ISSN 2072-8387 (print)
ISSN 2310-7251 (online)

Вестник

Московского Государственного Областного Университета

Серия

Физика-математика

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА ДВИЖЕНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ТЕЛА С УПРУГОЙ СВЯЗЬЮ В ВЯЗКОМ КОНТИНУУМЕ

ДИСПЛЕЙ С МНОГОПОЛЬЗОВАТЕЛЬСКИМ ИНДИВИДУАЛЬНО-РАЗЛИЧНЫМ ОТОБРАЖЕНИЕМ. УПРАВЛЯЕМОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОЕЦИРУЕМОГО СВЕТОВОГО ПОТОКА ПРОЕКТОРОМ НА ОСНОВЕ ЖИДКИХ КРИСТАЛЛОВ

НЕЛИНЕЙНЫЕ КИНЕТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ ПРИ ПОЛЯРИЗАЦИИ ТВЕРДЫХ ДИЭЛЕКТРИКОВ

2018/ № 2

ВЕСТНИК
МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
ОБЛАСТНОГО УНИВЕРСИТЕТА

ISSN 2072-8387 (print) 2018 / № 2 ISSN 2310-7251 (online)

серия
ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА

Рецензируемый научный журнал. Основан в 1998 г.

Журнал «Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика» включён в «Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук» Высшей аттестационной комиссии при Министерстве образования и науки Российской Федерации (См.: Список журналов на сайте ВАК при Минобрнауки России) по Физике (01.04.00).

The peer-reviewed journal was founded in 1998

«Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics» is included by the Supreme Certifying Commission of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation into "the List of leading reviewed academic journals and periodicals recommended for publishing in corresponding series basic research thesis results for a Ph.D. Candidate or Doctorate Degree" (See: the online List of journals at the site of the Supreme Certifying Commission of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation) in Physics (01.04.00).

ISSN 2072-8387 (print) 2018 / № 2 ISSN 2310-7251 (online)

series
PHYSICS AND MATHEMATICS

BULLETIN OF THE MOSCOW REGION
STATE UNIVERSITY

Учредитель журнала «Вестник Московского государственного областного университета»:
Государственное образовательное учреждение высшего образования Московской области
Московский государственный областной университет
Выходит 4 раза в год

ISSN 2072-8387 (print)
ISSN 2310-7251 (online)

Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. – 2018. – № 2. – 100 с.

Журнал «Вестник Московского государственного областного университета. Серия «Физика-Математика» зарегистрирован в Федеральной службе по надзору за соблюдением законодательства в сфере массовых коммуникаций и охране культурного наследия. Регистрационное свидетельство ПИ № ФС77-26136

Индекс серии «Физика-Математика»
по Объединенному каталогу «Пресса России» 40723

Адрес Отдела по изданию научного журнала «Вестник Московского государственного областного университета»
г. Москва, ул. Радио, д.10А, офис 98
тел. (495) 723-56-31; (495) 780-09-42 (доб. 6101)
e-mail: vest_mgou@mail.ru; сайт: www.vestnik-mgou.ru

Журнал включен в базу данных Российского индекса научного цитирования (РИНЦ), имеет полнотекстовую сетевую версию в Интернете на платформе Научной электронной библиотеки (www.elibrary.ru), а также на сайте Московского государственного областного университета (www.vestnik-mgou.ru)

Founder of journal «Bulletin of the Moscow Region State University»:
Moscow Region State University

Issued 4 times a year

The journal is included into the database of the Russian Science Citation Index, has a full text network version on the Internet on the platform of Scientific Electronic Library (www.elibrary.ru), as well as at the site of the Moscow State Regional University (www.vestnik-mgou.ru)

The Editorial Board address:
Moscow Region State University

10A Radio st., office 98, Moscow, Russia
Phones: (495) 723-56-31; (495) 780-09-42 (add. 6101)
e-mail: vest_mgou@mail.ru; site: www.vestnik-mgou.ru

ISSN 2072-8387 (print)
ISSN 2310-7251 (online)
Bulletin of the Moscow State Regional University. Series: Physics and Mathematics. – 2018. – № 2. – 100 p.

The series «Physics and Mathematics» of the Bulletin of the Moscow State Regional University is registered in Federal service on supervision of legislation observance in sphere of mass communications and cultural heritage protection. The registration certificate ПИ № ФС77-26136

Index of the series «Physics and Mathematics» according to the union catalog «Press of Russia» 40723

СОДЕРЖАНИЕ

РАЗДЕЛ I. ФИЗИКА

РАЗДЕЛ II. ТЕОРИЯ И МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ И ВОСПИТАНИЯ

CONTENTS

SECTION I. PHYSICS

SECTION II.
THEORY AND METHODS OF TEACHING AND EDUCATION

РАЗДЕЛ I.
ФИЗИКА

УДК 531.17
DOI: 10.18384/2310-7251-2018-2-6-20

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА ДВИЖЕНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ТЕЛА С УПРУГОЙ СВЯЗЬЮ В ВЯЗКОМ КОНТИНУУМЕ

Гладков С.О., Богданова С.Б.
Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
125997, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4, Российская Федерация

Аннотация. Благодаря построенной функции Лагранжа L и вычисленной диссипативной функции $\dot{Q}$, получена общая система динамических уравнений, описывающих движение полностью погруженного в жидкость цилиндрического тела. Его фиксация предполагается шарнирной на одном конце, где выбирается начало координат. Свободный конец может совершать практически любые движения, и упруго держится в произвольной точке пружиной. Задача решается в сферической системе координат, в которой на языке двух независимых угловых переменных θ и φ выводятся дифференциальные уравнения движения с учётом вязкости континуума η.

Ключевые слова: функция Лагранжа, полная энергия, базис, сферические координаты.

NONLINEAR DYNAMICS OF MOTION OF A CYLINDRICAL BODY WITH ELASTIC CONNECTION IN A VISCOUS CONTINUUM

S. Gladkov, S. Bogdanova
Moscow Aviation Institute (National Research University)
4 Volokolamskoe shosse, 125997 Moscow, Russian Federation

Abstract. Due to the construction of the Lagrange function L and calculated dissipative function $\dot{Q}$, a general system of dynamic equations describing the motion a cylindrical body completely immersed in the fluid is obtained. Its fixation is expected to be hinged at one end, where the origin is selected. The free end can perform virtually any movement and is resiliently held at an arbitrary point by a spring. The problem is solved in a spherical coordinate system r, θ, φ, in which differential equations of motion are derived by using two independent angular variables θ and φ taking into account the viscosity of the continuum η.

Key words: Lagrange function, full energy, basis, spherical coordinates

ВВЕДЕНИЕ

В последнее время тема исследования сложных динамических явлений, связанная с анализом и выводом разнообразных типов нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих весьма сложные хаотические процессы и нелинейные явления, стала весьма популярной. В этом направлении насчитывается масса публикаций, начиная с классической задачи Лоренца [1], в которой автором был обнаружен и аналитически описан странный аттрактор, и заканчивая современными исследованиями, посвященными решению широчайшего спектра линейных и нелинейных задач из различных областей физики (см., к примеру, работы [2–4]). Наш интерес к подобного рода задачам диктуется не только чисто природным любопытством, а, главным образом, направлен на установление причины, почему происходит именно так, а не иначе, и того, как с точки зрения прикладной физики можно подойти к решению этой вовсе не тривиальной задачи. Ее постановка довольно проста и может быть сформулирована одним предложением: выяснение динамики движения погруженного в вязкий поток цилиндрического тела с учетом сил сопротивления со стороны континуума. При этом мы будем говорить не о чисто абстрактном поведении цилиндра, а возьмем за основу вполне конкретное модельное представление, несколько упрощающее решение, но при этом качественно не сильно влияющего на суть проводимого анализа. В самом деле, при движении цилиндрического тела в потоке воды в виде поплавка, мы можем следить лишь за его периодическим всплытием и колебательным движением вблизи дна водоема (при условии, что закрепляющий шарнир находится на дне) из-за увлечения гидродинамическим потоком. Подобное поведение, однако, носит чисто инерционный характер и не позволяет ввести в рассмотрение такой важный параметр, как вязкость. Мы смоделируем эту задачу несколько иначе и предположим, что один конец цилиндра шарнирно закреплен в начале координат (причем совершенно неважно на поверхности он или на дне), а его второй конец упругим образом связан с абстрактной горизонтальной плоскостью, расположенной на некоторой высоте H от его нижнего конца, как это показано на рис. 1. Углы θ_0 и φ_0 представляют собой соответственно азимутальный и полярный углы сферической системы координат в положении равновесия, длина цилиндра l представляет собой радиус сферы с центром в начале координат. Жесткость пружины – k, вектор $\mathbf{a}_0$ представляет собой длину пружины в положении равновесия до воздействия потока, направление которой для удобства выбирается вертикальным.

Соответственно, все величины без индекса «0» (θ, φ, $\mathbf{a}$, $\mathbf{l}$) представляют собой неравновесные значения тех же самых параметров в условиях произвольного перемещения цилиндра. К слову сказать, физика его движения, в принципе, совершенно понятна. Действительно, в результате конкуренции воздействий гидродинамического потока, силы тяжести и жесткости пружины цилиндр должен совершать определенные затухающие колебательные движения, собственная частота которых может изменяться под воздействием силы тяжести и упругих сил, но резонанса быть не должно.

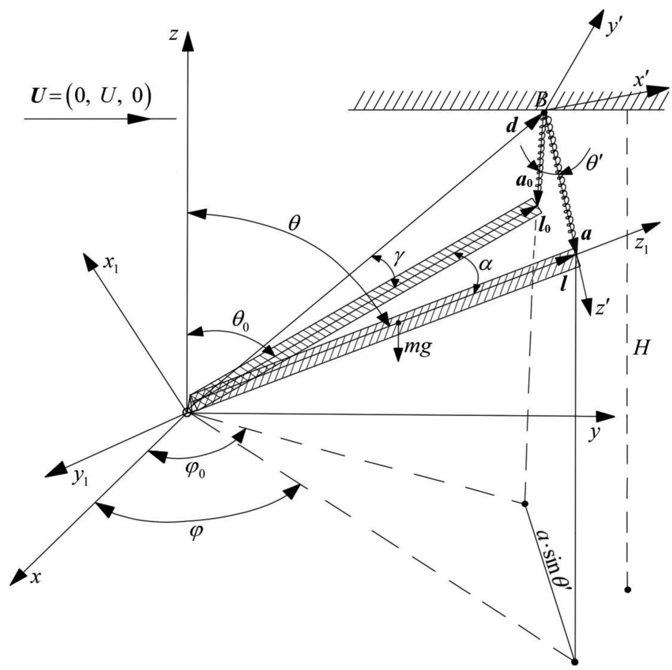

Рис. 1. Геометрия задачи. Показаны системы координат и углы, необходимые для получения уравнений движения. Остальные комментарии в тексте.

Это связано с известным фактом о замкнутости рассматриваемой нами системы «цилиндр + пружина» и отсутствием внешних периодических сил. Что касается гидродинамических сил, то они носят лишь диссипативный характер. Однако, если предположить возможность периодически изменяющегося на поверхности давления, то в таких условиях резонанс вполне возможен. Заметим еще, что цилиндр мы считаем идеальным с радиусом R. Угол α представляет собой угол между начальным положением и произвольным, β – угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{a}_0$, γ – угол между радиус-вектором, проведенным из начала координат в точку крепления пружины B и начальным положением цилиндра. Для удобства в точке B выберем штрихованную систему координат x', y', z', в которой вектор $\mathbf{a}$ имеет координаты $\mathbf{a} = (x', y', z')$. Вектор $\mathbf{l}_0 = (l\sin\theta_0\cos\varphi_0, l\sin\theta_0\sin\varphi_0, l\cos\theta_0)$, а вектор $\mathbf{l} = (l\sin\theta\cos\varphi, l\sin\theta\sin\varphi, l\cos\theta)$.

ФУНКЦИЯ ЛАГРАНЖА

Прежде чем писать функцию Лагранжа системы, приведём вначале необходимые для дальнейшего некоторые простые геометрические формулы, которые будут полезны в процессе её построения. Итак, из условия $\mathbf{l} - \mathbf{l}_0 = \mathbf{a} - \mathbf{a}_0$ следует, что

$$l^2(1 - \cos\alpha) = a^2 - 2aa_0\cos\theta' + a_0^2,$$

где $a^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$, $x' = a\sin\theta'\cos\varphi'$, $y' = a\sin\theta'\sin\varphi'$, $z' = a\cos\theta'$, а из геометрии рисунка видно, что

$$a\cos\theta' = H - l\cos\theta \qquad (1)$$

и

$$\cos\gamma = \frac{d^2 + l^2 - a_0^2}{2dl}.$$

Кроме того, $\cos\gamma = \cos\lambda\cos\theta_0 + \sin\lambda\sin\theta_0\cos(\varphi_\lambda - \varphi_0)$, где $\varphi_\lambda = \text{const}$, а $\cos\alpha = \cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi - \varphi_0)$.

Поэтому с учетом (1) имеем:

$$a^2 = l^2\left(1 - \cos\theta\cos\theta_0 - \sin\theta\sin\theta_0\cos\left(\varphi - \varphi_0\right)\right) + 2a_0\left(H - l\cos\theta\right) - a_0^2. \qquad (2)$$

Функция Лагранжа системы «цилиндр + пружина» есть разность $T - U$, где T – кинетическая энергия, а U потенциальная (см. [5]). В нашем случае потенциальная энергия складывается из суммы потенциальных энергий пружины U_1 и цилиндра U_2 и имеет очевидный вид:

$$U = U_1 + U_2 = \frac{k}{2}\left(a^2 - aa_0\cos\theta' + \frac{a_0^2}{4}\right) - mgl_c\cos\theta, \qquad (3)$$

где фигурирующие здесь параметры определены формулами (1) и (2). Заметим, что l_c – это расстояние до центра тяжести цилиндра. Что касается кинетической энергии, то в общем виде ее можно представить в виде суммы вращательной энергии T_1 относительно мгновенной оси цилиндра с частотой ω_0 и энергии криволинейного движения T_2. Причём $T_1 = \frac{I\omega_0^2}{2}$, где момент инерции цилиндра относительно неподвижной точки крепления определяется как $I = \frac{mR^2}{2}$, а энергия криволинейного движения есть $T_2 = \frac{ml_c^2}{2}\left(\dot\varphi^2\sin^2\theta + \dot\theta^2\right)$. Таким образом, полная кинетическая энергия будет равна:

$$T = \frac{ml_c^2}{2}\left(\dot\varphi^2\sin^2\theta + \dot\theta^2\right) + \frac{m\omega_0^2R^2}{4}. \qquad (4)$$

Это означает, что функция Лагранжа тогда такова:

$$L = \frac{ml_c^2}{2}\left(\dot\varphi^2\sin^2\theta + \dot\theta^2\right) + \frac{mR^2\omega_0^2}{4} + mgl_c\cos\theta - \frac{k}{2}\times$$
$$\times\left[l^2\left(1 - \cos\theta\cos\theta_0 - \sin\theta\sin\theta_0\cos\left(\varphi - \varphi_0\right)\right) - a_0\left(H - l\cos\theta\right) + \frac{a_0^2}{4}\right]. \qquad (5)$$

Полная энергия системы в отсутствии диссипации есть величина постоянная, определяемая, как

$$E=\frac{ml_c^2}{2}\left(\dot{\varphi}^2\sin^2\theta+\dot{\theta}^2\right)+\frac{mR^2\omega_0^2}{4}-mgl_c\cos\theta+$$
$$+\frac{k}{2}\left[l^2\left(1-\cos\theta\cos\theta_0-\sin\theta\sin\theta_0\cos\left(\varphi-\varphi_0\right)\right)-a_0\left(H-l\cos\theta\right)+\frac{a_0^2}{4}\right]=\mathrm{const}. \quad (6)$$

Формула (6) нам будет необходима при выводе уравнения движения с учетом вязких сил. Прежде чем переходить к вычислению диссипативной функции $\dot{Q}$, нам необходимы будут преобразования от единичного базиса неподвижной системы координат x, y, z $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ к подвижному базису $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ на поверхности сферы $\mathbf{l}$. В самом деле, как известно из тензорного анализа (см., например, [6]), при преобразовании ковариантных координат к контравариантным следует ввести базис $\mathbf{g}_i=\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x^i}$. В нашем случае при переходе от декартовых (ковариантных) координат к сферическим (контравариантным) матрица перехода имеет вид:

$$g_{i,k}=\frac{\partial x_i}{\partial x^k}=\begin{pmatrix}\sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\\ r\cos\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta\\ -r\sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & 0\end{pmatrix}, \quad (7)$$

Поэтому искомое преобразование к подвижному единичному базису получается таким:

$$\begin{cases}\mathbf{e}_1=-\mathbf{i}\sin\varphi+\mathbf{j}\cos\varphi,\\ \mathbf{e}_2=\mathbf{i}\cos\theta\cos\varphi+\mathbf{j}\cos\theta\sin\varphi-\mathbf{k}\sin\theta,\\ \mathbf{e}_3=\mathbf{i}\sin\theta\cos\varphi+\mathbf{j}\sin\theta\sin\varphi+\mathbf{k}\cos\theta.\end{cases} \quad (8)$$

Как видно из (8), $\mathbf{e}_1^2=\mathbf{e}_2^2=\mathbf{e}_3^2=1$, $\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2=\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_3=\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_3=0$, то есть приведённый базис является ортонормированным. Заметим ещё, что определитель матрицы $||A||$ преобразования (8), вводимой как $\mathbf{e}_i=A_{ik}\mathbf{s}_k$, где транспонированный вектор $\mathbf{s}_k=(\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k})^T$ тождественно равен единице. Обратное преобразование, также необходимое для дальнейших вычислений, элементарно получается из (8) и оказывается следующим:

$$\begin{cases}\mathbf{i}=\mathbf{e}_1\sin\varphi+\mathbf{e}_2\cos\theta\cos\varphi+\mathbf{e}_3\sin\theta\cos\varphi,\\ \mathbf{j}=-\mathbf{e}_1\cos\varphi+\mathbf{e}_2\cos\theta\sin\varphi+\mathbf{e}_3\sin\theta\sin\varphi,\\ \mathbf{k}=-\mathbf{e}_2\sin\theta+\mathbf{e}_3\cos\theta.\end{cases} \quad (9)$$

Дифференцируя уравнения (9) по времени и учитывая, что $\frac{d}{dt}\mathbf{i} = \frac{d}{dt}\mathbf{j} = \frac{d}{dt}\mathbf{k} = 0$, легко получить следующие формулы:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{e}}_1 = \dot{\varphi}\left(\mathbf{e}_2\cos\theta + \mathbf{e}_3\sin\theta\right), \\ \dot{\mathbf{e}}_2 = -\mathbf{e}_1\dot{\varphi}\cos\theta - \mathbf{e}_3\dot{\theta}, \\ \dot{\mathbf{e}}_3 = -\mathbf{e}_1\dot{\varphi}\sin\theta + \mathbf{e}_2\dot{\theta}. \end{cases} \tag{10}$$

Отсюда видно, что в мгновенном подвижном базисе единичные вектора $\mathbf{e}_i$ подчиняются уравнениям:

$$\dot{\mathbf{e}}_i = e_{ijk}\omega_j\mathbf{e}_k, \tag{11}$$

где $i, j, k = 1, 2, 3$, по повторяющимся индексам подразумевается суммирование, а частоты вращений ω_i есть:

$$\omega_1 = \dot{\theta}, \omega_2 = \dot{\varphi}\sin\theta, \omega_3 = -\dot{\varphi}\cos\theta. \tag{12}$$

В принципе, этот результат был вполне ожидаем, поскольку квадрат результирующей частоты, как и должно быть, представляет собой сумму квадратов частот $\omega_1 = \dot{\theta}$ и $\Omega = \dot{\varphi}$ с результирующим направлением $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\Omega}$. Эту частоту удобно разложить на параллельную оси цилиндра компоненту ω' и перпендикулярную ω'', которые в соответствии с (12) определяются как:

$$\omega' = \omega_3 = \dot{\varphi}\cos\theta, \tag{13}$$

$$\omega'' = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} = \sqrt{\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2}. \tag{14}$$

Заметим здесь, что знак «минус» в формуле (13) перед $\dot{\varphi}$ мы убрали, как несущественный. Имея, таким образом, в распоряжении формулы (8) – (14), можно переходить теперь ко второй части задачи, а именно к вычислению диссипативной функции.

ДИССИПАТИВНАЯ ФУНКЦИЯ

Исходя из определения диссипативной функции [7], в мгновенной цилиндрической системе координат с осью z_1, направленной вдоль оси цилиндра, можно написать, что

$$\begin{aligned} \dot{Q} = \eta\int_0^l dz_1\int_R^\infty rdr\int_0^{2\pi} d\psi\Bigg\{&\left(\frac{\partial \mathrm{v}_r}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial \mathrm{v}_\psi}{\partial \psi} + \mathrm{v}_r\right)^2 + \\ &+\left(\frac{\partial \mathrm{v}_{z_1}}{\partial z_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathrm{v}_\psi}{\partial r} - \frac{\mathrm{v}_\psi}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \mathrm{v}_r}{\partial \psi}\right)^2 + \\ &+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \mathrm{v}_{z_1}}{\partial \psi} + \frac{\partial \mathrm{v}_\psi}{\partial z_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathrm{v}_r}{\partial z_1} + \frac{\partial \mathrm{v}_{z_1}}{\partial r}\right)^2\Bigg\}, \end{aligned} \tag{15}$$

где цилиндрическая система координат вводится обычным образом согласно формулам:

$$x_1 = r\cos\psi,$$
$$y_1 = r\sin\psi,$$
$$z_1 = z_1, \tag{16}$$

где r, ψ, z_1 являются независимыми от θ и φ аргументами, а распределение скоростей вблизи поверхности цилиндра обозначено, как $\mathbf{v} = (v_{x_1}, v_{y_1}, v_{z_1}) = (v_r, v_\psi, v_{z_1})$. Область интегрирования в (15), как видим, распространяется на все пространство вне цилиндра. Наша задача сводится сейчас к вычислению распределения скоростей гидродинамического потока вблизи поверхности цилиндра в самом общем случае, когда направление потока, движущегося со скоростью $\mathbf{u}$, по отношению к цилиндру произвольно, но в неподвижной системе координат x, y, z ориентировано вдоль оси y (см. рис. 1). Для решения этой задачи удобно воспользоваться уравнением Навье-Стокса, и записать его в случае несжимаемой жидкости, полагая $div\mathbf{v} = 0$, как (см. [7]):

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = -\frac{\nabla P}{\rho} + \nu\Delta\mathbf{v}, \tag{17}$$

где ν – кинематическая вязкость жидкости, P – давление, а ρ – плотность потока. В стационарном случае при малых числах Рейнольдса из (17) следует:

$$-\frac{\nabla P}{\rho} + \nu\Delta\mathbf{v} = 0. \tag{18}$$

Взяв дивергенцию от обеих частей (18), благодаря условию несжимаемости $div\mathbf{v} = 0$, приходим к уравнению Лапласа:

$$\Delta P = 0. \tag{19}$$

Взяв теперь операцию «ротор» от уравнения (18), получаем:

$$\Delta rot\mathbf{v} = 0. \tag{20}$$

Будем искать решение в виде (как и в случае задачи Стокса об обтекании шара потоком вязкого континуума, см. [7]):

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + rotrotf\mathbf{u}, \tag{21}$$

где функцию f предстоит найти.

Подчеркнём, что дифференцирование в (21) осуществляется в координатах x_1, y_1, z_1, или в цилиндрических r, ψ, z_1. Подставляя (21) в (20), имеем $\Delta rot(graddivf\mathbf{u} - \Delta f\mathbf{u}) = -\Delta^2 rotf\mathbf{u} = [\mathbf{u}\times\nabla\Delta^2 f] = 0$, а потому $\nabla\Delta^2 f = 0$. Отсюда следует, что $\Delta^2 f = const$. Выбирая эту константу равной нулю и записывая оператор Лапласа в цилиндрической системе координат, а также считая, что искомая функция зависит только от радиальной координаты, то есть $f = f(r)$, находим $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial f}{\partial r} = 0.$ Откуда:

$$f=\frac{C_1}{4}r^2\left(\ln r-\frac{1}{2}\right)+\frac{r^2}{4}\left(C_2-\frac{C_1}{2}\right)+C_3\ln r+C_4, \qquad (22)$$

где $C_{1,2,3,4}$ – константы интегрирования, которые можно легко найти из граничных условий. Действительно, подставляя решение (22) в (21), получаем следующее выражение для скорости:

$$\mathbf{v}=\mathbf{u}+\frac{C_2}{2}\mathbf{u}+\frac{C_3}{r^2}\mathbf{u}-\frac{2C_3}{r^4}(\mathbf{ru})\mathbf{r}+\frac{C_1}{2}\mathbf{u}\left(\ln r-\frac{1}{2}\right)+\frac{C_1}{2r^2}(\mathbf{ur})\mathbf{r}.$$

Поскольку при $r\to\infty$ скорость вдали от цилиндра стремится к скорости потока, то есть $\mathbf{v}\to\mathbf{u}$, из полученного выражения следует, что $C_1 = C_2 = 0$, а потому:

$$\mathbf{v}=\mathbf{u}+\frac{C_3}{r^2}\left(\mathbf{u}-\frac{2\mathbf{r}(\mathbf{ur})}{r^2}\right). \qquad (23)$$

Заметим, что из (23) автоматически следует выполнение тождества $div\mathbf{v}\equiv\mathbf{0}$. Далее, на границе цилиндра, то есть при $r = R$, радиальная составляющая скорости $v_r|_{r=R} = 0$, а тангенциальная $v_\psi|_{r=R} \neq 0$. Поэтому $C_3 = R^2$ и в проекциях на направление единичных орт $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, совпадающих с направлением орт $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\psi$, $\mathbf{e}_3$, найдем для поступательной части движения:

$$\begin{aligned}
\mathrm{v}_r &= u_0\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right)\sin\psi,\\
\mathrm{v}_\psi &= u_0\left(1+\frac{R^2}{r^2}\right)\cos\psi,\\
\mathrm{v}_{z_1} &= 0,
\end{aligned} \qquad (24)$$

где скорость u_0 определяется перпендикулярной составляющей скорости потока $\mathbf{u}$ и определяется в виде:

$$u_0 = u\cos\theta\cos\varphi \qquad (25)$$

(это видно из рисунка 1).

Подчеркнем еще раз, что решение (24) будет определять только поступательную часть диссипативной функции. Что касается вращательной части, то ее легко определить с помощью уже имеющейся в нашем распоряжении формулы (23), в которой следует убрать первое постоянное слагаемое $\mathbf{u}$ и вспомнить, что при учете рассматриваемого нами сложного вращательного движения в нашем распоряжении имеются две угловые частоты $\omega'=\dot{\varphi}\cos\theta$ и $\omega''=\sqrt{\dot{\varphi}^2\sin^2\theta+\dot{\theta}^2}$, определяемые формулами (13), (14). Несколько похожая геометрия была описана в работе [8], где, правда, рассматривалось движение вектора намагниченности под воздействием внешнего не коллинеарного магнитного поля. Аналогично решениям (24) легко получаем тогда, что:

$$\begin{cases} V_{1r} = V_1 \dfrac{R^2}{r^2} \sin\psi, \\ V_{1\psi} = V_1 \dfrac{R^2}{r^2} \cos\psi, \\ V_{1z_1} = 0, \end{cases} \tag{26}$$

где $V_1 = R\dot{\varphi}\cos\theta$ и

$$\begin{cases} V_{2r} = V_2 \dfrac{R^2}{r^2} \sin\psi, \\ V_{2\psi} = V_2 \dfrac{R^2}{r^2} \cos\psi, \\ V_{2z_1} = 0, \end{cases} \tag{27}$$

где $V_2 = R\omega'' = R\sqrt{\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2\theta}$. Найденные решения (24)–(27) необходимо теперь подставить в общую формулу (15).

1. Для поступательной части диссипативной функции имеем с помощью (24):

$$\dot{Q}^{\text{пост.}} = \eta \int_0^l dz_1 \int_R^\infty r dr \int_0^{2\pi} d\psi \left\{ \left(\frac{\partial \mathrm{v}_r}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \mathrm{v}_\psi}{\partial \psi} + \mathrm{v}_r \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathrm{v}_\psi}{\partial r} - \frac{\mathrm{v}_\psi}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \mathrm{v}_r}{\partial \psi} \right)^2 \right\} =$$

$$= \eta l \int_R^\infty r dr \int_0^{2\pi} d\psi \left\{ 4u_0^2 \frac{R^4}{r^6} \sin^2\psi + 4u_0^2 \frac{R^4}{r^6} \sin^2\psi + 16u_0^2 \frac{R^4}{r^6} \cos^2\psi \right\} =$$

$$= 24\pi\eta l R^4 u_0^2 \int_R^\infty \frac{dr}{r^5} = 6\pi\eta l u_0^2.$$

И согласно (25) находим:

$$\dot{Q}^{\text{пост.}} = 6\pi\eta l u^2 \cos^2\theta \cos^2\varphi. \tag{28}$$

2. Вполне аналогично для вращательной части с помощью решений (26), (27) получаем:

$$\dot{Q}_1^{\text{вр.}} = \eta \int_0^l dz_1 \int_R^\infty r dr \int_0^{2\pi} d\psi \left\{ \left(\frac{\partial \mathrm{v}_r}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \mathrm{v}_\psi}{\partial \psi} + \mathrm{v}_r \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathrm{v}_\psi}{\partial r} - \frac{\mathrm{v}_\psi}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \mathrm{v}_r}{\partial \psi} \right)^2 \right\} =$$

$$= \eta l \int_R^\infty r dr \int_0^{2\pi} d\psi \left\{ 4V_1^2 \frac{R^4}{r^6} \sin^2\psi + \left(-2V_1 \frac{R^2}{r^3} \cos\psi - V_1 \frac{R^2}{r^3} \cos\psi + V_1 \frac{R^2}{r^3} \cos\psi \right)^2 \right\} =$$

$$= 8\pi\eta l V_1^2 R^4 \int_R^\infty \frac{dr}{r^5} = 2\pi\eta l V_1^2.$$

Или с учётом явного вида скорости $V_1 = R\dot{\varphi}\cos\theta$ имеем отсюда:

$$\dot{Q}_1^{\text{вр.}} = 2\pi\eta l\dot{\varphi}^2 R^2\cos^2\theta. \tag{29}$$

Точно также и для решений (27) с учетом явного вида для $V_2 = R\sqrt{\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta}$:

$$\dot{Q}_2^{\text{вр.}} = 2\pi\eta lR^2\left(\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2\right). \tag{30}$$

Суммируя формулы (28)–(30), представляем полную диссипативную функцию в окончательном виде, как:

$$\dot{Q} = 6\pi\eta lu^2\cos^2\theta\cos^2\varphi + 2\pi\eta lR^2(\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2). \tag{31}$$

Поскольку в нашем случае поступательное движение отсутствует, то первое слагаемое в (31), связанное с нестационарным увлечением цилиндра потоком, исчезает и диссипативная функция еще более упростится, то есть будет равна:

$$\dot{Q} = 2\pi\eta lR^2(\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2). \tag{32}$$

Полную систему уравнений движения мы получим согласно закону сохранения энергии (6) и общему виду диссипативной функции (32) с помощью простого правила:

$$\begin{cases} \left.\dfrac{dE}{dt}\right|_{\theta=\text{const}} + \left.\dot{Q}\right|_{\theta=\text{const}} = 0, \\ \left.\dfrac{dE}{dt}\right|_{\varphi=\text{const}} + \left.\dot{Q}\right|_{\varphi=\text{const}} = 0, \end{cases} \tag{33}$$

Совершенно ясно, что в отсутствии диссипации уравнения движения получились бы из условий:

$$\begin{cases} \left.\dfrac{dE}{dt}\right|_{\theta=\text{const}} = 0, \\ \left.\dfrac{dE}{dt}\right|_{\varphi=\text{const}} = 0. \end{cases} \tag{34}$$

Дифференцируя (6) по времени при соответствующих постоянных, после простых сокращений мы приходим к следующей системе нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\ddot{\varphi}\sin^2\theta + \gamma\dot{\varphi} + \Omega_2^2\sin\theta\sin\theta_0\sin\left(\varphi - \varphi_0\right) = 0, \tag{35}$$

$$\ddot{\theta} + \gamma\dot{\theta} + \left(\Omega_1^2 + \Omega_2^2\cos\theta_0\right)\sin\theta + \dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta - \Omega_2^2\cos\theta\sin\theta_0\cos\left(\varphi - \varphi_0\right) = 0, \tag{36}$$

где частоты собственных колебаний равны:

$$\Omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l_c}}, \tag{37}$$

$$\Omega_2 = \frac{l}{2l_c}\sqrt{\frac{k}{m}}, \tag{38}$$

а затухание

$$\gamma = \frac{2\pi\eta l R^2}{m l_c^2}. \tag{39}$$

В безразмерном виде система уравнений (35)–(36) имеет вид:

$$\begin{cases} \varphi'' \sin^2\theta + q\varphi' + p^2 \sin\theta \sin\theta_0 \sin(\varphi - \varphi_0) = 0, \\ \theta'' + q\theta' + (1 + p^2\cos\theta_0)\sin\theta + \varphi'^2 \sin\theta\cos\theta - p^2\cos\theta\sin\theta_0\cos(\varphi - \varphi_0) = 0, \end{cases} \tag{40}$$

где «штрих» означает дифференцирование по безразмерному аргументу $\tau = t\Omega_1$, а новые безразмерные параметры здесь $q = \frac{\gamma}{\Omega_1} = \frac{2\pi\eta l R^2}{m l_c^{\frac{3}{2}}\sqrt{g}}$, $p = \frac{\Omega_2}{\Omega_1} = \frac{l}{2}\sqrt{\frac{k}{mgl_c}}$.

Как видно из уравнений (35), (36), в том случае, если пружина отсутствует ($k = 0$), у нас имеется физический маятник, совершающий затухающие колебания в трехмерном случае в реальной среде с трением. Если принять во внимание пружину, но рассматривать плоскую задачу, выбрав фиксированный полярный угол, как $\varphi = \varphi_0 = \text{const} = 0$, у нас останется только одно нижнее уравнение в системе (40), которое, примет довольно простой вид:

$$\theta'' + q\theta' + \sin\theta + p^2 \sin(\theta - \theta_0) = 0. \tag{41}$$

Выбирая точку крепления пружины напротив шарнирного закрепления, то есть, полагая $\theta_0 = 0$, получим:

$$\theta'' + q\theta' + (1 + p^2)\sin\theta = 0, \tag{42}$$

где параметры q и p определены выше.

Численное решение уравнений (41) иллюстрируется рис. 2–6, на которых изображено поведение параметра $\theta(\tau)$, обозначенного на рисунках буквой $x = x(t)$. Приведённые рисунки демонстрируют затухающее к положению равновесия нестационарное поведение системы «цилиндр + пружина», когда в самый начальный момент времени на неё начал действовать стационарный гидродинамический поток. Рисунки 2–6 качественно несколько похожи, но отличаются друг от друга разными параметрами затухания q и разными p.

