ISSN 2072-8387 (print)
ISSN 2310-7251 (online)

Вестник

Московского государственного областного университета

Серия Физика-математика

Изучение влияния магнитного поля на струю, исходящую из стационарного плазменного двигателя

Зеркально-диффузные граничные условия для электронов на поверхности металла с учётом зависимости от угла падения

Расчёт поверхностного натяжения непереходных металлов при температурах плавления

2020/ № 1

ВЕСТНИК
МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
ОБЛАСТНОГО УНИВЕРСИТЕТА

ISSN 2072-8387 (print) 2020 / № 1 ISSN 2310-7251 (online)

серия

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА

Рецензируемый научный журнал. Основан в 1998 г.

Журнал «Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика» включён Высшей аттестационной комиссией при Министерстве образования и науки Российской Федерации в «Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук» по следующим научным специальностям: 01.04.02 – Теоретическая физика (физико-математические науки); 01.04.07 – Физика конденсированного состояния (физико-математические науки) (См.: Список журналов на сайте ВАК при Минобрнауки России).

The peer-reviewed journal was founded in 1998

«Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics» is included by the Supreme Certifying Commission of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation into "the List of leading reviewed academic journals and periodicals recommended for publishing in corresponding series basic research thesis results for a Ph.D. Candidate or Doctorate Degree" on the following scientific specialities: 01.04.02 – Theoretical physics (physical-mathematical sciences); 01.04.07 – Physics of the condensed state (physical-mathematical sciences) (See: the online List of journals at the site of the Supreme Certifying Commission of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation).

ISSN 2072-8387 (print) 2020 / № 1 ISSN 2310-7251 (online)

series

PHYSICS AND MATHEMATICS

BULLETIN OF THE MOSCOW REGION
STATE UNIVERSITY

Учредитель журнала
«Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика»
Государственное образовательное учреждение высшего образования Московской области
Московский государственный областной университет
Выходит 4 раза в год

ISSN 2072-8387 (print)
ISSN 2310-7251 (online)

Рецензируемый научный журнал «Вестник московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика» публикует статьи по математическим проблемам термодинамики, кинетики и статистической физики; теории конденсированного состояния классических и квантовых, макроскопических и микроскопических систем; изучению различных состояний вещества и физических явлений в них; статистической физике и кинетической теории равновесных и неравновесных систем; теоретическому и экспериментальному исследованию физических свойств неупорядоченных неорганических систем; изучению экспериментального состояния конденсированных веществ и фазовых переходов в них. Журнал адресован ученым, докторантам, аспирантам и всем, интересующимся достижениями физико-математических наук.

Журнал «Вестник Московского государственного областного университета. Серия «Физика-математика» зарегистрирован в Федеральной службе по надзору за соблюдением законодательства в сфере массовых коммуникаций и охране культурного наследия. Регистрационное свидетельство ПИ № ФС 77-73344.

Индекс серии «Физика-математика» по Объединенному каталогу «Пресса России» 40723

Журнал включён в базу данных Российского индекса научного цитирования (РИНЦ), имеет полнотекстовую сетевую версию в Интернете на платформе Научной электронной библиотеки (www.elibrary.ru), с августа 2017 г. на платформе Научной электронной библиотеки «КиберЛенинка» (https://cyberleninka.ru), а также на сайте Московского государственного областного университета (www.vestnik-mgou.ru).

Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. – 2020. – № 1. – 112 с.

Адрес Отдела по изданию научного журнала «Вестник Московского государственного областного университета»
г. Москва, ул. Радио, д.10А, офис 98
тел. (495) 723-56-31; (495) 780-09-42 (доб. 6101)
e-mail: info@vestnik-mgou.ru; сайт: www.vestnik-mgou.ru

Founder of journal
«Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics»
Moscow Region State University

Issued 4 times a year

ISSN 2072-8387 (print)
ISSN 2310-7251 (online)

The reviewed scientific journal "Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics" publishes articles on mathematical problems of thermodynamics, kinetics and statistical physics; the theory of the condensed state of classical and quantum, macroscopic and microscopic systems; the study of various states of substance and physical phenomena in them; statistical physics and the kinetic theory of equilibrium and non-equilibrium systems; theoretical and experimental research of physical features of disordered inorganic systems; the study of the experimental state of condensed substances and phase transitions in them. The journal is addressed to scientists, doctoral students, PhD students and everyone interested in the achievements of physical and mathematical sciences.

The series «Physics and Mathematics» of the Bulletin of the Moscow Region State University is registered in Federal service on supervision of legislation observance in sphere of mass communications and cultural heritage protection. The registration certificate ПИ № ФС 77 - 73344.

Index series «Physics and Mathematics» according to the union catalog «Press of Russia» 40723

The journal is included into the database of the Russian Science Citation Index, has a full text network version on the Internet on the platform of Scientific Electronic Library (www.elibrary.ru), and from August 2017 on the platform of the Scientific Electronic Library "CyberLeninka" (https://cyberleninka.ru), as well as at the site of the Moscow Region State University (www.vestnik-mgou.ru)

Bulletin of the Moscow State Regional University. Series: Physics and Mathematics. – 2020. – № 1. – 112 p.

The Editorial Board address:
Moscow Region State University
10A Radio st., office 98, Moscow, Russia
Phones: (495) 723-56-31; (495) 780-09-42 (add. 6101)
e-mail: info@vestnik-mgou.ru; site: www.vestnik-mgou.ru

СОДЕРЖАНИЕ

РАЗДЕЛ I. МАТЕМАТИКА

РАЗДЕЛ II. ФИЗИКА

CONTENTS

SECTION I. MATHEMATICS

SECTION II. PHYSICS

РАЗДЕЛ I. МАТЕМАТИКА

УДК 517.958
DOI: 10.18384/2310-7251-2020-1-6-27

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА В СЛОЕ С ПОЛИНОМАМИ В ПРАВЫХ ЧАСТЯХ УРАВНЕНИЯ И ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

Алгазин О. Д.

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет)
105005, г. Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, Российская Федерация

Аннотация. **Цель** работы – найти точные решения краевых задач для неоднородного уравнения Гельмгольца с полиномиальной правой частью в многомерном бесконечном слое, ограниченном двумя гипер плоскостями.

Процедура и методы исследования. Рассмотрены краевые задачи Дирихле и Дирихле-Неймана с полиномами в правых частях краевых условий. Применено преобразование Фурье для обобщённых функций медленного роста.

Результаты проведённого исследования. Показано, что краевые задачи Дирихле и Дирихле-Неймана с полиномами в правых частях краевых условий для неоднородного уравнения Гельмгольца с полиномиальной правой частью имеют решение, которое является квазиполиномом, содержащим кроме степенных функций ещё гиперболические или тригонометрические функции. Это решение единственно в классе функций медленного роста, если параметр уравнения не является собственным значением. Приведён алгоритм построения этого решения и рассмотрены примеры.

Теоретическая/практическая значимость заключается в получении точных решений краевых задач для одного из известных уравнений математической физики.

***Ключевые слова*:** уравнение Гельмгольца, задача Дирихле, задача Дирихле-Неймана, преобразование Фурье, обобщённые функции медленного роста

EXACT SOLUTIONS TO THE BOUNDARY-VALUE PROBLEMS FOR THE HELMHOLTZ EQUATION IN A LAYER WITH POLYNOMIALS IN THE RIGHT-HAND SIDES OF THE EQUATION AND OF THE BOUNDARY CONDITIONS

O. Algazin

Bauman Moscow State Technical University
ul. 2-ya Baumanskaya 5, stroenie 1, 105005 Moscow, Russian Federation

Abstract. **Purpose.** We have found exact solutions to boundary-value problems for the inhomogeneous Helmholtz equation with the polynomial right-hand side in a multidimensional infinite layer bounded by two hyperplanes.
Methodology and Approach. The paper considers Dirichlet and Dirichlet–Neumann boundary-value problems with polynomials in the right-hand sides of the boundary conditions. The Fourier transform of generalized functions of slow growth is applied.
Results. It is shown that the Dirichlet and Dirichlet–Neumann boundary-value problems with polynomials in the right-hand sides of the boundary conditions for the inhomogeneous Helmholtz equation with the polynomial right-hand side have a solution that is a quasi-polynomial containing, in addition to power functions, hyperbolic or trigonometric functions. This solution is unique in the class of functions of slow growth if the parameter of the equation is not an eigenvalue. An algorithm for constructing this solution is presented and examples are considered.
Theoretical and Practical Implications. Exact solutions to boundary-value problems for one of the well-known equations of mathematical physics have been obtained.
Keywords**:** Helmholtz equation, Dirichlet problem, Dirichlet–Neumann problem, Fourier transform, generalized functions of slow growth.

Введение

К уравнению Гельмгольца приводят многие задачи математической физики, например, задачи, связанные с установившимися колебаниями (механическими, акустическими, электромагнитными и т. д.), и задачи диффузии некоторых газов при наличии распада или цепных реакций. Также любое уравнение эллиптического типа с постоянными коэффициентами приводится к уравнению Гельмгольца [1].

В данной статье получены точные решения в виде квазиполиномов краевых задач Дирихле и Дирихле-Неймана для уравнения Гельмгольца в слое в случае, когда правая часть уравнения Гельмгольца и правые части краевых условий являются полиномами. Если параметр уравнения Гельмгольца стремится к нулю, то уравнение Гельмгольца переходит в уравнение Пуассона, а квазиполиномиальные решения краевых задач переходят в полиномиальные решения краевых задач для уравнения Пуассона [2]. Таким же способом получены точные полиномиальные решения краевых задач для уравнения Трикоми в полосе [3; 4]. Поиску решений уравнений с частными производными в виде полиномов или квазиполиномов посвящены работы многих авторов [5–11].

1. Постановка задачи

Рассмотрим неоднородное уравнение Гельмгольца в неограниченной области (слое) с полиномиальной правой частью:

$$\Delta u(x,y)+\nu u(x,y)=P(x,y), \quad \nu\in\mathbb{R},\ x\in\mathbb{R}^n, \quad 0<y<a, \tag{1}$$

где $x = (x_1, ..., x_n)$, Δ – оператор Лапласа,

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\ldots+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

$P(x, y)$ – полином от переменных x и y.

На границе слоя зададим краевые условия Дирихле:

$$u(x,0)=\varphi(x), \quad u(x,a)=\psi(x), \quad x\in\mathbb{R}^n, \tag{2}$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$ – полиномы.

Далее в разделе 2 показано, что неоднородное уравнение Гельмгольца (1) имеет полиномиальные решения, и приведена формула получения такого решения. Если $\tilde{u}(x,y)$ – некоторое полиномиальное решение неоднородного уравнения Гельмгольца (1), то для функции $v(x,y)=u(x,y)-\tilde{u}(x,y)$ получаем однородное уравнение Гельмгольца:

$$\Delta v(x,y)+\nu v(x,y)=0, \quad \nu\in\mathbb{R},\ x\in\mathbb{R}^n, \quad 0<y<a, \tag{3}$$

и краевые условия Дирихле:

$$v(x,0)=\varphi(x)-\tilde{u}(x,0), \quad v(x,a)=\psi(x)-\tilde{u}(x,a), \quad x\in\mathbb{R}^n. \tag{4}$$

Решив задачу Дирихле для однородного уравнения Гельмгольца (3), (4), мы получим решение задачи Дирихле для неоднородного уравнения Гельмгольца (1), (2) по формуле:

$$u(x,y)=v(x,y)+\tilde{u}(x,y).$$

Аналогично рассматривается смешанная краевая задача Дирихле-Неймана с краевыми условиями:

$$u(x,0)=\varphi(x), \quad u_y(x,a)=\psi(x), \quad x\in\mathbb{R}^n, \tag{5}$$

которая также сводится к задаче для однородного уравнения (3) с краевыми условиями:

$$v(x,0)=\varphi(x)-\tilde{u}(x,0), \quad v_y(x,a)=\psi(x)-\tilde{u}_y(x,a), \quad x\in\mathbb{R}^n.$$

Решения $u(x, y)$ краевых задач (1), (2) и (1), (5) будем искать в классе функций медленного роста по переменной x при каждом фиксированном y из интервала $(0, a)$, то есть при $\forall y\in(0, a)$ найдётся такое $m \geq 0$, что

$$\int_{\mathbb{R}^n}\left|u(x,y)\right|\left(1+|x|^2\right)^{-m}dx<\infty, \quad |x|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}. \tag{6}$$

Поэтому можно применять преобразования Фурье для обобщённых функций медленного роста по переменной x [12].

2. Полиномиальное решение неоднородного равнения Гельмгольца

Неоднородное равнение Гельмгольца (1) с полиномиальной правой частью $P(x, y)$,

$$\Delta u(x,y)+\nu u(x,y)=P(x,y),\quad \nu\in\mathbb{R},\ x\in\mathbb{R}^n,\quad y\in\mathbb{R},$$

имеет полиномиальные решения, одно из которых можно получить по следующей непосредственно проверяемой формуле.

Для $\nu \neq 0$:

$$u(x,y)=\frac{P(x,y)}{\nu}+\sum_{j=1}^{[k/2]}\frac{(-1)^j}{\nu^{j+1}}\Delta^j P(x,y), \tag{7}$$

где k – наибольшая из степеней мономов полинома $P(x, y)$, $[k/2]$ – целая часть числа $k/2$.

Для $\nu = 0$ мы имеем уравнение Пуассона, и его полиномиальные решения приведены в [2].

Пример 1.

$$x=(x_1,x_2),\quad P(x,y)=3x_1^2x_2y^2+5x_1x_2^2y,\quad k=5,\ [k/2]=2.$$

По формуле (7) получаем:

$$u(x,y)=\frac{1}{\nu}\left(3x_1^2x_2y^2+5x_1x_2^2y\right)-\frac{1}{\nu^2}\left(6x_2y^2+10x_1y+6x_1^2x_2\right)+\frac{1}{\nu^3}24x_2.$$

3. Решение задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца в случае $\nu = -\lambda^2$

Поскольку решение задачи Дирихле для неоднородного уравнения сводится к решению задачи Дирихле для однородного уравнения, рассмотрим задачу Дирихле для однородного уравнения:

$$\Delta v(x,y)-\lambda^2 u(x,y)=0,\ \lambda>0,\quad x\in\mathbb{R}^n,\ 0<y<a, \tag{8}$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad u(x,a)=\psi(x),\quad x\in\mathbb{R}^n, \tag{9}$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$ – полиномы.

Применим преобразование Фурье по x [12]:

$$\mathcal{F}_x\left[u(x,y)\right](t,y)=U(t,y),\quad \mathcal{F}\left[\varphi(x)\right](t)=\Phi(t),\quad \mathcal{F}\left[\psi(x)\right](t)=\Psi(t),$$

получим краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с параметром $t\in\mathbb{R}^n$:

$$-\left(\lambda^2+|t|^2\right)U(t,y)+U_{yy}(t,y)=0,\quad t\in\mathbb{R}^n,\quad 0<y<a \tag{10}$$

$$U(t,0)=\Phi(t),\quad U(t,a)=\Psi(t). \tag{11}$$

Единственное решение краевой задачи (10), (11) даётся формулой:

$$U(t,y)=L_n(|t|,a-y)\Phi(t)+L_n(|t|,y)\Psi(t), \tag{12}$$

где

$$L_n(|t|,y)=\frac{sh\left(y\sqrt{|t|^2+\lambda^2}\right)}{sh\left(a\sqrt{|t|^2+\lambda^2}\right)}.$$

Применяя обратное преобразование Фурье, получим единственное в классе функций медленного роста решение задачи Дирихле (8), (9) в виде свертки:

$$u(x,y)=l_n(|x|,a-y)*\varphi(x)+l_n(|x|,y)*\psi(x), \tag{13}$$

где $l_n(|x|,y)=\mathcal{F}_t^{-1}\left[L_n(|t|,y)\right](x,y)$.

Чтобы найти свертку (13) с полиномами $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ достаточно рассмотреть случай монома.

3.1. Случай n = 1

Рассмотрим сначала плоский случай: $n=1, x\in\mathbb{R}, (x,y)\in\mathbb{R}\times(0,a)$.

$L_1(|t|,y)=L_1(t,y)$ четная функция переменного t:

$$L_1(|t|,y)=L_1(t,y)=\frac{sh\left(y\sqrt{t^2+\lambda^2}\right)}{sh\left(a\sqrt{t^2+\lambda^2}\right)}.$$

Пусть $\varphi(x)=0,\ \psi(x)=x^0=1$.

Решение задачи Дирихле:

$$u_0(x,y)=l_1(x,y)*\psi(x)=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x-t)l_1(t,y)dt=\int_{-\infty}^{\infty}l_1(t,y)dt=\lim_{x\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}l_1(t,y)e^{ixt}dt=$$

$$=\lim_{x\to 0}\mathcal{F}_t\left[l_1(t,y)\right](x,y)=\lim_{x\to 0}L_1(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{sh\left(y\sqrt{x^2+\lambda^2}\right)}{sh\left(a\sqrt{x^2+\lambda^2}\right)}=\frac{sh(\lambda y)}{sh(\lambda a)}.$$

Пусть теперь $\varphi(x)=0, \psi(x)=x^k$.

Соответствующее решение задачи Дирихле:

$$u_k(x,y)=l_1(x,y)*\psi(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x-t)l_1(t,y)dt=\int_{-\infty}^{\infty}(x-t)^k l_1(t,y)dt$$

$$=\int_{\infty}^{\infty}\sum_{j=0}^{k}C_k^j x^{k-j}t^j(-1)^j l_1(t,y)dt=\sum_{j=0}^{k}C_k^j x^{k-j}(-1)^j\int_{-\infty}^{\infty}t^j l_1(t,y)dt,$$

где $C_k^j=k!/j!(k-j)!$ – биномиальные коэффициенты.

Поскольку последний интеграл для нечётных j равен нулю в силу чётности $l_1(t, y)$ относительно переменной t, то

$$u_k(x,y)=\sum_{m=0}^{[k/2]}C_k^{2m}x^{k-2m}\int_{-\infty}^{\infty}t^{2m}l_1(t,y)dt=\sum_{m=0}^{[k/2]}C_k^{2m}x^{k-2m}p_{2m}(\lambda,y),$$

где $[k/2]$ – целая часть числа $k/2$.

Пользуясь свойствами преобразования Фурье, получим:

$$p_{2m}(\lambda,y)=\int_{-\infty}^{\infty}t^{2m}l_1(t,y)dt=\lim_{x\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}t^{2m}l_1(t,y)e^{ixt}dt=$$

$$=\lim_{x\to 0}\mathcal{F}_t\left[t^{2m}l_1(t,y)\right](x,y)=(-1)^m\lim_{x\to 0}\frac{\partial^{2m}}{\partial x^{2m}}L_1(x,y).$$

Функции $p_{2m}(\lambda, y)$ являются коэффициентами разложения в степенной ряд по x функции:

$$L_1(x,y)=\frac{\operatorname{sh}\left(y\sqrt{x^2+\lambda^2}\right)}{\operatorname{sh}\left(a\sqrt{x^2+\lambda^2}\right)}=\sum_{m=0}^{\infty}p_{2m}(\lambda,y)\frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!},$$

то есть $L_1(x, y)$ является производящей функцией для $p_{2m}(\lambda, y)$. Эти функции можно вычислить по рекуррентной формуле:

$$p_0(\lambda,y)=\frac{\operatorname{sh}(\lambda y)}{\operatorname{sh}(\lambda a)},$$

$$p_{2m}(\lambda,y)=-(2m-1)\frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial\lambda}p_{2m-2}(\lambda,y),\quad m=1,2,\ldots \tag{14}$$

Докажем эту формулу.

Поскольку

$$f(s)=\frac{\operatorname{sh}(ys)}{\operatorname{sh}(as)},\quad s=\sqrt{x^2+\lambda^2}$$

является чётной аналитической функцией комплексного переменного s, и её особые точки $\pm i\pi k/a$, $k\in\mathbb{N}$ лежат на мнимой оси, то в круге $|s|<\pi/a$ имеем разложение:

$$f(s)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n}s^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n}\left(x^2+\lambda^2\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n}\sum_{m=0}^{n}C_n^m\lambda^{2n-2m}x^{2m}=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}x^{2m}\sum_{n=m}^{\infty}a_{2n}C_n^m\lambda^{2n-2m}.$$

Значит,

$$p_{2m}(\lambda,y)=(-1)^m(2m)!\sum_{n=m}^{\infty}a_{2n}C_n^m\lambda^{2n-2m},$$

$$p_0(\lambda,y)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n}\lambda^{2n}=f(\lambda)=\frac{\operatorname{sh}(\lambda y)}{\operatorname{sh}(\lambda a)},$$

$$p_{2m-2}(\lambda,y)=(-1)^{m-1}(2m-2)!\sum_{n=m-1}^{\infty}a_{2n}C_n^{m-1}\lambda^{2n-2m+2},$$

$$-(2m-1)\frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial\lambda}p_{2m-2}(\lambda,y)=$$

$$=(-1)^m(2m)!\sum_{n=m}^{\infty}a_{2n}\frac{2n-2m+2}{2m}C_n^{m-1}\lambda^{2n-2m}=$$

$$=(-1)^m(2m)!\sum_{n=m}^{\infty}a_{2n}C_n^m\lambda^{2n-2m}=p_{2m}(\lambda,y),$$

что и требовалось доказать.

Таким образом,

$$p_{2m}(\lambda,y)=(2m-1)!!\left(-\frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)^m\frac{\operatorname{sh}(\lambda y)}{\operatorname{sh}(\lambda a)}.$$

Например,

$$p_2(\lambda,y)=-\frac{y\operatorname{ch}(\lambda y)}{\lambda\operatorname{sh}(\lambda a)}+\frac{a\operatorname{sh}(\lambda y)\operatorname{ch}(\lambda a)}{\lambda\operatorname{sh}^2(\lambda a)},$$

$$p_4(\lambda,y)=-\frac{3y\operatorname{ch}(\lambda y)}{\lambda^3\operatorname{sh}(\lambda a)}+\frac{3y^2\operatorname{sh}(\lambda y)}{\lambda^2\operatorname{sh}(\lambda a)}-\frac{6ya\operatorname{ch}(\lambda y)\operatorname{ch}(\lambda a)}{\lambda^2\operatorname{sh}^2(\lambda a)}+$$

$$+\frac{3a\operatorname{sh}(\lambda y)\operatorname{ch}(\lambda a)}{\lambda^3\operatorname{sh}^2(\lambda a)}+\frac{6a^2\operatorname{sh}(\lambda y)\operatorname{ch}^2(\lambda a)}{\lambda^2\operatorname{sh}^3(\lambda a)}-\frac{3a^2\operatorname{sh}(\lambda y)}{\lambda^2\operatorname{sh}(\lambda a)}.$$

При λ, стремящемся к нулю, функции $p_{2m}(\lambda, y)$ переходят в полиномы $p_{2m}(y)$, которые рассмотрены в [2]. Например,

$$\lim_{\lambda\to 0}p_0(\lambda,y)=\lim_{\lambda\to 0}\frac{\operatorname{sh}(\lambda y)}{\operatorname{sh}(\lambda a)}=\frac{y}{a},$$

$$\lim_{\lambda\to 0} p_2(\lambda, y) = -\frac{y}{3a}\left(y^2 - a^2\right),$$

$$\lim_{\lambda\to 0} p_4(\lambda, y) = \frac{y}{15a}\left(3y^4 - 10y^2a^2 + 7a^4\right).$$

Выпишем несколько первых решений задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца:

$$u_k(x, y) = \sum_{m=0}^{[k/2]} C_k^{2m} x^{k-2m} p_{2m}(\lambda, y).$$

$$u_0(x, y) = \frac{\operatorname{sh}(\lambda y)}{\operatorname{sh}(\lambda a)}, \quad u_1(x, y) = x\frac{\operatorname{sh}(\lambda y)}{\operatorname{sh}(\lambda a)},$$

$$u_2(x, y) = x^2\frac{\operatorname{sh}(\lambda y)}{\operatorname{sh}(\lambda a)} - \frac{y\operatorname{ch}(\lambda y)}{\lambda\operatorname{sh}(\lambda a)} + \frac{a\operatorname{sh}(\lambda y)\operatorname{ch}(\lambda a)}{\lambda\operatorname{sh}^2(\lambda a)}.$$

При λ, стремящемся к нулю, они переходят в полиномиальные решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа [2]:

$$\lim_{\lambda\to 0} u_0(x, y) = \frac{y}{a}, \quad \lim_{\lambda\to 0} u_1(x, y) = \frac{xy}{a}, \quad \lim_{\lambda\to 0} u_2(x, y) = \frac{y}{3a}\left(3x^2 - y^2 + a^2\right).$$

Функции $v_k(x, y) = u_k(x, a - y)$ являются решениями уравнения Гельмгольца, удовлетворяющими краевым условиям:

$$v_k(x, 0) = x^k, \quad v_k(x, a) = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Пример 2. Рассмотрим задачу Дирихле для неоднородного уравнения Гельмгольца:

$$\Delta u(x, y) - \lambda^2 u(x, y) = x^2y^2, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < y < a, \quad \lambda > 0,$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, a) = 0, \quad -\infty < x < \infty.$$

Частным решением неоднородного уравнения Гельмгольца является полином:

$$\tilde{u}(x, y) = -\frac{x^2y^2}{\lambda^2} - \frac{2y^2}{\lambda^4} - \frac{2x^2}{\lambda^4} - \frac{8}{\lambda^6},$$

и задача Дирихле для неоднородного уравнения Гельмгольца сводится к задаче Дирихле для однородного уравнения Гельмгольца для функции $v(x, y) = u(x, y) - \tilde{u}(x, y)$:

$$\Delta v(x, y) - \lambda^2 v(x, y) = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < y < a, \quad \lambda > 0,$$

$$v(x, 0) = u(x, 0) - \tilde{u}(x, 0) = \frac{2x^2}{\lambda^4} + \frac{8}{\lambda^6},$$

$$v(x,a)=u(x,a)-\tilde{u}(x,a)=\frac{x^2a^2}{\lambda^2}+\frac{2a^2}{\lambda^4}+\frac{2x^2}{\lambda^4}+\frac{8}{\lambda^6}.$$

Решением этой задачи будет функция:

$$v(x,y)=\frac{2}{\lambda^4}u_2(x,a-y)+\frac{8}{\lambda^6}u_0(x,a-y)+\left(\frac{a^2}{\lambda^2}+\frac{2}{\lambda^4}\right)u_2(x,y)+$$

$$+\left(\frac{2a^2}{\lambda^4}+\frac{8}{\lambda^6}\right)u_0(x,y).$$

Решением исходной задачи будет функция:

$$u(x,y)=\tilde{u}(x,y)+v(x,y)=$$

$$=-\frac{x^2y^2}{\lambda^2}-\frac{2y^2}{\lambda^4}-\frac{2x^2}{\lambda^4}-\frac{8}{\lambda^6}+\frac{a^2x^2\operatorname{sh}(\lambda y)}{\lambda^2\operatorname{sh}(\lambda a)}-\frac{a^2y\operatorname{ch}(\lambda y)}{\lambda^3\operatorname{sh}(\lambda a)}+$$

$$+\frac{a^3\operatorname{sh}(\lambda y)\operatorname{ch}(\lambda a)}{\lambda^3\operatorname{sh}^2(\lambda a)}+$$

$$+\frac{\operatorname{sh}(\lambda y)\left(2x^2+2a^2-2x^2\operatorname{ch}(\lambda a)\right)}{\lambda^4\operatorname{sh}(\lambda a)}+\frac{2y\operatorname{ch}(\lambda y)\left(\operatorname{ch}(\lambda a)-1\right)}{\lambda^5\operatorname{sh}(\lambda a)}+$$

$$+\frac{2a\operatorname{sh}(\lambda y)\operatorname{ch}(\lambda a)\left(1-\operatorname{ch}(\lambda a)\right)}{\lambda^5\operatorname{sh}^2(\lambda a)}+\frac{8\operatorname{sh}(\lambda y)\left(1-\operatorname{ch}(\lambda a)\right)}{\lambda^6\operatorname{sh}(\lambda a)}+\frac{2x^2\operatorname{ch}(\lambda y)}{\lambda^4}+$$

$$+\frac{2(a-y)\operatorname{sh}(\lambda y)}{\lambda^5}+\frac{8\operatorname{ch}(\lambda y)}{\lambda^6}.$$

При $\lambda\to 0$ это решение переходит в полином:

$$\lim_{\lambda\to 0}u(x,y)=\frac{1}{12}x^2y^4-\frac{1}{12}a^3x^2y-\frac{1}{180}y^6+\frac{1}{36}a^3y^3-\frac{1}{45}a^5y\ ,$$

который является решением задачи Дирихле для уравнения Пуассона [2]

$$\Delta u(x,y)=x^2y^2,\quad -\infty<x<\infty,\quad 0<y<a,$$

$$u(x,0)=0,\quad u(x,a)=0,\quad -\infty<x<\infty.$$

3.2. Случай n > 1

Рассмотрим теперь случай: $n>1,\quad x\in\mathbb{R}^n,\quad (x,y)\in\mathbb{R}^n\times(0,a)$.

Если

$$\psi(x)=1,\quad x\in\mathbb{R}^n,$$

то решением задачи Дирихле с краевым условием:

$$u(x,0)=0,\quad u(x,a)=1,\quad x\in\mathbb{R}^n$$

будет функция:

$$u_0(x,y)=l_n(|x|,y)*\psi(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\psi(x-t)l_n(|t|,y)dt=\int_{\mathbb{R}^n}l_n(|t|,y)dt=$$

$$=\lim_{x\to 0}\int_{\mathbb{R}^n}l_n(|t|,y)e^{ixt}dt=\lim_{x\to 0}\mathcal{F}_t\left[l_n(|t|,y)\right](x,y)=\lim_{x\to 0}L_n(|x|,y)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sh}\left(y\sqrt{|x|^2+\lambda^2}\right)}{\operatorname{sh}\left(a\sqrt{|x|^2+\lambda^2}\right)}=\frac{\operatorname{sh}(\lambda y)}{\operatorname{sh}(\lambda a)}.$$

Если

$$\psi(x)=x^k,\quad x\in\mathbb{R}^n,\quad k-\text{мультииндекс},$$

то решением задачи Дирихле с краевыми условиями:

$$u(x,0)=0,\quad u(x,a)=x^k,\quad x\in\mathbb{R}^n$$

будет функция:

$$u_k(x,y)=\int_{\mathbb{R}^n}(x-t)^k\,l_n(|t|,y)dt,$$

где

$$(x-t)^k=(x_1-t_1)^{k_1}\dots(x_n-t_n)^{k_n},\tag{15}$$

и этот интеграл будет отличен от нуля только для тех мономов полинома (15), которые содержат t_j в чётных степенях. Поэтому

$$u_k(x,y)=\sum_{m=0}^{[k/2]}C_k^{2m}x^{k-2m}\int_{\mathbb{R}^n}t^{2m}l_n(|t|,y)dt=$$

$$=\sum_{m=0}^{[k/2]}C_k^{2m}x^{k-2m}p_{2m}(\lambda,y),$$

где $C_k^{2m}=C_{k_1}^{2m_1}C_{k_2}^{2m_2}\dots C_{k_n}^{2m_n}$, $[k/2]=([k_1/2],[k_2/2],\dots,[k_n/2])$.

Пользуясь свойствами преобразования Фурье [12], получим:

$$p_{2m}(\lambda,y)=\int_{\mathbb{R}^n}t^{2m}l_n(|t|,y)dt=\lim_{x\to 0}\int_{\mathbb{R}^n}t^{2m}l_n(|t|,y)e^{ixt}dt=$$

$$=\lim_{x\to 0}\mathcal{F}_t\left[t^{2m}l_n(|t|,y)\right](x,y)=(-1)^{|m|}\lim_{x\to 0}\partial_x^{2m}\frac{\operatorname{sh}\left(y\sqrt{|x|^2+\lambda^2}\right)}{\operatorname{sh}\left(a\sqrt{|x|^2+\lambda^2}\right)},$$

где

$$\partial_x^{2m} = \frac{\partial^{2|m|}}{\partial x_1^{2m_1} \partial x_2^{2m_2} \ldots \partial x_n^{2m_n}} .$$

Для $x \in \mathbb{R}^n$ имеем разложение:

$$L_n(x,y) = \frac{\operatorname{sh}\left(y\sqrt{|x|^2+\lambda^2}\right)}{\operatorname{sh}\left(a\sqrt{|x|^2+\lambda^2}\right)} = \sum\nolimits_{|m|=0}^{\infty} p_{2|m|}(\lambda,y)\frac{(-1)^{|m|}}{|2m|!}\left(x_1^2+\ldots+x_n^2\right)^{|m|} .$$

Коэффициент при x^{2m} в этом разложении равен:

$$p_{|\;\;|}(\lambda,y)\frac{(\quad)^{|\;\;|}}{|2m|!}\frac{|\;\;|}{m!} , \quad m! = m\ \ !\ldots m\ \ ! .$$

Следовательно,

$$p_{2m}(\lambda,y) = \frac{(2m)!|m|!}{|2m|!m!} p_{2|m|}(\lambda,y).$$

Например,

$$p_{2(2,1,1)}(\lambda,y) = \frac{1}{35} p_8(\lambda,y).$$

Функции $v_k(x, y) = u_k(x, a - y)$ являются решениями уравнения Лапласа, удовлетворяющими краевым условиям:

$$v_k(x,0) = x^k, \quad v_k(x,a) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad k - \text{мультииндекс.}$$

4. Решение задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца в случае $\nu = \mu^2$

Заменяя в (8), (9) λ на $i\mu$, $\mu > 0$, получим задачу Дирихле:

$$\Delta u(x,y) + \mu^2 u(x,y) = 0, \ \mu > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \ 0 < y < a, \tag{16}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u(x,a) = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{17}$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$ – полиномы.

Все формулы, полученные в разделе 3, сохраняются с заменой гиперболических функций на круговые и заменой знака минус на знак плюс в правой части рекуррентной формулы (14). А именно, решение задачи Дирихле (16), (17) записывается в виде свертки:

$$u(x,y) = l_n(|x|, a-y) * \varphi(x) + l_n(|x|, y) * \psi(x), \tag{18}$$

где

$$l_n\left(|x|, y\right) = \mathcal{F}_t^{-1}\left[L_n\left(|t|, y\right)\right](x, y), \quad L_n\left(|t|, y\right) = \frac{\sin\left(y\sqrt{\mu^2 - |t|^2}\right)}{\sin\left(a\sqrt{\mu^2 - |t|^2}\right)}.$$

Если μ^2 не является собственным значением оператора Лапласа в слое с краевыми условиями Дирихле, то это решение будет единственным в классе функций медленного роста.

Для $\varphi(x) = 0$, $\psi(x) = x^k$, $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, решением задачи Дирихле является функция:

$$u_k(x, y) = \sum_{m=0}^{[k/2]} C_k^{2m} x^{k-2m} p_{2m}(\mu, y),$$

где $p_{2m}(\mu, y) = (2m-1)!!\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial\mu}\right)^m \frac{\sin(\mu y)}{\sin(\mu a)}$, $\mu \neq \pi k / a$, $k \in \mathbb{N}$.

Например,

$$u_2(x, y) = x^2 \frac{\sin(\mu y)}{\sin(\mu a)} + \frac{y\cos(\mu y)}{\mu\sin(\mu a)} - \frac{a\sin(\mu y)\cos(\mu a)}{\mu\sin^2(\mu a)}, \quad \mu \neq \pi k / a, \quad k \in \mathbb{N}.$$

При μ, стремящемся к нулю, $u_2(x, y)$, переходит в полиномиальное решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа:

$$\lim_{\mu \to 0} u_2(x, y) = \frac{y}{3a}\left(3x^2 - y^2 + a^2\right).$$

Если $x \in \mathbb{R}^n$, $n > 1$, k – мультииндекс, то решения находятся по тем же формулам, в которых теперь

$$x^k = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}, \quad C_k^{2m} = C_{k_1}^{2m_1} C_{k_2}^{2m_2} \ldots C_{k_n}^{2m_n}, \quad [k/2] = \left([k_1/2], [k_2/2], \ldots, [k_n/2]\right),$$

$$p_{2m}(\mu, y) = \frac{(2m)!\,|m|!}{|2m|!\,m!} p_{2|m|}(\mu, y).$$

4.1. Единственность решения задачи Дирихле

Решение задачи Дирихле (16), (17) будет единственным в классе функций медленного роста (соответствующая однородная краевая задача имеет только тривиальные решения в классе функций медленного роста), если

$$0 < \mu < \frac{\pi}{a}, \quad 0 < \mu^2 < \frac{\pi^2}{a^2}.$$

Если же $\mu^2 \geq \pi^2 / a^2$, $\mu^2 = \pi^2 / a^2 + b^2$, $b^2 \geq 0$, то функции

$$\sin(b_1x_1)\sin(b_2x_2)\ldots\sin(b_nx_n)\sin\left(\frac{\pi y}{a}\right),$$

где b_1, b_2, ..., b_n – произвольные неотрицательные числа, удовлетворяющие равенству $b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2=b^2$, являются нетривиальными решениями медленного роста соответствующей однородной краевой задачи.

