

ISSN 2072-8387 (print)
ISSN 2310-7251 (online)



Вестник

МОСКОВСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
ОБЛАСТНОГО
УНИВЕРСИТЕТА

Серия

ФИЗИКА-
МАТЕМАТИКА

ОСОБЕННОСТИ ФОРМИРОВАНИЯ
МИКРОСТРУКТУРЫ ЖИДКОКРИСТАЛЛИЧЕСКИХ
КОМПОЗИТОВ НА ОСНОВЕ БОРОСИЛОКСАНА

ТЕМПЕРАТУРНЫЕ ЭФФЕКТЫ ВО ВТОРОЙ
ЗАДАЧЕ СТОКСА

О РОЖДАЮЩИХСЯ ИЗ БЕСКОНЕЧНОСТИ
ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛАХ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО
УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ОКРУЖНОСТИ



2017/ № 2

ВЕСТНИК
МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
ОБЛАСТНОГО УНИВЕРСИТЕТА

ISSN 2072-8387 (print)

2017 / № 2

ISSN 2310-7251 (online)

серия

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА

Научный журнал основан в 1998 г.

Журнал «Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика» включён в «Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук» Высшей аттестационной комиссии при Министерстве образования и науки Российской Федерации (См.: Список журналов на сайте ВАК при Минобрнауки России) по наукам: Математика (01.01.00); Физика (01.04.00); Педагогические науки (13.00.00).

The academic journal is established in 1998

«Bulletin of Moscow State Regional University. Series: Physics and Mathematics» is included by the Supreme Certifying Commission of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation into “the List of leading reviewed academic journals and periodicals recommended for publishing in corresponding series basic research thesis results for a Ph.D. Candidate or Doctorate Degree” (See: the online List of journals at the site of the Supreme Certifying Commission of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation) in Physics and Mathematics: Mathematics (01.01.00); Physics (01.04.00); Pedagogics (13.00.00).

ISSN 2072-8387 (print)

2017 / № 2

ISSN 2310-7251 (online)

series

PHYSICS AND MATHEMATICS

BULLETIN OF THE MOSCOW STATE
REGIONAL UNIVERSITY

Учредитель журнала «Вестник Московского государственного областного университета»:

Государственное образовательное учреждение высшего образования Московской области

Московский государственный областной университет

Выходит 4 раза в год

Редакционно-издательский совет «Вестника Московского государственного областного университета»

Хроменков П.Н. – к.филол.н., проф., ректор МГОУ (председатель совета)

Ефремова Е.С. – к. филол. н., и.о. проректора по научной работе МГОУ (зам. председателя);

Клычников В.М. – к.ю.н., к.и.н., проф., проректор по учебной работе и международному сотрудничеству МГОУ (зам. председателя)

Антонова Л.Н. – д.пед.н., проф., академик РАО, Комитет Совета Федерации по науке, образованию и культуре

Асмолов А.Г. – д.псх.н., проф., академик РАО, директор Федерального института развития образования

Климов С.Н. – д.ф.н., проф., Московский государственный университет путей сообщения (МИИТ)

Клобуков Е.В. – д. филол. н., проф., Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Манойло А.В. – д.пол.н., проф., МГУ им. М.В. Ломоносова

Новоселов А.Л. – д.э.н., проф., Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова

Пасечник В.В. – д.пед.н., проф., МГОУ

Поляков Ю.М. – к. филол. н., главный редактор «Литературной газеты»

Рюмцев Е.И. – д.ф.-м.н., проф., Санкт-Петербургский государственный университет

Хухуни Г.Т. – д.филол.н., проф., МГОУ

Чистякова С.Н. – д. пед. н., проф., Российская академия образования (г. Москва)

Редакционная коллегия серии «Физика-Математика»

Ответственный редактор серии:

Бугаев А.С. – д. ф.-м. н., академик РАН, МФТИ

Заместитель ответственного редактора:

Жачкин В.А. – д.ф.-м.н., проф., МГОУ

Ответственный секретарь:

Васильчикова Е.Н. – к. ф.-м. н., доц., МГОУ

Члены редакционной коллегии:

Беляев В.В. – д.т.н., проф., МГОУ;

Богданов Д.Л. – д. ф.-м. н., проф., МГОУ;

Бугримов А.Л. – д. т. н., проф., МГОУ;

Рассудовская М.М. – к.п.н., проф., МГОУ;

Осипов М.А. – д. ф.-м. н., проф., Университет Стратклайд (Великобритания);

Чигринов В.Г. – д. ф.-м. н., проф., Гонконгский университет науки и технологий (Китай)

ISSN 2072-8387 (print)

ISSN 2310-7251 (online)

Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. – 2017. – № 2. – 100 с.

Журнал «Вестник Московского государственного областного университета. Серия «Физика-Математика» зарегистрирован в Федеральной службе по надзору за соблюдением законодательства в сфере массовых коммуникаций и охране культурного наследия. Регистрационное свидетельство ПИ № ФС77-26136

**Индекс серии «Физика-Математика»
по Объединенному каталогу «Пресса России» 40723**

© МГОУ, 2017.

© ИИУ МГОУ, 2017.

**Адрес Отдела по изданию научного журнала
«Вестник Московского государственного
областного университета»**

г. Москва, ул. Радио, д.10А, офис 98

тел. (495) 723-56-31; (495) 780-09-42 (доб. 6101)

e-mail: vest_mgou@mail.ru; сайт: www.vestnik-mgou.ru

Журнал включен в базу данных Российского индекса научного цитирования (РИНЦ), имеет полнотекстовую сетевую версию в Интернете на платформе Научной электронной библиотеки (www.elibrary.ru), а также на сайте Московского государственного областного университета (www.vestnik-mgou.ru)

При цитировании ссылка на конкретную серию «Вестника Московского государственного областного университета» обязательна. Опубликованные в журнале материалы могут использоваться только в некоммерческих целях. Ответственность за содержание статей несут авторы. Мнение редколлегии серии может не совпадать с точкой зрения автора. Рукописи не возвращаются.

Founder of journal «Bulletin of the Moscow State Regional University»:

Moscow State Regional University

Issued 4 times a year

Series editorial board «Physics and Mathematics»

Editor-in-chief:

A.S. Bugaev – Doctor of Physics and Mathematics, Academician of RAS, MIPT

Deputy editor-in-chief:

V.A. Zhachkin – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, MSRU

Executive secretary:

E.N. Vasilchikova – Ph.D. in Physics and Mathematics, Associate Professor, MSRU

Members of Editorial Board:

V.V. Belyaev – Doctor of Technical Sciences, Professor, MSRU

D.L. Bogdanov – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, MSRU

A.L. Bugrimov – Doctor of Technical Sciences, Professor, MSRU

M.M. Rassudovskaya – Ph.D. in Pedagogical Sciences, Professor, MSRU

M.A. Osipov – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Strathclyde University (UK)

V.G. Chigrinov – University of Science and Technology (Hong Kong, China)

The journal is included into the database of the Russian Science Citation Index, has a full text network version on the Internet on the platform of Scientific Electronic Library (www.elibrary.ru), as well as at the site of the Moscow State Regional University (www.vestnik-mgou.ru)

At citing the reference to a particular series of «Bulletin of the Moscow State Regional University» is obligatory. The materials published in the journal are for non-commercial use only. The authors bear all responsibility for the content of their papers. The opinion of the Editorial Board of the series does not necessarily coincide with that of the author. Manuscripts are not returned.

The Editorial Board address: Moscow State Regional University

10A Radio st., office 98, Moscow, Russia

Phones: (495) 723-56-31; (495) 780-09-42 (add. 6101)

e-mail: vest_mgou@mail.ru; site: www.vestnik-mgou.ru

Publishing council «Bulletin of the Moscow State Regional University»

P.N. Khromenkov – Ph. D. in Philology, Professor, Principal of MSRU (Chairman of the Council)

E.S.Yefremova – Ph. D. in Philology, Acting Vice-Principal for scientific work of MSRU (Vice-Chairman of the Council)

V.M. Klychnikov – Ph.D. in Law, Ph. D. in History, Professor, Vice-Principal for academic work and international cooperation of MSRU (Vice-Chairman of the Council)

L.N. Antonova – Doctor of Pedagogics, Professor, Member of the Russian Academy of Education, The Council of the Federation Committee on Science, Education and Culture

A.G. Asmolov – Doctor of Psychology, Professor, Member of the Russian Academy of Education, Principal of the Federal Institute of Development of Education

S.N. Klimov – Doctor of Philosophy, Professor, Moscow State University of Railway Engineering

E.V. Klobukov – Doctor of Philology, Professor, Lomonosov Moscow State University

A.V. Manoylo – Doctor of Political Science, Professor, Lomonosov Moscow State University

A.L. Novosjolov – Doctor of Economics, Professor, Plekhanov Russian University of Economics

V.V. Pasechnik – Doctor of Pedagogics, Professor, MSRU

Yu. M. Polyakov – Ph.D. in Philology, Editor-in-chief of “Literaturnaya Gazeta”

E.I. Rjuntsev – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Saint Petersburg State University

G. T. Khukhuni – Doctor of Philology, Professor, MSRU

S.N. Chistyakova – Doctor of Pedagogics, Professor, the Russian Academy of Education

ISSN 2072-8387 (print)

ISSN 2310-7251 (online)

Bulletin of the Moscow State Regional University. Series: Physics and Mathematics. – 2017. – № 2. – 100 p.

The series «Physics and Mathematics» of the Bulletin of the Moscow State Regional University is registered in Federal service on supervision of legislation observance in sphere of mass communications and cultural heritage protection. The registration certificate ПИ № ФС77-26136

Index of the series «Physics and Mathematics» according to the union catalog «Press of Russia» 40723

© MSRU, 2017.

© Information & Publishing department of MSRU, 2017.

СОДЕРЖАНИЕ

РАЗДЕЛ I. МАТЕМАТИКА

Ройтенберг В.Ш. О РОЖДАЮЩИХСЯ ИЗ БЕСКОНЕЧНОСТИ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛАХ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ОКРУЖНОСТИ6

Махина Н.М. ОЦЕНКИ ПРОИЗВОДНЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ И ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В НЕКОТОРЫХ ОБЛАСТЯХ КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ16

РАЗДЕЛ II. ФИЗИКА

Аскерова В.И., Латышев А.В. ПРОДОЛЬНЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК В КЛАССИЧЕСКОЙ ПЛАЗМЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ДВУХ НЕКОЛЛИНЕАРНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН23

Мащенко В.И., Шашкова Ю.О., Соломатин А.С., Беляев В.В. ОСОБЕННОСТИ ФОРМИРОВАНИЯ МИКРОСТРУКТУРЫ ЖИДКОКРИСТАЛЛИЧЕСКИХ КОМПОЗИТОВ НА ОСНОВЕ БОРОСИЛОКСАНА34

Дудко В.В., Юшканов А.А. ТЕМПЕРАТУРНЫЕ ЭФФЕКТЫ ВО ВТОРОЙ ЗАДАЧЕ СТОКСА46

Соломатин А.С., Мащенко В.И., Шашкова Ю.О., Беляев В.В. ОСОБЕННОСТИ ФОРМИРОВАНИЯ МИКРОСТРУКТУРЫ И ОПТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЖИДКОКРИСТАЛЛИЧЕСКИХ КОМПОЗИТНЫХ ТВИСТ-ЯЧЕЕК53

Костиков И.Е., Кузнецов Е.Е., Матченко Н.М. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПЛАСТИЧЕСКОЙ АНИЗОТРОПИИ ЛИСТОВЫХ ПРОКАТНЫХ МАТЕРИАЛОВ ИЗ АЛЮМИНИЕВЫХ СПЛАВОВ64

Неверов А.Н. ГЕНЕРАЦИЯ ВЫСШИХ ГАРМОНИК В СОСТАВНЫХ СТЕРЖНЕВЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ72

РАЗДЕЛ III. ТЕОРИЯ И МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ И ВОСПИТАНИЯ

Паркесов А.В. КОМПЬЮТЕРНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ КАК СРЕДСТВО ПОВЫШЕНИЯ ЭФФЕКТИВНОСТИ ИЗУЧЕНИЯ МЕЖПРЕДМЕТНЫХ ПОНЯТИЙ82

Власова Е.А., Попов В.С., Пугачев О.В. СПЕЦИФИКА ВЫПОЛНЕНИЯ КУРСОВОЙ РАБОТЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ» ..88

CONTENTS

SECTION I. MATHEMATICS

- V. Roitenberg.** LIMIT CYCLES OF A SECOND-ORDER DIFFERENTIAL EQUATION ON THE CIRCLE THAT ARISE FROM INFINITY6
- N. Makhina.** ESTIMATES OF DERIVATIVES OF ANALYTIC AND HARMONIC FUNCTIONS IN SOME DOMAINS ON THE COMPLEX PLANE16

SECTION II. PHYSICS

- V. Askerova, A. Latyshev.** LONGITUDINAL ELECTRIC CURRENT UNDER THE INFLUENCE OF TWO NONCOLLINEAR ELECTROMAGNETIC WAVES IN CLASSICAL PLASMA.....23
- V. Mashchenko, A. Solomatin, Y. Shashkova, V. Belyaev.** PECULIARITIES OF THE FORMATION OF A MICROSTRUCTURE OF BOROSILOXANE LIQUID CRYSTAL COMPOSITES34
- V. Dudko, A. Yushkanov.** TEMPERATURE EFFECTS IN STOKES' SECOND PROBLEM46
- A. Solomatin, V. Mashchenko, Yu. Shashkova, V. Belyaev.** FORMATION AND OPTICAL PROPERTIES OF TWIST STRUCTURES IN A NEMATIC LIQUID CRYSTAL COMPOSITE53
- I. Kostikov, E. Kuznetsov, N. Matichenko.** EXPERIMENTAL STUDY OF PLASTIC ANISOTROPY OF SHEET-ROLLED ALUMINUM ALLOY MATERIALS64
- A. Neverov.** GENERATION OF HIGHER HARMONICS IN COMPOSITE ROD VIBRATION SYSTEMS72

SECTION III. THEORY AND METHODS OF TEACHING AND EDUCATION

- A. Parkesov.** COMPUTER TECHNOLOGY AS A MEANS OF IMPROVING EFFICIENCY OF STUDY OF CROSS-CURRICULAR CONCEPTS.....82
- E. Vlasova, V. Popov, O. Pugachev.** SPECIFICS OF TERM PAPERS IN THE SUBJECT 'FUNCTIONAL ANALYSIS'88

РАЗДЕЛ I. МАТЕМАТИКА

УДК 517.925

DOI: 10.18384/2310-7251-2017-2-6-15

О РОЖДАЮЩИХСЯ ИЗ БЕСКОНЕЧНОСТИ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛАХ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ОКРУЖНОСТИ

Ройтенберг В.Ш.

*Ярославский государственный технический университет,
150023, г. Ярославль, Московский проспект, д. 88, Российская федерация*

Аннотация. Дифференциальные уравнения второго порядка, правые части которых – полиномы второго порядка относительно первой производной с периодическими коэффициентами, рассматриваются на компактификации цилиндрического фазового пространства. Описаны бифуркации бесконечно удалённого тройного предельного цикла.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения второго порядка на окружности, предельный цикл, бифуркационное многообразие, бифуркации.

LIMIT CYCLES OF A SECOND-ORDER DIFFERENTIAL EQUATION ON THE CIRCLE THAT ARISE FROM INFINITY

V. Roitenberg

*Yaroslavl State Technical University,
Moscovskii prosp. 88, 150023 Yaroslavl, Russian Federation*

Abstract. The paper considers the second-order differential equations, whose right-hand sides are polynomials with periodic coefficients, on the compactification of the cylindrical phase space. We describe bifurcations of an infinitely far triple limit cycle.

Key words: second-order differential equation on the circle, limit cycle, bifurcation variety, bifurcations

Введение. Постановка задачи

Для теории колебаний представляет значительный интерес задача нахождения условий, при которых существуют предельные циклы дифференциальных уравнений второго порядка (см., например, [1–3]).

© Ройтенберг В.Ш., 2017.

Будем рассматривать уравнения второго порядка вида

$$\ddot{x} = a_0(x) + a_1(x)\dot{x} + a_2(x)\dot{x}^2$$

с ω -периодическими C^r -функциями ($r \geq 0$) $a_i : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $i = 0, 1, 2$. Можно считать, что уравнение задано на окружности $S^1 = \mathbf{R}/\omega\mathbf{Z}$. Обозначим $A_\omega^{2,r}$ – множество таких уравнений. Пусть $C^r(S^1)$ – банахово пространство ω -периодических C^r -функций с нормой $\|\varphi\|_r := \max_{k=0,1,\dots,r} \max_{x \in \mathbf{R}} |\varphi^{(k)}(x)|$. Отождествив уравнение a со

строкой (a_0, a_1, a_2) , мы отождествим $A_\omega^{2,r}$ с банаховым пространством $C^r(S^1) \oplus C^r(S^1) \oplus C^r(S^1)$ с нормой $\|a\| = \max_{i \in \{0,1,2\}} \|a_i\|_r$. Уравнение $a \in A_\omega^{2,r}$ определяет на фазовом пространстве $TS^1 = S^1 \times \mathbf{R}$ систему уравнений

$$\dot{\mathbf{X}} = y, \quad \dot{y} = a_0(x) + a_1(x)y + a_2(x)y^2, \quad x = y,$$

которую также будем обозначать a .

Обозначим $\bar{\mathbf{R}} := \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ – двухточечную компактификацию \mathbf{R} . Превратим $\bar{\mathbf{R}}$ в одномерное C^∞ -многообразие с краем, взяв в качестве карт (\mathbf{R}, h_1) , $h_1(x) := x$, $((0, +\infty], h_2)$, $h_2(x) := 1/x$ при $x \in (0, +\infty)$ и $h_2(+\infty) := 0$, $([-\infty, 0), h_3)$, $h_3(x) := 1/x$ при $x \in (-\infty, 0)$ и $h_3(-\infty) := 0$.

В координатах $x, z = 1/y$ в $S^1 \times (0, +\infty)$ и $S^1 \times (-\infty, 0)$ система a имеет вид

$$\dot{x} = 1/z, \quad \dot{z} = -a_0(x)z^2 - a_1(x)z - a_2(x).$$

В областях $S^1 \times (0, +\infty)$ и $S^1 \times (-\infty, 0)$ она имеет те же (ориентированные) траектории, что и система уравнений, соответственно,

$$\bar{a}_+ : \begin{cases} \dot{x} = 1, \\ \dot{z} = -a_0(x)z^3 - a_1(x)z^2 - a_2(x)z \end{cases}$$

и

$$\bar{a}_- : \begin{cases} \dot{x} = -1, \\ \dot{z} = a_0(x)z^3 + a_1(x)z^2 + a_2(x)z. \end{cases}$$

Но системы \bar{a}_+ и \bar{a}_- определены и при $z = 0$, то есть, соответственно, на $S^1 \times (0, +\infty]$ и $S^1 \times [-\infty, 0)$. Кривые $\Gamma_+ := S^1 \times \{+\infty\}$ и $\Gamma_- := S^1 \times \{-\infty\}$, задаваемые в координатах x, z уравнением $z = 0$, являются замкнутыми траекториями, соответственно, систем \bar{a}_+ и \bar{a}_- . Будем их называть *бесконечно удаленными траекториями* уравнения $a \in A_\omega^{2,r}$. Обозначим

$$m(a) := -\int_0^\omega a_2(x)dx, \quad \ell(a) := -\int_0^\omega a_1(s) \exp \int_s^\omega a_2(\sigma) d\sigma ds.$$

В работе [4] было доказано, что если $m(a) = 0$, $\ell(a) \neq 0$, то уравнение $\tilde{a} \in A_{\omega}^{2,r}$ близкое к a при $m(\tilde{a})\ell(a) > 0$ ($m(\tilde{a})\ell(a) < 0$) имеет в $S^1 \times (0, +\infty)$ ($S^1 \times (-\infty, 0)$) единственный предельный цикл, рождающийся из Γ_+ (Γ_-).

В настоящей работе мы покажем, что условия $m(a) = 0$, $\ell(a) = 0$, $L(a) \neq 0$, где $L: A_{\omega}^{2,r} \rightarrow \mathbf{R}$ – некоторая непрерывная функция, задают в $A_{\omega}^{2,r}$ гладкое бифуркационное подмногообразие коразмерности два, и опишем разбиение некоторой окрестности уравнения a в $A_{\omega}^{2,r}$ на классы топологической эквивалентности в окрестности Γ_+ . Бифуркации в окрестности Γ_- сводится к бифуркациям в окрестности Γ_+ заменами $x \mapsto -x$, $y \mapsto -y$.

Функция последования бесконечно удаленного предельного цикла

Обозначим $\bar{a}_i: S^1 \times A_{\omega}^{2,r} \rightarrow \mathbf{R}$ ($i = 0, 1, 2$) функции, ставящие в соответствие точке $x \in S^1$ и уравнению $a \in A_{\omega}^{2,r}$ коэффициент $a_i(x)$ в этом уравнении. Они принадлежат классу C^r по переменным (x, a) и линейны по a .

Пусть уравнение $a \in A_{\omega}^{2,r}$. Обозначим $U_{\nu}(a) = \{\tilde{a} \in A_{\omega}^{2,r} : \|\tilde{a} - a\| < \nu\}$. Траектории уравнения $\tilde{a} \in U_{\nu}(a)$, лежащие в $S^1 \times (0, +\infty)$, являются интегральными кривыми уравнения $dz/dx = -\bar{a}_0(x, \tilde{a})z^3 - \bar{a}_1(x, \tilde{a})z^2 - \bar{a}_2(x, \tilde{a})z$. Пусть $z(x, u, \tilde{a})$ – решение этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $z(0, u, \tilde{a}) = u$. При достаточно малых $\nu > 0$, $\rho > 0$ оно определено для $(x, u, \tilde{a}) \in (-2\omega, 2\omega) \times (-\rho, \rho) \times U_{\nu}(a)$, принадлежит классу C^r по переменным (x, u, \tilde{a}) и имеет производные любого порядка по переменным (u, \tilde{a}) , непрерывно зависящие от (\cdot, \cdot) . Так как $z(x, 0, \tilde{a}) \equiv 0$, то

$$z(x, u, \tilde{a}) = z_1(x, \tilde{a})u + z_2(x, \tilde{a})u^2 + z_3(x, \tilde{a})u^3 + \zeta(x, u, \tilde{a}), \quad (1)$$

где $\partial^s \zeta(x, 0, \tilde{a}) / \partial u^s = 0$ при $s = 0, 1, 2, 3$. Для функций $\tilde{z}_k(\cdot, \tilde{a})$, $k = 1, 2, 3$, получаем дифференциальные уравнения и начальные условия:

$$\frac{dz_1}{dx} = -\bar{a}_2(x, \tilde{a})z_1, \quad z_1(0, \tilde{a}) = 1;$$

$$\frac{dz_2}{dx} = -\bar{a}_2(x, \tilde{a})z_2 - \bar{a}_1(x, \tilde{a})z_1^2(x, \tilde{a}), \quad z_2(0, \tilde{a}) = 0;$$

$$\frac{dz_3}{dx} = -\bar{a}_2(x, \tilde{a})z_3 - 2\bar{a}_1(x, \tilde{a})z_1(x, \tilde{a})z_2(x, \tilde{a}) - \bar{a}_0(x, \tilde{a})z_1^3(x, \tilde{a}), \quad z_3(0, \tilde{a}) = 0,$$

из которых последовательно находим

$$z_1(x, \tilde{a}) = \exp\left(-\int_0^x \bar{a}_2(s, \tilde{a}) ds\right), \quad (2)$$

$$z_2(x, \tilde{a}) = z_1(x, \tilde{a})I_1(x, \tilde{a}), \quad \text{где } I_1(x, \tilde{a}) = -\int_0^x \bar{a}_1(s, \tilde{a})z_1(s, \tilde{a})ds, \quad (3)$$

$$z_3(x, \tilde{a}) = z_1(x, \tilde{a})I_2(x, \tilde{a}), \quad (4)$$

где

$$I_2(x, \tilde{a}) = -\int_0^x [2\bar{a}_1(s, \tilde{a})z_2(s, \tilde{a}) + \bar{a}_0(s, \tilde{a})z_1^2(s, \tilde{a})]ds. \quad (5)$$

Функция $u \mapsto z(\omega, u, \tilde{a})$ $u \in [0, \rho)$ – функция последования по траекториям \tilde{a} .

