{i_\lambda} + \sum_{\lambda=1}^{m_2} \beta_{i_\lambda} R_{i_\lambda}, \quad (5)$$

где $\alpha_{i_\lambda} \geq 0, \beta_{i_\lambda} \geq 0, \sum_{\lambda=1}^{n_1} \alpha_{i_\lambda} = 1, X_{i_\lambda}, \lambda = 1, \dots, n_1$, – оптимальные вершины, $R_{i_\lambda}, \lambda = 1, \dots, n_2$, – направляющие векторы неограниченных ребер, для которых $(C, R_{i_\lambda}) = 0$. Мы начнём с алгоритма графического метода, так как в этом случае алгебраический подход допускает геометрическое истолкование.

Графический метод в случае $n = 2$

Задача ЛП с двумя переменными имеет вид $Z(X) = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 \rightarrow \max(\min)$,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq (\geq) b_1, \\ \dots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \leq (\geq) b_m, \end{cases}$$

где $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$. Эта задача решается на плоскости Ox_1x_2 графическим методом. Предполагается, что $c_1 \neq 0$ или $c_2 \neq 0$. Тогда линии уровня целевой функции $Z(X) = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2$ образуют семейство параллельных прямых $c_1x_1 + c_2x_2 = c$ с общим нормальным вектором $\vec{n} = (c_1, c_2)$. При перемещении линии уровня параллельно начальному положению в направлении нормального вектора значение целевой функции возрастает [1]. Перемещая линию уровня в задаче на максимум в направлении нормального вектора, а в задаче на минимум – в противоположном направлении, можно найти множество оптимальных решений или убедиться, что оптимальных решений нет. Если ОДР является неограниченным множеством, то множеством оптимальных решений может быть луч или задача может не иметь решения.

Пример 1. Рассмотрим задачу ЛП $Z(X) = 4x_1 - 2x_2 \rightarrow \min$,

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 2, \\ -x_1 + x_2 \geq 1, \end{cases}$$

где $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$. Точки $X_1(0, 2)$ и $X_2(0, 1)$ являются вершинами ОДР (фигуры, ограниченной прямыми $-2x_1 + x_2 = 2, -x_1 + x_2 = 1$ и осью Ox_2 (рис. 1)).

Лучи X_1A и X_2B имеют направляющие векторы $R_1 = (1, 2)$ и $R_2 = (1, 1)$. Линия уровня MN имеет уравнение $4x_1 - 2x_2 = c$ и параллельна прямой X_1A . Перемещая линию уровня против направления нормального вектора $\vec{n} = (4, -2)$ до крайнего положения X_1A , получим, что множеством оптимальных решений является луч X_1A . В векторной форме это множество можно записать в виде $X^* = X_1 + \beta R_1$, где $\beta \geq 0$. Так как $Z(X_1) = -4$, то $Z_{\min} = -4$.

Если в примере 1 рассмотреть задачу на максимум, то новая задача не имеет решения, так как при перемещении линии уровня в направлении нормального вектора $Z \rightarrow +\infty$. Рассмотрим в примере 1 и алгебраический подход. ОДР является неограниченным множеством, формула (4) имеет вид $X = \alpha_1X_1 + \alpha_2X_2 + \beta_1R_1 + \beta_2R_2$, где $\alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0, \alpha_1 + \alpha_2 = 1, \beta_1 \geq 0, \beta_2 \geq 0$. Так как $(C, R_1) = 0 \geq 0, (C, R_2) = 2 \geq 0$, то задача на минимум разрешима. Так как $Z(X_1) = -4, Z(X_2) = -2$, то

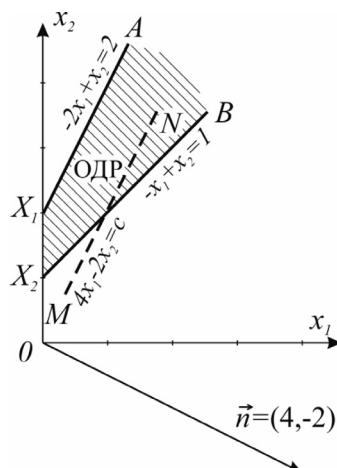


Рис. 1.