Докажем, что в случае $0<\mu<\pi/a$ соответствующая однородная краевая задача:

$$\Delta u(x,y)+\mu^2 u(x,y)=0, \quad x\in\mathbb{R}^n, \quad 0<y<a,$$

$$u(x,0)=0, \quad u(x,a)=0, \quad x\in\mathbb{R}^n,$$

имеет только тривиальные решения в классе функций медленного роста.

Решение $u(x, y)$ как функцию переменного y можно разложить в ряд Фурье:

$$u(x,y)=\sum\nolimits_{n=1}^{\infty}b_n(x)\sin\left(\frac{\pi n y}{a}\right),$$

где коэффициенты $b_n(x)$ – функции медленного роста. Подставив эту функцию $u(x, y)$ в уравнение (16), получим уравнения для коэффициентов $b_n(x)$:

$$\Delta b_n(x)+\left(\mu^2-\frac{\pi^2n^2}{a^2}\right)b_n(x)=0,\ n=1,2,\ldots\ .$$

Если $0<\mu<\pi/a,\ 0<\mu^2<\pi^2/a^2$, то $\mu^2-\pi^2n^2/a^2<0$, $\forall n=1,2,\ldots$ и эти уравнения имеют только тривиальные решения в классе функций медленного роста.

5. Решение смешанной краевой задачи Дирихле-Неймана для уравнения Гельмгольца в случае $v = -\lambda^2$

Достаточно рассмотреть однородное уравнение:

$$\Delta u(x,y)-\lambda^2 u(x,y)=0, \quad \lambda>0, \quad x\in\mathbb{R}^n, \quad 0<y<a, \tag{19}$$

$$u(x,0)=\varphi(x), \quad u_y(x,a)=\psi(x), \quad x\in\mathbb{R}^n, \tag{20}$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$ – полиномы.

Так же, как в случае задачи Дирихле, имеем единственное решение в классе функций медленного роста:

$$u(x,y)=l_n(|x|,y)*\varphi(x)+k_n(|x|,y)*\psi(x),$$

где

$$l_n(|x|,y)=\mathcal{F}_t^{-1}\left[L_n(|t|,y)\right](x,y), \quad k_n(|x|,y)=\mathcal{F}_t^{-1}\left[K_n(|t|,y)\right](x,y),$$

$$L_n\left(|t|, y\right) = \frac{\operatorname{ch}\left((a-y)\sqrt{|t|^2+\lambda^2}\right)}{\operatorname{ch}\left(a\sqrt{|t|^2+\lambda^2}\right)},$$

$$K_n\left(|t|, y\right) = \frac{\operatorname{sh}\left(y\sqrt{|t|^2+\lambda^2}\right)}{\sqrt{|t|^2+\lambda^2}\operatorname{ch}\left(a\sqrt{|t|^2+\lambda^2}\right)}.$$

5.1. Случай n = 1

Если $\varphi(x)=1,\ \ \psi(x)=0,\ \ x\in\mathbb{R},$ то решением задачи (19), (20) является функция:

$$u_0(x,y) = \frac{\operatorname{ch}\left((a-y)\lambda\right)}{\operatorname{ch}(a\lambda)}.$$

Если $\varphi(x)=0,\ \ \psi(x)=1,\ \ x\in\mathbb{R},$ то решением задачи (19), (20) является функция:

$$v_0(x,y) = \frac{\operatorname{sh}(y\lambda)}{\lambda\operatorname{ch}(a\lambda)}.$$

Если $\varphi(x)=x^k,\ \ \psi(x)=0,\ \ x\in\mathbb{R},\ \ k\in\mathbb{N},$ то решением задачи (19), (20) является функция:

$$u_k(x,y) = \sum_{m=0}^{[k/2]} C_k^{2m} x^{k-2m} p_{2m}(\lambda, y),$$

где функции $p_{2m}(\lambda, y)$ являются коэффициентами разложения в степенной ряд по x функции:

$$L_1(x,y) = \frac{\operatorname{ch}\left((a-y)\sqrt{x^2+\lambda^2}\right)}{\operatorname{ch}\left(a\sqrt{x^2+\lambda^2}\right)} = \sum_{m=0}^{\infty} p_{2m}(\lambda, y)\frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!},$$

то есть $L_1(x, y)$ является производящей функцией для $p_{2m}(\lambda, y)$. Эти функции можно вычислить по рекуррентной формуле:

$$p_0(\lambda,y) = \frac{\operatorname{ch}\left(\lambda(a-y)\right)}{\operatorname{ch}(\lambda a)},\quad p_{2m}(\lambda,y) = -(2m-1)\frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial\lambda}p_{2m-2}(\lambda,y),\quad m=1,2,\ldots.$$

Таким образом,

$$p_{2m}(\lambda,y) = (2m-1)!!\left(-\frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)^m \frac{\operatorname{ch}\left(\lambda(a-y)\right)}{\operatorname{ch}(\lambda a)}, \tag{21}$$

и, например,

$$u_1(x,y) = x\,\mathrm{ch}(\lambda y) - \frac{x\,\mathrm{sh}(\lambda a)\,\mathrm{sh}(\lambda y)}{\mathrm{ch}(\lambda a)},$$

$$u_2(x,y) = x^2\,\mathrm{ch}(\lambda y) - \frac{x^2\,\mathrm{sh}(\lambda a)\,\mathrm{sh}(\lambda y)}{\mathrm{ch}(\lambda a)} + \frac{y\,\mathrm{sh}(\lambda a)\,\mathrm{ch}(\lambda y)}{\lambda\,\mathrm{ch}(\lambda a)} + \frac{a\,\mathrm{sh}(\lambda y)}{\lambda} -$$

$$-\frac{y\,\mathrm{sh}(\lambda y)}{\lambda} - \frac{a\,\mathrm{sh}^2(\lambda a)\,\mathrm{sh}(\lambda y)}{\lambda\,\mathrm{ch}^2(\lambda a)}.$$

При $\lambda \to 0$ функции $u_k(x, y)$ переходят в полиномы, являющиеся решениями краевой задачи Дирихле-Неймана для уравнения Лапласа [2]. Например,

$$\lim_{\lambda\to 0} u_0(x,y) = 1, \quad \lim_{\lambda\to 0} u_1(x,y) = x, \quad \lim_{\lambda\to 0} u_2(x,y) = x^2 + 2ay - y^2.$$

Если $\varphi(x) = 0, \psi(x) = x^l, x \in \mathbb{R}, l \in \mathbb{N},$ то решением задачи является функция:

$$v_l(x,y) = \sum_{m=0}^{[l/2]} C_l^{2m} x^{l-2m} q_{2m}(\lambda, y),$$

где функции $q_{2m}(\lambda, y)$ являются коэффициентами разложения в степенной ряд по x функции:

$$K_1(x,y) = \frac{\mathrm{sh}\left(y\sqrt{x^2+\lambda^2}\right)}{\sqrt{x^2+\lambda^2}\,\mathrm{ch}\left(a\sqrt{x^2+\lambda^2}\right)} = \sum_{m=0}^{\infty} q_{2m}(\lambda, y)\frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!},$$

то есть $K_1(x, y)$ является производящей функцией для $q_{2m}(\lambda, y)$. Эти функции можно вычислить по рекуррентной формуле:

$$q_0(\lambda,y) = \frac{\mathrm{sh}(\lambda y)}{\lambda\,\mathrm{ch}(\lambda a)}, \quad q_{2m}(\lambda,y) = -(2m-1)\frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial\lambda} q_{2m-2}(\lambda,y), \quad m = 1,2,\ldots. \tag{22}$$

Таким образом,

$$q_{2m}(\lambda,y) = (2m-1)!!\left(-\frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)^m \frac{\mathrm{sh}(\lambda y)}{\lambda\,\mathrm{ch}(\lambda a)},$$

и, например,

$$v_1(x,y) = \frac{x\,\mathrm{sh}(\lambda y)}{\lambda\,\mathrm{ch}(\lambda a)},$$

$$v_2(x,y) = \frac{x^2\,\mathrm{sh}(\lambda y)}{\lambda\,\mathrm{ch}(\lambda a)} - \frac{y\,\mathrm{ch}(\lambda y)}{\lambda^2\,\mathrm{ch}(\lambda a)} + \frac{\mathrm{sh}(\lambda y)}{\lambda^3\,\mathrm{ch}(\lambda a)} + \frac{a\,\mathrm{sh}(\lambda a)\,\mathrm{sh}(\lambda y)}{\lambda^2\,\mathrm{ch}^2(\lambda a)}.$$

При $\lambda \to 0$ функции $v_l(x, y)$ переходят в полиномы, являющиеся решениями краевой задачи Дирихле-Неймана для уравнения Лапласа [2].

Например,

$$\lim_{\lambda\to 0} v_0(x,y) = y,\ \lim_{\lambda\to 0} v_1(x,y) = xy,\ \lim_{\lambda\to 0} v_2(x,y) = x^2 y - \frac{y^3}{3} + a^2 y.$$

Пример 3. Рассмотрим задачу Дирихле-Неймана для неоднородного уравнения Гельмгольца:

$$\Delta u(x,y) - \lambda^2 u(x,y) = x^2 y^2,\quad -\infty < x < \infty,\quad 0 < y < a,\quad \lambda > 0,$$

$$u(x,0) = 0,\quad u_y(x,a) = 0,\quad -\infty < x < \infty.$$

Так же, как в случае задачи Дирихле, эта задача сводится к задаче для однородного уравнения:

$$\Delta v(x,y) - \lambda^2 v(x,y) = 0,\quad -\infty < x < \infty,\quad 0 < y < a,\quad \lambda > 0,$$

$$v(x,0) = \frac{2x^2}{\lambda^4} + \frac{8}{\lambda^6},\quad v_y(x,a) = \frac{2x^2 a}{\lambda^2} + \frac{4a}{\lambda^4}.$$

Решением исходной задачи будет функция:

$$u(x,y) = -\frac{x^2 y^2}{\lambda^2} - \frac{2y^2}{\lambda^4} - \frac{2x^2}{\lambda^4} - \frac{8}{\lambda^6} + \frac{2}{\lambda^4} u_2(x,y) +$$

$$+\frac{8}{\lambda^6} u_0(x,y) + \frac{2a}{\lambda^2} v_2(x,y) + \frac{4a}{\lambda^4} v_0(x,y) =$$

$$= -\frac{x^2 y^2}{\lambda^2} - \frac{2y^2}{\lambda^4} - \frac{2x^2}{\lambda^4} - \frac{8}{\lambda^6} + \frac{2x^2 \operatorname{ch}(\lambda y)}{\lambda^4} - \frac{2x^2 \operatorname{sh}(\lambda a)\operatorname{sh}(\lambda y)}{\lambda^4 \operatorname{ch}(\lambda a)} + \frac{2y \operatorname{sh}(\lambda a)\operatorname{ch}(\lambda y)}{\lambda^5 \operatorname{ch}(\lambda a)} +$$

$$+\frac{2a \operatorname{sh}(\lambda y)}{\lambda^5} - \frac{2y \operatorname{sh}(\lambda y)}{\lambda^5} - \frac{2a \operatorname{sh}^2(\lambda a)\operatorname{sh}(\lambda y)}{\lambda^5 \operatorname{ch}^2(\lambda a)} + \frac{8 \operatorname{ch}((a-y)\lambda)}{\lambda^6 \operatorname{ch}(a\lambda)} + \frac{2a x^2 \operatorname{sh}(\lambda y)}{\lambda^3 \operatorname{ch}(\lambda a)} -$$

$$-\frac{2ay \operatorname{ch}(\lambda y)}{\lambda^4 \operatorname{ch}(\lambda a)} + \frac{6a \operatorname{sh}(\lambda y)}{\lambda^5 \operatorname{ch}(\lambda a)} + \frac{2a^2 \operatorname{sh}(\lambda a)\operatorname{sh}(\lambda y)}{\lambda^4 \operatorname{ch}^2(\lambda a)}.$$

При $\lambda \to 0$ эта функция переходит в полином:

$$\lim_{\lambda\to 0} u(x,y) = \frac{1}{12} x^2 y^4 - \frac{a^3}{3} x^2 y - \frac{1}{180} y^6 + \frac{a^3}{9} y^3 - \frac{3a^5}{10} y,$$

который является решением краевой задачи Дирихле-Неймана для уравнения Пуассона [2]:

$$\Delta u(x,y) = x^2 y^2, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < y < a,$$

$$u(x,0) = 0, \quad u_y(x,a) = 0, \quad -\infty < x < \infty.$$

5.2. Случай n > 1

Аналогично случаю задачи Дирихле получаем, что решением задачи Дирихле-Неймана при $\varphi(x) = x^k$, $\psi(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, $k = (k_1, \ldots, k_n)$ – мультииндекс, будет функция:

$$u_k(x,y) = \sum_{m=0}^{[k/2]} C_k^{2m} x^{k-2m} p_{2m}(\lambda, y),$$

где $C_k^{2m} = C_{k_1}^{2m_1} C_{k_2}^{2m_2} \ldots C_{k_n}^{2m_n}$, $[k/2] = ([k_1/2], [k_2/2], \ldots, [k_n/2])$,

$$p_{2m}(\lambda, y) = \frac{(2m)!|m|!}{|2m|!m!} p_{2|m|}(\lambda, y).$$

При $\varphi(x) = 0$, $\psi(x) = x^k$ решением задачи Дирихле-Неймана будет функция:

$$v_k(x,y) = \sum_{m=0}^{[k/2]} C_k^{2m} x^{k-2m} q_{2m}(\lambda, y), \quad q_{2m}(\lambda, y) = \frac{(2m)!|m|!}{|2m|!m!} q_{2|m|}(\lambda, y).$$

Функции $p_{2|m|}(\lambda, y)$ и $q_{2|m|}(\lambda, y)$ находятся по формулам (21) и (22), соответственно.

6. Решение смешанной краевой задачи Дирихле-Неймана для уравнения Гельмгольца в случае $\nu = \mu^2$

Все формулы, полученные в разделе 5, сохраняются с заменой гиперболических функций на круговые и заменой знака минус на знак плюс в правой части рекуррентных формул (21), (22). А именно, решение задачи Дирихле-Неймана:

$$\Delta u(x,y) + \mu^2 u(x,y) = 0, \quad \mu > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad 0 < y < a, \tag{23}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_y(x,a) = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{24}$$

записывается в виде свертки:

$$u(x,y) = l_n(|x|, y) * \varphi(x) + k_n(|x|, y) * \psi(x),$$

где

$$l_n(|x|, y) = \mathcal{F}_t^{-1}\left[L_n(|t|, y)\right](x,y), \quad k_n(|x|, y) = \mathcal{F}_t^{-1}\left[K_n(|t|, y)\right](x,y),$$

$$L_n(|t|, y) = \frac{\cos\left((a-y)\sqrt{\mu^2 - |t|^2}\right)}{\cos\left(a\sqrt{\mu^2 - |t|^2}\right)}, \; K_n(|t|, y) = \frac{\sin\left(y\sqrt{\mu^2 - |t|^2}\right)}{\sqrt{\mu^2 - |t|^2}\cos\left(a\sqrt{\mu^2 - |t|^2}\right)}.$$

Если μ^2 не является собственным значением оператора Лапласа в слое с краевыми условиями Дирихле-Неймана, то это решение будет единственным в классе функций медленного роста.

Для $\varphi(x)=x^k,\ \psi(x)=0,\ x\in\mathbb{R},\ k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ решением задачи Дирихле-Неймана является функция:

$$u_k(x,y)=\sum_{m=0}^{[k/2]}C_k^{2m}x^{k-2m}p_{2m}(\mu,y),$$

где

$$p_{2m}(\mu,y)=(2m-1)!!\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial\mu}\right)^m\frac{\cos(\mu(a-y))}{\cos(\mu a)},\quad \mu\neq\pi/2a+\pi k/a,\quad k\in\mathbb{N}.$$

Для $\varphi(x)=0,\ \psi(x)=x^k,\ x\in\mathbb{R},\ k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ решением задачи Дирихле-Неймана является функция:

$$v_k(x,y)=\sum_{m=0}^{[k/2]}C_k^{2m}x^{k-2m}q_{2m}(\mu,y),$$

где

$$q_{2m}(\mu,y)=(2m-1)!!\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial\mu}\right)^m\frac{\sin(\mu y)}{\mu\cos(\mu a)},\quad \mu\neq\pi/2a+\pi k/a,\quad k\in\mathbb{N}.$$

Например,

$$v_2(x,y)=\frac{x^2\sin(\mu y)}{\mu\cos(\mu a)}-\frac{y\cos(\mu y)}{\mu^2\cos(\mu a)}+\frac{\sin(\mu y)}{\mu^3\cos(\mu a)}+\frac{a\sin(\mu a)\sin(\mu y)}{\mu^2\cos^2(\mu a)},$$

$$\mu\neq\pi/2a+\pi k/a,\ k\in\mathbb{N}.$$

При μ, стремящемся к нулю, $v_2(x,y)$ переходит в полиномиальное решение задачи Дирихле-Неймана для уравнения Лапласа:

$$\lim_{\mu\to 0}v_2(x,y)=x^2y-\frac{y^3}{3}+a^2y.$$

Если $x\in\mathbb{R}^n,\ n>1,\ k,m$ – мультииндексы, то решения находятся по тем же формулам, в которых теперь

$$x^k=x_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_n^{k_n},C_k^{2m}=C_{k_1}^{2m_1}C_{k_2}^{2m_2}\dots C_{k_n}^{2m_n},\ \ [k/2]=([k_1/2],[k_2/2],\dots,[k_n/2]),$$

$$p_{2m}(\mu,y)=\frac{(2m)!|m|!}{|2m|!m!}p_{2|m|}(\mu,y),\ q_{2m}(\mu,y)=\frac{(2m)!|m|!}{|2m|!m!}q_{2|m|}(\mu,y).$$

6.1. Единственность решения задачи Дирихле-Неймана

Аналогично случаю задачи Дирихле показывается, что решение задачи Дирихле-Неймана (23), (24) будет единственным в классе функций медленного роста, если

$$0 < \mu < \frac{\pi}{2a},\ 0 < \mu^2 < \frac{\pi^2}{4a^2}.$$

Если же $\mu^2 \geq \pi^2 / 4a^2$, $\mu^2 = \pi^2 / 4a^2 + b^2$, $b^2 \geq 0$, то функции

$$\sin(b_1 x_1)\sin(b_2 x_2)\ldots\sin(b_n x_n)\sin\left(\frac{\pi y}{2a}\right),$$

где $b_1, b_2, ..., b_n$ – произвольные неотрицательные числа, удовлетворяющие равенству $b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2 = b^2$, являются нетривиальными решениями соответствующей однородной краевой задачи.

Пример 4. Рассмотрим задачу Дирихле-Неймана для неоднородного уравнения Гельмгольца:

$$\Delta u(x,y) + \mu^2 u(x,y) = x^{(2,1,1)} y^3, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad 0 < y < 1, \quad 0 < \mu < \pi/2,$$

$$u(x,0) = 0, \quad u_y(x,1) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

По формуле (7) получаем полиномиальное решение неоднородного уравнения:

$$\tilde{u}(x,y) = \frac{1}{\mu^2} x^{(2,1,1)} y^3 - \frac{2}{\mu^4} x^{(0,1,1)} y^3 - \frac{6}{\mu^4} x^{(2,1,1)} y + \frac{24}{\mu^6} x^{(0,1,1)} y,$$

и задача сводится к задаче для однородного уравнения:

$$\Delta v(x,y) + \mu^2 v(x,y) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad 0 < y < 1, \quad 0 < \mu < \pi/2,$$

$$v(x,0) = -\tilde{u}(x,0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3,$$

$$v_y(x,1) = -\tilde{u}_y(x,1) = -\frac{3}{\mu^2} x^{(2,1,1)} + \frac{6}{\mu^4} x^{(0,1,1)} + \frac{6}{\mu^4} x^{(2,1,1)} - \frac{24}{\mu^6} x^{(0,1,1)},\ x \in \mathbb{R}^3.$$

Решением этой задачи (единственным в классе функций медленного роста) является:

$$v(x,y) = -\frac{3}{\mu^2} v_{(2,1,1)}(x,y) + \frac{6}{\mu^4} v_{(0,1,1)}(x,y) + \frac{6}{\mu^4} v_{(2,1,1)}(x,y) -$$

$$-\frac{24}{\mu^6} v_{(0,1,1)}(x,y).$$

Решением исходной задачи будет квазиполином:

$$u(x,y) = \tilde{u}(x,y) + v(x,y) =$$

$$= \left(\frac{y^3}{\mu^2} - \frac{6y}{\mu^4} + \frac{6\sin(\mu y)}{\mu^5 \cos(\mu)} - \frac{3\sin(\mu y)}{\mu^3 \cos(\mu)}\right) x^{(2,1,1)} +$$

$$+\left(-\frac{2y^3}{\mu^4}+\frac{24y}{\mu^6}+\frac{9\sin(\mu y)}{\mu^5\cos(\mu)}-\frac{30\sin(\mu y)}{\mu^7\cos(\mu)}+\frac{6y\cos(\mu y)}{\mu^6\cos(\mu)}-\right.$$

$$\left.-\frac{3y\cos(\mu y)}{\mu^4\cos(\mu)}+\frac{6\sin(\mu y)\sin(\mu)}{\mu^6\cos^2(\mu)}-\frac{3\sin(\mu y)\sin(\mu)}{\mu^4\cos^2(\mu)}\right)x^{(0,1,1)}.$$

При $\mu\to 0$ это решение переходит в полином:

$$\lim_{\mu\to 0}u(x,y)=\left(\frac{1}{20}y^5-\frac{1}{4}y\right)x^{(2,1,1)}+\left(-\frac{1}{420}y^7+\frac{1}{12}y^3-\frac{7}{30}y\right)x^{(0,1,1)},$$

который является решением задачи Дирихле-Неймана для уравнения Пуассона:

$$u(x,y)=x^{(2,1,1)}y^3,\quad x\in\mathbb{R}^3,\quad 0<y<1,$$

$$u(x,0)=0,\quad u_y(x,1)=0,\quad x\in\mathbb{R}^3.$$

Заключение

В работе рассмотрены задачи Дирихле и Дирихле-Неймана в многомерном бесконечном слое для неоднородного уравнения Гельмгольца с полиномиальной правой частью и с полиномами в правых частях граничных условий. Показано, что единственным решением каждой из этих задач в классе функций медленного роста в случае, когда параметр уравнения не является собственным значением, будет квазиполином. Дан алгоритм построения этого квазиполинома и рассмотрены примеры.

Статья поступила в редакцию 27.11.2019 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 736 с.
2. Алгазин О. Д. Полиномиальные решения краевых задач для уравнения Пуассона в слое // Математика и математическое моделирование. 2017. №6. С. 1–18.
3. Алгазин О. Д. Полиномиальные решения задачи Дирихле для уравнения Трикоми в полосе // Математика и математическое моделирование. 2018. №3. С. 1–12.
4. Алгазин О. Д. Полиномиальные решения смешанной краевой задачи Дирихле-Неймана для уравнения Трикоми в полосе // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2018. № 3. С. 8–21.
5. Никольский С. М. Краевая задача для многочленов // Труды математического института им. В. А. Стеклова. 1999. Т. 227. С. 223–236.
6. Никольский С. М. Еще о краевой задаче с многочленами // Труды математического института им. В. А. Стеклова. 2001. Т. 232. С. 286–288.
7. Карачик В. В. Построение полиномиальных решений задачи Дирихле для полигармонического уравнения в шаре // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2014. Т. 54. № 7. С. 1149–1170.

8. Волков Е. А. Критерий разрешимости краевых задач для уравнений Лапласа и Пуассона на специальных треугольниках и прямоугольнике в алгебраических многочленах // Труды математического института им. В. А. Стеклова. 1999. Т. 227. С. 122–136.
9. Волков Е. А. О разрешимости в классе многочленов задачи Дирихле для уравнения Лапласа на произвольном многоугольнике // Труды математического института им. В. А Стеклова. 2001. Т. 232. С. 102–114.
10. Hayman W. K., Shanidze Z. G. Polynomial solutions of partial differential equations // Methods and Applications of Analysis. 1999. Vol. 6. No. 1. P. 97–108.
11. Differential-symbol method of constructing the quasi-polynomial solutions of a two-point problem for a partial differential equation / Nytrebych Z. M., Il'kiv V. S., Pukach P. Ya., Malanchuk O. M. // Journal of Mathematical Sciences. 2019. Vol. 239. Iss. 1. P. 62–74.
12. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979. 320 с.

REFERENCES

1. Tikhonov A. N., Samarskii A. A. *Uravneniya matematicheskoi fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow, Nauka Publ., 1972. 736 p.
2. Algazin O. D. [Polynomial Solutions of the Boundary-Value Problems for the Poisson Equation in a Layer]. In: *Matematika i matematicheskoe modelirovanie* [Mathematics and Mathematical Modeling], 2017, no. 6, pp. 1–18.
3. Algazin O. D. [Dirichlet problem polynomial solutions for the Tricomi equation in a strip]. In: *Matematika i matematicheskoe modelirovanie* [Mathematics and Mathematical Modeling], 2018, no. 3, pp. 1–12.
4. Algazin O. D. [Polynomial solutions to the mixed Dirichlet–Neumann boundary-value problem for the Tricomi equation in a strip]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-Matematika* [Bulletin of the Moscow state regional University. Series: Physics-Mathematics], 2018, no. 3, pp. 8–21.
5. Nikol'skii S. M. [A Boundary-Value Problem for Polynomials]. In: *Trudy matematicheskogo instituta im. V. A. Steklova* [Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics], 1999, vol. 227, pp. 223–236.
6. Nikol'skii S. M. [More on a Boundary-Value Problem with Polynomials]. In: *Trudy matematicheskogo instituta im. V. A. Steklova* [Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics], 2001, vol. 232, pp. 286–288.
7. Karachik V. V. [Construction of polynomial solutions to the Dirichlet problem for the polyharmonic equation in a ball]. In: *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki* [Computational Mathematics and Mathematical Physics], 2014, vol. 54, no. 7, pp. 1149–1170.
8. Volkov E. A. [Criterion of Solvability for Boundary-Value Problems for the Laplace and Poisson Equations on Special Triangles and a Rectangle in Algebraic Polynomials]. In: *Trudy matematicheskogo instituta im. V. A. Steklova* [Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics], 1999, vol. 227, pp. 122–136.
9. Volkov E. A. [On the Solvability, in the Class of Polynomials, of the Dirichlet Problem for the Laplace Equation on an Arbitrary Polygon]. In: *Trudy matematicheskogo instituta im. V. A. Steklova* [Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics], 2001, vol. 232, pp. 102–114.
10. Hayman W. K., Shanidze Z. G. Polynomial solutions of partial differential equations. In: *Methods and Applications of Analysis*, 1999, vol. 6, no. 1, pp. 97–108.

11. Nytrebych Z. M., Il'kiv V. S., Pukach P., Malanchuk O. M. Differential-symbol method of constructing the quasi-polynomial solutions of a two-point problem for a partial differential equation. In: *Journal of Mathematical Sciences*, 2019, vol. 239, iss. 1, pp. 62–74.
12. Vladimirov V. S. *Obobshchennye funktsii v matematicheskoi fizike* [Generalized functions in mathematical physics]. Moscow, Nauka Publ., 1979. 320 p.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Алгазин Олег Дмитриевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры вычислительной математики и математической физики Московского государственного технического университета имени Н. Э. Баумана (национального исследовательского университета);
e-mail: mopi66@yandex.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Oleg D. Algazin – PhD in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor at the Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University;
e-mail: mopi66@yandex.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Алгазин О. Д. Точные решения краевых задач для уравнения Гельмгольца в слое с полиномами в правых частях уравнения и граничных условий // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2020. № 1. С. 6–27.
DOI: 10.18384/2310-7251-2020-1-6-27

FOR CITATION

Algazin O. D. Exact solutions to the boundary-value problems for the Helmholtz equation in a layer with polynomials in the right-hand sides of the equation and of the boundary conditions. In: Bulletin of the Moscow state regional University. Series: Physics-Mathematics, 2020, no. 1, pp. 6–27.
DOI: 10.18384/2310-7251-2020-1-6-27

УДК 517.956.35
DOI: 10.18384/2310-7251-2020-1-28-36

ОБ АППРОКСИМАЦИИ УРАВНЕНИЯ ХОПФА НАГРУЖЕННЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

Бозиев О. Л.[1,2]***, Абазоков М. А.***[1]

[1] *Кабардино-Балкарский государственный университет*
360004, г. Нальчик, ул. Чернышевского, д. 173, Кабардино-Балкарская Республика, Российская Федерация

[2] *Институт информатики и проблем регионального управления Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук*
360017, г. Нальчик, ул. Арманд, д. 37А, Кабардино-Балкарская Республика, Российская Федерация

Аннотация. **Цель** работы – исследовать на примере уравнения Хопфа способы редукции дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка со степенной нелинейностью к нагруженным уравнениям. Применить решение редуцированного уравнения для последовательной аппроксимации решения нелинейного уравнения решениями линеаризованного уравнения.

Процедура и методы исследования. Рассмотрено два способа редукции. В первом из них искомая функция в нелинейном члене заменяется её средним значением по пространственной переменной. Для решения вспомогательного обыкновенного дифференциального уравнения возможна вторая редукция, на этот раз к алгебраическому уравнению. Во втором способе производится интегральный переход к нагруженному уравнению. Возникающее здесь вспомогательное уравнение решается с помощью частного решения соответствующего дифференциального неравенства.

Результаты проведённого исследования. Предложенные способы редукции после некоторых дополнительных преобразований позволяют получить начальные приближения для запуска итерационного процесса поиска приближенных решений нелинейной задачи. Показана возможность использования с этой целью частных решений дифференциальных неравенств, ассоциированных с уравнением.

Теоретическая/практическая значимость состоит в демонстрации возможности применения редукции к нагруженным уравнениям для нахождения приближенных решений дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка со степенной нелинейностью.

Ключевые слова: нелинейное уравнение, редукция к нагруженному уравнению, уравнение Хопфа, краевая задача, аппроксимация

APPROXIMATION OF THE HOPF EQUATION BY LOADED EQUATIONS

***O. Boziev*[1,2]*, M. Abazokov*[1]**

[1] *Kabardino-Balkarian State University*
ul. Chernyshevskogo 173, 360004 Nalchik, Kabardino-Balkarian Republic, Russian Federation

[2] *Institute of Computer Science and Problems of Regional Management of Kabardino-Balkarian Science Center of the Russian Academy of Sciences*
ul. Armand 37A, 360017 Nalchik, Kabardino-Balkarian Republic, Russian Federation

Abstract. **Purpose.** We investigate the methods for reducing first-order partial differential equations with power nonlinearity to loaded equations using the example of the Hopf equation. The solution to the reduced equation is applied to a sequential approximation of the solution to a nonlinear equation by solutions to a linearized equation.
Methodology and Approach. Two methods of reduction are proposed. In the first of them, the desired function in the nonlinear term is replaced by its average value for the spatial variable. To solve an auxiliary ordinary differential equation, a second reduction is possible, namely, to an algebraic equation. In the second method, an integral transition is made to the loaded equation. The resulting auxiliary equation is solved using a partial solution to the corresponding differential inequality.
Results. The proposed methods of reduction after some additional transformations allow one to obtain initial approximations for starting the iterative process of searching for approximate solutions to a nonlinear problem. The possibility of using partial solutions associated with the differential inequality equation is shown.
Theoretical and Practical Implications. We have demonstrated the possibility of applying reduction to loaded equations to find approximate solutions to first-order partial differential equations with power nonlinearity.
Keywords: nonlinear equation, reduction to the loaded equation, Hopf equation, boundary-value problem, approximation.

Введение

Известно, что значительное количество физических, биологических, экологических и других процессов описывается нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных. Практически важные проблемы, вызывающие интерес к таким уравнениям, приводят к разного рода начально-краевым задачам для них. Наибольший интерес представляют аналитические решения дифференциальных уравнений, так как они позволяют получить формульные зависимости между параметрами задачи и её решением. При этом вид нелинейности существенно влияет на возможность получения такого решения.

В [1] предложен приближенно-аналитический метод решения первой начально-краевой задачи для нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа второго порядка, содержащих натуральную степень решения, или его частной производной. Для нахождения приближенного решения нелинейного уравнения сначала производится его редукция к нагруженному уравнению [2, с. 17] путём замены нелинейного члена его интегралом по пространственной переменной. Решение нагруженного уравнения ищется путём перехода к ассоциированному обыкновенному дифференциальному уравнению при использовании предварительно установленных априорных оценок нагруженного уравнения в соответствующих функциональных пространствах. Впоследствии оно используется для начала итерационного процесса последовательных приближений к точному решению нелинейной задачи. В данной работе метод применяется к нелинейному уравнению первого порядка, при этом демонстрируются различные способы перехода к нагруженным уравнениям и нахождения начального приближения в итерационном процессе.

1. Постановка задачи

Как известно, квазилинейное уравнение Хопфа:

$$u_t + uu_x = 0 \tag{1}$$

описывает динамику скорости течения жидкости $u(x,t)$, кинематическая вязкость которой равна нулю. Общим решением уравнения (1) является произвольная функция $\Phi(tu - x, u) = 0$ [3, с. 254]. Это же уравнение описывает и одномерное течение облака невзаимодействующих пылинок [4, с. 32], а также является частным случаем уравнение переноса:

$$q_t + Uq_x = 0,$$

где q – переносимая величина, U – скорость переноса.

Для (1) поставим условия

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [0,l], \quad u(0,t) = \psi(t), \quad t \in [0,T], \quad \varphi(0) = \psi(0), \tag{2}$$

и будем рассматривать способы редукции (1) к нагруженному уравнению для приближенного решения задачи (1), (2).

2. Редукция к нагруженному уравнению

Применим метод редукции к нагруженным уравнениям, использованный в [1]. Для этого множитель $u(x,t)$ во втором слагаемом заменим его средним значением на некотором интервале $[0, l]$ по формуле

$$\overline{u}(t) = \frac{1}{l}\int_0^l u(x,t)dx, \tag{3}$$

в результате чего уравнение (1) редуцируется к нагруженному уравнению:

$$u_t + \overline{u}u_x = 0. \tag{4}$$

Заметим, что (4) содержит ослабленную, по сравнению с уравнением (1), нелинейность, что позволяет произвести последующие преобразования. Проинтегрируем (4) по x:

$$\overline{u}\left(u(x,t) - u(0,t)\right) = -\int_0^x u_t(\xi,t)d\xi.$$

Применяя теорему о среднем значении интеграла, перейдём к нагруженному уравнению:

$$\overline{u}\left(u(x,t)-u(0,t)\right)=-\frac{x}{l}\int\limits_0^l u_t(x,t)dx,$$

которое с учётом (2) и (3) перепишем в виде

$$u=\psi(t)-\frac{x}{l}\frac{\overline{u}'}{\overline{u}}. \quad (5)$$

Применим к последнему преобразование (3), что приводит к нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\overline{u}'+2\overline{u}^2-2\psi\overline{u}=0. \quad (6)$$

Необходимое для его интегрирования начальное условие получим из первого условия (2):

$$\overline{u}(0)=\frac{1}{l}\int\limits_0^l u(x,0)dx=\frac{1}{l}\int\limits_0^l \varphi(x)dx. \quad (7)$$

Подстановка функции $\overline{u}(t)$, найденной в результате решения задачи (6), (7), делает (4) линейным уравнением. Его решение при условиях (2) в свою очередь приводит к функции $u(x,t)$, принимаемой за начальное приближение в итерационном процессе решения последовательности задач вида:

$$u_t^{(k)}+u^{(k-1)}u_x^{(k)}=0,$$

$$u^{(k)}(x,0)=\varphi(x),\quad x\in[0,l],\quad u^{(k)}(0,t)=\psi(t),\quad t\in[0,T],\quad \varphi(0)=\psi(0), \quad (8)$$

где k = 1, 2, … – итерационный индекс. Процесс завершится при выполнении заданного условия его окончания.