Бифуркационное многообразие коразмерности два

Обозначим для уравнения $\tilde{a} \in A_\omega^{2,r}$

$$m(\tilde{a}) := -\int_0^\omega \bar{a}_2(x, \tilde{a})dx, \quad \ell(\tilde{a}) := I_1(\omega, \tilde{a}), \quad L(\tilde{a}) := I_2(\omega, \tilde{a}). \quad (6)$$

Функции $m, \ell, L : A_\omega^{2,r} \rightarrow \mathbf{R}$, очевидно, бесконечно дифференцируемы.

Ввиду (1) – (6) Γ_+ при $m(\tilde{a}) < 0$ ($m(\tilde{a}) > 0$) является устойчивым (неустойчивым) грубым циклом, при $m(\tilde{a}) = 0$, $\ell(\tilde{a}) < 0$ ($\ell(\tilde{a}) > 0$) – устойчивым (неустойчивым) двойным циклом, а при $m(\tilde{a}) = 0$, $\ell(\tilde{a}) = 0$, $L(\tilde{a}) < 0$ ($L(\tilde{a}) > 0$) – устойчивым (неустойчивым) тройным циклом.

Теорема 1. Множество $B_\Gamma^{2,r} := \{\tilde{a} \in A_\omega^{2,r} : m(\tilde{a}) = 0, \ell(\tilde{a}) = 0, L(\tilde{a}) \neq 0\}$ является вложенным C^∞ -подмногообразием в $A_\omega^{2,r}$ коразмерности два.

Доказательство. Пусть $f : A_\omega^{2,r} \rightarrow \mathbf{R}^2$, $f(\tilde{a}) := (m(\tilde{a}), \ell(\tilde{a}))$. Возьмем $a \in B_\Gamma^{2,r}$. Найдем производную $\ell_* = \ell'(a) : A_\omega^{2,r} \rightarrow \mathbf{R}$. Если $a_i(x) = \bar{a}_i(x, a)$, $h \in A_\omega^{2,r} : \ddot{x} = h_0(x) + h_1(x)\dot{x} + h_2(x)\dot{x}^2$, то

$$\begin{aligned} \ell_*(h) &= \frac{d}{d\tau} \Big|_{\tau=0} \ell(a + \tau h) = -\frac{d}{d\tau} \Big|_{\tau=0} \int_0^\omega (a_1(s) + \tau h_1(x)) \exp \int_s^0 (a_2(\sigma) + \tau h_2(\sigma)) d\sigma ds = \\ &= -\int_0^\omega \left[h_1(s) + a_1(s) \int_s^0 h_2(\sigma) d\sigma \right] \exp \int_s^0 a_2(\sigma) d\sigma ds. \end{aligned}$$

Для $h : \ddot{x} = \dot{x}$ $m(h) = 0$, $\ell_*(h) = -\int_0^\omega \exp \int_s^0 a_2(\sigma) d\sigma ds \neq 0$, а для $h : \ddot{x} = \dot{x}^2$ $m(h) = -\omega \neq 0$. Поэтому линейные функции $m : A_\omega^{2,r} \rightarrow \mathbf{R}$ и $\ell_* = \ell'(a) : A_\omega^{2,r} \rightarrow \mathbf{R}$

линейно независимы. Следовательно, $A_{\omega}^{2,r} = E^2 \oplus \Lambda$, где E^2 – двумерное подпространство, $\Lambda = \{\tilde{a} \in A_{\omega}^{2,r} : m(\tilde{a}) = 0, \ell_*(\tilde{a}) = 0\}$, а отображение

$f_{\varepsilon}(a) : E^2 \ni \varepsilon \mapsto (m(\varepsilon), \ell'(a)(\varepsilon)) = (m(\varepsilon), \ell_*(\varepsilon)) \in \mathbf{R}^2$ – сюръективно и потому изоморфизм. Пусть $\Lambda_{\delta} := \{\lambda \in \Lambda : \|\lambda\| < \delta\}$. По теореме о неявной функции существует C^{∞} -отображение $\eta : (-\tilde{\delta}, \tilde{\delta})^2 \times \Lambda_{\tilde{\delta}} \rightarrow E^2$, $\tilde{\delta} > 0$, такое, что $\eta(0,0,0) = 0$, $f(\eta(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda) + \lambda) \equiv (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Равенство $\tilde{g}((\varepsilon_1, \varepsilon_2), \lambda) = \eta(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda) + \lambda$ задает такой C^{∞} -диффеоморфизм \tilde{g} множества $(-\tilde{\delta}, \tilde{\delta})^2 \times \Lambda_{\tilde{\delta}}$ на окрестность U уравнения a в $A_{\omega}^{2,r}$, что

$$m(\tilde{a}) = \varepsilon_1, \ell(\tilde{a}) = \varepsilon_2 \text{ для уравнения } \tilde{a} = \tilde{g}((\varepsilon_1, \varepsilon_2), \lambda). \quad (7)$$

Так как L – непрерывная функция, то $\tilde{\delta}$ можно считать выбранным так, что $L(\tilde{a}) \neq 0$ для $\tilde{a} \in U$. Поэтому $\tilde{g}(\{(0,0)\} \times \Lambda_{\tilde{\delta}}) = B_{\Gamma}^{2,r} \cap U$, то есть $B_{\Gamma}^{2,r}$ – вложенное C^{∞} -подмногообразие $A_{\omega}^{2,r}$ коразмерности два.

Бифуркации бесконечно удаленного тройного цикла

Вследствие (1) – (7) для $\tilde{a} = \tilde{g}((\varepsilon_1, \varepsilon_2), \lambda)$ функция последования имеет вид $z(\omega, u, \tilde{a}) = e^{\varepsilon_1} u + e^{\varepsilon_1} \varepsilon_2 u^2 + \bar{q}(u, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda)u$, где

$$\bar{q} \in C^{\infty}, \bar{q}(0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda) = \bar{q}'_u(0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda) = 0, \bar{q}''_{uu}(0, 0, 0, 0) = 2L(a).$$

При достаточно малом $\bar{\delta} \in (0, \tilde{\delta})$ равенство

$$g((\varepsilon_1, \varepsilon_2), \lambda) := \tilde{g}((\ln(1 + \varepsilon_1), \varepsilon_2(1 + \varepsilon_1)^{-1}), \lambda)$$

задает C^{∞} -диффеоморфизм g множества $(-\bar{\delta}, \bar{\delta})^2 \times \Lambda_{\bar{\delta}}$ на окрестность уравнения a в $A_{\omega}^{2,r}$, причем $g((0,0), \lambda) = \tilde{g}((0,0), \lambda)$. Диффеоморфизм g дает более удобную параметризацию окрестности уравнения a , поскольку

$$\forall \tilde{a} = g((\varepsilon_1, \varepsilon_2), \lambda) \quad z(\omega, u, \tilde{a}) = (1 + \varepsilon_1)u + \varepsilon_2 u^2 + q(u, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda)u, \quad (8)$$

где

$$q \in C^{\infty}, q(0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda) = q'_u(0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda) = 0, q''_{uu}(0, 0, 0, 0) = 2L(a). \quad (9)$$

Теорема 2. Пусть $a \in B_{\Gamma}^{2,r}$ и $L(a) < 0$. Тогда существуют числа $\rho_0 > 0$, $\delta_0 \in (0, \bar{\delta})$ и разбиение $(-\delta_0, \delta_0)^2 \times \Lambda_{\delta_0}$ на множества $\Sigma_1^0, \Sigma_2^0, \Sigma_3^0, \Sigma_1^1, \Sigma_2^1, \Sigma_3^1$ и Σ^2 (рис. 1), где

$$\Sigma_1^0 = \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda) : 0 < \varepsilon_2 < \delta_0, \lambda \in \Lambda_{\delta_0}, \gamma(\varepsilon_2, \lambda) < \varepsilon_1 < 0\},$$

$$\gamma : (-\delta_0, \delta_0) \times \Lambda_{\delta_0} \rightarrow \mathbf{R}, \gamma \in C^\infty,$$

$$-\delta_0 < \gamma(\varepsilon_2, \lambda) < 0 \text{ при } 0 < \varepsilon_2 < \delta_0, \gamma(0, \lambda) = \partial\gamma(0, \lambda) / \partial\varepsilon_2 = 0,$$

$$\Sigma_2^0 = \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda) : \lambda \in \Lambda_{\delta_0}, 0 < \varepsilon_2 < \delta_0, -\delta_0 < \varepsilon_1 < \gamma(\varepsilon_2, \lambda) \text{ или } -\delta_0 < \varepsilon_2 \leq 0, -\delta_0 < \varepsilon_1 < 0\},$$

$$\Sigma_3^0 = (0, \delta_0) \times (-\delta_0, \delta_0) \times \Lambda_{\delta_0}, \Sigma_1^1 = \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda) : \varepsilon_1 = \gamma(\varepsilon_2, \lambda), 0 < \varepsilon_2 < \delta_0, \lambda \in \Lambda_{\delta_0}\},$$

$$\Sigma_2^1 = \{0\} \times (-\delta_0, 0) \times \Lambda_{\delta_0}, \Sigma_3^1 = \{0\} \times (0, \delta_0) \times \Lambda_{\delta_0}, \Sigma^2 = \{(0, 0)\} \times \Lambda_{\delta_0},$$

со следующими свойствами: 1) Уравнения из $g(\Sigma^2) \subset B_{\Gamma}^2$ имеют в $V(\Gamma_+) := S^1 \times (\rho_0, +\infty]$ единственный (устойчивый тройной) цикл Γ_+ . 2) Уравнения из $g(\Sigma_k^0)$, $k = 1, 2, 3$, имеют в $V(\Gamma_+)$ только грубые циклы, при $k = 1$ два устойчивых, включая Γ_+ , и один неустойчивый, при $k = 2$ один устойчивый – Γ_+ , при $k = 3$ один неустойчивый – Γ_+ и один устойчивый. 3) Уравнения из $g(\Sigma_1^1)$ имеют в $V(\Gamma_+)$ грубый устойчивый цикл Γ_+ и двойной цикл.

4) Уравнения из $g(\Sigma_2^1)$ имеют в $V(\Gamma_+)$ единственный (устойчивый двойной) цикл Γ_+ . 5) Уравнения из $g(\Sigma_3^1)$ имеют в $V(\Gamma_+)$ двойной цикл Γ_+ и грубый устойчивый цикл.

Замечание. При $L(a) > 0$ утверждение теоремы остается справедливым, если устойчивые циклы заменить на неустойчивые и наоборот.

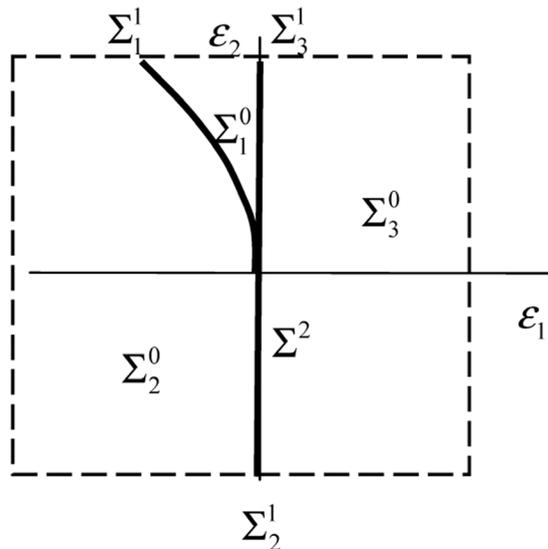


Рис. 1. Бифуркационная диаграмма

Доказательство. Для уравнения $\tilde{a} = g((\varepsilon_1, \varepsilon_2), \lambda)$ функцию расхождения $\tilde{d}(u, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda) := z(\omega, u, \tilde{a}) - u$ представим в виде $\tilde{d}(u, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda) = ud(u, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda)$, где ввиду (8) и (9)

$$d(u, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 u + q(u, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda), \quad (10)$$

$$d(0, 0, 0, 0) = d'_u(0, 0, 0, 0) = 0, \quad d''_{uu}(0, 0, 0, 0) = 2L(a). \quad (11)$$

Уменьшив при необходимости ρ и $\bar{\delta}$ можно считать, что для всех $u \in [-\rho, \rho]$, $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda) \in (-\bar{\delta}, \bar{\delta})^2 \times \Lambda_{\bar{\delta}}$

$$d'_{\varepsilon_1}(u, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda) \geq 1/2, \quad (12)$$

$$d''_{uu}(u, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda) \leq L(a) < 0. \quad (13)$$

Зафиксируем ρ . Так как $z(x, 0, a) = 0$ при $x \in [0, \omega]$, мы можем выбрать числа $\rho_0 \in [0, \rho]$ и $\delta_0 \in (0, \bar{\delta})$ так, чтобы

$$0 < z(x, u, \tilde{a}) < \rho \text{ при } x \in [0, \omega], \quad u \in (0, \rho_0), \quad (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda) \in (-\delta_0, \delta_0)^2 \times \Lambda_{\delta_0}. \quad (14)$$

Фиксируем ρ_0 . Ввиду (11) $d(u, 0, 0, 0) < 0$ для $u \in (0, \rho]$. Поэтому δ_0 можно выбрать так, что

$$d(u, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda) < 0 \text{ для всех } u \in [\rho_0, \rho], \quad (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda) \in (-\delta_0, \delta_0)^2 \times \Lambda_{\delta_0}. \quad (15)$$

Рассмотрим систему уравнений относительно неизвестных ε_1, u

$$\begin{cases} d(u, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 u + q(u, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda) = 0, \\ d'_u(u, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda) = \varepsilon_2 + q'_u(u, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda) = 0. \end{cases} \quad (16)$$

Так как при $(u, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda) = (0, 0, 0, 0)$ d и d'_u обращаются в нуль, а

$$\begin{vmatrix} d'_{\varepsilon_1} & d'_u \\ d''_{\varepsilon_1 u} & d''_{uu} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2L(a) \end{vmatrix} = 2L(a) \neq 0,$$

то по теореме о неявной функции найдутся такие числа $\delta_1, \delta_2 \in (0, \bar{\delta})$, $\rho_1 \in (0, \rho)$, что для любых $(\varepsilon_2, \lambda) \in (-\delta_1, \delta_1) \times \Lambda_{\delta_1}$ система (16) имеет в $(-\delta_2, \delta_2) \times (-\rho_2, \rho_2)$

единственное решение $\varepsilon_1 = \gamma(\varepsilon_2, \lambda)$, $u = \psi(\varepsilon_2, \lambda)$,

где $\gamma: (-\delta_1, \delta_1) \times \Lambda_{\delta_1} \rightarrow (-\delta_2, \delta_2)$ и $\psi: (-\delta_1, \delta_1) \times \Lambda_{\delta_1} \rightarrow (-\rho_1, \rho_1) - C^\infty$ -функции. Ввиду (9) и (10) при $(\varepsilon_2, \lambda) \in \{0\} \times \Lambda_{\delta_1}$ $\varepsilon_1 = 0$, $u = 0$ - решение системы (16). Поэтому

$$\gamma(0, \lambda) = \psi(0, \lambda) = 0 \text{ для любых } \lambda \in \Lambda_{\delta_1} \quad (17)$$

Подставив $u = \psi(\varepsilon_2, \lambda)$, $\varepsilon_1 = \gamma(\varepsilon_2, \lambda)$ в (16) и продифференцировав по ε_2 , получим

$$\begin{aligned} & \gamma'_{\varepsilon_2}(\varepsilon_2, \lambda) + \varepsilon_2 \psi'_{\varepsilon_2}(\varepsilon_2, \lambda) + \psi(\varepsilon_2, \lambda) + \\ & + q'_u(u, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda) \psi'_{\varepsilon_2}(\varepsilon_2, \lambda) + q'_{\varepsilon_1}(u, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda) \gamma'_{\varepsilon_2}(\varepsilon_2, \lambda) + q'_{\varepsilon_2}(u, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda) = 0, \\ & 1 + q''_{uu}(u, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda) \psi'_{\varepsilon_2}(\varepsilon_2, \lambda) + q''_{u\varepsilon_1}(u, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda) \gamma'_{\varepsilon_2}(\varepsilon_2, \lambda) + q''_{u\varepsilon_2}(u, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda) = 0, \end{aligned} \quad (18)$$

где $u = \psi(\varepsilon_2, \lambda)$, $\varepsilon_1 = \gamma(\varepsilon_2, \lambda)$. Из этих равенств, используя (9) и (17), находим

$$\gamma'_{\varepsilon_2}(0, \lambda) = 0, \quad (19)$$

$$\psi'_{\varepsilon_2}(0, 0) = -1/2L(a). \quad (20)$$

Ввиду (20) мы можем считать δ_1 столь малым, что $\psi'_{\varepsilon_2}(\varepsilon_2, \lambda) \geq -1/3L(a)$ при всех $(\varepsilon_2, \lambda) \in (0, \delta_1) \times \Lambda_{\delta_1}$. Отсюда и из (17) получаем

$$\psi(\varepsilon_2, \lambda) > 0 \text{ при всех } (\varepsilon_2, \lambda) \in (0, \delta_1) \times \Lambda_{\delta_1}. \quad (21)$$

Продифференцировав (18) по ε_2 , положив $\varepsilon_2 = 0$, $\lambda = 0$ и используя равенства (9) и (17), получим $\gamma''_{\varepsilon_2\varepsilon_2}(0, 0) + 2\psi'_{\varepsilon_2}(0, 0) + L(a)(\psi'_{\varepsilon_2}(0, 0))^2 = 0$. С учетом (20) и (9) отсюда следует, что $\gamma''_{\varepsilon_2\varepsilon_2}(0, 0) = 3/4L(a)$. Считая δ_1 достаточно малым, будем иметь

$$1/L(a) < \gamma''_{\varepsilon_2\varepsilon_2}(\varepsilon_2, \lambda) < 1/2L(a) < 0 \text{ для всех } (\varepsilon_2, \lambda) \in (0, \delta_1) \times \Lambda_{\delta_1}. \quad (22)$$

Из (17), (19) и (22) следует, что $\delta \in (0, \delta)$ можно выбрать так, что

$$-\varepsilon_2 < \gamma(\varepsilon_2, \lambda) < 0 \text{ для всех } (\varepsilon_2, \lambda) \in (0, \delta^*) \times \Lambda_{\delta^*}. \quad (23)$$

Число δ_0 , выбранное выше, можно считать меньшим δ^* . Ввиду (23) $-\delta_0 < \gamma(\varepsilon_2, \lambda) < 0$ при $(\varepsilon_2, \lambda) \in (0, \delta_0) \times \Lambda_{\delta_0}$. Определим теперь множества Σ^j_i , Σ^2 и окрестность $V(\Gamma_+)$ согласно формулировке теоремы и докажем соответствующие утверждения для уравнений из $g(\Sigma^j_i)$ и $g(\Sigma^2)$.

Пусть $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda) \in \Sigma^1_1$, то есть $\varepsilon_1 = \gamma(\varepsilon_2, \lambda)$. В этом случае $\tilde{d}'_u(0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda) = \varepsilon_1 < 0$, и Γ_+ – устойчивый грубый цикл. Из (13) и определения функций γ и ψ следует, что $\psi(\varepsilon_2, \lambda)$ – единственный нуль функции $\tilde{d}(\cdot, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda)$ на $(0, \rho)$ и он двукратный. Тем самым, с дугой $x = 0$, $0 < z < \rho$ пересекается единственная замкнутая траектория – двойной цикл. Ввиду (14) и (15) он целиком лежит в $V(\Gamma_+)$.

Пусть $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda) \in \Sigma^0_1$. Из (12) следует, что $d(\psi(\varepsilon_2, \lambda), \varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda) > 0$. Отсюда и из (13) вытекает, что $d(\cdot, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda)$ имеет два нуля: $u_1 \in (0, \psi(\varepsilon_2, \lambda))$, причем $\tilde{d}'_u(u_1, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda) > 0$, и $u_2 \in (\psi(\varepsilon_2, \lambda), \rho)$, причем $\tilde{d}'_u(u_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda) < 0$. Им соответствуют неустойчивый и устойчивый грубые предельные циклы. Ввиду (14) и (15) они лежат в $V(\Gamma_+)$. Так как $\varepsilon_1 < 0$, то Γ_+ – устойчивый грубый цикл.

Пусть $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda) \in \Sigma^0_2$ и $\varepsilon_2 > 0$. Ввиду (12)

$$d(u, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda) < 0 \text{ при всех } u \in (0, \rho). \quad (24)$$

Если $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda) \in \Sigma_2^0$ и $\varepsilon_2 \leq 0$, то, $f'(0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda) = \varepsilon_2 \leq 0$. Отсюда и из (13) следует, что $d_u^+(u, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda) < 0$ при всех $u \in (0, \rho)$. Поскольку $d(0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda) = \varepsilon_1 < 0$, то также имеем (24). Тем самым, при $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda) \in \Sigma_2^0$ в $V(\Gamma_+)$ имеется единственный (грубый устойчивый) предельный цикл Γ_+ .

Случаи Σ^2 и $\Sigma_i^1 (i = 2, 3)$ рассматриваются аналогично.

Пример

Приведем пример уравнения маятникового типа, зависящего от двух существенных параметров $\mu = (\mu_1, \mu_2)$, для которого реализуются описанные в теореме 2 бифуркации. Пусть

$$a_\mu^\pm: \ddot{x} = \pm 1 + v_0 \sin x + (\mu_1 + v_1 \cos x)\dot{x} + (\mu_2 + v_2 \cos x)x^2.$$

Параметры v_0, v_1, v_2 будем считать достаточно малыми по модулю. Имеем

$$m(a_\mu^\pm) = -\int_0^{2\pi} (\mu_2 + v_2 \cos x) dx = -2\pi\mu_2,$$

$$\ell(a_\mu^\pm) = -\int_0^{2\pi} (\mu_1 + v_1 \cos x) \exp \int_x^0 (\mu_2 + v_2 \cos s) ds dx = k_1\mu_1 + k_2\mu_2 + o(|\mu|),$$

где

$$k_1 = -\int_0^{2\pi} \exp(-v_2 \sin x) dx \neq 0, k_2 = \int_0^{2\pi} v_1 x \cos x \exp(-v_2 \sin x) dx,$$

$$L(a_0^\pm) = \int_0^{2\pi} [(\mp 1 - v_0 \sin x) e^{-2v_2 \sin x} - 2v_1 z_2(x, v_1, v_2) \cos x] dx,$$

где $z_2(x, v_1, v_2) = -e^{-v_2 \sin x} \int_0^x v_1 \cos s e^{-v_2 \sin s} ds$ – непрерывная функция. Так как $m(a_0^\pm) = \ell(a_0^\pm) = 0$, а при достаточно малых $|v_j| (j = 0, 1, 2)$ $\text{sgn} L(a_0^\pm) = \mp 1$, то уравнение $a_0^+(a_0^-)$ имеет устойчивый (неустойчивый) бесконечно удаленный тройной предельный цикл. Сделав замену параметров $\varepsilon_1 = -2\pi\mu_2$, $\varepsilon_2 = k_1\mu_1 + k_2\mu_2 + o(|\mu|)$, получим $m(a_\mu^\pm) = \varepsilon_1$, $\ell(a_{\mu(\varepsilon)}^\pm) = \varepsilon_2$. Тем самым, для уравнения a_μ^\pm на плоскости параметров $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ имеем бифуркационную диаграмму, изображенную на рис.1 и описанную в теореме 2 и в замечании к ней.

