

ISSN 2072-8387 (print)
ISSN 2310-7251 (online)



Вестник

МОСКОВСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
ОБЛАСТНОГО
УНИВЕРСИТЕТА

Серия

ФИЗИКА-
МАТЕМАТИКА

МОДЕЛЬ «УЧИТЕЛЬ–УЧЕНИКИ» В РАМКАХ
ПРЕДСТАВЛЕНИЯ КЛЕТОЧНЫХ АВТОМАТОВ

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИМПЕДАНСЫ ПЛОСКОГО СЛОЯ
СРЕДЫ С ЗЕРКАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОЙ ФУНКЦИЕЙ
ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ОТКЛИКА

НЕЛИНЕЙНЫЕ КИНЕТИЧЕСКИЕ ЭФФЕКТЫ
В ЗАДАЧЕ КУЭТТА В РАЗРЕЖЕННОМ ГАЗЕ
ПРИ ПЕРЕХОДНОМ РЕЖИМЕ



2018/ № 1

ВЕСТНИК
МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
ОБЛАСТНОГО УНИВЕРСИТЕТА

ISSN 2072-8387 (print)

2018 / № 1

ISSN 2310-7251 (online)

серия

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА

Научный журнал основан в 1998 г.

Журнал «Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика» включён в «Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук» Высшей аттестационной комиссии при Министерстве образования и науки Российской Федерации (См.: Список журналов на сайте ВАК при Минобрнауки России) по Физике (01.04.00).

The academic journal is established in 1998

«Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics» is included by the Supreme Certifying Commission of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation into "the List of leading reviewed academic journals and periodicals recommended for publishing in corresponding series basic research thesis results for a Ph.D. Candidate or Doctorate Degree" (See: the online List of journals at the site of the Supreme Certifying Commission of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation) in Physics (01.04.00).

ISSN 2072-8387 (print)

2018 / № 1

ISSN 2310-7251 (online)

series

PHYSICS AND MATHEMATICS

BULLETIN OF THE MOSCOW REGION
STATE UNIVERSITY

Учредитель журнала «Вестник Московского государственного областного университета»:

Государственное образовательное учреждение высшего образования Московской области

Московский государственный областной университет

Выходит 4 раза в год

Редакционно-издательский совет «Вестника Московского государственного областного университета»

Хромиков П.Н. – к. филол. н., проф., ректор МГОУ (председатель совета)

Ефремова Е.С. – к. филол. н., и.о. проректора по научной работе МГОУ (зам. председателя);

Клычников В.М. – к.ю.н., к.и.н., проф., проректор по учебной работе и международному сотрудничеству МГОУ (зам. председателя)

Антонова Л.Н. – д.пед.н., проф., академик РАО, Комитет Совета Федерации по науке, образованию и культуре

Асмолов А.Г. – д.псх.н., проф., академик РАО, директор Федерального института развития образования

Климов С.Н. – д.ф.н., проф., Московский государственный университет путей сообщения (МИИТ)

Клобуков Е.В. – д. филол. н., проф., Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Манойло А.В. – д.пол.н., проф., МГУ им. М.В. Ломоносова

Новоселов А.Л. – д.э.н., проф., Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова

Пасечник В.В. – д.пед.н., проф., МГОУ

Поляков Ю.М. – к. филол. н., главный редактор «Литературной газеты»

Рюмцев Е.И. – д.ф.-м.н., проф., Санкт-Петербургский государственный университет

Хухуни Г.Т. – д. филол. н., проф., МГОУ

Чистякова С.Н. – д. пед. н., проф., Российская академия образования (г. Москва)

ISSN 2072-8387 (print)

ISSN 2310-7251 (online)

Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. – 2018. – № 1. – 100 с.

Журнал «Вестник Московского государственного областного университета. Серия «Физика-Математика» зарегистрирован в Федеральной службе по надзору за соблюдением законодательства в сфере массовых коммуникаций и охране культурного наследия. Регистрационное свидетельство ПИ № ФС77-26136

**Индекс серии «Физика-Математика»
по Объединенному каталогу «Пресса России» 40723**

© МГОУ, 2018.

© ИИУ МГОУ, 2018.

**Адрес Отдела по изданию научного журнала
«Вестник Московского государственного
областного университета»**

г. Москва, ул. Радио, д.10А, офис 98

тел. (495) 723-56-31; (495) 780-09-42 (доб. 6101)

e-mail: vest_mgou@mail.ru; сайт: www.vestnik-mgou.ru

Редакционная коллегия серии «Физика-Математика»

Ответственный редактор серии:

Бугаев А.С. – д. ф.-м. н., академик РАН, Московский физико-технический институт (Государственный университет)

Заместитель ответственного редактора:

Жачкин В.А. – д.ф.-м.н., проф. Московский государственный областной университет

Ответственный секретарь:

Васильчикова Е.Н. – к. ф.-м. н., доц., Московский государственный областной университет

Члены редакционной коллегии:

Беляев В.В. – д.т.н., проф., Московский государственный областной университет;

Бугримов А.Л. – д. т. н., проф., Московский государственный областной университет;

Калашников Е.В. – д.ф.-м.н., Московский государственный областной университет;

Смирнова И.М. – д.п.н., проф., Московский педагогический государственный университет;

Осипов М.А. – д. ф.-м. н., проф., Университет Стратклайд (Великобритания);

Чаругин В.М. – д.ф.-м.н., проф., Московский педагогический государственный университет;

Чигринов В.Г. – д. ф.-м. н., проф., Гонконгский университет науки и технологий (Китай)

Журнал включен в базу данных Российского индекса научного цитирования (РИНЦ), имеет полнотекстовую сетевую версию в Интернете на платформе Научной электронной библиотеки (www.elibrary.ru), а также на сайте Московского государственного областного университета (www.vestnik-mgou.ru)

При цитировании ссылка на конкретную серию «Вестника Московского государственного областного университета» обязательна. Опубликованные в журнале материалы могут использоваться только в некоммерческих целях. Ответственность за содержание статей несут авторы. Мнение редколлегии серии может не совпадать с точкой зрения автора. Рукописи не возвращаются.

Founder of journal «Bulletin of the Moscow Region State University»:

Moscow Region State University

Issued 4 times a year

Series editorial board «Physics and Mathematics»

Editor-in-chief:

A.S. Bugaev – Doctor of Physics and Mathematics, Academician of RAS, Moscow Institute of Physics and Technology (State University)

Deputy editor-in-chief:

V.A. Zhachkin – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Moscow Region State University

Executive secretary:

E.N. Vasilchikova – Ph.D. in Physics and Mathematics, Associate Professor, Moscow Region State University

Members of Editorial Board:

V.V. Belyaev – Doctor of Technical Sciences, Professor, Moscow Region State University;

A.L. Bugrimov – Doctor of Technical Sciences, Professor, Moscow Region State University;

E.V. Kalashnikov – Doctor of Physics and Mathematics, Moscow Region State University;

I.M. Smirnova – Doctor of Pedagogical Sciences, Professor, Moscow State Pedagogical University;

M.A. Osipov – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Strathclyde University (Glasgow, UK);

V.M. Charugin – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Moscow State Pedagogical University;

V.G. Chigrinov – Hong Kong University of Science and Technology (China)

The journal is included into the database of the Russian Science Citation Index, has a full text network version on the Internet on the platform of Scientific Electronic Library (www.elibrary.ru), as well as at the site of the Moscow State Regional University (www.vestnik-mgou.ru)

At citing the reference to a particular series of «Bulletin of the Moscow Region State University» is obligatory. The materials published in the journal are for non-commercial use only. The authors bear all responsibility for the content of their papers. The opinion of the Editorial Board of the series does not necessarily coincide with that of the author. Manuscripts are not returned.

The Editorial Board address: Moscow Region State University

10A Radio st., office 98, Moscow, Russia

Phones: (495) 723-56-31; (495) 780-09-42 (add. 6101)

e-mail: vest_mgou@mail.ru; site: www.vestnik-mgou.ru

Publishing council «Bulletin of the Moscow Region State University»

P.N. Khromenkov – Ph. D. in Philology, Professor, Principal of Moscow Region State University (Chairman of the Council)

E.S. Yefremova – Ph. D. in Philology, Acting Vice-Principal for scientific work of Moscow Region State University (Vice-Chairman of the Council)

V.M. Klychnikov – Ph.D. in Law, Ph. D. in History, Professor, Vice-Principal for academic work and international cooperation of Moscow Region State University (Vice-Chairman of the Council)

L.N. Antonova – Doctor of Pedagogics, Professor, Member of the Russian Academy of Education, The Council of the Federation Committee on Science, Education and Culture

A.G. Asmolov – Doctor of Psychology, Professor, Member of the Russian Academy of Education, Principal of the Federal Institute of Development of Education

S.N. Klimov – Doctor of Philosophy, Professor, Moscow State University of Railway Engineering

E.V. Klobukov – Doctor of Philology, Professor, Lomonosov Moscow State University

A.V. Manoylo – Doctor of Political Science, Professor, Lomonosov Moscow State University

A.L. Novosjolov – Doctor of Economics, Professor, Plekhanov Russian University of Economics

V.V. Pasechnik – Doctor of Pedagogics, Professor, Moscow Region State University

Yu. M. Polyakov – Ph.D. in Philology, Editor-in-chief of «Literaturnaya Gazeta»

E.I. Rjuntsev – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Saint Petersburg State University

G. T. Khukhuni – Doctor of Philology, Professor, Moscow Region State University

S.N. Chistyakova – Doctor of Pedagogics, Professor, the Russian Academy of Education

ISSN 2072-8387 (print)

ISSN 2310-7251 (online)

Bulletin of the Moscow State Regional University. Series: Physics and Mathematics. – 2018. – № 1. – 100 p.

The series «Physics and Mathematics» of the Bulletin of the Moscow State Regional University is registered in Federal service on supervision of legislation observance in sphere of mass communications and cultural heritage protection. The registration certificate ПИ № 0С77-26136

Index of the series «Physics and Mathematics» according to the union catalog «Press of Russia» 40723

© MRSU, 2018.

© Information & Publishing department of MRSU, 2018.

СОДЕРЖАНИЕ

РАЗДЕЛ I. МАТЕМАТИКА

Адамсон Н.Н., Калашиников Е.В. МОДЕЛЬ «УЧИТЕЛЬ–УЧЕНИКИ» В РАМКАХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ КЛЕТОЧНЫХ АВТОМАТОВ6

РАЗДЕЛ II. ФИЗИКА

Вьюнг В.Т., Горелов С.Л. НЕЛИНЕЙНЫЕ КИНЕТИЧЕСКИЕ ЭФФЕКТЫ В ЗАДАЧЕ КУЭТТА В РАЗРЕЖЕННОМ ГАЗЕ ПРИ ПЕРЕХОДНОМ РЕЖИМЕ16

Зверев Н.В. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИМПЕДАНСЫ ПЛОСКОГО СЛОЯ СРЕДЫ С ЗЕРКАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОЙ ФУНКЦИЕЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ОТКЛИКА.....23

Сидоров А.В., Зайцев А.А., Кузнецов Д.В., Нарциссов Д.А. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ И ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕРМОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ЭФФЕКТА В ВОДНЫХ РАСТВОРАХ ОДНОЗАРЯДНЫХ ИОННЫХ СОЕДИНЕНИЙ В НЕСТАЦИОНАРНЫХ УСЛОВИЯХ38

Соломатин А.С., Беляев В.В. ДИСПЛЕЙ С МНОГОПОЛЬЗОВАТЕЛЬСКИМ НАПРАВЛЕННЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ВИЗУАЛЬНОЙ ИНФОРМАЦИИ И ПРОЕКТОР С УПРАВЛЯЕМЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ЛУЧА СВЕТА НА ОСНОВЕ ЖИДКИХ КРИСТАЛЛОВ С НЕОДНОРОДНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ДИРЕКТОРА.....47

Завитаев Э.В., Русаков О.В., Чухлеб Е.П. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ТОНКОГО МЕТАЛЛИЧЕСКОГО СЛОЯ63

Бишаев А.М., Рыков В.А., Абгарян М.В. Н-ТЕОРЕМА И УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ ДЛЯ КИНЕТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ НЕИДЕАЛЬНОГО ГАЗА...73

Хасанов А.С. ТЕОРИЯ ИСПАРЕНИЯ ДВУХ ОДИНАКОВЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ АЭРОЗОЛЬНЫХ КАПЕЛЬ НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ82

РАЗДЕЛ III. ТЕОРИЯ И МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ И ВОСПИТАНИЯ

Исаев В.И. М. ПЛАНК И ИСТОРИЯ ОТКРЫТИЯ КВАНТОВ ТЕПЛОвого ИЗЛУЧЕНИЯ.....91

CONTENTS

SECTION I. MATHEMATICS

N. Adamson, E. Kalashnikov A 'TEACHER-STUDENTS' MODEL
WITHIN THE FRAMEWORK OF CELLULAR AUTOMATA.....6

SECTION II. PHYSICS

V.T. Vuong, S. Gorelov NONLINEAR KINETIC EFFECTS IN THE COUETTE
PROBLEM FOR A RAREFIED GAS IN THE TRANSITION REGION16

N. Zverev. SURFACE IMPEDANCES OF A FLAT LAYER OF A MEDIUM
WITH A MIRROR-SYMMETRIC DIELECTRIC RESPONSE
FUNCTION.....23

A. Sidorov, A. Zaitsev, D. Kuznetsov, D. Narcissov.
EXPERIMENTAL AND NUMERICAL INVESTIGATION OF THE
THERMOELECTRIC EFFECT IN AQUEOUS SOLUTIONS OF SINGLY
CHARGED IONIC COMPOUNDS UNDER NONSTATIONARY
CONDITIONS.....38

A. Solomatin, V. Belyaev. MULTIUSER PERSONALLY DISTRIBUTING
LC DISPLAY AND PROJECTION DEVICE WITH A CONTROLLED
REFRACTION OF THE LIGHT BEAM ON THE BASIS OF LIQUID
CRYSTALS WITH INHOMOGENEOUS DISTRIBUTION OF THE
DIRECTOR47

E. Zavitaev, O. Rusakov, E. Chukhleb. MAGNETIC FIELD OF A THIN METAL
LAYER63

A. Bishaev, V. Rikov, M. Abgaryan. THE H-THEOREM AND EQUATION OF
STATE FOR KINETIC MODEL OF IMPERFECT GAS.....73

A. Khasanov. EVAPORATION THEORY FOR TWO IDENTICAL
INTERACTING AEROSOL DROPS ON THE BASIS OF THEORY OF LINEAR
OPERATORS82

SECTION III. THEORY AND METHODS OF TEACHING AND EDUCATION

V. Isaev. M. PLANCK AND HISTORY OF THE DISCOVERY THE QUANTA OF
THERMAL RADIATION91

РАЗДЕЛ I. МАТЕМАТИКА

УДК 004.94

DOI: 10.18384/2310-7251-2018-1-6-15

МОДЕЛЬ «УЧИТЕЛЬ–УЧЕНИКИ» В РАМКАХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ КЛЕТОЧНЫХ АВТОМАТОВ

Адамсон Н.Н., Калашников Е.В.

Московский государственный областной университет

105005, г. Москва, ул. Радио, д. 10А, Российская Федерация

Аннотация. Изучается поведение коллектива «учеников» и влияние этого коллектива на его отдельные персоны под воздействием внешнего возбуждения – «учителя». Строится модель «учитель-ученики». Рассмотрение ведётся в рамках представления клеточных автоматов.

Ключевые слова: массив состояний, параметр состояний, клеточный автомат, самосогласование, эволюция состояний.

A 'TEACHER–STUDENTS' MODEL WITHIN THE FRAMEWORK OF CELLULAR AUTOMATA

N. Adamson, E. Kalashnikov

Moscow Region State University

ul. Radio 10A, 100500 Moscow, Russian Federation

Abstract. The behavior of the collective of 'students' and the influence of this collective on its individual persons under the influence of external excitement – 'teacher' are studied. A 'teacher – students' model is constructed. A cellular automata idea is used to present the behavior of the model.

Keywords: *massive* of states, parameter of states, cellular automata, self-consistence, evolution of states.

Введение

Качество процесса обучения представляет собой всеобщий интерес, как в образовательном, так и в исследовательском и теоретическом аспектах. В настоящее время наблюдается резкий рост числа студентов в высших учебных заведениях. При этом современные технологии предъявляют высокие требования к качеству образования: Примирить эти две противоположные тенденции непросто. Решение этой пробле-

мы, традиционно, ищется в разработке различных методик обучения, которые предполагают поиск средств, обеспечивающих наиболее доступные способы получения знаний [1–7]. (При этом забывают или игнорируют, что обучение это всегда насилие над собой и каких-то особых или специальных путей к получению знаний нет). В классической методической теории главный вопрос сводится к простому обучению учителя знаниям, которые он впоследствии будет передавать ученикам. В работе [1] утверждается, что обучение не пассивный, направленный извне процесс потребления информации, но активный, созидательный и самонаправленный процесс, в котором учитель выстраивает своё внутреннее видение, отражающее собственный образовательный опыт. Также на образование оказывает влияние и коллектив учеников. Например, в [2] говорится о недостатке классового сознания в случае социальной дифференциации учеников. Эта социальная дифференциация может быть обусловлена культурными, экономическими или интеллектуальными факторами.

В [3] рассматривается влияние «оперативности» учителя на эмоциональное образование, что, в свою очередь, влияет на познавательный процесс. Объяснение находят с помощью основополагающей теории притяжения (по-другому, просто, дрессуры) [4]: люди положительно относятся к стимулам, сулящим награду, избегают или нейтрально относятся к стимулам, не сулящим награду или обеспечивающим наказание. Тот же вывод следует из работ других авторов [5–7].

В [7], в частности, отмечена сильная связь между типами обучения и мотивацией студентов. Классический подход к образованию с акцентом на внешнее регулирование работает лишь с небольшим количеством студентов. Наиболее эффективный подход заключается в формировании у студента определённой стратегии с элементами саморегулирования.

Саморегулирование предполагает, что ученики представляют собой подобие активной среды, способной со временем менять состояние каждого ученика и состояние коллектива учеников. Можно сказать, что каждый ученик – это элемент активной среды, и каждый ученик проходит через одни и те же состояния. Такая формулировка предполагает идею клеточного автомата (КА). Каждый ученик представляет собой клетку в пространстве. Каждая клетка снабжена определённым числом состояний и взаимодействует с соседними клетками.

Модель, основанная на клеточных автоматах, представляет собой сетку, клеткам (ячейкам) которой задаётся состояние и правила перехода.

Клеточные автоматы (КА) предполагают дискретность. Это означает, что на каждом шаге рассчитывается состояние каждой ячейки, связанное с её состоянием и состояниями окружающих ячеек. Расчёт проводится последовательно для требуемого количества шагов. Фон Нейман [8] был первым, кто принял во внимание подобную модель, включив КА в свой «универсальный конструктор». Этот «универсальный конструктор» представляет собой устройство, воспроизводящее самоё себя при движении.

Главное преимущество данного вида моделей – возможность их повсеместного применения во многих областях [9], включая биологию и химию. С их помощью можно наглядно продемонстрировать, как изначально простые структуры самоорганизуются и приходят к совершенно другому виду. КА могут быть разных форм и

видов. Одно из основных свойств – вид сетки, на котором рассчитывается модель. Простейший вариант – одномерная сетка, представляющая собой линию. В таком случае у клетки есть соседи только слева и справа. В двухмерном пространстве могут быть использованы квадратная, треугольная и гексагональная сетки. Также можно использовать декартову сетку произвольного числа измерений.

Число состояний КА, которое он может принимать, также должно быть задано. Простейший вариант – два состояния (для этой бинарной опции традиционно обозначают ноль белым цветом, а единицу – чёрным). Тем не менее, КА модель с непрерывным интервалом возможных значений состояния тоже имеют место быть. Также количество соседних ячеек, оказывающих влияние на исходную, должно быть задано. В простейшем случае это ближайшие соседи, т.е. чьи ячейки имеют общую сторону с данной.

Пример использования клеточных автоматов, а именно, вероятностных клеточных автоматов, можно увидеть в работе [10], где рассматривается процесс формирования общественного мнения через модель вероятностных клеточных автоматов. Клеточные автоматы – математическая система, демонстрирующая самоорганизацию. По состоянию системы можно «распознать» информацию о начальном её состоянии. Таким образом, по видам изменения структуры можно создать языки. Структуры, «слова» в языках распознаются, и компьютер возвращает им заданный символ [11].

Модели обучения с помощью клеточных автоматов рассматриваются в [12]. Здесь представлены две модели обучения.

Первая модель основана на вероятностных клеточных автоматах:

– В ней задаётся правила вычисления вероятностей понять или не понять материал (помимо образовательных процессов эта модель может быть применима к созданию роботов и систем искусственного интеллекта).

– По мере прохождения курса ученик увеличивает свою вероятность к усвоению уроков. Однако недостаток модели в том, что в ней отсутствует коллективное взаимодействие.

Вторая модель делает акцент на контакт учителя с учеником и также использует вероятностный подход. Но главной целью автор ставит прохождение учеником последовательности операций и вмешательства учителя при ошибке подопечного. В модели учитель присутствует как внешнее, детерминированное воздействие.

В обоих случаях процесс обучения индивидуализирован.

Ситуация, которая исследуется в настоящей работе, рассматривает взаимодействие «учителя» с коллективом «учеников» так, что, помимо «учителя», сам этот коллектив воздействует на каждого «ученика» этого коллектива. Воздействие коллектива может ограничить развитие состояния клетки или, наоборот, способствовать её развитию.

Модель

2а. Построение массива состояний

1) Рассматриваем коллектив учеников. N – число учеников. Для определённости возьмём $N = 15$. Коллектив учеников представляет собой конкурентную

b) Каждая клетка может транслироваться по строке и по столбцу. Поэтому максимальное число соседей равно четырём (рис. 1). Соответственно, число соседей у клетки, прилегающей к стороне квадрата массива, равно трём, а число соседей у клетки в углу массива равно двум.

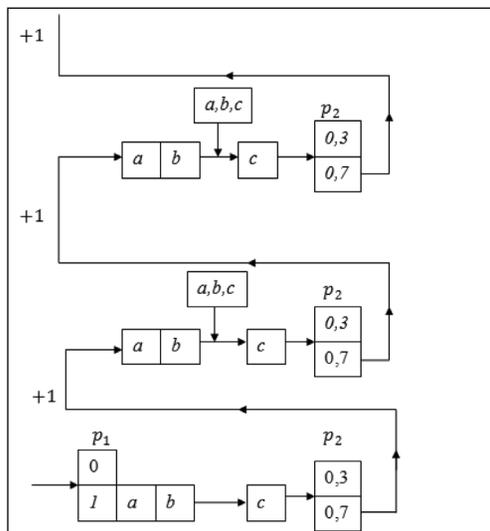


Рис. 2. Развитие состояния клетки. Первый (нижний) уровень:

Вход на первый уровень характеризуется вероятностью $p_1 = 1/2$ и принимает «0» или «1». Клетка, получив «1» пробегает позиции a, b, c . Клетка выходит с первого уровня с вероятностью $p_1 = 0,7$, соответствующей усвоению информации, получает вес $W = +1$ и переходит на следующий уровень состояния клетки в позицию a . Второй (и следующие) уровень начинается с весом клетки $W = +1$ и свойством a попадает в состояние « b ». Переход в состояние « c » происходит при условии, что окружающие, ближайшие клетки находятся в состояниях a, b, c . Клетка выходит с этого уровня с вероятностью $p_2 = 0,7$, получает вес $W = +1$ и переходит на следующий уровень, но теперь с весом $W = +2$, в состояние a

c) Первоначальный массив строится произвольно: с вероятностью $1/2$ первая позиция в клетках заполняется «1» и «0». Состояние «1» соответствует состоянию, при котором ученик понял материал со слов учителя, «0» – не понял.

Сразу же второй позиции всех клеток массива присваивается «состояние» клетки « a ».

d) Каждая клетка массива получает шанс на обучение и переходит в новое состояние со способностью « b ». Последующее полное состояние клетки зависит от ближайшего окружения:

e) Клетка переходит из « b » в состояние « c », если «вес» ближайших соседей отличен от нуля (число соседей в углу равно 2, у стенки – 3, в середине массива – 4).

f) Если в состоянии « c » «вес» ближайших соседей отличен от нуля, то клетка увеличивает «вес» на «1» переходит на следующий свой внутренний уровень в состояние « a », иначе, переходит в состояние « a » без увеличения «веса».

Решение

В исходном (рис. 1) массиве задаём случайную генерацию состояний клеток. Результат приведён на рис. 3. После 10-ти шагов в массиве возникли области с весом клеток, превышающем «1». Они заштрихованы на рис. 4. Начальные стадии развития клеток из заштрихованных областей приведены на рис. 5. Здесь рассмотрены особенности развития состояний клеток в зависимости от количества ближайших соседей. Как видно, на начальных стадиях развитие клеток зависит от числа соседей. В частности, клетка (в углу), имеющая только двух соседей, развивается медленнее других.

0a	1a	1a	0a	1a	1a	0a	0a	1a	0a	1a	1a	1a	0a	0a
1a	0a	0a	0a	0a	1a	1a	1a	1a	1a	1a	0a	0a	1a	0a
0a	0a	1a	1a	0a	0a	1a	0a	0a	1a	0a	1a	1a	0a	0a
1a	1a	1a	0a	1a	0a	1a	1a	1a	0a	1a	0a	1a	0a	1a
1a	0a	0a	1a	1a	1a	0a	1a	0a	0a	0a	0a	1a	1a	1a
1a	1a	1a	0a	1a	1a	1a	1a	0a	0a	1a	0a	1a	1a	1a
1a	0a	0a	0a	0a	0a	1a	0a	1a	1a	0a	1a	0a	1a	0a
0a	1a	0a	0a	1a	0a	1a	0a	1a						
0a	1a	1a	1a	0a	0a	0a	1a	0a	0a	0a	1a	0a	0a	0a
0a	1a	1a	1a	1a	1a	0a	1a	1a	0a	0a	0a	0a	1a	1a
0a	0a	0a	0a	0a	0a	1a	0a	0a	1a	1a	1a	0a	1a	0a
1a	0a	1a	0a	1a	0a	0a	0a	1a	0a	1a	1a	0a	0a	0a
1a	1a	1a	1a	0a	1a	1a	1a	1a	1a	1a	0a	1a	1a	1a
0a	0a	1a	1a	1a	0a	1a	1a	0a	0a	0a	0a	1a	0a	1a
0a	1a	0a	1a	1a	0a	1a	0a	0a	1a	1a	1a	0a	0a	0a

Рис. 3. Случайно генерированный массив. Каждой клетке был дан шанс выбрать одно из состояний «1» или «0».

2b	1b	1b	0b	1b	1b	0b	0b	1b	2b	4a	1b	1b	0b	0b
1b	0b	0b	0b	0b	1b	1b	1b	1b	4a	1b	0b	0b	1b	0b
0b	0b	1b	1b	0b	0b	1b	0b	0b	1b	2b	1b	1b	0b	0b
1b	1b	1b	3b	1b	0b	1b	1b	1b	0b	1b	0b	1b	0b	1b
1b	0b	0b	1b	3b	1b	2b	1b	0b	0b	0b	0b	1b	1b	2b
4b	1b	1b	0b	1b	1b	3a	1b	0b	0b	1b	0b	1b	3b	2c
1b	0b	0b	0b	0b	0b	1b	2b	1b	1b	2b	1b	1b	1b	2b
0b	1b	0b	0b	1b	0b	1b	4a	1b	1b	1b	4b	1b	0b	1b
0b	1b	1b	1b	0b	0b	0b	1b	0b	0b	0b	1b	0b	0b	0b
0b	1b	1b	1b	1b	1b	0b	1b	1b	0b	0b	0b	0b	1b	1b
0b	0b	0b	0b	0b	0b	1b	0b	0b	1b	1b	1b	0b	1b	0b
1b	0b	1b	0b	1b	0b	0b	0b	1b	3b	2a	1b	0b	0b	0b
1b	1b	4b	1b	0b	1b	1b	1b							
0b	0b	1b	3b	1b	0b	1b	1b	0b	0b	0b	0b	1b	0b	1b
0b	1b	2b	3a	1b	0b	1b	0b	0b	1b	1b	1b	0b	0b	0b

Рис. 4. Массив после 10-ти шагов.

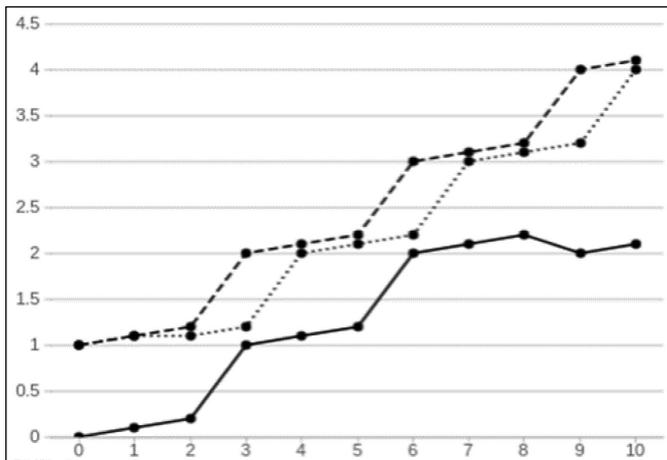


Рис. 5. Начальная стадия развития клеток, имеющих разное число ближайших соседей. Сплошная линия – клетка в углу, число соседей равно 2; пунктирная линия – клетка прилегает к «стороне» массива, число соседей равно 3; линия из точек – клетка в середине массива, число ближайших соседей равно 4. W – «вес» клетки по оси ординат. По оси абсцисс отложено количество шагов – время, в течение которого наблюдались клетки.

22b	1b	1b	0b	1b	1b	0b	0b	1b	25b	28a	1b	1b	0b	0b
1b	0b	0b	0b	0b	1b	1b	1b	1b	20a	1b	0b	0b	1b	0b
0b	0b	1b	1b	0b	0b	1b	0b	0b	1b	20b	1b	1b	0b	0b
1b	1b	1b	20b	1b	0b	1b	1b	1b	0b	1b	0b	1b	0b	1b
1b	0b	0b	1b	23b	1b	27b	1b	0b	0b	0b	0b	1b	1b	21b
24b	1b	1b	0b	1b	1b	24a	1b	0b	0b	1b	0b	1b	26b	20c
1b	0b	0b	0b	0b	0b	1b	23b	1b	1b	23b	1b	23b	1b	22b
0b	1b	0b	0b	1b	0b	1b	25a	1b	1b	1b	28b	1b	0b	1b
0b	1b	1b	1b	0b	0b	0b	1b	0b	0b	0b	1b	0b	0b	0b
0b	1b	1b	1b	1b	1b	0b	1b	1b	0b	0b	0b	0b	1b	1b
0b	0b	0b	0b	0b	0b	1b	0b	0b	1b	1b	1b	0b	1b	0b
1b	0b	1b	0b	1b	0b	0b	0b	1b	24b	19a	1b	0b	0b	0b
1b	1b	19b	1b	21b	1b	1b	1b	1b	1b	1b	1b	0b	1b	1b
0b	0b	1b	24b	1b	0b	1b	1b	0b	0b	0b	0b	1b	0b	1b
0b	1b	26b	22a	1b	0b	1b	0b	0b	1b	1b	1b	0b	0b	0b

Рис. 6. Массив на 100-ом шаге.

После 100 шагов структура массива не изменилась. Отличие его от предыдущих в том, что «вес» клеток W в заштрихованных областях существенно вырос (рис. 6), а характер эволюции состояний клеток с разным количеством соседей приобрёл одинаковый вид (рис. 7).

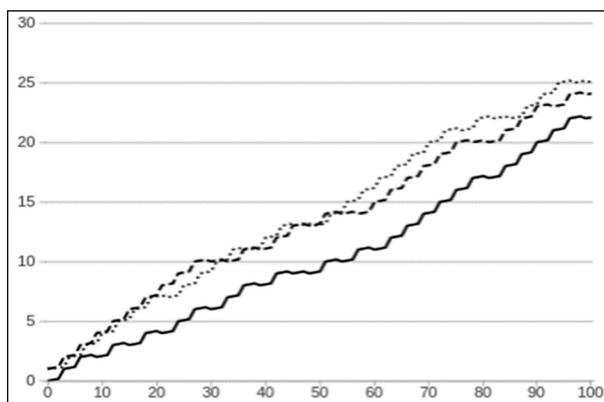


Рис. 7. Эволюция состояний клеток на 100-ом шаге.
Обозначения кривых те же, что и на рис. 5.