Заметим, что от функций, входящих в условия (2), существенно зависит трудоёмкость процедуры интегрирования уравнения (6) и вид соответствующей функции $u^{(0)}$ которая, в свою очередь, влияет на интегрирование уравнения в (8). Для упрощения этих действий в развитие описанного способа произведём вторую редукцию [5]. На этот раз редуцируем нелинейное уравнение (6), для чего заменим в нём функцию $\overline{u}$ неопределённой константой:

$$\overline{\overline{u}}=\frac{1}{T}\int\limits_0^T \overline{u}(t)dt=\frac{1}{lT}\int\limits_0^T\int\limits_0^l u(x,t)dxdt. \quad (9)$$

Это приводит к линейному уравнению:

$$\overline{u}'=2\left(\psi\overline{\overline{u}}-\overline{\overline{u}}^2\right),$$

интегрирование которого даёт функцию:

$$\overline{u}(t)=2\overline{\overline{u}}\int\psi(t)dt-2\overline{\overline{u}}^2t+C. \quad (10)$$

Для определения $\overline{\overline{u}}$ применим к (10) преобразование (9). В результате придём к алгебраическому уравнению:

$$\overline{\overline{u}}^2 + \frac{1}{T^2}\left(T - 2\int_0^T\int \psi(t)dtdt\right)\overline{\overline{u}} - \frac{C}{T} = 0. \qquad (11)$$

Найденное в результате решения (11) значение $\overline{\overline{u}}$ и подобранная константа C позволяют определить с помощью (10) функцию $\overline{u}(t)$, которая подставляется в (4) для того, чтобы найти $u^{(0)}$ для начала процесса (8).

Пример 1. Рассмотрим возможность нахождения начального приближения с помощью решения нелинейной задачи (6), (7). При условиях (2) простого вида, содержащих функции $\varphi(x)=1$, $\psi(t)=1$, за решение (6) можно принять $\overline{u}(t) = th(2t+6)$ и найти с её помощью из (5) функцию:

$$u(x,t) = u^{(0)}(x,t) = cth(2t+6)\left(\psi(t) - \frac{4x}{ch(2t+6)-1}\right).$$

Очевидно, что она весьма неудобна для запуска итерационного процесса аналитического решения последовательности задач (8). Если условия (2) зависят соответственно от x и t, то $u^{(0)}$ имеет ещё более сложный вид. Для получения более простого вида этой функции применим вторую редукцию. Пусть $l = T = 1$. Решая (11), находим $\overline{\overline{u}} = \pm\sqrt{C}$. Отсюда следует, что $C \geq 0$. Выберем $C = 1$, тогда $\overline{\overline{u}} = \pm 1$. Выбирая $\overline{\overline{u}} = -1$, по формуле (10) находим $\overline{u}(t) = 1 - 4t$, тогда (4) принимает вид:

$$u_t + (1-4t)u_x = 0.$$

За решение данного уравнения примем линейную форму его первого интеграла, тогда:

$$u^{(0)}(x,t) = -2t^2 + t - x.$$

Ниже приведены три первых приближения, полученные вследствие реализации процесса (8) средствами системы компьютерной математики Maple:

$$u^{(1)}(x,t) = (2t^2 - 5t + x + 5)e^t,$$

$$u^{(2)}(x,t) = -\int (2t^2 - 5t + 5)e^{t-e^t}dt + xe^{-e^t},$$

$$u^{(3)}(x,t) = xe^{Ei(e^t)} + \int e^{Ei(e^t)}\int (2t^2 - 5t + 5)e^{t-e^t}dtdt. \qquad (12)$$

Полученные выражения последовательно аппроксимируют решение задачи (1), (2). Во всех приближениях, начиная с третьего, используется экспоненциальный интеграл $Ei(z) = \int_1^\infty \sigma^{-1}e^{-\sigma z}d\sigma$.

3. Интегральный переход к нагруженному уравнению

Рассмотрим способ, в котором нагруженное уравнение возникает «естественным» образом в процессе преобразований исходного уравнения, а не в результате замены нелинейного члена. Запишем (1) в виде:

$$2u_t + (u^2)_x = 0$$

и проинтегрируем по x:

$$u^2(x,t) = u^2(0,t) - 2\int_0^x u_t(\xi,t)d\xi.$$

Применяя теорему о среднем значении интеграла, получим нагруженное уравнение:

$$u^2(x,t) = u^2(0,t) - \frac{2x}{l}\int_0^l u_t(x,t)dx.$$

Используя (2) и обозначение (3), перепишем его в виде:

$$u^2(x,t) = \psi^2(t) - 2x\overline{u}' \qquad (13)$$

и проинтегрируем по $x \in [0, l]$:

$$\int_0^l u^2 dx = l\psi^2(t) - l^2\overline{u}'(t).$$

В силу неотрицательности левой части последнего приходим к дифференциальному неравенству:

$$\overline{u}'(t) \le \frac{1}{l}\psi^2(t). \qquad (14)$$

Пусть функция $\overline{u}(t)$ удовлетворяет следующему определению [6]: Функция $y(t)$, определенная на промежутке $[a,b]$, называется решением неравенства $y'(t) \le f(t,y)\ \forall t \in [a,b]$, где $f, f_y' \in C(G)$ в некоторой области $G \subset R^2$, если выполнены условия: 1) $y(t) \in C^1[a,b]$; 2) график $y(t)$ лежит в G при $t \in [a, b]$.

Согласно [7], все решения приведённого неравенства могут быть выражены через общее решение уравнения $y'(t) = f(t,y)$, зависящего от некоторой гладкой функции. Применяя к (14) эти результаты, можно определить функцию $\overline{u}(t)$, подстановка которой в (13) приводит к функции $u(x,t)$, принимаемой за начальное приближение в итерационном процессе (8).

Пример 2. По-прежнему $\varphi(x) = 1$, $\psi(t) = 1$. Тогда в соответствии с [6] и [7] решением (14) будет функция:

$$\overline{u}(t) = t + C(t),$$

где $C(t)$ – произвольная гладкая невозрастающая функция. Пусть $C(t) = -t$, тогда $\overline{u}(t) = 0$, а из (13) найдём $u = \pm 1$. Выберем для определённости положительный знак в правой части, и подставим в (4), что приводит к уравнению $u_t + u_x = 0$. Его решение, которым является «бегущая волна» $u(x,t) = t - x$ [8], примем за начальное приближение $u^{(0)}$ в итерационном процессе (8). Как и в предыдущем примере, в качестве решения на очередной итерации будем принимать линейную форму первого интеграла соответствующего уравнения. Воспользовавшись системой Maple, запишем первые три приближения:

$$u^{(1)}(x,t) = -(t - x - 1)e^t,$$

$$u^{(2)}(x,t) = \int (t-1)e^{t-e^t}\,dt + xe^{-e^t},$$

$$u^{(3)}(x,t) = xe^{Ei(e^t)} - \int e^{Ei(e^t)} \int (t-1)e^{t-e^t}\,dtdt. \tag{15}$$

Получена последовательность функций, аппроксимирующих решение задачи (1), (2).

Заметим, что главным отличием соответствующих членов последовательностей (12) и (15) является степень многочлена, входящего в эти выражения. Нахождение последующих членов (12) и (15) демонстрирует тенденцию к их сближению, что может означать их стремление к одной и той же функции, являющейся точным решением исходной задачи.

Заключение

1. В работе на примере уравнения Хопфа впервые представлена методика нахождения приближенного решения начально-краевой задачи для нелинейного уравнения в частных производных первого порядка. Она состоит в редукции к ассоциированному нагруженному уравнению и решения последовательности линейных аппроксимирующих задач. Представлено два способа аппроксимации нелинейного уравнения нагруженным.
2. Реализован способ, состоящий в замене нелинейного члена уравнения его средним значением на отрезке изменения пространственной переменной, и в дальнейшем переходе к вспомогательному обыкновенному дифференциальному уравнению. Отмечено, что возможна вторая редукция, в результате которой вспомогательное уравнение сводится к алгебраическому.
3. Также применён способ, при котором аппроксимация является, главным образом, результатом интегрирования уравнения по пространственной переменной.
4. Получен новый результат, состоящий в использовании частного решения дифференциального неравенства, соответствующего нагруженному уравнению для начала итерационного процесса нахождения приближенных решений.
5. С помощью описанных способов построены первые члены последовательностей приближенных решений линейных аппроксимирующих задач.
6. Сформулировано предположение о сходимости указанных последовательностей к решению исходной нелинейной задачи.

Статья поступила в редакцию 16.12.2019 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бозиев О. Л. О приближенно-аналитическом методе решения нелинейного гиперболического уравнения с однородными начальными условиями // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2017. № 3. С. 43–52.
2. Нахушев А. М. Нагруженные уравнения и их применение. М: Наука, 2012. 232 с.
3. Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 416 с.
4. Задачи по математическим методам физики / И. В. Колоколов, Е. А. Кузнецов, А. И. Мильштейн, Е. В. Подивилов и др. М.: Эдиториал УРСС, 2000. 288 с.
5. Бозиев О. Л. Решение начально-краевой задачи для нелинейного гиперболического уравнения с помощью двойной редукции к нагруженным уравнениям // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. 2014. № 4 (60). С. 7–12.
6. Ильин Ю. А. Общие вопросы интегрирования дифференциальных неравенств в явном виде // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4 (62). № 4. С. 597–607.
7. Ильин Ю. А. Об интегрировании дифференциальных неравенств в явном виде // Электронный журнал «Дифференциальные уравнения и процессы управления». 2015. № 1. С. 39–61. URL: https://diffjournal.spbu.ru/RU/numbers/2015.1/article.1.3.html (дата обращения: 22.10.2019).
8. Лобанов А. И., Петров И. Б. Численные методы решения уравнений в частных производных [Электронный ресурс] // Национальный Открытый Университет «ИНТУИТ» : [сайт]. URL: https://www.intuit.ru/studies/courses/1170/213/lecture/5493?page=2 (дата обращения: 12.11.2019).

REFERENCES

1. Boziev O. L. [On the approximate-analytic method of solving a nonlinear hyperbolic equation with homogeneous initial conditions]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika* [Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics – Mathematics], 2017, no. 3, pp. 43–52. 2. Nakhushev A. M. *Nagruzhennye uravneniya i ikh primenenie* [Loaded equations and their applications]. Moscow, Nauka Publ., 2012. 232 p.
3. Zaitsev V. F., Polyanin A. D. *Spravochnik po differentsial'nym uravneniyam s chastnymi proizvodnymi* [Handbook of differential equations with partial derivatives]. Moscow, FIZMATLIT Publ., 2003. 416 p.
4. Kolokolov I. V., Kuznetsov E. A., Mil'shtein A. I., Podivilov E. V. et al. *Zadachi po matematicheskim metodam fiziki* [Problems of mathematical methods of physics]. Moscow, Editorial URSS Publ., 2000. 288 p.
5. Boziev O. L. [Solving an initial boundary-value problem for the nonlinear hyperbolic equation using a double reduction to the loaded equations]. In: *Izvestiya Kabardino-Balkarskogo nauchnogo tsentra RAN* [News of Kabardino-Balkarian scientific center of the Russian academy of sciences], 2014, no. 4 (60), pp. 7–12.
6. Il'in Yu. A. [General problems of explicit integration of differential inequalities]. In: *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Astronomiya* [Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy], 2017, vol. 4 (62), no. 4, pp. 597–607.
7. Il'in Yu. A. [On Explicit Integration of Differential Inequalities]. In: *Elektronnyi zhurnal 'Differentsial'nye uravneniya i protsessy upravleniya'* [Electronic journal "Differential equa-

tions and control processes"], 2015, no. 1, pp. 39–61. Available at: https://diffjournal.spbu.ru/RU/numbers/2015.1/article.1.3.html (accessed: 22.10.2019).
8. Lobanov A. I., Petrov I. B. [Numerical methods for solving partial differential equations]. In: *Natsional'nyi Otkrytyi Universitet «INTUIT»* [The national Open University "INTUIT"]. Available at: https://www.intuit.ru/studies/courses/1170/213/lecture/5493?page=2 (accessed: 12.11.2019)

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Бозиев Олег Людинович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры информационной безопасности института информатики, электроники и робототехники Кабардино-Балкарского государственного университета им. Х. М. Бербекова; старший научный сотрудник института информатики и проблем регионального управления Кабардино-Балкарского научного центра РАН;
e-mail: boziev@yandex.ru

Абазоков Мухамед Адмирович – магистрант магистерской программы «Компьютерное моделирование» направления подготовки «Информатика и вычислительная техника» Кабардино-Балкарского государственного университета им. Х. М. Бербекова;
e-mail: abazokov1997@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Oleg L. Boziev – PhD in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor at the Department of Information Security, Institute of Informatics, Electronics and Computer Technologies, Kabardino-Balkarian State University; senior staff scientist of the Institute of Computer Science and Problems of Regional Management of Kabardino-Balkarian Science Center of the Russian Academy of Sciences;
e-mail: boziev@yandex.ru

Mukhamed A. Abazokov – master student of the Master's program "Computer Modeling" in the field of study "Computer Science and Computer Engineering", Kabardino-Balkarian State University;
e-mail: abazokov1997@mail.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Бозиев О. Л., Абазоков М. А. Об аппроксимации уравнения Хопфа нагруженными уравнениями // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2020. № 1. С. 28–36.
DOI: 10.18384/2310-7251-2020-1-28-36

FOR CITATION

Boziev O. L., Abazokov M. A. Approximation of the Hopf equation by loaded equations. In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics – Mathematics,* 2020, no. 1, pp. 28–36.
DOI: 10.18384/2310-7251-2020-1-28-36

УДК 004.89+159.9.072
DOI: 10.18384/2310-7251-2020-1-37-49

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ВИРТУАЛЬНОЙ РЕАЛЬНОСТИ НА АДЕКВАТНОСТЬ ВОСПРИЯТИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОСТИ НЕРВНОЙ СИСТЕМОЙ ЧЕЛОВЕКА

Кириченко А. К., Калашников Е. В.

Московский государственный областной университет
141014, Московская область, г. Мытищи, ул. Веры Волошиной, д. 24, Российская Федерация

Аннотация. Цель статьи выявить влияние воздействия виртуальной действительности (искажённой или ложной информации) на нервную систему человека.
Процедура и методы исследования. Используется математическая модель искусственной нейронной системы (ИНС), построенной по образу и подобию нервной системы человека. Для проведения корректного компьютерного эксперимента были выбраны: (1) воздействие игровой системы на ИНС, обеспечивающей большое количество виртуальной информации и (2) ИНС настраивалась только на визуальное восприятие. На вход ИНС с предварительным обучением подаётся искажённая (виртуальная) информация, и ИНС переучивается с учётом искажённой информации. После нескольких сеансов в условиях виртуальной реальности ИНС изучается реакция ИНС на исходную действительную реальность. Для управления ИНС разработана программа на Python.
Результаты проведённого исследования. Показано, что проведённый модельный эксперимент по воздействию виртуальной реальности на ИНС, предварительно обученной на традиционных объектах окружающей действительности, приводит к затруднённому их узнаванию или, вообще, неузнаванию.
Теоретическая/практическая значимость заключается в том, что впервые была построена подходящая компьютерная модель, позволяющая изучить влияние виртуальной действительности на нервную систему человека; впервые показано количественно и качественно, как воздействует виртуальная реальность на ИНС и, соответственно, на нервную систему человека.
Ключевые слова: виртуальная реальность, искусственная нейронная сеть, обучение, распознавание

MODELING THE INFLUENCE OF VIRTUAL REALITY ON THE ADEQUACY OF PERCEPTION OF REALITY BY THE HUMAN NERVOUS SYSTEM

A. Kirichenko, E. Kalashnikov

Moscow Region State University
ul. Very Voloshinoi 24, 141014 Mytishchi, Moscow region, Russian Federation

Abstract. **Purpose.** We have identified the impact of virtual reality (distorted or false information) on the human nervous system.
Methodology and Approach. We use a mathematical model of an artificial neural network (ANN), built in the image and likeness of the human nervous system. To conduct a correct computer experiment, we selected: (1) the impact of the game system on the ANN, which provides a large amount of virtual information, and (2) the ANN was configured only for visual perception. Distorted (virtual) information is sent to the input of the pre-trained ANN, and the ANS is retrained taking into account the distorted information. After several sessions in the virtual reality environment of the ANN, the response of the ANN to the original actual reality is studied. A Python program has been developed to manage the ANS.
Results. It is shown that the conducted model experiment on the effect of virtual reality on the ANN, previously trained on traditional objects of the surrounding reality, makes these objects either difficult to recognize or, in general, unrecognizable.
Theoretical and Practical implications. A suitable computer model was built for the first time that allows one to study the effect of virtual reality on the human nervous system; it is shown for the first time quantitatively and qualitatively how virtual reality affects the ANN and, consequently, the human nervous system.
Keywords: virtual reality, artificial neural network, learning, recognition.

Введение

В окружение современного человека всё в большей и большей мере вовлекаются информационные технологии [1–5]. По своим возможностям обработки поступающих данных информационные технологии далеко обходят возможности нервной системы человека и позволяют генерировать виртуальные миры (виртуальную реальность), которые могут совпадать с действительностью, имитируя изменчивость окружения, или совсем не совпадать, давая искажённую картину реального (в искажённой форме) мира. Погружаясь в виртуальный мир, нервная система человека адаптируется к внутренним условиям этого мира, обостряет определённые органы чувств, формирует факторы осознания новой, но уже виртуальной реальности. Выход в действительный мир чреват конфликтом с действительностью из-за того, что в сознании сформировались преференции виртуального мира, которых нет в реальном мире. Изучение реакции нервной системы человека на вмешательство виртуальной реальности представляет собой чрезвычайно сложную проблему [1–3; 6; 7], поскольку нервная система человека, обладая различными органами чувств и их коллективным взаимодействием, способна сглаживать и адаптировать реакцию нервной системы человека на изменения в окружающем мире. Поэтому, первое, что необходимо сделать для исследования воздействия виртуальной реальности на нервную систему, это сузить количество органов чувств до минимума, чтобы избежать плохо контролируемой корректировки реакции другими органами чувств.

Сокращения количества органов чувств можно добиться, используя в качестве имитатора виртуальной реальности, действующего на нервную систему человека, погружение в игровой мир при помощи, например, шлема виртуальной реальности. По-видимому, условия игровой среды являются наиболее эффективным инструментом воздействия на органы чувств человека в рассмотрении поставленной задачи. Поскольку, находясь в игровом виртуальном мире, человеку необходимы лишь слух и зрение, игра будет поощрять проведение всё большего времени в виртуальном мире, навязывая, в то же время, свои переформированные идеалы и их преференции.

Для выяснения влияния воздействия виртуальной реальности на нервную систему человека удобно воспользоваться тем, что искусственная математическая модель нейронной сети построена по образу и подобию реальной нервной системы [4; 5]. В таком случае осознание для человека себя и своего места в пространстве и во времени можно сравнить с искусственной нейросетью, которая выполняла бы определённые действия исходя из входных данных, «знаний», которые она получает.

Таким образом, цель работы состоит в том, чтобы выявить влияние воздействия виртуальной действительности на нервную систему человека и на его привычные представления о действительных образах при помощи игрового виртуального мира и искусственной нейронной сети.

1. Построение Модели

В основном, сходство работы математической модели искусственной нейронной сети с реальной нервной системой позволяет направленно исследовать процессы распознавания и обучения [4; 5]. В таком случае, факторы, влияющие на наши органы чувств, это те же входные данные для искусственной нейросети. Такими данными может быть информация об изучаемых объектах, например, о цифрах (визуальная и аудиоинформация, поступающая извне).

В нашей работе сходство ИНС с нервной системой человека используется для изучения устойчивости нервной системы человека по отношению к воздействующей на неё виртуальной реальности (изменённых или искажённых действительных образов). Регулярное воздействие такой виртуальной реальности требует переучивания ИНС. В результате ИНС теряет возможность однозначной идентификации действительной реальности от виртуальной реальности. В таком случае результат переучивания ИНС и есть начало «***потери***» искусственной нейронной сетью восприятия реальности.

Для решения задачи воспользуемся искусственной нейронной сетью (ИНС), распознающей числа[4; 5; 8].

Для моделирования воздействия виртуальной игровой системы на нервную систему человека используется (многослойная) искусственная нейросеть [4; 5], на вход которой подаются данные о цифрах 0 – 9. Машинное обучение [8–9] на основе баз данных[1,2] может осуществляться несколькими способами: RFC

---

1 Machine Learning – Hierarchical Clustering [Электронный ресурс] // Tutorials Point : [сайт]. URL: https://www.tutorialspoint.com/machine_learning_with_python/machine_learning_with_python_clustering_algorithms_hierarchical.htm (дата обращения: 14.12.2019).

2 The MNIST data base of handwritten digits [Электронный ресурс]. URL: http://yann.lecun.com/exdb/mnist/ (дата обращения: 14.12.2019).

```
# RandomForestClassifier (RFC)
importsys
importnumpyasnp
importpickle
fromsklearnimportmodel_selection
fromsklearn.ensembleimportRandomForestClassifier
fromsklearn.metricsimportaccuracy_score, confusion_matrix
fromMNIST_Dataset_Loader.mnist_loaderimportMNIST
importmatplotlib.pyplotasplt
frommatplotlibimportstyle
style.use('ggplot')
```

Загрузка баз данных в код, ввод выполняемых действий, влог (журнал действий) программы

```
print('\nLoading MNIST Data...')
# data = MNIST('./python-mnist/data/')
data = MNIST('./MNIST_Dataset_Loader/dataset/')
print('\nLoading Training Data...')
img_train, labels_train = data.load_training()
train_img = np.array(img_train)
train_labels = np.array(labels_train)
print('\nLoading Testing Data...')
img_test, labels_test = data.load_testing()
test_img = np.array(img_test)
test_labels = np.array(labels_test)
```

Задаем аргументы по координатам x и y.

```
#Features
X = train_img
#Labels
y = train_labels
```

Подготовка тренировочной и проверочной баз.

```
print('\nPreparing Classifier Training and Validation Data...')
X_train, X_test, y_train, y_test =
model_selection.train_test_split(X,y,test_size=0.1)
```

Начало. Окончание на стр. 41.

Рисунок 1 / Figure 1

Программа обучения ИНС и распознавания на Python при использовании баз данных: RFC, KNN, SVM.
Program for training the ANN and recognition in Python using RFC, KNN and SVM databases.

Источник: составлено авторами.

(Random Forest Classifier)[1], KNN (K-Nearest Neighbors)[2] и SVM (Supported Vector Machine)[3]. Для управления ИНС написана программа на Python (см. рис. 1).

---

[1] Random Forest Classification and its implementation in Python [Электронный ресурс] // Towards Data Science : [сайт]. URL: https://towardsdatascience.com/random-forest-classification-and-its-implementation-d5d840dbead0 (дата обращения: 14.12.2019).

[2] Алгоритм ближайшего соседа. Алгоритм KNN [Электронный ресурс] // BaseGroup Labs : [сайт]. URL: https://basegroup.ru/community/articles/knn#comment-14377 (дата обращения: 14.12.2019)

[3] Метод опорных векторов (SVM) [Электронный ресурс] // Data Science : [сайт]. URL: http://datascientist.one/support-vector-machines/ (дата обращения: 14.12.2019)

Сохраняем метод распознавания.

```
print('\nRandom Forest Classifier with n_estimators = 100, n_jobs = 10')
print('\nPickling the Classifier for Future Use...')
clf = RandomForestClassifier(n_estimators=100, n_jobs=10)
clf.fit(X_train,y_train)
with open('MNIST_RFC.pickle','wb') as f:
pickle.dump(clf, f)
pickle_in = open('MNIST_RFC.pickle','rb')
clf = pickle.load(pickle_in)
```

Сам процесс распознавания.

```
print('\nCalculating Accuracy of trained Classifier...')
confidence = clf.score(X_test,y_test)
print('\nMaking Predictions on Validation Data...')
y_pred = clf.predict(X_test)
print('\nCalculating Accuracy of Predictions...')
accuracy = accuracy_score(y_test, y_pred)
print('\nCreating Confusion Matrix...')
conf_mat = confusion_matrix(y_test,y_pred)
print('\nRFC Trained Classifier Confidence: ',confidence)
print('\nPredicted Values: ',y_pred)
print('\nAccuracy of Classifier on Validation Image Data: ',accuracy)
print('\nConfusion Matrix: \n',conf_mat)
plt.matshow(conf_mat)
plt.title('Confusion Matrix for Validation Data')
plt.colorbar()
plt.ylabel('True label')
plt.xlabel('Predicted label')
plt.show()
print('\nMaking Predictions on Test Input Images...')
test_labels_pred = clf.predict(test_img)
print('\nCalculating Accuracy of Trained Classifier on Test Data... ')
acc = accuracy_score(test_labels,test_labels_pred)
print('\n Creating Confusion Matrix for Test Data...')
conf_mat_test = confusion_matrix(test_labels,test_labels_pred)
print('\nPredicted Labels for Test Images: ',test_labels_pred)
print('\nAccuracy of Classifier on Test Images: ',acc)
print('\nConfusion Matrix for Test Data: \n',conf_mat_test)
```

Построение матрицы возмущений с тренировочной информацией.

```
plt.matshow(conf_mat_test)
plt.title('Confusion Matrix for Test Data')
plt.colorbar()
plt.ylabel('True label')
plt.xlabel('Predicted label')
plt.axis('off')
plt.show()
sys.stdout = old_stdout
log_file.close()
```

Вывод цифр на экран с результатом распознавания и заданным коэффицентом.

```
a = np.random.randint(1,30,10)
for i in a:
two_d = (np.reshape(test_img[i], (28, 28)) * 255).astype(np.uint8)
plt.title('Original Label: {0}Predicted Label:
{1}'.format(test_labels[i],test_labels_pred[i]))
plt.imshow(two_d, interpolation='nearest',cmap='gray')
plt.show()
#------------------------ EOC ---------------------------
```

Окончание. Начало на стр. 40.

Рисунок 1 / Figure 1

Программа обучения ИНС и распознавания на Python при использовании баз данных: RFC, KNN, SVM.
Program for training the ANN and recognition in Python using RFC, KNN and SVM databases.

Источник: составлено авторами.

2. Схема эксперимента

(1) Предварительно ИНС обучена распознавать цифры по базам данных RFC, KNN, SVM (см. рис. 2).

(2) Манипулируя входными данными, будем (подавать искажённую информацию) редактировать результат распознавания. Это значит, что мы меняем (искажаем) образ цифры.

(3) Проводим дополнительное обучение ИНС так, чтобы к уже имеющемуся образу был добавлен новый (искажённый) образ.

Другими словами, задавая ИНС неверные ассоциативные результаты в процессе эксперимента, будем изменять уже вложенные в неё знания об определённых цифрах так, чтобы впоследствии они воспринимались неверно.

Рисунок 2 / Figure 2

Результаты (в процентах) успешных распознаваний от общего числа попыток при использовании баз данных о цифрах 0 – 9.

Results (in percent) of successful recognition of the total number of attempts when using digits 0 – 9 from databases.

Источник: данные авторов.

2.1. Поэтапное проведение

1. Используя тренировочный набор данных, впервые обучаем программу. После чего запрашиваем распознавание числа 9, написанного вручную. Нейросеть безошибочно распознает число.

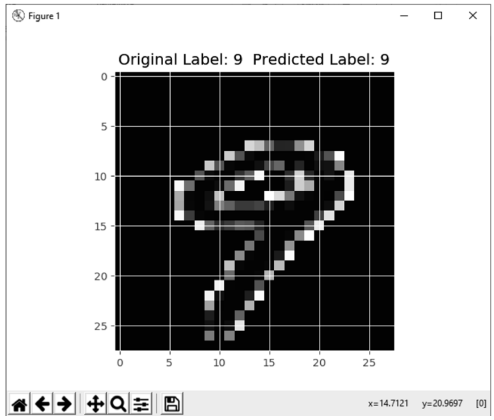

Рисунок 3 / Figure 3
Исходная цифра 9.
Original digit 9.

Источник: данные авторов.

2. Далее, дополняем знания нейросети, отредактировав тренировочные данные. Знания о цифре 9 теперь имеют разные значения. Например, скажем, что это 0, взяв данные об этой цифре из уже имеющихся баз данных.
3. Попробуем снова запросить распознавание написанной от руки цифры.

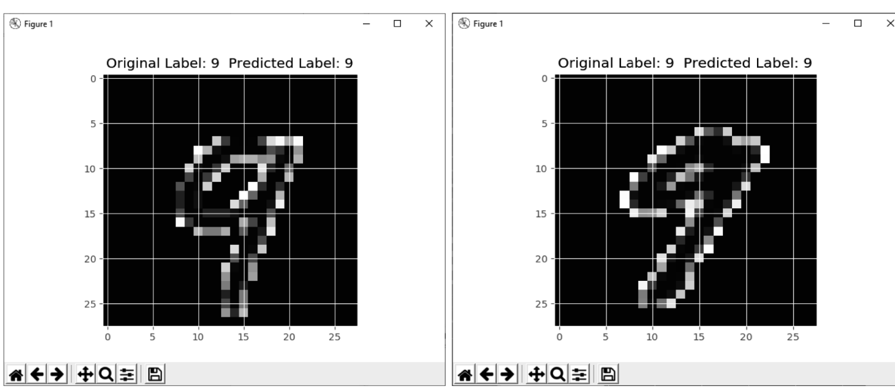

Рисунок 4 / Figure 4
Разное написание цифры 9.
Miscellaneous spelling of the digit 9.

Источник: данные авторов.

Спустя несколько запросов ИНС ошибочно распознает заданную цифру 9 (рис. 5).

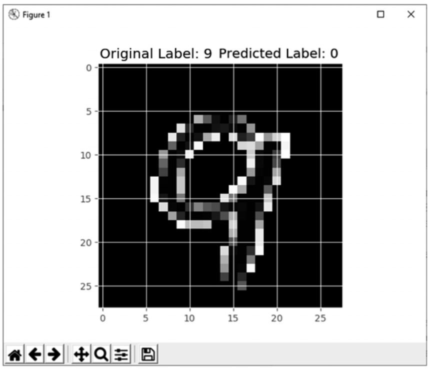

Рисунок 5 / Figure 5
Ошибочное распознавание цифры 9.
Erroneous recognition of the digit 9.

Источник: данные авторов.

Человек (его нервная система) воспринимает окружающий мир исключительно с помощью органов чувств. И наша модельная нейронная сеть, аналогично, требует постоянного ввода данных сначала для обучения, позже – для решения поставленной задачи.

В этом случае переучивание такой искусственной нейронной сети будет равнозначно «***потере***» восприятия реальности.

Исходные данные, которые мы имеем для нашего эксперимента – это определённые знания нейронной сети о цифрах 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. А детальнее, это знания о сочетаниях некоторых элементов (точек-пикселей, отрезков (длиной в несколько пикселей), информация об отсутствии пикселей в каком-то заданном объёме), из которых состоит каждая цифра (рис. 3–5). Искажение цифры предполагает, что при частичном «стирании» части цифры, например, в цифре 9 (рис. 5), можно получить туже цифру, но с маленьким хвостиком (рис. 6).

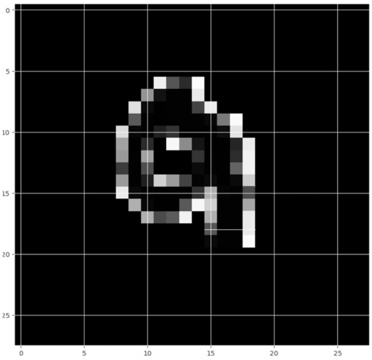

Рисунок 6 / Figure 6
Цифра 9 со стёртым «хвостом».
Digit 9 with ‘erased tail’.

Источник: данные авторов.

Такой знак похож на 0. Наша ИНС выдаст именно такой результат, ведь она видит лишь выставленные точки и линии, пытаясь подобрать закономерный им результат. Однако знать, что этот дефектный знак есть цифра 9 с недостроенным хвостом (рис. 6.) будем только мы. И, так как этот дефектный знак является именно цифрой 9, мы вынуждены занести эту информацию в нашу нейронную сеть.

Теперь ИНС продолжит ошибаться, если этот хвост будет слишком малым или, наоборот, чуть длиннее того, что мы стёрли.. Через несколько запусков подобных дефектных «девяток» с различными уровнями искажения или редакции, нейронная сеть может начать иногда воспринимать цифру 0 как 9. Потому, что заданная «девятка с отрезанным хвостиком» уж очень напоминает 0. Теперь, чтобы машина прочитала 0, нужно будет сделать его высоким и «худеньким». Механизмы распознавания усложняются и деформируются, к сожалению, в неправильную сторону (именно в неправильную сторону, поскольку для дефектной цифры мы организуем «дополнительное обучение» нашей нейронной сети). Эти нули с хвостиками – и есть виртуальная реальность. ИНС принимает местные (виртуальные) правила игры как единственно верные, начинает теряться (путаться) в реальности. Видя знакомые объекты и элементы, ИНС будет «додумывать» ближайшие ассоциативные признаки. Разброс этих признаков будет увеличиваться с более глубоким погружением в виртуальность (рис. 7.1. третий промежуток обучения). Нехватка каких-то элементов станет нормой, в то время как их наличие – чем-то чуждым. ИНС будет сама себя обманывать из-за преобладания ложной информации (это хорошо видно на рис. 7.2, второй промежуток обучения для базы KNN, которая после переобучения вообще перестала узнавать цифры, правда её исходные данные по распознаванию, рис. 6, немного ниже остальных).

Искусственная нейронная сеть, считывая неполные данные, пытается «додумать» некоторую часть элемента и получить наиболее знакомую цифру (рис. 7.1, второй и третий участок обучения; рис. 7.2, второй и третий участки обучения). В таком случае возникает вопрос о количестве действий (подачи виртуальной реальности –искажённой информации) над обучающейся нейронной сетью, которые потребуются для смены действительной реальности на виртуальную. По-другому, можно спросить, как скоро (через какое количество итераций) нейронная сеть полностью перестанет воспринимать когда-то корректные (действительные) данные?

На самом деле, изменения в нейронах начинаются с первых же заложений неверных данных (рис. 7.1, второй и третий участки обучения). Сеть начинает усваивать новые правила до тех пор, пока они не станут значительно преобладать над старыми (рис. 7.2, третий участок обучения и рис. 7.3).

Вероятность распознать ложную цифру всё ещё меньше вероятности распознать реальную цифру (рис. 7.1, второй и третий участки обучения). Для этого потребуется многократный ввод данных и сведений именно о том, что такое расположение свидетельствует о правильной цифре.

3. Методика эксперимента

В соответствии с построенной программой для управления ИНС используем базы данных RFC, KNN, SVM с информацией о цифрах 0–9. Эксперимент распадается на две части:

Часть 1. Эксперимент начинается с обучения ИНС. На рис. 2 приведены начальные показатели успешности распознавания чисел по разным базам.

Часть 2. Введение ложных (виртуальных) данных:

1 – задание на распознавание первоначальных (действительных) данных;

2 – задание на распознавание ложных (виртуальных) данных;

3 – задание на распознавание цифр, аналогичных предыдущему, но после ещё одной фазы ложного обучения. Результаты этой части приведены на рис. 7 (1, 2, 3).

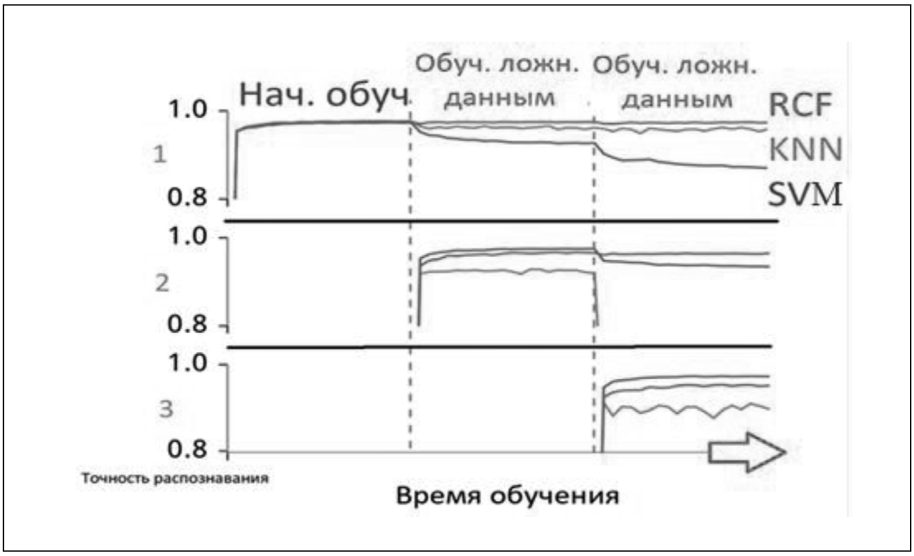

Рисунок 7 / Figure 7

Распознавание цифр 0 – 9 по разным базам данных RFC, KNN, SVM при введении ложной (виртуальной) реальности. По оси абсцисс отложено время обучения. По оси ординат отложена точность распознавания в долях единицы. Второй и третий участки времени обучения соответствуют введению обучения ложных (виртуальных) цифр.
Recognition of digits 0–9 from different RFC, KNN, SVM databases with the introduction of false (virtual) reality. The abscissa shows the learning time. The ordinate shows the recognition accuracy in fractions of a unit. The second and third sections of the learning time correspond to the introduction of learning of false (virtual) digits.

