

ISSN 2072-8387 (print)
ISSN 2310-7251 (online)



Вестник

МОСКОВСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
ОБЛАСТНОГО
УНИВЕРСИТЕТА

Серия

ФИЗИКА-
МАТЕМАТИКА

СОВРЕМЕННЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ
РАЗВИТИЯ ИСТОЧНИКОВ УФ-ИЗЛУЧЕНИЯ
БАКТЕРИЦИДНОГО ДИАПАЗОНА

ЛОКАЛЬНАЯ ПРОЕКТИВНО ПЛОСКАЯ
МОДЕЛЬ СФЕРЫ

К ДИНАМИКЕ ЖИДКИХ КРИСТАЛЛОВ
В ИЗМЕНЯЮЩИХСЯ МАГНИТНЫХ ПОЛЯХ



2017/ № 4

ВЕСТНИК
МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
ОБЛАСТНОГО УНИВЕРСИТЕТА

ISSN 2072-8387 (print)

2017 / № 4

ISSN 2310-7251 (online)

серия

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА

Научный журнал основан в 1998 г.

Журнал «Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика» включён в «Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук» Высшей аттестационной комиссии при Министерстве образования и науки Российской Федерации (См.: Список журналов на сайте ВАК при Минобрнауки России) по Физике (01.04.00).

The academic journal is established in 1998

«Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics» is included by the Supreme Certifying Commission of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation into "the List of leading reviewed academic journals and periodicals recommended for publishing in corresponding series basic research thesis results for a Ph.D. Candidate or Doctorate Degree" (See: the online List of journals at the site of the Supreme Certifying Commission of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation) in Physics (01.04.00).

ISSN 2072-8387 (print)

2017 / № 4

ISSN 2310-7251 (online)

series

PHYSICS AND MATHEMATICS

BULLETIN OF THE MOSCOW REGION
STATE UNIVERSITY

Учредитель журнала «Вестник Московского государственного областного университета»:

Государственное образовательное учреждение высшего образования Московской области

Московский государственный областной университет

Выходит 4 раза в год

Редакционно-издательский совет «Вестника Московского государственного областного университета»

Хроменков П.Н. — к.филол.н., проф., ректор МГОУ (председатель совета)

Ефремова Е.С. — к.филол.н., и.о. проректора по научной работе МГОУ (зам. председателя);

Клычников В.М. — к.ю.н., к.и.н., проф., проректор по учебной работе и международному сотрудничеству МГОУ (зам. председателя)

Антонова Л.Н. — д.пед.н., проф., академик РАО, Комитет Совета Федерации по науке, образованию и культуре

Асмолов А.Г. — д.псх.н., проф., академик РАО, директор Федерального института развития образования

Климов С.Н. — д.ф.н., проф., Московский государственный университет путей сообщения (МИИТ)

Клобуков Е.В. — д.филол.н., проф., Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Манойло А.В. — д.пол.н., проф., МГУ им. М.В. Ломоносова

Новоселов А.Л. — д.э.н., проф., Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова

Пасечник В.В. — д.пед.н., проф., МГОУ

Поляков Ю.М. — к.филол.н., главный редактор «Литературной газеты»

Рюмцев Е.И. — д.ф.-м.н., проф., Санкт-Петербургский государственный университет

Хухун Г.Т. — д.филол.н., проф., МГОУ

Чистякова С.Н. — д.пед.н., проф., Российская академия образования (г. Москва)

ISSN 2072-8387 (print)

ISSN 2310-7251 (online)

Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. — 2017. — № 4. — 140 с.

Журнал «Вестник Московского государственного областного университета. Серия «Физика-Математика» зарегистрирован в Федеральной службе по надзору за соблюдением законодательства в сфере массовых коммуникаций и охране культурного наследия. Регистрационное свидетельство ПИ № ФС77-26136

**Индекс серии «Физика-Математика»
по Объединенному каталогу «Пресса России» 40723**

© МГОУ, 2017.

© ИИУ МГОУ, 2017.

**Адрес Отдела по изданию научного журнала
«Вестник Московского государственного
областного университета»**

г. Москва, ул. Радио, д.10А, офис 98

тел. (495) 723-56-31; (495) 780-09-42 (доб. 6101)

e-mail: vest_mgou@mail.ru; сайт: www.vestnik-mgou.ru

Редакционная коллегия серии «Физика-Математика»

Ответственный редактор серии:

Бугаев А.С. — д.ф.-м.н., академик РАН, Московский физико-технический институт (Государственный университет)

Заместитель ответственного редактора:

Жачкин В.А. — д.ф.-м.н., проф., Московский государственный областной университет

Ответственный секретарь:

Васильчикова Е.Н. — к.ф.-м.н., доц., Московский государственный областной университет

Члены редакционной коллегии:

Беляев В.В. — д.т.н., проф., Московский государственный областной университет;

Бугримов А.Л. — д.т.н., проф., Московский государственный областной университет;

Калашников Е.В. — д.ф.-м.н., Московский государственный областной университет;

Смирнова И.М. — д.п.н., проф., Московский педагогический государственный университет;

Осипов М.А. — д.ф.-м.н., проф., Университет Стратклайд (Великобритания);

Чаругин В.М. — д.ф.-м.н., проф., Московский педагогический государственный университет;

Чигринов В.Г. — д.ф.-м.н., проф., Гонконгский университет науки и технологий (Китай)

Журнал включен в базу данных Российского индекса научного цитирования (РИНЦ), имеет полнотекстовую сетевую версию в Интернете на платформе Научной электронной библиотеки (www.elibrary.ru), а также на сайте Московского государственного областного университета (www.vestnik-mgou.ru)

При цитировании ссылка на конкретную серию «Вестника Московского государственного областного университета» обязательна. Опубликованные в журнале материалы могут использоваться только в некоммерческих целях. Ответственность за содержание статей несут авторы. Мнение редколлегии серии может не совпадать с точкой зрения автора. Рукописи не возвращаются.

Founder of journal «Bulletin of the Moscow State Regional University»:

Moscow State Regional University

————— Issued 4 times a year —————

Series editorial board «Physics and Mathematics»

Editor-in-chief:

A.S. Bugaev – Doctor of Physics and Mathematics, Academician of RAS, Moscow Institute of Physics and Technology (State University)

Deputy editor-in-chief:

V.A. Zhachkin – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Moscow Region State University

Executive secretary:

E.N. Vasilchikova – Ph.D. in Physics and Mathematics, Associate Professor, Moscow Region State University

Members of Editorial Board:

V.V. Belyaev – Doctor of Technical Sciences, Professor, Moscow Region State University;

A.L. Bugrimov – Doctor of Technical Sciences, Professor, Moscow Region State University;

E.V. Kalashnikov – Doctor of Physics and Mathematics, Moscow Region State University;

I.M. Smirnova – Doctor of Pedagogical Sciences, Professor, Moscow State Pedagogical University;

M.A. Osipov – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Strathclyde University (Glasgow, UK);

V.M. Charugin – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Moscow State Pedagogical University;

V.G. Chigrinov – Hong Kong University of Science and Technology (China)

The journal is included into the database of the Russian Science Citation Index, has a full text network version on the Internet on the platform of Scientific Electronic Library (www.elibrary.ru), as well as at the site of the Moscow State Regional University (www.vestnik-mgou.ru)

At citing the reference to a particular series of «Bulletin of the Moscow State Regional University» is obligatory. The materials published in the journal are for non-commercial use only. The authors bear all responsibility for the content of their papers. The opinion of the Editorial Board of the series does not necessarily coincide with that of the author. Manuscripts are not returned.

The Editorial Board address: Moscow State Regional University

10A Radio st., office 98, Moscow, Russia

Phones: (495) 723-56-31; (495) 780-09-42 (add. 6101)

e-mail: vest_mgou@mail.ru; site: www.vestnik-mgou.ru

Publishing council «Bulletin of the Moscow State Regional University»

P.N. Khromenkov – Ph. D. in Philology, Professor, Principal of MSRU (Chairman of the Council)

E.S.Yefremova – Ph. D. in Philology, Acting Vice-Principal for scientific work of MSRU (Vice-Chairman of the Council)

V.M. Klychnikov – Ph.D. in Law, Ph. D. in History, Professor, Vice-Principal for academic work and international cooperation of MSRU (Vice-Chairman of the Council)

L.N. Antonova – Doctor of Pedagogics, Professor, Member of the Russian Academy of Education, The Council of the Federation Committee on Science, Education and Culture

A.G. Asmolov – Doctor of Psychology, Professor, Member of the Russian Academy of Education, Principal of the Federal Institute of Development of Education

S.N. Klimov – Doctor of Philosophy, Professor, Moscow State University of Railway Engineering

E.V. Klobukov – Doctor of Philology, Professor, Lomonosov Moscow State University

A.V. Manoylo – Doctor of Political Science, Professor, Lomonosov Moscow State University

A.L. Novosjolov – Doctor of Economics, Professor, Plekhanov Russian University of Economics

V.V. Pasechnik – Doctor of Pedagogics, Professor, MSRU

Yu. M. Polyakov – Ph.D. in Philology, Editor-in-chief of “Literaturnaya Gazeta”

E.I. Rjuntsev – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Saint Petersburg State University

G. T. Khukhuni – Doctor of Philology, Professor, MSRU

S.N. Chistyakova – Doctor of Pedagogics, Professor, the Russian Academy of Education

ISSN 2072-8387 (print)

ISSN 2310-7251 (online)

Bulletin of the Moscow State Regional University. Series: Physics and Mathematics. – 2017. – № 4. – 140 p.

The series «Physics and Mathematics» of the Bulletin of the Moscow State Regional University is registered in Federal service on supervision of legislation observance in sphere of mass communications and cultural heritage protection. The registration certificate ПИ № 077-26136

Index of the series «Physics and Mathematics» according to the union catalog «Press of Russia» 40723

© MSRU, 2017.

© Information & Publishing department of MSRU, 2017.

СОДЕРЖАНИЕ

РАЗДЕЛ I. МАТЕМАТИКА

<i>Марченко Т.А., Матвеев О.А., Птицына И.В.</i> ЛОКАЛЬНАЯ ПРОЕКТИВНО ПЛОСКАЯ МОДЕЛЬ СФЕРЫ	6
<i>Антоненкова О.Е., Часова Н.А.</i> ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРАХ С ЯДРАМИ ПУАССОНА В ПРОСТРАНСТВАХ ТИПА ХАРДИ В ПОЛИКРУГЕ СО СМЕШАННОЙ НОРМОЙ	14

РАЗДЕЛ II. ФИЗИКА

<i>Бугаев А.С., Шешин Е.П., Озол Д.И., Мье М.М., Данилкин М.И., Верещагина Н.Ю.</i> СОВРЕМЕННЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ РАЗВИТИЯ ИСТОЧНИКОВ УФ-ИЗЛУЧЕНИЯ БАКТЕРИЦИДНОГО ДИАПАЗОНА	24
<i>Кальитка В.А., Коровкин М.В., Мехтиев А.Д., Алькина А.Д.</i> ДЕТАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОТЕРЬ В ПРОТОННЫХ ПОЛУПРОВОДНИКАХ И ДИЭЛЕКТРИКАХ.	39
<i>Алиев И.Н., Фомин И.В., Самедова З.А.</i> ОПТИКО-МЕХАНИЧЕСКАЯ АНАЛОГИЯ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ.....	55
<i>Геворкян Э.В.</i> К ДИНАМИКЕ ЖИДКИХ КРИСТАЛЛОВ В ИЗМЕНЯЮЩИХСЯ МАГНИТНЫХ ПОЛЯХ.	62
<i>Соломатин А.С., Машенко В.И., Беляев В.В.</i> ОПТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЖИДКОКРИСТАЛЛИЧЕСКИХ КОМПОЗИТНЫХ НЕСИММЕТРИЧНЫХ ТВИСТ-ЯЧЕЕК	68
<i>Кузнецов М.М., Матвеев С.В., Молостин Е.В., Смотрова Л.В.</i> АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЭФФЕКТА ВЫСОКОСКОРОСТНОГО ПЕРЕХЛЕСТА В УДАРНО СЖАТЫХ БИНАРНЫХ СМЕСЯХ ГАЗОВ	79
<i>Акопян Н.Г., Маргарян А.Л., Чилингарян А.С., Табирян Н.В., Беляев В.В., Соломатин А.С.</i> ПРИБОР ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ КРУГОВОГО ДИХРОИЗМА НА ОСНОВЕ ПОЛЯРИЗАЦИОННОЙ ДИФРАКЦИОННОЙ ВОЛНОВОЙ ПЛАСТИНЫ.	88
<i>Ельникова Л.В., Пономаренко А.Т., Шевченко В.Г.</i> ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ РАСТВОРОВ КАРБОКСИЛАТОВ МЕДИ В ТОЛУОЛЕ.	95
<i>Коншина Е.А., Щербинин Д.П.</i> ВЛИЯНИЕ МОРФОЛОГИИ ГРАНУЛИРОВАННЫХ СЕРЕБРЯНЫХ ПЛЁНОК НА ОРИЕНТАЦИЮ МОЛЕКУЛ И ИОННОЕ ЗАГРЯЗНЕНИЕ НЕМАТИЧЕСКОГО ЖИДКОГО КРИСТАЛЛА	103

РАЗДЕЛ III. ТЕОРИЯ И МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ И ВОСПИТАНИЯ

<i>Власова Е.А., Меженная Н.М., Попов В.С., Пугачев О.В.</i> ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПАКЕТОВ В РАМКАХ МЕТОДИЧЕСКОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ДИСЦИПЛИН В ТЕХНИЧЕСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ	114
<i>Емельянов В.А.</i> МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ИЗУЧЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ «ФИЗИЧЕСКАЯ ЭЛЕКТРОНИКА» БАКАЛАВРАМИ ПЕДАГОГИЧЕСКОГО НАПРАВЛЕНИЯ ПОДГОТОВКИ.	129

CONTENTS

SECTION I. MATHEMATICS

<i>T. Marchenko, O. Matveyev, I. Pticina.</i> THE LOCAL PROJECTIVE FLAT MODEL OF THE SPHERE	6
<i>O. Antonenkova, N. Chasova.</i> ABOUT INTEGRAL OPERATORS WITH POISSON KERNELS IN HARDY-TYPE SPACES IN POLYDISC WITH MIXED NORM.....	14

SECTION II. PHYSICS

<i>A. Bugaev, E. Sheshin, D. Ozol, M. Myo, M. Danilkin, N. Vereschagina.</i> MODERN TRENDS IN THE DEVELOPMENT OF UV-SOURCES OF GERMICIDAL RANGE.....	24
<i>V. Kalytka, M. Korovkin, A. Mekhtiev, A. Alkina</i> DETAILED ANALYSIS OF NON-LINEAR DIELECTRIC LOSSES IN PROTON SEMICONDUCTORS AND DIELECTRICS. ...	39
<i>I. Aliev, I. Fomin, Z. Samedova.</i> OPTICAL-MECHANICAL ANALOGY OF THE GRAVITATIONAL FIELD	55
<i>E. Gevorkyan.</i> ON THE DYNAMICS OF LIQUID CRYSTALS IN VARIABLE MAGNETIC FIELDS	62
<i>A. Solomatin, V. Mashchenko, V. Belyaev.</i> OPTICAL PROPERTIES OF ASYMMETRICAL TWIST STRUCTURES IN A NEMATIC LIQUID CRYSTAL COMPOSITE	68
<i>M. Kuznetsov, S. Matveev, E. Molostvin, L. Smotrova.</i> ANALYTICAL PROPERTIES OF HIGHT-SPEED OVERSHOOT EFFECT IN THE SHOCK-COMPRESSED BINARY GAS MIXTURE	79
<i>N. Hakobyan, H. Margaryan, H. Chilingaryan, N. Tabiryan, V. Belyaev, A. Solomatin.</i> CIRCULAR DICHROISM METER BASED ON POLARIZATION DIFFRACTIVE WAVEPLATE.....	88
<i>L. Elnikova, A. Ponomarenko, V. Shevchenko.</i> DIELECTRIC CHARACTERISTICS OF TOLUENE SOLUTIONS OF COOPER CARBOXYLATES	95
<i>E. Konshina, D. Shcherbinin.</i> EFFECT OF GRANULAR SILVER FILMS MORPHOLOGY ON THE MOLECULES ORIENTATION AND ION CONTAMINATION OF NEMATIC LIQUID CRYSTAL	103

SECTION III. THEORY AND METHODS OF TEACHING AND EDUCATION

<i>E. Vlasova, N. Mezhenneya, V. Popov, O. Pugachev.</i> THE USE OF MATHEMATICAL PACKAGES IN THE FRAMEWORK OF METHODOLOGICAL SUPPORT OF PROBABILISTIC DISCIPLINES IN A TECHNICAL UNIVERSITY	114
<i>V. Emelyanov.</i> METHODICAL ASPECTS OF STUDYING DISCIPLINE "PHYSICAL ELECTRONICS" WITH BACHELORS OF PEDAGOGICAL DIRECTION OF TRAINING	129

РАЗДЕЛ I. МАТЕМАТИКА

УДК 514.76 + 512.54

DOI: 10.18384/2310-7251-2017-4-6-13

ЛОКАЛЬНАЯ ПРОЕКТИВНО ПЛОСКАЯ МОДЕЛЬ СФЕРЫ

Марченко Т.А., Матвеев О.А., Птицына И.В.

Московский государственный областной университет

105005, г. Москва, улица Радио, 10А, Российская Федерация

Аннотация. В работе рассматриваются геометрические и алгебраические свойства локально симметрического риманова дифференцируемого многообразия постоянной положительной кривизны на примере сферы. Обсуждаются тождества, выполняющиеся в геодезической лупе сферического пространства, проводится явное описание гомотетий, геодезических симметрий и параллельных переносов в локальной системе координат, общей с локально плоским пространством аффинной связности.

Ключевые слова: римановы пространства, локально симметрические многообразия аффинной связности постоянной положительной кривизны, геодезические линии, теория луп, геодезическая лупа, гомотетии, геодезические симметрии, параллельные переносы.

THE LOCAL PROJECTIVE FLAT MODEL OF THE SPHERE

T. Marchenko, O. Matveyev, I. Ptitsyna

Moscow Region State University

ul. Radio 10A, 105005 Moscow, Russian Federation

Abstract. The paper examines geometric and algebraic properties of locally symmetric differential affine-connected manifolds of constant positive curvature by the example of spheres. The identities in a geodesic loop of spherical spaces are discussed, homotheties, geodesic symmetries and parallel translations are described in the local coordinate system which is common with a locally flat space with affine connection.

Key words: spaces with affine connection, locally symmetric manifolds with affine connection of constant positive curvature, geodesic lines, loop theory, geodesic loop, homotheties, geodesic symmetries, parallel translations.

Действительная сфера $S^n(\mathbf{R})$ размерности n ($n \geq 2$), где $\mathbf{R}$ – поле вещественных чисел, является классическим примером компактного риманова многообразия постоянной положительной кривизны и относится к симметрическим пространствам первого типа: $S^n(\mathbf{R}) = SO(n+1, \mathbf{R})/SO(n, \mathbf{R})$. Напомним, что дифференцируемое (аналитическое) многообразие аффинной связности называется локально симметрическим, если геодезическая симметрия относительно каждой точки многообразия является локальным автоморфизмом. Сфера с естественной метрикой является локально проективно плоским пространством, то есть допускает геодезическое отображение на евклидову плоскость, при котором геодезические линии некоторой нормальной выпуклой окрестности сферы переходят в прямые (или отрезки на плоскости), при этом аффинный (канонический) параметр вдоль геодезической линии изменяется (этот факт является следствием теоремы Бельтрами). Рассмотрим локальную проективно плоскую модель сферы размерности 2.

На сфере S^2 радиуса R , вложенной в трёхмерное евклидово пространство $\mathbf{R}^3$, уравнение которой в декартовой прямоугольной системе координат (qxz) имеет вид $x^2 + y^2 + (z - R)^2 = R^2$, (центром сферы является точка $O(0; 0; R)$), рассмотрим стандартную метрику, индуцированную объемлющим пространством $\mathbf{R}^3$ (точки на плоскости $M(xqy)$ и на сфере S^2 для сокращения объёмов формул обозначаем строчными (незаглавными) буквами латинского алфавита; чтобы отличать точки на плоскости от точек на сфере, точки на сфере пишем со штрихом). Геодезическими линиями на сфере являются окружности большого радиуса. Проведём стереографическую проекцию f из центра сферы o на плоскость $M(xqy)$, касающуюся сферы в точке q , при этом нижняя часть сферы – полусфера без границы взаимно-однозначно отобразится на плоскость. Геодезические линии на сфере (локально) перейдут в прямые на плоскости (рис. 1).

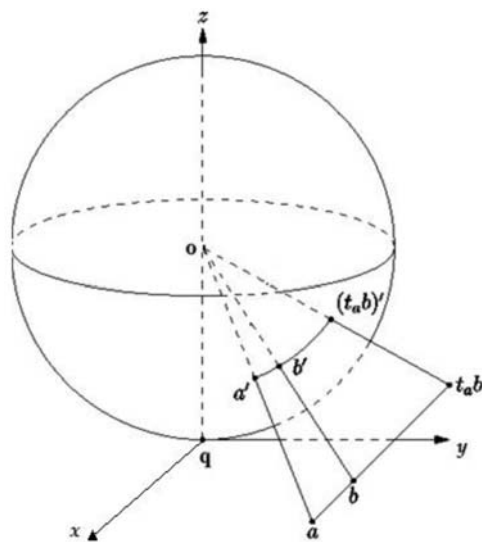


Рис. 1. Стереографическая проекция из центра сферы на касательную плоскость к сфере.

Мы намеренно в данном изложении используем только элементарные математические методы, минуя дифференцирование и сложные конструкции дифференциальной геометрии. Такой подход к описанию пространств аффинной связности предлагается в работах [1–7].

«Сферическое» расстояние между точками на плоскости $M(xy)$ задаётся формулой:

$$d(a, b) = R \arccos \frac{|a_1 b_1 + a_2 b_2 + R^2|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + R^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + R^2}}. \quad (1)$$

Пусть отображение $t_a: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ – гомотетия на «сферической» плоскости M с центром в точке a и коэффициентом растяжения или сжатия t (число t не равно 1 или 0). Вычислим операцию $t_a b$, исходя из соотношения:

$$d(a, t_a b) = |t| d(a, b). \quad (2)$$

Введем обозначения:

$$\vec{r} = \overrightarrow{qo}; \vec{r}(O; O; R); \vec{x} = \overrightarrow{oa}; \vec{x}(a_1; a_2; -R);$$

$$\vec{y} = \overrightarrow{ob}; \vec{y}(b_1; b_2; -R); \vec{a} = \overrightarrow{qa}; \vec{a}(a_1; a_2; O);$$

$$\vec{b} = \overrightarrow{qb}; \vec{b}(b_1; b_2; O).$$

Точки a и b принадлежат плоскости qxy . «Сферическое» расстояние между точками a и b вычисляется по формуле: $d(a, b) = R \arccos \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{|\vec{x}| |\vec{y}|}$. Пусть $c = t_a b$,

тогда $d(a, c) = |t| d(a, b)$, или

$$\arccos \frac{(\vec{x}, \vec{z})}{|\vec{x}| |\vec{z}|} = |t| \arccos \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{|\vec{x}| |\vec{y}|}; \vec{z} = \overrightarrow{oc}.$$

Точка c лежит на прямой, проходящей через точки a и b , следовательно, найдется такое действительное число u , что $\vec{c} = \overrightarrow{qc} = \vec{a} + u(\vec{b} - \vec{a})$. Положим для

$$\text{краткости } \varphi = \arccos \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{|\vec{x}| |\vec{y}|}. \text{ Имеем } \frac{(\vec{x}, \vec{c} - \vec{r})}{|\vec{x}| |\vec{c} - \vec{r}|} = \cos(t\varphi),$$

или

$$(\vec{x}, \vec{a} + u(\vec{b} - \vec{a}) - \vec{r}) = |\vec{x}| |\vec{a} + u(\vec{b} - \vec{a}) - \vec{r}| \cos(t\varphi).$$

Возведём обе части полученного уравнения в квадрат:

$$[(\vec{x}, \vec{a} - \vec{r}) + u(\vec{x}, \vec{b} - \vec{a})]^2 = |\vec{x}|^2 |\vec{a} - \vec{r} + u(\vec{b} - \vec{a})|^2 \cos^2(t\varphi);$$

$$[|\vec{x}|^2 + u(\vec{x}, \vec{y} - \vec{x})]^2 = |\vec{x}|^2 |\vec{x} + u(\vec{y} - \vec{x})|^2 \cos^2(t\varphi).$$

Положим $\vec{y} - \vec{x} = \vec{b} - \vec{a} = \vec{w}$, $\left[|\vec{x}|^2 + u(\vec{x}, \vec{w})\right]^2 = |\vec{x}|^2 |\vec{x} + u\vec{w}|^2 \cos^2(t\varphi)$;

$$u^2(\vec{x}, \vec{w})^2 + 2u|\vec{x}|^2(\vec{x}, \vec{w}) + |\vec{x}|^4 = |\vec{x}|^2 \left(|\vec{x}|^2 + 2u(\vec{x}, \vec{w}) + u^2|\vec{w}|^2\right) \cos^2(t\varphi);$$

$$u^2((\vec{x}, \vec{w})^2 - |\vec{x}|^2 |\vec{w}|^2 \cos^2(t\varphi)) + 2u|\vec{x}|^2(\vec{x}, \vec{w}) \sin^2(|t|\varphi) + |\vec{x}|^4 \sin^2(|t|\varphi) = 0.$$

Вычислим дискриминант и решим полученное квадратное уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= |\vec{x}|^4 (\vec{x}, \vec{w})^2 \sin^4(|t|\varphi) - |\vec{x}|^4 \sin^2(|t|\varphi) \left((\vec{x}, \vec{w})^2 - |\vec{x}|^2 |\vec{w}|^2 \cos^2(t\varphi) \right) = \\ &= -|\vec{x}|^4 (\vec{x}, \vec{w})^2 \sin^2(|t|\varphi) \cos^2(t\varphi) + |\vec{x}|^6 |\vec{w}|^2 \sin^2(|t|\varphi) \cos^2(t\varphi) = \\ &= |\vec{x}|^4 \cdot \frac{1}{4} \sin^2(2|t|\varphi) (|\vec{x}|^2 |\vec{w}|^2 - (\vec{x}, \vec{w})^2). \end{aligned}$$

Пусть угол $\widehat{\vec{x}, \vec{w}}$ равен ψ , тогда $D = |\vec{w}|^2 |\vec{x}|^6 \sin^2(2|t|\varphi) \sin^2\psi$

$$\begin{aligned} u_{1,2} &= \frac{-2|\vec{x}|^2(\vec{x}, \vec{w}) \sin^2(|t|\varphi) \pm |\vec{w}| |\vec{x}|^3 \sin(2|t|\varphi) \sin\psi}{2|\vec{x}|^2 |\vec{w}|^2 (\cos^2\psi - \cos^2(t\varphi))} = \\ &= \frac{-2|\vec{x}| \cos\psi \sin^2(|t|\varphi) \pm |\vec{x}| \sin(2|t|\varphi) \sin\psi}{2|\vec{w}| (\cos^2\psi - \cos^2(t\varphi))}; \end{aligned}$$

$$u_1 = -\frac{|\vec{x}| \sin(|t|\varphi) (\cos\psi \sin(|t|\varphi)) + \cos(t\varphi) \sin\psi}{|\vec{w}| (\cos^2\psi - \cos^2(t\varphi))} = -\frac{|\vec{x}| \sin(|t|\varphi) \sin(|t|\varphi + \psi)}{|\vec{w}| \cos^2\psi - \cos^2(t\varphi)};$$

$$u_2 = \frac{|\vec{x}| \sin(|t|\varphi) \sin(\psi - |t|\varphi)}{|\vec{w}| \cos^2\psi - \cos^2(t\varphi)}$$

$$\left. \begin{aligned} \cos\psi - \cos(t\varphi) &= 2 \sin \frac{\psi + |t|\varphi}{2} \sin \frac{\psi - |t|\varphi}{2} \\ \cos\psi + \cos(t\varphi) &= 2 \cos \frac{\psi + |t|\varphi}{2} \cos \frac{\psi - |t|\varphi}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\cos^2\psi - \cos^2(t\varphi) = \sin(\psi + |t|\varphi) \sin(\psi - |t|\varphi)$$

$$u_1 = \frac{|\vec{x}| \sin(|t|\varphi)}{|\vec{w}| \sin(\psi - |t|\varphi)}, \quad u_2 = \frac{|\vec{x}| \sin(|t|\varphi)}{|\vec{w}| \sin(\psi + |t|\varphi)}.$$

Анализируя отдельно три случая: t – положительно, отрицательно, равно нулю, приходим к результату: $u = \frac{|\vec{x}|}{|\vec{w}|} \frac{\sin(t\varphi)}{\sin(\psi+t\varphi)}$ для положительных и отрицательных t , неравных нулю; $u = 0$, если $t = 0$.

$$\begin{aligned}\vec{c} &= \vec{a} + u(\vec{b} - \vec{a}) = \\ &= \vec{a} + \frac{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + R^2}}{\sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}} \cdot \frac{\sin(t\varphi)}{\sin(\psi+t\varphi)} (\vec{b} - \vec{a});\end{aligned}\quad (3)$$

$\vec{c} = \vec{a}$, если $t = 0$.

Рассмотрим геодезическую квазигруппу, соответствующую -1 , с бинарными операциями умножения, левого и правого деления. Левые сдвиги этой квазигруппы и есть геодезические симметрии относительно точки. В наших обозначениях

$$x \cdot y = (-1)_x y, \quad x \setminus y = (-1)_x y, \quad y / x = \left(\frac{1}{2}\right)_x y.$$

Главный левый изотоп этой квазигруппы есть геодезическая лупа эллиптического пространства, левые сдвиги (параллельные переносы) задаются формулой Эли Картана: $L_x^y = (-1)_{\left(\frac{1}{2}\right)_x} \circ (-1)_y$.

Подставляя в соотношение (3) $t = \frac{1}{2}$; $t = -1$, получаем:

$$\overline{\left(\frac{1}{2}\right)_a} b = \frac{|\vec{b} - \vec{r}| |\vec{a}| + |\vec{a} - \vec{r}| |\vec{b}|}{|\vec{a} - \vec{r}| + |\vec{b} - \vec{r}|} \quad (4)$$

$$\begin{aligned}\overline{(-1)_a} b &= \frac{-2 \left[(\vec{a}, \vec{b}) + R^2 \right] \vec{a} + \left[|\vec{a}|^2 + R^2 \right] \vec{b}}{|\vec{a}|^2 - 2(\vec{a}, \vec{b}) - R^2} = \\ &= \frac{-2 |\vec{b} - \vec{r}| \cos \varphi \vec{a} + |\vec{a} - \vec{r}| \vec{b}}{|\vec{a} - \vec{r}| - 2 |\vec{b} - \vec{r}| \cos \varphi}.\end{aligned}\quad (5)$$

Если положить $a = q$, то $\overline{(-1)_q} c = -\vec{c}$; $\overline{\left(\frac{1}{2}\right)_q} c = \frac{|\vec{r}| |\vec{c}|}{|\vec{r}| + |\vec{c} - \vec{r}|}$.

Вычислим общий вид выражений для гомотетий с центром в точке q . Из формулы (3) имеем:

$$\overrightarrow{t_q a} = \frac{R}{|\vec{a}|} \operatorname{tg} \left(t \operatorname{arctg} \frac{|\vec{a}|}{R} \right) \cdot \vec{a}. \quad (6)$$

Вычислим параллельные переносы вдоль геодезических линий, проходящих через q - точку касания сферы и касательной плоскости:

$$\overrightarrow{I_b^q c} = R \frac{\left[(\vec{b}, \vec{c}) - R|\vec{b} - \vec{r}| - R^2 \right] \vec{b} - \left[|b|^2 + R|\vec{b} - \vec{r}| + R^2 \right] \vec{c}}{(R + |\vec{b} - \vec{r}|) \left[(\vec{b}, \vec{c}) - R^2 \right]}. \quad (7)$$

$$\overrightarrow{(I_b^q)^{-1} c} = L_{(-1)_b^q}^q c = R \frac{-\left[(\vec{b}, \vec{c}) + R|\vec{b} + \vec{r}| + R^2 \right] \vec{b} + \left[|b|^2 + R|\vec{b} + \vec{r}| + R^2 \right] \vec{c}}{(R + |\vec{b} + \vec{r}|) \left[(\vec{b}, \vec{c}) + R^2 \right]}. \quad (8)$$

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то найдётся такое действительное число t , что $b = t_q a$; следовательно, параллельный перенос $L_{t_q a}^a$ может быть вычислен по формуле:

$$L_{t_q a}^a = L_{t_q a}^e \circ (L_a^e)^{-1}.$$

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ линейно независимы, то $\overrightarrow{L_b^a c}$ является линейной комбинацией векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Полученные результаты естественным образом могут быть обобщены на многомерный случай.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гомотетии и параллельные переносы в проективно симметрических пространствах аффинной связности / Андроникова Е.О., Дмитриева М.Н., Матвеев О.А., Матвеева Н.В. // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика и математика. 2016. № 3. С. 8–17.
2. Матвеев О.А., Нестеренко Е.Л. О локально инвариантных пространствах аффинной связности // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика и математика. 2010. № 2. С. 19–27.
3. Матвеев О.А., Нестеренко Е.Л. Алгебраическая теория пространств, близких к симметрическим. Монография. Lap Lambert Academic Publishing, Germany, 2012. 125 с.
4. Матвеев О.А., Нестеренко Е.Л. Универсальные алгебры в теории пространств аффинной связности, близких к симметрическим. Монография. М.: МГОУ, 2012. 132 с.
5. Matveyev O.A., Nesterenko E.L. On the quasigroup properties of prosymmetric spaces with zero curvature // Webs and quasigroups. Tver, 2002. pp. 78–84.
6. Matveyev O.A., Nesterenko E.L. The real prosymmetric spaces // Non-Associative Algebra and Its Applications. Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, London, New York, 2006, Chapter 19, pp. 253–260.
7. Sabinin L.V., Matveyev O.A. Geodesic loops and some classes of affine connected manifolds // Bulletin of Peoples Friendship University of Russia. Series «Mathematics». 1995. 2(1). pp. 135–243.

REFERENCES

1. Andronikova E.O., Dmitrieva M.N., Matveev O.A., Matveeva N.V. [Homotheties and parallel shifts in the projective symmetric spaces with affine connection] In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika i matematika* [Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], 2016, no. 3, pp. 8–17.
2. Matveev O.A., Nesterenko E.L. [On locally invariant spaces with affine connection] In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika i matematika*, [Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], 2010, no. 2, pp. 19–27.
3. Matveev O.A., Nesterenko E.L. *Algebraicheskaya teoriya prostranstv, blizkikh k simmetricheskim*. [Algebraic theory of close-to-symmetric spaces]. Lap Lambert Academic Publishing, Germany, 2012, 125 p.
4. Matveev O.A., Nesterenko E.L. Universal'nye algebrы v teorii prostranstv affinnoi svyaznosti, blizkikh k simmetricheskim [Universal algebras in the theory of close-to-symmetric spaces with affine connection]. Moscow, MRSU Ed. off. Publ., 2012. 132 p.
5. Matveyev O.A., Nesterenko E.L. [On the quasigroup properties of prosymmetric spaces with zero curvature]. In: *Webs and quasigroups*. Tver. 2002. pp. 78–84.
6. Matveyev O.A., Nesterenko E.L. [The real prosymmetric spaces]. In: *Non-Associative Algebra and Its Applications*. Boca Raton, London, New York, Chapman and Hall/CRC, 2006, Chapter 19, pp. 253–260.
7. Sabinin L.V., Matveyev O.A. [Geodesic loops and some classes of affine connected manifolds]. In: *Bulletin of Peoples Friendship University of Russia. Series 'Mathematics'*, 1995, 2(1), pp. 135–243.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Марченко Татьяна Андреевна – студентка физико-математического факультета Московского государственного областного университета;
e-mail: tatian96@rambler.ru;

Матвеев Олег Александрович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Математический анализ и геометрия» Московского государственного областного университета;
e-mail: matveyevoa@mail.ru;

Птицына Инга Вячеславовна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Математический анализ и геометрия» Московского государственного областного университета;
e-mail: inpt@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Tatyana A. Marchenko – the student of physical-mathematical department, Moscow Region State University;
e-mail: tatian96@rambler.ru;

Oleg A. Matveyev – PhD in Physico-mathematical sciences, associate professor at the Department of Mathematical Analysis and Geometry, Moscow Region State University;
e-mail: matveyevoa@mail.ru;

Inga V. Ptitsyna – PhD in Physico-mathematical sciences, associate professor at the Department of Mathematical Analysis and Geometry, Moscow Region State University;
e-mail: inpt@mail.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Марченко Т.А., Матвеев О.А., Птицына И.В. Локальная проективно плоская модель сферы // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2017. № 4. С. 6–13.

DOI: 10.18384/2310-7251-2017-4-6-13

FOR CITATION

Marchenko T.A., Matveyev O.A., Ptitsyna I.V. The local projective flat model of the sphere. In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*. 2017. no. 4. pp. 6–13.

DOI: 10.18384/2310-7251-2017-4-6-13

УДК 517.55

DOI: 10.18384/2310-7251-2017-4-14-23

ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРАХ С ЯДРАМИ ПУАССОНА В ПРОСТРАНСТВАХ ТИПА ХАРДИ В ПОЛИКРУГЕ СО СМЕШАННОЙ НОРМОЙ

Антоненкова О.Е., Часова Н.А.

*Брянский государственный инженерно-технологический университет
241037, г. Брянск, проспект Станке Димитрова, 3, Российская Федерация*

Аннотация. Пространства Харди играют огромную роль в комплексном анализе и его многочисленных приложениях. Однако, в отличие от одномерного случая, пространства типа Харди в поликруге исследованы сравнительно мало. В данной работе получены интегральные представления классов n -гармонических в поликруге U^n функций. В частности, даётся характеристика n -гармонических в поликруге функций, допускающих представление в виде кратного интеграла Пуассона от измеримых на остоле поликруга функций из класса $L^{\vec{p}}(T^n)$, где $\vec{p} = (p_1, \dots, p_n)$, $1 < p_i < +\infty$, $i = \overline{1, n}$. При доказательстве основного результата используются общие методы комплексного и функционального анализа, теории классов Харди.

Ключевые слова: интегральный оператор, ядро Пуассона, n -гармоническая функция, поликруг.

ABOUT INTEGRAL OPERATORS WITH POISSON KERNELS IN HARDY-TYPE SPACES IN POLYDISC WITH MIXED NORM

O. Antonenkova, N. Chasova

*Bryansk State Technological University of Engineering
3 prospect Stanke Dimitrova, Bryansk 241037, Russian Federation*

Abstract. Hardy spaces play an important role in the complex analysis and its numerous applications. However, unlike a one-dimensional case, the Hardy-type spaces in a polydisc are investigated a little. In this paper, the integral representations of the classes of n -harmonic in a polydisc U^n functions are received, in particular the characterization of n -harmonic functions in a polydisc which can be represented as a multiple Poisson integral from functions, measurable on a skeleton of a polydisc, from a $L^{\vec{p}}(T^n)$, class where $\vec{p} = (p_1, \dots, p_n)$, $1 < p_i < +\infty$, $i = \overline{1, n}$. is given. At the proof of the main result the general methods of the complex and functional analysis, theory of Hardy classes is used.

Key words: integral operator, Poisson kernel, n -harmonic function, polydisc.

Как известно, интегральные представления играют важнейшую роль в комплексном анализе и его многочисленных приложениях. Для примера напомним классические формулы Коши, Шварца, Пуассона и интегральные представления с воспроизводящими ядрами [1–3]. Они выражают значения функции, голоморфной в некоторой области, через её значения на границе или на остоле этой области, что позволяет упростить исследование различных пространств голоморфных функций.

Исследование структуры этих пространств посредством интегральных представлений служит мощным толчком к развитию целого ряда важных направлений как в теории голоморфных функций (граничные свойства, задачи аппроксимации и интерполяции, вопросы факторизации и т.д.), так и в теории рядов и интегралов Фурье, в теории сингулярных интегральных операторов и в других вопросах комплексного и гармонического анализа. Следует отметить, что в одномерном случае указанные вопросы изучены довольно полно [1; 3]. В тоже время интегральные представления в различных многомерных областях комплексного пространства исследованы сравнительно мало, несмотря на то, что эти представления имеют важные приложения в теории кратных тригонометрических рядов, в теории функций нескольких комплексных переменных и в многомерном гармоническом анализе.

В последнее время ряд учёных занимается изучением широкого круга задач, связанных с интегральными представлениями как в единичном круге [4; 5], так и в различных областях пространств R^n и C^n [6–9]. Это и описание сопряжённых пространств, и построение линейных непрерывных функционалов на этих пространствах, и исследование ограниченности теплицевых операторов и др.; для примера укажем на работы [10; 11].

В данной работе получены интегральные представления классов n -гармонических в поликруге U^n функций с граничными значениями из классов измеримых на остоле поликруга функций со смешанной нормой. Аналогичные результаты в различных областях комплексного пространства рассматриваются и в работах других авторов, например, интегральные представления с ядрами Пуассона и Пуассона-Бергмана для гармонических в шаре функций с конечной смешанной нормой рассмотрены в работе [12].

Введём обозначения, необходимые для дальнейшего изложения. Пусть $U^n = \{z = (z_1, \dots, z_n) : |z_i| < 1, i = \overline{1, n}\}$ – единичный поликруг в n -мерном комплексном пространстве C^n , $T^n = \{\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) : |\zeta_i| = 1, i = \overline{1, n}\}$ – его остов. Пусть $Q_n = [-\pi, \pi] \times \dots \times [-\pi, \pi] = [-\pi, \pi]^n$ – декартово произведение n экземпляров отрезка $[-\pi, \pi]$; $I^n = [0, 1) \times \dots \times [0, 1) = [0, 1)^n$.

Через $\bar{L}^p(T^n)$, $\vec{p} = (p_1, \dots, p_n)$, $1 \leq p_i < +\infty$, $i = \overline{1, n}$ будем обозначать пространство измеримых на T^n функций f , для которых конечна норма

$$\|f\|_{L^{\vec{p}}(T^n)} = \|f\|_{\vec{p}} = \left\| \cdots \left\| \|f\|_{p_1} \right\|_{p_2} \cdots \right\|_{p_n} =$$

$$= \left(\int_T \cdots \left(\int_T \left(\int_T |f(\zeta_1, \dots, \zeta_n)|^{p_1} dm_1(\zeta_1) \right)^{p_2/p_1} dm_1(\zeta_2) \right)^{p_3/p_2} \cdots dm_1(\zeta_n) \right)^{1/p_n},$$

где $T = T^1$, dm_1 – линейная мера Лебега на T .

Пусть $\vec{p} = (p_1, \dots, p_n)$, где $0 < p_i < +\infty$, $i = \overline{1, n}$, тогда обобщённые пространства Харди $H^{\vec{p}}(U^n)$ со смешанными нормами определим как пространства голоморфных в U^n функций, для которых

$$\sup_{0 < r < 1} \left(\int_T \cdots \left(\int_T \left(\int_T |f(r\zeta)|^{p_1} dm_1(\zeta_1) \right)^{p_2/p_1} dm_1(\zeta_2) \right)^{p_3/p_2} \cdots dm_1(\zeta_n) \right)^{1/p_n} < \infty,$$

где $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in T^n$. Соответствующие пространства n -гармонических в U^n функций обозначим через $h^{\vec{p}}(U^n)$. Изучение основных свойств обобщённых пространств Харди в поликруге со смешанной нормой впервые начато в работах [13–16].

Функция $u(z_1, \dots, z_n)$, определённая на открытом множестве в C^n , называется n -гармонической, если u – гармоническая по каждому переменному в отдельности, то есть если $z_k = x_k + iy_k$, $k = \overline{1, n}$, то $u(z_1, \dots, z_n)$ удовлетворяет n уравнениям

$$\Delta_k u = 0, \quad k = \overline{1, n}, \quad \text{где } \Delta_k = \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_k^2}.$$

Ядром Пуассона $P(z, \zeta)$ в поликруге, где $z = (z_1, \dots, z_n) \in U^n$, $z_k = r_k e^{i\theta_k}$, $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in T^n$, $\zeta_k = e^{i\varphi_k}$, $k = \overline{1, n}$, назовём произведение:

$$P(z, \zeta) = P_{n_1}(\theta_1 - \varphi_1) \cdots P_{n_n}(\theta_n - \varphi_n),$$

здесь $P_r(\theta) = \frac{1-r^2}{1-2r \cos \theta + r^2}$ – обычное ядро Пуассона для единичного круга.

Каждую функцию $f \in L^{\vec{p}}(T^n)$ можно n -гармонически продолжить в единичный поликруг следующим образом:

$$u(z) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{T^n} P(z, \zeta) f(\zeta) dm_n(\zeta), \quad z = (z_1, \dots, z_n) \in U^n. \quad (1)$$

Возникает вопрос, как охарактеризовать те n -гармонические в U^n функции, которые допускают представление вида (1). В частном случае, когда

$p_1 = \dots = p_n = p$, $1 < p < +\infty$, такая задача была решена У. Рудиным (см. [2; 17]). Обобщим эти результаты на случай $L^{\bar{p}}(T^n)$ -пространств.

При доказательстве основной теоремы нам понадобятся следующие вспомогательные утверждения:

Теорема А (см. [3]). Если V – окрестность нуля в сепарабельном топологическом векторном пространстве X , а $\{\Lambda_n\}$ – такая последовательность в сопряжённом пространстве X^* , что $|\Lambda_n x| \leq 1$, ($x \in V$, $n = 1, 2, 3, \dots$), то найдётся такая подпоследовательность $\{\Lambda_{n_i}\} \subset \{\Lambda_n\}$ и такой функционал $\Lambda \in X^*$, что $\Lambda x = \lim_{i \rightarrow \infty} \Lambda_{n_i} x$ для всех $x \in X$.

Теорема Б (см. [18]). Пусть $\vec{p} = (p_1, \dots, p_n)$, $1 \leq p_i < +\infty$, $\vec{q} = (q_1, \dots, q_n)$, $\frac{1}{p_i} + \frac{1}{q_i} = 1$, $i = \overline{1, n}$. $J(f)$ является непрерывным линейным функционалом на нормированном пространстве $L^{\vec{p}}$ тогда и только тогда, когда существует единственная функция $g(x) \in L^{\vec{q}}$, такая что $J(f) = \int g(x)f(x)d\mu(x)$ и $\|J\| = \|g\|_{L^{\vec{q}}}$.

Основным результатом работы является следующее утверждение:

Теорема. Пусть $\vec{p} = (p_1, \dots, p_n)$, $1 < p_i < +\infty$, $i = \overline{1, n}$, тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) n -гармоническая в U^n функция и допускает представление:

$$u(z) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{T^n} P(z, \zeta) f(\zeta) d\mu_n(\zeta), \text{ где } f \in L^{\vec{p}}(T^n), z = (z_1, \dots, z_n) \in U^n;$$

2) $u \in h^{\vec{p}}(U^n)$.

Доказательство. Пусть $f \in L^{\vec{p}}(T^n)$. Для данного r в силу свойства $P_r(\varphi + 2\pi) = P_r(\varphi)$ и 2π -периодичности функции f по каждой переменной можно записать:

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{T^n} f(\theta - s) P_r(s) ds, \quad (2)$$

где $re^{i\theta} = (r_1 e^{i\theta_1}, \dots, r_n e^{i\theta_n})$, $ds = ds_1 \dots ds_n$.

Для любого u справедливо равенство $\|u\|_{\vec{p}} = \sup_{\|g\|_{\vec{q}}=1} \int u(\zeta) g(\zeta) |d\zeta|$,

$\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n)$, $|d\zeta| = |d\zeta_1| \dots |d\zeta_n|$, $\vec{q} = (q_1, \dots, q_n)$, $\frac{1}{p_i} + \frac{1}{q_i} = 1$, $i = \overline{1, n}$ (см. [5]).