Обсуждение

Одна из задач, которая ставилась при моделировании системы «учитель – ученики», состояла в исследовании влияния ближайших соседей (коллектива) на процесс восприятия информации учеником и её переработки. Наиболее подходящим для этих целей оказался конечный массив состояний 15×15 для 15 учеников. На таком массиве все клетки, находящиеся в углах массива, обладают двумя соседями, а клетки, прилегающие к «сторонам» массива, имеют трёх соседей, и, наконец, клетки внутри массива обладают четырьмя соседями.

Оказалось, что в рамках построенной модели, взаимодействия клеток приводят к возникновению «очагов» повышенной восприимчивости новой информации. Раз возникнув, эти «очаги» не затухают. Достигают не очень больших размеров (3–4 клетки рядом). Эти клетки продолжают развиваться дальше. Но ближайšie к ним соседние клетки работают только на поддержание своего невысокого уровня, обеспечивая интенсивный набор «веса» успешным клеткам состояний. Таким образом, на массиве состояний возникают самосогласованные «очаги» успешного развития состояний.

Выявлено, что на начальных шагах развития состояний (рис. 4) клетки с меньшим числом соседей развиваются немного медленнее, чем клетки с максимальным числом соседей. Но по прошествии значительного периода эволюции характер дальнейшего развития для клеток с разным числом соседей становится мало различимым друг от друга.

Другой важной особенностью явилась сопоставимость количества учеников и количества успешно развитых клеток состояний. Поскольку каждая клетка всего лишь одно из возможных состояний ученика, то количество успешно развитых клеток (их 26) вполне предоставляет возможность всем 15 ученикам успешно в коллективе освоить новую информацию вне зависимости от количества соседей.

Для воспроизведения эксперимента был сделан web-интерфейс, который доступен по адресу: <http://nikola9r.bget.ru/mgou/ka.php>.

Статья поступила в редакцию 06.12.2017 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Duffy T.M., Jonassen D.H. Constructivism: New implications for instructional technology // *Constructivism and the technology of instruction: A Conversation*. 1992. Т. 1. С. 16.
2. Lynch K., O’riordan C. Inequality in higher education: A study of class barriers // *British Journal of Sociology of Education*. 1998. Т. 19. №. 4. С. 445–478.
3. Allen M., Witt P.L., Wheelless L.R. The role of teacher immediacy as a motivational factor in student learning: Using meta-analysis to test a causal model // *Communication Education*. 2006. Т. 55. № 1. С. 21–31.
4. Mehrabian A. *Silent messages: Implicit communication of emotions and attitudes*. Belmont, CA: Wadsworth Pub Co, 1981.196 С.
5. Kung D., Speer N., Gucler B. Teaching as learning: mathematics graduate students’ development of knowledge of student thinking about limits // *Psychology of Mathematics Education*. 2006. С. 835.
6. Capturing teachers’ generative change: A follow-up study of professional development in mathematics / Franke M L., Carpenter T.P., Levi L., Fennema E. // *American Educational Research Journal*. 2001.Т. 38. №. 3. С. 653–689.
7. Vermunt J.D. The regulation of constructive learning processes // *British Journal of Educational Psychology*.1998. Т. 68. №. 2. С. 149–171.
8. Von Neumann J. Theory of self-reproducing automata // *IEEE Transactions on Neural Networks*.1966. Т. 5. №. 1. С. 3–14.
9. Бандман О.Л. Клеточно-автоматные модели естественных процессов и их реализация на современных компьютерах // *Прикладная дискретная математика*. 2017 № 35. С. 102–121.
10. Bagnoli F, Franci F, Rechtman R. Opinion formation and phase transitions in a probabilistic cellular automaton with two absorbing states // *ACRI: International Conference on Cellular Automata*. 2002. С. 249–258.
11. Wolfram S. Computation theory of cellular automata // *Communications in Mathematical Physics*. 1984.Т. 96. №. 1. С. 15–57.
12. Майер Р.В. Компьютерное моделирование физических явлений. Глазов: Глазовский государственный педагогический институт. 2009. 112 с.

REFERENCES

1. Duffy T.M., Jonassen D.H. Constructivism: New implications for instructional technology. In: *Constructivism and the technology of instruction: A Conversation*, 1992, vol. 1, pp. 16.
2. Lynch K., O’riordan C. Inequality in higher education: A study of class barriers. In: *British Journal of Sociology of Education*, 1998, vol. 19, no. 4, pp. 445–478.
3. Allen M., Witt P.L., Wheelless L.R. The role of teacher immediacy as a motivational factor in student learning: Using meta-analysis to test a causal model. In: *Communication Education*, 2006, vol. 55, no. 1, pp. 21–31.
4. Mehrabian A. *Silent messages: Implicit communication of emotions and attitudes*. Belmont, CA, Wadsworth Publ., 1981.196 p.
5. Kung D., Speer N., Gucler B. Teaching as learning: mathematics graduate students. In: *Psychology of Mathematics Education*, 2006, pp. 835.
6. Franke M L., Carpenter T.P., Levi L., Fennema E. Capturing teachers’ generative change: A follow-up study of professional development in mathematics. In: *American Educational Research Journal*, 2001, vol. 38, no. 3, pp. 653–689.
7. Vermunt J.D. The regulation of constructive learning processes. In: *British Journal of Educational Psychology*, 1998,vol. 68, no. 2, pp. 149–171.
8. Von Neumann J. Theory of self-reproducing automata. In: *IEEE Transactions on Neural Networks*, 1966,vol. 5, no. 1, pp. 3–14.

9. Bandman O.L. *Kletочно-автоматные модели естественных процессов и их реализация на современных компьютерах* [Cellular automata models of natural processes and their implementation on modern computers]. In: *Prikladnaya diskretnaya matematika* [Applied Discrete Mathematics], 2017, no. 35, pp. 102–121.
10. Bagnoli F., Franci F., Rechtman R. Opinion formation and phase transitions in a probabilistic cellular automaton with two absorbing states. In: *ACRI: International Conference on Cellular Automata*, 2002, pp. 249–258.
11. Wolfram S. Computation theory of cellular automata. In: *Communications in Mathematical Physics*, 1984, vol. 96, no. 1, pp. 15–57.
12. Maier R.V. *Komp'yuternoe modelirovanie fizicheskikh yavlenii* [Computer modeling of physical phenomena]. Glazov, Glazovskii gosudarstvennyi pedagogicheskii institut Publ., 2009. 112 p.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Адамсон Николай Николаевич – аспирант кафедры вычислительной математики и методики преподавания информатики Московского государственного областного университета;
e-mail: nikolay-256@yandex.ru;

Калашников Евгений Владимирович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительной математики и методики преподавания информатики Московского государственного областного университета;
e-mail: ekevkalashnikov1@gmail.com

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Nikolay N. Adamson – postgraduate student at the Department of Computational Mathematics and Methods of Teaching Informatics, Moscow Region State University;
e-mail: nikolay-256@yandex.ru;

Evgeny V. Kalashnikov – Doctor in Physical and Mathematical sciences, professor at the Department of Computational Mathematics and Methods of Teaching Informatics, Moscow Region State University;
e-mail: ekevkalashnikov1@gmail.com

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Адамсон Н.Н., Калашников Е.В. Модель «учитель–ученики» в рамках представления клеточных автоматов // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2018. № 1. С. 6–15.
DOI: 10.18384/2310-7251-2018-1-6-15.

FOR CITATION

Adamson N.N., Kalashnikov E.V. A 'teacher – students' model within the framework of cellular automata. In: *Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*. 2018. no. 1. pp. 6–15.
DOI: 10.18384/2310-7251-2018-1-6-15.

РАЗДЕЛ II. ФИЗИКА

УДК 533.6.011.8

DOI: 10.18384/2310-7251-2018-1-16-22

НЕЛИНЕЙНЫЕ КИНЕТИЧЕСКИЕ ЭФФЕКТЫ В ЗАДАЧЕ КУЭТТА В РАЗРЕЖЕННОМ ГАЗЕ ПРИ ПЕРЕХОДНОМ РЕЖИМЕ

Вьонг В.Т.¹, Горелов С.Л.^{1,2}

¹ *Московский физико-технический институт (государственный университет)
141701, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский переулок, д. 9,
Российская Федерация*

² *Центральный аэрогидродинамический институт им. профессора Н.Е. Жуковского
140180, г. Жуковский, Московская область, ул. Жуковского, д. 1, Российская
Федерация*

Аннотация. В данной работе рассматривается задача Куэтта о течении газа и теплопередаче между двумя параллельными бесконечными пластинами на расстоянии h друг от друга, одна из которых покоится, а другая движется в собственной плоскости с постоянной скоростью W , температуры пластин T_0 и T_1 . В задаче вычисляются нормальная и касательная составляющие тензора напряжений и поток тепла к поверхности пластин Q . Результаты, полученные методом прямого статистического моделирования, сравниваются с аналитическими результатами, полученными с помощью метода самоподобной интерполяции. Результаты исследований показывают, что в переходной области между свободномолекулярным и сплошнородным пределами кроме касательной составляющей тензора напряжений присутствует нормальная составляющая, которой нет ни в свободномолекулярном случае, ни в случае сплошной среды. Необходимо отметить, что нормальная и касательная составляющие существенно немонотонны по числам Кнудсена. Тепловой поток также имеет немонотонное поведение и меняет знак при изменении степени разреженности газа (числа Кнудсена Kn).

Ключевые слова: течение Куэтта, эффекты разреженности газа, метод прямого статистического моделирования, метод самоподобной интерполяции.

NONLINEAR KINETIC EFFECTS IN THE COUETTE PROBLEM FOR A RAREFIED GAS IN THE TRANSITION REGION

V.T. Vuong¹, S. Gorelov^{1,2}

¹ *Moscow Institute of Physics and Technology (State University)
Institutskii per. 9, 141701 Dolgoprudnyi, Moscow Region, Russian Federation*

² *Central Aerohydrodynamic Institute
ul. Zhukovskogo 1, 140180 Zhukovsky, Moscow Region, Russian Federation*

© Вьонг В.Т., Горелов С.Л., 2018.

Abstract. We consider the Couette problem of a gas flow and heat transfer between two parallel infinite plates located at a distance h from each other, with one plate resting and the other moving in its own plane at a constant velocity W . The temperatures of the plates are T_0 and T_1 , respectively. The normal and tangential components of the stress tensor and the heat flux to the surface of the plates are calculated. The results obtained by the direct simulation Monte-Carlo method are compared with the analytical ones using the self-similar interpolation method. The results show that in the transition region between the free-molecular flow and continuous flow, the stress tensor has two components: the tangent one and the normal one, which is absent both in the free-molecular case and in the case of a continuous flow. Moreover, the normal and tangential components are essentially non-monotonic in the range of Knudsen numbers. The heat flux also has a non-monotonic behavior and changes its sign with a change in the Knudsen number (gas rarefaction factor Kn).

Key words: Couette flow, rarefaction effects of gas, direct simulation Monte-Carlo method, self-similar interpolation method.

В данной работе рассматривается течение между двумя бесконечными параллельными пластинами [1; 2], которые имеют разные температуры T_0 и T_1 и движутся относительно друг друга со скоростью W в широком диапазоне числа Кнудсена.

Введём некоторые безразмерные параметры:

$$t = \frac{T_0}{T_1}, S_W = \frac{W}{\sqrt{2kT_1}}, P_{xy} = \frac{P_{xy}}{p}, P_{yy} = \frac{P_{yy}}{p} - 1, p = nk\sqrt{T_0T_1},$$

$$Q = \frac{q}{q_1} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{t} \left(t - 1 - \frac{1}{2} S_W^2 \right) (1 + \sqrt{t})^{-1}, q_1 = nkT_1 \sqrt{\frac{2kT_1}{m}},$$

где t – отношение температур пластин, S_W – относительная скорость, P_{xy} , P_{yy} – безразмерные касательная и нормальная составляющая тензора напряжений, соответственно, Q – безразмерный тепловой поток.

Рассматриваем течение при больших числах Кнудсена, тогда столкновениями между молекулами газа можно пренебречь.

Напряжение трения (касательная составляющая тензора напряжений) определяется формулой: $P_{xy} = -\frac{2}{1 + \sqrt{t}} \frac{S_W}{\sqrt{\pi}}$.

Нормальная составляющая тензора напряжений $P_{yy} = 0$.

Поток тепла к пластинам запишем в виде: $Q = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{t}}{1 + \sqrt{t}} \left(t - 1 - \frac{1}{2} S_W^2 \right)$.

При малых числах Кнудсена для вязкого несжимаемого газа можно записать напряжение трения в виде: $P_{xy} = -KnS_W$.

Нормальная составляющая тензора напряжений $P_{yy} = 0$.

Тепловой поток к нижней пластине (при $y = 0$) равен:

$$Q = \frac{q}{q_1} = Kn \left[\frac{15}{8}(t-1) - \frac{1}{2}S_w^2 \right].$$

При переходном режиме нет никаких аналитических решений, поэтому в данной работе расчёты в широком диапазоне чисел Кнудсена и при различных значениях отношения температур и скоростей движения пластин получены методом прямого статистического моделирования и методом самоподобной интерполяции [4].

По методу самоподобной интерполяции тепловой поток в зависимости от числа Кнудсена Kn получается в виде:

$$Q = \left(\frac{q}{q_1} \right)^* = \frac{q_{cm}^+ q_{hc}^+ Kn}{q_{cm}^+ + q_{hc}^+ Kn} - \frac{q_{cm}^- q_{hc}^- Kn}{q_{cm}^- + q_{hc}^- Kn},$$

где $q_{cm}^+ = a(t)(t-1)$, $q_{cm}^- = a(t)\frac{1}{2}S_w^2$, $a(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}$ и $q_{hc}^+ = \frac{15}{8}(t-1)$, $q_{hc}^- = \frac{1}{2}S_w^2$.

Были проведены расчёты для параметров касательной P_{xy} и нормальной P_{yy} составляющих тензора напряжений и потока энергии к движущей стенке Q при определённой относительной скорости S_w и определённом отношении температур между пластинами t в зависимости от числа Кнудсена Kn . Для теплового потока результаты, полученные методом прямого статистического моделирования, сравнивались с результатом, полученным методом самоподобной интерполяции.

На рис. 1, 2 показаны зависимости значений касательной P_{xy}/S_{xy} от числа Кнудсена при некоторых значениях соотношений температур между пластинами t и относительной скорости S_w . Видно, что касательные составляющей тензора напряжений существенно немонотонны по числам Кнудсена Kn .

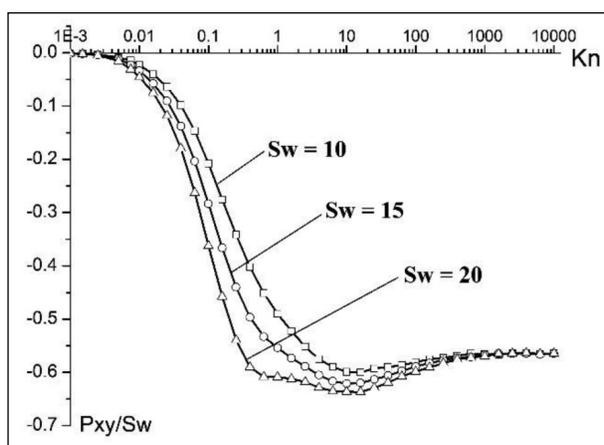


Рис. 1. Зависимость P_{xy}/S_w от числа Кнудсена при $t = 0$ и разных значениях относительной скорости S_w .

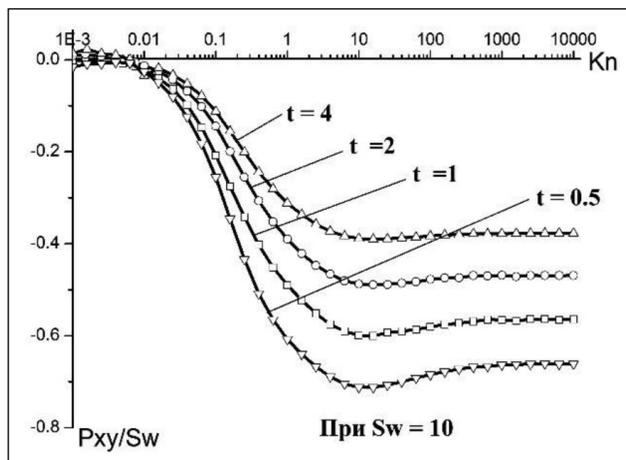


Рис. 2. Зависимость P_{xy}/S_w от числа Кнудсена при $S_w = 10$ и разных значениях отношений температур t .

На рис. 3, 4 показаны зависимости нормальной составляющей P_{yy} тензора напряжений от числа Кнудсена Kn при некоторых значениях отношений температур t между пластинами и скорости S_w . Установлено, что в переходной области между свободномолекулярным и сплошнородным пределами кроме касательной составляющей тензора напряжений присутствует нормальная составляющая (которой нет ни в свободномолекулярном случае, ни в случае сплошной среды). Этот эффект показывает, что при переходном режиме две пластины не просто движутся относительно друг от друга, а ещё и отталкиваются. При этом и нормальная, и касательная составляющие существенно немонотонны по числам Кнудсена. Величина максимума этих напряжений зависит от скорости движения пластин S_w .

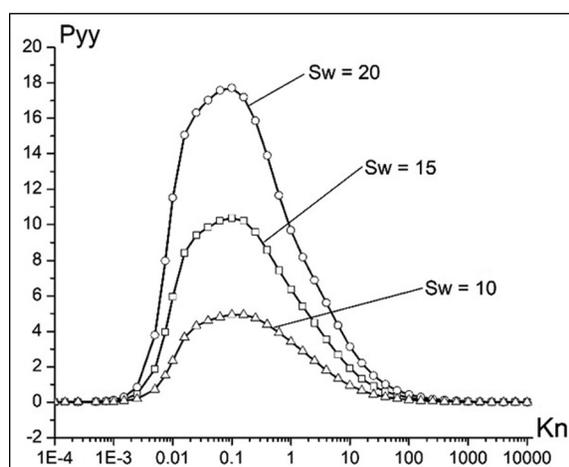


Рис. 3. Зависимость P_{yy} от числа Кнудсена при $t = 1$ и разных значениях относительной скорости S_w .

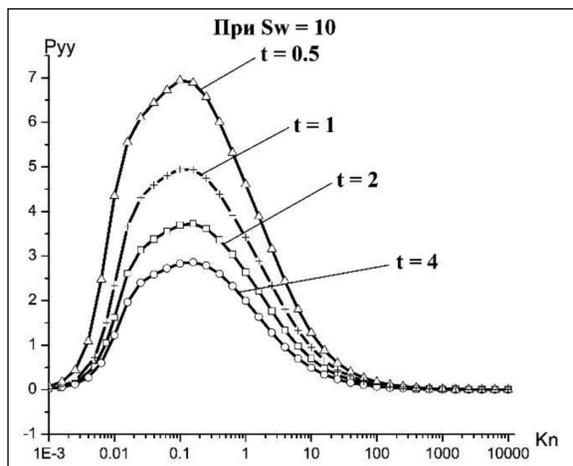


Рис. 4. Зависимость P_{yy} от числа Кнудсена при $S_w = 10$ и разных значениях отношений температур t .

На рис. 5 представлены результаты расчётов теплового потока для разных отношений температур пластин t при разных значениях числа Кнудсена Kn и относительной скорости пластин $S_w = 0,5$. Из рисунка видно, что при фиксированных значениях отношений температур и скоростей пластин тепловой поток к движущей пластине в зависимости от числа Кнудсена меняет знак. Впервые этот эффект был обнаружен в [3] численно при решении задачи Куэтта методом прямого статистического моделирования. Сплошными кривыми нанесены результаты, полученные методом самоподобной интерполяции [4; 5], точками – методом прямого статистического моделирования.

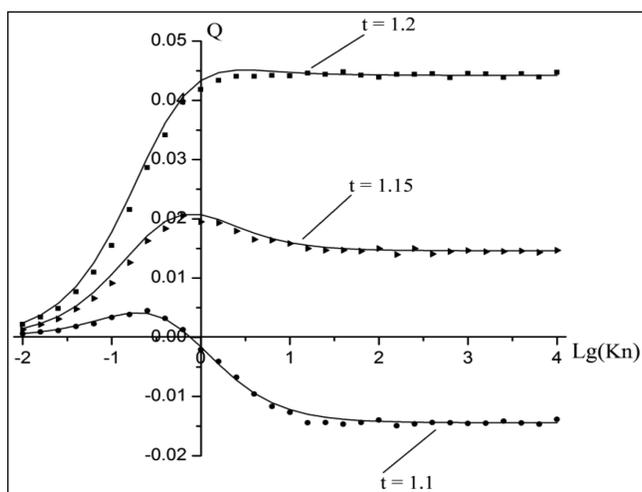


Рис. 5. Зависимость теплового потока Q от числа Кнудсена при относительной скорости $S_w = 0,5$.

Статья поступила в редакцию 13.12.2017 г.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Коган М.Н. Динамика разреженного газа. М: Наука, 1967. 440 с.
2. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М: Наука, 1974. 712 с.
3. Абрамов А.А., Бутковский А.В. Эффекты немонотонности и изменения знака потока энергии в переходном режиме в задаче Куэтта с теплопередачей // Механика жидкости и газа. 2010. № 1. С. 167–174.
4. Горелов С.Л. Применение метода самоподобной интерполяции к задачам динамики разреженного газа // Прикладная математика и механика. 2005. Т. 69. Вып. 3. С. 438–444.
5. Горелов С.Л., Вьонг Ван Тьен. Течение Куэтта и теплопередача между параллельными пластинами в разреженном газе // Математическое моделирование. 2014. Т. 1. № 10. С. 33–46.

REFERENCES:

1. Kogan M.N. *Dinamika razrezhennogo gaza* [Rarefied gas dynamics]. Moscow, Nauka Publ., 1967. 440 p.
2. Shlikhting G. *Teoriya pogranichnogo sloya* [The theory of the boundary layer]. Moscow, Nauka Publ., 1974. 712 p.
3. Abramov A.A., Butkovskii A.V. Effekty nemonotonnosti i izmeneniya znaka potoka energii v perekhodnom rezhime v zadache Kuetta s teploperedachei [Effects of non-monotonocity and change in the sign of the energy flow in the transient mode in the Couette flow problem with heat transfer] In: *Mekhanika zhidkosti i gaza* [Fluid Dynamics], 2010, no. 1, pp. 167–174.
4. Gorelov S.L. Primenenie metoda samopodobnoi interpoliatsii k zadacham dinamiki razrezhennogo gaza [Application of the method of self-similar interpolation to the problems of rarefied gas dynamics] In: *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Journal of Applied Mathematics and Mechanics], 2005, vol. 69, no. 3, pp. 438–444.
5. Gorelov S.L., Vuong Van Tien Techenie Kuetta i teploperedacha mezhdou parallel'nymi plastinami v razrezhennom gaze [Couette flow and heat transfer between parallel plates in a rarefied gas] In: *Matematicheskoe modelirovanie* [Mathematical Models and Computer Simulations], 2014, vol. 1, no. 10, pp. 33–46.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Горелов Сергей Львович – доктор физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник Центрального аэрогидродинамического института им. профессора Н.Е. Жуковского, доцент кафедры компьютерного моделирования Московского физико-технического института (государственного университета);
e-mail: gorelovsl@yandex.ru;

Вьонг Ван Тьен – аспирант кафедры компьютерного моделирования Московского физико-технического института (государственного университета);
e-mail: tienbom@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Sergey L. Gorelov – Doctor in Physical and mathematical sciences, associate professor, leading researcher at the Central Aerohydrodynamic Institute; associate professor at the Department of Computer Modeling, Moscow Institute of Physics and Technology (State University);
e-mail: gorelovsl@yandex.ru;

Van Tien Vuong – postgraduate student at the Department of Computer Modeling, Moscow Institute of Physics and Technology (State University);
e-mail: tienbom@mail.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Вьонг В.Т., Горелов С.Л.. Нелинейные кинетические эффекты в задаче Куэтта в разреженном газе при переходном режиме // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2018. № 1. С. 16–22.
DOI: 10.18384/2310-7251-2018-1-16-22.

FOR CITATION

V.T. Vuong, Gorelov S.L. Nonlinear kinetic effects in the Couette problem for a rarefied gas in the transition region. In: *Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*. 2018. no. 1. pp. 16–22.
DOI: 10.18384/2310-7251-2018-1-16-22.

УДК: 535.016

DOI: 10.18384/2310-7251-2018-1-23-37

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИМПЕДАНСЫ ПЛОСКОГО СЛОЯ СРЕДЫ С ЗЕРКАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОЙ ФУНКЦИЕЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ОТКЛИКА

Зверев Н.В.

Московский государственный областной университет,
105005, г. Москва, ул. Радио, д. 10А, Российская Федерация

Аннотация. Рассмотрено электромагнитное поле плоской монохроматической волны внутри плоского слоя однородной среды, обладающей пространственной дисперсией и имеющей зеркально-симметричную функцию ди

электрического отклика. Использован метод разложения в ряд Фурье для вычисления поверхностных импедансов данного слоя среды в случаях Р- и S-волны. Полученные формулы для поверхностных импедансов совпадают с формулами в работах Кливера и Фукса для плоского слоя электронной плазмы, а также правильно описывают поверхностные импедансы плоского слоя среды без пространственной дисперсии.

Ключевые слова: электромагнитное поле, диэлектрическая проницаемость, поверхностный импеданс

SURFACE IMPEDANCES OF A FLAT LAYER OF A MEDIUM WITH A MIRROR-SYMMETRIC DIELECTRIC RESPONSE FUNCTION

N. Zverev

Moscow Region State University
ul. Radio 10A, 100500 Moscow, Russian Federation

Abstract. The electromagnetic field of a plane monochromatic wave inside a flat layer of a uniform medium possessing a spatial dispersion and having a mirror-symmetric dielectric response function is considered. The method of Fourier series decomposition is used to evaluate the surface impedance of the layer in the cases of P- and S-waves. The obtained equations for the surface impedances coincide with those from works of Kliewer and Fuchs for a flat layer of electron plasma and describe correctly the surface impedances of a flat layer of a medium without spatial dispersion.

Key words: electromagnetic field, dielectric permittivity, surface impedance.

Введение

В настоящее время в связи с бурным развитием био- и нанотехнологий большое внимание уделяется исследованиям материалов и систем, имеющих размеры порядка от одного до нескольких сот нанометров. Одним из таких исследований

является изучение взаимодействия электромагнитного излучения с веществами, размеры которых меньше или сопоставимы с длиной волны излучения (см. [1–6]).

В случае веществ обычных размеров часто не учитывают пространственную дисперсию диэлектрической проницаемости среды, то есть зависимость диэлектрической проницаемости от волнового вектора [7]. Это обусловлено тем, что отклик среды на электромагнитные волны отличен от нуля только на расстояниях порядка размеров атомов или молекул. Однако при исследовании объектов достаточно малых размеров, таких как тонкие металлические плёнки (см. [3; 5; 6; 8–10]), а также при изучении оптически активных веществ [7], пространственная дисперсия может играть важную роль. Поэтому в случае данных объектов необходимо принимать во внимание пространственную дисперсию.

В настоящей работе рассматривается плоская монохроматическая электромагнитная волна внутри плоского слоя однородной изотропной среды, имеющей пространственную дисперсию. При этом предполагаем, что функция диэлектрического отклика данной среды обладает зеркальной симметрией. Целью данной работы является вычисление поверхностных импедансов рассматриваемой волны для указанного слоя среды. Для вычисления этих импедансов используем метод разложения величин электромагнитного поля в ряд Фурье. Следует отметить, что поверхностные импедансы играют важную роль при изучении взаимодействия излучения с разными средами и распространения излучения в этих средах [1; 8–11].

Функция отклика и диэлектрическая проницаемость среды

Рассмотрим плоский слой однородной изотропной немагнитной среды толщиной d , к тому же не обладающей оптической активностью. Выберем правую прямоугольную систему координат таким образом, что слой занимает область $0 < z < d$ (рис. 1). При этом координатные оси X и Y оказываются параллельными границам слоя.

Уравнения Максвелла и материальное уравнение для магнитного поля внутри рассматриваемого слоя среды имеют вид (в системе СИ):

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}. \quad (1)$$

Здесь ток проводимости учтён в электрическом смещении \mathbf{D} . При этом материальное уравнение для электрического поля внутри слоя в координатном виде выглядит следующим образом (ср. с [7]):

$$\begin{aligned} D_\alpha(x, y, z, t) = & \epsilon_0 E_\alpha(x, y, z, t) + \\ & + \epsilon_0 \int_0^d \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{\beta} f_{\alpha\beta}(x-x', y-y'; z, z'; t-t') \times \\ & \times E_\beta(x', y', z', t') dx' dy' dz' dt'. \end{aligned} \quad (2)$$

В данной формуле $f_{\alpha\beta}(x, y; z, z'; t)$ – функция диэлектрического отклика среды, расположенной в плоском слое $0 < z < d$. Интегрирование по координатам x' и y' выполняется от $-\infty$ до $+\infty$, а индексы $\alpha, \beta = x, y, z$.

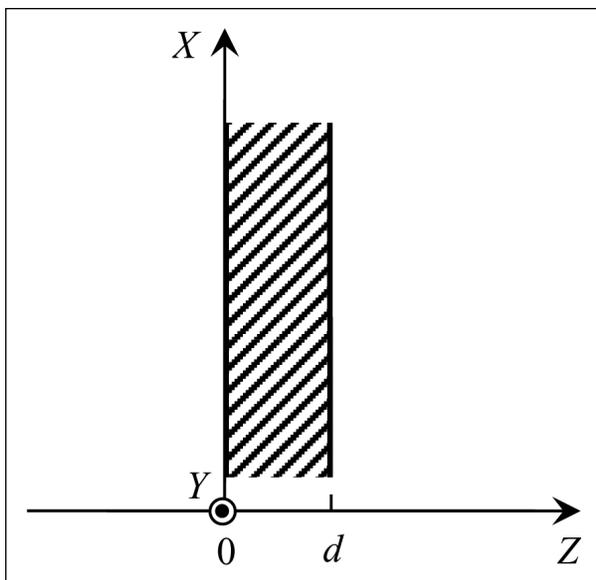


Рис. 1. Схема расположения слоя среды

Пусть диэлектрический отклик среды внутри рассматриваемого слоя обладает зеркальной симметрией относительно границ слоя $z = 0$ и $z = d$, то есть функция отклика имеет следующий вид:

$$f_{\alpha\beta}(x, y; z, z'; t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \{g_{\alpha\beta}(x, y, z - z' + 2md, t) + g_{\alpha\beta}(x, y, z + z' + 2md, t)\}. \quad (3)$$

В формуле (3) функция $g_{\alpha\beta}(x, y, z, t)$ есть функция диэлектрического отклика среды, заполняющей всё пространство. Однородность рассматриваемой среды отражена в зависимости функции отклика от одной точки с координатами x, y, z и одного момента времени t . Далее, точки с координатами $\pm z' - 2md$ есть результат всевозможных отражений точки с координатой z' относительно плоскостей $z = 0$ и $z = d$. Свойство зеркальной симметрии функции диэлектрического отклика (3) может быть обусловлено зеркальным отражением электронов или ионов среды (см. [1; 8–11]), а также упругих волн или возбуждений атомов, от границ слоя.

Фактически мы заменяем слой бесконечным набором параллельных слоёв одинаковой толщины d . При этом поле в точке z' совпадает с полем в точке $\pm z' - 2md$. Если предположить, что физической границы между слоями нет, то есть электроны пересекают границы слоёв без рассеяния, то движение электро-

нов в такой среде будет совпадать с движением электронов в слое толщиной d с зеркальными граничными условиями на границе.

Фурье-образ функции $g_{\alpha\beta}(x, y, z, t)$, соответствующий монохроматической волне с частотой ω и волновым вектором \mathbf{k} , даёт тензор диэлектрической проницаемости среды $\varepsilon_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k})$ (см. [7]):

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}) = \delta_{\alpha\beta} + \iiint_0^{+\infty} \int g_{\alpha\beta}(x, y, z, t) e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})} dx dy dz dt. \quad (4)$$

где $\delta_{\alpha\beta}$ – символ Кронекера. Данный тензор в случае изотропной и не оптически активной среды выглядит следующим образом [7; 11]:

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}) = \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} \right) \varepsilon_{tr}(\omega, k) + \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} \varepsilon_l(\omega, k). \quad (5)$$

В формулах (4) и (5) $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$, $k = |\mathbf{k}|$, а интегрирование по координатам x, y, z выполняется от $-\infty$ до $+\infty$. Функции $\varepsilon_l(\omega, k)$ и $\varepsilon_{tr}(\omega, k)$ – продольная и поперечная диэлектрические проницаемости среды, соответственно. Зависимость тензора диэлектрической проницаемости среды $\varepsilon_{\alpha\beta}$ от волнового вектора \mathbf{k} есть пространственная дисперсия среды.