оптимальной вершиной является X_1 . Так как $(C, R_1) = 0$, то формула (5) имеет вид $X^* = X_1 + \beta_1 R_1$, где $\beta_1 \geq 0$. Так как $(C, R_2) = 2 > 0$, то задача на максимум неразрешима.

Графический метод в случае $n > 2$

Некоторые задачи ЛП могут быть решены графическим методом и в случае $n > 2$. Канонической задачей ЛП называется задача вида

$$Z(X) = c_0 + c_1 x_1 + \dots + c_n x_n \rightarrow \max(\min), \quad (6)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \dots, \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \quad (7)$$

$$x_j \geq 0 \quad \forall j. \quad (8)$$

Условие (7) можно записать в виде $x_1 A_1 + \dots + x_n A_n = B$, где

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Если ранг системы $A_1, \dots, A_n$ равен $n - 2$, то задачу (6)–(8) можно свести к задаче с двумя переменными.

Пример 2. Рассмотрим задачу ЛП

$$Z(X) = -5 - x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 \rightarrow \min, \quad (9)$$

$$\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 4, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 = -3, \end{cases} \quad (10)$$

$$x_j \geq 0 \forall j. \quad (11)$$

Систему (10) запишем в табличной форме и решим методом Жордана-Гаусса (разрешающие элементы заключены в круглые скобки). Параллельно исключим базисные переменные из целевой функции, для чего запишем её в виде уравнения $z + x_1 + x_2 - 4x_3 - 3x_4 = -5$ и поместим над табличной формой системы (10). В столбце z этой таблицы расположены коэффициенты при переменной z .

Таблица 1

z	x_1	x_2	x_3	x_4	b
1	1	1	-4	-3	-5
0	-4	3	(1)	-2	4
0	3	-1	-2	-1	-3
1	-15	13	0	-11	11
0	-4	3	1	-2	4
0	-5	5	0	(-5)	5
1	-4	2	0	0	0
0	-2	1	1	0	2
0	1	-1	0	1	-1

Последние три строчки этой таблицы соответствуют следующей задаче ЛП (базисные переменные в системе (13) заключены в круглые скобки):

$$Z(X) = 4x_1 - 2x_2 \rightarrow \min, \quad (12)$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + (x_3) = 2, \\ x_1 - x_2 + (x_4) = -1, \end{cases} \quad (13)$$

$$x_j \geq 0 \forall j. \quad (14)$$

Система (13) позволяет выразить базисные переменные x_3, x_4 через свободные переменные x_1, x_2 . Если подставить эти выражения в условия $x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$, то получим задачу с двумя переменными:

$$Z(X) = 4x_1 - 2x_2 \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 2, \\ x_1 - x_2 \leq -1, \end{cases}$$

где $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$.

После нахождения x_1, x_2 неизвестные x_3, x_4 могут быть найдены из системы (13). Заметим, что систему ограничений этой задачи с двумя переменными можно также получить из системы (13) путём отбрасывания базисных переменных и замены знаков «=» знаками « $\leq$ ». Полученная задача с двумя переменными совпадает с задачей, рассмотренной в предыдущем параграфе. Следовательно,

множество оптимальных решений задаётся формулами $x_1^* = \beta, x_2^* = 2 + 2\beta$, где $\beta \geq 0$. Из системы (13) находим, что $x_3^* = 0, x_4^* = 1 + \beta$. Теперь множество оптимальных решений $X^* = (\beta, 2 + 2\beta, 0, 1 + \beta)$ задачи (9)–(11) можно записать в следующей векторной форме $X^* = X_1 + \beta R_1$, где $\beta \geq 0, X_1 = (0, 2, 0, 1), R_1 = (1, 2, 0, 1)$. Ясно, что $Z_{\min} = -4$.