Подберём функцию $g \in L^{\vec{q}}(T^n)$ такую, что $\|g\|_{\vec{q}} = 1$ и

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} \dots \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |u(r_1 e^{i\theta_1}, \dots, r_n e^{i\theta_n})|^{p_1} d\theta_1 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} d\theta_2 \right)^{\frac{p_3}{p_2}} \dots d\theta_n \right)^{\frac{1}{p_n}} =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} u(r_1 e^{i\theta_1}, \dots, r_n e^{i\theta_n}) g(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n}) d\theta_1 \dots d\theta_n.$$

Используя (2) и применяя теорему Фубини, будем иметь:

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} \dots \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |u(r_1 e^{i\theta_1}, \dots, r_n e^{i\theta_n})|^{p_1} d\theta_1 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} d\theta_2 \right)^{\frac{p_3}{p_2}} \dots d\theta_n \right)^{\frac{1}{p_n}} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{Q^n} \left(\int_{Q^n} f(\theta - s) P_r(s) ds \right) g(\theta) d\theta =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{Q^n} \int_{Q^n} P_r(s) f(\theta - s) g(\theta) d\theta ds \leq$$

$$\leq \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{Q^n} P_r(s) \left(\int_{Q^n} f(\theta - s) g(\theta) d\theta \right) ds.$$

Применяя к внутреннему интегралу обобщённое неравенство Гельдера и используя то, что $\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{T^n} P_r(s) ds = 1$, $\|g\|_{\bar{q}} = 1$, получим:

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} \dots \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |u(r_1 e^{i\theta_1}, \dots, r_n e^{i\theta_n})|^{p_1} d\theta_1 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} d\theta_2 \right)^{\frac{p_3}{p_2}} \dots d\theta_n \right)^{\frac{1}{p_n}} \leq$$

$$\leq \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{T^n} P_r(s) \|f\|_{\bar{p}} \|g\|_{\bar{q}} ds = \|f\|_{\bar{p}}$$

Докажем обратное утверждение. Пусть u – n -гармоническая в U^n и такая, что

$$\sup_{r \in I^n} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \dots \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |u(r_1 e^{i\theta_1}, \dots, r_n e^{i\theta_n})|^{p_1} d\theta_1 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} d\theta_2 \right)^{\frac{p_3}{p_2}} \dots d\theta_n \right)^{\frac{1}{p_n}} < +\infty.$$

Докажем, что существует функция $f \in L^p(T^n)$ такая, что

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{T^n} P_r(\theta - t) f(t) dt.$$

Поскольку $\bar{p} = (p_1, \dots, p_n)$, $1 < p_i < +\infty$, $i = \overline{1, n}$, то из результатов работы [18]

следует, что $(L^{\bar{p}})^* = L^{\bar{q}}$, $\bar{q} = (q_1, \dots, q_n)$, $\frac{1}{p_i} + \frac{1}{q_i} = 1$, $i = \overline{1, n}$. Положим

$$u_m(\theta) = u\left(\left(1 - \frac{1}{m}\right)e^{i\theta}\right), \quad \theta = (\theta_1, \dots, \theta_n). \quad (3)$$

По условию теоремы имеем: $\|u_m\|_{L^{\bar{p}}} \leq c$. Рассмотрим на пространствах $L^{\bar{q}}(T^n)$ последовательность линейных непрерывных функционалов $\Phi_m(g) = \int_{T^n} g(\zeta) u_m(\zeta) |d\zeta|$, где $\zeta_j = e^{i\theta_j}$, $j = \overline{1, n}$ и $g \in L^{\bar{q}}(T^n)$ в шаре радиуса 1, т.е.

$\|g\|_{L^{\bar{q}}} \leq 1$. Тогда $|\Phi_m(G)| \leq \|g\|_{L^{\bar{q}}} \|u_m\|_{L^{\bar{p}}} \leq c \|g\|_{L^{\bar{q}}} \leq c$, т.е. последовательность функционалов $\{\Phi_m\}$ ограничена по совокупности на шаре радиуса 1. По теореме А найдётся такая подпоследовательность $\{\Phi_{m_k}\} \subset \{\Phi_m\}$ и такой функционал $\Phi \in (L^{\bar{p}})^*$, что для всех $g \in L^{\bar{q}}(T^n)$ $\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_{m_k}(g) = \Phi(g)$, где Φ – линейный непрерывный функционал на $L^{\bar{q}}(T^n)$. Следовательно, так как $(L^{\bar{p}})^* = L^{\bar{q}}$, то по теореме Б существует $f \in L^{\bar{p}}(T^n)$ такая, что $\Phi(g) = \int_{T^n} f(\zeta) g(\zeta) |d\zeta|$, где $\zeta_j = e^{i\theta_j}$, $j = \overline{1, n}$. Для любого m

функция $u_m(\theta) = u\left(\left(1 - \frac{1}{m}\right)e^{i\theta}\right)$ – n -гармоническая в $\left\{ |z| < \frac{1}{1 - \frac{1}{m}} \right\}$. Так что, если

$r_i < 1$, $i = \overline{1, n}$, то, используя (3), имеем:

$$u_{m_k}(re^{i\theta}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{T^n} P_r(\theta - t) u_{m_k}(e^{it}) dt = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{T^n} P_r(\theta - t) u_{m_k}(t) dt.$$

Так как $g(t) = P_r(\theta) \in L^{\bar{q}}$, тогда

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{T^n} P_r(\theta - t) u_{m_k}(t) dt = \Phi(g) = \int_{T^n} g(t) f(t) dt = \int_{T^n} P_r(\theta) P_r(\theta) f(t) dt.$$

Поскольку $\lim_{k \rightarrow \infty} 2\pi u_{m_k}(re^{i\theta}) = 2\pi u(re^{i\theta})$, то получаем:

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{T^n} P_r(\theta - t) f(t) dt.$$

Теорема доказана.

Отметим, что аналогичные результаты можно установить и в других областях n -мерного комплексного пространства C^n .

ЛИТЕРАТУРА

1. Бесов О.И., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975. 480 с.
2. Рудин У. Теория функций в поликруге. М.: Мир, 1974. 160 с.
3. Рудин У. Функциональный анализ. М.: Мир, 1975. 475 с.
4. Андрейчик М.Н., Коптенко Е.В., Орлова А.А. Интегральные операторы в весовых пространствах измеримых функций // Молодой учёный. 2013. № 11. С. 1–5.
5. Смирнова И.Ю., Карапетянц А.Н. О связи весовых пространств Бергмана со смешанной нормой на верхней полуплоскости и единичном диске с пространствами Харди // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2012. № 4. С. 19–21.
6. Аветисян К., Гапоян Н. Операторы типа Бергмана на пространствах со смешанной нормой в шаре из C^n // Известия Национальной Академии наук Республики Армения. Математика. 2016. Т 51. № 5. С. 3–12.
7. Махина Н.М. О сопряжённых пространствах к некоторым весовым пространствам аналитических функций // Вестник Брянского государственного университета. 2015. № 2. С. 420–423.
8. Petrosyan A.I., Avetisyan K.L. Weighted spaces of functions harmonic in the unit ball // Proceedings of the Yerevan State University. Physical and Mathematical Sciences 2017. no. 51(1). pp. 3–7.
9. Petrosyan A.I., Mkrtchyan E.S. Duality in Spaces of Functions Harmonic in the Unit Ball // Proceedings of the Yerevan State University. Physical and Mathematical Sciences. 2013. no. 3. pp. 29–36.
10. Антоненкова О.Е., Часова Н.А. Теплицевы операторы и вопросы деления в некоторых классах голоморфных в поликруге функций со смешанной нормой // Вестник Брянского государственного университета. 2015. № 3. С. 341–345.
11. Шамоян Ф.А. Весовые пространства аналитических функций со смешанной нормой. Брянск: РИО БГУ, 2014. 250 с.
12. Аветисян К, Тоноян Е. Об операторе дробного интегродифференцирования в R^n // Известия Национальной академии наук Армении. Математика. 2015. Т 50. № 5. С. 3–16.

13. Часова Н.А., Шамоян Ф.А. Диагональное отображение в обобщённых пространствах Харди в поликруге // Записки научных семинаров Санкт-Петербургского отделения математического института им. В.А. Стеклова РАН. 2003. Т. 303. № 31. С. 218–222.
14. Часова Н.А., Шамоян Ф.А. Диагональные отображения в пространствах Харди со смешанной нормой // Труды математического центра имени Н.И. Лобачевского. Казань. 2003. Т. 19. С. 226–227.
15. Шамоян Ф.А., Часова Н.А. Описание линейных непрерывных функционалов в пространствах Харди со смешанными нормами в поликруге // Современные методы теории функций и смежные проблемы: тезисы докладов Воронежской зимней математической школы. Воронеж. 2001. С. 285–286.
16. Chasova N.A., Shamoyan F.A. The diagonal mapping in generalized hardy spaces in the polydisk // Journal of Mathematical Sciences (New York). 2005. Vol. 129. Iss. 4. P. 4049–4052.
17. Rudin W., Stout E.L. Boundary properties of functions of several complex variable // Journal of Mathematics and Mechanics. 1965. Vol. 14. P. 991–1006.
18. Benedek A., Panzone R., The spaces L^p with mixed norm // Duke Mathematical Journal. 1961. Vol. 28. № 3. P. 301–324.

REFERENCES

1. Besov O.I., Il'in V.P., Nikol'skii S.M. *Integral'nye predstavleniya funktsii i teoremy vložheniya* [Integral representations of functions and embedding theorems]. Moscow, Nauka Publ., 1975. 480 p.
2. Rudin U. *Teoriya funktsii v polikrugu* [The theory of functions in policrome]. Moscow, Mir Publ., 1974. 160 p.
3. Rudin U. *Funktsional'nyi analiz* [Functional analysis]. Moscow, Mir Publ., 1975. 475 p.
4. Andreichik M.N., Koptenok E.V., Orlova A.A. [Integral operators in weighted spaces of measurable functions]. In: *Molodoi uchenyi* [Young Scientist], 2013, no. 11, pp. 1–5.
5. Smirnov I.Yu., Karapetyants A.N. [About the relationship weight Bergman spaces with mixed norm in the upper half plane and unit disk hardy spaces]. In: *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Severo-Kavkazskii region. Estestvennye nauki* [Scientific-educational and applied journal. University News North-Caucasian Region. Natural Sciences Series], 2012, no. 4, pp. 19–21.
6. Avetisyan K., Gapoyan N. [Operators of Bergman type on spaces with mixed norm in a ball from C^n]. In: *Izvestiya Natsional'noi Akademii nauk Respubliki Armeniya. Matematika* [Proceedings of NAS RA. Mathematics], 2016, vol. 51, no. 5, pp. 3–12.
7. Makhina N.M. [Connected spaces to some weighted spaces of analytic functions]. In: *Vestnik Bryanskogo gosudarstvennogo universiteta* [The Bryansk State University Herald], 2015, no. 2. pp. 420–423.
8. Petrosyan A.I., Avetisyan K.L. [Weighted spaces of functions harmonic in the unit ball]. In: *Proceedings of the Yerevan State University. Physical and Mathematical Sciences*, 2017, no. 51(1), pp. 3–7.
9. Petrosyan A.I., Mkrtchyan E.S. [Duality in Spaces of Functions Harmonic in the Unit Ball]. In: *Proceedings of the Yerevan State University. Physical and Mathematical Sciences*, 2013, no. 3, pp. 29–36.

10. Antonenkova O.E., Chasova N.A. [Teplitzky operators and division questions in some classes in polichrome holomorphic functions with mixed norm]. In: *Vestnik Bryanskogo gosudarstvennogo universiteta* [The Bryansk State University Herald], 2015, no. 3, pp. 341–345.
11. Shamoyan F.A. *Vesovye prostranstva analiticheskikh funktsii so smeshannoi normoi* [The weight space of analytic functions with mixed norm], Bryansk, RIO BGU Publ., 2014. 250 p.
12. Avetisyan K., Tonoyan E. [Operator of fractional integro-differentiation in R^n]/ In: *Izvestiya Natsional'noi Akademii nauk Respubliki Armeniya. Matematika* [Proceedings of NAS RA. Mathematics], 2015, vol. 50, no. 5, pp. 3–16.
13. Chasova N.A., Shamoyan F.A. [Diagonal mapping in generalized hardy spaces in polichrome]. In: *Zapiski nauchnykh seminarov Sankt-Peterburgskogo otdeleniya matematicheskogo instituta im. V.A. Steklova RAN* [Zapiski Nauchnyh Seminarov POMI], 2003, vol. 303, no. 31, pp. 218–222.
14. Chasova N.A., Shamoyan F.A. [Diagonal display in Hardy's spaces with a mixed norm]. In: *Trudy matematicheskogo tsentra imeni N.I. Lobachevskogo*. [Works of mathematical center named after N.I. Lobachevsky], Kazan, 2003, vol. 19, pp. 226–227.
15. Shamoyan F.A., Chasova N.A. [Description of continuous linear functionals in Hardy's spaces with mixed norms in polichrome]. In: *Sovremennye metody teorii funktsii i smezhnye problemy: tezisy dokladov Voronezhskoi zimnei matematicheskoi shkoly* [Modern methods of the theory of functions and related problems: abstracts of the Voronezh Winter Mathematical School]. Voronezh, 2001. pp. 285–286.
16. Chasova N.A., Shamoyan F.A. [The diagonal mapping in generalized hardy spaces in the polydisk]. In: *Journal of Mathematical Sciences*, New York, 2005, vol. 129, iss. 4, pp. 4049–4052.
17. Rudin W., Stout E.L. [Boundary properties of functions of several complex variable]. In: *Journal of Mathematics and Mechanics*, 1965, vol. 14, pp. 991–1006.
18. Benedek A., Panzone R. [The spaces with mixed norm]. In: *Duke Mathematical Journal*, 1961, vol. 28, no. 3, pp. 301–324.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Антоненкова Ольга Евгеньевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики Брянского государственного инженерно-технологического университета;
e-mail: anto-olga@yandex.ru;

Часова Наталья Александровна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики Брянского государственного инженерно-технологического университета;
e-mail: chasnat@bk.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Olga E. Antonenkova – PhD in Physical and Mathematical Sciences, associate professor at the Department of Mathematics, Bryansk State Technological University of Engineering;
e-mail: anto-olga@yandex.ru;

Nataliya A. Chasova – PhD in Physical and Mathematical Sciences, associate professor at the Department of Mathematics, Bryansk State Technological University of Engineering;
e-mail: chasnat@bk.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Антоненкова О.Е., Часова Н.А. Об интегральных операторах с ядрами Пуассона в пространствах типа Харди в поликруге со смешанной нормой // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2017. № 4. С. 14–23. DOI: 10.18384/2310-7251-2017-4-14-23

FOR CITATION

Antonenkova O.E., Chasova N.A. About integral operators with Poisson kernels in Hardy-type spaces in polydisc with mixed norm. In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*, 2017, no. 4, pp. 14–23. DOI: 10.18384/2310-7251-2017-4-14-23

РАЗДЕЛ II. ФИЗИКА

УДК 535-3

DOI: 10.18384/2310-7251-2017-4-24-38

СОВРЕМЕННЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ РАЗВИТИЯ ИСТОЧНИКОВ УФ-ИЗЛУЧЕНИЯ БАКТЕРИЦИДНОГО ДИАПАЗОНА

**Бугаев А.С.^{1,2}, Шешин Е.П.¹, Озол Д.И.¹, Мье М.М.¹, Данилкин М.И.³,
Верещагина Н.Ю.³**

¹ Московский физико-технический институт
141700, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский пер., 9, Российская
Федерация

² Московский государственный областной университет
105005, г. Москва, улица Радио, д. 10А, Российская Федерация

³ Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН
119991, Москва, Ленинский проспект, д. 53, Российская Федерация

Аннотация. В последние десятилетия стремительно расширяется область применения ультрафиолетовых источников излучения. Они находят многочисленные бытовые, медицинские и промышленные применения, в особенности для обеззараживания воздуха, воды и поверхностей. Для этих целей наиболее эффективно УФ-излучение так называемого бактерицидного диапазона. Наибольшее распространение получили ртутные лампы низкого и среднего давления. Однако в настоящее время усилились тенденции к исключению ртути не только из бытового, но и промышленного оборота. Этим вызвана необходимость развития не содержащих ртути УФ-источников. Такими являются эксимерные лампы, УФ-излучающие светодиоды, а также представители нового направления – катодолюминесцентные УФ-источники, в особенности с автоэмиссионным катодом.

Ключевые слова: ультрафиолет, обеззараживание, бактерицидный диапазон, катодолюминесценция, автоэмиссия

MODERN TRENDS IN THE DEVELOPMENT OF UV-SOURCES OF GERMICIDAL RANGE

A. Bugaev^{1,2}, E. Sheshin¹, D. Ozol¹, M. Myo¹, M. Danilkin³, N. Vereschagina³

¹ Moscow Institute of Physics and Technology (State University)
Institutskii pereulok 9, 141700 Dolgoprudnyi, Moscow region, Russian Federation

© Бугаев А.С., Шешин Е.П., Озол Д.И., Мье М.М., Данилкин М.И., Верещагина Н.Ю., 2017.

² *Moscow Region State University
ul. Radio 10A, 105005 Moscow, Russian Federation*

³ *P.N. Lebedev Physical Institute of the Russian Academy of Sciences
Leninsky prosp. 53, 119991 Moscow, Russian Federation*

Abstract. In recent decades the field of application of UV light sources has been rapidly increasing. They can be used for many purposes in everyday life, medicine, industry, especially for disinfection of air, water, and surfaces. The most efficient for this purpose is the UV radiation within the so-called germicidal range. The mercury-vapor low and medium pressure lamps are most widely used. However, nowadays a tendency has been promoted to withdraw mercury appliances not only from household usage, but from industry. This leads to a necessity of the development of mercury-free UV light sources such as excimer lamps and UV light-emitting diodes (UV-LEDs). Recently a new kind of lamps, so called cathodoluminescent UV light sources (especially with field emission cathodes), has been developed.

Key words: UV-light, disinfection, germicidal range, cathodoluminescence, field emission.

Источники ультрафиолетового (УФ) излучения широко распространены в медицине и промышленности. В последние годы особенно быстро растёт их применение для обеззараживания поверхностей, воздуха, воды, так как УФ-излучение эффективно воздействует на многие бактерии, вирусы, плесневые грибы. Наиболее эффективно излучение так называемого бактерицидного диапазона (~230–300 нм), лежащего в областях UV-B (280–320 нм) и UV-C (200–280 нм). Рассмотрим основные существующие в настоящее время источники, излучающие в основном именно в бактерицидном диапазоне (таким образом, за пределами данной статьи останутся вспышечные лампы, дейтериевые лампы и другие источники более широкого спектра).

Механизм воздействия УФ-излучения на микроорганизмы

Обеззараживание под действием УФ-излучения происходит за счет фотохимических реакций внутри микроорганизмов [4; 10]. При этом УФ-излучение в принципе воздействует на все молекулы клетки, но лишь биополимеры – белки мембран и нуклеиновые кислоты (особенно ДНК клеточного ядра) – поглощают его эффективно. Чувствительность протеинов, образующих мембраны, велика в диапазоне длин волн < 230 нм, более длинноволновое излучение воздействует на них очень слабо. Нуклеотиды же, образующие ДНК, имеют выраженный максимум поглощения УФ-излучения в диапазоне 250–270 нм (рис. 1). Так как удобнее работать с источниками излучения более длинноволнового диапазона, особенно при обеззараживании жидкостей (вода интенсивно поглощает излучение длиной волны < 230 нм), большинство используемых для обеззараживания УФ-источников воздействуют именно на ядра клеток или вирусов, разрушая их ДНК. Собственно говоря, именно поэтому такую обработку и называют не стерилизацией, а обеззараживанием – после разрушения клеточной ДНК (клеточная мембрана и иные структуры при этом не повреждаются или повреждаются слабо) бактерия может сохранить жизнеспособность (то есть метаболические процессы в ней не прекращаются), но более не способна размножаться. Отметим,

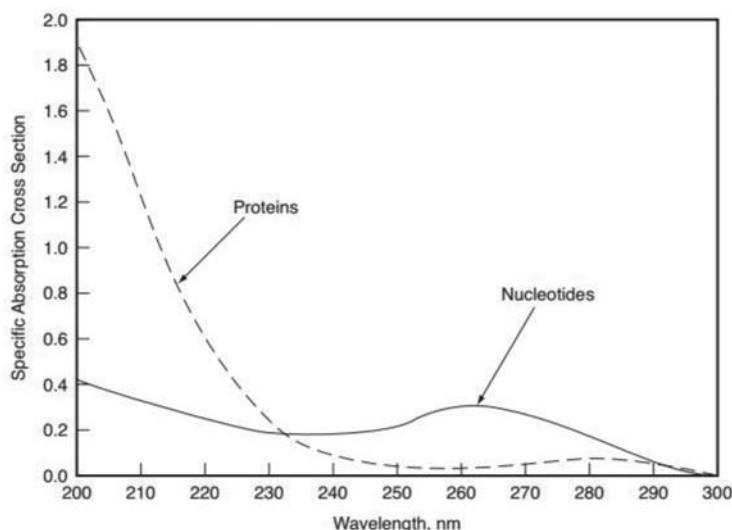


Рис. 1. Кривые поглощения УФ-излучения протеинами и нуклеотидами [4].

что в силу малых поперечных размеров клеток лишь не более 5% УФ-излучения, проходящего через отдельно взятую типичную бактериальную клетку, поглощается в ней – таким образом, клеточные мембраны и другие органеллы не могут послужить сколько-нибудь эффективной экранирующей защитой для ядер. Но с ростом размеров клеток чувствительность микроорганизмов ослабевает, поэтому стойкость плесневых клеток к УФ-облучению выше, чем у бактериальных.

Из графика на рис. 1 видно, что наиболее эффективны УФ-источники с длиной излучаемой волны около 265–270 нм (вообще говоря, разные микроорганизмы имеют различную чувствительность к УФ-облучению, в том числе и спектральную – однако качественно кривые чувствительности в большинстве случаев близки к кривой чувствительности нуклеотидов, что позволяет опираться на неё при выборе УФ-источников для практического применения). Однако источники излучения, как правило, имеют сложные спектры – либо широкие, либо с множеством линий, не всегда попадающих в область максимальной фоточувствительности клеток. Поэтому источники с разными спектрами при прочих равных имеют различную бактерицидную эффективность. Для её описания введено понятие относительной спектральной бактерицидной эффективности – безразмерная величина, свёртка спектра источника с кривой чувствительности. Бактерицидным потоком (измеряемым в ваттах) называется произведение мощности на безразмерную бактерицидную эффективность, бактерицидной отдачей – отношение бактерицидного потока к потребляемой УФ-источником электрической мощности. Так, спектр излучения ртутных ламп низкого давления имеет выраженный узкий пик на длине волны 253,7 нм, что достаточно близко к максимуму бактерицидной эффективности (рис. 2), и обеспечивает таким лампам высокую бактерицидную отдачу до 25–35%.

На этот пик приходится 82% излучаемой мощности, ещё 6,6% – на линию вакуумного ультрафиолета 184,9 нм, остальное – на несколько пиков слабой интенсивности от 260 до 600 нм. Такой спектр делает ртутные лампы низкого давления

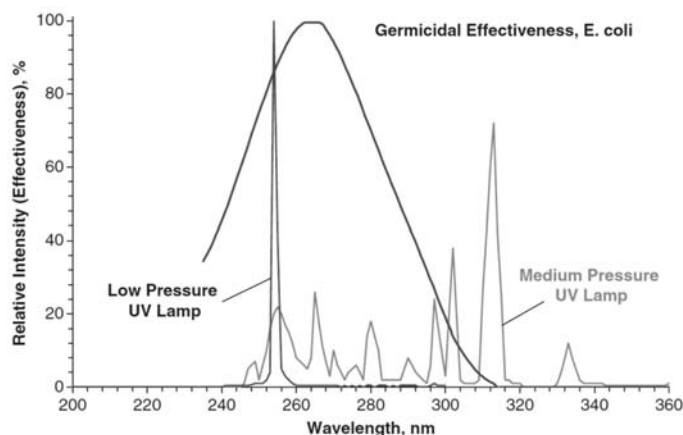


Рис. 2. Кривая бактериальной чувствительности *E.coli* к УФ-излучению и спектры ртутных ламп низкого и среднего давления [4].

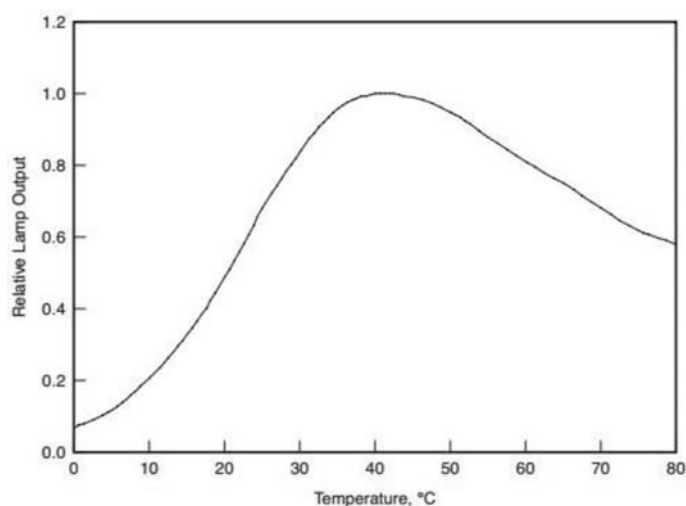


Рис. 3. Зависимость интенсивности свечения ртутной лампы низкого давления от температуры [10].

спектрально достаточно эффективными, и в целом наиболее эффективными из существующих на сегодняшний день источников, но их недостатками являются малая плотность излучаемой мощности и сильная зависимость мощности от температуры окружающей среды (рис. 3.), кроме того, линия 184,9 нм может приводить к генерации озона.

Для случая лампы, омываемой водой, эта зависимость менее выражена, но тем не менее в холодных регионах, где температура воды может быть не выше 0,5 °С, особенно зимой, иногда возникают проблемы с зажиганием разряда в лампах. В любом случае, для работы таких ламп оптимальной является температура собственно лампы 30–40 °С, которая достигается в случае работы в стоячем воздухе температуры 25–27 °С. При этом лампа может терять до четверти своей мощности, когда температура воздуха опускается с 27 °С до 16 °С [4].

Недостаточная плотность мощности ($0,15\text{--}1\text{ Вт/см}^2$) и высокая температурная чувствительность приводят к тому, что часто используются намного менее спектрально эффективные (см. рис. 2.) и имеющие бактерицидную отдачу $10\text{--}16\%$, с меньшим ресурсом, но обладающие значительно большей «яркостью» (десятки Вт/см^2), ртутные лампы среднего давления.

Однако главным недостатком ртутных ламп является их экологическая опасность. Имеется риск попадания ртути в питьевую воду в случае разрушения оболочки лампы, отработанные лампы требуют специальной утилизации, чтобы избежать попадания ртути в окружающую среду. В настоящее время опасения по отношению к ртути вылились в ратификацию странами-членами ООН Минаматской конвенции о ртути [12]. В связи с этим весьма желательно создание и внедрение эффективных УФ-источников, не содержащих ртути. Рассмотрим основные из известных на сегодняшний день.

Эксилампы

Эксимерами называют возбуждённые двухатомные молекулы (димеры), состоящие из пар одинаковых атомов, формирующих химическую связь лишь в возбуждённом состоянии. Распад эксимера сопровождается испусканием кванта с энергией, характерной для молекул данного типа. Аналогичные возбуждённые молекулы, образованные разными атомами, называют эксиплексами. К эксилампам относят источники излучения, работающие на эксимерах и эксиплексах. Для формирования эксимеров, либо эксиплексов газовую смесь – инертные газы, галогены, или смесь инертных газов и галогенов – необходимо возбудить, обычно это делают, пропуская через газ электрический разряд. Распространены эксилампы барьерного и ёмкостного разрядов. Спектры для одной и той же газовой смеси для разных типов разрядов могут несколько отличаться, варьируются они и в зависимости от давления газа.

Длина волны эксилампы не поддаётся произвольному управлению, спектры необходимо выбирать из сравнительно ограниченного набора эксимерных молекул. У многих из них спектры чересчур широки и лежат не в бактерицидном диапазоне. Спектры нескольких эксимеров и эксиплексов – XeI^* , Cl_2^* и XeBr^* – имеют значительную долю излучения в пределах бактерицидного диапазона. КПД таких эксиламп обычно $\sim 5\%$, плотность излучаемой мощности для длин волн более 200 нм составляет несколько десятков мВт/см^2 [26], хотя для длин волн 180 нм и менее может быть больше – до $100\text{--}150\text{ мВт/см}^2$. Эксилампы требуют для поджига разряда значительно большего напряжения, чем ртутные лампы, они достаточно дороги – в несколько раз дороже ртутных ламп. Ресурс их составляет до 2500 часов.

Для наиболее спектрально привлекательного эксиплекса XeI получен КПД до $5,5\%$ и плотность мощности менее 10 мВт/см^2 [2]. Другие авторы сообщают о КПД до 13% [1] при использовании радиочастотного разряда ($13,56\text{ МГц}$), однако такая конструкция весьма сложна. При этом бактерицидная отдача эксиламп заметно меньше, чем у ртутных ламп низкого давления (менее 8%) [14].

Технологии эксиламп развиваются во всём мире более тридцати лет, и можно осторожно предположить, что эти устройства если и не достигли ещё сво-

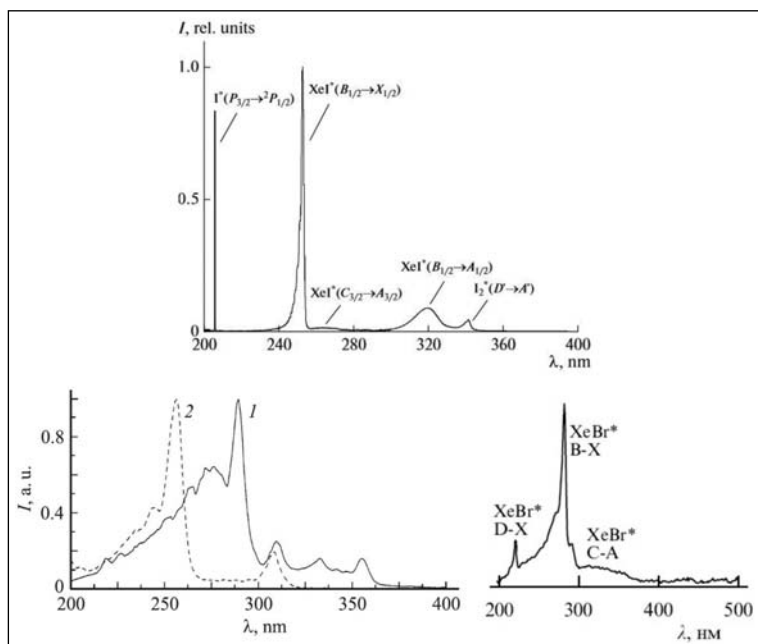


Рис. 4. Спектры нескольких эксимеров – XeI^* , Cl_2^* и XeBr^* [2; 26].

его технологического потолка, то уже приблизились к нему; в этом случае, по-видимому, эксимеры могут стать основным источником вакуумного ультрафиолета – в этом диапазоне их КПД достигает 40% и более. Не исключено применение в системах стерилизации непрямого облучения – например, за счёт создания в воде путём фотолиза радикалов OH^* под действием ВУФ-излучения (подобное воздействие может приводить и к разрушению молекул многих химических загрязнителей и органических молекул) [8]. К сожалению, столь коротковолновое УФ-излучение сильно поглощается водой, соответственно, проникающая способность его мала, и трудно обеспечить производительность установок выше $10 \text{ м}^3/\text{сутки}$. Возможно также обеззараживание воздуха путём генерации озона. Но параметры эксимеров для широкомасштабного применения в качестве ламп бактерицидного диапазона не вполне приемлемы – в особенности плотность мощности и ресурс в сочетании с высокой стоимостью – что до сих пор сильно ограничивает их распространение.

УФ-излучающие светодиоды

Попытки создания светодиодов, излучающих в УФ-диапазоне $<360 \text{ нм}$, начались со второй половины 1990-х гг. [16]. К настоящему времени созданы различные типы диодов, излучающих в диапазоне от 200 до 400 нм. При этом работы по созданию диодов ближнего УФ-диапазона (380–400 нм) на основе InGaN (квантовые ямы с GaN барьерами) оказались весьма успешны, уже сейчас они могут считаться основными источниками для применения в этой спектральной области. Однако создать эффективный светодиод для коротковолновой области оказалось значительно сложнее. InGaN-структуры уже непригодны, поэтому для

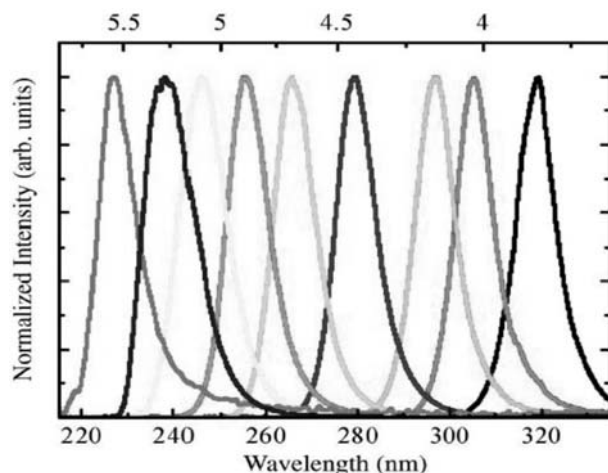


Рис. 5. Спектры УФ-светодиодов на основе AlGaIn [18].

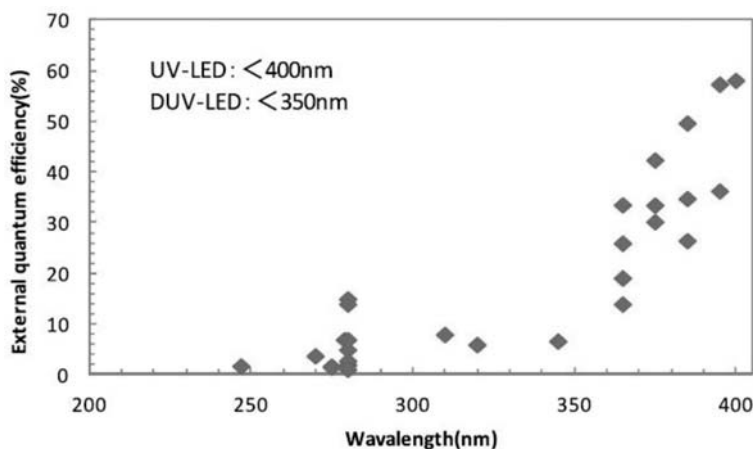


Рис. 6. Внешний квантовый выход УФ-светодиодов [13].

покрытия бактерицидного диапазона используются AlGaIn-структуры, позволяющие, в зависимости от соотношения нитридов AlN (210 нм в чистом виде) и GaN (365 нм в чистом виде), получать структуры с различной шириной запрещённой зоны, и, соответственно, излучение от 210 нм до 365 нм. Максимум излучения может быть расположен произвольно, но спектр всегда имеет одну и ту же форму и полуширину ~ 10 нм. (рис. 5).

Данный материал создаёт разработчикам ряд трудностей. Суммарный КПД светодиода определяется рядом факторов, среди которых эффективность инжекции носителей заряда (невелика в силу малой концентрации дырок в p-AlGaIn), внутренний квантовый выход (в AlGaIn более чувствителен к плотности дислокаций, чем в InGaIn), эффективность вывода излучения (мала из-за поглощения УФ-излучения контактным слоем p-GaN). Поэтому, несмотря на то, что диоды диапазона 260–280 нм впервые появились между 2002 г. и 2006 г., их эффективность многократно уступает светодиодам ближнего УФ-диапазона (см. рис. 6).

Подчеркнём, что на рисунке указаны значения не КПД, а лишь одного из определяющих его факторов. Отметим также, что приведены характеристики не только промышленно доступных, но и лучших лабораторных образцов.

В итоге КПД типичного УФ-светодиода бактерицидного диапазона составляет 0,1–1%, достигая у лучших лабораторных образцов 2% [18; 16]. При этом типичная мощность излучения единичного диода – 1-10 мВт, при весьма значительной стоимости.

Таким образом, большой ресурс (~10 000-30 000 часов) и неплохие спектральные характеристики УФ-светодиодов – хотя ширина спектра и является известным недостатком – нивелируются низким КПД, небольшой удельной излучаемой мощностью и высокой стоимостью. И хотя УФ-светодиоды не первый год привлекают внимание как возможная альтернатива ртутным лампам для обеззараживания воды (см., напр., [19]) и применения в пищевой промышленности [17], с технической точки зрения они смогут стать полноценной заменой ртутных ламп низкого давления лишь после повышения эффективности в 50–90 раз до 25-40% [3]. Для замены ртутных ламп среднего давления в высокопроизводительных проточных установках может быть достаточно и меньшего роста КПД (до ~10–20%), но необходима высокая плотность излучаемой мощности. Также необходимо снижение стоимости УФ-светодиодов как минимум на порядок для полноценной замены ртутных источников по технико-экономическим показателям.

Катодолюминесцентные источники

Катодолюминесцентный источник излучения представляет собой вакуумную лампу диодной или триодной схемы с электронной пушкой и экраном-анодом, на который нанесен катодолуминофор, светящийся под действием быстрых

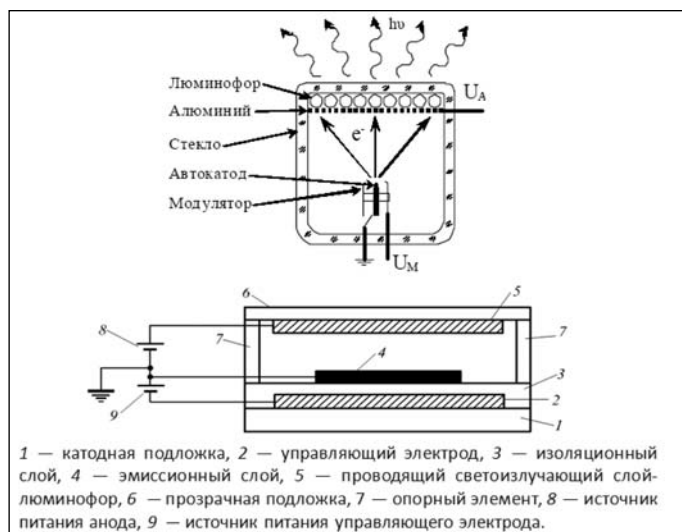


Рис. 7. Принципиальная схема катодолюминесцентного источника (а) и плоского облучателя (б).

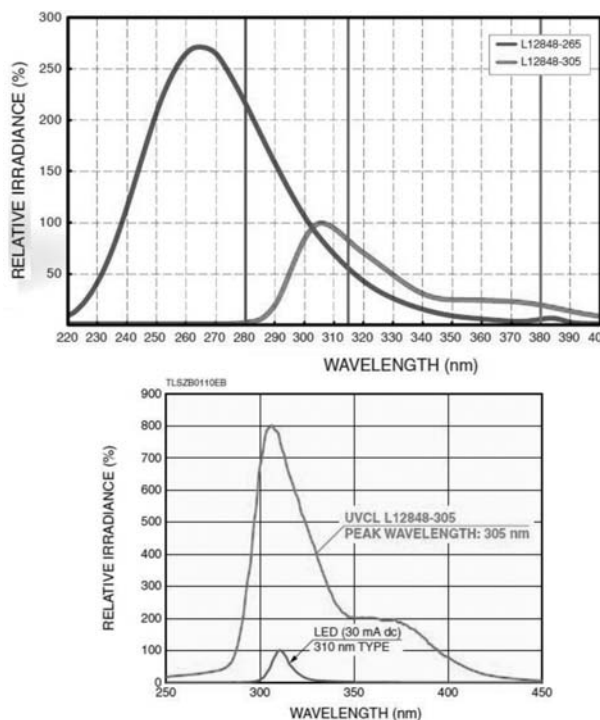


Рис. 8. Спектр катодолуминесцентных источников Hamamatsu двух типов (а) и в сравнении с УФ-светодиодом той же потребляемой мощности (б) [6].

электронов (энергией 5–30 кэВ). Схема такого источника приведена на рис. 7. Люминофор представляет собой порошок с размером частиц 15–50 мкм. Ряд конструкций таких ламп видимого света описан, например, в [23].

Так как спектр излучения лампы зависит только от использованного люминофора, на основе тех же конструкций могут быть созданы УФ-лампы путём замены люминофора. Фирмой Hamamatsu Photonics производятся для использования в лабораторных целях маломощные катодолуминесцентные УФ-источники двух типов – с максимумом длины волны ~315 нм и ~265 нм, то есть бактерицидного диапазона [6]. Их спектры приведены на рис. 8. Данный источник в силу выбора люминофора имеет широкий спектр, умеренный ресурс (заявлено 5000 часов) и небольшую эффективность – обусловленную, по-видимому, выбранным люминофором и использованием термокатода.

Наиболее эффективными катодолуминесцентные источники могут стать при использовании не термокатодов, требующих затрат энергии на их нагревание и обладающих сравнительно небольшим ресурсом, а автоэмиссионных катодов [5].

Автоэмиссионная лампа принципиально может стать новым уникальным источником ультрафиолета, поэтому создание таких источников излучения привлекает внимание многих исследовательских коллективов [8; 9; 20; 21; 24]. Автоэмиссионная лампа может быть создана в разных форм-факторах – например, плоских источников излучения (рис. 7б), пальчиковых ламп (рис. 7а), акси-

ального источника излучения и других. Основным преимуществом пальчиковых катодолюминесцентных ламп является возможность достижения максимальной яркости среди УФ-ламп. Плоские и аксиальные источники более удобны для обработки больших поверхностей или больших объёмов жидкостей или газов в проточных стерилизаторах.

Спектр излучения автоэмиссионной лампы зависит от выбранного люминофора, поэтому для создания автоэмиссионного ультрафиолетового источника излучения актуальной является задача поиска новых широкозонных люминесцентных материалов. Судя по литературе [6; 8; 9; 20; 21], разработчики автоэмиссионных катодолюминесцентных источников использовали в качестве катодолюминофоров вещества в известной мере случайные. Неудивительно, что при таком подходе трудно добиться высокой эффективности и ресурса люминофора (который должен выдерживать длительную бомбардировку электронами в вакуумной колбе, не разрушаясь и не загрязняя вакуум). Поэтому следует подчеркнуть, что задача создания семейства катодолюминофоров разных длин волн, обладающих необходимыми свойствами – эффективностью не менее 5%, ресурсом не менее 5000 часов – является одной из ключевых при разработке катодолюминесцентных УФ-источников. Такие люминофоры в настоящее время не производятся промышленно, но в литературе имеются данные о многих потенциально подходящих составах.

Теоретический потолок энергетической эффективности катодолюминофоров составляет 36–40% [25]. Достигнутый на практике – 25% (в синей области спектра, в более длинноволновых он меньше). Поэтому можно ожидать, что в УФ-области достижимы величины ~30%. Для практического применения пригодны уже катодолюминофоры с КПД 5–10%, если их спектры удовлетворительны, а стойкость высока. Поскольку веществ, могущих служить катодолюминофорами, потенциально очень много, а спектры их разнообразны – можно ожидать и отыскания люминофора с высокой бактерицидной спектральной эффективностью. Выявлено несколько перспективных семейств люминофоров, потенциально обладающих эффективностью до 20% и более, что превышает типичный КПД ртутных УФ-ламп среднего давления ~10–15%.

В качестве примера укажем на тетраборат лития, активированный серебром [24]. Катодолюминофоры могут иметь самые разнообразные спектры, как широкие сплошные, так и узкие линейчатые, поэтому принципиально возможно создание люминофора с высокой спектральной бактерицидной эффективностью, сопоставимой с таковой у ртутных ламп низкого давления, или даже превосходящей её. Так как ранее УФ-катодолюминофоры соответствующего диапазона целенаправленно не разрабатывались, поле для исследований огромно, но и результаты в случае успеха трудно переоценить.

Одним из возможных направлений создания УФ-катодолюминофоров с заданным спектром является применение квантовых точек (КТ). Спектр КТ – полупроводниковых нанокристаллов – зависит от размеров нанокристалла, причём спектр отдельно взятого нанокристалла представляет собой единственную очень узкую линию [7]. Таким образом, принципиально возможно создание лю-

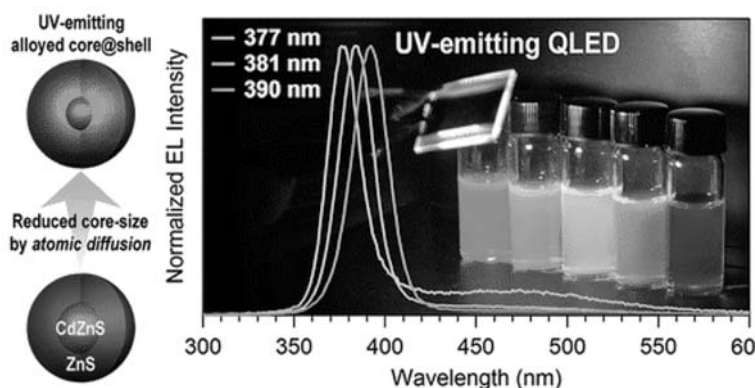


Рис. 9. Квантовые точки УФ-диапазона (по данным [10]).

минофора, излучающего одну спектральную линию шириной 1–2 нм. Проверено экспериментально (для КТ в диапазоне излучения 470–680 нм), что многооболочечные КТ могут служить и катодолуминофорами, эффективно возбуждаясь электронами и демонстрируя яркость свечения, сопоставимую с классическими катодолуминофорами той же спектральной области [14], то есть КПД их ~10–20% даже при квантовом выходе, далёком от 100%. КТ, излучающие на длинах волн <300 нм, пока, насколько нам известно, ещё не синтезированы, но исследования в этом направлении ведутся, и уже получены КТ со спектральным максимумом в районе 370 нм [10] (см. рис. 9). Вполне вероятно, что путём подбора вещества нанокристаллов и совершенствования технологии в ближайшие годы их длина излучения будет доведена до 260–280 нм.

Таким образом, катодолуминесцентные УФ-источники могут обеспечить произвольный спектр излучения в бактерицидном диапазоне, достичь спектральной эффективности, превосходящей ртутные лампы низкого давления при сопоставимой с ними (или превосходящей) плотности излучаемой мощности, приблизиться по спектральной эффективности к ртутным лампам низкого давления при превосходящей их плотности мощности. Такие автоэмиссионные УФ-источники будут обладать высоким ресурсом (10 000 – 50 000 часов), малой стоимостью, высокой надёжностью и стабильностью работы в широком диапазоне температур, и при полной экологической безопасности смогут полноценно заменить ртутные лампы для всех применений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ametep J., Peng S., Manos D. Ultraviolet discharges from a radio-frequency system for potential biological/chemical applications // Chinese Physics B. 2017. Vol. 26. № 8. P. 083302.
2. Avdeev S.M. et al. XeI barrier discharge excilamp // Optics and Spectroscopy. 2013. Vol. 115. № 1. pp. 28–36.
3. Beck S.E. et al. Evaluating UV-C LED disinfection performance and investigating potential dual-wavelength synergy // Water research. 2017. Vol. 109. pp. 207–216.
4. Bolton J.R., Cotton C.A. The ultraviolet disinfection handbook. American Water Works Association, 2011.
5. Egorov N., Sheshin E. Field Emission Electronics. Springer, 2017.