Заключение

В работе рассмотрены дифференциальные уравнения второго порядка, правые части которых полиномы второго порядка относительно первой производной с периодическими коэффициентами. Описаны бифуркации бесконечно удаленного тройного предельного цикла. В частности, даны условия рождения устойчивых предельных циклов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Эроусмит Д., Плейс К. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями. М.: Мир, 1986. 243 с.
2. Гладков С.О., Богданова С.Б. К нелинейной теории теплопроводности // Журнал технической физики. 2016. Т. 86, вып. 2. С. 1–7.
3. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. Simulation on nonlinear physical processes with the generalized phenomenological equation // International J. of Mechanics. 2015, vol. 9, pp. 1536–1542.
4. Ройтенберг В.Ш. О предельных циклах одного дифференциального уравнения второго порядка на окружности // Научно-технический вестник Поволжья. 2017. № 1. С. 25–28.

REFERENCES

1. Arrowsmith D.K., Place C.M. Ordinary differential equations: a qualitative approach with applications. London, Chapman and Hall, 1990. 250 p.
2. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. To the nonlinear theory of heat conduction. In: *Zhurnal tekhnicheskoi fiziki* [Journal of Technical Physics]. 2016, vol. 86, no. 2, pp. 1–7.
3. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. Simulation on nonlinear physical processes with the generalized phenomenological equation // International J. of Mechanics. 2015, vol. 9, pp. 1536–1542.
4. Roitenberg V.Sh. On the limit cycles of one second-order differential equation on the circle. In: *Nauchno-tekhnicheskii vestnik Povolzh'ya* [Scientific and Technical Bulletin of the Volga region]. 2017, no. 1, pp. 25–28.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Ройтенберг Владимир Шлеймович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики Ярославского государственного технического университета;
e-mail: vroitenberg@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Vladimir Sh. Roitenberg – PhD in Physico-mathematical Sciences, associate professor of the Department of Higher Mathematics at the Yaroslavl State Technical University;
e-mail: vroitenberg@mail.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Ройтенберг В.Ш. О рождающихся из бесконечности предельных циклах одного дифференциального уравнения второго порядка на окружности // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика и математика. 2017. № 2. С. 6–15.
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-2-6-15.

CORRECT REFERENCE TO THE ARTICLE

V. Roitenberg. Limit cycles of a second-order differential equation on the circle that arise from infinity. In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics & Mathematics*. 2017, no. 2, pp. 6–15.
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-2-6-15.

УДК 517.53

DOI: 10.18384/2310-7251-2017-2-16-22

ОЦЕНКИ ПРОИЗВОДНЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ И ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В НЕКОТОРЫХ ОБЛАСТЯХ КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

Махина Н.М.

*Брянский государственный университет им. ак. И.Г. Петровского
241036, г. Брянск, ул. Бежицкая, 14, Российская Федерация*

Аннотация. В работе рассматриваются интегральные оценки типа Харди-Литтлвуда производной аналитической функции через норму самой функции, а также аналогичные оценки градиента функции в многофункциональных пространствах типа Бергмана аналитических и гармонических функций. Метод доказательства использует классическое разбиение Уитни связного открытого множества и позволяет распространить указанные оценки на произвольные области комплексной плоскости в L^p -пространствах с весом, представляющим собой степень расстояния до границы области, при всех $0 < p < +\infty$.

Ключевые слова: производная аналитической функции, градиент, односвязная область, многофункциональные пространства, разбиение Уитни.

ESTIMATES OF DERIVATIVES OF ANALYTIC AND HARMONIC FUNCTIONS IN SOME DOMAINS ON THE COMPLEX PLANE

N. Makhina

*Bryansk State University named after Academician Ivan Georgiyevich Petrovsky
ul. Bezhitskaya 14, 241036 Bryansk, Russian Federation*

Abstract. We consider integral estimates of Hardy–Littlewood type of the derivative of an analytic function in terms of the norm of the function, and similar estimates for the gradient of a function in Bergman type multifunctional spaces of analytic and harmonic functions. The method of proof uses the classical Whitney decomposition of a connected open set and allows us to extend these estimates for all domains of the complex plane in L^p -spaces with a weight representing a distance to the domain boundary for all $0 < p < +\infty$.

Key words: derivative of an analytic function, gradient, simply connected domain, multifunctional spaces, Whitney decomposition.

Задача оценки L^p -нормы аналитической функции через норму её производной является хорошо известной задачей теории аналитических функций. Достаточно вспомнить классическую теорему Харди-Литтлвуда (см. [9]), решающую данную проблему в единичном круге $S = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$: если f – аналитическая функция в S , $0 < p < +\infty$, $f(0) = \beta$, $\beta > -1$, то при некоторых положительных постоянных c_1, c_2 справедливы неравенства

$$\begin{aligned} c_1 \int_S |f(z)|^p (1-|z|)^\beta dm_2(z) &\leq \\ &\leq \int_S |f'(z)|^p (1-|z|)^{\beta+p} dm_2(z) \leq c_2 \int_S |f(z)|^p (1-|z|)^\beta dm_2(z). \end{aligned}$$

В работах российских и зарубежных ученых, например, [1; 8], данная теорема обобщалась на различные области, отличные от единичного круга. В работах автора [5; 6; 7; 11] оценки типа Харди-Литтлвуда рассматриваются в L^p -весовых пространствах функций, аналитических и гармонических в односвязных областях с границей достаточно общего вида, с весом, представляющим собой степень расстояния до границы.

В данной статье мы распространяем доказанные ранее результаты на многофункциональные пространства и получаем оценки сверху n -й производной функции, аналитической в произвольной области, через норму самой функции при всех $0 < p < +\infty$. Отметим, что исследования, посвященные многофункциональным пространствам, в последнее время ведутся достаточно интенсивно и являются динамично развивающимся направлением современного комплексного анализа (см., например, [10] и литературу там).

Итак, пусть G – некоторая область на комплексной плоскости \mathbb{C} ; $H(G)$, $h(G)$ – множества аналитических и гармонических функций в G ; $d(w, \partial G)$ – расстояние от точки w до границы области ∂G . Обозначим также $L_\tau^p(G)$, $0 < p < +\infty$, $\tau > -1$, – пространство измеримых функций f из G таких, что

$$\int_G |f(w)|^p d^\tau(w, \partial G) dm_2(w) < +\infty,$$

где dm_2 – мера Лебега для области G .

Кроме того, пусть $A_\tau^p(G) = H(G) \cap L_\tau^p(G)$, $h_\tau^p(G) = h(G) \cap L_\tau^p(G)$.

Далее также обозначаем с... (α, β, \dots) – некоторые положительные постоянные, зависящие только от (α, β, \dots).

Следующую теорему можно рассматривать как расширение классической теоремы Харди-Литтлвуда.

Теорема 1 (см. [5; 11]). Пусть G – произвольная односвязная область на комплексной плоскости \mathbb{C} . Пусть также $f \in H(G)$; $0 < p < +\infty$; $\tau > -1$; $n \in \mathbb{Z}_+$. Тогда справедливо следующее неравенство:

$$\int_G |f^{(n)}(w)|^p d^{np+\tau}(w, \partial G) dm_2(w) \leq c_3(n, \tau) \int_G |f(w)|^p d^\tau(w, \partial G) dm_2(w).$$

Для градиента гармонической функции $gradu(z) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right)$ может быть

сформулирован аналогичный результат.

Теорема 2 (см. [5; 11]). Пусть G – произвольная односвязная область на комплексной плоскости C . Пусть также $u \in h_r^p(G)$, $0 < p < +\infty$, $\tau > -1$. Тогда справедливо следующее неравенство:

$$\int_G |\operatorname{grad} u(w)|^p d^{p+\tau}(w, \partial G) dm_2(w) \leq c_4 \int_G |u(w)|^p d^\tau(w, \partial G) dm_2(w),$$

где $c_4 = c_4(\tau)$ – некоторая положительная постоянная.

Приведём теперь некоторые новые оценки производной аналитической функции и градиента для многофункциональных пространств.

Для начала сформулируем хорошо известную классическую теорему (см. [4]), которая нам понадобится при доказательстве:

Теорема А (разбиение Уитни). Пусть Ω – связное открытое множество на C . Тогда существует множество квадратов $P = \{Q_1, Q_2, \dots, Q_l, \dots\}$, $Q_l \cap Q_m = \emptyset$, $l \neq m$, таких что $\bigcup_l Q_l = \Omega$, и $\tilde{c}_1 \operatorname{diam}(Q_l) \leq \operatorname{dist}(Q_l, \partial \Omega) \leq \tilde{c}_2 \operatorname{diam}(Q_l)$.

Теорема 3. Пусть G – произвольная односвязная область на комплексной плоскости C . Пусть также $f_i \in H(G)$; $0 < p_i < +\infty$; $i = 1, m$, $m \geq 1$; $n \in \mathbb{Z}_+$; $\tau > -1$. Тогда справедлива следующая оценка:

$$\begin{aligned} & \int_G |f_1^{(n)}(w)|^{p_1} \dots |f_m^{(n)}(w)|^{p_m} d^{(np+\tau+2)m-2}(w, \partial G) dm_2(w) \leq \\ & \leq c(n, \tau) \int_G |f_1(w)|^{p_1} d^\tau(w, \partial G) dm_2(w) \times \dots \times \int_G |f_m(w)|^{p_m} d^\tau(w, \partial G) dm_2(w). \end{aligned}$$

Доказательство. Пусть $G = \bigcup_l Q_l$ – разбиение Уитни множества G , тогда

$$\begin{aligned} & \int_G |f_1^{(n)}(w)|^{p_1} \dots |f_m^{(n)}(w)|^{p_m} d^{(np+\tau+2)m-2}(w, \partial G) dm_2(w) = \\ & = \sum_l \int_{Q_l} |f_1^{(n)}(w)|^{p_1} \dots |f_m^{(n)}(w)|^{p_m} d^{(np+\tau+2)m-2}(w, \partial G) dm_2(w) \leq \\ & \leq \sum_l \max_{w \in Q_l} |f_1^{(n)}(w)|^{p_1} \dots |f_m^{(n)}(w)|^{p_m} d^{(np+\tau+2)m-2}(w, \partial G) (\operatorname{diam}(Q_l))^2 \leq \\ & \leq c_5 \sum_l \max_{w \in Q_l} |f_1^{(n)}(w)|^{p_1} \dots |f_m^{(n)}(w)|^{p_m} d^{(np+\tau+2)m}(w, \partial G) \leq \\ & \leq c_5 \sum_l \max_{w \in Q_l} |f_1^{(n)}(w)|^{p_1} d^{np+\tau+2}(w, \partial G) \dots \max_{w \in Q_l} |f_m^{(n)}(w)|^{p_m} d^{np+\tau+2}(w, \partial G) \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq c_5 \sum_{l_1} \max_{w \in Q_{l_1}} |f_1^{(n)}(w)|^{p_1} d^{np+\tau+2}(w, \partial G) \dots \sum_{l_m} \max_{w \in Q_{l_m}} |f_m^{(n)}(w)|^{p_m} d^{np+\tau+2}(w, \partial G) \leq \\ &\leq c_5 \sum_{l_1} |f_1^{(n)}(w_{l_1})|^{p_1} d^{np+\tau+2}(w_{l_1}, \partial G) \dots \sum_{l_m} |f_m^{(n)}(w_{l_m})|^{p_m} d^{np+\tau+2}(w_{l_m}, \partial G), \end{aligned}$$

где Q_{l_k} – соответствующее разбиение Уитни множества Q_l , $w_{l_k} \in \partial Q_{l_k}$, $k = \overline{1, m}$.

Далее, обозначим $Q_{l_k}^*$ квадрат, имеющий тот же центр, что и Q_{l_k} , но увеличенный в $(1 + \varepsilon)$ раз, $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$, $Q_{l_k} \subset Q_{l_k}^*$.

Также пусть $D_\rho(w_{l_k}) = \{w : |w - w_{l_k}| < \rho\}$, $0 < \rho < \frac{1}{2} \text{dist}(Q_{l_k}, \partial Q_{l_k}^*)$.

Так как $f_k^{(n)}(w_{l_k}) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D_\rho} \frac{f_k(w)}{(w - w_{l_k})^{n+1}} dw$, то

$$|f_k^{(n)}(w_{l_k})| \leq \frac{n!}{2\pi} \frac{1}{\rho^n} \max_{w \in \partial D_\rho} |f_k(w)| \leq \frac{c_6}{d^n(\tilde{w}_{l_k}, \partial G)} |f(\tilde{w}_{l_k})|,$$

где $\tilde{w}_{l_k} \in \partial D_\rho$. Итак, $|f_k^{(n)}(w_{l_k})|^p \leq \frac{c_7 |f(\tilde{w}_{l_k})|^p}{d^{np}(\tilde{w}_{l_k}, \partial G)}$.

Но по теореме А $\text{diam}(Q_l) < \text{diam}(Q_{l_k}^*) < \frac{1}{4} \text{diam}(Q_{l_k})$, то есть $d(w_{l_k}, \partial G) \sim d(\tilde{w}_{l_k}, \partial G)$. Откуда имеем

$$\begin{aligned} &\sum_{l_1} |f_1^{(n)}(w_{l_1})|^{p_1} d^{np+\tau+2}(w_{l_1}, \partial G) \dots \sum_{l_m} |f_m^{(n)}(w_{l_m})|^{p_m} d^{np+\tau+2}(w_{l_m}, \partial G) \leq \\ &\leq c_8 \sum_{l_1} |f_1(w_{l_1})|^{p_1} d^{\tau+2}(w_{l_1}, \partial G) \dots \sum_{l_m} |f_m(w_{l_m})|^{p_m} d^{\tau+2}(w_{l_m}, \partial G). \end{aligned}$$

Пусть теперь $0 < \rho' < \frac{1}{2} \text{dist}(Q_{l_k}, \partial Q_{l_k}^*)$, $K_{\rho'}(\tilde{w}_{l_k}) = \{w : |w - \tilde{w}_{l_k}| < \rho'\}$, тогда $K_{\rho'}(\tilde{w}_{l_k}) \subset Q_{l_k}^*$.

Так как $|f_k|^p$ – субгармоническая функция, то при $0 < p < +\infty$

$$|f_k(\tilde{w}_{l_k})|^p \leq \frac{1}{\pi \rho'^2} \int_{K_{\rho'}(\tilde{w}_{l_k})} |f_k(w)|^p dm_2(w) \leq \frac{c_9}{d^2(\tilde{w}_{l_k}, \partial G)} \int_{Q_{l_k}^*} |f_k(w)|^p dm_2(w).$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \sum_l |f_l(w_l)|^{p_l} d^{\tau+2}(w_l, \partial G) \dots \sum_{l_m} |f_m(w_{l_m})|^{p_m} d^{\tau+2}(w_{l_m}, \partial G) \leq \\ & \leq c_{10} \sum_l \int_{Q_l^*} |f_l(w)|^{p_l} d^\tau(w, \partial G) dm_2(w) \dots \sum_{l_m} \int_{Q_{l_m}^*} |f_m(w)|^{p_m} d^\tau(w, \partial G) dm_2(w) \leq \\ & \leq c \int_G |f_1(w)|^{p_1} d^\tau(w, \partial G) dm_2(w) \times \dots \times \int_G |f_m(w)|^{p_m} d^\tau(w, \partial G) dm_2(w). \end{aligned}$$

Аналогичная теорема справедлива и для градиента гармонической функции, метод доказательства аналогичен доказательству теорем 2, 3:

Теорема 4. Пусть G – произвольная односвязная область на комплексной плоскости C . Пусть также $u_i \in h_\tau^{p_i}(G)$, $0 < p_i < +\infty$, $i = \overline{1, m}$, $m \geq 1$; $\tau > -1$. Тогда справедлива следующая оценка:

$$\begin{aligned} & \int_G |\operatorname{grad} u_1(w)|^{p_1} \dots |\operatorname{grad} u_m(w)|^{p_m} d^{(p+\tau+2)m-2}(w, \partial G) dm_2(w) \leq \\ & \leq \tilde{c}(\tau) \int_G |\operatorname{grad} u_1(w)|^{p_1} d^\tau(w, \partial G) dm_2(w) \times \dots \\ & \times \int_G |\operatorname{grad} u_m(w)|^{p_m} d^\tau(w, \partial G) dm_2(w). \end{aligned}$$

Отметим, что оценки вышеприведенного типа находят широкое применение в различных вопросах теории аналитических функций, в том числе построении ограниченных проекторов, описании линейных непрерывных функционалов, построении базисов в соответствующих пространствах (см., например, [2; 3; 10]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Исаев К.П. Преобразования Лапласа функционалов на пространствах Бергмана // Известия РАН. Серия математическая. 2004. Т. 68. № 1. С. 5–42.
2. Махина Н.М. О сопряженных пространствах к некоторым весовым пространствам аналитических функций // Вестник Брянского государственного университета. 2015. № 2. С. 420–423.
3. Махина Н.М., Шамоян Ф.А. Базисы в весовых пространствах функций, аналитических в областях со спрямляемой границей // Вестник Брянского государственного университета. 2013. № 4. С. 27–32.
4. Стейн И.М. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973. 342 с.
5. Ткаченко Н.М. Весовые L_p -оценки аналитических и гармонических функций в односвязных областях комплексной плоскости: дисс. канд. ф.-м. наук. Брянск, 2009. 116 с.
6. Ткаченко Н.М. Линейные непрерывные функционалы в L_p -пространствах аналитических функций // Вестник Брянского государственного университета. 2009. № 4. С. 100–105.

7. Ткаченко Н.М. Об оценках модуля производной аналитической в угловой области функции // Вестник Ижевского государственного технического университета им. М.Т. Калашникова. 2008. № 1. С. 96–98.
8. Detraz J. Classes de Bergman de fonctions harmoniques // Bull. Soc. Math. France. 1981. V. 109. P. 259–268.
9. Duren P. Theory of H^p spaces. New York: Academic Press, 1970. 292 p.
10. Shamoyan R.F., Makhina N.M. On continuous linear functional in some weighted functional classes on product domains // Сибирские электронные математические известия. 2015. Т.12. С. 651–678.
11. Tkachenko N.M., Shamoyan F.A. The Hardy-Littlewood theorem and the operator of harmonic conjugate in some classes of simply connected domains with rectifiable boundary // Журнал математической физики, анализа, геометрии. 2009. Т. 5. № 2. С. 192–210.

REFERENCES

1. Isaev K.P. Laplace transformation of functionals on Bergman spaces. In: *Izvestiya RAN. Seriya matematicheskaya. Vol. 68.* [Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Ser.: Mathematics. Vol. 68]. 2004, no. 1, pp. 5–42.
2. Makhina N.M. Connected spaces to some weighted spaces of analytic functions. In: *Vestnik Bryanskogo gosudarstvennogo universiteta* [Bulletin of the Bryansk State University]. 2015, no. 2, pp. 420–423.
3. Makhina N.M., Shamoyan F.A. Bases in weighted spaces of functions holomorphic in domains with a regular rectifiable boundary. In: *Vestnik Bryanskogo gosudarstvennogo universiteta* [Bulletin of the Bryansk State University]. 2013, no. 4, pp. 27–32.
4. Stein E.M. Singular integrals and differential properties of functions. New Jersey, Princeton University Press, 1970. 304 p.
5. Tkachenko N.M. *Vesovye L_p -otsenki analiticheskikh i garmonicheskikh funktsii v odnosvyaznykh oblastiakh kompleksnoi ploskosti: diss. kand. f.-m. nauk* [The weight of L_p -estimates of analytic and harmonic functions in simply connected domains of the complex plane: PhD thesis in Physico-mathematical Sciences]. Bryansk, 2009. 116 p.
6. Tkachenko N.M. Linear continuous functionals in L_p -spaces of analytic functions. In: *Vestnik Bryanskogo gosudarstvennogo universiteta* [Bulletin of the Bryansk State University]. 2009, no. 4, pp. 100–105.
7. Tkachenko N.M. Estimates of the analytical module of the derivative in the angular region of the function. In: *Vestnik Izhevskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta im. M.T. Kalashnikova* [Bulletin of Izhevsk State Technical University n.a. M.T. Kalashnikov]. 2008, no. 1, pp. 96–98.
8. Detraz J. Classes de Bergman de fonctions harmoniques. In: Bull. Soc. Math. France. 1981, vol. 109, pp. 259–268.
9. Duren P. Theory of H^p spaces. New York: Academic Press, 1970. 292 p.
10. Shamoyan R.F., Makhina N.M. On continuous linear functional in some weighted functional classes on product domains. In: *Sibirskie elektronnye matematicheskie izvestiya. Vol. 12* [Siberian electronic mathematical reports. Vol. 12]. 2015, pp. 651–678.
11. Tkachenko N.M., Shamoyan F.A. The Hardy-Littlewood theorem and the operator of harmonic conjugate in some classes of simply connected domains with rectifiable boundary. In: *Zhurnal matematicheskoi fiziki, analiza, geometrii. Vol. 5.* [Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry. Vol. 5]. 2009, no. 2, pp. 192–210.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Махина Наталья Михайловна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа Брянского государственного университета им. ак. И.Г. Петровского;
e-mail: mahinanm@yandex.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Nataliya M. Makhina – PhD in Physico-mathematical Sciences, associate professor of the Department of Mathematical Analysis at the Bryansk State University named after Academician Ivan Georgiyevich Petrovsky;
e-mail: mahinanm@yandex.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Махина Н.М. Оценки производных аналитических и гармонических функций в некоторых областях комплексной плоскости // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика и математика. 2017. № 2. С. 16–22.
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-2-16-22.

CORRECT REFERENCE TO THE ARTICLE

N. Makhina. Estimates of derivatives of analytic and harmonic functions in some domains on the complex plane. In: *Bulletin of Moscow Region State University*. Series: Physics & Mathematics. 2017, no. 2, pp. 16–22.
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-2-16-22.

РАЗДЕЛ II. ФИЗИКА

УДК 533.9.02

DOI: 10.18384/2310-7251-2017-2-23-33

ПРОДОЛЬНЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК В КЛАССИЧЕСКОЙ ПЛАЗМЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ДВУХ НЕКОЛЛИНЕАРНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

Аскерова В.И., Латышев А.В.

*Московский государственный областной университет,
105005, Москва, ул. Радио, 10А, Российская Федерация*

Аннотация. Проводится анализ нелинейного взаимодействия электромагнитного поля с максвелловской бесстолкновительной классической плазмой. В плазме распространяются две электромагнитные волны. Причём волновой вектор первой электромагнитной волны направлен вдоль оси x , а волновой вектор второй электромагнитной волны находится в плоскости (x, z) , и его направление с осью x составляет угол φ ($\varphi \neq 0$). Для этого случая найдены формулы для вычисления электрического тока. Оказалось, что нелинейный анализ позволяет выявить помимо известного поперечного тока ещё и продольный ток, пропорциональный квадрату электрического поля. Рассмотрен случай малых значений волновых чисел.

Ключевые слова: уравнение Власова, классическая плазма, поперечный и продольный ток, внешние электромагнитные поля.