Плоская монохроматическая волна внутри слоя среды

Предположим, что электромагнитная волна вне среды является плоской монохроматической и распространяется в плоскости XZ . Тогда в случае Р-волны, когда напряжённость электрического поля \mathbf{E} волны лежит в плоскости распространения XZ , а напряжённость магнитного поля \mathbf{H} параллельна оси Y , внутри слоя $0 < z < d$ имеют место соотношения:

$$\begin{aligned} E_x &= e^{i(k_x x - \omega t)} E_x^{(j)}(z), \\ E_z &= e^{i(k_x x - \omega t)} E_z^{(j)}(z), \\ H_y &= e^{i(k_x x - \omega t)} H_y^{(j)}(z), \end{aligned} \quad (6)$$

где индекс j обозначает чётную или нечётную моду, которые будут описаны ниже. В этом случае из уравнений (1) следует, что электрическое смещение \mathbf{D} волны лежит в плоскости распространения волны XZ . И тогда из (2) и (6) следуют соотношения:

$$D_x = e^{i(k_x x - \omega t)} D_x^{(j)}(z), \quad D_z = e^{i(k_x x - \omega t)} D_z^{(j)}(z), \quad (7)$$

где

$$D_\alpha^{(j)}(z) = \varepsilon_0 E_\alpha^{(j)}(z) + \varepsilon_0 \int_0^d \sum_{\beta=x,z} F_{\alpha\beta}(\omega, k_x, z, z') E_\beta^{(j)}(z') dz', \quad (8)$$

и $\alpha = x, z$.

В случае же S-волны, когда составляющая \mathbf{H} лежит в плоскости распространения XZ , а составляющая \mathbf{E} параллельна оси Y , внутри рассматриваемого слоя среды $0 < z < d$ справедливы формулы:

$$\begin{aligned} H_x &= e^{i(k_x x - \omega t)} H_x^{(j)}(z), \\ H_z &= e^{i(k_x x - \omega t)} H_z^{(j)}(z), \\ E_y &= e^{i(k_x x - \omega t)} E_y^{(j)}(z). \end{aligned} \quad (9)$$

Тогда из (1) следует, что смещение \mathbf{D} параллельно оси Y , а из (2) и (9) следует формула:

$$D_y = e^{i(k_x x - \omega t)} D_y^{(j)}(z), \quad (10)$$

где

$$D_y^{(j)}(z) = \varepsilon_0 E_y^{(j)}(z) + \varepsilon_0 \int_0^d F_{yy}(\omega, k_x, z, z') E_y^{(j)}(z') dz'. \quad (11)$$

В формулах (8) и (11) введено обозначение:

$$F_{\alpha\beta}(\omega, k_x, z, z') = \iiint_0^{+\infty} f_{\alpha\beta}(x, y; z, z'; t) e^{i(\omega t - k_x x)} dx dy dt. \quad (12)$$

Здесь и далее интегрирование по x и y выполняется в пределах от $-\infty$ до $+\infty$. Тогда из (3) и (12) следует формула:

$$\begin{aligned} F_{\alpha\beta}(\omega, k_x, z, z') &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left\{ L_{\alpha\beta}(\omega, k_x, z - z' + 2md) + \right. \\ &\quad \left. + L_{\alpha\beta}(\omega, k_x, z + z' + 2md) \right\}, \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$L_{\alpha\beta}(\omega, k_x, z) = \iiint_0^{+\infty} g_{\alpha\beta}(x, y, z, t) e^{i(\omega t - k_x x)} dx dy dt. \quad (14)$$

Для P-волны внутри слоя в области $0 < z < d$ из (1), (6) и (7) следует система уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dE_x^{(j)}}{dz} - ik_x E_z^{(j)} = i\omega\mu_0 H_y^{(j)}, \\ ik_x H_y^{(j)} = -i\omega D_z^{(j)}, \\ -\frac{dH_y^{(j)}}{dz} = -i\omega D_x^{(j)}. \end{cases} \quad (15)$$

А в случае S-волны в рассматриваемой области формулы (1); (9) и (10) приводят к системе:

$$\begin{cases} ik_x E_y^{(j)} = i\omega\mu_0 H_z^{(j)}, \\ \frac{dE_y^{(j)}}{dz} = -i\omega\mu_0 H_x^{(j)}, \\ \frac{dH_x^{(j)}}{dz} - ik_x H_z^{(j)} = -i\omega D_y^{(j)}. \end{cases} \quad (16)$$

Ряды Фурье для электромагнитного поля

Для дальнейшего исследования величин электромагнитного поля внутри рассматриваемого слоя среды удобно продолжить функции $E_\alpha^{(j)}(z)$ на область $-d < z < 0$ следующим образом:

$$E_\alpha^{(j)}(-z) = E_\alpha^{(j)}(z), \quad (0 < z < d), \quad (17)$$

где $\alpha = x$, z в случае Р-волны и $\alpha = y$ в случае S-волны. Отсюда следует, что данные функции являются непрерывными в области $-d < z < d$. Тогда функции $H_\alpha^{(j)}(z)$ также продолжены на область $-d < z < 0$ согласно первому уравнению системы (15) в случае Р-волны, а в случае S-волны – первому и второму уравнениям системы (16). Однако, как видно из этих уравнений, функции $H_y^{(j)}(z)$ и $H_x^{(j)}(z)$ в случае Р-волны и S-волны соответственно имеют разрыв 1-го рода в точке $z = 0$.

Условие (17), на самом деле, необходимо для выполнения формулы (3). Это составная часть свойств зеркальной симметрии функции диэлектрического отклика.

Тогда с учётом (17) формулы (8) и (11) вместе с (13) приобретают в случае Р-волны следующий вид:

$$D_\alpha^{(j)}(z) = \varepsilon_0 E_\alpha^{(j)}(z) + \varepsilon_0 \int_{-d}^d \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{\beta=x,z} L_{\alpha\beta}(\omega, k_x, z - z' + 2md) E_\beta^{(j)}(z') dz', \quad (18)$$

где $\alpha = x$, z , а в случае S-волны:

$$D_y^{(j)}(z) = \varepsilon_0 E_y^{(j)}(z) + \varepsilon_0 \int_{-d}^d \sum_{m=-\infty}^{+\infty} L_{yy}(\omega, k_x, z - z' + 2md) E_y^{(j)}(z') dz'. \quad (19)$$

С помощью этих формул функции $D_\alpha^{(j)}(z)$ являются продолженными на область $-d < z < 0$.

После продолжения функций $E_\alpha^{(j)}(z)$, $H_\alpha^{(j)}(z)$ и $D_\alpha^{(j)}(z)$ на область $-d < z < 0$ рассмотрим разложение этих функций в ряд Фурье в области $-d < z < d$ ($\alpha = x, y, z$):

$$A_\alpha^{(j)}(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{A}_{\alpha n}^{(j)} e^{intz/d}, \quad (20)$$

где коэффициенты Фурье:

$$\tilde{A}_{\alpha n}^{(j)} = \frac{1}{2d} \int_{-d}^d A_{\alpha}^{(j)}(z) e^{-i\pi n z/d} dz, \quad (21)$$

а символ A обозначает функции E , D или H . Подставим (20) для E в правую часть (18) или (19), а затем левые части этих формул – в (21) для D . В результате получим для P -волны:

$$\tilde{D}_{\alpha n}^{(j)} = \varepsilon_0 \tilde{E}_{\alpha n}^{(j)} + \varepsilon_0 \sum_{n'=-\infty}^{+\infty} \sum_{\beta=x,z} W_{\alpha\beta,nn'} \tilde{E}_{\beta n'}^{(j)}, \quad (\alpha = x, z), \quad (22)$$

и для S -волны:

$$\tilde{D}_{yn}^{(j)} = \varepsilon_0 \tilde{E}_{yn}^{(j)} + \varepsilon_0 \sum_{n'=-\infty}^{+\infty} W_{yy,nn'} \tilde{E}_{yn'}^{(j)}. \quad (23)$$

В (22) обозначено:

$$W_{\alpha\beta,nn'} = \frac{1}{2d} \int_{-d}^d \int_{-d}^d \sum_{m=-\infty}^{+\infty} L_{\alpha\beta}(\omega, k_x, z - z' + 2md) e^{i\pi(n'z' - nz)/d} dz dz'.$$

Вычислим последнее выражение, используя формулы (4) и (14):

$$\begin{aligned} W_{\alpha\beta,nn'} &= \frac{1}{2d} \int_{-d}^d \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_{-d}^d L_{\alpha\beta}(\omega, k_x, z - z' - 2md) e^{i\pi(n'z' - nz)/d} dz dz' = \\ &= \frac{1}{2d} \int_{-d}^d \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_{(2m-1)d}^{(2m+1)d} L_{\alpha\beta}(\omega, k_x, z - z') e^{i\pi(n'z' - nz)/d} dz dz' = \\ &= \frac{1}{2d} \int_{-d}^d \int_{-\infty}^{+\infty} L_{\alpha\beta}(\omega, k_x, z - z') e^{i\pi(n'z' - nz)/d} dz dz' = \\ &= \frac{1}{2d} \int_{-d}^d e^{i\pi(n' - n)z/d} dz \int_{-\infty}^{+\infty} L_{\alpha\beta}(\omega, k_x, z') e^{-i\pi n'z'/d} dz' = \\ &= \delta_{nn'} [\varepsilon_{\alpha\beta}(\omega, k_x, 0, \pi n/d) - \delta_{\alpha\beta}]. \end{aligned} \quad (24)$$

Подставляя (24) в (22) и (23), получим соотношения для P -волны:

$$\tilde{D}_{\alpha n}^{(j)} = \varepsilon_0 \sum_{\beta=x,z} \varepsilon_{\alpha\beta n} \tilde{E}_{\beta n}^{(j)}, \quad (\alpha = x, z), \quad (25)$$

и для S -волны:

$$\tilde{D}_{yn}^{(j)} = \varepsilon_0 \varepsilon_{yy n} \tilde{E}_{yn}^{(j)}, \quad (26)$$

где обозначено:

$$\varepsilon_{\alpha\beta n} = \varepsilon_{\alpha\beta}(\omega, k_x, 0, \pi n/d). \quad (27)$$

Далее, интегрируя по частям и учитывая формулы (15)–(17), получим соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2d} \int_{-d}^d \frac{dE_{\alpha}^{(j)}}{dz} e^{-i\pi n z/d} dz &= \frac{i\pi n}{d} \tilde{E}_{\alpha n}^{(j)}, \\ \frac{1}{2d} \int_{-d}^d \frac{dH_{\beta}^{(j)}}{dz} e^{-i\pi n z/d} dz &= \frac{i\pi n}{d} \tilde{H}_{\beta n}^{(j)} - \frac{1}{2d} [H_{\beta}^{(j)}(+0) - H_{\beta}^{(j)}(-0)] + \\ &+ \frac{(-1)^n}{2d} [H_{\beta}^{(j)}(d-0) - H_{\beta}^{(j)}(-d+0)], \end{aligned} \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned} H_{\beta}^{(j)}(d-0) - H_{\beta}^{(j)}(-d+0) &= \frac{2\xi_{\alpha}}{i\omega\mu_0} \cdot \frac{dE_{\alpha}^{(j)}}{dz}(d-0), \\ H_{\beta}^{(j)}(+0) - H_{\beta}^{(j)}(-0) &= \frac{2\xi_{\alpha}}{i\omega\mu_0} \cdot \frac{dE_{\alpha}^{(j)}}{dz}(+0). \end{aligned} \quad (29)$$

Здесь для Р-волны $\alpha = x$, $\beta = y$, $\xi_{\alpha} = 1$, а для S-волны $\alpha = y$, $\beta = x$, $\xi_{\alpha} = -1$.

Моды электромагнитного поля внутри слоя среды

Теперь рассмотрим чётную и нечётную моды электромагнитного поля внутри слоя среды в области $0 < z < d$, обозначаемые индексом j . Для Р-волны эти моды, согласующиеся с первым уравнением системы (15), имеют следующий вид ($j = 1, 2$):

$$\begin{aligned} E_x^{(j)}(d-z) &= (-1)^j E_x^{(j)}(z), \\ E_z^{(j)}(d-z) &= (-1)^{j+1} E_z^{(j)}(z), \\ H_y^{(j)}(d-z) &= (-1)^{j+1} H_y^{(j)}(z). \end{aligned} \quad (30)$$

А для S-волны данные моды, согласующиеся с первыми двумя уравнениями системы (16), выглядят так ($j = 1, 2$):

$$\begin{aligned} E_y^{(j)}(d-z) &= (-1)^j E_y^{(j)}(z), \\ H_x^{(j)}(d-z) &= (-1)^{j+1} H_x^{(j)}(z), \\ H_z^{(j)}(d-z) &= (-1)^j H_z^{(j)}(z). \end{aligned} \quad (31)$$

Тогда из (30) и (31) следует:

$$\frac{dE_{\alpha}^{(j)}}{dz}(d-0) = (-1)^{j+1} \frac{dE_{\alpha}^{(j)}}{dz}(+0), \quad (32)$$

где $\alpha = x$ для Р-волны и $\alpha = y$ для S-волны.

Запишем теперь уравнения систем (15) и (16) в коэффициентах Фурье по формуле (21). В результате, используя соотношения (28), (29) и (32), получим систему для Р-волны:

$$\begin{cases} \frac{i\pi n}{d} \tilde{E}_{xn}^{(j)} - ik_x \tilde{E}_{zn}^{(j)} = i\omega\mu_0 \tilde{H}_{yn}^{(j)}, \\ ik_x \tilde{H}_{yn}^{(j)} = -i\omega \tilde{D}_{zn}^{(j)}, \\ -\frac{i\pi n}{d} \tilde{H}_{yn}^{(j)} + \frac{(-1)^{n+j} + 1}{i\omega\mu_0 d} \cdot \frac{dE_x^{(j)}}{dz} (+0) = -i\omega \tilde{D}_{xn}^{(j)}, \end{cases} \quad (33)$$

и для S-волны:

$$\begin{cases} ik_x \tilde{E}_{yn}^{(j)} = i\omega\mu_0 \tilde{H}_{zn}^{(j)}, \\ \frac{i\pi n}{d} \tilde{E}_{yn}^{(j)} = -i\omega\mu_0 \tilde{H}_{xn}^{(j)}, \\ \frac{i\pi n}{d} \tilde{H}_{xn}^{(j)} - ik_x \tilde{H}_{zn}^{(j)} + \frac{(-1)^{n+j} + 1}{i\omega\mu_0 d} \cdot \frac{dE_y^{(j)}}{dz} (+0) = -i\omega \tilde{D}_{yn}^{(j)}. \end{cases} \quad (34)$$

Поверхностный импеданс Р-волны

Рассмотрим сначала случай Р-волны. Из первых двух уравнений (33) и соотношения (25) для $\tilde{D}_{zn}^{(j)}$ следует формула:

$$\tilde{E}_{zn}^{(j)} = \frac{\varepsilon_{zxn} + (\pi n / d) k_x c^2 / \omega^2}{(k_x c / \omega)^2 - \varepsilon_{zxn}} \tilde{E}_{xn}^{(j)}, \quad (35)$$

где c – скорость света в вакууме:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}. \quad (36)$$

Далее, из первого и третьего уравнений (33) и соотношения (25) для $\tilde{D}_{xn}^{(j)}$ получаем уравнение:

$$\begin{aligned} \left[\varepsilon_{xxn} - \frac{c^2}{\omega^2} \left(\frac{\pi n}{d} \right)^2 \right] \tilde{E}_{xn}^{(j)} + \left[\varepsilon_{xzn} + \frac{c^2 k_x}{\omega^2} \frac{\pi n}{d} \right] \tilde{E}_{zn}^{(j)} = \\ = \left[(-1)^{n+j} + 1 \right] \frac{c^2}{\omega^2 d} \cdot \frac{dE_x^{(j)}}{dz} (+0). \end{aligned} \quad (37)$$

Из (27) и (5) следуют формулы:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{zzn} &= \frac{(\pi n / d)^2 \varepsilon_{tr,n} + k_x^2 \varepsilon_{l,n}}{k_x^2 + (\pi n / d)^2}, \\ \varepsilon_{zzn} &= \frac{k_x^2 \varepsilon_{tr,n} + (\pi n / d)^2 \varepsilon_{l,n}}{k_x^2 + (\pi n / d)^2}, \\ \varepsilon_{xzn} = \varepsilon_{zxn} &= \frac{(\pi n / d) k_x}{k_x^2 + (\pi n / d)^2} (\varepsilon_{l,n} - \varepsilon_{tr,n}),\end{aligned}\quad (38)$$

где обозначено:

$$\varepsilon_{l,n} = \varepsilon_l(\omega, k_n), \varepsilon_{tr,n} = \varepsilon_{tr}(\omega, k_n), k_n = \sqrt{k_x^2 + \left(\frac{\pi n}{d}\right)^2}. \quad (39)$$

Подставляя (35) в (37) и используя формулы (38), после преобразований найдём:

$$\begin{aligned}\tilde{E}_{zn}^{(j)} &= \frac{(-1)^{n+j} + 1}{k_x^2 + (\pi n / d)^2} \cdot \frac{c^2}{\omega^2 d} \cdot \frac{dE_x^{(j)}}{dz} (+0) \times \\ &\times \left\{ \frac{k_x^2}{\varepsilon_{l,n}} - \frac{(\pi n / d)^2}{[k_x^2 + (\pi n / d)^2] c^2 / \omega^2 - \varepsilon_{tr,n}} \right\}.\end{aligned}\quad (40)$$

Из этой формулы с учётом обозначений (39) видно, что $\tilde{E}_{x,-n}^{(j)} = \tilde{E}_{xn}^{(j)}$. Тогда из (35) с учётом нижней формулы (38) следует соотношение $\tilde{E}_{z,-n}^{(j)} = -\tilde{E}_{zn}^{(j)}$. Отсюда с использованием разложения Фурье (20) получим:

$$E_z^{(j)}(+0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{E}_{zn}^{(j)} = 0.$$

Используя это соотношение, из первой формулы системы (15) найдём:

$$H_y^{(j)}(+0) = \frac{1}{i\omega\mu_0} \cdot \frac{dE_x^{(j)}}{dz} (+0). \quad (41)$$

Определим теперь поверхностный импеданс моды плоской гармонической Р-волны на поверхности $z = 0$ слоя, считаемой нами поверхностью падения волны:

$$Z_p^{(j)} = \frac{1}{Z_0} \frac{E_x^{(j)}(+0)}{H_y^{(j)}(+0)}, \quad (42)$$

где Z_0 – импеданс вакуума в системе СИ:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}. \quad (43)$$

Подставляем выражение (40) в разложение Фурье (20) для $E_x^{(j)}(+0)$:

$$E_x^{(j)}(+0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{E}_{xn}^{(j)},$$

а затем полученное выражение и формулу (41) – в определение (42). В результате, учитывая формулы (36), (39) и (43), получим формулу для поверхностного импеданса Р-волны:

$$Z_p^{(j)} = \frac{2ic\omega}{d} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{[(-1)^{n+j} + 1]/2}{k_n^2} \left\{ \frac{k_x^2}{\omega^2 \varepsilon_l(\omega, k_n)} + \frac{(\pi n/d)^2}{\omega^2 \varepsilon_{tr}(\omega, k_n) - c^2 k_n^2} \right\}, \quad (44)$$

где $j=1, 2$ и $k_n = \sqrt{k_x^2 + (\pi n/d)^2}$.

Данная формула совпадает с формулой, полученной Кливером и Фуксом [8–10] в случае плоского слоя электронной плазмы при зеркальном отражении электронов от поверхностей слоя. Из (44) видно, что в случае нечётной моды ($j=1$) суммирование ведётся по всем нечётным $n = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$, а в случае чётной моды ($j=2$) – по всем чётным $n = 0, \pm 2, \pm 4, \dots$.

Формула (44) справедлива и в случае однородной изотропной среды без пространственной дисперсии, когда функция отклика $g_{\alpha\beta}(x, y, z, t)$ имеет структуру:

$$g_{\alpha\beta}(x, y, z, t) = \delta_{\alpha\beta} g(t) \delta(x) \delta(y) \delta(z), \quad (45)$$

где $\delta(\xi)$ – дельта-функция Дирака. Действительно, подставляя (45) в (3), получим, что при $0 < z, z' < d$ функция отклика слоя среды равна:

$$f_{\alpha\beta}(x, y; z, z'; t) = g_{\alpha\beta}(x, y, z - z', t).$$

Тогда, подставляя (45) в (4) и учитывая (5), получим, что продольная и поперечная диэлектрические проницаемости среды равны:

$$\varepsilon_l(\omega, k) = \varepsilon_{tr}(\omega, k) = \varepsilon(\omega), \quad (46)$$

где

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \int_0^{+\infty} g(t) e^{i\omega t} dt.$$

Подставляя (46) в (44) и выполняя суммирование с использованием формул [12]:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2 - \xi^2} = \frac{\pi}{2\xi} \operatorname{tg} \frac{\pi\xi}{2}, \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2 - \xi^2} = -\frac{\pi}{2\xi} \operatorname{ctg} \frac{\pi\xi}{2}, \quad (47)$$

получим формулу для поверхностного импеданса Р-волны в случае среды без пространственной дисперсии ($j=1, 2$):

$$Z_p^{(j)} = i^{2j-3} \frac{\sqrt{\varepsilon(\omega) - (k_x c / \omega)^2}}{\varepsilon(\omega)} \operatorname{tg}^{3-2j} \left(\frac{\omega d}{2c} \sqrt{\varepsilon(\omega) - (k_x c / \omega)^2} \right).$$

Эта формула может быть получена другим, более простым способом, из рассмотрения мод плоской монохроматической Р-волны внутри слоя среды без пространственной дисперсии.

Поверхностный импеданс S-волны

Теперь обратимся к случаю S-волны. Из (27) и (5) с учётом (39) следует, что

$$\varepsilon_{yn} = \varepsilon_{tr,n}.$$

Подставляя данное соотношение в (26), а затем (26) и выражения для $\tilde{H}_{xn}^{(j)}$ и $\tilde{H}_{zn}^{(j)}$ из первых двух уравнений системы (34) в третье уравнение этой системы, с учётом (36) получим:

$$\tilde{E}_{yn}^{(j)} = \frac{c^2}{\omega^2 d} \cdot \frac{(-1)^{n+j} + 1}{\varepsilon_{tr,n} - c^2[k_x^2 + (\pi n/d)^2]/\omega^2} \cdot \frac{dE_y^{(j)}}{dz} (+0). \quad (48)$$

Далее, из второго уравнения (16) найдём:

$$H_x^{(j)}(+0) = -\frac{1}{i\omega\mu_0} \cdot \frac{dE_y^{(j)}}{dz} (+0). \quad (49)$$

Поверхностный импеданс моды плоской гармонической S-волны на поверхности $z = 0$ слоя определяем аналогично импедансу Р-волны следующим образом:

$$Z_S^{(j)} = \frac{1}{Z_0} \frac{E_y^{(j)}(+0)}{H_x^{(j)}(+0)}. \quad (50)$$

Подставляя (48) в разложение Фурье (20) для $E_y^{(j)}(+0)$:

$$E_y^{(j)}(+0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{E}_{yn}^{(j)},$$

затем полученное выражение и соотношение (49) – в (50), учитывая (36), (39) и (43), получим формулу для поверхностного импеданса S-волны:

$$Z_S^{(j)} = -\frac{2ic\omega}{d} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{[(-1)^{n+j} + 1]/2}{\omega^2 \varepsilon_{tr}(\omega, k_n) - c^2 k_n^2}. \quad (51)$$

где $j=1, 2$ и $k_n = \sqrt{k_x^2 + (\pi n/d)^2}$.

Как и в случае Р-волны, эта формула совпадает с формулой из работ [8–10] в случае зеркального отражения электронов от поверхностей слоя электронной плазмы. Для нечётной моды ($j = 1$) суммирование ведётся по всем нечётным $n = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$, а в случае чётной моды ($j = 2$) – по всем чётным $n = 0, \pm 2, \pm 4, \dots$

В случае однородной изотропной среды без пространственной дисперсии подставим поперечную диэлектрическую проницаемость (46) в формулу (51) и выполним суммирование с учётом формул (47). В результате получим

поверхностный импеданс S-волны для слоя среды без пространственной дисперсии ($j = 1, 2$):

$$Z_S^{(j)} = \frac{i^{3-2j}}{\sqrt{\epsilon(\omega) - (k_x c / \omega)^2}} \operatorname{tg}^{3-2j} \left(\frac{\omega d}{2c} \sqrt{\epsilon(\omega) - (k_x c / \omega)^2} \right).$$

К этой формуле можно прийти другим способом, рассматривая моды S-волны внутри слоя среды без пространственной дисперсии.

Заключение

В данной работе исследованы плоские монохроматические электромагнитные P- и S-волны внутри плоского слоя однородной изотропной немагнитной среды, обладающей пространственной дисперсией. При этом диэлектрическая функция отклика слоя среды обладает зеркальной симметрией относительно границ слоя. Для случаев чётной и нечётной моды электромагнитного поля внутри слоя среды с помощью разложения величин поля в ряд Фурье вычислены поверхностные импедансы данного слоя. Полученные формулы для поверхностных импедансов совпадают с формулами для импедансов, найденными ранее Кливером и Фуксом для плоского слоя электронной плазмы при зеркальном отражении электронов от поверхностей слоя. Отмечено, что полученные формулы для поверхностных импедансов пригодны также и в случае среды без пространственной дисперсии.

Полученные формулы для поверхностных импедансов целесообразно использовать при исследовании взаимодействия электромагнитного излучения с плоскими тонкими слоями веществ, обладающих пространственной дисперсией и имеющих зеркально-симметричную относительно границ слоя диэлектрическую функцию отклика. Кроме того, данные формулы пригодны также и для изучения проблем возникновения и распространения излучения в таких слоях.

БЛАГОДАРНОСТИ / ACKNOWLEDGMENTS

Автор выражает благодарность профессору Юшканову А.А. за плодотворные обсуждения и активную поддержку. Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ МК-7359-2016-9, а также грантов РФФИ № 14-07-90009 Бел_a и № 14-47-03608 p_центр_a.

The author is grateful to Professor Yushkanov A.A for fruitful discussions and active support. This work was supported by the grant of the President of the Russian Federation МК-7359-2016-9, as well as RFBR grants No. 14-07-90009 Bel_a and No. 14-47-03608 p_centra.

Статья поступила в редакцию 31.01.2018 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нелокальные эффекты в электродинамике металлических пластин / Парадес-Хуарес А., Диас-Монхе С., Макаров М.Н., Перес-Родригес Ф. // Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики. 2009. Т. 90. Вып. 9. С. 687–692.

2. Электромагнитные экраны инфракрасного диапазона на основе наноразмерных слоёв металла, SiO₂ и SiO / Давидович М.В., Яфаров Р.К., Доронин Д.М., Шиловский П.А. // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2012. Т. 15. № 2. С. 19–21.
3. Латышев А.В., Юшканов А.А. Взаимодействие электромагнитной E-волны с металлической плёнкой, расположенной между двумя диэлектрическими средами // Оптика и спектроскопия. 2012. Т. 112. № 1. С. 139–146.
4. Utkin A.I., Yushkanov A.A. Influence of Specularity Coefficients on the Interaction of Electromagnetic H-Wave with the Thin Metal Film is Disposed on the Dielectric Substrate // International Journal of Mathematics and Computational Science. 2015. V. 1. No. 2. P. 21–24.
5. Зверев Н.В., Юшканов А.А. Квантовая электронная плазма, металлическая плёнка и электромагнитное излучение // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2016. № 3. С. 18–29.
6. Yushkanov A.A., Zverev N.V. Quantum electron plasma, visible and ultraviolet P-wave and thin metallic film // Physic Letters A. 2017. Vol. 381. Iss. 6. P. 679–684.
7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. Учебное пособие // Теоретическая физика в 10 томах. 4-е изд., стереотипное. М.: Физматлит, 2005. Том 8. 652 с.
8. Kliewer K.L., Fuchs R. Anomalous Skin Effect for Specular Electron Scattering and Optical Experiments at Non-Normal Angles of Incidence // Physical Review. 1968. Vol. 172. Iss. 3. P. 607–624.
9. Jones W.E., Kliewer K.L., Fuchs R. Nonlocal Theory of the Optical Properties of Thin Metallic Films // Physical Review. 1969. Vol. 178. Iss. 3. P. 1201–1203.
10. Kliewer K.L., Fuchs R. Surface Plasmon in a Semi-Infinite Free Electron Gas // Physical Review B. 1971. Vol. 3. Iss. 7. P. 2270–2278.
11. Кондрагено А.Н. Проникновение поля в плазму. М.: Атомиздат, 1979. 232 с.
12. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. 4-е изд., перераб. М.: Физматгиз, 1962. 1100 с.

REFERENCES

1. Parades-Jubrez A., Dñaz-Monche S., Makarov M.N, Pñrez-Rodrñguez F. Nelokal'nye efekty v elektrodinamike metallicheskih plastin [Nonlocal effects in the electrodynamics of metal plates]. In: *Pis'ma v Zhurnal eksperimental'noi i teoreticheskoi fiziki* [Letters to Journal of experimental and theoretical physics], 2009, vol. 90, iss. 9, pp. 687–692.
2. Davidovich M.V., Yafarov R.K., Doronin D.M., Shilovskii P.A. Elektromagnitnye ek-rany infrakrasnogo diapazona na osnove nanorazmernykh sloev metalla, SiO₂ i SiO [Electromagnetic IR screens based on nanolayers of metal, SiO₂ and SiO] In: *Fizika volnovykh protsessov i radiotekhnicheskie sistemy* [Physics of Wave Processes and Radio Systems], 2012, vol. 15, no. 2, pp. 19–21.
3. Latyshev A.V., Yushkanov A.A. Vzaimodeystvie elektromagnitnoi E-volny s metallicheskoj pl'enkoi, raspolozhennoi mezhdvu dvumya dielektricheskimi sredami [Interaction of electromagnetic E-waves with a metal film sandwiched between two dielectric media] In: *Optika i spektroskopiya* [Optics and Spectroscopy], 2012, vol. 112, no. 1, pp. 139–146.
4. Utkin A.I., Yushkanov A.A. Influence of Specularity Coefficients on the Interaction of Electromagnetic H-Wave with the Thin Metal Film is Disposed on the Dielectric Substrate. In: *International Journal of Mathematics and Computational Science*, 2015, vol. 1, no. 2, pp. 21–24.
5. Zverev N.V., Yushkanov A.A. Kvantovaya elektronnaya plazma, metallicheskaya pl'enka i elektromagnitnoe izluchenie [Quantum electron plasma, metal film and electromagnetic

- radiation]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika* [Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], 2016, no. 3, pp. 18–29.
6. Yushkanov A.A., Zverev N.V. Quantum electron plasma, ultraviolet and visible P-wave and thin metallic film. In: *Physic Letters A*, 2017, vol. 381, iss. 6, pp. 679–684.
 7. Landau L.D., Lifshits E.M. *Electrodynamics of Continuous Media* (Volume 8 of A Course of Theoretical Physics) Oxford, Pergamon Press 1960.
 8. Kliewer K.L., Fuchs R. Anomalous Skin Effect for Specular Electron Scattering and Optical Experiments at Non-Normal Angles of Incidence. In: *Physical Review*, 1968, vol. 172, iss. 3, pp. 607–624.
 9. Jones W.E., Kliewer K.L., Fuchs R. Nonlocal Theory of the Optical Properties of Thin Metallic Films. In: *Physical Review*, 1969, vol. 178, iss. 3, pp. 1201–1203.
 10. Kliewer K.L., Fuchs R. Surface Plasmon in a Semi-Infinite Free Electron Gas. In: *Physical Review B*, 1971, vol. 3, iss. 7, pp. 2270–2278.
 11. Kondratenko A.N. *Proniknovenie polya v plazmu* [The penetration of the field into the plasma]. Moscow, Atomizdat Publ., 1979. 232 p.
 12. Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M. *Tablitsy integralov, summ, ryadov i proizvedenii* [Table of integrals, sums, series and products]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1962. 1100 p.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Зверев Николай Витальевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической физики Московского государственного областного университета;
e-mail: zverev_nv@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Nikolai V. Zverev – PhD in Physical and mathematical sciences, associate professor at the Department of Theoretical Physics, Moscow Region State University;
e-mail: zverev_nv@mail.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Зверев Н.В. Поверхностные импедансы плоского слоя среды с зеркально-симметричной функцией диэлектрического отклика // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2018. № 1. С. 23–37.
DOI: 10.18384/2310-7251-2018-1-23-37.