6. Hamamatsu Photonics. UVCL (Ultra Violet Cathode emitting Light source). [Электронный ресурс]. URL: <http://www.hamamatsu.com/us/en/product/category/1001/3068/index.html> (дата обращения: 24.09.2017).
7. Klimov V.I., ed. Nanocrystal Quantum Dots (2nd Ed.). CRC Press, 2010.
8. Kominami H. et al. Cathodoluminescence of ZnAl_2O_4 Phosphor for the Application of UV Emission Devices // Vacuum Nanoelectronics Conference (IVNC), 2010, 23rd International. pp. 30–31.
9. Kominami H., Nakanishi Y., Hara K. Cathodoluminescent properties of ZnO-based phosphors for UV emission // Vacuum Nanoelectronics Conference, 2009. IVNC 2009. 22nd International, pp. 67–68.
10. Kowalski W. Ultraviolet germicidal irradiation handbook: UVGI for air and surface disinfection. Springer Berlin Heidelberg, 2010. 501 p.
11. Kwak J. et al. High-power genuine ultraviolet light-emitting diodes based on colloidal nanocrystal quantum dots // Nano letters. 2015. Vol. 15. № 6. P. 3793–3799.
12. Minamata Convention on Mercury. [Электронный ресурс]. URL: <http://www.mercuryconvention.org/> (дата обращения: 24.09.2017)
13. Muramoto Y., Kimura M., Nouda S. Development and future of ultraviolet light-emitting diodes: UV-LED will replace the UV lamp // Semiconductor Science and Technology, 2014. Vol. 29. № 8. P. 084004.
14. Ozol D.I. Preliminary study of cathode ray tube phosphors on the basis of nanocrystal quantum dots // 29th International Vacuum Nanoelectronics Conference (IVNC), 2016, Vancouver, BC, 2016, pp. 1–2.
15. Schalk S. et al. UV-Lamps for disinfection and advanced oxidation–lamp types, technologies and application // IUVA news, 2005. Vol. 8. № 1. pp. 32–37.
16. Seong T.Y. et al. III-Nitride based light emitting diodes and applications. Dordrecht: Springer Netherlands, 2013.
17. Shin J.Y. et al. Fundamental characteristics of deep-UV light-emitting diodes and their application to control foodborne pathogens // Applied and environmental microbiology, 2016. Vol. 82. № 1. pp. 2–10.
18. Shur M.S., Gaska R. Deep-ultraviolet light-emitting diodes // IEEE Transactions on electron devices. 2010. Vol. 57. № 1. pp. 12–25.
19. Song K., Mohseni M., Taghipour F. Application of ultraviolet light-emitting diodes (UV-LEDs) for water disinfection: A review // Water research, 2016. Vol. 94. pp. 341–349.
20. Yanagihara M. et al. Vacuum ultraviolet field emission lamp consisting of neodymium ion doped lutetium fluoride thin film as phosphor // The Scientific World Journal. 2014.
21. Yanagihara M. et al. Vacuum ultraviolet field emission lamp utilizing KMgF_3 thin film phosphor // APL Materials. Vol. 2. 2014. № 4. P. 046110.
22. Zoschke K. et al. Vacuum-UV radiation at 185 nm in water treatment—a review // Water research. 2014. Vol. 52. P. 131–145.
23. Бугаев А.С. и др. Католюминесцентные источники света (современное состояние и перспективы) // Успехи физических наук. 2015. Т. 185. № 8. С. 853–883.
24. Верещагина Н.Ю. и др. Католюминесцентные источники УФ-излучения // XIII Международная конференция по импульсным лазерам и применениям лазеров AMPL-2017, Томск.
25. Левшин В.Л. и др. Исследование католюминесценции цинксulfидных и некоторых других люминофоров // Труды Физического института им. П.Н. Лебедева.. 1963. Вып. 23. С. 64–135.
26. Тарасенко В.Ф., Соснин Э.А. Эксилампы барьерного разряда: история, принцип действия, перспективы // Оптический журнал. 2012. Т. 79. № 10. С. 58–65.

REFERENCES

1. Ametepe J., Peng S., Manos D. [Ultraviolet discharges from a radio-frequency system for potential biological/chemical applications]. In: *Chinese Physics B*, 2017, vol. 26, № 8, P. 083302.
2. Avdeev S.M. et al. [XeI barrier discharge excilamp]. In: *Optics and Spectroscopy*, 2013, vol. 115, no. 1, pp. 28–36.
3. Beck S.E. et al. [Evaluating UV-C LED disinfection performance and investigating potential dual-wavelength synergy]. In: *Water research*, 2017, vol. 109, pp. 207–216.
4. Bolton J.R., Cotton C.A. *The ultraviolet disinfection handbook*. American Water Works Association, 2011.
5. Egorov N., Sheshin E. *Field Emission Electronics*. Springer, 2017.
6. *Hamamatsu Photonics*. UVCL (Ultra Violet Cathode emitting Light source). Available at: <http://www.hamamatsu.com/us/en/product/category/1001/3068/index.html> (accessed: 24.09.2017)
7. Klimov V.I., ed. *Nanocrystal Quantum Dots*. CRC Press, 2010.
8. Kominami H. et al. [Cathodoluminescence of ZnAl₂O₄ Phosphor for the Application of UV Emission Devices]. In: *Vacuum Nanoelectronics Conference (IVNC)*, 2010, 23rd International, pp. 30–31.
9. Kominami H., Nakanishi Y., Hara K. [Cathodoluminescent properties of ZnO-based phosphors for UV emission]. In: *Vacuum Nanoelectronics Conference*, 2009, IVNC 2009, 22nd International, pp. 67–68.
10. Kowalski W. *Ultraviolet germicidal irradiation handbook: UVGI for air and surface disinfection*. Springer Berlin Heidelberg, 2010. 501 p.
11. Kwak J. et al. [High-power genuine ultraviolet light-emitting diodes based on colloidal nanocrystal quantum dots]. In: *Nano letters*, 2015, vol. 15, no. 6, P. 3793–3799.
12. *Minamata Convention on Mercury*. Available at: <http://www.mercuryconvention.org/> (accessed: 24.09.2017).
13. Muramoto Y., Kimura M., Nouda S. [Development and future of ultraviolet light-emitting diodes: UV-LED will replace the UV lamp]. In: *Semiconductor Science and Technology*, 2014, vol. 29, no. 8, P. 084004.
14. Ozol D.I. *Preliminary study of cathode ray tube phosphors on the basis of nanocrystal quantum dots* // 29th International Vacuum Nanoelectronics Conference (IVNC), 2016, Vancouver, BC, 2016, pp. 1-2.
15. Schalk S. et al. [UV-Lamps for disinfection and advanced oxidation–lamp types, technologies and application]. In: *IUVA news*, 2005, vol. 8, no. 1, pp. 32–37.
16. Seong T.Y. et al. *III-Nitride based light emitting diodes and applications*. Dordrecht: Springer Netherlands, 2013.
17. Shin J.Y. et al. [Fundamental characteristics of deep-UV light-emitting diodes and their application to control foodborne pathogens]. In: *Applied and environmental microbiology*, 2016, vol. 82, no. 1, pp. 2–10.
18. Shur M.S., Gaska R. [Deep-ultraviolet light-emitting diodes]. In: *IEEE Transactions on electron devices*. 2010, vol. 57, no. 1, pp. 12–25.
19. Song K., Mohseni M., Taghipour F. [Application of ultraviolet light-emitting diodes (UV-LEDs) for water disinfection: A review]. In: *Water research*, 2016, vol. 94, pp. 341–349.
20. Yanagihara M. et al. [Vacuum ultraviolet field emission lamp consisting of neodymium ion doped lutetium fluoride thin film as phosphor]. In: *The Scientific World Journal*. 2014.
21. Yanagihara M., et al. [Vacuum ultraviolet field emission lamp utilizing KMgF₃ thin film phosphor]. In: *APL Materials*, 2014, vol. 2, no. 4, P. 046110.

22. Zoschke K. et al. [Vacuum-UV radiation at 185 nm in water treatment—a review]. In: *Water research*, 2014, vol. 52. pp. 131–145.
23. Bugaev A.S. et al. [Cathodoluminescence light sources (status and prospects)] In: *Uspekhi fizicheskikh nauk* [Advances in Physical Sciences], 2015, vol. 185, no. 8, pp. 853–883.
24. Vereshchagina N.Yu. et al. [Cathode-luminescent light sources of UV-radiation]. In: *XIII international conference on pulsed lasers and laser applications AMPL*, 2017, Tomsk.
25. Levshin V.L. et al. [Investigation of cathodoluminescence of zinc sulfide and some other phosphors]. In: *Trudy Fizicheskogo instituta im. P.N. Lebedeva* [Proceedings of the P.N. Lebedev Physical Institute], 1963, no. 23, pp. 64–135.
26. Tarasenko V.F., Sosnin E.A. [Excilamps of the barrier discharge: history, principle of operation, prospects] In: *Opticheskii zhurnal* [Journal of Optical Technology]. 2012, vol. 79., no. 10, pp. 58–65.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Бугаев Александр Степанович – доктор физико-математических наук, академик РАН, заведующий кафедрой, Московский физико-технический институт; старший научный сотрудник, Московский государственный областной университет;
e-mail: bugaev@cplire.ru;

Шешин Евгений Павлович – доктор физико-математических наук, профессор, Московский физико-технический институт;
e-mail: sheshin.ep@mipt.ru;

Озол Дмитрий Игоревич – ассистент, Московский физико-технический институт;
e-mail: ozol.mipt@gmail.com;

Мье Маунг Маунг – аспирант, Московский физико-технический институт;
e-mail: mmmmipt307@gmail.com;

Данилкин Михаил Игоревич – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Физический институт им П.Н. Лебедева РАН;
e-mail: mihhail.danilkin@ya.ru;

Верещагина Наталья Юрьевна – аспирант, Физический институт им П.Н. Лебедева РАН;
e-mail: ilthar@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Alexandr S. Bugaev – academic of the RAS, doctor of physico-mathematical sciences, head of the Department, Moscow Institute of Physics and Technology; senior researcher, Moscow Region State University;
e-mail: bugaev@cplire.ru;

Evgenii P. Sheshin – doctor of physico-mathematical sciences, full professor at the Moscow Institute of Physics and Technology;
e-mail: sheshin.ep@mipt.ru;

Dmitry I. Ozol – assistant lecturer at the Moscow Institute of Physics and Technology;
e-mail: ozol.mipt@gmail.com;

Myo Maung Maung – postgraduate student at the Moscow Institute of Physics and Technology;
e-mail: mmmmipt307@gmail.com;

Mikhail I. Danilkin – candidat of physico-mathematical sciences, senior researcher at the P.N. Lebedev Physical Institute of the Russian Academy of Sciences;
e-mail: mihhail.danilkin@ya.ru;

Natalia Yu. Vereschagina – postgraduate student at the P.N. Lebedev Physical Institute of the Russian Academy of Sciences;
e-mail: ilthar@mail.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Бугаев А.С., Шешин Е.П., Озол Д.И., Мье М.М., Данилкин М.И., Верещагина Н.Ю. Современные направления развития источников УФ-излучения бактерицидного диапазона // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2017. № 4. С. 24–38.
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-4-24-38

FOR CITATION

Bugaev A.S., Sheshin E.P., Ozol D.I., Myo M.M., Danilkin M.I., Vereschagina N.YU. Modern trends in the development of UV-sources of germicidal range. In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*. 2017. no. 4. pp. 24–38.
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-4-24-38

УДК 539.2+537.226

DOI: 10.18384/2310-7251-2017-4-39-54

ДЕТАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОТЕРЬ В ПРОТОННЫХ ПОЛУПРОВОДНИКАХ И ДИЭЛЕКТРИКАХ

Калытка В.А.¹, Коровкин М.В.², Мехтиев А.Д.¹, Алькина А.Д.¹

¹ Карагандинский государственный технический университет
100000, г. Караганда, Бульвар Мира, д. 56, Республика Казахстан

² Национальный исследовательский Томский политехнический университет
634049, г. Томск, проспект Ленина, д. 30, Российская Федерация.

Аннотация. Методами квазиклассической кинетической теории выполнен детальный анализ нелинейных свойств частотно-температурных спектров комплексной диэлектрической проницаемости (КПД) кристаллов с водородными связями (КВС), в широком диапазоне температур (1–1500 К) и напряжённостей поляризующего поля (100 кВ/м–1000 МВ/м). Построено трансцендентное уравнение, позволяющее численно рассчитать критическую температуру, разделяющую области диффузионной и максвелловской релаксации при поляризации диэлектрика. Исследованы предельные выражения для спектров КПД вдали от критической температуры. Обоснована квантовая природа низкотемпературных (70–100 К) и классическая природа высокотемпературных (100–450 К) максимумов диэлектрических потерь в КВС.

Ключевые слова: кристаллы с водородными связями (КВС); протонная релаксация и протонная проводимость; диэлектрические потери; диффузионная и максвелловская релаксация; критическая температура.

DETAILED ANALYSIS OF NONLINEAR DIELECTRIC LOSSES IN PROTON SEMICONDUCTORS AND DIELECTRICS

V. Kalytka¹, M. Korovkin², A. Mekhtiev¹, A. Alkina¹

¹ Karaganda State Technical University (KSTU)
Bulvar Mira 56, 100000 Karaganda, Republic of Kazakhstan

² Tomsk Polytechnic University (TPU)
prosp. Lenina 30, 634049 Tomsk, Russian Federation

Abstract. Using the methods of quasi-classical kinetic theory we analyze in detail nonlinear properties of the spectrum of the complex dielectric permittivity (CDP) in hydrogen bonded crystals (HBCs) in a wide range of temperatures (1–1500 K) and polarizing field intensities (100 kV/m–1000 MV/m). We have constructed the transcendent equation for the numerical calculation of the critical temperature, determined the zones (areas) of diffusion and Maxwell relaxation during the polarization in dielectrics. Limiting expressions for the efficiency spectra far from the critical temperature are investigated. The quantum nature of low-temperature (70–100 K) maxima and the classical nature of high-temperature (100–450 K) maxima of dielectric losses in HBCs are justified.

Key words: hydrogen bonded crystals (HBCs), proton relaxation, conductivity; dielectric losses; diffusion and Maxwell relaxation, critical temperature.

Введение

Кристаллы с водородными связями (КВС), классифицируемые с точки зрения кристаллографии и минералогии, как слоистые кристаллы (слоистые силикаты, кристаллогидраты и др.) [1] по электрофизическим свойствам определяются как протонные полупроводники и диэлектрики (ППД), характеризующиеся (по данным эксперимента) в области слабых полей (100–1000 кВ/м) при температурах $T = 70\text{--}450\text{ К}$, свойством протонной проводимости, обусловленной диффузионным переносом основных (наиболее подвижных) носителей заряда (протонов) по водородным связям в электрическом поле [1; 2].

Материалы класса КВС находят практическое применение в различных областях промышленности [2–7]: в микроэлектронике (элементы интегральных микросхем ЭВМ и МДП-структур); электротехнике и электроэнергетике (изоляционные покрытия токоотводящих элементов электрогенераторов ТЭС и линий электропередач); в лазерных технологиях (в качестве регуляторов параметров излучения и электрических затворов на основе кристаллов KDP, DKDP).

На сегодняшний момент времени накоплен достаточно большой объем экспериментального материала по протонной проводимости, исследованной, в основном, с точки зрения электрохимии и физикохимии [8–13], однако теоретических работ, направленных на практическое приложение данного явления, не так много. Результаты развиваемых в данной статье методов, наряду с результатами [2; 5–7], составят в перспективе теоретическую основу алгоритма универсальной многофункциональной программы, предназначенной для компьютерного прогнозирования свойств и для разработки технологий производства различных конструкционных и инструментальных материалов на основе протонных полупроводников и диэлектриков с заранее заданными свойствами.

1. Постановка задачи исследования

В настоящее время теоретические представления о механизме протонной проводимости и релаксации в КВС строятся на *линейной кинетической теории* [2; 5], хорошо согласующейся с экспериментальными данными [1] при расчёте температурных спектров токов термостимулированной деполяризации (ТСТД) и частотно-температурных спектров тангенса угла диэлектрических потерь $\text{tg}\delta(\omega; T)$, в области *достаточно высоких температур* (100–250 К) [2; 5]. Однако в диапазоне *низких температур* ($T = 70\text{--}100\text{ К}$) наблюдается существенное расхождение между теоретическими и экспериментальными значениями энергии активации, вычисленной методом минимизации функции сравнения [2], из сопоставления измеренного $J_{\text{exp}}(T)$ и расчётного $J_{\text{th}}(T)$ графиков плотности ТСТД, для химически чистого халькантита $\text{CuSO}_4 \cdot 5\text{H}_2\text{O}$ [5; 2] и в слюде флогопита $\text{KMg}_3(\text{AlSi}_3\text{O}_{10})(\text{OH})_2$ [2]. В области $T = 250\text{--}450\text{ К}$, соответствующей седьмому максимуму $J_{\text{exp}}(T)$, в частности при $T_{\text{max}} = 290\text{ К}$ – в халькантите, $T_{\text{max}} = 360\text{ К}$ – во флогопите [1], методами [2; 5] теоретические зависимости плотности ТСТД $J_{\text{th}}(T)$ численно рассчитать не удаётся, а неучтённые в моделях [2; 5] токи проводимости приводят к колоссальному превышению $J_{\text{max,exp}}$ над значениями $J_{\text{max,th}}$ при температурах $T > 250\text{ К}$ [6; 2].

Существующие методы исследования спектров диэлектрических потерь [1] в КВС при построении теоретических графиков $\text{tg}\delta_{\text{th}}(T)$ и при вычислении энергии активации $U_{0,\text{th}}$ в диапазонах температур $T < 100$ К и $T > 350$ К, как и в случае с ТСТД, характеризуются рядом модельных недоработок. При этом низкотемпературную ветвь ($T < 100$ К) экспериментального спектра $\text{tg}\delta_{\text{exp}}(T)$ измерить методами [1] вообще не удалось (из-за недостаточной разрешающей способностью экспериментальной установки (измеритель добротности ВМ-560, ВМ-507 [1])).

Обнаруженные в КВС в области низких ($T < 100$ К) и высоких ($T > 250$ К) температур отклонения от классической теории диэлектрической релаксации [1] объясняются нелинейными эффектами [6; 7], связанными с особенностями молекулярного механизма переноса электрического заряда и взаимодействием протонной подсистемы с анионной подрешеткой в КВС в указанных диапазонах температур. При этом, существенно влияние напряжённости электрического поля на кинетику нелинейной поляризации и деполяризации в КВС.

Цель данной работы состоит в детальном аналитическом исследовании влияния температуры, параметров источника электрического поля (частота, амплитуда ЭДС) и толщины диэлектрика на механизм нелинейной объёмно-зарядовой поляризации в КВС в широком диапазоне температур (1–1500 К) и напряжённостей поля (100 кВ/м–1000 МВ/м). Данная работа, являясь продолжением теоретических исследований, выполненных авторами [6; 7], даёт ряд модельных уточнений и дополнений к обобщённым нелинейным выражениям для комплексной диэлектрической проницаемости (КДП) [6], раскрывает частные случаи частотно-температурных зависимостей КДП для различных механизмов диэлектрической релаксации. В данной работе более детально (в сравнении с [6; 7]) исследуется вопрос о влиянии параметров релаксаторов и толщины кристалла на критическую температуру $T_{\text{cr,relax}}$, разделяющую температурные зоны (области) диффузионной и максвелловской релаксации.

2. Научно-практическое значение нелинейной кинетической теории протонной проводимости

В последние два десятилетия в технике и технологии ведётся интенсивный поиск твердотельных материалов с высокой протонной проводимостью, с целью их применения в качестве электролизеров, суперконденсаторов, ионисторов, газовых сенсоров, мембран топливных батарей и др. [8; 9]. На материалы данной группы накладываются такие основные технические требования как: высокая термическая и химическая устойчивость, низкая газопроницаемость, высокая адгезия к электродным материалам, электрокаталитическая активность и др. [10].

Полученные лабораторным путём твёрдые электролиты (на основе периодатов щелочных металлов перовскитов (ABO_3) и др. [11; 12]) удовлетворяют лишь части перечисленных выше требований, а их относительная протонная проводимость сложным образом зависит от типа кристаллической структуры и от внешних факторов (температура, давление, уровень влажности, силовые поля, электромагнитное излучение и т.д.) [13]. В связи с этим, целесообразна разра-

ботка универсальных аналитических методов прогнозирования широкого спектра физических свойств для разработки технологий промышленного производства различных твёрдых электролитов с заранее заданными свойствами, что и определяет кинетическую теорию протонной проводимости [1; 2–7] как прикладное научно-исследовательское направление, **актуальное** для электрохимии, физикохимии и материаловедения.

Полуэмпирические исследования миграции адсорбированных протонов по поверхности однослойных углеродистых нанотрубок [14; 15] не являются законченными, из-за отсутствия: строгого теоретического обоснования связи между конфигурацией поверхности трубки и доминирующим механизмом переноса протонов; температурной зависимости вероятности туннельных переходов протонов; формы потенциального рельефа и энергии активации для протонов. Предложенные авторами [16; 17] методы позволяют более детально, с помощью аппарата матрицы плотности рассмотреть квантовый механизм переноса протонов в наноразмерных материалах с протонной проводимостью.

Одним из наиболее научно значимых приложений результатов работ [1–7] является исследование динамики упорядочивания протонов в водородной подрешётке при фазовых переходах (вблизи температуры Кюри T_C) в сегнетоэлектрических кристаллах $\text{Me}(\text{H}; \text{D})_2 \text{RO}_4$, где $\text{Me} = \{\text{K}^+, \text{Rb}^+, \text{Cs}^+\}$, $\text{R} = \{\text{P}^{+5}, \text{As}^{+5}\}$ [18]. Хотя смещения протонов, связанных с фосфатной группой, основной вклад в спонтанную поляризацию $\vec{P}_s$ не вносят, ряд важных эффектов сегнетоэлектрического состояния KDP, например, изотопический эффект ($T_C(\text{H}) = 122 \text{ K}$, $T_C(\text{D}) \text{ K}$), линейный фотовольтаический эффект (300 K; 1,06 мкВ) в KDP, объясняется квантовыми переходами протонов [18]. Согласно микроскопической модели, предложенной Слейтером, в KDP пусковым механизмом, приводящим к смещению атомов Р в направлении кристаллической оси С и к установлению спонтанной поляризации $\vec{P}_s \parallel \vec{C}$, является именно упорядочение протонов в водородной подрешётке за счёт сильного близкодействующего взаимодействия между четырьмя атомами водорода, связанными с фосфатной группой.

Однако в выполненных в последнее время квантово-химических расчётах [19], как правило, квантовым туннелированием протонов в KDP пренебрегают. Авторами [20] при расчёте энергетических характеристик и электронного строения зонной структуры KDP использован метод молекулярного стехиометрического кластера (СК) [21] для «смешанного базиса» (т.е. частично учтено влияние туннелирования протонов) на основе полуэмпирической расчётной схемы в приближении MNDO/PM3 [16].

Применение методов [16; 17] к KDP и другим сегнетоэлектрическим структурам, вероятно, приведёт к углублению теоретических результатов [18; 20]. В частности, при исследовании эффектов влияния на нелинейности второго порядка (генерация второй гармоники, параметрическая генерация и усиление света, смешение частот, электрооптический эффект) нелинейностей более высокого порядка (эффект самовоздействия лазерного излучения), что **актуально** для техники фемтосекундных лазеров [22].

2. Влияние температуры на комплексную диэлектрическую проницаемость

Закономерности поведения температурных спектров плотности ТСТД и $\text{tg}\delta(\omega; T)$ в КВС достаточно хорошо исследованы и экспериментально, и теоретически в диапазоне температур $T = 100\text{--}250\text{ K}$ [1], когда основной вклад в диэлектрическую релаксацию вносят термически активируемые (классические) переходы протонов через потенциальный барьер [2]. В этом случае при напряжённостях поляризующего поля $E_0 \approx (10^5 \div 10^6) \frac{B}{m}$, значения безразмерного па-

раметра сравнения $\zeta_0 = \frac{qE_0 a}{k_B T} \approx 0,001 \div 0,01$, где q – заряд протона, $a \approx 10^{-10}\text{ m}$ –

параметр кристаллической решётки, и малого параметра теории возмущений

$\gamma = \zeta_0 \cdot \frac{A^{(1)}}{A^{(0)}} \approx \zeta_0 \ll 1$ [1; 2; 6], где $\frac{A^{(1)}}{A^{(0)}} \rightarrow 1$ [2; 6], указывают на достаточность ли-

нейного по γ приближения при решении системы уравнений Фоккера – Планка и Пуассона [1]. Кинетические коэффициенты $A^{(0)} = a_0$, $A^{(1)} = b_0 \cdot k_B T$ вычисляются в [6] с учётом туннельных переходов для модели параболического потенциально-го барьера, в квазиклассическом приближении (ВКБ-методом) [7].

В области сверхнизких температур ($1\text{--}10\text{ K}$) и слабых полей ($100\text{--}1000\text{ кВ/м}$), когда $\zeta_0 \approx 0,01 \div 1$ и в области сверхвысоких температур ($550\text{--}1500\text{ K}$) и сильных полей ($100\text{--}1000\text{ МВ/м}$), когда $\zeta_0 \approx 0,02 \div 0,8$, при условии $\frac{A^{(1)}}{A^{(0)}} < 1$ [6] малый па-

раметр γ возрастает на 1–2 порядка [2], что требует в продолжение линейной кинетической теории [1; 2], учёта последующих приближений теории возмущений [1; 2].

При этом равенство порядков по параметру ζ_0 означает не совпадение физических механизмов поляризации, а только формальную аналогию (по структуре кинетических коэффициентов) кинетических уравнений диффузионного переноса релаксаторов (протонов), что приводит соответственно к актуальности нелинейных выражений [6].

В [6] установлено, что использование полного набора релаксационных мод кратных данной частоте, позволяет выявить нелинейные поляризационные эффекты, связанные с взаимодействием мод, различающихся по порядку теории возмущений. Эти эффекты приводят к отклонению от результатов линейной кинетической теории [1] при расчёте спектров комплексной диэлектрической проницаемости (КДП), уже на основной частоте переменного поля [6]:

$$\text{Re}[\hat{\epsilon}^{(\omega; T)}] = \epsilon_\infty \frac{1 - \Gamma_1^{(\omega)}(T)}{\left(1 - \Gamma_1^{(\omega)}(T)\right)^2 + \left(\Gamma_2^{(\omega)}(T)\right)^2},$$

$$\operatorname{Im}[\hat{\epsilon}^{(\omega;T)}] = \epsilon_{\infty} \frac{\Gamma_2^{(\omega)}(T)}{\left(1 - \Gamma_1^{(\omega)}(T)\right)^2 + \left(\Gamma_2^{(\omega)}(T)\right)^2}. \quad (1)$$

В (1) введены функции параметров ω , T [6]:

$$\Gamma_1^{(\omega)}(T) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\frac{\tau_n}{\tau_M} \sin^2\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{n^2 (1 + \omega^2 \tau_n^2)} \right], \quad \Gamma_2^{(\omega)}(T) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\frac{\omega \tau_n^2}{\tau_M} \sin^2\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{n^2 (1 + \omega^2 \tau_n^2)} \right]. \quad (2)$$

В продолжение работы [6] исследуем зависимости (2) более детально, определяя их предельные выражения для области *квантовой* поляризации ($T < 100$ К) [7] и *нелинейной объёмно-зарядовой* поляризации ($T > 250$ К) [1]. Одним из

основных критериев является критическая температура $T_{cr,mov} = \frac{\hbar \sqrt{2U_0}}{\pi \delta_0 k_B \sqrt{m}}$ [7],

разделяющая зоны туннельной (квантовой: $T < T_{cr,mov}$) и термически активируемой (классической: $T > T_{cr,mov}$) протонной релаксации. Здесь U_0 – энергия активации, δ_0 – ширина потенциального барьера; m – масса протона [7].

Используя формулы для коэффициентов диффузии $D_{diff}^{(0)} = a^2 A^{(0)}$ и подвижности $\mu_{mob}^{(i)} = \frac{q a^2 A^{(i)}}{k_B T}$ [7], представим диффузионное τ_D и максвелловское τ_M вре-

меня релаксации [6] в виде $\tau_D = \left(\frac{d}{\pi a}\right)^2 \cdot \tau^{(0)}$, $\tau_M = \frac{\epsilon_0 \epsilon_{\infty} k_B T}{q^2 a^2 n_0} \cdot \tau^{(1)}$, где $\tau^{(0)} = [A^{(0)}]^{-1}$,

$\tau^{(1)} = [A^{(1)}]^{-1}$ есть, соответственно, времена релаксации нулевого и первого по-

рядков по малому параметру $\zeta = \frac{qE(x;t)a}{2k_B T}$. Здесь n_0 – равновесная концентрация

протонов в КВС, ϵ_{∞} – высокочастотная диэлектрическая проницаемость [1; 6].

$$\text{С помощью выражений } \frac{\tau_D}{\tau_M} = \frac{d^2 q n_0 \cdot \mu_{mob}^{(i)}(T)}{\pi^2 \epsilon_0 \epsilon_{\infty} \cdot D_{diff}^{(0)}(T)}, \quad \frac{\mu_{mob}^{(i)}(T)}{D_{diff}^{(0)}(T)} = \frac{q}{k_B T} \cdot \frac{A^{(i)}(T)}{A^{(0)}(T)} \quad [6]$$

строим трансцендентное уравнение:

$$\frac{\exp\left(-\frac{U_0}{k_B T_{cr,mov}}\right) - \frac{T_{cr,relax}}{T_{cr,mov}} \exp\left(-\frac{U_0}{k_B T_{cr,relax}}\right)}{\exp\left(-\frac{U_0}{k_B T_{cr,mov}}\right) - \exp\left(-\frac{U_0}{k_B T_{cr,relax}}\right)} = \frac{d^2 n_0 q^2}{\pi^2 \epsilon_0 \epsilon_{\infty} k_B T_{cr,mov}}, \quad (3)$$

для численного расчёта критической температуры $T_{cr,relax}$, разделяющей зоны диффузионной ($\tau_D < \tau_M$; $T < T_{cr,mov}$) и максвелловской ($\tau_M < \tau_D$; $T > T_{cr,mov}$) релаксации.

Дальнейшее исследование функций (1) представляет собой отдельную задачу, решение которой позволит более детально, совместно с выражениями (2), установить влияние нелинейных эффектов на спектры диэлектрических потерь в КВС в зависимости от особенностей макроскопического процесса во всем объёме диэлектрика и микроскопических процессов переходов протонов через потенциальный барьер. Выражения (1)–(2) в области диффузионной и максвелловской релаксации, вдали от критической температуры $T_{cr,relax}$, должны существенно различаться по виду температурной зависимости.

Так, в области максвелловской релаксации ($\tau_M < \tau_{n,D}$; $T > T_{cr,mov}$) из (2):

$$\Gamma_{1,M}^{(\omega)}(T) = \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(1 - (-1)^n) \cdot \left(\frac{\tau_M n^2}{\tau_D} + 1 \right)}{n^2 \left(\left(\frac{\tau_M n^2}{\tau_D} + 1 \right)^2 + \omega^2 \tau_M^2 \right)} \right],$$

$$\Gamma_{2,M}^{(\omega)}(T) = \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(1 - (-1)^n) \cdot \omega \tau_M}{n^2 \left(\left(\frac{\tau_M n^2}{\tau_D} + 1 \right)^2 + \omega^2 \tau_M^2 \right)} \right]. \quad (4)$$

При температурах много выше критической ($T \gg T_{cr,mov}$; $\tau_M \ll \tau_{n,D}$), когда $\frac{\tau_M n^2}{\tau_D} \ll 1$, в силу тождества $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(1 - (-1)^n)}{n^2} \right] = \frac{\pi^2}{4}$, принимая $\Gamma_{1,M}^{(\omega)} \approx \frac{1}{1 + \omega^2 \tau_M^2}$, $\Gamma_{2,M}^{(\omega)} \approx \frac{\omega \tau_M}{1 + \omega^2 \tau_M^2}$, преобразуем выражения (1) с учётом (4):

$$\left[\hat{\epsilon}^{(\omega)} \right]'_M = \epsilon_{\infty} \frac{1 - \Gamma_{1,M}^{(\omega)}}{\left(1 - \Gamma_{1,M}^{(\omega)} \right)^2 + \left(\Gamma_{2,M}^{(\omega)} \right)^2} = \epsilon_{\infty},$$

$$\left[\hat{\epsilon}^{(\omega)} \right]''_M = \epsilon_{\infty} \frac{\Gamma_{2,M}^{(\omega)}}{\left(1 - \Gamma_{1,M}^{(\omega)} \right)^2 + \left(\Gamma_{2,M}^{(\omega)} \right)^2} = \frac{\epsilon_{\infty}}{\omega \tau_M}. \quad (5.1)$$

Тангенс угла диэлектрических потерь [6] согласно (5.1) равен:

$$\left[\operatorname{tg} \delta^{(\omega)}(T) \right]_M = \frac{\Gamma_{2,M}^{(\omega)}(T)}{1 - \Gamma_{1,M}^{(\omega)}(T)} = \frac{1}{\omega \tau_M} = \frac{n_0 \mu_{mob}^{(1)} q}{\omega \epsilon_0 \epsilon_{\infty}}. \quad (5.2)$$

Подставляя $\mu_{mob}^{(i)} = \frac{qa^2 A^{(i)}}{k_B T}$ в (5.2) и сравнивая с известным выражением для потерь проводимости $tg\delta = \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0 \epsilon_\infty}$ [23], находим коэффициент протонной электропроводности:

$$\sigma_{e,pr}(T) = \frac{n_0 q^2 a^2 A^{(i)}(T)}{k_B T}. \quad (6)$$

В области диффузионной релаксации ($\tau_D < \tau_M$; $T < T_{cr,mov}$) из (2):

$$\begin{aligned} \Gamma_{1,D}^{(\omega)} &= \frac{4\tau_D}{\pi^2 \tau_M} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(1-(-1)^n) \cdot \left(n^2 + \frac{\tau_D}{\tau_M} \right)}{n^2 \left(\left(n^2 + \frac{\tau_D}{\tau_M} \right)^2 + \omega^2 \tau_D^2 \right)} \right], \\ \Gamma_{2,D}^{(\omega)} &= \frac{4\tau_D}{\pi^2 \tau_M} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(1-(-1)^n) \cdot \omega \tau_D}{n^2 \left(\left(n^2 + \frac{\tau_D}{\tau_M} \right)^2 + \omega^2 \tau_D^2 \right)} \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

При температурах много ниже критической ($T \ll T_{cr,relax}$; $\tau_D \ll \tau_M$), принимая $\frac{\tau_D}{n^2 \tau_M} \ll 1$, из (7) имеем:

$$\Gamma_{1,D}^{(\omega)} \approx \frac{4\tau_D}{\pi^2 \tau_M} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(1-(-1)^n)}{n^4 + \omega^2 \tau_D^2} \right], \quad \Gamma_{2,D}^{(\omega)} \approx \frac{4\tau_D}{\pi^2 \tau_M} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(1-(-1)^n) \cdot \omega \tau_D}{n^2 (n^4 + \omega^2 \tau_D^2)} \right]. \quad (7.1)$$

В области $T \ll T_{cr,relax}$ в случае $\omega = 0$, $E_{pol}(t) = E_0$, согласно (7.1) с учётом тождества $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(1-(-1)^n)}{n^4} \right] = \frac{\pi^4}{48}$, когда $\Gamma_{1,D}^{(\omega=0)} = \frac{4\tau_D}{\pi^2 \tau_M} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(1-(-1)^n)}{n^4} \right] = \frac{\pi^2 \tau_D}{12 \tau_M}$, $\Gamma_{2,D}^{(\omega=0)} = 0$, из (1) имеем:

$$\left[\hat{\epsilon}^{(\omega=0)} \right]_D' = \epsilon_{S,D}(T) = \epsilon_\infty \frac{1}{1 - \Gamma_{1,D}^{(\omega=0)}} = \frac{\epsilon_\infty}{1 - \frac{\pi^2 \tau_D}{12 \tau_M}}, \quad \left[\hat{\epsilon}^{(\omega=0)} \right]_D^{//} = 0. \quad (7.2)$$

Далее, при условии $\frac{\tau_D}{\tau_M} = \left(\frac{d}{r_D} \right)^2 \ll 1$, то есть при значениях дебаевского ради-

уса экранирования $r_D \gg d$ [6], принимая $\frac{\pi^2 \tau_D}{12 \tau_M} \ll 1$, из (7.2) имеем:

$$\left[\hat{\epsilon}^{(\omega=0)} \right]'_D \approx \epsilon_\infty \left(1 + \frac{\pi^2 \tau_D}{12 \tau_M} \right) = \epsilon_\infty \left(1 + \frac{\pi^2 d^2}{12 r_D^2} \right). \quad (7.3)$$

С учётом $\frac{\tau_D}{\tau_M} = \frac{d^2 q^2 n_0 \cdot A^{(1)}(T)}{\pi^2 \epsilon_0 \epsilon_\infty k_B T \cdot A^{(0)}(T)}$ получаем асимптотическое приближение:

$$\epsilon_{S,D}(T) \approx \epsilon_\infty \left(1 + \frac{d^2 q^2 n_0}{12 \epsilon_0 \epsilon_\infty k_B T} \cdot \left(\frac{\exp(-X) + \langle D^{(1)} \rangle}{\exp(-X) + \langle D^{(0)} \rangle} \right) \right). \quad (7.4)$$

$$\text{В (7.4)} \quad \langle D^{(1)} \rangle = \frac{\Lambda \exp(-\Lambda) - X \exp(-X)}{X - \Lambda}, \quad \langle D^{(0)} \rangle = X \frac{\exp(-\Lambda) - \exp(-X)}{X - \Lambda}, \quad X = \frac{U_0}{k_B T},$$

$\Lambda = \frac{\pi \delta_0 \sqrt{m U_0}}{\hbar \sqrt{2}}$; ν_0 – линейная частота собственных колебаний протона в невозмущённой потенциальной яме [6]. В области туннельной диффузионной релаксации ($T \ll T_{cr, mov}$), когда $\frac{\Lambda}{X} \ll 1$, $\epsilon_{S,D}(T) \rightarrow \epsilon_{S,D, tunn}(T) \approx \epsilon_\infty \left(1 + \frac{d^2 q^2 n_0}{12 \epsilon_0 \epsilon_\infty k_B T} \cdot \frac{\langle D^{(1)} \rangle}{\langle D^{(0)} \rangle} \right)$

получаем:

$$\epsilon_{S,D, tunn}(T) \approx \epsilon_\infty \left(1 + \frac{d^2 q^2 n_0}{12 \epsilon_0 \epsilon_\infty U_0} \cdot \frac{\Lambda \exp(-\Lambda) - X \exp(-X)}{\exp(-\Lambda) - \exp(-X)} \right), \quad (7.4.1)$$

откуда, в случае чисто квантовых переходов: $\epsilon_{S,D, tunn}(T) \approx \epsilon_\infty \left(1 + \frac{d^2 q^2 n_0}{12 \epsilon_0 \epsilon_\infty U_0} \right)$.

В области термически активируемой диффузионной релаксации ($T \gg T_{cr, mov}$), когда $\frac{\Lambda}{X} \gg 1$, (7.4) переходит в формулу, описывающую дипольную поляризацию:

$$\epsilon_{S,D}(T) \rightarrow \epsilon_{S,D, therm}(T) \approx \epsilon_\infty \left(1 + \frac{d^2 q^2 n_0}{12 \epsilon_0 \epsilon_\infty k_B T} \right). \quad (7.4.2)$$

4. Переход к линейному приближению теории возмущений

Одним из критериев достоверности исследованных выше формул нелинейного приближения теории возмущений является их предельный переход к результатам линейной теории [1]. С этой целью упростим выражение для поляризации [6]:

$$P^{(\omega)}(t) = \frac{8aqn_0\gamma A^{(0)}}{\pi^2 \left(1 - \frac{8n_0\varphi\Lambda_0\gamma}{\pi^2}\right)} \times \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{\sin^2\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{n^2 \left(\frac{1}{\tau_n} + i\omega\right)} \right] \times \exp(i\omega t), \quad (8)$$

где $\varphi = \frac{aq}{\epsilon_0 \epsilon_\infty E_0}$, $\Lambda_0 = A^{(0)} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\sin^2\left(\frac{\pi s}{2}\right)}{s^2 \left(\frac{1}{\tau_s} + i\omega\right)}$, принимая $\frac{8\varphi n_0 \Lambda_0 \gamma}{\pi^2} \ll 1$,

$$\frac{1}{1 - \frac{8\varphi n_0 \Lambda_0 \gamma}{\pi^2}} \rightarrow 1,$$

откуда получаем выражение:

$$P^{(\omega)}(t) \approx \frac{4aqn_0\gamma A^{(0)}}{\pi^2} \times \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{(1 - (-1)^n)}{n^2 \left(\frac{1}{\tau_n} + i\omega\right)} \right] \times \exp(i\omega t),$$

отвечающее, на основной частоте поля ω , первому приближению по параметру γ [1], где $P^{(\omega)}(t) \rightarrow \gamma P_1^{(\omega)}(\tau) = \hat{\alpha}_1^{(\omega)} \cdot E_{pol}(t)$. С учётом $\gamma P^{(\omega)}(t) = \epsilon_0 (\hat{\epsilon}_1^{(\omega)} - \epsilon_\infty) \cdot E_{pol}(t)$

[6] вычисляя $\hat{\alpha}_1^{(\omega)} = \epsilon_0 \epsilon_\infty (\Gamma_1^{(\omega)} - i\Gamma_2^{(\omega)})$; $\hat{\epsilon}_1^{(\omega)} = \epsilon_\infty (1 + \Gamma_1^{(\omega)} - i\Gamma_2^{(\omega)})$, находим:

$$\begin{aligned} \left[\hat{\epsilon}_1^{(\omega)} \right]' &= \text{Re} \left[\hat{\epsilon}_1^{(\omega)} \right] = \epsilon_\infty (1 + \Gamma_1^{(\omega)}), \quad \left[\hat{\epsilon}_1^{(\omega)} \right]'' = \text{Im} \left[\hat{\epsilon}_1^{(\omega)} \right] = \epsilon_\infty \Gamma_2^{(\omega)}, \\ \left(\text{tg} \delta^{(\omega)}(T) \right)_1 &= \frac{\left[\hat{\epsilon}_1^{(\omega)} \right]''}{\left[\hat{\epsilon}_1^{(\omega)} \right]'} = \frac{\Gamma_2^{(\omega)}}{1 + \Gamma_1^{(\omega)}}. \end{aligned} \quad (9)$$

В случае $T \gg T_{cr,relax}$, $\tau_M \ll \tau_D$, преобразуем (9) в виду:

$$\begin{aligned} \left[\hat{\epsilon}_1^{(\omega)} \right]'_M &= \epsilon_\infty \left(1 + \frac{1}{1 + \omega^2 \tau_M^2} \right), \quad \left[\hat{\epsilon}_1^{(\omega)} \right]''_M = \epsilon_\infty \frac{\omega \tau_M}{1 + \omega^2 \tau_M^2}, \\ \left(\text{tg} \delta^{(\omega)}(T) \right)_{1,M} &= \frac{\omega \tau_M}{2 + \omega^2 \tau_M^2}, \end{aligned} \quad (9.1)$$

откуда, в силу $\left[\hat{\epsilon}_1^{(\omega=0)} \right]'_M = \epsilon_{S,M,1}(T) = \epsilon_\infty (1 + \Gamma_{1,M}^{(\omega=0)}) = 2\epsilon_\infty$, $\left[\hat{\epsilon}_1^{(\omega=0)} \right]''_M = 0$, вводя обо-

значение $\epsilon_{S,M,1} - \epsilon_\infty = \epsilon_\infty$, имеем:

$$\left[\hat{\epsilon}_1^{(\omega)}\right]'_M = \epsilon_\infty + \frac{\epsilon_{S,M,1} - \epsilon_\infty}{1 + \omega^2 \tau_M^2}, \quad \left[\hat{\epsilon}_1^{(\omega)}\right]''_M = \frac{(\epsilon_{S,M,1} - \epsilon_\infty) \omega \tau_M}{1 + \omega^2 \tau_M^2}, \quad (9.1.1)$$

$$\begin{aligned} (\operatorname{tg} \delta^{(\omega)}(T))_{1,M} &= \frac{(\epsilon_{S,M,1} - \epsilon_\infty) \cdot \omega \tau_M}{\epsilon_{S,M,1} + \epsilon_\infty \cdot \omega^2 \tau_M^2}, \quad \left[(\operatorname{tg} \delta)_{1,M}\right]_{\omega \rightarrow 0} = 0, \\ \left[(\operatorname{tg} \delta)_{1,M}\right]_{\omega \rightarrow \infty} &= 0, \end{aligned} \quad (9.1.2)$$

что согласуется с результатами линейной теории диэлектрических потерь [1] в температурной области $T \gg T_{cr,relax}$.

В случае $T \ll T_{cr,relax}$, $\tau_D \ll \tau_M$, переписывая (9) с учетом (7.1), имеем:

$$\begin{aligned} \left[\hat{\epsilon}_1^{(\omega)}\right]'_D &= \epsilon_\infty \left(1 + \frac{4\tau_D}{\pi^2 \tau_M} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(1 - (-1)^n)}{n^4 + \omega^2 \tau_D^2} \right] \right), \\ \left[\hat{\epsilon}_1^{(\omega)}\right]''_D &= \frac{4\tau_D \epsilon_\infty}{\pi^2 \tau_M} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(1 - (-1)^n) \cdot \omega \tau_D}{n^2 (n^4 + \omega^2 \tau_D^2)} \right], \end{aligned} \quad (9.2)$$

откуда в силу $\left[\hat{\epsilon}_1^{(\omega=0)}\right]'_D = \epsilon_{S,D,1}(T) = \epsilon_\infty \left(1 + \Gamma_{1,D}^{(\omega=0)}\right) = \epsilon_\infty \left(1 + \frac{\pi^2 \tau_D}{12 \tau_M}\right)$, $\left[\hat{\epsilon}_1^{(\omega=0)}\right]''_D = 0$,

$\left[\hat{\epsilon}_{11}^{(\omega=0)}\right]''_M = 0$, вводя обозначение $\epsilon_{S,D,1} - \epsilon_\infty = \frac{\pi^2 \tau_D \epsilon_\infty}{12 \tau_M}$ имеем:

$$\begin{aligned} \left[\hat{\epsilon}_1^{(\omega)}\right]'_D &= \epsilon_\infty + \frac{48}{\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(\epsilon_{S,D,1} - \epsilon_\infty)(1 - (-1)^n)}{n^4 + \omega^2 \tau_D^2} \right], \\ \left[\hat{\epsilon}_1^{(\omega)}\right]''_D &= \frac{48}{\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(\epsilon_{S,D,1} - \epsilon_\infty)(1 - (-1)^n) \cdot \omega \tau_D}{n^2 (n^4 + \omega^2 \tau_D^2)} \right], \\ (\operatorname{tg} \delta^{(\omega)}(T))_{1,D} &= \frac{\frac{48}{\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(\epsilon_{S,D,1} - \epsilon_\infty)(1 - (-1)^n) \cdot \omega \tau_D}{n^2 (n^4 + \omega^2 \tau_D^2)} \right]}{\epsilon_\infty + \frac{48}{\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(\epsilon_{S,D,1} - \epsilon_\infty)(1 - (-1)^n)}{n^4 + \omega^2 \tau_D^2} \right]}, \end{aligned} \quad (9.2.1)$$

$$\left[(\operatorname{tg} \delta)_{1,D}\right]_{\omega \rightarrow 0} = 0, \quad \left[(\operatorname{tg} \delta)_{1,D}\right]_{\omega \rightarrow \infty} = 0, \quad (9.2.2)$$

что также согласуется с результатами [1] в температурной области $T \ll T_{cr,relax}$.

Выводы

1. Выполнен детальный анализ частотно-температурных спектров (1),(2) комплексной диэлектрической проницаемости (КДП), вычисленной с учётом полного набора релаксационных мод, генерируемых на основной частоте переменного поля (первая частотная гармоника) в КВС, при блокирующих электродах (8). С помощью предельных выражений для безразмерных параметров (2), в области максвелловской релаксации (5.1) установлено, что при температурах много выше критической ($T \gg T_{cr,relax}$) спектры тангенса угла диэлектрических потерь (5.2) описываются выражением $\tan \delta$ при потерях проводимости.

2. Рассчитанные в первом приближении теории возмущений спектры для компонент КДП $\left[\hat{\epsilon}_1^{(\omega)} \right]'_D, \left[\hat{\epsilon}_1^{(\omega)} \right]''_D$ (9.2.1), являются частным случаем обобщенных выражений (1) при температурах квантовой диффузионной релаксации ($T \ll T_{cr,relax}$) [1], а выражения $\left[\hat{\epsilon}_1^{(\omega)} \right]'_M, \left[\hat{\epsilon}_1^{(\omega)} \right]''_M$ (9.1.1) являются частным случаем (1) при температурах максвелловской релаксации ($T \gg T_{cr,relax}$) [1], что может рассматриваться в качестве одного из критериев достоверности формул (1), (2). Выражения (1), (2) ранее построены в [6] в бесконечном приближении теории возмущений на основной частоте поля (ω). В настоящей работе проведено их аналитическое исследование в функции переменных (ω ; T), в диапазоне изменения температуры $T = 1-1500$ К.