LONGITUDINAL ELECTRIC CURRENT UNDER THE INFLUENCE OF TWO NONCOLLINEAR ELECTROMAGNETIC WAVES IN CLASSICAL PLASMA

V. Askerova, A. Latyshev

*Moscow Region State University,
ul. Radio 10A, 105005 Moscow, Russian Federation*

Abstract. We report an analysis of nonlinear interaction of electromagnetic field with the classical Maxwellian collisionless plasma. Two electromagnetic waves propagate in plasma. Moreover, the wave vector of the first electromagnetic wave is directed along the x axis. The wave vector of the second electromagnetic wave is in the (x, z) plane and its direction makes an angle of

© Аскерова В.И., Латышев А.В., 2017.

φ , ($\varphi \neq 0$) with the x axis. For this case, formulae for calculating the electric current are derived. It is found that the nonlinear analysis makes it possible to identify, apart from the known transverse current, the longitudinal current, which is proportional to the square of the electric field. The case of small values of the wave number is considered.

Key words: Vlasov equation, classical plasma, transverse and longitudinal electric current, external electromagnetic waves.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время исследование плазмы вызывает большой интерес у научного сообщества. Существует большое количество работ, посвящённых изучению плазмы [1–10]. В работах [1–4] изучаются нелинейные эффекты в плазме. Классическая плазма рассматривается в работах [5–10].

В данной работе рассматривается случай бесстолкновительной классической плазмы. Аналитически решается кинетическое уравнение Власова. Уточняются, как в разложении функции распределения, так и в разложении силы Лоренца величины, пропорциональные квадратам векторных потенциалов.

При подобном ходе исследования оказывается, что электрический ток обладает двумя ненулевыми компонентами. Одной из компонент (такой же, как и в линейном анализе) является «поперечный» ток. Вторая же компонента – «продольный» ток, который ортогонален первой компоненте. Он имеет второй порядок малости относительно величин напряжённости составляющих электрического поля.

Отметим, что частный случай данной проблемы был рассмотрен в работе [5].

1. Уравнение Власова

Рассмотрим уравнение Власова, описывающее поведение бесстолкновительной плазмы

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + e \left(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2] \right) \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0. \quad (1.1)$$

В данном уравнении f – функция распределения электронов плазмы, \mathbf{E}_j , \mathbf{H}_j ($j = 1, 2$) – компоненты электромагнитного поля, c – скорость света, $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ – импульс электронов, \mathbf{v} – скорость электронов, $f^{(0)} = f_{eq}(\mathbf{r}, \nu)$ ($eq \equiv equilibrium$) – локально равновесное распределение Ферми–Дирака:

$$f_{eq}(\mathbf{r}, \nu) = \left[1 + \exp \left(\frac{\mathcal{E} - \mu(\mathbf{r})}{k_B T} \right) \right]^{-1} = \left[1 + \exp \left(P^2 - \alpha(\mathbf{r}) \right) \right]^{-1} = f_{eq}(\mathbf{r}, P),$$

где $\mathcal{E} = m\nu^2/2$ – энергия электронов, μ – химический потенциал электронного газа, k_B – постоянная Больцмана, T – температура плазмы, $\mathbf{P} = \mathbf{p}/p_T$ – безразмерный импульс электронов, ν_T – тепловая скорость электронов ($\nu_T = \sqrt{2k_B T / m}$),

$\alpha = \mu / (k_B T)$ – безразмерный химический потенциал, $k_B \cdot T = \varepsilon_T = m\nu_T^2/2$ – тепловая кинетическая энергия электронов.

Введём абсолютное распределение Ферми–Дирака:

$$f_0(v) = \left[1 + \exp\left(\frac{\mathcal{E} - \mu}{k_B T}\right) \right]^{-1} = \left[1 + \exp(P^2 - \alpha) \right]^{-1} = f_0(P).$$

Будем полагать, что векторный потенциал $\mathbf{A}_j(\mathbf{r}, t)$ ортогонален соответствующему вектору \mathbf{k}_j , то есть $\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{A}_j(\mathbf{r}, t) = 0$, ($j = 1, 2$). Это означает, что волновой вектор \mathbf{k}_j ортогонален соответствующей составляющей электрического и магнитного поля:

$$\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{E}_j(\mathbf{r}, t) = 0, \mathbf{k}_j \cdot \mathbf{H}_j(\mathbf{r}, t) = 0, j = 1, 2.$$

Пусть один волновой вектор первой электромагнитной волны направлен вдоль оси x , а другой волновой вектор второй электромагнитной волны лежит в плоскости (x, z) и его направление составляет угол φ с осью x , причём $\varphi \neq 0$, то есть

$$\mathbf{k}_1 = k_1 \cdot (1, 0, 0) \text{ и } \mathbf{k}_2 = k_2 \cdot (\cos\varphi, 0, \sin\varphi),$$

$$\mathbf{E}_1 = E_1 \cdot \exp(i[k_1 x - \omega_1 t]) \cdot \{0, 1, 0\} \text{ и}$$

$$\mathbf{E}_2 = E_2 \cdot \exp(i[k_2(x \cos\varphi - z \sin\varphi) - \omega_2 t]) \cdot \{0, 1, 0\}.$$

Тогда электрическое и магнитное поля связаны с векторным потенциалом следующими равенствами:

$$\mathbf{E}_j = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}_j}{\partial t} = \frac{i\omega_j}{c} \mathbf{A}_j.$$

Напряжённость магнитного поля имеет следующие значения:

$$\mathbf{H}_1 = \frac{ck_1}{\omega_1} (0, 0, 1) E_1, \mathbf{H}_2 = \frac{ck_2}{\omega_2} (-\sin\varphi, 0, \cos\varphi) E_2.$$

Таким образом, векторное произведение равно:

$$[\mathbf{v}, \mathbf{H}_1] = \frac{ck_1}{\omega_1} E_1 (v_y, -v_x, 0),$$

$$[\mathbf{v}, \mathbf{H}_2] = \frac{ck_2}{\omega_2} E_2 (v_y \cos\varphi, -(v_x \cos\varphi + v_z \sin\varphi), v_y \sin\varphi).$$

С помощью векторного произведения найдём силу Лоренца:

$$e \left\{ \frac{E_1}{\omega_1} \left[k_1 v_y \frac{\partial f}{\partial p_x} + (\omega_1 - k_1 v_x) \frac{\partial f}{\partial p_y} \right] + \frac{E_2}{\omega_2} \left[k_2 v_y \cos\varphi \frac{\partial f}{\partial p_x} + \right. \right. \\ \left. \left. + (\omega_2 - k_2 (v_x \cos\varphi + v_z \sin\varphi)) \frac{\partial f}{\partial p_y} + k_2 v_y \sin\varphi \frac{\partial f}{\partial p_z} \right] \right\}. \quad (1.2)$$

Следовательно, уравнение (1.1) переписется с учётом (1.2) в следующем виде:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_x \frac{\partial f}{\partial x} + e \left\{ \frac{E_1}{\omega_1} \left[k_1 v_y \frac{\partial f}{\partial p_x} + (\omega_1 - k_1 v_x) \frac{\partial f}{\partial p_y} \right] + \frac{E_2}{\omega_2} \left[k_2 v_y \cos\varphi \frac{\partial f}{\partial p_x} + \right. \right.$$

$$+\left(\omega_2 - k_2(v_x \cos \varphi + v_z \sin \varphi)\right) \frac{\partial f}{\partial p_y} + k_2 v_y \sin \varphi \frac{\partial f}{\partial p_z} \Big] \Big\} = 0. \quad (1.3)$$

Решение уравнения (1.3) будем искать в виде

$$f = f_0(P) + f_1 + f_2, \quad (1.4)$$

где

$$f_1 = E_1 \varphi_1 + E_2 \varphi_2, \quad (1.5)$$

$$f_2 = E_1^2 \psi_1 + E_2^2 \psi_2 + E_1 E_2 \psi_0. \quad (1.6)$$

Здесь

$$E_1 \sim \exp [i (k_1 x - \omega_1 t)],$$

$$E_2 \sim \exp [i (k_2 \{x \cos \varphi - z \sin \varphi\} - \omega_2 t)],$$

$$E_1^2 \sim \exp [2i (k_1 x - \omega_1 t)],$$

$$E_2^2 \sim \exp [2i (k_2 \{x \cos \varphi - z \sin \varphi\} - \omega_2 t)],$$

$$E_1 E_2 \sim \exp [2i (x \{k_1 + k_2 \cos \varphi\} - k_2 z \sin \varphi - \{\omega_1 + \omega_2\} t)].$$

2. Первое приближение

В данной задаче имеется четыре параметра размерности длины $\lambda_j = v_T/\omega_j$ и $l_j = 1/k_j$. Будем полагать, что как на длинах λ_j , так и на длинах l_j изменение энергии электрона под действием соответствующего электрического поля много меньше тепловой энергии электронов $k_B T$, то есть параметры $\alpha_j = |eE_j|v_T/(k_B T\omega)$ и $\beta_j = |eE_j|v_T/(k_B T k)$ являются малыми параметрами. Далее действуем методом последовательных приближений, считая, что $\alpha_j \ll 1$, $\beta_j \ll 1$.

Уравнение (1.3) с помощью (1.4) эквивалентно следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial t} + v_x \frac{\partial f_1}{\partial x} = -e \left\{ \frac{E_1}{\omega_1} \left[k_1 v_y \frac{\partial f_0}{\partial p_x} + (\omega_1 - k_1 v_x) \frac{\partial f_0}{\partial p_y} \right] + \frac{E_2}{\omega_2} \left[k_2 v_y \cos \varphi \frac{\partial f_0}{\partial p_x} + \right. \right. \\ \left. \left. + (\omega_2 - k_2 (v_x \cos \varphi + v_z \sin \varphi)) \frac{\partial f_0}{\partial p_y} + k_2 v_y \sin \varphi \frac{\partial f_0}{\partial p_z} \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.1)$$

и

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} + v_x \frac{\partial f_2}{\partial x} = -e \left\{ \frac{E_1}{\omega_1} \left[k_1 v_y \frac{\partial f_1}{\partial p_x} + (\omega_1 - k_1 v_x) \frac{\partial f_1}{\partial p_y} \right] + \frac{E_2}{\omega_2} \left[k_2 v_y \cos \varphi \frac{\partial f_1}{\partial p_x} + \right. \right.$$

$$+ \left\{ \omega_2 - k_2 (v_x \cos \varphi + v_z \sin \varphi) \frac{\partial f_1}{\partial p_y} + k_2 v_y \sin \varphi \frac{\partial f_1}{\partial p_z} \right\}. \quad (2.2)$$

Из уравнения (2.1) получим

$$\begin{aligned} & (-i\omega_1 + i k_1 v_x) E_1 \varphi_1 + (-i\omega_2 + i k_2 v_x \cos \varphi + i k_2 v_z \sin \varphi) E_2 \varphi_2 = \\ & = -e \left\{ \frac{E_1}{\omega_1} \left[k_1 v_y \frac{\partial f_0}{\partial p_x} + (\omega_1 - k_1 v_x) \frac{\partial f_0}{\partial p_y} \right] + \frac{E_2}{\omega_2} \left[k_2 v_y \cos \varphi \frac{\partial f_0}{\partial p_x} + \right. \right. \\ & \left. \left. + (\omega_2 - k_2 (v_x \cos \varphi + v_z \sin \varphi)) \frac{\partial f_0}{\partial p_y} + k_2 v_y \sin \varphi \frac{\partial f_0}{\partial p_z} \right] \right\}. \quad (2.3) \end{aligned}$$

Введём безразмерные параметры $\Omega_j = \frac{\omega_j}{k_T v_T}$, $q_j = \frac{k_j}{k_T}$, где q_j – безразмерное волновое число, $\frac{mv}{k_T v_T}$ – тепловое волновое число.

В уравнении (2.3) перейдём к безразмерным параметрам. В итоге получим:

$$\begin{aligned} & i \left[E_1 \varphi_1 (q_1 P_x - \Omega_1) + E_2 \varphi_2 (q_2 (P_x \cos \varphi + P_z \sin \varphi) - \Omega_2) \right] = \\ & = -\frac{e}{k_T v_T} \left\{ \frac{E_1}{\Omega_1} \left[q_1 P_y \frac{\partial f_0}{\partial P_x} + (\Omega_1 - q_1 P_x) \frac{\partial f_0}{\partial P_y} \right] + \frac{E_2}{\Omega_2} \left[q_2 P_y \cos \varphi \frac{\partial f_0}{\partial P_x} + \right. \right. \\ & \left. \left. + (\Omega_2 - q_2 (P_x \cos \varphi + P_z \sin \varphi)) \frac{\partial f_0}{\partial P_y} + q_2 P_y \sin \varphi \frac{\partial f_0}{\partial P_z} \right] \right\}. \quad (2.4) \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\frac{\partial f_0}{\partial P_x} \sim P_x, \quad \frac{\partial f_0}{\partial P_y} \sim P_y, \quad \frac{\partial f_0}{\partial P_z} \sim P_z.$$

Вычисляя правую часть уравнения (2.4), получим:

$$\begin{aligned} & \left[q_1 P_y \frac{\partial f_0}{\partial P_x} + (\Omega_1 - q_1 P_x) \frac{\partial f_0}{\partial P_y} \right] + \left[q_2 P_y \cos \varphi \frac{\partial f_0}{\partial P_x} + \right. \\ & \left. + (\Omega_2 - q_2 (P_x \cos \varphi + P_z \sin \varphi)) \frac{\partial f_0}{\partial P_y} + q_2 P_y \sin \varphi \frac{\partial f_0}{\partial P_z} \right] = (\Omega_1 + \Omega_2) \frac{\partial f_0}{\partial P_y}. \quad (2.5) \end{aligned}$$

Перепишем (2.4) с учётом (2.5) в следующем виде:

$$i \left[E_1 \varphi_1 (q_1 P_x - \Omega_1) + E_2 \varphi_2 (q_2 (P_x \cos \varphi + P_z \sin \varphi) - \Omega_2) \right] =$$

$$= -\frac{e}{k_T p_T v_T} (E_1 + E_2) \frac{\partial f_0}{\partial P_y}. \quad (2.6)$$

Таким образом, первое приближение равно:

$$f_1 = \frac{ie}{k_T p_T v_T} \left[\frac{E_1}{q_1 P_x - \Omega_1} + \frac{E_2}{q_2 (P_x \cos \varphi + P_z \sin \varphi) - \Omega_2} \right]. \quad (2.7)$$

3. Второе приближение

Уравнения (1.3) будем решать во втором приближении. Для этого в левую часть уравнения (2.2) подставим (1.6). Получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned} E_1^2 [2i(k_1 v_x - \omega_1)] \psi_1 + E_2^2 [2i(k_2(v_x \cos \varphi + v_z \sin \varphi) - \omega_2)] \psi_2 + E_1 E_2 [-i(\omega_1 + \omega_2) + \\ + i(v_x(k_1 + k_2 \cos \varphi) + k_2 v_x \sin \varphi)] \psi_0 = -e \left\{ \frac{E_1}{\omega_1} \left[k_1 v_y \frac{\partial f_1}{\partial p_x} + (\omega_1 - k_1 v_x) \frac{\partial f_1}{\partial p_y} \right] + \right. \\ \left. + \frac{E_2}{\omega_2} \left[k_2 v_y \cos \varphi \frac{\partial f_1}{\partial p_x} + (\omega_2 - k_2(v_x \cos \varphi + v_z \sin \varphi)) \frac{\partial f_1}{\partial p_y} + k_2 v_y \sin \varphi \frac{\partial f_1}{\partial p_z} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Перейдя к безразмерным параметрам, будем иметь равенство:

$$\begin{aligned} E_1^2 [q_1 P_x - \Omega_1] \psi_1 + E_2^2 [q_2 (P_x \cos \varphi + P_z \sin \varphi) - \Omega_2] \psi_2 + E_1 E_2 [2((q_1 + q_2 \cos \varphi) P_x + \\ + q_2 P_z \sin \varphi) - \Omega] \psi_0 = -\frac{e^2}{2k_T p_T v_T^2} \left\{ \frac{E_1^2}{\Omega_1} \left[q_1 P_y \frac{\partial}{\partial P_x} \left(\frac{\partial f_0 / \partial P_y}{q_1 P_x - \Omega_1} \right) - \frac{\partial^2 f_0}{\partial P_y^2} \right] + \right. \\ \left. + \frac{E_2^2}{\Omega_2} \left[q_2 P_y \frac{\partial}{\partial P_x} \left(\frac{\partial f_0 / \partial P_y}{q_2 (P_x \cos \varphi + P_z \sin \varphi) - \Omega_2} \right) - \frac{\partial^2 f_0}{\partial P_y^2} \right] + \frac{E_1 E_2}{\Omega_1} \times \right. \\ \left. \times \left[q_1 P_y \frac{\partial}{\partial P_x} \left(\frac{\partial f_0 / \partial P_y}{q_2 (P_x \cos \varphi + P_z \sin \varphi) - \Omega_2} \right) + \frac{\Omega_1 - q_1 P_x}{q_2 (P_x \cos \varphi + P_z \sin \varphi) - \Omega_2} \frac{\partial^2 f_0}{\partial P_y^2} \right] + \right. \\ \left. + \frac{E_1 E_2}{\Omega_2} \left[q_2 P_y \frac{\partial}{\partial P_x} \left(\frac{\partial f_0 / \partial P_y}{q_1 P_x - \Omega_1} \right) + \frac{\Omega_2 - q_2 (P_x \cos \varphi + P_z \sin \varphi)}{q_1 P_x - \Omega_1} \frac{\partial^2 f_0}{\partial P_y^2} \right] \right\}, \end{aligned}$$

где $\Omega = (\Omega_1 + \Omega_2)/2$.

Из этого уравнения найдём ψ_1 , ψ_2 , и ψ_0 :

$$\psi_1 = -\frac{e^2}{2k_T^2 p_T^2 v_T^2 \Omega_1} \cdot \frac{\Xi_1(\mathbf{P})}{q_1 P_x - \Omega_1}, \quad (3.1)$$

$$\Psi_2 = -\frac{e^2}{2k_T^2 p_T^2 v_T^2 \Omega_2} \cdot \frac{\Xi_2(\mathbf{P})}{q_2 (P_x \cos \varphi + P_z \sin \varphi) - \Omega_2}, \quad (3.2)$$

$$\Psi_0 = -\frac{e^2}{2k_T^2 p_T^2 v_T^2} \cdot \left[\frac{1}{\Omega_1} \cdot \frac{\Xi_{12}(\mathbf{P})}{q_1 P_x - \Omega} + \frac{1}{\Omega_2} \cdot \frac{\Xi_{21}(\mathbf{P})}{2(q_1 + q_2 \cos \varphi) P_x + q_2 P_z \sin \varphi - \Omega} \right], \quad (3.3)$$

где

$$\Xi_1(\mathbf{P}) = q_1 P_y \frac{\partial}{\partial P_x} \left(\frac{\partial f_0 / \partial P_y}{q_1 P_x - \Omega_1} \right) - \frac{\partial^2 f_0}{\partial P_y^2},$$

$$\Xi_2(\mathbf{P}) = q_2 P_y \frac{\partial}{\partial P_x} \left(\frac{\partial f_0 / \partial P_y}{q_2 (P_x \cos \varphi + P_z \sin \varphi) - \Omega_2} \right) - \frac{\partial^2 f_0}{\partial P_y^2},$$

$$\Xi_{12}(\mathbf{P}) = q_1 P_y \frac{\partial}{\partial P_x} \left(\frac{\partial f_0 / \partial P_y}{q_2 (P_x \cos \varphi + P_z \sin \varphi) - \Omega_2} \right) + \frac{\Omega_1 - q_1 P_x}{q_2 (P_x \cos \varphi + P_z \sin \varphi) - \Omega_2} \frac{\partial^2 f_0}{\partial P_y^2},$$

$$\Xi_{21}(\mathbf{P}) = q_1 P_y \frac{\partial}{\partial P_x} \left(\frac{\partial f_0 / \partial P_y}{q_1 P_x - \Omega_1} \right) + \frac{\Omega_2 - q_2 (P_x \cos \varphi + P_z \sin \varphi)}{q_1 P_x - \Omega_1} \frac{\partial^2 f_0}{\partial P_y^2}.$$

Здесь $\Omega = (\Omega_1 + \Omega_2)/2$, $q = (q_1 + q_2)/2$.

При $\varphi = 0$ получим формулы (3.1) – (3.3) из работы [5].

Таким образом, функция распределения во втором приближении построена и определяется равенством (1.4), в котором функция f_1 задаётся формулами (1.5) и (2.7), а f_2 определяется равенствами (1.6) и (3.1) – (3.3).

4. Плотность электрического тока

Найдём плотность электрического тока

$$\mathbf{j} = e \int \mathbf{v} f \frac{2d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{2p_T v_T}{(2\pi\hbar)^3} \int \mathbf{P} f d^3 P. \quad (4.1)$$

Вектор плотности тока имеет две ненулевые компоненты $\mathbf{j} = (j_x, j_y, 0)$, где j_x – плотность поперечного тока, j_y – плотность продольного тока.

Вычислим плотность поперечного тока, которая определяется выражением:

$$j_y = e \int v_y f \frac{2d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} = e \int v_y f_1 \frac{2d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{2p_T^2 v_T}{(2\pi\hbar)^3} \int f_1 P_y d^3 P. \quad (4.2)$$

Поперечный ток направлен вдоль электромагнитного поля, его плотность определяется согласно (4.2) только первым приближением функции распределения. Второе приближение функции распределения не вносит вклад в плотность тока. Таким образом, в явном виде поперечный ток равен:

$$j_y = \frac{2ie^2 p_T^2}{k_T (2\pi\hbar)^3} \int \left[\frac{E_1}{q_1 P_x - \Omega_1} + \frac{E_2}{q_2 (P_x \cos \varphi + P_z \sin \varphi) - \Omega_2} \right] \frac{\partial f_0}{\partial P_y} P_y d^3 P. \quad (4.3)$$

Теперь перейдём к исследованию продольного тока. В силу разложения (1.6) продольный ток может быть представлен в виде трёх слагаемых: $j_x = j_1 + j_2 + j_0$, где

$$j_1 = -\frac{E_1^2 e^3 p_T}{(2\pi\hbar)^3 k_T^2 v_T \Omega_1} \int \frac{\Xi_1(\mathbf{P}) P_x d^3 P}{q_1 P_x - \Omega_1},$$

$$j_2 = -\frac{E_1^2 e^3 p_T}{(2\pi\hbar)^3 k_T^2 v_T \Omega_2} \int \frac{\Xi_2(\mathbf{P}) P_x d^3 P}{q_2 (P_x \cos \varphi + P_z \sin \varphi) - \Omega_2},$$

$$j_0 = -\frac{E_1 E_2 e^3 p_T}{(2\pi\hbar)^3 k_T^2 v_T} \int \left[\frac{1}{\Omega_1} \cdot \frac{\Xi_{12}(\mathbf{P})}{q P_x - \Omega} + \frac{1}{\Omega_2} \cdot \frac{\Xi_{21}(\mathbf{P})}{2(q_1 + q_2 \cos \varphi) P_x + q_2 P_z \sin \varphi - \Omega} \right] P_x d^3 P,$$

здесь $\Omega = (\Omega_1 + \Omega_2)/2$, $q = (q_1 + q_2)/2$.