FOR CITATION

Zverev N.V. Surface Impedances of a Flat Layer of a Medium with a Mirror-Symmetric Dielectric Response Function. In: *Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*. 2018. no. 1. pp. 23–37.
DOI: 10.18384/2310-7251-2018-1-23-37.

УДК 538.93, 536.12, 51.73

DOI: 10.18384/2310-7251-2018-1-38-46

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ И ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕРМОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ЭФФЕКТА В ВОДНЫХ РАСТВОРАХ ОДНОЗАРЯДНЫХ ИОННЫХ СОЕДИНЕНИЙ В НЕСТАЦИОНАРНЫХ УСЛОВИЯХ

Сидоров А.В., Зайцев А.А., Кузнецов Д.В., Нарциссов Д.А.

Елецкий государственный университет имени И.А. Бунина

399770, Липецкая область, г. Елец, улица Коммунаров, д. 28, Российская Федерация

Аннотация. В работе рассматриваются термоэлектрические процессы в водных растворах однозарядных ионных соединений в условиях нестационарного теплопереноса и молекулярного массопереноса. В рамках термодинамики необратимых процессов формулируется математическая модель явления. Сравнение результатов расчёта с экспериментом для водного раствора хлорида калия показывает хорошее количественное и качественное согласие. Определённые таким образом теплоты переноса ионов при бесконечном разбавлении совпадают с известными из литературы с точностью до 6%.

Ключевые слова: термоэлектричество, термодиффузия, моделирование неравновесных процессов, перекрёстные явления.

EXPERIMENTAL AND NUMERICAL INVESTIGATION OF THE THERMOELECTRIC EFFECT IN AQUEOUS SOLUTIONS OF SINGLY CHARGED IONIC COMPOUNDS UNDER NONSTATIONARY CONDITIONS

A. Sidorov, A. Zaitsev, D. Kuznetsov, D. Narcissov

Yelets State Ivan Bunin University

ul. Kommunarov 28, 399770 Yelets, Lipetsk region, Russian Federation

Abstract. The paper examined thermoelectric processes in aqueous solutions of singly charged ionic compounds under conditions of nonstationary heat transfer and molecular mass transfer. The mathematical model of the phenomenon is based on the thermodynamics of irreversible processes. Comparison of calculation results with experiment for an aqueous solution of potassium chloride demonstrates quantitative and qualitative agreement. The heats of ion transport determined for infinite dilution coincide with those known from the literature to within 6%.

Key words: thermoelectricity, thermal diffusion, simulation of non-equilibrium processes, cross-kinetic phenomena

В работе В.М. Грабова [1] было предсказано существование в вязких электропроводящих жидкостях особого класса неравновесных явлений, обусловленных действием трёх термодинамических сил, названных впоследствии термоэлектрокINETическими. В статье «Термоэлектрический эффект в слабых водных раство-

рах электролитов» [2] впервые были экспериментально исследованы термоэлектрокинетические явления в водных растворах сильных электролитов, в которых величина термоэлектрокинетической ЭДС достигает значений порядка десятых долей и даже единиц милливольт. Наш коллектив авторов ранее описал математическую модель формирования термоэлектрокинетической ЭДС на основе дифференциальных уравнений баланса массы, энергии и электрического заряда, записанных для непрерывной электропроводящей среды [3]. Вычисления на основе построенной модели позволили адекватно описать результаты натуральных экспериментов. Однако для детального количественного согласия результатов вычислительного и натурального экспериментов необходимо иметь подробные данные по величинам теплоты переноса ионов и их подвижностей в широком интервале температур и концентраций. Значения теплоты переноса ионов играют важную роль в формировании величины термоэлектрической ЭДС в водных растворах электролитов. С другой стороны, жидкие электролиты на основе водных или органических растворителей, вследствие высокого значения коэффициента термоэлектродвижущей силы, могут служить перспективными материалами для термоэлектрического преобразования энергии [4]. Поэтому экспериментальные и теоретические исследования термоэлектрических явлений в жидких растворах электролитов актуальны и имеют большую практическую и научную значимость.

В данной работе на основе вычислений, базирующихся на математической модели [3], и сравнения результатов расчёта с результатами эксперимента проводится исследование процесса формирования термоэлектрической ЭДС в водных растворах электролитов в случае их сильного разбавления.

Величина термоэлектрической ЭДС измеряется с помощью экспериментальной установки (рис. 1), представляющей U-образную трубку, одно из колен которой нагревается электронагревателем, расположенным в верхней части колена. Благодаря такому расположению нагревателя процесс распространения тепла осуществляется в основном путём теплопроводности без значительного вклада конвективных процессов, что облегчает теоретическое описание процесса. Величина термоэлектрической ЭДС измеряется как разность электрических потенциалов хлорсеребряных электродов, помещённых в различные колена трубки 1 и 2 (рис. 1). В случае неизотермической цепи итоговая разность потенциалов, регистрируемая электродами, равна сумме падения потенциалов на различных её участках. Для установки, представленной на рис. 1, она складывается из термодиффузионной разности потенциалов в неизотермическом растворе электролита, которая формируется термодиффузионными потоками ионов противоположного знака, и разности электрохимических потенциалов между электродами, находящимися при различных температурах. Однако последней разностью в условиях эксперимента можно пренебречь, поскольку, как показывают измерения, за время эксперимента поверхности электродов и прилегающий к ним буферный раствор насыщенного хлористого калия не успевают заметно нагреться.

Термодиффузионная разность потенциалов, возникающая в неизотермической среде водного электролита, распадается на два вида ионов разного зна-

ка, может быть рассчитана из условия отсутствия электрического тока в разомкнутой цепи:

$$\sum_i z_i J_i = 0. \quad (1)$$

Здесь z_i – заряд ионов i -типа в единицах заряда электрона, J_i – их плотности потоков. Из уравнения (1) для случая бинарного электролита, распадающегося на два вида ионов, в пределе сильного разбавления с учётом соотношений для плотностей потоков ионов [5] можно выразить величину градиента электрического потенциала в виде:

$$\begin{aligned} \nabla\varphi = & \frac{1}{F(z_+^2 a_{++} + z_-^2 a_{--})} \times \\ & \times \left(z_+ a_{++} \left(-RT \cdot \nabla(\ln(c_+)) - \frac{Q_+}{T} \nabla(T) \right) + \right. \\ & \left. + z_- a_{--} \left(-RT \cdot \nabla(\ln(c_-)) - \frac{Q_-}{T} \nabla(T) \right) \right). \end{aligned} \quad (2)$$

В выражении (2) F – постоянная Фарадея, R – универсальная газовая постоянная, T – абсолютная температура, c_{\pm} – объёмные концентрации ионов соответствующих знаков, Q_{\pm} – величины их теплоты переноса при бесконечном разбавлении. Феноменологические коэффициенты ионов a_+ , a_- могут быть выражены через величины их подвижностей u_{\pm} :

$$a_{\pm} = \frac{c_{\pm} u_{\pm}}{F z_{\pm}}. \quad (3)$$

Таким образом, для расчёта разности электрических потенциалов в случае эксперимента (рис. 1), проходящего в нестационарных условиях, необходимо определить зависимость от времени пространственного распределения температуры и концентрации ионов электролита. Поскольку диаметр трубки существенно превышает толщину приграничного слоя жидкости, то в расчёте можно пренебречь краевыми условиями и рассматривать задачу как одномерную. Тогда эволюцию пространственного профиля температуры в жидкости можно считать на основе одномерного уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \omega - \omega', \quad (4)$$

где ω – мощность источников тепла, ω' – мощность отрицательных источников тепла, обуславливающих отдачу теплоты стенками трубки окружающей среде, χ – коэффициент температуропроводности. Распределение концентраций ионов в электролите рассчитаем на основе уравнения диффузионного массопереноса с учётом вкладов, обусловленных градиентами электрического потенциала, концентрации и температуры:

$$\frac{\partial c_i}{\partial t} = -\operatorname{div} \left[\frac{c_i u_i}{F z_i} \left(z_i F \nabla\varphi + \frac{RT}{c_i} \nabla c_i + Q_i \frac{1}{T} \nabla T \right) \right]. \quad (5)$$

Модель дополняется начальными условиями: температура электролита равна температуре окружающей среды, а его концентрация – начальной концентрации. Граничные условия: температура на границе расчётной области равна температуре окружающей среды, а концентрация электролита – его начальной концентрации, что соответствует граничным условиям типа Дирихле и результатам экспериментальных измерений.

Расчёт по уравнениям модели производится на основе метода конечных разностей согласно четырёхточечной разностной схеме [6].

Представленная экспериментальная установка позволяет измерить в режиме реального времени разность электрических потенциалов между коленами U-образной трубки в процессе нестационарного нагрева одного из них. На рис. 2 представлен график зависимости разности потенциалов между коленами трубки от разности температур для раствора KCl концентрацией 0,015 моль/л.

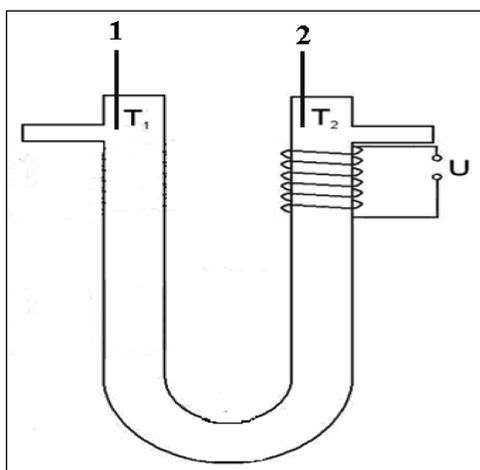


Рис. 1. Схема экспериментальной установки по измерению термоэлектродвижущей силы в водных растворах электролитов.

Полученная линейная зависимость позволила определить коэффициент термоэлектродвижущей силы исследуемого раствора, равный 40,4 мкВ/К. Указанное значение соизмеримо с соответствующими коэффициентами твердотельных термоэлектрических преобразователей.

Воспользуемся математической моделью (2), (4), (5) и проведём вычислительный эксперимент на её основе. Из уравнения (4) определим распределение температуры вдоль U-образной трубки.

В качестве теплофизических параметров модели выберем коэффициенты для чистой воды. Тогда основным подгоночным параметром будет мощность тепловых источников ω в месте расположения электрического нагревателя и мощность отрицательных источников теплоты, обуславливающих отдачу тепла стенками трубки окружающей среде.

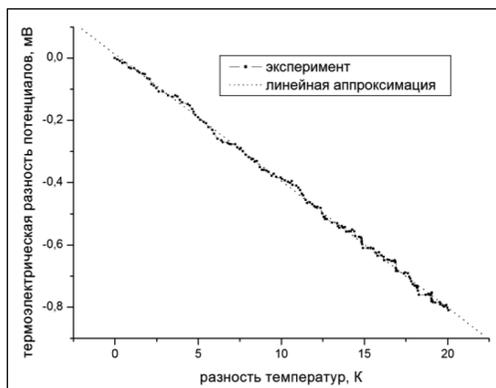


Рис. 2. Зависимость разности электрических потенциалов между коленами трубки от величины перепада температур между коленами в растворе KCl ($c = 0,015$ моль/л).

На рис. 3 представлено сравнение результатов вычислительного и натурального эксперимента по определению зависимости температуры нагреваемого колена от времени. Как следует из сравнения, результаты расчёта хорошо согласуются с экспериментом.

Определённая в расчёте мощность тепловых источников была использована в итоговом расчёте временной эволюции разности электрических потенциалов между коленами нагреваемой трубки (рис. 4).

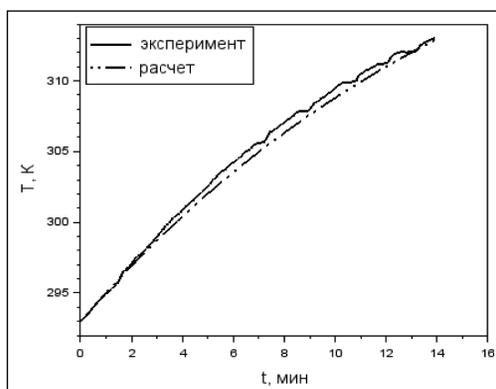


Рис. 3. Экспериментальная и расчётная зависимости температуры от времени в нагреваемом колене трубки для раствора KCl 0,015 моль/л

В расчёте были использованы имеющиеся в литературе данные для подвижностей ионов в растворе KCl ($u_K = 7,6 \cdot 10^{-8}$, $\text{м}^2 \cdot \text{В}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$ и $u_{Cl} = 7,9 \cdot 10^{-8}$, $\text{м}^2 \cdot \text{В}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$) [7], полученные в результате многочисленных независимых экспериментов.

Подгоночными параметрами были значения теплоты переноса ионов, сведений о которых в литературе крайне мало. Известно, что в пределе бесконечного разбавления их значения в различных растворах постоянны и не зависят от природы ионов противоположного знака [8]. Абсолютные значения теплоты переноса измерить

невозможно. Однако термодиффузионные явления в электролитах определяются, прежде всего, разностью их величин. Поэтому для ионов любого вида их можно положить равными нулю и получить тогда определённые численные значения для теплоты переноса других ионов, сумма которых определяет величину коэффициента $S_{\text{оре}}$ раствора электролита, поддающуюся экспериментальному измерению. В соответствии с исследованием Пейтона и Тёрнера [9] величину теплоты переноса ионов хлора мы положили равной нулю, и в результате измерения коэффициента $S_{\text{оре}}$ в водных растворах KCl в пределе бесконечного разбавления для теплоты переноса ионов калия было получено значение 2890 Дж/моль.

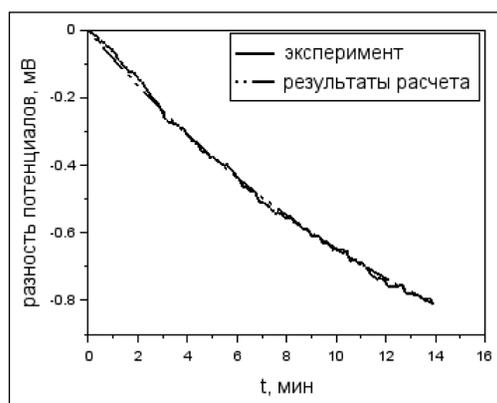


Рис. 4. Экспериментальная и расчётная зависимости разности потенциалов между коленами трубки от времени для раствора KCl 0,015 моль/л

Так же как и в работе Пейтона и Тёрнера [9], в нашем расчёте теплота переноса ионов хлора была положена равной нулю. В результате процедуры согласования расчётных и экспериментальных данных было получено следующее значение для теплоты переноса ионов калия: $Q_K = 2390$ Дж/моль, что на 15% отличается от значений у Пейтона и Тёрнера [9]. Указанное рассогласование может быть обусловлено тем, что значения теплоты переноса ионов довольно сильно зависят от концентрации электролита. Поэтому значение коэффициента термоэлектродвижущей силы для бесконечного разбавления было рассчитано путём линейной аппроксимации экспериментальной концентрационной зависимости на область нулевых концентраций (рис. 5).

Аппроксимация экспериментальной зависимости на область нулевых концентраций даёт значение для коэффициента термоэлектродвижущей силы в пределе бесконечного разбавления, равное 43,4 мкВ/К. С помощью процедуры согласования для определённого выше значения коэффициента термоэдс было получено значение теплоты переноса ионов калия, равное 2710 Дж/моль, что согласуется с данными у Пейтона и Тёрнера [9] в пределах 6%.

Таким образом, на основании полученных результатов можно заключить, что:

- построенная в рамках феноменологической теории неравновесных процессов математическая модель формирования термоэлектродвижущей разно-

сти потенциалов в водных растворах однозарядных бинарных электролитов в пределе их разбавления показывает хорошее качественное и количественное согласие с экспериментом (рис. 3, 4);

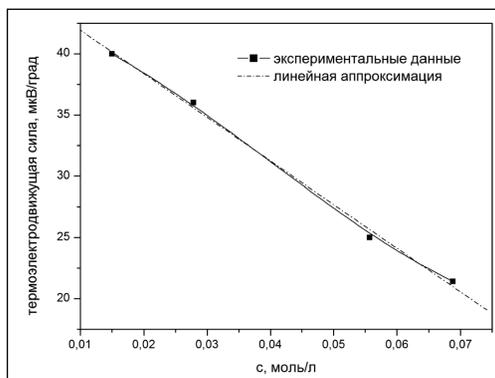


Рис. 5. Экспериментальная зависимость коэффициента термоэлектродвижущей силы в водном растворе KCl и её линейная аппроксимация.

– созданная методика согласования результатов расчёта с экспериментальными результатами измерения коэффициента термоэлектродвижущей силы позволяет определить разность значений теплоты переноса ионов в разбавленных растворах электролитов с точностью не хуже, чем 6% в сравнении с имеющимися литературными данными, полученными на основе независимых измерений коэффициента S_{ore} ;

– применение разработанной методики позволит определить значения теплоты переноса ионов в водных растворах электролитов для широкой области их концентраций и температур, необходимые для адекватного количественного описания термоэлектродкинетического эффекта в вязких электропроводящих средах.

БЛАГОДАРНОСТИ / ACKNOWLEDGMENTS

Исследование выполнено в рамках гранта РФФИ № 17-42-480248 и при поддержке администрации Липецкой области.

The work was supported by RFBR grant No. 17-42-480248 and the administration of the Lipetsk region.

Статья поступила в редакцию 08.12.2017 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Грабов В.М. Термоэлектрические явления в условиях, далёких от термодинамического равновесия // Доклады VIII Межгосударственного семинара Термоэлектрики и их применения. СПб.: ФТИ им. А.Ф. Иоффе РАН, 2002. С. 42–47.
2. Грабов В.М. Термоэлектродкинетический эффект в слабых водных растворах электролитов / Грабов В.М., Зайцев А.А., Кузнецов Д.В., Сидоров А.В., Новиков И.В. // Вестник Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. Серия: Естественные науки. 2008. № 3. С. 112–123.

3. Сидоров А.В. Моделирование процессов формирования термоэлектрокинетической ЭДС в условиях нестационарного теплопереноса в конденсированных средах / Сидоров А.В., Грабов В.М., Зайцев А.А., Кузнецов Д.В., Нарциссов Д.А. // Вестник Воронежского государственного технического университета. 2017. Т. 13. № 5. С. 113–121.
4. Abraham T.J. High Seebeck coefficient redox ionic liquid electrolytes for thermal energy harvesting. / Abraham T.J., MacFarlane D.R., Pringle J.M. // *Energy & Environmental Science*. 2013. Vol. 6. Iss. 9. P. 2639–2645.
5. Хаазе. Р. Термодинамика необратимых процессов. М.: Мир, 1967. 544 с.
6. Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.
7. Справочник по электрохимии. Под ред. А.М. Сухотина. Л.: Химия, 1981. 488 с.
8. Agar J.N., Turner J.C.R. Thermal diffusion in solutions of electrolytes // *Proceedings of The Royal Society*. 1960. April. Vol. 255. Iss. 1282. P. 307–330.
9. Payton A.D., Turner J.C.R. Paper Soret coefficients and heats of transport of some salts of alkaline earth metals in water at 25°C. // *Transactions of the Faraday Society*. 1962. Vol. 58. P. 55–59.

REFERENCES

1. Grabov V.M. Termoelektricheskie yavleniya v usloviyakh, dalekikh ot termodinamicheskogo ravnovesiya [Thermoelectric phenomena in conditions far from thermodynamic equilibrium]. In: *Doklady VIII Mezhgosudarstvennogo seminara Termoelektriki i ikh primeneniya* [The reports of the VIII Interstate workshop Thermoelectrics and their applications]. St. Petersburg, Ioffe Institute RAS, 2002. pp. 42–47.
2. Grabov V.M., Zaitsev A.A., Kuznetsov D.V., Sidorov A.V., Novikov I.V. Termoelektrokineticheskii effekt v slabykh vodnykh rastvorakh elektrolitov [Thermoelectrokinetic effect in weak water solutions of electrolytes] In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta im. N.E. Bauman. Seriya: Estestvennyye nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences], 2008, no. 3, pp. 112–123.
3. Sidorov A.V., Zaitsev A.A., Kuznetsov D.V., Narcissov D.A. Modelirovanie protsessov formirovaniya termoelektrokineticheskoi EDS v usloviyakh nestatsionarnogo teplomassopere-nosa v kondensirovannykh sredakh [Modeling of processes of formation thermoelectrokinetic EMF under conditions of nonstationary heat and mass transfer in condensed matter]. In: *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta* [Bulletin of Voronezh State Technical University], 2017, vol. 13, no. 5, pp. 113–121.
4. Abraham T.J., MacFarlane D.R., Pringle J.M. High Seebeck coefficient redox ionic liquid electrolytes for thermal energy harvesting. In: *Energy & Environmental Science*, 2013, vol. 6, iss. 9, pp. 2639–2645.
5. Haase R. Thermodynamics of irreversible processes. New York, Dover Pubns, 1990. 513 p.
6. Kalitkin N.N. *Chislennyye metody* [Numerical method]. Moscow, Nauka Publ., 1978. 512 p.
7. Sukhotin A.M., ed. *Spravochnik po elektrokhimii* [Handbook of electrochemistry]. Leningrad, Khimiya Publ., 1981. 488 p.
8. Agar J.N., Turner J.C.R. Thermal diffusion in solutions of electrolytes. In: *Proceedings of The Royal Society*, 1960, April, vol. 255, iss. 1282, pp. 307–330.
9. Payton A.D., Turner J.C.R. Paper Soret coefficients and heats of transport of some salts of alkaline earth metals in water at 25°C. In: *Transactions of the Faraday Society*, 1962, vol. 58, pp. 55–59.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Сидоров Александр Валентинович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физики и методики её преподавания Елецкого государственного университета им. И.А. Бунина;
e-mail: dirnusir@mail.ru

Зайцев Андрей Анатольевич – кандидат физико-математических наук, доцент, директор агропромышленного института Елецкого государственного университета им. И.А. Бунина;
e-mail: zaitsev@elsu.ru;

Кузнецов Денис Владимирович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физики и методики её преподавания Елецкого государственного университета им. И.А. Бунина;
e-mail: kuznetcovdv007@mail.ru;

Нарциссов Дмитрий Алексеевич – аспирант кафедры физики и методики её преподавания Елецкого государственного университета им. И.А. Бунина;
e-mail: nartsissovd@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Alexander V. Sidorov – PhD in Physical and mathematical sciences, associate professor at the Department of Physics and Methods of Teaching, Yelets State Ivan Bunin University;
e-mail: dirnusir@mail.ru;

Andrey A. Zaitsev – PhD in Physical and mathematical sciences, associate professor, Director of the Agro-Industrial Institute of Yelets State Ivan Bunin University;
e-mail: zaitsev@elsu.ru;

Denis V. Kuznetsov – PhD in Physical and mathematical sciences, associate professor at the Department of Physics and Methods of Teaching, Yelets State Ivan Bunin University;
e-mail: kuznetcovdv007@mail.ru;

Dmitry A. Narcissov – postgraduate student at the Department of Physics and Methods of Teaching, Yelets State Ivan Bunin University;
e-mail: nartsissovd@mail.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Сидоров А.В., Зайцев А.А., Кузнецов Д.В., Нарциссов Д.А.. Экспериментальное и численное исследование термоэлектрического эффекта в водных растворах однозарядных ионных соединений в нестационарных условиях // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2018. № 1. С. 38–46.
DOI: 10.18384/2310-7251-2018-1-38-46.

FOR CITATION

Sidorov A.V., Zaitsev A.A., Kuznetsov D.V., Narcissov D.A. Experimental and numerical investigation of the thermoelectric effect in aqueous solutions of singly charged ionic compounds under nonstationary conditions. In: *Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*, 2018, no. 1, pp. 38–46.
DOI: 10.18384/2310-7251-2018-1-36-46.

УДК: 535.8

DOI: 10.18384/2310-7251-2018-1-47-62

ДИСПЛЕЙ С МНОГОПОЛЬЗОВАТЕЛЬСКИМ НАПРАВЛЕННЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ВИЗУАЛЬНОЙ ИНФОРМАЦИИ И ПРОЕКТОР С УПРАВЛЯЕМЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ЛУЧА СВЕТА НА ОСНОВЕ ЖИДКИХ КРИСТАЛЛОВ С НЕОДНОРОДНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ДИРЕКТОРА

Соломатин А.С., Беляев В.В.

*Московский государственный областной университет
105005, г. Москва, ул. Радио, д. 10А, Российская Федерация*

Аннотация. В работе решена задача индикаторного ЖК устройства (дисплея), которое позволяет значительному числу зрителей просматривать одновременно индивидуально различный видеоряд на одной и той же отображающей поверхности. Зрители, регулируя параметры индивидуального видеоряда в интерактивном режиме, могут быть пользователями многопользовательского компьютера с одной визуальной отображающей информационной поверхностью вместо множества отдельных индивидуальных экранов для пользователей. Устройство может использоваться в кабинах самолётов с многоместным экипажем, отображая для членов экипажа индивидуально различную информацию. Аналогично и в иных многоместных системах управления, приёма и обработки информации. В работе решена задача проекционного устройства, в котором число управляемых оптических элементов до двух порядков меньше, чем число пикселей в формируемом (проецируемом) изображении, что снижает стоимость оборудования. Предложены конструктивные решения для аккумуляторного проектора с улучшенной энергоэффективностью проецирования.

Ключевые слова: линза ЖК, оптическая анизотропия, двулучепреломление, пространственно неоднородные структуры, оптические свойства, фокусное расстояние, дисплей, проектор

MULTIUSER PERSONALLY DISTRIBUTING LC DISPLAY AND PROJECTION DEVICE WITH A CONTROLLED REFRACTION OF THE LIGHT BEAM ON THE BASIS OF LIQUID CRYSTALS WITH INHOMOGENEOUS DISTRIBUTION OF THE DIRECTOR

A. Solomatina, V. Belyaev

*Moscow Region State University
ul. Radio 10A, 105005 Moscow, Russian Federation*

Abstract. The task of an indicator LCD device (display) is solved, which allows a significant number of users to simultaneously view individually different visuals on the same display surface.

Viewers, adjusting the parameters of an individual video stream interactively, can be users of a multi-user computer with a single visual information surface instead of a set of individual displays. The device can be used in cockpits of airplanes with a multi-crew, displaying for the crew members individually different information. Similarly, the device can be employed in other multi-local control systems, as well as in information acquisition and processing systems. A projection device in which the number of controlled optical elements is two orders of magnitude smaller than the number of pixels in the (projected) image is developed, which reduces the cost of the equipment. Design solutions for a battery projector with improved energy efficiency of projection are proposed.

Keywords: LC lens, optical anisotropy, birefringence, spatially inhomogeneous structures, optical properties, focal length, display, projector.

Введение

Визуально отображающие информацию системы (экраны) используются чрезвычайно широко. Скопление большого числа потребителей визуально отображаемой и при этом индивидуально различной информации создаёт необходимость в соответствующем количестве экранов индивидуального назначения. Это может создавать, в свою очередь, дополнительные технические требования к архитектуре помещений, их планировке и т.д. Возникает потребность в такой информационной визуально отображающей поверхности, которая могла бы показывать различным пользователям индивидуально различную информацию (видеоряд). В данной работе предложено решение этой задачи.

Проекционные системы (проекторы) используются чрезвычайно широко: в рекламе, в том числе больших уличных экранах; в кинотеатрах; в образовании, науке и бизнесе при проведении докладов, лекций, презентаций и т.д., снабжённых наглядной визуальной информацией. Актуальность развития проекционной техники вполне очевидна.

На стоимость проекционной техники существенно влияет количество управляемых оптических элементов, обычно соответствующее количеству пикселей в изображении.

Характерными факторами, влияющими на качество изображения, являются: неравномерность постороннего освещения поверхности (экрана), на который осуществляется проецирование, то есть наличие областей с пониженной контрастностью из-за интенсивного внешнего постороннего их освещения; неоптимальный угол (отношение дистанции до экрана к его ширине), отличающийся от расчётного для проектора, и вынуждающий настраивать проекционную оптику, пренебрегая снижением качества изображения; неоптимальное расположение проектора (не на нормали к середине экрана), формирующее трапециевидную спроецированную картинку с соответствующими искажениями; проецирование на криволинейную поверхность при размещении рекламного экрана с учётом архитектурных и иных ограничений.

При увеличении светового потока (проецирование в дневных уличных условиях или на большой экран) возрастает выделение тепла проецирующим оборудованием, что создаёт дополнительные технические требования, влияющие

негативно на конструкцию и условия эксплуатации проекторов большой мощности.

В работе решена задача проекционного устройства, в котором число управляемых оптических элементов до двух порядков меньше, чем число пикселей в формируемом (проецируемом) изображении, что снижает стоимость оборудования. Использование предложенного проекционного оборудования значительно уменьшает негативное влияние вышеперечисленных факторов на качество проецируемого изображения. Также снижается влияние тепловыделения при проецировании мощным световым потоком на конструкцию и условия эксплуатации. Предложены конструктивные решения для аккумуляторного проектора с улучшенной энергоэффективностью проецирования.

Основные новые оптические элементы предлагаемого проекционного оборудования

Элементная база предлагаемого в данной работе оборудования основана на описанных в [1–3] ЖК слоях с фокусирующими, электроуправляемыми и, в соответствии с [4], анизотропными преломляющими свойствами. На рис. 1 приведена структура оптического элемента, состоящего из односторонне покрытой ориентантом ЖК ячейки (другая сторона ячейки не оказывает существенного ориентирующего действия). Поверхность ЖК ячейки разделена на большое число пар прозрачных электродов, что позволяет задавать мелкоступенчатое изменение ориентационно-оптических свойств слоя ЖК в ячейке. Криволинейный или трапециевидный оптический рельеф, как показано в используемой в [5] расчётной методике, представляется мелкоступенчатым (например, синусоида тоже может быть представлена большим числом ступеней) и тоже может быть обеспечен данным устройством.

Управление оптическими свойствами выражается в управлении показателем преломления, что может быть представлено как управление фазовыми задержками $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_i, \Phi_{i+1}, \dots, \Phi_{n-1}, \Phi_n$ для условно выделенных в виде узких полос ячеек, как показано на рис. 1.

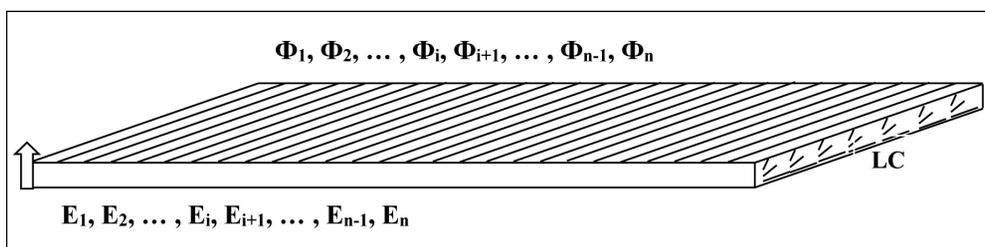


Рис. 1. Структура, состоящая из вышеописанных ячеек ЖК. Ячейки объединены в слой ЖК. Управление парными прозрачными электродами, расположенными на верхней и нижней стороне каждого субэлемента и создающими в субэлементах напряжённость поля $E_1, E_2, \dots, E_i, E_{i+1}, \dots, E_{n-1}, E_n$ для обеспечения разности фаз $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_i, \Phi_{i+1}, \dots, \Phi_{n-1}, \Phi_n$ в пределах до $\pi/2$, при различии Φ на смежных субэлементах порядка $\pi \cdot 10^{-2}$.

Управление оптическими свойствами осуществляется с учётом ёмкостных свойств ячейки, описанных, например, в [6].