3. Построено трансцендентное уравнение (3), позволяющее численно рассчитывать критическую температуру $T_{cr,relax}$ в случае релаксационного движения протона в поле параболического потенциального рельефа. Впервые доказано, что температура $T_{cr,relax}$ существенно зависит от температуры $T_{cr,mov}$ [7], разделяющей зоны (области) квантовой ($T \ll T_{cr,mov}$) и классической ($T \gg T_{cr,mov}$) релаксации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тонконогов М.П. Диэлектрическая спектроскопия кристаллов с водородными связями. Протонная релаксация // Успехи физических наук. 1998. Т. 168. № 1. С. 29–54.
2. Калытка В.А., Коровкин М.В. Протонная проводимость. Монография: ISBN-13: 978-3-659-68923-9; ISBN-10: 3659689238; EBAN: 9783659689239; Germany. Издательский Дом: LAP LAMBERT Academic Publishing. 2015. 180 с.
3. Анненков Ю.М., Ивашутенко А.С., Власов И.В., Кабышев А.В. Электрические свойства корундо-циркониевой керамики // Известия Томского политехнического университета. 2005. Т. 308. № 7. С. 35–38.
4. Антонова А.М., Воробьев А.В., Ляликов Б.А. К выбору материалов для нетрадиционной тепловой изоляции оборудования ТЭС и АЭС // Энергетика: экология, надёжность, безопасность: Материалы XIV Всероссийской научно-технической конференции. Томск: Издательство ТПУ. 2008. 289 с.
5. Тонконогов М.П., Исмаилов Ж.Т., Тимохин В.М., Фазылов К.К., Калытка В.А., Баймуханов З.К. Нелинейная теория спектров термостимулированных токов в сложных кристаллах с водородными связями // Известия высших учебных заведений. Физика. 2002. № 10. С. 76–84.

6. Калытка В.А., Никонова Т.Ю. Нелинейные электрофизические свойства протонных полупроводников и диэлектриков // Труды XIII Международной научно-практической конференции «Актуальные проблемы электронного приборостроения». Новосибирск. 2016. Т. 2. Электронно-физическая секция. С. 57–65.
7. Калытка В.А., Коровкин М.В. Дисперсионные соотношения для протонной релаксации в твёрдых диэлектриках // Известия высших учебных заведений. Физика. 2016. Т. 59. № 12. С. 150–159.
8. Reijers R., Haije W. Literature review on high temperature proton conducting materials // Energy research Centre of the Netherlands. 2008. ECN-E-08-091.
9. Glöckner R., Neiman A., Larring Y., Norby T. Protons in $\text{Sr}_3(\text{Sr}_{1+x}\text{Nb}_{2-x})\text{O}_{9-1.5x}$ perovskite // Solid State Ionics. 1999. Vol. 125. P. 369–376.
10. Моделирование протонного транспорта в ортоиодной и ортотеллуровой кислотах и их солях / Зюбина Т.С., Шилов Г.В., Добровольский Ю.А., Леонова Л.С., Мебель А.М. // Электрохимия. 2003. Т. 39. № 4. С. 414–424.
11. Анимича И.Е. Высокотемпературные протонные проводники со структурным разупорядочением кислородной подрешётки // Электрохимия. 2009. Т. 45. № 6. С. 712–721.
12. Ярославцев А.Б. Основные направления разработки и исследования твердых электролитов // Успехи химии. 2016. Т. 85. С. 1255.
13. Ярославцев А.Б. Протонная проводимость неорганических гидратов // Успехи химии. 1994. Т. 63. С. 449.
14. Запороцкова И.В., Лебедев Н.Г., Запороцков П.А. Протонная проводимость однослойных углеродных нанотрубок: полуэмпирические исследования // Физика твёрдого тела. 2006. Т. 48. № 4. С. 756–760.
15. Иванченко П.А., Лебедев Н.Г. Проводимость углеродных нанотрубок, обусловленная миграцией протонов по их поверхности // Физика твердого тела. 2009. Т. 51. № 11. С. 2281–2286.
16. Анненков Ю.М., Калытка В.А., Коровкин М.В. Квантовые эффекты при миграционной поляризации в нанометровых слоях протонных полупроводников и диэлектриков при сверхнизких температурах // Известия вузов. Физика. 2015. Т. 58. № 1. С. 31–37.
17. Калытка В.А., Коровкин М.В. Квантовые эффекты при протонной релаксации в области низких температур // Известия вузов. Физика. 2016. Т. 59. № 7. С. 74–79.
18. Белоненко М.Б. Особенности нелинейной динамики лазерного импульса в фото-рефрактивном сегнетоэлектрике с водородными связями // Квантовая электроника. 1998. Т. 25. № 3. С. 255–258.
19. Левин А.А., Долин С.П., Зайцев А.Р. Распределение заряда, поляризация и свойства сегнетоэлектриков типа KNbPO_4 (KDP) // Химическая физика. 1996. Т. 15. С. 84.
20. Лебедев Н.Г., Белоненко М.Б. Строение и электронная структура сегнетоэлектриков KDP-типа // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия: Математика, физика. 1997. № 2. С. 79–81.
21. Лебедев Н.Г., Литинский А.О. Модель ионно-встроенного стехиометрического кластера для расчёта электронного строения ионных кристаллов // Физика твёрдого тела. 1996. Т. 38. № 3. С. 959–962.
22. Кулагин И.А., Ганеев Р.А., Тутушев Р.И., Ряснянский А.И., Усманов Т.Б. Компоненты тензора нелинейных восприимчивостей третьего порядка нелинейно-оптических кристаллов KDP, DKDP и LiNbO_3 // Квантовая электроника. 2004. Т. 34. № 7. С. 657–662.
23. Губкин А.Н. Физика диэлектриков. Теория диэлектрической поляризации в постоянном и переменном электрическом поле. М.: Высшая школа. 1971. 272 с.

REFERENCES

1. Tonkonogov M.P. [Dielectric spectroscopy of crystals with hydrogen bonds. Proton relaxation] In: *Uspekhi Fizicheskikh Nauk* [Advances in Physical Sciences], 1998, vol. 168, no. 1, pp. 29–54.
2. Kalytko V.A., Korovkin M.V. *Protonnaya provodimost'* [The proton conductivity]. Germany, LAP LAMBERT Academic Publishing, 2015. 180 p.
3. Annenkov YU.M., Ivashutenko A.S., Vlasov I.V., Kabyshev A.V. [Electrical properties of corondo-zirconium ceramics] In: *Izvestiya Tomskogo politekhnicheskogo universiteta* [Bulletin of the Tomsk Polytechnic University], 2005, vol. 308, no. 7, pp. 35–38.
4. Antonova A.M., Vorob'ev A.V., Lyalikov B.A. [The choice of non-traditional materials for thermal insulation for equipment thermal and nuclear power plants]. In: *Energetika: ekologiya, nadezhnost', bezopasnost': Materialy XIV Vserossiiskoi nauchno-tekhnicheskoi konferentsii* [Power engineering: ecology, reliability, security: Materials of XIV all-Russian scientific-technical conference], Tomsk, TPU Publ., 2008. 289 p.
5. Tonkonogov M.P., Ismailov ZH.T., Timokhin V.M., Fazylov K.K., Kalytko V.A., Baimukhanov Z.K. [Nonlinear theory of the spectra of thermally stimulated currents in complex crystals with hydrogen bonds] In: *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Fizika* [Russian Physics Journal], 2002, no. 10, pp. 76–84.
6. Kalytko V.A., Nikonova T.YU. [Nonlinear electrical properties of proton semiconductors and dielectrics]. In: *Trudy XIII Mezhdunarodnoi nauchno-prakticheskoi konferentsii «Aktual'nye problemy elektronnoy priborostroeniya»*. [Proceedings of the XIII International scientific-practical conference "Actual problems of electronic instrument engineering". Electronic and physical section], Novosibirsk, 2016, vol. 2, pp. 57–65.
7. Kalytko V.A., Korovkin M.V. [Dispersion relations for proton relaxation in solid dielectrics] In: *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Fizika* [Russian Physics Journal], 2016, vol. 59, no. 12, pp. 150–159.
8. Reijers R., Haije W. [Literature review on high temperature proton conducting materials]. In: *Energy research Centre of the Netherlands*. 2008. ECN-E-08-091.
9. Glöckner R., Neiman A., Larring Y., Norby T. [Protons in $\text{Sr}_3(\text{Sr}_{1+x}\text{Nb}_{2-x})\text{O}_{9-1.5x}$ perovskite]. In: *Solid State Ionics*, 1999, vol. 125, pp. 369–376.
10. Zyubina T.S., Shilov G.V., Dobrovol'skii YU.A., Leonova L.S., Mebel' A.M. [Modeling proton transport in orthomodel and ochoterenai acids and their salts]. In: *Elektrokhimiya* [Russian Journal of Electrochemistry], 2003, vol. 39, no. 4, pp. 414–424.
11. Animitsa I.E. [High temperature proton conductors with structural disordering of the oxygen sublattice] In: *Elektrokhimiya [Russian Journal of Electrochemistry]*, 2009. vol. 45, no. 6, pp. 712–721.
12. Yaroslavtsev A.B. [The main directions of development and research of solid electrolytes]. In: *Uspekhi khimii* [Russian Chemical Reviews], 2016, vol. 85, pp. 1255.
13. Yaroslavtsev A.B. [Proton conductivity of inorganic hydrates]. In: *Uspekhi khimii* [Russian Chemical Reviews], 1994, vol. 63, pp. 449.
14. Zaporotskova I.V., Lebedev N.G., Zaporotskov P.A. [Proton conductivity of single-walled carbon nanotubes: a semiempirical study] In: *Fizika tverdogo tela* [Solid State Physics], 2006, vol. 48, no. 4, pp. 756–760.
15. Ivanchenko P.A., Lebedev N.G. [The conductivity of carbon nanotubes caused by migration of protons on the surface] In: *Fizika tverdogo tela* [Solid State Physics], 2009, vol. 51, no. 11, pp. 2281–2286.

16. Annenkov YU.M., Kalytka V.A., Korovkin M.V. [Quantum effects in the migration polarization in nanometer layers of proton semiconductors and dielectrics at very low temperatures] In: *Izvestiya vuzov. Fizika* [Russian Physics Journal], 2015, vol. 58, no. 1, pp. 31–37.
17. Kalytka V.A., Korovkin M.V. [Quantum effects in the proton relaxation in the low temperature region] In: *Izvestiya vuzov. Fizika*. [Russian Physics Journal], 2016, vol. 59, no. 7, pp. 74–79.
18. Belonenko M.B. [The peculiarities of nonlinear dynamics of a laser pulse in a photorefractive ferroelectric with hydrogen bonds] In: *Kvantovaya elektronika* [Quantum Electronics], 1998, vol. 25, no. 3, pp. 255–258.
19. Levin A.A., Dolin S.P., Zaitsev A.R. [The distribution of charge and polarization properties of the ferroelectric material of the type KH₂PO₄ (KDP)]. In: *Khimicheskaya fizika* [Russian Journal of Physical Chemistry B: Focus on Physics], 1996, vol. 15, pp. 84.
20. Lebedev N.G., Belonenko M.B. [The structure and electronic structure of ferroelectric KDP-type] In: *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematika, fizika* [The Science Journal of Volgograd State University. Mathematics], 1997, no. 2, pp. 79–81.
21. Lebedev N.G., Litinskii A.O. [Model of ion-embedded stoichiometric cluster to calculate the electronic structure of ionic crystals] In: *Fizika tverdogo tela* [Solid State Physics], 1996, vol. 38, no. 3, pp. 959–962.
22. Kulagin I.A., Ganeev R.A., Tugushev R.I., Ryasnyanskii A.I., Usmanov T.B [The components of the tensor of nonlinear vospriimchivosti third order non-linear optical crystals KDP, DKDP and LiNbO₃] In: *Kvantovaya elektronika*. [Quantum Electronics], 2004, vol. 34, no. 7, pp. 657–662.
23. Gubkin A.N. *Fizika dielektrikov. Teoriya dielektricheskoi polarizatsii v postoyannom i peremennom elektricheskom pole* [Physics of dielectrics. Theory of dielectric polarization in DC and AC electric field]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1971. 272 p.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Калытка Валерий Александрович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Энергетические системы» Карагандинского государственного технического университета;
e-mail: kalytka@mail.ru;

Коровкин Михаил Владимирович – доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, исполняющий обязанности заведующего кафедрой геологии и разработки нефтяных месторождений Национального исследовательского Томского политехнического университета;
e-mail: mvk@tpu.ru;

Мехтиева Али Джаваниширович – кандидат технических наук, заведующий кафедрой «Энергетические системы» Карагандинского государственного технического университета;
e-mail: barton.kz@mail.ru;

Алькина Алия Даулетхановна – старший преподаватель кафедры «Измерительная техника и приборостроение» Карагандинского государственного технического университета;
e-mail: alika_1308@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Valerii A. Kalytka – PhD in Physico-mathematical sciences, associate professor at the Department of Power systems, Karaganda State Technical University;
e-mail: kalytka@mail.ru;

Mikhail V. Korovkin – Doctor in Physico-mathematical sciences, senior researcher, acting head of the Department of Geology and Development of Oil Fields, Tomsk Polytechnic University;
e-mail: mvk@tpu.ru;

Ali Dz. Mekhtiev – PhD in Engineering sciences, head of the Department of Power systems, Karaganda State Technical University;
e-mail: barton.kz@mail.ru;

Aliya D. Alkina – senior lecturer at the Department of Measuring Equipment and Instrument Making; Karaganda State Technical University;
e-mail: alika_1308@mail.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Калытка В.А., Коровкин М.В., Мехтиев А.Д., Алькина А.Д. Детальный анализ нелинейных диэлектрических потерь в протонных полупроводниках и диэлектриках // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2017. № 4. С. 39–54.

DOI: 10.18384/2310-7251-2017-4-39-54

FOR CITATION

V. Kalytka, M. Korovkin, A. Mekhtiev, A. Alkina. Detailed analysis the non-linear of dielectric losses in proton semiconductors and dielectrics. In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*. 2017. no. 4. pp. 39–54.

DOI: 10.18384/2310-7251-2017-4-39-54

УДК 530,1:514.8

DOI: 10.18384/2310-7251-2017-4-55-61

ОПТИКО-МЕХАНИЧЕСКАЯ АНАЛОГИЯ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ¹

Алиев И.Н., Фомин И.В., Самедова З.А.*Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана
105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, Российская Федерация*

Аннотация. В работе рассматривается задача распространения света вблизи гравитирующих сферически-симметричных тел на основе оптико-механической аналогии и линейной связи между импульсом и энергией кванта в рамках метрического подхода к оптическим явлениям. Рассматриваемый подход подразумевает эффективное описание гравитационного поля посредством некоторой оптически неоднородной изотропной среды. Из уравнения эйконала и решения уравнений геодезических линий, которые приводят к одинаковому результату в случае метрики Шварцшильда, определена связь между характеристиками массивных астрофизических объектов и энергией кванта в их гравитационном поле.

Ключевые слова: гравитационное поле, оптико-механическая аналогия, импульс и энергия кванта, метрика Шварцшильда.

OPTICAL-MECHANICAL ANALOGY OF THE GRAVITATIONAL FIELD

I. Aliev, I. Fomin, Z. Samedova*Bauman Moscow State Technical University
5/1, ul. 2nd Baumanskaya, Moscow 105005, Russian Federation*

Abstract. The paper deals with the problem of light propagation near the gravitating spherically symmetric bodies on the basis of the optical-mechanical analogy and the linear connection between the momentum and the energy of quantum within the metric approach to optical phenomena. This approach implies an effective description of the gravitational field by means of some optically inhomogeneous isotropic medium. From the solutions of eikonal equation and the geodesic lines equations, that lead to the same result in the case of the Schwarzschild metric, the relationship between the characteristics of massive astrophysical objects and the energy of quant in their gravitational field is defined.

Key words: gravitational field, optical-mechanical analogy, photon momentum and energy, Schwarzschild metric

Метрический подход к оптическим явлениям

Метрический подход в рамках оптико-механической аналогии часто используется при анализе оптических явлений в различных средах, в частности, в метаматериалах с анизотропным показателем преломления [1; 2].

¹ Исследование выполнено в рамках грантов РФФИ № 16-02-00488 А и № 16-08-00618 А. / The work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (Grant Nos. 16-02-00488 A and 16-08-00618 A).

В случае метрического подхода к вопросам распространения света в гравитационном поле само гравитационное поле рассматривается как некоторая оптическая среда с показателем преломления отличным от единицы [2; 3].

Основной целью настоящей работы является нахождение связи между характеристиками массивных астрофизических объектов и энергией кванта в их гравитационном поле на основе метрического подхода к оптическим явлениям и оптико-механической аналогии.

Для иллюстрации данного подхода рассмотрим изотропную сферически-симметричную метрику вида:

$$ds^2 = -B(r)dt^2 + A(r)(dr^2 + r^2d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (1)$$

где скорость света в вакууме и гравитационную постоянную принимаем за единицу ($c = 1$, $G = 1$).

Траектория частицы в гравитационном поле определяется уравнением геодезических линий [4]:

$$\frac{du^\alpha}{d\lambda} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = 0, \quad (2)$$

где $u^\mu = dx^\mu/d\lambda$ и λ – произвольный аффинный параметр.

В работе [5] показано, что уравнения геодезических линий кванта (уравнения нулевых геодезических линий $ds = 0$) приводятся к уравнению эйконала:

$$\frac{d}{d\lambda} \left(A(\vec{r}) \frac{d\vec{r}}{d\lambda} \right) = \text{grad}(A(\vec{r})) \quad (3)$$

для метрики (1) в случае $A = 1/B$, где показатель преломления $n(\vec{r}) = A(\vec{r})$. Для стандартного вида уравнения эйконала аффинный параметр $\lambda = l$, где l – длина дуги траектории кванта.

Метрика Шварцшильда, соответствующая гравитационному полю звёзд, записывается следующим образом:

$$ds^2 = -\left(1 - 2\frac{M}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - 2\frac{M}{r}\right)} + r^2d\Omega^2, \quad (4)$$

с эффективным показателем преломления:

$$n(\vec{r}) = A(\vec{r}) = \left(1 - 2\frac{M}{r}\right)^{-1}.$$

Угол отклонения света на траектории с прицельным параметром b равен [5; 6]:

$$\alpha = 2(b + 2GM) \int_b^\infty \frac{dr}{r\sqrt{r^2n^2 - (b + 2GM)^2}} - \pi = 4\frac{M}{b} + O\left(\left(\frac{2M}{b}\right)^2\right), \quad (5)$$

что соответствует углу отклонения света в общей теории относительности (ОТО).

Более общий случай, соответствующий оптическим эффектам в гравитационном поле вращающихся звезд, с учётом атмосферы, был рассмотрен в работах [3; 7; 8].

Оптико-механическая аналогия

Оптико-механическая аналогия, а именно описание оптически неоднородных сред эффективным потенциальным силовым полем, часто используется при анализе траекторий квантов [1–3; 9].

Уравнение эйконала (3) определяет взаимосвязь между оптически неоднородной (но изотропной) средой и гравитационным полем или, в терминологии ОТО, искривлением пространства-времени вблизи гравитирующих объектов, которое соответствует определённому классу метрик (1) с условием $A = 1/B$.

В работе [10] уравнение эйконала (3) было получено в рамках оптико-механической аналогии со специфической линейной связью между импульсом и энергией кванта

$$E = p + U(\vec{r}). \quad (6)$$

Определяя показатель преломления соотношением:

$$n(\vec{r}) = A(\vec{r}) = \left(1 - 2\frac{M}{r}\right)^{-1} = \beta(E - U(\vec{r})), \quad (7)$$

где β – некоторый размерный коэффициент, получим тот же угол отклонения кванта (5).

Таким образом, полученное нами уравнение (7) связывает характеристики звезды с энергией кванта в её гравитационном поле.

Поскольку соотношение (7) имеет нетривиальный характер, для его проверки рассмотрим в качестве примера задачу отклонения траектории кванта от прямолинейного движения для связи (6) с общерелятивистских позиций, обобщая результат на случай параметрического постньютоновского формализма [11].

Параметрический постньютоновский формализм и траектория кванта

Вначале запишем компоненту метрики (1) в приближении слабого поля

$$\frac{M}{r} \ll 1, \text{ то есть } A(\vec{r}) = \left(1 - 2\frac{M}{r}\right)^{-1} \approx \left(1 + 2\frac{M}{r}\right).$$

Далее, рассмотрим следующую метрику в указанном приближении

$$ds^2 = -\left(1 - 2\frac{M}{r}\right)dt^2 + \left(1 + 2\gamma\frac{M}{r}\right)\left[(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2\right]. \quad (8)$$

Параметр γ определяет отклонение теории гравитации от ОТО ($\gamma = 1$). Результаты измерений дают следующее ограничение на значение параметра $\gamma = 0,9998 \pm 0,0003$ [12], что позволяет рассматривать модификации ОТО.

На траектории кванта в гравитационном поле в экваториальной плоскости астрофизического объекта получим $x^1 = b$, $x^2 = 0$ и $x^3 = t = W\lambda$, где $W = E - U(\vec{r})$ – энергия кванта и λ – некоторый аффинный параметр.

Четырех-импульс кванта запишем следующим образом $p^\mu = (W, 0, 0, W)$.

Импульс кванта вдоль траектории $x^1 = b$, $x^2 = 0$ в гравитационном поле звезды определяется как [13]:

$$p^1 = p_i^1 - \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma^1_{\mu\nu} x^\alpha(\lambda) p^\mu p^\nu d\lambda,$$

где p_i^1 – исходный импульс кванта, который для расчёта угла отклонения мы положим равным нулю. Таким образом, запишем импульс кванта в следующем виде:

$$p^1 = - \int_{-\infty}^{\infty} (\Gamma^1_{00} + 2\Gamma^1_{03} + \Gamma^1_{33}) W^2 d\lambda.$$

Также, из условия $dx^3/d\lambda = W$, запишем:

$$p^1 = -W \int_{-\infty}^{\infty} (\Gamma^1_{00} + 2\Gamma^1_{03} + \Gamma^1_{33}) dx^3.$$

Теперь вычислим символы Кристоффеля

$$\Gamma^1_{00} = \frac{1}{2} g^{11} (-g_{00,1} + 2g_{01,0}) = -M \partial_1 \left(\frac{1}{r} \right) = M \frac{x^1}{r^3},$$

$$\Gamma^1_{03} = 0,$$

$$\Gamma^1_{33} = \frac{1}{2} g^{11} (-g_{33,1} + 2g_{31,3}) = -\gamma M \partial_1 \left(\frac{1}{r} \right) = \gamma M \frac{x^1}{r^3}.$$

Таким образом, получим:

$$p^1 = -(1 + \gamma) MW \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^1}{r^3} dx^3,$$

где интеграл рассматривается вдоль траектории $x^1 = b$, $x^2 = 0$.

Угол отклонения кванта в гравитационном поле звезды:

$$\alpha = -\frac{p^1}{W} = (1 + \gamma) M \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^1}{r^3} dx^3 = (1 + \gamma) Mb \int_{-\infty}^{\infty} \left(b^2 + (x^3)^2 \right)^{-3/2} dx^3;$$

знак минус выбран для случая отклонения траектории кванта к гравитирующему объекту.

Для вычисления интеграла запишем преобразование $x^3 = b \tan \theta$, в результате получим:

$$\alpha = (1 + \gamma) M b \int_{-\pi/2}^{\pi/2} b^{-2} \cos \theta d\theta = 2(1 + \gamma) \frac{M}{b}.$$

Траектория кванта в гравитационном поле астрофизического объекта изображена на рис. 1.

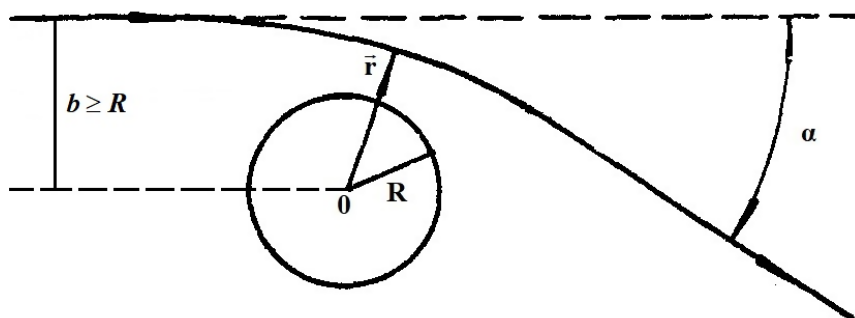


Рис. 1. Траектория кванта в гравитационном поле статической звезды (без вращения) или с окрестностью, геометрия которой определяется метрикой Шварцшильда (4) или метрикой (8), где R – радиус звезды, b – прицельный параметр, $\vec{r}$ – радиус-вектор, α – угол отклонения.

Таким образом, для случая ОТО получим предыдущий результат $\alpha = 4M/b$, что подтверждает справедливость соотношения (7), которое является основным результатом данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Leonhardt U., Philbin T.G. Transformation optics and the geometry of light // Progress in Optics. 2009. vol. 53. pp. 69–152.
2. Fernandez-Nunez I., Bulashenko O. Anisotropic metamaterial as an analogue of a black hole // Physics Letters. 2015. Vol. A 380. pp. 1–8.
3. Фомин И.В. Оптические эффекты в атмосфере астрофизических объектов. Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия Естественные науки. 2016. № 5. С. 84–95.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М.: Физматлит. 2006. 534 с.
5. Wu Xue-jun, XU Chong-ming. Null Geodesic Equation Equivalent to the Geometric Optics Equation // Communications in Theoretical Physics. 1988. vol. 9. no. 1, pp. 119–125.
6. Ye Xing-Hao, Lin Qiang. A Simple Optical Analysis of Gravitational Lensing // Journal of Modern Optics. 2008. vol. 55. iss. 7. pp. 1119–1126.
7. Gladyshev V.O., Tereshin A.A., Fomin I.V., Chelnokov M.B., Kauts V.L., Gladysheva T.M. and Bazleva D.D. Electromagnetic waves propagation nearby rotating gravitating astrophysical object with atmosphere // Gravitation, Astrophysics and Cosmology. 2016. pp. 371–372. DOI: 10.18698/2308-6033-2012-5-216
8. Гладышев В.О., Кауц В.Л., Тиунов П.С., Челноков М.Б. О влиянии вращения атмосфер Земли и Солнца на распространение электромагнитного излучения // Инженерный журнал: наука и инновации. Электронное научно-техническое издание. 2012. Вып. 5(5). URL: <http://engjournal.ru/catalog/fundamentals/physics/216.html>. (дата обращения: 28.11.2017)

9. Evans J., Nandi K.K. and Islam A. The optical-mechanical analogy in general relativity: exact Newtonian forms for the equations of motion of particles and photons // *General Relativity and Gravitation*. 1996. Vol. 28. iss. 4. pp. 413–439.
10. Алиев И.Н., Самедова З.А. Оптико-механическая аналогия и траектория кванта // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2015. № 1. С. 32–36.
11. Уилл К. Теория и эксперимент в гравитационной физике. М.: Энергоатомиздат. 1985. 296 с.
12. Fomalont E., Kopeikin S., Lanyi G. and Benson J. Progress in Measurements of the Gravitational Bending of Radio Waves Using the VLBA // *The Astrophysical Journal*. 2009. vol. 699. no. 2. pp. 1395–1402.
13. Синг Дж.Л. Общая теория относительности. М.: Иностранная Литература, 1963. 432 с.

REFERENCES

1. Leonhardt U., Philbin T.G. [Transformation optics and the geometry of light]. In: *Progress in Optics*, 2009, vol. 53, pp. 69–152.
2. Fernandez-Nunez I., Bulashenko O. [Anisotropic metamaterial as an analogue of a black hole]. In: *Physics Letters*, 2015, vol. A 380, pp. 1–8.
3. Fomin I.V. [Optical effects in the atmosphere of astrophysical objects]. In: *Vestnik MGTU im. N.E. Bauman. Seriya Estestvennye nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences], 2016, no. 5, pp. 84–95.
4. Landau L.D., Lifshits E.M. *Teoriya polya* [Field theory]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2006. 534 p.
5. WU Xue-jun, XU Chong-ming. [Null Geodesic Equation Equivalent to the Geometric Optics Equation]. In: *Communications in Theoretical Physics*, 1988, vol. 9, no. 1, pp. 119–125.
6. Ye Xing-Hao, Lin Qiang. [A Simple Optical Analysis of Gravitational Lensing]. In: *Journal of Modern Optics*, 2008, vol. 55, iss. 7, pp. 1119–1126.
7. Gladyshev V.O., Tereshin A.A., Fomin I.V., Chelnokov M.B., Kauts V.L., Gladysheva T.M. and Bazleva D.D. [Electromagnetic waves propagation nearby rotating gravitating astrophysical object with atmosphere]. In: *Gravitation, Astrophysics and Cosmology*, 2016, pp. 371–372. DOI: 10.18698/2308-6033-2012.
8. Gladyshev V.O., Kauts V.L., Tiunov P.S., Chelnokov M.B. [On the influence of rotation of the atmospheres of the Earth and Sun on the propagation of electromagnetic radiation]. In: *Inzhenernyi zhurnal: nauka i innovatsii. Elektronnoe nauchno-tekhnicheskoe izdanie*. [Engineering Journal: Science and Innovations. Electronic science and engineering publication], 2012, vol. 5(5). Available at: URL: <http://engjournal.ru/catalog/fundamentals/physics/216.html>. (accessed: 28.11.2017)
9. Evans J., Nandi K.K. and Islam A. [The optical-mechanical analogy in general relativity: exact Newtonian forms for the equations of motion of particles and photons]. In: *General Relativity and Gravitation*, 1996, vol. 28, iss. 4, pp. 413–439.
10. Aliev I.N., Samedova Z.A. [Optical-mechanical analogy and quantum trajectory]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-Matematika* [Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], 2015, no.1, pp. 32–36.
11. Uill K. *Teoriya i eksperiment v gravitatsionnoi fizike* [Theory and experiment in gravitational physics]. Moscow, Energoatomizdat Publ., 1985. 296 p.
12. Fomalont E., Kopeikin S., Lanyi G. and Benson J. [Progress in Measurements of the Gravitational Bending of Radio Waves Using the VLBA]. In: *The Astrophysical Journal*, 2009, vol. 699, no. 2, pp. 1395–1402.

13. Sing John.L. *Obshchaya teoriya otноситel'nosti* [The General theory of relativity]. Moscow, Inostrannaya Literatura Publ., 1963. 432 p.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Алиев Исмаил Новруз оглы – доктор физико-математических наук, профессор кафедры физики Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана, профессор академии военных наук, академик Российской Академии естественных наук; e-mail: alievprof@yandex.ru;

Фомин Игорь Владимирович – кандидат физико-математических наук; доцент кафедры физики Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана; e-mail: ingvor@inbox.ru;

Самедова Зарифа Алышан кызы – аспирант кафедры физики Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана; e-mail: samezara@bk.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Ismail N. Aliev – Doctor in Physical and Mathematical Sciences, professor at the Department of Physics, Bauman Moscow State Technical University, professor at the Academy of Military Sciences, Academician of the Russian Academy of Natural Sciences; e-mail: alievprof@yandex.ru;

Igor V. Fomin – PhD in Physical and Mathematical Sciences; associate professor at the Department of Physics, Bauman Moscow State Technical University; e-mail: ingvor@inbox.ru;

Zarifa A. Samedova – postgraduate student at the Department of Physics, Bauman Moscow State Technical University; e-mail: samezara@bk.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Алиев И.Н., Фомин И.В., Самедова З.А. Оптико-механическая аналогия гравитационного поля // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2017. № 4. С. 55–61.
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-4-55-61

FOR CITATION

Aliev I.N., Fomin I.V., Samedova Z.A. Optical-mechanical analogy of the gravitational field. In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*, 2017, no. 4, pp. 55–61.
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-4-55-61

УДК 537.9+539.6

DOI: 10.18384/2310-7251-2017-4-62-67

К ДИНАМИКЕ ЖИДКИХ КРИСТАЛЛОВ В ИЗМЕНЯЮЩИХСЯ МАГНИТНЫХ ПОЛЯХ

Геворкян Э.В.*Московский государственный областной университет
105005, г. Москва, улица Радио, д. 10А, Российская Федерация*

Аннотация. Исследуются динамика и особенности поведения жидких кристаллов в изменяющихся магнитных полях различного типа: пульсирующих, осциллирующих, вращающихся, конических. Показана эффективность конических полей для экспериментального изучения жидких кристаллов.

Ключевые слова: динамические свойства, жидкие кристаллы, изменяющиеся магнитные поля, время релаксации, ориентационная структура.

DYNAMICS OF LIQUID CRYSTALLS IN VARIABLE MAGNETIC FIELDS

E. Gevorkyan*Moscow Region State University
ul. Radio 10A, 105005 Moscow, Russian Federation*

Abstract. The dynamics and features of behavior of liquid crystals in variable magnetic fields of different types (pulsating, oscillating, rotating, conical) are investigated. The efficiency of conical fields for the experimental study of liquid crystals is shown.

Key words: dynamic properties, liquid crystals, variable magnetic fields, relaxation time, orientation structure.

Введение

Гидродинамическая теория нематических жидких кристаллов (нематодинамика) была развита на основе законов сохранения в классических работах Эриксона и Лесли [1; 2]. В дальнейшем были предложены десятки вариантов такой теории, как линейных, так и нелинейных. Однако, при решении конкретных практических задач и описании результатов экспериментов, как правило, используется гидродинамика Лесли–Эриксона. Большинство других теорий дают сходные или эквивалентные результаты. Для объяснения возможных различий требуются специальные расчёты и довольно сложные методически эксперименты.

Экспериментальное и теоретическое изучение динамики нематиков в изменяющихся по величине или направлению внешних магнитных полях представляет также и прикладной интерес, связанный с определением магнитной восприим-

чивости, акустических параметров, времён ориентационной релаксации, коэффициентов вязкости [3–5].

Магнитное поле способно также изменять ориентационную структуру холестерических и смектических С жидких кристаллов. Однако, здесь ситуация значительно сложнее методически, а также из-за отсутствия экспериментальных данных о многочисленных (вследствие моноклинной симметрии) коэффициентах вязкости для монодоменных смектиков С.

В настоящей работе обсуждаются особенности поведения жидких кристаллов в изменяющихся магнитных полях различного типа: пульсирующих, осциллирующих, вращающихся, конических.

Локальная ориентация нематика описывается единичным вектором $\mathbf{n}$ – директором. Будем рассматривать «объёмные» жидкие кристаллы со свободными ориентационными граничными условиями, позволяющими не учитывать эффекты обратного потока и деформации, характерные для тонких слоёв нематика с жёстким сцеплением директора на граничных поверхностях.

При типичных частотах изменения поля (ниже СВЧ диапазона) инерциальные свойства, связанные с поворотом директора, несущественны.

С учётом этого уравнение движения директора в магнитном поле $\mathbf{H}$ в гидродинамике Лесли – Эриксона примет вид:

$$\gamma_1 \dot{n}_i - \mu_0 \chi_a \mathbf{n} \cdot \mathbf{H} H_i = \lambda n_i, \quad (1)$$

где $\lambda = \mu_0 \chi_a (\mathbf{nH})^2$ – множитель Лагранжа, μ_0 – магнитная постоянная, χ_a – анизотропия диамагнитной восприимчивости, γ_1 – коэффициент вращательной вязкости. Или для плотностей моментов:

$$\Gamma = \mu_0 \chi_a \mathbf{n} \cdot \mathbf{H} [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] - \gamma_1 [\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{n}}] = 0. \quad (2)$$

Пульсирующие и осциллирующие поля

Поля этого типа остаются коллинеарными (например, оси 3) и поэтому представляют интерес для изучения динамики эффекта Фредерикса в тонких слоях нематика или процессов быстрой ориентации при включении поля и медленного перехода в неориентированное состояние (разориентация при выключении) объёмного образца. В этих случаях принципиальную роль играют граничные условия, возникающие течения, а также образование и движение дефектов ориентации. Такие поля сравнительно просто реализуются в эксперименте. Однако, значительно сложнее в обработке результатов измерений и определении по ним параметров нематика. Более перспективными для эксперимента являются магнитные поля, меняющие направление.

Вращающиеся и конические поля

Рассмотрим магнитное поле, вектор напряженности $\mathbf{H} = H \mathbf{h}$ которого с частотой ω описывает в пространстве конус с осью вдоль оси 3 и углом при вершине 2β . Индекс 0 у векторов обозначает их проекции на плоскость 12.

Уравнение движения директора в этом случае дает:

$$\dot{n}_3 + 2\omega_c (h_0 n_0 \cos \varphi + h_3 n_3) (h_0 n_3 \cos \varphi - h_3 n_0) n_0 = 0, \quad (3)$$

$$\dot{\varphi}_n - 2\omega_c h_0 \sin \varphi (h_0 \cos \varphi + h_3 n_3 / n_0) = 0, \quad (4)$$

где $\omega_c = \mu_0 \chi_a H^2 / 2\gamma_1$ – критическая частота, φ_n – азимутальный угол директора, $\varphi = \omega t - \varphi_n$.

Откуда для запаздывания азимутального угла φ и котангенса полярного угла директора $d = \text{ctg } \alpha = n_3/n_0$ находим автономную систему нелинейных уравнений:

$$\dot{\varphi} + 2\omega_c h_0 \sin \varphi (h_0 \cos \varphi + h_3 n_3 / n_0) - \omega = 0, \quad (5)$$

$$\dot{d} + 2\omega_c (h_0 \cos \varphi + h_3 d) (h_0 d \cos \varphi + h_3) = 0. \quad (6)$$

Её стационарное решение (синхронный режим) имеет вид:

$$2 \sin \varphi_s \cos \varphi_s \left(h_0^2 + \frac{h_3^2}{\cos^2 \varphi_s} \right) = \frac{\omega}{\omega_c}, \quad (7)$$

$$d_s = \frac{h_3}{h_0 \cos \varphi_s} \quad (8)$$

или $\text{tg } \alpha = \cos \varphi_s \text{tg } \beta$.

Замена переменной $\text{tg } \varphi_s = u$ сводит (7) к кубическому уравнению:

$$2h_3^2 u^3 - \frac{\omega}{\omega_c} u^2 + 2u - \frac{\omega}{\omega_c} = 0. \quad (9)$$

Линеаризация системы (5), (6) в окрестности решения (7), (8) позволяет определить устойчивость стационарных решений:

$$\frac{1}{2\omega_c} \delta \dot{\varphi} = (h_0^2 \sin^2 \varphi_s - 1) \delta \varphi - h_0 h_3 \sin \varphi_s \delta d, \quad (10)$$

$$\frac{1}{2\omega_c} \delta \dot{d} = -h_0 h_3 \sin \varphi_s \left(1 + \frac{h_3^2}{h_0^2 \cos^2 \varphi_s} \right) \delta \varphi + (2h_0^2 \sin^2 \varphi_s - 1) \delta d. \quad (11)$$

Для устойчивости требуется, чтобы след матрицы коэффициентов системы (10), (11) был отрицательным, а её определитель положительным:

$$3h_0^2 \sin^2 \varphi_s - 2 < 0, \quad (12)$$

$$2h_0^4 \cos^4 \varphi_s + h_0^2 (2h_3^2 - h_0^2) \cos^2 \varphi_s + \frac{h_3^4}{\cos^2 \varphi_s} > 0. \quad (13)$$

Семейство решений уравнения (7) на фазовой диаграмме (в переменных угол – частота, рис. 1) имеет характерную «критическую» точку $h_3 = 1/3$ и

$\omega/\omega_c = 2/\sqrt{3}$, в которой сходятся линии максимумов и минимумов кривых, границ устойчивости и различных точек покоя. В этой точке $u = \sqrt{3}$ и $\varphi_s = \pi/3$.

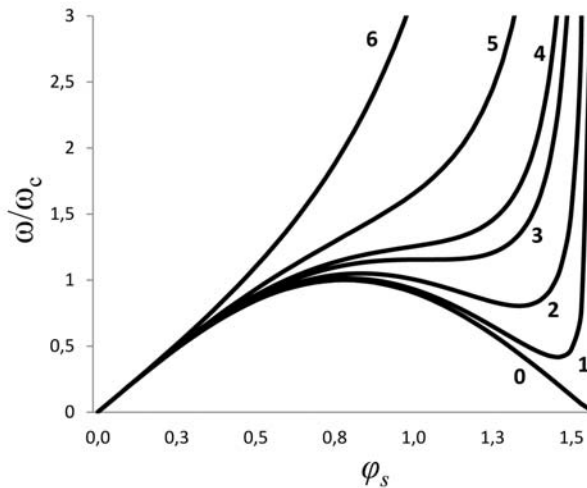


Рис. 1. Фазовая диаграмма зависимости запаздывания азимутального угла поворота директора φ_s от относительной частоты вращения магнитного поля ω/ω_c .

Для значений h_3^2 равных: 0 – 0, 1/90 – 1, 2/45 – 2, 1/9 – 3, 2/7 – 4, 1/3 – 5, 1/2 – 6.

При $h_3 < 1/3$ уравнение (7) в определённом частотном интервале имеет три решения, устойчивость которых определяется неравенством (13). Минимальный угол (фокус) соответствует устойчивому решению, а остальные (седло и фокус) – неустойчивым. При более низких частотах единственное решение (узел) устойчиво, а при высоких частотах (фокус) неустойчиво.

При $h_3 \geq 1/3$ при любых частотах уравнение (7) имеет единственное решение (фокус). При $1/9 \leq h_3^2 \leq 1/3$ решения устойчивы, если выполняется неравенство (12). При $h_3^2 \geq 1/3$ решение устойчиво при любых частотах и асинхронный режим отсутствует.

Этот результат означает, что коническое магнитное поле с углом $\beta < 54,74^\circ$, в отличие от классического вращающегося поля, позволяет измерять в синхронном режиме большие значения вращательной вязкости. Например, в окрестности фазового перехода из нематической в смектические фазы или в смектической фазе С.

Заметим, что в отсутствии синхронного режима или при его неустойчивости жидкий кристалл переходит в асинхронный режим со сложным движением директора. Вследствие вырожденности этого состояния начинается медленный процесс разориентации жидкого кристалла, в результате которого он переходит в новое стационарное состояние с неполной ориентированностью с многочисленными ориентационными дефектами, дисклинациями. Анизотропия этого состояния уменьшается с ростом частоты вращения поля и определяется, как и длительность переходного процесса, динамикой дефектов.

Очевидно, что в частном случае вращающегося поля уравнение (7) превращается в классическое уравнение Цветкова и частотная область устойчивого ориентированного синхронного режима ограничивается сверху критической частотой ω_c (рис. 1, кривая 0).

Коническое и вращающееся магнитные поля большей частоты ($\omega \gg \omega_c$) целесообразно применять для ориентации дискотиков с отрицательной анизотропией диамагнитной восприимчивости.

В последнее время были обнаружены новые жидкокристаллические фазы, например, двухосные нематики и твист-бенд (ТВ) нематики [6; 7], которые также ориентируются магнитным полем. Конические поля будут полезным инструментом и в этом случае для исследования их анизотропных свойств и ориентационной структуры.

Заключение

Таким образом, изучение динамических свойств жидких кристаллов в меняющихся внешних полях служит эффективным методом экспериментального исследования жидкокристаллического состояния и может дать ценную информацию для проверки теории.

Наиболее перспективным представляется коническое магнитное поле или сочетание вращающегося поля с переменным (осциллирующим) электрическим полем.

Для изучения объёмных жидкокристаллических образцов, в большей степени свободных от искажений ориентационной структуры ограничивающими поверхностями, более всего подходят ультразвуковая и диэлектрическая спектроскопии в магнитном поле (причём, желательна специальная обработка поверхностей измерительной камеры, обеспечивающая граничные условия слабого ориентационного сцепления для ослабления влияния процесса образования дисклиний.)

Альтернативное направление, связанное с измерениями в асинхронном режиме и с построением динамической теории движения ориентационных дефектов для описания экспериментальных данных в неориентированных (или частично разориентированных полями, быстро меняющими направление и величину) жидких кристаллах, пока слабо развито и его перспективы остаются неясными. В этом случае для анализа экспериментальных данных приходится использовать упрощённые модели Фоккера–Планка или вращательной диффузии для «роев».

ЛИТЕРАТУРА

1. Ericksen J.L. Anisotropic fluids // Archive for Rational Mechanics and Analysis, 1960. Vol. 4. Iss. 1. pp. 231–237.
2. Leslie F.M. Some constitutive equation for liquid crystals // Archive for Rational Mechanics and Analysis, 1968. Vol. 28. Iss. 4. pp. 265–283.
3. Геворкян Э.В. Поведение нематических жидких кристаллов в меняющемся магнитном поле // Известия высших учебных заведений. Физика, 1981. Т. 24. № 4. С. 57–60.
4. Хабибуллаев П.К., Геворкян Э.В., Лагунов А.С. Реология жидких кристаллов. Ташкент: ФАН, 1992. 300 с.
5. Беляев В.В. Вязкость нематических жидких кристаллов. М.: Физматлит, 2002. 224 с.
6. Блинов Л.М. Жидкие кристаллы. Структура и свойства. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2013. 480 с.

7. Salili S.M., et al. Anomalous increase in nematic-isotropic transition temperature in dimer molecules induced by magnetic field // *Physical Review Letters*, 2016. P. 217801-1–217801-5.

REFERENCES

1. Ericksen J.L. [Anisotropic fluids]. In: *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1960, vol. 4, iss. 1, pp. 231–237.
2. Leslie F.M. [Some constitutive equation for liquid crystals]. In: *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1968, vol. 28, iss. 4, pp. 265–283.
3. Gevorkyan E.V. [Behavior of Nematic Liquid Crystals in a Variable Magnetic Field]. In: *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Fizika* [Soviet Physics Journal], 1981, vol. 24, iss. 4, pp. 343–346.
4. Khabibullaev P.K., Gevorkyan E.V., Lagunov A.S. *Reologiya zhidkikh kristallov* [Rheology of liquid crystals]. Tashkent, FAN Publ., 1992. 300 p.
Habibullaev P. K., Gevorkyan E. V., Lagunov A.S. *Rheology of Liquid Crystals*. New York: Allerton Press, 1994. 281 p. ISBN-10: 0898640776 / ISBN-13: 978-0898640779
5. Belyaev V.V. *Vyazkost' nematiceskikh zhidkikh kristallov* [Viscosity of nematic liquid crystals]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2002. 224 p.
Belyaev V.V. *Viscosity of Nematic Liquid Crystals*, Publisher: Cambridge International Science Publishing, 2009. 240 p. ISBN 10: 1904602088 / ISBN-13: 9781904602088.
6. Blinov L.M. *Zhidkie kristally. Struktura i svoistva* [The liquid crystals. Structure and properties]. Moscow, LIBROKOM Publ., 2013. 480 p.
Blinov L.M. *Structure and Properties of Liquid Crystals*. Springer Science+Business Media B. V., 2011. 480 p.
7. Salili S.M., et al. [Anomalous increase in nematic-isotropic transition temperature in dimer molecules induced by magnetic field]. In: *Physical Review Letters*, 2016, P. 217801-1–217801-5.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Геворкян Эдвард Вигенович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры общей физики Московского государственного областного университета;
e-mail: gevev@rambler.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Edward V. Gevorkyan – Doctor in Physico-mathematical sciences, professor at the Department of General Physics, Moscow Region State University;
e-mail: gevev@rambler.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Геворкян Э.В. К динамике жидких кристаллов в изменяющихся магнитных полях // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2017. № 4. С. 62–67.
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-4-62-67

FOR CITATION

Gevorkyan E.V. Dynamics of liquid crystals in variable magnetic fields. In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*. 2017. no. 4. pp. 62–67.
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-4-62-67

УДК: 535.3 + 535.5

DOI: 10.18384/2310-7251-2017-4-68-78

ОПТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЖИДКОКРИСТАЛЛИЧЕСКИХ КОМПОЗИТНЫХ НЕСИММЕТРИЧНЫХ ТВИСТ-ЯЧЕЕК¹

Соломатин А.С., Мащенко В.И., Беляев В.В.*Московский государственный областной университет**105005, г. Москва, ул. Радио, д. 10А, Российская Федерация*

Аннотация Разработана методика и смоделированы оптические свойства ячеек твист-ЖК-композитов, актуальных для элементной базы средств приёма, отображения и обработки информации. Предложен метод расчета и выполнена теоретическая и компьютерная модель зависимости интенсивности пропускания от ориентационных параметров твист-ЖК-композитной ячейки.

Ключевые слова: жидкокристаллический оптически анизотропный композит, твист-структуры, домены ЖК, моделирование оптических свойств, поликапролактон, 4-циано-4'-N-гептилбифенил, 7ЦБ.