Отметим, что $j_0 = j_{12} + j_{21}$, тогда

$$j_{12} = -\frac{E_1 E_2 e^3 p_T}{(2\pi\hbar)^3 k_T^2 v_T \Omega_1} \int \frac{\Xi_{12}(\mathbf{P})}{q P_x - \Omega} P_x d^3 P,$$

$$j_{21} = -\frac{E_1 E_2 e^3 p_T}{(2\pi\hbar)^3 k_T^2 v_T \Omega_2} \int \frac{\Xi_{21}(\mathbf{P})}{2(q_1 + q_2 \cos \varphi) P_x + q_2 P_z \sin \varphi - \Omega} P_x d^3 P.$$

Найдём числовую плотность (концентрацию) частиц плазмы, отвечающую распределению Ферми-Дирака:

$$N = \int f_0(\mathbf{P}) \frac{2d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{8\pi p_T^3}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty \frac{e^{\alpha - P^2} P^2 dP}{1 + e^{\alpha - P^2}} = \frac{k_T^3}{2\pi^2} l_0(\alpha),$$

$$\text{где } l_0(\alpha) = \int_0^\infty \ln(1 + e^{\alpha - \tau^2}) d\tau.$$

В выражении перед интегралами выделим плазменную (ленгмюровскую) частоту $\omega_p = \sqrt{4\pi e^2 N / m}$ и числовую плотность (концентрацию) N . При этом числовую плотность выразим через волновое число. Следовательно,

$$\frac{\pi p_T e^3 q_j}{(2\pi\hbar)^3 k_T^2 v_T} = \frac{e \Omega_p^2}{p_T k_T} \cdot \frac{k_j}{16\pi l_0(\alpha)} = \sigma_{1,\text{tr}} \frac{k_j}{16\pi l_0(\alpha)}.$$

Здесь $\Omega_p = \omega_p / (k_T v_T) = \omega_p / (m v_T^2)$ – безразмерная плазменная частота, $\sigma_{1,\text{tr}}$ – продольно-поперечная проводимость ($\sigma_{1,\text{tr}} = e \cdot \Omega_p^2 / (p_T k_T)$).

Составляющие продольного тока могут быть записаны в виде:

$$j_j = E_j^2 \sigma_{1,\text{tr}} k_j J_j, \quad j_0 = E_1 E_2 \sigma_{1,\text{tr}} (k_1 J_{12} + k_2 J_{21}), \quad (4.4)$$

где

$$J_1 = \frac{1}{16\pi^2 l_0(\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(1 + e^{\alpha - P_x^2}) dP_x}{(q_1 P_x - \Omega_1)^3},$$

$$J_2 = -\frac{1}{16\pi^2 l_0(\alpha) \Omega_2} \int \frac{\Xi_2(\mathbf{P}) P_x d^3 P}{q_2 (P_x \cos \varphi + P_z \sin \varphi) - \Omega_2},$$

$$J_{12} = -\frac{1}{16\pi^2 l_0(\alpha) \Omega_1} \int \frac{\Xi_{12}(\mathbf{P}) P_x d^3 P}{q P_x - \Omega},$$

$$J_{21} = -\frac{1}{16\pi^2 l_0(\alpha) \Omega_2} \int \frac{\Xi_{21}(\mathbf{P}) P_x d^3 P}{2(q_1 + q_2 \cos \varphi) P_x + q_2 P_z \sin \varphi - \Omega}.$$

В равенствах (4.4) величины J_1, J_2, J_{12}, J_{21} – безразмерные части плотности продольного тока.

Следовательно, продольная часть тока имеет следующий вид:

$$j_x = \sigma_{1,\text{tr}} \left[E_1^2 k_1 J_1 + E_2^2 k_2 J_2 + E_1 E_2 (k_1 J_{12} + k_2 J_{21}) \right]. \quad (4.5)$$

Введём поперечные поля $\mathbf{E}_j^{\text{tr}} = \mathbf{E}_j - \mathbf{k}_j (\mathbf{E}_j \mathbf{k}_j) / k_j^2$. Теперь равенство (4.5) можно представить в инвариантной форме:

$$\mathbf{j}_{\text{long}} = \sigma_{1,\text{tr}} \left[(\mathbf{E}_1^{\text{tr}})^2 \mathbf{k}_1 J_1 + (\mathbf{E}_2^{\text{tr}})^2 \mathbf{k}_2 J_2 + \mathbf{E}_1^{\text{tr}} \mathbf{E}_2^{\text{tr}} (\mathbf{k}_1 J_{12} + \mathbf{k}_2 J_{21}) \right].$$

Рассмотрим случай малых значений волнового числа. Из (4.5) вытекает, что при малых значениях волновых чисел для плотности продольного тока получаем:

$$j_x = -\frac{\sigma_{1,\text{tr}}}{8\pi} \left[E_1^2 \frac{k_1}{\Omega_1^3} + E_2^2 \frac{k_2}{\Omega_2^3} + 2E_1 E_2 \frac{k_1 + k_2}{\Omega_1 \Omega_2 (\Omega_1 + \Omega_2)} \right]. \quad (4.6)$$

Заключение

В данной работе рассмотрена классическая бесстолкновительная плазма, в которой в плоскости (x, z) распространяются две волны под углом φ друг к другу. С помощью метода последовательных приближений аналитически решено уравнение Власова. Исследовано влияние нелинейного характера взаимодействия электромагнитного поля с бесстолкновительной плазмой.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Ginsburg V., Gurevich A. Nonlinear phenomena in a plasma located in an alternating electromagnetic field // Usp. Fiz. Nauk, 70(2) 1960. pp. 201–246 [Sov. Phys. Usp., 3. 1960. pp. 115–146].

2. Akhmediev N., Mel'nikov I., Robur L. Second-Harmonic Generation by a Reflecting Metal Surface // *Laser Physics*. Vol. 4. No. 6. 1994. pp. 1194–1197.
3. Бежанов С.Г., Урюпин С.А. Генерация нелинейных токов и низкочастотного излучения при взаимодействии лазерного импульса с металлом // *Квантовая электроника*. 2013. 43:11. С. 1048–1054.
4. Zytovich V. Nonlinear effects in plasmas. Moscow. Publ. Leland. 2014. 287 p.
5. Латышев А. В., Юшканов А. А. Нелинейный продольный ток в классической и квантовой плазме, генерируемый двумя поперечными электромагнитными волнами // *Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика*. 2015. № 4. С. 44–62.
6. Латышев А.В., Юшканов А.А. Генерирование продольного тока поперечным электромагнитным полем в классической и квантовой плазме // *Физика плазмы*. 2015. Т. 41. № 9. С. 778–787.
7. Латышев А.В., Юшканов А.А. Нелинейный продольный ток в максвелловской плазме, возникающий под действием поперечной электромагнитной волны // *Известия РАН. Серия: Механика жидкости и газа*. 2015. № 6. С. 139–156.
8. Латышев А.В., Юшканов А.А., Квантовые эффекты взаимодействия электромагнитного поля с плазмой. М.: МГОУ, 2016. 385 с.
9. Латышев А. В., Юшканов А.А. Генерирование продольного тока поперечным электромагнитным полем в столкновительной вырожденной плазме // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2016. Т. 56. №. 9. С. 1667–1676.
10. Latyshev A.V., Askerova V.I. The occurrence of transverse and longitudinal electric currents in the classical plasma under the action of N transverse electromagnetic waves // *arXiv preprint arXiv: 1701.03048*. 2017.

REFERENCES

1. Ginsburg V., Gurevich A. Nonlinear phenomena in a plasma located in an alternating electromagnetic field // *Usp. Fiz. Nauk*, 70(2) 1960. pp. 201–246 [*Sov. Phys. Usp.*, 3. 1960. pp. 115–146].
2. Akhmediev N., Mel'nikov I., Robur L. Second-Harmonic Generation by a Reflecting Metal Surface // *Laser Physics*. Vol. 4. No. 6. 1994. pp. 1194–1197.
3. Bezhanov S.G., Uryupin S.A. Generation of nonlinear currents and low-frequency radiation upon interaction of a laser pulse with a metal. In: *Kvantovaya Elektronika* [Quantum Electronics]. 2013, Vol. 43 (11), pp. 1048–1054.
4. Zytovich V. Nonlinear effects in plasmas. Moscow. Publ. Leland. 2014. 287 p.
5. Latyshev A.V., Yushkanov A.A. Nonlinear longitudinal current in classical and quantum plasmas generated by two transverse electromagnetic waves. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika* [Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and mathematics]. 2015, no. 4, pp. 44–62.
6. Latyshev A.V., Yushkanov A.A. Generation of longitudinal current by a transverse electromagnetic field in classical and quantum plasmas. In: *Fizika Plazmy. Vol. 41*. [Plasma Physics. Vol. 41]. 2015, no. 9, pp. 778–787.
7. Latyshev A.V., Yushkanov A.A. Nonlinear longitudinal current in the Maxwell plasma created under the action of transverse electromagnetic waves. In: *Izvestiya RAN. Seriya: Mekhanika zhidkosti i gaza* [Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Ser.: Fluid and liquid Mechanics]. 2015, no. 6, pp. 139–156.
8. Latyshev A.V., Yushkanov A.A. *Kvantovye efekty vzaimodeistviya elektromagnitnogo polya s plazmoi* [Quantum effects of the interaction of electromagnetic fields with plasmas]. Moscow, IJU MGOU Publ., 2016. 385 p.

9. Latyshev A. V., Yushkanov A.A. Generation of longitudinal current by a transverse electromagnetic field in a collisional degenerate plasma. In: *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki. Vol. 56.* [Computational mathematics and mathematical physics. Vol. 56.], 2016, no. 9, pp. 1667–1676.
10. Latyshev A.V., Askerova V.I. The occurrence of transverse and longitudinal electric currents in the classical plasma under the action of N transverse electromagnetic waves. arXiv preprint arXiv: 1701.03048. 2017.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Аскерова Вера Исламовна – студент физико-математического факультета Московского государственного областного университета;
e-mail: vera_askerova@mail.ru

Латышев Анатолий Васильевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа и геометрии Московского государственного областного университета, заслуженный деятель науки РФ;
e-mail: avlatyshev@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Vera I. Askerova – student of the Physics and Mathematics Department at the Moscow Region State University;
e-mail: vera_askerova@mail.ru

Anatoly V. Latyshev – Doctor in Physico-mathematical Sciences, professor of the Department of Mathematical Analysis and Geometry at the Moscow Region State University;
e-mail: avlatyshev@mail.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Аскерова В.И., Латышев А.В. Продольный электрический ток в классической плазме под действием двух неколлинеарных электромагнитных волн // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2017. № 2. С. 23–33. DOI: 10.18384/2310-7251-2017-2-23-33.

CORRECT REFERENCE TO THE ARTICLE

V. Askerova, A. Latyshev. Longitudinal electric current under the influence of two noncollinear electromagnetic waves in classical plasma. In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics.* 2017, no. 2, pp. 23–33.
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-2-23-33.

УДК: 538.911

DOI: 10.18384/2310-7251-2017-2-34-45.

ОСОБЕННОСТИ ФОРМИРОВАНИЯ МИКРОСТРУКТУРЫ ЖИДКОКРИСТАЛЛИЧЕСКИХ КОМПОЗИТОВ НА ОСНОВЕ БОРОСИЛОКСАНА¹

Мащенко В.И., Шашкова Ю.О., Соломатин А.С., Беляев В.В.

*Московский государственный областной университет,
105005, г. Москва, ул. Радио, 10А, Российская Федерация*

Аннотация. Методами оптической поляризационной микроскопии, спектрофотометрии и рефрактометрии исследованы микроструктура и оптические свойства полученных впервые жидкокристаллических композитов (ЖК-композитов) на основе боросилоксана, и нематического жидкого кристалла ЖК-1282. При одноосной вытяжке композитов обнаружено новое явление формирования в матрице боросилоксана микронитей ЖК с длиной до нескольких сантиметров. Экспериментально и теоретически охарактеризованы процессы образования микронитей и их самопроизвольного разрушения с образованием микрокапель ЖК. Предложены и экспериментально подтверждены модель наблюдаемых процессов и аналитическое выражение, связывающее длину и радиус сформированной нити с размерами капель, образующихся при её разрушении. Материалы на базе исследованных ЖК-композитов могут быть использованы в дисплейной технике и оптоэлектронике, например, в качестве микрорезонаторов и электронно-оптических датчиков.

Ключевые слова: жидкокристаллический композит, нематический жидкий кристалл, боросилоксан, микроструктура, оптическая поляризационная микроскопия, математическое моделирование процессов.

PECULIARITIES OF THE FORMATION OF A MICROSTRUCTURE OF BOROSILOXANE LIQUID CRYSTAL COMPOSITES

V. Mashchenko, A. Solomatin, Y. Shashkova, V. Belyaev

*Education & Research Lab of Theoretical and Applied Nanotechnology, Moscow Region State University,
ul. Radio 10A, 105005 Moscow, Russian Federation*

Abstract. Using the methods of optical polarization microscopy, spectrophotometry and refractometry, we study the microstructure and optical properties of liquid crystal composites (LC composites) based on borosiloxane and LCD-1282 nematic liquid crystal that have been obtained for the first time. In the uniaxial stretching of composites, a new phenomenon in the formation of borosiloxane of microfilaments of liquid crystals in a matrix up to several centimeters in length is observed. The formation of microfilaments and their spontaneous destruction with the formation of microdroplets of liquid crystals are experimental and theoretically characterized. The model

¹ Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 16-57-00089Бел_а.
© Мащенко В.И., Шашкова Ю.О., Соломатин А.С., Беляев В.В., 2017.

of observed processes and an analytical expression relating the length and radius of the formed filament with the size of the droplets formed during its destruction are proposed and experimentally confirmed. Materials based on the investigated LC composites can be used in display technology and optoelectronics, for example, as microresonators and electron-optical sensors.

Key words: liquid crystal composite, nematic liquid crystal, borosiloxane, microstructure, optical polarization microscopy, mathematical modeling of processes.

Введение

Исследованиями жидких кристаллов (ЖК) занимаются с 1960-х годов. ЖК и композиты на их основе (ЖК-композиты) нашли широкое применение в дисплейной технике и других устройствах [1–4]. Большое количество работ [1; 5] посвящено получению и исследованию ЖК-композитов, где ЖК в виде микрокапель равномерно диспергированы в инертной среде, например, в полимерной матрице. Большое значение придается формированию в таких композитах микроструктуры, которая обусловила бы получение требуемых макрохарактеристик материала или устройства [6; 7; 9; 10].

Ввиду широкого развития миниатюризации, микро- и нанотехнологий, наряду с макрохарактеристиками материалов научный и практический интерес представляют системы, где отдельная микрокапля или микроучасток поверхности ЖК используется в качестве функционального элемента микроустройства.

В качестве инертной среды для размещения капли ЖК часто используются силиконовые масла и полимеры ввиду их высокой прозрачности (вследствие аморфности структуры), инертности, постоянства параметров в широком интервале температур и технологичности. Силиконы обладают показателем преломления около 1,4, что меньше показателя преломления большинства традиционных ЖК (обычно более 1,5). Они являются отличными электрическими изоляторами, обладают хорошей теплопередачей и не являются легковоспламеняющимися, обладают био- и химической инертностью, эластичностью, долговечностью и экологичностью.

Боросилоксан (БС) интересен в качестве матрицы ЖК-композита, так как, сохраняя все достоинства силиконовых материалов, он обладает уникальными механическими свойствами дилатантной жидкости: маслообразной текучестью при статической нагрузке и каучукоподобной способностью к растяжению при резком воздействии. Получают БС реакцией силоксанов с соединениями бора (борангидридом, борной кислотой и др.).

Целью данной работы является исследование микроструктуры и оптических свойств жидкокристаллических композитов на основе боросилоксана.

Экспериментальная часть

В качестве ЖК была использована нематическая смесь ЖК-1282 ($T_{CN} = 253,1$ К; $T_{NI} = 335,1$ К), которая состоит из алкоксицианбифенилов (80% массовой доли), эфира Демуса (16%) и эфира Грея (4%), производства ФГУП «НИОПИК» (РФ).

Боросилоксан получен по методике, адаптированной для данной задачи из патента РФ [10].

Жидкокристаллические композиты были получены с помощью метода фазового разделения индуцированного испарением растворителя SIPS (Solvent-Induced Phase Separation).

Микроскопические снимки сделаны с использованием оптического поляризационного микроскопа – Альтами Полар 3 (РФ). Для определения показателя преломления использован рефрактометр ИРФ-454 (РФ). УФ-спектры получены с помощью спектрофотометра УСФ-1 (РФ).

Результаты и их обсуждение

Микроструктура и оптические свойства ЖК-композитов

Боросилоксан представляет собой неньютоновскую (дилатантную) жидкость, которая при растяжении ведёт себя подобно жевательной резинке, а при отсутствии внешнего напряжения ведёт себя подобно вязкому силиконовому маслу, растекаясь по поверхности подложки.

Для получения ЖК-композита боросилоксан и ЖК в соотношении 1 к 1 растворили в совместном растворителе (этаноле). Полученный прозрачный гомогенный раствор вылили на стекло и высушили в течение нескольких суток при комнатной температуре. Далее для полного удаления этилового спирта композиты досушили в сушильном шкафу при температуре 80 °С.

После удаления растворителя композиты стали мутными, часть жидкого кристалла выделилась в виде капель на поверхность. Микроскопические исследования данных образцов показали, что композиты имеют выраженную двухфазную природу, где ЖК-фаза заключена в каплях размером от единиц до сотен микрон (рис. 1).

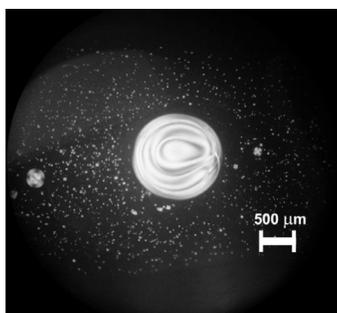


Рис. 1. Микроскопический снимок образца ЖК-композита на основе БС и ЖК-1282, полученного методом SIPS, в скрещённых поляризаторах.

Интересную волнистую морфологию имеет большая капля. Оптические волнистые линии внутри неё, по-видимому, являются так называемыми буджумами. В каплях размером менее 100 мкм наблюдается морфология типа Мальтийского креста.

Далее данный ЖК-композит был подвергнут десятикратной одноосной вытяжке (и в поляризованном микроскопе было обнаружено, что морфология образца значительно изменилась (Рис. 2).

Фаза ЖК теперь уже представляла собой не капли, а микрофиламенты, наполненные ЖК (Рис 2а). Но картина не оставалась статичной, а видоизменя-

лась. Микрофиламенты с течением времени снова превращались в микрокапли (рис. 2б).

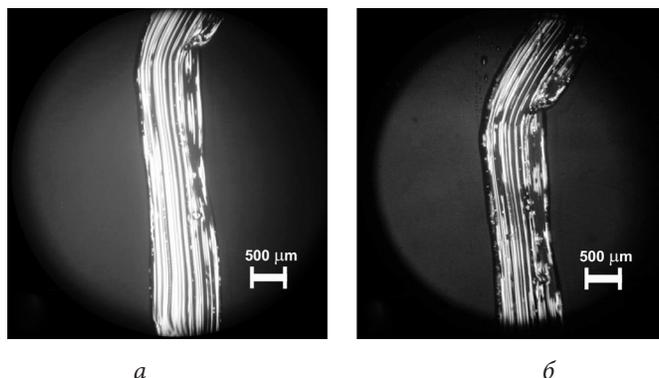


Рис. 2. ЖК-композит на основе боросилоксана, наполненный ЖК-1282, одноосно вытянутый в 10 раз: а) – сразу после вытяжки, б) – 10 мин после вытяжки (часть вытянутых объектов уже разделилась на капли или отдельные вытянутые объекты, из которых в дальнейшем образуются капли).

Исследована морфология ЖК-композитов в статике и динамике с помощью оптического поляризационного микроскопа. Обнаружено явление образования протяжённых вытянутых объектов цилиндрической формы с конусами на концах, содержащих ЖК в массе боросилоксана в процессе одноосной вытяжки. Также обнаружен последовавший за этим эффект дробления данных объектов, наполненных ЖК, на капли, названный авторами «эффект хайвэя» за внешнее сходство с фотографиями ночного оживленного шоссе (Рис. 2).

Оказалось, что боросилоксан, благодаря своей способности не липнуть ни к рукам, ни к эластичным перчаткам, легко смешивается с ЖК вручную. Данный процесс напоминает вытягивание жевательной резинки. Боросилоксан легко насыщается ЖК вплоть до концентрации в 40 масс. % в случае ручного смешения, где процессы многократной вытяжки чередуются с перемешиванием (рис. 3).

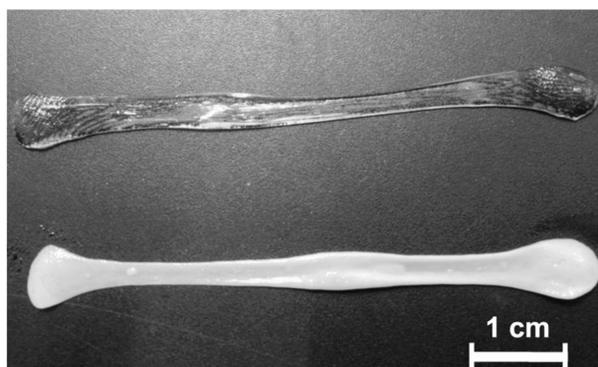


Рис. 3. Фотография вытянутого образца БС (сверху) и ЖК-композита на основе БС и ЖК-1282 (снизу).

Хорошо видно, что исходный боросилоксан является прозрачным материалом, напоминающим силиконовый герметик, в то время как ЖК-композит является молочно-белым. Окраска ЖК-композита, по-видимому, связана с рассеянием на границе раздела фаз БС – ЖК, обусловленным разницей в показателях преломления. Важно отметить, что способность к вытяжке у БС, наполненного 40 масс. % ЖК, сохраняется. Данное явление, по-видимому, связано с микроструктурой композита, где капли ЖК распределены изолированно друг от друга, не нарушая целостность боросилоксановой матрицы.

На данный способ получения ЖК-композитов подана заявка на патент РФ [11]. На данный момент Федеральным институтом промышленной собственности уже принято решение о выдаче патента РФ. Такой композит был изучен методами поляризационной микроскопии и спектрофотометрии (рис. 4 а, б). Показано, что с течением времени микрокапли укрупняются за счёт коалесценции, и композит становится менее мутным, по-видимому, за счёт снижения количества центров рассеяния, что хорошо видно на зависимостях оптической плотности от длины волны.

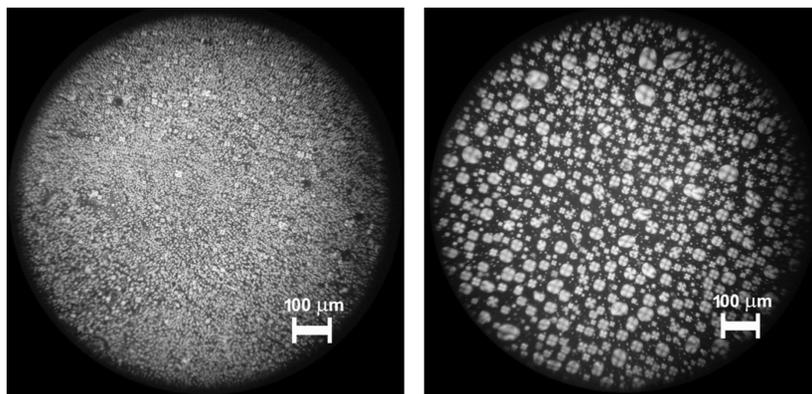


Рис. 4а. Микроскопический снимок образца ЖК-композита на основе БС и ЖК-1282 сразу после ручного перемешивания (слева), через 2 суток после перемешивания (справа).