Источник: данные авторов.

Цикл обучения составляет 250 запусков программы. Всего их проводится 750. При каждой итерации производится внедрение ложной информации в программу.

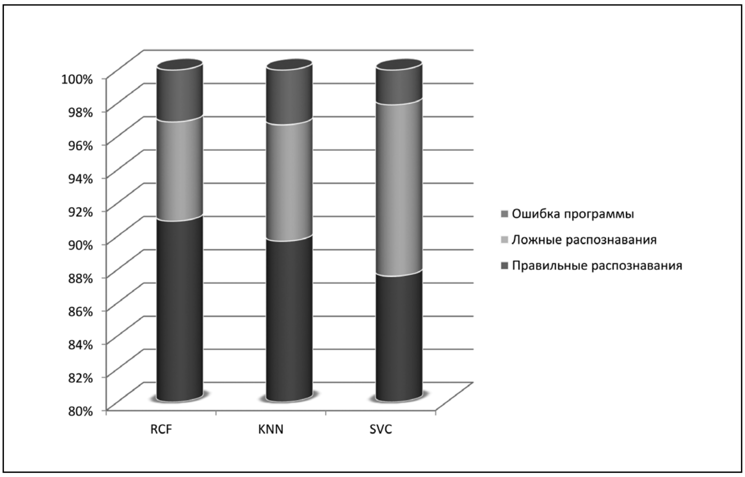

Рисунок 8 / Figure 8
Способность распознавания цифр разными базами данных
о цифрах 0-9. RCF, KNN и SVM.
Ability to recognize digits 0–9 by different RCF, KNN and SVM databases.
Источник: данные авторов.

Из сравнительного анализа полученных в результате эксперимента данных (рис. 2 и рис. 8) программы начинают ошибочно распознавать первоначальные данные о цифрах, которые являются верными, (рис. 7.1, 7.2, второй и третий участок обучения), а также переучиваются воспринимать ложные (виртуальные) знаки цифр, преуспевая в этом больше, чем, изначально, с истинными (в особенности, рис. 7.3).

Заключение

В проведённых исследованиях по моделированию влияния виртуальной реальности на адекватное восприятие действительности нервной системой человека удалось выделить только ту часть «чувств» нейронной системы, которая ответственна лишь за визуальное восприятие. Это было сделано при воздействии игровой системы на ИНС, распознающей только цифры. Было показано, что при воздействии на ИНС ложных (соответствующих виртуальной реальности) знаков, отдалённо напоминающих цифры из ряда 0 – 9, нейронная сеть не только узнаёт новую информацию о цифрах и элементах, но и забывает старую. При этом приоритет распознания отдаётся новым, ложным данным о цифрах.

Таким образом, проведённый модельный эксперимент по воздействию виртуальной реальности на ИНС предварительно обученной на традиционных объектах окружающей действительности приводит к затруднённому их узнаванию или, вообще, неузнаванию.

ЛИТЕРАТУРА

1. Искусственный интеллект в решении актуальных социальных и экономических проблем XXI века: сборник статей по материалам Третьей всероссийской научно-практической конференции (г. Пермь, 14–18 мая 2018 г.). Пермь: ПГНИУ, 2018. 294 с.
2. Artificial Intelligence in Society. OECD (2019). Paris: OECD Publishing, 2019. 148 p.
3. Hussein B. R. Social, Economic and Ethical Consequences of AI(Preprint). Brunei: University Brunei Darussalam, 2018. 10 p.
4. Хайкин С. Нейронные сети. М.: Вильямс, 2006. 1104 с.
5. Круг П. Г. Нейронные сети и нейрокомпьютеры. М.: Изд-во МЭИ, 2002.177 с.
6. Information Technology Essentials for Behavioral Health Clinicians / edited by N. A. Dewan, J. S. Luo, N. M. Lorenzi. London: Springer-Verlag, 2011. 213 p.
7. Дружилов С. А. Негативные воздействия современной информационной среды на человека: психологические аспекты// Психологические исследования: электронный научный журнал. 2018. Т. 11. № 59. URL: http://psystudy.ru/index.php/num/2018v11n59/1572-druzhilov59.html (дата обращения: 14.12.2019)
8. Diehl P. U., Cook M. Unsupervised learning of digit recognition spike-timing-dependent plasticity// Frontiers in Computational Neuroscience. 2015. Vol. 9. Article 99 [Электронный ресурс]. URL: https://www.frontiersin.org/articles/10.3389/fncom.2015.00099/full (дата обращения: 14.12.2019).
9. Sharma D., Kumar N. A Review on Machine Learning Algorithms, Tasks and Applications // International Journal of Advanced Research in Computer Engineering & Technology (IJARCET). 2017. Vol. 6. Iss. 10. P. 2278–1323 [Электронный ресурс]. URL: http://ijarcet.org/wp-content/uploads/IJARCET-VOL-6-ISSUE-10-1548-1552.pdf (дата обращения: 14.12.2019).

REFERENCES

1. *Iskusstvennyi intellekt v reshenii aktual'nykh sotsial'nykh i ekonomicheskikh problem XXI veka: sbornik statei po materialam Tret'ei vserossiiskoi nauchno-prakticheskoi konferentsii (g. Perm', 14–18 maya 2018 g.)* [Artificial Intelligence in Solving Actual Social and Economic Problems of the 21st Century: A Collection of Articles Based on the Materials of the Third All-Russian Scientific and Practical Conference (Perm, May 14–18, 2018)]. Perm, Perm State University Publ., 2018. 294 p.
2. Artificial Intelligence in Society. OECD (2019). Paris, OECD Publishing, 2019. 148 p.
3. Hussein B. R. Social, Economic and Ethical Consequences of AI (Preprint). Brunei, University Brunei Darussalam Publ., 2018. 10 p.
4. Khaikin S. *Neironnye seti* [Neural network]. Moscow, Vil'yams Publ., 2006. 1104 p.
5. Krug P. G. *Neironnye seti i neirokomp'yutery* [Neural networks and Neurocomputers]. Moscow, Moscow Power Engineering Institute Publ., 2002. 177 p.
6. Dewan N. A., Luo J. S., Lorenzi N. M., eds. Information Technology Essentials for Behavioral Health Clinicians. London, Springer-Verlag Publ., 2011. 213 p.
7. Druzhilov S. A. [The negative impact of the modern information environment: the psychological aspects]. In: *Psikhologicheskie issledovaniya: elektronnyi nauchnyi zhurnal* [Psychological Studies: electronic scientific journal], 2018, vol. 11, no. 59. Available at: http://psystudy.ru/index.php/num/2018v11n59/1572-druzhilov59.html (accessed: 14.12.2019).
8. Diehl P. U., Cook M. Unsupervised learning of digit recognition spike-timing-dependent plasticity. In: *Frontiers in Computational Neuroscience*, 2015, vol. 9, Article 99. Available at: https://www.frontiersin.org/articles/10.3389/fncom.2015.00099/full (accessed: 14.12.2019).

9. Sharma D., Kumar N. A Review on Machine Learning Algorithms, Tasks and Applications. In: *International Journal of Advanced Research in Computer Engineering & Technology (IJARCET)*, 2017, vol. 6, iss. 10, pp. 2278–1323. Available at: http://ijarcet.org/wp-content/uploads/IJARCET-VOL-6-ISSUE-10-1548-1552.pdf (accessed: 14.12.2019).

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Кириченко Артемий Кириллович – студент физико-математического факультета Московского государственного областного университета;
e-mail: tema@kirichenko.ru

Калашников Евгений Владимирович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительной математики и методики преподавания информатики Московского государственного областного университета;
e-mail: ekevkalashnikov1@gmail.com

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Artemiy K. Kirichenko – student of the Faculty of Physics and Mathematics, Moscow Region State University;
e-mail: tema@kirichenko.ru

Evgenii V. Kalashnikov – Doctor in Physical and Mathematical Sciences, Professor at the Department of Computational Mathematics and Methods of Teaching Computer Science, Moscow Region State University;
e-mail: ekevkalashnikov1@gmail.com

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Кириченко А. К., Калашников Е. В. Моделирование влияния виртуальной реальности на адекватность восприятия действительности нервной системой человека // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2020. № 1. С. 37–49.
DOI: 10.18384-2310-7251-2020-1-37-49

FOR CITATION

Kirichenko A. K., Kalashnikov E. V. Modeling the influence of virtual reality on the adequacy of perception of reality by the human nervous system. In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*, 2020, no. 1, pp. 37–49.
DOI: 10.18384-2310-7251-2020-1-37-49

РАЗДЕЛ II.
ФИЗИКА

УДК 533.72:535.3:539.1
DOI: 10.18384/2310-7251-2020-1-50-56

ЗЕРКАЛЬНО-ДИФФУЗНЫЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ЭЛЕКТРОНОВ НА ПОВЕРХНОСТИ МЕТАЛЛА С УЧЁТОМ ЗАВИСИМОСТИ ОТ УГЛА ПАДЕНИЯ

Каримов Ф. А., Юшканов А. А.

Московский государственный областной университет
141014, Московская область, г. Мытищи, ул. Веры Волошиной, д. 24, Российская Федерация

Аннотация. **Целью** статьи является разработка модели зеркально-диффузных граничных условий для электронов на поверхности металла, обобщающей модели Фукса и Соффера.
Процедура и методы исследования. За основу модели принимаются зеркально-диффузные граничные условия. При этом принимается во внимание возможная зависимость коэффициента зеркальности от угла падения электронов на поверхность.
Результаты проведённого исследования. Предложенные граничные условия удовлетворяют условию Андреева на коэффициент зеркальности при почти касательном падении электронов на поверхность. Они также в предельном случае воспроизводят известные зеркально-диффузные граничные условия Фукса.
Теоретическая/практическая значимость заключается в том, что предложенную модель можно использовать для описания кинетических процессов вблизи поверхности металла, в тонких плёнках, проволоках, в мелких металлических частицах и при описании скин-эффекта в металле.
Ключевые слова: граничные условия, коэффициент зеркальности, угол падения, кинетические процессы.

MIRROR-DIFFUSE BOUNDARY CONDITIONS FOR ELECTRONS ON A METAL SURFACE TAKING INTO ACCOUNT THE DEPENDENCE ON THE INCIDENCE ANGLE

F. Karimov, A. Yushkanov

Moscow Region State University
ul. Very Voloshinoi 24, 141014 Mytishchi, Moscow region, Russian Federation

Abstract. **Purpose.** We have developed a model of mirror-diffuse boundary conditions that satisfy the Fuchs and Soffer models.
Methodology and Approach. The model is based on mirror-diffuse boundary conditions. In this case, the possible dependence of the specularity coefficient on the angle of incidence of the electron on the surface is taken into account.
Results. The proposed boundary conditions satisfy the Andreev reflection coefficient with an almost tangent incidence of the electrons on the surface. In the limiting case they also reproduce the known mirror-diffuse Fuchs boundary conditions.
Theoretical and Practical Implications. The proposed model satisfies all known models. This model can be used to describe kinetic processes near the surface of a metal, in thin films, wires, in small metal particles, and when describing the size effect in a metal.
Keywords: boundary conditions, specularity coefficient, angle of incidence, kinetic process, size effect.

Введение

Граничные условия для электронов в металле имеют большое значение для описания кинетических процессов в металле вблизи поверхности [1]. Граничные условия определяют ход процессов в скин-эффекте [1; 3–5], в явлениях переноса в тонких плёнках и проволоках [7; 11]. Задача о скин-эффекте является одной из наиболее важных задач в электродинамике металлов [1; 5; 6; 11].

В настоящее время при рассмотрении кинетических процессов в металле широко используется модель зеркально-диффузных граничных условий Фукса. В этой модели коэффициент зеркальности при отражении электронов от поверхности металла считается постоянным, не зависящим от угла падения. Модель, учитывающая такую зависимость, была предложена Соффером [12]. В работе Соффера была учтена зависимость коэффициента зеркальности от шероховатости поверхности металла при некоторых модельных предположениях. Однако данная модель не удовлетворяет условию Андреева [2] при углах падения электронов на поверхность, близких к касательным. В настоящей работе предложена модель граничных условий, удовлетворяющих условию Андреева. При этом предложенная модель при некоторых условиях близка к граничным условиям Фукса и Соффера.

Формулировка граничных условий

Чаще всего для анализа кинетических процессов вблизи поверхности металла используются зеркально-диффузные граничные условия Фукса [10]. При этом предполагается, что при столкновении с поверхностью электроны могут рассеиваться как зеркально, так и диффузно. Вероятность зеркального отражения обозначается q. Вероятность диффузного рассеяния равна $1 - q$. Величину q называют коэффициентом зеркальности, а величину $1 - q$ коэффициентом диффузности. Коэффициент зеркальности меняется в пределах $0 < q < 1$.

Обозначим функцию распределения электронов через f. Введём систему координат с центром на поверхности металла, ось x проведём перпендикулярно поверхности вглубь металла. Тогда, согласно зеркально-диффузным граничным условиям Фукса на границе металла (при $x = 0$), имеет место следующее соотношение [1; 8–11]:

$$f\left(x=0, v_x\right)_{v_x>0} = \left(1-q\right) f_0 + qf\left(x=0, -v_x\right)_{v_x<0}.$$

В зеркально-диффузных граничных условиях Фукса предполагается, что коэффициент зеркальности является постоянной величиной и не зависит от угла падения электронов на поверхность. Данные граничные условия используются для описания широкого круга явлений [11]. В то же время предположения, в рамках которых сформулированы эти граничные условия, не всегда выполняются. Была предпринята попытка обобщения зеркально-диффузных граничных условий Фукса на случай, когда коэффициент зеркальности зависит от угла падения электрона на поверхность [12]. Согласно граничным условиям Соффера коэффициент зеркальности следующим образом зависит от угла падения электронов на поверхность θ:

$$g\left(\theta\right) = \exp\left(-\left(4\pi g \cos\theta\right)^2\right).$$

Величина g определяется следующим соотношением:

$$g = \frac{g_s}{\lambda_F}.$$

Здесь g_s – среднеквадратичная высота поверхностного рельефа, λ_F – длина волны де Бройля электрона на поверхности Ферми. Параметр g является эмпирическим, подгоночным коэффициентом в данной модели, так как его расчет из микроскопических данных в реальных случаях невозможен.

В случае почти касательного падения электронов на поверхность $\cos\theta \ll 1$. Поэтому для величины $g(\theta)$ в модели граничных условий Соффера имеем:

$$g\left(\theta\right) = 1 - \left(4\pi g \cos\theta\right)^2.$$

То есть

$$1 - g\left(\theta\right) \sim \cos^2\theta.$$

В то же время в работе [2] показано, что при почти касательном падении электронов на поверхность должно выполняться условие:

$$1 - g\left(\theta\right) \sim v_x \sim \cos\theta.$$

Отсюда следует, что модель Соффера нуждается в коррекции. Кроме того, модель Соффера не обеспечивает в некотором пределе переход к хорошо зарекомендовавшей себя модели граничных условий Фукса. Это создаёт трудности при сравнении результатов, полученных с применением этих двух моделей

Рассмотрим следующую феноменологическую модель зеркально-диффузных граничных условий. Будем аппроксимировать зависимость коэффициента зеркальности от угла падения электронов θ следующей функцией:

$$q(\theta) = q_0 + (1 - q_0)\exp(-b_1 \cos\theta - b_2 \cos^2\theta).$$

Здесь b_1 и b_2 некоторые положительные коэффициенты.

В случае, когда $b_1 \gg 1$ и $b_2 \gg 1$ имеем $q(\theta) = q_0$. Таким образом, мы переходим к модели Фукса с независящим от угла падения коэффициентом зеркальности. Когда $q_0 = 0$, а $b_1 \ll b_2$ для почти всех углов падения данная модель переходит в модель Соффера. При промежуточных значениях параметров предложенная модель предлагает интерполяцию между известными моделями. При этом предложенная модель удовлетворяет условию Андреева [2] и при углах θ, близких к π/2, имеем:

$$q(\theta) = 1 - (1 - q_0) b_1 \cos\theta.$$

На рис. 1 представлены зависимости коэффициента зеркальности q от угла падения θ электронов на поверхность металла при различных значениях параметра b_1.

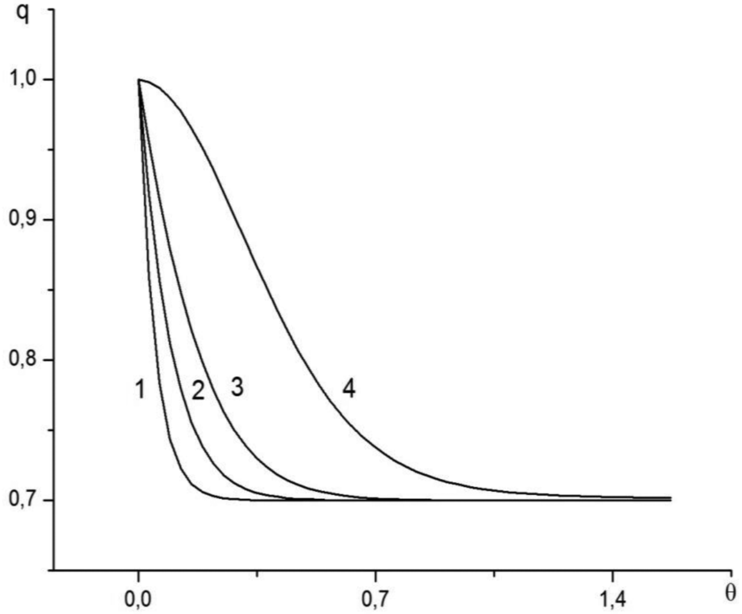

Рисунок 1 / Figure 1

Зависимость коэффициента зеркальности q от угла падения θ электронов на поверхность.

Dependence of the specularity coefficient q on the angle θ of electron incidence on the surface.

Источник: подготовлен авторами с помощью математического приложения Mathcad.

Величина $b_2 = 5$, $q_0 = 0{,}7$. Кривая 1 соответствует $b_1 = 20$. Кривая 2 соответствует $b_1 = 10$. Кривая 3 соответствует $b_1 = 5$. Кривая 4 соответствует $b_1 = 0$.

Видно, что по мере уменьшения параметра b_1 предложенная модель граничных условий всё в большей степени соответствует модели Фукса.

Заключение

Предложенная модель граничных условий удовлетворяет всем необходимым требованиям и позволяет единым образом представить все известные модели. Она может быть использована для описания кинетических процессов вблизи поверхности металла. Это могут кинетические процессы в тонких плёнках, проволоках, в мелких металлических частицах. Также она может быть использована при описании скин-эффекта в металле.

Статья поступила в редакцию 11.12.2019 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абрикосов А. А. Основы теории металла. М.: Наука, 1977. 520 с.
2. Андреев А. Ф. Взаимодействие проводящих электронов с поверхностью металла // Успехи физических наук. 1971. Т. 105. Вып. 1. С. 114–123.
3. Кузнецова И. А., Романов Д. Н., Юшканов А. А. Расчёт высокочастотной электропроводности тонкого металлического слоя в случае эллипсоидальной поверхности Ферми // Микроэлектроника. 2018. Т. 47. № 3. С. 226–237.
4. Кузнецова И. А., Савенко О. В., Юшканов А. А. Влияние граничных условий на электропроводность тонкой цилиндрической проволоки // Микроэлектроника. 2016. Т. 45. № 2. С. 126–134.
5. Латышев А. В., Юшканов А. А. Решение задачи о скин-эффекте с произвольным коэффициентом зеркальности // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2009. Т. 49. №. 1. С. 137–151.
6. Латышев А. В., Юшканов А. А. Взаимодействие электромагнитной H–волны с тонкой металлической пленкой // Микроэлектроника. 2012. Т. 41. № 1. С. 30–35.
7. Уткин А. И., Юшканов А. А. Влияние коэффициентов зеркальности на взаимодействие электромагнитной Е-волны с тонкой металлической пленкой, расположенной между двумя диэлектрическими средами // Оптика и спектроскопия. 2018. Т. 124. Вып. 2. С. 250–254.
8. Уткин А. И., Завитаев Э. В., Юшканов А. А. Расчёт электрической проводимости тонкого металлического слоя в случае различных коэффициентов зеркальности его поверхностей // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. 2016. № 9. С. 85–91.
9. Уткин А. И., Юшканов А. А. Влияние коэффициентов зеркальности на проводимость тонкого металлического слоя в случае неоднородного, периодического по времени электрического поля // Микроэлектроника. 2016. Т. 45. № 5. С. 386–395.
10. Fuchs K. The conductivity of thin metallic films according to the electron theory of metals // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1938. Vol. 34. No. 1. P. 100–108.
11. Sondheimer E. H. The mean free path of electrons in metals // Advances in Physics. 2001. Vol. 50. Iss. 6. P. 499–537.
12. Soffer S. B. Statistical Model for the Size Effect in Electrical Conduction // Journal of Applied Physics. 1967. Vol. 38. No. 4. P. 1710–1715.

REFERENCES

1. Abrikosov A. A. Fundamentals of the theory of metals. New York, North-Holland, 1988. 630 p.
2. Andreev A. F. [Interaction of conduction electrons with a metal surface]. In: *Uspekhi fizicheskikh nauk* [Physics-Uspekhi], 1971, vol. 105, no. 1, pp. 114–123.
3. Kuznetsova I. A., Romanov D. N., Yushkanov A. A. [Calculating the High-Frequency Electrical Conductivity of a Thin Metallic Layer for an Ellipsoidal Fermi Surface]. In: *Mikroelektronika* [Russian Microelectronics], 2018, vol. 47, no. 3, pp. 226–237.
4. Kuznetsova I. A., Savenko O. V., Yushkanov A. A. [The influence of boundary conditions on the electrical conductivity of a thin cylindrical wire]. In: *Mikroelektronika* [Russian Microelectronics], 2016, vol. 45, no. 2, pp. 126–134.
5. Latyshev A. V., Yushkanov A. A. [Solution of the skin effect problem with an arbitrary coefficient of specular reflection]. In: *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki* [Computational Mathematics and Mathematical Physics], 2009, vol. 49, no. 1, pp. 137–151.
6. Latyshev A. V., Yushkanov A. A. [Interaction of electromagnetic H-wave with thin metal film]. In: *Mikroelektronika* [Russian Microelectronics], 2012, vol. 41, no. 1, pp. 30–35.
7. Utkin A. I., Yushkanov A. A. [The Effect of Specular Reflectances on the Interaction of an Electromagnetic E Wave with a Thin Metal Film Placed between Two Dielectric Media]. In: *Optika i spektroskopiya* [Optics and Spectroscopy], 2018, vol. 124, no. 2, pp. 250–254.
8. Utkin A. I., Zavitaev E. V., Yushkanov A. A. [Calculation of the electrical conductivity of a thin metal layer in the case of different specular reflectances of its surfaces]. In: *Poverkhnost'. Rentgenovskie, sinkhrotronnye i neitronnye issledovaniya* [The Journal of Surface Investigation. X-ray, Synchrotron and Neutron Techniques], 2016, no. 9, pp. 85–91.
9. Utkin A. I., Yushkanov A. A. [Effect of the reflection coefficients on the conductivity of a thin metal layer in the case of an inhomogeneous time-periodic electric field]. In: *Mikroelektronika* [Russian Microelectronics], 2016, vol. 45, no. 5, pp. 386–395.
10. Fuchs K. The conductivity of thin metallic films according to the electron theory of metals. In: *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 1938, vol. 34, no. 1, pp. 100–108.
11. Sondheimer E. H. The mean free path of electrons in metals. In: *Advances in Physics*, 2001, vol. 50, iss. 6, pp. 499–537.
12. Soffer S. B. Statistical Model for the Size Effect in Electrical Conduction. In: *Journal of Applied Physics*, 1967, vol. 38, no. 4, pp. 1710–1715.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Каримов Фахриддин Ахмаджонович – аспирант кафедры теоретической физики Московского государственного областного университета;
e-mail: faha_rtsu_2003@mail.ru

Юшканов Александр Алексеевич – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры теоретической физики Московского государственного областного университета;
e-mail: yushkanov@inbox.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Fakhriddin A. Karimov – postgraduate student at the Department of Theoretical Physics, Moscow Region State University;
e-mail: faha_rtsu_2003@mail.ru

Alexander A. Yushkanov – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor at the Department of Theoretical Physics, Moscow Region State University;
e-mail: yushkanov@inbox.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Каримов Ф. А., Юшканов А. А. Зеркально-диффузные граничные условия для электронов на поверхности металла с учётом зависимости от угла падения // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2020. № 1. С. 50–56.
DOI: 10.18384/2310-7251-2020-1-50-56

FOR CITATION

Karimov F. A., Yushkanov A. A. Mirror-diffuse boundary conditions for electrons on a metal surface taking into account the dependence on the incidence angle. In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*, 2020, no. 1, pp. 50–56.
DOI: 10.18384/2310-7251-2020-1-50-56

УДК 537.632
DOI: 10.18384/2310-7251-2020-1-57-76

ОСОБЕННОСТИ ДИНАМИКИ СТИМУЛИРОВАННОЙ АТОМНО-МОЛЕКУЛЯРНОЙ КОНВЕРСИИ С УЧАСТИЕМ ДВУХ ИМПУЛЬСОВ РЕЗОНАНСНОГО ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ И ИМПУЛЬСА МИКРОВОЛНОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В СИСТЕМЕ АТОМОВ ОДНОГО СОРТА

Зинган А. П., Васильева О. Ф.

Приднестровский государственный университет им. Т. Г. Шевченко
3300, г. Тирасполь, ул. 25 Октября, д. 107, Республика Молдова

Аннотация: **Цель** статьи в исследовании динамики атомно-молекулярной конверсии в бозе-эйнштейновском конденсате.
Процедура и методы исследования. Исследовано поведение потенциальной энергии некоторого нелинейного осциллятора в зависимости от величины плотности фотонов второго импульса.
Результаты проведённого исследования. Найдено уравнение для плотности фотонов второго импульса в системе бозе-конденсированных атомов и молекул.
Теоретическая/практическая значимость состоит в том, что получены решения и найдены критические значения параметров, при которых сменяются режимы эволюции.
Ключевые слова: бозе-эйнштейновский конденсат, атомно-молекулярная конверсия, гомоядерные молекулы.

FEATURES OF DYNAMICS OF STIMULATED ATOMIC–MOLECULAR CONVERSION INVOLVING TWO PULSES OF RESONANT LASER RADIATION AND A PULSE OF MICROWAVE RADIATION IN A SYSTEM OF ATOMS OF ONE SPECIES

A. Zingan, O. Vasilieva

Pridnestrovian State University
ul. 25 Oktyabrya 107, 3300 Tiraspol, Republic of Moldova

Abstract. **Purpose.** We study of the dynamics of atomic-molecular conversion in a Bose–Einstein condensate.
Methodology and Approach. The paper explores the behavior of the potential energy of some nonlinear oscillator as a function of the magnitude of the photon density of the second pulse.
Results. An equation is found for the density of photons of the second pulse in the system of Bose-condensed atoms and molecules.
Theoretical and Practical Implications. We have obtained the solutions and found critical values of parameters at which evolution modes change.
Keywords: Bose–Einstein condensate, atomic-molecular conversion, homonuclear molecules.

Введение

В последние годы образование гомо- и гетероядерных молекул из бозе-конденсированных атомов при сверхнизких температурах представляет большой интерес, так как предсказывается синтез более сложных молекул – трёх- и четырёхатомных [1]. В [2] представлено подробное исследование рассеивающих свойств ультрахолодных смесей бозонных атомов калия, найдено двадцать ранее ненаблюдаемых резонансов Фешбаха в изотопных смесях $K^{39} - K^{41}$. В частности, авторы [2] характеризуют параметры выбранного резонанса Фешбаха для K^{39} радиочастотной ассоциацией молекул Фешбаха. Эти результаты могут быть использованы для уточнения модельных потенциалов рассеяния калия. Кроме того, эти новые резонансы Фешбаха расширяют диапазон возможных экспериментов с вырожденными бозе-бозе-смесями.

Ранее были изучены свойства основного состояния расстроенной смеси двух видов твёрдых бозонов на треугольной решётке в зависимости от перестраиваемых амплитуд для туннелирования и взаимодействий.

Комбинируя три различных метода: самосогласованное среднее поле кластера, точную диагонализацию и эффективные теории, авторы [3] получили очень богатую фазовую диаграмму динамики системы бозонов.

Чин (C. Chin) и др. [4] наблюдали связывание молекул Cs_2 при сверхнизких температурах, которые рождались из атомного бозе-конденсата, и классифицировали их как фешбах-резонансы для ультрахолодных молекул Cs_2 с образованием гомоядерных молекул Cs_4.

В экспериментальных исследованиях бозе-конденсатов получены гомоядерные K_2 [5], Li_2 [6], Cs_2 [7], Na_2 [8], Rb_2 [9], Yb_2 [10] и гетероядерные ^7LiH [11], $^6Li^{40}K$ [12], $^6Li^{23}Na$ [13], $^6Li^{133}Cs$ [14], $^{39}K^{85}Rb$ [15] двухатомные молекулы. Наблюдались трехатомная гетероядерная молекула $^6Li^{40}K^{87}Rb$ [16] и гомоядерная четырехатомная молекула Cs_4 [17]. Данные этих экспериментальных исследований говорят о возможности образования и более сложных гомо- и гетероядерных молекул в условиях бозе-конденсации.

В [18] вычислено уравнение состояния бозе-бозе-газов в одном и в трёх измерениях в рамках эффективной квантовой теории поля. Выведено нелинейное уравнение Шредингера для описания одномерных и трёхмерных бозе-бозе-смесей, и получено его аналитическое решение в одномерном случае. При низкой температуре обнаружено, что давление и число частиц симметричных квантовых капель имеют нетривиальную зависимость от химического потенциала и разности констант внутри- и межвидовой связи. Также в [19] предложен тип резонанса Фешбаха, возникающий, когда два различных ультрахолодных атома в их основном состоянии сталкиваются с *s*-волной под действием лазерного излучения. Столкновительные уровни пары атомов связаны лазером с ровибрационным молекулярным уровнем того же электронного основного состояния (лазерный самоиндуцированный резонанс Фешбаха). Этот механизм действует для всех гетероядерных квантовых газовых смесей и был рассмотрен на примере ультрахолодных атомов Rb^{87} и Sr^{84}, для которых резонансная частота лазера находится в субтерагерцовом диапазоне. Было показано, что медленное изменение частоты допускает адиабатическое образование ультрахолодных молекул $Rb^{87}Sr^{84}$ способом, очень похожим на магнитный резонанс Фешбаха.

В работе [20] сообщается о достижении бозе-эйнштейновской конденсации атомов эрбия и о наблюдении магнитных резонансов Фешбаха в слабых магнитных полях. Путём охлаждения в оптической дипольной ловушке получены чистые конденсаты Er^{168}, содержащие до $7 \cdot 10^4$ атомов, и продемонстрировано применение низкопольного резонанса Фешбаха для получения перестраиваемого дипольного бозе-эйнштейновского конденсата. В [21] Нуп (Knoop S.) и др. говорят о наблюдении элементарного процесса обмена в оптически захваченной ультрахолодной смеси атомов и молекул Фешбаха. Доказана возможность магнитного контроля процесса конверсии атомов и молекул, что позволяет наблюдать ярко выраженное пороговое поведение. В отличие от релаксации к более глубоко связанным молекулярным состояниям, обменный процесс не приводит к потере ловушки. В данной работе показано согласие между экспериментальными наблюдениями и расчётами, основанными на решениях трёхчастичного уравнения Шредингера в адиабатическом гиперсферическом представлении. Высокая эффективность процесса обмена объясняется разнообразием как начальных, так и конечных молекулярных состояний.

В [22] предложен метод получения состояний заданной квантованной циркуляции в кольцевых бозе-эйнштейновских конденсатах (БЭК), замкнутых в кольцевой ловушке, с использованием метода «впечатывания фазы» без опоры на двухфотонный перенос углового момента. Требуемый фазовый профиль отпечатывается на атомной волновой функции с помощью короткого светового импульса с заданной диаграммой интенсивности, генерируемой с помощью пространственного модулятора света. Исследован эффект отпечатывания профиля интенсивности, сглаженного конечным оптическим разрешением, на кольцевой БЭК с численным моделированием зависящего от времени уравнения Гросса-Питаевского. Это позволило оптимизировать диаграмму интенсивности для заданной целевой циркуляции, чтобы компенсировать ограниченное разрешение. Авторами [23] показано, что реакции изотопного обмена между гетероядерными димерами щелочного металла, щелочноземельного металла и лантанида, состоящими из двух изотопов одного и того же атома, являются экзотермическими с изменением энергии в диапазоне 1–8000 МГц, что приводит к образованию холодных или ультрахолодных молекул. Для этих химических реакций существует только один колебательный и не более нескольких возможных сверхтонких состояний. Предложено лазерно-индуцированное изотопно-селективное управление штарковским сдвигом, чтобы настроить экзотермические реакции изотопного обмена на эндотермические, тем самым создавая основу для тестирования моделей химической реактивности. Данная модель открывает путь для изучения динамики состояния ультрахолодных химических реакций контролем квантовых состояний как реагентов, так и молекул.

Оптический контроль атомных взаимодействий в квантовых газах является целью исследований ультрахолодных атомов. В [24] разработана и реализована общая схема оптического управления резонансами Фешбаха, которая даёт большие квантовые времена жизни. Показано, что быстрое и локальное управление взаимодействиями приводит к интересной квантовой динамике в новых режимах, выделенных образованием молекул Ван-дер-Ваальса и локализованным коллапсом бозе-конденсата.

Ранее были получены условия равновесия для термической смеси атомов и молекул вблизи резонанса Фешбаха. В предположении о низких потерях при столкновении были рассчитаны термодинамические свойства и проведены сравнения с результатами эксперимента на термических фермионных атомах лития. Также оценены возможные механизмы столкновения, которые могут привести к преобразованию атома в молекулу и предложена новая схема испарительного охлаждения для эффективного охлаждения молекул в бозе-эйнштейновском конденсате [25].

В [26] представлены результаты теоретического исследования явления фотоассоциации бозе-конденсированных ультрахолодных атомов и трёхатомных молекул с образованием двухатомных гетероядерных димеров и атомов. Показана возможность существования синфазного и антифазного режимов эволюции системы, при которых возможен как периодический, так и апериодический режим превращения атомов в молекулы.

Учитывая актуальность изучения бозе-конденсатов, нами представлены результаты исследования процесса стимулированной рамановской атомно-молекулярной конверсии с участием двух импульсов резонансного лазерного излучения и импульса микроволнового излучения в системе одинаковых атомов с образованием гомоядерных молекул.

Постановка задачи. Основные результаты

Процесс атомно-молекулярной конверсии в бозе-конденсате под действием двух импульсов резонансного лазерного излучения и импульса микроволнового излучения можно представить в виде $a + a + c_1 + c \leftrightarrow b + c_2$, где обозначены через a – атомы одного и того же сорта, c_1 и c_2 – фотоны с частотами ω_1 и ω_2, b – гомоядерная молекула и c – фотон микроволнового излучения (рис. 1).

Два бозе-конденсированных атома одного сорта, с нулевыми кинетическими энергиями и с полной энергией $E_i = 2\hbar\omega_0$, переходят через возбуждённое молекулярное состояние с энергией E_u в основное состояние гомоядерной молекулы с энергией $E_m = \hbar\Omega_0$. Для этого перехода используются два коротких фазово-когерентных импульса и один микроволновый с энергиями фотонов $\hbar\omega_1$, $\hbar\omega_2$ и $\hbar\omega'$. В этом случае пара атомов aa образует гомоядерную молекулу b (рис. 1).