1. Управляемый преломляющий элемент для предлагаемого дисплея

Управляемый преломляющий элемент представляет собой изображённый на рис. 1 односторонне ориентированный слой ЖК с той лишь разницей, что управляющие электроды выполнены не в виде длинных узких полос, а в виде прямоугольников, то есть элемент подобен микродисплею, разбит на маленькие квадратные области с управляемыми полем ориентационно-оптическими свойствами. Фазовая задержка распределена мелкими ступеньками так, что луч света преломляется на ступеньке как на плоской поверхности, склонённой под углом к направлению луча.

На рис. 2 изображён принцип отклонения луча с использованием управляемого преломляющего элемента. Луч света 1 проходит через односторонне ориентированную ячейку 2, на торцах которой находятся управляющие электроды, поляризатор и анализатор. Она регулирует интенсивность пропускания. Затем отрегулированный по интенсивности луч света поступает на управляемый преломляющий элемент 3. Под влиянием управляющего поля он отклоняет (преломляет) луч света на заданный угол. Затем луч света, границы которого (он имеет некоторое заметное расширение, так как на разных краях преломляющего элемента преломляется на неодинаковый угол) показаны на рис. 2 как 4 и 5, распространяется далее и достигает в области нахождения зрителя 6, с учётом расширения луча, ширины 7.

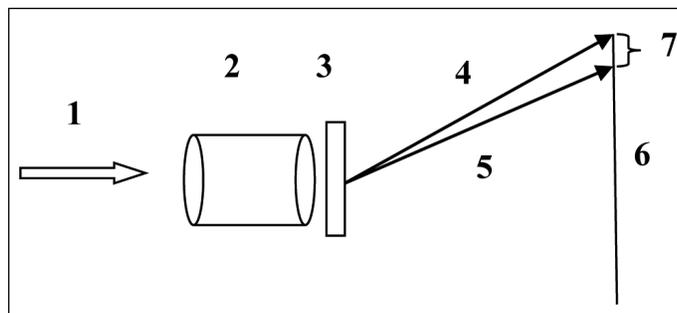


Рис. 2. Принцип отклонения луча с использованием управляемого преломляющего элемента.

Важнейшее практическое значение имеют количественные оценки вышеупомянутых величин: угол, на который может быть отклонён луч света; расширение отклонённого луча (угловое).

Имеется в виду, что изображение формируется в RGB палитре и образуются лучи трёх соответствующих цветов. Один элемент, изображённый на рис. 2, обеспечивает только какой-то один цвет из трёх, для этого он имеет источник (например, светодиод достаточной яркости) соответствующего цвета. Если же источник света широкого спектра, то дополнительно к изображённому на рис. 2

устанавливается светофильтр перед входом луча в регулятор интенсивности пропускания. Три элемента (разных цветов) формируют сонаправленные лучи и формируют каждый пиксель в соответствии с полагающимися ему пропорциями цветов.

Угол, на который может быть отклонён луч, оценён количественно для одно-сторонней ячейки ЖК толщиной 11 мкм, с показателями преломления $n_o=1.5$, $n_e = 1.65$, с гомеотропной ориентацией на ориентированной (одной) стороне и отрицательной диэлектрической анизотропией. Предполагалось, что управляющее поле формирует равномерное линейно изменяющееся вдоль направления, параллельного одной из сторон управляемого преломляющего элемента, значение эффективного показателя преломления, рассчитанного как в [7] и показанного на рис. 3. по горизонтальной оси, так как в таком случае он аналогичен линейной координате вдоль ячейки. По вертикальной оси отложена координата по нормали к ЖК ячейке, то есть вдоль предполагаемого направления падения луча света. Поверхность фронта волны изображена на рис. 3. Как видно, он параболический, но совсем немного. Угол, на который повернулся фронт волны по сравнению с первоначальным нормальным падением, составляет для всех точек изображённого на рис. 3 фронта волны 5,71 градуса, если ширина управляемого преломляющего элемента 10 мкм.

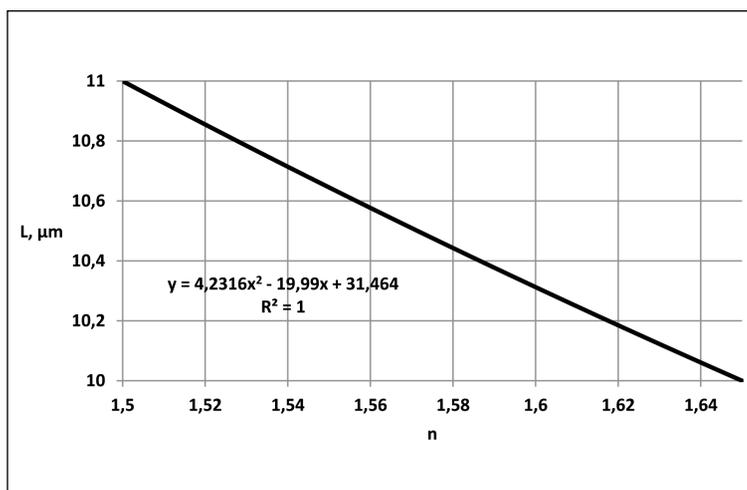


Рис. 3. Фронт волны нормально падающего луча света перед выходом из управляемого преломляющего элемента.

Однако на выходе из управляемого преломляющего элемента в среду (воздух) луч преломится, и там, где показатель преломления больше, он преломится сильнее. На рис. 4 показана зависимость угла преломленного луча (угол отсчитывается от нормали, то есть от прежнего направления падения луча на преломляющее устройство) фактически от такой же горизонтальной оси, как на рис. 3, хотя формально она подписана как относительная линейная координата. Как видно, зависимость линейная.

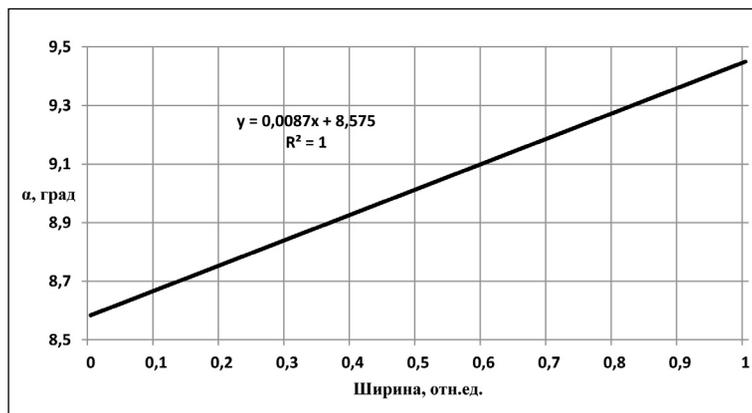


Рис. 4. Зависимость угла преломления (угол отсчитывается от нормали) от относительной ширины управляемого преломляющего элемента.

Таким образом, как следует из рис. 3, при расстоянии до зрителя 1 м, отклонение луча от нормали (полуширина области наблюдения зрителем данного пикселя) может быть 15 см, и размеры области составят 30 см (сторона квадратной области наблюдения зрителем данного пикселя).

Ширина области, освещённой расширившимся лучом, как следует из рис. 4, составит при этом (при отклонении луча на 15 см) около 1,5 см. Если же отклонение будет меньше, то есть для средней части области проецирования, то и расширение луча тоже уменьшится и освещённое пятно будет уже. Таким образом, зритель, которому необходимо одновременно видеть весь экран, не увидит изображение, а только область экрана шириной не более 1,5 см. При этом его глаза должны находиться в пределах строго определённой области шириной 30 см, чтобы увидеть именно данную область экрана.

Следовательно, необходимо решить две задачи: во-первых, расширить углы отклонения луча до 60° к нормали экрана, чтобы зрители могли располагаться многочисленно и не загораживать экран друг другу; во-вторых, расширить световой луч, прошедший через элемент дисплея, чтобы зритель одновременно видел лучи с разных краёв дисплея, то есть его весь.

Если оснастить зрителя (каждого) небольшим индивидуальным беспроводным маяком, размещаемым не очень далеко от органов зрения, то есть, например, на волосах, на воротнике и т.д., то можно оснастить дисплей средствами, определяющими расстояние и направление на каждый из значительного числа маяков.

Тогда в направлении каждого из зрителей можно направлять световой поток от дисплея так, чтобы в ограниченной по размерам области вокруг маяка, в каждой точке этой области, проходил световой поток от каждого из пикселей дисплея. Тогда зритель будет хорошо видеть изображение на дисплее.

Частота переключения односторонней ячейки 100 Гц–1 кГц. При частоте кадров 25 кадров в секунду (как в кинофильмах) можно обслуживать от нескольких зрителей до нескольких десятков зрителей, передавая каждому из них ин-

дивидуальное изображение. То есть каждый зритель будет иметь свой пульт управления телевизором или клавиатуру компьютера (звук через наушники) и пользоваться дисплеем как своим, но находящимся на некотором увеличенном расстоянии от него.

Для увеличения угла расширения луча, а также для увеличения максимальных углов его отклонения, следует, как описано в [1], использовать линзу ЖК. Как было отмечено выше, на рис. 4 видно, что зависимость угла расширяющегося проекционного луча от координаты по ширине управляемого преломляющего элемента линейная. Практически это означает, что расширяющийся луч выглядит приблизительно как исходящий из одной точки, расстояние до которой можно определить. Оно на два порядка больше ширины управляемого преломляющего элемента при максимальном угле отклонения луча, и на четыре порядка – при небольшом угле отклонения луча. То есть условная точка отстоит (при ширине управляемого преломляющего элемента 10 мкм) на 1 мм для крайних углов и на 100 мм для небольших углов. Следовательно, рассеивающая линза ЖК, фокус которой совпадает с упомянутой выше условной точкой, расширит световой поток от одного элемента до требуемого угла расхождения крайних его лучей, чтобы осветить им область достаточной ширины вокруг индивидуально маяка зрителя.

Линза может регулироваться под необходимые требования. На рис. 5 изображён дополненный управляемой ЖК линзой элемент дисплея.

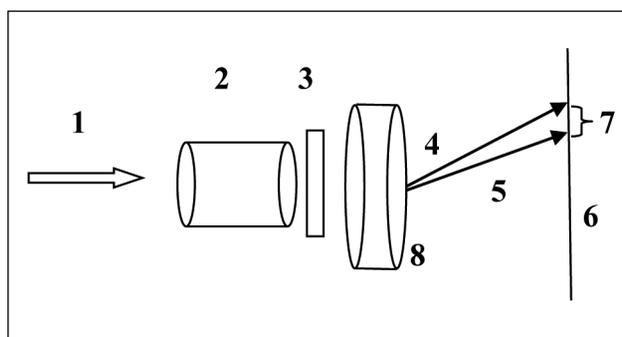


Рис. 5. Элемент дисплея с использованием управляемого преломляющего элемента.

Луч света 1 проходит через ячейку 2, на торцах которой управляющие электроды, поляризатор и анализатор. Она регулирует интенсивность пропускания. Затем отрегулированный по интенсивности луч света поступает на управляемый преломляющий элемент 3. Под влиянием управляющего поля он отклоняет (преломляет) луч света на заданный угол. Затем луч света, границы которого (он имеет некоторое заметное расширение, так как на разных краях преломляющего элемента преломляется на неодинаковый угол) показаны на рисунке как 4 и 5, поступает к зрителю 6, освещая с учётом расширения луча область 7. Управляемая линза ЖК 8 расширяет луч.

Рассеивающая ЖК линза эквивалентна сферической стеклянной, как показано в [7]. На рис. 6 показано, как луч, выходя в воздух из рассеивающей

линзы, преломляется на её поверхности 4 в точке, где нормаль к поверхности линзы образует угол с осью линзы, и при этом угол луча к оси линзы значительно увеличивается. Так, например, при показателе преломления материала линзы 1,5 (стекло), угле α величиной 30° между нормалью 3 в точке преломления луча и осью линзы (прямая 6 параллельна оси) и угле β между лучом 1 до преломления и осью (параллельна оси прямая 2) величиной $5,7^\circ$, угол γ между лучом преломленным 5 и осью линзы (прямая 6 параллельна оси) приблизится к 60° , то есть пойдёт почти вдоль поверхности линзы в точке преломления.

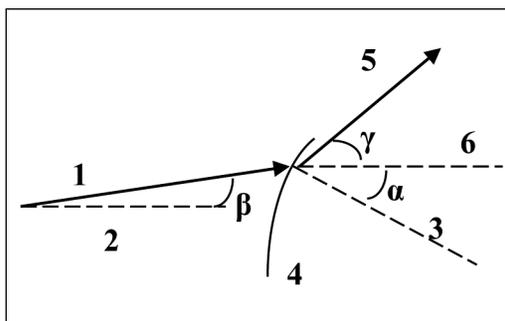


Рис. 6. Луч преломляется, выходя из поверхности 4 рассеивающей линзы, в точке, где нормаль к поверхности линзы образует угол с осью линзы, и при этом угол луча к оси линзы значительно увеличивается. При угле α между нормалью 3 в точке преломления луча и осью линзы (прямая 6 параллельна оси), и угле β между лучом 1 до преломления и осью (параллельна оси прямая 2), угол γ между лучом, преломленным 5 и осью линзы (прямая 6 параллельна оси) будет больше чем до преломления луча.

Для ЖК линзы вполне можно, как показано в [1], получить соответствие стеклянной линзе с углом нормали к поверхности с осью до 30° включительно. Следовательно, можно обеспечить отклонение луча до 60° к нормали, что и требовалось. При этом расширение луча резко увеличится и обеспечит освещение лучом области шириной в несколько раз меньше, чем расстояние до неё (до зрителя), то есть с двух метров расстояния будет освещена область в 30 сантиметров диаметром.

Это позволяет зрителю в двух метрах от экрана располагать индивидуальный маяк на расстоянии несколько меньше 30 см от органов зрения, что в целом достаточно удобно.

Таким образом, поставленная задача решена, и технически возможно обеспечить группу зрителей индивидуальным изображением на экране для каждого зрителя. Однако при этом возрастает количество управляемых элементов в составе каждого пикселя экрана, что делает его дороже. Тем не менее, один экран заменяет несколько и кроме того может быть удобен при наличии каких-либо ограничений на размещение нескольких экранов, например, связанных с архитектурой и планировкой помещения.

2. Управляемый преломляющий элемент для предлагаемого проекционного оборудования

Управляемый преломляющий элемент для проектора аналогичен описанному выше для дисплея. На рис. 7 изображён принцип проецирования с использованием управляемого преломляющего элемента. Луч света **1** проходит через управляемый преломляющий элемент **3**. Под влиянием управляющего поля он отклоняет (преломляет) луч света на заданный угол. Затем луч света, границы которого (он имеет некоторое заметное расширение, так как на разных краях преломляющего элемента преломляется на неодинаковый угол) показаны на рис. 7 как **4** и **5**, падает на экран **6**, освещая, с учётом расширения луча, область **2**.

Таким образом, отношение максимального угла отклонения луча управляемым преломляющим элементом к угловой ширине отклонённого луча задаёт, соответственно, отношение полуширины освещённого проекционного экрана к размеру пикселя изображения. Удвоив эту величину, получим максимальное число строк (и столбцов) для прямоугольного управляемого преломляющего элемента, освещающего также прямоугольную область экрана.

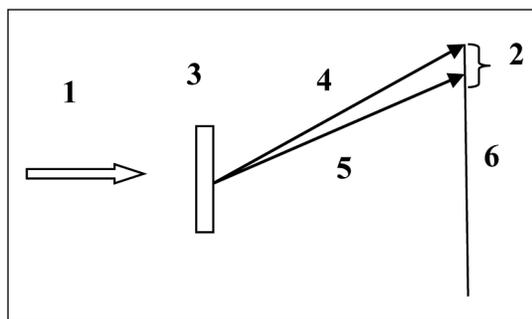


Рис. 7. Принцип проецирования с использованием управляемого преломляющего элемента

Следовательно, на большой экран будет приходиться ограниченное число проекционных элементов, каждый из которых обеспечивает построчную развёртку (как в экранах на электронно-лучевой трубке) изображения ограниченных размеров на выделенной для него части экрана.

Частота переключения односторонней ЖК ячейки позволяет, при 25 кадрах в секунду (как в кинофильмах), осветить значительное число пикселей проецируемого изображения. Фактически изображение формируется построчно, время пребывания луча постоянной интенсивности, направленного на один пиксель, определяет яркость пикселя. Проецирование одной строки осуществляется за время одного переключения ячейки ЖК от одного крайнего состояния до другого. Таким образом, длина строки (и число строк) составляет несколько десятков.

Проекционные элементы монохромные, в соответствии с принципами формирования цветного изображения и цветами RGB палитры.

Угол, на который может быть отклонён луч, оценён количественно выше на рис. 3. Как следует из рис. 3, при расстоянии до экрана 1 м, отклонение луча от

нормали (полуширина области проецирования одного проекционного элемента) может быть 15 см., и размеры области проецирования составят 30 см (сторона квадратной области проецирования). Таким образом, в области проецирования разместятся двадцать строк по двадцать пикселей (поперечником в пределах до 1,5 см) в каждой.

Очевидно из вышеизложенного, что проецирующее устройство способно проецировать чётко различаемые пиксели, не перекрывающиеся своим краями друг с другом, и притом достаточно много пикселей в достаточно широкой области проецирования. Для зрительного восприятия различия в размерах пикселей обычно несущественны, гораздо важнее количество света, испускаемого пикселем, и его цветовая контрастность относительно соседних пикселей. Как раз эти важнейшие требования полностью обеспечены.

Конструктивные решения для предлагаемого проекционного оборудования

Прежде всего, рассмотрим проецирование на большой плоский экран «на просвет». Применение, например, в кинотеатрах придаёт ему необходимую актуальность. Конструктивное решение, предлагаемое на основе вышеописанных проекционных элементов, показано на рис. 8. Экран (фактически – развёрнутый рулон соответствующего материала) закреплён на достаточно прочном каркасе, обычно, при больших размерах экрана, имеющем вид ажурной металлоконструкции, часть элементов которой находится на некотором расстоянии позади экрана. На них закреплены проекционные элементы. Если все проекционные элементы одинаковые, то каждый из них проецирует на одинаковую квадратную область проецирования, относящуюся только к данному проекционному элементу.

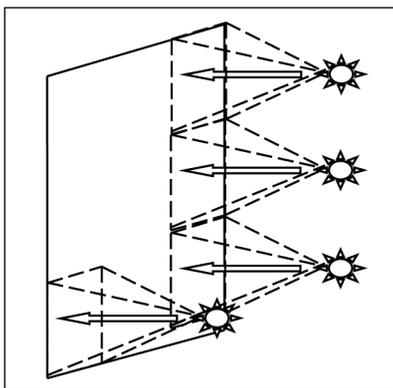


Рис. 8. Конструктивное решение для большого проекционного экрана на просвет.

Аналогичное конструктивное решение применимо и для большого проекционного экрана, рассеивающего падающий на него свет. В таком случае конструкции, на которых закреплены проецирующие элементы, выполняются малозамет-

ными (тонкими). Такие экраны могут быть укреплены на стенах, как внешних (уличных), так и внутренних (в помещениях), и использоваться как рекламные, учебно-демонстрационные и т.д.

Можно отметить, что при использовании значительного числа проекционных элементов ограниченной мощности (освещающих области проецирования умеренных размеров) они выделяют умеренное количество тепла, и можно обойтись простейшими средствами теплоотвода (рёбрами охлаждения, например).

Основным недостатком таких экранов является визуальный дискомфорт от видимых конструкций с проекционным оборудованием.

Следует отметить, что монтаж экрана (в простейшем случае он просто вывешивается) осуществляется быстрее, чем монтаж конструкций с проекционным оборудованием. Поэтому актуально проецирование из позиции, смещённой к краю экрана и, разумеется, на некотором расстоянии от него. Обычный проектор в таком случае даёт трапециевидную искажённую картинку.

На рис. 9 (слева) изображено проецирование из позиции не на нормали к середине экрана. Естественно, используется блок из достаточного количества проецирующих элементов, каждый из которых освещает соответствующую ему область проецирования.

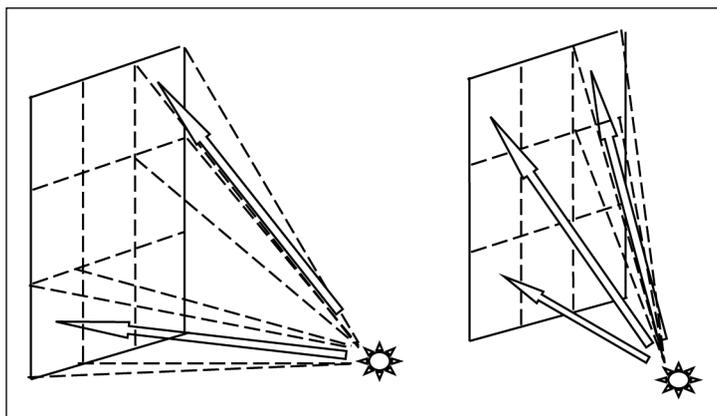


Рис. 9. Слева: Конструктивное решение для проецирования из смещённой позиции на большой проекционный рассеивающий экран. Разные проекционные элементы проецируют под разными углами. Справа: Проецирование одним элементом в его области проецирования с неравным угловым расстоянием между центрами смежных пикселей во избежание трапециевидного искажения изображения.

Важно уточнить, как в таком случае избежать трапециевидного искажения изображения. На рис. 9 (справа) изображено проецирование пикселей одним из проецирующих элементов в его области проецирования. Пиксели остаются прямоугольными (расположены правильно) в общей для всего большого экрана прямоугольной матрице пикселей. Для этого изменяется их угловое распределение в системе координат проецирующего элемента. Угловое положение каждого пикселя изменяется с учётом заранее введённых в проектор сведений об

угле проецирования (на самом деле, указывается пара углов) по отношению к центру экрана, расстоянию до центра экрана, размерах (ширине и высоте) экрана. Проектор преобразует эти данные в аналогичные для каждой из областей проецирования проекционными элементами. Затем проекционный элемент выполняет расчёт угловых координат каждого из пикселей в его области проецирования. Разумеется, все математические операции выполняются единой микросхемой процессора, а затем вычисленные данные записываются в память. В дальнейшем их заново вычислять не требуется до тех пор, пока не изменится положение проектора относительно экрана.

Эта же схема, показанная на рис. 9, актуальна и для проекционного экрана на пропускание.

Для преодоления проблем с внешним неравномерным освещением экрана можно вводить в проектор соответствующие настройки, тогда некоторые проецируемые области (группы пикселей) будут освещены менее ярко. Можно также оснастить проекционный элемент фотоприёмником узкого углового диапазона и получать таким образом информацию о внешней освещённости области проецирования элемента перед началом проецирования, автоматически введя поправки на яркость проецирования.

Как следует из рис. 3 и рис. 4, отношение между размером пикселя и расстоянием до экрана изменяется примерно на два порядка при переходе к максимальным углам отклонения луча, то есть на краю области проецирования. В средней части области, то есть при меньших углах отклонения луча, соотношение на один-два порядка лучше, но если ограничиваться такими угловыми размерами проецируемого пикселя, то следует ограничиваться узкой областью проецирования (при этом количество строк и пикселей в строке всё равно не уменьшится). Тогда можно проецировать с большого расстояния, но уже не получится эффективно проецировать из смещённой позиции без трапециевидного искажения изображения.

Расширяющийся луч выглядит приблизительно как исходящий из одной точки, расстояние до которой можно определить. Условная точка отстоит при ширине управляемого преломляющего элемента 10 мкм на 1 мм для крайних углов и на 100 мм для небольших углов. Для ограничения угла расширения луча следует использовать линзу ЖК [1] с соответствующим фокусным расстоянием. Следовательно, если ЖК линза будет соосна с управляемым преломляющим лучом (их центры будут на одной прямой, проходящей посередине выходящего луча), и фокус собирающей линзы будет в той точке, где кажется мнимый источник света (то есть фокусное расстояние задаётся в пределах от 1 мм до 100 мм), то луч будет коллимирован. Линза может регулироваться под необходимые требования. На рис. 10 изображён дополненный управляемой ЖК линзой проекционный элемент.

В результате расширение луча даже при максимальных углах сформирует пиксель шириной на четыре порядка меньше дистанции проецирования. То есть при расстоянии до экрана 10 м пиксель будет размером в 1 мм и при изображении 4000 на 3000 точек размеры экрана (проецированного изображения)

будут 4 м шириной и 3 м высотой. А при изображении 1200 на 900 точек размеры экрана будут 1,2 м на 0,9 м. Практически это означает, что такой проектор может применяться даже в довольно больших помещениях и для довольно мелкозернистого проецирования (зрители не различат отдельных пикселей изображения из-за их малой величины).

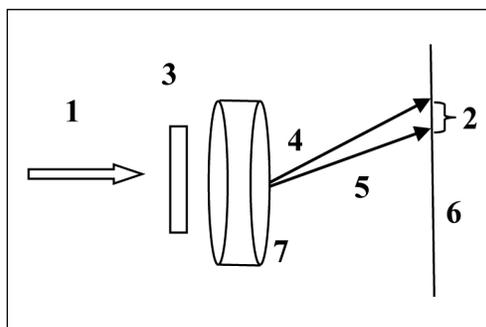


Рис. 10. Принцип проецирования с использованием управляемого преломляющего элемента. Луч света 1 проходит через управляемый преломляющий элемент 3. Под влиянием управляющего поля, он отклоняет (преломляет) луч света на заданный угол. Затем луч света, границы которого (он имеет некоторое заметное расширение, так как на разных краях преломляющего элемента преломляется на неодинаковый угол) показаны на рисунке как 4 и 5, падает на экран 6, освещая с учётом расширения луча область 2. Управляемая линза ЖК 7 коллимирует луч.

Таким образом, проектор может быть использован там же, где и проекторы иных типов, но превосходя их во многих эксплуатационных ситуациях и, предположительно, быть дешевле их из-за меньшего количества управляемых элементов.

Для аккумуляторного проектора важна его энергоэффективность. Отсутствует использование поглощающих регуляторов яркости, она регулируется аддитивно (накапливается). Изображение формируется построчно, время пребывания луча постоянной интенсивности, направленного на один пиксель, определяет яркость пикселя. Для увеличения потенциально достижимой контрастности области проецирования для смежных проецирующих элементов частично перекрываются (фактически это требует увеличить число проецирующих элементов в несколько раз). Каждый пиксель изображения находится в проецируемых областях для нескольких проецирующих элементов. Каждый проецирующий элемент может ни разу за время формирования кадра не осветить пиксель, и он будет иметь нулевую яркость в заданном цвете RGB палитры. В то же время пиксель с высокой яркостью может быть сформирован за счёт многократного по продолжительности (по сравнению с обычным) временем его освещения как одним, так и в общей сложности несколькими проекционными элементами. Таким образом, световой поток от источника света перераспределяется в соответствии с заданной яркостью пикселей. Если же вся область проецирования одного проекционного элемента в формируемом кадре должна быть чёрная (в заданном

цвете), то тогда пригодится поглощающий регулятор яркости, но такая ситуация бывает редко.

Выводы

В работе решена задача индикаторного ЖК устройства (дисплея), которое позволяет значительному числу зрителей просматривать одновременно индивидуально различный видеоряд на одной и той же отображающей поверхности. Зрители, регулируя параметры индивидуального видеоряда в интерактивном режиме, могут быть пользователями многопользовательского компьютера с одной визуальной отображающей информационной поверхностью вместо множества отдельных индивидуальных экранов для пользователей. Устройство может использоваться в кабинах самолётов с многоместным экипажем, отображая для членов экипажа индивидуально различную информацию. Аналогично и в иных многоместных системах управления, приёма и обработки информации.

В работе решена задача проекционного устройства, в котором число управляемых оптических элементов до двух порядков меньше, чем число пикселей в формируемом (проецируемом) изображении, что снижает стоимость оборудования.

Использование предложенного в данной работе проекционного оборудования значительно уменьшает негативное влияние эксплуатационных факторов на качество проецируемого изображения. Также снижается влияние тепловыделения при проецировании мощным световым потоком на конструкцию и условия эксплуатации.

Предложены конструктивные решения для аккумуляторного проектора с улучшенной энергоэффективностью проецирования.

Статья поступила в редакцию 10.01.2018 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Соломатин А.С. Линзы на основе жидких кристаллов с неоднородным радиальным распределением директора // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2016. № 3. С. 37–45.
2. Беляев В.В., Соломатин А.С. Ориентационные и оптические свойства слоёв жидкого кристалла с одной ориентирующей и одной неориентирующей поверхностью // Жидкие кристаллы и их практическое применение. 2014. Т. 14. № 2. С. 4–20.
3. Belyaev V.V., Solomatina A.S. Properties of hybrid aligned nematic (HAN) LC layers with both fixed and unfixed boundary conditions // Molecular Crystals & Liquid Crystals. 2015. Vol. 613. P. 121–128.
4. Ландсберг Г.С. Оптика. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы. 1957. 759 с.
5. Соломатин А.С. Влияние профиля микрорельефа периодических анизотропных структур на их дифракционные свойства // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2016. № 1. С. 74–87.
6. Соломатин А.С., Беляев В.В., Рыбаков Д.О. Влияние пространственного ориентационного распределения директора жидкого кристалла на диэлектрические свойства ячейки ЖК // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2016. № 3. С. 96–110.

7. Невская Г.Е., Томилин М.Г. Адаптивные линзы на основе жидких кристаллов // Оптический журнал. 2008. Т. 75. № 9. С. 35–48.

REFERENCES

1. Solomatin A.S. Linzy na osnove zhidkikh kristallov s neodnorodnym radial'nym raspredeleniem direktora [Liquid-crystal lenses with a non-uniform radial distribution of the director]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-Matematika* [Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], 2016, no. 3, pp. 37–45.
2. Belyaev V.V., Solomatin A.S. Oriyentatsionnye i opticheskie svoystva sloev zhidkogo kristalla s odnoi oriyentiruyushchei i odnoi neoriyentiruyushchei poverkhnost'yu [Orientational and optical properties of liquid crystal layers with one orientating and one non-orienting surface]. In: *Zhidkie kristally i ikh prakticheskoe primeneniye* [Liquid Crystals and their Application], 2014, vol. 14, no. 2, pp. 4–20.
3. Belyaev V.V., Solomatin A.S. Properties of hybrid aligned nematic (HAN) LC layers with both fixed and unfixed boundary conditions. In: *Molecular Crystals & Liquid Crystals*, 2015, vol. 613, pp. 121–128.
4. Landsberg G.S. *Optika* [Optics]. Moscow, State Publishing House of Technical and Theoretical Literature, 1957. 759 p.
5. Solomatin A.S. Vliyanie profilya mikrorel'efa periodicheskikh anizotropnykh struktur na ikh difraktsionnye svoystva [Influence of the microrelief profile of periodic anisotropic structures on their diffraction properties]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-Matematika* [Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], 2016, no. 1, pp. 74–87.
6. Solomatin A.S., Belyaev V.V., Rybakov D.O. Vliyanie prostranstvennogo orientatsionnogo raspredeleniya direktora zhidkogo kristalla na dielektricheskie svoystva yacheiki ZhK [Influence of spatial orientational distribution of the liquid-crystal director on the dielectric properties of an LCD cell]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-Matematika* [Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], 2016, no. 3, pp. 96–110.
7. Nevskaya G.E., Tomilin M.G. Adaptivnye linzy na osnove zhidkikh kristallov [Adaptive lenses based on liquid crystals]. In: *Opticheskii zhurnal* [Journal of Optical Technology], 2008, vol. 75, no. 9, pp. 35–48.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Соломатин Алексей Сергеевич – кандидат физико-математических наук, инженер учебно-научной лаборатории теоретической и прикладной нанотехнологии Московского государственного областного университета;
e-mail: Sotrudnica_UNC@mail.ru;

Беляев Виктор Васильевич – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической физики Московского государственного областного университета;
e-mail: vic_belyaev@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Aleksei S. Solomatin – PhD in Physical and mathematical sciences, engineer of the Education & Science Lab for Theoretical and Applied Nanotechnology, Moscow Region State University;
e-mail: Sotrudnica_UNC@mail.ru;

Victor V. Belyaev – Doctor in Technical sciences, professor, head of the Department of Theoretical Physics, Moscow Region State University;
e-mail: vic_belyaev@mail.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Соломатин А.С., Беляев В.В. Дисплей с многопользовательским направленным распределением визуальной информации и проектор с управляемым распределением луча света на основе жидких кристаллов с неоднородным распределением директора // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2018. № 1. С. 47–62.

DOI: 10.18384/2310-7251-2018-1-47-62.

FOR CITATION

Solomatina A.S., Belyaev V.V. Multiuser personally distributing LC display and projection device with a controlled refraction of the light beam on the basis of liquid crystals with inhomogeneous distribution of the director. In: *Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*. 2018. no. 1. pp. 47–62.