Полученный композит также не липнет к резиновым перчаткам и в микроскопе имеет структуру швейцарского сыра, где размеры микрокапель изменяются во времени вплоть до некоторого равновесного значения. Микроскопические исследования в поляризованном свете показали, что исходный БС не обладает двулучепреломлением. Наличие двулучепреломления капель ЖК хорошо видно на микрофотографии, сделанной при скрещённых поляризаторах. Капли ЖК в БС имеют размер от ~1 мкм до 10 мкм. Таким образом, структура данного композита является двухфазной, где капли ЖК распределены в матрице боросилоксана.

При помощи рефрактометра ИРФ-454 установлено, что показатель преломления ЖК-композитов близок к показателю преломления исходного БС (см. Таблицу 1).

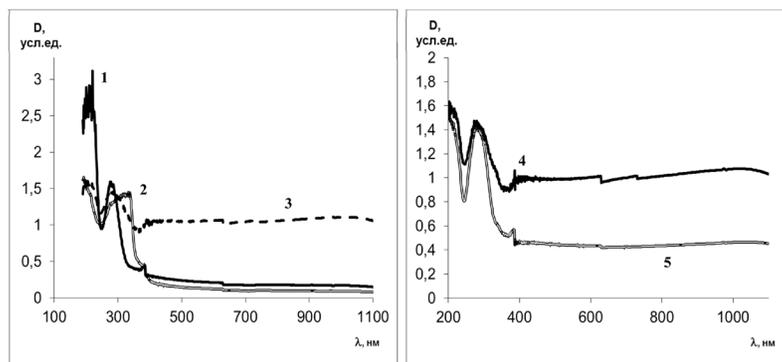


Рис. 4б. Зависимость оптической плотности D (усл. ед.) образцов ЖК-композиов на основе боросилоксана и ЖК-1282 от длины волны λ , нм. %) (1-БС, 2-ЖК-1282, 3-ЖК-композит, 4-10 минут после формирования, 5-2-е суток).

Таблица 1.

Показатели преломления образцов ЖК, боросилоксана и ЖК-композита на их основе.

Образец	Показатель преломления при 25 °С	Расчётная концентрация ЖК, масс. %
Боросилоксан	1,4051	0
ЖК-1282	1,5084	100
ЖК-композит максимально насыщенный (41,2 масс. %)	1,4073	2,13
Расчётное значение (исходя из аддитивного закона)	1,4477	41,2

По-видимому, структура композитов такова, что на поверхности постоянно присутствует только силиконовый материал, обволакивая и смачивая ЖК во внутреннем объёме. Так как показатель преломления материала определяется на рефрактометре ИРФ-454 за счёт его приповерхностного слоя, показатель преломления меняется не сильно. Произведён перерасчёт изменения показателя преломления по аддитивному закону. Композит с содержанием ЖК 41,2 масс. % имеет показатель преломления на уровне концентрации ЖК в материале 2,13 масс. %. По-видимому, 2,13% – это то количество ЖК, которое растворяется в боросилоксане при комнатной температуре. Следует отметить, что, по литературным данным, растворимость ЖК близкого химического состава в силиконах обычно составляет около 4 масс. % [13], что в целом хорошо согласуется с нашими экспериментальными данными.

Описание механизма образования и разрушения микрофиламентов ЖК

Для описания процесса образования цилиндров и капель была предложена схема (рис. 5).

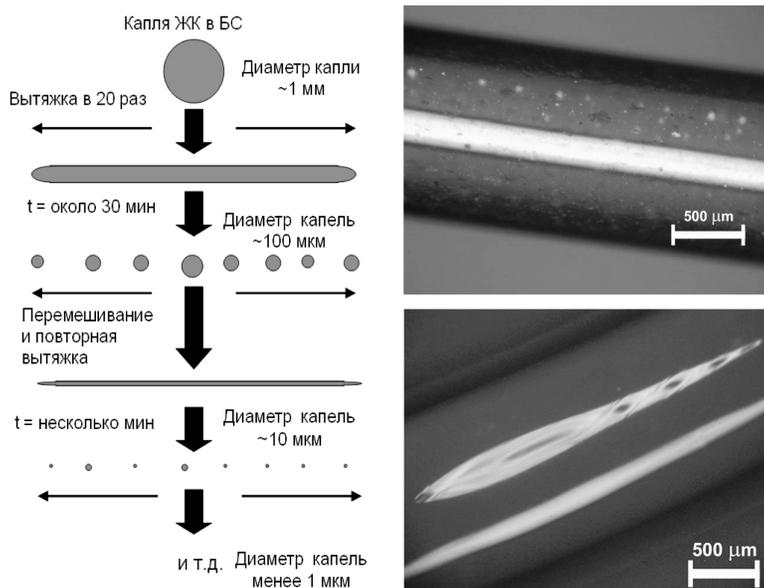


Рис. 5. Схема образования вытянутых объектов, наполненных ЖК, в боросиликоновой матрице и процессов их деления на капли (слева). Микрофотографии вытянутого образца БС, наполненного ЖК-1282, в скрещённых поляризаторах. Справа сверху – видно яркий микрофиламент ЖК в БС, а также выстроенные вдоль одной линии микрокапли уже поделившегося более тонкого микрофиламента. Справа снизу – процесс деления на капли вытянутого объекта с ЖК.

Изначальное механическое смешивание компонентов приводит к формированию в объёме БС капель ЖК. Далее, за счёт прикладываемого к композиту механического воздействия – одноосного растяжения, капли сильно вытягиваются, становясь длинными нитевидными объектами (цилиндрами с заострёнными концами на концах).

Далее, когда механическое воздействие прекращается, БС перестаёт вести себя подобно эластомеру и превращается в вязкую жидкость. Начинает проявляться известный эффект деления растянутой капли внутри другой, несмешиваемой с ней, жидкости [14]. Однако обычно не удавалось получить длину таких нитей до нескольких сантиметров. Практически длина вытянутой нити ЖК равна длине всего вытянутого объекта. В нашем случае до 10 и более сантиметров при толщине нити около 2–10 мкм.

В нашем случае имеет место ранее не описанный в литературе эффект множественного деления на капли. Отсутствие упоминаний о таком эффекте в литературе обусловлено тем, что обычно каплю жидкости либо вытягивают и она заполняет образованный цилиндр в резине, или при вытяжке не удаётся растянуть жидкость столь многократно [14].

Образец сразу после вытяжки имеет структуру, в которой присутствуют и длинные цилиндры, наполненные ЖК, и микрокапли. Следует отметить, что чем тоньше исходный образовавшийся вытянутый объект, тем быстрее он

распадается на капли. Так, для наиболее тонких объектов (менее 10 мкм) данный распад занимает около 10 минут, для объектов более толстых (50 и более мкм) окончательное оформление свободных капель из цилиндра занимает до суток.

Процесс разделения происходит по следующим стадиям:

1. Появление мест с большей и меньшей толщиной в вытянутом объекте.
2. Деление вытянутого объекта на двухсторонние конусовидные объекты (линзовидные двояковыпуклые), заострённые на концах и имеющие максимальный диаметр обычно в середине такого объекта.
3. Превращение последнего объекта в каплю.

Спустя несколько минут все цилиндры превращаются в капли за счёт эффекта деления “pinch-off”. Также такое явление имеет название как мосты жидкости, возникающие, например, между песчинками в мокром песке.

Повторение вышеозначенных процедур приводит к отсутствию в образце крупных капель. Остаются только капли микронных размеров и менее. Известно, что оптический микроскоп позволяет достаточно точно определять размеры объектов микронных и менее размеров, поэтому определить размеры более мелких капель микроскопически не представляется возможным.

Показано, что вытянутый объект распадается на капли различного диаметра, причём диаметр образовавшейся капли обычно больше, чем диаметр исходного цилиндра от 1,15 раз до 5 раз.

Математическая модель деления нитей на капли

Для математического анализа наблюдаемых процессов были сделаны следующие допущения:

1. Исходный вытянутый объект (нить) представлен как бесконечный цилиндр. Данное допущение можно сделать, так как длины экспериментальных вытянутых объектов значительно превосходят их радиус. Обычно длина порядка 1–10 см, а толщина 1–10 мкм. То есть длины объектов больше их толщин на 3–4 порядка.

2. Для моделирования выбрана часть данного цилиндра, ограниченная плоскими основаниями. Таким образом, экспериментально определив радиус r и длину L данного цилиндра, мы находим его объём $V_{\text{цил}}$. Вкладом боковых оснований пренебрегаем, по причине, описанной в п. 1.

$$V_{\text{цил}} = \pi r^2 L. \quad (1)$$

3. Так как количество вещества (ЖК) в цилиндре остаётся постоянным при делении его на капли, то, соответственно, объёмы исходного цилиндра $V_{\text{цил}}$ и образованных из него капель $V_{\text{сф}}$ равны. Также допускаем, что образующиеся капли имеют одинаковый радиус R , а их количество составляет n штук.

$$V_{\text{цил}} = V_{\text{сф}} n \quad (2)$$

$$\pi r^2 L = \frac{4}{3} \pi R^3 n \quad (3)$$

$$n = \frac{3r^2L}{4R^3}. \quad (4)$$

4. Здесь мы также пренебрегаем вкладом в процесс возможного временного или постоянного растворения ЖК в БС в процессе вытяжки, а также процессом высаживания из раствора ЖК (фазового разделения в растворе ЖК-БС) при снятии вытягивающего напряжения. Предполагается, что силиконовая матрица уже представляет собой гомогенный 2,13% раствор ЖК в ней, что определено рефрактометрическим методом.

5. С точки зрения термодинамики система стремится к равновесию, то есть изменение свободной энергии системы меньше нуля. Объект в виде капли более термодинамически устойчив, чем в виде цилиндра, поэтому и происходит самопроизвольное образование капель из вытянутого объекта. Вкладом боковых оснований цилиндра в значение площади также пренебрегаем, по причине, описанной в п.1.

$$F_{\text{цил.}} = \sigma \times S_{\text{бок.пов.цил.}} = \sigma \times 2prL \quad (5)$$

$$F_{\text{сф.}} = \sigma \cdot S_{\text{пов.сф.}} = \sigma \cdot 4\pi R^2L \quad (6)$$

$$F_{\text{сф.}} < F_{\text{цил.}}, \quad (7)$$

где $F_{\text{сф.}}$ – свободная поверхностная энергия капли, $F_{\text{цил.}}$ – свободная поверхностная энергия цилиндра, $S_{\text{бок.пов.цил.}}$ – площадь боковой поверхности цилиндра, $S_{\text{пов.сф.}}$ – площадь поверхности сферы, σ – поверхностное натяжение на границе ЖК – боросилоксан.

6. Путём простых математических преобразований приходим к выражению:

$$\Delta F = F_{\text{сф.}} - F_{\text{цил.}} = 2\sigma\pi RL \left(\frac{3r}{2R} - 1 \right) \quad (8)$$

$$\Delta F = F_{\text{droplet}} - F_{\text{filament}} = 2\sigma\pi RL \left(\frac{3r}{2R} - 1 \right),$$

из которого следует, что радиус образовавшихся капель должен быть как минимум в 1,5 раза больше радиуса исходного цилиндра.

$$R > \frac{3}{2}r. \quad (9)$$

Как было показано выше, сравнение с экспериментом показало, что действительно радиус капель больше радиуса исходного цилиндра, однако капли, образующиеся из исходного вытянутого объекта, имеют обычно различные радиусы, отличающиеся от исходного радиуса цилиндра на величину от 1,15 до 5 раз. Обычной является ситуация, когда цилиндр распадается на несколько маленьких капель, радиус которых в 1,5 раза больше радиуса цилиндра, и меньшее количество больших капель в 3–5 раз большего радиуса.

Выводы

Методом оптической поляризационной микроскопии исследованы новые ЖК-композиты на основе боросилоксана, обладающие свойствами дилатантной жидкости и нематического жидкого кристалла ЖК-1282. Показано, что при одноосной вытяжке ЖК-композитов происходят процессы образования цилиндров, наполненных ЖК, с последующим их делением на капли. Предложена феноменологическая модель данного процесса и аналитическое выражение, связывающее радиус, образующихся из цилиндра каплей R , с его исходными длиной и радиусом. В работе впервые достигнута высокая стабильность радиуса цилиндра, заполненного ЖК, на всём его протяжении.

Материалы на базе исследованных ЖК-композитов могут быть использованы в дисплейной технике и оптоэлектронике, например, в качестве волоконно-оптических датчиков, а также при разработке новых устройств для биосовместимой наноэлектроники.

* * *

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант №16-57-00089_Бел_а.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жаркова Г.М., Сонин А.С. Жидкокристаллические композиты. Новосибирск: Наука, 1994. 214 с.
2. Беляев В.В. Дисплеи 90-х годов. М.: Химия, 2000. 91 с.
3. Parab S.S., Malik M.K., Deshmukh R.R. Dielectric relaxation and electro-optical switching behavior of nematic liquid crystal dispersed in poly(methyl methacrylate) // Journal of Non-Crystalline Solids. 2012. V. 358. № 18–19. P. 2713–2722.
4. Su Y.-C., Chu C.-C., Chang W.-T., Hsiao V.K.S. Characterization of optically switchable holographic polymer-dispersed liquid crystal transmission gratings // Optical Materials. 2011. V. 34. № 1. P. 251–255.
5. Deshmukh R.R., Malik M.K. Effect of dichroic dye on phase separation kinetics and electro-optical characteristics of polymer dispersed liquid crystals // Journal of Physics and Chemistry of Solids. 2013. V. 74. № 2. P. 215–224.
6. Ralesh K., Kikuchi H., Stark M., Guckenberger R., Kajiyama T. Morphology and Interface of Liquid Crystal / Polymer Composite System at Nano Scale: A Model Investigation // Mol. Cryst. Liq. Cryst. 1999. V. 329. P. 171–180.
7. Безбородов В.С., Лапаник В.И. Жидкокристаллические соединения с высоким значением положительной диэлектрической анизотропии // Труды БГТУ (Белорусский государственный технологический ун-т). IV. Химия, технология органических веществ и биотехнология, Минск, 2009. Вып. XVII. С. 8–13.
8. Luminita M., Popescua M.-C., Zabolica A., Hiroshi Uji-I, Fron E. Chitosan as matrix for bio-polymer dispersed liquid crystal systems // Carbohydrate Polymers 95., 2013. P. 16–24.
9. Luminita M., Ailincal D., Paslaru E. Monodisperse PDLC composites generated by use of polyvinyl alcohol boric acid as matrix // RSC Adv. 2014. 4. P. 38397–38404.
10. Мащенко В.И., Алексеев А.Н., Картавенко Т.В., Оленин А.В. Патент, РФ, №2473216 // Способ получения масс для лепки с биоцидными свойствами.
11. Беляев В.В., Мащенко В.И., Соломатин А.С., Чаусов Д.Н. Заявка на патент РФ № 2015107901 от 10.03.2015 // Способ получения смеси жидкого кристалла с полимером для дисплейной техники и оптоэлектроники.

12. Bedjaoui L., Benmouna M., Maschke U. Thermophysical analysis of polysiloxane and nematic liquid crystal mixture. *Physical Chemical News* 49 121–124 (2009).
13. Bedjaouia L., Gogibus N., Ewenb B., Pakulab T., Coqueret X., Benmouna M., Maschke U. // Preferential solvation of the eutectic mixture of liquid crystals E7 in a polysiloxane// *Polymer*. V. 45. 2004. P. 6555–6560.
14. Lekkerkerker, H.W., Verhoef A.A. Droplet snap-off in fluids with nematic liquid crystalline ordering // *New Journal of Physics*. 2012. 14. 12 p.

REFERENCES

1. Zharkova G.M., Sonin A.S. *Zhidkokristallicheskie kompozity* [Liquid crystal composites]. Novosibirsk, Nauka Publ., 1994. 214 p.
2. Belyaev V.V. *Displei 90-kh godov* [Displays of the 1990s]. Moscow, Khimiya Publ., 2000. 91 p.
3. Parab S.S., Malik M.K., Deshmukh R.R. Dielectric relaxation and electro-optical switching behavior of nematic liquid crystal dispersed in poly(methyl methacrylate). In: *Journal of Non-Crystalline Solids*. 2012, vol. 358, no. 18–19, pp. 2713–2722.
4. Su Y.-C., Chu C.-C., Chang W.-T., Hsiao V.K.S. Characterization of optically switchable holographic polymer-dispersed liquid crystal transmission gratings. In: *Optical Materials*. 2011, vol. 34, no. 1, pp. 251–255.
5. Deshmukh R.R., Malik M.K. Effect of dichroic dye on phase separation kinetics and electro-optical characteristics of polymer dispersed liquid crystals. In: *Journal of Physics and Chemistry of Solids*. 2013, vol. 74, no. 2, pp. 215–224.
6. Ralesh K., Kikuchi H., Stark M., Guckenberger R., Kajiyama T. Morphology and Interface of Liquid Crystal / Polymer Composite System at Nano Scale: A Model Investigation. In: *Mol. Cryst. Liq. Cryst.* 1999, vol. 329, pp. 171–180.
7. Bezborodov V.S., Lapanik V.I. Liquid crystal compounds with a high value of positive dielectric anisotropy. In: *Trudy BGTU (Belorusskii gosudarstvennyi tekhnologicheskii un-t). IV. Khimiya, tekhnologiya organicheskikh veshchestv i biotekhnologiya* [The proceedings of the BSTU (the Belarus state technological University). IV. Chemistry, technology of organic substances and biotechnology]. Minsk, 2009, pp. 8–13.
8. Luminita M., Popescua M.-C., Zbulicaa A., Hiroshi Uji-I, Fron E. Chitosan as matrix for bio-polymer dispersed liquid crystal systems. In: *Carbohydrate Polymers* 95., 2013, pp. 16–24.
9. Luminita M., Ailincui D., Paslaru E. Monodisperse PDLC composites generated by use of polyvinyl alcohol boric acid as matrix. In: *RSC Adv*. 2014, no. 4, pp. 38397–38404.
10. *Patent RF 2473216. Sposob polucheniya mass dlya lepki s biotsidnymi svoistvami* [RF patent 2473216. A method of producing masses for modeling with biocidal properties], Mashchenko V.I., Alekseev A.N., Kartavenko T.V., Olenin A.V.
11. *Zayavka na patent RF 2015107901 ot 10.03.2015 Sposob polucheniya smesi zhidkogo kristalla s polimerom dlya displeinoi tekhniki i optoelektroniki* [The application for the patent of the Russian Federation 2015107901 dated 10.03.2015 A method of producing a mixture of a liquid crystal polymer for display technology and optoelectronics], Belyaev V.V., Mashchenko V.I., Solomatin A.S., Chausov D.N.
12. Bedjaoui L., Benmouna M., Maschke U. Thermophysical analysis of polysiloxane and nematic liquid crystal mixture. *Physical Chemical News*. 2009, no. 49, pp. 121–124.
13. Bedjaouia L., Gogibus N., Ewenb B., Pakulab T., Coqueret X., Benmouna M., Maschke U. Preferential solvation of the eutectic mixture of liquid crystals E7 in a polysiloxane. In: *Polymer*. 2004, vol. 45, pp. 6555–6560.
14. Lekkerkerker H.W., Verhoef A.A. Droplet snap-off in fluids with nematic liquid crystalline ordering. In: *New Journal of Physics*. 2012, no. 14. 12 p.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Мащенко Владимир Игоревич — кандидат химических наук, старший научный сотрудник учебно-научной лаборатории теоретической и прикладной нанотехнологии, Московский государственный областной университет;
e-mail: mashchenko@genebee.msu.su

Шашкова Юлия Олеговна – инженер учебно-научной лаборатории теоретической и прикладной нанотехнологии, Московский государственный областной университет;
e-mail: pirmir123@mail.ru

Соломатин Алексей Сергеевич – кандидат физико-математических наук, инженер учебно-научной лаборатории теоретической и прикладной нанотехнологии, Московский государственный областной университет;
e-mail: Sotrudnica_UNC@mail.ru

Беляев Виктор Васильевич – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической физики, Московский государственный областной университет;
e-mail: vic_belyaev@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Vladimir I. Mashchenko – PhD in Chemical Sciences, senior researcher of the Education & Science Lab for Theoretical and Applied Nanotechnology at the Moscow Region State University;
e-mail: mashchenko@genebee.msu.su

Julia O. Shashkova – engineer of the Education & Science Lab for Theoretical and Applied Nanotechnology at the Moscow Region State University;
e-mail: pirmir123@mail.ru

Aleksei S. Solomatin – PhD in Physico-mathematical Sciences, engineer of the Education & Science Lab for Theoretical and Applied Nanotechnology at the Moscow Region State University;
e-mail: Sotrudnica_UNC@mail.ru

Victor V. Belyaev – Doctor in Technical Sciences, professor, head of the department of theoretical physics at the Moscow Region State University;
e-mail: vic_belyaev@mail.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Мащенко В.И., Шашкова Ю.О., Соломатин А.С., Беляев В.В. Особенности формирования микроструктуры жидкокристаллических композитов на основе боросилоксана // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика и математика. 2017. № 2. С. 34–45.

DOI: 10.18384/2310-7251-2017-2-34-45.

CORRECT REFERENCE TO THE ARTICLE

V. Mashchenko, A. Solomatin, Y. Shashkova, V. Belyaev. Peculiarities of the formation of a microstructure of borosiloxane liquid crystal composites. In: *Bulletin of Moscow Region State University*. Series: Physics & Mathematics. 2017, no. 2, pp. 34–45.

DOI: 10.18384/2310-7251-2017-2-34-45.

УДК 533.72

DOI: 10.18384/2310-7251-2017-2-46-52

ТЕМПЕРАТУРНЫЕ ЭФФЕКТЫ ВО ВТОРОЙ ЗАДАЧЕ СТОКСА

Дудко В.В.¹, Юшканов А.А.²¹ *Московский государственный технический университет им. Н.Э.Баумана, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, Российская Федерация*² *Московский государственный областной университет, 105005, Москва, ул. Радио, д. 10а, Российская Федерация*

Аннотация. Рассматривается вторая задача Стокса о поведении разреженного газа, заполняющего полупространство, когда ограничивающая полупространство плоскость совершает гармонические колебания в своей плоскости. Используются уравнения механики сплошной среды в режиме со скольжением. Показано, что в квадратичном по скорости стенки приближении в газе имеют место температурные эффекты. При этом возникает перепад температуры между поверхностью тела и средой вдали от поверхности.

Ключевые слова: вторая задача Стокса, нелинейность, перепад температуры.

TEMPERATURE EFFECTS IN STOKES' SECOND PROBLEM

V. Dudko¹, A. Yushkanov²¹ *Bauman Moscow State Technical University, ul. 2-ya Baumanskaya 5, 105005 Moscow, Russian Federation*² *Moscow Region State University, ul. Radio 10A, 105005 Moscow, Russian Federation*

Abstract. We consider Stokes's second problem in relation to the behavior of a rarefied gas filling a half-space, when the plane limiting the half-space performs harmonic oscillations in its own plane. Equations of continuum mechanics in the slip regime are used. It is shown that the approximation that is quadratic in the wall velocity is characterized by temperature effects in a gas due to the influence of viscous dissipation. In this case, there is a temperature drop between the body surface and the gas away from the surface.

Key words: Stokes's second problem, nonlinearity, temperature drop.

История задачи о поведении газа и жидкости над стенкой, колеблющейся в своей плоскости, начинается с работы Дж. Г. Стокса [1]. Эту задачу обычно называют второй задачей Стокса.

Вторая задача Стокса в последние годы является предметом многочисленных исследований [2–9]. Это обусловлено развитием современных технологий, в частности, нанотехнологий.

Для различного рода течений среды вторая задача Стокса изучалась в [2], в [3] исследовались различные явления трения, сопровождающие данный процесс. В работе [4] проведён анализ ряда приложений этой задачи.

В [5] рассмотрен пример практического применения колебательной системы, подобной рассматриваемой задаче, в области нанотехнологий.