Из сравнения частот $\Omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l_c}}$ и $\Omega_2 = \frac{l}{2l_c}\sqrt{\frac{k}{m}}$ можно сделать очевидный вывод, что на колебания цилиндра, как уже отмечалось в начале статьи, будет влиять конкуренция силы тяжести и жесткости пружины. Во всяком случае, как и должно быть, собственная частота колебаний будет только усиливаться. Понятно, что о резонансе в рассматриваемой замкнутой системе говорить не имеет смысла. Надо также заметить, что довольно любопытным на наш взгляд, является анализ хаотической траектории произвольной точки, которая движется по поверхности сферы и которую описывает связанный с пружиной второй конец цилиндра.

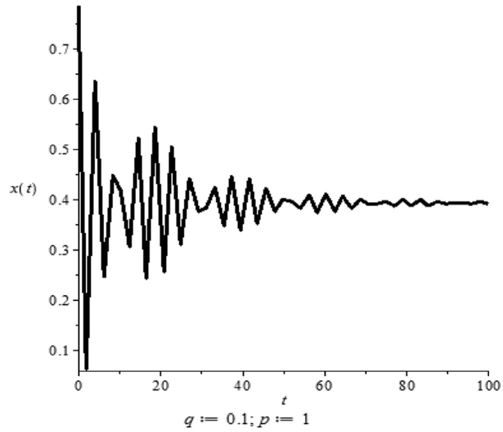

Рис. 2. Шаг 5.

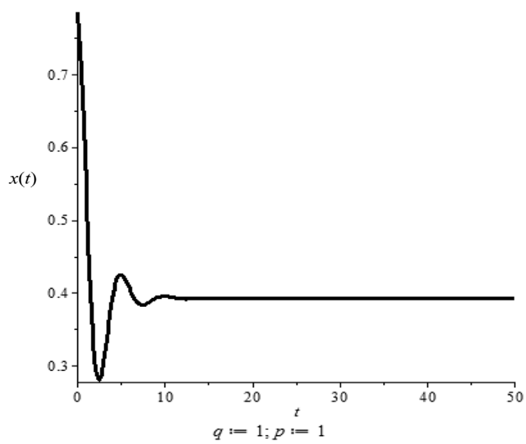

Рис. 3. Шаг 0,1.

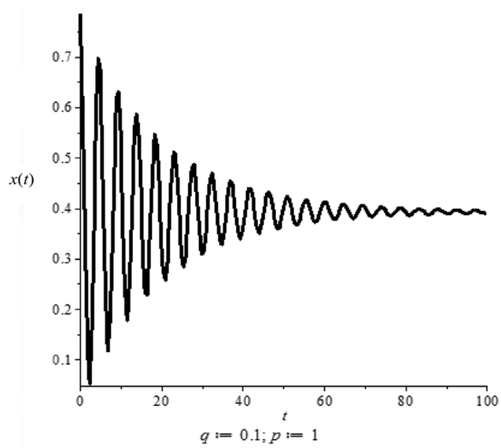

Рис. 4. Шаг 0,1.

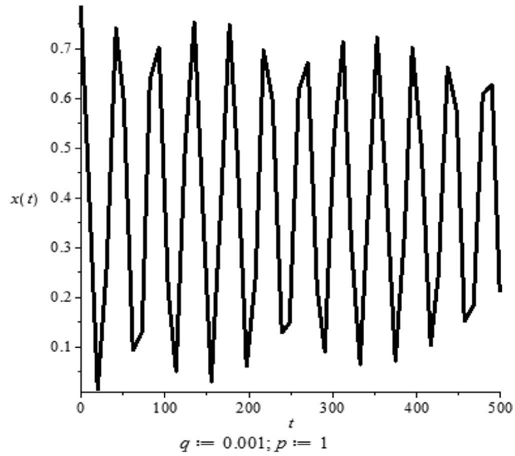

Рис. 5. Шаг 0,1.

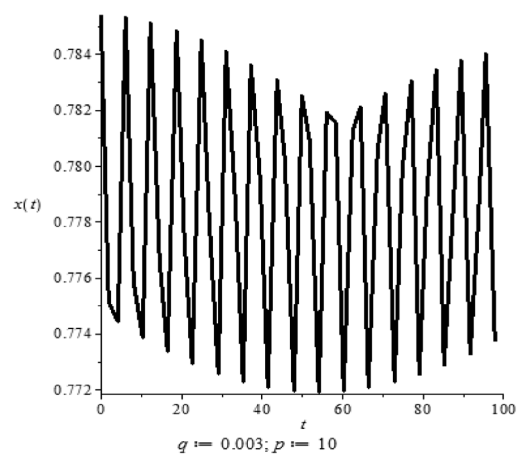

Рис. 6. Шаг 0,1.

В заключении работы еще раз стоит сказать несколько слов по поводу полученных выше результатов.

ВЫВОДЫ

1. Предложено общее описание сложного движения связанной консервативной системы «цилиндр + пружина», получена система нелинейных дифференциальных уравнений, позволяющая проанализировать ее динамику;
2. Вычислено распределение скоростей в непосредственной близости от самой поверхности цилиндра, найдена диссипативная функция, позволяющая учесть влияние вязкости континуума на его движение;
3. Дана методика вывода любых типов динамических уравнений движения с учетом сил трения, основанная на подходе (32), (33).

Статья поступила в редакцию 07.05.2018 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лоренц Э. Странные аттракторы. М.: Мир. 1981. С. 88–116.
2. Буря А.Г., Шкадов В.Я. Неустойчивость и формирование нелинейных структур в осциллирующем вращательном течении между цилиндрами // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 1999. Т. 3. С. 5–15.
3. Gladkov S.O. To the theory of nonlinear dynamic equations for the long elastic rod in viscous media // International Journal of mathematical models and methods in applied sciences. 2015. Vol. 9. pp. 166–170.
4. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. Simulation of nonlinear physical processes with the generalizes phenomenological equation // International Journal of Mechanics. 2015. Vol. 9. No. 11. pp. 909–918.
5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. М.: Наука. 1973. Т. 1. 207 с.
6. Мак-Коннел А.Дж. Введение в тензорный анализ. С приложениями к геометрии, механике и физике. М.: Физматлит. 1963. 411 с.
7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука. 1988. Т. 6. 733 с.
8. Гладков С.О. О вычислении интенсивности излучения электромагнитной энергии неподвижной ферромагнитной сферической частицей, находящейся в постоянном и однородном магнитном поле. // Журнал технической физики. 2015. Т. 85. В. 7. С. 138–141.

REFERENCES

1. Lorentz E. *Strannye attraktory* [Strange attractors]. Moscow, Mir Publ., 1981. pp. 88–116.
2. Burya A.G., Shkadov V.Ya. Neustoichivost' i formirovanie nelineinykh struktur v ostsilliruyushchem vrashchatel'nom techenii mezhdu tsilindrami [Instability and formation of nonlinear structures in oscillating rotational flow between cylinders]. In: *Izvestiya RAN. Mekhanika zhidkosti i gaza* [Fluid Dynamics], 1999, vol. 3, pp. 5–15.
3. Gladkov S.O. To the theory of nonlinear dynamic equations for the long elastic rod in viscous media. In: *International Journal of Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 2015, vol. 9, pp. 166–170.
4. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. Simulation of nonlinear physical processes with the generalizes phenomenological equation. In: *International Journal of Mechanics*, 2015, vol. 9, no. 11, pp. 909–918.
5. Landau L.D., Lifshits E.M. *Mekhanika* [Mechanics]. Moscow, Nauka Publ., 1973. Vol. 1. 207 p.
6. McConnell A.J. Introduction of tensor analysis. New York, Dover Publ., 1957. 340 p.
7. Landau L.D., Lifshits E.M. *Fluid Mechanics*. Oxford, Pergamon Press, 1959. 536 p.
8. Gladkov S.O. O vychislenii intensivnosti izlucheniya elektromagnitnoi energii nepodvizhnoi ferromagnitnoi sfericheskoi chastitsei, nakhodyashcheisya v postoyannom i odnorodnom magnitnom pole [On calculation of the radiation intensity of the electromagnetic energy of a stationary ferromagnetic spherical particle in a constant and homogeneous magnetic field]. In: *Zhurnal tekhnicheskoi fiziki* [Technical Physics], 2015, vol. 85, iss. 7, pp. 138–141.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Гладков Сергей Октябринович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладных программных средств и математического моделирования Московского авиационного института (национального исследовательского университета);
e-mail: sglad@newmail.ru, sglad51@mail.ru;

Богданова Софья Борисовна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладных программных средств и математического моделирования Московского авиационного института (национального исследовательского университета);
e-mail: sonjaf@list.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Sergey O. Gladkov – Doctor in Physical and Mathematical Sciences, professor at the Department of Applied Software and Mathematical Modeling, Moscow Aviation Institute (National Research University);
e-mail: sglad@newmail.ru, sglad51@mail.ru;

Sof'ya B. Bogdanova – PhD in Physical and Mathematical Sciences, associate professor at the Department of Applied Software and Mathematical Modeling, Moscow Aviation Institute (National Research University);
e-mail: sonjaf@list.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Гладков С.О., Богданова С.Б. Нелинейная динамика движения цилиндрического тела с упругой связью в вязком континууме // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2018. № 2. С. 6–20.
DOI: 10.18384/2310-7251-2018-2-6-20.

FOR CITATION

Gladkov S.O., Bogdanova S.B. Nonlinear dynamics of motion of a cylindrical body with elastic connection in a viscous continuum. In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics.* 2018. no. 2. pp. 6–20.
DOI: 10.18384/2310-7251-2018-2-6-20.

УДК: 535.8
DOI: 10.18384/2310-7251-2018-2-21-33

СВЕТООРИЕНТИРУЕМЫЕ ЯЧЕЙКИ НЕМАТИЧЕСКОГО ЖК С ОДНОЙ СТОРОНОЙ, ПОКРЫТОЙ ОРИЕНТАНТОМ

Соломатин А.С.
Московский государственный областной университет
105005, г. Москва, ул. Радио, д. 10А, Российская Федерация

Аннотация. Предложен светоориентируемый слой ЖК, который с одной стороны ограничен поверхностью с покрытием, задающим приповерхностный угол наклона директора. Ориентация слоя ЖК регулируется в пределах от однородной, в соответствии с заранее заданным углом наклона директора, до переориентированной под внешним влиянием. Рассмотрены перспективные приложения новых светоориентируемых нематических ЖК слоёв.

Ключевые слова: линза ЖК, оптическая анизотропия, двулучепреломление, пространственно неоднородные структуры, оптические свойства, фокусное расстояние, дисплей, проектор

LIGHT-ORIENTED NEMATIC LCD CELLS COVERED WITH ORIENTANT ON ONE SIDE

A. Solomatin
Education & Research Lab of Theoretical and Applied Nanotechnology, Moscow Region State University
ul. Radio10A, 105005 Moscow, Russian Federation

Abstract. A light-oriented LCD layer is proposed, which is restricted on one side by a surface with a coating that defines the surface angle of the director. The orientation layer of the LCD is adjustable from uniform, in accordance with the predetermined tilt angle of the director, to reoriented under external influence. Prospective applications of the new light-oriented nematic LCD layers are considered.

Key words: LCD lens, optical anisotropy, birefringence, spatially heterogeneous structure, optical properties, focal length, display, projector.

Введение

Слои нематических ЖК используются чрезвычайно широко. Управление их ориентацией осуществляется, главным образом, приложением электрического поля, для чего используются различные по конструктивному решению электроды. Существенно реже управляют ориентацией ЖК магнитным полем. И также используют изменения свойств, в том числе связанных с ориентационным порядком ЖК, в зависимости от температуры, давления, акустических сигналов и многих других факторов.

Управление ориентацией мелких частиц с помощью воздействия луча света (в том числе инфракрасного) достаточно хорошо освоено. Изучен механизм их ориентации, в том числе под влиянием электрического поля поляризованного света. Как отмечено в [1], мелкие частицы, при соблюдении ряда условий, ориентируются по электрическому полю луча света и могут вращаться при повороте плоскости поляризации.

В то же время необходимо отметить, что и в ЖК средах хорошо известны ориентационные эффекты смесей довольно длинных (до несколько микрон) частиц и сред, их содержащих. Например, в эффекте «гость-хозяин» окрашенная длинная частица поворачивается под влиянием ЖК (синхронно), и окраска слоя соответственно изменяется (изменяется проекция окрашенных частиц в направлении наблюдения).

Светоориентируемая односторонне ориентированная ячейка ЖК

В [2] была рассмотрена односторонне покрытая ориентантом ячейка с плоским слоем нематического ЖК и её ориентирование электрическим полем. Она приведена на рис. 1. Поверхность ЖК ячейки разделена на большое число пар прозрачных электродов, что позволяет задавать мелкоступенчатое изменение ориентационно-оптических свойств слоя ЖК в ячейке. Управление оптическими свойствами выражается в управлении показателем преломления, что может быть представлено как управление фазовыми задержками $\mathbf{\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_i, \Phi_{i+1}, \ldots, \Phi_{n-1}, \Phi_n}$ для условно выделенных в виде узких полос ячеек, как показано на рис. 1.

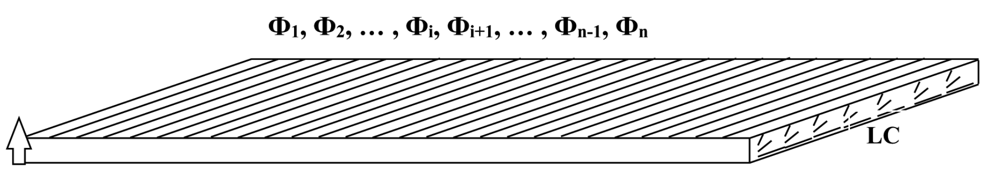

Рис. 1. Структура, состоящая из вышеописанных ячеек ЖК. Ячейки объединены в слой ЖК. Управление обеспечивается парными прозрачными электродами, расположенными на верхней и нижней стороне каждого субэлемента и создающими в субэлементах напряженность поля $\mathbf{E_1, E_2, \ldots, E_i, E_{i+1}, \ldots, E_{n-1}, E_n}$ для обеспечения разности фаз $\mathbf{\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_i, \Phi_{i+1}, \ldots, \Phi_{n-1}, \Phi_n}$.

В [3] рассмотрены матричные структуры ЖК-композит, позволяющие направлять в прозрачную среду равноотстоящие лучи света и регулировать их индивидуальную интенсивность. Отмечена возможность создавать, благодаря индивидуально задаваемому углу поворота плоскости поляризации луча, подсветку с различной поляризацией (от плоской до круговой) и различную динамику её изменения.

В данной работе предлагается добавлять в нематические ЖК мелкие частицы, хорошо ориентируемые лучом поляризованного света. В таком случае луч света, проходящий вдоль слоя ЖК, будет формировать эффект, симметричный хорошо известному эффекту «гость-хозяин» (по существу, эффект Керра). Ориентируемые лучом света частицы будут стремиться к положению, определяемому направлением поляризации света и его интенсивностью, с учётом упругой реакции нематического ЖК, окружающего их. Если плоскость поляризации света перпендикулярна подложке, то поле заменит собой то, которое создавалось бы на рис. 1 электродами, и можно обойтись без электродов, о которых говорилось выше в тексте к рис. 1.

В таком случае появляется уникальная возможность формировать управляемое распределение директора ЖК по толщине ячейки, как показано на рис. 2, в том числе линейное. В зависимости от того, сколько рядов матрицы ЖК-композитных регуляторов светового потока включено (имеют значения интенсивности пропускания, отличные от нуля), определяется толщина слоя ЖК, подвергающегося воздействию ориентирующего поля. Будет происходить переориентирование от приповерхностного угла $\boldsymbol{\theta_0}$ до угла $\boldsymbol{\theta_{const}}$, который будет затем транслироваться до другой стороны ячейки ЖК. Чем толще слой, просвечиваемый интенсивным ориентирующим потоком оптического (или инфракрасного) излучения с соответствующей (вертикальной на рис. 2, в плоскости рисунка) поляризацией, и чем интенсивней излучение (ориентирующее воздействие поля), тем больше разница между $\boldsymbol{\theta_0}$ и $\boldsymbol{\theta_{const}}$.

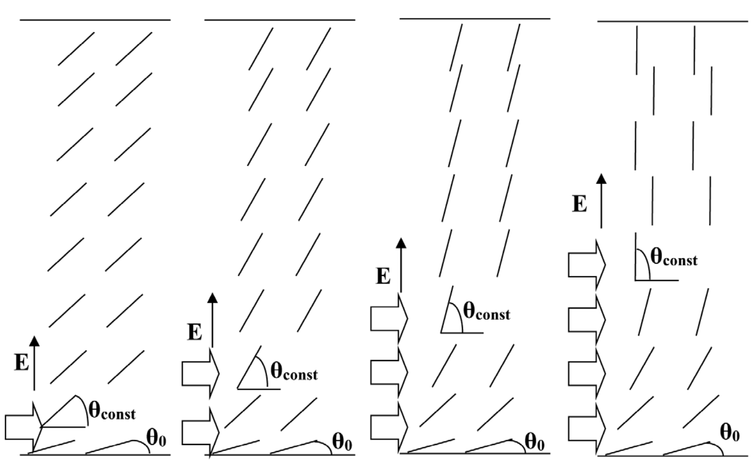

Рис. 2. С ростом толщины слоя ЖК, подвергающегося ориентирующему излучению (оптическому или инфракрасному), возрастает разница между приповерхностным углом $\boldsymbol{\theta_0}$ и $\boldsymbol{\theta_{const}}$, который транслируется до другой стороны ячейки.

Если задать (отрегулировать матрицей ЖК-композитных регуляторов, описанной в [3]) неравномерную послойно интенсивность просвечивающего излучения, то можно, очевидно, обеспечить линейное пространственное распределение директора ЖК в диапазоне от $\boldsymbol{\theta_0}$ до $\boldsymbol{\theta_{const}}$.

Таким образом, получим систему, эквивалентную двум ЖК ячейкам, одна с заданным распределением (в том числе, возможно, линейным) в диапазоне от $\boldsymbol{\theta_0}$ до $\boldsymbol{\theta_{const}}$, другая с постоянным углом $\boldsymbol{\theta_{const}}$ наклона директора ЖК. Во многих устройствах есть пара ЖК ячеек, например, в дисплеях пара ЖК регулятор пропускания и компенсатор.

Оптические свойства слоёв ЖК с линейным распределением директора описаны в [4], диэлектрические свойства описаны в [5]. Управляя, как описано выше, ориентационным распределением директора ЖК, можно получить различные периодические структуры, дифракционные свойства которых описаны в [6].

Кроме того, можно получать заранее заданное распределение директора ЖК по толщине ячейки, в том числе такое, которое вообще невозможно получить с помощью электродов. Оптические свойства слоёв ЖК с некоторыми нелинейными распределениями директора описаны в [7], диэлектрические свойства описаны в [5].

Учитывая небольшую толщину просвечиваемого слоя, время переориентирования может быть значительно меньше, чем у ячеек с электродами, особенно если принимать во внимание ёмкостные эффекты в слоях покрытий и приповерхностных тонких слоях ЖК [8]. Таким образом, светоориентируемые ячейки ЖК могут использоваться в быстро переключаемых оптических затворах, дифракционных, ёмкостных элементах.

Регулируя фазовую задержку $\boldsymbol{\Phi}$, можно в ячейке ЖК в скрещенных поляроидах (или в параллельных поляроидах) получить избирательное пропускание узкого спектрального диапазона. Например, для одного из трёх RGB цветов, успев переключиться три раза за время съёмки (если речь идёт о видеокамере) одного кадра или за время показа (если речь идёт о дисплее/проекторе) кадра. Одновременно можно регулировать интенсивность (яркость). Также возможна ЖК ячейка как трёхполосный светофильтр RGB цветов, обслуживающая сразу три фотоприёмных элемента.

На рис. 3 показаны зависимости интенсивности пропускания от длины волны для ЖК ячейки в скрещенных поляроидах (плоскость директора ЖК на 45° к поляризатору, показатели преломления нематического ЖК $n_o = 1{,}5$, $n_e = 1{,}65$). Фазовая задержка выражена через эквивалент: фазовая задержка планарной ячейки ЖК с теми же параметрами и заданной толщиной. Это обусловлено тем, что для разных длин волн фазовая задержка различна, и удобнее ввести эквивалент – толщину планарного слоя ЖК.

На рис. 4 показаны зависимости интенсивности пропускания от длины волны для ЖК ячейки в параллельных поляроидах (плоскость директора ЖК на 45° к поляризатору, показатели преломления нематического ЖК $n_o = 1{,}5$, $n_e = 1{,}65$). Фазовая задержка выражена через эквивалент: фазовая задержка планарной ячейки ЖК с теми же параметрами и заданной толщиной.

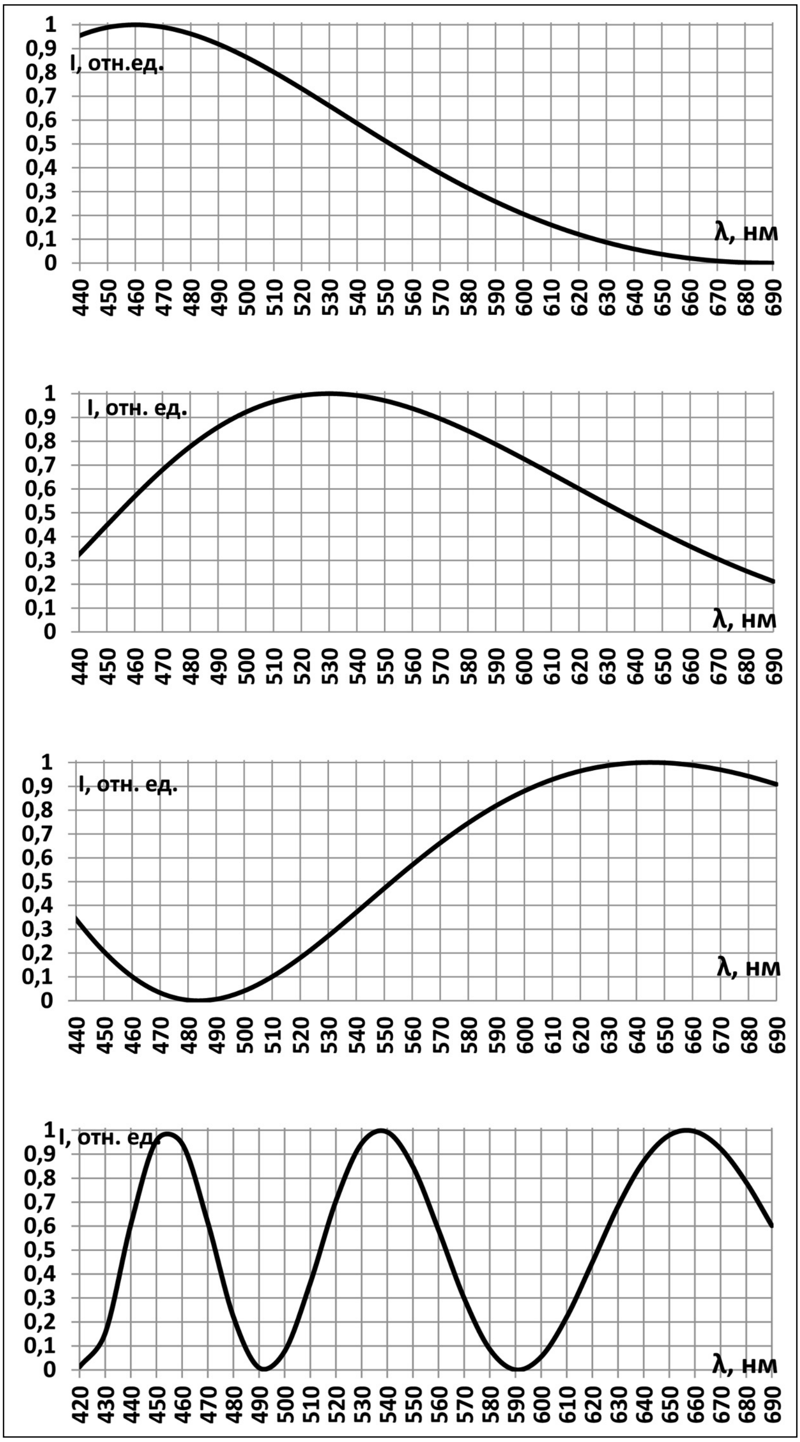

Рис. 3. Зависимости интенсивности пропускания от длины волны для ЖК ячейки в скрещенных поляроидах. Сверху вниз – эквивалентная толщина планарной ячейки ЖК: 4,6 мкм; 5,3 мкм; 6,45 мкм; 19,7 мкм.

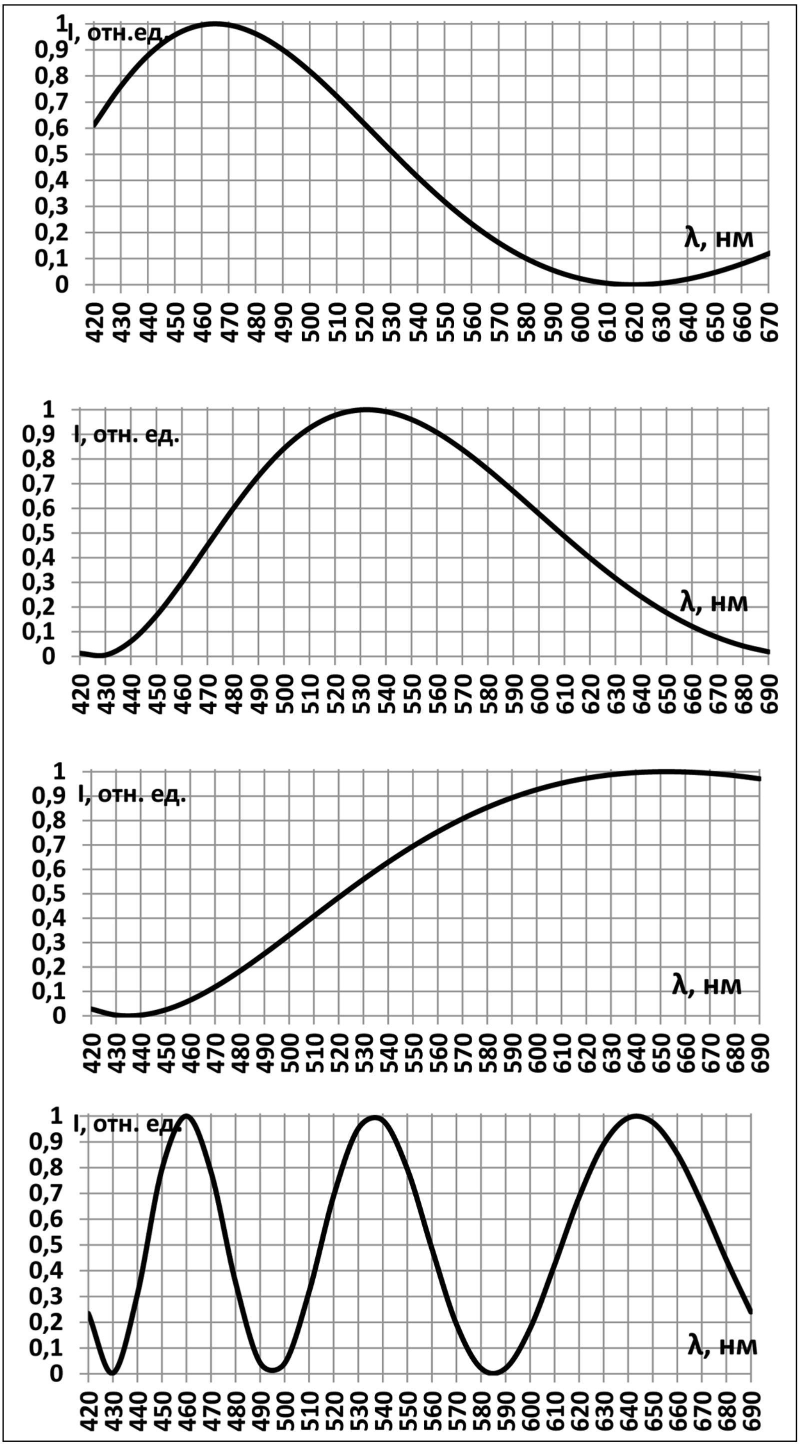

Рис. 4. Зависимости интенсивности пропускания от длины волны для ЖК ячейки в скрещенных поляроидах. Сверху вниз – эквивалентная толщина планарной ячейки ЖК: 6,2 мкм; 7,1 мкм; 4,35 мкм; 21,45 мкм.

Таким образом, светоориентированная ЖК ячейка может использоваться сразу как три элемента: светофильтр, регулятор интенсивности и компенсатор, а за счёт быстроты переключения может работать сразу за три цветовых элемента.

Также светоориентированные ячейки могут использоваться как фокусирующие ЖК элементы с заданными характеристиками, в том числе фокусным расстоянием и его знаком (собирающая/рассеивающая линза). ЖК линзы с линейным распределением директора описаны в [9], с нелинейным в [10]. Система их ориентирующей подсветки показана на рис. 5.

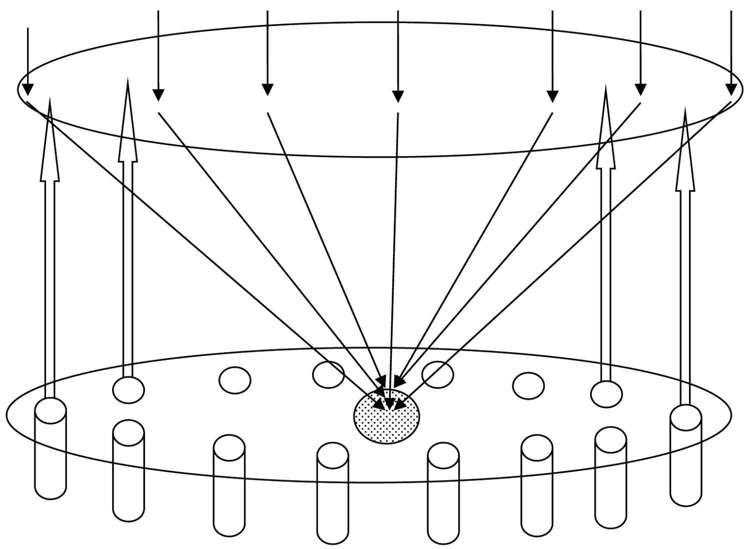

Рис. 5. Светоориентируемая линза ЖК. Матрица ЖК-композитных регуляторов внизу рисунка пропускает лучи ориентирующего света (возможно, инфракрасного); на рисунке – снизу вверх. Фокусируемый свет падает сверху на линзу ЖК в верхней части рисунка и собирается на фотоприёмнике внизу (заштрихован).

Матрица ЖК-композитных регуляторов [4], изображённая внизу рисунка, отстоит от линзы на фокусное расстояние линзы. В центре матрицы располагается фотоэлемент (заштрихован на рисунке). Матрица пропускает лучи ориентирующего света (возможно, инфракрасного) с плоскостью поляризации по радиусу для соответствующей ориентации нематического ЖК в линзе с примесью светоориентируемых частиц (на рисунке – снизу вверх). Фокусируемый свет падает сверху на линзу ЖК в верхней части рисунка и собирается на фотоприёмнике внизу (заштрихован).

ЖК линза имеет одну из сторон, покрытую ориентантом, как на рис. 2, но ориентирующий свет падает вертикально на рисунке. Линза ЖК показана на рис. 6.

Нижняя поверхность имеет постоянный угол наклона директора ЖК (на рисунке – гомеотропная ориентация). Матрица ЖК-композитных регуляторов [3] позволяет задавать градиентную по радиусу линзы ЖК ориентирующую подсветку. Градиентная радиально интенсивность ориентирующей подсветки приводит к радиальному градиенту фазовой задержки [9], обусловленному пространственно неравномерной ориентацией директора в радиальном сечении линзы [9; 10].

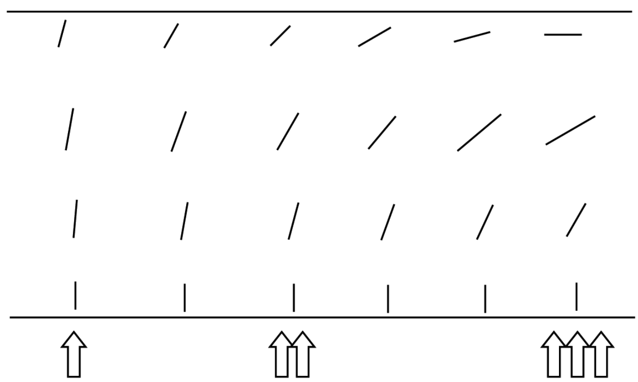

Рис. 6. Светоориентируемая линза ЖК, её радиальная плоскость.

В [11–27] рассмотрен широкий ряд проблем оптики ЖК материалов и управления их оптически анизотропными свойствами. Исходя из вышеизложенного материала, светоориентируемые ЖК системы могут быть применены в этих областях и в значительной степени решить отмеченные авторами [11–27] актуальные проблемы.

Выводы

Впервые предложены светоориентируемые нематические ЖК ячейки, одна сторона которых покрыта ориентантом.

Показана их применимость как двойных (регулятор-компенсатор) и тройных (светофильтр-регулятор-компенсатор) элементов в дисплеях.

Показана их применимость как трёхцветных (RGB) оптических элементов в видеосистемах и дисплеях.

Показана их применимость в фокусирующих, дифракционных и ёмкостных системах ЖК.

Впервые предложены светоориентируемые линзы ЖК с регулируемым в широких пределах фокусным расстоянием.

Статья поступила в редакцию 09.04.2018 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сойфер В.А. Нанофотоника и дифракционная оптика // Компьютерная оптика. 2008. Т. 32. № 2. С. 110–118.
2. Belyaev V.V., Solomatin A.S. Properties of hybrid aligned nematic (HAN) LC layers with both fixed and unfixed boundary conditions // Molecular Crystals and Liquid Crystals. 2015. Vol. 613. pp. 121–128.
3. Соломатин А.С. Особенности формирования микроструктуры и оптические свойства жидкокристаллических композитных твист-ячеек / А.С. Соломатин, В.И. Мащенко, Ю.О. Шашкова, В.В. Беляев // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2017. № 2. С. 53–63.