OPTICAL PROPERTIES OF ASYMMETRICAL TWIST STRUCTURES IN A NEMATIC LIQUID CRYSTAL COMPOSITE

A. Solomatin, V. Mashchenko, V. Belyaev*Moscow Region State University**ul. Radio 10A, 105005 Moscow, Russian Federation*

Abstract. A technique is developed and the optical properties of cells of twist-LC composites, which are relevant for the element base of means for receiving, displaying and processing information, are modeled. A calculation method is proposed and a theoretical and computer model of the dependence of the transmission intensity on the orientation parameters of the twist-LC composite cell is performed.

Key words: liquid crystal optically anisotropic composite, polycaprolactone, 4-cyano-4'-N-heptylbiphenyl, 7CB, LC domains, optical properties simulation.

1. Введение

Твист-структуры играют важную роль, например, в дисплейной технике. Разработка методов формирования в нематических жидких кристаллах твист-структур представляет практический интерес для создания различных электро-оптических устройств [1]. Требования миниатюризации электронных устройств актуальны в настоящее время вплоть до микро- и нано-уровней размеров устройств [2].

¹ Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 16-57-00089Бел_а и гранта Президента № МК-7359.2016.9 / The work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (Grant No. 16-57-00089Bel_a) and the RF President's Grants Council (Grant No. МК-7359.2016.9).

Целью данной работы является моделирование оптических свойств несимметричных твист-микроструктур в нематических ЖК-композитах, способ формирования которых разработан в [3].

2. Экспериментальная часть

В качестве матрицы ЖК-композита в [3] использован поликапролактон. Нематический ЖК 4-циано-4'-N-гептилбифенил (7ЦБ) был использован в качестве ЖК. По оригинальной методике (с использованием явления образования рэлеевских мостов жидкости) были получены ЖК-композиты. Полимерную композитную нить формировали, сочетая одноосные и торсионные деформации. Охлаждением поликапролактона до комнатной температуры фиксировали ЖК-композит.

3. Неоднородные композитные структуры, формирующие твист-ячейку

В [3] предложен способ изготовления твист-структуры на основании полученных экспериментальных результатов. Следует изготавливать композитную нить, короткую (длиной меньше 1 мм), содержащую тонкий ЖК цилиндр (в соответствии с экспериментальными результатами). Он имеет поперечное сечение, схематически подобное изображённому на рис. 1.



Рис. 1. Поперечное сечение ЖК цилиндра.

Затем следует повернуть один её конец на $\pi/2$. При прохождении луча света вдоль ЖК цилиндра, как в 90° твист-ячейке, будет происходить поворот плоскости поляризации. На рис. 2. показано, как отсчитывается угол наклона директора ЖК к направлению прохождения луча.



Рис. 2. Угол наклона директора ЖК к направлению прохождения луча отсчитывается от нормали к лучу, то есть от торца цилиндра.

От удлинения при вытягивании зависит угол наклона. Если различные участки композитной нити вытягивать различно, то есть задать градиент относительного удлинения при вытягивании, то цилиндрическая ЖК ячейка внутри нити будет аналогична ячейкам ЖК с неоднородным распределением директора, рассмотренным в работах [4–8].

Предлагаемая в [3] ЖК структура, для которой и разработан вышеописанный ЖК-композит, это установленный перед матрицей фотоэлементов упорядоченный блок ЖК микролинз и твист-ячеек. Он представляет собой матрицу из цилиндрических пор с нитями вышеописанного композита в них и затем, последовательно по ходу луча, микролинзы ЖК [9]. Фотоэлементы расположены по осям микролинз, образуя матрицу с такими же пространственными характеристиками. Называть подложкой ячейки будем в дальнейшем торец цилиндрической поры в матрице.

Если на фронтальной подложке ЖК-ячейки, помещённой между поляризатором и параллельным ему анализатором, направление директора совпадает с осью поляризатора, то интенсивность I света, прошедшего через ячейку толщиной L будет равна [10]:

$$I = \frac{\sin^2(\varphi \sqrt{1+q^2})}{1+q^2}, \quad (1)$$

где φ – угол закрутки твиста, а $q = \pi L \Delta n / \lambda \varphi$. Для 90° твист-эффекта $\varphi = \pi/2$.

Интенсивность пропускания I является осциллирующей функцией параметра L/λ . При отсутствии поля, как показано в [3], можно считать линейным распределение углов по толщине ячейки. Для случая $K_{33}/K_{11} = 1$ распределение угла θ по толщине ячейки будет линейным [8].

Как показано в [3], исходя из того, что

$$q = \frac{\pi d \Delta n}{\lambda \varphi}, \quad (2)$$

и в то же время разность фазовых задержек

$$\Delta \Phi = \frac{2\pi d \Delta n}{\lambda}, \quad (3)$$

получим:

$$q = \frac{\Delta \Phi}{2\varphi}, \quad (4)$$

где

$$\Delta \Phi = \frac{2\pi}{\lambda} \left[\int_0^L \frac{n_o n_e dz}{(n_o^2 \cos^2 \theta(z) + n_e^2 \sin^2 \theta(z))^{1/2}} - n_o L \right]. \quad (5)$$

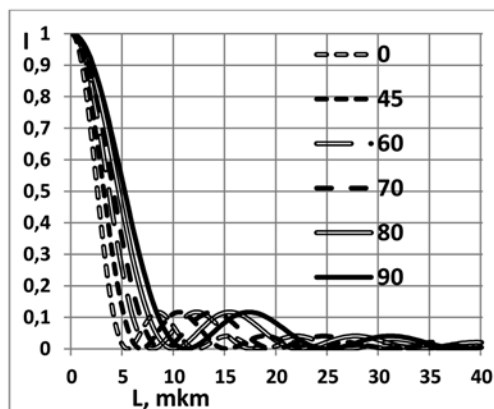
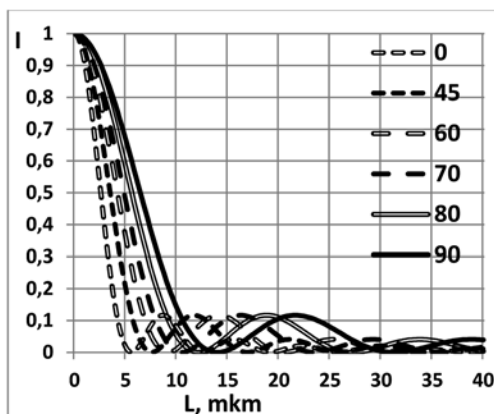
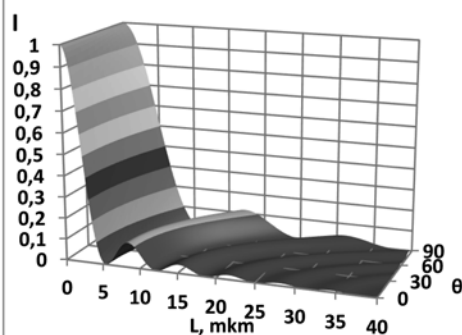
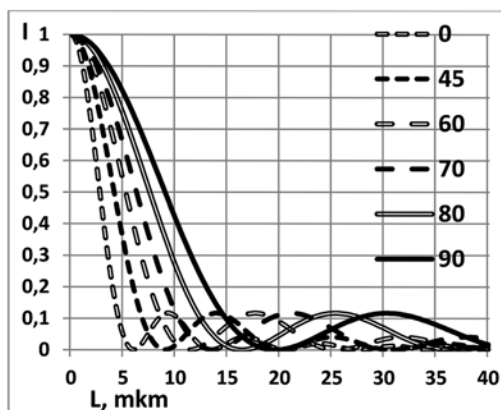
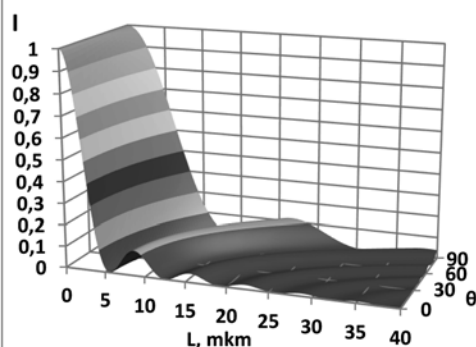
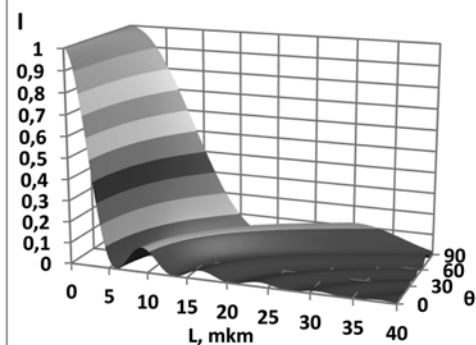

 $\theta_{\text{fixed}}=0$

 $\theta_{\text{fixed}}=15^\circ$

 $\theta_{\text{fixed}}=30^\circ$


Рис. 3. Зависимость интенсивности пропускания I при параллельных поляризаторах от приповерхностных углов θ и θ_{fixed} и толщины L слоя ЖК для NSTH, то есть твист-гибридной ячейки ЖК с несимметричными приповерхностными углами.

Угол θ_{fixed} изменяется от 0 до 75° сверху вниз. Окончание рисунка на стр. 72.

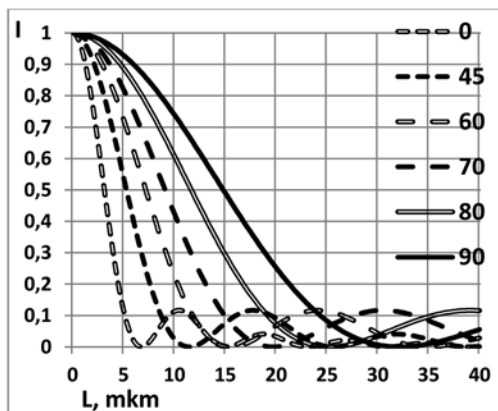
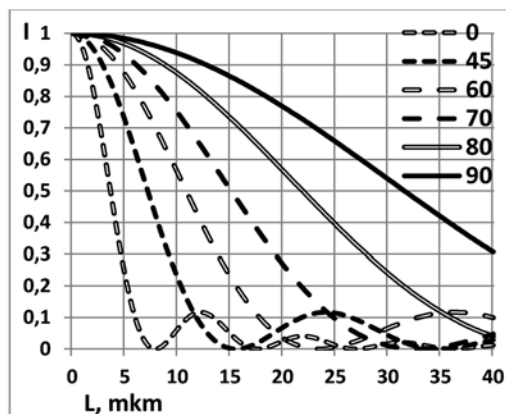
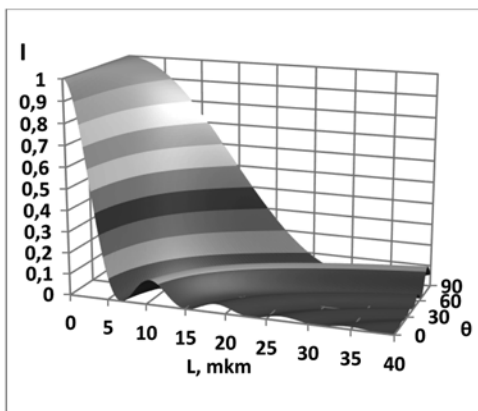
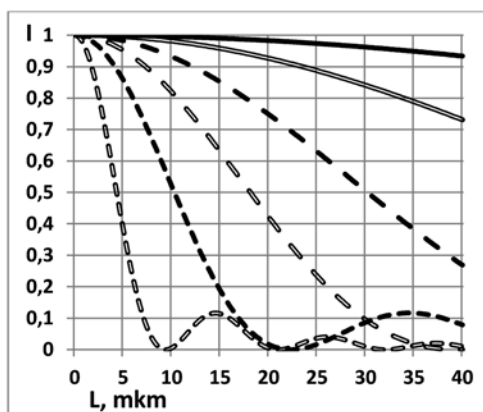
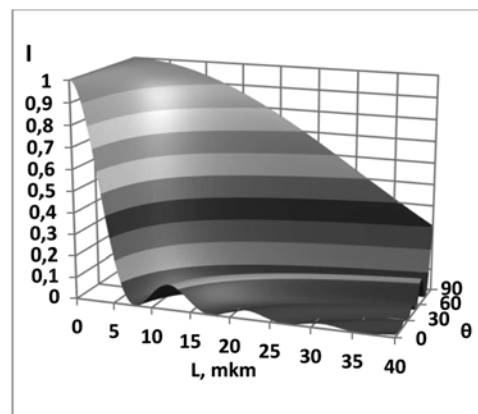
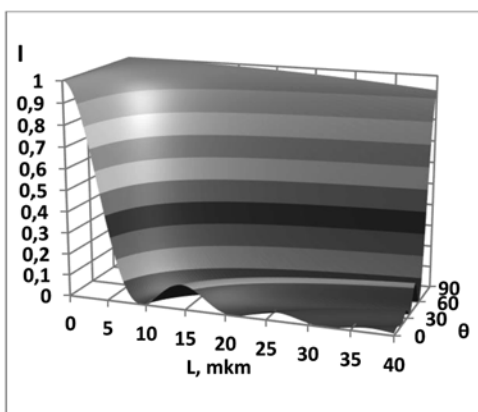

 $\theta_{fixed}=45^\circ$

 $\theta_{fixed}=60^\circ$

 $\theta_{fixed}=75^\circ$


Рис. 3. Окончание рисунка. Начало на стр. 71. Зависимость интенсивности пропускания I при параллельных поляризаторах от приповерхностных углов θ и θ_{fixed} и толщины L слоя ЖК для NSTH, то есть твист-гибридной ячейки ЖК с несимметричными приповерхностными углами. Угол θ_{fixed} изменяется от 0 до 75° сверху вниз.

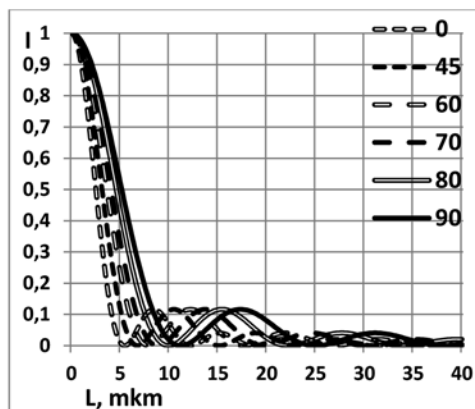
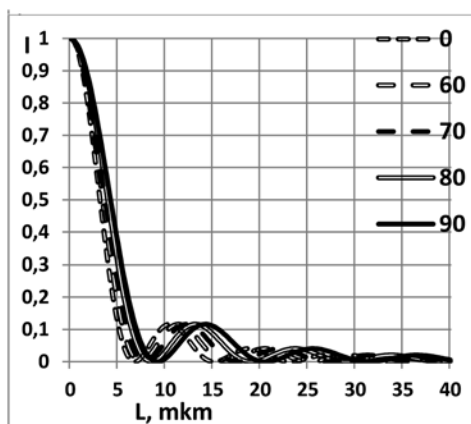
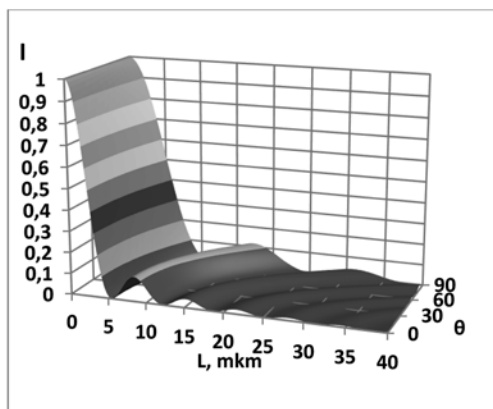
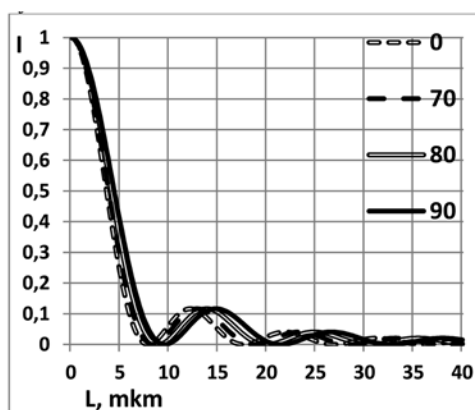
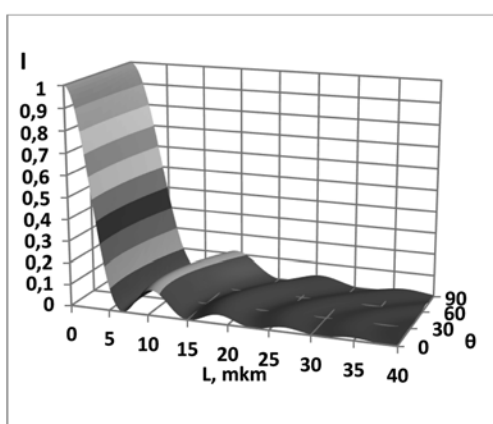
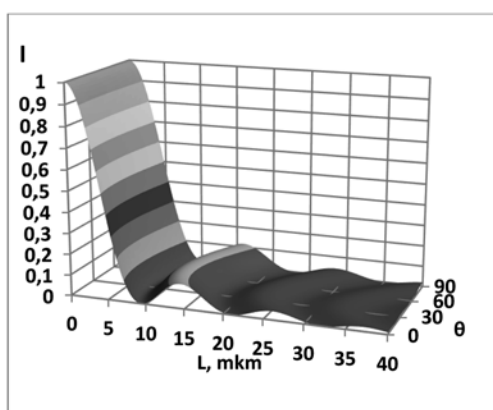

 $\theta_{fixed}=0$

 $\theta_{fixed}=45^\circ$

 $\theta_{fixed}=75^\circ$


Рис. 4. Зависимость интенсивности пропускания I при параллельных поляризаторах от приповерхностных углов θ и θ_{fixed} и толщины L слоя ЖК для NSTS, то есть твист-сплей ячейки ЖК с несимметричными приповерхностными углами.

Угол θ_{fixed} изменяется от 0 до 75° сверху вниз.

Следовательно, интенсивность пропускания в параллельных поляризаторах можно рассчитать по формуле (1) для различных пространственных распределений полярного угла наклона директора.

3.1. Несимметричная твист-гибридная ячейка (NSTH)

На рис. 3 для NSTH, то есть твист-гибридной ячейки ЖК с несимметричными приповерхностными углами θ и θ_{fixed} и толщиной ЖК слоя L , показана зависимость интенсивности пропускания I при параллельных поляризаторах от приповерхностных углов и толщины слоя ЖК. Здесь $n_o = 1,5$; $n_e = 1,6$; длина волны света 0,63 мкм, угол закрутки твиста 90° , плоскость поляризации входящего луча света совпадает с директором ЖК на входной поверхности ЖК ячейки.

3.2. Несимметричная твист-сплей ячейка (NSTS)

На рис. 4 для NSTS, то есть твист-сплей ячейки ЖК с несимметричными приповерхностными углами θ и θ_{fixed} и толщиной ЖК слоя L , представлена зависимость интенсивности пропускания I при параллельных поляризаторах от приповерхностных углов и толщины слоя ЖК. Здесь $n_o = 1,5$; $n_e = 1,6$; длина волны света 0,63 мкм, угол закрутки твиста 90° , плоскость поляризации входящего луча света совпадает с директором ЖК на входной поверхности ЖК ячейки.

3.3. Несимметричная твист-бенд ячейка (NSTB)

На рис. 5 для NSTB, то есть твист-бенд ячейки ЖК с несимметричными приповерхностными углами θ и θ_{fixed} и толщиной ЖК слоя L , показана зависимость интенсивности пропускания I при параллельных поляризаторах от приповерхностных углов и толщины слоя ЖК. Здесь $n_o = 1,5$; $n_e = 1,6$; длина волны света 0,63 мкм, угол закрутки твиста 90° , плоскость поляризации входящего луча света совпадает с директором ЖК на входной поверхности ЖК ячейки.

4. Выводы

Материалы на базе исследованных ЖК-композитов могут быть использованы в дисплейной технике и оптоэлектронике.

Разработана методика и смоделированы оптические свойства ячеек твист-ЖК-композитов, актуальных для элементной базы средств приёма, отображения и обработки информации.

Предложен метод расчёта и выполнена теоретическая и компьютерная модель зависимости интенсивности пропускания от ориентационных параметров твист-ЖК-композитной ячейки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жаркова Г.М., Сонин А.С. Жидкокристаллические композиты. Новосибирск: Наука, 1994. 214 с.
2. Беляев В.В. Дисплеи 90-х годов. М.: Химия, 2000. 91 с.

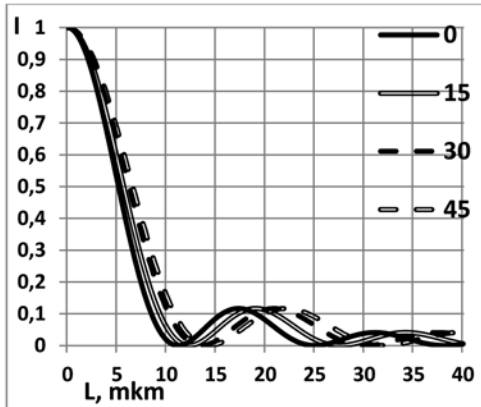
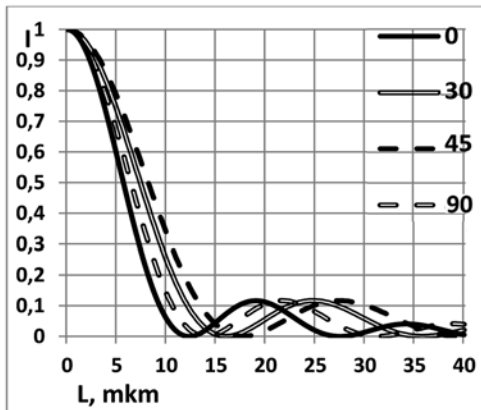
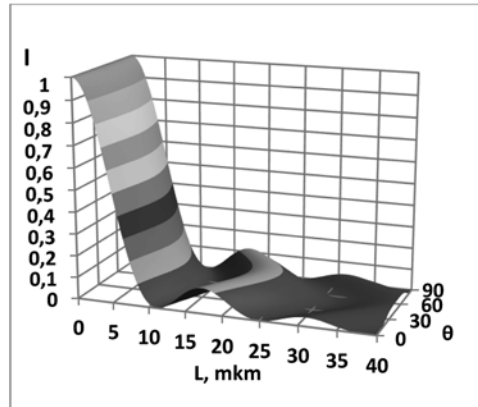
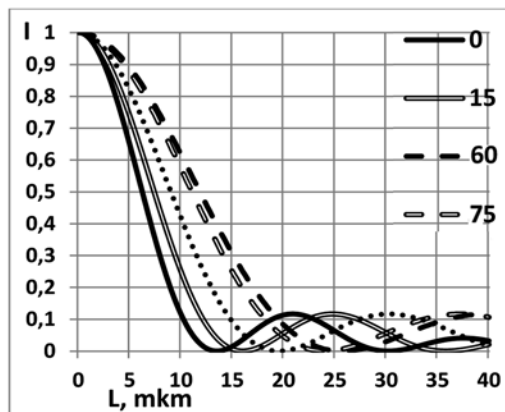
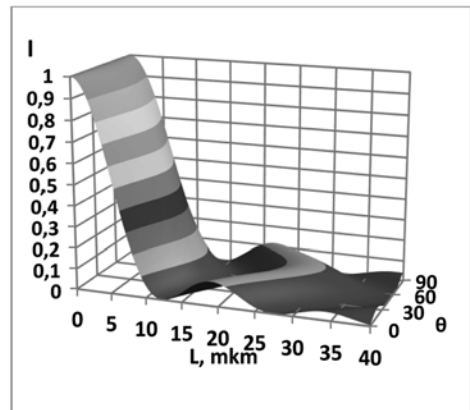
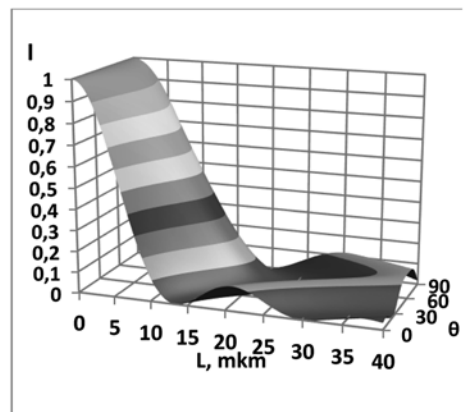

 $\theta_{fixed}=0$

 $\theta_{fixed}=15^\circ$

 $\theta_{fixed}=30^\circ$


Рис. 5. Зависимость интенсивности пропускания I при параллельных поляризаторах от приповерхностных углов θ и θ_{fixed} и толщины L слоя ЖК. Для NSTB, то есть твист-бенд ячейки ЖК с несимметричными приповерхностными углами.

Угол θ_{fixed} изменяется от 0 до 75° сверху вниз. Окончание рисунка на стр. 76.

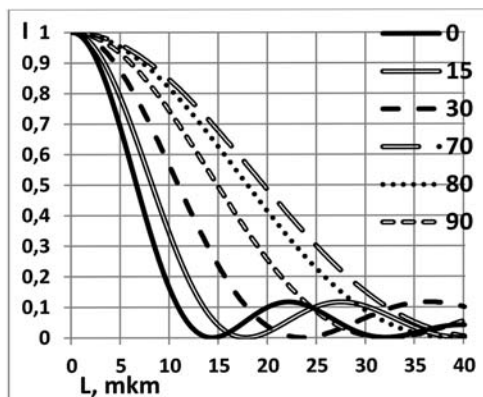
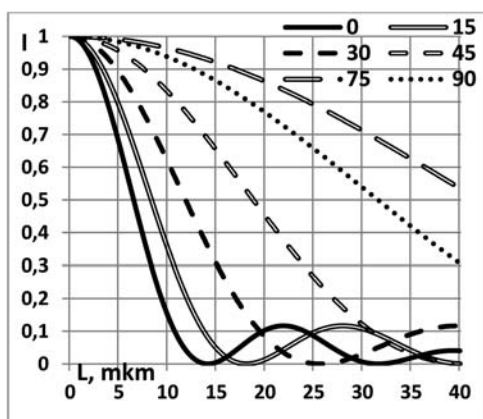
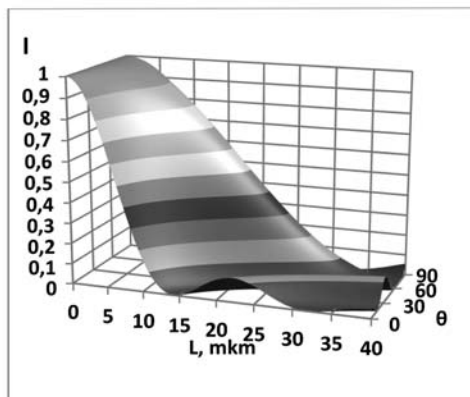
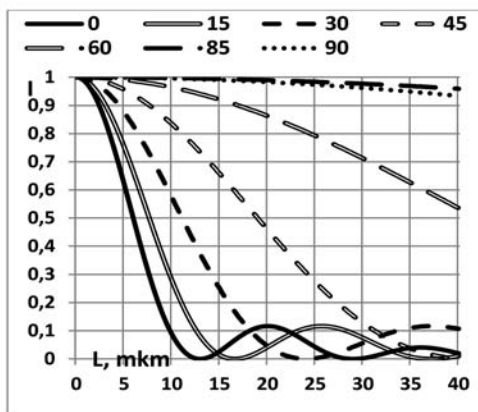
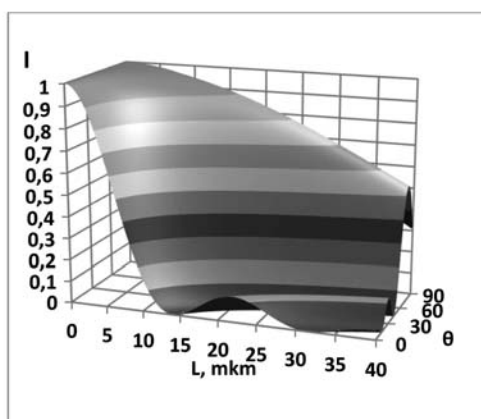
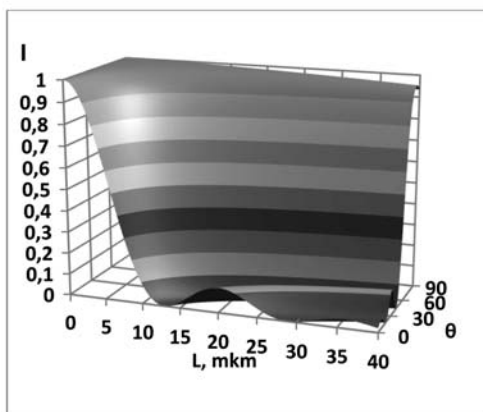

 $\theta_{fixed}=45^\circ$

 $\theta_{fixed}=60^\circ$

 $\theta_{fixed}=75^\circ$


Рис. 5. Окончание рисунка. Начало на стр. 75. Зависимость интенсивности пропускания I при параллельных поляризаторах от приповерхностных углов θ и θ_{fixed} и толщины L слоя ЖК Для NSTB, то есть твист-бенд ячейки ЖК с несимметричными приповерхностными углами. Угол θ_{fixed} изменяется от 0 до 75° сверху вниз.

3. Соломатин А.С., Мащенко В.И., Шашкова Ю.О., Беляев В.В. Особенности формирования микроструктуры и оптические свойства жидкокристаллических композитных твист-ячеек // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2017. № 2. С. 53–63.
4. Belyaev V.V., Chausov D.N., Solomatin A.S. Phase retardation vs. pretilt angle in liquid crystal cells with homogeneous and inhomogeneous LC director configuration // Optics Express. 2013. V. 21. pp. 4244–4249.
5. Belyaev V.V., Solomatin A.S., Kurilov A.D., Chausov D.N., Mazaeva V.G. Optical Properties of Hybrid Aligned Nematic (HAN) Cells with Different Pretilt Angles // Applied Optics, 2014. Vol. 53. Iss. 29. P. H51–H57.
6. Беляев В.В., Соломатин А.С. Оптические свойства гибридных жидкокристаллических ячеек при различных углах падения света // Оптический журнал. 2015. Т. 82. № 1. С. 41–48.
7. Belyaev V.V., Solomatin A.S., Chausov D.N. Phase retardation difference of liquid crystal cells with symmetric and asymmetric boundary conditions // Molecular Crystals & Liquid Crystals. 2014. Vol. 596. pp. 22–29.
8. Беляев В.В., Соломатин А.С., Чаусов Д.Н. Оптические свойства ЖК ячеек с произвольным краевым углом наклона директора // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2013. № 1. С. 32–41.
9. Соломатин А.С. Линзы на основе жидких кристаллов с неоднородным радиальным распределением директора // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2016. № 3. С. 37–45.
10. Коншина Е.А. Оптика жидкокристаллических сред. СПб: СПб НИУ ИТМО. 2012. 99 с.

REFERENCES

1. Zharkova G.M., Sonin A.S. *Zhidkokristallicheskie kompozity* [Liquid crystal composites]. Novosibirsk, Nauka Publ., 1994. 214 p.
2. Belyaev V.V. *Displei 90-kh godov* [Displays of the 90-ies]. Moscow, Khimiya Publ., 2000. 91 p.
3. Solomatin A.S., Mashchenko V.I., Shashkova YU.O., Belyaev V.V. [Features of forming microstructure and optical properties of composite of liquid crystal twist cells] In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika* [Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], 2017, no. 2, pp. 53–63.
4. Belyaev V.V., Chausov D.N., Solomatin A.S. [Phase retardation vs. pretilt angle in liquid crystal cells with homogeneous and inhomogeneous LC director configuration]. In: *Optics Express*, 2013, vol. 21, pp. 4244–4249.
5. Belyaev V.V., Solomatin A.S., Kurilov A.D., Chausov D.N., Mazaeva V.G. [Optical Properties of Hybrid Aligned Nematic (HAN) Cells with Different Pretilt Angles]. In: *Applied Optics*, 2014, vol. 53, iss. 29, P. H51–H57.
6. Belyaev V.V., Solomatin A.S. [Optical properties of hybrid liquid crystal cell at various angles of incidence of light] In: *Opticheskii zhurnal* [Journal of Optical Technology], 2015, vol. 82, iss. 1, pp. 41–48.
7. Belyaev V.V., Solomatin A.S., Chausov D.N. [Phase retardation difference of liquid crystal cells with symmetric and asymmetric boundary conditions]. In: *Molecular Crystals & Liquid Crystals*, 2014, vol. 596, pp. 22–29.
8. Belyaev V.V., Solomatin A.S., Chausov D.N. [The optical properties of the LCD cell with arbitrary boundary angle of the Director] In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika* [Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], 2013, no. 1, pp. 32–41.
9. Solomatin A.S. [Lenses based on liquid crystals with non-uniform radial distribution of the Director] In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-*

matematika [Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], 2016, no. 3, pp. 37–45.

10. Konshina E.A. *Optika zhidkokristallicheskih sred* [Optics of liquid crystal media]. St. Petersburg, SPb NIU ITMO Publ., 2012. 99 p.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Соломатин Алексей Сергеевич – кандидат физико-математических наук, инженер учебно-научной лаборатории теоретической и прикладной нанотехнологии Московского государственного областного университета;
e-mail: Sotrudnica_UNC@mail.ru;

Мащенко Владимир Игоревич – кандидат химических наук, старший научный сотрудник учебно-научной лаборатории теоретической и прикладной нанотехнологии Московского государственного областного университета;
e-mail: mashchenko@genebee.msu.su;

Беляев Виктор Васильевич – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической физики Московского государственного областного университета;
e-mail: vic_belyaev@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Aleksei S. Solomatina – PhD in Physico-mathematical sciences, engineer of the Education & Science Lab for Theoretical and Applied Nanotechnology, Moscow Region State University;
e-mail: Sotrudnica_UNC@mail.ru;

Vladimir I. Mashchenko – PhD in Chemical sciences, senior researcher of the Education & Science Lab for Theoretical and Applied Nanotechnology, Moscow Region State University;
e-mail: mashchenko@genebee.msu.su;

Victor V. Belyaev – Doctor in Engineering sciences, professor, head of the Department of Theoretical Physics, Moscow Region State University;
e-mail: vic_belyaev@mail.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Соломатин А.С., Мащенко В.И., Беляев В.В. Оптические свойства жидкокристаллических композитных несимметричных твист-ячеек // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2017. № 4. С. 68–78.
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-4-68-78

FOR CITATION

Solomatina A.S., Mashchenko V.I., Belyaev V.V. Optical properties of asymmetrical twist structures in a nematic liquid crystal composite. In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*. 2017. no. 4. pp. 68–78.
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-4-68-78

УДК533.6.011

DOI: 10.18384/2310-7251-2017-4-79-87

АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЭФФЕКТА ВЫСОКОСКОРОСТНОГО ПЕРЕХЛЕСТА В УДАРНО СЖАТЫХ БИНАРНЫХ СМЕСЯХ ГАЗОВ¹

Кузнецов М.М., Матвеев С.В., Молостин Е.В., Смотров Л.В.

Московский государственный областной университет

105005, г. Москва, улица Радио, д. 10А, Российская Федерация

Аннотация. Исследованы аналитические свойства эффекта высокоскоростного «перехлеста» в ударно сжатых бинарных смесях газов. Получены достаточные условия реализации этого эффекта для случая переменных аппроксимационных параметров в бимодальных распределениях для смеси газов.

Ключевые слова: кинетический, уравнение, неравновесный, смесь газов, ударная волна.

ANALYTICAL PROPERTIES OF THE HIGHT-SPEED OVERSHOOT EFFECT IN A SHOCK-COMPRESSED BINARY GAS MIXTURE

M. Kuznetsov, S. Matveev, E. Molostvin, L. Smotrova

Moscow Region State University

ul. Radio 10A, 105005 Moscow, Russian Federation

Abstract. Analytical properties of the high-speed overshoot effect in a shock-compressed binary gas mixture are investigated. The sufficient conditions for realization of this effect by variable approximate parameters in bimodal distributions for gas mixtures are obtained.

Key words: kinetic, equation, nonequilibrium, gas mixture, shock wave.

1. Введение

Эффект высокоскоростного перехлёста в ударно сжатых смесях газов был установлен ранее в численных исследованиях структуры ударных волн методом статистического моделирования Монте-Карло. Этот эффект сводится к преобладанию числа N_{neq} высокоскоростных пар внутри фронта волны над числом N_{eq} в поступательно равновесной зоне за фронтом [1].

Аналитически данный эффект был получен в работе авторов [2].

При этом в работе [2] было также дополнительно установлено, что эффект имеет строгий максимум по величине N_{neq}/N_{eq} , зависящий от степени сжатия в сильной ударной волне.

¹ Работа выполнена в рамках гранта РФФИ № 17-07-00-945А / The work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (Grant No. 17-07-00-945A).

В численных исследованиях ударной волны методом Монте-Карло были выявлены также все основные физические факторы, ускоряющие протекание кинетических процессов в ударных волнах:

- эффективное снижение порога химических реакций внутри фронта ударной волны вследствие «пучкового» характера бимодальной функции распределения Тамма-Мотт-Смита;
- снижение скорости равновесных химических реакций в «горячей» зоне за фронтом ударной волны вследствие сильного разбавления «релеевского» газа преобладающим лёгким носителем;
- снижение скорости равновесных высокопороговых химических реакций в «горячей» зоне за фронтом ударной волны вследствие энергетических затрат на диссоциацию (снижение равновесной статистической температуры по сравнению с кинетической внутри фронта ударной волны);
- ускорение скоростей высокопороговых химических реакций вследствие анизотропии поля кинетических температур внутри ударной волны.

Следует отметить также, что относительный эффект высокоскоростного «перехлёста» растёт с увеличением энергетического порога неупругих столкновений пар молекул. Для констант скоростей пороговых химических реакций этот факт неоднократно подчёркивался в работах В.Ю. Великодного (см., например, [3]). В работах этого же автора, по-видимому, впервые был предложен аналитический подход к исследованию пороговых поступательно неравновесных процессов на основе бимодального распределения молекул в ударной волне. В его исследованиях основное внимание уделялось влиянию первого «пучкового» фактора на эффект «перехлёста» скоростей поступательно неравновесных пороговых химических реакций. Влияние анизотропии поля кинетических температур на величину этого эффекта было рассмотрено в работе [4].

Аналитический подход к исследованию эффекта пороговой поступательной неравновесности в ударной волне обладает рядом преимуществ принципиального характера (в смысле окончательности выводов) по сравнению с численным. Правда, это достигается за счёт значительного упрощения математической модели рассматриваемого эффекта. Так, используя эллипсоидальную функцию распределения молекул для компонентов смеси газов [4], можно показать определённую взаимозависимость всех четырёх определяющих физических факторов задачи. При этом, для учёта влияния этих факторов на коэффициенты скоростей поступательно неравновесных пороговых химических реакций можно предложить универсальную формулу [4].

Аналитические свойства бимодального распределения пар молекул позволяют, в свою очередь, установить принципиальный факт наличия максимума для относительной величины эффекта «перехлёста» числа пар молекул внутри фронта ударной волны по сравнению с соответствующим числом пар молекул за ней. Более того, для оценки величины «перехлёста» пар молекул можно предложить универсальное аналитическое выражение, вывод которого не требует детального численного расчёта структуры фронта ударной волны. Для простого газа это было сделано в работе [4]. Для бинарной смеси газов наличие макси-

му для величины соответствующего «перехлёста» было установлено в работе [5]. В настоящей работе приводится формула для её оценки. Показано также, что для известных аналитических аппроксимаций одночастичных функций распределения молекул вопрос о наличии или отсутствии эффекта высокоскоростного «перехлёста» в ударных волнах сводится к чисто алгебраической проблеме о приведении к каноническому виду функции распределения пар молекул.

2. Теоремы о необходимых и достаточных условиях эффекта высокоскоростного «перехлёста» внутри фронта ударной волны

В работе авторов [6], в которой были сформулированы аналогичные теоремы для однокомпонентного (простого) газа, отмечалось, что распространение их на случай бинарной ударно сжатой смеси газов сопряжено с преодолением ряда существенных трудностей.

Главной из них является то, что в смесях газов бимодальное распределение по скоростям молекул не может быть безоговорочно применено для расчёта структуры ударной волны, как это делалось в простом газе. Как правило, область применимости классического бимодального распределения Тамма-Мотт-Смита с постоянными параметрами в виде аппроксимационных макроскопических скоростей и кинетических температур групп молекул в сверхзвуковых и дозвуковых «крыльях» этого распределения ограничена малыми значениями концентраций одного из компонентов смеси [7]. Только в этом случае удаётся сохранить все преимущества бимодальной аппроксимации парциальной функции распределения, как и в случае ударных волн в простом газе, и получить простое аналитическое решение задачи.

В силу этого получение необходимых и достаточных условий высокоскоростной поступательной неравновесности для произвольных, в общем случае, значений концентрации компонентов смеси газов становится значительно более сложным.

В бинарных смесях газов с функциями распределения для лёгкого и тяжёлого компонентов можно составить три функции распределения пар молекул по модулю относительной скорости $G^{(\alpha,\beta)}$. Этими функциями являются: $G^{(l,l)}$ – функция распределения пар внутри лёгкого компонента ($\alpha = \beta = l$; l – light), вторая – $G^{(l,h)}$ – функция пар лёгкий-тяжёлый компонент ($\alpha = l$; $\beta = h$; h – heavy), третья – $G^{(h,h)}$ – функция пар тяжёлый-тяжёлый компонент ($\alpha = \beta = h$). Усреднение данных функций, умноженных на то или иное сечение химической реакции (зависящей также от модуля относительной скорости) даёт константу скорости этой реакции.

Функции пар молекул получаются на основе интегрирования произведения двух одночастичных функций для компонентов бинарной смеси. Для формулировки искомых теорем используется аппроксимация Тамма-Мотт-Смита. Согласно этой аппроксимации, каждая из одночастичных функций представляет из себя линейную комбинацию (суперпозицию) «холодного» / «горячего» максвелловского распределения в ударной волне: на входе («холодного»), а на выходе («горячего»), соответственно.

Аналитические исследования, проведённые к настоящему моменту, показали, что в ударно сжатых смесях газов постоянство по толщине ударной волны макроскопических параметров, играющих роль температуры и скорости в «холодном» и «горячем» крыле Тамм-Мотт-Смитовской аппроксимации, в общем случае невозможно в рамках данной аппроксимации. Исключением является случай малой концентрации «лёгкого» (газ Лоренца) или «тяжёлого» (газ Релея) компонента, когда предположение о постоянстве частичных макроскоростей и концентраций, входящих в «холодные»/«горячие» части Тамм-Мотт-Смитовской аппроксимации функции распределения каждого компонента, остаётся справедливым (при исследовании структуры ударной волны).

Заметим, что в нашем исследовании эффекта высокоскоростного «перехлёста» функции распределения пар молекул интересен как раз случай не только малых значений концентраций тяжёлого компонента по сравнению с лёгким, но также и его ещё более частный вариант, когда m_h намного превосходит m_l . Именно в этих условиях, как показывают численные исследования, эффект «перехлёста» оказывается наиболее сильным.

Возвращаясь к общему случаю произвольных соотношений концентраций компонентов бинарной смеси и их масс, заметим, что в настоящее время в численных аналитических исследованиях структуры ударной волны в бинарных смесях на основе распределения Тамм-Мотт-Смита наиболее часто используются три схемы. Общей для всех трёх схем является переменность весовых множителей в виде концентраций «холодного» и «горячего» крыла Тамм-Мотт-Смитовского распределения для каждого компонента смеси. Переменность же остальных двух аппроксимационных параметров: макроскоростей пучков молекул и их кинетических температур различна в этих трёх схемах.

В наиболее общем случае переменными по толщине волны являются аппроксимационные кинетические температуры и скорости как в «холодном», так и в «горячем» крыльях одночастичных функций распределения.

Однако, иногда из-за большого числа искоемых неизвестных макропараметров (в общем случае, не менее восьми) задачу часто существенно упрощают, сохраняя переменность минимального числа аппроксимационных макропараметров: концентрации, макроскорости и кинетической температуры только в «горячем» или только в «холодном» крыле Тамм-Мотт-Смитовского распределения.

В работе авторов [5] теоремы о необходимых и достаточных условиях эффекта высокоскоростного «перехлёста» относятся к случаю переменности аппроксимационных макропараметров только в «горячем» крыле бимодальных распределений смесей газов, что и составляет главную трудность при их формулировке. Численная же реализация соответствующего эффекта высокоскоростного «перехлёста» рассматривалась для частного случая малых концентраций тяжёлого компонента (релеевская смесь), где этот эффект наиболее заметен.

Заметим, что в рассмотренном ранее случае переменных аппроксимационных макропараметров в «горячем» крыле бимодальных распределений смесей газов [5] локальный эффект «перехлёста» состоит в выполнении неравенства:

$$\left(\tilde{G}^{(\alpha,\beta)} - \tilde{G}_1^{(\alpha,\beta)}\right) > 0, \quad (1)$$

где $\tilde{G}^{(\alpha,\beta)} = \frac{G^{(\alpha,\beta)}}{G_{1s}^{(\alpha,\beta)}}$, $\tilde{G}_1^{(\alpha,\beta)} = \frac{G_1^{(\alpha,\beta)}}{G_{1s}^{(\alpha,\beta)}}$, величины: $G^{(\alpha,\beta)}$, $G_1^{(\alpha,\beta)}$ – соответственно посту-

пательно неравновесная и поступательно равновесная функции распределения пар молекул внутри фронта ударной волны.

Величина $G_{1s}^{(\alpha,\beta)}$ отличается от $G_1^{(\alpha,\beta)}$ постоянством аппроксимационных макропараметров, рассчитываемых по соотношениям Ренкина – Гюгоньо [8]. В точном значении понятия эффекта «перехлёста» неравенство (1) следовало бы записать в виде:

$$\left(\tilde{G}^{(\alpha,\beta)} - 1\right) > 0. \quad (2)$$

Различие формул (1) и (2) как раз и обусловлено переменностью аппроксимационных макропараметров в «горячем» крыле бимодальных распределений смесей газов [5; 9].

Рассмотрим далее, при каких дополнительных условиях выполнение неравенства (1) оказывается достаточным и для выполнения неравенства (2).

Прежде всего заметим, что в простом (однокомпонентном) газе неравенства (1) и (2) просто совпадают [6]. Такое же совпадение имеет место и в так называемом рэлеевском газе, когда концентрация лёгкого компонента n_l значительно превосходит концентрацию тяжёлого компонента n_h , причём:

$$G_1^{(\alpha,\beta)} = G_{1s}^{(\alpha,\beta)}, \quad \tilde{G}_1^{(\alpha,\beta)} = 1. \quad (3)$$

Нетрудно видеть, что при $G_1^{(\alpha,\beta)} > G_{1s}^{(\alpha,\beta)}$ неравенство (2) будет следовать из выполнения неравенства (1).

Действительно, в этом случае справедливо:

$$\left(\tilde{G}^{(\alpha,\beta)} - 1\right) > \left(\tilde{G}^{(\alpha,\beta)} - \tilde{G}_1^{(\alpha,\beta)}\right) > 0,$$

и из выполнения неравенства (1) для локального эффекта «перехлёста» следует выполнение неравенства (2) для глобального эффекта «перехлёста» в его исходном смысле.

Оставшийся случай:

$$G_1^{(\alpha,\beta)} < G_{1s}^{(\alpha,\beta)} \quad (4)$$

требует особого рассмотрения, которое мы проведём далее.