В [6] вторая задача Стокса рассматривалась в гидродинамическом приближении в режиме со скольжением.

В экспериментах [7] изучался поток газа, создаваемый механическим резонатором при различных частотах колебания. Для случая низких частот задача решена на основе уравнения Навье-Стокса. В случае произвольных скоростей колебаний поверхности использовались численные методы на основе кинетического уравнения с интегралом столкновений в форме БГК (Бхатнагар, Гросс, Крук).

В газах с использованием кинетических уравнений вторая задача Стокса рассматривалась в работах [7–11].

Работа [8] посвящена применению численных методов к решению второй задачи Стокса в кинетическом подходе. В работе [9] для решения задачи использовался моментный метод решения кинетического уравнения.

В работах [10] и [11] дано аналитическое решение второй задачи Стокса для разреженного газа. При этом использовалось модельное кинетическое уравнение Больцмана с интегралом столкновений в форме БГК. В [10] задача решалась с диффузными граничными условиями. Показано, что результаты работ [8] и [9] весьма близки к результатам, полученным из аналитического решения [10]. Обобщение полученных результатов на случай граничных условий Черчиньяни дано в работе [10].

В настоящей работе показано, что при учете нелинейных эффектов во второй задаче Стокса возникают температурные эффекты. Ранее эта задача без учёта изотермического скольжения и скачка температуры была рассмотрена в [12].

Пусть среда, состоящая из разреженного газа, занимает полупространство $x > 0$ над плоской твёрдой поверхностью, лежащей в плоскости $x = 0$. Поверхность (y, z) совершает гармонические колебания вдоль оси y по закону $u_s(t) = u_0 \cos(\omega t)$. Требуется найти разность температур (перепад температуры) между температурой стенки и температурой среды вдали от стенки, которая возникает вследствие колебательного движения стенки.

Будем рассматривать случай малых чисел Кнудсена. Для рассматриваемой задачи это соответствует случаю низких частот. Как показано в [6], это равносильно условию

$$\omega \ll \frac{\nu}{\lambda^2}.$$

Здесь ν – коэффициент кинематической вязкости, λ – средняя длина свободного пробега молекул в газе.

При выполнении этого условия для решения задачи возможно использование уравнений гидродинамики.

Кроме того, будем считать, что скорость движения стенки много меньше тепловой скорости молекул газа. При этом возникает малый параметр

$$\varepsilon = u_0/v_T \ll 1, \text{ где } v_T = \sqrt{\frac{2kT}{m}} - \text{тепловая скорость молекул газа.}$$

При наличии малого параметра ε задачу можно решать методом последовательных приближений.

В линейном приближении по ε задача становится изотермической и изобарической [13]. При этом скорость газа имеет одну компоненту, совпадающую по направлению с направлением колебаний стенки. В нашем случае это ось y . То есть скорость газа можно представить как $u = u_y(t, x)$.

Согласно [13], поле скоростей находится из уравнения:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (1)$$

Граничное условие формулируется из того условия, что стенка совершает, как уже указывалось, гармонические колебания в своей плоскости. С учётом эффекта изотермического скольжения, граничное условие на стенке имеет следующий вид [14]:

$$u(t, 0) = u_0 \cos \omega t + c_m \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=0}. \quad (2)$$

Скорость стенки можно представить в виде:

$$u_s(t) = u_0 \cos \omega t = \operatorname{Re}(u_0 e^{-i\omega t}).$$

Здесь u_0 – амплитуда скорости колебания стенки.

Решение уравнения (1) удобно искать в комплексной форме:

$$u = \operatorname{Re}(a e^{-i\omega t + k_1 x}). \quad (3)$$

При этом для величины k_1 из уравнения (3) получаем [9, 13]:

$$k_1 = \sqrt{-\frac{i\omega}{v}} = \sqrt{\frac{\omega}{2v}}(i-1) = k(i-1), \quad k = \sqrt{\frac{\omega}{2v}}.$$

Для величины a с учётом граничного условия (2) имеем:

$$a = \frac{u_0}{1 + c_m \lambda k_1} = a_0 u_0, \quad a_0 = \frac{1}{1 + c_m \lambda k_1}.$$

Следовательно, решение уравнения (1) имеет вид:

$$u = u_0 \operatorname{Re}(a_0 \exp(-i\omega t + k_1 x)) = u_0 \operatorname{Re}(a_0 \exp[i(kx - \omega t) - kx]). \quad (4)$$

В линейном приближении по ε температура газа постоянна и уравнение теплопроводности удовлетворяется автоматически. В квадратичном приближении по ε уравнение теплопроводности становится неоднородным [13]:

$$c_p \rho \frac{\partial T}{\partial t} = \varkappa \Delta T + \eta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2. \quad (5)$$

Здесь \varkappa – коэффициент теплопроводности газа, η – коэффициент динамической вязкости, ρ – плотность газа, c_p – теплоёмкость при постоянном давлении, u – полученное в линейном приближении решение (4).

Производная функции u (решение (4)) равна:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_0 k}{2} \left[a_0 (i-1) e^{i(kx - \omega t) - kx} - a_0^* (i+1) e^{i(-kx + \omega t) - kx} \right].$$

Здесь звёздочка означает комплексное сопряжение.

Квадрат производной имеет вид:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 &= \frac{u_0^2 k^2}{4} \left[4 |a_0|^2 e^{-2kx} - 2ia_0^2 e^{2i(kx - \omega t) - 2kx} + 2ia_0^{*2} e^{2i(-kx + \omega t) - 2kx} \right] = \\ &= u_0^2 k^2 \left[|a_0|^2 e^{-2kx} - i \frac{a_0^2 e^{2i(kx - \omega t) - 2kx} - a_0^{*2} e^{2i(-kx + \omega t) - 2kx}}{2} \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

При этом первое слагаемое в квадратных скобках является константой по времени. С учётом (6) неоднородное уравнение теплопроводности (5) примет следующий вид:

$$c_p \rho \frac{\partial T}{\partial t} = \varkappa \Delta T + \eta u_0^2 k^2 \left[|a_0|^2 e^{-2kx} - i \frac{a_0^2 e^{2i(kx - \omega t) - 2kx} - a_0^{*2} e^{2i(-kx + \omega t) - 2kx}}{2} \right]. \quad (7)$$

Граничное условие для температуры на поверхности с учётом скачка температуры имеет вид [14]:

$$T(0) = T_s + K_t \lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0}. \quad (8)$$

Здесь K_t — коэффициент скачка температуры, T_s — температура поверхности.

Структура частного решения неоднородного уравнения (7) имеет вид, определяемый формой (6) этой самой неоднородности:

$$T = T_\infty + T_0 e^{-2kx} + T_1 e^{2i(kx - \omega t) - 2kx} + T_1^* e^{2i(-kx + \omega t) - 2kx}. \quad (9)$$

В настоящей работе нас будет интересовать не зависящий от времени перепад между температурой поверхности и температурой газа вдали от поверхности. Не зависящее от времени распределение температуры газа описывают два первых слагаемых решения (9).

Подставляя выражение (9) в уравнение (7) и граничное условие (8), получаем:

$$4k^2 \varkappa T_0 = -k^2 |a_0|^2 \eta u_0^2,$$

$$T_\infty + T_0 = T_s - 2K_t k \lambda T_0.$$

Отсюда находим:

$$T_0 = -\frac{|a_0|^2 \eta u_0^2}{4\pi}.$$

$$T_\infty - T_s = \frac{|a_0|^2 \eta u_0^2}{4\pi} (1 - 2K_t k \lambda).$$

Отсюда следует, что разность температур между температурой поверхности и температурой вдали от стенки, (т.е. величина перепада температуры δT) равна:

$$\delta T = T_\infty - T_s = \frac{|a_0|^2 \eta u_0^2}{4\pi} (1 - 2K_t k \lambda) = \frac{\eta u_0^2 (1 - 2K_t k \lambda)}{4\pi \left[(1 + c_m \lambda k)^2 + c_m^2 \lambda^2 k^2 \right]}. \quad (10)$$

Был рассмотрен случай газовой среды. Полученные в работе результаты остаются справедливыми и для жидкой среды. При этом надо учесть, что в жидкости отсутствуют изотермическое скольжение и скачок температуры, то есть коэффициенты скачка температуры и изотермического скольжения равны нулю. Формально переход к случаю жидкости осуществляется как предел $\lambda \rightarrow 0$. При этом из (10) получаем:

$$\delta T_{liquid} = \frac{\eta u_0^2}{4\pi}.$$

Заключение

В работе рассмотрена вторая задача Стокса о поведении газа над колеблющейся непроницаемой поверхностью. Показано, что в квадратичном приближении по амплитуде скорости колебания задача утрачивает изотермический характер. Вблизи поверхности газа возникает неоднородный профиль температуры. При этом между поверхностью и объемом газа возникает постоянная разность температуры (перепад температуры). Задача рассмотрена в гидродинамическом приближении в режиме со скольжением.

ЛИТЕРАТУРА

1. Stokes G.G. On the effect of internal friction of fluids on the motion of pendulums. Trans. Cambr. Phil. IX. 1851. P. 8–106.
2. Khan M., Asia A., Fetecau C. On exact solutions of Stokes second problem for a Burgers' fluid, I. The case $\gamma < \lambda^2/4$. // J. Appl. Math. and Phys. (ZAMP). 2009. V. 61. № 4. P. 697–720.
3. Steinhell E., Scherber W., Seide M., Rieger H. Investigation on the interaction of gases and well defined solid surfaces with respect to possibilities for reduction of aerodynamic friction and aerothermal heating // Rarefied gas dynamics. Ed. J.L. Potter. N.Y.: Acad. press. 1977. P. 589–602.
4. Graebel W.P. Engineering Fluid Mechanics. New York. Taylor & Francis. 2001. 752 p.
5. Cleland A.N., Roukes M.L. A nanometer-scale mechanical electrometer // Nature. Vol. 392. 1998. P. 160–162.
6. Дудко В.В., Юшканов А.А., Яламов Ю.И. Влияние свойств поверхности на характеристики сдвиговых волн // Журнал технической физики. 2005. Т. 75. Вып. 4. С. 134–135.

7. Karabacak D.M., Yakhot V., Ekinci K.L. High-frequency nanofluidics: an experimental study using nanomechanical resonators, *Phys. Rev. Lett.* 98. 2007, pp. 254–505.
8. Sharipov F., Kalempa D. Gas flow around a longitudinally oscillating plate at arbitrary ratio of collision frequency to oscillation frequency // *Rarefied Gas Dynamics: 25-th International Symposium*, edited by M.S. Ivanov and A.K. Rebrov. Novosibirsk, 2007. P. 1140–1145.
9. Дудко В.В., Юшканов А.А., Яламов Ю.И. Генерация колеблющейся поверхностью сдвиговых волн в газе // *Теплофизика высоких температур*. 2009. Т. 47. № 2. С. 262–268.
10. Акимова В.А., Латышев А.В., Юшканов А.А. Аналитическое решение второй задачи Стокса о поведении газа над колеблющейся поверхностью // *Известия РАН. Серия: Механика жидкости и газа*. 2013. №1. С. 125–140.
11. Латышев А.В., Юшканов А.А. Аналитическое решение второй задачи Стокса для разреженного газа с граничными условиями Черчиньяни // *Журнал вычислительной математики и математической физики*, 2013. Т. 53. № 3. С. 128–147.
12. Latyshev A. V., Yushkanov A. A. Temperature jump in second Stokes' problem by nonlinear analysis// arXiv:1602.08689 [physics.flu-dyn].
13. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Гидродинамика*. Т. 6. М.: Наука (1986). 620 с.
14. Черчиньяни К. *Теория и приложения уравнения Больцмана*. М.: Мир. 1978. 495 с.

REFERENCES

1. Stokes G.G. On the effect of internal friction of fluids on the motion of pendulums. *Trans. Cambr. Phil.* IX. 1851, pp. 8–106.
2. Khan M., Asia A., Fetecau C. On exact solutions of Stokes' second problem for a Burgers' fluid, I. The case $\gamma < \lambda^2/4$. In: *J. Appl. Math. and Phys. (ZAMP)*. 2009, vol. 61, no. 4, pp. 697–720.
3. Steinhell E., Scherber W., Seide M., Rieger H. Investigation on the interaction of gases and well defined solid surfaces with respect to possibilities for reduction of aerodynamic friction and aerothermal heating. In: *Rarefied gas dynamics*. Ed. J.L. Potter. N.Y.: Acad. press. 1977. P. 589–602.
4. Graebel W.P. *Engineering Fluid Mechanics*. New York. Taylor & Francis. 2001. 752 p.
5. Cleland A.N., Roukes M.L. A nanometer-scale mechanical electrometer. In: *Nature*. 1998, vol. 392, pp. 160–162.
6. Dudko V.V., Yushkanov A.A., Yalamov Yu.I. The influence of surface properties on the characteristics of shear waves. In: *Zhurnal tekhnicheskoi fiziki* [Journal of Technical Physics]. 2005, vol. 75, no. 4, pp. 134–135.
7. Karabacak D.M., Yakhot V., Ekinci K.L. High-frequency nanofluidics: an experimental study using nanomechanical resonators, *Phys. Rev. Lett.* 98. 2007, pp. 254–505.
8. Sharipov F., Kalempa D. Gas flow around a longitudinally oscillating plate at arbitrary ratio of collision frequency to oscillation frequency. In: *Rarefied Gas Dynamics: 25-th International Symposium*, edited by M.S. Ivanov and A.K. Rebrov. Novosibirsk, 2007, pp. 1140–1145.
9. Dudko V.V., Yushkanov A.A., Yalamov Yu.I. The generation of fluctuating surface shear waves in gas. In: *Teplofizika vysokikh temperature* [High Temperature]. 2009, vol. 47, no. 2, pp. 262–268.
10. Akimova V.A., Latyshev A.V., Yushkanov A.A. Analytical solution of the second Stokes problem on behavior of gas over an oscillating surface. In: *Izvestiya RAN. Seriya: Mekhanika zhidkosti i gaza* [Bulletin of the Russian Academy of Sciences News. Ser.: Fluid Mechanics]. 2013, no. 1, pp. 125–140.
11. Latyshev A.V., Yushkanov A.A. Analytical solution of Stokes' second problem for a rarefied gas with Cercignani boundary conditions. In: *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki* [Computational Mathematics and Mathematical Physics]. 2013, vol. 53, no. 3, pp. 128–147.

12. *Latyshev A.V., Yushkanov A.A.* Temperature jump in Stokes' second problem by nonlinear analysis// arXiv:1602.08689 [physics.flu-dyn].
13. Landau L.D., Lifshits E.M. *Fluid mechanics*. Oxford, Pergamon Press, 1975. 536 p.
14. Cherchin'yani K. *Teoriya i prilozheniya uravneniya Bol'tsmana* [Theory and applications of the Boltzmann equation]. Moscow, Mir Publ., 1978. 495 p.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Дудко Владимир Владимирович – кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры основ физики (СУНЦ-2) Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана;
e-mail: vladimi2000@mail.ru

Юшканов Александр Алексеевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической физики Московского государственного областного университета;
e-mail: yushkanov@inbox.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Vladimir V. Dudko – PhD in Physico-mathematical Sciences, senior lecturer of the Department of Fundamentals of Physics at the Bauman Moscow State Technical University;
e-mail: vladimi2000@mail.ru

Aleksandr A. Yushkanov – Doctor in Physico-mathematical Sciences, professor of the Department of Theoretical Physics at the Moscow Region State University;
e-mail: yushkanov@inbox.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Дудко В.В., Юшканов А.А. Температурные эффекты во второй задаче Стокса // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2017. № 2. С. 46–52.
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-2-46-52.

THE CORRECT REFERENCE TO ARTICLE

V. Dudko, A.Yushkanov. Temperature effects in Stokes' second problem. In: *Bulletin of Moscow Region State University*. Series: Physics and Mathematics. 2017. no. 2. pp. 46–52.
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-2-46-52.

УДК: 535.3 + 535.5

DOI: 10.18384/2310-7251-2017-2-53-63

ОСОБЕННОСТИ ФОРМИРОВАНИЯ МИКРОСТРУКТУРЫ И ОПТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЖИДКОКРИСТАЛЛИЧЕСКИХ КОМПОЗИТНЫХ ТВИСТ-ЯЧЕЕК¹

Соломатин А.С., Мащенко В.И., Шашкова Ю.О., Беляев В.В.

*Московский государственный областной университет,
учебно-научная лаборатория теоретической и прикладной нанотехнологии,
105005, г. Москва, ул. Радио, д. 10А, Российская Федерация*

Аннотация В данной работе предложен способ формирования твист-структур в объектах микронных размеров с использованием явления образования капиллярных мостов жидкости в композитных материалах на основе поликапролактона и нематического жидкого кристалла 4-циано-4'-N-гептилбифенил (7ЦБ). Проведено теоретическое моделирование оптических характеристик в микро-твист-объектах.

Ключевые слова: жидкокристаллический оптически анизотропный композит, твист-структуры, домены ЖК, моделирование оптических свойств, поликапролактон, 4-циано-4'-N-гептилбифенил, 7ЦБ.

FORMATION AND OPTICAL PROPERTIES OF TWIST STRUCTURES IN A NEMATIC LIQUID CRYSTAL COMPOSITE

A. Solomatin, V. Mashchenko, Yu. Shashkova, V. Belyaev

*Education & Research Lab of Theoretical and Applied Nanotechnology, Moscow Region State University,
ul. Radio 10A, 105005 Moscow, Russian Federation*

Abstract. A method for the formation of twist structures in objects of micron size using the phenomenon of the formation of capillary fluid bridges in composite materials based on polycaprolactone (PCL) and a nematic liquid crystal 4-cyano-4'-N-heptylbiphenyl (7CB) is proposed. Theoretical modeling of optical characteristics in micro-twist objects is carried out.

Key words: liquid crystal optically anisotropic composite, polycaprolactone, 4-cyano-4'-N-heptylbiphenyl, 7CB, LC domains, optical properties simulation.

Введение

Разработки, связанные с формированием твист-структур в нематических жидких кристаллах, представляют практический интерес для создания различных электрооптических устройств, дисплейной техники и электроники [1]. Направление на миниатюризацию электронных устройств ставит задачи по уменьшению размеров устройств до микро- и нано- уровней [2]. Одной из таких

¹ Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 16-57-00089Бел_а, и гранта Президента № МК-7359.2016.9.

© Ройтенберг В.Ш., 2017.

задач современной прикладной науки является уменьшение размера рабочего пикселя для повышения разрешения оптических устройств [1; 2].

Целью данной работы является разработка способа формирования твист-микроструктур в ЖК-композитах и теоретическое моделирование их оптических характеристик.

Экспериментальная часть

В качестве матрицы ЖК-композита использован (рис. 1) поликапролактон, $T_{пл.} = 60\text{ }^{\circ}\text{C}$.

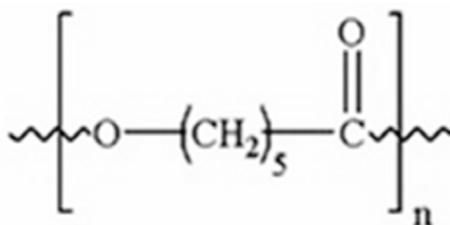


Рис. 1. Поликапролактон.

В качестве ЖК был использован (рис. 2) нематический ЖК 4-циано-4'-N-гептилбифенил (7ЦБ), $T_{CN} = 28\text{ }^{\circ}\text{C}$, $T_{NI} = 42\text{ }^{\circ}\text{C}$.

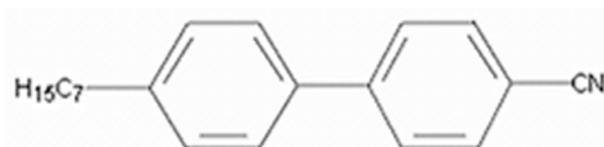


Рис. 2. Нематический ЖК 4-циано-4'-N-гептилбифенил (7ЦБ).

ЖК-композиты были получены с помощью оригинального метода с использованием явления образования Рэлеевских мостов жидкости. Поликапролактон расплавляли и помещали в его объём микрокаплю 7CB. Далее, сочетая одноосные и торсионные деформации, формировали полимерную композитную нить. ЖК-композит фиксировали охлаждением поликапролактона до комнатной температуры.

Микроскопические снимки сделаны с использованием оптического поляризационного микроскопа – Альтами Полар 3 (РФ). Исследовали общий вид цилиндрической нити сбоку и срезы, перпендикулярные продольной оси нити.

Для моделирования оптических свойств использовали программы, представленные группой разработки программного обеспечения Учебно-научной лаборатории теоретической и прикладной нанотехнологии МГОУ.

Результаты и их обсуждение

Микроскопические исследования ЖК-композитов

Микроскопические исследования в скрещенных поляризаторах показали, что образец композита представляет собой полимерную нить, включающую протя-

жённный микроцилиндр с 7СВ. Исследования в проходящем свете показали, что поперечное сечение нити имеет внутреннее отверстие овальной формы (рис. 3).

Двулучепреломление различной интенсивности наблюдается как в полимерном образце (за счёт кристаллической структуры полимера), так и в цилиндре, наполненном ЖК.

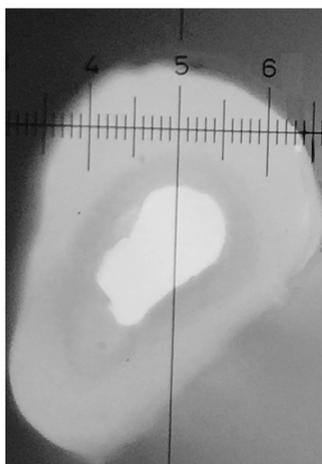


Рис. 3. Микроскопические снимки в скрещённых поляризаторах образца ЖК-композита. Поперечное сечение. Цена деления составляет 10 мкм.

Неоднородные композитные структуры, формирующие твист-ячейку

Как было показано выше, получены экспериментальные (оптические) данные о пропускании поляризованного света через вышеописанную пространственно неоднородную оптически анизотропную среду при скрещённых поляризаторах.

На основании полученных экспериментальных результатов можно предложить способ изготовления твист-структуры.

Следует изготавливать короткую (длиной меньше 1 мм) композитную нить, содержащую, в соответствии с экспериментальными результатами, тонкий ЖК цилиндр. Он, по всей видимости, имеет поперечное сечение, схематически подобное изображенному на рис. 4.

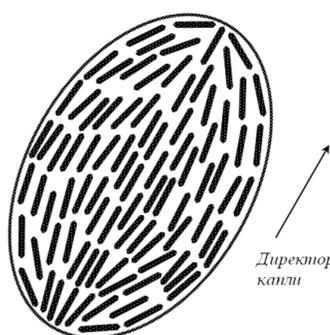


Рис. 4. Поперечное сечение ЖК цилиндра.

Затем один её конец следует повернуть на $\pi/2$. В результате при прохождении луча света вдоль ЖК цилиндра будет происходить поворот плоскости поляризации, как в 90° твист-ячейке.

Угол наклона директора ЖК к направлению прохождения луча отсчитывается как на рис. 5.

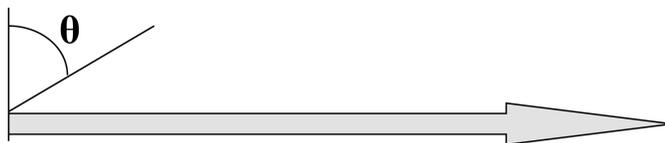


Рис. 5. Угол наклона директора ЖК к направлению прохождения луча отсчитывается от нормали к лучу, то есть от торца цилиндра.