Промежуточное возбуждённое состояние образованной молекулы с энергией E_u можно не рассматривать, используя принцип адиабатического следования [27]. В [28–31] показано, что населённости двух нижних уровней на много порядков больше населённости верхнего возбуждённого. Поэтому мы можем рассматривать атомно-молекулярную конверсию не как двухступенчатый процесс, а как одноступенчатый. Тогда гамильтониан взаимодействия H_{int} можно представить в виде:

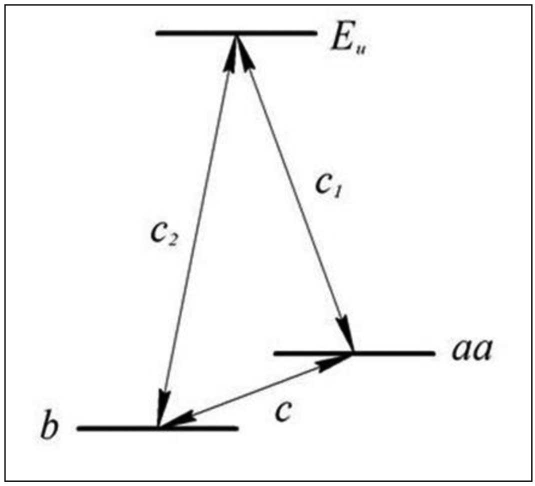

Рисунок 1 / Figure 1
Энергетическая схема квантовых переходов атомов и молекул под действием импульсов резонансного лазерного излучения и микроволнового.
Energy diagram of quantum transitions of atoms and molecules under the action of pulses of resonant and microwave laser radiation.
Источник: составлено авторами.

$$H_{\text{int}} = \hbar g\left(\hat{a}^{+}\hat{a}^{+}\hat{b}\hat{c}_1^{+}\hat{c}_2 + \hat{a}\hat{a}\hat{b}^{+}\hat{c}_1\hat{c}_2^{+}\right) + \hbar\kappa\left(\hat{a}^{+}\hat{a}^{+}\hat{b}\hat{c} + \hat{a}\hat{a}\hat{b}^{+}\hat{c}^{+}\right), \tag{1}$$

где a и b – бозонные операторы уничтожения атомных и молекулярных состояний; $c_{1,2}$ и c – операторы уничтожения фотонов; g, κ – константы взаимодействий.

Используя гамильтониан (1), получают систему уравнений для операторов $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}_1, \hat{c}_2$ и $\hat{c}$. Используя приближение среднего поля (mean field approximation) и усредняя эту систему гайзенберговских уравнений [32], можно получить систему нелинейных уравнений для амплитуд материального $\langle a\rangle = a$, $\langle b\rangle = b$ и электромагнитного $\langle c_{1,2}\rangle = c_{1,2}$, $\langle c\rangle = c$ полей:

$$\begin{aligned}
&i\dot{a} = 2ga^{*}bc_1^{*}c_2 + 2\kappa a^{*}cb;\\
&i\dot{b} = gaac_1c_2^{*} + \kappa aac^{*};\\
&i\dot{c}_1 = ga^{*}a^{*}bc_2;\\
&i\dot{c}_2 = gaab^{*}c_1;\\
&i\dot{c} = \kappa aab^{*}.
\end{aligned} \tag{2}$$

Будем искать решение системы (2) в виде $a = Ae^{i\omega}$; $b = Be^{i\psi}$; $c_1 = C_1e^{i\varphi_1}$; $c_2 = C_2e^{i\varphi_2}$; $c = Ce^{i\Phi}$, тогда получаем систему уравнений для амплитуд и разностей фаз:

$$\begin{aligned}
&\dot{A} = 2gABC_1C_2\sin\theta + 2\kappa ABC\sin\Gamma\\
&\dot{B} = -gA^2C_1C_2\sin\theta - \kappa A^2C\sin\Gamma\\
&\dot{C}_1 = gA^2BC_2\sin\theta\\
&\dot{C}_2 = -gA^2BC_1\sin\theta\\
&\dot{C} = -\kappa A^2B\sin\Gamma
\end{aligned}\tag{3}$$

$$\dot{\theta} = g\left(4BC_1C_2 - \frac{A^2C_1C_2}{B} + \frac{A^2BC_2}{C_1} - \frac{A^2BC_1}{C_2}\right)\cos\theta + \kappa\left(4BC - \frac{A^2C}{B}\right)\cos\Gamma,$$

$$\dot{\Gamma} = g\left(4BC_1C_2 - \frac{A^2C_1C_2}{B}\right)\cos\theta + \kappa\left(4BC - \frac{A^2C}{B} - \frac{A^2B}{C}\right)\cos\Gamma,$$

где $\theta = -\varphi + \psi - \varphi_1 + \varphi_2$, $\Gamma = -2\varphi + \Phi + \psi$.

Приведём данную систему уравнений к более простому виду, для чего проверим, при каких условиях это возможно. Очевидно, что решение $\theta = \pm\pi/2$; $\Gamma = \pm\pi/2$ удовлетворяет системе уравнений (3). Подставляя $\theta = \pi/2$ и $\Gamma = \pi/2$ в (3), получаем:

$$\begin{aligned}
&\dot{A} = 2gABC_1C_2 + 2\kappa ABC\\
&\dot{B} = -gA^2C_1C_2 - \kappa A^2C\\
&\dot{C}_1 = gA^2BC_2\\
&\dot{C}_2 = -gA^2BC_1\\
&\dot{C} = -\kappa A^2B
\end{aligned}\tag{4а}$$

Будем считать, что это уравнение описывает так называемую синфазную эволюцию системы. Тогда из системы уравнений (3) легко получить ещё три системы уравнений для случаев синфазной и антифазной эволюций, когда разности фаз θ и Γ принимают конкретные значения:

синфазный режим $\theta = \Gamma = -\dfrac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}
&\dot{A} = -2gABC_1C_2 - 2\kappa ABC\\
&\dot{B} = gA^2C_1C_2 - \kappa A^2C\\
&\dot{C}_1 = -gA^2BC_2\\
&\dot{C}_2 = gA^2BC_1\\
&\dot{C} = \kappa A^2B,
\end{aligned}\tag{4б}$$

антифазный режим $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, $\Gamma = -\dfrac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}
&\dot{A} = 2gABC_1C_2 - 2\kappa ABC\\
&\dot{B} = -gA^2C_1C_2 + \kappa A^2C\\
&\dot{C}_1 = gA^2BC_2\\
&\dot{C}_2 = -gA^2BC_1\\
&\dot{C} = \kappa A^2B,
\end{aligned} \tag{4в}$$

антифазный режим $\theta = -\frac{\pi}{2}, \Gamma = \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}
&\dot{A} = -2gABC_1C_2 + 2\kappa ABC\\
&\dot{B} = gA^2C_1C_2 - \kappa A^2C\\
&\dot{C}_1 = -gA^2BC_2\\
&\dot{C}_2 = gA^2BC_1\\
&\dot{C} = -\kappa A^2B.
\end{aligned} \tag{4г}$$

Из (4а) – (4г) легко получить следующие интегралы движения:

$$A^2 + 2B^2 = A_0^2 + 2B_0^2,$$

$$C_1^2 + C_2^2 = C_{10}^2 + C_{20}^2,$$

$$C_1 = \sqrt{C_{10}^2 + C_{20}^2} \cdot \sin\left[\frac{g}{\kappa}(C_0 - C) + \arcsin\left(\frac{C_{10}}{\sqrt{C_{10}^2 + C_{20}^2}}\right)\right],$$

$$C_2 = \sqrt{C_{10}^2 + C_{20}^2} \cdot \sin\left[\frac{g}{\kappa}(C - C_0) + \arcsin\left(\frac{C_{20}}{\sqrt{C_{10}^2 + C_{20}^2}}\right)\right].$$

Рассмотрим простейший случай. Пусть в начальный момент времени отсутствуют фотоны второго импульса, микроволнового излучения и гомоядерные молекулы $C_{20} = 0$, $C_0 = 0$, $B_0 = 0$, $C_{10} \neq 0$, $A_0 \neq 0$. Тогда интегралы движения приводятся к виду:

$$A^2 = A_0^2 - 2B^2; \tag{5}$$

$$C_1^2 = C_{10}^2 - C_2^2; \tag{6}$$

Из (4а) следует, что уравнение для C_2 в этом случае имеет вид:

$$\dot{C}_2 = -gA^2BC_1; \tag{7}$$

Система исходных уравнений (4а) принимает вид:

$$\begin{aligned}
\dot{B} &= -A^2\left(gC_1C_2 + \kappa C\right)\\
\dot{C}_2 &= -g\left(A_0^2 - 2B^2\right)B\sqrt{C_{10}^2 - C_2^2}\\
\dot{C} &= -\kappa\left(A_0^2 - 2B^2\right)B.
\end{aligned} \tag{8}$$

Проинтегрировав, получим решение (7) в виде:

$$C_2 = C_{10}\sin\left(\frac{g}{\kappa}C\right). \tag{9}$$

Из (6) и (9) получаем, что плотность фотонов первого импульса изменяется по закону косинуса:

$$C_1 = C_{10}\cos\left(\frac{g}{\kappa}C\right). \tag{10}$$

Подставив (5), (9) и (10) в уравнение для плотности молекул *B*, из системы уравнений (8) получаем:

$$\dot{B} = -2g\left(\frac{1}{2}A_0^2 - B^2\right)\left(C_2\sqrt{C_{10}^2 - C_2^2} + \frac{\kappa^2}{g^2}\arcsin\left(\frac{C_2}{C_{10}}\right)\right). \tag{11}$$

В этом случае удаётся записать ещё один интеграл движения:

$$B^2 = C_2^2 + \frac{\kappa^2}{g^2}\arcsin^2\left(\frac{C_2}{C_{10}}\right) \tag{12}$$

и свести задачу к одному дифференциальному уравнению для плотности фотонов второго импульса C_2, которое является существенно нелинейным:

$$\frac{dC_2}{dt} = \pm 2g\left(\frac{1}{2}A_0^2 - C_2^2 - \frac{\kappa^2}{g^2}\arcsin^2\left(\frac{C_2}{C_{10}}\right)\right)\sqrt{C_2^2 + \frac{\kappa^2}{g^2}\arcsin^2\left(\frac{C_2}{C_{10}}\right)}\cdot\sqrt{C_{10}^2 - C_2^2}. \tag{13}$$

После введения подстановок $C_2 = C_{10}\sin(y)$, $\frac{A_0^2}{2C_{10}^2} = \alpha^2$, $\frac{\kappa^2}{g^2C_{10}^2} = K^2$, $\tau = 2gC_{10}^3 t$ уравнение (13) запишется в виде:

$$\frac{dy}{dt} = \pm\left(\alpha^2 - \sin^2(y) - K^2y^2\right)\sqrt{\sin^2(y) + K^2y^2}. \tag{14}$$

Представим уравнение (13) в более удобном для интерпретации виде:

$$\left(\frac{dC_2}{dt}\right)^2 + W\left(C_2\right) = 0, \tag{15}$$

где $W(C_2)$ – потенциальная энергия некоторого нелинейного осциллятора при полной энергии, равной нулю:

$$W\left(C_2\right) = -4g^2\left(\frac{1}{2}A_0^2 - C_2^2 - \frac{\kappa^2}{g^2}\arcsin^2\left(\frac{C_2}{C_{10}}\right)\right)^2\left(C_2^2 + \frac{\kappa^2}{g^2}\arcsin^2\left(\frac{C_2}{C_{10}}\right)\right)\times \tag{16}$$
$$\times\left(C_{10}^2 - C_2^2\right).$$

При введении подстановки $\sin^2(y) + K^2y^2 = z$ уравнение для потенциальной энергии примет вид:

$$W = -\left(\alpha^2 - z\right)^2 z. \tag{17}$$

Обозначим $C_2 = C_{10}\cdot f_2$, $A_0 = C_{10}\cdot\sqrt{a_0}$, $K = \dfrac{\kappa}{gC_{10}}$, тогда нормированная константа взаимодействия K и нормированная плотность атомов a_0 будут зависеть от плотности фотонов f_2 следующим образом:

$$K^2 = \frac{\frac{1}{2}a_0^2 - f_2^2}{\arcsin^2\left(f_2\right)}, \tag{18}$$

$$a_0^2 = 2\cdot\left(f_2^2 + K^2\arcsin^2\left(f_2\right)\right). \tag{19}$$

Из (18) и (19) видно, что нормированная плотность фотонов f_2 монотонно растёт с ростом плотности атомов a_0 при фиксированной константе взаимодействия K и монотонно убывает с ростом K при фиксированном a_0.

Изучая зависимость потенциальной энергии W нелинейного осциллятора, можно установить качественно характер изменения плотности фотонов второго импульса во времени $f_2(t)$. Если полная энергия осциллятора равна нулю, то изменение плотности $f_2(t)$ со временем возможно в той области значений f_2, где $W(f_2) \le 0$. Из рис. 2 видно, что потенциальная энергия W в зависимости от плотности фотонов f_2 сначала монотонно убывает, достигает своего минимума и затем растет до нуля, оставаясь меньше нуля при $0 < f_2 < 1$.

На рис. 2 также возникают две области значений $W \le 0$, в которых функция W оказывается отрицательной. Поэтому движение изображающей точки может быть (в зависимости от начального состояния системы) как в первой, так и во второй области. Причём из графика $W(f_2)$ видно, что возможен только апериодический режим эволюции.

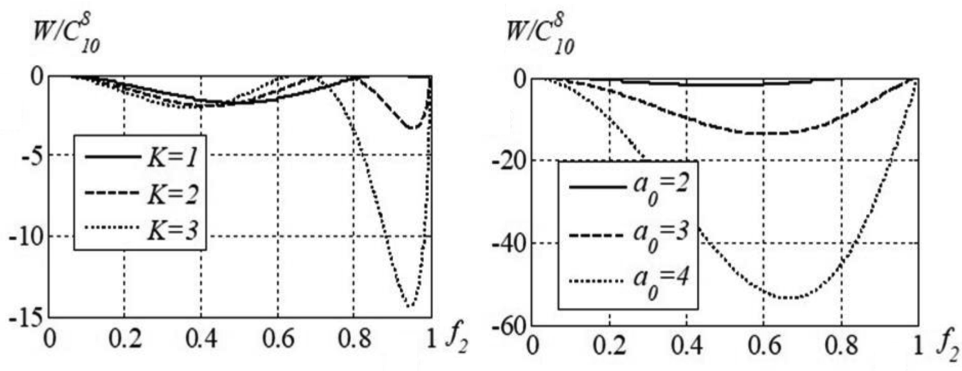

Рисунок 2 / Figure 2

Зависимость потенциальной энергии W от плотности фотонов второго импульса f_2 при различных значениях нормированной константы взаимодействия K и нормированной плотности атомов a_0 при $C_0 = C_{20} = B_0 = 0$, $C_{10} \neq 0$, $A_0 \neq 0$.

Dependence of the potential energy W on the photon density of the second pulse f_2 for various values of the normalized interaction constant K and the normalized atomic density a_0 for $C_0 = C_{20} = B_0 = 0$, $C_{10} \neq 0$, $A_0 \neq 0$.

Источник: составлено по данным авторов.

Рассмотрим далее случай, когда в начальный момент времени отсутствуют фотоны второго импульса и гомоядерные молекулы $C_{20} = 0$, $B_0 = 0$, $C_{10} \neq 0$, $A_0 \neq 0$, $C_0 \neq 0$. Тогда получаем интегралы движения в виде:

$$A^2 = A_0^2 - 2B^2;$$

$$C_1^2 = C_{10}^2 - C_2^2; \tag{20}$$

$$C = C_0 + \kappa \arcsin\left(\frac{C_2}{C_{10}}\right);$$

$$B^2 = \left(C_2^2 + 2\frac{\kappa C_0}{g}\arcsin\left(\frac{C_2}{C_{10}}\right) + \frac{\kappa^2}{g^2}\arcsin^2\left(\frac{C_2}{C_{10}}\right)\right).$$

Окончательно получаем уравнение для C_2, которое является существенно нелинейным:

$$\frac{dC_2}{dt} = \pm 2g\left(\frac{1}{2}A_0^2 - C_2^2 - 2\frac{\kappa C_0}{g}\arcsin\left(\frac{C_2}{C_{10}}\right) - \frac{\kappa}{g^2}\arcsin^2\left(\frac{C_2}{C_{10}}\right)\right)\times$$
$$\times\sqrt{C_2^2 + 2\frac{\kappa C_0}{g}\arcsin\left(\frac{C_2}{C_{10}}\right) + \frac{\kappa^2}{g^2}\arcsin^2\left(\frac{C_2}{C_{10}}\right)}\cdot\sqrt{C_{10}^2 - C_2^2}. \tag{21}$$

Как и ранее, вводим подстановку $C_2 = C_{10}\sin(y)$. Тогда из (21) получаем:

$$\frac{dy}{dt} = \pm 2g\left(\frac{1}{2}A_0^2 - C_{10}^2\sin^2(y) - 2\frac{\kappa C_0}{g}y - \frac{\kappa^2}{g^2}y^2\right)\cdot\sqrt{C_{10}^2\sin^2(y) + 2\frac{\kappa C_0}{g}y + \frac{\kappa^2}{g^2}y^2}. \tag{22}$$

При этом потенциальная энергия нелинейного осциллятора при полной энергии, равной нулю, имеет вид:

$$W\left(C_2\right) = -4g^2\left(\frac{1}{2}A_0^2 - C_2^2 - 2\frac{\kappa C_0}{g}\arcsin\left(\frac{C_2}{C_{10}}\right) - \frac{\kappa^2}{g^2}\arcsin^2\left(\frac{C_2}{C_{10}}\right)\right)^2 \times$$

$$\times\left(C_2^2 + 2\frac{\kappa C_0}{g}\arcsin\left(\frac{C_2}{C_{10}}\right) + \frac{\kappa^2}{g^2}\arcsin^2\left(\frac{C_2}{C_{10}}\right)\right)\cdot\left(C_{10}^2 - C_2^2\right). \tag{23}$$

Нормированная константа взаимодействия K и нормированная плотность атомов a_0 выражается через плотность фотонов f_2 следующим образом:

$$K = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}a_0^2 - f_2^2 + f_0^2} - f_0}{\arcsin\left(f_2\right)}, \tag{24}$$

$$a_0^2 = 2\cdot\left(f_2^2 - f_0^2 + \left(f_0 + K\arcsin\left(f_2\right)\right)^2\right). \tag{25}$$

Как и в предыдущем случае, плотность фотонов второго импульса f_2 монотонно растёт с ростом a_0 при фиксированных значениях K и монотонно убывает с ростом K при фиксированном a_0. Потенциальная энергия также имеет минимум и две области значений $W \leq 0$. Эволюция может быть как в первой, так и во второй области (рис. 3).

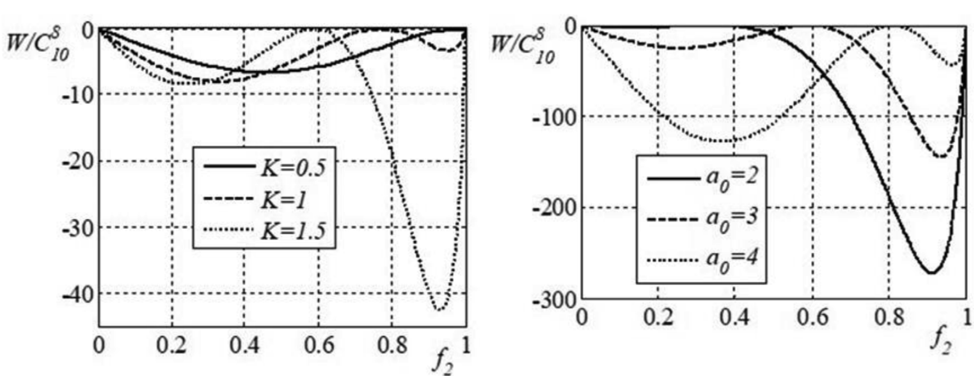

Рисунок 3 / Figure 3

Зависимость потенциальной энергии W от плотности фотонов второго импульса f_2 при различных значениях нормированной константы взаимодействия K и нормированной плотности атомов a_0 при $C_{20} = B_0 = 0$, $C_0 \neq 0$, $C_{10} \neq 0$, $A_0 \neq 0$.

Dependence of the potential energy W on the photon density of the second pulse f_2 for various values of the normalized interaction constant K and the normalized atomic density a_0 for $C_{20} = B_0 = 0$, $C_0 \neq 0$, $C_{10} \neq 0$, $A_0 \neq 0$.

Источник: составлено по данным авторов.

На рис. 4 представлена временная эволюция плотности фотонов второго импульса $f_2(t)$ при заданных начальных условиях $C_{20} = 0$, $B_0 = 0$, $C_{10} \neq 0$, $A_0 \neq 0$, $C_0 \neq 0$. Видно, что в этом случае имеет место апериодический режим изменения плотности фотонов по второму каналу. Плотность фотонов растёт и на больших временах приходит к насыщению.

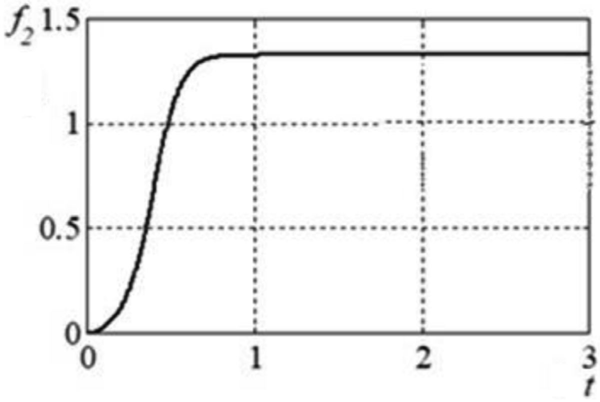

Рисунок 4 / Figure 4

Эволюция плотности фотонов в зависимости от времени $f_2(t)$ в случае $C_{20} = 0$, $B_0 = 0$, $C_0 \neq 0$, $C_{10} \neq 0$, $A_0 \neq 0$.

Evolution of the photon density as a function of time $f_2(t)$ in the case of $C_{20} = 0$, $B_0 = 0$, $C_0 \neq 0$, $C_{10} \neq 0$, $A_0 \neq 0$.

Источник: составлено по данным авторов.

Рассмотрим далее случай, когда в начальный момент времени отсутствуют только гомоядерные молекулы $B_0 = 0$, а остальные плотности частиц отличны от нуля $C_{10} \neq 0$, $C_{20} \neq 0$, $C_0 \neq 0$, $A_0 \neq 0$. Тогда интегралы движения приводятся к виду:

$$A^2 = A_0^2 - 2B^2;$$

$$C_1^2 = C_{10}^2 + C_{20}^2 - C_2^2; \tag{26}$$

$$C_2 = \sqrt{C_{10}^2 + C_{20}^2} \cdot \sin\left[\frac{g}{\kappa}\left(C - C_0\right) + \arcsin\left(\frac{C_{20}}{\sqrt{C_{10}^2 + C_{20}^2}}\right)\right];$$

$$B^2 = C_2^2 - C_{20}^2 - C_0^2 + \left[C_0 + \frac{\kappa}{g}\left(\arcsin\left(\frac{C_2}{\sqrt{C_{10}^2 + C_{20}^2}}\right) - \arcsin\left(\frac{C_{20}}{\sqrt{C_{10}^2 + C_{20}^2}}\right)\right)\right]^2.$$

Таким образом, окончательно получаем нелинейное дифференциальное уравнение для плотности фотонов C_2 в виде:

$$\frac{dC_2}{dt} = \pm 2g\left\{\frac{1}{2}A_0^2 + C_0^2 + C_{20}^2 - C_2^2 - \left[C_0 + \frac{\kappa}{g}\left(\arcsin\left(\frac{C_2}{\sqrt{C_{10}^2 + C_{20}^2}}\right) - \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - \arcsin\left(\frac{C_{20}}{\sqrt{C_{10}^2 + C_{20}^2}}\right)\right)\right]^2\right\} \cdot \sqrt{C_{10}^2 + C_{20}^2 - C_2^2} \times$$

$$\times \sqrt{C_2^2 - C_{20}^2 - C_0^2 + \left[C_0 + \frac{\kappa}{g}\left(\arcsin\left(\frac{C_2}{\sqrt{C_{10}^2 + C_{20}^2}}\right) - \arcsin\left(\frac{C_{20}}{\sqrt{C_{10}^2 + C_{20}^2}}\right)\right)\right]^2}. \qquad (27)$$

Уравнение для потенциальной энергии примет вид:

$$W = -4g^2\left\{\frac{1}{2}A_0^2 + C_0^2 + C_{20}^2 - C_2^2 - \right.$$

$$\left. - \left[C_0 + \frac{\kappa}{g}\left(\arcsin\left(\frac{C_2}{\sqrt{C_{10}^2 + C_{20}^2}}\right) - \arcsin\left(\frac{C_{20}}{\sqrt{C_{10}^2 + C_{20}^2}}\right)\right)\right]^2\right\}^2 \times$$

$$\times\left(C_2^2 - C_{20}^2 - C_0^2 + \left[C_0 + \frac{\kappa}{g}\cdot\left(\arcsin\left(\frac{C_2}{\sqrt{C_{10}^2 + C_{20}^2}}\right) - \arcsin\left(\frac{C_{20}}{\sqrt{C_{10}^2 + C_{20}^2}}\right)\right)\right]^2\right) \times \qquad (28)$$

$$\times\left(C_{10}^2 + C_{20}^2 - C_2^2\right).$$

В этом случае нормированная константа взаимодействия K и нормированная плотность атомов a_0 выражается через плотность фотонов f_2 следующим образом:

$$K = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}a_0^2 - f_2^2 + f_{20}^2 + f_0^2} - f_0}{\arcsin\left(\frac{f_2}{\sqrt{1 + f_{20}^2}}\right) - \arcsin\left(\frac{f_{20}}{\sqrt{1 + f_{20}^2}}\right)}, \qquad (29)$$

$$a_0^2 = 2 \cdot \left(f_2^2 - f_{20}^2 - f_0^2 + \left[f_0 + K \left(\arcsin\left(\frac{f_2}{\sqrt{1+f_{20}^2}} \right) - \arcsin\left(\frac{f_{20}}{\sqrt{1+f_{20}^2}} \right) \right) \right]^2 \right). \qquad (30)$$

На рис. 5 представлены графики потенциальной энергии, которые дают качественное представление об эволюции. Как видно, потенциальная энергия нелинейного осциллятора характеризуется наличием минимума, в пределах которого изображающая точка располагается в начальный момент времени и может со временем колебаться, что соответствует периодическому режиму эволюции системы, в отличие от предыдущего случая (рис. 2, 3).

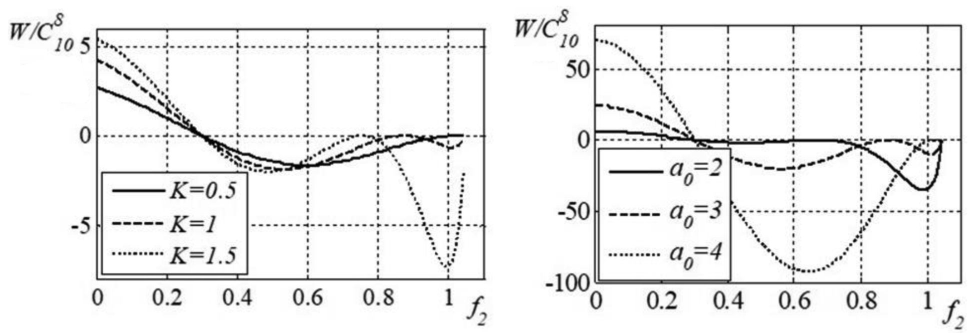

Рисунок 5 / Figure 5

Зависимость потенциальной энергии W от плотности фотонов второго импульса f_2 при различных значениях нормированной константы взаимодействия K и нормированной плотности атомов a_0 при $B_0 = 0$, $C_{20} \neq C_0 \neq C_{10} \neq A_0 \neq 0$.

Dependence of the potential energy W on the photon density of the second pulse f_2 for various values of the normalized interaction constant K and the normalized atomic density a_0 for $B_0 = 0$, $C_{20} \neq C_0 \neq C_{10} \neq A_0 \neq 0$.

Источник: составлено по данным авторов.

На основе этих результатов, на рис. 6а и 6б показана временная эволюция плотности фотонов второго импульса $f_2(t)$ и фазовая траектория на плоскости $\left(\dot{f}_2, f_2\right)$.

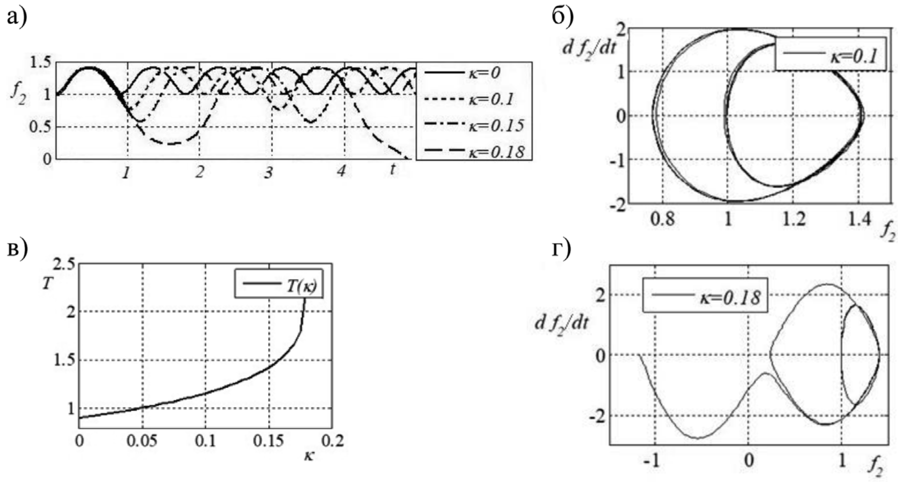

Рисунок 6 / Figure 6

Случай $B_0 = 0$, $C_{20} \neq 0$, $C_0 \neq 0$, $C_{10} \neq 0$, $A_0 \neq 0$ а) эволюция плотности фотонов $f_2(t)$;
б) фазовая траектория для значения константы взаимодействия κ равном 0,1;
в) период колебаний в зависимости от значения константы взаимодействия κ;
г) фазовая траектория для критического значения константы взаимодействия κ равном 0,18.

(a) Evolution of the photon density $f_2(t)$; (b) phase trajectory for the value of the interaction constant κ equal to 0.1; (c) period of oscillations as a function of the value of the interaction constant κ; (d) phase trajectory for the critical value of the interaction constant κ equal to 0,18 for $B_0 = 0$, $C_{20} \neq 0$, $C_0 \neq 0$, $C_{10} \neq 0$, $A_0 \neq 0$.

Источник: составлено по данным авторов.

Видно, что плотность фотонов $f_2(t)$ демонстрирует двупериодическое поведение в зависимости от времени. Фазовая траектория (рис. 6б) состоит из двух замкнутых кривых, которые соприкасаются при $\dot{f}_2(t) = 0$. Периоды колебаний функций существенно зависят от параметров системы и от начальных условий. Существуют такие значения параметров, при которых период функции $f_2(t)$ начинает быстро расти и обращается в бесконечность при $f_2 \to 0$ (рис. 6в, 6г).

Из рис. 6а также видно, что при малых значениях параметра κ имеет место двупериодическая эволюция плотности фотонов второго импульса $f_2(t)$, амплитуда колебаний которой растёт с ростом константы взаимодействия κ. Однако, при некотором критическом значении κ (рис. 6в, 6г) плотность $f_2(t)$ переходит из периодического в апериодический режим эволюции.

Выводы

Таким образом, из представленных результатов следует, что изучаемая система демонстрирует как периодическую, так и апериодическую эволюцию при изменении параметров системы (например, константы взаимодействия или начальных плотностей частиц), причём существуют критические значения параметров, при которых происходят срывы из одного типа эволюции в другой. Изменением параметров системы можно гибко контролировать её эволюцию.

Статья поступила в редакцию 06.12.2019 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хаджи П. И., Зинган А. П. Особенности динамики стимулированной рамановской атомно-молекулярной конверсии в смеси двух бозе-газов с образованием бозе-конденсированных гетероядерных молекул // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 2011. Т. 139. № 4. С. 645–665.
2. Feshbach resonances in potassium Bose–Bose mixtures / Tanzi L., Cabrera C. R., Sanz J., Cheiney P., Tomza M., Tarruell L. // Physical Review A. 2018. Vol. 98. Iss. 6. P. 062712.
3. Trousselet F., Rueda-Fonseca P., Ralko A. Competing supersolids of Bose–Bose mixtures in a triangular lattice // Physical Review B. 2014. Vol. 89. Iss. 8. P. 085104.
4. Observation of Feshbach-Like Resonances in Collisions between Ultracold Molecules / Chin C., Kraemer T., Mark M., Herbig J., Waldburger P., Nдgerl H.-C., Grimm R. // Physical Review Letters. 2005. Vol. 94. Iss. 12. P. 123201.
5. Creation of ultracold molecules from a Fermi gas of atoms / Regal C. A., Ticknor G., Bohn J. L., Jin D. S. // Nature. 2003. No. 424. P. 47–50.
6. Strecker K. E., Partridge G. B., Hulet R. G. Conversion of an Atomic Fermi Gas to a Long-Lived Molecular Bose Gas // Physical Review Letters. 2003. Vol. 91. Iss. 8. P. 080406.
7. Preparation of a Pure Molecular Quantum Gas / Herbig J., Kraemer T., Mark M., Weber T., Chin C., Nдgerl H.-C., Grimm R. // Science. 2003. Vol. 301. Iss. 5639. P. 1510–1513.
8. Formation of Quantum-Degenerate Sodium Molecules / Xu K., Mukaiyama T., Abo-Shaeer J. R., Chin J. K., Miller D. E. // Physical Review Letters. 2003. Vol. 91. Iss. 21. P. 210401.
9. Coherent Optical Transfer of Feshbach Molecules to a Lower Vibrational State / Winkler K., Lang F., Thalhammer G., Straten P., Grimm R., Denschlag J. H. // Physical Review Letters. 2007. Vol. 98. Iss. 4. P. 043201.
10. Two-color photoassociation spectroscopy of ytterbium atoms and the precise determinations of s-wave scattering lengths / Kitagawa M., Enomoto K., Kasa K., Takahashi Y., Ciurylo R., Naidon P., Julienne P.S. // Physical Review A. 2008. Vol. 77. Iss. 1. P. 012719.
11. Stark deceleration of lithium hydride molecules / Tokunaga S. K., Dyne J. M., Hinds E. A., Tarbutt M. R. // New Journal of Physics. 2009. Vol. 11. No. 5. P. 055038.
12. Erratum: Ultracold Heteronuclear Fermi–Fermi Molecules / Voigt A.-C., Taglieber M., Costa L., Aoki T., Wieser W., Hдnsch T.W., Dieckmann K. // Physical Review Letters. 2010. Vol. 105. Iss. 26. P. 269904.
13. Observation of Feshbach Resonances between Two Different Atomic Species / Stan C. A., Zwierlein M. W., Schunck C. H., Raupach S. M. F., Ketterle W. // Physical Review Letters. 2004. Vol. 93. Iss. 14. P. 143001.
14. Soderberg K.-A. B., Gemelke N., Chin C. Ultracold molecules: vehicles to scalable quantum information processing // New Journal of Physics. 2009. Vol. 11. No. 5. P. 055022.
15. Spectroscopy of $^{39}K^{85}Rb$ triplet excited states using ultracold a $^3\Sigma^+$ state molecules formed by photoassociation / Kim J. T., Wang D., Eyler E. E., Gould P. L., Stwalley W. C. // New Journal of Physics. 2009. Vol. 11. No. 5. P. 055020.