Метод простого перебора опорных решений

Решение общей задачи ЛП можно свести [1] к решению канонической задачи ЛП (6)–(8), в которой все правые части b_i неотрицательны. Эту задачу можно записать в следующем виде:

$$Z(X) = c_0 + (C, X) \rightarrow \max(\min), \quad (15)$$

$$x_1 A_1 + \dots + x_n A_n = B, \quad (16)$$

$$x_j \geq 0 \forall j, b_i \geq 0 \forall i. \quad (17)$$

Пусть r – ранг системы $A_1, \dots, A_n$. Опорным решением задачи (15)–(17) называется её допустимое решение $X = (x_1, \dots, x_n)$, для которого векторы $A_{i_1}, \dots, A_{i_k}$, соответствующие его положительным координатам $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$, линейно независимы. Если $k = r$, то система $A_{i_1}, \dots, A_{i_r}$ является базисом системы $A_1, \dots, A_n$. Этот базис называется базисом опорного решения X , а X называется невырожденным. В случае $k < r$ опорное решение X называется вырожденным. В этом случае базисом опорного решения X называется любой базис системы $A_1, \dots, A_n$, содержащий $A_{i_1}, \dots, A_{i_k}$.

Так как ОДР не является пустым множеством, то в задаче (15)–(17) есть хотя бы одно опорное решение [1]. Перейдём от системы ограничений (16) к её табличной форме, решим систему методом Жордана-Гаусса и найдём базисное решение, присвоив свободным переменным нулевые значения. Базисное решение будет допустимым, если разрешающие элементы выбираются специальным образом [1] из столбцов, содержащих хотя бы один положительный элемент. Если разрешающий элемент выбирается в j -м столбце и элемент a_{ij} является его единственным положительным элементом, то выбирается a_{ij} . В случае нескольких положительных элементов $a_{i_1j}, \dots, a_{i_kj}$ из них выбирается элемент a_{ij} , для которого отношение b_i/a_{ij} является наименьшим среди отношений $b_{i_1}/a_{i_1j}, \dots, b_{i_k}/a_{i_kj}$. Полученное допустимое базисное решение X будет опорным решением. Векторы условий, соответствующие базисным переменным, образуют базис B этого опорного решения. О системе (16) будем говорить, что она приведена к базису B опорного решения X . Если в базис ввести новый вектор (ясно, что при этом из базиса выводится один из старых векторов), то получим новый базис. Переходя от одного базиса к другому, можно найти все базисы опорных решений и все опорные решения. Так как допустимое решение задачи (15)–(17) является опорным тогда и только тогда, когда оно является вершиной ОДР [1], то можно найти

все вершины ОДР, а затем найти среди них оптимальные. Если ОДР является неограниченным множеством, то в формуле (4) будут присутствовать ещё и направляющие векторы неограниченных рёбер.

Пример 3. Рассмотрим следующую задачу ЛП:

$$Z(X) = 2x_1 + x_2 - 3x_3 - 5x_4 \rightarrow \max, \quad (18)$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 6, \end{cases} \quad (19)$$

$$x_j \geq 0 \forall j. \quad (20)$$

Запишем систему (19) в табличной форме и решим методом Жордана-Гаусса. Базисные векторы приведены в столбце Б, а отношения $b_i / a_{ij}, \dots, b_{ik} / a_{ikj}$ – в столбце θ (минимальное отношение подчёркнуто).

Таблица 2

Б	A_1	A_2	A_3	A_4	В	θ
	(1)	-1	2	-1	2	<u>2</u>
	2	1	-3	1	6	3
	1	-1	2	-1	2	
	0	(3)	-7	3	2	
A_1	1	0	-1/3	0	8/3	
A_2	0	1	-7/3	1	2/3	