4. Belyaev V.V., Solomatin A.S., Chausov D.N. Phase retardation difference of liquid crystal cells with symmetric and asymmetric boundary conditions // Molecular Crystals and Liquid Crystals. 2014. Vol. 596. pp. 22–29.
5. Соломатин А.С., Беляев В.В., Рыбаков Д.О. Влияние пространственного ориентационного распределения директора жидкого кристалла на диэлектрические свойства ячейки ЖК // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2016. № 3. С. 96–110.
6. Соломатин А.С. Влияние профиля микрорельефа периодических анизотропных структур на их дифракционные свойства. // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2016. № 1. С. 74–87.
7. Соломатин А.С., Беляев В.В. Влияние деформации поперечного и продольного изгиба на оптические свойства гибридных жидкокристаллических ячеек с произвольным углом преднаклона на ориентирующей поверхности // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2016. № 2. С. 37–50.
8. Коншина Е.А. Оптика жидкокристаллических сред. СПб.: Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, 2012. 99 с.
9. Соломатин А.С. Линзы на основе жидких кристаллов с неоднородным радиальным распределением директора // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2016. № 3. С. 37–45.
10. Невская Г.Е., Томилин М.Г. Адаптивные линзы на основе жидких кристаллов // Оптический журнал. 2008. Т. 75. № 9. С. 35–48.
11. Коншина Е.А., Гавриш Е.О., Орлова А.О., Артемьев М.В. Влияние добавления полупроводниковых квантовых точек CdSe/ZnS в нематический жидкий кристалл на оптические и электрические характеристики ячеек // Письма в журнал технической физики. 2011. Т. 37. Вып. 21. С. 47–54.
12. Yang D.K., Wu S.T. Fundamentals of Liquid Crystal Devices. 2nd edition NY: Wiley, 2014. 591 p.
13. Hung-Yu Wu, Hsin-Min Fu, Jan-Tian Lian. Real Multi-Domain Reduced Color and Gamma Shift in Fringe-Field-Switching (FFS) Mode LCD with Photoalignment Method // Society for Information Display. Symposium Digest of Technical Papers. 2012. Vol.43. Iss. 1. pp. 293–296.
14. Jin Seog Gwag, Seung Hun Yu, Jin Hyuk Kwon. Advanced Patterned Vertical Aligned Nematic Mode with Improved High Transmittance // Society for Information Display. Symposium Digest of Technical Papers. 2012. Vol. 43. Iss. 1. pp. 1444–1447.
15. Lee Chung Yung. Variable Liquid Crystal Pretilt Angle using Nano-Alignment Surfaces / Lee Chung Yung, Man Chun Tseng, Jacob Yeuk Lung Ho, Hoi Sing Kwok // Society for Information Display. Symposium Digest of Technical Papers. 2012. Vol. 43. Iss. 1. pp. 289–292.
16. Kamanina N.V. Carbon Nanotubes Influence on Spectral, Photoconductive, Photorefractive and Dynamic Properties of the Optical Materials // Syntheses and Applications of Carbon Nanotubes and Their Composites / edited by Satoru Suzuki. InTech, 2013. pp. 397–411.
17. Симоненко Г.В., Студенцов С.А., Ежов В.А. Выбор оптимальной конструкции оптического затвора на π–ячейке // Оптический журнал. 2013. Т. 80. № 9. С. 17–22.
18. Каманина Н.В. Влияние пути переноса заряда при межмолекулярном комплексообразовании на нелинейно-оптические и фотопроводниковые характеристики нанокомпозитов // Письма в журнал технической физики. 2012. Т. 38. Вып. 3. С. 25–32.
19. Wang S.-Y., Wu H.-M., Yang K.H. Simple and direct measurements of pretilt angles in hybrid-aligned nematic liquid-crystal cells // Applied Optics. 2013. Vol. 52. Iss. 21. pp. 5106–5111.

20. Bezborodov V. New Concept for the Design, Synthesis, and Application of Nanostructured Anisotropic Materials and Conductive and Alignment Coatings for High-Efficient Displays and Photonic Devices / V. Bezborodov, S. Mikhalyonok, I. Zharski, O. Dormeshkin, A. Smirnov and A. Stsiapanau // Proceedings of 33rd International Display Research Conference EuroDisplay, (London, UK. 16–19 September 2013). 2013. Vol.44. Iss. S1. pp. 81–84.
21. Муравский Ан.А., Муравский Ал.А., Агабеков В.Е. Установка для одновременного измерения азимутальной и полярной энергии сцепления жидкого кристалла в одной ячейке в автоматическом режиме // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2013. № 1. С. 51–56.
22. Методы компьютерной оптики / под ред. В.А. Сойфера. М.: Физматлит. 2000. 688 с.
23. Левин А.Д., Лобач А.С., Шмыткова Е.А. Исследование геометрических параметров несферических наночастиц методом частично деполяризованного динамического рассеяния света // Российские нанотехнологии. 2015. Т. 10. № 5–6. С. 62–67.
24. Развитие оптико-спектральных методов характеризации наночастиц. / А.Д. Левин, Ю.М. Садагов, Л.Л. Короли, Е.А. Шмыткова // Российские нанотехнологии. 2013. Т. 8. № 5–6. С. 86–91.
25. Левин А.Д. Развитие оптико-спектральных методов измерений параметров наночастиц в жидких средах / Левин А.Д., Нагаев А.И., Прибытков А.В., Садагов А.Ю., Шмыткова Е.А. // Измерительная техника. 2015. № 11. С. 64–67.
26. Грейсух Г.И. Расчёт высокоапертурных конфокальных дифракционно-линзовых объективов / Г.И. Грейсух, Е.Г. Ежов, З.А. Сидякина, С.А. Степанов // Компьютерная оптика. 2013. Т. 37. № 1. С. 45–50.
27. Грейсух Г.И. Пластмассово-линзовые вариообъективы с дифракционно-рефракционными корректорами / Г.И. Грейсух, Е.Г. Ежов, С.А. Степанов, А.В. Калашников // Физические основы приборостроения. 2012. Т. 1. № 2. С. 83–90.

REFERENCES

1. Soifer V.A. Nanofotonika i difraktsionnaya optika [Nanophotonics and diffractive optics]. In: *Komp'yuternaya optika* [Computer Optics], 2008, vol. 32, no. 2, pp. 110–118.
2. Belyaev V.V., Solomatin A.S. Properties of hybrid aligned nematic (HAN) LC layers with both fixed and unfixed boundary conditions. In: *Molecular Crystals and Liquid Crystals*, 2015, vol. 613, pp. 121–128.
3. Solomatin A.S., Mashchenko V.I., Shashkova J.O., Belyaev V.V. Osobennosti formirovaniya mikrostruktury i opticheskie svoistva zhidkokristallicheskikh kompozitnykh tvist-yacheyek [Features of microstructure formation and optical properties of composite of liquid-crystal twist-cells]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-Matematika* [Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], 2017, no. 2, pp. 53–63.
4. Belyaev V.V., Solomatin A.S., Chausov D.N. Phase retardation difference of liquid crystal cells with symmetric and asymmetric boundary conditions. In: *Molecular Crystals and Liquid Crystals*, 2014, vol. 596. pp. 22–29.
5. Solomatin A.S., Belyaev V.V., Rybakov D.O. Vliyanie prostranstvennogo orientatsionnogo raspredeleniya direktora zhidkogo kristalla na dielektricheskie svoistva yacheiki ZHK [The influence of spatial orientational distribution of the director of the liquid crystal on the dielectric properties of the LCD cell]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-Matematika* [Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], 2016, no. 3, pp. 96–110.

6. Solomatin A.S. Vliyanie profilya mikrorel'efa periodicheskikh anizotropnykh struktur na ikh difraktsionnye svoystva [The influence of microrelief profile of periodic anisotropic structures on their diffraction properties]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-Matematika* [Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], 2016, no. 1, pp. 74–87.
7. Solomatin A.S., Belyaev V.V. Vliyanie deformatsii poperechnogo i prodol'nogo izgiba na opticheskie svoistva gibridnykh zhidkokristallicheskikh yacheyek s proizvol'nym uglom prednaklona na orientiruyushchei poverkhnosti [The effect of transverse strain and longitudinal bending on the optical properties of hybrid liquid crystal cells with an arbitrary pretilt angle on the orienting surface]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-Matematika* [Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], 2016, no. 2, pp. 37–50.
8. Konshina E.A. *Optika zhidkokristallicheskikh sred* [Optics of liquid crystal media]. St. Petersburg, Saint Petersburg National Research University of Information Technologies, Mechanics and Optics Publ., 2012. 99 p.
9. Solomatin A.S. Linzy na osnove zhidkikh kristallov s neodnorodnym radial'nym raspredeleniem direktora [Lenses based on liquid crystals with a nonuniform radial distribution of the director.]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-Matematika* [Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], 2016, no. 3, pp. 37–45.
10. Nevskaya G.E., Tomilin M.G. Adaptivnye linzy na osnove zhidkikh kristallov [Adaptive lenses based on liquid crystals]. In: *Opticheskii zhurnal* [Journal of Optical Technology], 2008, vol. 75, no. 9, pp. 35–48.
11. Konshina E.A., Gavrish E.O., Orlova A.O., Artem'ev M.V. Vliyanie dobavleniya poluprovodnikovykh kvantovykh tochek CdSe/ZnS v nematicheskii zhidkii kristall na opticheskie i elektricheskie kharakteristiki yacheek [The effect of adding CdSe/ZnS semiconductor quantum dots in a nematic liquid crystal on the optical and electrical characteristics of cells]. In: *Pis'ma v zhurnal tekhnicheskoi fiziki* [Technical Physics Letters], 2011, vol. 37, no. 21, pp. 47–54.
12. Yang D.K., Wu S.T. *Fundamentals of Liquid Crystal Devices.* 2nd edition NY: Wiley, 2014. 591 p.
13. Hung-Yu Wu, Hsin-Min Fu, Jan-Tian Lian. Real Multi-Domain Reduced Color and Gamma Shift in Fringe-Field-Switching (FFS) Mode LCD with Photoalignment Method. In: *Society for Information Display. Symposium Digest of Technical Papers,* 2012, vol. 43, iss. 1, pp. 293–296.
14. Jin Seog Gwag, Seung Hun Yu, Jin Hyuk Kwon. Advanced Patterned Vertical Aligned Nematic Mode with Improved High Transmittance. In: *Society for Information Display. Symposium Digest of Technical Papers*, 2012, vol. 43, iss. 1, pp. 1444–1447.
15. Lee Chung Yung, Man Chun Tseng, Jacob Yeuk Lung Ho, Hoi Sing Kwok. Variable Liquid Crystal Pretilt Angle using Nano-Alignment Surfaces. In: *Society for Information Display. Symposium Digest of Technical Papers*, 2012, vol. 43, iss. 1, pp. 289–292.
16. Kamanina N.V. Carbon Nanotubes Influence on Spectral, Photoconductive, Photorefractive and Dynamic Properties of the Optical Materials. In: *Syntheses and Applications of Carbon Nanotubes and Their Composites*. InTech Publ., 2013, pp. 397–411.
17. Simonenko G.V., Studentsov S.A., Ezhov V.A. Vybor optimal'noi konstruktsii opticheskogo zatvora na π-yacheike [The optimal design of the optical shutter on a π-cell]. In: *Opticheskii zhurnal* [Journal of Optical Technology], 2013, vol. 80, no. 9, pp. 17–22.

18. Kamanina N.V. Vliyanie puti perenosa zaryada pri mezhmolekulyarnom kompleksoobrazovanii na nelineino-opticheskie i fotoprovodnikovye kharakteristiki nanokompozitov [The influence of the way of charge transfer during intermolecular complex formation on nonlinear optical and photoconductive characteristics of nanocomposites]. In: *Pis'ma v zhurnal tekhnicheskoi fiziki* [Technical Physics Letters], 2012, vol. 38, no. 3, pp. 25–32.
19. Wang S.-Y., Wu H.-M., Yang K.H. Simple and direct measurements of pretilt angles in hybrid-aligned nematic liquid-crystal cells. In: *Applied Optics,* 2013, vol. 52, iss. 21, pp. 5106–5111.
20. Bezborodov V., Mikhalyonok S., Zharski I., Dormeshkin O., Smirnov A., Stsiapanau A. New Concept for the Design, Synthesis, and Application of Nanostructured Anisotropic Materials and Conductive and Alignment Coatings for High-Efficient Displays and Photonic Devices. In: *Proceedings of 33rd International Display Research Conference EuroDisplay, (London, UK. 16–19 September 2013)*, 2013, vol. 44, iss. S1, pp. 81–84.
21. Muravskiy An.A., Muravskiy Al.A., Agabekov V.E. Ustanovka dlya odnovremennogo izmereniya azimutal'noi i polyarnoi energii stsepleniya zhidkogo kristalla v odnoi yacheike v avtomaticheskom rezhime [The system for the simultaneous measurement of the azimuthal and polar energy of adhesion of the liquid crystal in one cell in automatic mode]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika* [Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], 2013, no. 1, pp. 51–56.
22. Soifer V.A., ed. *Metody komp'yuternoi optiki* [Methods of computer optics]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2000. 688 p.
23. Levin A.D., Lobach A.S., Shmytkova E.A. Issledovanie geometricheskikh parametrov nesfericheskikh nanochastits metodom chastichno depolyarizovannogo dinamicheskogo rasseyaniya sveta [Study of geometrical parameters of nonspherical nanoparticles by the method of partially depolarized dynamic light scattering]. In: *Rossiiskie nanotekhnologii* [Nanotechnologies in Russia], 2015, vol. 10, no. 5–6, pp. 62–67.
24. Levin A.D., Sadagov Yu.M., Koroli L.L., Shmytkova E.A. Razvitie optiko-spektral'nykh metodov kharakterizatsii nanochastits [The development of optical spectral characterization methods of nanoparticles]. In: *Rossiiskie nanotekhnologii* [Nanotechnologies in Russia], 2013, vol. 8, no. 5–6, pp. 86–91.
25. Levin A.D., Nagaev A.I., Pribytkov V.A., Sadagov A.Yu., Shmytkova E.A. Razvitie optiko-spektral'nykh metodov izmerenii parametrov nanochastits v zhidkikh sredakh [The development of optical spectral methods for the measurements of nanoparticles in liquid media]. In: *Izmeritel'naya tekhnika* [Measurement Techniques], 2015, no. 11, pp. 64–67. .
26. Greisukh G.I., Yezhov E.G., Sidyakina Z.A., Stepanov S.A. Raschet vysokoaperturnykh konfokal'nykh difraktsionno-linzovykh ob'ektivov [Calculation of high-aperture confocal diffraction lenses]. In: *Komp'yuternaya optika* [Computer optics], 2013, vol. 37, no. 1, pp. 45–50.
27. Greisukh G.I., Yezhov E.G., Stepanov S.A., Kalashnikov A.V. Plastmassovo-linzovye varioob'ektivy s difraktsionno-refraktsionnymi korrektorami [Plastic-lens varifocal objectives with diffraction-refractive correctors]. In: *Fizicheskie osnovy priborostroeniya* [Physical Bases of Instrumentation], 2012, vol. 1, no. 2, pp. 83–90.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Соломатин Алексей Сергеевич – кандидат физико-математических наук, инженер учебно-научной лаборатории теоретической и прикладной нанотехнологии Московского государственного областного университета;
e-mail: Sotrudnica_UNC@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Aleksei S. Solomatin – PhD in Physical and Mathematical Sciences, engineer of the Education & Science Lab for Theoretical and Applied Nanotechnology, Moscow Region State University; e-mail: Sotrudnica_UNC@mail.ru

---

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Соломатин А.С. Светоориентируемые ячейки нематического ЖК с одной стороной, покрытой ориентантом // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2018. № 2. С. 21–33.
DOI: 10.18384/2310-7251-2018-2-21-33.

FOR CITATION

Solomatin A.S. Light-oriented nematic LCD cell covered with orientant on one side. In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics.* 2018. no. 2. pp. 21–33.
DOI: 10.18384/2310-7251-2018-2-21-33.

УДК: 535.8
DOI: 10.18384/2310-7251-2018-2-34-44

ДИСПЛЕЙ С МНОГОПОЛЬЗОВАТЕЛЬСКИМ ИНДИВИДУАЛЬНО-РАЗЛИЧНЫМ ОТОБРАЖЕНИЕМ. УПРАВЛЯЕМОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОЕЦИРУЕМОГО СВЕТОВОГО ПОТОКА ПРОЕКТОРОМ НА ОСНОВЕ ЖИДКИХ КРИСТАЛЛОВ

Соломатин А.С.
Московский государственный областной университет
105005, г. Москва, ул. Радио, д. 10А, Российская Федерация

Аннотация. В работе изложены принципы функционирования основного элемента (пикселя) ЖК дисплея, который позволяет просматривать индивидуально различный видеоряд. Зрители в интерактивном режиме задают параметры индивидуально востребованных изображений, могут использовать компьютер или телевизор с одним таким экраном вместо отдельных экранов для каждого. Многопользовательский экран может отображать для членов экипажа самолёта индивидуально различную информацию. Аналогично многопользовательский экран может применяться и в иных многоместных системах приёма и обработки информации. В работе предложены новые принципы управления световым потоком и конструктивные решения для проектора с улучшенной энергоэффективностью проецирования. Разработана конструкция основного элемента матрицы проектора – пикселя на основе жидкого кристалла, позволяющая управлять направлением луча света. Значительно уменьшается негативное влияние на качество проецируемого изображения эксплуатационных факторов.

Ключевые слова: оптическая анизотропия, двулучепреломление, пространственно неоднородные структуры, оптические свойства, дисплей, жидкие кристаллы, проектор.

DISPLAY WITH MULTIPLAYER INDIVIDUALLY DIFFERENT SCREENS. CONTROLLED DISTRIBUTION OF A LIGHT FLUX PROJECTED BY A LIQUID-CRYSTAL PROJECTOR

A. Solomatin
Education & Research Lab of Theoretical and Applied Nanotechnology, Moscow Region State University
ul. Radio 10A, 105005 Moscow, Russian Federation

Abstract. The paper presents the principles of operation of the basic element (pixel) of an LCD display, which allows one to view individually different visuals. The audience interactively set the parameters of individually sought-for images, can use a computer or a TV with one screen instead of separate screens for each. A multiplayer screen can display individually different information for aircrew. Similarly, a multiplayer screen can be used in other multi-bed systems intended for receiving and processing information. New principles for the control of the luminous flux and constructive solutions for the projector with improved energy efficiency projection are proposed. The design of the main matrix element of the projector – a pixel-based liquid crystal, which allows one to control the direction of the light beam, is developed. It is shown that the negative impact of operational factors on the quality of the projected image is significantly reduced.

Key words: birefringence, LC display, optical anisotropy, liquid crystals, spatially heterogeneous structures, optical properties, projector.

Введение

Визуальное отображение информации в современном обществе стало общепринятым повсеместно, буквально во всех областях человеческой деятельности [1–5]. В широком ряде разнообразных ситуаций использования коллективных экранов вполне очевидным образом проявились и их недостатки. Прежде всего, пользователи (зрители) могут нуждаться, вследствие разницы их интересов и выполняемой деятельности, в индивидуально ориентированной информации. В таком случае эффективность коллективного экрана может быть невысока.

Также следует отметить, что скопление большого числа зрителей индивидуальной визуальной информации требует соответствующее количество индивидуальных экранов. Это создаёт дополнительные требования к планировке помещений, и т.д.

Возникает потребность в таком дисплее, который мог бы показывать различным пользователям индивидуально различную информацию (видеоряд). В данной работе предложено решение этой задачи.

Отображение информации на проекционных экранах главным образом предназначено для коллективного просмотра. Практически не нашли себе применения проекционные экраны для индивидуального пользования, особенно в качестве экрана компьютера. В то же время использование индивидуальных экранов сталкивается с ограничениями по их габаритам, например, экраны носимых с одного места использования на другое (ноутбуков) обычно невелики, а экраны носимых постоянно (телефонов) откровенно маленькие.

Возникает потребность в проекционной системе, включённой в состав устройства (как фонарик у телефона) или легко подключаемой (как внешняя подключаемая к ноутбуку видеокамера), например через USB-разъём (и через него же может быть электропитание). Такая проекционная система может увеличивать возможности устройства с маленьким дисплеем, если необходимо продемонстрировать информацию группе людей и им неудобно толпиться перед маленьким дисплеем. Проецирование может быть востребовано в такой ситуации на экран умеренных размеров, в течение небольшого времени, что совместимо с аккумуляторным питанием при условии энергоэкономности проектора. В качестве экрана может быть использована какая-нибудь (импровизированная) поверхность. Такая система может быть востребована как массовым потребителем, так и МЧС, военными. В данной работе предложено решение этой задачи.

На стоимость проекционной техники существенно влияет количество управляемых оптических элементов, обычно соответствующее количеству пикселей в изображении. Актуальна разработка управляемого элемента (пикселя), обеспечивающего проецирование большого числа пикселей изображения. В данной работе предложено решение этой задачи.

Факторами, отрицательно влияющими на качество изображения, являются: наличие областей с пониженной контрастностью из-за интенсивного внешнего постороннего их освещения; расположение проектора не на нормали к середине экрана, формирующее трапециевидную картинку с искажениями; проецирование на криволинейную поверхность. Актуальна разработка управляемого элемента (пикселя), обеспечивающего корректировку распределения светового потока как по направлению, так и по яркости, для преодоления перечисленных проблем. В данной работе предложено решение этой задачи.

Основные новые оптические элементы предлагаемого ЖК дисплея

Элементная база предлагаемого в данной работе оборудования основана, в первую очередь, на пикселях ЖК дисплея, обеспечивающих за время показа одного кадра несколько переключений между такими различными состояниями, что световой сигнал посылается нескольким различным зрителям. Таким образом, каждому зрителю можно показывать кадр из его индивидуального видеоряда. А информация, предназначенная для других, будет ему не видна.

Естественно, зрители должны располагаться на некотором (небольшом) расстоянии друг от друга, чтобы пространственные области, в которых видны различные видеоряды, не перекрывались между собой.

Положение каждого зрителя может быть определено небольшим беспроводным маяком, который можно прикреплять как заколку к одежде, волосам, и т.д. Дисплей будет направлять видеосигнал (луч света от каждого пикселя дисплея) в направлении маяка, освещая область диаметром около полуметра. Таким образом, органы зрения пользователя будут видеть изображение, если расстояние от маяка до глаз не более чем радиус светового пятна.

Элемент, обеспечивающий заданный вертикальный угол луча света, выходящего из пикселя для предлагаемого дисплея

Управляемый элемент изображён на рис. 1. В его состав входит ячейка с нематическим жидким кристаллом [6; 7]. Регулируя прилагаемым к ячейке полем ориентационное распределение директора ЖК, мы тем самым регулируем угол, на который преломляется луч света, падающий на ячейку под углом падения, обозначенным на рис. 1 как γ.

Преломленный луч характеризуется углом преломления. На рис. 1 он обозначен для одного случая как φ, для другого он не отличается от угла падения $\boldsymbol{\gamma}$ и не обозначен никаким специальным знаком.

Рассмотрим преломление луча при входе в ЖК ячейку подробнее. На рис. 1А показаны оба варианта хода луча и обозначена плоскость поляризации падающего луча света. Он поляризован вертикально в плоскости рисунка, падает луч горизонтально в плоскости рисунка.

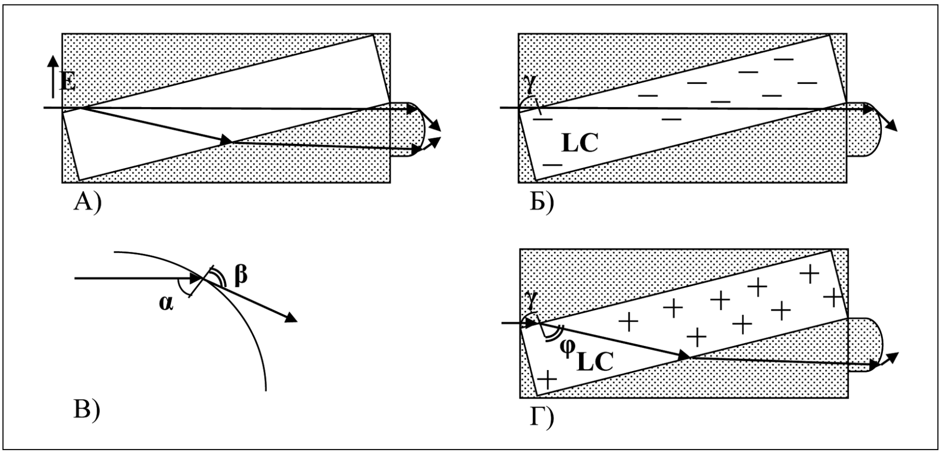

Рис. 1. Регулятор вертикального угла выхода луча света.

На рис. 1Б директор ЖК в ячейке, показанный горизонтальными штрихами, ориентирован параллельно ходу луча, параллельно его плоскости поляризации, горизонтально в плоскости рисунка. При этом поле отключено. Такая ориентация директора ЖК в отсутствие поля достигается тем, что на двух противоположных друг другу сторонах ячейки ЖК нанесено покрытие с микрорельефом, обеспечивающее необходимый азимутальный угол планарно ориентированного ЖК (см. также рис. 2). Обе стороны, покрытые ориентантом и снабжённые прозрачными электродами поверхности ячейки ЖК, параллельны плоскости рисунка и на рис. 1 не показаны. Показатель преломления ЖК обыкновенный n_o подобран равным показателю преломления прозрачного изотропного материала, через который луч идёт до входа в ячейку.

В таком случае [8] луч идёт по прямой и достигает криволинейной поверхности, назовём её линзой. На поверхности линзы он преломится и выйдет. На рис. 1В показано преломление луча; угол его падения на поверхность линзы обозначен α, угол преломления луча обозначен β.

Если поле включено (оно перпендикулярно плоскости рисунка) и его напряжённость настолько велика, что директор ЖК в плоскости рисунка (в плоскости падения и преломления луча света) ориентирован по полю, перпендикулярно к первоначальному направлению директора, то, как показано на рис. 1Г, луч преломится в соответствии с необыкновенным показателем преломления ЖК n_e. Затем он дойдёт до поверхности линзы, преломится на ней и выйдет.

Регулируя полем ориентацию (см. также рис. 2) директора ЖК, мы обеспечим выход луча через точку поверхности линзы, расположенную между точками выхода рассмотренных выше крайних лучей и, соответственно, обеспечим угол преломления выходящего луча в диапазоне между крайними значениями.

Этот диапазон и есть вертикальный диапазон углов, в пределах которого зрители могут увидеть изображение на экране.

Там, где к поверхности линзы приближается не преломившийся луч, то есть как на рис. 1Б, зачерним (покроем поглотителем), чтобы пользоваться для формирования изображения лучом, преломившимся в соответствии с условием $n_e \geq n_e^{eff} > n_o$.

На рис. 2 показано распределение директора ЖК по толщине (то есть между поверхностями с электродами) ячейки ЖК для различных величин приложенного поля. Так, например, можно полагать, что плоскость рис. 1 соответствует середине ячейки, изображённой на рис. 2.

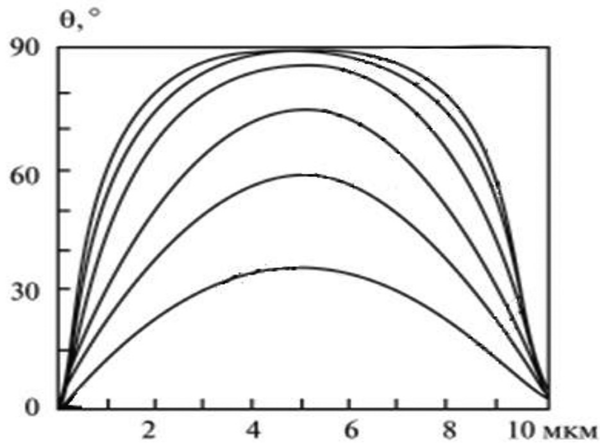

Рис. 2. Зависимость угла директора ЖК от координаты по толщине ячейки при различных величинах приложенного поля.

Элемент, обеспечивающий заданный горизонтальный угол луча света, выходящего из пикселя для предлагаемого дисплея

Управляемый элемент изображён на рис. 3. В его состав входит ячейка с нематическим жидким кристаллом. Регулируя прилагаемым к ячейке полем ориентационное распределение директора ЖК, мы тем самым регулируем угол, на который преломляется луч света, падающий на ячейку под углом падения, обозначенным на рис. 3 как γ.

Преломленный луч характеризуется углом преломления. На рис. 3 он обозначен для одного случая как φ, для другого он не отличается от угла падения γ и не обозначен никаким специальным знаком.

Рассмотрим преломление луча при входе в ЖК ячейку подробнее. На рис. 3А показаны оба варианта хода луча и обозначена плоскость поляризации падающего луча света. Он поляризован горизонтально перпендикулярно плоскости рисунка, падает луч горизонтально в плоскости рисунка.

На рис. 3Б директор ЖК в ячейке ориентирован параллельно плоскости поляризации луча, перпендикулярно его ходу, горизонтально, перпендикулярно плоскости рисунка. При этом поле включено и обеспечивает полную переориентацию директора ЖК в плоскости преломления луча. Такая ориентация директора ЖК в поле достигается тем, что на двух противоположных друг другу сторонах ячейки ЖК нанесено покрытие с микрорельефом, обеспечивающее необходимый азимутальный угол планарно ориентированного ЖК (см. также рис. 2). Обе покрытые ориентантом и снабжённые прозрачными электродами поверхности ячейки ЖК параллельны плоскости рисунка и на рис. 3 не показаны. Показатель преломления ЖК обыкновенный n_o подобран равным показателю преломления прозрачного изотропного материала, через который луч идёт до входа в ячейку. В таком случае луч идёт по прямой.

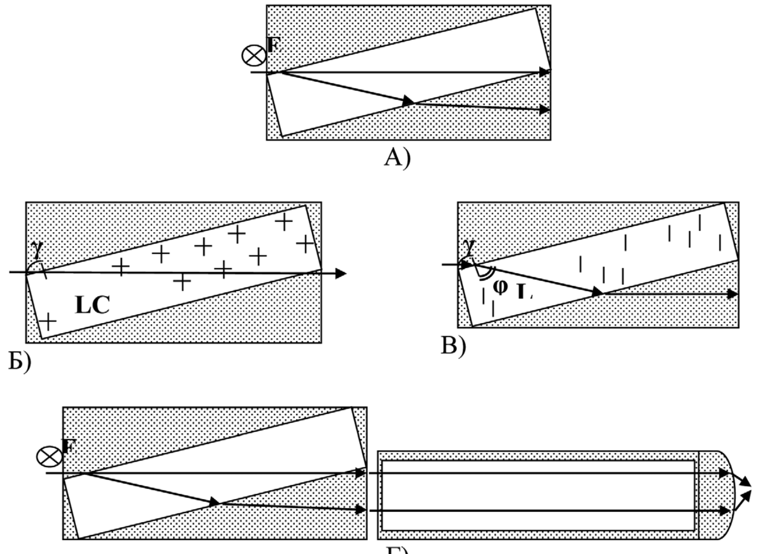

Рис. 3. Регулятор горизонтальных углов выхода луча света.

Если поле выключено, директор ЖК в плоскости рисунка (в плоскости падения и преломления луча света) ориентирован вертикально в плоскости рисунка, перпендикулярно к плоскости поляризации луча и к его ходу, то, как показано на рис. 3В, луч преломится в соответствии с показателем преломления ЖК необыкновенным n_e.

Регулируя полем ориентацию (см. также рис. 2) директора ЖК, обеспечим выход луча через точку поверхности линзы, расположенную между точками выхода рассмотренных выше крайних лучей.

Там, где к поверхности выхода луча приближается не преломившийся луч, то есть как на рис. 3Б, зачерним поверхность (покроем поглотителем), чтобы пользоваться для формирования изображения лучом, преломившимся в соответствии с $n_e \geq n_e^{\mathrm{eff}} > n_o$.

На рис. 3В показаны оба элемента рядом. Слева регулятор горизонтального угла отклонения луча, рассмотренный на рис. 3А-В, справа – регулятор вертикального угла отклонения луча, рассмотренный на рис. 1. Причём регулятор вертикального угла отклонения луча показан в другой проекции, чем на рис. 1. Для регулятора вертикального угла плоскость рис. 3В можно считать горизонтальной плоскостью углов дисплея (на рис. 1 плоскость рисунка можно считать вертикальной плоскостью для углов работы дисплея). Как видно на рис. 3В, в зависимости от регулятора горизонтального угла отклонения (расположен в левой части рис. 3В) луч света проходит через регулятор вертикальных углов дисплея (расположен в правой части рисунка) и попадает на линзу, преломляясь в диапазоне углов горизонтальных.

Количественные оценки углов для предлагаемого дисплея

Важнейшее практическое значение имеют количественные оценки. Угол, на который может быть отклонён луч, оценён количественно для ячейки ЖК, с показателями преломления $n_o = 1{,}5$, $n_e = 1{,}65$.

Угол падения луча γ принят равным 76°, тогда угол преломления φ равен 62°. Луч не преломленный идёт горизонтально, луч, преломленный под углом преломления 62°, отклоняется в плоскости рис. 1 вниз на 14°.

Для преломления на линзе угол падения $\boldsymbol{\alpha}$ принят равным 41°, тогда угол преломления β равен 80° (вторая среда – воздух). Для точки падения луча горизонтального на рис. 1 это означает, что нормаль к поверхности линзы образует 41° к горизонтали, тогда преломленный линзой луч образует к горизонтали угол 39° (отсчёт угла вниз в плоскости рис. 1).

Для точки падения луча, преломленного вниз на 14° на рис. 1, это означает, что нормаль к поверхности линзы образует угол 55° с горизонталью, тогда преломленный линзой луч образует с горизонталью угол 25° (отсчёт угла вверх в плоскости рис. 1).

Для горизонтальных углов получаем 39° вправо и влево.

Примерные размеры элементов пикселя показаны на рис. 4.

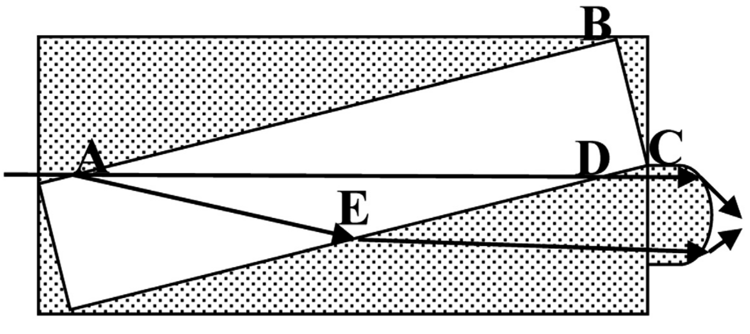

Рис. 4. Отрезки, длины которых количественно оценены.

Если поперечные размеры линзы между крайними точками выхода лучей около 100 мкм, то на рис. 1 толщина слоя ЖК (отрезок ВС) в ячейке 200 мкм, расстояние между крайними точками выхода луча из ячейки (отрезок ED) 400 мкм, сторона ячейки не менее (отрезок АВ) 800 мкм.

Габарит пикселя по вертикали около 300 мкм.

Предлагаемый ЖК проектор

На проекционный экран с большим числом пикселей в изображении будет приходиться ограниченное число проекционных элементов (пикселей проектора), каждый из которых обеспечивает построчную развёртку (как в экранах на электронно-лучевой трубке) изображения ограниченных размеров на выделенной для него части экрана. Возможны варианты: строго одна строка (столбец) проецируемых пикселей на один пиксель проектора; участок прямоугольной формы (несколько строк и столбцов) экрана на один пиксель проектора. Оба варианта будут рассмотрены ниже в данной работе.