3. Достаточные условия эффекта высокоскоростного «перехлёста» при переменных аппроксимационных макропараметрах в «горячем» крыле бимодальных распределений смесей газов

Формула для эффекта локального «перехлёста» (1), как показано в работах [5; 9], может быть представлена в виде:

$$\begin{aligned} & \tilde{G}^{(\alpha,\beta)} - \tilde{G}_1^{(\alpha,\beta)} = \\ & = \eta^{(\alpha)} (1 - \eta^{(\alpha)}) (\tilde{G}_{01}^{(\alpha,\beta)} + \tilde{G}_{10}^{(\alpha,\beta)} - \tilde{G}_1^{(\alpha,\beta)} - \tilde{G}_0^{(\alpha,\beta)}) \chi \cdot \{-\chi + \chi_b\}, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} \chi &= \chi^{(\alpha)} + \chi^{(\beta)}, \quad \eta = \frac{\chi^{(\alpha)}}{\chi^{(\alpha)} + \chi^{(\beta)}}, \\ \chi_b &= \frac{\eta^{(\alpha)} (\tilde{G}_{01}^{(\alpha,\beta)} - \tilde{G}_1^{(\alpha,\beta)}) + (1 - \eta^{(\alpha)}) (\tilde{G}_{10}^{(\alpha,\beta)} - \tilde{G}_1^{(\alpha,\beta)})}{\eta^{(\alpha)} (1 - \eta^{(\alpha)}) (\tilde{G}_{01}^{(\alpha,\beta)} - \tilde{G}_1^{(\alpha,\beta)}) + (\tilde{G}_{10}^{(\alpha,\beta)} - \tilde{G}_1^{(\alpha,\beta)}) + (\tilde{G}_1^{(\alpha,\beta)} - \tilde{G}_0^{(\alpha,\beta)})}. \end{aligned}$$

Выражение во вторых круглых скобках формулы (5) можно представить через отдельные эффекты «перехлёста» для каждого из слагаемых в этих скобках:

$$\tilde{G}_{01}^{(\alpha,\beta)} - \tilde{G}_1^{(\alpha,\beta)} \equiv g_{01}^{(\alpha,\beta)} > 0, \quad (6)$$

$$\tilde{G}_{10}^{(\alpha,\beta)} - \tilde{G}_1^{(\alpha,\beta)} \equiv g_{10}^{(\alpha,\beta)} > 0, \quad (7)$$

$$\tilde{G}_1^{(\alpha,\beta)} - \tilde{G}_0^{(\alpha,\beta)} \equiv g_1^{(\alpha,\beta)} > 0. \quad (8)$$

Как показано в работах [5; 9], неравенства (6)–(8) являются достаточными для локального эффекта «перехлёста» (1). Покажем далее, что для выполнения глобального эффекта «перехлёста» (2) требуется ещё одно дополнительное условие.

Равенство (5) перепишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \tilde{G}^{(\alpha,\beta)} - 1 = \\ & = \eta^{(\alpha)} (1 - \eta^{(\alpha)}) (\tilde{G}_{01}^{(\alpha,\beta)} + \tilde{G}_{10}^{(\alpha,\beta)} - \tilde{G}_1^{(\alpha,\beta)} - \tilde{G}_0^{(\alpha,\beta)}) \chi \cdot \{-\chi + \chi_b\} - (1 - \tilde{G}_1^{(\alpha,\beta)}). \end{aligned} \quad (9)$$

Нетрудно видеть, что, если левая часть равенства (5) предназначена для исследования возможности локального эффекта «перехлёста» (1), то левая часть равенства (9) предназначена для исследования возможности глобального эффекта «перехлёста» (2).

Для дальнейшего выражение (9) удобно переписать в обозначениях, принятых в курсе высшей алгебры [10]:

$$\tilde{G}^{(\alpha,\beta)} - 1 = y, \quad (10)$$

$$-[\eta^{(\alpha)} (1 - \eta^{(\alpha)}) (\tilde{G}_{01}^{(\alpha,\beta)} + \tilde{G}_{10}^{(\alpha,\beta)} - \tilde{G}_1^{(\alpha,\beta)} - \tilde{G}_0^{(\alpha,\beta)})] = a, \quad (11)$$

$$[\eta^{(\alpha)} (1 - \eta^{(\alpha)}) (\tilde{G}_{01}^{(\alpha,\beta)} + \tilde{G}_{10}^{(\alpha,\beta)} - \tilde{G}_1^{(\alpha,\beta)} - \tilde{G}_0^{(\alpha,\beta)})] \chi_b = b, \quad (12)$$

$$-(1 - \tilde{G}_1^{(\alpha,\beta)}) = c. \quad (13)$$

Формулу (9) с помощью обозначений (10)–(13) можно записать в следующих эквивалентных представлениях:

$$y = a\chi^2 + b\chi + c = a(\chi + b/2a)^2 - d/4a = a(\chi - \chi_1)(\chi - \chi_2), \quad (14)$$

здесь $d = b^2 - 4ac$ – дискриминант квадратного уравнения, χ_1, χ_2 – корни этого уравнения:

$$\chi_{1,2} = (-b \pm \sqrt{d})(2a)^{-1}.$$

Известно, что при выполнении неравенств $d > 0$ и $a < 0$, квадратичная по χ функция (14) обязательно является положительной величиной для значения аргумента χ , заключенного в диапазоне между корнями χ_1 и χ_2 :

$$\chi_1 < \chi < \chi_2. \quad (15)$$

Выполнение неравенства $a < 0$ гарантировано выполнением достаточных условий глобального эффекта «перехлёста» (6)–(8), полученных ранее в работах [5; 9].

Искомое же дополнительное достаточное условие глобального эффекта «перехлёста» (2) заключается в неотрицательности величины дискриминанта $d > 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Генич А.П., Куликов С.В., Манелис Г.Б., Черешнев С.Л. Распределение молекулярных скоростей во фронте ударной волны в газовых смесях // Известия АН СССР. Механика жидкостей и газа. 1990. № 2. С. 144–150.
2. Кузнецов М.М., Кулешова Ю.Д., Смотров Л.В. Эффект высокоскоростной поступательной неравновесности в бимодальной ударной волне // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2012. № 2. С. 108–115.
3. Великодный В.Ю. Влияние средних парциальных параметров на кинетику химических реакций // Молекулярная газодинамика и механика неоднородных сред: сборник научных трудов. М.: Наука, 1990. С. 41–50.
4. Кузнецов М.М., Смотров Л.В. Аналитические свойства эффекта высокоскоростной поступательной неравновесности // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2013. № 3. С. 66–73.
5. Кузнецов М.М., Кулешова Ю.Д., Смотров Л.В., Решетникова Ю.Г. О максимуме эффекта высокоскоростной поступательной неравновесности в ударной волне // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2016. № 3. С. 84–92.
6. Кузнецов М.М., Матвеев С.В., Молостин Е.В., Решетникова Ю.Г., Смотров Л.В. Высокоскоростная поступательная неравновесность смеси газов в аналитической модели ударной волны [Электронный ресурс] // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2016. Т. 17. вып. 1. URL: <http://chemphys.edu.ru/issues/2016-17-1/articles/613/>
7. Oberai M.M. A Mott-Smith distribution to describe the structure of a plane shock wave in binary mixture // Physics of Fluids, 1966. Vol. 9. pp. 1634–1637.
8. Агафонов В.П., Вертушкин В.К., Гладков А.А., Полянский О.Ю. Неравновесные физико-химические процессы в газодинамике. М.: Машиностроение, 1972. 344 с.
9. Кузнецов М.М., Кулешова Ю.Д., Решетникова Ю.Г., Смотров Л.В. Условия возник-

- новения и величина эффекта высокоскоростного перехлёста в ударно-сжатой смеси газов // Труды Московского авиационного института. 2017. № 95.
10. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. СПб.: Лань, 2013. 432 с.

REFERENCES

1. Genich A.P., Kulikov S.V., Manelis G.B., Chereshev S.L. [The distribution of molecular speeds in the shock wave front in gas mixtures]. In: *Izvestiya AN SSSR. Mekhanika zhidkosti i gaza* [Fluid Dynamics], 1990, no. 2, pp. 144–150.
2. Kuznetsov M.M., Kuleshova Y.D., Smotrova L.V. [Effect of high-speed translational nonequilibrium in bimodal shock wave]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika* [Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], 2012, no. 2, pp. 108–115.
3. Velikodnyi V.YU. [Influence of the average partial parameters on the kinetics of chemical reactions]. In: *Molekulyarnaya gazodinamika i mekhanika neodnorodnykh sred: sbornik nauchnykh trudov* [Molecular gas dynamics and the mechanics of inhomogeneous media: a collection of scientific papers]. Moscow, Nauka Publ., 1990. pp. 41–50
4. Kuznetsov M.M., Smotrova L.V. [Analytical properties of high-speed effect of translational nonequilibrium] In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika* [Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], 2013, no. 3, pp. 66–73.
5. Kuznetsov M.M., Kuleshova YU.D., Smotrova L.V., Reshetnikova YU.G. [About the maximum effect of high-speed translational nonequilibrium in the shock wave] In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika* [Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], 2016, no. 3, pp. 84–92.
6. Kuznetsov M.M., Matveev S.V., Molostvin E.V., Reshetnikova YU.G., Smotrova L.V. [High-speed translational nonequilibrium of gas mixture in the analytical model of the shock wave]. In: *Fiziko-khimicheskaya kinetika v gazovoi dinamike* [Physico-chemical kinetics in gas dynamics], 2016, vol. 17, iss. 1. Available at: <http://chemphys.edu.ru/issues/2016-17-1/articles/613/>
7. Oberai M.M. [A Mott-Smith distribution to describe the structure of a plane shock wave in binary mixture]. In: *Physics of Fluids*, 1966. Vol. 9. pp. 1634–1637.
8. Agafonov V.P., Vertushkin V.K., Gladkov A.A., Polyanskii O.YU. *Neravnovesnye fiziko-khimicheskie protsessy v gazodinamike* [Nonequilibrium physico-chemical processes in gas dynamics]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1972. 344 p.
9. Kuznetsov M.M., Kuleshova YU.D., Reshetnikova YU.G., Smotrova L.V. [The conditions of occurrence and the magnitude of the effect of high-speed overlap of shock-compressed mixture of gases] In: *Trudy Moskovskogo aviatsionnogo instituta* [Trudy MAI], 2017, no. 95.
10. Kurosh A.G. *Kurs vysshei algebry* [Course of higher algebra]. St. Petersburg, Lan' Publ., 2013. 432 p.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Кузнецов Михаил Михайлович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической физики Московского государственного областного университета;
e-mail: kuznets-omn@yandex.ru;

Матвеев Сергей Владимирович – аспирант, Московский государственный областной университет;
e-mail: seriyyolkodav@mail.ru;

Молоствин Евгений Владимирович – аспирант, Московский государственный областной университет;

e-mail: evgenij-molostvin@yandex.ru;

Смотрова Лилия Владимировна – аспирант, Московский государственный областной университет;

e-mail: lilysmotrova@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTORS

Mikhail M. Kuznetsov – Doctor in Physico-mathematical sciences, professor, Moscow Region State University;

e-mail: kuznets-omn@yandex.ru;

Sergei V. Matveev – postgraduate student, Moscow Region State University;

e-mail: seriyyolkodav@mail.ru;

Evgenii V. Molostvin – postgraduate student, Moscow Region State University;

e-mail: evgenij-molostvin@yandex.ru;

Liliya V. Smotrova – postgraduate student, Moscow Region State University;

e-mail: lilysmotrova@mail.ru.

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Кузнецов М.М., Матвеев С.В., Молоствин Е.В., Смотрова Л.В. Аналитические свойства эффекта высокоскоростного перехлёста в ударно сжатых бинарных смесях газов // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2017. № 4. С. 79–87.

DOI: 10.18384/2310-7251-2017-4-79-87

FOR CITATION

Kuznetsov M.M., Matveev S.V., Molostvin E.V., Smotrova L.V. Analytical properties of the high-speed overshoot effect in a shock-compressed binary gas mixture. In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*. 2017. no. 4. pp. 79–87.

DOI: 10.18384/2310-7251-2017-4-79-87

УДК 535-47

DOI: 10.18384/2310-7251-2017-4-88-94

CIRCULAR DICHROISM METER BASED ON POLARIZATION DIFFRACTIVE WAVEPLATE¹

Hakobyan Nune¹, Margaryan Hakob¹, Chilingaryan Hakob¹, Tabiryan Nelson², Belyaev Victor³, Solomatin Aleksey³

¹ Yerevan State University

1 Alex Manoogian, Yerevan 0025, Republic of Armenia

² Beam Engineering for Advanced Measurements Co. (BEAM Co.)

Winter Park, Florida 32789, USA

³ Moscow Region State University

10A ul. Radio, Moscow 105005, Russian Federation

Abstract. Circular dichroism (CD) is an important parameter, characterizing optically active medium. The devices for CD measurements presented on today market measures CD in wide spectral range. The high-precision standard optics, electronics and optomechanics are used in these devices, and data processing requires the application of a complex mathematical apparatus. These devices are quite expensive, have large dimensions, require specially trained staff, and measurement duration is tens of minutes. In this work we present a device for CD measurement on only one wavelength, the key element of which is polarization diffractive waveplate, the optical element of new generation. Device has a number of advantages: easy to use, compact, working in real time, and low cost. These advantages make it ideal for educational programs.

Key words: Optical activity, circular dichroism, spectropolarimeter, real time measurements.

ПРИБОР ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ КРУГОВОГО ДИХРОИЗМА НА ОСНОВЕ ПОЛЯРИЗАЦИОННОЙ ДИФРАКЦИОННОЙ ВОЛНОВОЙ ПЛАСТИНЫ

Акопян Н.Г.¹, Маргарян А.Л.¹, Чилингарян А.С.¹, Табирян Н.В.², Беляев В.В.³, Соломатин А.С.³

¹ Ереванский государственный университет

ул. А. Манукяна, 1, Ереван 0025, Армения

² Компания БИМКО

Винтер Парк, Орландо, Флорида, 32789, США

³ Московский государственный областной университет

105005, г. Москва, улица Радио, 10А, Российская Федерация

¹ This work was supported by State Committee Science MES RA, in frame of the research project № SCS 15T-1C157 / Исследование выполнено при финансовой поддержке Государственного комитета по науке МОН РА в рамках научного проекта № SCS 15T-1C157.

Аннотация. Круговой дихроизм (КД) является важным параметром, характеризующим оптически активную среду. Измерение кругового дихроизма широко используется в физике, химии, биологии, пищевой и фармацевтической промышленности. Соответственно, данная тема включена в учебные программы высших учебных заведений.

Представленные сегодня на рынке приборы измеряют КД в широком спектральном диапазоне и предусмотрены для исследований (спектрополяриметры). В них используется высокоточная стандартная оптика, электроника и оптомеханика, а обработка данных требует применения сложного математического аппарата. Эти приборы довольно дорогие, имеют большие размеры; требуется специально обученный персонал для проведения измерений, продолжительность которых составляет десятки минут.

Создание в последние годы оптических элементов нового, четвёртого поколения, сделало возможным разработку спектрополяриметров на принципиально новой основе. Однако достаточная точность измерений в этих устройствах обеспечивается либо при больших значениях КД (сотни миллиградусов), либо в узком спектральном диапазоне.

В данной работе представлен прибор для измерения КД только на одной длине волны, ключевым элементом которого является поляризационная дифракционная волновая пластина. Прибор имеет ряд преимуществ: лёгок в использовании, компактен, функционирует в реальном времени и имеет невысокую стоимость. Эти преимущества делают прибор идеальным для применения в учебных программах.

Ключевые слова: оптическая активность, круговой дихроизм, спектрополяриметр, измерения в реальном времени.

Introduction

Optical activity and circular dichroism

Circular dichroism (CD) is an important parameter, characterizing optically active medium. The vast majority of biological substances are optically active, i.e. they rotate the plane of polarized light. Optical activity is conditioned by asymmetric structure of molecules – left and right rotations, which are optical isomers. Their physiological and biochemical effects on human body are often quite different. For example, organism does not accept proteins artificially synthesized from D-amino acids: bacteria mix only one of the isomers, absolutely not interacting with each other.

The subject of optical activity impacts on various areas of science, ranging from classical optics to elementary particle physics, cosmology and origin of life. The main physical parameters which characterized the optically active substances are optical rotation dispersion (ORD) and CD. ORD spectroscopy is especially useful for assigning the conformation of sugars. CD spectroscopy is highly important means for study of biological molecules, their structure and interactions with other molecules. CD measurement is widely used in physics, chemistry, biology, food and pharmaceutical industries; therefore, this topic is included in university curriculum.

Devices for CD measuring

CD measurement in wide spectral range is realized by spectropolarimeters [3; 5; 7; 10–13]. The basic functional element of modern spectropolarimeters [www.jasco-inc.com, www.photophysics.com] is photoelastic modulator, by means of which the

left- and right-circularly polarized components of light passed through the sample, are separated in time. Such method is accompanied by high losses of light intensity. That is why the powerful light sources (hundreds of Watts) and high sensitive detectors are used in these devices. In addition, to ensure high accuracy of measurement and high values of signal/noise ratio the complex mathematical approximations and long time data accumulation and processing are required. These devices are high-precision and quite expensive, have large dimensions and require specially trained staff.

Only after synthesis of new liquid crystal (LC) polymers [1] a few years ago, and creation of optical elements of a new generation [8; 9] on their base, it has become possible to review the basis of optical instrument engineering. One of such elements is a polarization diffractive waveplate (PDW), which allows the registration of circular dichroism in real time. The important feature of PDW is the fact that at the its output the spatially separated left- and right-circularly polarized components are formed, and the diffraction efficiency can be up to 100%. The usage of PDW allows developing small-size, operating in real time, spectropolarimeters with simplified registration part, functioning in real time [2; 4; 6]. However, as our laboratory testing shows the sufficient measurement accuracy in these devices is provided either for large values of CD (hundreds of millidegrees) or in a narrow spectral range.

In this work we present a device for CD measurement on only one wavelength, the key element of which is polarization diffractive waveplate [8].

Results and Discussion

The schematic of developed device is shown in fig. 1. The monochromatic light beam passing through a cuvette, filled with the sample with CD is being spatially separated by the PDW into the left- and right-hand circularly polarized components. The intensities of those components are being recorded by the two single-active area photodetectors. The photocurrents from photodetectors are recorded by a differential logarithmic impedance amplifier, and through the controller are sent to the computer, where further processing of the recorded data takes place using specially designed software.

A quartz cuvette is used for a sample placement. If the front and back walls of the cuvette are not perfectly parallel, the additional systematic error of CD measurement

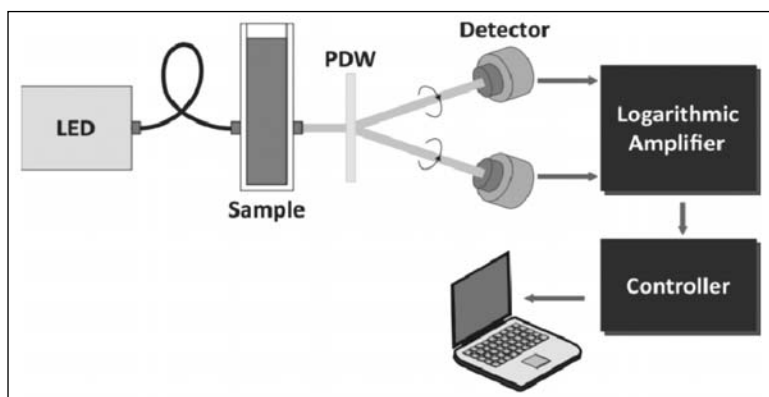


Fig. 1. Schematic of developed CD meter

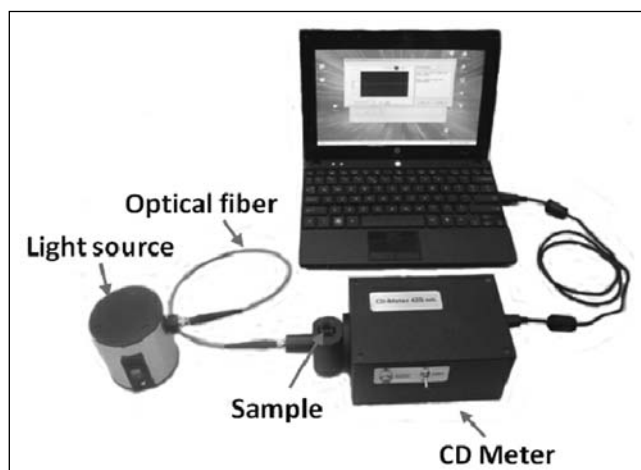


Fig. 2. External view of developed CD meter

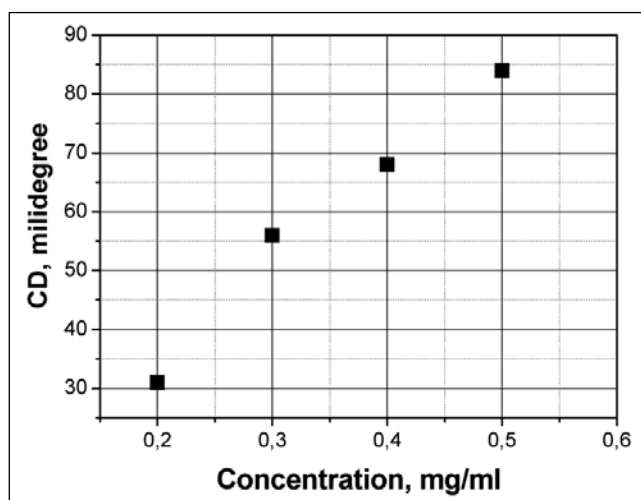


Fig. 3. CD of aqueous solution of vitamin B12 of different concentrations, measured on developed CD meter

will be added. To avoid this error the intensities of the left- and right-circularly polarized components of the beam passed through an empty cuvette and spatially separated by PDW are measured in advance. This systematic error is being accounted in software during data collection and processing.

A narrow spectral bandwidth LED is used as the light source. Alternatively, a monochromatic light beam may be formed from a wide spectral bandwidth light source, for example a xenon lamp, using a monochromator or from white light source coupled to narrow spectral bandwidth filters. A laser operating at the required light wavelengths may be used as a light source also.

The external view of device is presented on the fig. 2. To test the developed CD meter the CD values of aqueous solution of vitamin B12 of different concentrations have been measured at 420 nm wavelength (fig. 3).

The laboratory testing of developed device was carried out by the authors, the results of which are given in fig. 3. The aqueous solution of Vitamin B-12 with 0.4 mg/ml concentration was chosen as a sample.

As it seen from the fig. 3, the CD value proportionally growths with the increasing of vitamin B12 concentration in aqueous solution. There is a good coincidence of measurement results with the literature data. For example, CD of aqueous solution of vitamin B12 with 0.2 mg/ml concentration at 420 nm wavelength is about 20 mdeg (www.photophysics.com).

Conclusion

Advantages and field of application

Methods based on optical activity measurement, are widely used in physical, chemical, biological researches and in industry. Purely technical difficulties in CD measuring have been overcome only recently, so CD method can be considered as new. Devices for CD measuring, presented in today market, are high-precision, expensive and are intended only for scientific research. A complex mathematical apparatus for data processing and high-precision optics are used in them. CD measurement is realized in wide spectral range and lasts tens of minutes.

Specificity of proposed technology is the usage of new generation optical element – polarization diffraction waveplate, realized on the base of novel materials (liquid crystal polymers) by using innovative optical recording methods. PDW allows simultaneously spatially separating of linearly polarized beam to left and right circularly polarized components. This makes possible to simplify the registration part of the device, making it easy to use, compact, inexpensive, operating in real time. These advantages make the device very attractive for the universities for teaching and laboratory works on biology, biophysics and biochemistry, optics, pharmacology and organic chemistry. Such a device may be widely used in pharmaceuticals also for intermediate control of production.

REFERENCES

1. Chigriniv V., Kozenkov V., Kwok H.-S. *Photoalignment of Liquid Crystalline Materials: Physics and Applications*. John Wiley & Sons. 2008. 250 p.
2. Cipparone G., Pagliusi P., Provenzano C., Mazzulla A. Method and device for measuring circular dichroism in real time. PCT/IT2008/0003334, Patent No. WO 2008/142723 A2, 2008 Available at: <https://www.google.com/patents/WO2008142723A2?cl=en>
3. Fasman G.D. *Circular Dichroism and Conformational Analysis of Biomolecules*. New York, Plenum Press, 1996. 695 p. ISBN 978-1-4757-2508-7
4. Hakobyan N., Margaryan H., Hovhannisyan D., Sargsyan T., Gasparyan P., Aroutiounian V., Chilingaryan H., Pokhsranyan D., Tabiryan N. [Technique for Spectropolarimetry Based on Liquid Crystal Polarization Diffraction Grating]. In: *Molecular Crystals & Liquid Crystals*, 2015, vol. 615, pp. 63–69.
5. Leyden D.E. Continuous concentration monitoring by circular dichroism. Patent US 5036204 A, 1991. Available at: <https://www.google.com/patents/US5036204>
6. Margaryan H., Hakobyan N., Hovhannisyan D., Aroutiounian V., Tabirian N., Rohatgi U., Jo Jae, Goushcha O., Sargsyan T., Gasparyan P. Device and method for measuring circular

- dichroism. PCT/AM/2014/000003, Patent No. WO 2016/000001 A1, 2016. Available at: <https://www.google.com/patents/WO2016000001A1?cl=en>
7. Nafie L.A. Dual circular polarization modulation spectrometer. Patent US 6480277B1, 2001. Available at: <https://patents.google.com/patent/US6480277B1/en>
 8. Nersisyan S., Tabiryan N., Hoke L., Steeves D., Kimball B. [Polarization insensitive imaging through polarization gratings]. In: *Optics Express*, 2009, vol. 17, no. 3, pp. 1817–1830.
 9. Nersisyan S., Tabiryan N., Steeves D., Kimball B. [Fabrication of liquid crystal polymer axial waveplates for UV–IR wavelengths]. In: *Optics Express*, 2009, vol. 17, no. 14, pp. 11926–11934.
 10. Saeva F.D. Method for altering elliptically polarized light. Patent US 3957346, 1976. Available at: <https://www.google.com.pg/patents/US3957346>
 11. Sproul D.P. Differential circular dichroism measuring apparatus. Patent US 3602597, 1971. Available at: <https://www.google.ch/patents/US3602597>
 12. Takahashi H., Kudora R., Harada T. Method and device for measuring circular dichroism spectra. Patent US 8542357B2, 2013. Available at: <https://www.google.com/patents/US8542357>
 13. Walsh P., Hayes A.T., Harrison D.A. Methods and apparatus for vacuum ultraviolet (VUV) or shorter wavelength circular dichroism spectroscopy. Patent US 8773662B2, 2014. Available at: <https://www.google.com/patents/US8773662>

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Nune H. Hakobyan – junior researcher at the Department of Semiconductor Physics and Microelectronics Center of Semiconductor Devices and Nanotechnologies, Yerevan State University;
e-mail: nune.hakobyan@ysu.am;

Hakob L. Margaryan – PhD in Physico-mathematical sciences, senior researcher at the Department of Semiconductor Physics and Microelectronics, Center of Semiconductor Devices and Nanotechnologies, Yerevan State University;
e-mail: marhakob@ysu.am;

Hakob S. Chilingaryan – junior researcher, at the Department of Semiconductor Physics and Microelectronics, Center of Semiconductor Devices and Nanotechnologies, Yerevan State University;
e-mail: nune.hakobyan@ysu.am;

Nelson V. Tabirian – Doctor in Physico-mathematical sciences, President of Beam Engineering for Advanced Measurements Co. (BEAM Co.);
e-mail: nelson@beaco.com;

Victor V. Belyaev – Doctor in Engineering sciences, professor, head of the Department of Theoretical Physics, Moscow Region State University;
e-mail: vic_belyaev@mail.ru;

Aleksei S. Solomatin – PhD in Physico-mathematical sciences, engineer of educational-scientific laboratory of theoretical and applied nanotechnology, Moscow State Regional University;
e-mail: Sotrudnica_UNC@mail.ru

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Акопян Нуне Грантовна – младший научный сотрудник кафедры физики полупроводников и микроэлектроники Центра полупроводниковых приборов и нанотехнологий Ереванского государственного университета;
e-mail: nune.hakobyan@ysu.am;

Маргарян Акон Леонович – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник кафедры физики полупроводников и микроэлектроники Центра полупроводниковых приборов и нанотехнологий Ереванского государственного университета;
e-mail: marhakob@ysu.am;

Чилингарян Акон Сергеевич – младший научный сотрудник кафедры физики полупроводников и микроэлектроники Центра полупроводниковых приборов и нанотехнологий Ереванского государственного университета;
e-mail: nune.hakobyan@ysu.am;

Табириян Нельсон Владимирович – доктор физико-математических наук, президент компании BEAM Co.;
e-mail: nelson@beamco.com;

Беляев Виктор Васильевич – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической физики Московского государственного областного университета;
e-mail: vic_belyaev@mail.ru;

Соломатин Алексей Сергеевич – кандидат физико-математических наук, инженер учебно-научной лаборатории теоретической и прикладной нанотехнологии Московского государственного областного университета;
e-mail: Sotrudnica_UNC@mail.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Акопян Н.Г., Маргарян А.Л., Чилингарян А.С., Табириян Н.В., Беляев В.В., Соломатин А.С. Circular dichroism meter based on polarization diffractive waveplate // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2017. № 4. С. 88–94.

DOI: 10.18384/2310-7251-2017-4-88-94

FOR CITATION

Hakobyan N.H., Margaryan H.L., Chilingaryan H.S., Tabiryan N.V., Belyaev V.V., Solomatin A.S. Circular dichroism meter based on polarization diffractive waveplate. In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*. 2017. no. 4. pp. 88–94.

DOI: 10.18384/2310-7251-2017-4-88-94

УДК 541.64:541.142.4; 621.317.374

DOI: 10.18384/2310-7251-2017-4-95-102

ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ РАСТВОРОВ КАРБОКСИЛАТОВ МЕДИ В ТОЛУОЛЕ¹

Ельникова Л.В.¹, Пономаренко А.Т.², Шевченко В.Г.²

¹ *Институт теоретической и экспериментальной физики имени А.И. Алиханова
Национального исследовательского центра «Курчатовский институт»
117218, г. Москва, ул. Большая Черемушkinsкая, д. 25, Российская Федерация*

² *Институт синтетических полимерных материалов имени Н.С. Ениколопова
Российской академии наук
117393, г. Москва, ул. Профсоюзная д. 70, Российская Федерация*

Аннотация. В работе представлены результаты диэлектрических измерений растворов карбоксилатов меди (валерата, изовалерата, ундецилата, миристата, стеарата, бенегата) в неполярном растворителе толуоле. Впервые измерены значения электрической емкости C_p для различных концентраций карбоксилатов меди в интервале температур растворения.

Ключевые слова: карбоксилаты меди, растворы, диэлектрические измерения.

DIELECTRIC CHARACTERISTICS OF TOLUENE SOLUTIONS OF COOPER CARBOXYLATES

L. Elnikova¹, A. Ponomarenko², V. Shevchenko²

¹ *A.I. Alikhanov Institute for Theoretical and Experimental Physics, National Research Centre Kurchatov Institute
ul. Bolshaya Cheremushkinskaya 25, 117218 Moscow, Russian Federation*

² *N.S. Enikolopov Institute of Synthetic Polymer Materials, Russian Academy of Sciences
ul. Profsoyuznaya 70, 117393 Moscow, Russian Federation*

Abstract. We present the results of dielectric measurements for toluene solutions of cooper (II) carboxylates (valerate, isovalerate, undecylate, myristate, stearate, benegate). We have measured for the first time the electric capacity C_p at various concentrations of these carboxylates in toluene in the solution temperature range.

Key words: cooper carboxylates, solutions, dielectric measurements.

¹ Авторы выражают благодарность О.Б. Акоповой и В.В. Терентьеву за предоставление образцов карбоксилатов меди и детальные консультации в проведении эксперимента, а также Ф.Г. Ничипорову за помощь в подготовке химического оборудования и материалов / The authors are grateful to O.B. Akopova and V.V. Terentyev for providing samples of copper carboxylates and for detailed consultations in the experiment, as well as to F.G. Nichiporova for assistance in the preparation of chemical equipment and materials.

Целью настоящего исследования является измерение электрических характеристик некоторых карбоксилатов меди в растворе неполярного растворителя толуола. Насколько нам известно, результаты диэлектрических измерений этих соединений в литературе не зафиксированы.

Карбоксилаты меди (II) валерат, изовалерат, ундецилат, мирилат, стеарат, бенегат были синтезированы в Ивановском государственном университете, НИИ наноматериалов, и Ивановской государственной сельскохозяйственной академии по методикам, изложенным в [1]. В литературе [1; 3] обсуждаются их применения в качестве мезогенных присадок к смазочным материалам (например, литолу-24 и солидолу), где они образуют дискотическую жидкокристаллическую фазу. Карбоксилаты меди (KM) также могут использоваться как красители и фотосенсибилизаторы в медицинских приложениях, как компоненты материалов в органических полупроводниковых устройствах и пр.

Структурные формулы KM изображены на рис. 1. [1]

На рис. 1 $n = 1 - 21$ есть число гомолога. В настоящей работе исследовались KM при $n = 4$ – валерат и изовалерат меди $\text{Cu}(\text{C}_4\text{H}_9\text{COO})_2$, $n = 13$ – мирилат меди $\text{Cu}(\text{C}_{13}\text{H}_{27}\text{COO})_2$, $n = 10$ – ундецилат меди $\text{Cu}(\text{C}_{10}\text{H}_{21}\text{COO})_2$, $n = 17$ – стеарат меди $\text{Cu}(\text{C}_{17}\text{H}_{35}\text{COO})_2$ и $n = 21$ – бенегат меди $\text{Cu}(\text{C}_{21}\text{H}_{43}\text{COO})_2$.

В литературе имеются данные по инфракрасной Фурье-спектроскопии [2; 6] для некоторых гомологов в интервале частот $400-4000 \text{ см}^{-1}$, которые отражают роль различных типов колебаний карбоксильных групп в формировании мезоморфизма KM и стимулируют поиск корреляций с другими оптическими и электрофизическими свойствами [2].

Однако многие свойства KM изучены не полностью.

Мы исследовали растворы порошков KM в неполярном растворителе толуоле класса ЧДА (его диэлектрическая проницаемость $\epsilon' = 4,5$) при различных концентрациях. В таблице 1 приведены концентрации исследованных образцов (молярные растворы с кратностью разбавления $M = 0,01; 0,005; 0,00286; 0,002; 0,0013$ и $0,001$ и молярной массой MM для каждого KM).

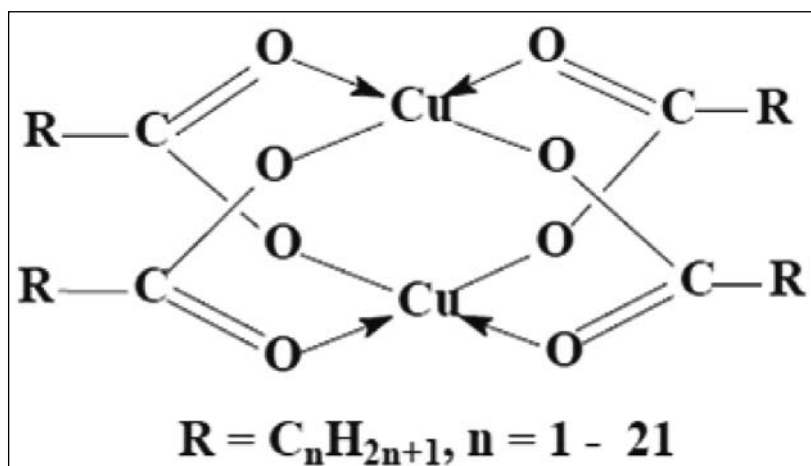


Рис. 1. Структурная формула карбоксилатов меди [1]

Таблица 1.
Массы КМ в молярных растворах кратности М в 10 мл толуола

	Валерат, Изовалерат	Ундецилат	Мирилат	Стеарат	Бенегат
ММ	265,7582	434,0798	518,2406	630,48	742,6694
0,01	0,0268 г	0,0436 г	0,052 г	0,0636 г	0,0748 г
0,005	0,0136 г	0,0218 г	0,026 г	0,0316 г	0,0376 г
0,00286	0,0076 г	0,0124 г	0,0149 г	0,0182 г	0,0213 г
0,002	0,0052 г	0,0088 г	0,0104 г	0,0127 г	0,0150 г
0,0014	0,0036 г	0,0048 г	0,0069 г	0,00848 г	0,0010 г
0,001	0,0027 г	0,0044 г	0,0052 г	0,00636 г	0,0075 г

Для диэлектрических измерений применялась установка РМ 6303 Fluke, измеритель RCL (сопротивления-ёмкости-индуктивности), позволяющий работать в частотном диапазоне 50 Гц–1 МГц с точностью измерений электрических величин 0,1% [5]. Установка снабжена программным обеспечением (ПО), адаптированным к среде Windows на подключаемом к ней персональном компьютере. ПО позволяет задавать и регулировать параметры измерений и фиксировать результаты в текстовые файлы для последующей обработки.

Входной сигнал доставляется к измерителю РМ 6303 через кабели, подключаемые к измерительной ячейке с электродами, погруженными в исследуемый раствор КМ. Температурные режимы во время измерений регулируются с помощью масляного термостата MLW4 и контролируются термометром.

Принципы диэлектрических измерений описаны в книге Эме [4]. По схеме идеального конденсатора из измерений можно получить значения диэлектрической проницаемости $\epsilon' = C/C_0$ (безразмерная величина), где C – электрическая емкость вещества (Ф), а C_0 – вакуума, и угла потерь $\tan \delta = 1/\omega CR$, где ω (Гц) – частота

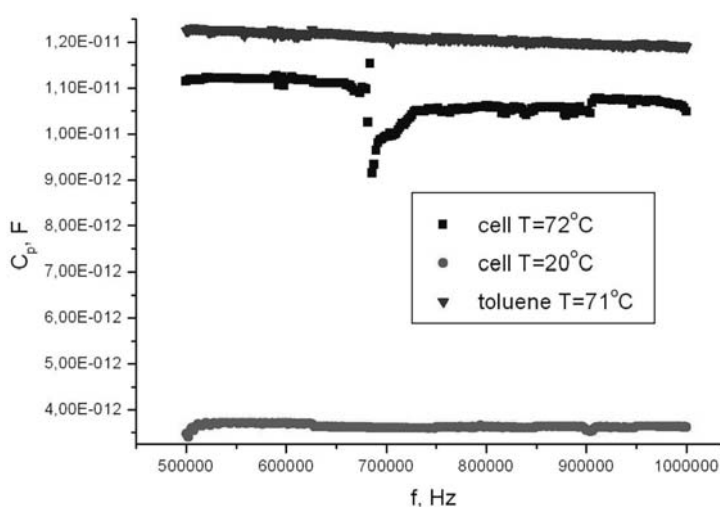


Рис. 2. Частотная зависимость ёмкости ячейки и толуола

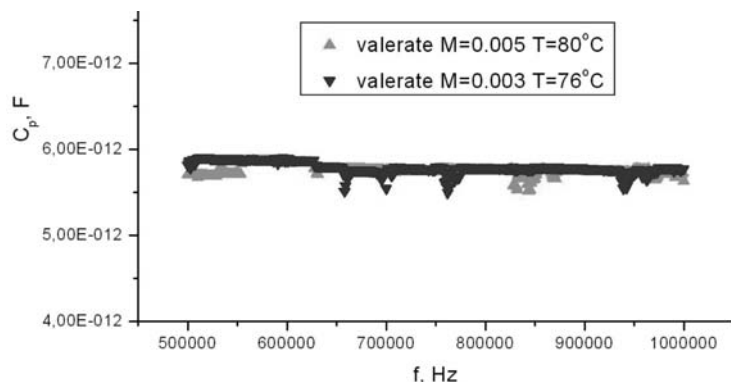


Рис. 3. Частотная зависимость ёмкости раствора валерата меди в толуоле

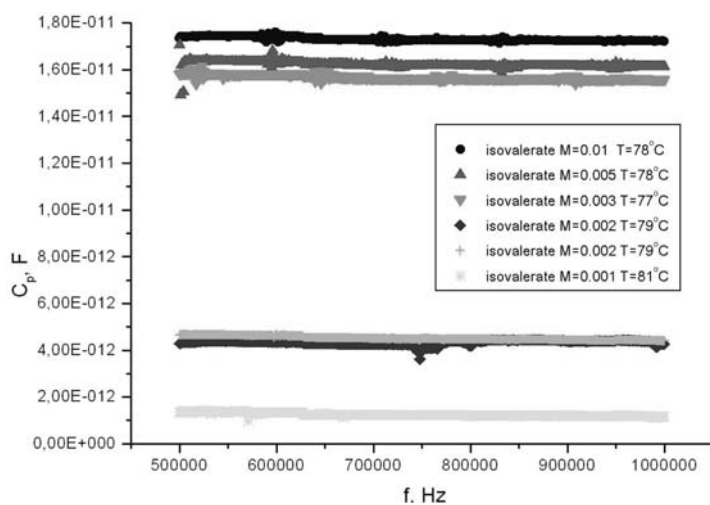


Рис. 4. Частотная зависимость ёмкости раствора изовалерата меди в толуоле

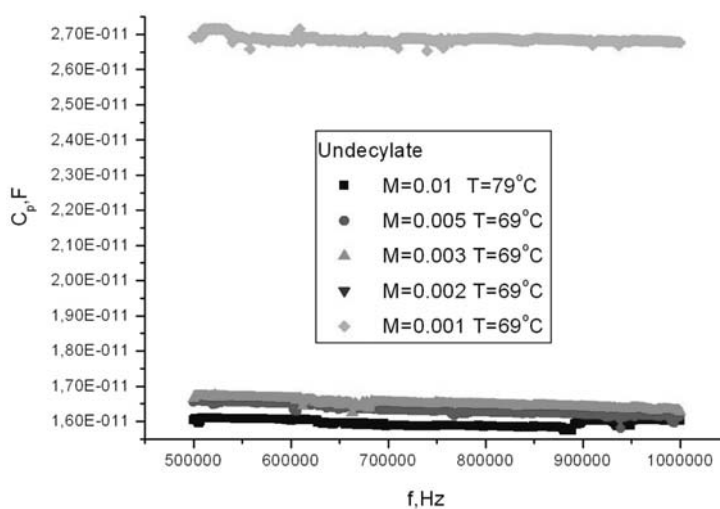


Рис. 5. Частотная зависимость ёмкости раствора ундецилата меди в толуоле

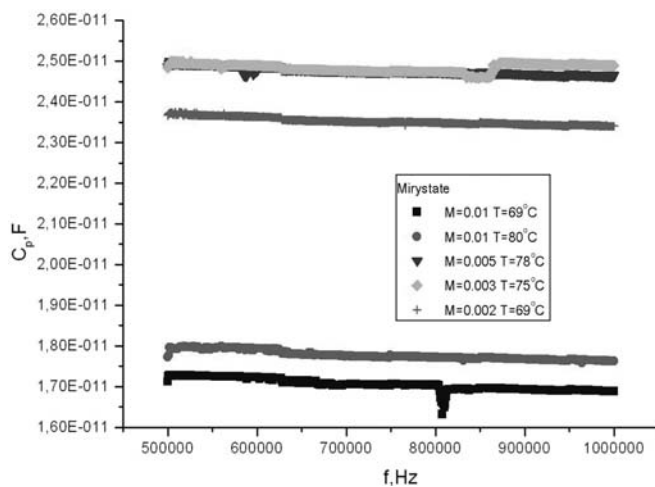


Рис. 6. Частотная зависимость ёмкости раствора миристата меди в толуоле

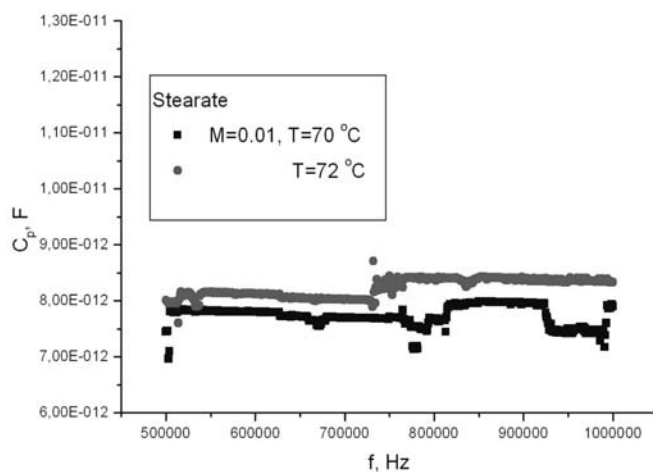


Рис. 7. Частотная зависимость емкости раствора стеарата меди в толуоле

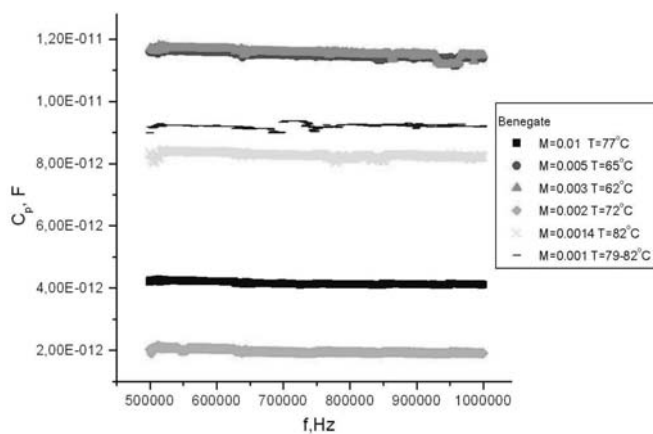


Рис. 8. Частотная зависимость ёмкости раствора бенегата меди в толуоле

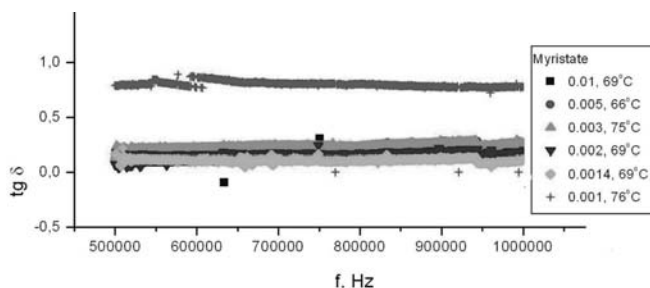


Рис. 9. Частотная зависимость угла потерь раствора миристата меди в толуоле

та переменного тока f , умноженная на 2π , а R – сопротивление (Ом). Частотные зависимости емкости $C(f)$ для ряда растворов КМ приведены на рис. 2–9.

Измерения электрических характеристик систем КМ-толуол проводились при следующих заданных режимах: частота 100 кГц–1 МГц, напряжение 1 В. Емкость измерительной ячейки составляет 2–3 пФ. Ячейка выполнена в виде стеклянной емкости нестандартной формы, ее объем – более 30 мл, площадь каждого электрода – 3,14 см². Диапазон температур задавался индивидуально для каждого образца в связи с тем, что температуры растворения каждого из гомологов КМ в толуоле различны и зависят от концентрации; полный интервал температур измерений $T = 60\text{--}90\text{ }^{\circ}\text{C}$.

На рис. 9 для иллюстрации отсутствия мезоморфизма КМ (миристата) в толуоле приведена его частотная зависимость угла потерь.

Выводы

Полученные в настоящей работе результаты применимы для последующего анализа данных КМ методами ИК, ЯМР, механической спектроскопии и др. физическими методами, а также для определения электрических характеристик возможных мезофаз в новых композициях карбоксилатов меди, например, в смазочных композициях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аكوпова О.Б., Лапшин В.Б., Терентьев В.В., Богданов В.С. Карбоксилаты меди. Моделирование, синтез, мезоморфизм и трибологические свойства // Жидкие кристаллы и их практическое использование. 2012. Вып. 2 (40). С. 20–28.
2. Мирная Т.А., Токменко И.И., Яремчук Г.Г., Пономаренко А.А. Синтез, строение и некоторые свойства изоалклатов 3d-переходных металлов // Украинский химический журнал. 2009. Т. 75. № 1. С. 16–19.
3. Терентьев В.В., Аكوпова О.Б., Телегин И.А., Боброва Н.В. Повышение надежности сельскохозяйственной техники за счет использования пластичных смазочных материалов с мезогенными присадками–карбоксилатами меди // Жидкие кристаллы и их практическое использование. 2014. Т. 14. № 4. С. 97–102.
4. Эме Ф. Диэлектрические измерения. Москва. Издательство “Химия”, 1967. 224 с.
5. Programmable Automatic RCL Meter PM 6306. User manual. FLUKE. 1996 [Электронный ресурс]. URL: <http://www.download-service-manuals.com/en/manual.php?file=Fluke-4810.pdf>.

6. Ramos Moita M.F., Duarte M.L.T.S. and Fausto R. An Infrared Spectroscopic Study of Crystalline Cooper (II) Propionate and Butyrate // *Spectroscopy Letters: An International Journal for Rapid Communication*. 1994. Vol. 27. N 10. P. 1421–1430.