Здесь базисными переменными являются x_1 и x_2 , а свободными – x_3 и x_4 . Базисное решение $X_1 = (8/3, 2/3, 0, 0)$ является начальным опорным решением с базисом $B_1 = (A_1, A_2)$. Система (19) приведена к базису B_1 опорного решения X_1 . Ранг r системы векторов A_1, A_2, A_3, A_4 равен двум. Поиск всех базисов опорных решений следует вести среди следующих $C_n^r = C_4^2 = 6$ комбинаций: $A_1, A_2; A_1, A_3; A_1, A_4; A_2, A_3; A_2, A_4; A_3, A_4$. Если в полученной выше разрешённой системе разрешающий элемент выбрать в столбце A_3 , то вектор A_3 окажется в базисе вместо A_1 или A_2 , но в обоих случаях базисные решения не будут допустимыми, то есть A_1, A_3 и A_2, A_3 не являются базисами опорных решений. Выберем разрешающий элемент в столбце A_4 . Вектор A_4 можно ввести в базис только вместо A_2 (A_2, A_4 не является базисом опорного решения). Тогда базисными переменными будут x_1 и x_4 , а свободными – x_2 и x_3 .

Таблица 3

Б	A_1	A_2	A_3	A_4	В	θ
A_1	1	0	-1/3	0	8/3	
A_2	0	1	-7/3	(1)	2/3	
A_3	1	0	-1/3	0	8/3	
A_4	0	1	-7/3	1	2/3	

Базисное решение $X_2 = (8/3, 0, 0, 2/3)$ является вторым опорным решением с базисом $B_2 = (A_1, A_4)$. Здесь мы привели систему (19) к базису B_2 опорного решения X_2 . Из шести комбинаций осталось рассмотреть только одну комбинацию A_3, A_4). Для перехода к этому базису мы должны выбрать разрешающий элемент из столбца A_3 последней разрешённой системы. Но тогда базисное решение не будет допустимым, то есть опорным. Итак, в этой задаче ОДР имеет только две вершины: X_1 и X_2 .

Перейдём к правилу выявления неограниченности ОДР. Если в системе ограничений, приведённой к какому-нибудь базису опорного решения, среди коэффициентов какой-нибудь свободной переменной нет положительных чисел, то ОДР является неограниченным множеством [1–3]. По столбцам коэффициентов таких переменных можно найти [3] координаты соответствующих направляющих векторов неограниченных ребер. Пусть x_i – такая свободная переменная. Тогда в направляющем векторе $R = (x_1, \dots, x_n)$ координата $x_i = 1$, остальным свободным переменным соответствуют нули, а базисным переменным соответствуют коэффициенты при x_i , взятые с противоположным знаком (для каждой базисной переменной коэффициент при x_i берётся из того уравнения, в которое входит эта базисная переменная). Пусть система (19) приведена к базису $B_1 = (A_1, A_2)$. Из этой системы видим, что ОДР является неограниченным множеством. В этом базисе можно найти направляющий вектор неограниченного ребра $R_1 = (1/3, 7/3, 1, 0)$. Если система (19) приведена к базису $B_2 = (A_1, A_4)$, то можно найти ещё один направляющий вектор неограниченного ребра $R_2 = (1/3, 0, 1, 7/3)$. Из формулы (4) следует, что ОДР является множеством точек $X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \beta_1 R_1 + \beta_2 R_2$, где $\alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0, \alpha_1 + \alpha_2 = 1, \beta_1 \geq 0, \beta_2 \geq 0$.

Перейдём к правилу выявления разрешимости задачи. Так как $(C, R_1) = 2/3 + 7/3 - 3 - 0 = 0 \leq 0, (C, R_2) = 2/3 + 0 - 3 - 35/3 = -14 \leq 0$, то задача на максимум (18) – (20) разрешима.

Перейдем к нахождению множества оптимальных решений по формуле (5). Так как $Z(X_1) = 16/3 + 2/3 - 0 - 0 = 16, Z(X_2) = 16/3 + 0 - 0 - 10/3 = 2, (C, R_1) = 0, (C, R_2) \neq 0$, то $Z_{\max} = 6$, множество оптимальных решений можно записать в виде $X^* = X_1 + \beta R_1$, где $\beta \geq 0, X_1 = (8/3, 2/3, 0, 0), R_1 = (1/3, 7/3, 1, 0)$. Заметим, что задача не разрешима в случае $Z(X) = 2x_1 + x_2 - 3x_3 - 5x_4 \rightarrow \min$, так как $(C, R_2) < 0$.