16. Quantum Degenerate Two-Species Fermi–Fermi Mixture Coexisting with a Bose–Einstein Condensate / Taglieber M., Voight A.-C., Aoki T., Hдnsch T. W., Dieckmann K. // Physical Review Letters. 2008. Vol. 100. Iss. 1. P. 010401.
17. Observation of Feshbach-like resonances in collisions between ultracold molecules / Chin C., Kraemer T., Mark M., Herbig J., Waldburger P., Nдgerl H.-C., Grimm R. // Physical Review Letters. 2005. Vol. 94. Iss. 12. P. 123201.
18. Chiquillo E. Equation of state of the one- and three-dimensional Bose–Bose gases // Physical Review A. 2018. Vol. 97. Iss. 7. P. 063605.
19. Laser-assisted self-induced Feshbach resonance for controlling heteronuclear quantum gas mixtures / Devolder A., Luc-Koenig E., Atabek O., Desouter-Lecomte M., Dulieu O. // Physical Review A. 2019. Vol. 100. Iss. 5. P. 052703.
20. Bose–Einstein Condensation of Erbium / Aikawa K., Frisch A., Mark M., Baier S., Rietzler A., Grimm R., Ferlaino F. // Physical Review Letters. 2012. Vol. 108. Iss. 21. P. 210401.
21. Magnetically Controlled Exchange Process in an Ultracold Atom–Dimer Mixture / Knoop S., Ferlaino F., Berninger M., Mark M., Nдgerl H., Grimm R., D'Incao J. P., Esry B. D. // Physical Review Letters. 2010. Vol. 104. Iss. 5. P. 053201.
22. Producing superfluid circulation states using phase imprinting / Kumar A., Dubessy R., Badr T., De Rossi C., Goлr de Herve M., Longchambon L., Perrin H. // Physical Review A. 2018. Vol. 97. Iss. 4. P. 043615.
23. Tomza M. Energetics and Control of Ultracold Isotope-Exchange Reactions between Heteronuclear Dimers in External Fields // Physical Review Letters. 2015. Vol. 115. Iss. 6. P. 063201.
24. Quantum Dynamics with Spatiotemporal Control of Interactions in a Stable Bose–Einstein Condensate / Logan W., Li-Chung Ha, Chen-Yu Xu, Chin C. // Physical Review Letters. 2015. Vol. 115. Iss. 15. P. 155301.
25. Chin C., Grimm R. Thermal equilibrium and efficient evaporation of an ultracold atom–molecule mixture // Physical Review A. 2004. Vol. 69. Iss. 3. P. 033612.
26. Зинган А. П., Васильева О. Ф., Хаджи П. И. Динамика бозе-конденсированных ультрахолодных атомов и тримерных молекул с образованием атомно-молекулярных пар // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 2019. Т. 156. № 5 (11). С. 843–852.
27. Lu L.-H., Li Y.-Q. Atom-to-molecule conversion efficiency and adiabatic fidelity // Physical Review A. 2008. Vol. 77. Iss. 5. P. 053611.
28. Tsukada N. Complete population transfer between two Bose–Einstein condensates induced by nonlinear laser coupling // Physical Review A. 2000. Vol. 61. Iss. 6. P. 063602.
29. Keeling J. Polarized polariton condensates and coupled XY models // Physical Review B. 2008. Vol. 78. Iss. 20. P. 205316.
30. Reply to "Comment on 'Stimulated Raman adiabatic passage from an atomic to a molecular Bose–Einstein condensate' " / Drummond P. D., Kheruntsyan K. V., Heinzen D. J., Wynar R. A. // Physical Review A. 2005. Vol. 71. Iss. 1. P. 017602.
31. Jing H., Deng Y., Zhang W. Quantum control of light through an atom-molecule dark state // Physical Review A. 2009. Vol. 80. Iss. 2. P. 025601.
32. Хаджи П. И., Ткаченко Д. В. Динамика стимулированной рамановской атомно-молекулярной конверсии в бозе-эйнштейновском конденсате // Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики. 2006. Т. 83. Вып. 3. С. 120–124.

REFERENCES

1. Khadzhi P. I., Zingan A. P. [Dynamic features of stimulated Raman atomic-molecular conversion in a mixture of two Bose gases with the formation of Bose condensates of heteronuclear molecules]. In: *Zhurnal eksperimental'noi i teoreticheskoi fiziki* [Journal of Experimental and Theoretical Physics], 2011, vol. 139, no. 4, pp. 645–665.
2. Tanzi L., Cabrera C. R., Sanz J., Cheiney P., Tomza M., Tarruell L. Feshbach resonances in potassium Bose–Bose mixtures. In: *Physical Review A*, 2018, vol. 98, iss. 6, pp. 062712.
3. Trousselet F., Rueda-Fonseca P., Ralko A. Competing supersolids of Bose–Bose mixtures in a triangular lattice. In: *Physical Review B*, 2014, vol. 89, iss. 8, pp. 085104.
4. Chin C., Kraemer T., Mark M., Herbig J., Waldburger P., Nдgerl H.-C., Grimm R. Observation of Feshbach-Like Resonances in Collisions between Ultracold Molecules. In: *Physical Review Letters*, 2005, vol. 94, iss. 12, pp. 123201.
5. Regal C. A., Ticknor G., Bohn J. L., Jin D. S. Creation of ultracold molecules from a Fermi gas of atoms. In: *Nature*, 2003, no. 424, pp. 47–50.
6. Strecker K. E., Partridge G. B., Hulet R. G. Conversion of an Atomic Fermi Gas to a Long-Lived Molecular Bose Gas. In: Physical Review Letters, 2003, vol. 91, iss. 8, pp. 080406.
7. Herbig J., Kraemer T., Mark M., Weber T., Chin C., Nдgerl H.-C., Grimm R. Preparation of a Pure Molecular Quantum Gas. In: *Science*, 2003, vol. 301, iss. 5639, pp. 1510–1513.
8. Xu K., Mukaiyama T., Abo-Shaeer J. R., Chin J. K., Miller D. E. Formation of Quantum-Degenerate Sodium Molecules. In: *Physical Review Letters*, 2003, vol. 91, iss. 21, pp. 210401.
9. Winkler K., Lang F., Thalhammer G., Straten P., Grimm R., Denschlag J. H. Coherent Optical Transfer of Feshbach Molecules to a Lower Vibrational State. In: *Physical Review Letters*, 2007, vol. 98, iss. 4, pp. 043201.
10. Kitagawa M., Enomoto K., Kasa K., Takahashi Y., Ciurylo R., Naidon P., Julienne P.S. Two-color photoassociation spectroscopy of ytterbium atoms and the precise determinations of s-wave scattering lengths. In: *Physical Review A*, 2008, vol. 77, iss. 1, pp. 012719.
11. Tokunaga S. K., Dyne J. M., Hinds E. A., Tarbutt M. R. Stark deceleration of lithium hydride molecules. In: *New Journal of Physics*, 2009, vol. 11, no. 5, pp. 055038.
12. Voigt A.-C., Taglieber M., Costa L., Aoki T., Wieser W., Hдnsch T.W., Dieckmann K. Erratum: Ultracold Heteronuclear Fermi–Fermi Molecules. In: *Physical Review Letters*, 2010, vol. 105, iss. 26, pp. 269904.
13. Stan C. A., Zwierlein M. W., Schunck C. H., Raupach S. M. F., Ketterle W. Observation of Feshbach Resonances between Two Different Atomic Species. In: *Physical Review Letters*, 2004, vol. 93, iss. 14, pp. 143001.
14. Soderberg K.-A. B., Gemelke N., Chin C. Ultracold molecules: vehicles to scalable quantum information processing. In: *New Journal of Physics*, 2009, vol. 11, no. 5, pp. 055022.
15. Kim J. T., Wang D., Eyler E. E., Gould P. L., Stwalley W. C. Spectroscopy of $^{39}K^{85}Rb$ triplet excited states using ultracold a $^3\Sigma^+$ state molecules formed by photoassociation. In: *New Journal of Physics*, 2009, vol. 11, no. 5, pp. 055020.
16. Taglieber M., Voight A.-C., Aoki T., Hдnsch T. W., Dieckmann K. Quantum Degenerate Two-Species Fermi–Fermi Mixture Coexisting with a Bose–Einstein Condensate. In: *Physical Review Letters*, 2008, vol. 100, iss. 1, pp. 010401.
17. Chin C., Kraemer T., Mark M., Herbig J., Waldburger P., Nдgerl H.-C., Grimm R. Observation of Feshbach-like resonances in collisions between ultracold molecules. In: *Physical Review Letters*, 2005, vol. 94, iss. 12, pp. 123201.
18. Chiquillo E. Equation of state of the one- and three-dimensional Bose–Bose gases. In: *Physical Review A*, 2018, vol. 97, iss. 7, pp. 063605.
19. Devolder A., Luc-Koenig E., Atabek O., Desouter-Lecomte M., Dulieu O. Laser-assisted

self-induced Feshbach resonance for controlling heteronuclear quantum gas mixtures. In: *Physical Review A*, 2019, vol. 100, iss. 5, pp. 052703.
20. Aikawa K., Frisch A., Mark M., Baier S., Rietzler A., Grimm R., Ferlaino F. Bose–Einstein Condensation of Erbium. In: *Physical Review Letters*, 2012, vol. 108, iss. 21, pp. 210401.
21. Knoop S., Ferlaino F., Berninger M., Mark M., Nдgerl H., Grimm R., D'Incao J. P., Esry B. D. Magnetically Controlled Exchange Process in an Ultracold Atom–Dimer Mixture. In: *Physical Review Letters*, 2010, vol. 104, iss. 5, pp. 053201.
22. Kumar A., Dubessy R., Badr T., De Rossi C., Gолг de Herve M., Longchambon L., Perrin H. Producing superfluid circulation states using phase imprinting. In: *Physical Review A*, 2018, vol. 97, iss. 4, pp. 043615.
23. Tomza M. Energetics and Control of Ultracold Isotope-Exchange Reactions between Heteronuclear Dimers in External Fields. In: *Physical Review Letters*, 2015, vol. 115, iss. 6, pp. 063201.
24. Logan W., Li-Chung Ha, Chen-Yu Xu, Chin C. Quantum Dynamics with Spatiotemporal Control of Interactions in a Stable Bose–Einstein Condensate. In: *Physical Review Letters*, 2015, vol. 115, iss. 15, pp. 155301.
25. Chin C., Grimm R. Thermal equilibrium and efficient evaporation of an ultracold atom–molecule mixture. In: *Physical Review A*, 2004, vol. 69, iss. 3, pp. 033612.
26. Zingan A. P., Vasil'eva O. F., Khadzhi P. I. [Dynamics of Bose-Condensed Ultracold Atoms and Trimer Molecules with the Formation of Atomic–Molecular Pairs]. In: *Zhurnal eksperimental'noi i teoreticheskoi fiziki* [Journal of Experimental and Theoretical Physics], 2019, vol. 156, no. 5 (11), pp. 843–852.
27. Lu L.-H., Li Y.-Q. Atom-to-molecule conversion efficiency and adiabatic fidelity. In: *Physical Review A*, 2008, vol. 77, iss. 5, pp. 053611.
28. Tsukada N. Complete population transfer between two Bose–Einstein condensates induced by nonlinear laser coupling. In: *Physical Review A*, 2000, vol. 61, iss. 6, pp. 063602.
29. Keeling J. Polarized polariton condensates and coupled XY models. In: *Physical Review B*, 2008, vol. 78, iss. 20, pp. 205316.
30. Drummond P. D., Kheruntsyan K. V., Heinzen D. J., Wynar R. A. Reply to "Comment on 'Stimulated Raman adiabatic passage from an atomic to a molecular Bose-Einstein condensate'". In: *Physical Review A*, 2005, vol. 71, iss. 1, pp. 017602.
31. Jing H., Deng Y., Zhang W. Quantum control of light through an atom-molecule dark state. In: *Physical Review A*, 2009, vol. 80, iss. 2, pp. 025601.
32. Khadzhi P. I., Tkachenko D. V. [Dynamics of stimulated Raman atom–molecule conversion in a Bose–Einstein condensate]. In: *Pis'ma v Zhurnal eksperimental'noi i teoreticheskoi fiziki* [Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters], 2006, vol. 83, no. 3, pp. 120–124.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Зинган Анна Петровна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры квантовой радиофизики и систем связи Приднестровского государственного университета имени Т. Г. Шевченко;
e-mail: zingan.anna@mail.ru

Васильева Ольга Федоровна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры квантовой радиофизики и систем связи Приднестровского государственного университета имени Т. Г. Шевченко;
e-mail: florina_of@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Anna P. Zingan – PhD in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor at the Department of Quantum Radiophysics and Communication Systems, Pridnestrovian State University;
e-mail: zingan.anna@mail.ru

Olga F. Vasilieva – PhD in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor at the Department of Quantum Radiophysics and Communication Systems, Pridnestrovian State University;
e-mail: florina_of@mail.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Зинган А. П., Васильева О. Ф. Особенности динамики стимулированной атомно-молекулярной конверсии с участием двух импульсов резонансного лазерного излучения и импульса микроволнового излучения в системе атомов одного сорта. // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2020. № 1. С. 57–76.
DOI: 10.18384/2310-7251-2020-1-57-76

FOR CITATION

Zingan A. P., Vasilieva O. F. Features of dynamics of stimulated atomic–molecular conversion involving two pulses of resonant laser radiation and a pulse of microwave radiation in a system of atoms of one species. In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*, 2020, no. 1, pp. 57–76.
DOI: 10.18384/2310-7251-2020-1-57-76

УДК 519.633
DOI: 10.18384/2310-7251-2020-1-77-89

ИЗУЧЕНИЕ ВЛИЯНИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА СТРУЮ, ИСХОДЯЩУЮ ИЗ СТАЦИОНАРНОГО ПЛАЗМЕННОГО ДВИГАТЕЛЯ

***Бишаев А. М.*[1]*, Абгарян М. В.*[2]**

[1] *Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)*
141700, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский пер., д. 5, Российская Федерация

[2] *Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)*
125993, г. Москва, Волоколамское ш., д. 4, Российская Федерация

***Анотация.* Целью** статьи является изучение влияния магнитного поля на выходящую из стационарного плазменного двигателя (СПД) струю.

Процедура и методы исследования. Рассматривая бесстолкновительное движение ионов, можно выписать выражение для функции распределения ионов, выходящих из кольцевого отверстия. Далее строится схема вычисления плотности ионов как соответствующего интеграла от функции распределения.

Результаты проведённого исследования. Получены картины распределения плотности ионов в трёхмерном пространстве, которые показали возможность управления вектором тяги с помощью магнитного поля.

Теоретическая\практическая значимость заключается в дальнейшем развитии направления, которое использует методы кинетической теории в плазме. Выводы этой работы имеют практическое значение для специалистов, занимающихся созданием новых типов электрореактивных двигателей (ЭРД).

Ключевые слова: функция распределения ионов, кинетическое уравнение бесстолкновительного движения ионов, магнитное поле, стационарные плазменные двигатели, плотность ионов, численная схема, граничные условия, характеристики кинетического уравнения

STUDY OF THE EFFECT OF THE MAGNETIC FIELD ON A JET OF A STATIONARY PLASMA THRUSTER

***A. Bishaev*[1]*, M. Abgaryan*[2]**

[1] *Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University)*
Institutskii per. 9, 141700 Dolgoprudnyi, Moscow region, Russian Federation

[2] *Moscow Aviation Institute (National Research University)*
Volokolamskoe sh. 4, 125993 Moscow, Russian Federation

Abstract. **Purpose.** The aim of the paper is to study the effect of the magnetic field on a jet of a stationary plasma thruster.
Methodology and Approach. Considering the collisionless movement of ions, it is possible to derive an expression for the distribution function of ions coming out of a ring hole. Then, a scheme is constructed to calculate the density of ions as a corresponding integral of the distribution function.
Results. We have obtained the patterns of the ion density distribution in a three-dimensional space, which show the possibility of controlling the thrust vector by the magnetic field.
Theoretical and Practical Implications. The obtained results indicate a further development of the direction in which the methods of kinetic theory in plasma are used. The results of this work are of practical importance for specialists involved in the design and development of new types of electric propulsion engines.
Keywords: ion distribution function, kinetic equation of collisionless ion motion, magnetic field, stationary plasma thrusters, ion density, numerical scheme, boundary conditions, characteristics of the kinetic equation.

Введение

В настоящее время электрореактивные двигатели повсеместно используются в космической технике. Наиболее широко используемым из них является семейство стационарных плазменных двигателей (СПД). Этот тип двигателей используется практически на всех современных космических аппаратах. В отличие от жидкостных реактивных двигателей СПД имеют существенно больший удельный импульс. В настоящее время идёт постоянное совершенствование СПД с целью увеличения тяги двигателя при сохранении больших значений удельного импульса. На этом пути возникает задача эффективного управления вектором тяги. Так как тягу СПД создаёт струя плазмы, выбрасываемой в окружающее пространство, то естественно попытаться управлять вектором тяги с помощью магнитного поля. Первые исследования в этом направлении были сделаны в работе [1]. В этом исследовании была показана возможность управления тягой магнитным полем. Более детально этот вопрос исследовался в работе [2]. В этой работе был сделан вывод, что вектор тяги направлен по направлению силы Лоренца. На основании проводимых исследований авторами работы [2] был оформлен и защищён патент[1], где предлагается использовать магнитное поле для поворота вектора тяги. Вывод, который был сделан в работе [2], основан на рассмотрении движения заряженной частицы в магнитном поле.

Изучаемая модель

На рис. 1. схематично представлен СПД. Струя, состоящая из ионов, выходит в окружающее пространство из кольцевого отверстия в двигателе. Сам двигатель представляется параллелепипедом $ABCDA_1B_1C_1D_1$. В центре квадратной грани ABCD, как это показано на рис. 1, помещена система координат XYZ.

[1] Бишаев Ан. и др. Устройство управления вектором тяги плазменного двигателя (варианты) и способ управления вектором тяги плазменного двигателя. Патент на изобретение № 2644810, Московский технологический институт, Госреестр изобретений РФ, 14 февраля 2017 г.

Показанный на рис. 1 тонкими линиями параллелепипед $LKMNL_1K_1M_1N_1$ ограничивает счётную область.

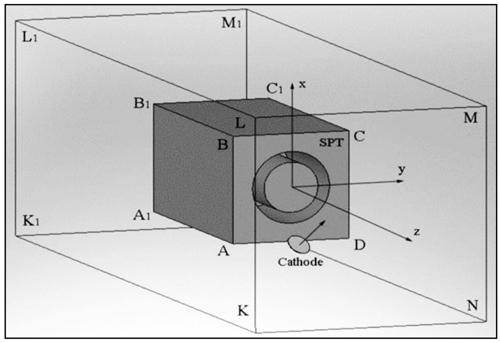

Рисунок 1 / Figure 1
Геометрия течения плазмы из СПД.
Geometry of a plasma jet from a stationary plasma thruster.

Источник: по данным авторов из статьи [3].

По оси X направлено постоянное магнитное поле величины $H = 100$ Гаусс. Это магнитное поле, воздействуя на ионы, будет поворачивать струю, а это может привести к повороту вектора тяги. Задача состоит в определении этого воздействия магнитного поля на струю.

Электроны, выходящие с показанного на рис. 1 катода, при таком магнитном поле ещё не будут захвачены магнитным полем и не окажут сильного воздействия на струю, выходящую из двигателя. Поэтому будем предполагать, что имеет место бесстолкновительное истечение ионов в окружающее пространство. Результаты работы [3] показали, что возникающее электрическое поле слабо влияет на выходящие из кольцевого отверстия высокоэнергетические ионы, поэтому действием электрического поля на ионы пренебрежём. Данные предположения являются естественными, ибо целью работы является определение воздействия непосредственно магнитного поля на струю ионов. В этом случае $f(t,\vec{x},\vec{\xi})$ – функция распределения ионов будет определяться из следующего уравнения:

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\xi^i\frac{\partial f}{\partial x_i}+\frac{e}{mc}\varepsilon_{ikl}\xi_k H_l\frac{\partial f}{\partial \xi_i}=0,$$

где e – заряд иона, m – его масса, c – скорость света, ε_{ikl} – символ Леви-Чивита. В выше написанной формуле везде предполагается суммирование по повторяющемся индексам, причём все индексы меняются от единицы до трёх.

Переход к безразмерным величинам осуществлялся также как в [3]. Тогда

$$x_i = Lx_i', \quad \xi_i=\xi_0\xi_i', \quad i=1,2,3; \quad t=\frac{L}{\xi_0}t', \quad \xi_0=\sqrt{\frac{2eU_0}{m}}, \quad f(t,\vec{x},\xi)=\frac{n_0}{\xi_0^3}f'\left(t',\vec{x}',\vec{\xi}'\right),$$

где U_0 – разрядное напряжение (разность потенциалов между гранями ABCD и $A_1B_1C_1D_1$), L – половина длины стороны AB, n_0 – характерное значение плотности ионов. Эта величина определяется в [3] как характерное значение плотности ионов, выходящих из кольцевого отверстия.

Опуская штрихи в безразмерных переменных, получим, что безразмерная функция распределения ионов $f(t,\overline{x},\xi)$ определяется следующим уравнением:

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\xi^i\frac{\partial f}{\partial x_i}+\omega\varepsilon_{ikl}\xi_k H_l\frac{\partial f}{\partial \xi_i}=0, \qquad (1)$$

где $\omega=\frac{L}{r_{Л}}$, где $r_{Л}=\frac{mc\xi_0}{eH}$ – ларморовский радиус, c – скорость света.

Учитывая, что компонента магнитного поля есть (H, 0, 0), запишем (1) в виде:

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\xi^i\frac{\partial f}{\partial x_i}+\omega\xi_z\frac{\partial f}{\partial \xi_y}-\omega\xi_y\frac{\partial f}{\partial z}=0. \qquad (2)$$

Из сказанного выше следует, что для функции распределения ионов граничное условие можно задавать таким же, как в [3]. В безразмерном виде оно следующее:

$$f=\begin{cases}\frac{\overline{n}}{\pi^{3/2}}\exp\{-B_1(\vec{\xi}-\vec{\overline{u}})^2\},\ R_2\le r\le R_1, r=\sqrt{x^2+y^2},\\ 0,\ (r<R_2)\cup(r>R_1),\end{cases} \qquad (3)$$

где $\overline{n}(r),\vec{\overline{u}}(r)$ – заданные функции (как они определяются, разобрано в [5]); $B_1=\frac{U_0}{kT_0^i}>>1$, T_0^i – температура ионов на выходе из двигателя. Она задавалась в зависимости от типа двигателя, однако приведённое неравенство всегда имеет место. Величины R_1, R_2 есть безразмерные значения радиусов кольца, откуда вылетают ионы.

Характеристическая система уравнения (2) имеет вид:

$$\frac{d\tilde{x}}{d\tau}=\tilde{\xi}_x,\quad \frac{d\tilde{\xi}_x}{d\tau}=0,\quad \frac{d\tilde{y}}{d\tau}=\tilde{\xi}_y,\quad \frac{d\tilde{z}}{d\tau}=\tilde{\xi}_z,\quad \frac{d\tilde{\xi}_y}{d\tau}=\omega\tilde{\xi}_z,\quad \frac{d\tilde{\xi}_z}{d\tau}=-\omega\tilde{\xi}_y.$$

Решение этой системы, удовлетворяющее при $\tau = t$ начальным условиям

$$\tilde{x}(t)=x,\ \tilde{y}(t)=y,\quad \tilde{z}(t)=z,\quad \tilde{\xi}_x(t)=\xi_x,\quad \tilde{\xi}_y(t)=\xi_y,\quad \tilde{\xi}_z(t)=\xi_z,$$

есть:

$$\tilde{\xi}_x = \xi_x, \quad \tilde{x}(\tau) = x - \xi_x(t-\tau),$$

$$\tilde{\xi}_y = \xi_y \cos\omega(t-\tau) - \xi_z \sin\omega(t-\tau), \quad \tilde{\xi}_z = \xi_z \cos\omega(t-\tau) + \xi_y \sin\omega(t-\tau),$$
$$\tilde{z}(\tau) = z + \left(\tilde{\xi}_y(\tau) - \xi_y\right)/\omega, \quad \tilde{y}(\tau) = y + \left(\xi_z - \tilde{\xi}_z(\tau)\right)/\omega.$$

Из этих соотношений следует, что $\xi_y{}^2 + \xi_z{}^2 = \tilde{\xi}_y{}^2(\tau) + \tilde{\xi}_z{}^2(\tau) = \mathrm{const} = V^2$. Из последнего соотношения видно, что удобно ввести в пространстве скоростей полярную систему координат:

$$\xi_x = \xi_x, \quad \xi_y = V\cos\alpha, \quad \xi_z = V\sin\alpha, \quad 0 \le V < +\infty, \quad 0 \le \alpha < 2\pi.$$

В этой системе координат уравнения характеристик (2) перепишутся в виде:

$$\tilde{\xi}_y = V\cos\left(\alpha + \omega\left(t-\tau\right)\right), \quad \tilde{\xi}_z = V\sin\left(\alpha + \omega\left(t-\tau\right)\right),$$
$$\tilde{z}(\tau) = z - 2\frac{V}{\omega}\sin\left(\frac{\omega(t-\tau)}{2}\right)\sin\left(\alpha + \frac{\omega(t-\tau)}{2}\right)$$

$$\tilde{y}(\tau) = y + 2\frac{V}{\omega}\sin\left(\frac{\omega\left(t-\tau\right)}{2}\right)\cos\left(\alpha + \frac{\omega\left(t-\tau\right)}{2}\right), \quad \tilde{\xi}_x = \xi_x, \quad \tilde{x}(\tau) = x - \xi_x\left(t-\tau\right).$$

Правая часть уравнения (2) есть дифференцирование функции $f(t,\vec{x},\vec{\xi})$ в силу характеристической системы, и поэтому уравнение (2) может быть записано в виде: $\frac{df}{d\tau} = 0$. С учётом граничного условия (3) решение уравнения (2) запишется в виде:

$$f\left(t,\vec{x},\vec{\xi}\right) = \theta\left(\bar{\tilde{\xi}}_z(\bar{t})\right)\theta((R_1 - \bar{r})(\bar{r} - R_2))\frac{\bar{n}(\bar{r})}{\pi^{3/2}}\exp\left\{-B_1\left(\bar{\tilde{\vec{\xi}}}(\bar{t}) - \bar{\vec{u}}(\bar{r})\right)^2\right\} \tag{4}$$

где $\bar{t}$ определяется соотношением:

$$\tilde{z}\left(\bar{t}\right) = 0 = z - 2\sin\left(\frac{\omega(t-\bar{t})}{2}\right)\sin\left(\alpha + \frac{\omega(t-\bar{t})}{2}\right)\frac{V}{\omega}. \tag{5}$$

Откуда:

$$V = \frac{\omega z}{2\sin\omega\left(\frac{t-\bar{t}}{2}\right)\sin\left(\alpha + \omega\left(\frac{t-\bar{t}}{2}\right)\right)}. \tag{6}$$

Фигурирующая в формуле (4) величина θ есть функция Хевисайда:

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

Значение плотности ионов будет определяться следующей квадратурой:

$$n(t,\overline{x})=\left(\frac{B_1}{\pi}\right)^{3/2}\times$$

$$\times\iiint_D n(\overline{r})\exp\left\{-B_1\begin{pmatrix}\left(\xi_x-\overline{u}(\overline{r})\right)^2+\left(V\cos(\alpha+\omega(t-\overline{t}))-\overline{u}_y(\overline{r})\right)^2+\\+\left(\left(V\sin(\alpha+\omega(t-\overline{t})\right)-\overline{u}_z(\overline{r})\right)^2\end{pmatrix}\right\}d\xi_x VdVd\alpha,$$

$$D=\left\{\sin(\alpha+\omega(t-\overline{t})\geq 0,\quad R_2\leq\overline{x}^2+\overline{y}^2\leq R_1,\quad 0\leq\alpha\leq 2\pi\right\}$$

Так как $B_1 \gg 1$, то, как показано в цитируемых выше работах, вновь возникает проблема вычисления тройного интеграла от дельтообразной подынтегральной функции. Причем ситуация оказалась более сложная, чем имелась в указанных выше работах вследствие того, что траектории (характеристики) движения ионов существенно не прямые линии. Как и в [3], эта проблема решается переходом от интегрирования по скоростному пространству к интегрированию по выходному отверстию СПД, но в данном случае это осуществляется принципиально другим способом.

Построение схемы вычислений

Положим $\tilde{x}(\overline{r})=r\cos\varphi$, $\tilde{y}(\overline{r})=r\sin\varphi$ и перейдём к переменным $(r,\varphi,\overline{t})$ по формулам:

$$\xi_x=\frac{(x-r\cos\alpha)}{t-\overline{t}},\ \operatorname{ctg}(\beta)=\frac{y-r\sin\varphi}{z},\quad V=\frac{\omega d}{2\sin\left(\omega\dfrac{(t-\overline{t})}{2}\right)},\qquad(7)$$

где $\beta(\alpha,\overline{t})=\alpha+\omega\dfrac{(t-\overline{t})}{2}$, $d(r,\varphi)=\sqrt{(y-r\sin\varphi)^2+z^2}$.

Якобиан преобразования замены (7) будет:

$$J=\begin{vmatrix}-\dfrac{\cos\varphi}{t-\overline{t}} & \dfrac{r\sin\varphi}{t-\overline{t}} & \dfrac{x-r\cos\varphi}{(t-\overline{t})^2}\\ -\dfrac{\omega z\sin\varphi\cos\beta}{2\sin(\frac{\omega(t-\overline{t})}{2})} & -\dfrac{\omega rz\cos\varphi\cos\beta}{2\sin(\frac{\omega(t-\overline{t})}{2})} & \dfrac{\omega^2\cos(\frac{\omega(t-\overline{t})}{2})d}{4\sin^2(\frac{\omega(t-\overline{t})}{2})}\\ \dfrac{z}{d^2}\sin\varphi & \dfrac{z}{d^2}r\sin\varphi & \dfrac{\omega}{2}\end{vmatrix}=\frac{\omega^2 r\sin(\alpha+\omega(t-\overline{t}))}{4(t-\overline{t})\sin^2(\omega(t-\overline{t})/2)d}.$$

В выше приведённой формуле учитывается, что $\cos\beta=\dfrac{y-r\sin\varphi}{d}$, $\sin\beta=\dfrac{z}{d}$.

В новых переменных будем иметь:

$$n(t,\overline{x})=\left(\frac{B_1}{\pi}\right)^{3/2}\int_{R_2}^{R_1}\int_0^{2\pi}\int_0^t n(\overline{r})\exp\left\{-B_1 g^2\right\}\cdot\frac{\omega^3 rsin(\alpha+\omega(t-\overline{t}))}{8(t-\overline{t})\sin^3(\omega(t-\overline{t})/2)}drd\overline{t}d\varphi. \quad (8)$$

В (8) $\sin(\alpha+\omega(t-\overline{t}))\geq 0.$ Это условие соответствует условию $\overline{\xi}_z\geq 0,$

$$g^2=\left(\frac{x-r\cos\varphi}{t-\overline{t}}\right)^2+\frac{\omega^2 d^2}{4\sin^2\left(\frac{\omega}{2}(t-\overline{t})\right)}-$$

$$-2\left(\frac{x-r\cos\varphi}{t-\overline{t}}\right)\overline{u}_r\cos\varphi-\omega\frac{\cos\left(\frac{\omega}{2}(t-\overline{t})\right)}{4\sin^2\left(\frac{\omega}{2}(t-\overline{t})\right)}U_1+U_2,$$

$$U_1=\overline{u}_r\sin\varphi(y-r\sin\varphi)+\overline{u}_z z,\quad U_2=\overline{u}_r^2+\overline{u}_z^2-\omega((y-r\sin\varphi)\overline{u}_z-z\overline{u}_r\sin\varphi).$$

В (8) делается замена $\omega(t-\overline{t})/2=u.$ Тогда:

$$n(t,\overline{x})=\left(\frac{B_1}{\pi}\right)^{3/2}\int_{R_2}^{R_1}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\omega t}{2}} n(\overline{r})\exp\left\{-B_1 g^2\right\}\cdot\frac{\omega^3(z\cos u+(y-r\sin u)}{8du\sin^3 u}rdud\varphi.$$

Если $\frac{\omega t}{2}\leq\frac{\pi}{2}$, то положим $v=\frac{1}{\sin u}$. Получим:

$$n(t,\overline{x})=\left(\frac{B_1}{\pi}\right)^{3/2}\int_{R_2}^{R_1}\int_0^{2\pi}F(r,\varphi)\int_{V^+}^{+\infty}\exp\left\{-B_1 g_1^2\right\}\cdot\frac{\omega^3 v(zv_1\cos u+\dfrac{(y-r\sin u)}{v})}{8dv_1\arcsin\dfrac{1}{v}}rdvud\varphi, \quad (9)$$

где $F(r,\varphi)=r\overline{n}(r)\exp\{-B_1U_2\}$, $v_1=\sqrt{1-\frac{1}{v^2}}$,

$$g_1^2=\omega^2\left(\frac{x-r\cos\varphi}{\arcsin(\frac{1}{v})}\right)^2+\frac{\omega^2 d^2}{4}v^2-\omega\left(\frac{x-r\cos\varphi}{\arcsin\left(\frac{1}{v}\right)t}\right)\overline{u}_r\cos\varphi-\omega\frac{v_1 v}{4}U_1,$$

$$V^+=\max\left\{\frac{1}{\sin\frac{\omega}{2}t},\frac{d}{z}\right\}.$$

Все попытки вычислить несобственный интеграл в (9) численно потерпели неудачу, ибо ни одна численная схема не позволяла учесть носитель дельтообразной подынтегральной функции (см. [4]). Нетрудно видеть, что $0 \le \frac{1}{v} \le \sin\frac{\omega t}{2} < 1$, так что $\arcsin\frac{1}{v} = v + O\left(\frac{1}{v^2}\right)$, $v_1 = \sqrt{1-\frac{1}{v^2}} = 1 + O\left(\frac{1}{v^2}\right)$. Поэтому была предложена следующая схема вычислений.

Промежуток $\left[0,\frac{\omega t^*}{2}\right] \cup \left[\frac{\omega t^*}{2},\frac{\omega t}{2}\right]$. Тогда $n(t,\vec{x}) = I_1 + I_2$, где и в I_1 интегрирование ведётся от V^+ до V^*. Это собственный интеграл. Он вычислялся с помощью достаточно мелкой сетки интегрирования. В несобственном интеграле I_2 предполагается, что $\operatorname{var} c\sin\frac{1}{v} = 1, v_1 = 1$. Тогда $I_2 = \sum_{i=1}^{i_0}\sum_{j=1}^{j_0} F_{ij}\exp\left\{-B_1\left(U_{2ij} - \frac{\bar{U}_{2ij}^2}{\bar{d}_{ij}^2}\right)\right\} G_{ij}\Delta r\Delta\varphi$,

где любая величина с индексами i, j означает, что она берётся при $r_{i+\frac{1}{2}} = R_2 + (i-1)\Delta r + \frac{\Delta r}{2}$, $\varphi_{j+\frac{1}{2}} = (j-1)\Delta\varphi + \frac{\Delta\varphi}{2}$.

Соответственно:

$$G_{ij} = \left(\frac{B}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int_{V^+}^{+\infty} \frac{\omega^3}{8} v^2 \left(z + \frac{(y - r\sin\varphi)_{ij}}{v}\right) \exp\left\{-B_1\left(\frac{\omega\bar{d}_{ij}}{2}v - \frac{\bar{U}_{1ij}}{\bar{d}_{ij}}\right)^2\right\} dv,$$

$$\bar{d} = \sqrt{(x - r\cos\varphi)^2 + d^2}, \quad \bar{U}_1 = (x - r\cos\varphi)\bar{u}_r\cos\varphi + U_1.$$

Сделав замену $\sqrt{B_1}\left(\frac{\omega\bar{d}}{2}v - \frac{\bar{U}_1}{\bar{d}}\right)_{ij} = q$, получим, что:

$$G_{ij} = \left(\frac{B}{2\pi\bar{d}^3} z\left(\frac{1}{B_1} + \left(\frac{\bar{U}_1}{\bar{d}}\right)^2 + (y - r\sin\varphi)\frac{\bar{U}_1}{\bar{d}}\right) \times \right.$$
$$\left. \times\left(1 - sign(q^+)Erf\left(\sqrt{B_1}q^+\right)\right) + A\exp\left\{-B_1 q^{+2}\right\}\right)_{ij},$$

$$\sqrt{B_1}\left(\frac{\omega\bar{d}}{2}v^+ - \frac{\bar{U}_1}{\bar{d}}\right)_{ij} = q^+.$$

Величина, обозначенная как A, не важна: стоящая за ней экспонента её обнуляет.

С помощью описанного метода удалось установить, что при $\frac{\omega t^*}{2} = \frac{\pi}{4}$ вычисление интеграла с разбиением и без оного даёт один и тот же результат.

Расчёты показали, что вклад от собственного интеграла мал. Это видно на рис. 2, где представлены картины линий уровня распределения плотности ионов плазмы в плоскости *Z0Y*, $\omega t/2 = \pi/4\,(a)$, $\omega t/2 = \pi/2\,(b)$, $\omega t/2 = 3\pi/4\,(c)$. Видно, что изменения во времени при $\omega t/2 > \pi/4$ не наблюдаются.

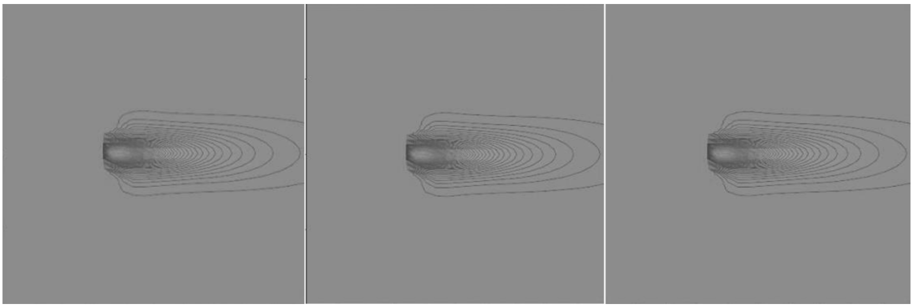

Рисунок 2 (a, b, c) / Figure 2 (a, b, c)
Линии уровня плотности ионов плазмы.
Lines of the plasma ion density level.