REFERENCES

1. Akopova O.B., Lapshin V.B., Terentyev V.V., Bogdanov V.S. Copper(II) carboxylates. Simulation, synthesis, mesomorphism and tribological properties // *Liq. Cryst. and their Appl.* 2012. V. 2. № 40. P. 20–28.
2. Mirnaya T.A., Tokmenko I.I., Yaremchuk G.G., Ponomarenko A.A. Synthesis, structure and some properties of isovalerates of 3d-transition metals // *Ukr. Khim. Zh.* 2009. V. 75. № 5. P. 40–44 (in Russ.).
3. Terentyev V.V., Akopova O.B., Telegin I.A., Bobrova N.V. Increasing reliability of agricultural machinery by using plastic lubricant additives with mesogenic copper carboxylates // *Liq. Cryst. and their Appl.* 2014. V. 14. № 4. P. 97–102.
4. Ёме F., Dielectric Measurements. [Russian translation] Moscow. Khimiya, 1967. 224 p. (Oehme F. Dielectrische messmethoden. Weinheim. "Verlag Chemie GmbH", 1967.)
5. Programmable Automatic RCL Meter PM 6306. User manual. FLUKE. 1996. Available at: <http://www.download-service-manuals.com/en/manual.php?file=Fluke-4810.pdf>.
6. Ramos Moita M.F., Duarte M.L.T.S. and Fausto R. An Infrared Spectroscopic Study of Crystalline Cooper (II) Propionate and Butyrate // *Spectroscopy Letters: An International Journal for Rapid Communication*. 1994. Vol. 27. N 10. P. 1421–1430.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Ельникова Лилия Вячеславовна – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник лаборатории физической химии Института теоретической и экспериментальной физики им. А.И. Аликханова – НИЦ «Курчатовский институт»;
e-mail: elnikova@itep.ru;

Пономаренко Анатолий Тихонович – доктор химических наук, профессор, действительный член Академии инженерных наук им. А.М. Прохорова, главный научный сотрудник Института синтетических полимерных материалов им. Н.С. Ениколопова РАН;
e-mail: anapon@ispm.ru;

Шевченко Виталий Георгиевич – доктор химических наук, ведущий научный сотрудник Института синтетических полимерных материалов им. Н.С. Ениколопова РАН;
e-mail: shev@ispm.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Liliia V. Elnikova – PhD in Physics and Mathematics, researcher of the laboratory of physical chemistry, Alikhanov Institute for Theoretical and Experimental Physics -NSC Kurchatov Institute;
e-mail: elnikova@itep.ru;

Anatoliy T. Ponomarenko – Doctor in chemical science, Chief researcher of Enikolopov Institute of Synthetic Polymeric Materials, Russian Academy of Sciences;
e-mail: anapon@ispm.ru;

Vitaliy G. Shevchenko – Doctor in Chemical Science, Leading researcher of NS Enikolopov Institute of Synthetic Polymeric Materials, Russian Academy of Sciences;
e-mail: shev@ispm.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Ельникова Л.В., Пономаренко А.Т., Шевченко В.Г. Диэлектрические характеристики растворов карбоксилатов меди в толуоле // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2017. № 4. С. 95-102.
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-4-95-102

FOR CITATION

Elnikova L.V., Ponomarenko A.T., Shevchenko V.G. Dielectric characteristics of toluene solutions of cooper carboxylates. In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*, 2017. no. 4, pp. 95–102.
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-4-95-102

УДК 532.783, 544.252.22, 538.9

DOI: 10.18384/2310-7251-2017-4-103-113

EFFECT OF GRANULAR SILVER FILMS MORPHOLOGY ON THE MOLECULES ORIENTATION AND ION CONTAMINATION OF NEMATIC LIQUID CRYSTAL¹

E. Konshina, D. Shcherbinin

*Saint-Petersburg National Research University of Information Technologies,
Mechanics and Optics*

Kronverksky prosp. 49, Saint-Petersburg 197101, Russian Federation

Abstract. The structure of granular silver films at the interface of liquid crystal (LC) cells and their influence on LC molecule orientation and ionic contamination are examined. Granular silver films were deposited on a glass substrate covered with an ITO electrode and a-C:H thin films. The morphology structure of the silver films was changed after their annealing at 200 °C. The silver granules became spheroidal with an average diameter of ~30 nm and the channel area between them increased. The change in the structure of the Ag films led to an increase in the phase retardation and a decrease in the pretilt angle of the LC director from 51° to 7°. The density of ionic impurities in the LC cell with the annealed silver film was three times more than in the LC cell with the unannealed film. The impact of the alignment of the LC molecules at the surface of the granular silver films on the intensity of the plasmonic peak and its red shift in the absorption spectra is shown.

Key words: silver film, a-C:H film, nematic liquid crystal, ionic impurities, absorption spectra.

ВЛИЯНИЕ МОРФОЛОГИИ ГРАНУЛИРОВАННЫХ СЕРЕБРЯНЫХ ПЛЁНОК НА ОРИЕНТАЦИЮ МОЛЕКУЛ И ИОННОЕ ЗАГРЯЗНЕНИЕ НЕМАТИЧЕСКОГО ЖИДКОГО КРИСТАЛЛА

Коншина Е.А., Щербинин Д.П.

*Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет
информационных технологий, механики и оптики*

197101, Кронверкский пр. 49, Санкт-Петербург, Россия

Аннотация. В данной работе исследуется структура серебряных гранулированных плёнок на межфазных границах ЖК ячеек и их влияние на ориентацию молекул и ионное загрязнение ЖК. Гранулированные серебряные плёнки осаждались на стеклянные подложки покрытые электродами ИТО и тонкими пленками а-С:Н. После отжига при температуре 200 °C морфология структуры серебряных плёнок изменялась. Серебряные гранулы

¹ Исследование выполнено в рамках гранта Министерства образования и науки Российской Федерации №3.92.2014/К и гранта РФФИ №16-02-0041 А / The work was supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (Grant No. 3.92.2014/K) and the Russian Foundation for Basic Research (Grant No. 16-02-00041 A).

принимали сфероидную форму со средним диаметром 30 нм, каналы между гранулами уширялись. Изменение структуры серебряной пленки привело к увеличению фазовой задержки в слое ЖК и уменьшению угла преднаклона директора от 51° до 7° . Плотность ионных примесей в ЖК ячейке с отожженной серебряной пленкой была в три раза выше, чем в ячейке с неотожженной пленкой. Показано влияние ориентации ЖК молекул на поверхности гранулированной серебряной пленки на интенсивность и батохромный сдвиг пика плазменного резонанса в спектрах поглощения.

Ключевые слова: серебряные пленки, а-С:Н пленки, нематический жидкий кристалл, ионные примеси, спектры поглощения

1. Introduction

Currently, the study of metallic nanostructures and liquid crystals (LC) interaction is relevant. It is important from a fundamental point of view and attracts scientist's attention due to the possibilities of practical use of such systems. Periodic metal films and liquid crystals allow to create new types of photonic devices. Plasmonic properties of metal films are sensitive to a change of the refractive index of surrounding media. LC refractive index depends on LC molecule orientation and can be controlled by an external action. The combination of periodic metal surfaces with LCs provides the possibility of tuning their plasmonic properties by an external electric field [1–3]. Metal/LC interfaces are employed as tunable microwave and IR devices [4–6].

The orientation of LC molecules depends on Van der Waalse intermolecular forces and an anisotropic elastic interaction at interfaces with a solid surface [7]. Modern techniques of preparing thin solid films allow to control a pretilt angle and LC molecules alignment by changing a surface morphology and physicochemical properties [8–13]. Previous studies established that the orientation of LC molecules on metals surfaces depends on the properties of these materials, thickness of metal films and morphology of metal film surfaces. Au, Cr and Al films were used to produce a planar orientation of LC molecules. The use of smooth silver film provides a vertical LC orientation, while relief surfaces resulted in a planar or a tilted orientation of LC molecules [1; 14–18].

Liquid crystals are not an ideal dielectric and contain ionic impurities. Nanoparticles added in LC bulk and orienting layers on an interface affect the ionic density. The balance between the processes of ion adsorption and desorption on nanoparticles and thin film surfaces determine the ionic density in LC bulk [19–21]. Doping metal nanoparticles in LC can enhance LC conductivity [22–27]. In the case with LC display the increase of ionic conductivity is a drawback. However, LC conductivity enhancement may be used in non-display applications, such as diffuse light scattering devices [28], wave-front correctors [29] and generator of low-frequency oscillations [30].

The impact of granular silver films morphology on the orientation of molecules and ion contamination of nematic liquid crystal are discussed in this paper. We have studied how the morphology changing of granular silver films as a result of their annealing impacted on liquid crystal alignment at the interface. SEM images of the structures of granular silver films before and after annealing were compared. We measured the transmittance versus voltage curves of the LC cells with unannealed

and annealed Ag films to compare phase retardations and the pretilt angle of director. The diffuse currents were measured in LC cells with unannealed and annealed Ag films at the interface to determine ionic densities. The impact of interaction of granular silver films with liquid crystal on their absorption spectra is discussed also.

2. Experimental details

We have examined granular silver films and plane-parallel LC cells with these films at the interface. Granular silver films were produced by thermal evaporation in a PVD 75 vacuum chamber (Kurt J. Lesker) at a residual pressure of $\sim 1,3 \times 10^{-5}$ Pa and room temperature. The silver films thickness was about 40 Å [31]. These films were deposited on glass substrates covered with ITO transparent electrode and a-C:H thin film. ITO transparent electrodes were obtained by cathode sputtering. The a-C:H insulating layers were deposited in glow discharge plasma from toluene vapor at a pressure of $2,7 \times 10^{-2}$ Pa and a room temperature. Such a-C:H layers can be used as LC alignment layers [13]. To change the structure morphology, the granular silver films were annealed at 200 °C for 20 minutes in vacuum after deposition. ITO, a-C-H and granular silver films were deposited on the LC cell surface of substrate in series. Plane-parallel LC cells were assembled from the two substrates separated by spacers. The second LC cell substrate with ITO electrode was coated with a polyimide layer to align LC molecules parallel to the interface. This layer was obtained by spin coating of the solution, followed by annealing at a temperature of 180 °C. Then the polyimide surface was rubbed in one direction. An electrically controlled LC cell with a gap of $12,5 \pm 0,5$ µm was filled with a nematic liquid crystal under the action of capillary forces. The nematic LC ZhK-1282 (NIOPIK, Moscow) with optical anisotropy $\Delta n = 0,17$ at 632,8 nm wavelength, phase transition temperature 63 °C, and positive dielectric anisotropy $\Delta\epsilon = 9.9$ at a frequency of 1 kHz was used for cells fabrication. The homogeneity of LC orientation had verified before experiments using polarized optical microscope.

The morphology features of the granular silver films were investigated by a Merlin scanning electron microscope (SEM) (Carl Zeiss). The sizes and areas of silver nanoparticles were analyzed by statistical image processing using the Toup View computer program. Spectral studies of the Ag / a-C:H / ITO structures on a glass substrate and in the LC cells were performed with an SF-56 spectrophotometer (LOMO). Non-polarized light beam with a wave vector always perpendicular to the substrate was used to measure optical density.

To measure curves of the transmittance vs. voltage (T-V) of LC cells we used the electro optic setup comprising a laser LED with a wavelength of 650 nm, a photo detector, a voltage generator, an oscilloscope and computer. LC cells were placed between crossed polarizers in such a way that the angle between the directions of the long axes of LC molecules and polarized light vector to be 45°. Sinusoidal voltage with 1 kHz frequency was applied to the cells to measure T-V curves at a wavelength of 650 nm. Pretilt angle in LC cells are estimated using equation [32]:

$$R_0 = \frac{2\pi d n_0}{\lambda} \left[\frac{n_e}{\sqrt{n_e^2 \sin^2 \theta_p + n_o^2 \cos^2 \theta_p}} - 1 \right], \quad (1)$$

R_0 is the phase retardation at initial time, n_o and n_e are ordinary and extraordinary refractive index, λ – wavelength.

The contact of the liquid crystal with the granular silver film results in ionic contamination. To characterize this process a diffuse current leakage was measured after removing DC voltage applied to the cell. We used the circuitry in which a LC cell was connected in series with a resistor and voltage generator. The drop of voltage at probing resistor was measured with an oscilloscope connected in parallel to the resistor. The current in the circuit was calculated by the Ohm law. For the experiments we used a 10 k Ω probing resistor. The density of the ions was evaluated as

$$c = \frac{1}{eSd} \int_t i(t) dt, \quad (2)$$

where e – elementary charge, S – electrodes area, d – cell gap, i – measured current, t – time [33].

3. Results and discussion

SEM images of the structures of granular silver films before (a) and after annealing (b) are depicted in Figure 1.

The granules of silver films are separated by channels with a-C:H. Flat granules of Ag became more relief after annealing and had an almost spheroid shape with an average diameter of ~30 nm.

The filling factor was determined as the ratio of the sum of nanoparticle areas to the substrate area. The estimation showed that this factor decreased from 53 % to 42 % after annealing of silver films. Our study has indicated the decrease of nanoparticle dimension in the plane of the substrate and the increase of the channel area between the granules [34].

LC molecules orientation on the surfaces consisted of several materials depend on the ratio of areas, the anchoring strength and the relief of materials surface [18]. On the smooth Ag film surface LC molecules tend to align perpendicular [15]. In Figure 2 the

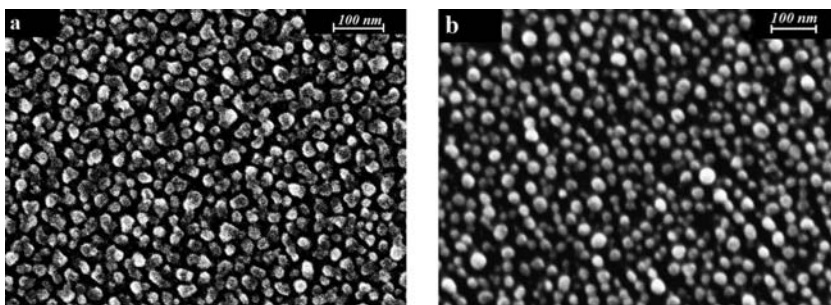


Fig. 1. SEM images of the granular silver films deposited on a-C:H/ITO thin multilayer films on glass substrate before (a) and after annealing (b) at the temperature of 200 °C in vacuum [34].

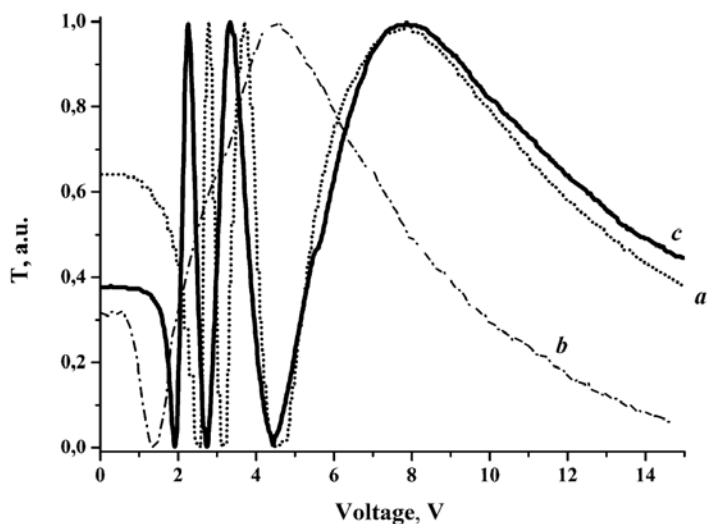


Fig. 2. Experimental T-V curves at a wavelength of 650 nm, obtained by applying an AC voltage with a frequency of 1 kHz, for the planar-oriented LC cell without Ag (a) and hybrid cells with unannealed (b) and annealed (c) granular silver films on one interface of the LC cells.

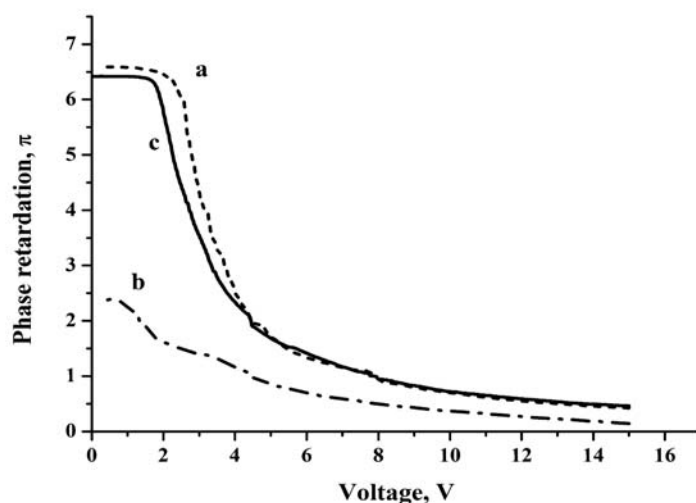


Fig. 3. Phase retardations vs. AC voltage with a frequency of 1 kHz at a wavelength of 650 nm for the planar-oriented LC cell without Ag film (a) and hybrid cells with unannealed (b) and annealed (c) granular silver films on one interface of the LC cells.

T-V dependences are shown at a wavelength of 650 nm for the planar-oriented LC cells using a-CH thin films without Ag (a), with unannealed (b) and annealed (c) granular silver films at the one interface.

T-V curves were obtained applying sinusoidal voltage at a frequency of 1 kHz. The T-V curves were used to calculate the phase retardation and a pretilt angle of the LC cells as was described in [31].

Figure 3 shows the phase retardation curves for the studied LC cells. The phase retardation curve of the hybrid LC cell with an annealed silver film at the interface differed from the curve for planar oriented LC cell with the a-C:H layers without silver film in the voltage range below 4 V. That is due to different threshold voltages and phase retardation in initial time.

In case of the LC cell without Ag films, the phase retardation was $6,6\pi$ and the pretilt angle was equaled to 3° . The phase retardations were $2,3\pi$ and $6,4\pi$ in the LC cells with the unannealed and annealed films respectively. The calculation of the pretilt angle from equation (1) showed that it is equal to 51° in the LC cell with an unannealed Ag film. This means that the LC cell has a hybrid orientation of the LC, since the polyimide layer deposited on the opposite substrate had a pretilt angle close to zero. Thus, at the interface with the unannealed granular silver film, the LC molecules align with a pretilt angle more than 51° .

A pretilt angle of the LC cell with the annealed Ag film was near 7° . This means that a change in the structure of the Ag film as a result of annealing causes a planar orientation of LC molecules with a small pretilt angle at the interface. Annealing the granular films led to the diffusion of Ag atoms and small clusters in the channels. The shape and size of individual granules varied and the channels area increased (fig. 1b) as the filling factor decreased on 11%. Thus, it can be concluded that the change of LC orientation as a result of the films annealing can be explained by three factors – increasing the channels area, removing silver atoms from the channels and changing the surface relief.

We have studied changes in the ion density in the LC cells with the granular silver films. fig. 4 shows the dependence of the diffusion current of ions (I) on the time (t) after the removal of the rectangular pulse amplitude of 20 V with the duration of 300 ms applied to the LC cells without Ag films (*a*) and with unannealed (*b*) and annealed (*c*) Ag films.

The ion density in the LC cell with the annealed Ag film estimated by integrating the curves *c* in fig. 4 was $1,8 \times 10^{16} \text{ cm}^{-3}$. In the LC cell with the unannealed Ag film the ion

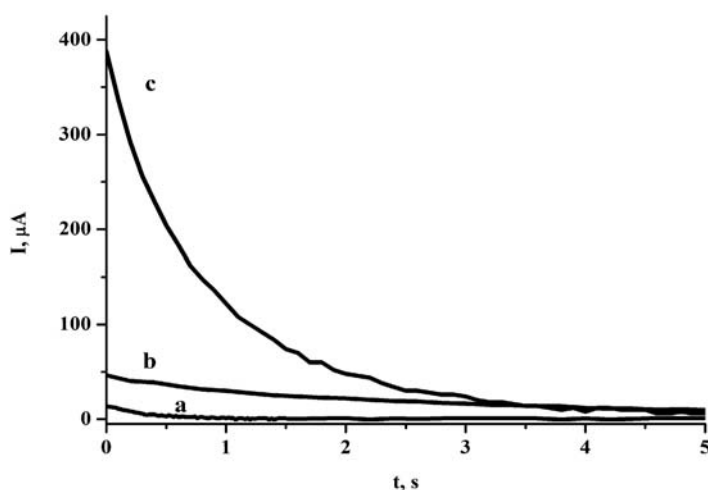


Fig. 4. Diffusion current of charges after removing a rectangular pulse with an amplitude of 20 V and a duration of 300 ms applied to the LC cells without Ag films (*a*), with the unannealed (*b*) and the annealed (*c*) Ag film at one interface.

density was less and equaled $5,5 \times 10^{15} \text{ cm}^{-3}$. In the cell without Ag films ion density was equaled to $0,23 \times 10^{15} \text{ cm}^{-3}$. The presence of granular silver film at the interface of the LC cells led to the generation of additional ions. Additional ions in the LC cells with such structures may also arise as a result of a disengagement of ions from the surface of the granular Ag film. Thus, the morphology change in the granular silver films after annealing affected both the orientation of the LC molecules and the ion density in the LC cell. Increasing the charge carriers in the LC cell with the annealed Ag film can result from the enhancement of electron emission from the surface of Ag/ a-C:H/ITO thin multilayer films by applying constant electric field. We suppose that the presence of Ag nanoparticles on the surface of multilayer structure may result in the reduction of electron work function that facilitates electron emission.

To show the effect of the interaction of granular silver films with liquid crystals, we compared the extinction spectra of these films on glass substrates in structures with a-C:H/ITO and in the LC cells. The measured optical density D depends on the extinction cross section, which is the sum of the absorption and scattering cross sections. In our case, the scattering can be neglected, since the size of the silver granules is much less than 100 nm [35]. Only one peak in the absorption spectra was observed due to the use of non-polarized light beam with a wave vector always perpendicular to the substrate. The plasmonic peak in the spectra of metal nanoparticles depends on their form and size [35; 36] as well as the distance between nanoparticles [37]. The extinction spectra of the granulated silver film, which characterize its plasmon properties, are shown in fig. 5.

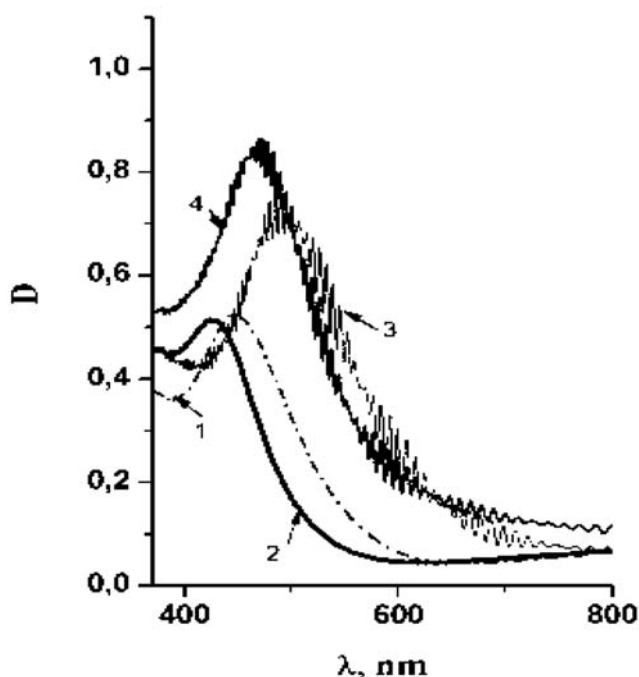


Fig. 5. The absorbance spectra of the granular silver films on the top of ITO/a-C:H thin multilayer films before (1, 3) and after annealing (2, 4) at 200°C on glass substrates and at the interface in LC cells.

The comparison of the extinction spectra 1 and 2 in fig. 5 has shown the blue shift of the absorption band peak after annealing. The value of blue shift was about 16 nm. We can conclude that both the decrease of the granules dimension and increase of the distance between them lead to the blue shift after annealing as other conditions do not change.

The liquid crystal is transparent in the visible region [38]. Thus, observed in the absorption spectra 3 and 4 in fig. 5 peaks are associated only with the localized surface plasmons in granular silver films. The red shift of plasmonic peak was observed in the LC cells spectra for both annealed and unannealed Ag films at the interface. The oscillations in the spectral curves appeared due to the interference in LC layer. The red shift values in the absorption spectra of granular silver films in LC cells were approximately the same for annealed and unannealed Ag films and equal to 45 nm comparing with the films on a glass substrate. Moreover, the peak intensity increased almost about 1.6 times for the annealed Ag film and 1.4 times for the unannealed film. The data of a wavelength and optical density of the localized plasmon excitation peak of the LC cells are listed in Table 1. The peak intensity was bigger for the annealed Ag film at the interface with LC (fig. 5, curve 4). The absorption cross-section of metal nanoparticles depends on refractive index of surrounding media. Its increasing results in the red shift of the plasmonic peak and influences on the maximum absorption [35; 36]. The changes observed in the spectra 3 and 4 in fig. 5 are related to the change in the refraction index of LC at the interface with the Ag films.

Table 1.

The parameters of the absorption spectra of unannealed and annealed granular silver films on glass substrates covered with thin films of a-C:H/ITO and at the interface in LC cells.

Granular silver film	Wavelength of peak, nm		Optical density in maximum	
	On glass substrate	In LC cell	On glass substrate	In LC cell
Unannealed	447	492	0,52	0,72
Annealed	425	470	0,51	0,82

4. Conclusion

We have studied the change in the structure and plasmonic properties of granular silver films deposited by thermal evaporation in vacuum and then annealed at 200 °C. These Ag films were formed on a surface of a-C:H thin films deposited in glow discharge plasma which are aligned LC molecules planar. It has been shown by statistical analyses of SEM images that annealing the granular silver film on glass substrate covered with a-C:H/ITO films leads to the spheroid form of Ag nanoparticles with the average diameter of ~30 nm and increase of the area of channels between them. It has been shown the impact of granular Ag films at the interface of LC cells on the molecules orientation by the studies of the transmission of LC cells in dependence on the applied voltage and the calculations of the phase retardation and the pretilt angle of the molecules. The pretilt angel of LC molecules was about 51° before annealing film and decreased to 7° after that. It has been founded the density of ion impurities in the LC cell with the annealed granular silver film at the interface in LC cells was three times

higher than in the case of the unannealed film by measurement of the diffuse current of charges. We have studied the extinction spectra of the granulated silver film and observed that the intensity of plasmonic peak and its red shift in the absorption spectra of granular silver films at the interface in the LC cell depend on the LC molecules alignment on nanoparticles surface. The obtained results contribute to gain a more thorough understanding of the interaction between metallic nanostructured surfaces and liquid crystals for the development of optical device technology based on them.

REFERENCES

1. Franklin D., Chen Y., Vazquez-Guardado A., Modak S., Boroumand J., Xu D., Wu S.-T., Chand D. [Polarization-independent actively tunable colour generation on imprinted plasmonic surfaces]. In: *Nature Communication*, 2015, vol. 6, P. 7337 (1–8).
2. Si G., Zhao Y., Leong E.S.P., Liu Y.J. [Liquid-Crystal-Enabled Active Plasmonics: A Review]. In: *Materials*, 2014, vol. 7, pp. 1296–1317.
3. Zhang Y., Liu Q., Mundoor H., Yuan Y., Smalyukh I.I. [Metal Nanoparticle Dispersion, Alignment, and Assembly in Nematic Liquid Crystals for Applications in Switchable Plasmonic Color Filters and E-Polarizers]. In: *ACS Nano*, 2015, vol. 9, pp. 3097–3108.
4. Kamei T., Moritake H., Utsumi Y. [Microwave and Light-Wave Measurements for Nematic-Liquid-Crystal-Loaded Phase Shifter Using Coplanar Waveguide with Floating Electrode]. In: *Japanese Journal of Applied Physics*, 2010, vol. 49, P. 01AF03 (1–6).
5. Goelden F., Gaebler A., Goebel M., Manabe A., Mueller S., Jakoby R. [Tunable liquid crystal phase shifter for microwave frequencies]. In: *Electronic Letters*, 2009, vol. 45, pp. 686–687.
6. Weil C., Muller St., Scheele P., Best P., Lussem G., Jakoby R. [Highly-anisotropic liquid-crystal mixtures for tunable microwave devices]. In: *Electronic Letters*, 2003, vol. 39, pp. 1732–1734.
7. Blinov L.M. *Structure and properties of liquid crystals*. New York, Springer Science & Business Media, 2011. 439 p.
8. Willman E., Seddon L., Osman M., Bulak A., James R., Day S.E., Fernandez F.A. [Liquid crystal alignment induced by micron-scale patterned surfaces]. In: *Physical Review E*, 2014, vol. 89, P. 052501 (1–7).
9. Yi Y., Nakata M., Martin A.R., Clark N.A. [Alignment of liquid crystals by topographically patterned polymer films prepared by nanoimprint lithography]. In: *Applied Physics Letters*, 2007, vol. 90, P. 163510 (1–3).
10. Silvestre N.M., Romero-Enrique J.M., Telo da Gama M.M. [Nematic liquid crystals on sinusoidal channels: the zigzag instability]. In: *Journal of Physics-Condensed Matter*, 2017, vol. 29, P. 014004 (1–6).
11. Rojas-Gomez Y.A., Romero-Enrique J.M., Silvestre N.M., Telo da Gama M.M. [Pattern-induced anchoring transitions in nematic liquid crystals]. In: *Journal of Physics-Condensed Matter*, 2017, vol. 29, P. 064002 (1–14).
12. Amosova L.P. [How the deposition conditions of films of the oxides of semiconductors and metals affect the orientation of liquid crystals]. In: *Journal of Optical Technology*, 2013, vol. 80, pp. 179–186.
13. Konshina E.A. [Production methods and properties of liquid-crystal-orienting layers based on amorphous carbon]. In: *Journal of Optical Technology*, 2011, vol. 78, pp. 210–217.
14. Garbovskiy Y., Reisman L., Celinski Z., Camley R.E., Glushchenko A. [Metallic surfaces as alignment layers for nondisplay applications of liquid crystals]. In: *Applied Physics Letters*, 2011, vol. 98, P. 073301 (1–3).

15. Sanda P.N., Dove D.B., Ong H.L. [Role of surface bonding on liquid-crystal alignment at metal-surfaces]. In: *Physics Review A*, 1989, vol. 39, pp. 2653–2658.
16. Lo K.Y., Huang C.Y., Chu T.H., Hsu C.J., Lin C.H., Fuh A.Y.G. [Variation of nematic liquid crystal on a silver surface]. In: *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics*, 2006, vol. 8, pp. 501–506.
17. Armitage D. [Alignment of liquid-crystal on a polarizing metal-film]. In: *Applied Physics Letters*, 1990, vol. 56, P. 1723 (1–2).
18. Ong H.L., Hurd A.J., Meyer R.B. [Alignment of nematic liquid-crystals by inhomogeneous surfaces]. In: *Journal of Applied Physics*, 1985, vol. 57, pp. 186–192.
19. Garbovskiy Y. [Ion capturing/ion releasing films and nanoparticles in liquid crystal devices]. In: *Applied Physics Letters*, 2017, vol. 110, P. 041103 (1–5).
20. Garbovskiy Y. [Electrical properties of liquid crystal nano-colloids analysed from perspectives of the ionic purity of nano-dopants]. In: *Liquid Crystals*, 2016, vol. 43, pp. 648–653.
21. Garbovskiy Y., Glushchenko I. [Nano-Objects and Ions in Liquid Crystals: Ion Trapping Effect and Related Phenomena]. In: *Crystals*, 2015, vol. 5, pp. 501–533.
22. Prasad S.K., Kumar M.V., Shilpa T., Yelamaggad C.V. [Enhancement of electrical conductivity, dielectric anisotropy and director relaxation frequency in composites of gold nanoparticle and a weakly polar nematic liquid crystal]. In: *RSC Advances*, 2014, vol. 4, pp. 4453–4462.
23. Prasad S.K., Sandhya K.L., Nair G.G., Hiremath U.S., Yelamaggad C.V., Sampath S. [Electrical conductivity and dielectric constant measurements of liquid crystal-gold nanoparticle composites]. In: *Liquid Crystals*, 2006, vol. 33, pp. 1121–1125.
24. Dhar R., Mishra M., Kumar S. [Effect of dispersed colloidal gold nanoparticles on the electrical properties of a columnar discotic liquid crystal]. In: *RSC Advances*, 2014, vol. 4, pp. 62404–62412.
25. Kamaliya B., Kumar M.V., Yelamaggad C.V., Prasad S.K. [Enhancement of electrical conductivity of a liquid crystal-gold nanoparticle composite by a gel network of aerosil particles]. In: *Applied Physics Letters*, 2015, vol. 106, P. 083110 (1–5).
26. Singh U.B., Dhar R., Dabrowski R., Pandey M.B. [Influence of low concentration silver nanoparticles on the electrical and electro-optical parameters of nematic liquid crystals]. In: *Liquid Crystals*, 2013, vol. 40, pp. 774–782.
27. Neeraj, Raina K.K. [Nickel nanoparticles doped ferroelectric liquid crystal composites]. In: *Optical Materials*, 2013, vol. 35, pp. 531–535.
28. Geis M.W., Bos P.J., Liberman V., Rothschild M. [Broadband optical switch based on liquid crystal dynamic scattering]. In: *Optics Express*, 2016, vol. 24, pp. 13812–13823.
29. Guralnik I.R., Samagin S.A. [Electrophysics of a modal multichannel liquid-crystal wave-front corrector]. In: *Quantum Electronics*, 2002, vol. 32, pp. 362–366.
30. Barton Y., Kal'nin A.A. [Liquid-crystal diode generator of low-frequency oscillations]. In: *Technical Physics*, 1998, vol. 43, pp. 112–113.
31. Leonov N.B., Gladskikh I.A., Polishchuk V.A., Vartanyan T.A. [Evolution of the optical properties and morphology of thin metal films during growth and annealing]. In: *Optics and Spectroscopy*, 2015, vol. 119, pp. 450–455.
32. Konshina E.A., Fedorov M.A., Amosova L.P. [Determining the director tilt and phase lag of liquid-crystal cells by optical methods]. In: *Journal of Optical Technology*, 2006, vol. 73, pp. 830–833.
33. Shcherbinin D.P., Konshina E.A., Solodkov D.E. [The effect of CdSe/ZnS quantum dots on the rotational viscosity and charge carrier concentration of a nematic liquid crystal]. In: *Technical Physical Letters*, 2015, vol. 41, pp. 781–783.
34. Shcherbinin D.P., Konshina E.A., Polishchuk V.A. [Influence of surface properties on the structure of granular silver films and excitation of localized plasmons]. In: *Optics and Spectroscopy*, 2016, vol. 120, pp. 622–627.

35. Noguez C. [Surface Plasmons on Metal Nanoparticles: The Influence of Shape and Physical Environment]. In: *The Journal of Physical Chemistry C*, 2017, vol. 10, pp. 3806–3819.
36. Muskens O.L., Billaud P., Broyer M., Del Fatti N., Vallée F. [Optical extinction spectrum of a single metal nanoparticle: Quantitative characterization of a particle and of its local environment]. In: *Physical Review B*, 2008, vol. 78, P. 205410 (1–9).
37. Su K.H., Wei Q.H., Zhang X., Mock J.J., Smith D.R., Schultz S. [Interparticle coupling effects on plasmon resonances of nanogold particles]. In: *Nano Letters*, 2003, vol. 3, pp. 1087–1090.
38. Kurochkina M.A., Shcherbinin D.P., Konshina E.A. [Spectral and dielectric properties of a nematic liquid crystal doped semiconductor quantum dots CdSe/ZnS]. In: *Proceedings of SPIE*, 2015, vol. 9519, P. 95190Z (1–5).

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Коншина Елена Анатольевна – доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Центра информационных оптических технологий Санкт-Петербургского национального исследовательского университета информационных технологий, механики и оптики;

e-mail: eakonshina@mail.ru;

Щербинин Дмитрий Павлович – инженер Центра информационных оптических технологий Санкт-Петербургского национального исследовательского университета информационных технологий, механики и оптики;

e-mail: shcherbinin.dmitrij@gmail.com

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Elena A. Konshina – Doctor in Physico-mathematics science, leading researcher of the Center for Information Optical Technologies, Saint-Petersburg National Research University of Information Technologies, Mechanics and Optics;

e-mail: eakonshina@mail.ru;

Dmitrii P. Shcherbinin – engineer of the Center for Information Optical Technologies, Saint-Petersburg National Research University of Information Technologies, Mechanics and Optics;

e-mail: shcherbinin.dmitrij@gmail.com

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Konshina E.A., Shcherbinin D.P. Effect of granular silver films morphology on the molecules orientation and ion contamination of nematic liquid crystal // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2017. № 4. С. 103–113. DOI: 10.18384/2310-7251-2017-4-103-113

FOR CITATION

Konshina E.A., Shcherbinin D.P. Effect of granular silver films morphology on molecule orientation and ion contamination of nematic liquid crystal. In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*, 2017. no. 4. pp. 103–113.

DOI: 10.18384/2310-7251-2017-4-103-113

РАЗДЕЛ III.

ТЕОРИЯ И МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ И ВОСПИТАНИЯ

УДК 378

DOI: 10.18384/2310-7251-2017-4-114-128

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПАКЕТОВ В РАМКАХ МЕТОДИЧЕСКОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ДИСЦИПЛИН В ТЕХНИЧЕСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

Власова Е.А., Меженная Н.М., Попов В.С., Пугачев О.В.

*Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана
105005, Москва, ул. 2-я Бауманская, 5, Российская Федерация*

Аннотация. Рассмотрен опыт преподавания дисциплин вероятностного цикла, включающих курсы «Теория вероятностей», «Математическая статистика», «Теория случайных процессов», студентам технического университета с использованием интерактивных компьютерных систем (или математических пакетов (МП)). Обозначены цели и задачи курсов в рамках инженерно-технического образования. Представлены методические проблемы преподавания вероятностных дисциплин, основные идеи их разрешения, методы и приёмы обучения. Особая роль отведена вопросам использования информационных технологий, методическим аспектам их применения при решении конкретных прикладных задач.

Ключевые слова: теория вероятностей, математическая статистика, теория случайных процессов, случайные величины, выборки, проверка гипотез, методические проблемы преподавания, информационные технологии, интерактивные компьютерные системы.

THE USE OF MATHEMATICAL PACKAGES IN THE FRAMEWORK OF METHODOLOGICAL SUPPORT OF PROBABILISTIC DISCIPLINES IN A TECHNICAL UNIVERSITY

E. Vlasova, N. Mezhenaya, V. Popov, O. Pugachev

*Bauman Moscow State Technical University
Vtoraya Baumanskaya ul. 5, 105005 Moscow, Russian Federation*

Abstract. We consider the experience of teaching probability cycle, including the courses “Probability Theory”, “Mathematical Statistics” and “Theory of Stochastic Processes”, to students of technical universities with the use of interactive computer systems [or mathematical packages (MPs)]. The

goals and objectives of courses within engineering education are described. Methodical problems of teaching probabilistic disciplines, the basic ideas of their resolution, methods and techniques of teaching are considered, as well as the role of using information technologies, methodological aspects of their use in the solution of specific applied tasks.

Key words: probability theory, mathematical statistics, theory of random processes, random variables, sampling, hypothesis testing, methodological problems of teaching, information technology, interactive computer system.

Введение

Особое место среди дисциплин математического цикла, вошедших в структуру образовательных стандартов нового поколения, занимают теория вероятностей, математическая статистика, теория случайных процессов, а также ряд дополнительных дисциплин, изучаемых студентами на старших курсах бакалавриата или в магистратуре. Вероятностные дисциплины тесно связаны с практикой, имеют большое прикладное значение, поскольку изучают математические модели статистических закономерностей природы. Вероятностные и статистические методы широко используются в технических, технологических, экономических науках. Это связано с развитием массовых процессов в производстве и экономике, с развитием экспериментальной техники и необходимостью проведения более тонкого анализа результатов эксперимента. В настоящее время во всех инженерно-технических, технологических, экономических вузах читается курс теории вероятностей и математической статистики. Даже если не всем инженерам в своей производственной деятельности придётся применять вероятностно-статистические методы, то, во всяком случае, им необходимо познакомиться с основными понятиями и идеями, чтобы понимать соответствующие выводы.

Остановимся на особенностях преподавания и методическом обеспечении дисциплин вероятностного цикла, учитывая опыт их изложения в МГТУ имени Н.Э. Баумана [1–6].

Цели и задачи дисциплины

Дисциплины «Теория вероятностей», «Математическая статистика» и «Теория случайных процессов» входят в вариативную часть математического и естественнонаучного цикла учебного плана студентов.

Основными целями изучения дисциплин вероятностного цикла являются: приобретение знаний основ теории вероятностей и практических навыков по применению её методов для решения типовых и прикладных задач; формирование у студента знаний основных идей и методов математической статистики, играющих важнейшую роль в разработке и анализе соответствующих математических моделей для широкого круга процессов и явлений окружающего мира; приобретение знаний по теории случайных процессов и практических навыков применения её методов для изучения и моделирования случайных явлений в динамике их развития; научить студентов правильно выбирать вероятностную модель явления и проводить необходимые эксперименты.

Главные задачи освоения дисциплин состоят в том, чтобы:

- ознакомить студентов с теорией множеств, способами вычисления вероятностей случайных событий, понятиями дискретной и непрерывной случайной величины (в том числе в многомерном пространстве), способами качественного и количественного описания и анализа законов распределения, а также их числовых характеристик, основами применения асимптотических методов теории вероятностей;

- ознакомить студентов с основами выборочной теории (способами сбора и представления данных, методами планирования эксперимента, оцениванием характеристик законов распределения по выборочным данным); теорией точечного и интервального оценивания параметров распределения; проверкой статистических гипотез; основами регрессионного анализа;

- ознакомить студентов с вероятностными характеристиками случайного процесса, связанными с ними числовыми характеристиками, основными типами случайных процессов (с независимыми и некоррелированными приращениями, стационарных в узком и широком смысле, марковских, нормальных и др.).

Важным представляется развитие у студента знаний и умений, основанных на использовании описанных методов при решении задач в смежных дисциплинах естественнонаучного и профессионального циклов образовательной программы, способности к математическому исследованию прикладных вопросов, умения перевести практическую задачу на математический язык.

Для успешного освоения вероятностных дисциплин требуется интеграция знаний, полученных при изучении дисциплин математического цикла (математического анализа, аналитической геометрии и линейной алгебры, дифференциальных уравнений, теории функций комплексного переменного, интегральных преобразований, уравнений математической физики), а также навыки по применению интерактивных математических пакетов.

Интерактивные компьютерные системы

Решение инженерных задач с применением вероятностно-статистических методов обычно требует большого объема вычислений. Использование в учебном процессе интерактивных компьютерных систем (или математических пакетов (МП)) позволяет проводить процедуры вычисления достаточно быстро, эффективно и способствует формированию у студентов глубоких и прочных знаний, умений и навыков. Владение математическими пакетами позволяет будущему инженеру решать многие вычислительные задачи с высокой точностью и за значительно меньшее время, чем то, которое необходимо для написания соответствующих программ на языках программирования.

Основные пакеты прикладных математических программ, такие как Maple, Mathematica, MatLab, MathCAD и др., широко используются для аналитических расчётов, статистического моделирования, решения различных задач вероятностно-статистического направления. Эти пакеты содержат встроенную матричную и комплексную арифметику, поддерживают работу с алгебраическими полиномами, дают возможность проводить численное интегрирование диффе-

ренциальных и разностных уравнений, строить разнообразные виды графиков функций, трёхмерных поверхностей, содержат встроенный аппарат для моделирования и анализа случайных величин. Такие МП, используя общепринятый способ изображения математических объектов и удобную операционную среду, позволяют формулировать проблемы и получать решения в обычной математической форме, не прибегая к рутинному программированию. Возможности и простота интерфейса таких математических пакетов сделали их весьма популярными и распространёнными.

Применение МП в учебном процессе [7–9] позволило уделять больше времени методологии решения математической задачи (обсуждать условия задачи, возможные методы её решения, полученные результаты), переложив выполнение рутинных операций на вычислительную среду. Кроме того, возможно решение таких задач, которые аналитическими методами, доступными студентам, решить не представляется возможным.

Использование МП позволяет создать для некоторых типов задач шаблоны решения, позволяющие, варьируя исходными данными задачи, получать полные решения с изменением промежуточных и конечных результатов в виде аналитических зависимостей или графических изображений.

Приведём примеры использования математических пакетов MathCAD [7], MatLab [8] и Mathematica [9] при решении задач вероятностного и статистического характера. Задачи такого типа можно разбирать на семинарских занятиях, предлагать на лабораторных работах, а также включать в типовые домашние задания, входящие в промежуточный контроль по дисциплине.

Рассмотрим пример задания по модулю «Случайные величины. Предельные теоремы», который является составной частью дисциплины «Теория вероятностей».

Пример 1. Случайная величина ξ имеет плотность распределения вероятностей $f(x) = Ax^2(1 - x)$, $0 \leq x \leq 1$. Требуется:

- а) найти константу A и функцию распределения;
- б) построить графики плотности и функции распределения;
- в) найти моду, медиану, математическое ожидание и дисперсию;
- г) найти плотность $g(x)$ распределения суммы двух независимых случайных величин с плотностью $f(x)$, построить график $g(x)$;
- д) пользуясь центральной предельной теоремой, оценить интервал, в котором будет находиться среднее арифметическое 100 значений случайной величины ξ с вероятностью не менее 0,95;
- е) смоделировать 20 выборок объёма 100 из закона распределения случайной величины ξ и по ним оценить интервал из пункта д).

Решение. Первые пять пунктов удобно выполнить при помощи математического пакета MathCAD.

Начнём с пункта а). Проинтегрировав функцию $f(x) = x^2(1 - x)$ по отрезку $[0, 1]$ в режиме символьных вычислений, получаем ответ $1/12$. Следовательно, искомая константа $A = 12$. Далее, находим функцию распределения $F(x)$ при $0 \leq x \leq 1$, символьно вычислив интеграл

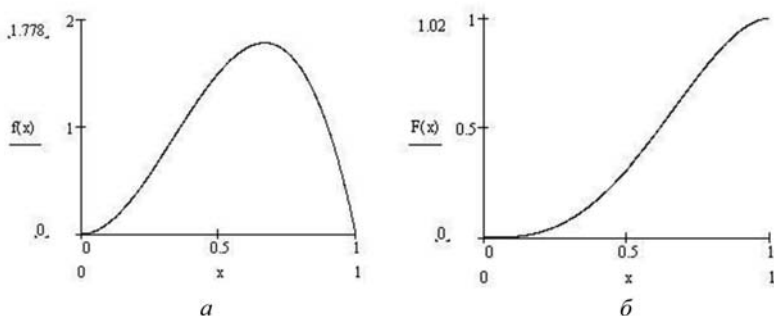


Рис. 1. Графики плотности (а) и функции распределения (б).

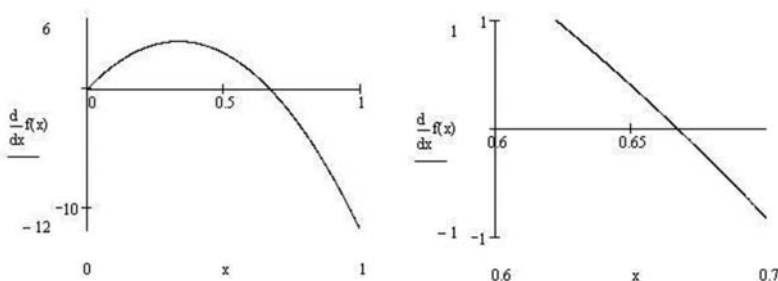


Рис. 2. Вычисление моды.

$$f(x) := 12t^2 \cdot (1-t) \quad F(x) := \int_0^x f(t) dt \quad F(x) \rightarrow 4x^3 - 3x^4$$

Очевидно, что $F(x) = 0$ при $x < 0$, $F(x) = 1$ при $x > 1$.

В пункте б) построим графики плотности и функции распределения на отрезке $[0,1]$ (рис. 1).

Пункт в). Чтобы найти моду, т.е. точку максимума $f(x)$, продифференцируем её и найдём точку пересечения графика $f'(x)$ с осью Ox :

$$\frac{d}{dx} f(x) \rightarrow 2x - 3x^2.$$

Как нетрудно видеть, мода равна $2/3$. По графику плотности мы выясняем, что $\max F(x) = f(2/3) = 16/9$, т.е. фигура площади 1, ограниченная графиком плотности, вписана в прямоугольник $\Pi = [0,1] \times [0,16/9]$ площади $16/9$. (рис. 2). Это обстоятельство пригодится нам в пункте е).