Симплексный метод

Симплексный метод является методом последовательного улучшения опорных решений. Для рассмотрения особенностей метода в случае неограниченных ОДР, рассмотрим решение задачи (18)–(20) симплексным методом. Запишем систему (19) в табличной форме, а целевую функцию (18) в виде уравнения $z - 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 0$. Поместим это уравнение (z -строку) в таблице над системой (19). Решим систему (19) методом Жордана-Гаусса и параллельно исключим базисные переменные из z -строки. В этой симплексной таблице столбец A_0 – столбец коэффициентов при z в z -строке и системе (19), а в столбце B записаны базисные векторы и буква z в z -строке.

Таблица 4

Б	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	В	θ
z	1	-2	-1	3	5	0	
	0	(1)	-1	2	-1	2	<u>2</u>
	0	2	1	-3	1	6	3
z	1	0	-3	7	3	4	
	0	1	-1	2	-1	2	
	0	0	(3)	-7	3	2	
z	1	0	0	0	6	6	
A_1	0	1	0	-1/3	0	8/3	
A_2	0	0	1	-7/3	1	2/3	

Из полученной разрешённой системы находим начальное опорное решение $X_1 = (8/3, 2/3, 0, 0)$ с базисом $B_1 = (A_1, A_2)$. Неограниченность ОДР выявляется так же, как в предыдущем параграфе. Если в системе ограничений, приведённой к базису опорного решения, среди коэффициентов какой-нибудь свободной переменной x_i нет положительных чисел, то ОДР является неограниченным множеством. Пусть R – соответствующий направляющий вектор неограниченного ребра. Тогда из определения этого вектора следует, что $(C, R) = c_i$, где c_i – i -й коэффициент целевой функции, приведенной к базису опорного решения (из целевой функции исключены базисные переменные). Заметим, что в z -строку коэффициенты целевой функции входят с противоположным знаком. Из последних трёх строк таблицы следует, что ОДР является неограниченным множеством, имеет неограниченное ребро с направляющим вектором $R_1 = (1/3, 7/3, 1, 0)$ и $(C, R_1) = 0$.

Критерий оптимальности опорного решения основан на z -строке. Если в задаче на максимум (минимум) все коэффициенты при небазисных переменных в z -строке являются неотрицательными (неположительными), то опорное решение является оптимальным [2]. Максимальное (минимальное) значение z находится на пересечении z -строки и столбца B . Если при этом хотя бы один коэффициент при небазисной переменной равен нулю, то оптимальное решение не является единственным [3]. По этим нулевым коэффициентам можно найти новые базисы оптимальных опорных решений (если соответствующий вектор можно ввести в базис) и направляющие векторы неограниченных рёбер для формулы (5) (если нельзя ввести соответствующий вектор в базис). Опорное решение X_1 является оптимальным решением и $Z_{\max} = 6$. Решение задачи не является единственным, но новых оптимальных опорных решений нет. Так как $(C, R_1) = 0$, то множество оптимальных решений находим по формуле (5): $X^* = X_1 + \beta R_1$, где $\beta \geq 0$.

Если в условии (18) $\max$ заменить на $\min$, то X_1 не является оптимальным решением. Если опорное решение не является оптимальным, то при поиске оптимального решения в задаче на максимум (минимум) рассматриваются векторы, соответствующие небазисным переменным с отрицательными (положительными)

коэффициентами в z -строке [2]. Если среди них есть вектор, который нельзя ввести в базис, то задача неразрешима. В противном случае один из рассматриваемых векторов вводится в базис. В случае невырожденного опорного решения получим базис нового опорного решения, при котором значение целевой функции больше (меньше). В случае вырожденного опорного решения возможен переход к другому базису этого же опорного решения (в этом случае значение целевой функции не изменится). Продолжим симплексную таблицу 4 для решения задачи на минимум в примере 3. Ясно, что разрешающий элемент следует выбрать в столбце A_4 .