DOI: 10.18384/2310-7251-2018-1-47-62.

УДК 539.23+539.216.1+537.311.31

DOI: 10.18384/2310-7251-2018-1-63-72

МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ТОНКОГО МЕТАЛЛИЧЕСКОГО СЛОЯ

Завитаев Э.В.¹, Русаков О.В.¹, Чухлеб Е.П.²

¹ Государственный гуманитарно-технологический университет
164010, Московская обл., г. Орехово-Зуево, ул. Зелёная, д. 22, Российская
Федерация

² Муниципальное учреждение дополнительного образования
Центр дополнительного образования «Малая академия наук Импульс»
142432, Московская обл., г. Черноголовка, Школьный бульвар, д. 1, Российская
Федерация

Аннотация. В статье приведён расчёт магнитной индукции при произвольном отношении длины свободного пробега электронов к толщине слоя. В качестве граничных условий задачи приняты условия зеркально-диффузного отражения электронов. Рассмотрена макроскопическая асимптотика и проведён анализ полученных результатов.

Ключевые слова: тонкий слой, плотность тока, магнитная индукция.

MAGNETIC FIELD OF A THIN METAL LAYER

E. Zavitaev¹, O. Rusakov¹, E. Chukhleb²

¹ State University of Humanities and Technologies
ul. Zelenaya 22, 164010 Orekhovo-Zuyevo, Moscow Region, Russian Federation

² Municipal Institution of Additional Education, The Center of Additional Education ‘
Junior Academy of Sciences Impulse’
Shkol’nyi bulv. 1, 142432 Chernogolovka, Moscow Region, Russian Federation

Abstract. The paper presents the calculation of the magnetic induction at an arbitrary ratio of the free path length of electrons to the thickness of the layer. As boundary conditions of the problem the conditions of mirror-diffuse reflection of electrons are accepted. The macroscopic asymptotics is considered and the analysis of the obtained results is carried out.

Key words: thin layer, current density, magnetic induction.

Введение

В современной микроэлектронике наиболее востребовано исследование электромагнитных свойств малых проводящих объектов [1]. Такие объекты широко применяются при создании интегральных микросхем, изготовлении защитных покрытий и экранов. В частности, это имеет прямое отношение к расчёту электромагнитных характеристик тонкого проводящего слоя [2–6].

В работе [4] была построена модель локальной электрической проводимости плоского слоя из металла с учётом различных коэффициентов зеркальности его поверхностей и проанализирована зависимость действительной и мнимой части функции проводимости от частоты объёмных и поверхностных столкновений электронов.

Однако изучение электромагнитных свойств тонкого металлического слоя будет неполным, если не рассмотреть распределение в пространстве создаваемого им магнитного поля.

В данной работе на основе кинетического подхода выполнен расчет индукции магнитного поля внутри тонкого слоя из металла, как функции текущего расстояния, отсчитываемого от центральной плоскости слоя. Поскольку толщина такого слоя может быть сравнимой со средней длиной свободного пробега Λ , то следует подробно изучить влияние поверхностного рассеяния электронов на распределение магнитного поля.

Заметим, что в публикуемой статье не учитывается проявление скин-эффекта и отклонение от закона Видемана-Франца (это является темой отдельного исследования).

Также не принимаются во внимание квантовые эффекты, которые существенны, если характерный линейный размер проводящего объекта будет одного порядка с длиной волны де Бройля для электронов. Электромагнитные свойства квантового слоя в диэлектрической среде изучались в работе [7].

Математическая модель и расчёт

Пусть имеется тонкий металлический слой толщиной a , к концам которого приложено переменное электрическое напряжение частоты ω . Будем считать, что электрическое поле параллельно слою и направлено вдоль координатной оси X , координатная ось Z направлена вглубь слоя. Напряжённость электрического поля изменяется с течением времени по закону:

$$E = E_0 \exp(-i\omega t).$$

В отсутствии внешнего электрического поля равновесное распределение электронов слоя по энергиям описывается с помощью функции Ферми-Дирака:

$$f_0(\varepsilon) = \frac{1}{\exp\left(\frac{(\varepsilon - \mu)}{kT}\right) + 1},$$

где ε – кинетическая энергия, μ – химический потенциал, k – постоянная Больцмана, T – абсолютная температура.

Мы считаем зависимость кинетической энергии электронов от скорости v квадратичной:

$$\varepsilon = \frac{mv^2}{2},$$

где m – эффективная масса электрона.

При любой температуре, когда металл является твёрдым телом, его электроны можно рассматривать как вырожденный ферми-газ (при этом формально $T \rightarrow 0$). Поэтому для равновесной функции $f_0(\epsilon)$ далее используется ступенчатая аппроксимация:

$$f_0 = \Theta(\epsilon_F - \epsilon) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \epsilon \leq \epsilon_F, \\ 0, & \epsilon_F < \epsilon \end{cases}$$

где $\epsilon_F = \frac{m v_F^2}{2}$ – энергия Ферми (v_F – скорость Ферми). Причём длина среднего свободного пробега электронов Λ и электронное время релаксации τ связаны соотношением: $\Lambda = v_F \tau$.

Также для функции $f_0(\epsilon)$ имеем:

$$f_0 = \eta(\epsilon_F - \epsilon),$$

$$\eta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0; \end{cases}$$

$$\frac{\partial f_0}{\partial v_x} = \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial v_x} = -\delta(\epsilon_F - \epsilon) m v_x$$

(здесь δ – дельта-функция Дирака).

При наличии внешнего электрического поля функция распределения электронов по скоростям $f(z, \mathbf{v})$ подчиняется кинетическому уравнению Больцмана [8]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_z \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{eE}{m} \frac{\partial f_0}{\partial v_x} = -\frac{f - f_0}{\tau}, \quad (1)$$

где e – заряд электрона, v_z и v_x – соответственно, проекции скорости электронов проводимости на координатные оси Z и X .

Линеаризуем (1) по внешнему полю E . При этом функция f может быть записана в виде:

$$f(z, \mathbf{v}) = f_0(\epsilon) + f_1(z, \mathbf{v}),$$

где $f_1(z, \mathbf{v})$ – малое отклонение $f(z, \mathbf{v})$ от $f_0(\epsilon)$.

Тогда уравнение Больцмана в приближении времени релаксации электронов имеет вид:

$$v_z = \frac{\partial f_1}{\partial z} + \frac{eE}{m} \frac{\partial f_0}{\partial v_x} - i\omega f_1 = -\frac{f_1}{\tau}. \quad (2)$$

Общее решение уравнения (2):

$$f_1(z, \mathbf{v}) = \frac{e\tau E}{m} \frac{\partial f_0}{\partial v_x} \left\{ 1 + \varphi(\mathbf{v}) \exp\left(-\frac{z}{v_z} \left(\frac{1}{\tau} - i\omega\right)\right) \right\}.$$

Зададим следующие граничные условия с учётом того, что q_1 и q_2 – коэффициенты зеркальности верхней и нижней поверхностей слоя:

$$f_1(v_z, z = a) = q_1 f_1(-v_z, z = a), v_z > 0$$

$$f_1(v_z, z = 0) = q_2 f_1(-v_z, z = 0), v_z < 0.$$

Функция $f_1(z, \mathbf{v})$ распадается на две функции:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1^+(z, \mathbf{v}) = \frac{e\tau E}{m} \frac{\partial f_0}{\partial v_x} \left\{ 1 + \varphi^+(\mathbf{v}) \exp\left(-\frac{z}{v_z} \left(\frac{1}{\tau} - i\omega\right)\right) \right\}, v_z > 0, \\ f_1^-(z, \mathbf{v}) = \frac{e\tau E}{m} \frac{\partial f_0}{\partial v_x} \left\{ 1 + \varphi^-(\mathbf{v}) \exp\left(\frac{a-z}{v_z} \left(\frac{1}{\tau} - i\omega\right)\right) \right\}, v_z < 0. \end{array} \right. \quad (3)$$

Для удобства введём обозначения:

$$\Omega = \frac{a}{v_F} \left(\frac{1}{\tau} - i\omega\right) = \Delta - i\Psi,$$

$$A = \frac{e\tau E}{m} \frac{\partial f_0}{\partial v_x}.$$

При

$$z = 0, f^+ = q_2 f_1^-(-v_z),$$

$$z = a, f^- = q_1 f_1^+(-v_z).$$

Тогда:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 + \varphi^+(v_z) = q_2 (1 + \varphi^-(-v_z) \exp(-\Omega)), \\ 1 + \varphi^-(v_z) = q_1 (1 + \varphi^+(-v_z) \exp(\Omega)). \end{array} \right. \quad (4)$$

Из выражения (4) находим:

$$\varphi^+(v_z) = \frac{q_2 (1 + q_1 \exp(-\Omega)) - (1 + q_2 \exp(-\Omega))}{1 - q_1 q_2 \exp(-2\Omega)},$$

$$\varphi^-(v_z) = \frac{q_1 (1 + q_2 \exp(-\Omega)) - (1 + q_1 \exp(-\Omega))}{1 - q_1 q_2 \exp(-2\Omega)}.$$

При этом выражение (3) примет следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1^+(z, \mathbf{v}) = A \left\{ 1 + \frac{q_2(1 + q_1 \exp(-\Omega)) - (1 + q_2 \exp(-\Omega))}{1 - q_1 q_2 \exp(-2\Omega a)} \exp(-\Omega z) \right\}, v_z > 0, \\ f_1^-(z, \mathbf{v}) = A \left\{ 1 + \frac{q_1(1 + q_2 \exp(-\Omega)) - (1 + q_1 \exp(-\Omega))}{1 - q_1 q_2 \exp(-2\Omega)} \exp\left(\Omega \left(1 - \frac{z}{a}\right)\right) \right\}, v_z < 0. \end{array} \right.$$

Для расчёта плотности тока будем использовать формулу:

$$\mathbf{j} = en\langle \mathbf{v} \rangle = en \left[\int f_0 d^3 \mathbf{v} \right]^{-1} \int f_1 \mathbf{v} d^3 \mathbf{v},$$

где n – концентрация электронов проводимости, которая определяется стандартным образом, исходя из свойств распределения Ферми–Дирака,

$$n = 2 \frac{m^3}{h^3} \int f_0 d^3 v = 2 \frac{m^3}{h^3} \frac{4\pi v_F^3}{3},$$

где h – постоянная Планка.

Для нахождения плотности тока $j(z)$ удобно перейти в сферическую систему координат (v, Θ, Φ) , с учётом того, что $v_z = v \cdot \cos(\Theta) = v_F \cdot \cos(\Theta)$:

$$\begin{aligned} j(z) = & \frac{2e^2 m^2 E}{h^3} \int_0^\infty dv \int_0^{2\pi} d\varphi \tau v^3 \cos^2(\Phi) \frac{\partial f_0}{\partial v} \times \\ & \times \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(\theta) \left(1 + \varphi^+(v_z) \exp(-\Omega z / \cos(\theta)) \right) d\theta + \right. \\ & \left. + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \sin^3(\theta) \left(1 + \varphi^-(v_z) \exp\left(\Omega \left(1 - \frac{z}{a}\right) / \cos(\theta)\right) \right) d\theta \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Преобразовав (5), можно получить аналитическое выражение для плотности тока внутри слоя как функции безразмерного расстояния до его верхней поверхности $\xi = z/a$:

$$\begin{aligned} j_x = & \frac{3ne^2 a}{4m v_F \Omega} E \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta \times \\ & \times \left[2 + \frac{q_2(1 - \exp(-\Omega / \cos \theta)) + q_1 \exp(-\Omega / \cos \theta) - 1}{1 - q_1 q_2 \exp(-2\Omega / \cos \theta)} \times \exp\left(\frac{-\Omega \xi}{\cos \theta}\right) + \right. \\ & \left. + \frac{q_1(1 - \exp(-\Omega / \cos \theta)) + q_2 \exp(-\Omega / \cos \theta) - 1}{1 - q_1 q_2 \exp(-2\Omega / \cos \theta)} \times \exp\left(\frac{-\Omega(1 - \xi)}{\cos \theta}\right) \right] d\theta. \end{aligned}$$

Вектор магнитной индукции \mathbf{B} внутри тонкого металлического слоя рассчитаем с помощью теоремы о циркуляции. При её применении мы будем исходить из того, что распределение тока по сечению слоя является неоднородным:

$$\oint_L B_y dl = \mu_0 \int_s j_x dS$$

(μ_0 – магнитная постоянная вакуума).

Применив теорему к замкнутому контуру в виде прямоугольника, который лежит в плоскости YZ , получим:

$$B_y = \frac{\mu_0}{2} \int_{\frac{a}{2}-z_B}^{\frac{a}{2}+z_B} j_x dz,$$

где новая координата z_B , через которую задаются пределы интегрирования, отсчитывается от центральной плоскости XY слоя.

Для дальнейших вычислений и анализа результатов удобно ввести «безразмерную координату индукции» $\delta = z_B/a$. Используя такое обозначение, мы получаем следующую формулу для расчёта магнитной индукции внутри слоя в рамках кинетического подхода:

$$B_k = \frac{\mu_0}{2} a \int_{\frac{1}{2}-\delta}^{\frac{1}{2}+\delta} j_x d\xi. \quad (7)$$

В случае $a \gg \Lambda$ ($\Delta \rightarrow \infty$) из (7) можно получить макроскопическую асимптотику магнитной индукции. После проведения несложных вычислений имеем:

$$B_m = \frac{\mu_0 n e^2 a^2 E \delta}{v_F m \Omega}.$$

Анализ результатов

Проведём численный расчёт магнитной индукции тонкого металлического слоя. Для этого удобно предварительно выполнить стандартную процедуру записи формулы (7) в безразмерном виде.

На рис. 1 представлена зависимость отношения D модуля магнитной индукции тонкого слоя B_k к модулю магнитной индукции макроскопического слоя B_m от «безразмерной координаты индукции» δ при различных значениях параметров Δ , ψ , q_1 и q_2 . Для всех кривых на рисунке $\psi = 1$, $q_1 = q_2 = 0$. Причём для кривой 1 – $\Delta_1 = 1$, для кривой 2 – $\Delta_2 = 2$, для кривой 3 – $\Delta_3 = 3$.

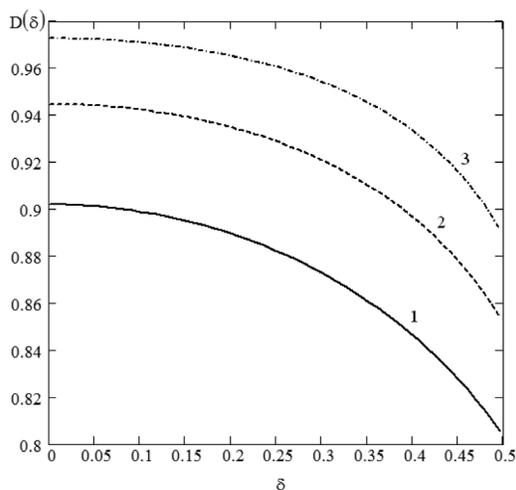


Рис. 1. Зависимость отношения D модуля магнитной индукции тонкого слоя к модулю магнитной индукции макроскопического слоя от «безразмерной координаты индукции» δ .

Из рис. 1 видна тенденция уменьшения модуля магнитной индукции тонкого металлического слоя по отношению к индукции макроскопического слоя при переходе от его центральной плоскости к периферии. Данная тенденция имеет место при произвольных значениях параметра Δ , который выражает собой степень различия толщины слоя a и средней длины свободного пробега электронов Λ внутри него. Такое поведение кривых объясняется учётом рассеяния электронов на нижней и верхней поверхностях слоя.

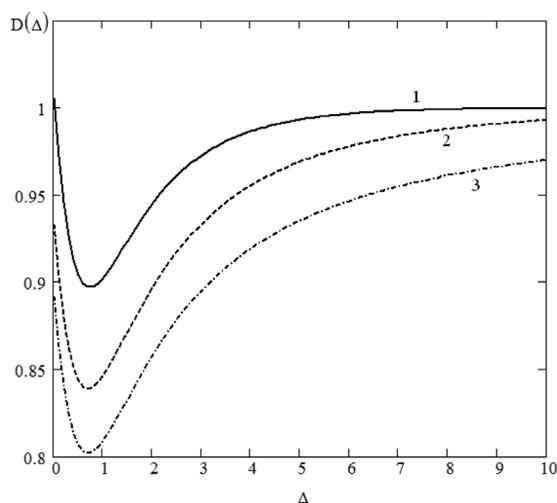


Рис. 2. Зависимость отношения D модуля магнитной индукции тонкого слоя к модулю магнитной индукции макроскопического слоя от безразмерной обратной длины свободного пробега электронов Δ .

На рис. 2 приведено отношение модуля магнитной индукции тонкого слоя B_k к модулю магнитной индукции макроскопического слоя B_m как функции параметра Δ . Для всех кривых на рисунке $\psi = 1$, $q_1 = q_2 = 0$. Причём для кривой 1 – $\delta_1 = 0$, для кривой 2 – $\delta_2 = 0,4$, для кривой 3 – $\delta_3 = 0,49$.

Из анализа хода кривых можно сделать вывод об их нетривиальном поведении в области значений параметра Δ порядка единицы, то есть, когда толщина слоя сравнима со средней длиной свободного пробега электронов Λ в нём. Такое поведение кривых, по-видимому, связано с резонансными эффектами, которые наблюдаются при отражении электронов проводимости от поверхностей слоя. Заметим, что картина значительно усложняется, если коэффициенты зеркальности различны. В этом случае распределение магнитного поля внутри слоя становится несимметричным.

Статья поступила в редакцию 19.02.2018 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Петров Ю.И. Физика малых частиц. М.: Наука, 1982. 360 с.
2. Уткин А.И., Юшканов А.А. Влияние коэффициентов зеркальности на взаимодействие Н-волны с тонкой металлической плёнкой // Оптика и спектроскопия. 2014. Т. 117. № 4. С. 650–653.
3. Уткин А.И., Юшканов А.А. Влияние коэффициентов зеркальности на проводимость тонкого металлического слоя в случае неоднородного, периодического по времени электрического поля // Микроэлектроника. 2016. Т. 45. № 5. С. 386–395.
4. Уткин А.И., Завитаев Э.В., Юшканов А.А. Расчёт электрической проводимости тонкого металлического слоя в случае различных коэффициентов зеркальности его поверхностей // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. 2016. № 9. С. 85–91.
5. Уткин А.И., Юшканов А.А. Распределение электрического тока в тонком металлическом слое при различных коэффициентах зеркальности на поверхностях // Журнал технической физики. 2016. Т. 86. № 10. С. 15–19.
6. Кузнецова И.А., Романов Д.Н., Савенко О.В., Юшканов А.А. Расчёт высокочастотной электропроводности тонкого полупроводникового слоя в случае различных коэффициентов зеркальности его поверхностей // Микроэлектроника. 2017. Т. 46. № 4. С. 275–283.
7. Бабич А.В., Погосов В.В. Квантовая металлическая плёнка в диэлектрическом окружении // Физика твёрдого тела. 2013. Т. 55. Вып. 1. С. 177–185.
8. Абрикосов А.А. Основы теории металлов. М.: Наука, 1987. 520 с.

REFERENCES

1. Petrov Yu.I. *Fizika malykh chastits* [Physics of small particles]. Moscow, Nauka Publ., 1982. 360 p.
2. Utkin A.I., Yushkanov A.A. Vliyaniye koeffitsientov zerkal'nosti na vzaimodeystvie N-volny s tonkoi metallicheskoi plonkoi [Effect of reflection coefficients on the interaction of an N-wave with a thin metal film]. In: *Optika i spektroskopiya* [Optics and Spectroscopy], 2014, vol. 117, no. 4, pp. 650–653.
3. Utkin A.I., Yushkanov A.A. Vliyaniye koeffitsientov zerkal'nosti na provodimost' tonkogo metallicheskogo sloya v sluchae neodnorodnogo, periodicheskogo po vremeni elektricheskogo polya [Effect of reflection coefficients on the conductivity of a thin metal layer in

- the case of inhomogeneous, time-periodic electric field]. In: *Mikroelektronika* [Russian Microelectronics], 2016. vol. 45, no. 5, pp. 386–395.
4. Utkin A.I., Zavitaev E.V., Yushkanov A.A. Raschet elektricheskoi provodimosti tonkogo metallicheskogo sloya v sluchae razlichnykh koeffitsientov zerkal'nosti ego poverkhnosti [Calculation of the electrical conductivity of a thin metal layer in the case of different coefficients of reflectivity of its surfaces]. In: *Poverkhnost'. Rentgenovskie, sinkhrotronnyye i neitronnyye issledovaniya* [The Journal of Surface Investigation. X-ray, Synchrotron and Neutron Techniques], 2016, no. 9, pp. 85–91.
 5. Utkin A.I., Yushkanov A.A. Raspredelenie elektricheskogo toka v tonkom metallicheskom sloe pri razlichnykh koeffitsientakh zerkal'nosti na poverkhnostyakh [Distribution of the electric current in thin metal layers with different coefficients of reflectivity on the surfaces]. In: *Zhurnal tekhnicheskoi fiziki* [Technical Physics. The Russian Journal of Applied Physics], 2016, vol. 86, no. 10, pp. 15–19.
 6. Kuznetsova I.A., Romanov D.N., Savenko O.V., Yushkanov A.A. Raschet vysokochastotnoi elektroprovodnosti tonkogo poluprovodnikovogo sloya v sluchae razlichnykh koeffitsientov zerkal'nosti ego poverkhnosti [Calculation of high-frequency conductivity of a thin semiconductor layer in the case of different coefficients of reflectivity of its surfaces]. In: *Mikroelektronika* [Russian Microelectronics], 2017, vol. 46, no. 4, pp. 275–283.
 7. Babich A.V., Pogosov V.V. Kvantovaya metallicheskaya plenka v dielektricheskom okruzhenii [A quantum metal film in a dielectric environment]. In: *Fizika tverdogo tela* [Physics of the Solid State], 2013, vol. 55, no. 1, pp. 177–185.
 8. Abrikosov A.A. *Osnovy teorii metallov* [Fundamentals of the theory of metals]. Moscow, Nauka Publ., 1987. 520 p.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Завитаев Эдуард Валерьевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики и физики Государственного гуманитарно-технологического университета;
e-mail: eduardzavitaev@yandex.ru;

Русаков Олег Владимирович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и физики Государственного гуманитарно-технологического университета;
e-mail: olegrusmail@mail.ru;

Чухлеб Екатерина Петровна – педагог дополнительного образования Муниципального учреждения дополнительного образования Центр дополнительного образования «Малая академия наук Импульс»;
e-mail: e.chuhleb@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Eduard V. Zavitaev – Doctor in Physical and Mathematical sciences, professor at the Department of Mathematics and Physics, State University of Humanities and Technologies;
e-mail: eduardzavitaev@yandex.ru;

Oleg V. Rusakov – PhD in Physical and Mathematical sciences, associate professor at the Department of Mathematics and Physics, State University of Humanities and Technologies;
e-mail: olegrusmail@mail.ru;

Ekaterina P. Chukhleb – teacher of additional education, Municipal Institution of Additional Education, The Center of Additional Education ‘Junior Academy of Sciences Impulse’;
e-mail: e.chuhleb@mail.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Завитаев Э.В., Русаков О.В., Чухлеб Е.П. Магнитное поле тонкого металлического слоя // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2018. № 1. С. 63–72.

DOI: 10.18384/2310-7251-2018-1-63-72.

FOR CITATION

Zavitaev E.V, Rusakov O.V., Chukhleb E.P. Magnetic field of a thin metal layer. In: *Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*. 2018. no. 1. pp. 63–72.

DOI: 10.18384/2310-7251-2018-1-63-72.

УДК 531.534

DOI: 10.18384/2310-7251-2018-1-73-81

Н-ТЕОРЕМА И УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ ДЛЯ КИНЕТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ НЕИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

Бишаев А.М.¹, Рыков В.А.², Абгарян М.В.³

¹ *Московский физико-технический институт (государственный университет)
141700, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский пер., 9, Российская Федерация;*

² *Вычислительный центр Российской академии наук имени А.А. Дородницына
119333, Москва, ул. Вавилова, д. 40, Российская Федерация;*

³ *Научно-исследовательский институт прикладной механики и электродинамики МАИ
125993, Москва, Волоколамское шоссе, 4, Российская Федерация.*

Аннотация. В предлагаемой статье, используя ранее построенную кинетическую модель для неидеального газа, выведено уравнение состояния для такого газа, которое имеет место в состоянии термодинамического равновесия, а также получено выражение для критической температуры как функции от потенциала взаимодействия между молекулами.

Ключевые слова: неидеальный газ, связанные состояния, Н-теорема, уравнение состояния, критическая температура, потенциал взаимодействия молекул.

THE H-THEOREM AND EQUATION OF STATE FOR KINETIC MODEL OF IMPERFECT GAS

A. Bishaev¹, V. Rikov², M. Abgaryan³

¹ *Moscow Institute of Physics and Technology (State University),
Institutskii per. 9, 141700 Dolgoprudnyi, Moscow region, Russian Federation*

² *Dorodnicyn Computing Centre (Russian Academy of Science),
ul. Vavilova 40, 119333 Moscow, Russian Federation*

³ *Research Institute of Applied Mechanics and Electrodynamics of MAI
Volokolamskoe sh. 4, 125993 Moscow, Russian Federation*

Abstract. Using a previously derived kinetic model for an imperfect gas, we have derived an equation of state for a gas in a thermodynamic equilibrium and an expression for the critical temperature as a function of an interaction potential between molecules.

Key words: imperfect gas, bound states, H-theorem, equation of state, critical temperature, interaction potential of molecules.

Введение

Известно, что Н.Н. Боголюбов, применяя асимптотические методы, получил из системы ВВГКУ уравнение Больцмана. В этом методе уравнение Больцмана получается как уравнение для определения одночастичной функции распределения в λ -масштабе, являющейся членом нулевого порядка при разложении системы ВВГКУ по малому параметру $\varepsilon = n_0 d^3$. Выше принято, что n_0 – характерная плотность молекул газа, $d \approx 10^{-8}$ см есть размер молекулы (или атома). Обычно за эту величину принимают размер, на котором отличен от нуля потенциал межмолекулярного взаимодействия, $\lambda = \frac{1}{n_0 d^2}$ есть длина пробега молекул в газе.

Когда рассматривается вывод уравнения Больцмана, всегда считается заданным потенциал, с которым молекулы взаимодействуют между собой. Причём предполагается, что молекулы газа взаимодействуют как точечные центры отталкивания. В реальности, как известно, потенциал взаимодействия молекул имеет как отталкивающие, так и притягивающие составляющие, поэтому уравнение Больцмана справедливо для идеального разреженного газа, то есть для газа, в котором можно пренебречь осреднённой потенциальной энергией притяжения молекул по сравнению с их средней кинетической энергией.

Имеется много работ, в которых пытаются учесть в уравнении Больцмана поправки порядка ε . Получающиеся в такой процедуре уравнения трактуются как кинетические уравнения для плотного газа. Последовательная асимптотическая процедура учёта членов порядка ε связана с рассмотрением столкновений трёх и более числа молекул одновременно, что приводит к появлению в упомянутой процедуре расходящихся интегралов. Эта проблема решается при помощи использования принципа ослабления корреляций при выражении для многочастичных функций распределения.

Следует отметить, что введённый выше параметр ε меньше единицы практически для всех сред [1]. Например, для железа (Fe), чья плотность равна $\rho = 7,8 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$, $\varepsilon \approx 0,08$, то есть более чем в десять раз меньше единицы (для воды $\varepsilon \approx 0,02$). Из этого можно сделать вывод, что направление, связанное с учётом только эффектов уплотнения газа, вряд ли приведёт к созданию кинетических уравнений, описывающих поведение реальных сред.

Имеется достаточно большое количество работ, где пытаются учесть неидеальность газа в уравнении Больцмана (притягивающую составляющую в потенциале взаимодействия молекул).

Заметный вклад в понимание проблем, связанных с созданием кинетической теории неидеального газа, внёс Ю.Л. Климонтович [2]. Им был введён ещё один параметр длины, характеризующий среду. Это $l = n_0^{-1/3}$. Его трактуют как расстояние между молекулами. Тогда, из вышесказанного следует, что $\frac{d}{l} = \varepsilon^{1/3}$, а величина, обратная числу Кнудсена, которая стоит перед интегралом столкновений в уравнении Больцмана, равна $l/\lambda = \varepsilon^{2/3}$. Отсюда следует, что интеграл столкно-

вений является неаналитической функцией многочастичных функций распределения, поэтому его разложение по целым степеням ε не позволяет правильно учесть эффекты, связанные с увеличением плотности среды. Ю.Л. Климонтович также указал, что для кинетического описания неидеального газа необходимо использовать двухчастичную функцию распределения, что, вообще говоря, понятно, ибо средняя потенциальная энергия молекул будет выражаться через двухчастичную функцию распределения. Им было построено уравнение для двухчастичной функции распределения, описывающей неидеальный газ [3]. Заметного резонанса это не имело. Видимо из-за того, что из этого уравнения нельзя было перейти к идеальному газу.

Совсем другой подход к проблеме был предложен А.А. Власовым [4]. Он ввёл понятие потенциала самосогласованного поля и построил кинетическое уравнение для эволюции функции распределения, находящейся в этом поле. В настоящее время используются представления интеграла столкновений как суммы больцмановского интеграла, власовского и ещё каких-либо членов.

Наиболее рельефным эффектом действия сил притяжения между молекулами является образование связанных состояний теми молекулами, кинетическая энергия которых не позволяет преодолеть действие сил притяжения. Проблема учёта связанных состояний пока далека от своего решения, а имеющиеся кинетические уравнения, учитывающие указанный эффект, слишком сложны для своего аналитического и численного исследования.

Ранее авторами была построена кинетическая модель, учитывающая именно эффект образования связанных состояний [5]. В данной работе исследуется полученное на основании этой модели равновесное уравнение состояния.

Кинетическое уравнение для неидеального газа

В [5] была построена кинетическая модель для неидеального газа. Неидеальным газом авторы называли газ, в котором нельзя пренебречь потенциальной энергией взаимодействия молекул по сравнению с их кинетической энергией. В этом случае в фазовом пространстве $\Gamma = \Omega \times D$, где Ω – пространство относительных скоростей молекул $\vec{g} = \vec{\xi}_1 - \vec{\xi}$, а D – пространство относительных положений $\vec{r} = \vec{x}_1 - \vec{x}$, образуются области связанных состояний, которые описываются

соотношением $\frac{m}{4} \vec{g}^2 + U(r) \leq 0$, где $U(r)$ есть потенциал межмолекулярного взаимодействия.

В предположении, что двухчастичная функция распределения молекул, находящихся в связанном состоянии, имеет каноническое распределение –

$$\bar{F}_d = f_0(t, \vec{q}, \vec{w}) \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{k\varphi(t, \vec{q}, \vec{w})} \left(\frac{m}{4} \vec{g}^2 - U_0 \left(\frac{d}{r} \right)^4 \right) \right\}.$$

Для такого газа была получена следующая система кинетических уравнений:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial f}{\partial t} + \xi^i \frac{\partial f}{\partial x^i} = J_B - J_{del}, \quad \frac{Ds}{Dt} = J_{del}, \quad \frac{Dh}{Dt} = \\
& = \chi_1 \int_{g \leq 2\chi_1} \frac{m}{4} g^2 d\bar{g} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |\cos \omega| (\bar{f} - f_0) \sin \omega d\omega d\theta, \\
J_B & = \int d\bar{\xi}_1 \left(\int_0^b \int_0^{2\pi} g (f f_1' - f f_1) b d b d\theta \right), \quad \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + w^i \frac{\partial}{\partial x^i} + a^j \frac{\partial}{\partial w^j}, \\
\bar{a} & = -\frac{4\pi U_0 d^3 \text{grad}(n)}{3m}, \quad \chi_1 = \sqrt{\frac{U_0}{m}}, \quad \bar{w} = \frac{\bar{\xi} + \bar{\xi}_1}{2}. \tag{1}
\end{aligned}$$

В (1) $J_{del} = \chi_1 d^2 \int_{g \leq 2\chi_1} d\bar{g} \left(\int_0^{2\pi} \int_0^\pi |\cos \omega| (\bar{f} - f) \sin \omega d\omega d\theta \right)$, $f = f(t, \bar{x}, \bar{\xi})$ – функция рас-

пределения молекул в свободном состоянии,

$$\begin{aligned}
\bar{f} & = f^2(t, \bar{\xi}, \bar{x}) = f^2(t, \bar{w}, \bar{\xi}, \bar{x}); \quad s = s(t, \bar{q}, \bar{w}) = \\
& = \iint_{\Omega_{del}} \bar{F}_d d\bar{r} d\bar{g}, \quad h = h(t, \bar{q}, \bar{w}) = \iint_{\Omega_{del}} \left(\frac{mg^2}{4} + U(r) \right) \bar{F}_d d\bar{r} d\bar{g} \leq 0.
\end{aligned}$$

Ω_{del} есть область фазового пространства молекул, которые находятся в связанном состоянии; $s\Delta\bar{q}\Delta\bar{w}$ есть число молекул, находящихся в связанном состоянии, чьи координаты и скорости находятся в соответствующем элементе фазового пространства, а $h\Delta\bar{q}\Delta\bar{w}$ – их энергия.