При этом время, которое луч света проходит по пикселю изображения (задерживается на нём, или пробегает пиксель с максимальной быстротой) напрямую определяет яркость пикселя изображения. Таким образом, в отличие от проекторов с поглощением части светового сигнала для регулирования яркости пикселя изображения, экономится значительная часть светового потока. В среднем, традиционные проекторы поглощают около половины светового потока при регулировании яркости пикселей изображения. Это означает, что предлагаемая в данной работе конструкция повышает максимальную яркость пикселя изображения (и, соответственно, контрастность) в два раза при том же энергопотреблении, или позволяет при той же максимальной яркости уменьшить энергопотребление вдвое.

Также можно предусмотреть регулировку проектора с учётом неравномерной посторонней засветки экрана, неоптимального положения проектора (трапециевидное искажение картинки), когда проекционные элементы (пиксели проектора) будут распределять световой сигнал соответствующим образом как по углам проецирования, так и по яркости.

Следовательно, на большое число строк и столбцов пикселей проекционного экрана будет приходиться ограниченное число проекционных элементов, каждый из которых обеспечивает построчную развёртку (как в экранах на электронно-лучевой трубке) изображения ограниченных размеров на выделенной для него части экрана.

Проекционные элементы могут располагаться под углом друг к другу. Тогда они будут охватывать более широкую область проецирования, составленную из зон проецирования отдельных элементов.

Для преодоления проблем с внешним неравномерным освещением экрана можно вводить в проектор соответствующие настройки. Можно также оснастить проекционный элемент фотоприёмником узкого углового диапазона и получать, таким образом, информацию о внешней освещённости области проецирования элемента перед началом проецирования, автоматически введя поправки на яркость проецирования.

Таким образом, проектор может использоваться там же, где и проекторы иных типов, превосходя их во многих эксплуатационных ситуациях и, предположительно, дешевле их из-за меньшего количества управляемых элементов.

Яркость для особо высококонтрастного изображения регулируется аддитивно (накапливается). Это обеспечивается следующим образом. Области проецирования для смежных проецирующих элементов частично перекрываются (фактически это требует увеличить число проецирующих элементов в несколько раз). Каждый пиксель изображения находится в проецируемых областях для нескольких проецирующих элементов. Каждый проецирующий элемент может ни разу за время формирования кадра не осветить пиксель, и он будет иметь нулевую яркость в заданном цвете RGB палитры. В тоже время, пиксель с высокой яркостью может быть сформирован за счёт многократного по продолжительности (по сравнению с обычным) временем его освещения, как одним, так и в общей сложности несколькими проекционными элементами. Таким образом, световой поток от источника света перераспределяется в соответствии с заданной яркостью пикселей.

Выводы

В работе решена задача дисплея, показывающего значительному числу зрителей индивидуально различный видеоряд. Зрители могут использовать его как монитор компьютера или телевизор вместо множества отдельных индивидуальных экранов. Устройство может использоваться в кабинах самолётов с многоместным экипажем, отображая для членов экипажа индивидуально различную информацию. Аналогично и в иных многоместных системах управления, приёма и обработки информации.

В работе решена задача проекционного устройства, в котором число управляемых оптических элементов на несколько порядков меньше, чем число пикселей в формируемом (проецируемом) изображении, что снижает стоимость оборудования.

Использование предложенного в данной работе проекционного оборудования значительно уменьшает негативное влияние эксплуатационных факторов на качество проецируемого изображения.

Приблизительно в два раза снижается энергопотребление при формировании проекционного изображения, что благоприятно для аккумуляторных проецирующих систем. Также снижается влияние тепловыделения, при проецировании мощным световым потоком, на конструкцию и условия эксплуатации.

Статья поступила в редакцию 12.03.2018 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пескова О.В. О визуализации информации // Вестник Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. Серия: Приборостроение. 2012. № 1. С. 158–173.
2. Ишеев И.А. Технические решения для эффективной коллективной работы с информацией и управления визуализацией // Сборник трудов XX Международной научной конференции «Информатизация и информационная безопасность правоохранительных органов» (24–25 мая 2011 г., Москва). М.: Академия управления Министерства внутренних дел России, 2011. С. 290–297.
3. Рубио Д. Обзор решений по экранам коллективного пользования в диспетчерских ТЭК // Современные технологии автоматизации. 2017. № 2. С. 96–102.
4. Кузин О.С. Плазменные и светодиодные технологии // Электроника: Наука, Технология, Бизнес. 2005. № 8. С. 20–23.

5. Бугаев С.М. Экран коллективного пользования // Мир Автоматизации. 2008. № 12. С. 64–65.
6. Optical Properties of Hybrid Aligned Nematic (HAN) Cells with Different Pretilt Angles / Belyaev V.V., Solomatin A.S., Kurilov A.D., Chausov D.N., Mazaeva V.G. // Applied Optics. 2014. Vol. 53. Iss. 29. pp. H51–H57.
7. Belyaev V.V., Solomatin A.S., Chausov D.N. Phase retardation difference of liquid crystal cells with symmetric and asymmetric boundary conditions // Molecular Crystals and Liquid Crystals. 2014. Vol. 596. Iss. 1. pp. 22–29.
8. Ландсберг Г.С. Оптика. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы. 1957. 759 с.

REFERENCES

1. Peskova O.V. O vizualizatsii informatsii [About visualization of information]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta im. N.E. Baumana. Seriya: Priborostroenie* [Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Instrument Engineering], 2012, no. 1, pp. 158–173.
2. Isheev I.A. Tekhnicheskie resheniya dlya effektivnoi kollektivnoi raboty s informatsiei i upravleniya vizualizatsiei [Technical solutions for effective collaboration with information and visualization management]. In: *Sbornik trudov XX Mezhdunarodnoi nauchnoi konferentsii "Informatizatsiya i informatsionnaya bezopasnost' pravookhranitel'nykh organov" (24–25 maya 2011 g., Moskva)* [Proceedings of the XX International scientific conference "Informatization and information safety of law enforcement" (24–25 may, 2011, Moscow)]. Moscow, Academy of Management of the Ministry of Internal Affairs of Russia Publ., 2011. pp. 290–297.
3. Rubio D. Obzor reshenii po ekranam kollektivnogo pol'zovaniya v dispetcherskikh TEK [A review of the solutions for shared-use screens in dispatching facilities]. In: *Sovremennye tekhnologii avtomatizatsii* [Modern automation technologies], 2017, no. 2, pp. 96–102.
4. Kuzin O.S. Plazmennye i svetodiodnye tekhnologii [Plasma and LED technology]. In: *Elektronika: Nauka, Tekhnologiya, Biznes* [Electronics: Science, Technology, Business], 2005, no. 8, pp. 20–23.
5. Bugaev S.M. Ekran kollektivnogo pol'zovaniya [Shared-use screen]. In: *Mir Avtomatizatsii* [World of Automation], 2008, no. 12, pp. 64–65.
6. Belyaev V.V., Solomatin A.S., Kurilov A.D., Chausov D.N., Mazaeva V.G. Optical Properties of Hybrid Aligned Nematic (HAN) Cells with Different Pretilt Angles. In: *Applied Optics*, 2014, vol. 53, iss. 29, pp. H51–H57.
7. Belyaev V.V., Solomatin A.S., Chausov D.N. Phase retardation difference of liquid crystal cells with symmetric and asymmetric boundary conditions. In: *Molecular Crystals and Liquid Crystals,* 2014, vol. 596, iss. 1, pp. 22–29.
8. Landsberg G.S. *Optika* [Optics]. Moscow, Gosudarstvennoe izdatel'stvo tekhniko-teoreticheskoi literatury Publ., 1957. 759 p.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Соломатин Алексей Сергеевич – кандидат физико-математических наук, инженер учебно-научной лаборатории теоретической и прикладной нанотехнологии Московского государственного областного университета;
e-mail: Sotrudnica_UNC@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Aleksei S. Solomatin – PhD in Physical and Mathematical Sciences, engineer of the Education & Science Lab for Theoretical and Applied Nanotechnology, Moscow Region State University; e-mail: Sotrudnica_UNC@mail.ru

---

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Соломатин А.С. Дисплей с многопользовательским индивидуально-различным отображением. Управляемое распределение проецируемого светового потока проектором на основе жидких кристаллов // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2018. № 2. С. 34–44.
DOI: 10.18384/2310-7251-2018-2-34-44.

FOR CITATION

Solomatin A.S. Display with multiplayer individually different screens. Controlled distribution of a light flux projected by a liquid-crystal projector. In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*. 2018. no. 2. pp. 34–44.
DOI: 10.18384/2310-7251-2018-2-34-44.

УДК 537.635+537.9
DOI: 10.18384-2310-7251-2018-2-45-50

ЭЛЕКТРОННЫЙ ПАРАМАГНИТНЫЙ РЕЗОНАНС ФОСФАТНЫХ СТЁКОЛ, ИМПЛАНТИРОВАННЫХ ИОНАМИ ^{95}МО$^{1+}$

Жачкин В.А.[1]***, Тарасова В.В.***[2]

[1] *Московский государственный областной университет*
105005, г. Москва, ул. Радио, д. 10А, Российская Федерация

[2] *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова*
119991, г. Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2, Российская Федерация

Аннотация. Фосфатные стёкла, содержащие 50 мол.% P_2O_5, были синтезированы в различных окислительно-восстановительных условиях. Молибден вводился в стекло в виде малой примеси (до 1 вес.% MoO_3) с естественным содержанием его изотопов, а также методом имплантации ионов $^{95}Mo^{1+}$. Измерены оптические спектры и спектры ЭПР. Наблюдались два типа спектров ЭПР: синглетный аксиально-симметричный спектр с параметрами спин-гамильтониана: $g_{\|} = 1{,}876$, $g_{\perp} = 1{,}930$ и спектр со сверхтонкой структурой с параметрами: $g_{\|} = 1{,}889$, $g_{\perp} = 1{,}924$, $A_{\|} = 88\times10^{-4}$см и $A_{\perp} = 41\times10^{-4}$см.

Ключевые слова: электронный парамагнитный резонанс, оптические спектры, фосфатные стёкла, молибден, сверхтонкая структура.

ELECTRON SPIN RESONANCE OF PHOSPHATE GLASSES IMPLANTED WITH ^{95}MO^{1+} IONS

V. Zhachkin[1]***, V. Tarasova***[2]

[1] *Moscow Region State University*
ul. Radio 10A, 10500 5Moscow, Russian Federation

[2] *Lomonosov Moscow State University*
Vorob'evy gory, 119991 Moscow, Russian Federation

Abstract. Phosphate glasses containing 50 mol% P_2O_5 were synthesized in various redox conditions. Molybdenum was introduced into the glass in the form of small impurities ($\leq$ 1 wt % MoO_3) with a natural content of its isotopes, as well as by implanting $^{95}Mo^{1+}$ ions. Optical and electron spin resonance (ESR) spectra were measured. Two types of ESR spectra were observed: a singlet axial-symmetric spectrum with spin-Hamiltonian parameters: $g_{\|} = 1{,}876$, $g_{\perp} = 1{,}930$ and a spectrum with a hyperfine structure with the following parameters: $g_{\|} = 1{,}889$, $g_{\perp} = 1{,}924$, $A_{\|} = 87{,}5\times10^{-4}$cm and $A_{\perp} = 40{,}5\times10^{-4}$cm.

Key words: electron spin resonance, optical spectra, phosphate glasses, molybdenum, hyperfine structure.

Введение

В неорганических соединениях Мо обнаруживает валентные состояния от II до VI, при этом в стёклах Мо чаще всего присутствует в форме Mo^{6+}. В фосфатных стёклах Мо может находиться в различных валентных состояниях, обеспечивая окраску от голубой и зелёно-голубой до жёлто-коричневой в зависимости от окислительно-восстановительных условий синтеза стекла.

Цель настоящей работы заключалась в анализе оптических спектров и спектров электронного парамагнитного резонанса (ЭПР) ионов Мо в фосфатном стекле в зависимости от способа внедрения молибдена в стекло: в виде малой примеси ($\leq$ 1 вес.% MoO_3) в шихту или имплантации ионов $^{95}Mo^{1+}$ в пластины из стекла.

Экспериментальные результаты

Из синтезированных стёкол были изготовлены полированные пластины размером $20 \times 10 \times 0{,}5$ мм. Пластины подвергались облучению ионами $^{95}Mo^{1+}$.

Оптические спектры в интервале длин волн от 300 до 1200 нм были измерены до и после имплантации с помощью спектрофотометра SP-8.

На рис. 1 показан оптический спектр (**1**) от стекла Р-50 (50 мол.% P_2O_5), окрашенного в коричневый цвет. В спектре видно интенсивное поглощение со стороны коротковолновой части спектра, наклонно спадающее от 300 к 1200 нм, на котором явно выражены довольно узкие полосы при 380 и 460 нм и слабый перегиб в области от 650 до 730 нм, быстро спадающий в сторону больших длин волн. В зелёно-голубом стекле (рис. 1, спектр **2**) наблюдается одна широкая полоса с максимумом при 720–730 нм.

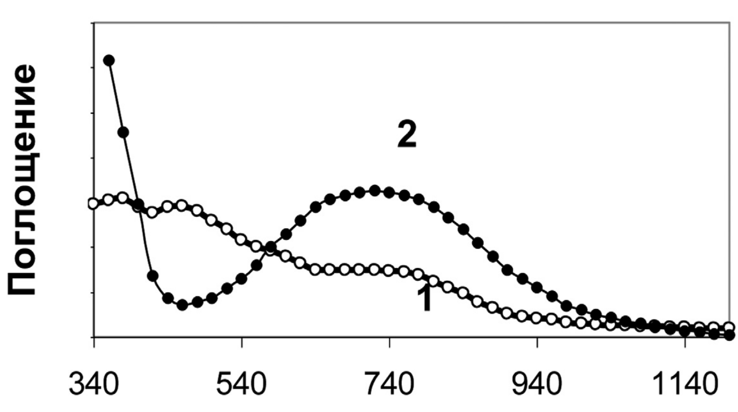

Рис. 1. Оптические спектры поглощения стекла Р-50, содержащего 1 вес.% MoO_3.

В принципе, спектр ЭПР Мо в фосфатном стекле должен иметь сложную форму, обусловленную тем, что у Мо существует несколько стабильных изотопов, из них два ^{95}Mo и ^{97}Mo имеют ядерный магнитный момент (спин ядра равен I = 5/2), взаимодействие с которым неспаренного электрона Мо приводит к появлению сверхтонкой структуры. Из всех валентных форм Мо только две, а именно Mo^{3+} и Mo^{5+} дают спектры ЭПР при комнатной температуре [1; 2]. Сигнал ЭПР Mo^{5+} виден как в коричневом, так и в зелёно-голубом образцах для стекла Р-50. Коричневое стекло получается при варке в восстановительных условиях. В нём присутствуют, по-видимому, низшие валентные формы молибдена, а также коллоидные частицы металлического Мо.

Сигнал ЭПР Mo^{5+} в коричневом образце Р-50 с природным содержанием изотопов молибдена приведён на рис. 2.

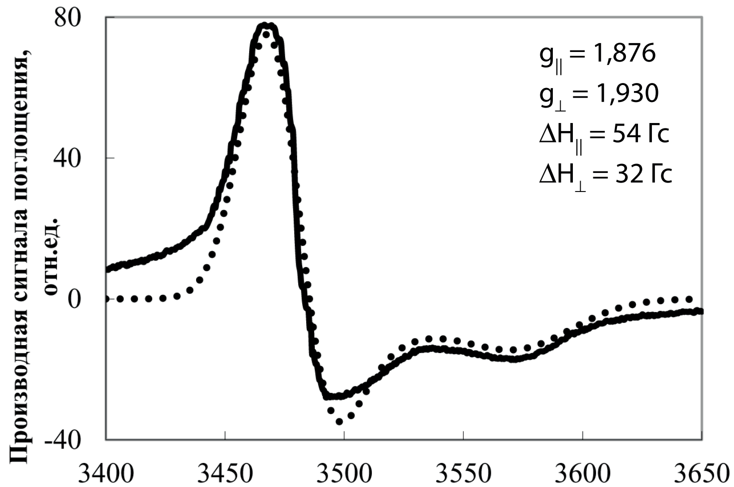

Рис. 2. Спектр ЭПР Mo^{5+} с естественным содержанием изотопов Мо в коричневом образце Р-50, содержащем 1 вес.% MoO_3 (сплошная линия – экспериментальный спектр, кружки – расчётный спектр).

Он представляет собой синглетную линию с осевой анизотропией и с параметрами $g_{||} = 1{,}879$ и $g_{\perp} = 1{,}929$. Так как содержание магнитных изотопов ^{95}Mo и ^{97}Mo составляет всего 25% от полного содержания Мо, для этого спектра характерна большая ширина линий ($\Delta H_{||} = 54$ Гс, $\Delta H_{\perp} = 32$ Гс) и, как следствие, отсутствие следов СТС. График отражает лишь аксиальную анизотропию спектра.

Большинство исследователей интерпретируют спектр Mo^{5+} в предположении аксиальной симметрии (C_{4v}), соответствующей тетрагонально сжатому октаэдру, в котором одна связь (молибденильная) много короче остальных, при этом основным состоянием иона Мо является уровень $|xy\rangle$.

На рис. 3. изображён сигнал ЭПР Mo^{5+} в зелёно-голубом образце Р-50 с природным содержанием изотопов молибдена.

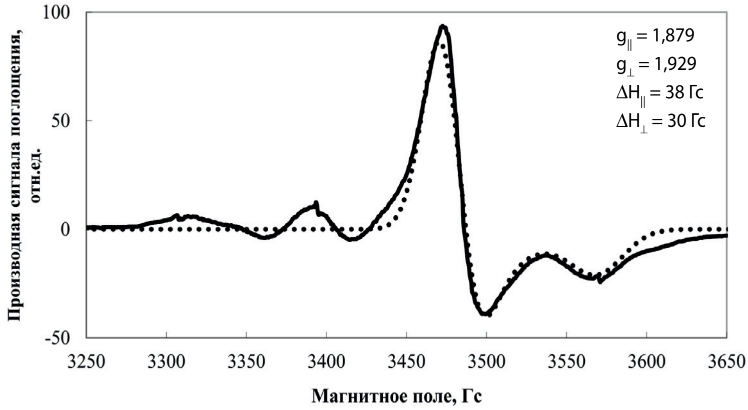

Рис. 3. Спектр ЭПР Mo^{5+} с естественным содержанием изотопов Mo в зелено-голубом образце Р-50, содержащем 1 вес.% MoO_3 (сплошная линия – экспериментальный спектр, кружки – расчётный спектр).

На этом графике слева от интенсивной синглетной линии, очень близкой по параметрам аналогичной линии в коричневом образце, но с существенно меньшей шириной, видны дополнительные линии. Их положение и форма хорошо соответствуют первым двум линиям СТС в спектре образца Р-50, имплантированном ионами $^{95}Mo^{1+}$ (см. рис. 4). Такие же следы СТС наблюдались и в коричневых образцах Р-50 с природным содержанием изотопов молибдена, выдержанных на воздухе при комнатной температуре в течение 1-го года.

На рис. 4 приведён спектр ЭПР Mo^{5+} в образце Р-50, имплантированном ионами $^{95}Mo^{1+}$.

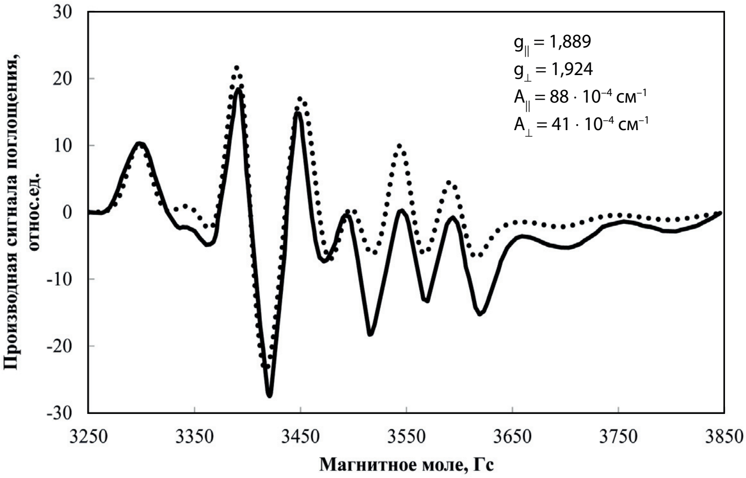

Рис. 4. Спектр ЭПР Mo^{5+} со сверхтонкой структурой в образце Р-50, имплантированном ионами $^{95}Mo^{1+}$ (сплошная линия – экспериментальный спектр, кружки – расчётный спектр).

Этот спектр со сверхтонкой структурой описывается спин-гамильтонианом:

$$\hat{\mathbf{H}} = g_{||}\beta H_z \cdot S_z + g_{\perp}\beta\,(H_x \cdot S_x + H_y \cdot S_y) + A_{||} \cdot S_z \cdot I_z + A_{\perp}\,(S_x \cdot I_x + S_y \cdot I_y),$$

где применены стандартные символы. Вполне логично приписать его имплантированным ионам ^{95}Mo. Параметры спин-гамильтониана $g_{||}$, $g_{\perp}$, $A_{||}$ и $A_{\perp}$, определённые путём моделирования экспериментального спектра по нашей программе [3] для случая двухосной анизотропии молибденового комплекса, равны:

$$S = 1/2,\ I = 5/2,\ g_{||} = 1{,}889 \pm 0{,}002;\ g_{\perp} = 1{,}924 \pm 0{,}005;\ A_{||} = (88\pm2) \cdot 10^{-4}\ \text{см}^{-1}$$
$$\text{и } A_{\perp} = (41 \pm 2) \cdot 10^{-4}\ \text{см}^{-1}.$$

Найденные значений параметров спин-гамильтониана для спектров ЭПР со сверхтонкой структурой от имплантированных ионами $^{95}Mo^{1+}$ образцов Р-50 позволяют допустить, что ионы $^{95}Mo^{5+}$ в процессе имплантации также образуют комплексы аксиальной симметрии (C_{4v}) в виде тетрагонально сжатых октаэдров.

Заключение

Установлено, что в спектрах ЭПР ионов молибдена, вводимых в шихту фосфатного стекла, содержащую 50 мол.% P_2O_5 в виде примеси 1 вес.% MO_3, доминирует синглетная резонансная линия от аксиально симметричного кислородного комплекса молибдена с параметрами: $g_{||} = 1{,}876$, $g_{\perp} = 1{,}930$. Имплантация ионов $^{95}Mo^{1+}$ ($S = 1/2$, $I = 5/2$) в это же фосфатное стекло позволила наблюдать спектр ЭПР ионов $^{95}Mo^{5+}$ со сверхтонкой структурой. Методом моделирования спектра найдены его параметры, равные: $g_{||} = 1{,}889$; $g_{\perp} = 1{,}924$; $A_{||} = 88 \cdot 10^{-4}$ см$^{-1}$ и $A_{\perp} = (41 \pm 2) \cdot 10^{-4}$ см$^{-1}$. Такие значения параметров позволяют сделать вывод, что ионы молибдена в исследованных фосфатных стёклах образуют кислородные комплексы аксиальной симметрии в виде тетрагонально сжатых октаэдров.

Статья поступила в редакцию 29.04.2018 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рядун А.А., Надолинный В.А., Павлюк А.А. Влияние фотовозбуждения на спектры ЭПР кристаллов $Li_2Zn_2(MoO_4)_3$, отожжённых в атмосфере CO_2. // Материалы XVIII Всероссийской конференции «Оптика и спектроскопия конденсированных сред». Краснодар. 2012. С. 44–47.
2. Ивановская М.И., Котиков Д.А. О структуре плёнок MoO_3, полученных электрохимическим методом // Вестник Белорусского государственного университета. Серия 2. Химия. Биология. География. 2007. № 1. С. 3–9.
3. Богомолова Л.Д., Жачкин В.А. Температурная зависимость спектральных параметров ЭПР ионов Cu^{2+} в оксидных стёклах // Вестник Московского государственного областного университета. Серия Физика-математика. 2006. № 2. С. 40–48.

REFERENCES

1. Ryadun A.A., Nadolinnyi V.A., Pavlyuk A.A. Vliyanie fotovozbuzhdeniya na spektry EPR kristallov $Li_2Zn_2(MoO_4)_3$, otozhzhonnykh v atmosfere CO_2 [Effect of photoexcitation on the ESR spectra of $Li_2Zn_2(MoO_4)_3$ crystals annealed in the CO_2 atmosphere]. In: *Materialy XVIII*

Vserossiiskoi konferentsii "Optika i spektroskopiya kondensirovannykh sred" [Proceedings of the XVIII all-Russian conference "Optics and spectroscopy of condensed matter"], Krasnodar, 2012. pp. 44–47.
2. Ivanovskaya M.I., Kotikov D.A. O strukture plenok MoO_3, poluchennykh elektrokhimicheskim metodom [On the structure of MoO_3 films obtained by an electrochemical method]. In: *Vestnik Beloruskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 2. Khimiya. Biologiya. Geografiya* [The Bulletin of Belarusian State University. Series 2. Chemistry. Biology. Geography], 2007, no. 1, pp. 3–9.
3. Bogomolova L.D., Zhachkin V.A. Temperaturnaya zavisimost' spektral'nykh parametrov EPR ionov Cu^{2+} v oksidnykh steklakh [The temperature dependence of the spectral parameters of EPR of Cu^2+ ions in oxide glasses]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya Fizika-matematika* [Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], 2006, no. 2, pp. 40–48.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Жачкин Владимир Арефьевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры общей физики Московского государственного областного университета;
e-mail: V_Zhachkin@mail.ru;

Тарасова Валентина Васильевна – кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры атомной физики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова;
e-mail: vvtarasova2012@gmail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Vladimir A. Zhachkin – Doctor in Physical and Mathematical Sciences, professor at the Department of General Physics, Moscow Region State University;
e-mail: V_Zhachkin@mail.ru;

Valentina V. Tarasova – PhD in Physical and Mathematical Sciences, assistant at the Department of Atomic Physics, Lomonosov Moscow State University;
e-mail: vvtarasova2012@gmail.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Жачкин В.А., Тарасова В.В. Электронный парамагнитный резонанс фосфатных стёкол, имплантированных ионами $^{95}Mo^{1+}$ // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2018. № 2. С. 45–50.
DOI: 10.18384/2310-7251-2018-2-45-50.

FOR CITATION

Zhachkin V.A., Tarasova V.V. Electron spin resonance of phosphate glasses implanted with $^{95}Mo^{1+}$ ions. In: *The Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics.* 2018. no. 2. pp. 45–50.
DOI: 10.18384/2310-7251-2018-2-45-50.

УДК 533.72
DOI: 10.18384-2310-7251-2018-2-51-60

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ИСПАРЕНИИ ДВУХ КАПЕЛЬ ОПЕРАТОРНЫМИ МЕТОДАМИ ДЛЯ ЛЮБЫХ РАДИУСОВ КАПЕЛЬ И ЛЮБЫХ РАССТОЯНИЙ МЕЖДУ НИМИ

Хасанов А.С.
Российский экономический университет имени Г.В. Плеханова
117997, г. Москва, Стремянный пер., д. 36, Российская Федерация

Аннотация. В данной статье задача об испарении в диффузионном режиме двух взаимодействующих крупных неподвижных аэрозольных капель с произвольными радиусами решена операторными методами при произвольных расстояниях между каплями. Приведены формулы для времени полного испарения капель и соответствующие графики, характеризующие фактор взаимодействия капель.

Ключевые слова: аэрозольные капли, испарение капель, взаимодействующие капли.

THE SOLUTION OF THE EVAPORATION PROBLEM OF TWO DROPS BY OPERATOR METHODS FOR ARBITRARY RADII OF DROPS AND ARBITRARY DISTANCES BETWEEN THEM

A. Khasanov
Plekhanov Russian University of Economics
36 Stremyanny pereulok, 117997 Moscow, Russian Federation

Abstract. The problem of evaporation of two interacting large stationary aerosol drops in diffusion mode is solved by operator methods for arbitrary radii of drops and arbitrary distances between them. Formulas for the complete evaporation time of drops are given and the corresponding graphs describing the interaction of the drops are presented.

Key words: aerosol drops, evaporation of drops, interacting drops.

Введение

Вклад различных эффектов при описании поведения испаряющихся жидких капель изучался в работах [1–3]. Задачи о сублимации твердых частиц с учетом различных эффектов были рассмотрены в работах [4–5]. В работе [6] приведено решение задачи об испарении двух капель с использованием биполярной системы координат. В работе [4] предложен операторный метод для решения класса задач о двух взаимодействующих аэрозольных частицах. Этот метод является более простым и позволяет учесть больше эффектов, чем использование биполярной системы координат. В работе [7] этим методом решена задача об испарении двух одинаковых взаимодействующих аэрозольных капель. В данной статье мы обобщаем результаты работы [7] на случай двух капель с произвольными радиусами при произвольных расстояниях между каплями.

Методы

Пусть две неподвижные капли (радиусы сферических капель могут быть существенно отличающимися) одного и того же чистого вещества находятся в бинарной газовой смеси. Первый компонент смеси состоит из молекул летучего вещества капель, а второй компонент – из молекул несущего газа. Молекулы газа на поверхностях капель не испытывают фазового перехода. Радиусы капель будем считать много большими по сравнению со средней длиной свободного пробега молекул смеси. Пусть n_1 и n_2 – численные концентрации молекул первого и второго компонентов смеси, $n_0 = n_1 + n_2$, $c_1 = n_1/n_0$, T_e – поле температуры в смеси. Будем считать, что на большом расстоянии от капель величины T_e и c_1 постоянны и равны, соответственно, значениям $T_{e\infty}$ и $c_{1\infty}$. Предполагается, что величины T_e и c_1 также удовлетворяют условиям $c_1 << 1$ и $|(T_e - T_{e\infty})/\, T_{e\infty}| << 1$.

Пусть $T_i^{(j)}$ – поле температуры внутри j-й капли, где $j \in \{1, 2\}$. Поля T_e, $T_i^{(j)}$ и c_1 описываются системой уравнений $\Delta T_e = 0$, $\Delta T_i^{(j)} = 0$, $\Delta c_1 = 0$. На поверхности j-й капли выполняются условия: $T_e = T_i^{(j)}$, $c_1 = c_{1s}\left(T_i^{(j)}\right)$, $-\kappa_e\left(\nabla T_e, \vec{e}_j\right) - L_1 m_1 n_0 D_{12}\left(\nabla c_1, \vec{e}_j\right) = -\kappa_i\left(\nabla T_i^{(j)}, \vec{e}_j\right)$, где $c_{1s}(T)$ – относительная концентрация молекул насыщенных паров вещества капель при температуре T, κ_e и D_{12} – коэффициент теплопроводности и коэффициент взаимной диффузии компонентов смеси, L_1 и m_1 – удельное тепло фазового перехода и масса молекул первого компонента, κ_i – коэффициент теплопроводности вещества капель, $\vec{e}_j$ – единичный вектор внешней нормали к поверхности j-й капли, а запись $\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$ означает скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Пусть T_{i0} – невозмущенное (другой каплей) значение температуры поверхности одиночной капли. Решение задачи об испарении одиночной капли приводит к следующему соотношению относительно T_{i0} [6]:

$$\kappa_e\left(T_{i0} - T_{e\infty}\right) + L_1 m_1 n_0 D_{12}\left(c_{1s}\left(T_{i0}\right) - c_{1\infty}\right) = 0.$$

Для величин $c_{1s}\left(T_i^{(j)}\right)$ на поверхностях капель используются следующие линеаризованные соотношения:

$$c_{1s}\left(T_i^{(j)}\right) = c_{1s}\left(T_{i0}\right) + \frac{\partial c_{1s}}{\partial T}\left(T_{i0}\right)\left(T_i^{(j)} - T_{i0}\right) \text{ на поверхности } j\text{-й капли.}$$

Пусть O_1 и O_2 – центры капель, a_1 и a_2 – радиусы капель (для определенности будем считать, что $a_1 \leq a_2$), O – середина отрезка O_1O_2, l – расстояние между центрами капель. Направления оси Oz декартовой системы координат $Oxyz$ и вектора $\overrightarrow{O_1O_2}$ совпадают. Путём параллельного переноса системы $Oxyz$ в точки O_1 и O_2 получим еще две декартовые системы координат. Пусть r_j, θ_j, φ_j – сферические координаты точки в системе координат с началом в точке O_j, а r, θ, φ – сферические координаты точки в системе координат с началом в точке O. Поля T_e, $T_i^{(j)}$ и c_1 обладают свойством осевой симметрии относительно оси Oz. Пусть P_n – многочлен Лагранжа, $P_n^{(j)} = P_n\left(cos\theta_j\right)$, $H_n^{(j)} = r_j^n P_n\left(\cos\theta_j\right)$, $H_{-n-1}^{(j)} = r_j^{-n-1}P_n\left(\cos\theta_j\right)$. Поле T_e представляется в виде $T_e = T_{e\infty} + \varepsilon^{(1)} + \varepsilon^{(2)}$, где $\varepsilon^{(j)}$ – возмущение значения $T_{e\infty}$, вызванное j-й каплей и удовлетворяющее условиям $\Delta\varepsilon^{(j)} = 0$ и $\lim\limits_{r\to\infty}\varepsilon^{(j)} = 0$. Записав каждое возмущение в виде разложения по объемно-сферическим функциям [8] в своей системе координат, получим разложение:

$$T_e = T_{e\infty} + \sum_{s=0}^{\infty} A_{es}^{(1)} H_{-s-1}^{(1)} + \sum_{n=0}^{\infty} A_{en}^{(2)} H_{-n-1}^{(2)},$$

где $A_{es}^{(1)}$, $A_{en}^{(2)}$ – неопределенные коэффициенты. Аналогично разлагается c_1

$$c_1 = c_{1\infty} + \sum_{s=0}^{\infty} A_{cs}^{(1)} H_{-s-1}^{(1)} + \sum_{n=0}^{\infty} A_{cn}^{(2)} H_{-n-1}^{(2)},$$

где $A_{cs}^{(1)}$, $A_{cn}^{(2)}$ $A_{cn}^{(2)}$ – неопределенные коэффициенты. Так как поля $T_i^{(j)}$ ограничены при $r_j \to 0$, то они представляются в следующем виде:

$T_i^{(j)} = T_{i0} + \sum\limits_{s=0}^{\infty} A_{is}^{(j)} H_s^{(j)}$, где $A_{is}^{(j)}$ – неопределенные коэффициенты.