Таблица 5

Б	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	В	θ
z	1	0	0	0	6	6	
A_1	0	1	0	$-1/3$	0	$8/3$	
A_2	0	0	1	$-7/3$	(1)	$2/3$	
z	1	0	-6	14	0	2	
A_1	0	1	0	$-1/3$	0	$8/3$	
A_4	0	0	1	$-7/3$	1	$2/3$	

Из разрешённой системы находим опорное решение $X_2 = (8/3, 0, 0, 2/3)$ с базисом $B_2 = (A_1, A_4)$ и $Z(X_2) = 2 < Z(X_1) = 6$. Это решение не является оптимальным. Так как вектор A_3 нельзя ввести в базис, то задача неразрешима (из этой таблицы можно найти ещё один направляющий вектор неограниченного ребра $R_2 = (1/3, 0, 1, 7/3)$, для которого $(C, R_2) = -14 < 0$, что доказывает неразрешимость задачи на минимум).

Заключение

Задача ЛП с неограниченной ОДР может возникнуть при составлении математической модели реального процесса, если, например, не учтены некоторые ограничения [2]. Некоторые авторы игнорируют такие задачи ЛП или решают их без учёта неограниченности ОДР. Между тем, таких задач много и разобранные примеры показывают важность учёта тех особенностей, которые связаны с неограниченностью ОДР.

ЛИТЕРАТУРА

1. Юдин Д.Б., Гольштейн Е.Г. Линейное программирование (теория, методы и приложения). М.: Наука, 1969. 424 с.
2. Таха Х.А. Введение в исследование операций. М.: Издательский дом «Вильямс», 2007. 912 с.
3. Киселев А.В. Линейное программирование: учебное пособие. Ч. 1. М.: Издательство РЭА имени Г.В. Плеханова, 2005. 83 с.

REFERENCES

1. Yudin D.B., Gol'shtein E.G. Lineinoe programmirovaniye (teoriya, metody i prilozheniya) [Linear programming (theory, methods and applications)]. Moscow, Nauka Publ., 1969. 424 p.

2. Taha H.A. Operations research. An Introduction. New Jersey, Upper Saddle River, Pearson Prentice Hall. 2007. 813 p.
3. Kiselev A.V. Lineinoe programmirovaniye: uchebnoe posobie. Ch. 1 [Linear programming: A tutorial. Part 1]. Moscow, PRUE n.a. G.V.Plekhanov Publ., 2005. 83 p.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Хасанов Анис Саляхович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики ФГБОУ ВО «Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова»;

e-mail: ankhasanov@yandex.ru.

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Anis Khasanov – doctor of physico-mathematical sciences, professor of the Higher Mathematics Department at the Plekhanov Russian University of Economics;

e-mail: ankhasanov@yandex.ru.

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Хасанов А.С. Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2017. № 1. С. 113–123.

DOI: 10.18384/2310-7251-2017-1-113-123.

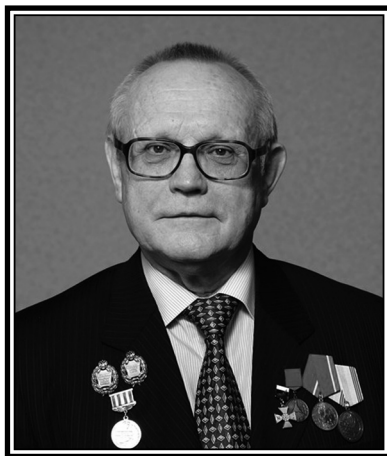
THE CORRECT REFERENCE TO ARTICLE

A. Khasanov. Peculiarities of algorithms for solving linear programming problems with unbounded feasible regions. In: *Bulletin of Moscow Region State University*. Series: Physics and Mathematics. 2017, no. 1, pp. 113–123.

DOI: 10.18384/2310-7251-2017-1-113-123.

ПАМЯТИ АНАТОЛИЯ ВАСИЛЬЕВИЧА ЛАТЫШЕВА

(20.09.1948 – 29.03.2017)



29 марта 2017 года мы понесли тяжёлую утрату. На 68 году жизни не стало профессора Латышева Анатолия Васильевича. Трудно смириться с этой потерей! Он был выдающимся ученым – доктор физико-математических наук, профессор, Заслуженный деятель науки РФ, Заслуженный работник высшей школы РФ, Почетный работник высшего профессионального образования РФ, дважды лауреат конкурса «Грант Москвы» в области наук и технологий в сфере образования, академик Международной педагогической академии образования.