Через введенные выше функции f , s , h макропараметры выражаются следующим образом: $n(t, \bar{x}) = \int f d\bar{\xi} + \int s d\bar{w}$ – числовая плотность газа; $n\bar{u} = \int \bar{\xi} f d\bar{\xi} + \int \bar{w} s d\bar{w}$. Здесь \bar{u} есть макроскопическая скорость газа, $P^{ij} = m \int c_f^i c_f^j f d\bar{\xi} + m \int c_d^i c_d^j s d\bar{w}$, $\bar{c}_f = \bar{\xi} - \bar{u}$, $\bar{c}_d = \bar{w} - \bar{u}$, $i, j = 1, 2, 3$ – тензор напряжений в неидеальном газе. Кинетическая температура определяется следующим образом: $\frac{3}{2}nkT = \int m \frac{\bar{c}_f^2}{2} f d\bar{\xi} + \int (m \frac{\bar{c}_d^2}{2} s - \frac{1}{2}h) d\bar{w}$. Здесь k – постоянная Больцмана.

В [5] показано, что из (1) следуют все законы сохранения.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial(nu_i)}{\partial x_i} & = 0, \quad mn \frac{\partial u^j}{\partial t} + mn u^i \frac{\partial u^j}{\partial x_i} + \frac{\partial P^{ij}}{\partial x_i} - n a_j = 0, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad n_d u_d^i = \int w^i s d\bar{w}, \\
\frac{3}{2}kn \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u^i \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + P^{ki} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial Q_i}{\partial x_i} - n(u_d^i - u^i) a_i & = 0, \\
\bar{Q} & = \int m \bar{c}_f \frac{\bar{c}_f^2}{2} f d\bar{\xi} + \int \bar{c}_d \left(m \frac{\bar{c}_d^2}{2} s - \frac{1}{2}h \right) d\bar{w}.
\end{aligned}$$

Равновесное уравнение состояния

Понятие давления для неидеального газа вводится так же, как и для идеально-го – $3P = P^{11} + P^{22} + P^{33} = m \left(\int \bar{c}_v^2 f d\xi + \int \bar{c}_d^2 s d\bar{w} \right)$. Тогда из определения макроскопических величин можно получить следующее соотношение:

$$\left(P - \frac{1}{3} \int h d\bar{w} \right) = nkT. \quad (2)$$

Соотношение (2) есть кинетическое уравнение состояния. В правых частях уравнений для s и h можно проинтегрировать по скоростному пространству, и в случае, когда в качестве междумолекулярного потенциала был взят частный

случай потенциала Сазерленда – $U(r) = \begin{cases} +\infty, & 0 \leq r < d \\ -U_0 \left(\frac{d}{r} \right)^4, & r \geq d \end{cases}$, привести эти

уравнения к виду $\frac{Ds}{Dt} = J/3, \frac{Dh}{Dt} = -U_0 J/5$, где $J = 64\pi^2 \chi_1 d^2 \left(\frac{U_0}{m} \right)^{3/2} (\bar{f} - f_0)$.

Откуда $\frac{D}{Dt} \left(\frac{3}{5} U_0 s + h \right) = 0 \rightarrow \frac{3}{5} U_0 s + h = c = \text{const}$. Ясно, что если число частиц s в

связанном состоянии в элементе объёма фазового пространства равно нулю, то их энергия в связанном состоянии тоже равна нулю, поэтому s и h всегда связаны соотношением $\frac{3}{5} U_0 s(t, x, \bar{w}) + h(t, x, \bar{w}) = 0$, откуда имеем соотноше-

ние для определения $\varphi(t, \bar{x}, \bar{w}) = \varphi = \text{const}$: $\frac{h(t, \bar{x}, \bar{w})}{s(t, \bar{x}, \bar{w})} = -\frac{3}{5} U_0 = -\frac{3}{5} U_0 \frac{Z_h(\bar{\chi})}{Z_s(\bar{\chi})}$,

где $Z_s(\bar{\chi}), Z_h(\bar{\chi}), \bar{\chi} = \frac{U_0}{k\varphi}$ определены в [5]. В случае однородной релаксации

$f = f(t, \bar{\xi})$ и $s = s(t, \bar{w})$. Соответственно, система (1) будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{d^2}{2} \int_0^b d\xi_1 \left(\int_0^{2\pi} g(f f_1' - f f_1) b db d\theta \right) - d^2 \chi_1 \int_{g \leq 2\chi_1} d\xi_1 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |\cos \omega| (\bar{f} - f_0) \sin \omega d\omega d\theta \\ \frac{\partial s}{\partial t} &= d^2 \chi_1 \int_{g \leq 2\chi_1} d\mathbf{g} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |\cos \omega| (\bar{f} - f_0) \sin \omega d\omega d\theta, \quad \frac{3}{5} U_0 s + h = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Пусть $S(t, \bar{w}) = \int_{\Omega_{del}} \bar{F}_d \ln \bar{F}_d d\bar{r} d\bar{g}$. Тогда $H_d = \frac{k}{2} \int S(t, \bar{w}) d\bar{w}$ есть H – функция еди-

ницы объёма для молекул в связанном состоянии. Учитывая представление для функции распределения молекул в связанном состоянии, получим, что про-

изводство Н-функции в единицу времени в единице объёма для этих молекул определяется как:

$$\dot{H}_d = \frac{k}{2} \int \frac{\partial S}{\partial t} d\mathbf{w} = \frac{kd^2}{2} \int_{g \leq 2\chi_1} \left(\int_0^{\frac{2\pi}{\phi}} \int_0^{\pi} (\ln f_0 + 1 + \frac{3U_0}{5k\phi})(\bar{f} - f_0) R(\omega, \theta) d\omega d\theta d\bar{g} \right) d\bar{w}. \quad (4)$$

Н-функцию молекул, находящихся в несвязанном состоянии, запишем как обычно: $H_f = k \int \int f \ln f e^{1/2 + \frac{3U_0}{10k\phi}} d\bar{\xi} d\xi_1$, тогда:

$$\begin{aligned} \dot{H}_d + \frac{\partial H_f}{\partial t} &= kd^2 / 2 \int \int \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \ln \frac{ff_1}{f_1'f'} (f_1'f' - ff_1) bdbd\epsilon d\bar{\xi}_1 d\bar{\xi} + \\ &+ \frac{k}{2} d^2 \int_{g \leq 2\chi_1} \int_0^{\pi} \int_0^{2\lambda} \ln \frac{f_0}{f} (\bar{f} - f_0) R(\omega, \theta) d\omega d\theta d\bar{g} d\bar{w} \leq 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Таким образом, для построенной выше кинетической модели имеет место Н-теорема. Тогда решение задачи об однородной релаксации при $t \rightarrow +\infty$ будет выходить на равновесное состояние, при котором $\dot{H} = \dot{H}_d + \frac{\partial H_f}{\partial t} = 0$, откуда следует, что $f_1'f' = ff_1$, $\bar{f} = f_0$.

Тогда $f = n_f \left(\frac{m}{2\pi k T_f} \right)^{3/2} \exp\left\{ -\frac{m}{2k T_f} \bar{\xi}^2 \right\}$, где n_f есть плотность молекул, находящихся в свободном состоянии, а T_f можно трактовать как их температуру. Так как $\bar{f} = f_0$, то $f_0 = f^2(\bar{w}) = n_f^2 \left(\frac{m}{2\pi k T_f} \right)^3 \exp\left\{ -\frac{m}{k T_f} \bar{w}^2 \right\}$. В случае задачи о релаксации уравнения сохранения имеют следующий вид:

$$\frac{\partial n_f}{\partial t} + \frac{\partial n_d}{\partial t} = \frac{\partial n}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \rightarrow n = \text{const}, T = \text{const}.$$

Используя равновесные значения искомых функций, получим, что $n_f + m_f^2 = n$.

$$T_f \frac{1 + \frac{m_f \chi_f^{3/2}}{2} \left(1 + \frac{2}{5} \chi_f \right)}{1 + m_f \chi_f^{3/2}} = T, \quad r = 2\sqrt{\pi} d^3 Z_s(\bar{\chi}), \quad \chi_f = \frac{U_0}{k T_f}.$$

Кинетическое уравнение состояния (2), если его записать через равновесные значения функций распределения, примет следующий вид:

$$\left(P + \frac{U_0}{5} m_f^2 \chi_f^{3/2} \right) = knT.$$

Введём величину $V = \frac{1}{n_f}$. Она имеет смысл объёма, который занимает газ.

Уравнение состояния тогда переписывается как:

$$\left(P + \frac{U_0}{5} \frac{r\chi_f^{3/2}}{V^2}\right) \frac{V}{\left(1 + \frac{r\chi_f^{3/2}}{V}\right)} = kT.$$

Уравнение Больцмана является членом нулевого порядка при разложении ВВГКУ-цепочки по малому параметру $\varepsilon = nd^3$. В [5] показано, что неидеальность газа должна учитываться, когда $1 \approx \varepsilon\chi_f^{3/2}$. Если записать уравнение состояния,

предполагая, что $\varepsilon\chi_f^{3/2} < 1$, то оно примет вид $\left(P + \frac{U_0}{5} \frac{r\chi_f^{3/2}}{V^2}\right)(V - r\chi_f^{3/2}) = kT$.

Нетрудно видеть, что это уравнение Ван-дер-Ваальса, в котором феноменологические параметры a и b имеют конкретные выражения через макропараметры газа и константы межмолекулярного взаимодействия. Применяя процедуру получения выражения для критической температуры, получим, что $kT_{\text{крит}} = \frac{8}{135}U_0$.

Заключение

Предположение, что $\varepsilon\chi_f^{3/2} < 1$, соответствует тому, что подход к критическому состоянию происходит со стороны газа, при этом критическая температура выражается через характерное значение межмолекулярного потенциала взаимодействия молекул. В данной кинетической модели могут быть использованы и другие потенциалы взаимодействия между молекулами, тогда в выражении для критической температуры будет другая константа перед U_0 . Чтобы получить изотерму для неидеального газа при любых значениях температуры, нужно получить (2), исходя из решения (3) (задачи о релаксации), что в настоящей момент и делается.

БЛАГОДАРНОСТИ / ACKNOWLEDGMENTS

Данная работа выполнена в Московском авиационном институте (МАИ) при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках соглашения о предоставлении субсидии № 14.577.21.0231 от 29.09.2016 г. между МАИ и министерством (уникальный идентификатор ПНИЭР–RFMEF157716X0231).

This work was carried out at the Moscow Aviation Institute (MAI) with the financial support of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation within the framework of the agreement on granting the subsidy No. 14.577.21.0231 dated September 29, 2016 between the MAI and the Ministry (unique identifier PNIER-RFMEF157716X0231).

Статья поступила в редакцию 21.02.2018 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов М.: Иностранная литература, 1960. 510 с.
2. Климонтович Ю.Л. Статистическая теория. М.: Наука, 1982. 608 с.
3. Климонтович Ю.Л. Кинетическая теория неидеальных газов и плазмы. М.: Наука, 1975. 352 с.
4. Власов А.А. Нелокальная статистическая механика. М.: Наука, 1976. 264 с.
5. Бишаев А.М., Рыков В.А. Построение системы кинетических уравнений для неидеального газа // Теплофизика высоких температур. 2017. Т. 55. № 1. С. 31–43.

REFERENCES

1. Chepmen S., Kauling T. *Matematicheskaya teoriya neodnorodnykh gazov* [The mathematical theory of nonuniform gases]. Moscow, Inostrannaya literatura Publ., 1960. 510 p.
2. Klimontovich Yu.L. *Statisticheskaya teoriya* [Statistical theory]. Moscow, Nauka Publ., 1982. 608 p.
3. Klimontovich Yu.L. *Kineticheskaya teoriya neideal'nykh gazov i plazmy* [Kinetic theory of nonideal gases and plasmas]. Moscow, Nauka Publ., 1975. 352 p.
4. Vlasov A.A. *Nelokal'naya statisticheskaya mekhanika* [Nonlocal statistical mechanics]. Moscow, Nauka Publ., 1976. 264 p.
5. Bishaev A.M., Rykov V.A. [The construction of a system of kinetic equations for a nonideal gas]. In: *Teplofizika vysokikh temperatur* [High Temperature], 2017, vol. 55, no. 1, pp. 31–43.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Бишаев Александр Михайлович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики Московского физико-технического института (государственного университета);
e-mail: bishaev@bk.ru;

Рыков Владимир Алексеевич – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Вычислительного центра Российской академии наук им. А.А. Дородницына;
e-mail: bishaev@bk.ru;

Абгарян Микаэл Варданович – инженер Научно-исследовательского института прикладной механики и электродинамики МАИ;
e-mail: chatebrian@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Aleksandr M. Bishaev – Doctor in Physical and Mathematical sciences, professor at the Department of Higher Mathematics, Moscow Institute of Physics and Technology (State University);
e-mail: bishaev@bk.ru;

Vladimir A. Rikov – PhD in Physical and Mathematical sciences, leading researcher, Dorodnicyn Computing Centre (Russian Academy of Science);
e-mail: bishaev@bk.ru;

Michael V. Abgaryan – engineer, Research Institute of Applied Mechanics and Electrodynamics of MAI;
e-mail: chatebrian@mail.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Бишаев А.М., Рыков В.А., Абгарян М.В. H-теорема и уравнение состояния для кинетической модели неидеального газа // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2018. № 1. С. 73–81.
DOI: 10.18384/2310-7251-2018-1-73-81.

FOR CITATION

Bishaev A.M., Rikov V.A., Abgaryan M.V. The H-theorem and equation of state for kinetic model of imperfect gas. In: *Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*. 2018. no. 1. pp. 73–81.
DOI: 10.18384/2310-7251-2018-1-73-81.

УДК 533.72

DOI: 10.18384/2310-7251-2018-1-82-90

ТЕОРИЯ ИСПАРЕНИЯ ДВУХ ОДИНАКОВЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ АЭРОЗОЛЬНЫХ КАПЕЛЬ НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Хасанов А.С.

*Российский экономический университет имени Г.В. Плеханова
117997, г. Москва, Стремянный пер., д. 36, Российская Федерация*

Аннотация. В данной статье задача об испарении двух одинаковых взаимодействующих аэрозольных капель в диффузионном режиме решена операторными методами. Для времени полного испарения двух капель приведены точная и приближенная формулы.

Ключевые слова: аэрозольная капля, испарение капель, взаимодействующие капли.

EVAPORATION THEORY FOR TWO IDENTICAL INTERACTING AEROSOL DROPS ON THE BASIS OF THEORY OF LINEAR OPERATORS

A. Khasanov

*Plekhanov Russian University of Economics
Stremyanny per. 36, 117997 Moscow, Russian Federation*

Abstract. The problem of evaporation of two identical interacting aerosol drops in diffusion mode is solved by operator methods. The exact and approximate formulas are given for the complete evaporation time of two drops.

Key words: aerosol drops, evaporation of drops, interacting drops.

Введение

Задачи об испарении капель с учётом различных факторов рассматривались в целом ряде работ [1–5]. В случае твёрдых аэрозольных частиц задачи об их сублимации также рассматривались с учётом различных факторов [7; 8]. Решение задачи об испарении двух взаимодействующих аэрозольных капель с использованием бисферической системы координат приведено в работе [6]. Этот метод является достаточно сложным и имеет ограниченную область применения. Например, он неприменим для решения различных задач о двух взаимодействующих двухслойных частицах. С нашей точки зрения, более простыми методами для решения задач о двух взаимодействующих аэрозольных частицах являются операторные методы [7]. Целью данной работы является решение задачи об испарении двух взаимодействующих аэрозольных капель операторными методами и получение точных и приближенных формул для поправочного коэффициента к формуле для времени полного испарения одиночной аэрозольной частицы, характеризующего влияние фактора взаимодействия двух частиц. Для простоты

в данной работе мы рассматриваем испарение двух одинаковых взаимодействующих частиц.

Методы

Пусть две одинаковые неподвижные капли чистого вещества находятся в бинарной газовой смеси. Первый компонент смеси состоит из молекул летучего вещества капли, а второй компонент – из молекул несущего газа. Молекулы газа на поверхностях капель не испытывают фазового перехода. Пусть a – радиус капли, λ – средняя длина свободного пробега молекул газовой смеси. Будем считать, что $\lambda/a \ll 1$. Пусть n_1 и n_2 – численные концентрации молекул первого и второго компонентов смеси, $n_0 = n_1 + n_2$, $c_1 = n_1/n_0$. Будем считать, что $c_1 \ll 1$ (процесс испарения протекает в диффузионном режиме). Пусть T_e – распределение температуры в газовой смеси. Будем считать, что на большом расстоянии от капель температура T_e и относительная концентрация c_1 постоянны и равны соответственно значениям $T_{e\infty}$ и $c_{1\infty}$. Поле температуры T_e характеризуется малыми перепадами: $|(T_e - T_{e\infty})/T_{e\infty}| \ll 1$. Пусть $T_i^{(j)}$ – поле температуры внутри j -й капли, где $j \in \{1, 2\}$. Поля T_e , $T_i^{(j)}$ и c_1 описываются следующей системой уравнений:

$$\Delta T_e = 0, \Delta T_i^{(j)} = 0, \Delta c_1 = 0. \quad (1)$$

Перейдём к граничным условиям на поверхностях капель. Для полей температур выполняется следующее условие:

$$T_e = T_i^{(j)} \text{ на поверхности } j\text{-й капли.} \quad (2)$$

Пусть $c_{1s}(T)$ – относительная концентрация молекул насыщенных паров вещества капель при температуре T . Будем считать, что

$$c_1 = c_{1s}(T_i^{(j)}) \text{ на поверхности } j\text{-й капли.} \quad (3)$$

Пусть T_{i0} – невозмущённое значение температуры поверхности одиночной капли, то есть значение температуры поверхности одиночной капли, когда вторая капля находится на достаточно большом расстоянии от неё. Решение задачи об испарении одиночной капли приводит к следующему уравнению относительно T_{i0} [6]:

$$\kappa_e (T_{i0} - T_{e\infty}) + L_1 m_1 n_0 D_{12} (c_{1s}(T_{i0}) - c_{1\infty}) = 0,$$

где κ_e и D_{12} – коэффициент теплопроводности и коэффициент взаимной диффузии компонентов бинарной смеси, L_1 и m_1 – удельное тепло фазового перехода и масса молекул первого компонента. Для величин $c_{1s}(T_i^{(j)})$ на поверхностях капель используются следующие линеаризованные соотношения:

$$c_{1s}(T_i^{(j)}) = c_{1s}(T_{i0}) + \frac{\partial c_{1s}}{\partial T}(T_{i0})(T_i^{(j)} - T_{i0}) \text{ на поверхности } j\text{-й капли.}$$

Для радиальных потоков тепла через поверхности капель выполняются следующие условия:

$$-\kappa_e (\nabla T_e, \vec{e}_j) - L_1 m_1 n_0 D_{12} (\nabla c_1, \vec{e}_j) = -\kappa_i (\nabla T_i^{(j)}, \vec{e}_j), \quad (4)$$

где \vec{e}_j – единичный вектор внешней нормали к поверхности j -й капли, запись (\vec{a}, \vec{b}) означает скалярное произведение векторов \vec{a} и \vec{b} , κ_i – коэффициент теплопроводности вещества капель.

Перейдём к решению системы уравнений (1). Пусть O_1 и O_2 – центры капель, O – середина отрезка O_1O_2 , l – расстояние между центрами капель. Выберем декартову систему координат $Oxyz$, в которой ось Oz направлена от центра первой к центру второй капли. Везде далее r , θ , φ – сферические координаты точки в системе координат с началом в точке O . Путём параллельного переноса системы $Oxyz$ в точки O_1 и O_2 получим ещё две системы координат. Везде далее r_j , θ_j , φ_j – сферические координаты точки в системе координат с началом в точке O_j , где $j \in \{1, 2\}$. Поля T_e , $T_i^{(j)}$ и c_1 обладают свойством осевой симметрии относительно оси Oz . Пусть P_n – многочлен Лагранжа, $P_n^{(j)} = P_n(\cos \theta_j)$, $H_n^{(j)} = r_j^n P_n(\cos \theta_j)$, $H_{-n-1}^{(j)} = r_j^{-n-1} P_n(\cos \theta_j)$. Поле T_e представляется в виде $T_e = T_{e\infty} + \varepsilon^{(1)} + \varepsilon^{(2)}$, где $\varepsilon^{(j)}$ – возмущение значения $T_{e\infty}$, вызванное j -й каплей и удовлетворяющее условиям $\Delta \varepsilon^{(j)} = 0$ и $\lim_{r \rightarrow \infty} \varepsilon^{(j)} = 0$. Записав каждое возмущение в виде разложения по объёмно-сферическим функциям в своей системе координат [7], получим разложение:

$$T_e = T_{e\infty} + \sum_{s=0}^{\infty} A_{es}^{(1)} H_{-s-1}^{(1)} + \sum_{n=0}^{\infty} A_{en}^{(2)} H_{-n-1}^{(2)},$$

где $A_{es}^{(1)}$, $A_{en}^{(2)}$ – неопределённые коэффициенты.

Аналогично разлагается c_1 :

$$c_1 = c_{1\infty} + \sum_{s=0}^{\infty} A_{cs}^{(1)} H_{-s-1}^{(1)} + \sum_{n=0}^{\infty} A_{cn}^{(2)} H_{-n-1}^{(2)},$$

где $A_{cs}^{(1)}$, $A_{cn}^{(2)}$ – неопределённые коэффициенты.

Так как поля $T_i^{(j)}$ ограничены при $r_j \rightarrow 0$, то они представляются в следующем виде:

$$T_i^{(j)} = T_{i0} + \sum_{s=0}^{\infty} A_{is}^{(j)} H_s^{(j)},$$

где $A_{is}^{(j)}$ – неопределённые коэффициенты.

Перейдём к поиску неопределённых коэффициентов из граничных условий на поверхностях частиц. Пусть $A_{en}^{(1)} = (T_{i0} - T_{e\infty})a^{n+1}x_{en}^{(1)}$, $A_{en}^{(2)} = (T_{i0} - T_{e\infty})(-1)^n a^{n+1}x_{en}^{(2)}$, $A_{cn}^{(1)} = (c_{1s}(T_{i0}) - c_{1\infty})a^{n+1}x_{cn}^{(1)}$, $A_{cn}^{(2)} = (c_{1s}(T_{i0}) - c_{1\infty})(-1)^n a^{n+1}x_{cn}^{(2)}$, $A_{in}^{(1)} = (T_{i0} - T_{e\infty})a^{-n}x_{in}^{(1)}$, $A_{in}^{(2)} = (T_{i0} - T_{e\infty})(-1)^n a^{-n}x_{in}^{(2)}$, где $x_{en}^{(j)}$, $x_{cn}^{(j)}$, $x_{in}^{(j)}$ – неопределённые коэффициенты.

При учёте граничных условий на поверхности одной капли, вблизи этой капли объёмно-сферические функции, записанные в сферической системе координат с началом в центре другой капли, разлагаются [7] по объёмно-сферическим функциям, записанным в сферической системе координат с началом в центре рассматриваемой капли по формулам

$$H_{-n-1}^{(2)} = (-1)^n \sum_{s=0}^{\infty} I^{-n-s-1} C_{n+s}^n H_s^{(1)},$$

$$H_{-n-1}^{(1)} = \sum_{s=0}^{\infty} I^{-n-s-1} C_{n+s}^n (-1)^s H_s^{(2)},$$

а в получившихся двойных суммах меняется порядок суммирования. Пусть

$$X_e^{(j)} = (x_{e0}^{(j)}, x_{e1}^{(j)}, \dots)^T, \quad X_c^{(j)} = (x_{c0}^{(j)}, x_{c1}^{(j)}, \dots)^T, \quad X_i^{(j)} = (x_{i0}^{(j)}, x_{i1}^{(j)}, \dots)^T$$

– бесконечномерные векторы. В случае двух одинаковых капель картина симметрична относительно плоскости Oxy . Поэтому $X_e^{(1)} = X_e^{(2)} = X_e$, $X_c^{(1)} = X_c^{(2)} = X_c$, $X_i^{(1)} = X_i^{(2)} = X_i$, а граничные условия будем учитывать только на поверхности первой капли.

Поиск трёх векторов X_e , X_c , X_i будем вести в пространстве [7]

$$l_1 = \left\{ X \mid X = (x_1, x_2, \dots)^T, \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| < +\infty \right\}$$

операторными методами. Пространство

l_1 является линейным нормированным пространством с нормой $\|X\| = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|$.

Пусть $L_1^{(M)}$ – линейное пространство матриц A с бесконечным числом строк и столбцов, элементы a_{sn} которых удовлетворяют условию $\sup_n \sum_{s=1}^{\infty} |a_{sn}| < +\infty$. Это

пространство является линейным нормированным пространством с нормой $\|A\| = \sup_n \sum_{s=1}^{\infty} |a_{sn}|$. В пространстве l_1 рассмотрим линейный оператор, действующий

из l_1 в l_1 по формуле $Y = AX$, где $A \in L_1^{(M)}$, $X \in l_1$, AX – произведение матрицы A на вектор X . Для матрицы и порождённого ею матричного оператора будем использовать одно и тоже обозначение. Можно показать, что $AX \in l_1$, если $A \in L_1^{(M)}$, $X \in l_1$, а норма матричного оператора A , согласованная с нормой вектора X ,

совпадает с числом $\|A\| = \sup_n \sum_{s=1}^{\infty} |a_{sn}|$. Далее наряду с обозначением a_{sn} для элемен-

та с индексами s и n матрицы A будем использовать и другое обозначение $(A)_{sn}$.

Граничные условия (2), (3) и (4) приводят к следующим уравнениям:

$$X_e + MX_e - X_i = E_1, \quad (5)$$

$$X_c + MX_c - \frac{\partial c_{1s}}{\partial T}(T_{i0}) \frac{T_{i0} - T_{e\infty}}{c_{1s}(T_{i0}) - c_{1\infty}} X_i = E_1, \quad (6)$$

$$-X_e + \Lambda_1 MX_e + X_c - \Lambda_1 MX_c = \frac{\kappa_i}{\kappa_e} X_i, \quad (7)$$

где $E_1 = (1, 0, 0, \dots)^T \in l_1$, а элементы матриц $\Lambda_1 \in L_1^{(M)}$ и $M \in L_1^{(M)}$ определяются

по формулам $(M)_{sn} = C_{n+s-2}^{n-1} \tau^{n+s-1}$, $(\Lambda_1)_{sn} = \frac{s-1}{s} \delta_{sn}$, $s \geq 1, n \geq 1, \tau = a/l, \delta_{sn}$ – символ

Кронекера.

Можно показать, что $\|M\| < 1$ при $0 \leq \tau < 0,5$ и $\|\Lambda_1\| = 1$, а решением системы (5) – (7) являются векторы $X_i = 0, X_e = X_c = (E + M)^{-1} E_1$, где элементы матрицы E определяются по формуле $(E)_{sn} = \delta_{sn}$. Отсюда следует, что $T_i^{(1)} = T_i^{(2)} = T_{i0}$. Поля T_e и c_1 могут быть записаны с использованием ограниченных линейных операторов и линейных функционалов, определённых в l_1 . Так как нашей целью является нахождение времени полного испарения капель, приведём формулу только для величины $\frac{\partial c_1}{\partial r_1}$ на поверхности первой капли:

$$\frac{\partial c_1}{\partial r_1} = \frac{c_{1s}(T_{i0}) - c_{1\infty}}{a} P(\theta_1) (\Lambda_3 M - \Lambda_2) (E + M)^{-1} E_1, \quad (8)$$

где элементы матриц Λ_2 и Λ_3 определяются по формулам $(\Lambda_2)_{sn} = s\delta_{sn}$, $(\Lambda_3)_{sn} = (s-1)\delta_{sn}$, (можно показать, что $(\Lambda_3 M - \Lambda_2)(E + M)^{-1} E_1 \in l_1$), а $P(\theta_1)$ – ограниченный линейный функционал, определённый в l_1 и равный для любого $X = (x_1, x_2, \dots)^T \in l_1$ скалярному произведению векторов $(P_0(\cos\theta_1), P_1(\cos\theta_1), P_2(\cos\theta_1), \dots)$ и (x_1, x_2, \dots) .

Используя формулу (8), мы сможем найти в сферической системе координат с началом в центре первой капли величину потока первого компонента через бесконечно малый элемент её поверхности:

$$dQ_1 = -n_0 D_{12} \frac{\partial c_1}{\partial r_1} a^2 \sin\theta_1 d\theta_1 d\varphi_1. \quad (9)$$

Проинтегрировав обе части равенства (9) по поверхности первой капли, на основании равенств $(\Lambda_2)_{11} = 1, (\Lambda_3)_{11} = 0$ и свойств многочленов Лежандра найдём поток Q_1 первого компонента бинарной смеси через поверхность первой капли:

$$Q_1 = 4\pi n_0 D_{12} a (c_{1s}(T_{i0}) - c_{1\infty}) E_1^T (E + M)^{-1} E_1. \quad (10)$$

Зная Q_1 , можно перейти к изучению зависимости переменного радиуса a испаряющихся капель от времени t , считая при этом, что расстояние между центрами частиц l остаётся постоянным. Так как

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{4}{3} \pi a^3 \rho_i \right) = -m_1 Q_1,$$

где ρ_i – плотность вещества капель, $a = l\tau$, то при постоянном значении l получим дифференциальное уравнение с разделёнными переменными:

$$dt = - \frac{\rho_i l^2}{m_1 n_0 D_{12} (c_{1s}(T_{i0}) - c_{1\infty})} \cdot \frac{\tau d\tau}{E_1^T (E + M)^{-1} E_1}. \quad (11)$$

Пусть $t_e^{(s)}$ – время полного испарения одиночной аэрозольной капли с начальным радиусом a_0 , а $t_e^{(d)}$ – время полного испарения дублета из двух аэрозольных капель с начальным радиусом a_0 . Проинтегрировав обе части этого уравнения (11) от 0 до $t_e^{(d)}$, получим

$$t_e^{(d)} = \frac{\rho_i a_0^2}{2m_1 n_0 D_{12} (c_{1s}(T_{i0}) - c_{1\infty})} \cdot \frac{2}{\tau_0^2} \int_0^{\tau_0} \frac{\tau d\tau}{E_1^T (E + M)^{-1} E_1}, \quad (12)$$

где a_0 – начальное значение радиуса капель, $\tau_0 = a_0/l$.

Из формулы (12) можно вывести формулу для времени полного испарения одиночной аэрозольной капли с начальным радиусом a_0 . Переход к одиночной аэрозольной капле равносильен переходу в формуле (12) к пределу при $l \rightarrow +\infty$ при постоянном значении a_0 . Так как $\tau_0 = a_0/l$, то предельный переход при $l \rightarrow +\infty$ равносильен предельному переходу в равенстве (12) при $\tau_0 \rightarrow 0$. Так как $\lim_{\tau \rightarrow 0} E_1^T (E + M)^{-1} E_1 = 1$, то по правилу Лопиталя:

$$\lim_{\tau_0 \rightarrow 0} \frac{2}{\tau_0^2} \int_0^{\tau_0} \frac{\tau d\tau}{E_1^T (E + M)^{-1} E_1} = 1. \quad (13)$$

Так как $\lim_{\tau_0 \rightarrow 0} t_e^{(d)} = \lim_{l \rightarrow +\infty} t_e^{(d)} = t_e^{(s)}$, то из формул (12) и (13) получим:

$$t_e^{(s)} = \frac{\rho_i a_0^2}{2m_1 n_0 D_{12} (c_{1s}(T_{i0}) - c_{1\infty})}. \quad (14)$$

Таким образом, величина

$$f = \frac{2}{\tau_0^2} \int_0^{\tau_0} \frac{\tau d\tau}{E_1^T (E + M)^{-1} E_1} \quad (15)$$

играет роль поправочного коэффициента, характеризующего влияние фактора взаимодействия капель на их время полного испарения:

$$t_e^{(d)} = f \cdot t_e^{(s)}. \quad (16)$$

Анализ полученного результата

Для приближенных вычислений коэффициента f по формуле (15) достаточно возможностей программы Excel. Если оставить в матрицах E и M первые 52 строки и 52 столбца, то получим очень высокую точность вычислений. Величина $E_1^T (E + M)^{-1} E_1$ расположена в левом верхнем углу матрицы $(E + M)^{-1}$. Так как $0 \leq \tau < 0,5$, то пусть, для определённости, величина $\tau_0 = a_0/l$ не превосходит 0,49, что соответствует условию $l \geq 2,04a_0$. При вычислении значения поправочного коэффициента f по формуле (15) для конкретных значений $\tau_0 \leq 0,49$ определённый интеграл можно найти с большой точностью по приближенной формуле Симпсона. Полученные значения поправочного коэффициента f близки к значениям, вычисленным с применением бисферической системы координат.