Чтобы найти медиану, нужно решить уравнение $F(x) = 0,5$. Сделаем это при помощи команды **solve**.

$$4 \cdot x^3 - 3 \cdot x^4 - 0,5 \text{ solve, } x \rightarrow \begin{pmatrix} -0,26421069356097389807 - 0,38430423124046170357 \cdot i \\ -0,26421069356097389807 + 0,38430423124046170357 \cdot i \\ 0,61427243186761045172 \\ 1,2474822885876706777 \end{pmatrix}$$

Нас интересует только корень, принадлежащий отрезку $[0,1]$. Таким образом, медиана примерно равна 0,614.

Вычислим математическое ожидание E , дисперсию D и среднеквадратичное отклонение σ среднего выборки объёма $n = 100$.

$$E := \int_0^1 x \cdot f(x) dx \quad E \rightarrow \frac{3}{5} \quad D := \int_0^1 x^2 \cdot f(x) dx = E^2 \quad D \rightarrow \frac{1}{25} \quad \sigma := \sqrt{\frac{D}{n}} \quad \sigma = 0,02$$

Пункт г). Найдём плотность $g(x)$ распределения суммы двух независимых случайных величин с плотностью $f(x)$ и построим график $g(x)$.

Плотность распределения суммы двух независимых случайных величин вычисляется при помощи свертки. Но, поскольку функция $f(x)$ задана по-разному на трёх интервалах, для символического вычисления $g(x)$ придётся применить разные формулы на разных интервалах значений x .

При $x < 0$ и $x > 2$, очевидно, $g(x) = 0$.

На отрезках $[0,1]$ и $[1,2]$ вычислим $g(x)$ по двум разным формулам, которые получены из формулы свертки с учётом того, что $f(x) = 0$ вне отрезка $[0, 1]$. Полученные функции обозначим, соответственно, $g_1(x)$ и $g_2(x)$.

$$g_1(x) := \int_0^x f(t) \cdot f(x-t) dt \quad g_2(x) := \int_{x-1}^1 f(t) \cdot f(x-t) dt$$

$$g_1(x) \rightarrow \frac{36}{35} \cdot x^7 - \frac{24}{5} \cdot x^6 + \frac{24}{5} \cdot x^5$$

$$g_2(x) \rightarrow \frac{576}{35} - \frac{288}{5} \cdot x + \frac{336}{5} \cdot x^2 - 24 \cdot x^3 - \frac{36}{35} \cdot x^7 + \frac{24}{5} \cdot x^6 - \frac{24}{5} \cdot x^5$$

Затем «склеим» из них функцию $g(x)$ на отрезке $[0, 2]$ и построим её график (рис. 3).

Пункт д). По центральной предельной теореме оценим интервал, в котором с вероятностью 0,95 будет находиться среднее арифметическое 100 значений слу-

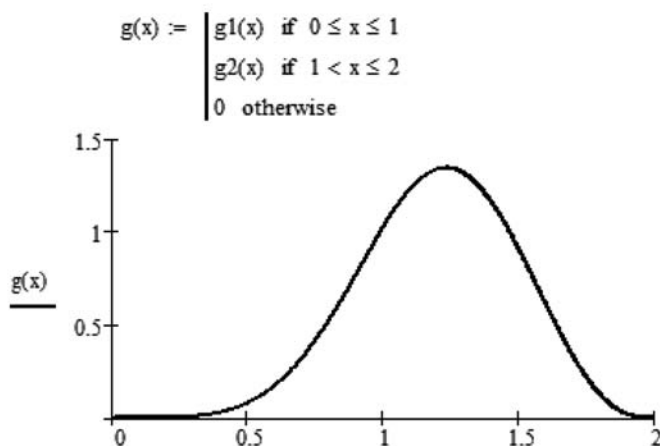


Рис. 3. График функции $g(x)$.

чайной величины ξ . Сначала найдём такое $r > 0$, что стандартная нормальная случайная величина с вероятностью 0,95 попадёт в отрезок $[-r, r]$:

$$r := 1,96 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^r e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0,475.$$

После этого концы искомого интервала находим по следующим формулам:

$$E - r \cdot \sigma = 0,561 \quad E + r \cdot \sigma = 0,639$$

Пункт е) удобнее выполнить при помощи MatLab, поскольку в нём имеются удобные средства создания матриц из случайных чисел и работы с этими матрицами. Возникает трудность с генерацией случайной величины с заданным распределением, поскольку стандартный прием, использующий обратную функцию $F^{-1}(x)$, здесь неприменим: пришлось бы решать уравнение 4-й степени. Воспользуемся другим методом. Пусть случайные точки (x, y) равномерно распределены в прямоугольнике $\Pi = [0, 1] \times [0, 16/9]$; будем оставлять только те точки, у которых $y < f(x)$ (т.е. лежащие под графиком плотности) и брать их x -координаты в качестве нужной нам выборки.

```
(*****)
(*Построение выборки для пункта е*)
m=20;      %количество выборок
n=100;     %объем выборки
X=zeros(m,n); %задаем размер матрицы X
N=220;     %объем исходной выборки с учетом выбраковки
           %(значение N находится экспериментально,
           %чтобы все x получились объема не меньше n)
for i=1:m  %Создание i-ой выборки x:
    x=rand(1,N); y=rand(1,N)*16/9;
    %точки (x,y) равномерно распределены в Π
    z=12*x.*(x-x.*x);
    C=(y<z); %точки с какими номерами попали под график?
    S(i)=sum(C); %сколько точек попали?
    x=x(C); %оставляем x-координаты только таких точек
    x=x(1:n); %и не всех, а только n точек
    X(i,:)=x; %эту выборку пишем в строку матрицы X
end;
ms=min(S)
%если min(s)<n, то ошибка "Index exceeds matrix dimensions"
X      %каждая строка матрицы X – выборка объема n
(*****)
```

Рис. 4. Скрипт программы генерации m выборок объема n .

Приведём текст программы, генерирующей m выборок объёма n (рис. 4):

Приведём пример работы этой программы (для экономии места рассмотрим количество выборок $m = 4$ и объём выборки $n = 10$) (рис. 5). Здесь брали объём выборки «с запасом» $N = 30$.

Далее по полученным выборкам требуется оценить интервал из пункта д). Поскольку был найден 0,95-доверительный интервал для математического ожидания среднего арифметического выборки, в этот интервал ожидается попадание 19 из 20 значений средних арифметических. Чтобы получить значения средних арифметических наших выборок (построчные средние матрицы X), применим команду **sum** суммирования столбцов (предварительно транспонировав матрицу X), затем разделим на n . К вышеприведённому скрипту нужно добавить одну команду (рис. 6):

```
(*****)
(*Результат выполнения*)
ms =
12
X =
0.737 0.381 0.203 0.801 0.769 0.433 0.960 0.140 0.715 0.946
0.501 0.582 0.682 0.872 0.370 0.861 0.595 0.420 0.502 0.535
0.761 0.981 0.487 0.933 0.533 0.700 0.684 0.714 0.742 0.391
0.792 0.409 0.431 0.073 0.808 0.879 0.438 0.889 0.579 0.972
(*****)
```

Рис. 5. Пример работы программы генерации выборок.

```
(*****)
(*Вычисление среднего для пункта е*)
Mx=sum(X')/n %средние по строкам
(*****)
(*Результат выполнения*)
Mx =
Columns 1 through 10
0.564 0.603 0.593 0.629 0.636 0.589 0.593 0.597 0.625 0.604
Columns 11 through 20
0.614 0.548 0.606 0.579 0.607 0.607 0.622 0.570 0.564 0.612
(*****)
```

Рис. 6. Добавочная команда к программе генерации выборок.

Здесь число попаданий в интервал из пункта д) совпало с математическим ожиданием числа таких попаданий, т.е. 19.

Следующий пример относится к дисциплине «Математическая статистика».

Пример 2. Имеется две партии транзисторов, срок службы которых представлен в таблицах 1 и 2.

Таблица 1.

Время работы (в часах) транзисторов из первой партии.

318, 114, 304, 40, 232, 102, 89, 196, 31, 123, 31, 139, 25, 676, 53, 156, 107, 116, 84, 92, 3, 72, 415, 14, 269, 34, 154, 66, 514, 58, 446, 129, 52, 20, 150, 44, 125, 26, 25, 62, 209, 13, 21, 177, 97, 279, 164, 364, 23, 24, 104, 246, 238, 33, 161, 49, 97, 32, 209, 102, 130, 73, 233, 68, 57, 206, 7, 137, 48, 12, 28, 124, 75, 125, 233, 51, 164, 141, 4, 91, 232, 84, 204, 222, 113, 17, 139, 136, 122, 14, 29, 72, 214, 4, 179, 196, 188, 94, 867, 229, 136, 81, 155, 129, 23, 281, 184, 352, 165, 4, 13, 151, 0, 16, 51, 55, 233, 89, 15, 112, 283, 175, 130, 45, 109, 216, 31, 116, 214, 212, 354, 631, 88, 67, 88, 75, 41, 75, 200, 13, 159, 87, 40, 57, 145, 15, 50, 96, 35, 49, 3, 35, 66, 17, 134, 129, 9, 9, 329, 71, 427, 231, 43, 66, 315, 87, 57, 316, 361, 33, 135, 445, 25, 127, 214, 11, 25, 97, 149, 45, 32, 193, 36, 95, 277, 32, 137, 74, 137, 255, 218, 27, 68, 387, 134, 226, 38, 79, 203, 20
--

Таблица 2.

Время работы (в часах) транзисторов из второй партии.

50, 78, 52, 89, 91, 108, 70, 136, 42, 29, 28, 0, 81, 38, 45, 61, 98, 21, 164, 13, 146, 51, 105, 39, 51, 242, 35, 23, 6, 28, 59, 378, 76, 116, 107, 38, 54, 101, 299, 331, 301, 389, 69, 222, 37, 49, 451, 15, 13, 8, 112, 32, 43, 7, 6, 124, 116, 27, 90, 2, 102, 55, 31, 27, 28, 75, 21, 36, 36, 9, 52, 49, 204, 129, 33, 122, 93, 41, 63, 111, 52, 33, 38, 53, 48, 149, 20, 183, 108, 1, 105, 244, 23, 10, 131, 97, 92, 7, 16, 163, 341, 31, 140, 167, 57, 163, 106, 230, 22, 46, 2, 270, 50, 2, 58, 301, 84, 40, 65, 48, 63, 165, 110, 162, 65, 29, 2, 41, 44, 145, 31, 25, 14, 85, 161, 140, 5, 5, 18, 209, 22, 61, 291, 50, 7, 20, 27, 42, 7, 235, 11, 136, 14, 48, 291, 192, 17, 5, 129, 11, 174, 212, 241, 55, 81, 14, 4, 627, 30, 66, 7, 42, 32, 84, 49, 595, 9, 88, 155, 62, 89, 43, 222, 198, 83, 43, 29, 61, 37, 135, 67, 56, 26, 44, 317, 18, 125, 173, 64, 82
--

Требуется сравнить числовые характеристики выборок. Можно ли считать распределения обеих партий одинаковыми? Для каждой выборки проверить гипотезу об экспоненциальном распределении.

Решение. Начнём с построения гистограмм и диаграмм размаха для обеих выборок (рис. 7).

Далее приведены построенные графики для сравнения выборок (рис. 8). Из них видно, что распределения отличаются, но оба должны хорошо приближаться к экспоненциальному закону.

Начнём с проверки гипотезы однородности H_0 по критерию Колмогорова–Смирнова. Этот критерий состоит в следующем. Пусть имеется две независимые выборки X и Y объёмов n и m соответственно, полученные из непрерывных рас-

```

(*****)
(* зададим метки для маркировки графиков *)
label={"Sample1","Sample2"};
(* для сравнения выборок построим парные гистограммы *)
PairedHistogram[sample1,sample2,Automatic,"PDF",PlotTheme->
>"Monochrome",ChartStyle->White,ChartLabels->label]
(* построим диаграмму размаха *)
BoxWhiskerChart[{sample1,sample2},PlotTheme->"Monochrome",AspectRatio-
>1,ChartLabels->label]
(*****)

```

Рис. 7. Скрипт программы построения гистограмм и диаграмм размаха для каждой из выборок.

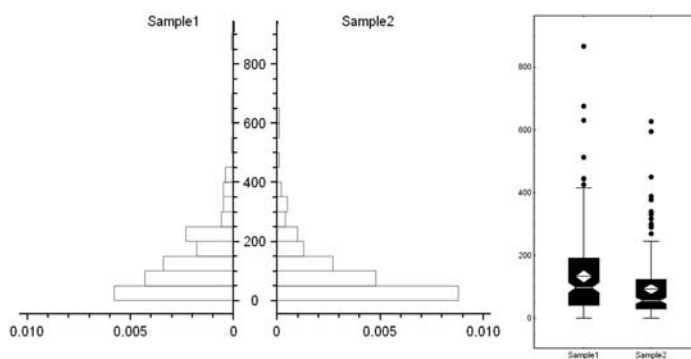


Рис. 8. Гистограммы (а) и диаграммы размаха (б) для каждой из выборок.

пределений. По полученным выборкам стоят их эмпирические функции распределения $\hat{F}_n^X$ и $\hat{F}_m^Y$. Статистика критерия $D_{n,m}$ вычисляется по формуле

$$D_{n,m} = \sup_{x \in R} |\hat{F}_n^X(x) - \hat{F}_m^Y(x)|.$$

Естественно, большие значения статистики свидетельствуют против гипотезы H_0 о равенстве функций распределения выборок X и Y . Поэтому критическая область критерия имеет вид $\{D_{n,m} > c_\alpha\}$, где α – уровень значимости критерия. Значение c_α для больших выборок получается из следующего хорошо известного результата.

Согласно теореме Смирнова, для любого $t > 0$

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \sqrt{\frac{mn}{m+n}} D_{n,m} < t \right\} = K(t) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (-1)^j e^{-2j^2 t^2}.$$

Функция распределения $K(t)$ соответствует закону распределения Колмогорова, её значения берутся из таблиц.

```

(*****)
Dist1=EmpiricalDistribution[sample1];
Dist2=EmpiricalDistribution[sample2];
Plot[{CDF[Dist1,x],CDF[Dist2,x]},{x,0,600},PlotTheme->"Monochrome",AxesOrigin-
>{0,0},PlotLegends->{"Sample1","Sample2"},PlotStyle->{Automatic,{Thick,Dotted}}]
(*****)

```

Рис. 9. Построение эмпирических функций распределения.

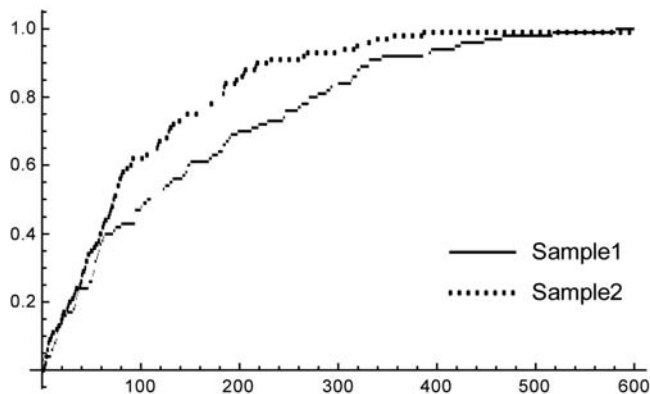


Рис. 10. Графики эмпирических функций распределения для обеих выборок.

```

(*****)
(*вычислим статистику  $D_{n,m}$  *)
KSSStat=N[Max[Table[Abs[CDF[Dist1,x]-CDF[Dist2,x]],
{x,Join[sample1,sample2]}]]]
(*зададим функцию  $K(t)$  и обратную к ней функцию *)
K[x_]:=EllipticTheta[4,0,E^(-2 x^2);
InverseK[p_]:=Re[Select[u/.Solve[K[u]==p,u],
Re[#]>0&&Im[#]==0&]]][[1]]
(*вычислим объемы выборок *)
m=Length[sample1];
n=Length[sample2];
(*теперь найдем критическое значение *)
c=InverseK[0.95]/Sqrt[n m/(n+m)]
(*****)
(*значение статистики  $D_{n,m}$  *)
0.19
(*критическое значение *)
0.13581
(*****)

```

Рис. 11. Значение статистики Колмогорова–Смирнова и ее критическое значение.

```

(*****)
(*проверка критерия хи-квадрат для первой выборки *)
PearsonChiSquareTest[sample1,ExponentialDistribution[a1],
"TestDataTable"]

Statistic      P-Value
Pearson  $\chi^2$  16.07      0.377415

(*проверка критерия хи-квадрат для второй выборки *)
PearsonChiSquareTest[sample2,ExponentialDistribution[a2],
"TestDataTable"]

Statistic      P-Value
Pearson  $\chi^2$  13.86      0.536173

(*****)

```

Рис. 12. Скрипт программы проверки по критерию хи-квадрат гипотезы о виде распределения.

Критерий Смирнова уровня значимости α состоит в том, что вычисленное значение статистики $D_{n,m}$ сравнивается величиной $c_\alpha = k_{1-\alpha} \sqrt{\frac{n+m}{nm}}$, где $k_{1-\alpha}$ – квантиль уровня $1 - \alpha$ распределения Колмогорова $K(t)$. Если вычисленное значение $D_{n,m} > c_\alpha$, то гипотеза H_0 отклоняется.

Расчёт критерия Колмогорова–Смирнова будем проводить в системе Mathematica. Начнём с того, что зададим эмпирические распределения для выборок и построим графики $\hat{F}_n^X$ и $\hat{F}_m^Y$ (рис. 9).

Как видно из приведённых графиков (рис. 10), функции распределения не очень близки.

Вычислим статистику Колмогорова–Смирнова и её критическое значение (рис. 11).

Так как полученное значение статистики больше критического, то гипотезу H_0 следует отклонить.

Теперь проверим гипотезу об экспоненциальном распределении для каждой из выборок по критерию хи-квадрат (рис. 12).

Так как для обеих выборок полученные p-value больше уровня значимости α , то гипотеза об экспоненциальном распределении принимается для каждой из выборок.

Заключение

Использование в учебном процессе интерактивных компьютерных систем позволяет достаточно эффективно, быстро и с большой точностью решать инженерные задачи с применением вероятностно-статистических методов, обычно требующих большого объёма вычислений. Возможности таких систем огромны и владение ими существенно активизирует освоение математических понятий и методов решения задач. Применение математических пакетов является осо-

бенно обоснованным, когда речь идёт о средних и больших выборках, так как вычисления могут быть очень громоздкими. Однако с помощью систем компьютерной математики и встроенных процедур вычисления проводятся достаточно просто.

Разумная интеграция традиционных учебных занятий и математических пакетов, создающая таким образом информационную среду, позволяет сделать процесс обучения гораздо интереснее, продуктивнее и способствует формированию у студентов глубоких и прочных знаний, умений и навыков.

ЛИТЕРАТУРА

1. Теория вероятностей: учебник для втузов / Печинкин А.В., Тескин О.И., Цветкова Г.М. и др.; ред. Зарубин В.С., Крищенко А.П. – 4-е изд., стер. М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. 455 с. (Математика в техническом университете, вып. XVI).
2. Математическая статистика / Горяинов В.Б., Павлов И.В., Цветкова Г.М. и др.; ред. Зарубин В.С., Крищенко А.П. – 3-е изд., перераб. и доп. М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. 424 с.
3. Случайные процессы: учебник для втузов / Волков И.К., Зуев С.М., Цветкова Г.М.; ред. Зарубин В.С., Крищенко А.П. М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. 447 с. (Математика в техническом университете, вып. XVIII).
4. Меженная Н.М. Основы теории вероятностей и математической статистики: курс лекций [Электронный ресурс]. URL: <http://ebooks.bmstu.ru/catalog/241/book1530.html> (дата обращения: 06.07.2017).
5. Меженная Н.М. Оценивание параметров. Проверка гипотез [Электронный ресурс]. URL: <http://ebooks.bmstu.ru/catalog/241/book1448.html> (дата обращения: 06.07.2017).
6. Будовская Л.М., Тимонин В.И. Использование компьютерных технологий в преподавании математики // Инженерный журнал: наука и инновации. Электронное научно-техническое издание. 2013. вып. 5. URL: <http://engjournal.ru/catalog/pedagogika/hidden/736.html>
7. Лукашенко А.Г. Опыт использования системы MathCAD 11 при обучении высшей математике // Математика в высшем образовании. 2005. №3. С. 53–64.
8. Власова Е.А., Попов В.С., Пугачев О.В. Использование электронных математических пакетов при обучении высшей математике // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2016. № 3. С. 120–132.
9. Wolfram Language & System. Documentation center. [Электронный ресурс]. URL: <http://reference.wolfram.com/language/?source=nav> (дата обращения: 04.07.2017)

REFERENCES

1. Pechinkin A.V., Teskin O.I., Tsvetkova G.M., et al. *Teoriya veroyatnostei: uchebnik dlya vtuzov* [Probability theory: textbook for technical colleges]. Moscow, BMSTU Publ., 2006, 455 p.
2. Goryainov V.B., Pavlov I.V., Tsvetkova G.M., et al.; Zarubin V.S. *Matematicheskaya statistika* [Mathematical statistics]. Moscow, BMSTU Publ., 2008. 424 p.
3. Volkov I.K., Zuev M.S., Tsvetkova G.M. *Sluchainye protsessy: uchebnik dlya vtuzov* [Random processes: a textbook for technical colleges]. Moscow, BMSTU Publ., 2006. 447 p.
4. Mezhenaya N.M. *Osnovy teorii veroyatnostei i matematicheskoi statistiki: kurs lektsii* [Fundamentals of the theory of probability and mathematical statistics: a course of lectures]. Available at: <http://ebooks.bmstu.ru/catalog/241/book1530.html> (accessed: 06.07.2017)

5. Mezhenaya N.M. *Otsenivanie parametrov. Proverka gipotez* [Estimation of the parameters. Test of hypotheses]. Available at: <http://ebooks.bmstu.ru/catalog/241/book1448.html> (accessed: 06.07.2017)
6. Budovskaya L.M., Timonin V.I. [The use of computer technology in teaching mathematics]. In: *Inzhenernyi zhurnal: nauka i innovatsii. Elektronnoe nauchno-tekhnicheskoe izdanie*. [Engineering journal: science and innovation. Electronic science and engineering publications], 2013, vol. 5. Available at: <http://engjournal.ru/catalog/pedagogika/hidden/736.html> (accessed: 06.07.2017)
7. Lukashenko A.G. [Experience in the use of MathCAD 11 in teaching higher mathematics] In: *Matematika v vysshem obrazovanii* [Mathematics in Higher Education], 2005, no. 3, pp. 53–64.
8. Vlasova E.A., Popov V.S., Pugachev O.V. [The use of electronic mathematical software when teaching mathematics] In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika* [Bulletin of Moscow Region State University], 2016, no. 3, pp. 120–132.
9. Wolfram Language & System. Documentation center. Available at: <http://reference.wolfram.com/language/?source=nav> (accessed: 04.07.2017)

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Власова Елена Александровна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры ФН2 «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана;
e-mail: elena.a.vlasova@yandex.ru;

Меженная Наталья Михайловна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры ФН2 «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана;
e-mail: natalia.mezhennaya@gmail.com;

Попов Владимир Семенович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры ФН2 «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана;
e-mail: vspopov@bk.ru;

Пугачев Олег Всеволодович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры ФН2 «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана;
e-mail: opugachev@yandex.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Elena A. Vlasova – PhD in Physico-mathematical sciences, associate professor at the Department of Applied Mathematics, Bauman Moscow State Technical University;
e-mail: elena.a.vlasova@yandex.ru;

Natalia M. Mezhenaya – PhD in Physico-mathematical sciences, associate professor at the Department of Applied Mathematics, Bauman Moscow State Technical University;
e-mail: Natalia.mezhennaya@gmail.com;

Vladimir S. Popov – PhD in Physico-mathematical sciences, associate professor at the Department of Applied Mathematics, Bauman Moscow State Technical University;
e-mail: vspopov@bk.ru;

Oleg V. Pugachev – Doctor in Physico-mathematical sciences, professor at the Department of Applied Mathematics, Bauman Moscow State Technical University;
e-mail: opugachev@yandex.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Власова Е.А., Меженная Н.М., Попов В.С., Пугачев О.В. Использование математических пакетов в рамках методического обеспечения вероятностных дисциплин в техническом университете // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2017. № 4. С. 114–128.
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-4-114-128

FOR CITATION

Vlasova E.A., Mezhenneya N.M., Popov V.S., Pugachev O.V. The use of mathematical packages in the framework of methodological support of probabilistic disciplines in a technical university. In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*. 2017, no 4, pp. 114–128.
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-4-114-128

УДК 621.38(076)

DOI: 10.18384/2310-7251-2017-4-129-138

МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ИЗУЧЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ «ФИЗИЧЕСКАЯ ЭЛЕКТРОНИКА» БАКАЛАВРАМИ ПЕДАГОГИЧЕСКОГО НАПРАВЛЕНИЯ ПОДГОТОВКИ

Емельянов В.А.*Московский государственный областной университет**105005, г. Москва, улица Радио, д.10А, Российская Федерация*

Аннотация. В работе обобщён опыт преподавания дисциплины «Физическая электроника» студентам направления подготовки «Педагогическое образование», профиля «Физика и информатика». Показано место дисциплины в пределах педагогического образования. Указана значимость в формировании у студентов способностей использовать естественнонаучные и математические знания для ориентирования в современном информационном пространстве. Представлены методы организации аудиторной и самостоятельной работы студентов, а также критерии оценивания результатов в рамках балльно-рейтинговой системы.

Ключевые слова: физическая электроника, балльно-рейтинговая система, лабораторная работа, расчётно-графическое задание, критерии оценивания.

METHODICAL ASPECTS OF STUDYING DISCIPLINE “PHYSICAL ELECTRONICS” WITH BACHELORS OF PEDAGOGICAL DIRECTION OF TRAINING

V. Emelyanov*Moscow Region State University**ul. Radio 10A, 105005 Moscow, Russian Federation*

Abstract. The paper summarizes the experience of teaching the discipline “Physical Electronics” to students in the field of training “Pedagogical Education”, the profile of “Physics and Informatics”. The place of discipline within pedagogical education is shown. The importance in the formation of students’ abilities to use natural-science and mathematical knowledge for orientation in the modern information space is indicated. Methods of organization of classroom and independent work of students, as well as criteria for evaluating results within the rating-rating system are presented.

Key words: physical electronics, score-rating system, laboratory work, calculation and graphical task, evaluation criteria.

Под физической электроникой понимают обширную область науки и техники, базирующуюся на изучении физических явлений, связанных с протеканием электрического тока в полупроводниках, вакууме, газе и т.д., для создания на их

основе новых электронных приборов и устройств. Электроника прочно вошла в самые различные сферы деятельности человека.

Возникновению электроники предшествовало изобретение радио в конце XIX в. Электроника решала задачи, связанные с генерированием, усилением и преобразованием электрических сигналов на базе электронных ламп. Однако настоящее развитие электроники началось в 1947 г. с изобретением полупроводникового триода – транзистора, который по своим техническим параметрам превосходил электронные лампы.

Транзисторы имеют меньшие размеры, высокую механическую прочность, экономичность и ряд других достоинств.

Следующий этап развития обусловлен переходом электронной аппаратуры на интегральные микросхемы. Электроника стала основой компьютерной техники.

Развитие электроники продолжается и в настоящее время, стимулируя прогресс во многих областях науки и техники.

Объём времени, направление и профиль подготовки определили круг рассматриваемых вопросов. Приоритет отдан рассмотрению полупроводниковых материалов и полупроводниковых приборов, а также аналоговых и цифровых устройств, работающих на базе полупроводниковых приборов.

Основными целями изучения дисциплины являются овладение студентами действенными знаниями о сущности электромагнитных процессов в электронных устройствах, изучение принципов действия и характеристик полупроводниковых приборов, типовых функциональных узлов электронных устройств и принципов их применения в информационных системах.

Задачи освоения дисциплины – изучение основных понятий, явлений и законов физической электроники, а также освоение основных методов анализа электронных устройств; формирование научного мышления и владения методами оценки достоверности результатов, полученных с помощью экспериментальных исследований; ознакомление со структурой, основными характеристиками и принципами работы электронных устройств; практическое изучение способов проведения электрических измерений.

В результате изучения дисциплины обучающийся должен:

- узнать основные научные факты, понятия, законы, связанные с протеканием электрического тока в чистых, примесных полупроводниках и полупроводниковых структурах в рамках современной естественнонаучной картины мира;
- освоить теоретические и практические основы исследовательской деятельности;
- научиться применять естественнонаучные знания в учебной, профессиональной и исследовательской деятельности;
- овладеть методологией и методами физического эксперимента; навыками определения целей и способов, адекватных поставленным задачам исследования.

В результате изучения «Физической электроники» у студента на основе полученных знаний, умений и навыков должны быть сформированы следующие компетенции:

- способность использовать естественнонаучные и математические знания для ориентирования в современном информационном пространстве;
- способность руководить учебно-исследовательской деятельностью обучающихся.

Содержание дисциплины включает восемь тем (табл. 1). Изучение тем предусматривает выполнение лабораторных, расчётных работ. Оценка результатов освоения дисциплины проводится на основе балльно-рейтинговой системы [1]. По каждой теме (модулю) предусмотрено выполнение лабораторной работы [2] (табл. 1).

Таблица 1.
Наименования тем дисциплины и лабораторных работ

Темы	Лабораторные работы
1. Физические основы работы полупроводниковых приборов.	1. Изучение вольтамперной характеристики полупроводникового диода и стабилитрона.
2. Полупроводниковые диоды.	
3. Полевые транзисторы.	2. Изучение полевого транзистора.
4. Биполярные транзисторы.	3. Изучение биполярного транзистора.
5. Электронные усилители.	4. Изучение резисторного усилителя напряжения.
6. Логические элементы цифровых устройств.	5. Изучение основных логических элементов.
7. Базовые логические элементы.	
8. Цифровые устройства последовательностного типа.	6. Изучение триггеров RS , D и T типов. 7. Изучение параллельного и последовательного регистров.

Каждому лабораторному занятию предшествует самостоятельная подготовка студента [3; 4], включающая:

- а) ознакомление с содержанием лабораторной работы по методическому пособию;
- б) изучение теоретического материала по рекомендованным учебникам;
- в) составление конспекта, который должен содержать название лабораторной работы, её цель и задачи; краткое описание теории; описание установки и метода измерений; таблицы для записи результатов измерений. Краткая теория должна содержать основные определения, законы, расчётные формулы с расшифровкой всех буквенных обозначений.

Для получения допуска студент должен показать понимание исследуемых в работе физических явлений, принципов действия полупроводниковых проборов, аналоговых и цифровых устройств; усвоение им метода определения искомых величин. Получившие допуск студенты приступают к выполнению практической части работы.

Полученные экспериментальные данные представляются преподавателю. В оставшееся время на занятии студент занимается расчётами, оформляет отчёт по лабораторной работе. Полностью оформленный в рабочей тетради отчёт предъявляется преподавателю на защите лабораторной работы. Отчёт должен содержать: конспект; таблицы с результатами измерений и расчётов; графики; итоги работы (основные результаты и выводы). Вывод делается на основе анализа обнаруженных в работе закономерностей, сравнении полученных результатов с теоретическими.

Максимальная сумма баллов, которые студент может набрать за лабораторные работы, равняется 35 баллам (всего 7 лабораторных работ, до 5 баллов за одну лабораторную работу). В таблице 2 представлены критерии оценивания лабораторной работы.

Таблица 2.
Критерии оценивания лабораторной работы

Уровни оценивания	Критерии оценивания	Баллы
Высокий	Все лабораторные задания выполнены полностью. Необходимые измерения проведены в условиях, обеспечивающих наименьшую погрешность. Необходимые расчёты выполнены без ошибок. В отчёте правильно и аккуратно представлены все таблицы, чертежи, графики и сделаны выводы. Соблюдена инструкция по охране труда.	5
Оптимальный	Лабораторные задания выполнены полностью, но измерения проведены в условиях, не обеспечивающих наименьшую погрешность, или были допущены два-три недочёта, или была допущена одна негрубая ошибка в расчётах.	4
Удовлетворительный	Лабораторные задания выполнены не полностью, но полученные результаты позволяют сделать правильный вывод, или измерения проводились в условиях, которые привели к результату с большой погрешностью, или в отчёте были допущены не более двух ошибок (в записи единиц измерения, в вычислениях, графиках, таблицах, схемах и т.д.)	3
Неудовлетворительный	Лабораторные задания выполнены не полностью, и полученные результаты не позволяют сделать правильный вывод. Необходимые измерения и вычисления производились неправильно.	0-2

Программа дисциплины «Физическая электроника» предусматривает проведение трёх контрольных мероприятий в форме домашнего задания (расчётно-графические задания (РГЗ)). Ниже представлены возможные расчётно-графические задания для проверки и закрепления знаний, полученных студентами [5–7].

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ № 1

1. Объясните различие энергетических состояний в изолированном атоме и кристалле.
2. Как изменится энергетическая диаграмма валентных электронов, если количество образующих кристалл атомов увеличить в 2 раза?
3. Объясните с точки зрения зонной теории различие в электрических свойствах диэлектриков, полупроводников и металлов.
4. Объясните механизм дырочной проводимости чистых полупроводников.
5. Объясните с точки зрения зонной теории электрические свойства полупроводников.
6. Определите, во сколько раз возрастёт удельная проводимость германия при нагревании от 0 до 17 °С. Ширину запрещённой зоны принять равной 0,72 эВ.
7. Определите ширину запрещённой зоны чистого полупроводника, если при температурах T_1 его сопротивление равно R_1 , а при $T_2 - R_2$ ($T_1 > T_2$).
8. В чистый кремний введена примесь бора. Определите и объясните тип проводимости примесного полупроводника.
9. Изобразите энергетические зонные диаграммы полупроводников n - и p -типа и объясните механизм их проводимости.
10. Нарисуйте и объясните на зонной схеме положение уровня Ферми для полупроводника n -типа при 1) $T = 0$ К, 2) $T > 0$ К.

РАСЧЁТНО-ГРАФИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ № 2

1. Опишите физические процессы, происходящие в p - n -переходе.
2. Какое направление и почему в p - n -переходе для тока является пропускным, если внешнее и контактное поля: 1) совпадают по направлению, 2) противоположны по направлению?
3. Опишите физические процессы, происходящие на контакте металла с полупроводником p -типа для случаев: 1) $A_M > A_n$, 2) $A_M < A_n$ (A_M – работа выхода из металла, A_n – работа выхода из полупроводника).
4. Рассчитайте и постройте прямую ($U_{пр} = 0 \dots 300$ мВ (5 точек)) и обратную ($U_{обр} = 0 \dots 100$ В (5 точек)) вольтамперную характеристику выпрямительного диода $I = f(U)$ при температуре окружающей среды 20 °С.
5. Обратный ток насыщения кремниевого диода равен 0,1 мкА, а германиевого – 1 мкА. Вычислите прямые напряжения диодов при протекании через них тока 100 мА.
6. Определите напряжение, при котором обратный ток диода будет составлять 70% от тока насыщения. Температура $T = 298$ К.
7. На рисунке 2.1 изображена схема параметрического выпрямителя, поддерживающего на нагрузке $R_n = 1$ кОм напряжение $U_n = 10$ В. Определите ми-

нимальное $U_{\text{вхmin}}$ и максимальное $U_{\text{вхmax}}$ значения входного напряжения, если минимальный ток стабилитрона $I_{\text{стmin}} = 1$ мА, а максимальный $I_{\text{стmax}} = 30$ мА. Сопротивление балластного резистора $R_6 = 0,5$ кОм.

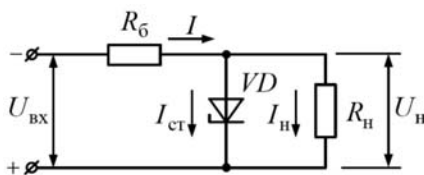


Рис. 2.1.

8. Нарисуйте и объясните проходные и выходные характеристики полевого транзистора с управляющим p - n -переходом.

9. Используя входную и выходные характеристики биполярного транзистора, включённого по схеме с общим эмиттером (рис. 2.2), определить коэффициент усиления по току h_{21} , значение напряжения на коллекторе $U_{\text{кз}}$, мощность, выделяемую на нагрузочном сопротивлении $R_{\text{к}}$, если напряжение на базе $U_6 = 0,4$ В, значение сопротивления нагрузки $R_{\text{к}} = 50$ Ом и напряжение источника питания $E_{\text{к}} = 20$ В.

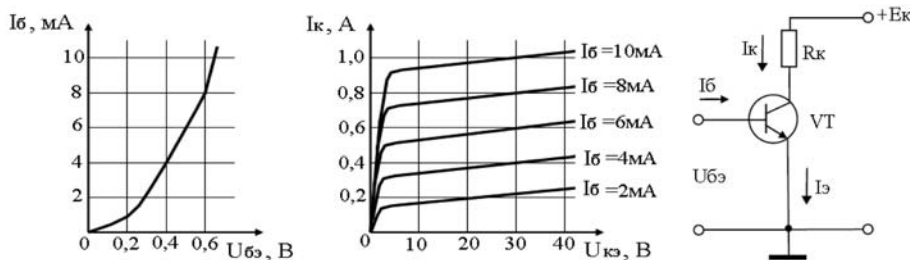


Рис. 2.2.

10. Изобразите схему аperiodического усилителя и объясните назначение элементов.

РАСЧЁТНО-ГРАФИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ № 3

1. На рис. 3.1 представлена временная диаграмма входных сигналов элемента И. Изобразите временную диаграмму выходного сигнала.

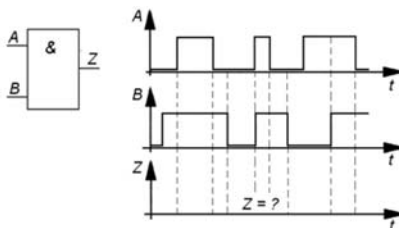


Рис. 3.1.

2. Из логических элементов ИЛИ-НЕ синтезируйте и нарисуйте схему устройства, реализующего логическое умножение.

3. Из логических элементов И, ИЛИ и НЕ синтезируйте и нарисуйте схему устройства, реализующего уравнение $Z = (A \cdot B) \oplus (A + B)$.

4. На рис. 3.2 представлены временные диаграммы входных сигналов A и B и выходного сигнала Z неизвестного элемента. Какую логическую операцию реализует этот элемент?

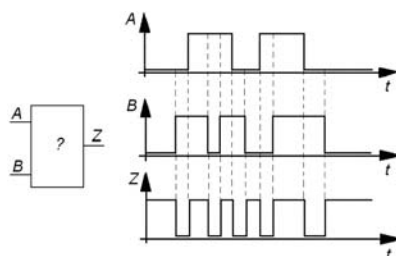


Рис. 3.2.

5. Составьте уравнение и таблицу истинности для схемы, изображенной на рис. 3.3.

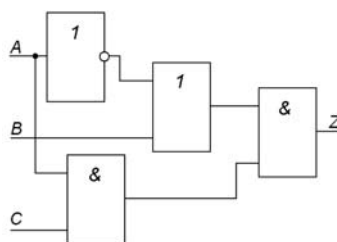


Рис. 3.3.

6. На рис. 3.4 представлены временные диаграммы входных сигналов асинхронного RS-триггера с прямыми входами. Изобразите временную диаграмму выходных сигналов.

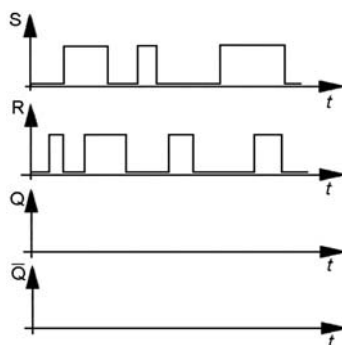


Рис. 3.4.

7. Начертите схему, условное обозначение и объясните принцип действия 4-х разрядного последовательного регистра.

8. На информационный вход последовательного четырехразрядного регистра подана последовательно комбинация логических сигналов 11001101. Определите состояния триггеров регистра после 5 синхронизирующего импульса.

9. Изобразите временные диаграммы записи двоичного числа 1101 в последовательный четырехразрядный регистр. Запись осуществляется по фронту синхроимпульса.

10. Начертите временные диаграммы записи двоичного числа 0110 в параллельный четырёхрядный регистр. Запись осуществляется по фронту синхроимпульса.

Максимальная сумма баллов, которые студент может набрать за решения РГЗ, равняется 15 баллам (всего 3 работы, до 5 баллов за одну работу). В таблице 3 представлены критерии оценивания одной задачи из РГЗ.

Таблица 3.
Критерии оценивания задачи РГЗ

Уровни оценивания	Критерии оценивания	Баллы
Высокий	Правильный, исчерпывающий, конкретный ответ на поставленный вопрос; хорошее владение терминологией. Записаны формулы, применение которых необходимо для решения задачи, и проведены необходимые математические преобразования и расчёты, приводящие к правильному числовому ответу. Представленный схематический рисунок, схема или график не содержат ошибок.	0,5
Оптимальный	Неточности в ответе; наличие двусмысленного или предельно обобщённого ответа на вопрос. Представленное решение содержит один из следующих недостатков: – допущены ошибки в математических вычислениях; – представлено правильное решение в общем виде без вычислений; Представленный схематический рисунок, схема или график содержит неточность или одну ошибку.	0,4
Удовлетворительный	Наличие в ответе более двух грубых ошибок; представленная в ответе информация имеет поверхностный характер; несоответствие ответа поставленному вопросу; неконкретность ответа на вопрос. Представленное решение содержит один из следующих недостатков: – допущены ошибки в математических преобразованиях, отсутствуют расчёты; – представлено правильное решение, но допущена ошибка в определении данных по графику; – записаны не все формулы, необходимые для решения задачи, или одна из них записана с ошибкой. Представленный схематический рисунок, схема или график содержит не более двух ошибок.	0,3
Неудовлетворительный	Наличие принципиальных ошибок в ответах или отсутствие; полное незнание терминологии.	0–0,2

Таким образом, за выполнение лабораторных работ, решения РГЗ студент может получить до 50 баллов, за посещение лекционных и лабораторных занятий ещё до 10 баллов. Остальные 40 баллов студент может набрать на зачёте. Итоговая оценка выставляется исходя из максимальной суммы набранных баллов.

Заключение

В учебные планы подготовки педагогов физических и математических профилей включены лабораторные и самостоятельная работы. Именно при выполнении лабораторной работы у студентов формируются навыки руководителя учебно-исследовательской деятельностью обучающихся, умение формулировать цели, задачи, делать правильные выводы. Решение РГЗ стимулирует поиск нужной информации, развивая способность ориентирования в современном информационном пространстве. Оценка приобретенных знаний и умений студентов требует продуманной балльно-рейтинговой системы оценок.

ЛИТЕРАТУРА

1. Положения о балльно-рейтинговой системе оценки успеваемости студентов МГОУ : протокол заседания УМС от 26.11.2012 г. № 03, протокол заседания УС от 27.12.2012 г. № 04 [Электронный ресурс]. URL: http://txts.mgou.ru/17.10.2017/ballno_reyt_sistema.pdf (дата обращения: 05.12.2017).
2. Емельянов В.А. Физическая электроника. Лабораторный практикум М.: МГОУ, 2016. 64 с.
3. Бугримов А.Л. Методические рекомендации по проведению лабораторных работ и практических занятий / А.Л. Бугримов, Т.Н. Грань, С.А. Холина. М.: МГОУ, 2014. 10 с.
4. Бугримов А.Л. Методические рекомендации по организации внеаудиторной самостоятельной работы обучающихся / А.Л. Бугримов, Т.Н. Грань, С.А. Холина. М.: МГОУ, 2014. 12 с.
5. Трофимова Т.И. Сборник задач по курсу физики для втузов. М.: «ОНИКС 21 век», 2005. 384 с.
6. Задачи на диоды [Электронный ресурс]. URL: <https://studfiles.net/preview/1700326/> (дата обращения: 5.12.2017).
7. РГЗ Задачи по транзисторам [Электронный ресурс]. URL: <https://studfiles.net/preview/2113870/> (дата обращения: 5.12.2017).

REFERENCES

1. *Polozheniya o ball'no-reitingovoi sisteme otsenki uspevaemosti studentov MGOU : protokol zasedaniya UMS ot 26.11.2012 g. № 03, protokol zasedaniya US ot 27.12.2012 g. № 04* [The provisions on point-rating system of student assessment MRSU : minutes of the meeting of EMC from 26.11.2012, № 03, minutes of the meeting of the EC from 27.12.2012 № 04]. Available at: http://txts.mgou.ru/17.10.2017/ballno_reyt_sistema.pdf (accessed: 05.12.2017).
2. Emel'yanov V.A. *Fizicheskaya elektronika. Laboratornyi praktikum* [Physical electronics. Laboratory course]. Moscow, MRSU Ed. off. Publ., 2016, 64 p.
3. Bugrimov A.L., Gran' T.N., Kholina S.A. *Metodicheskie rekomendatsii po provedeniyu laboratornykh rabot i prakticheskikh zanyatii* [Methodical recommendations on conducting of laboratory works and practical classes]. Moscow, MRSU Ed. off. Publ., 2014, 10 p.

4. Bugrimov A.L., Gran' T.N., Kholina S.A. *Metodicheskie rekomendatsii po organizatsii vneauditornoj samostoyatel'noi raboty obuchayushchikhsya* [Methodical recommendations on the organization of extracurricular independent work of students]. Moscow, MRSU Ed. off. Publ., 2014, 12 p.
5. Trofimova T.I. *Sbornik zadach po kursu fiziki dlya vtuzov* [Collection of problems on physics course for technical colleges]. Moscow, ONIKS 21 vek Publ., 2005. 384 p.
6. *Zadachi na diody* [Tasks about diodes]. Available at: <https://studfiles.net/preview/1700326/> (accessed: 5.12.2017)
7. *RGZ Zadachi po tranzistoram* [RGZ task of transistors]. Available at: <https://studfiles.net/preview/2113870/> (accessed: 5.12.2017)

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Емельянов Владимир Анатольевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей физики Московского государственного областного университета;
e-mail: vladanemel@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Vladimir A. Yemelyanov – PhD in Physico-mathematical sciences, associate professor at the Department of General Physics, Moscow Region State University;
e-mail: vladanemel@mail.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Емельянов В.А. Методические аспекты изучения дисциплины «Физическая электроника» бакалаврами педагогического направления подготовки // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2017. № 4. С. 129–138.

DOI: 10.18384/2310-7251-2017-4-129-138

FOR CITATION

Emelyanov V.A. Methodical aspects of studying discipline “Physical electronics” with bachelors of pedagogical direction of training. In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*. 2017. no. 4. pp. 129–138.

DOI: 10.18384/2310-7251-2017-4-129-138



ВЕСТНИК МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ОБЛАСТНОГО УНИВЕРСИТЕТА

Научный журнал «Вестник Московского государственного областного университета» основан в 1998 г. Выпускается десять серий журнала: «История и политические науки», «Экономика», «Юриспруденция», «Философские науки», «Естественные науки», «Русская филология», «Физика-математика», «Лингвистика», «Психологические науки», «Педагогика». Все серии включены в составленный Высшей аттестационной комиссией Перечень ведущих рецензируемых научных журналов, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертации на соискание ученой степени доктора и кандидата наук по наукам, соответствующим названию серии. Журнал включен в базу данных Российского индекса научного цитирования (РИНЦ).

Печатная версия журнала зарегистрирована в Федеральной службе по надзору за соблюдением законодательства в сфере массовых коммуникаций и охране культурного наследия. Полнотекстовая версия журнала доступна в Интернете на платформе Научной электронной библиотеки (www.elibrary.ru), а также на сайте журнала www.vestnik-mgou.ru.

ВЕСТНИК МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ОБЛАСТНОГО УНИВЕРСИТЕТА

СЕРИЯ: ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА
2017. № 4

Над номером работали:

Литературный редактор М.С. Тарасова
Переводчик И.А. Улиткин
Корректор М.С. Тарасова
Компьютерная верстка Н.Н. Жильцов

Отдел по изданию научного журнала
«Вестник Московского государственного областного университета»
Информационно-издательского управления МГОУ
105005, г. Москва, ул. Радио, д. 10А, офис 98
тел. (495) 723-56-31; (495) 780-09-42 (доб. 6101)
e-mail: vest_mgou@mail.ru
сайт: www.vestnik-mgou.ru

Формат 70x108/16. Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура «Minion Pro».
Тираж 500 экз. Уч.-изд. л. 8,5, усл. п. л. 8,75.
Подписано в печать: 28.12.2017. Дата выхода в свет: 11.01.2017. Заказ № 2017/12-14.
Отпечатано в ИИУ МГОУ
105005, г. Москва, ул. Радио, 10А