Пусть $A_{en}^{(1)} = \left(T_{io} - T_{e\infty}\right) a_1^{n+1} x_{en}^{(1)}$, $A_{en}^{(2)} = \left(T_{io} - T_{e\infty}\right)\left(-1\right)^n a_2^{n+1} x_{en}^{(2)}$, $A_{cn}^{(1)} = \left(c_{1s}\left(T_{i0}\right) - c_{1\infty}\right) a_1^{n+1} x_{cn}^{(1)}$, $A_{cn}^{(2)} = \left(c_{1s}\left(T_{i0}\right) - c_{1\infty}\right)\left(-1\right)^n a_2^{n+1} x_{cn}^{(2)}$, $A_{in}^{(1)} = \left(T_{io} - T_{e\infty}\right) a_1^{-n} x_{in}^{(1)}$, $A_{in}^{(2)} = \left(T_{io} - T_{e\infty}\right)\left(-1\right)^n a_2^{-n} x_{in}^{(2)}$, где $x_{en}^{(j)}$, $x_{cn}^{(j)}$, $x_{in}^{(j)}$ – неопределенные коэффицнты.

При учете граничных условий на поверхности одной капли, вблизи этой капли объемно-сферические функции, записанные в сферической системе координат с началом в центре другой капли, разлагаются по объемно-сферическим функциям, записанным в сферической системе координат с началом в центре рассматриваемой капли с использованием формул [9]:

$$H_{-n-1}^{(2)} = \left(-1\right)^n \sum_{s=0}^{\infty} l^{-n-s-1} C_{n+s}^n H_s^{(1)},$$

$$H_{-n-1}^{(1)} = \sum_{s=0}^{\infty} l^{-n-s-1} C_{n+s}^n \left(-1\right)^s H_s^{(2)},$$

а в получившихся двойных суммах меняется порядок суммирования. Пусть

$X_e^{(j)} = \left(x_{e0}^{(j)}, x_{e1}^{(j)}, \ldots\right)^T$, $X_c^{(j)} = \left(x_{c0}^{(j)}, x_{c1}^{(j)}, \ldots\right)^T$, $X_i^{(j)} = \left(x_{i0}^{(j)}, x_{i1}^{(j)}, \ldots\right)^T$. Поиск этих шести векторов будем вести в пространстве $l_1 = \left\{ X \middle| X = (x_1, x_2, \ldots)^T, \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| < +\infty \right\}$ [10] операторными методами. Пространство l_1 является линейным нормированным пространством с нормой $\|X\| = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|$. Пусть $L_1^{(M)}$ – линейное пространство матриц A с бесконечным числом строк и столбцов, элементы a_{sn} которых удовлетворяют условию $\sup_n \sum_{s=1}^{\infty} |a_{sn}| < +\infty$. Это пространство является линейным нормированным пространством с нормой $\|A\| = \sup_n \sum_{s=1}^{\infty} |a_{sn}|$. В пространстве l_1 рассмотрим линейный оператор, действующий из l_1 в l_1 по формуле $Y = AX$, где $A \in L^{(\ )}$ $X \in l_1$, AX – произведение матрицы A на вектор X. Для матрицы и порожденного ею матричного оператора будем использовать одно и тоже обозначение. Можно показать, что норма матричного оператора A, согласованная с нормой вектора X, равна $\|A\| = \sup_n \sum_{s=1}^{\infty} |a_{sn}|$. Для элемента матрицы A с индексами s и n кроме стандартного обозначения a_{sn} будем использовать и обозначение $(A)_{sn}$.

Пусть координаты вектора $E_1 \in l_1$ определяются по формуле $E_1 = (1, 0, 0, \ldots)^T$, а элементы матриц $\Lambda_1 \in L_1^{(M)}$, $M_{1,2} \in L_1^{(M)}$, $M_{2,1} \in L_1^{(M)}$ определяются по формулам $(\Lambda_1)_{sn} = (s-1)/s\delta_{sn}$, $(M_{1,2})_{sn} = C_{n+s-2}^{n-1}\tau_1^{s-1}\tau_2^{n}$, $(M_{2,1})_{sn} = C_{n+s-2}^{n-1}\tau_2^{s-1}\tau_1^{n}$, где $s \geq 1$, $n \geq 1$, $\tau_1 = a_1/l$, $\tau_2 = a_2/l$, δ_{sn} – символ Кронекера. Граничные условия на поверхностях капель приводят к следующим уравнениям:

$$X_e^{(1)} + M_{1,2}X_e^{(2)} - X_i^{(1)} = E_1, \quad X_e^{(2)} + M_{2,1}X_e^{(1)} - X_i^{(2)} = E_1,$$

$$X_c^{(1)} + M_{1,2}X_c^{(2)} - \frac{\partial c_{1s}}{\partial T}(T_{i0})\frac{T_{io} - T_{e\infty}}{c_{1s}(T_{i0}) - c_{1\infty}}X_i^{(1)} = E_1,$$

$$X_c^{(2)} + M_{2,1}X_c^{(1)} - \frac{\partial c_{1s}}{\partial T}(T_{i0})\frac{T_{io} - T_{e\infty}}{c_{1s}(T_{i0}) - c_{1\infty}}X_i^{(2)} = E_1,$$

$$-X_e^{(1)} + \Lambda_1 M_{1,2}X_e^{(2)} + X_c^{(1)} - \Lambda_1 M_{1,2}X_c^{(2)} = \frac{\kappa_i}{\kappa_e}\Lambda_1 X_i^{(1)},$$

$$-X_e^{(2)} + \Lambda_1 M_{2,1}X_e^{(1)} + X_c^{(2)} - \Lambda_1 M_{2,1}X_c^{(1)} = \frac{\kappa_i}{\kappa_e}\Lambda_1 X_i^{(2)}.$$

Из этой системы следует, что

$$X_e^{(1)} = X_c^{(1)} = \left(E - M_{1,2}M_{2,1}\right)^{-1}\left(E - M_{1,2}\right)E_1, \tag{1}$$

$$X_e^{(2)} = X_c^{(2)} = \left(E - M_{2,1}M_{1,2}\right)^{-1}\left(E - M_{2,1}\right)E_1, \tag{2}$$

$$X_i^{(1)} = X_i^{(2)} = 0, \tag{3}$$

где элементы матрицы E определяются по формуле $(E)_{sn} = \delta_{sn}$, где $s \geq 1$, $n \geq 1$. Можно показать, что $||M_{1,2}M_{2,1}|| < 1$, $||M_{2,1}M_{1,2}|| < 1$, $||\Lambda_1|| = 1$, следовательно [10] $\left(E - M_{1,2}M_{2,1}\right)^{-1} \in L_1^{(M)}$, $\left(E - M_{2,1}M_{1,2}\right)^{-1} \in L_1^{(M)}$. На основе соотношений (1)–(2) поля T_e и c_1 могут быть записаны с использованием ограниченных линейных операторов и линейных функционалов, определенных в l_1. Но для нахождения времени полного испарения капель достаточно вывести формулы для величины $\dfrac{\partial c_1}{\partial r_j}$ на поверхностях капель. Пусть элементы матриц Λ_2 и Λ_3 определяются по формулам $(\Lambda_2)_{sn} = s\delta_{sn}$, $(\Lambda_3)_{sn} = (s-1)\delta_{sn}$, где $s \geq 1$, $n \geq 1$, а $P(\theta_1)$ – ограниченный линейный функционал, определенный в l_1 и равный для любого $X = (x_1, x_2, ...)^T \in l_1$. скалярному произведению векторов $(P_0(\cos\theta_1)$, $P_1(\cos\theta_1)$, $P_2(\cos\theta_1)$, $\ldots)$ и $(x_1, x_2, ...)$ Тогда на поверхности первой капли:

$$\frac{\partial c_1}{\partial r_1} = \frac{c_{1s}\left(T_{i0}\right) - c_{1\infty}}{a}\left[-P\left(\theta_1\right)\Lambda_2 X_e^{(1)} + P\left(\theta_1\right)\Lambda_3 M_{1,2}X_c^{(2)}\right] \tag{4}$$

($\Lambda_2 \overline{\in} L_1^{(M)}$, $\Lambda_3 \overline{\in} L_1^{(M)}$, но можно показать, что $\Lambda_2 X_e^{(1)} \in l_1$, $\Lambda_3 M_{1,2} X_c^{(2)} \in l_1$). На основании формулы (4) можно найти в сферической системе координат с началом в центре первой капли величину первого компонента через бесконечно малый элемент ее поверхности:

$$dQ_1^{(1)} = -n_0 D_{12}\frac{\partial c_1}{\partial r_1}a_1^2 sin\theta_1 d\theta_1 d\varphi_1. \tag{5}$$

Из формулы (5) можно вывести формулу для потока $Q_1^{(1)}$ первого компонента через поверхность первой капли:

$$Q_1^{(1)} = 4\pi n_0 D_{12} a_1 (c_{1s}\left(T_{i0}\right) - c_{1\infty}) E_1^T \left(E - M_{1,2}M_{2,1}\right)^{-1}\left(E - M_{1,2}\right)E_1. \tag{6}$$

Аналогично можно вывести формулу для потока $Q_1^{(2)}$ первого компонента через поверхность второй капли:

$$Q_1^{(2)} = 4\pi n_0 D_{12} a_2 (c_{1s}\left(T_{i0}\right) - c_{1\infty}) E_1^T \left(E - M_{2,1}M_{1,2}\right)^{-1}\left(E - M_{2,1}\right)E_1. \tag{7}$$

Имея дело с достаточно малыми аэрозольными каплями, мы можем пренебречь временами релаксаций полей температур и концентраций и рассматривать процесс испарения в квазистационарном приближении. Пусть радиусы капель a_1 и a_2 являются функциями, зависящими от времени t, а расстояние между центрами капель l является величиной постоянной. Для значений радиусов a_1 и a_2 момент времени $t = 0$ будем использовать обозначения $a_{1,0}$ и $a_{2,0}$. Так как $\frac{d}{dt}\left(\frac{4}{3}\pi a_1^3\rho_i\right) = -m_1 Q_1^{(1)}$, $\frac{d}{dt}\left(\frac{4}{3}\pi a_2^3\rho_i\right) = -m_1 Q_1^{(2)}$, где ρ_i – плотность вещества капель, и $a_1 = l\tau_1$, $a_2 = l\tau_2$, то получим систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\tau_1}{dt} = -\frac{m_1 n_0 D_{12}(c_{1s}(T_{i0}) - c_{1\infty})}{l^2\rho_i\tau_1} E_1^T\left(E - M_{1,2}M_{2,1}\right)^{-1}\left(E - M_{1,2}\right)E_1. \tag{8}$$

$$\frac{d\tau_2}{dt} = -\frac{m_1 n_0 D_{12}(c_{1s}(T_{i0}) - c_{1\infty})}{l^2\rho_i\tau_2} E_1^T\left(E - M_{2,1}M_{1,2}\right)^{-1}\left(E - M_{2,1}\right)E_1. \tag{9}$$

Из уравнений (8)–(9) получим дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\tau_2}{d\tau_1} = \frac{\tau_1 E_1^T\left(E - M_{2,1}M_{1,2}\right)^{-1}\left(E - M_{2,1}\right)E_1}{\tau_2 E_1^T\left(E - M_{1,2}M_{2,1}\right)^{-1}\left(E - M_{1,2}\right)E_1}. \tag{10}$$

Пусть $\tau_{1,0} = a_{1,0}/l$, $\tau_{2,0} = a_{2,0}/l$. Уравнение (10) дает возможность изучать численными методами зависимость τ_2 от τ_1 на отрезке $[0, \tau_{1,0}]$ при начальном условии $\tau_2(\tau_{1,0}) = \tau_{2,0}$ и найти значение τ_2 при значении $\tau_1 = 0$. Пусть $\tau_3 = \tau_2(0)$. Тогда $a_3 = l\tau_3$ – радиус второй (большей) капли в момент полного испарения первой капли. В данной работе при решении уравнения (10) использовался метод Рунге-Кутта четвертого порядка. При вычислении правой части уравнения (10) вместо бесконечномерных матриц $M_{1,2}$ и $M_{2,1}$ использованы их конечномерные (урезанные) аналоги, позволяющие достичь высокую точность вычислений.

Зная зависимость τ_2 от τ_1 на отрезке $[0, \tau_{1,0}]$ и значение $\tau_3 = \tau_2(0)$, можно найти время полного испарения обеих капель. Найдем сначала время испарения первой (меньшей) капли. Из уравнения (8) можно получить следующее дифференциальное уравнение с разделенными переменными:

$$dt = -\frac{\rho_i l^2}{m_1 n_0 D_{12}(c_{1s}(T_{i0}) - c_{1\infty})} \cdot \frac{\tau_1 d\tau_1}{E_1^T\left(E - M_{1,2}M_{2,1}\right)^{-1}\left(E - M_{1,2}\right)E_1}. \tag{11}$$

Пусть $t_{e,1}^{(s)}$ – время полного испарения одиночной первой капли с начальным радиусом $a_{1,0}$, а $t_e^{(1)}$ – время полного испарения этой капли с учетом взаимодействия со второй каплей с начальным радиусом $a_{2,0}$. Проинтегрировав обе части этого уравнения (11) от 0 до $t_e^{(1)}$, получим:

$$t_e^{(1)} = \frac{\rho_i a_{1,0}^2}{2m_1 n_0 D_{12}(c_{1s}(T_{i0}) - c_{1\infty})} \cdot \frac{2}{\tau_{1,0}^2}\int_0^{\tau_{1,0}} \frac{\tau_1 d\tau_1}{E_1^T\left(E - M_{1,2}M_{2,1}\right)^{-1}\left(E - M_{1,2}\right)E_1}. \tag{12}$$

Пусть $l \to +\infty$. Тогда из формулы (12) следует формула:

$$t_{e,1}^{(s)} = \frac{\rho_i a_{1,0}^2}{2m_1 n_0 D_{12}\left(c_{1s}\left(T_{i0}\right) - c_{1\infty}\right)}. \tag{13}$$

Величина

$$f_1 = \frac{2}{\tau_{1,0}^2}\int_0^{\tau_{1,0}} \frac{\tau_1 d\tau_1}{E_1^T\left(E - M_{1,2}M_{2,1}\right)^{-1}\left(E - M_{1,2}\right)E_1} \tag{14}$$

характеризует влияние второй капли на время полного испарения первой капли, так как $t_e^{(1)} = f_1 \cdot t_{e,1}^{(s)}$. При вычислении интеграла в правой части соотношения (14) нами была использована формула Симпсона.

Пусть $t_{e,2}^{(s)}$ – время полного испарения одиночной второй капли с начальным радиусом $a_{2,0}$, а $t_e^{(2)}$ – время полного испарения этой капли с учетом взаимодействия с первой каплей с начальным радиусом $a_{1,0}$. Величина $t_{e,2}^{(s)}$ может быть вычислена по формуле (13), если в эту формулу вместо величины $a_{1,0}$ подставить $a_{2,0}$:

$$t_{e,2}^{(s)} = \frac{\rho_i a_{2,0}^2}{2m_1 n_0 D_{12}\left(c_{1s}\left(T_{i0}\right) - c_{1\infty}\right)}. \tag{15}$$

Легко показать, что

$$t_e^{(2)} = t_{e,2}^{(s)}\left[f_1\left(\frac{\tau_{1,0}}{\tau_{2,0}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_3}{\tau_{2,0}}\right)^2\right]. \tag{16}$$

Таким образом, величина

$$f_2 = f_1\left(\frac{\tau_{1,0}}{\tau_{2,0}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_3}{\tau_{2,0}}\right)^2 \tag{17}$$

характеризует влияние первой капли на время полного испарения второй капли, так как $t_e^{(2)} = f_2 \cdot t_{e,2}^{(s)}$.

Анализ полученных результатов

Из соотношений (3) следует, что $T_i^{(1)} = T_i^{(2)} = T_{io}$, то есть температура внутри капель распределена однородно, температуры капель равны. При $a_1 = a_2$ из полученного решения можно вывести решение задачи об испарении двух одинаковых взаимодействующих аэрозольных капель. Расчеты поправочных коэффициентов f_1 и f_2 по формулам (14) и (17) показывают, что вторая (большая) капля может существенно увеличить время полного испарения первой (меньшей) капли, если начальные радиусы $a_{1,0}$ и $a_{2,0}$ отличаются существенно. Пусть, например, $a_{2,0} = 5a_{1,0}$. При рассмотрении двух взаимодействующих испаряющихся капель нас будут интересовать зависимость радиуса большей капли от радиуса меньшей капли в процессе испарения, значение радиуса большей капли a_3 в момент полного испарения меньшей капли и значения поправочных коэффициентов f_1 и f_2, характеризующих фактор взаимодействия капель. Для расстояния между каплями выберем два значения: $l = 10a_{1,0}$ и $l = 8a_{1,0}$. На рис. 1 представлены графики, описывающие зависимость переменного радиуса a_2 от переменного радиуса a_1 в процессе испарения двух капель. По оси x, начиная от значения $x = 1$, в сторону уменьшения отложены значения безразмерного радиуса испаряющейся первой капли $x = a_1/a_{1,0}$, а по оси y – соответствующие значения безразмерного радиуса второй капли $y = a_2/a_{1,0}$.

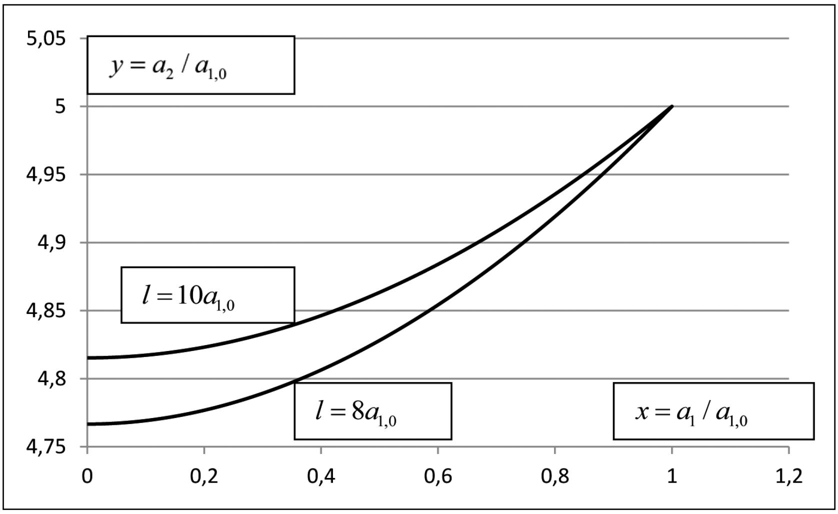

Рис. 1. Графики зависимости безразмерного радиуса второй капли $y = a_2/a_{1,0}$ от безразмерного радиуса первой капли $x = a_1/a_{1,0}$ при $a_{2,0} = 5a_{1,0}$ для значений $l = 8a_{1,0}$ и $l = 10a_{1,0}$

Вычисления приводят к следующим значениям: $a_3 = 4{,}8153a_{1,0}$, $f_1 = 1{,}8796$, $f_2 = 1{,}0027$, в случае $l = 10a_{1,0}$ и $a_3 = 4{,}7666a_{1,0}$, $f_1 = 2{,}3617$, $f_2 = 1{,}0033$, в случае $l = 8a_{1,0}$. Таким образом, вторая капля существенно влияет на время полного испарения первой капли и это влияние возрастает при сближении капель. Если радиусы капель не отличаются существенно, то такой эффект не наблюдается даже при сильном сближении капель. Например, если $a_{2,0} = 1{,}25a_{1,0}$, то $a_3 = 0{,}6161a_{1,0}$, $f_1 = 1{,}4370$, $f_2 = 1{,}1626$ даже при $l = 2{,}5a_{1,0}$.

Статья поступила в редакцию 19.04.2018 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кузьмин М.К. Теория нестационарного процесса испарения сферической аэрозольной капли с учётом зависимости давления насыщенного пара от кривизны её поверхности // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2012. № 3. С. 39–49.

2. Кузьмин М.К. Анализ формул для вычисления времени полного испарения одиночных капель воды // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2015. № 1. С. 56–63.
3. Кузьмин М.К., Хасанов А.С. Формула для вычисления времени полного испарения аэрозольных капель с учётом коэффициентов испарения и поверхностного натяжения // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2017. № 3. С. 68–75.
4. Яламов Ю.И., Хасанов А.С. Теория движения сублимирующих и взаимодействующих твёрдых сферических неоднородных аэрозольных частиц во внешних полях. Монография. Москва: ИИУ МГОУ, 2006. 221 с.
5. Яламов Ю.И., Хасанов А.С. Фотофорез крупных сублимирующих аэрозольных частиц // Теплофизика высоких температур. 2006. Т. 44. № 2. С. 293–297.
6. Щукин Е.Р., Яламов Ю.И., Шулиманова З.Л. Избранные вопросы физики аэрозолей: учебное пособие. Москва: Московский педагогический университет, 1992. 297 с.
7. Хасанов А.С. Теория испарения двух одинаковых взаимодействующих аэрозольных капель на основе теории линейных операторов // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2018. № 1. С. 82–90.
8. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 735 с.
9. Хаппель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976. 632 с.
10. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 542 с.

REFERENCES

1. Kuz'min M.K. Teoriya nestatsionarnogo protsessa ispareniya sfericheskoi aerozol'noi kapli s uchotom zavisimosti davleniya nasyshchennogo para ot krivizny ee poverkhnosti [Theory of a nonstationary process of evaporation of a spherical aerosol droplet with allowance for the dependence on the steam pressure on the curvature of its surface]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika* [Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], 2012, no. 3, pp. 39–49.
2. Kuz'min M.K. Analiz formul dlya vychisleniya vremeni polnogo ispareniya odinochnykh kapel' vody [Analysis of formulas for calculating the time of complete evaporation of single water droplets]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika* [Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], 2015, no. 1, pp. 56–63.
3. Kuz'min M.K., Khasanov A.S. Formula dlya vychisleniya vremeni polnogo ispareniya aerozol'nykh kapel' s uchotom koeffitsientov ispareniya i poverkhnostnogo natyazheniya [The formula for calculating the time of complete evaporation of the aerosol droplets with allowance for the coefficients of evaporation and surface tension]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika* [Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], 2017, no. 3, pp. 68–75.
4. Yalamov Yu.I., Khasanov A.S. *Teoriya dvizheniya sublimiruyushchikh i vzaimodeistvuyushchikh tverdykh sfericheskikh neodnorodnykh aerozol'nykh chastits vo vneshnikh polyakh* [The theory of movement of sublimating and interacting solid spherical inhomogeneous aerosol particles in external fields]. Moscow, MRSU Ed. off. Publ., 2006. 221 p.
5. Yalamov Yu.I., Khasanov A.S. Fotoforez krupnykh sublimiruyushchikh aerozol'nykh chastits [Photophoresis of large sublimating aerosol particles]. In: *Teplofizika vysokikh temperature* [High Temperature], 2006, vol. 44, no. 2, pp. 293–297.

6. Shchukin E.R., Yalamov Yu.I., Shulimanova Z.L. *Izbrannye voprosy fiziki aerozolei* [Selected topics of the physics of aerosols]. Moscow, Moscow Pedagogical University Publ., 1992. 297 p.
7. Khasanov A.S. Teoriya ispareniya dvukh odinakovykh vzaimodeystvuyushchikh aerozol'nykh kapel' na osnove teorii lineinykh operatorov [The theory of evaporation of two identical interacting drops of the aerosol based on the theory of linear operators]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika* [Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], 2018, no. 1, pp. 82–90.
8. Tikhonov A.N., Samarskii A.A. *Uravneniya matematicheskoi fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow, Nauka Publ., 1972. 735 p.
9. Happel J., Brenner H. Low Reynolds number Hydrodynamics: with special application to particulate media. Hague, Kluwer, 1983. 552 p.
10. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elementy teorii funktsii i funktsional'nogo analiza* [Elements of the theory of functions and functional analysis]. Moscow, Nauka Publ., 1976. 542 p.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Хасанов Анис Саляхович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики Российского экономического университета имени Г.В. Плеханова;
e-mail: ankhasanov@yandex.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Anis S. Khasanov – Doctor in Physical and Mathematical Sciences, professor at the Department of Higher Mathematics, Plekhanov Russian University of Economics;
e-mail: ankhasanov@yandex.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Хасанов А.С. Решение задачи об испарении двух капель операторными методами для любых радиусов капель и любых расстояний между ними // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2018. № 2. С. 51–60.
DOI: 10.18384-2310-7251-2018-2-51-60.

FOR CITATION

Khasanov A.S. The solution of the evaporation problem of two drops by operator methods for arbitrary radii of drops and arbitrary distances between them. In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*. 2018. no. 2. pp. 51–60.
DOI: 10.18384-2310-7251-2018-2-51-60.

УДК 539.2+537.226
DOI: 10.18384-2310-7251-2018-2-61-75

НЕЛИНЕЙНЫЕ КИНЕТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ ПРИ ПОЛЯРИЗАЦИИ ТВЁРДЫХ ДИЭЛЕКТРИКОВ

Калытка В.А.
Карагандинский государственный технический университет
100000, г. Караганда, бульвар Мира, д. 56, Республика Казахстан

Аннотация. Методами квазиклассической кинетической теории исследуются нелинейные кинетические явления, при поляризации протонных полупроводников и диэлектриков (ППД), в широком интервале изменения температур (1–1500 К) и полей (100 кВ/м–1000 МВ/м), в радиочастотном диапазоне (1 кГц–10 МГц). Исследуется влияние нелинейностей уравнений исходной феноменологической модели диэлектрической релаксации (в ППД – протонной релаксации) на механизм формирования объёмно-зарядовой поляризации в твёрдых диэлектриках. Из решения нелинейной системы уравнений Фоккера-Планка и Пуассона (для модели блокирующих электродов), построены рекуррентные формулы, позволяющие, в любом приближении теории возмущений, рассчитать комплексные амплитуды релаксационных мод, генерируемых на произвольных, кратных основной, частотах переменного поля. Анализируется влияние на поляризацию диэлектрика нелинейностей высокого (начиная с третьего) порядка по полю, что актуально в области сильных полей (10 МВ/м–1000 МВ/м) и сверхнизких температур (1–10 К).

Ключевые слова: протонные полупроводники и диэлектрики (ППД), методы квазиклассической кинетической теории, нелинейное кинетическое уравнение протонной релаксации и протонной проводимости, комплексные амплитуды релаксационных мод, нелинейные по полю компоненты поляризации.

NONLINEAR KINETIC PHENOMENA UNDER POLARIZATION IN SOLID DIELECTRICS

V. Kalytka
Karaganda State Technical University
bulvar Mira 56, 100000 Karaganda, Republic of Kazakhstan

Abstract. Based on the methods of quasi-classical kinetic theory we have investigated the nonlinear kinetic phenomena during polarization of proton semiconductors and dielectrics (PSCD) in a wide range of temperatures (1–1500 K) and fields (100 kV/m–1000 MV/m), as well as in the radio frequency range (1 kHz–10 MHz). The influence of nonlinearities of the equations of the initial phenomenological model of dielectric relaxation (in PSCD-proton relaxation) on the mechanism of formation of space-charge polarization in solid dielectrics is studied. Using the solution of the system of Fokker–Planck and Poisson equations (for the blocking electrodes model) we have constructed recurrence formulas, which allow one, in any approximation of perturbation theory, to calculate the complex amplitudes of the relaxation modes generated at arbitrary multiple fundamental frequencies of the variable (alternating) field. The influence of high nonlinearities (from the third order) by the polarizing field on the dielectric polarization is analyzed, which is important in the range of strong fields (10 MV/m–1000 MV/m) and ultra-low temperatures (1–10 K).

Key words: proton semiconductors and dielectrics (PSCD), methods of the quasi-classical kinetic theory, nonlinear kinetic equation of proton relaxation and proton conductivity, complex amplitudes of relaxation modes, frequency harmonics of polarization, polarization components nonlinear due to the polarizing field.

Введение

Аналитическое исследование *нелинейной* релаксационной поляризации является актуальным для электрофизики и электротехники прикладным научным направлением, позволяющим, в широком диапазоне напряженностей поляризующего поля (100 кВ/м–1000 МВ/м) и температур (1–1500 К), выявить закономерности поведения спектров токов термостимулированной поляризации и диэлектрических потерь в материалах класса протонных полупроводников и диэлектриков (ППД) [1–4]. Особый интерес представляет область *аномально высоких нелинейностей*, проявляющихся в ППД в диапазоне сверхнизких (гелиевых) температур (1–10 К) в области слабых полей (100 кВ/м–1000 кВ/м) и сверхвысоких температур (550–1500 К) в области сильных полей (10 МВ/м–1000 МВ/м) [1]. Условия такого типа можно определить как экстремальные для работы разнородных функциональных элементов технологических схем электротехнических (контрольно-измерительных, электронно-вычислительных и др.) и силовых (изоляционные покрытия токоотводящих элементов электрогенераторов и трансформаторов ТЭС) установок и систем [3].

Научно-практическая значимость нелинейных элементов на основе ППД более детально освещена в [1] и относится к космическим технологиям, нанотехнологиям, технике высоких напряжений и альтернативной энергетике [2–6].

В [1] выполнен детальный анализ влияния параметров источника напряжения (амплитуда, частота ЭДС), температуры и толщины диэлектрика на свойства спектров *комплексной диэлектрической проницаемости* (КДП) $\hat{\varepsilon}^{(\omega)}(T)$ для ППД. Теоретически обнаружены нелинейные поляризационные эффекты, проявляющиеся в виде *взаимодействия релаксационных мод*, на основной частоте поля ω [3].

Физико-математическая модель нелинейной релаксационной поляризации. Постановка задачи исследования

В [3] получены *нелинейные*, с точностью до кубического члена (по малому параметру γ [3]), решения квазиклассического кинетического уравнения, совместно с уравнением Пуассона, для модели блокирующих электродов. Методом математической индукции в бесконечном приближении теории возмущений на основной частоте ω вычислена частотная гармоника поляризации $P^{(\omega)}(t)$ [3], построены и детально исследованы *нелинейные* частотно-температурные спектры КДП [1]. При этом следующую за $P^{(\omega)}(t)$ гармонику поляризации $P^{(3\omega)}(t)$, кратную частоте 3ω, по методологии [1; 3], рассчитать уже не удаётся.

Цель данной работы, в продолжение работ [1–3], сводится к разработке *обобщённых (для любого приближения теории возмущений)* методов *аналитического* исследования влияния *нелинейностей кинетических уравнений* исходной *феноменологической модели* [3] на механизм формирования *объёмно-зарядового распределения* в кристаллах с водородными связями (КВС). Развиваемая нами модель формально будет применима к описанию *нелинейных поляризационных* кинетических явлений и в других твёрдых диэлектриках, схожих с КВС по типу структуры кристаллической решётки и по механизму *ионной проводимости*, в основном, для случая диффузионного переноса *слабосвязанных ионов (при энергиях активации* $U_0 \approx (0{,}01 \div 1)$ *эВ)* по местам закрепления (состояниям равновесия) в электрическом поле. В отличие от [1; 3], расчет k-ой компоненты объёмной плотности заряда $\rho_k(\xi;\tau)$ будет проводиться из *рекуррентного выражения,* пригодного *в любом приближении теории возмущений*, а результаты [1; 3] будут рассматриваться как частные случаи *обобщённого метода*.

Поскольку для КВС, условие $\varsigma_0 = \dfrac{qE_0a}{k_BT} < 1$ работает практически во всём теоретическом диапазоне изменения параметров E_0, T, условие $\gamma = \dfrac{\varsigma_0 W^{(1)}}{W^{(0)}} < 1$, с учётом $\dfrac{W^{(1)}}{W^{(0)}} \le 1$ [1], выполняется для любого набора параметров релаксаторов U_0, N_0, ν_0, δ_0, задействованных в объёмно-зарядовой поляризации. Здесь: E_0 – модуль напряжённости переменного электрического поля; a – параметр кристаллической решетки; q– заряд иона (в КВС – протона) [1]; U_0 – энергия активации (высота потенциального барьера); δ_0 – ширина потенциального барьера; ν_0 –частота собственных колебаний релаксатора (иона) в потенциальной яме; N_0 – равновесная концентрация релаксаторов [4].

Для КВС влияние температуры на механизм релаксационного движения ионов водорода (протонов) отражено в кинетических коэффициентах $W^{(l)}(U_0, \delta_0, \nu_0, T)$, вычисляемых в l-приближении теории возмущений, с учётом как термически активируемых (классических), так и туннельных (квантовых) переходов протонов [4]:

$$W^{(l)}(T) = \frac{\nu_0}{2}\left(\exp(-X) + \left\langle D^{(l)}\right\rangle\right), \ \left\langle D^{(l)}\right\rangle = \frac{\Lambda^l \exp(-\Lambda) - X^l \exp(-X)}{X^{l-1}(X-\Lambda)}. \qquad (1)$$

где $X = \dfrac{U_0}{k_BT}$, $\Lambda = \dfrac{\pi\delta_0\sqrt{mU_0}}{\eta\sqrt{2}}$, m – масса протона [4].

Исследования нелинейного кинетического уравнения

Феноменологическая модель диффузионного переноса ионов в диэлектрике (в КВС – протонов) в поляризующем электрическом поле строится на основании системы *нелинейных* уравнений типа Фоккера-Планка и Пуассона (выражения (11), (14) из [3]):

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \rho}{\partial \xi^2} - \theta\rho - \gamma \frac{\partial}{\partial \xi}(\rho z), \tag{2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \xi} = \varphi\rho, \tag{3}$$

с учётом начальных и граничных условий [3]:

$$\rho(\xi, 0) = 0, \tag{4}$$

$$\left.\frac{\partial \rho}{\partial \xi}\right|_{\xi=\left\{0;\frac{d}{a}\right\}} = \gamma(N_0 + \rho) z\Big|_{\xi=\left\{0;\frac{d}{a}\right\}}, \tag{5}$$

$$\int_0^{d/a} z(\xi;\tau) d\xi = \frac{d}{a} \exp\left(\frac{i\omega}{W^{(0)}}\tau\right). \tag{6}$$

В (2)–(6) приняты обозначения: $\rho(\xi;\tau) = N(x;t) - N_0$ есть концентрация *ионов,* избыточная над их равновесной концентрацией N_0; $z(\xi;\tau) = \frac{E(x;t)}{E_0}$, $\xi = \frac{x}{a}$ – безразмерная координата, $\tau = W^{(0)}t$ – безразмерное время; $\gamma = \frac{\mu_{mob}^{(1)} a E_0}{D_{diff}^{(0)}}$ – малый параметр теории возмущений; $D_{diff}^{(0)} = a^2 W^{(0)}$, $\mu_{mob}^{(1)} = \frac{q a^2 W^{(1)}}{k_B T}$ – коэффициенты диффузии и подвижности для протонов [1]; $\theta = \varphi\gamma N_0$, $\varphi = \frac{aq}{\varepsilon_0 \varepsilon_\infty E_0}$, ε_∞ – высокочастотная диэлектрическая проницаемость кристалла; d-толщина диэлектрика [3].