Источник: составлено авторами.

На рис. 3 представлена трёхмерная картина плотностей уровня ионов. Видно, что струя поворачивается, закручиваясь вдоль оси X. Значения на шкале соответствуют процентам от максимальной величины плотности, которая равнялась 4.

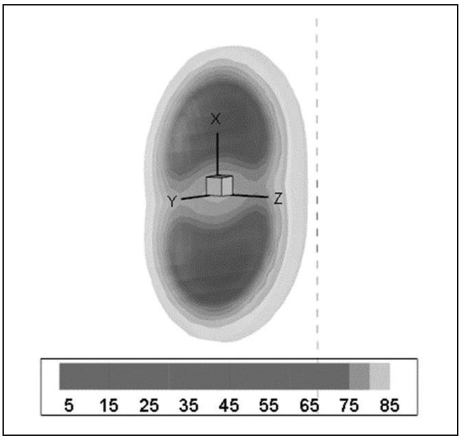

Рисунок 3 / Figure 3
Трехмерная картина плотностей уровня ионов.
Three-dimensional pattern of ion level densities.

Источник: составлено авторами.

Обсуждение результатов

При $\omega t/2 > \pi/2$ метод вычисления остаётся таким же, выражение для $t-\overline{t}$ через арксинус будет содержать добавочные члены, которые изменят подынтегральную функцию, но метод останется таким же, потребовав добавления ещё нескольких собственных интегралов. Из анализа рис. 3 и формул для вычисления компонент тензора напряжений можно сделать вывод, что поворот вектора тяги при воздействии магнитного поля возможен.

Понятно, что в данной работе задача о влиянии магнитного поля на струю СПД решена в достаточно приближенной постановке. Чтобы решить эту задачу полностью, необходимо учесть влияние эффектов резонансной перезарядки и самосогласованного электрического поля. Для этого можно воспользоваться разработанным специально для численного решения кинетических уравнений методом расщепления по физическим процессам. Этот метод впервые был предложен в [5]. В [6] этот метод был модифицирован так, чтобы численная схема имела второй порядок точности при шаге по времени. В настоящее время различные вариации этого метода широко используются при численном решении кинетических уравнений. В [7] модификацией этого метода была решена система модельных кинетических уравнений. Из выше сказанного следует, что построенный в данной статье метод может быть использован для решения задачи определения влияния магнитного поля на струю СПД в полной постановке, если его использовать на этапе разлёта в построенном в [3] методе расщепления.

Из других работ, посвящённых данной проблеме, следует отметить [8]. В этой работе исследуется функционирование магнитного сопла. Для описания явления авторами используется уравнение Власова, то есть уравнение (1). Отличие этой работы состоит в совсем другой геометрии. Это позволяет им свести задачу к одномерной. Граничные условия в работе [8] таковы, что в них не возникает дельтообразной функции распределения, поэтому удаётся построить численный метод, с помощью которого определяется функция распределения и вычисляются значения плотности ионов. Так как задача одномерна, то в статье приведены графики плотности. Ясно, что сравнить эти результаты с полученным в данной работе трёхмерным распределением плотности невозможно, а смысл этого сравнения непонятен ввиду существенных отличий в геометрии задачи. Надо отметить, что проведение сравнений результатов вычислений данной работы и результатов вычислений в работе [3] наталкивается на объективные трудности, так как получить решение поставленной выше задачи методом статистического моделирования пока не удаётся. Так, в [9] этим методом решается именно задача о струе, но с другой геометрией. Сам численный метод чётко не описан и не приведены результаты – значения плотности. Единственная известная авторам это работа [4], где методом статистического моделирования решалась именно задача о струе СПД в такой же постановке, как и в [3]. Результаты, которые получены при этом, совсем не соответствуют распределению плотности в струе. Причина этого заключалась в том, что методом статистического моделирования не удаётся адекватно смоделировать дельтообразную функцию распределения, а моделируется только перезарядка.

Выводы

1. Полученные картины распределения плотности ионов в трёхмерном пространстве указывают на возможность управления вектором тяги с помощью магнитного поля.

2. Задача о влиянии магнитного поля на струю СПД решена в настоящей работе в достаточно приближенной постановке. Чтобы решить эту задачу полностью, необходимо учесть влияние эффектов резонансной перезарядки и самосогласованного электрического поля. Для этого можно воспользоваться разработанным специально для численного решения кинетических уравнений методом расщепления по физическим процессам [5; 6].

3. Собственно, основной результат данной статьи есть построение численной схемы вычисления плотности бесстолкновительного движения ионов как соответствующего интеграла от функции распределения ионов, выходящих из кольцевого отверстия.

Статья поступила в редакцию 20.12.2019 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Three-dimensional simulation of atom and ion dynamics in a stationary plasma thruster / Lazourenko A., Kim V., Bishaev A., Auweter-Kurtz M. // Journal of Applied Physics. 2005. Vol. 98. Iss. 4. 043303. P. 521–532.
2. Экспериментальное исследование отклонения вектора тяги плазменного ускорителя / Бугрова А. И., Бугров Г. Э., Бишаев А. М., Десятсков А. В., Козинцева М. В., Липатов А. С., Харчевников В. К., Смирнов П. Г. // Письма в Журнал технической физики. 2014. Т. 40. Вып. 4. С. 42–48.
3. Абгарян М. В., Бишаев А. М. Модернизация метода расщепления для решения системы кинетических уравнений, описывающих поведение струи разреженной плазмы // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2018. Т. 58. № 7. С. 1132–1146.
4. Бондарь Е. А., Швейгерт В. А., Иванов М. С. Численное моделирование струи стационарного плазменного двигателя // Кинетическая теория и динамика разреженных газов: Материалы Всероссийского семинара (Новосибирск, 2–7 декабря 2002 г.). Новосибирск: НГАСУ, 2002. С. 123–126.
5. Cheremisin F. G., Solving the Boltzmann equation in the case of passing to the hydrodynamic flow regime // Doklady Physics. 2000. Vol. 45. Iss. 8. P. 401–404.
6. Larina I. N., Rykov V.A. Numerical solution of the Boltzmann equation by a symmetric splitting method // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2003. Vol. 43. Iss. 4. P. 575–586.
7. Comparison of the Shakhov kinetic equation and DSMC method as applied to space vehicle aerothermodynamics / Titarev V. A., Frolova A. A., Rykov V. A., Vashchenkov P. V., Bondar Ye. A. // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2020. Vol. 364. P. 112354.
8. Jambunathan R., Levin D. A. Kinetic Modeling of Plasma Plume using Multi-GPU Forest of Octree Approach // Proceedings of 35th International Electric Propulsion Conference. 2017. P. 1–17.
9. One-dimensional Direct Vlasov Simulations of Non-stationary Plasma Expansion in

Magnetic Nozzle / Sanchez-Arriaga G., Zhouy J., Ahedoz-Sanchezx E., Ramos J. J. // 35th International Electric Propulsion Conference. 2017. P. 106.

REFERENCES

1. Lazourenko A., Kim V., Bishaev A., Auweter-Kurtz M. Three-dimensional simulation of atom and ion dynamics in a stationary plasma thruster. In: *Journal of Applied Physics*, 2005, vol. 98, iss. 4. 043303, pp. 521–532.
2. Bugrova A. I., Bugrov G. E., Bishaev A. M., Desyatskov A. V., Kozintseva M. V., Lipatov A. S., Kharchevnikov V. K., Smirnov P. G. [An experimental study of the deviation of the thrust vector of a plasma accelerator]. In: *Pis'ma v Zhurnal tekhnicheskoi fiziki* [Technical Physics Letters], 2014, vol. 40, no. 4, pp. 42–48.
3. Abgaryan M. V., Bishaev A. M. [Modification of the Splitting Method as Applied to a System of Kinetic Equations Describing the Behavior of a Rarefied Plasma Jet]. In: *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki* [Computational Mathematics and Mathematical Physics], 2018, vol. 58, no. 7, pp. 1132–1146.
4. Bondar' E. A., Shveigert V. A., Ivanov M. S. [Numerical simulation of the jet of the stationary plasma thruster]. In: *Kineticheskaya teoriya i dinamika razrezhennykh gazov: Materialy Vserossiiskogo seminara (Novosibirsk, 2–7 dekabrya 2002 g.)* [Kinetic theory and rarefied gas dynamics: Proceedings of the seminar (Novosibirsk, 2–7 December 2002)]. Novosibirsk, Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering Publ., 2002. pp. 123–126.
5. Cheremisin F. G., Solving the Boltzmann equation in the case of passing to the hydrodynamic flow regime. In: Doklady Physics, 2000, vol. 45, iss. 8, pp. 401–404.
6. Larina I. N., Rykov V.A. Numerical solution of the Boltzmann equation by a symmetric splitting method. In: *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2003, vol. 43, iss. 4, pp. 575–586.
7. Titarev V. A., Frolova A. A., Rykov V. A., Vashchenkov P. V., Bondar Ye. A. Comparison of the Shakhov kinetic equation and DSMC method as applied to space vehicle aerothermodynamics. In: *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2020, vol. 364, pp. 112354.
8. Jambunathan R., Levin D. A. Kinetic Modeling of Plasma Plume using Multi-GPU Forest of Octree Approach. In: *Proceedings of 35th International Electric Propulsion Conference*, 2017, P. 1–17.
9. Sanchez-Arriaga G., Zhouy J., Ahedoz-Sanchezx E., Ramos J. J. One-dimensional Direct Vlasov Simulations of Non-stationary Plasma Expansion in Magnetic Nozzle. In: *35th International Electric Propulsion Conference*, 2017, pp. 106.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Бишаев Александр Михайлович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики Московского физико-технического института (национального исследовательского университета);
e-mail: bishaev@bk.ru

Абгарян Микаэл Вартанович – кандидат физико-математических наук, инженер НИО-806 Московского авиационного института (национального исследовательского университета);
e-mail: abgmvk@gmail.com

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Alexander M. Bishaev – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor at the Department of Higher Mathematics, Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University);
e-mail: bishaev@bk.ru

Michael V. Abgaryan – PhD in Physical and Mathematical Sciences, Engineer NIO-806, Moscow Aviation Institute (National Research University);
e-mail: abgmvk@gmail.com

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Бишаев А. М., Абгарян М. В. Изучение влияния магнитного поля на струю, исходящую из стационарного плазменного двигателя // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2020. № 1. С. 77–89.
DOI: 10.18384/2310-7251-2020-1-77-89

FOR CITATION

Bishaev A. M., Abgaryan M. V. Study of the effect of the magnetic field on a jet of a stationary plasma thruster In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*, 2020, no. 1, pp. 77–89.
DOI: 10.18384/2310-7251-2020-1-77-89

УДК 532.612.3:691
DOI: 10.18384/2310-7251-2020-1-90-101

РАСЧЁТ ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ НЕПЕРЕХОДНЫХ МЕТАЛЛОВ ПРИ ТЕМПЕРАТУРАХ ПЛАВЛЕНИЯ

Сыроватко Ю. В.

Государственное учреждение «Институт охраны почв Украины», Днепропетровский филиал
52071, Днепропетровская область, пос. Опытный, ул. Научная, д. 65А, Украина

Аннотация. **Целью** статьи является разработка метода расчёта поверхностного натяжения расплавленных непереходных металлов.

Процедура и методы исследования. В основу предложенного метода положена модель, предполагающая, что изменение поверхностной энергии растекающейся по подложке капли расплавленного металла соответствует работе, производимой весом капли и электрохимическим взаимодействием. Для рассчитанных значений поверхностного натяжения расплавленных металлов получены статистические и электрохимическая поправки. Статистические поправки основаны на расчете отклонения значений поверхностного натяжения расплавленных металлов от значений, аппроксимированных регрессионными кривыми. Электрохимическая поправка учитывает изменение поверхностного натяжения расплавленных металлов вследствие скапливания атомов возле поверхности капли.

Результаты проведённого исследования. Найдены расчётные значения поверхностного натяжения расплавленных металлов, удовлетворительно совпадающие с экспериментальными данными.

Практическая значимость заключается в возможности применения данного метода для расчёта поверхностного натяжения непереходных металлов, значения которого сложно измерить экспериментально.

Ключевые слова: поверхностное натяжение, расплавленный металл, лежащая капля, радиус растекания капли, атомный номер металла, радиус атома, электрические заряды

CALCULATION OF SURFACE TENSION OF NON-TRANSITION METALS AT MELTING TEMPERATURES

Yu. Syrovatko

Public Institution "Soil Protection Institute", Dnipropetrovsk Branch
ul. Nauchnaya 65A, 52071 Opytnyi, Dnipropetrovsk region, Ukraine

Abstract. **Purpose.** We have developed a method for calculating the surface tension of molten non-transition metals.

Methodology and Approach. The proposed method is based on the model assuming that the change in surface energy of a drop of molten metal spreading on the substrate corresponds to the work performed by the drop weight and electrochemical interaction. For the calculated values of surface tension of molten metals, statistical corrections and electrochemical correction are obtained. Statistical corrections are based on the calculation of deviation of the molten metals' surface tension from the values approximated by regression curves. The electrochemical correction takes into account the change in the surface tension of molten metals due to accumulation of atoms near the surface of the drop.

Results. The calculated values of the surface tension of molten metals are found, in agreement with the experimental data.

Practical relevance. The obtained results make it possible to use this method for calculating the surface tension of non-transition metals, the values of which are difficult to measure experimentally.

Keywords: surface tension, molten metal, sessile drop, drop spreading radius, atomic number of metals, atom radius, electric charges.

Введение

Для создания композиционных материалов используются твёрдая фаза – наполнитель и жидкая связка. Жидкая фаза должна смачивать всю поверхность наполнителя, внедриться в его поры, и после затвердевания создать прочную связь между наполнителем и матрицей. Поэтому смачивающая способность жидкой фазы является основным признаком для создания композиционных материалов [1; 2]. Классическая теория описывает процессы, происходящие на межфазных границах, посредством величин поверхностного натяжения жидкой фазы, краевых углов смачивания и адгезионных свойств веществ [3; 4; 5]. Теоретические вычисления поверхностного натяжения расплавленных металлов осуществляли ещё более века назад. Были разработаны статистически-электронный и молекулярно-термодинамический методы. Теоретический расчёт поверхностного натяжения проводили такие авторы, как А. Х. Брегер, А. А. Жуковицкий, К. Хуанг, Г. Вили, Р. Стреттон, Н. Д. Лянг, В. Коэн, Р. А. Крайч [6], С. И. Попель, С. Н. Задумкин [7] и др. Были созданы электронная теория поверхностной энергии металлов, плазменная теория, молекулярно-статистические теории. При расчёте поверхностной энергии использовалось приближение свободного электронного газа, квазиклассическое приближение, или статистический метод Томаса-Ферми. Были произведены расчёты поверхностной энергии металлов с помощью приближения сильной связи, а также модельно-термодинамические расчёты. Большинство из перечисленных методов дают хорошее совпадение теоретически рассчитанных значений коэффициентов поверхностного натяжения с найденными экспериментально. Однако эти методы базируются в основном на решении сложных электростатических, электрохимических или термодинамических задач нахождения поверхностных энергий веществ, а также на использовании для этих целей сложных квантово-механических моделей. В результате наличия громоздких выкладок отсутствует простота решения заданных задач, что усложняет практическое применение данных расчётов.

Целью данной работы являлась разработка метода расчёта поверхностного натяжения жидких непереходных металлов при температуре плавления, упрощающего решение указанных задач. Предложенный метод вычисления основан на влиянии гравитационной силы на каплю металла, растекающуюся по твёрдой подложке. Однако, кроме гравитационных сил, на формирование поверхностных сил натяжения влияют также электрохимические силы, существующие между атомами расплавленного металла. В свою очередь, имеют значение размеры атомов, атомный вес металлов и количество электронов в атомах. Поэтому учёт всех вышеперечисленных факторов является неотъемлемой частью данного метода.

Основные теоретические положения

Рассмотрим растекание капли расплава по твёрдой подложке на начальной стадии, когда ещё нет взаимодействия с подложкой и можно предположить, что на каплю действует только гравитационная сила, то есть сила веса. Начальный этап растекания происходит по оценкам [8] за очень короткое время 0,05–0,50 с, за которое теплообмен с окружающей средой будет незначительным. Растекание капли расплава по поверхности подложки является неравновесным процессом. Кинетические неравновесные процессы, происходящие при охлаждении расплава исследованы в работах [9; 10; 11]. На начальной стадии растекания капли расплава степень удалённости системы от положения равновесия можно считать малой, что допускает использование линеаризованных уравнений и позволяет пренебречь остыванием капли.

Предположим, что при растекании капли часть сил поверхностного натяжения расплава производит работу, равную потенциальной энергии жидкой капли в поле силы тяжести, а вторая составляющая поверхностного натяжения создаёт поверхностную энергию капли, которая формирует кривизну лежащей капли. Также предположим, что чем больше масса капли, тем больше первая составляющая натяжения и тем меньше кривизна. Возьмём такую массу капли, при которой вся сила поверхностного натяжения будет компенсировать силу тяжести, и таким образом вторая составляющая будет практически равна нулю, то есть кривизна будет минимальной.

В этом случае согласно [8] растекающаяся капля имеет высоту центра тяжести:

$$h_0 = \frac{m}{2\rho\pi r^2}, \tag{1}$$

где m – масса капли, ρ – плотность расплава, r – радиус растекания капли по подложке.

При растекании капли работу совершает сила веса в расчёте на единицу длины периметра [8]:

$$f_g = \frac{m^2 g}{2\rho\pi^2 r^4}. \tag{2}$$

Отождествим работу силы веса с увеличением поверхностной энергии капли $\Delta E = \sigma\left(\pi r^2 - \pi d^2\right)$ [12], где σ – поверхностное натяжение жидкой фазы, d –

начальный диаметр капли до растекания. Начальный диаметр капли легко вычислить по формуле $d = \sqrt[3]{\frac{6m}{\pi\rho}}$. В результате имеем:

$$\Delta E = \sigma\pi\left(r^2 - d^2\right) = f_g \pi r^2. \tag{3}$$

В процессе растекания капли в каждый последующий момент времени будут непрерывно изменяться высота капли и контактный угол между подложкой и каплей. Согласно [13], для фиксированного момента времени справедливы следующие соотношения:

$$\sigma(1 - \cos\theta) = \frac{\rho g h^2}{2}, \tag{4}$$

$$h = rtg\left(\frac{\theta}{2}\right), \tag{5}$$

где θ – контактный угол, h – высота капли.

Согласно (1), высоту капли можно выразить через высоту её центра тяжести как

$$h = 2h_0 = \frac{m}{\rho\pi r^2}. \tag{6}$$

Тогда $\sigma(1 - \cos\theta) = \frac{gm^2}{2\rho\pi^2 r^4}$, $\frac{m}{\rho\pi r^3} = tg\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

Используя данные равенства и тригонометрические тождества:

$$\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1 + \cos\theta}{2},\ 1 + tg^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)},$$

получим для поверхностного натяжения следующее выражение:

$$\sigma = \frac{g\left(\rho^2\pi^2 r^6 + m^2\right)}{4\rho\pi^2 r^4}. \tag{7}$$

Подставив (7) в (3), получим уравнение:

$$\rho^2\pi^2 r^8 - \rho^2\pi^2 r^6 d^2 - m^2 r^2 - m^2 d^2 = 0. \tag{8}$$

Данное уравнение удобно решить как трансцендентное в виде:

$$\rho^2\pi^2 r^8 - m^2 d^2 = \rho^2\pi^2 r^6 d^2 + m^2 r^2.$$

Отыскав таким образом r, можно найти искомое σ из формулы (7).

Следует отметить, что данный метод можно применять только для капли определённой массы. В реальном эксперименте, при растекании капли с массой, превышающей некоторую определённую величину, силы поверхностного

Таблица 1 / Table 1

Плотность, радиус растекания, поверхностные натяжения σ, $\sigma_а$, и $\sigma_п$, электрохимическая поправка $\Delta\sigma$, окончательные значения $\sigma_к$ и экспериментальные значения $\sigma_э$ металлов

Density, spreading radius, surface tensions σ, σ_a and $\sigma_п$, electrochemical correction $\Delta\sigma$, final $\sigma_к$ values and experimental σ_e values of metals

	ρ, г/см^3	*r*, м	σ, Н/м	$\sigma_а$, Н/м	$\sigma_п$, Н/м	$\Delta\sigma$, Н/м	$\sigma_к$, Н/м	$\sigma_э$, Н/м [7]
Al	2,5	0,0080	0,400	0,459	0,573	0,071	0,645	0,860
Ag	9,3	0,0051	0,606	0,596	0,592	0,301	0,893	0,910
Pb	10,6	0,0049	0,638	0,546	0,476	0,039	0,515	0,470
Bi	9,8	0,0050	0,614	0,486	0,373	0,024	0,397	0,390
Na	0,9	0,0111	0,278	0,263	0,257	0,031	0,288	0,208
Sn	7,0	0,0056	0,550	0,500	0,480	0,036	0,516	0,580
Au	17,3	0,0042	0,764	0,753	0,813	0,119	0,932	1,170
Cu	8,4	0,0053	0,600	0,687	0,811	0,200	1,011	1,350
K	0,8	0,0115	0,265	0,204	0,143	0,017	0,160	0,102
Li	0,5	0,0135	0,230	0,223	0,198	0,072	0,270	0,406
Mg	1,6	0,0091	0,333	0,348	0,393	0,085	0,477	0,580
Ca	1,3	0,0098	0,313	0,271	0,252	0,078	0,331	0,337
Sr	2,3	0,0081	0,378	0,302	0,267	0,063	0,329	0,285
Ba	3,3	0,0072	0,429	0,316	0,251	0,057	0,308	0,224
Ga	6,1	0,0059	0,532	0,558	0,626	0,078	0,704	0,715
In	7,0	0,0056	0,550	0,514	0,506	0,005	0,512	0,556
Tl	11,2	0,0048	0,647	0,561	0,493	0,025	0,518	0,462
Zn	6,6	0,0057	0,538	0,617	0,727	0,067	0,794	0,806
Cd	8,0	0,0054	0,584	0,565	0,580	0,046	0,626	0,642

натяжения капли уже не будут удерживать гравитационные силы, и капля будет беспрепятственно растекаться. Поэтому в наших расчётах мы использовали наиболее оптимальную массу капли 0,6 г, следуя рекомендациям автора монографии [14]. Плотность металлов при температуре плавления была найдена из справочных материалов[1]. Значения плотности, рассчитанных значений σ и радиусов растекания капли приведены в таблице 1.

Расчёт статистических поправок для поверхностного натяжения

Далее учтём, что значения поверхностного натяжения металлов зависят от размеров атома. Если размеры атомов меньше некоторого значения, то расстояния между атомами уменьшаются и, следовательно, увеличиваются силы поверхностного натяжения [6]. Если же атомы имеют большие размеры, силы поверхностного натяжения уменьшаются. Следует отметить, что изменение поверхностного натяжения зависит также от заполненности электронных уровней атомов и, следовательно, от атомных номеров. Для того, чтобы рассчитать поправки к полученным значениям поверхностного натяжения, учитывающие данные факторы, построим регрессию рассчитанных значений поверхностного

1 Зиновьев В. Е. Теплофизические свойства металлов при высоких температурах. Справочник. М.: Металлургия, 1989. 384 с.

натяжения от величины N_a/r_a атомов (N_a – атомный номер, r_a – радиус атома, умноженный на 10^{10}) (рис. 1).

Из рис. 1 видно, что зависимость поверхностного натяжения металлов от величин N_a/r_a имеет некоторый разброс значений. Далее предложим корректирующую поправку для значений поверхностного натяжения расплавленных металлов. Величину данной поправки составляет разность между значениями поверхностного натяжения σ и σ_1, которые лежат на кривой регрессии (рис. 1):

$$\sigma_1 = -0{,}0001\left(\frac{N_a}{r_a}\right)^2 + 0{,}0159\left(\frac{N_a}{r_a}\right) + 0{,}2039. \qquad (9)$$

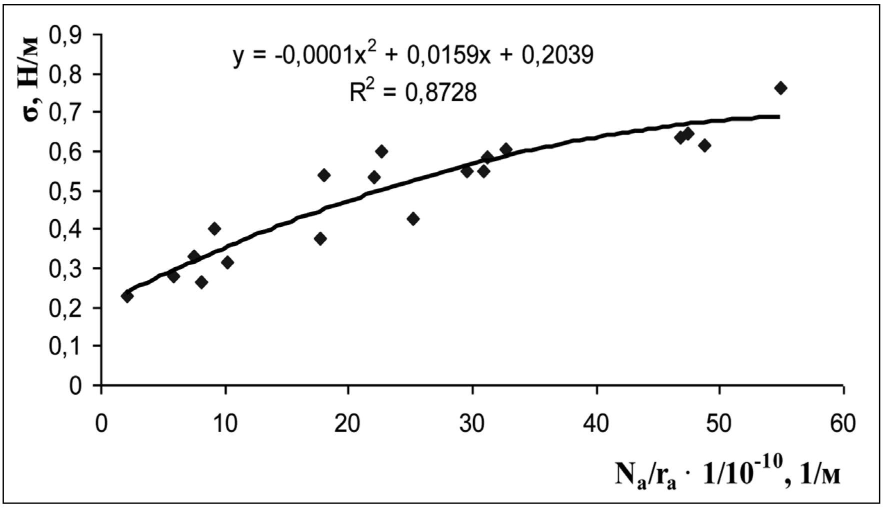

Рисунок 1 / Figure 1

Регрессионная зависимость поверхностного натяжения σ металлов от величины N_a/r_a.

Regression dependence of the surface tension σ of metals on the value of N_a/r_a.

Источник: составлено автором.

Для того, чтобы получить значения поверхностного натяжения с учётом данной поправки, необходимо к величинам σ прибавить значение $\sigma - \sigma_1$:

$$\sigma_a = \sigma + (\sigma - \sigma_1), \qquad (10)$$

где σ_a – поверхностное натяжение с учётом атомных номеров и радиусов атомов. Величина $\sigma - \sigma_1$ в (10) может принимать как положительный, так и отрицательный знак в зависимости от текущих значений σ.

Далее построим зависимость полученных значений σ_a от плотности металлов и повторим ту же самую операцию (рис. 2).

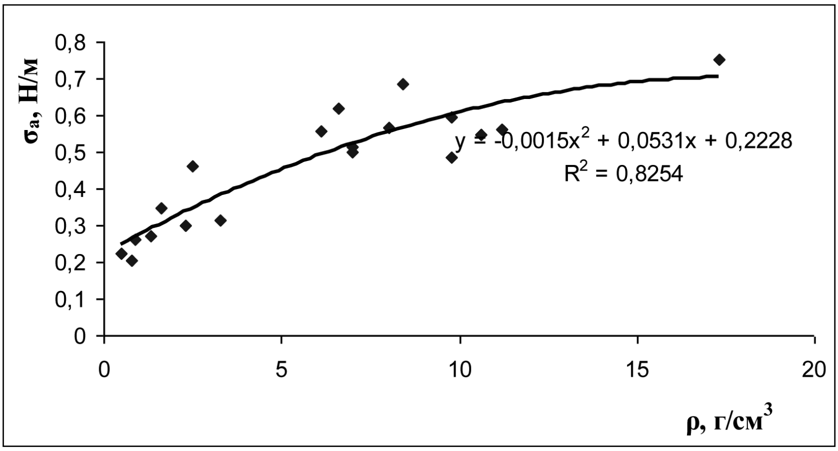

Рисунок 2 / Figure 2

Регрессионная зависимость поверхностного натяжения $\sigma_а$ металлов от плотности.

Regression dependence of the surface tension σ_a of metals on density.

Источник: составлено автором.

Как видно из рис. 2, значения поверхностного натяжения σ_2, лежащие на кривой, будут равны:

$$\sigma_2 = -0{,}0015\rho^2 + 0{,}0531\rho + 0{,}2228. \quad (11)$$

Прибавим разницу $\sigma_а - \sigma_2$ к величине $\sigma_а$ и получим значение поверхностного натяжения $\sigma_п$ с учётом плотности металлов

$$\sigma_n = \sigma_a + (\sigma_a - \sigma_2). \quad (12)$$

Предварительно рассчитанные значения σ, значения $\sigma_а$, $\sigma_п$ для 19-ти элементов приведены в таблице 1.

Расчёт электрохимической поправки

Расчёт электрохимических поправок производился в системе СГС. После вычисления данные величины переводили в систему СИ. На поверхности капли образуются некомпенсированные электрические заряды ионизированных атомов расплава, которые создают электрическое поле.

Предположим, что вследствие различной ориентации дипольных и трипольных моментов атомов поле действует на разные атомы неодинаково. В этом случае можно рассматривать атомы расплава, которые сильнее взаимодействуют с электрическим полем как псевдорастворённые атомы, а остальные атомы можно рассматривать как растворитель.

Вследствие действия поля формируется распределение псевдорастворённых атомов, аналогичное распределению Больцмана [10]:

$$\exp\left(1 - \frac{\omega(x)}{kT}\right) \approx 1 - \frac{\omega(x)}{kT}, \quad (13)$$

где $\omega(x)$ – энергия, которую имеет атом в связи с наличием поверхности капли, от которой он находится на расстоянии x, k – константа Больцмана, T – температура. Псевдорастворённые атомы скапливаются в приповерхностном слое капли. Вследствие этого концентрация атомов возле поверхности превышает концентрацию атомов в глубине расплава ($N'/V>N/V$), где N' – число атомов возле поверхности в объёме V, N – число псевдорастворённых атомов в глубине расплава в объёме V. Пусть $C = N/N'$. Из [15] для коэффициента поверхностного натяжения получим:

$$d\sigma = \frac{1}{\upsilon} dC \int_0^\infty \omega(x)dx. \tag{14}$$

Так как $\omega(x) = ez\varphi = \frac{e^2z^2}{x}$ [15], где e – заряд электрона, z – валентность, φ – потенциал, то:

$$d\sigma = \frac{e^2z^2}{\upsilon} dC \int_0^\infty \frac{dx}{x}. \tag{15}$$

Поскольку $\ln x$ расходится при границах интегрирования указанных в (15), их следует заменить на реальные. Так, поскольку речь идёт о лежащей капле на подложке, нижнюю границу интегрирования нужно сопоставить с некоторой усреднённой величиной, близкой к поверхности капли. Для этого параметра можно использовать радиус Дебая $1/\chi$. Верхнюю границу интегрирования можно заменить на расстояние, равное единице длины (в системе СГС 1 см), что в сравнении с $1/\chi$ практически соответствует ∞. Радиус Дебая равен [15]:

$$1/\chi = \sqrt{\frac{kTV_K}{e^2z^2 4\pi N_K}} \tag{16}$$

где N_K – общее число частиц в капле, V_K – объем капли.

Тогда, произведя интегрирование dσ и dC, получим:

$$\sigma = \frac{1}{\upsilon} Ce^2z^2 \left(\ln 1 - \ln(1/\chi)\right) = \frac{1}{\upsilon} Ce^2z^2 \ln(\chi) = \frac{1}{\upsilon} Ce^2z^2 \left(-\ln(1/\chi)\right). \tag{17}$$

Отметим, что под знаком логарифма стоит безразмерная величина, численно равная $1/\chi$.

Далее рассмотрим величину C. В нашем приближении на расстоянии того же радиуса Дебая используем соотношение, описывающее распределение атомов аналогичное распределению Больцмана. Тогда можно записать для расстояния, равного радиусу Дебая $1/\chi$, соотношение [15]:

$$N' = N \exp\left(-\frac{e^2z^2}{(1/\chi)kT}\right). \tag{18}$$

Далее, поскольку $N' > N$, то есть атомы движутся против градиента концентрации, нужно изменить знак в показателе экспоненты. Выполнив данную замену и разложив экспоненту до первого члена, получим:

$$N' = N\left(1 + \frac{e^2 z^2}{(1/\chi)kT}\right). \qquad (19)$$

Второй член в (19) значительно больше единицы, и поэтому её можно опустить. Тогда величину C можно представить с достаточно высокой степенью приближения как:

$$C = N / N' = \frac{(1/\chi)kT}{e^2 z^2}. \qquad (20)$$

Подставив данное соотношение в (17), для электрохимической поправки $\Delta\sigma$ получим:

$$\Delta\sigma = \frac{1}{\upsilon}(1/\chi)kT\left(-\ln(1/\chi)\right). \qquad (21)$$

Данную величину необходимо прибавить к найденной в (12) $\sigma_п$; тогда получим окончательную величину поверхностного натяжения $\sigma_к$. Значения электрохимических поправок $\Delta\sigma$, окончательные значения $\sigma_к$ и экспериментальные значения [7] $\sigma_э$ представлены в таблице 1.

Из приведённых на рис. 3 и в табл. 1 результатов видно, что рассчитанные значения поверхностного натяжения для исследуемых металлов удовлетворительно согласуются с экспериментальными (R^2 = 0,92).

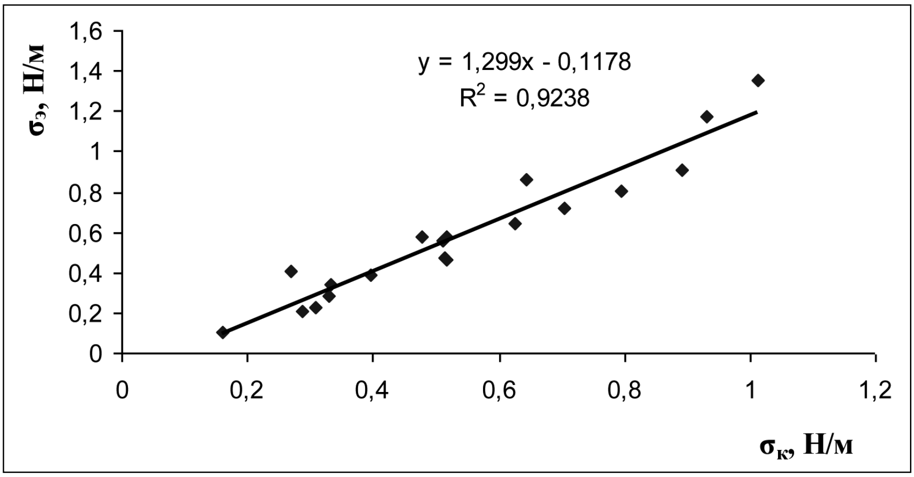

Рисунок 3 / Figure 3

Регрессионная зависимость экспериментальных $\sigma_э$ от вычисленных значений поверхностного натяжения $\sigma_к$.

Regression dependence of experimental σ_e on the calculated values of surface tension σ_k.

Источник: составлено автором.

Следовательно, описанный в данной работе алгоритм нахождения величины поверхностного натяжения можно применять на практике. Следует отметить, что масса 0,6 г не для всех расплавов будет той массой капли, при растекании которой первая составляющая поверхностного натяжения будет равна максимальному поверхностному натяжению расплава. Поэтому в расчётах при данной массе присутствует допустимая ошибка.

Таким образом, алгоритм расчёта поверхностного натяжения для однокомпонентного непереходного расплавленного металла состоит в следующем:

1. Зная плотность металла при температуре плавления, массу капли расплава и начальный диаметр капли, найденный из этих величин, найти путём графического решения уравнения (8) радиус растекания капли r.
2. Подставив все вышеперечисленные значения в (7), найти σ.
3. По регрессионным формулам (9) – (12) рассчитать значения $\sigma_а$ и $\sigma_п$.
4. По формуле (21) рассчитать электрохимическую поправку Δσ, зная радиус атома, валентность, температуру плавления, массу капли и молярную массу металла.

Так как переходные металлы имеют незаполненный d-уровень, находящийся во внутренней части электронного облака, силы отталкивания между атомами увеличиваются. При этом уменьшается плотность металлов и значения поверхностного натяжения, вычисленные данным методом, будут заниженными. Поэтому расчёт поверхностного натяжения переходных металлов можно вести тем же методом при большей массе капли.

Заключение

Предложенный метод расчёта поверхностного натяжения непереходных металлов основан на предположении, что работа, производимая весом капли, растекающейся по подложке, и процессами, связанными с электрохимическим взаимодействием, соответствует изменению поверхностной энергии капли.

Используя регрессионные зависимости поверхностного натяжения от величин атомного радиуса, атомного номера и плотности металлов, получены статические поправки для величин поверхностного натяжения непереходных металлов.

Рассчитаны электрохимические поправки для найденных значений поверхностного натяжения, которые возникают вследствие действия электрического поля некомпенсированных электрических зарядов ионизированных атомов расплава, возникающих на поверхности капли.