В 1974 году Латышев А.В. защитил кандидатскую диссертацию по теме «Характеристические свойства одного класса интегралов в пространстве двух комплексных переменных». В 1993 году защитил докторскую диссертацию по теме «Аналитические методы решения модельных кинетических уравнений и приложения».

Вся трудовая и научная деятельность Анатолия Васильевича была связана с Московским государственным областным университетом. После окончания математического факультета МОПИ имени Крупской он прошел путь от аспиранта до профессора, доктора физико-математических наук, заведующего кафедрой математического анализа и геометрии. Входил в Ученый совет физико-математического факультета, Ученый совет МГОУ, был членом трех докторских советов. Состоял в редколлегии журнала «Математика в высшем образовании», научном комитете международной конференции «Математические модели нелинейных явлений» и «Международного конгресса по математическому моделированию». Работал в составе редакционной коллегии научного журнала «Вестник Московского государственного областного университета серия «Физика-математика».

В центре научных интересов Анатолия Васильевича была математическая физика. Он руководил проектами в Институте вычислительной математики РАН: «Начально-краевые для кинетических уравнений и численно-аналитические алгоритмы», «Кинетические уравнения и математическая теория двухфазных физико-химических процессов», «Модельные кинетические уравнения для квантовых газов и математическая теория уравнения Больцмана-Смолуховского».

Под руководством Латышева А.В. было защищено множество кандидатских и докторских диссертаций.

Анатолий Васильевич Латышев являлся автором большого числа статей и монографий, в которых были решены важнейшие проблемы теории излучения, нелинейных и квантовых газов, теории плазмы. Полученные результаты по кинетическим уравнениям теории плазмы и излучения получили всемирное признание.

Светлая память о Латышеве Анатолии Васильевиче всегда будет жива в сердцах его коллег и учеников.



ВЕСТНИК МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ОБЛАСТНОГО УНИВЕРСИТЕТА

Научный журнал «Вестник Московского государственного областного университета» основан в 1998 г. Выпускается десять серий журнала: «История и политические науки», «Экономика», «Юриспруденция», «Философские науки», «Естественные науки», «Русская филология», «Физика-математика», «Лингвистика», «Психологические науки», «Педагогика». Все серии включены в составленный Высшей аттестационной комиссией Перечень ведущих рецензируемых научных журналов, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертации на соискание ученой степени доктора и кандидата наук по наукам, соответствующим названию серии. Журнал включен в базу данных Российского индекса научного цитирования (РИНЦ).

Печатная версия журнала зарегистрирована в Федеральной службе по надзору за соблюдением законодательства в сфере массовых коммуникаций и охране культурного наследия. Полнотекстовая версия журнала доступна в Интернете на платформе Научной электронной библиотеки (www.elibrary.ru), а также на сайте журнала www.vestnik-mgou.ru.

ВЕСТНИК МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ОБЛАСТНОГО УНИВЕРСИТЕТА

СЕРИЯ: ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА
2017. N 1

Над номером работали:

Литературный редактор Д.Д. Дрошнев
Переводчик И.А. Улиткин
Корректор Д.Д. Дрошнев
Компьютерная верстка Н.Н. Жильцов

Отдел по изданию научного журнала
«Вестник Московского государственного областного университета»
Информационно-издательского управления МГОУ
105005, г. Москва, ул. Радио, д.10А, офис 98
тел. (495) 723-56-31; (495) 780-09-42 (доб. 6101)
e-mail: vest_mgou@mail.ru
сайт: www.vestnik-mgou.ru

Формат 70x108/16. Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура «Minion Pro».
Тираж 500 экз. Уч.-изд. л. 6,0, усл. п. л. 16,0.
Подписано в печать: 30.12.2016. Дата выхода в свет: 28.02.2017. Заказ № 2016/12-07.
Отпечатано в ИИУ МГОУ
105005, г. Москва, ул. Радио, 10А