Авторами [3] решения системы уравнений (2)–(6) строятся методами теории возмущений, с помощью степенных рядов [3]:

$$\rho(\xi;\tau) = \sum_{k=1}^{+\infty} \gamma^k \rho_k(\xi;\tau), \quad z(\xi;\tau) = \sum_{k=0}^{+\infty} \gamma^k z_k(\xi;\tau), \tag{7}$$

в третьем приближении по параметру γ. На основании функций $\rho_1(\xi;\tau)$, $\rho_2(\xi;\tau)$, $\rho_3(\xi;\tau)$ методом математической индукции в [3] построены рекуррентные формулы для расчёта релаксационных мод $\rho_k^{(\omega)}(\xi,\tau)$, $\rho_k^{(2\omega)}(\xi,\tau)$ – компонент объёмной плотности заряда $\rho(\xi;\tau)$, вычисленные в k-ом приближении теории возмущений, соответственно на частотах ω, 2ω переменного поля (выражения

(18), (19) из [3]). На этом основании вычислены первые две частотные гармоники $\rho^{(\omega)}(\xi;\tau)$ и $\rho^{(2\omega)}(\xi;\tau)$ функции $\rho(\xi;\tau)$ – выражения (20), (21) из [3] и частотные гармоники поляризации [3]:

$$P^{(\omega)}(t)=\frac{8aqN_0\gamma}{\pi^2\left(1-\frac{8\varphi N_0\Lambda_0\gamma}{\pi^2}\right)}\times\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{\sin^2\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{n^2\left(\frac{1}{\tau_n}+i\frac{\omega}{W^{(0)}}\right)}\right]\times\exp\left(\frac{i\omega\tau}{W^{(0)}}\right);\ \ P^{(2\omega)}(t)=0. \quad (8)$$

В (8) $\tau_n=\frac{\tau_{n,D}\tau_M}{\tau_{n,D}+\tau_M}$ – безразмерное время релаксации для n-ой релаксационной моды; $\tau_{n,D}=\frac{\tau_D}{n^2}$ – диффузионное время релаксации для n-ой моды, $\tau_D=\left(\frac{d}{\pi a}\right)^2$, $\tau_M=\frac{1}{\theta}=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_\infty W^{(0)}}{qN_0\mu_{mob}^{(1)}}$ – максвелловское время релаксации [3].

Коэффициент $\Lambda_0=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\sin^2\left(\frac{\pi s}{2}\right)}{s^2\left(\frac{1}{\tau_s}+i\frac{\omega}{W^{(0)}}\right)}$ [3] в дальнейшем будем определять как *параметр взаимодействия релаксационных мод* на основной частоте ω.

Попытка применить аналогичный метод к расчёту функции $\rho(\xi;\tau)$ в приближении k на частоте 3ω даёт настолько громоздкие выражения $\rho_4^{(3\omega)}(\xi,\tau)$, $\rho_5^{(3\omega)}(\xi,\tau)$ и т.д., что вывод *рекуррентной формулы* $\rho_k^{(3\omega)}(\xi,\tau)$ требует применения *принципиально нового*, более *общего*, подхода. Первым и наиболее простым членом этого ряда является выражение $\rho_3^{(3\omega)}(\xi,\tau)$, сформулированное в [3].

Перейдём к реализации *общего аналитического метода*. Тогда подстановка рядов (7) в систему (2)–(6) даёт:

$$\frac{\partial\rho_k}{\partial\tau}=\frac{\partial^2\rho_k}{\partial\xi^2}-\frac{\partial}{\partial\xi}\left(z_0\rho_{k-1}+\sum_{m=1}^{k-2}z_m\rho_{k-m-1}\right)-\theta\rho_k, \quad (9)$$

$$\frac{\partial z_k}{\partial\xi}=\varphi\rho_k, \quad (10)$$

$$\rho_k(\xi;0)=0, \quad (11)$$

$$\left.\frac{\partial\rho_k}{\partial\xi}\right|_{\xi=\left(0;\frac{d}{a}\right)}=\left[N_0z_{k-1}+z_0\rho_{k-1}+\sum_{m=1}^{k-2}z_m\rho_{k-m-1}\right]\Bigg|_{\xi=\left(0;\frac{d}{a}\right)}. \quad (12)$$

Здесь $\rho_0(\xi;\ \tau) = 0$, $z_0(\xi;\tau) = \exp\left(\frac{i\omega}{W^{(0)}}\tau\right)$ [3]. Во всех последующих приближениях:

$$\int_0^{d/a} z_k(\xi;\tau)\,d\xi = 0,\ k \geq 1 \tag{13}$$

Разлагаем $\rho_k(\xi;\ \tau)$ в ряд Фурье по ортогональным функциям $\cos\left(\frac{\pi n a}{d}\xi\right)$ на отрезке $0 \leq \xi \leq \frac{d}{a}$:

$$\rho_k(\xi;\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \Re_k(n,\tau)\cdot\cos\left(\frac{\pi n a}{d}\xi\right). \tag{14}$$

Функция $\rho_{k,n}(\xi;\tau) = \Re_k(n,\tau)\cdot\cos\left(\frac{\pi n a}{d}\xi\right)$ имеет смысл релаксационной моды n-го порядка k-го приближения теории возмущений; $\Re_k(n,\tau) = \frac{2a}{d}\int_0^{d/a}\rho_k(\xi;\tau)\cos\left(\frac{\pi n a}{d}\xi\right)d\xi$ – комплексная амплитуда релаксационной моды $\rho_k(\xi;\ \tau)$. Согласно (14) перепишем (10) в виде операторного уравнения:

$$\frac{\partial\Re_k(n,\tau)}{\partial\tau} + \frac{1}{\tau_n}\Re_k(n,\tau) = \frac{2a}{d}\left\{N_0\left(z_{k-1}\Big|_{\xi=\frac{d}{a}}\cdot(-1)^n - z_{k-1}\Big|_{\xi=0}\right) - \right.$$
$$\left. -\frac{\pi n a}{d}\int_0^{d/a}\left(z_0\rho_{k-1} + \sum_{m=1}^{k-2} z_m\rho_{k-m-1}\right)\sin\left(\frac{\pi n a}{d}\xi\right)d\xi\right\}, \tag{15}$$

где $\frac{1}{\tau_n} = \frac{\pi^2 n^2 a^2}{d^2} + \theta$. Интегрируя (15) с учётом $\Re_k(n;\ 0) = 0$, получаем:

$$\Re_k(n;\tau) = \left\{-\frac{2aN_0}{d}\left(1-(-1)^n\right)\cdot\int_0^{\tau} z_{k-1}(0;\tau')\cdot\exp\left(\frac{\tau'}{\tau_n}\right)d\tau' - \right.$$
$$\left. -\frac{2a}{d}\cdot\frac{\pi n a}{d}\int_0^{\tau}\left(\int_0^{d/a}\left(z_0\rho_{k-1} + \sum_{m=1}^{k-2} z_m\rho_{k-m-1}\right)\sin\left(\frac{\pi n a}{d}\xi\right)d\xi \times \exp\left(\frac{\tau'}{\tau_n}\right)\right)d\tau'\right\}\times$$
$$\times\exp\left(-\frac{\tau}{\tau_n}\right). \tag{16}$$

Подставляя (14) в первое уравнение из (7) имеем:

$$\rho(\xi;\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\gamma^k\Re_k(n,\tau)\cdot\cos\left(\frac{\pi na}{d}\xi\right). \quad (17)$$

Представим (7) в виде:

$$\rho(\xi,\tau)=\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{k=r}^{\infty}\gamma^k\rho_k^{(r\omega)}(\xi,\tau), \quad (18)$$

Компонентами разложения (18) являются релаксационные моды k-го порядка теории возмущений $\rho_k^{(r\omega)}(\xi;\tau)$, генерируемые на частотах *rω* соответственно:

$$\rho_k^{(r\omega)}(\xi;\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}\Re_k^{(r\omega)}(n,\tau)\cdot\cos\left(\frac{\pi na}{d}\xi\right). \quad (19)$$

Выражение (19) имеет смысл суперпозиции релаксационных мод $\rho_{k,n}^{(r\omega)}(\xi;\tau)=\Re_k^{(r\omega)}(n,\tau)\cdot\cos\left(\frac{\pi na}{d}\xi\right)$ соответственно *n*-го порядка, вычисленных в

k-ом приближении теории возмущений (по малому параметру γ).

Комбинируя (18) и (19) пишем:

$$\rho(\xi,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{k=r}^{\infty}\gamma^k\Re_k^{(r\omega)}(n,\tau)\cdot\cos\left(\frac{\pi na}{d}\xi\right), \quad (20)$$

Сопоставляя (17) и (20), получаем равенство, устанавливающее связь между комплексными амплитудами вида $\Re_k(n,\tau)$ и $\Re_k^{(r\omega)}(n,\tau)$. Тогда:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\gamma^k\Re_k(n,\tau)=\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{k=r}^{\infty}\gamma^k\Re_k^{(r\omega)}(n,\tau). \quad (21)$$

На основании (18), полагая $\rho(\xi,\tau)=\sum_{r=1}^{\infty}\rho^{(r\omega)}(\xi,\tau)$, с учётом (20), получим разложение частотной гармоники номера *r* для функции ρ(ξ; τ), в степенной ряд по степеням параметра γ:

$$\rho^{(r\omega)}(\xi,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=r}^{\infty}\gamma^k\Re_k^{(r\omega)}(n,\tau)\cdot\cos\left(\frac{\pi na}{d}\xi\right). \quad (22)$$

Представив (7) в виде $\rho(\xi,\tau)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{k}\gamma^k\rho_k^{(r\omega)}(\xi,\tau)$, с учётом (19) получаем выражение $\rho(\xi,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{k}\gamma^k\Re_k^{(r\omega)}(n,\tau)\cdot\cos\left(\frac{\pi na}{d}\xi\right)$, которое, в комплексе с (17), даёт:

$$\Re_k(n,\tau)=\sum_{r=1}^{k}\Re_k^{(r\omega)}(n,\tau). \qquad (23)$$

Кратные частоте $r\omega$ комплексные амплитуды $\Re_k^{(r\omega)}(n,\tau)$ запишем в виде рекуррентной по параметрам r, $k \geq r$ формулы, построение которой будем проводить согласно (23), полагая в стационарном режиме поляризации, $\Re_k^{(r\omega)}(n,\tau)\to G_k^{(\Omega_r)}(n)\cdot\exp(ir\omega t)$, где $t=\dfrac{\tau}{W^{(0)}}$, $G_k^{(\Omega_r)}(n)$ – некоторая комплексная функция номеров n, k, вычисляемая на множестве частот $\Omega_r=\{\omega;2\omega;3\omega;...;(r-2)\omega;(r-1)\omega;r\omega\}$. Тогда из (16), с учётом (23), получаем обобщённое рекуррентное выражение:

$$\Re_k^{(r\omega)}(n,\tau)=\frac{8N_0\varphi}{\pi^2}\sum_{s=1}^{\infty}\left\{\frac{\sin^2\left(\frac{\pi s}{2}\right)\sin^2\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{s^2}\times\left[\hat{K}^{(\tau)}\left(\Re_{k-1}^{(r\omega)}(s,\tau')\right)\right]\right\}-$$

$$-\frac{4a}{d}\cdot\sum_{s=1}^{\infty}\left\{\frac{n^2\cos^2\left(\frac{\pi n}{2}\right)\sin^2\left(\frac{\pi s}{2}\right)}{n^2-s^2}\times\left[\hat{K}^{(\tau)}\left(\exp\left(i\frac{\omega}{W^{(0)}}\tau'\right)\Re_{k-1}^{((r-1)\omega)}(s,\tau')\right)\right]\right\}+$$

$$+\frac{8\varphi}{\pi^2}\sum_{m=1}^{k-2}\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{f=1}^{m}\sum_{l=1}^{\infty}\left\{\frac{n^2\cos^2\left(\frac{\pi n}{2}\right)\sin^2\left(\frac{\pi p}{2}\right)\sin^2\left(\frac{\pi l}{2}\right)}{l^2\left(n^2-p^2\right)}\times\right.$$

$$\left.\times\left[\hat{K}^{(\tau)}\left(\Re_{k-m-1}^{((r-f)\omega)}(p,\tau')\Re_m^{(f\omega)}(l,\tau')\right)\right]\right\}. \qquad (24)$$

В (24) используются интегральные операторы:

$$\hat{K}^{(\tau)}\left(\Re_{k-1}^{(r\omega)}(s,\tau')\right)=\exp\left(-\frac{\tau}{\tau_n}\right)\cdot\int_0^{\tau}\Re_{k-1}^{(r\omega)}(s,\tau')\exp\left(\frac{\tau'}{\tau_n}\right)d\tau'\to\frac{\Re_{k-1}^{(r\omega)}(s,\tau)}{\frac{1}{\tau_n}+i\left(r\frac{\omega}{W^{(0)}}\right)},$$

$$\hat{K}^{(\tau)}\left(\exp\left(i\frac{\omega}{W^{(0)}}\tau'\right)\Re_{k-1}^{((r-1)\omega)}(s,\tau')\right)=$$

$$=\exp\left(-\frac{\tau}{\tau_n}\right)\cdot\int_0^{\tau}\Re_{k-1}^{((r-1)\omega)}(s,\tau')\exp\left(\left(i\frac{\omega}{W^{(0)}}+\frac{1}{\tau_n}\right)\tau'\right)d\tau'\to$$

$$\to \frac{\Re_{k-1}^{((r-1)\omega)}(s,\tau)\cdot\exp\left(i\frac{\omega}{W^{(0)}}\tau\right)}{\frac{1}{\tau_n}+i\left(r\frac{\omega}{W^{(0)}}\right)},$$

$$\hat{K}^{(\tau)}\left(\Re_{k-m-1}^{((r-f)\omega)}(p,\tau')\Re_m^{(f\omega)}(l,\tau')\right)=$$

$$=\exp\left(-\frac{\tau}{\tau_n}\right)\cdot\int_0^\tau \Re_{k-m-1}^{((r-f)\omega)}(p,\tau')\Re_m^{(f\omega)}(l,\tau')\exp\left(\frac{\tau'}{\tau_n}\right)d\tau' \to$$

$$\to \frac{\Re_{k-m-1}^{((r-f)\omega)}(p,\tau)\Re_m^{(f\omega)}(l,\tau)}{\frac{1}{\tau_n}+i\left(r\frac{\omega}{W^{(0)}}\right)}.$$

Генерация релаксационных мод с комплексными амплитудами $\Re_k^{(\omega)}(n,\tau)$ начинается с первого порядка теории возмущений $k \ge 1$, при $r = 1$. Тогда из (24) получаем рекуррентную формулу:

$$\Re_k^{(\omega)}(n,\tau)=-\frac{4aN_0}{d}\times\left(\frac{8N_0\varphi}{\pi^2}\right)^{k-1}\times\sin^2\left(\frac{\pi n}{2}\right)\times\Lambda_0^{k-1}\times\frac{\exp\left(i\frac{\omega}{W^{(0)}}\tau\right)}{\frac{1}{\tau_n}+i\frac{\omega}{W^{(0)}}}. \quad (24.1)$$

Начиная со второго порядка теории возмущений $k \ge 2$, при $r = 2$, из (24) получаем:

$$\Re_k^{(2\omega)}(n,\tau)=(k-1)\left(\frac{4a}{d}\right)^2 n_0\left(\frac{8N_0\varphi}{\pi^2}\right)^{k-2}\times$$

$$\times\Lambda_0^{k-2}\cdot n^2\cos^2\left(\frac{\pi n}{2}\right)\times\wp_2(n)\times\frac{\exp\left(2i\frac{\omega}{W^{(0)}}\tau\right)}{\frac{1}{\tau_n}+i\left(2\frac{\omega}{W^{(0)}}\right)}, \quad (24.2)$$

где $\wp_2(n)=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\sin^2\left(\frac{\pi s}{2}\right)}{(n^2-s^2)\left(\frac{1}{\tau_s}+i\frac{\omega}{W^{(0)}}\right)}$.

Начиная с третьего порядка теории возмущений $k \ge 3$, при $r = 3$, имеем:

$$\Re_k^{(3\omega)}(n,\tau)=-\left(\frac{4a}{d}\right)^3 n_0\left(\frac{8N_0\varphi}{\pi^2}\right)^{k-3}\times$$

$$\times\left\{\frac{(k-1)(k-2)}{2}\Lambda_0^{k-3}\cdot n^2\wp_3(n)+\Lambda_1\sin^2\left(\frac{\pi n}{2}\right)\times\sum_{g=3}^{k-1}\frac{(g-1)(g-2)}{2}\Lambda_0^{g-3}\cdot\Lambda_2^{k-g-1}\right\}\times$$

$$\times\frac{\exp\left(3i\frac{\omega}{W^{(0)}}\tau\right)}{\frac{1}{\tau_n}+i\left(3\frac{\omega}{W^{(0)}}\right)}. \tag{24.3}$$

В (24.3) приняты сокращённые обозначения:

$$\wp_3(n)=\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\frac{m^2\wp_2(m)\cos^2\left(\frac{\pi m}{2}\right)\sin^2\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{\left(n^2-m^2\right)\left(\frac{1}{\tau_m}+i\left(2\frac{\omega}{W^{(0)}}\right)\right)}\right\},\quad \Lambda_1=\sum_{p=1}^{\infty}\left\{\frac{\wp_3(p)\cdot\sin^2\left(\frac{\pi p}{2}\right)}{\frac{1}{\tau_p}+i\left(3\frac{\omega}{W^{(0)}}\right)}\right\},$$

$$\Lambda_2=\sum_{p=1}^{\infty}\left\{\frac{\sin^2\left(\frac{\pi p}{2}\right)}{\frac{1}{\tau_p}+i\left(3\frac{\omega}{W^{(0)}}\right)}\right\}.$$

На основании (22), при $r = 1$, $r = 2$, с учётом (24.1), (24.2), подтверждаем выражения (20), (21) из [3].

При $r = 3$, из (22), с учётом (24.3) получаем:

$$\rho^{(3\omega)}(\xi,\tau)=-\frac{64a^3N_0\gamma^3}{d^3\left(1-\frac{8N_0\varphi\Lambda_0\gamma}{\pi^2}\right)^3}\times\sum_{n=1}^{\infty}\left\{n^2\wp_3(n)+\frac{8N_0\varphi\Lambda_1\gamma}{\pi^2}\cdot\frac{\sin^2\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{1-\frac{8N_0\varphi\Lambda_2\gamma}{\pi^2}}\right\}\times$$

$$\times\frac{\exp\left(3i\frac{\omega}{W^{(0)}}\tau\right)}{\frac{1}{\tau_n}+i\left(3\frac{\omega}{W^{(0)}}\right)}\times\cos\left(\frac{\pi na}{d}\xi\right). \tag{25}$$

Установленные из численных расчётов условия $\Xi_0=\frac{8N_0\varphi\Lambda_0\gamma}{\pi^2}<1$, $\Xi_1=\frac{8N_0\varphi\Lambda_1\gamma}{\pi^2}<<1$, $\Xi_2=\frac{8N_0\varphi\Lambda_2\gamma}{\pi^2}<<1$, позволяют упростить формулу (25):

$$\rho^{(3\omega)}(\xi,\tau)=-\frac{64a^3N_0\gamma^3}{d^3\left(1-\Xi_0\right)^3}\times\sum_{n=1}^{\infty}n^2\wp_3(n)\times\frac{\exp\left(3i\frac{\omega}{W^{(0)}}\tau\right)}{\frac{1}{\tau_n}+i\left(3\frac{\omega}{W^{(0)}}\right)}\times\cos\left(\frac{\pi na}{d}\xi\right). \tag{26}$$

Дальнейшие вычисления, при значениях параметра $r \geq 4$, во всех последующих приближениях теории возмущений $k \geq r$, с учётом условий

$\Xi_i = \dfrac{8N_0\varphi\Lambda_i\,\gamma}{\pi^2} << 1$, $\Xi_{i+1} < \Xi_i$, где $i = 1, 2, ..., r-2, r-1$, на основании (24), дают:

$$\Re_k^{(r\omega)}\left(n,\tau\right) = \left(-1\right)^r\left(\frac{4a}{d}\right)^r N_0\left(\frac{8N_0\varphi}{\pi^2}\right)^{k-r}\times$$

$$\times\,\Lambda_0^{k-r}\cdot G^{(\Omega_r)}\left(n\right)\times A_r\left(k\right)\times\frac{\exp\left(ir\dfrac{\omega}{W^{(0)}}\tau\right)}{\dfrac{1}{\tau_n}+i\left(r\dfrac{\omega}{W^{(0)}}\right)}. \qquad (27)$$

В (27) $A_r(k)$ – функция параметров k, r. В частности: $r = 1$, $A_1(k) = 1$; $r = 2$, $A_2(k) = k - 1$; $r = 3$, $A_3\left(k\right) = \dfrac{\left(k-1\right)\left(k-2\right)}{2}$. При любых значениях r выполняется равенство $\sum\limits_{k=r}^{\infty}\left[\Xi_0^{k-r}\cdot A_r\left(k\right)\right] = \dfrac{1}{\left(1-\Xi_0\right)^r}$. Комплексная функция $G^{(\Omega_r)}(n)$ строится для двух случаев. При $r = 2\lambda + 1$, где $\lambda = \{0, 1, 2, ...\}$, имеем

$$G_1^{(\Omega_r)}\left(n\right) = n^2\cdot\sin^2\left(\frac{\pi n}{2}\right)\times G_1^{(\omega_r)}\left(n\right),$$

$$G_1^{(\omega r)}\left(n\right) = \sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}...\sum_{n_{r-2}=1}^{\infty}\sum_{n_{r-1}=1}^{\infty}\left(\frac{\prod\limits_{j=2}^{r-1}n_j^2\cdot\prod\limits_{j=1}^{0,5\cdot(r-1)}\cos^2\left(\dfrac{\pi n_{2j}}{2}\right)\sin^2\left(\dfrac{\pi n_{2j-1}}{2}\right)}{\left(n^2-n_{r-1}^2\right)\prod\limits_{j=2}^{r-1}\left(n_j^2-n_{j-1}^2\right)\prod\limits_{j=1}^{r-1}\left(\dfrac{1}{\tau_{n_j}}+i\dfrac{j\omega}{W^{(0)}}\right)}\right). \qquad (27.1)$$

При $r = 2\lambda$, $\lambda = \{1, 2, ...\}$, соответственно

$$G_2^{(\Omega_r)}\left(n\right) = n^2\cdot\cos^2\left(\frac{\pi n}{2}\right)\times G_2^{(\omega r)}\left(n\right),$$

$$G_2^{(\omega r)}\left(n\right) = \sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}...\sum_{n_{r-2}=1}^{\infty}$$

$$\sum_{n_{r-1}=1}^{\infty}\left(\frac{\prod\limits_{j=2}^{r-1}n_j^2\cdot\prod\limits_{j=1}^{0,5(r-2)}\sin^2\left(\dfrac{\pi n_{2j+1}}{2}\right)\cos^2\left(\dfrac{\pi n_{2j}}{2}\right)\sin^2\left(\dfrac{\pi n_{2j-1}}{2}\right)}{\left(n^2-n_{r-1}^2\right)\prod\limits_{j=2}^{r-1}\left(n_j^2-n_{j-1}^2\right)\prod\limits_{j=1}^{r-1}\left(\dfrac{1}{\tau_{n_j}}+i\dfrac{j\omega}{W^{(0)}}\right)}\right). \qquad (27.2)$$

Подстановка (27) в (22) даёт:

$$\rho^{(r\omega)}(\xi,\tau) = \frac{4^r a^r N_0\gamma^r\left(-1\right)^r}{d^r\left(1-\Xi_0\right)^r}\times\sum_{n=1}^{\infty}G^{(\Omega_r)}\left(n\right)\times\frac{\exp\left(ir\dfrac{\omega}{W^{(0)}}\tau\right)}{\dfrac{1}{\tau_n}+i\left(r\dfrac{\omega}{W^{(0)}}\right)}\times\cos\left(\frac{\pi na}{d}\xi\right). \quad (28)$$

Выражение (28), с учётом дополнительных формул (27.1), (27.2), при значениях параметра $r = 1$, $r = 2$, совпадает с выражениями (20), (21) из [3], а в случае $r = 3$, согласуется с (25) при выполнении условий $\Xi_1 << 1$, $\Xi_2 << 1$, что можно рассматривать как критерий достоверности развиваемого в данной работе метода исследований.

Нелинейная по полю поляризация диэлектрика

Вычисление частотных гармоник поляризации [3]:

$$P^{(r\omega)}(\tau) = \frac{q}{d}\int_0^d x\rho^{(r\omega)}(\xi,\tau)dx, \qquad (29)$$

согласно (28), с учётом (27.1), (27.2), при $r = 2\lambda$, даёт $P^{(r\omega)}(\tau) = 0$, а при $r = 2\lambda + 1$, имеем:

$$P^{(r\omega)}(\tau) = \frac{2^{2r+1}a^r qN_0\gamma^r}{d^{r-1}\pi^2\left(1-\Xi_0\right)^r}\times\sum_{n=1}^{\infty}G_1^{(\omega r)}(n)\times\frac{\exp\left(ir\frac{\omega}{W^{(0)}}\tau\right)}{\frac{1}{\tau_n}+i\left(r\frac{\omega}{W^{(0)}}\right)}\times\sin^2\left(\frac{\pi n}{2}\right). \qquad (30)$$

Выражение (30), в дополнение к (8), подтверждает, что нечётные по номеру r релаксационные моды $\rho_k^{((2\lambda+1)\omega)}(\xi,\tau)$ дают ненулевой вклад в поляризацию. При этом чётные по номеру r моды $\rho_k^{(2\lambda\omega)}(\xi,\tau)$ вклад в поляризацию не вносят.

Численный расчёт по формулам (28), (30) позволит более детально, проанализировать влияние *нелинейных эффектов высокого (начиная с третьего) порядка* r по полю на поляризацию в зависимости от значений параметров U_0, N_0, ν_0, δ_0 [4] и толщины диэлектрика.

Физические условия проявления этих нелинейностей в ППД реализуются в диапазоне: сверхнизких температур (1–10 К) и слабых полей (100 кВ/м–1000 кВ/м); сверхвысоких температур (550–1500 К) и сильных полей (100 МВ/м–1000 МВ/м) [1; 2].

Дальнейшие аналитические исследования позволят с помощью формулы (30) рассчитать комплексную диэлектрическую проницаемость (КДП) с учётом нелинейностей *высокого порядка* r по полю [6]. В [1] анализ теоретических спектров КДП выполнен в приближении $r = 1$.

Область практического применения результатов данной работы, кроме электротехники и радиотехники (создание СВЧ-генераторов путём утроения частот радиодиапазона) [2; 4], также затрагивает вопросы нелинейной оптики (фемптосекундные лазеры, оптические манипуляторы света, детекторы направления падающего излучения, дифференциальные фазовые и частотные анализаторы [7–13]) и электрохимических технологий (при разработке твёрдотельных электролитов на основе протонных проводников [6; 14]).

Выводы

1. Выполнен анализ основных положений физико-математической модели *нелинейной релаксационной поляризации* в КВС [1–4]. Установлено, что существующие методы [1; 3] оказываются некорректными при попытке расчёта поляризации диэлектрика с учётом *нелинейностей высокого (начиная с третьего) порядка r* по полю.

2. Получено *обобщённое* (для любого приближения теории возмущений k) рекуррентное выражение (24) для расчёта *комплексных амплитуд* $\Re_k^{(r\omega)}(n,\tau)$ *релаксационных мод*, *генерируемых,* в стационарном режиме поляризации, на произвольной частоте $r\omega$ (19).

3. Построено рекуррентное выражение для поляризации (30), устанавливающейся в диэлектрике на частоте $r\omega$, что актуально для теоретических исследований спектров комплексной диэлектрической проницаемости (КДП) в областях *аномально высоких нелинейностей*, проявляющихся при значениях параметра $r > 3$.

Статья поступила в редакцию 17.04.2018 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Калытка В.А., Коровкин М.В., Мехтиев А.Д., Алькина А.Д. Детальный анализ нелинейных диэлектрических потерь в протонных полупроводниках и диэлектриках // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2017. № 4. С. 39–54.
2. Калытка В.А. Математическое описание нелинейной релаксационной поляризации в диэлектриках с водородными связями // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2017. Т. 23. №3. С. 71–83.
3. Калытка В.А., Баймуханов З.К., Мехтиев А.Д. Нелинейные эффекты при поляризации диэлектриков со сложной кристаллической структурой // Доклады Академии наук высшей школы Российской Федерации. 2016. № 3 (32). С. 7–21.
4. Калытка В.А., Коровкин М.В. Дисперсионные соотношения для протонной релаксации в твердых диэлектриках // Известия Вузов. Физика. 2016. Т. 59, №12. С. 150–159. at
5. Demin A.K., Dunyushkina L.A. SOFC efficiency at non standard conditions // Proceedings on the Fifth International Symposium on Solid Oxide Fuel Cells. 1997. 2–5 June, Aachen, Germany. Pennington, NJ, USA: The Electrochemical Society Inc., 1997. pp. 1349–1358.
6. Khromushin I.V., Aksenova T.I., Baykov Yu.M. Regularities of oxygen and water thermal desorption from barium cerate doped by neodymium, samarium, and gadolinium // Russian Journal of Electrochemistry. 2017. Vol. 53. No. 6. pp. 647–650.
7. Cao T, Wang S. Topological insulator metamaterials with tunable negative refractive index in the optical region // Nanoscale Research Letters. 2013. Vol. 8(526). pp. 1–8.
8. Kudyshev Zh., Reddy H., Guler U., Kildishev A.V., Shalaev V.M., Boltasseva A. Temperature-dependent optical properties of plasmonic titanium nitride thin films // ACS Photonics. 2017. Vol. 4(6). pp. 1413–1420.
9. Zhaxylyk A., Kudyshev Zh., Wells B.M., Litchinitser N.M., Podolskiy V.A. Nonlocal Effects in Transition Hyperbolic Metamaterials // ACS Photonics. 2017. Vol. 4(10). pp. 2470–2478.

10. Кулагин И.А., Ганеев Р.А., Тугушев Р.И., Ряснянский А.И., Усманов Т. Компоненты тензора нелинейных восприимчивостей третьего порядка нелинейно-оптических кристаллов KDP, DKDP и $LiNbO_3$ // Квантовая электроника. 2004. Т. 34, № 7. С. 657–662.
11. Hart S., Ren H., Wagner T., Leubner Ph., Mühlbauer M., Brüne Ch., Buhmann H., Molenkamp L.W., Yacoby A. Induced superconductivity in the quantum spin Hall edge // Nature Physics. 2014. Vol. 10. pp. 638–643.
12. Wells B.M., Zayats A.V., Podolskiy V.A. Nonlocal optics of plasmonic nanowire metamaterials // Physical Review B. 2014. Vol. 89. P. 035111 (4).
13. Ziegler J.F., Biersack J.P., Ziegler M.D., SRIM: The Stopping and Range of Ions in Matter. 2012. 398 p.
14. Хромушин И.В., Аксенова Т.И. Влияние низкоэнергетических ионов аргона на проводящие свойства YSZ // Вестник Национального ядерного центра Республики Казахстан. 2017. Вып. 1. С. 55–61.

REFERENCES

1. Kalytka V.A., Korovkin M.V., Mekhtiev A.D., Al'kina A.D. Detal'nyi analiz nelineinykh dielektricheskikh poter' v protonnykh poluprovodnikakh i dielektrikakh [A detailed analysis of nonlinear dielectric losses in proton semiconductors and dielectrics]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika* [Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], 2017, no. 4, pp. 39–54.
2. Kalytka V.A. Matematicheskoe opisanie nelineinoi relaksatsionnoi polyarizatsii v dielektrikakh s vodorodnymi svyazyami [The mathematical description of the nonlinear relaxation of polarization in dielectrics with hydrogen bonds]. In: *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya* [Vestnik of Samara University. Natural Science Series], 2017, vol. 23, no. 3, pp. 71–83.
3. Kalytka V.A., Baimukhanov Z.K., Mekhtiev A.D. Nelineinye effekty pri polyarizatsii dielektrikov so slozhnoi kristallicheskoi strukturoi [Nonlinear effects in the polarization of dielectrics with a complex crystal structure]. In: *Doklady akademii nauk vysshei shkoly Rossiiskoi Federatsii* [Proceedings of the Russian Higher School Academy of Sciences], 2016, no. 3 (32), pp. 7–21.
4. Kalytka V.A., Korovkin M.V. Dispersionnye sootnosheniya dlya protonnoi relaksatsii v tverdykh dielektrikakh [Dispersion relations for proton relaxation in solid dielectrics]. In: *Izvestiya Vuzov. Fizika* [Russian Physics Journal], 2016, vol. 59, no. 12, pp. 150–159.
5. Demin A., Denyushkina L.A. SOFC efficiency at non standard conditions. In: *Proceedings on the Fifth International Symposium on Solid Oxide Fuel Cells. 1997. 2–5 June. Aachen*, *Germany*. Pennington, NJ, USA, The Electrochemical Society Inc. Publ., 1997. pp. 1349–1358.
6. Khromushin I.V., Aksenova T.I., Baykov Yu.M. Regularities of oxygen and water thermal desorption from barium cerate doped by neodymium, samarium, and gadolinium. In: *Russian Journal of Electrochemistry*, 2017, vol. 53, no. 6, pp. 647–650.
7. Cao T, Wang S. Topological insulator metamaterials with tunable negative refractive index in the optical region. In: *Nanoscale Research Letters*, 2013, vol. 8(526), pp. 1–8.
8. Kudyshev Zh., Reddy H., Guler U., Kildishev A.V., Shalaev V.M., Boltasseva A. Temperature-dependent optical properties of plasmonic titanium nitride thin films. In: *ACS Photonics*, 2017, vol. 4(6), pp. 1413–1420.
9. Zhaxylyk A. Kudyshev Zh., Wells B.M., Litchinitser N.M., Podolskiy V.A. Nonlocal Effects in Transition Hyperbolic Metamaterials. In: *ACS Photonics*, 2017, vol. 4(10), pp. 2470–2478.

10. Kulagin I.A., Ganeev R.A., Tugushev R.I., Ryasnyanskii A.I., Usmanov T. Komponenty tenzora nelineynykh vospriimchivostei tret'yego poryadka nelineyno-opticheskikh kristallov KDP, DKDP i $LiNbO_3$ [Components of the third-order nonlinear susceptibility tensors in KDP, DKDP and $LiNbO_3$ nonlinear optical crystals]. In: *Kvantovaya elektronika* [Quantum Electronics], 2004, vol. 34, no. 7, pp. 657–662.
11. Hart S., Ren H., Wagner T., Leubner Ph., Mühlbauer M., Brüne Ch., Buhmann H., Molenkamp L.W., Yacoby A. Induced superconductivity in the quantum spin Hall edge. In: *Nature Physics*, 2014, vol. 10, pp. 638–643.
12. Wells B.M., Zayats A.V., Podolskiy V.A. Nonlocal optics of plasmonic nanowire metamaterials. In: *Physical Review* B, 2014, vol. 89, P. 035111(4).
13. Ziegler J.F., Biersack J.P., Ziegler M.D. *SRIM: The Stopping and Range of Ions in Matter*. 2012. 398 p.
14. Khromushin I.V., Aksenova T.I. Vliyanie nizkoenergeticheskikh ionov argona na provodyashchie svoystva YSZ [Influence of low energy argon ions on the conductive properties of YSZ]. In: *Vestnik Natsional'nogo yadernogo tsentra Respubliki Kazakhstan* [Bulletin of National nuclear center of the Republic of Kazakhstan. 2017], 2017, iss. 1, pp. 55–61.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Калытка Валерий Александрович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры энергетических систем Карагандинского государственного технического университета;
e-mail: kalytka@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Valerii A. Kalytka – PhD in Physical and Mathematical Sciences, associate professor at the Department of Power Systems, Karaganda State Technical University;
e-mail: kalytka@mail.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Калытка В.А Нелинейные кинетические явления при поляризации твёрдых диэлектриков // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2018. № 2. С. 61–75.
DOI: 10.18384/2310-7251-2018-2-61-75.