Используя данный метод расчёта, можно найти значения поверхностного натяжения таких непереходных металлов как, например, франций и радий, которые сложно измерить экспериментально.

Статья поступила в редакцию 10.12.2019 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Суховая Е. В., Сыроватко Ю. В. Особенности растворения квазикристаллических сплавов-наполнителей $Al_{65}Co_{20}Cu_{15}$ и $Al_{72}Co_{18}Ni_{10}$ в процессе пропитки композиционных материалов латунной связкой // Металлофизика и новейшие технологии. 2019. Т. 41. № 9. С. 1171–1185.
2. Суховая Е. В., Сыроватко Ю. В. Структурообразование границ раздела в композиционных материалах, армированных квазикристаллическим сплавом-наполнителем Al–Co–Cu // Адгезия расплавов и пайка материалов. 2014. Т. 47. С. 58–65.

3. Королев Е. В., Гришина А. Н., Пустовгар А. П. Поверхностное натяжение в структурообразовании материалов. Значение, расчет и применение // Строительные материалы. 2017. № 1-2. С. 104–108.
4. Придатко А. В., Миронюк А. В., Свидерский В. А. Анализ подходов к математическому описанию характеристик материалов с повышенной гидрофобностью // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. 2015. Т. 5. № 5(77). С. 30–41.
5. Galimzyanov B. N., Mokshin A. V. Surface Tension of Water Droplets upon Homogeneous Droplet Nucleation in Water Vapor // Colloid Journal. 2017. Vol. 79. No. 1. P. 26–34.
6. Поверхностные явления в расплавах и возникающих из них твердых фазах / Еременко В. Н., Рыков В. И., Антоненко Т. И., Ниженко В. И. Кишинев: Штиинца, 1974. 270 с.
7. Попель С. И. Поверхностные явления в расплавах. М.: Металлургия, 1994. 432 с.
8. Павлов В. В., Попель С. И. Кинетическое сопротивление растеканию и его доля в общем балансе сил // Адгезия расплавов и пайка материалов. 1978. № 3. С. 3–13.
9. Гладков С. О. О динамике роста кристаллов в локально неоднородном и неравновесном расплаве // Расплавы. 2016. № 5. С. 434–440.
10. Gladkov S. O. Model Description of Crystal Growth in Inhomogeneous Media // Doklady Physics. 2004. Vol. 49. No. 2. P. 82–85.
11. Gladkov S. O. On the Theory of Crystal-Surface Growth near a Crystallization Point // Doklady Physics. 2004. Vol. 49. No. 11. P. 634–637.
12. Бородин С. А. Исследование процесса растекания капли жидкости, наносимой на поверхность подложки // Компьютерная оптика. 2005. № 28. С. 66–68.
13. Матюхин С. И., Флоренков К. Ю. Форма капель жидкости, помещенных на твердую горизонтальную поверхность // Конденсированные среды и межфазные границы. 2013. Т. 15. № 3. С. 292–304.
14. Кунин Л. Л. Поверхностные явления в металлах. М.: Металлургиздат, 1955. 304 с.
15. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика. М.: Наука, 1975. 583 с.

REFERENCES

1. Sukhovaya E. V., Syrovatko Yu. V. [Peculiarities of Dissolution of Quasi-crystalline Al72Co18Ni10 and Al65Co20Cu15 Fillers during Impregnation of Composites with a Brass Binder]. In: *Metallofizika i noveishie tekhnologii* [Metallophysics and Advanced Technologies], 2019, vol. 41, no. 9, pp. 1171–1185.
2. Sukhovaya E. V., Syrovatko Yu. V. [Interface structure formation of the composites reinforced with a Al–Co–Cu quasi-crystalline filler]. In: *Adgeziya rasplavov i paika materialov* [Adhesion of melts and soldering of materials], 2014, vol. 47, pp. 58–65.
3. Korolev E. V., Grishina A. N., Pustovgar A. P. [Surface Tension in Structure Formation of Materials. Significance, Calculation, and Application]. In: *Stroitel'nye materialy* [Construction Materials)], 2017, no. 1-2, pp. 104–108.
4. Pridatko A. V., Mironyuk A. V., Sviderskii V. A. [Analysis of approaches to mathematical description of the characteristics of materials with high hydrophobicity]. In: *Vostochno-Evropeiskii zhurnal peredovykh tekhnologii* [Eastern-European Journal of Enterprise Technologies], 2015, vol. 5, no. 5 (77), pp. 30–41.
5. Galimzyanov B. N., Mokshin A. V. Surface Tension of Water Droplets upon Homogeneous Droplet Nucleation in Water Vapor. In: *Colloid Journal*, 2017, vol. 79, no. 1. pp. 26–34.
6. Eremenko V. N., Rykov V. I., Antonenko T. I., Nizhenko V. I *Poverkhnostnye yavleniya v rasplavakh i voznikayushchikh iz nikh tverdykh fazakh* [Surface phenomena in melts and in solid phases arising from melts]. Chisinau, Shtiintsa Publ., 1974. 270 p.

7. Popel' S. I. *Poverkhnostnye yavleniya v rasplavakh* [Surface phenomena in melts]. Moscow, Metallurgiya Publ., 1994. 432 p.
8. Pavlov V. V., Popel' S. I. [Kinetic resistance to spreading and its share in the overall balance of forces]. In: *Adgeziya rasplavov i paika materialov* [Adhesion of melts and soldering of materials], 1978, no. 3, pp. 3–13.
9. Gladkov S. O. [Revisiting the dynamics of crystal growth in local inhomogeneuos and inequilibrium melt]. In: *Rasplavy* [Melts], 2016, no. 5, pp.434–440.
10. Gladkov S. O. Model Description of Crystal Growth in Inhomogeneous Media. In: *Doklady Physics*, 2004, vol. 49, no. 2, pp. 82–85.
11. Gladkov S. O. On the Theory of Crystal-Surface Growth near a Crystallization Point. In: *Doklady Physics*, 2004, vol. 49, no. 11, pp. 634–637
12. Borodin S. A. [The study of the process of the spreading of liquid droplets deposited on the surface of the substrate]. In: *Komp'yuternaya optika* [Computer optics], 2005, no. 28, pp. 66–68.
13. Matyukhin S. I., Florenkov K. Yu. [Shape of liquid drops on solid horizontal surface]. In: *Kondensirovannye sredy i mezhfaznye granitsy* [Condensed Matter and Interphases], 2013, vol. 15, no. 3, pp. 292–304.
14. Kunin L. L. *Poverkhnostnye yavleniya v metallakh* [Surface phenomena in metals]. Moscow, Metallurgizdat Publ., 1955. 304 p.
15. Landau L. D., Lifshits E. M. Statistical Physics. London, Pergamon Press, 1958.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Сыроватко Юлия Владимировна – кандидат физико-математических наук, специалист-спектрометрист Государственного учреждения «Институт охраны почв Украины», Днепропетровский филиал;
e-mail: yu.syrovatko@gmail.com

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Yuliya V. Syrovatko – PhD in Physical and Mathematical Sciences, spectrometer specialist, Public Institution 'Soil Protection Institute', Dnipropetrovsk Branch;
e-mail: yu.syrovatko@gmail.com

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Сыроватко Ю. В. Расчёт поверхностного натяжения непереходных металлов при температурах плавления // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2020. № 1. С. 90–101.
DOI: 10.18384/2310-7251-2020-1-90-101

FOR CITATION

Syrovatko Yu. V. Calculation of surface tension of non-transition metals at melting temperatures. In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*, 2020, no. 1, pp. 90–101.
DOI: 10.18384/2310-7251-2020-1-90-101

УДК 537.226.5, 538.956
DOI: 10.18384/2310-7251-2020-1-102-110

ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЖИДКОГО КРИСТАЛЛА ЖК-1289

Емельянов В. А.

Московский государственный областной университет
141014, Московская область, г. Мытищи, ул. Веры Волошиной, д. 24, Российская Федерация

Аннотация. **Целью** статьи является экспериментальное исследование диэлектрической проницаемости в СВЧ-диапазоне и проведение числовой аппроксимации частотных зависимостей диэлектрической проницаемости нематического жидкого кристалла.
Процедура и методы исследования. На частоте 39 ГГц измерения диэлектрической проницаемости и диэлектрических потерь проводились волноводным методом, а на частотах до 10 МГц – ёмкостным методом.
Результаты проведённого исследования. Получены экспериментальные значения диэлектрической проницаемости нематического жидкого кристалла ЖК-1289 на частоте 39 ГГц. Проведена числовая аппроксимация диэлектрических спектров. Рассчитаны времена дипольной релаксации, связанные с вращением молекул вокруг короткой и длинной осей, и соответствующие энергии активации.
Теоретическая/практическая значимость. Получены значения диэлектрической проницаемости и диэлектрических потерь, необходимые для оценки эксплуатационных характеристик рабочих тел устройств отображения информации.
Ключевые слова: жидкий кристалл, диэлектрическая проницаемость, время релаксации, энергия активации

DIELECTRIC PROPERTIES OF LIQUID CRYSTAL LC-1289

V. Emelyanov

Moscow Region State University
ul. Very Voloshinoi 24, 141014 Mytishchi, Moscow region, Russian Federation

Abstract. **Purpose.** We examine experimentally the permittivity in the microwave range and approximate numerically the frequency dependences of the permittivity of a nematic liquid crystal.
Methodology and Approach. At a frequency of 39 GHz, measurements of the permittivity and dielectric loss are performed using the waveguide method, and at frequencies up to 10MHz, using the capacitive method.
Results. Experimental values of the permittivity of a nematic liquid crystal LC-1289 at a frequency of 39 GHz are obtained. Numerical approximation of dielectric spectra is performed. The dipole relaxation times associated with the rotation of molecules around the short and long axes and the corresponding activation energies are calculated.

Theoretical and Practical Implications. The values of the permittivity and dielectric loss are obtained for evaluating the performance characteristics of the working bodies of information display devices.
Keywords: liquid crystal, dielectric constant, relaxation time, activation energy

Введение

Применение жидких кристаллов в различных областях науки и техники, в частности в устройствах отображения информации, во многом определяется их диэлектрическими свойствами. Наиболее точным методом, дающим сведения о диэлектрической проницаемости и диэлектрических потерях, является диэлектрическая спектроскопия. Существует много статей, посвящённых изучению диэлектрических свойств жидких кристаллов в диапазоне частот до 10^7 Гц. Работы, изучающие измерения диэлектрической проницаемости на более высоких частотах, достаточно редки, что обусловлено определёнными сложностями. Так, для измерения диэлектрической проницаемости на частотах меньших 10^7 Гц можно использовать стандартные измерительные мосты. На частотах выше 10^7 Гц большое влияние оказывают сопротивление и индуктивность соединительных проводов и электродов, включённых последовательно с измерительной ячейкой. При этом измеренные ёмкость и сопротивление измерительной ячейки могут не совпадать с истинными значениями.

Целью данной работы является экспериментальное исследование диэлектрической проницаемости в СВЧ-диапазоне и проведение числовой аппроксимации частотных зависимостей диэлектрической проницаемости нематического жидкого кристалла.

Объект исследования и методика измерений

В качестве объекта исследования был выбран нематический жидкий кристалл ЖК-1289 на основе цианбифенилов, обладающий положительной анизотропией диэлектрической проницаемости. Измерения диэлектрической проницаемости и диэлектрических потерь жидкого кристалла проводились на частоте 39 ГГц волноводным методом вариации толщины жидкого диэлектрика [1; 2]. Данный метод основан на измерении изменения коэффициента отражения электромагнитной волны от поверхности жидкости при изменении её толщины.

Ориентация директора жидкого кристалла задавалась постоянным магнитным полем индукцией 0,25 Тл.

Результаты измерений и их анализ

Полученные значения продольной $\varepsilon'_{\parallel}$ и поперечной $\varepsilon'_{\perp}$ компонент действительной части комплексной диэлектрической проницаемости при различных температурах представлены на рис. 1.

Значения $\varepsilon'_{\parallel}$ с увеличением температуры уменьшаются. Значения $\varepsilon'_{\perp}$ в пределах погрешности не зависят от температуры до 326 К, а вблизи фазового перехода увеличиваются. $\varepsilon'_{из}$ в рассматриваемом диапазоне не зависит от температуры.

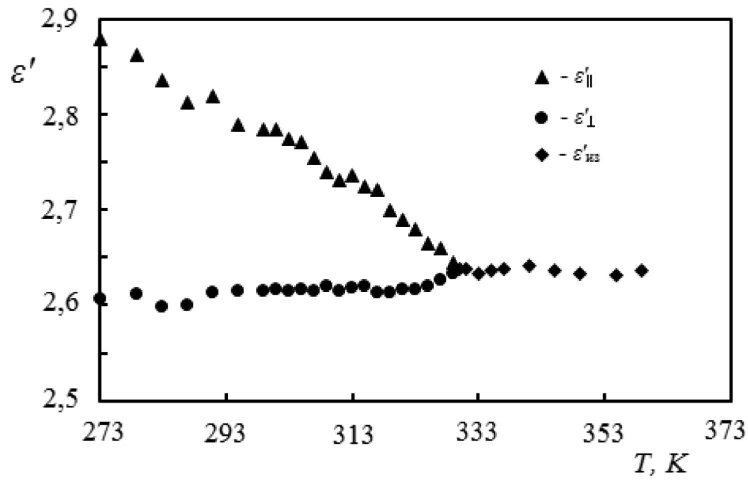

Рисунок 1 / Figure 1
Температурная зависимость продольной $\varepsilon'_{\parallel}$ и поперечной $\varepsilon'_{\perp}$ компонент действительной части комплексной диэлектрической проницаемости ЖК-1289 в нематической фазе и $\varepsilon'_{из}$ в изотропной фазе.
Temperature dependence of longitudinal $\varepsilon'_{\parallel}$ and transverse $\varepsilon'_{\perp}$ components of the real part of the complex permittivity of LC-1289 in the nematic phase and in the isotropic phase $\varepsilon'_{isotropic}$.
Источник: данные автора.

Рассчитанные по экспериментальным данным величины показателей преломления при комнатной температуре составили: для необыкновенной волны $n_e = \sqrt{\varepsilon_{\parallel}} = 1{,}67$ и для обыкновенной волны $n_o = \sqrt{\varepsilon_{\perp}} = 1{,}62$. Полученные значения находятся в согласии со значениями показателей преломления, определёнными оптическим методом на длине воны 633 нм: n_e = 1,68 и n_o = 1,52 [3]. Таким образом, можно считать, что на частоте 39 ГГц из диэлектрической поляризации исключается вклад, связанный с вращением молекул жидкого кристалла вокруг коротких и длинных осей. Значения $\varepsilon'_{\parallel}$ и $\varepsilon'_{\perp}$ определяются поляризуемостью молекул и параметром ориентационного порядка. Согласно теории Майера–Мейера [4] высокочастотная анизотропия диэлектрической проницаемости $\Delta\varepsilon$ пропорциональна параметру ориентационного порядка S:

$$\Delta\varepsilon \sim \rho\Delta\alpha S, \qquad (1)$$

где $\Delta\alpha$ – анизотропия поляризуемости, ρ – плотность НЖК.

С учётом того, что изменение плотности в температурной области существования нематической фазы мало [5], по температурной зависимости $\Delta\varepsilon$ (рис. 2) можно судить об изменении параметра S.

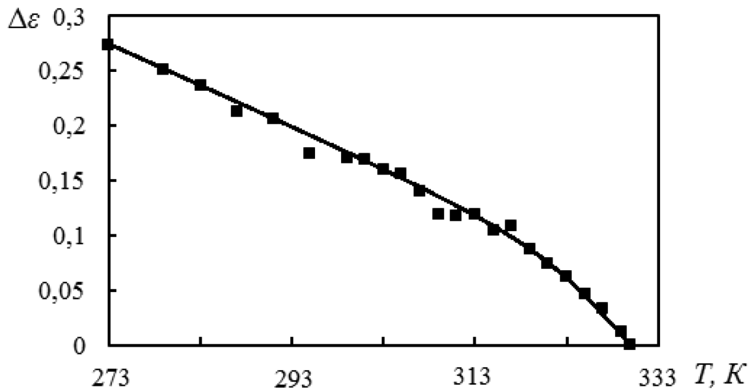

Рисунок 2 / Figure 2
Температурная зависимость анизотропии диэлектрической проницаемости ЖК-1289 на частоте 39 ГГц.
Temperature dependence of the permittivity anisotropy of LC-1289 at a frequency of 39 GHz.

Источник: данные автора.

Высокочастотные значения диэлектрической проницаемости позволяют проанализировать дисперсионные кривые диэлектрической проницаемости в широком диапазоне частот. Значения диэлектрической проницаемости в диапазоне частот 10^3–10^7 Гц были получены ёмкостным методом [6; 7] при помощи прецизионного анализатора WK 65120P.

Анализ частотной зависимости продольной компоненты комплексной диэлектрической проницаемости ЖК-1289 проводился с помощью эмпирического уравнения Коула-Коула для случая с распределённым временем релаксации [8; 9]:

$$\varepsilon^*(\omega) = \varepsilon_\infty + \frac{\varepsilon - \varepsilon_\infty}{1 + (i\omega\tau_0)^{1-\alpha}}, \tag{2}$$

где ε и ε_∞ – статическая и высокочастотная диэлектрические проницаемости, α – коэффициент распределения времени релаксации ($0 < \alpha < 1$), τ_0 – наиболее вероятное время релаксации, ω – циклическая частота. Из уравнения (2) для $\varepsilon'_{\|}$ и $\varepsilon''_{\|}$ следует:

$$\varepsilon'_{\|} = \varepsilon_{\|\infty} + (\varepsilon_{\|} - \varepsilon_{\|\infty}) \frac{1 + (\omega\tau_{\|})^{1-\alpha} \sin\frac{\pi\alpha}{2}}{1 + 2(\omega\tau_{\|})^{1-\alpha} \sin\frac{\pi\alpha}{2} + (\omega\tau_{\|})^{2(1-\alpha)}}, \tag{3}$$

$$\varepsilon''_{\|} = (\varepsilon_{\|} - \varepsilon_{\|\infty}) \frac{(\omega\tau_{\|})^{1-\alpha} \cos\frac{\pi\alpha}{2}}{1 + 2(\omega\tau_{\|})^{1-\alpha} \sin\frac{\pi\alpha}{2} + (\omega\tau_{\|})^{2(1-\alpha)}}. \tag{4}$$

При $\alpha = 0$ уравнения (3) и (4) переходят в уравнения Дебая.

Числовая аппроксимация измеренных при температуре 273 К значений $\varepsilon'_{||}$, проведённая по формуле (3), представлена кривой 1 на рис. 3. Кривая 1 построена при следующих параметрах: $\alpha = 0{,}06$, $\varepsilon_{||} = 12{,}00$, $\varepsilon_{||\infty} = 2{,}88$ и $\tau_{||} = 4{,}98 \cdot 10^{-7}$с. Из рисунка видно, что данная аппроксимация даёт достаточно хорошее совпадение расчётной дисперсии продольной компоненты диэлектрической проницаемости с экспериментальными данными.

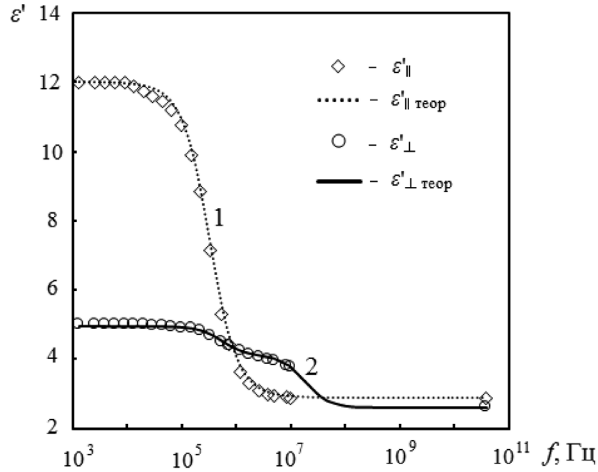

Рисунок 3 / Figure 3

Частотные зависимости продольной $\varepsilon'_{||}$ и поперечной $\varepsilon'_{\perp}$ компонент действительной части комплексной диэлектрической проницаемости ЖК-1289 при T = 273К.
Frequency dependences of longitudinal $\varepsilon'_{||}$ and transverse $\varepsilon'_{\perp}$ components of the real part of the complex permittivity of LC-1289 at T = 273K.

Источник: точки отложены по данным автора, кривая 1 построена автором по уравнению Коула и Коула [8; 9], кривая 2 построена автором по уравнению Бергмана, Роберти и Смита [10].

Из представленных на рис. 3 результатов также видно, что для поперечной компоненты $\varepsilon'_{\perp}$ наблюдаются две области дисперсии. При этом анизотропия диэлектрической проницаемости $\Delta'\varepsilon = \varepsilon'_{||} - \varepsilon'_{\perp}$ дважды меняет знак.

В случае нескольких независимых релаксационных процессов диэлектрическая релаксация описывается уравнением [10]:

$$\frac{\varepsilon' - \varepsilon_\infty}{\varepsilon - \varepsilon_\infty} = \sum_k \frac{C_k}{1 + \left(\omega\tau_k\right)^2}, \quad \frac{\varepsilon''}{\varepsilon - \varepsilon_\infty} = \sum_k \frac{C_k \omega\tau_k}{1 + \left(\omega\tau_k\right)^2}, \tag{5}$$

где C_k – параметр, характеризующий вклад, вносимый каждым независимым релаксационным процессом ($\Sigma C_k = 1$). Из уравнения (5) для $\varepsilon'_{\perp}$ и $\varepsilon''_{\perp}$ следует:

$$\varepsilon'_{\perp} = \varepsilon_\infty + \frac{(\varepsilon_{\perp} - \varepsilon_{\perp\infty})C_1}{1 + \left(\omega\tau_{\perp 1}\right)^2} + \frac{(\varepsilon_{\perp} - \varepsilon_{\perp\infty})C_2}{1 + \left(\omega\tau_{\perp 2}\right)^2}, \tag{6}$$

$$\varepsilon''_{\perp} = \frac{(\varepsilon_{\perp} - \varepsilon_{\perp\infty})\omega\tau_{\perp 1} C_1}{1 + \left(\omega\tau_{\perp 1}\right)^2} + \frac{(\varepsilon_{\perp} - \varepsilon_{\perp\infty})\omega\tau_{\perp 2} C_2}{1 + \left(\omega\tau_{\perp 2}\right)^2}. \qquad (7)$$

Результаты числовой аппроксимации, проведённой по формуле (6), представлены кривой 2 на рис. 3. Кривая 2 построена при следующих параметрах: $\varepsilon_{\perp} = 4{,}95$, $\varepsilon_{\perp\infty} = 2{,}61$, $\tau_{\perp 1} = 2{,}93 \cdot 10^{-7}$c, $C_1 = 0{,}36$, $\tau_{\perp 2} = 8{,}25 \cdot 10^{-9}$c, $C_2 = 0{,}64$. Полученная кривая также хорошо согласуется с экспериментальными данными.

По экспериментальным и полученным числовой аппроксимацией данным построены диаграммы Коула-Коула, представленные на рис. 4.

Из рис. 4а видно, что аппроксимация экспериментальных значений $\varepsilon^*_{||}$, проведённая по формулам Коула и Коула (при $\alpha = 0{,}06$) для распределённого времени релаксации (кривая 1), даёт лучшее согласие с экспериментальными данными по сравнению с расчётами, проведёнными по формулам Дебая (при $\alpha = 0$) для одного времени релаксации (кривая 2).

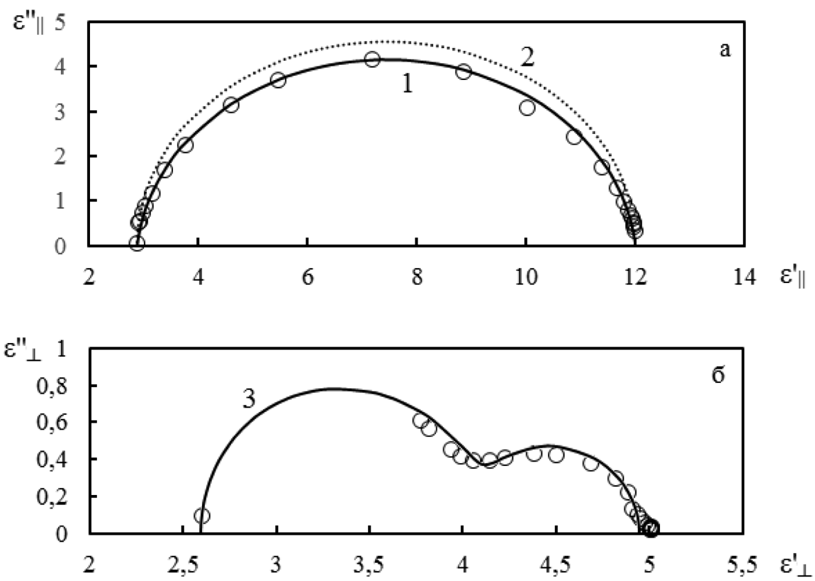

Рисунок 4 / Figure 4

Диаграммы Коула-Коула для а) продольной компоненты диэлектрической проницаемости (крива 1 при $\alpha = 0{,}06$, кривая 2 при $\alpha = 0$) и б) поперечной компоненты диэлектрической проницаемости ЖК-1289.

Cole–Cole diagrams for (a) the longitudinal component of the permittivity (curve 1 at $\alpha = 0{,}06$, curve 2 at $\alpha = 0$) and (b) the transverse component of the permittivity of LC-1289.

Источник: точки отложены по данным автора, кривые 1, 2 построены автором по уравнениям Коула и Коула [8; 9], кривая 3 построена автором по уравнениям Бергмана, Роберти и Смита [10].

Времена релаксации $\tau_{||}$ и $\tau_{\perp 1}$, связанные с вращением молекул вокруг короткой оси, определялись через частоты, на которые приходился максимум диэлектрических потерь $\varepsilon''_{\|}$ и $\varepsilon''_{\perp}$. Время $\tau_{\perp 2}$, связанное с вращением молекул вокруг длинной оси, рассчитывалось по формуле, полученной из уравнений Дебая:

$$\tau_{\perp 2} = \frac{1}{\omega} \frac{\varepsilon''_{\perp}}{\varepsilon'_{\perp} - \varepsilon'_{\perp\infty}},$$

где $\varepsilon'_{\perp}$ и $\varepsilon''_{\perp}$ действительная и мнимая части диэлектрической проницаемости, измеренные на частоте f = 10 МГц ($\omega = 2\pi f$), $\varepsilon'_{\perp\infty}$ – диэлектрическая проницаемость, измеренная на частоте 39 ГГц.

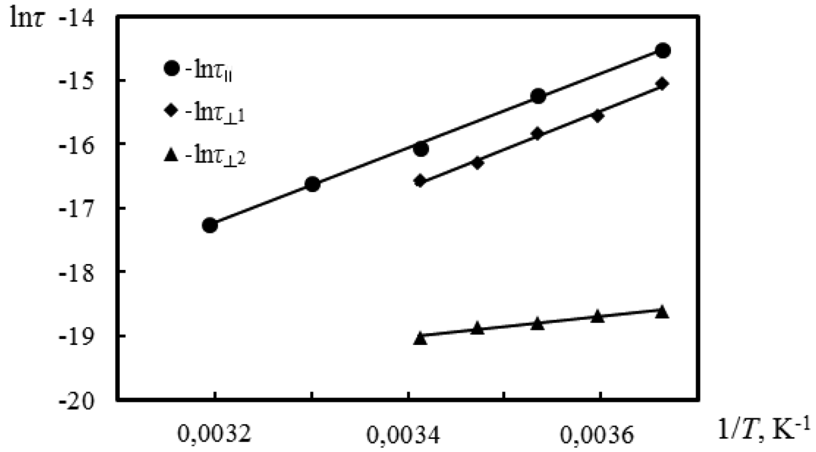

Рисунок 5 / Figure 5
Зависимость lnτ от 1/T для ЖК-1289.
Dependence of lnτ on 1/T for LC-1289.

Источник: данные автора.

Полученные температурные зависимости времён релаксации позволили рассчитать значения энергии активации соответствующих процессов. Энергия активации $E_{\perp 1}$ = 50,2 кДж/моль первого релаксационного процесса для поперечной компоненты диэлектрической проницаемости близка к значению $E_{\|}$ = 48,9 кДж/моль, полученному для продольной компоненты диэлектрической проницаемости. А энергия активации второго релаксационного процесса для поперечной компоненты диэлектрической проницаемости оказалась значительно меньше, всего 13,9 кДж/моль.

Заключение

Волноводный метод позволяет определять значения диэлектрической проницаемости на частоте, при которой процессы, связанные с вращением длинных молекул жидкого кристалла вокруг короткой и длинной осей, можно считать «замороженными». Полученные данные по комплексной диэлектрической проницаемости нематического жидкого кристалла ЖК-1289 в СВЧ-диапазоне позволили провести числовую аппроксимацию диэлектрического спектра в диапазоне частот 10^3–10^{10} Гц. Установлено, что частотная зависимость поперечной компоненты диэлектрической проницаемости ЖК-1289 описывается суммой двух дебаевских процессов. Анизотропия диэлектрической проницаемости в рассматриваемом частотном диапазоне дважды меняет свой знак.

Статья поступила в редакцию 12.11.2019 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Емельянов В. А., Шубин А. В. Методика измерения диэлектрической проницаемости нематических жидких кристаллов в СВЧ-диапазоне // Вестник Московского государственного областного университета (Электронный журнал). 2012. № 3. С. 116–119. URL: https://evestnik-mgou.ru/ru/Articles/View/206 (дата обращения:19.12.2019).
2. Брандт А. А. Исследование диэлектриков на сверхвысоких частотах. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1963. 404 с.
3. Электрически контролируемые анизотропные жидкокристаллические волноводы / Гончаренко И. А., Кабанова О. С., Мельникова Е. А., Романов О. Г., Рушнова И. И., Толстик А. Л. // Журнал Белорусского государственного университета. Физика. 2017. № 2. С. 4–9.
4. Maier W., Meier G. Eine einfache Theorie der dielektrischen Eigenschaften homogen orientierter kristallinglьssiger Phasen des nematischen Typs // Zeitschrift fьr Naturforschung A. 1961. Vol. 16. Iss. 3. P. 262–267.
5. Де Жё В. Физические свойства жидкокристаллических веществ. М.: Мир, 1982. 153 с.
6. Barsoukov E., Macdonald J. R. Impedance spectroscopy: Theory, Experiment, and Applications. Hoboken: Wiley Publ., 2018. 528 p.
7. Raju G. G. Dielectrics in electric fields: Tables, Atoms, and Molecules; second edition. Boca Raton: CRC Press Publ., 2016. 751 p.
8. Cole K. S.; Cole R. H. Dispersion and Absorption in Dielectrics – I Alternating Current Characteristics // The Journal of Chemical Physics. 1941. Vol. 9. Iss. 4. P. 341–352.
9. Cole K. S.; Cole R. H. Dispersion and Absorption in Dielectrics – II Direct Current Characteristics // The Journal of Chemical Physics. 1942. Vol. 10. Iss. 2. P. 98–105.
10. Bergmann K., Roberti D. M., Smyth C. P. Microwave absorption and molecular structure in liquids. XXXI. Analysis in terms of two relaxation times for some aromatic ethers // The Journal of Chemical Physics. 1960. Vol. 64. Iss. 5. P. 665–667.

REFERENCES

1. Emel’yanov V. A., Shubin A. V. [Methodology For Measuring Dielectric Permeability Of Nematic Liquid Crystals In The Microwave Range]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta (Elektronnyi zhurnal)* [Bulletin of Moscow Regional State University (e-journal)), 2012, vol. 3, pp. 116–119. Available at: https://evestnik-mgou.ru/ru/Articles/View/206 (accessed: 19.12.2019).
2. Brandt A. A. *Issledovanie dielektrikov na sverkhvysokikh chastotakh* [Study of dielectrics at ultrahigh frequencies]. Moscow, Gosudarstvennoe izdatel’stvo fiziko-matematicheskoi literatury Publ., 1963. 404 p..
3. Goncharenko I. A., Kabanova O. S., Mel’nikova E. A., Romanov O. G., Rushnova I. I., Tolstik A. L. [Electrically controlled anisotropic liquid crystal waveguides]. In: *Zhurnal Belorusskogo gosudarstvennogo universiteta. Fizika* [Journal of the Belarusian State University. Physics], 2017, no. 2, pp. 4–9.

4. Maier W., Meier G. Eine einfache Theorie der dielektrischen Eigenschaften homogen orientierter kristallinglьssiger Phasen des nematischen Typs. In: *Zeitschrift fьr Naturforschung A*, 1961, vol. 16, iss. 3, pp. 262–267.
5. De Zhe V. *Fizicheskie svoistva zhidkokristallicheskikh veshchestv* [De V. Physical properties of liquid crystalline substances]. Moscow, Mir Publ., 1982. 153 p.
6. Barsoukov E., Macdonald J. R. Impedance spectroscopy: Theory, Experiment, and Applications. Hoboken, Wiley Publ., 2018. 528 p.
7. Raju G. G. Dielectrics in electric fields: Tables, Atoms, and Molecules; second edition. Boca Raton, CRC Press Publ., 2016. 751 p.
8. Cole K. S.; Cole R. H. Dispersion and Absorption in Dielectrics – I Alternating Current Characteristics. In: *The Journal of Chemical Physics*, 1941, vol. 9, iss. 4, pp. 341–352.
9. Cole K. S.; Cole R. H. Dispersion and Absorption in Dielectrics – II Direct Current Characteristics. In: *The Journal of Chemical Physics*, 1942, vol. 10, iss. 2, pp. 98–105.
10. Bergmann K., Roberti D. M., Smyth C. P. Microwave absorption and molecular structure in liquids. XXXI. Analysis in terms of two relaxation times for some aromatic ethers. In: *The Journal of Chemical Physics*, 1960, vol. 64, iss. 5, pp. 665–667.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Емельянов Владимир Анатольевич – доцент, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей физики Московского государственного областного университета;
e-mail: vladanemel@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Vladimir A. Emelyanov – PhD in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor at the Department of General physics, Moscow Region State University;
e-mail: vladanemel@mail.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Емельянов В. А. Диэлектрические свойства жидкого кристалла ЖК-1289 // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2020. №1. С. 102-110.
DOI: 10.18384/2310-7251-2020-1-102-110

FOR CITATION

Emelyanov V. A. Dielectric properties of liquid crystal LCD-1289. In: Bulletin of the Moscow state regional University. Series: Physics-Mathematics, 2020, no. 1, pp. 102–110.
DOI: 10.18384/2310-7251-2020-1-102-110

ВЕСТНИК
МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
ОБЛАСТНОГО УНИВЕРСИТЕТА

Рецензируемый научный журнал «Вестник Московского государственного областного университета» основан в 1998 г.

Сегодня Московским государственным областным университетом выпускается десять научных журналов по разным отраслям науки. Журналы включены в Перечень ВАК (составленный Высшей аттестационной комиссией при Минобрнауки РФ Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание учёной степени кандидата наук, на соискание учёной степени доктора наук). Журналы включены в базу данных Российского индекса научного цитирования (РИНЦ).

Печатные версии журналов зарегистрированы в Федеральной службе по надзору за соблюдением законодательства в сфере массовых коммуникаций и охране культурного наследия.

Полнотекстовые версии журналов доступны в интернете на на сайте Вестника Московского государственного областного университета (www.vestnik-mgou.ru), а также на платформах Научной электронной библиотеки (www.elibrary.ru) и Научной электронной библиотеки «КиберЛенинка» (https:// cyberleninka.ru).

ВЕСТНИК
МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ОБЛАСТНОГО УНИВЕРСИТЕТА

СЕРИЯ: ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА
2020. № 1

Над номером работали:

Литературный редактор М.С. Тарасова
Переводчик И.А. Улиткин
Корректор М.С. Тарасова
Компьютерная верстка Н.Н. Жильцов

Отдел по изданию научного журнала
«Вестник Московского государственного областного университета»
Информационно-издательского управления МГОУ
105005, г. Москва, ул. Радио, д. 10А, офис 98
тел. (495) 723-56-31; (495) 780-09-42 (доб. 6101)
e-mail: info@vestnik-mgou.ru
сайт: www.vestnik-mgou.ru

Формат 70x108/16. Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура «Minion Pro».
Тираж 500 экз. Усл. п. л. 7, уч.-изд. л. 6,25.
Подписано в печать: 31.03.20. Дата выхода в свет: 10.04.2020. Заказ № 2020/03-06.
Отпечатано в ИИУ МГОУ
105005, г. Москва, ул. Радио, 10А