Если при нахождении матрицы $(E + M)^{-1}$ не учитывать степени τ^n , где $n > 7$, то формула $(E + M)^{-1} = E + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i M^i$ приобретает вид:

$$(E + M)^{-1} = E - M + M^2 - M^3 + M^4 - M^5 + M^6 - M^7,$$

так как $M^n = 0$ при $n > 7$. Отсюда следует, что:

$$E_1^T (E + M)^{-1} E_1 = 1 - \tau + \tau^2 - \tau^3 + 2\tau^4 - 3\tau^5 + 5\tau^6 - 9\tau^7.$$

Если теперь выражение $\frac{1}{E_1^T (E + M)^{-1} E_1}$ разложить по степеням τ^n , не учитывая также степени τ^n , где $n > 7$, то получим выражение:

$$\frac{1}{E_1^T (E + M)^{-1} E_1} = 1 + \tau - \tau^4 - \tau^6 + 2\tau^7.$$

Отсюда

$$\frac{2}{\tau_0^2} \int_0^{\tau_0} \frac{\tau d\tau}{E_1^T (E + M)^{-1} E_1} = 1 + \frac{2}{3} \tau_0 - \frac{1}{3} \tau_0^4 - \frac{1}{4} \tau_0^6 + \frac{4}{9} \tau_0^7.$$

В результате получим приближенные формулы:

$$f = 1 + \frac{2 a_0}{3 l} - \frac{1}{3} \left(\frac{a_0}{l} \right)^4 - \frac{1}{4} \left(\frac{a_0}{l} \right)^6 + \frac{4}{9} \left(\frac{a_0}{l} \right)^7, \quad (17)$$

$$t_e^{(d)} = t_e^{(s)} \left[1 + \frac{2 a_0}{3 l} - \frac{1}{3} \left(\frac{a_0}{l} \right)^4 - \frac{1}{4} \left(\frac{a_0}{l} \right)^6 + \frac{4}{9} \left(\frac{a_0}{l} \right)^7 \right]. \quad (18)$$

Если значения поправочного коэффициента f находить по точной формуле (15) и по приближенной формуле (17) при $a_0 / l \leq 0,49$, то есть при $l \geq 2,04a_0$, то относительная погрешность не превосходит 0,5%.

Статья поступила в редакцию 20.02.2018 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Высокоморная О.В., Кузнецов Г.В., Стрижак П.А. Прогностическое определение интегральных характеристик испарения капель воды в газовых средах с различной температурой // Инженерно-физический журнал. 2017. Т. 90. № 3. С. 648–657.
2. Высокоморная О.В., Кузнецов Г.В., Стрижак П.А. Испарение капель воды в высокотемпературной газовой среде // Инженерно-физический журнал. 2016. Т. 89. № 1. С. 133–142.
3. Кузьмин М.К. Теория нестационарного процесса испарения сферической аэрозольной капли с учётом зависимости давления насыщенного пара от кривизны её поверхности // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика–математика. 2012. № 3. С. 39–49.
4. Кузьмин М.К. Анализ формул для вычисления времени полного испарения одиночных капель воды // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика–математика. 2015. № 1. С. 56–63.
5. Кузьмин М.К., Хасанов А.С. Формула для вычисления времени полного испарения аэрозольных капель с учётом коэффициентов испарения и поверхностного натяжения // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика–математика. 2017. № 3. С. 68–75.
6. Щукин Е.Р., Яламов Ю.И., Шулиманова З.Л. Избранные вопросы физики аэрозолей: Учебное пособие. М.: МПУ, 1992. 297 с.
7. Яламов Ю.И., Хасанов А.С. Теория движения сублимирующих и взаимодействующих твёрдых сферических неоднородных аэрозольных частиц во внешних полях. Монография. М.: МГОУ, 2006. 221 с.
8. Яламов Ю.И., Хасанов А.С. Фотофорез крупных сублимирующих аэрозольных частиц // Теплофизика высоких температур. 2005. Т. 44. № 2. С. 293–297.

REFERENCES

1. Vysokomornaya O.V., Kuznetsov G.V., Strizhak P.A. Prognosticheskoe opredelenie integral'nykh kharakteristik ispareniya kapel' vody v gazovykh sredakh s razlichnoi temperaturoi [Prognostic determination of the integral characteristics of evaporation of water droplets in gaseous media at different temperatures]. In: *Inzhenerno-fizicheskii zhurnal* [Journal of Engineering Physics and Thermophysics], 2017, vol. 90, no. 3, pp. 648–657.
2. Vysokomornaya O.V., Kuznetsov G.V., Strizhak P.A. Isparenie kapel' vody v vysokotemperaturnoi gazovoi srede [Evaporation of water droplets in high temperature gas environment]. In: *Inzhenerno-fizicheskii zhurnal* [Journal of Engineering Physics and Thermophysics], 2016, vol. 89, no. 1, pp. 133–142.
3. Kuz'min M.K. Teoriya nestatsionarnogo protsesssa ispareniya sfericheskoi aerazol'noi kapli s uchetom zavisimosti davleniya nasyshchennogo para ot krivizny ee poverkhnosti [Theory of a nonstationary process of evaporation of a spherical aerosol droplet with allowance for the dependence of the vapor pressure on the curvature of its surface]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika–matematika* [Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], 2012, no. 3, pp. 39–49.

4. Kuz'min M.K. Analiz formul dlya vychisleniya vremeni polnogo ispareniya odinochnykh kapel' vody [Analysis of formulas for calculating time of complete evaporation of single water droplets]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika* [Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], 2015, no. 1, pp. 56–63.
5. Kuz'min M.K., Khasanov A.S. Formula dlya vychisleniya vremeni polnogo ispareniya aerazol'nykh kapel' s uchotom koeffitsientov ispareniya i poverkhnostnogo natyazheniya [Formula for calculating time of complete evaporation of the aerosol droplets with allowance for the coefficients of evaporation and surface tension]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika* [Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], 2017, no. 3, pp. 68–75.
6. Shchukin E.R., Yalamov Yu.I., Shulimanova Z.L. *Izbrannye voprosy fiziki aerazolei* [Selected topics of the physics of aerosols]. Moscow, MPU Publ., 1992. 297 p.
7. Yalamov Yu.I., Khasanov A.S. *Teoriya dvizheniya sublimiruyushchikh i vzaimodeistvuyushchikh tverdykh sfericheskikh neodnorodnykh aerazol'nykh chastits vo vneshnikh polyakh* [The theory of movement and the sublimation of interacting rigid spherical inhomogeneous aerosol particles in external fields]. Moscow, MRSU Ed. off. Publ., 2006. 221 p.
8. Yalamov Yu.I., Khasanov A.S. Fotoforez krupnykh sublimiruyushchikh aerazol'nykh chastits [Photophoresis of large sublimating aerosol particles]. In: *Teplofizika vysokikh temperatura* [High Temperature], 2005, vol. 44, no. 2, pp. 293–297.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Хасанов Анис Салыхович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики Российского экономического университета имени Г.В. Плеханова; e-mail: ankhasanov@yandex.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Anis S. Khasanov – Doctor in Physical and Mathematical Sciences, professor at the Department of Higher Mathematics, Plekhanov Russian University of Economics; e-mail: ankhasanov@yandex.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Хасанов А.С. Теория испарения двух одинаковых взаимодействующих аэрозольных капель на основе теории линейных операторов // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2018. № 1. С. 82–90.
DOI: 10.18384/2310-7251-2018-1-82-90.

FOR CITATION

Khasanov A.S. Evaporation theory for two identical interacting aerosol drops on the basis of theory of linear operators. In: *Bulleitein of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*. 2018. no. 1. pp. 82–90.
DOI: 10.18384/2310-7251-2018-1-82-90.

РАЗДЕЛ III. ТЕОРИЯ И МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ И ВОСПИТАНИЯ

УДК 530.145 (09)

DOI: 10.18384/2310-7251-2018-1-91-99

М. ПЛАНК И ИСТОРИЯ ОТКРЫТИЯ КВАНТОВ ТЕПЛООВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Исаев В.И.

Независимый исследователь

г. Москва, Российская Федерация

Аннотация. В работе рассмотрена история открытия универсальной функции Кирхгофа – спектрального распределения энергии излучения абсолютно чёрного тела, открытие которой М. Планком в декабре 1900 г. привело к постепенному развитию квантовой теории и установлению квантовой механики в 1926–1926 гг. и фактически явилось началом новой физической эпохи – эпохи квантовой физики.

Ключевые слова: теория теплового излучения, Кирхгоф, Гельмгольц, Вин, Планк.

M. PLANCK AND HISTORY OF THE DISCOVERY OF THE QUANTA OF THE HEAT RADIATION

V. Isaev

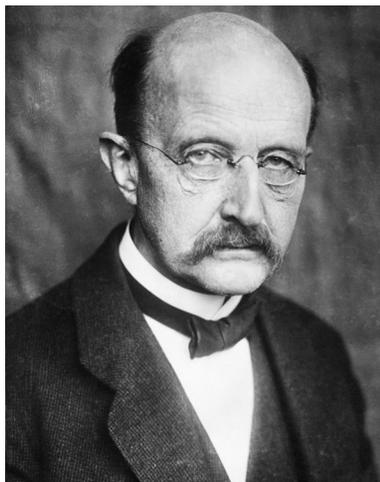
Independent researcher

Moscow, Russian Federation

Abstract. The history of the discovery of the universal Kirchhoff function, i.e. the spectral distribution of the black body energy, is considered. The discovery of this function by M. Planck in December 1900 resulted in gradual development of quantum theory and led to appearance of quantum mechanics in 1925 – 1926, which was in fact the beginning of a new physical era – quantum physics.

Key words: theory of the heat radiation, Kirchhoff, Helmholtz, Wien, Planck.

Настоящая работа является кратким изложением одного из разделов лекционного курса по истории квантовой теории, разрабатываемого автором. Актуальность темы определяется теми приложениями, которые квантовая механика получила за последнее десятилетие – необходимостью создания кванто-



М. Планк

вых компьютеров и развития систем квантовой связи, основанных на явлении квантового перепутывания связанных состояний. Без глубокого знания квантовой теории создание квантовых компьютеров и систем квантовой связи невозможно. Важность создания такого курса диктуется тем, что студенты при изучении квантовой теории зачастую испытывают трудности, и для более глубокого понимания квантовой механики автор предлагает читать студентам одновременно курс истории квантовой теории.

Макс Карл Эрнст Людвиг Планк родился 23 апреля 1858 г. в семье профессора права Иоганна Юлиуса Вильгельма фон Планка и его жены Эммы Планк, урождённой Патциг, в г. Киле. В 1867 г. семья Планка обосновалась в г. Мюнхене, где М. Планк поступил в Максимилиановскую классическую гимназию, в которой у М. Планка возник интерес к естественным наукам и проявились математические способности [1–3].

В 1874 г. после окончания гимназии М. Планк поступил в Мюнхенский университет, где физику в то время преподавал профессор Филипп Жолли. Отец посоветовал Планку перед выбором специальности поговорить с профессором Ф. Жолли, и тот представил М. Планку теоретическую физику завершённой наукой – наподобие евклидовой геометрии – и пытался убедить его найти другую область для приложения своих способностей. К счастью для науки, Макс Планк всё же выбрал физику своей специальностью [2; 3]. В 1877–1878 гг. Планк слушал лекции по теоретической физике Г. Гельмгольца и Г. Кирхгофа в Берлинском университете, а также изучал труды Р. Клаузиуса по термодинамике, которые произвели на него сильное впечатление и увлекли его в область молекулярно-кинетической теории [1–3]. В 1878 г. М. Планк окончил Мюнхенский университет, и 28 июня 1879 г. после защиты диссертации получил степень доктора философии. В 1880 г. М. Планк становится приват-доцентом кафедры физики Мюнхенского университета. Позднее в 1885 г. М. Планк был приглашён профессором теоретической физики в университет г. Кили, где он работал до 1888 г. [1–3]. Весной 1889 г. Планк становится профессором теоретической физики Берлинского университета, одновременно он также работает в Институте теоретической физики в Берлине [1–3]. К этому периоду относится тесное сотрудничество Макса Планка с Г. Гельмгольцем и А. Кундтом. Планк вспоминал об этом времени так: «Это были годы, в течение которых я испытал, пожалуй, сильнейшее расширение всего своего научного кругозора. Это было потому, что я непосредственно общался с людьми, занимавшими тогда ведущее положение в мировых научных исследованиях» [1].

Начиная с 1894 г. М. Планк выполнил ряд работ, посвящённых рассмотрению термодинамического равновесия теплового излучения с веществом, исходя из

законов термодинамики и электромагнитной теории Максвелла. Планк стремился получить математически наиболее строгое обоснование закона излучения Вина, поскольку он считал данное Вильгельмом Вином в 1896 г. объяснение использованной аналогии между газом молекул и тепловым излучением нестрогим [4]. Планк стремился показать, что последовательное рассмотрение обмена энергией между совокупностью электромагнитных резонаторов и излучением по теории Максвелла позволит получить энергетический спектр теплового излучения. Для этого Планк исследовал поглощение и излучение электромагнитных волн между осциллятором Герца и возбуждающей его электромагнитной волной и показал, что оно носит резонансный характер.

Теория дипольного электромагнитного излучения была развита Г. Герцем в 1889 г. Планку пришлось проделать большую подготовительную работу, и в период с 1897 г. по 1899 г. он представил Берлинской Академии наук пять сообщений под общим названием «О необратимых процессах излучения». Итоги данного цикла исследований Планк подвёл в статье [5, с. 191]. «Результатом этого довольно длинного ряда исследований ... было установление общей зависимости между энергией резонатора с определённым периодом собственных колебаний и излучением энергии соответствующей спектральной области в окружающем поле при стационарном обмене энергией» [5, с. 604]. В результате этого детального анализа Планку из электродинамики Максвелла удалось получить соотношение между спектральной плотностью теплового излучения $\varepsilon(\nu, T)$ и средней энергией одного резонатора (электромагнитного осциллятора) U [5, с. 191]:

$$\varepsilon(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} U(\nu, T) \quad (1)$$

где ν – частота излучения, c – скорость света, $8\pi\nu^2/c^3$ – число собственных колебаний равновесного электромагнитного излучения, отнесённое к единице объёма и единице интервала частот. М. Планк отмечал: «При этом получился тот замечательный результат, что такое соотношение совершенно не зависит от постоянной затухания осциллятора – обстоятельство, которое для меня было очень радостным и желанным, потому что оно позволяло до такой степени упростить всю проблему, что вместо энергии излучения можно было взять энергию осциллятора, и таким образом, вместо запутанной системы, имеющей много степеней свободы, возникала простая система с одной единственной степенью свободы» [5, с. 604].

Для получения закона излучения, как следует из формулы (1), было необходимо найти зависимость энергии осциллятора от температуры. Планк отмечал: «Мне не оставалось ничего другого, как подойти к проблеме ещё с противоположной стороны, с точки зрения термодинамики, в которой к тому же я чувствовал себя уверенно, как дома. В самом деле, моё прежнее изучение второго начала теории теплоты здесь мне весьма пригодились, я сразу же почувствовал, что нужно вывести соотношение не между температурой и энергией осциллятора, а между его энтропией и энергией» [5, с. 605]. В последнем сообщении «О необ-

ратимых процессах излучения» [5, с. 191] он максимально строго с точки зрения термодинамики обосновал вывод закона излучения Вина. В этой статье Планк определил зависимость энтропии S электромагнитного осциллятора от средней энергии U осциллятора в виде выражения

$$S = -\frac{U}{av} \left(\ln \left(\frac{U}{bv} \right) - 1 \right),$$

где a и b – const, откуда вследствие известной связи $\frac{\partial S}{\partial U} = \frac{1}{T}$ следует, что средняя

статистическая энергия одного электромагнитного осциллятора U имеет вид

$U(v, T) = bv^2 \exp\left(-\frac{av}{T}\right)$, что вследствие (1) сразу же приводит к закону излуче-

ния Вина:

$$\varepsilon(v, T) = \frac{8\pi bv^3}{c^3} \exp\left(-\frac{av}{T}\right). \quad (2)$$

На этом проблему термодинамического обоснования закона излучения Вина можно было бы считать исчерпанной, однако появившиеся несколько позже экспериментальные исследования вида функции $\varepsilon(v, T)$, проведённые О. Люммером и Э. Прингсгеймом, а также Г. Рубенсом и Ф. Курлбаумом показали, что закон излучения Вина (2) неточно аппроксимирует спектр теплового излучения. В работе «К истории открытия кванта действия», написанной в 1943 г., т.е. спустя более 40 лет после его открытия, Планк отмечал: «Но тут произошло событие, которое должно было привести к решающему повороту в этом деле. На заседании Немецкого физического общества 19 октября 1900 г. Ф. Курлбаум сообщил о результатах измерений энергии в области очень больших длин волн, выполненных им совместно с Г. Рубенсом, из которых следовало, что с повышением температуры зависимость интенсивности излучения чёрного тела от температуры T становится всё более близкой к пропорциональной, в явном противоречии с законом распределения Вина (2), согласно которому интенсивность излучения должна всегда оставаться конечной. Так как мне этот результат стал известен благодаря устному сообщению авторов уже за несколько дней до заседания, то у меня было время ещё перед заседанием использовать его последствия в моём методе и вычислить энтропию совершающего вынужденные колебания резонатора» [5, с. 438]. Зная, что в области коротких волн и низких температур закон излучения Вина (2) хорошо аппроксимирует кривую для $\varepsilon(v, T)$, т.е. что в этой области верно выражение $\frac{\partial^2 S}{\partial U^2} = -\frac{1}{avU}$, а в области длинных волн и высоких

температур зависимость $\varepsilon(v, T)$ пропорциональна kT , что было известно Планку из последних экспериментов Г. Рубенса и Ф. Курлбаума [5], т.е. в области длин-

ных волн верно выражение $\frac{\partial^2 S}{\partial U^2} = -\frac{c}{U^2}$. Планк определил, перепробовав раз-

личные математические выражения, что простейшее общее соотношение для $\frac{\partial^2 S}{\partial U^2}$, содержащее в себе оба предельных случая, имеет вид отношения суммы

этих двух предельных случаев $\frac{\partial^2 S}{\partial U^2} = -\frac{1}{a\nu U + U^2/c}$, откуда после интегрирования получается формула (3), содержащая в себе общий закон излучения Планка:

$$\varepsilon(\lambda, T) = \frac{c_1}{\lambda^5 \left(\exp\left(\frac{c_2}{\lambda T}\right) - 1 \right)}, \quad (3)$$

где c_1 и c_2 – постоянные.

Планк отмечал: «При этом была найдена новая формула для излучения, которую я представил на заседании Берлинского физического общества 19 октября 1900 г. и рекомендовал проверить» [5, с. 438]. Эта формула Планка (3) была проверена Рубенсом уже в ночь после заседания и показала полное соответствие экспериментальным данным, о чём на следующий день Г. Рубенс с удовлетворением сообщил М. Планку. Позже формула (3) была детально проверена Люммером и Прингсгеймом, и также было найдено удовлетворительное совпадение формулы Планка с данными измерений. Сообщение М. Планка на заседании Немецкого физического общества 19 октября 1900 г. было опубликовано под названием «Об одном улучшении закона излучения Вина» [5, с. 249]. Таким образом, сорокалетний путь поисков универсальной функции Кирхгофа был успешно завершён М. Планком. Однако, несмотря на то, что вид универсальной функции Кирхгофа был уже найден, пусть и интерполяционным путём, оставалось неясным, возможно ли вывести из теории столь счастливым образом правильно подобранную интерполяционную формулу. Эта очень сложная проблема была решена М. Планком всего за два месяца.

14 декабря 1900 г. М. Планк выступил на заседании Немецкого физического общества с сообщением «К теории распределения энергии излучения нормального спектра» [5, с. 251]. В этом сообщении Планк впервые дал теоретический вывод выражения для спектральной плотности теплового излучения в виде:

$$\varepsilon(\nu, T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3 \left(\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1 \right)}. \quad (4)$$

Этот вывод Планк выполнил, исходя из статистического подхода Больцмана, опирающегося на установленную Больцманом связь между энтропией и вероятностью системы. Он показал, что из выражения (4) следует с учётом закона смещения Вина, что энергия осциллятора должна принимать только дискретные значения – кванты энергии величиной $\varepsilon_n = nh\nu$. Поэтому 14 декабря 1900 г., считается днём рождения квантовой теории.

В более подробной форме этот вывод Планка был изложен в его последующей работе [5, с. 254] под названием «О законе распределения энергии в нормальном спектре», опубликованной в начале 1901 г. в журнале *“Annalen der physik”*. Планк рассмотрел набор N осцилляторов, находящихся в равновесии с излучением и имеющих полную энергию $U_N = NU$, где U – средняя статистическая энергия осциллятора. Вероятность W или число способов, каким можно распределить большое целое число P неразличимых элементов энергии ε по N осцилляторам, согласно формулам комбинаторики имеет известный вид:

$$W = \frac{(N+P-1)!}{P!(N-1)!} \cong \frac{(N+P)^{N+P}}{P^P N^N}.$$

Откуда, с учётом того, что N и P – большие числа, и предполагая справедливой связь между энтропией и вероятностью $S = k \ln W$ по Больцману, получаем:

$$S_n = k \ln W = k \{ (N+P) \ln(N+P) - N \ln N - P \ln P \}.$$

Затем, введя обозначение $U_N = P\varepsilon$, получим:

$$S_n = NS = kN \left\{ \left(1 + \frac{U}{\varepsilon} \right) \ln \left(1 + \frac{U}{\varepsilon} \right) - \frac{U}{\varepsilon} \ln \left(\frac{U}{\varepsilon} \right) \right\},$$

откуда сразу же следует правильная зависимость энтропии S электромагнитного осциллятора от средней энергии осциллятора U

$$S = k \left\{ \left(1 + \frac{U}{\varepsilon} \right) \ln \left(1 + \frac{U}{\varepsilon} \right) - \frac{U}{\varepsilon} \ln \left(\frac{U}{\varepsilon} \right) \right\},$$

из которой с учётом соотношения $\frac{\partial S}{\partial U} = \frac{1}{T}$ после интегрирования следует, что

средняя статистическая энергия одного осциллятора равна:

$$U = \frac{\varepsilon}{\exp\left(\frac{\varepsilon}{kT}\right) - 1}. \quad (5)$$

При этом оказалось, что для того, чтобы выражение (5) удовлетворяло закону смещения Вина $U = \nu\psi(\nu/T)$ необходимо считать, что энергия ε «элемента» или кванта пропорциональна частоте ν , т.е. $\varepsilon = h\nu$, где h – постоянная, названная впоследствии постоянной Планка. Численное значение постоянной h было определено М. Планком: $h = 6,55 \cdot 10^{-27}$ эрг · с. Он отмечал: «Эта константа, помноженная на общую для резонаторов данной группы частоту, даёт нам элемент энергии ε в эргах» [5, с. 255]. Так впервые в физической теории в декабре 1900 г. появились кванты энергии.

Тогда средняя энергия осциллятора (5) сразу же принимает вид $U = \frac{h\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}$, откуда, вследствие связи (1) между спектральной плотностью

излучения $\varepsilon(\nu, T)$ и средней энергией осциллятора U , окончательно получаем закон излучения Планка, выражающий спектральную плотность энергии электромагнитного излучения во всём диапазоне частот в виде:

$$\varepsilon(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{\left(\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1\right)}. \quad (6)$$

В своём письме Р. Вуду Планк так вспоминал о введении им квантов энергии: «... Это было чисто формальное предположение, и я первоначально не думал много об этом, памятуя только лишь о том, что я при всех обстоятельствах любой ценой должен добиться положительного результата» [5, с. 698]. В Нобелевской лекции Планк отметил, что Л. Больцман, узнав о выводе Планком закона излучения, приветствовал атомистический вывод универсальной функции теплового излучения [5, с. 607]. В результате вывода универсальной функции излучения из статистической теории М. Планку пришлось ввести в физическую теорию совершенно новую квантовую гипотезу, т.е. предположить, что излучение и поглощение энергии осцилляторов происходит минимальными дискретными порциями – квантами энергии, при этом величина самих квантов энергии пропорциональна частоте излучения. Эта квантовая гипотеза М. Планка оказалась принципиально новой, и можно сказать, что она преобразила физику XX века, направив её в русло развития квантовой теории и открыв новую физическую эпоху. Различные аспекты открытия М. Планка рассмотрены в последних исследованиях спектра теплового излучения [6–12].

Статья поступила в редакцию 12.02.2018 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Макс Планк. 1858–1958 / ред. А. Иоффе, А. Григорьян, М.: Издательство Академии Наук СССР, 1958. С. 9–45.
2. Гернек Ф. Пионеры атомного века. М.: Прогресс, 1974. С. 131–163.
3. Кляус Е.М., Франкфурт У.И. Макс Планк. М.: Наука. 1980. 392 с.
4. Исаев В.И. В. Вин и история открытия законов теплового излучения // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2016. № 4. С. 86–93.
5. Планк М. Избранные труды. М.: Наука. 1975. С. 431–442.
6. Голубева О.Н., Суханов А.Д. Идеи Планка как первооснова неклассической физики // Исследования по истории физики и механики (2009–2010). М.: Физматлит, 2010. С. 11–32.
7. Calcaneo-Roldan C., Salcido O., Santana D. A semi-analytical approach to black body radiation // European Journal of Physics. 2017. Vol. 38. № 5. 055807.
8. Boyer T.H. Understanding the Planck black body spectrum // European Journal of Physics. 2016. Vol. 37. № 6. 065102.

9. Boyer T.H. Scaling. Scattering and black body radiation in classical physics // *European Journal of Physics*. 2017. Vol. 38. № 4. 045101.
10. Poprawski W., Gnutek Z., Radojewska E.B., Poprawski R. Investigation of black body radiation // *European Journal of Physics*. 2015. Vol. 36. № 6. 065025.
11. Абекова Ж.А., Оралбаев А.Б., Абдулаева Ж.А., Баубекова М.К. Методика изложения теоретических вопросов на лекционных материалах по курсу физики // *Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований*. 2015. № 5. Часть 3. с. 407–409.
12. Nauenberg M. Max Planck and the birth of the quantum hypothesis // *American Journal of Physics*. 2016. Vol. 84. Iss. 9. pp. 709–716.

REFERENCES

1. Ioffe A., Grigoryan A. ed. *Maks Plank. 1858–1958* [Max Planck. 1858–1958]. Moscow, Izdatel'stvo Akademii Nauk SSSR Publ., 1958. pp. 9–45.
2. Herneck F. *Bahnbrecher des Atomzeitalters. Große Naturforscher von Maxwell bis Heisenberg*. Berlin, Springer, 1972.
3. Klyaus E.M., Frankfurt U.I. *Maks Plank* [Max Planck]. Moscow, Nauka Publ., 1980. 392 p.
4. Isaev V.I. [W. Wien and the history of the discovery of the laws of the heat radiation]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-Matematika* [Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], 2016, no. 4, pp. 86–93.
5. Planck M. *Izbrannye trudy* [Selected works]. Moscow, Nauka Publ., 1975. pp. 431–442.
6. Golubeva O.N., Sukhanov A.D. [Planck's ideas as the fundamental principle of non-classical physics]. In: *Issledovaniya po istorii fiziki i mekhaniki (2009–2010)* [Studies in the history of physics and mechanics (2009–2010)]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2010. pp. 11–32.
7. Calcaneo-Roldan C., Salcido O., Santana D. A semi-analytical approach to the black body radiation. In: *European Journal of Physics*, 2017, vol. 38, no. 5, 055807.
8. Boyer T.H. Understanding the Planck black body spectrum. In: *European Journal of Physics*, 2016, vol. 37, no. 6, 065102.
9. Boyer T.H. Scaling. Scattering and black body radiation in classical physics. In: *European Journal of Physics*, 2017, vol. 38, no. 4, 045101.
10. Poprawski W., Gnutek Z., Radojewska E.B., Poprawski R. Investigation of black body radiation. In: *European Journal of Physics*, 2015, vol. 36, no. 6, 065025.
11. Abekova Zh.A., Oralbaev A.B., Abdulaeva Zh.A., Baubekova M.K. *Metodika izlozheniya teoreticheskikh voprosov na leksionnykh materialakh po kursu fiziki* [The method of presentation of theoretical problems on lectures of physics]. In: *Mezhdunarodnyi zhurnal prikladnykh i fundamental'nykh issledovaniy* [International Journal of Applied and Fundamental Research], 2015, no. 5, iss. 3, pp. 407–409.
12. Nauenberg M. Max Planck and the birth of the quantum hypothesis. In: *American Journal of Physics*, 2016, vol. 84, iss. 9, pp. 709–716.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Исаев Вячеслав Игоревич – кандидат физико-математических наук, независимый исследователь (г. Москва);
e-mail: vis961@yandex.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Vyacheslav I. Isaev – PhD in physical and mathematical sciences, independent researcher (Moscow);

e-mail: vis961@yandex.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Исаев В.И. М. Планк и история открытия квантов теплового излучения // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика–математика. 2018. № 1. С. 91–99.

DOI: 10.18384/2310-7251-2018-1-91-99.

FOR CITATION

Isaev V.I. M. Planck and history of the discovery of the quanta of the heat radiation. In: *Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*, 2018, no. 1, pp. 91–99.

DOI: 10.18384/2310-7251-2018-1-91-99.



ВЕСТНИК МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ОБЛАСТНОГО УНИВЕРСИТЕТА

Научный журнал «Вестник Московского государственного областного университета» основан в 1998 г. Выпускается десять серий журнала: «История и политические науки», «Экономика», «Юриспруденция», «Философские науки», «Естественные науки», «Русская филология», «Физика-математика», «Лингвистика», «Психологические науки», «Педагогика». Все серии включены в составленный Высшей аттестационной комиссией Перечень ведущих рецензируемых научных журналов, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертации на соискание ученой степени доктора и кандидата наук по наукам, соответствующим названию серии. Журнал включен в базу данных Российского индекса научного цитирования (РИНЦ).

Печатная версия журнала зарегистрирована в Федеральной службе по надзору за соблюдением законодательства в сфере массовых коммуникаций и охране культурного наследия. Полнотекстовая версия журнала доступна в Интернете на платформе Научной электронной библиотеки (www.elibrary.ru), а также на сайте журнала www.vestnik-mgou.ru.

ВЕСТНИК МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ОБЛАСТНОГО УНИВЕРСИТЕТА

СЕРИЯ: ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА
2018. № 1

Над номером работали:

Литературный редактор М.С. Тарасова
Переводчик И.А. Улиткин
Корректор М.С. Тарасова
Компьютерная верстка Н.Н. Жильцов

Отдел по изданию научного журнала
«Вестник Московского государственного областного университета»
Информационно-издательского управления МГОУ
105005, г. Москва, ул. Радио, д. 10А, офис 98
тел. (495) 723-56-31; (495) 780-09-42 (доб. 6101)
e-mail: vest_mgou@mail.ru
сайт: www.vestnik-mgou.ru

Формат 70x108/16. Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура «Minion Pro».
Тираж 500 экз. Уч.-изд. л. 5,75, усл. п. л. 6,25.
Подписано в печать: 27.03.2018. Дата выхода в свет: 28.03.2018. Заказ № 2018/03-02.
Отпечатано в ИИУ МГОУ
105005, г. Москва, ул. Радио, 10А