FOR CITATION

Kalytka V.A. Nonlinear kinetic phenomena under polarization in solid dielectrics. In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics.* 2018. no. 2. pp. 61–75.
DOI: 10.18384/2310-7251-2018-2-61-75.

УДК 539.23+539.216.1+537.311.31
DOI: 10.18384/2310-7251-2018-2-76-81

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ПФАФФА И РАВНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Галканов А.Г., Харитонов К.Е.
Государственный гуманитарно-технологический университет
164010, Московская обл., г. Орехово-Зуево, ул. Зелёная, д. 22, Российская Федерация

Аннотация. В рамках существующих моделей кинематики доказан критерий равномерности движения материальной точки. Рассмотрено уравнение Пфаффа в полных дифференциалах. Показано, что при определенных условиях его можно назвать уравнением равномерного движения материальной точки. Приведён пример.

Ключевые слова: уравнение Пфаффа, уравнение в полных дифференциалах, равномерное движение, уравнение равномерного движения материальной точки.

PFAFFIAN DIFFERENTIAL EQUATION AND UNIFORM MOVEMENT OF A MATERIAL POINT

A. Galkanov, K. Kharitonov
State University of Humanities and Technology
ul. Zelenaya 22, 164010 Orekhovo-Zuyevo, Moscow Region, Russian Federation

Abstract. In the framework of existing models of kinematics, the criterion for a uniform motion of a material point is proved. The Pfaffian equation in total differentials is considered. It is shown that under certain conditions it can be called the equation of a uniform motion of a material point. An example is provided.

Key words: Pfaffian equation, equation in complete differentials, uniform motion, equation of uniform motion of a material point.

Движение материальных тел с учетом действия на них различных сил было приведено в работах [1–5]. В данной статье рассматривается абстрактная задача в целом математического содержания, главной целью которой является последующее приложение представленных в ней результатов к конкретным физическим вопросам. Приводится детальный разбор кинематики материальной точки в условиях невесомости и демонстрация того, как «работает» предлагаемый метод описания поверхностей движения благодаря уравнению Пфаффа, к которому, в конечном итоге, приводит необходимое для этого условие ортогональности радиус-вектора материальной точки и ее скорости. Пренебрежение в работе силой тяжести и другими силами вовсе не означает, что их роль не важна и их не стоит принимать во внимание. Эта задача будет предметом нашего отдельного исследования.

Пусть $\vec{r}(M), \vec{v}(M), \vec{u}(M)$ – перемещение, скорость и ускорение материальной точки M соответственно, $r(M)$, $v(M)$, $u(M)$ – их модули, t_0 – начальный момент времени, $T = (t_0; +\infty)$ – временной промежуток, (..., ...) – знак скалярного умножения векторов, $\vec{v}(t)=\vec{r}'(t)$ – скорость как производная от перемещения по времени, $\vec{u}(t)=\vec{v}'(t)$ – ускорение как производная от скорости по времени. И пусть траекторией движения точки M является гладкая линия L, т.е.

$$L:\begin{cases} x=x(t), y=y(t), z=z(t), \\ \quad t\in T=(t_0;+\infty), \end{cases} \tag{1}$$

где параметр t принимается за время.

Теорема 1 (критерий равномерности движения). Ортогональность скорости и ускорения точки M на промежутке T необходима и достаточна для равномерности движения этой точки на этом промежутке по траектории L.

Доказательство. По определению движение точки равномерно, если модуль её скорости есть постоянная величина. Имеем:

$$v=c_1=const\Leftrightarrow v^2=c_2=const\Leftrightarrow (v^2)'=0\Leftrightarrow(\vec{v},\vec{v})'=$$
$$=0\Leftrightarrow 2(\vec{v},\vec{v}')=0\Leftrightarrow(\vec{v},\vec{u})=0\Leftrightarrow \vec{v}\perp\vec{u}.$$

Пусть $G\subseteq E^3$, где E^3 – трёхмерное евклидово пространство. В области G рассмотрим уравнение Пфаффа [6; 7]

$$p(x,y,z)dx+q(x,y,z)dy+r(x,y,z)dz=0, \tag{2}$$

где $p(x, y, z)$, $q(x, y, z)$, $r(x, y, z)$ – непрерывные функции в области G.

По аналогии с уравнением в полных дифференциалах:

$$\begin{cases} p(x,y)dx+q(x,y)dy=0, \\ \exists\varphi(x,y)\in D(X):\varphi_x=p(x,y),\varphi_y=q(x,y), X\subseteq R^2 \end{cases}$$

уравнение Пфаффа естественно назвать уравнением в полных дифференциалах в области G, если в этой области существует дифференцируемая функция $\varphi(x, y, z)$, такая, что в каждой точке области G выполняются условия:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\varphi_x=p(x,y,z),\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\varphi_y=q(x,y,z),\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\varphi_z=r(x,y,z), \tag{3}$$

где $D(G)$ – множество дифференцируемых функций в области G.

Пусть уравнение Пфаффа (2) является уравнением в полных дифференциалах в области G. Тогда $\sigma:\varphi(x, y, z) = c$ есть однопараметрическое семейство интегральных поверхностей уравнения Пфаффа. Если вектор $\vec{u}=p(x,y,z)\vec{e}_1+q(x,y,z)\vec{e}_2+r(x,y,z)\vec{e}_3$ есть ускорение точки M, движущейся по гладкой линии (1), то векторное поле U вектора ускорения $\vec{u}$ будет потенциальным полем с потенциальной функцией $\varphi(x, y, z)$, где $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ – ортонормальный базис.

Теорема 2. Линия L является траекторией равномерного движения точки M в потенциальном поле U вектора ускорения $\vec{u}$ тогда и только тогда, когда она лежит на интегральной поверхности σ уравнения в полных дифференциалах (2).

Доказательство. Применяя теорему 1, с учётом $d\vec{r} = dx\vec{e}_1 + dy\vec{e}_2 + +dz\vec{e}_3$ для всех $t \in T$ имеем:

$$\begin{cases} \left[\left(\vec{u},\vec{v}\right)=0\right]\Big|_L, \\ \exists\varphi\left(x,y,z\right):\vec{u}=grad\varphi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\left(\vec{u},\vec{r}'\right)=0\right]\Big|_L, \\ \exists\varphi\left(x,y,z\right):\vec{u}=grad\varphi \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\left(\vec{u},\vec{r}'dt\right)=0\right]\Big|_L, \\ \exists\varphi\left(x,y,z\right):\vec{u}=grad\varphi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\left(\vec{u},d\vec{r}\right)=0\right]\Big|_L, \\ \exists\varphi\left(x,y,z\right):\vec{u}=grad\varphi \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p\left(x,y,z\right)dx+q\left(x,y,z\right)dy+r\left(x,y,z\right)dz\Big|_L=0, \\ \exists\varphi\left(x,y,z\right):\varphi_x=p\left(x,y,z\right),\varphi_y=q\left(x,y,z\right),\varphi_z=r\left(x,y,z\right) \end{cases} \Leftrightarrow L\subset\sigma.$$

Теорема 2 даёт основание ввести понятие дифференциального уравнения равномерного движения точки M.

Определение. Уравнение в полных дифференциалах (2) называется дифференциальным уравнением равномерного движения точки M в потенциальном поле U вектора ускорения $\vec{u} = p\vec{e}_1 + q\vec{e}_2 + r\vec{e}_3$, где $p(x, y, z)$, $q(x, y, z)$, $r(x, y, z)$.

Пример. Полагая в (2) $p = x$, $q = y$, $r = z$, получим уравнение Пфаффа вида $xdx + ydy + zdz = 0$. Оно является уравнением в полных дифференциалах и поле U вектора ускорения $\vec{u} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$ есть потенциальное поле. Найдем потенциальную функцию $\varphi(x, y, z)$ поля U. С учётом того, что $\varphi_x = x$, $\varphi_y = y$, $\varphi_z = z$, имеем:

$$\frac{\partial\varphi\left(x,y,z\right)}{\partial x}=x\Rightarrow\varphi\left(x,y,z\right)=\int xdx+\psi_1\left(y,z\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\varphi\left(x,y,z\right)=\frac{x^2}{2}+\psi_1\left(y,z\right);$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi\left(x,y,z\right)}{\partial y}=y, \\ \dfrac{\partial\varphi\left(x,y,z\right)}{\partial y}=\dfrac{\partial\psi_1\left(y,z\right)}{\partial y} \end{cases} \Rightarrow\frac{\partial\psi_1\left(y,z\right)}{\partial y}=y\Rightarrow\psi_1\left(y,z\right)=\frac{y^2}{2}+\psi_2\left(z\right);$$

$$\varphi\left(x,y,z\right)=\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+\psi_2\left(z\right);$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi(x,y,z)}{\partial z} = z, \\ \dfrac{\partial\varphi(x,y,z)}{\partial z} = \dfrac{\partial\psi_2(z)}{\partial z} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial\psi_2(z)}{\partial z} = z \Rightarrow \psi_2(z) = \frac{z^2}{2} + c_1;$$

$$\varphi(x,y,z) = \frac{x^2+y^2+z^2}{2} + c_1.$$

Следовательно, семейство интегральных поверхностей данного уравнения представляет собой концентрические сферы $\sigma{:}x^2 + y^2 + z^2 = c^2$ радиуса c. И, согласно теореме 2, всякая линия L, лежащая на этой сфере, является траекторией равномерного движения точки M. Так, например, в любой момент времени $t \in T$ линия

$$L: \begin{cases} x = c\sin\omega_1 t\sin\omega_2 t, y = c\sin\omega_1 t\cos\omega_2 t, z = c\cos\omega_1 t, \\ 0 \le \omega_1 t \le \pi, 0 \le \omega_2 t \le 2\pi \end{cases}$$

лежит на сфере σ, где ω_1, ω_2 – угловые скорости по зениту и по азимуту соответственно. Модуль скорости точки M равен $v = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = c = \text{const}$, то есть линия L – траектория равномерного движения точки M.

Таким образом, на основании полученных результатов можно заключить следующее:

– впервые составлено дифференциальное уравнение, которое обоснованно названо дифференциальным уравнением равномерного движения материальной точки, которое является принципиально новым результатом;

– показано, что именно в потенциальном поле ускорения равномерное движение материальной точки моделируется уравнением Пфаффа, что также является принципиально новым результатом;

– апробация дифференциального уравнения равномерного движения показана на примере движения материальной точки по пространственной траектории на сфере.

Статья поступила в редакцию 24.04.2018 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Наука. 1989. 472 с.
2. Гладков С.О., Богданова С.Б. Геометрический фазовый переход в задаче о брахистохроне // Ученые записки физического факультета МГУ. 2016. № 1. С. 161101 (1–6).
3. Гладков С.О., Богданова С.Б. Обобщенные динамические уравнения плоского криволинейного движения материального тела по желобу с учетом сил трения (их численный анализ в некоторых частных случаях) // Ученые записки физического факультета МГУ. 2017. № 1. С. 171101 (1–5).
4. Гладков С.О., Богданова С.Б. К теории движения шарика по вращающейся брахистохроне с учетом сил трения // Ученые записки физического факультета МГУ. 2017. № 2. С. 172101 (1–6).

5. Гладков С.О., Богданова С.Б. Аналитическое и численное решение задачи о брахистохроне в некоторых общих случаях // Итоги науки и техники. Серия «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры». 2018. Т. 145. С. 114–122.
6. Математическая энциклопедия / гл. ред. И.М. Виноградов. М.: Советская Энциклопедия. 1984. Т. 4. 775 с.
7. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы. 1950. 473 с.

REFERENCES

1. Arnol'd V.I. *Matematicheskie metody klassicheskoi mekhaniki* [Mathematical methods of classical mechanics]. Moscow, Nauka Publ., 1989. 472 p.
2. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. Geometricheskii fazovyi perekhod v zadache o brakhistokhrone [Geometric phase transition in the brachistochrone problem]. In: *Uchenye zapiski fizicheskogo fakul'teta MGU* [Memoirs of the Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University], 2016, no. 1. P. 161101 (1–6).
3. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. Obobshchennye dinamicheskie uravneniya ploskogo krivolineinogo dvizheniya material'nogo tela po zhelobu s uchetom sil treniya (ikh chislennyi analiz v nekotorykh chastnykh sluchayakh) [Generalized dynamical equations for the plane curvilinear motion of a material body along a groove with allowance for friction forces (their numerical analysis in some special cases)]. In: *Uchenye zapiski fizicheskogo fa-kul'teta MGU* [Memoirs of the Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University], 2017, no. 1, P. 171101 (1–5).
4. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. K teorii dvizheniya sharika po vrashchayushcheisya brakhistokhrone s uchetom sil treniya [To the theory of motion of a ball along a rotating brachistochrone with allowance for friction forces]. In: *Uchenye zapiski fizicheskogo fakul'teta MGU* [Memoirs of the Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University], 2017, no. 2, P. 172101 (1–6).
5. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. Analiticheskoe i chislennoe reshenie zadachi o brakhistokhrone v nekotorykh obshchikh sluchayakh [Analytic and numerical solution of the problem of brachistochrone in some general cases]. In: *Itogi nauki i tekhniki. Seria "Sovremennaya matematika i ee prilozheniya. Tematicheskie obzory"* [Journal of Mathematical Sciences], 2018, vol. 145, pp. 114–122.
6. Vinogradov I.M., chief ed. *Matematicheskaya entsiklopediya* [Mathematical encyclopedia]. Moscow, Sovetskaya Entsiklopediya Publ., 1984. Vol. 4. 775 p.
7. Stepanov V.V. *Kurs differentsial'nykh uravnenii* [Course of differential equations]. Mosciw, State. publishing house of theoretical technical literature, 1950. 473 p.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Галканов Аллаберди Галканович – кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой математики и физики Государственного гуманитарно-технологического университета;
e-mail: agalkanov@yandex.ru;

Харитонов Кирилл Евгеньевич – аспирант кафедры математики и физики Государственного гуманитарно-технологического университета;
e-mail: kirillharitonov1@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Allaberdi G. Galkanov – PhD in Technical Sciences, associate professor, head of the Department of Mathematics and Physics, State University of Humanities and Technology;
e-mail: agalkanov@yandex.ru;

Kirill E. Kharitonov – postgraduate student at the Department of Mathematics and Physics, State University of Humanities and Technology;
e-mail: kirillharitonov1@mail.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Галканов А.Г., Харитонов К.Е. Дифференциальное уравнение Пфаффа и равномерное движение материальной точки // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2018. № 2. С. 76–81.
DOI: 10.18384/2310-7251-2018-2-76-81.

FOR CITATION

Galkanov A.G., Kharitonov K.E. Pfaffian differential equation and uniform movement of a material point. In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*. 2018. no. 2. pp. 76–81.
DOI: 10.18384/2310-7251-2018-2-76-81.

УДК 533.72
DOI: 10.18384-2310-7251-2018-2-82-93

К ВОПРОСУ О ВЫМЫВАНИИ ЛЕТУЧИХ УМЕРЕННО КРУПНЫХ АЭРОЗОЛЬНЫХ ЧАСТИЦ ИСПАРЯЮЩИМИСЯ КАПЛЯМИ ПРИ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА И ПЕКЛЕ МНОГО МЕНЬШИХ ЕДИНИЦЫ

Чаусова О.В.
Технологический университет
141070 Московская область, г. Королев, ул. Гагарина, д. 42, Российская Федерация

Аннотация. Настоящая работа посвящена изучению вопросов вымывания умеренно крупных летучих аэрозольных капель из атмосферы. Вычислено время полной очистки заданного объёма от аэрозольных частиц. Построен график зависимости времени очистки от радиусов капель. Показано, что существует такой радиус капель, при котором время очистки минимально. Исследована зависимость времени очистки от коэффициента испарения капель.

Ключевые слова: умеренно-крупные аэрозольные частицы; вымывание; время очистки заданного объема от аэрозольных частиц.

TO THE PROBLEM OF WASHING FLYING MODERATELY LARGE AEROSOL PARTICLES BY EVAPORATING DROPS WITH REYNOLDS AND PECLET NUMBERS MUCH LESS THAN UNITY

O. Chausova
University of Technology
42 Gagarina str, 141070 Korolev, Moscow region, Russian Federation

Annotation. The paper studies the washing of moderately large evaporative aerosol drops from the atmosphere. The time for complete purification of a given volume from aerosol particles is calculated. A graph of the dependence of the cleaning time on the droplet radius is plotted. It is shown that there exists a radius of drops at which the cleaning time is minimal. The dependence of the time of complete purification on the evaporation coefficient of droplets is found.

Key words: moderately large aerosol particles; washing away; cleaning time of a given volume of aerosol particles.

Данная работа посвящена математическому описанию механизма очистки атмосферы от аэрозольных загрязнений путём вымывания умеренно крупными каплями. Хорошо известно, что мелкодисперсный аэрозоль (пыли, дымы, туманы) вреден для здоровья, прежде всего тем, что он не задерживается в верхних дыхательных путях, а проникает глубоко в лёгкие, раздражает слизистые оболочки, способствует развитию аллергических реакций, заболеваний дыхательных путей, отравлений. Основными источниками аэрозольных выбросов являются ТЭС, металлургические, цементные, сажевые, магнезитовые предприятия. Кроме регулярных отходов производства, на заводах возможны техногенные катастрофы с выбросом аэрозоля [1–2]. Поэтому в настоящее время особое внимание уделяется экологической безопасности промышленных объектов, установке очистительных сооружений различной конструкции.

Одним из эффективных способов локализации загрязнения является механизм вымывания взвешенного аэрозоля более крупными по размерам каплями [3–5]. Целью настоящей работы является вычисление времени полной очистки заданного объёма от аэрозоля, а также анализ получившихся зависимостей от радиусов и коэффициента испарения частиц. Задачи работы: разработать методику математического описания процессов, происходящих в облачной атмосфере, исследовать движение умеренно крупных летучих частиц в полях температуры и концентрации.

В исследовании не рассматривается коагуляция крупных капель, считается, расстояние между вымывающими каплями много больше их радиусов, каждая капля вымывает аэрозоль независимо от других капель. В связи с этим будем рассматривать процессы, происходящие в окрестности одной капли.

Рассмотрим сферически симметричную летучую каплю радиуса R_d, которая помещается в бинарную газовую смесь. При испарении капли её размер остаётся конечным. Первым компонентом (летучим) газовой смеси будем считать молекулы вещества капли, а для второго (несущего) компонента поверхность частицы непроницаема. Из-за происходящего испарения капли вокруг неё образуются сферически симметричные распределения температуры и концентрации с градиентами $\nabla T^{(e)}$, $\nabla C_1^{(e)}$, $\nabla C_2^{(e)}$, где $T^{(e)}$– температура вне частицы, $C_1^{(e)} = \dfrac{n_1^{(e)}}{n_0^{(e)}}$, $C_2^{(e)} = \dfrac{n_2^{(e)}}{n_0^{(e)}}$ – относительные, а $n_1^{(e)}$, $n_2^{(e)}$ – численные концентрации молекул летучего и несущего компонентов соответственно; $n_0^{(e)} = n_1^{(e)} + n_2^{(e)}$. Концентрация летучего компонента мала, температурные перепады в окрестности капли невелики. Это допущение позволяет пренебрегать зависимостью коэффициентов теплопроводности $\kappa^{(e)}, \kappa^{(i)}$, вязкости $\eta^{(e)}, \eta^{(i)}$, диффузии D_{12} от температуры.

Вымываемый «вредный» аэрозоль представлен более мелкими летучими аэрозольными частицами, которые вследствие термодиффузиофоретического движения будут двигаться к вымывающей капле, либо от неё.

Числа Рейнольдса и Пекле малы:

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho UR}{\eta} << 1;\ Pe = \frac{UR}{\chi},$$

где χ – коэффициент температуропроводности.

Произведём расчёт времени очистки объёма V от аэрозольных частиц.

Задача обладает сферической симметрией, поэтому рационально проводить решение в сферической системе координат с началом в центре капли.

Температурные и концентрационные поля описываются стационарными уравнениями теплопроводности и диффузии:

$$\Delta_r T^{(e)} = 0, \Delta_r C_1^{(e)} = 0, \tag{1}$$

где $\Delta_r = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right)$ - радиальная составляющая оператора Лапласа, r – расстояние от начала координат до точки наблюдения ($r > R_d$).

На поверхности капли выполняются условия непрерывности температуры и концентрации:

$$T^{(e)} = T_0^{(e)},$$

$$C_1^{(e)} = C_{s1}^{(e)},$$

где $C_{s1}^{(e)}$ – концентрация насыщенных паров первого компонента. А на достаточно большом расстоянии от капли выполняются условия однородности (при $r \to R_v$, R_v – радиус окружающей каплю области):

$$C_1^{(e)}\Big|_{r=R_V} = C_{1\infty}^{(e)};$$

$$T^{(e)}\Big|_{r=R_V} = T_{\infty}^{(e)}.$$

Решая уравнения (1) с начальными и условиями на бесконечности получаем:

$$C_1^{(e)} = C_{1\infty}^{(e)} - \left(C_{1\infty}^{(e)} - C_{1s}^{(e)}\right)\frac{R_d}{r}, \tag{2}$$

$$T^{(e)} = T_{\infty}^{(e)} - \left(T_{\infty}^{(e)} - T_0^{(e)}\right)\frac{R_d}{r}. \tag{3}$$

Скорость движения умеренно крупных частиц представляет собой сумму скорости движения среды, термо- и диффузиофоретической скоростей:

$$U_r = U_r^{(g)} + U_r^{(T)} + U_r^{(D)}. \tag{4}$$

Скорость движения центра инерции газа рассчитывается по формуле, приведённой в [6]:

$$\vec{U}^{(g)} = -D_{12}\frac{n_0^{(e)2} m_1}{n_2^{(e)}\rho_0^{(e)}}\nabla C_1^{(e)}. \tag{5}$$

Здесь m_1 – масса молекулы первого компонента газовой смеси, $\rho_0^{(e)}$ – плотность газовой смеси.

Выражения для скоростей термо- и диффузиофореза найдены в [7]:

$$\vec{U}^{(T)}=\left(\frac{\eta_0^{(e)}}{\eta_0^{(i)}}+\frac{3C^*}{R}+\frac{3}{2}\right)^{-1}\left\{\frac{1}{T_0^{(e)}}\left(1+\frac{\beta_T}{R}\right)\left[\left(6n_2^{(e)}T_0^{(e)}K_n^{(T)}\kappa_0^{(e)}\frac{\partial C_{s1}^{(e)}}{\partial T^{(i)}}-\right.\right.\right.$$

$$-6D_{12}n_0^{(e)2}Lm_1K_T^{(T)}\frac{\partial C_{s1}^{(e)}}{\partial T^{(i)}}-3n_2^{(e)}R\left(\kappa_0^{(e)}+\kappa_0^{(i)}\frac{K_T^{(T)}}{R}\right)\Bigg)\alpha\nu-6D_{12}n_0^{(e)}\times$$

$$\times\left(\kappa_0^{(e)}+\kappa_0^{(i)}\frac{K_T^{(T)}}{R}\right)\Bigg]K_{TSl}-3D_{12}\left(1+\frac{\beta_D}{R}\right)\alpha\nu\kappa_0^{(e)}n_2^{(e)}R\frac{\partial C_{s1}^{(e)}}{\partial T^{(i)}}K_{DSl}+$$

$$+\frac{\kappa_0^{(e)}R}{\eta_0^{(i)}}\left(\alpha\nu\left(2n_2^{(e)}T_0^{(e)}K_n^{(T)}\frac{\partial C_{s1}^{(e)}}{\partial T^{(i)}}-n_2^{(e)}R\right)-2D_{12}n_0^{(e)}\right)\frac{\partial\sigma}{\partial T^{(i)}}-$$

$$\left.-\frac{2D_{12}n_0^{(e)2}m_1\alpha\nu\kappa_0^{(e)}R}{\rho_0^{(e)}}\left(\frac{\eta_0^{(e)}}{\eta_0^{(i)}}+\frac{3C^*}{R}+\frac{1}{2}\right)\frac{\partial C_{s1}^{(e)}}{\partial T^{(i)}}\right\}\frac{\nabla T^{(e)}}{\Phi},\qquad(6)$$

$$\vec{U}^{(D)}=-\left(\frac{3}{2}+\frac{3C^*}{R}+\frac{\eta_0^{(e)}}{\eta_0^{(i)}}\right)^{-1}\left\{\left[3\alpha\nu\left(D_{12}n_0^{(e)2}Lm_1R\left(1+\frac{2K_T^{(T)}}{R}\right)-\right.\right.\right.$$

$$\left.-2\kappa_0^{(e)}K_n^{(T)}T_0^{(e)}n_2^{(e)}\right)\frac{\partial C_{s1}^{(e)}}{\partial T^{(i)}}+3D_{12}n_0^{(e)}\left(2\kappa_0^{(e)}+\kappa_0^{(i)}\left(1+\frac{2K_T^{(T)}}{R}\right)\right)\Bigg]\left(1+\frac{\beta_D}{R}\right)D_{12}K_{DSl}+$$

$$+3\alpha\nu\left[D_{12}n_0^{(e)2}Lm_1R+n_2^{(e)}K_n^{(T)}T_0^{(e)}\kappa_0^{(i)}\right]\left(1+\frac{\beta_T}{R}\right)\frac{K_{TSl}}{T_0^{(e)}}+$$

$$+\frac{\alpha\nu R}{\eta_0^{(i)}}\left[n_0^{(e)2}D_{12}Lm_1R\left(1+\frac{2K_T^{(T)}}{R}\right)-2n_2^{(e)}\kappa_0^{(e)}K_n^{(T)}T_0^{(e)}\right]\frac{\partial\sigma}{\partial T^{(i)}}-$$

$$\left.-3\alpha\nu R\left(2\kappa_0^{(e)}+\kappa_0^{(i)}\left(1+\frac{2K_T^{(T)}}{R}\right)\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{3C^*}{R}+\frac{\eta_0^{(e)}}{\eta_0^{(i)}}\right)\frac{D_{12}n_0^{(e)2}m_1}{\rho_0^{(e)}}\right\}\frac{\nabla C_1^{(e)}}{Z}.\qquad(7)$$

Здесь

$$\Phi=-\left(n_2^{(e)}R\left(2\kappa_0^{(e)}+\kappa_0^{(i)}\left(1+\frac{2K_T^{(T)}}{R}\right)\right)+\right.$$

$$+2\left(D_{12}n_0^{(e)2}Lm_1R\left(1+\frac{2K_T^{(T)}}{R}\right)-2n_2^{(e)}K_n^{(T)}T_0^{(e)}\kappa_0^{(e)}\right)\frac{\partial C_{s1}^{(e)}}{\partial T^{(i)}}\Bigg)\alpha\nu-$$

$$\left.-2D_{12}n_0^{(e)}\left(2\kappa_0^{(e)}+\kappa_0^{(i)}\left(1+\frac{2K_T^{(T)}}{R}\right)\right)\right),\qquad(8)$$

$$Z=\left(n_2^{(e)}R\left(2\kappa_0^{(e)}+\kappa_0^{(i)}\left(1+\frac{2K_T^{(T)}}{R}\right)\right)+\right.$$
$$+2\left(D_{12}n_0^{(e)2}Lm_1R\left(1+\frac{2K_T^{(T)}}{R}\right)-2n_2^{(e)}K_n^{(T)}T_0^{(e)}\kappa_0^{(e)}\right)\frac{\partial C_{s1}^{(e)}}{\partial T^{(i)}}\right)\alpha\nu+$$
$$\left.+2D_{12}n_0^{(e)}\left(2\kappa_0^{(e)}+\kappa_0^{(i)}\left(1+\frac{2K_T^{(T)}}{R}\right)\right)\right). \tag{9}$$

В формулах (6)–(9) использованы следующие обозначения: C^*, K_{TSl}, K_{DSl} – коэффициенты теплового и диффузионного скольжения; β_T, β_D – величины, учитывающие кривизну поверхности; K_T^T, $K_n^{(T)}$ – коэффициенты скачков температуры, обусловленные неоднородностью по температуре и концентрации, соответственно; $C_{s1}^{(e)}$ – относительная концентрация насыщенных паров газа вблизи поверхности капли; L – удельная теплота парообразования; α – коэффициент испарения; σ – коэффициент поверхностного натяжения.

Подставляя найденные выражения (5)–(9) для скоростей в (4) найдём U_R. Выражения для радиальных компонент градиентов получаются из (2) и (3):

$$\left(\nabla_r C_1^{(e)}\right)_\infty=\left(C_{1\infty}^{(e)}-C_{1s}^{(e)}\right)\frac{R_d}{R_V^2}, \tag{10}$$

$$\left(\nabla_r T^{(e)}\right)_\infty=\left(T_\infty^{(e)}-T_0^{(e)}\right)\frac{R_d}{R_V^2}. \tag{11}$$

После упрощения запишем:

$$\vec{U}_r=-\left(\varphi_1+\varphi_2\right)\frac{R_d}{R_V^2}\vec{n}, \tag{12}$$

где $\vec{n}=\dfrac{\vec{r}}{r}$, а

$$\varphi_1=\left[\left(\frac{3}{2}+\frac{3C^*}{R}+\frac{\eta_0^{(e)}}{\eta_0^{(i)}}\right)^{-1}\left\{\left[3\alpha\nu\left(D_{12}n_0^{(e)2}Lm_1R\left(1+\frac{2K_T^{(T)}}{R}\right)-2\kappa_0^{(e)}K_n^{(T)}T_0^{(e)}n_2^{(e)}\right)\frac{\partial C_{1s}^{(e)}}{\partial T^{(i)}}+\right.\right.\right.$$
$$\left.+3D_{12}n_0^{(e)}\left(2\kappa_0^{(e)}+\kappa_0^{(i)}\left(1+\frac{2K_T^{(T)}}{R}\right)\right)\right]\left(1+\frac{\beta_D}{R}\right)D_{12}K_{DSl}+$$
$$+3\alpha\nu\left[D_{12}n_0^{(e)2}Lm_1R+n_2^{(e)}K_n^{(T)}T_0^{(e)}\kappa_0^{(i)}\right]\left(1+\frac{\beta_T}{R}\right)\frac{K_{TSl}}{T_0^{(e)}}+$$
$$+\frac{\alpha\nu R}{\eta_0^{(i)}}\left[n_0^{(e)2}D_{12}Lm_1R\left(1+\frac{2K_T^{(T)}}{R}\right)-2n_2^{(e)}\kappa_0^{(e)}K_n^{(T)}T_0^{(e)}\right]\frac{\partial\sigma}{\partial T^{(i)}}-$$

$$
-3\alpha\nu R\left(2\kappa_0^{(e)}+\kappa_0^{(i)}\left(1+\frac{2K_T^{(T)}}{R}\right)\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{3C^*}{R}+\frac{\eta_0^{(e)}}{\eta_0^{(i)}}\right)\frac{D_{12}n_0^{(e)^2}m_1}{\rho_0^{(e)}}\Bigg\}\frac{1}{Z}
$$

$$
\left.-D_{12}\frac{n_0^{(e)^2}m_1}{n_2^{(e)}\rho_0^{(e)}}\right]\left(C_{1\infty}^{(e)}-C_{1s}^{(e)}\right),
$$

$$
\varphi_2=\left(\frac{\eta_0^{(e)}}{\eta_0^{(i)}}+\frac{3C^*}{R}+\frac{3}{2}\right)^{-1}\left\{\frac{1}{T_0^{(e)}}\left(1+\frac{\beta_T}{R}\right)\left[\left(6n_2^{(e)}T_0^{(e)}K_n^{(T)}\kappa_0^{(e)}\frac{\partial C_{1s}^{(e)}}{\partial T^{(i)}}-\right.\right.\right.
$$

$$
-6D_{12}n_0^{(e)^2}Lm_1K_T^{(T)}\frac{\partial C_{1s}^{(e)}}{\partial T^{(i)}}-3n_2^{(e)}R\left(\kappa_0^{(e)}+\kappa_0^{(i)}\frac{K_T^{(T)}}{R}\right)\Bigg)\alpha\nu-6D_{12}n_0^{(e)}\times
$$

$$
\left.\times\left(\kappa_0^{(e)}+\kappa_0^{(i)}\frac{K_T^{(T)}}{R}\right)\right]K_{TSl}-3D_{12}\left(1+\frac{\beta_D}{R}\right)\alpha\nu\kappa_0^{(e)}n_2^{(e)}R\frac{\partial C_{1s}^{(e)}}{\partial T^{(i)}}K_{DSl}+
$$

$$
+\frac{\kappa_0^{(e)}R}{\eta_0^{(i)}}\left(\alpha\nu\left(2n_2^{(e)}T_0^{(e)}K_n^{(T)}\frac{\partial C_{1s}^{(e)}}{\partial T^{(i)}}-n_2^{(e)}R\right)-2D_{12}n_0^{(e)}\right)\frac{\partial\sigma}{\partial T^{(i)}}-
$$

$$
\left.-\frac{2D_{12}n_0^{(e)^2}m_1\alpha\nu\kappa_0^{(e)}R}{\rho_0^{(e)}}\left(\frac{\eta_0^{(e)}}{\eta_0^{(i)}}+\frac{3C^*}{R}+\frac{1}{2}\right)\frac{\partial C_{1s}^{(e)}}{\partial T^{(i)}}\right\}\frac{1}{\Phi}\left(T_\infty^{(e)}-T_0^{(e)}\right).
$$

Из уравнения теплового баланса определим температуру поверхности крупной капли:

$$
\left.\left(-\kappa_0^{(e)}\frac{\partial T^{(e)}}{\partial r}+\kappa_0^{(i)}\frac{\partial T^{(i)}}{\partial r}\right)\right|_{r=R_d}=Lm_1\frac{n_0^{(e)^2}m_2}{\rho_0^{(e)}}D_{12}\left.\frac{\partial C_1^{(e)}}{\partial r}\right|_{r=R_d}. \tag{13}
$$

Распределение температуры внутри капли описывается уравнением Лапласа:

$$
\Delta T^{(i)}=0.
$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$
T^{(i)}=-\frac{B_{1i}}{r}+B_{2i}.
$$

Так как температура в центре капли конечна, полагаем

$$
B_{1i}=0.
$$

Тогда

$$
T^{(i)}=B_{2i}=\mathrm{const}.
$$

Следовательно,

$$\frac{\partial T^{(i)}}{\partial r}=0. \tag{14}$$

Из решения уравнений (10), (11), (13) и (14) найдём связь между скачками температуры и концентрации:

$$T_{\infty}^{(e)}-T_0^{(e)}=\frac{Lm_1m_2n_0^{(e)2}}{\kappa_0^{(e)}\rho_0^{(e)}}D_{12}\left(C_{1s}^{(e)}-C_{1\infty}^{(e)}\right). \tag{15}$$

Рассматривая совместно (8) и (9) можно заметить, что

$$Z=-\Phi. \tag{16}$$

Выражение $\varphi_1+\varphi_2$, входящее в (12), можно записать с учётом (14) и (15):

$$\begin{gathered}
\varphi_1+\varphi_2=\left[\left(\frac{3}{2}+\frac{3C^*}{R}+\frac{\eta_0^{(e)}}{\eta_0^{(i)}}\right)^{-1}\left\{3\alpha\nu\left(D_{12}n_0^{(e)^2}Lm_1R\left(1+\frac{2K_T^{(T)}}{R}\right)-2\kappa_0^{(e)}K_n^{(T)}T_0^{(e)}n_2^{(e)}\right)\times\right.\right.\\
\left.\times\frac{\partial C_{1s}^{(e)}}{\partial T^{(i)}}+3D_{12}n_0^{(e)}\left(2\kappa_0^{(e)}+\kappa_0^{(i)}\left(1+\frac{2K_T^{(T)}}{R}\right)\right)\right]\left(1+\frac{\beta_D}{R}\right)D_{12}K_{DSl}+\\
+3\alpha\nu\left[D_{12}n_0^{(e)2}Lm_1R+n_2^{(e)}K_n^{(T)}T_0^{(e)}\kappa_0^{(i)}\right]\left(1+\frac{\beta_T}{R}\right)\frac{K_{TSl}}{T_0^{(e)}}+\\
+\frac{\alpha\nu R}{\eta_0^{(i)}}\left[n_0^{(e)^2}D_{12}Lm_1R\left(1+\frac{2K_T^{(T)}}{R}\right)-2n_2^{(e)}\kappa_0^{(e)}K_n^{(T)}T_0^{(e)}\right]\frac{\partial\sigma}{\partial T^{(i)}}-\\
\left.-3\alpha\nu R\left(2\kappa_0^{(e)}+\kappa_0^{(i)}\left(1+\frac{2K_T^{(T)}}{R}\right)\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{3C^*}{R}+\frac{\eta_0^{(e)}}{\eta_0^{(i)}}\right)\frac{D_{12}n_0^{(e)^2}m_1}{\rho_0^{(e)}}\right\}-\\
-\left(\frac{3}{2}+\frac{3C^*}{R}+\frac{\eta_0^{(e)}}{\eta_0^{(i)}}\right)ZD_{12}\frac{n_0^{(e)2}m_1}{n_2^{(e)}\rho_0^{(e)}}-\left\{\frac{1}{T_0^{(e)}}\left(1+\frac{\beta_T}{R}\right)\left[\left(6n_2^{(e)}T_0^{(e)}K_n^{(T)}\kappa_0^{(e)}\frac{\partial C_{1s}^{(e)}}{\partial T^{(i)}}-\right.\right.\right.\\
\left.-6D_{12}n_0^{(e)2}Lm_1K_T^{(T)}\frac{\partial C_{1s}^{(e)}}{\partial T^{(i)}}-3n_2^{(e)}R\left(\kappa_0^{(e)}+\kappa_0^{(i)}\frac{K_T^{(T)}}{R}\right)\right)\alpha\nu-6D_{12}n_0^{(e)}\times\\
\left.\times\left(\kappa_0^{(e)}+\kappa_0^{(i)}\frac{K_T^{(T)}}{R}\right)\right]K_{TSl}-3D_{12}\left(1+\frac{\beta_D}{R}\right)\alpha\nu\kappa_0^{(e)}n_2^{(e)}R\frac{\partial C_{1s}^{(e)}}{\partial T^{(i)}}K_{DSl}+
\end{gathered} \tag{17}$$

$$+\frac{\kappa_0^{(e)}R}{\eta_0^{(i)}}\left(\alpha\nu\left(2n_2^{(e)}T_0^{(e)}K_n^{(T)}\frac{\partial C_{1s}^{(e)}}{\partial T^{(i)}}-n_2^{(e)}R\right)-2D_{12}n_0^{(e)}\right)\frac{\partial\sigma}{\partial T^{(i)}}-$$

$$-\frac{2D_{12}n_0^{(e)2}m_1\alpha\nu\kappa_0^{(e)}R}{\rho_0^{(e)}}\left(\frac{\eta_0^{(e)}}{\eta_0^{(i)}}+\frac{3C^*}{R}+\frac{1}{2}\right)\frac{\partial C_{1s}^{(e)}}{\partial T^{(i)}}\Bigg\}\frac{Lm_1m_2n_0^{(e)2}D_{12}}{\kappa_0^{(e)}\rho_0^{(e)}}\Bigg]\frac{C_{1\infty}^{(e)}-C_{1s}^{(e)}}{Z}.$$

Формула (12) показывает направления движения аэрозольных частиц, и соответственно, определяет, какой процесс происходит – захват или вымывание, что зависит от знака суммы ($\varphi_1 + \varphi_2$). Если сумма отрицательна – происходит вымывание, если положительна – то захват.

Используя соотношение:

$$t=\int_{R_d}^{R_V}\frac{dr}{U_r}=\frac{R_V^2\left(R_V-R_d\right)}{\left(\varphi_1+\varphi_2\right)R_d},$$

найдём выражение для времени полной очистки объёма V от аэрозольных частиц. Пренебрегая значением R_d по сравнению с R_V, перепишем это выражение в виде:

$$t\approx\frac{R_V^3}{\left(\varphi_1+\varphi_2\right)R_d}. \tag{18}$$

Для примера рассмотрим паровоздушную смесь «N_2 – H_2O». Подставляем известные числовые данные [8–10] в (17):

$T_0^{(e)}=300\,\text{K}$; $\eta_0^{(e)}=1{,}79\cdot10^{-6}\,\text{Па}\cdot\text{с}$; $\eta_0^{(i)}=8{,}2\cdot10^{-4}\,\text{Па}\cdot\text{с}$; $\kappa_0^{(e)}=2{,}4\cdot10^{-2}\,\frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{K}}$;

$\kappa_0^{(i)}=5{,}9\cdot10^{-1}\,\frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{K}}$; $n_0^{(e)}=1{,}86\cdot10^{25}\,\frac{1}{\text{м}^3}$; $n_2^{(e)}=4{,}84\cdot10^{24}\,\frac{1}{\text{м}^3}$; $d_m=3{,}8\cdot10^{-8}\,\text{м}$;

$\rho_0^{(e)}=1{,}25\cdot10^{-3}\,\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$; $m_1=2{,}006\cdot10^{-27}\,\text{кг}$; $L=2{,}48\cdot10^{6}\,\frac{\text{Дж}}{\text{кг}}$; $\nu=\sqrt{\frac{kT_0^{(e)}}{2\pi m_1}}$;

$D_{12}=2{,}3\cdot10^{-5}$; $\lambda=\frac{1}{2\pi d_m^2n_0^{(e)}}$; $C^*=1{,}126\lambda$; $K_T^{(T)}=1{,}85\lambda$; $K_n^{(T)}=5{,}91\lambda$; $\beta_1=3{,}731\lambda$;

$\beta_2=1{,}5723\lambda$; $\frac{\partial C_{s1}^{(e)}}{\partial T^{(i)}}=6{,}5\cdot10^{-4}\,\frac{1}{\text{K}}$; $K_{TSl}=1{,}16$; $K_{DSL}=0{,}3$; $\frac{\partial\sigma}{\partial T^{(i)}}=-0{,}168\,\frac{\text{Н}}{\text{м}\cdot\text{K}}$.

Рассчитаем по формуле (18) время полной очистки заданного объёма при различных значениях коэффициента испарения и радиуса (см. табл. 1). В [11] указано, что радиус дождевых капель облачных систем меняется от 1 до 50мкм.

Таблица 1.

Время очистки заданного объёма при различных значениях коэффициента испарения и радиуса капель

$R_d = 10^{-5}$м					
R, мкм	***t, мин***	***t, мин***	***t, мин***	***t, мин***	***t, мин***
	$\alpha = 0$	$\alpha = 0{,}25$	$\alpha = 0{,}5$	$\alpha = 0{,}75$	$\alpha = 1$
0,2	777,8	766,3	758,7	753,3	749,8
0,4	590,3	577,3	571,7	568,2	566,2
0,6	512,3	499,7	495,3	492,5	491,2
0,8	463,7	451,3	447,5	445,7	444,7
1	428,2	416,2	413	411,7	410,8
2	322,5	313,5	312	311,5	311,2
4	226,5	220,3	219,8	219,5	219,5
6	178,7	174,2	173,8	173,7	173,8
8	149,8	146,2	146,1	146	146
10	130,9	127,8	127,7	127,6	127,7
$R_d = 2{,}5 \cdot 10^{-5}$м					
R, мкм	***t, мин***	***t, мин***	***t, мин***	***t, мин***	***t, мин***
	$\alpha = 0$	$\alpha = 0{,}25$	$\alpha = 0{,}5$	$\alpha = 0{,}75$	$\alpha = 1$
0,2	311,2	306,5	303,5	302	300
0,4	236,2	230,8	228,7	227	226,5
0,6	205	199,8	198,2	198	196,5
0,8	185,5	180,5	179	178	177,8
1	171,2	166,5	165,2	164	164
2	129	125,4	124,8	125	124,5
4	90,6	88,2	88	88,4	87,9
6	71,5	69,7	69,6	69	69,5
8	60	58,5	58,5	58,7	58,4
10	52,3	51,1	51,1	51	51,1
$R_d = 5 \cdot 10^{-5}$м					
R, мкм	***t, мин***	***t, мин***	***t, мин***	***t, мин***	***t, мин***
	$\alpha = 0$	$\alpha = 0{,}25$	$\alpha = 0{,}5$	$\alpha = 0{,}75$	$\alpha = 1$
0,2	155,6	153,3	151,7	150,7	150
0,4	118,1	115,5	114,4	113,6	113,2
0,6	102,4	100	99	98,5	98,2
0,8	92,8	90,3	89,5	89,2	89
1	85,6	83,2	82,6	82,3	82,2
2	64,5	62,7	62,4	62,3	62,3
4	45,3	44,1	44	43,9	43,9
6	35,7	34,8	34,8	34,8	34,8
8	30	29,3	29,2	29,2	29,2
10	26,2	25,6	25,5	25,5	25,5

Построим зависимость времени очистки от радиуса аэрозоля (см. рис. 1). Очистим область радиуса $R_V = 1$ см, радиус вымывающей капли $R_d = 100$ мкм, коэффициент испарения $\alpha = 0{,}5$, радиус частиц вымываемого аэрозоля $R \in (10^{-7}$ м, $5 \cdot 10^{-5}$ м$)$.

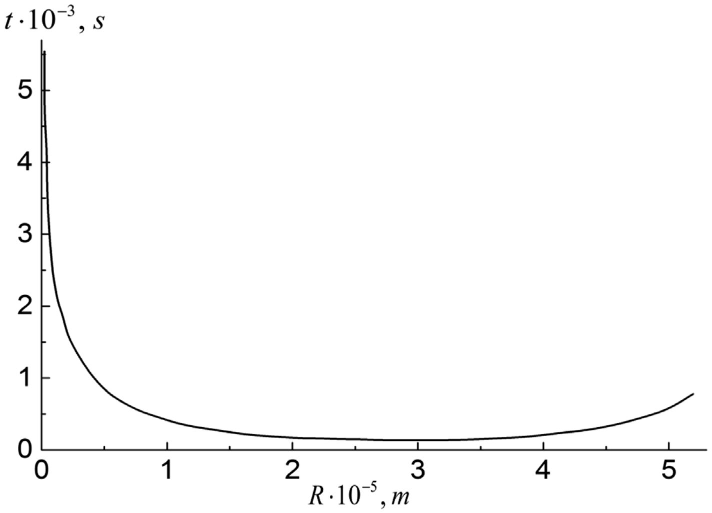

Рис. 1. График зависимости времени полной очистки заданного объема от радиуса аэрозоля

График показывает, что при определённом радиусе аэрозольных частиц время полной очистки рассматриваемого объёма минимально.

Статья поступила в редакцию 14.05.2018 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Sow M., Lemaitre P., The effect of electrostatic charges on the removal of radioactive aerosols in the atmosphere by raindrops // Journal of Physics: Conference Series. 2015. Vol. 646. P. 012011.
2. Jerabek–Willemsen M., Timon A., et al. MicroScale Thermophoresis: Interaction analysis and beyond // Journal of Molecular Structure. 2014, Vol. 1077. pp. 101–113.
3. Ruo-Yu Dong, Yi Zhou, Chun Yang, Bing-Yang Cao. Experimental study on thermophoresis of colloids in aqueous surfactant solutions // Journal of Physics: Condensed Matter. 2015. Vol. 27. No. 49. P. 495102.
4. Mirnah Binti Suardi, Mohd Azahari bin Razali, et al. Development for Thermophoresis Experimental Under Microgravity Condition // IOP Conference Series: Material Science and Engineering. 2016. Vol. 160. P. 012034.
5. Lin Li, Yongyue Jiang, Aixin Chen. Numerical simulation of nanofluids based on power–law fluids with flow and heat transfer // IOP Conference Series: Earth and Environmental Science. 2017. Vol. 61. P. 012106.
6. Яламов Г.Ю. Теория термодиффузиофореза аэрозольных частиц при прямом влиянии коэффициента испарения: дис. … канд. физ.-мат. наук. М., 2005.

7. Ставцева О.В. Термодиффузиофоретическое вымывание умеренно крупных летучих аэрозольных частиц каплями // Всероссийский институт научной и технической информации РАН. 16.07.2007. № 733. В2007. С. 12
8. Варгафтик Н.Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. М.: Наука, 1971. 720 с.
9. Физическиевеличины:Справочник/А.П. Бабичев,Н.А. Бабушкина,А.М. Братковский и др.; под ред. И.С. Григорьева, Е.З. Мейлихова. М.: Энергоатомиздат, 1991. 1232 с.
10. Галоян В.С., Яламов Ю.И. Динамика капель в неоднородных вязких средах. Ереван: Луйс, 1985. 208 с.
11. Облака и облачная атмосфера. Справочник / под ред. И.П. Мазина, А.Х. Хргиана. Ленинград. Гидрометеоиздат. 1989. 647 с.

REFERENCES

1. Sow M., Lemaitre P. The effect of electrostatic charges on the removal of radioactive aerosols in the atmosphere by raindrops. In: *Journal of Physics: Conference Series*, 2015, vol. 646, P. 012011.
2. Jerabek–Willemsen M., Timon A., et al. MicroScale Thermophoresis: Interaction analysis and beyond. In: *Journal of Molecular Structure*. 2014, vol. 1077, pp. 101-113.
3. Ruo-Yu Dong, Yi Zhou, Chun Yang, Bing-Yang Cao. Experimental study on thermophoresis of colloids in aqueous surfactant solutions. In: *Journal of Physics: Condensed Matter*, 2015, vol. 27, no. 49, P. 495102.
4. Mirnah Binti Suardi, Mohd Azahari bin Razali, et al. Development for Thermophoresis Experimental Under Microgravity Condition. In: *IOP Conference Series: Material Science and Engineering*, 2016, vol. 160, P. 012034.
5. Lin Li, Yongyue Jiang, Aixin Chen. Numerical simulation of nanofluids based on power–law fluids with flow and heat transfer. In: *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*, 2017, vol. 61, P. 012106.
6. Yalamov G.Yu. *Teoriya termodiffuzioforeza aerozol'nykh chastits pri pryamom vliyanii koeffitsienta ispareniya: dis. … kand. fiz.-mat. nauk* [Theory thermodiffusive aerosol particles in the direct influence of the evaporation coefficient: PhD thesis in Physical and Mathematical Sciences]. Moscow, 2005.
7. Stavtseva O.V. Termodiffuzioforeticheskoe vymyvanie umerenno krupnykh letuchikh aerozol'nykh chastits kaplyami [Thermodiffusion-phoretic washing of moderately large volatile aerosol particles with droplets]. In: *Vserossiiskii institut nauchnoi i tekhnicheskoi informatsii RAN* [All-Russian Institute for Scientific and Technical Information of the Russian Academy of Sciences], 16.07.2007, no. 733. B2007, pp. 12.
8. Vargaftik N.B. *Spravochnik po teplofizicheskim svoistvam gazov i zhidkostei* [Handbook on thermophysical properties of gases and liquids]. Moscow, Nauka Publ., 1971. 720 p.
9. Grigor'ev I.S., Meilikhov E.Z., ed. *Fizicheskie velichiny: Spravochnik*. [Handbook of physical quantities]. Moscow, Energoatomizdat Publ., 1991. 1232 p.
10. Galoyan V.S., Yalamov Yu.I. *Dinamika kapel' v neodnorodnykh vyazkikh sredakh* [Dynamics of droplets in an inhomogeneous viscous media]. Yerevan, Luis Publ., 1985. 208 p.
11. Mazin I.P., Khrgian A.H. *Oblaka i oblachnaya atmosfera. Spravochnik* [Clouds and cloud atmosphere. Reference book]. Leningrad. Gidrometeoizdat, 1989. 647 p.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Чаусова Ольга Владимировна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и естественнонаучных дисциплин Технологического университета;
e-mail: Chausova.ov@ut-mo.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Olga V. Chausova – PhD in Physical and Mathematical Sciences, associate professor at the Department of Mathematics and Natural Science Disciplines, University of Technology;
e-mail: Chausova.ov@ut-mo.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Чаусова О.В. К вопросу о вымывании летучих умеренно крупных аэрозольных частиц испаряющимися каплями при числах Рейнольдса и Пекле много меньших единицы // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2018. № 2. С. 82–93.
DOI: 10.18384/2310-7251-2018-2-82-93.

FOR CITATION

Chausova O.V. To the problem of washing flying moderately large aerosol particles by evaporating drops with Reynolds and Peclet numbers much less than unity. In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics.* 2018. no. 2. pp. 82–93.
DOI: 10.18384/2310-7251-2018-2-82-93.

РАЗДЕЛ II.
ТЕОРИЯ И МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ И ВОСПИТАНИЯ

УДК 372.851
DOI: 10.18384/2310-7251-2018-2-94-99

РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТАПРЕДМЕТНОГО ПОДХОДА В ОБУЧЕНИИ ГЕОМЕТРИИ

Смирнова И.М.
Московский педагогический государственный университет
119991, г. Москва, Малая Пироговская ул., д. 1, стр. 1, Москва, Российская Федерация

Аннотация. Предлагаемая статья посвящена одному из приоритетных направлений реформирования современной школы, представленному в федеральных государственных образовательных стандартах начального, основного и среднего общего образования, а именно - требованиям, которые предъявляются к результатам освоения соответствующих образовательных программ. Среди этих требований, наряду с личностными и предметными, выделены метапредметные. В статье рассматриваются аспекты метапредметных результатов на примере обучения геометрии.

Ключевые слова: метапредметный подход, метапредмет, метасодержание, метазанятие, метарезультат.

IMPLEMENTATION OF THE METASUBJECT APPROACH IN THE TEACHING OF GEOMETRY

I. Smirnova
Moscow State Pedagogical University
ul. Malaya Pirogovskaya 1, stroenie 1, 119991 Moscow, Russian Federation

Abstract. The paper is devoted to one of the priority directions of reforming the modern school, presented in the federal state educational standards of primary, basic and secondary general education, namely, the requirements that are imposed on the results of the development of relevant educational programs. These requirements, along with personal and subject ones, include requirements to metasubjects. The aspects of metasubject results are considered on the example of teaching geometry.

Key words: metasubject approach, metasubject, metacontent, metalesson, metaresult.

В современных федеральных государственных образовательных стандартах начального, основного и среднего общего образования особо выделены требования к результатам освоения соответствующих программ [4, с. 7]. Наряду с личностными и предметными, предлагаются так называемые метапредметные результаты. Рассмотрим на примере обучения геометрии, как можно конкретно оценивать метапредметные результаты обучающихся.

Понятие метапредметности является относительно новым для отечественного образования. В переводе с греческого языка «мета» (“*meta*”) означает стоящее «за», «после». Историки математики говорят о том, что впервые этот термин был использован в «Метафизике» Аристотеля (V в. до н. э.). Заметим, справедливости ради, что учёный сам назвал свой труд «Первая философия», в котором изложил основополагающие принципы, начала бытия. Название же «Метафизика», другими словами «идущая после физики», этому сочинению дал Андроник Родосский (I в. до н. э.). За прошедшее время появилось много терминов, обозначенных сложными словами, частью которых является «мета», например, металогика, метатеория, метаязык и т. д. Из всего их многообразия для обсуждаемой темы ключевыми словами являются такие: метапредмет, метасодержание, метатема, метазанятие, метарезультат.

В исследовании [5, с. 26] выделено несколько функций метапредметности, метапредметного подхода к обучению. Среди них, например, способ построения фундаментального ядра содержания, основания для предметной дифференциации содержания, принцип интеграции содержания (межпредметные связи) и т. д. Всё это очень важно для оценки планируемых и получаемых метапредметных результатов, и каждая школьная дисциплина вносит свой вклад в достижение и оценку таких результатов обучения. Рассмотрим с этой точки зрения курс геометрии, который традиционно считается одним из самых трудных школьных предметов.

Метапредметность геометрии заключается в том, что, во-первых, она нужна каждому человеку для правильного понимания окружающей нас действительности, для умения ориентироваться в ней. Это связано с тем, что в геометрии рассматривается модель трёхмерного мира. Во-вторых, она обладает метасодержанием, необходимым для пропорционального развития обоих полушарий головного мозга человека: левого, грубо говоря, – логического, и правого – наглядного. При этом широко известно, чтобы стать настоящим специалистом в любой сфере деятельности, нужно иметь хорошо развитыми оба полушария головного мозга. По образному выражению знаменитого отечественного математика А.Д. Александрова, геометрия – это «лёд и пламень». Кроме этого, геометрия сама по себе – метапредметна, так как имеет богатую историю, яркие приложения, красивые объекты.

Приведём пример. На многих известных картинах, например, Альбрехта Дюрера «Меланхолия» или Сальвадора Дали «Тайная вечеря» изображён один из правильных многогранников – правильный додекаэдр. Вопрос: «Почему художники изображают именно этот многогранник?» Объяснение, конечно, выходит за рамки школьного курса геометрии, т. е. относится к метасодержанию, в данном случае, геометрии. История очень красивая, восходящая к периоду Древней Греции. Пифагор, согласно легенде, был околдован правильными многогранниками и атомам земных стихий придавал их форму. Так, атомы огня, земли, воздуха и воды имели форму правильных, соответственно, тетраэдра, гексаэдра (куба), октаэдра и икосаэдра. Форму же пятого правильного многогранника, додекаэдра, имела вся Вселенная. Таким образом, по мнению древних, мы живём внутри большого прозрачного додекаэдра, что и было отражено многими художниками в своих произведениях. Возникает ещё один метавопрос: «Почему для Вселенной был выбран именно додекаэдр?» (Ответ вытекает из исследования построения граней названных многогранников.)

Теперь рассмотрим ещё один аспект реализации метапредметного подхода в обучении – установление межпредметных связей.

Большим успехом у школьников, как показывает наш опыт работы, пользуется межпредметное метазанятие на тему «Кристаллы – природные многогранники» [2, с. 60]. Свойства кристаллов, которые изучаются на уроках физики и химии, объясняются их геометрическим строением.

Многие формы многогранников придумал не сам человек, а их создала природа в виде кристаллов. Например, кристаллы поваренной соли имеют форму куба, кристаллы льда и горного хрусталя (кварца) напоминают отточенный с двух сторон карандаш, т. е. имеют форму шестиугольной призмы, на основания которой поставлены шестиугольные пирамиды, алмаз чаще всего встречается в виде октаэдра, иногда куба и даже кубооктаэдра.

Одним из самых привлекательных кристаллов является кристалл граната. Он имеет форму ромбододекаэдра (иногда его называют ромбоидальный, или ромбический, додекаэдр) – двенадцатигранника, гранями которого являются двенадцать равных ромбов. На нём можно продемонстрировать «лёд и пламень» геометрии. С одной стороны, из наглядных соображений следует, например, что все его двугранные углы равны 120°, противолежащие грани его четырёхгранных углов перпендикулярны, что ромбододекаэдрами можно заполнить всё пространство и т. д. С другой стороны, предлагаем учащимся построить ромбододекаэдр с помощью куба и найти: углы ромбов, которые являются его гранями; ребро; площадь поверхности; объём, если ребро соответствующего куба равно a.

Конечно, интересны и многочисленные истории о драгоценных камнях, которым приписываются таинственные силы. Считалось, что кристалл граната приносит счастье в январе. Это камень-талисман для людей, родившихся в этом месяце. С драгоценными камнями связано много увлекательных преданий. Например, А.И. Куприн в повести «Гранатовый браслет» говорит о том, что гранат имеет свойство сообщать дар предвидения носящим его женщинам и отгоняет от них тяжёлые мысли, мужчин же охраняет от насильственной смерти.

Гранаты подчёркивают необычность ситуации, неординарность поступков героев, подчёркивают чистоту и возвышенность их чувств. Тот же приём использован и в повести И.С. Тургенева «Вешние воды», где девушка дарит на память герою маленький гранатовый крестик. Часто люди, рассматривая чудесные, сверкающие, переливающиеся многогранники кристаллов, не могут поверить, что их создала природа, а не человек. Именно поэтому родилось так много удивительных народных сказаний о кристаллах.

Из приведённых примеров видно, что названная тема «Кристаллы – природные многогранники», обладает значительным метапредметным содержанием, достаточным для организации проектной деятельности обучающихся. Основам организации исследовательской деятельности, проектной деятельности посвящены многие работы (например, [1]). Такой вид учебной деятельности является и необходимым условием организации метапредметного подхода в обучении. Заметим, что результат выполненного учебного проекта является конкретным метапредметным результатом, т. е. важным результатом освоения соответствующей образовательной программы.

Ещё одной важной составной частью метапредметного подхода в обучении является организация коммуникативной деятельности учащихся. Эта деятельность понимается нами, в данном случае, как способ установления связей сотрудничества между участниками образовательного процесса. Одним из средств такого сотрудничества является традиционная устная работа. В ней особенно ярко проявляется актуальный аспект обучения – возможность развития диалоговой культуры учащихся, которая является элементом и общей культуры современного человека. Она даёт умение вести диалог с собеседником, т. е. умение общаться, убеждать, слушать его. Заметим, что это умение необходимо также для ведения диалога с компьютером. В настоящее время создаются даже школы диалоговых культур. Диалоги между людьми невозможны без постановки вопросов. В связи с этим в непосредственной оценке метапредметных результатов обучения большое внимание должно быть уделено ответам учащихся на поставленные вопросы.

Приведём в качестве примера серию вопросов для обсуждения со старшеклассниками по метатеме «Ориентация поверхности. Лист Мёбиуса».

1. Отчего зависит направление поворота, заданного на плоскости?
2. Что такое ориентация плоскости?
3. Что такое сторона поверхности?
4. Приведи примеры двусторонних поверхностей.
5. Как определяется понятие ориентации поверхности?
6. Существуют ли неориентируемые поверхности?
7. Является ли ориентируемой: а) поверхность шара; б) боковая поверхность цилиндра; в) поверхность конуса?
8. Что называется листом Мёбиуса?
9. Как иначе называется лист Мёбиуса?
10. Когда жил Август Фердинанд Мёбиус?
11. Как получить лист Мёбиуса из бумажной полоски *ABCD*?
12. Какую поверхность, помимо листа Мёбиуса, можно получить из бумажной полоски?

13. Сколько: а) краёв; б) сторон имеет лист Мёбиуса?

14. Может ли поверхность иметь два края? Приведите примеры.

15. Может ли поверхность иметь две стороны? Приведите примеры.

16. Сколько: а) краёв; б) сторон имеет тор?

17. Как практически можно определить число сторон поверхности?

18. Какое свойство используется при изготовлении ремённых передач в виде листа Мёбиуса?

19. Что получится, если лист Мёбиуса разрезать по его «средней линии»?

20. Сколько сторон имеет поверхность, полученная из листа Мёбиуса при его разрезании по «средней линии»?

(Ответы. 6. Да, лист Мёбиуса. 7. а), б), в) Да. 9. Лента Мёбиуса. 10. 1790–1868. 11. Если перед склеиванием противолежащих сторон AB и CD, одну из них повернуть на 180° и соединить точку A с точкой C, точку B с точкой D, то получим лист Мёбиуса ($AB<BC$). 12. Боковую поверхность цилиндра. 13. а) Один; б) одну. 14. Да, плоскость, сфера, тор, цилиндрическая поверхность, коническая поверхность. 15. Плоскость, сфера, тор, цилиндрическая поверхность, коническая поверхность. 16. а) Два; б) две. 17. Например, путём её закрашивания. 18. Если ремень сделать в виде листа Мёбиуса, то он будет изнашиваться вдвое медленнее, чем обычный, это объясняется тем, что в работе ремня, изготовленного в виде листа Мёбиуса, принимает участие вся поверхность, а не только внутренняя её часть, как у обычной ременной передачи. 19. Дважды перекрученная лента. 20. Две.)

Помимо отдельного дидактического момента урока, устные упражнения с успехом применяются на других его этапах. Например, для более активной проверки домашнего задания учащимся можно предложить серию специально подобранных вопросов, которые дают возможность установить наличие домашнего задания и правильность его выполнения. Причём, такая форма проверки позволяет выявить наиболее важные и характерные особенности, нюансы решения той или иной задачи. Также устные упражнения с успехом применяются при опросе учащихся, закреплении нового материала, решении задач, повторении и мн. др. [3]

Итак, выделим основные аспекты в организации метапредметного подхода в обучении, которые позволяют оценить полученные метапредметные результаты: рассмотрение метасодержания предмета, соответствующих метатем; разработка конспектов межпредметных метазанятий; организация проектной, исследовательской деятельности учащихся; организация коммуникативной деятельности школьников, одним из средств которой является проведение устной работы по предмету; разработка блоков метавопросов. Перечисленное позволит оценить реальные достижения обучающихся.

Статья поступила в редакцию 05.04.2018 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Савенков А.И. Психологические основы исследовательского подхода к обучению: учебное пособие. М.: «Ось-89», 2013. 480 с.
2. Смирнова И.М., Смирнов В.А. Многогранники. Элективный курс. 10–11 классы: учебное пособие для общеобразовательных учреждений. М.: Мнемозина, 2007. 95 с.

3. Смирнова И.М., Смирнов В.А. Устные упражнения по геометрии. 10–11 классы: учебное пособие для учащихся общеобразовательных учреждений. М.: Мнемозина, 2010. 223 с.
4. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования. 3-е изд. М.: Просвещение, 2014. 48 с.
5. Хуторской А.В. Метапредметный подход в обучении: научно-методическое пособие. М.: Издательство «Эйдос», 2012. 73 с.

REFERENCES

1. Savenkov A.I. *Psikhologicheskie osnovy issledovatel'skogo podkhoda k obucheniyu* [Psychological basis of the research approach]. Moscow, "Os'-89" Publ., 2013. 480 p.
2. Smirnova I.M., Smirnov V.A. *Mnogogranniki. Elektivnyi kurs. 10–11 klassy* [Polyhedra. The elective course. 10–11 classes]. Moscow, Mnemozina Publ., 2007. 95 p.
3. Smirnova I.M., Smirnov V.A. *Ustnye uprazhneniya po geometrii. 10–11 klassy* [Oral exercises in geometry. 10–11 classes]. Moscow, Mnemozina Publ., 2010. 223 p.
4. *Federal'nyi gosudarstvennyi obrazovatel'nyi standart osnovnogo obshchego obrazovaniya* [Federal state educational standard of basic general education]. Moscow, Prosveshchenie Publ., 2014. 48 p.
5. Khutorskoi A.V. *Metapredmetnyi podkhod v obuchenii* [The meta-subject approach in education]. Moscow, "Eidos" Publ., 2012. 73 p.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Смирнова Ирина Михайловна – доктор педагогических наук, профессор, профессор кафедры элементарной математики и методики обучения математике Московского педагогического государственного университета;
e-mail: i-m-smirnova@yandex.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Irina M. Smirnova – Doctor in Pedagogical Sciences, professor at the Department of Elementary Mathematics and Methods of Teaching Mathematics, Moscow State Pedagogical University;
e-mail: i-m-smirnova@yandex.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Смирнова И.М. Реализация метапредметного подхода в обучении геометрии // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2018. № 2. С. 94–99.
DOI: 10.18384/2310-7251-2018-2-94-99.

FOR CITATION

Smirnova I.M. Implementation of the metasubject approach in the teaching of geometry. In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics.* 2018. no. 2. pp. 94–99.
DOI: 10.18384/2310-7251-2018-2-94-99.

ВЕСТНИК МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ОБЛАСТНОГО УНИВЕРСИТЕТА

Рецензируемый научный журнал «Вестник Московского государственного областного университета» основан в 1998 г. Выпускается десять серий журнала: «История и политические науки», «Экономика», «Юриспруденция», «Философские науки», «Естественные науки», «Русская филология», «Физика-математика», «Лингвистика», «Психологические науки», «Педагогика». Все серии включены в составленный Высшей аттестационной комиссией Перечень ведущих рецензируемых научных журналов, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертации на соискание ученой степени доктора и кандидата наук по наукам, соответствующим названию серии. Журнал включен в базу данных Российского индекса научного цитирования (РИНЦ).

Печатная версия журнала зарегистрирована в Федеральной службе по надзору за соблюдением законодательства в сфере массовых коммуникаций и охране культурного наследия. Полнотекстовая версия журнала доступна в Интернете на платформе Научной электронной библиотеки (www.elibrary.ru), а также на сайте журнала www.vestnik-mgou.ru.

ВЕСТНИК
МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ОБЛАСТНОГО УНИВЕРСИТЕТА

СЕРИЯ: ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА
2018. № 2

Над номером работали:

Литературный редактор М.С. Тарасова
Переводчик И.А. Улиткин
Корректор М.С. Тарасова
Компьютерная верстка Н.Н. Жильцов

Отдел по изданию научного журнала
«Вестник Московского государственного областного университета»
Информационно-издательского управления МГОУ
105005, г. Москва, ул. Радио, д. 10А, офис 98
тел. (495) 723-56-31; (495) 780-09-42 (доб. 6101)
e-mail: vest_mgou@mail.ru
сайт: www.vestnik-mgou.ru

Формат 70x108/16. Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура «Minion Pro».
Тираж 500 экз. Уч.-изд. л. 6,0, усл. п. л. 6,25.
Подписано в печать: 28.06.2018. Дата выхода в свет: 12.07.2018. Заказ № 2018/06-04.
Отпечатано в ИИУ МГОУ
105005, г. Москва, ул. Радио, 10А