Угол наклона зависит от удлинения при вытягивании. Если задать градиент относительного удлинения при вытягивании, то есть различные участки композитной нити вытягивать различно, то цилиндрическая ЖК ячейка внутри нити будет аналогична рассмотренным в работах [3–7] ячейкам ЖК с неоднородным распределением директора (рис. 6).

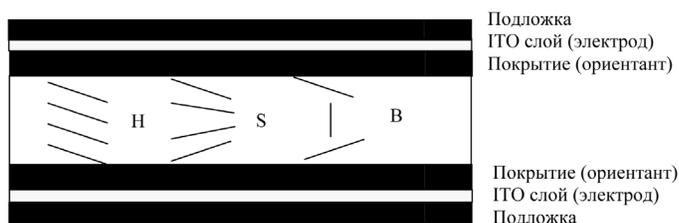


Рис. 6. Нематические жидкокристаллические структуры с неоднородным распределением директора, рассмотренные в [3–7].

На рис. 7 изображена предлагаемая в данной работе ЖК структура. Она представляет собой матрицу из цилиндрических пор с нитями вышеописанного композита в них и затем, последовательно по ходу луча, микролинзы ЖК, описанные в [8]. Этот упорядоченный блок ЖК микролинз и твист-ячеек устанавливается перед матрицей фотоэлементов цифрового фотоаппарата на заранее определённом (толщина прозрачного слоя между матрицей линз и матрицей фотоэлементов) расстоянии, выбранном с учетом фокусного расстояния микролинз. Фотоэлементы стоят по осям микролинз, образуя матрицу с такими же пространственными характеристиками.

Отмеченную в ходе эксперимента склонность цилиндрической ЖК структуры дробиться на капли большего диаметра можно нейтрализовать, если диаметр поры близок к диаметру ЖК цилиндра. Также можно добавить в композит поверхностно-активные вещества, что воспрепятствует формированию мелких капель, так как тогда свободная поверхностная энергия ансамбля капель будет больше, чем у цилиндра.

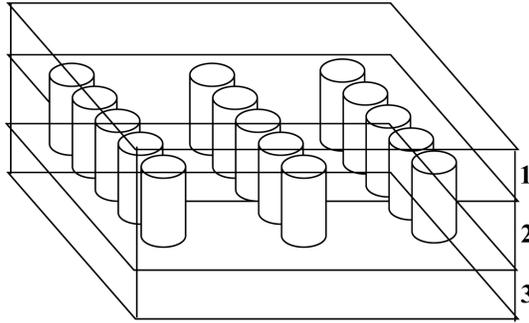


Рис. 7. обозначения: 1 – прозрачный слой сверху (перед матрицей твист-ячеек и микролинз); 2 – непрозрачный слой, содержащий блок твист-ячеек и микролинз (цилиндрические поры, заполненные ЖК); 3 – прозрачный слой, отделяющий микролинзы от фотоэлементов. Фотоэлементы не показаны на рисунке. Свет падает сверху вниз.

Будем в дальнейшем называть торец цилиндрической поры в матрице на рис. 7 подложкой ячейки.

Если направление директора на фронтальной подложке ЖК-ячейки, помещённой между поляризатором и параллельным ему анализатором, совпадает с осью поляризатора, то интенсивность I света, прошедшего через ячейку толщиной L будет равна [9]:

$$I = \frac{\sin^2(\varphi_t \sqrt{1+q^2})}{1+q^2}, \quad (1)$$

где φ_t – угол закрутки твиста, а $q = \pi L \Delta n / \lambda \varphi$. Для 90° твист-эффекта $\varphi_t = \pi/2$.

Интенсивность пропускания I является осциллирующей функцией параметра L/λ . На рис. 8 приведены распределения углов по толщине в твист-ячейке в зависимости от приложенного поля.

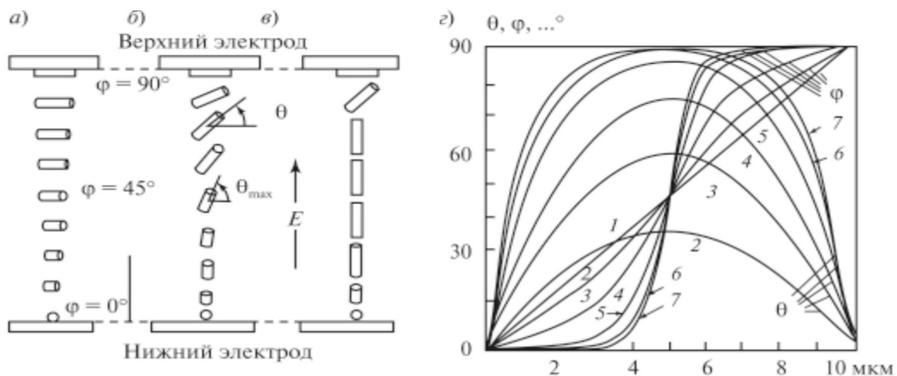


Рис. 8. Твист-эффект в НЖК. Молекулярная ориентация: а) в отсутствии поля; б) при $U \geq U_n$; в) при $U \gg U_n$; г) зависимость углов θ и φ от толщины, где под номером 1 при поле меньше порогового, а под номерами от 2 до 7 при поле, возрастающем до $4U_n$.

Как показано на рис. 8, при отсутствии поля распределение углов по толщине ячейки можно считать линейным, в том числе для случая $K_{33}/K_{11}=1$ будет линейным и распределение угла θ по толщине ячейки.

Исходя из того, что

$$q = \frac{\pi d \Delta n}{\lambda \varphi_t} \quad (2)$$

и в то же время разность фазовых задержек

$$\Delta \Phi = \frac{2\pi d \Delta n}{\lambda}, \quad (3)$$

получим

$$q = \frac{\Delta \Phi}{2\varphi_t}, \quad (4)$$

где

$$\Delta \Phi = \frac{2\pi}{\lambda} \left[\int_0^L \frac{n_o n_e dz}{(n_o^2 \cos^2 \theta(z) + n_e^2 \sin^2 \theta(z))^{1/2}} - n_o L \right] \quad (5)$$

Следовательно, можно рассчитать по формуле (1) интенсивность пропускания в параллельных поляризаторах для различных пространственных распределений полярного угла наклона директора.

Симметричная твист-гибридная ячейка (STH)

На рис. 9 показана для STH, то есть твист-гибридной ячейки ЖК с симметричными приповерхностными углами θ и толщиной ЖК слоя L , зависимость интенсивности пропускания I при параллельных поляризаторах от приповерхностных углов и толщины слоя ЖК. $n_o=1,5$, $n_e=1,6$, длина волны света 0,63 мкм, угол закрутки твиста 90° , плоскость поляризации входящего луча света совпадает с директором ЖК на входной поверхности ЖК ячейки.

Симметричная твист-сплей ячейка (STS)

На рис. 10 показана для STS, то есть твист-сплей ячейки ЖК с симметричными приповерхностными углами θ и толщиной ЖК слоя L , зависимость интенсивности пропускания I при параллельных поляризаторах от приповерхностных углов и толщины слоя ЖК. $n_o = 1,5$, $n_e = 1,6$, длина волны света 0,63 мкм, угол закрутки твиста 90° , плоскость поляризации входящего луча света совпадает с директором ЖК на входной поверхности ЖК ячейки.

Симметричная твист-бенд ячейка (STB)

На рис. 11 показана для STB, то есть твист-бенд ячейки ЖК с симметричными приповерхностными углами θ и толщиной ЖК слоя L , зависимость интенсивности пропускания I при параллельных поляризаторах от приповерхностных

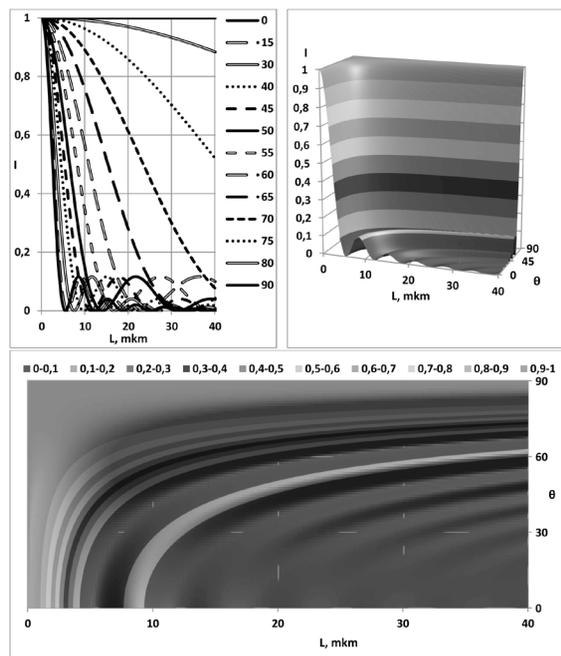


Рис. 9. Для СТН, то есть твист-гибридной ячейки ЖК с симметричными приповерхностными углами, зависимость интенсивности пропускания I при параллельных поляризаторах от приповерхностных углов θ и толщины L слоя ЖК.

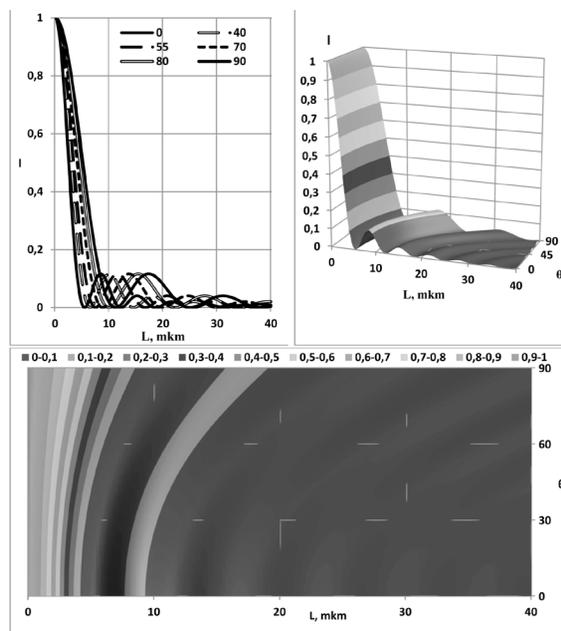


Рис. 10. Для STS, то есть твист-сплей ячейки ЖК с симметричными приповерхностными углами, зависимость интенсивности пропускания I при параллельных поляризаторах от приповерхностных углов θ и толщины L слоя ЖК.

углов и толщины слоя ЖК $n_o = 1,5$, $n_e = 1,6$, длина волны света $0,63$ мкм, угол закрутки твиста 90° , плоскость поляризации входящего луча совпадает с директором ЖК на входной поверхности ЖК ячейки.

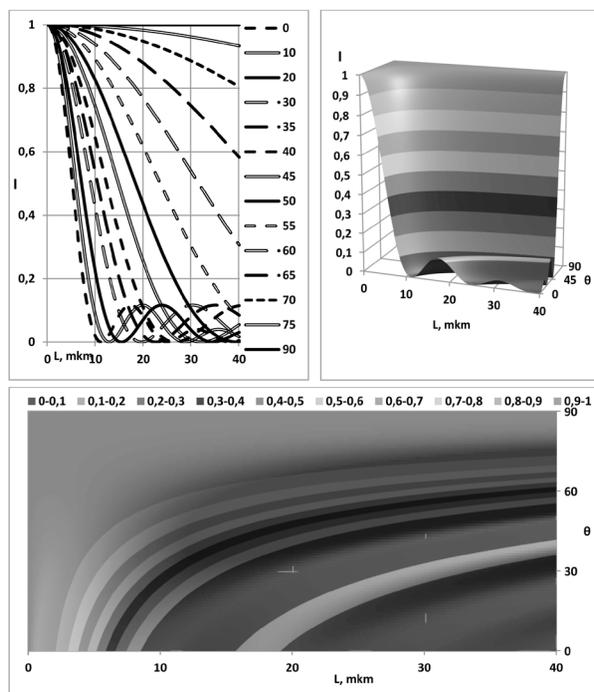


Рис. 11. Для STB, то есть твист-бенд ячейки ЖК с симметричными приповерхностными углами, зависимость интенсивности пропускания I при параллельных поляризаторах от приповерхностных углов θ и толщины L слоя ЖК.

Выводы

Методом оптической поляризационной микроскопии исследованы новые ЖК-композиты с использованием явления образования Рэлеевских мостов жидкости в композитных материалах на основе полимера и нематического жидкого кристалла.

Материалы на базе исследованных ЖК-композитов могут быть использованы в дисплейной технике и оптоэлектронике, например, в качестве волоконно-оптических датчиков, а также при разработке новых устройств для биосовместимой нанoeлектроники.

Разработана методика и смоделированы оптические свойства ячеек ЖК, актуальные для элементной базы средств приема, отображения и обработки информации.

Предложен метод расчёта и выполнена теоретическая и компьютерная модель зависимости интенсивности пропускания от ориентационных параметров ЖК-композитной ячейки.

* * *

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант №16-57-00089_Бел_а.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жаркова Г.М., Сонин А.С. Жидкокристаллические композиты. Новосибирск: Наука. 1994. 214 с.
2. Беляев В.В. Дисплеи 90-х годов. М.: Химия, 2000. 91 с.
3. Belyaev V.V., Chausov D.N., Solomatin A.S. Phase retardation vs. pretilt angle in liquid crystal cells with homogeneous and inhomogeneous LC director configuration // *Optics Express*. 2013. V.21. pp. 4244–4249.
4. Belyaev V.V. Solomatin A.S., Kurilov A.D., Chausov D.N., Mazaeva V.G. Optical Properties of Hybrid Aligned Nematic (HAN) Cells with Different Pretilt Angles // *Applied Optics*. 2014. V.53. I.29. pp. H51–H57.
5. Беляев В.В., Соломатин А.С. Оптические свойства гибридных жидкокристаллических ячеек при различных углах падения света // *Оптический Журнал*. 2015. Т. 82. № 1. С. 41–48.
6. Belyaev V.V. Solomatin A.S., Chausov D.N. Phase retardation difference of liquid crystal cells with symmetric and asymmetric boundary conditions // *Molecular Crystals & Liquid Crystals*. 2014, vol. 596, pp. 22–29.
7. Беляев В.В., Соломатин А.С., Чаусов Д.Н. Оптические свойства ЖК ячеек с произвольным краевым углом наклона директора // *Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика*. 2013. № 1. С. 32–41.
8. Соломатин А.С. Линзы на основе жидких кристаллов с неоднородным радиальным распределением директора // *Вестник Московского Государственного областного университета. Серия: Физика-Математика*. 2016. № 3. С. 37–45. DOI: 10.18384/2310-7251-2016-3-37-45
9. Коншина Е.А. Оптика жидкокристаллических сред. СПб: СПб НИУ ИТМО. 2012. 99 с.

REFERENCES

1. Zharkova G.M., Sonin A.S. *Zhidkokristallicheskie kompozity* [Liquid crystal composites]. Novosibirsk, Nauka Publ., 1994. 214 p.
2. Belyaev V.V. *Displei 90-kh godov* [Displays of the 1990s]. Moscow, Khimiya Publ., 2000. 91 p.
3. Belyaev V.V., Chausov D.N., Solomatin A.S. Phase retardation vs. pretilt angle in liquid crystal cells with homogeneous and inhomogeneous LC director configuration. In: *Optics Express*. 2013, vol. 21, pp. 4244–4249.
4. Belyaev V.V. Solomatin A.S., Kurilov A.D., Chausov D.N., Mazaeva V.G. Optical Properties of Hybrid Aligned Nematic (HAN) Cells with Different Pretilt Angles. In: *Applied Optics*. 2014, vol. 53, iss. 29, pp. H51–H57.
5. Belyaev V.V., Solomatin A.S. Optical properties of hybrid liquid crystal cell at various angles of incidence of light. In: *Opticheskii Zhurnal*. T. 82. [Journal of Optics. Vol. 82]. 2015, no. 1, pp. 41–48.
6. Belyaev V.V. Solomatin A.S., Chausov D.N. Phase retardation difference of liquid crystal cells with symmetric and asymmetric boundary conditions. In: *Molecular Crystals & Liquid Crystals*. 2014, vol. 596, pp. 22–29.
7. Belyaev V.V., Solomatin A.S., Chausov D.N. The optical properties of the LCD cell with arbitrary boundary angle of the Director. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-Matematika* [Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics]. 2013, no. 1, pp. 32–41.

8. Solomatina A.S. Lenses based on liquid crystals with a nonuniform radial distribution of the director. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-Matematika* [Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics And Mathematics]. 2016, no. 3, pp. 37–45.
9. Konshina E.A. *Optika zhidkokristallicheskih sred* [Optics of liquid crystal media]. SPb., SPb NIU ITMO Publ., 2012. 99 p.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Соломатин Алексей Сергеевич – кандидат физико-математических наук, инженер учебно-научной лаборатории теоретической и прикладной нанотехнологии, Московский государственный областной университет;

e-mail: Sotrudnica_UNC@mail.ru

Мащенко Владимир Игоревич – кандидат химических наук, старший научный сотрудник учебно-научной лаборатории теоретической и прикладной нанотехнологии, Московский государственный областной университет;

e-mail: mashchenko@genebee.msu.su

Шашкова Юлия Олеговна – инженер учебно-научной лаборатории теоретической и прикладной нанотехнологии, Московский государственный областной университет;

e-mail: pirmir123@mail.ru

Беляев Виктор Васильевич – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической физики, Московский государственный областной университет;

e-mail: vic_belyaev@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Aleksei S. Solomatina – PhD in Physico-mathematical Sciences, engineer of the Education & Science Lab for Theoretical and Applied Nanotechnology at the Moscow Region State University;

e-mail: Sotrudnica_UNC@mail.ru

Vladimir I. Mashchenko – PhD in Chemical Sciences, senior researcher of the Education & Science Lab for Theoretical and Applied Nanotechnology at the Moscow Region State University;

e-mail: mashchenko@genebee.msu.su

Julia O. Shashkova – engineer of the Education & Science Lab for Theoretical and Applied Nanotechnology at the Moscow Region State University;

e-mail: pirmir123@mail.ru

Victor V. Belyaev – Doctor in Technical Sciences, professor, head of the Department of Theoretical Physics at the Moscow Region State University;

e-mail: vic_belyaev@mail.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Соломатин А.С., Мащенко В.И., Шашкова Ю.О., Беляев В.В. Особенности формирования микроструктуры и оптические свойства жидkokристаллических композитных

твист-ячеек // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика и математика. 2017. № 2. С. 53–63.

DOI: 10.18384/2310-7251-2017-2-53-63.

CORRECT REFERENCE TO THE ARTICLE

A.S. Solomatin, V.I. Mashchenko, Y.O. Shashkova, V.V. Belyaev. Formation and optical properties of twist structures in a nematic liquid crystal composite. In: *Bulletin of Moscow Region State University*. Series: Physics & Mathematics. 2017, no. 2, pp. 53–63.

DOI: 10.18384/2310-7251-2017-2-53-63.

УДК 539.3

DOI: 10.18384/2310-7251-2017-2-64-71

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПЛАСТИЧЕСКОЙ АНИЗОТРОПИИ ЛИСТОВЫХ ПРОКАТНЫХ МАТЕРИАЛОВ ИЗ АЛЮМИНИЕВЫХ СПЛАВОВ

Костиков И.Е., Кузнецов Е.Е., Матченко Н.М.

Тульский государственный университет

300012, г. Тула, пр. Ленина, 92, Российская Федерация

Аннотация. В процессе анализа анизотропии пластических свойств листовых прокатных алюминиевых сплавов используется условие пластичности Мизеса-Хилла [2]. Данное условие часто применяют в проектировании процессов обработки листовых металлов давлением. В статье таблично приведены результаты вычисления показателей совместности, экспериментально определённых механических характеристик для алюминиевых сплавов, которые имеют отклонения, превышающие точность эксперимента, из-за неподчинения материала условию пластичности Мизеса [3] и ассоциированному с ним закону пластического деформирования.

Ключевые слова: прокатный материал, анизотропия, пластичность, эксперименты.

EXPERIMENTAL STUDY OF PLASTIC ANISOTROPY OF SHEET-ROLLED ALUMINUM ALLOY MATERIALS

I. Kostikov, E. Kuznetsov, N. Matchenko

Tula State University

prosp. Lenina 92, 300012 Tula, Russian Federation

Abstract. We analyze and discuss the limits of application of Mises–Hill plasticity conditions [2] to describe the plastic anisotropy of sheet-rolled aluminum alloys. This condition is often used in the design of processes of sheet metal processing at a pressure. We present in tabular form the results of computation of compatibility indicators and experimentally determine mechanical properties for aluminum alloys. Indicators of consistency are shown to have deviations exceeding the accuracy of the experiment due to non-submission of the material condition of the Mises plasticity [3] and the associated law of plastic deformation.

Key words: rolling material, anisotropy, plasticity, experiments.

Для алюминиевых сплавов при проектировании процессов обработки листовых металлов давлением [8] для описания пластической анизотропии обычно используется условие пластичности Мизеса-Хилла [2], записанное для случая плоского напряжённого состояния [8; 11]:

$$F\sigma_y^2 + G\sigma_x^2 + HG(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 2N\sigma_{xy}^2 = 1, \quad (1)$$

где $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$ – компоненты тензора напряжений; F, G, H, N – механические характеристики пластической анизотропии, подлежащие экспериментальному определению.

К условию пластичности (1) присоединяется ассоциированный закон пластического течения [7; 9]:

$$\begin{aligned} de_x &= [H(\sigma_x - \sigma_y) + G\sigma_x]d\mu, de_y = [F\sigma_y + H(\sigma_y - \sigma_x)]d\mu, \\ de_z &= -(G\sigma_x + F\sigma_y)d\mu, de_{xy} = N\sigma_{xy}d\mu, \end{aligned} \quad (2)$$

где $de_x, de_y, de_z, de_{xy}$ – приращения компонент тензора деформаций [5–8].

Из (2) следует, что пластическое течение анизотропного материала происходит без изменения объёма [8; 10]:

$$de_x + de_y + de_z = 0. \quad (3)$$

Для определения характеристик F, G, H, N пластической анизотропии прокатного металла используются эксперименты на растяжение образцов, вырезанных в направлении прокатки, поперёк прокатки и под углом $\pi/4$ к направлению прокатки, как показано на рис. 1.

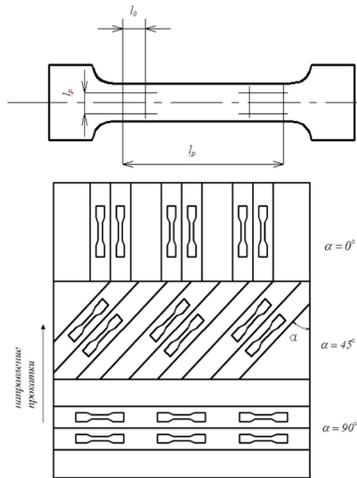


Рис. 1. Схема разметки и вырезки образцов.

В связи с тем, что в экспериментах получают шесть характеристик пластической анизотропии (три значения пределов текучести $\sigma_0, \sigma_{\pi/4}, \sigma_{\pi/2}$ и три показателя пластической анизотропии $R_0, R_{\pi/4}, R_{\pi/2}$ [1; 2]), а условие пластичности Мизеса-Хилла (1) содержит только четыре константы, то возникают два условия совместности экспериментально найденных характеристик пластической анизотропии [4; 5].

В экспериментах по растяжению образцов, вырезанных в направлении прокатки и поперёк прокатки, вычисляют два значения константы H :

$$H = R_0 / (1 + R_0)\sigma^2, H_{\pi/2} = R_{\pi/2} / (1 + R_{\pi/2})\sigma^2, \quad (4)$$

где $R_0, R_{\pi/2}$ – показатели анизотропии вдоль и поперёк прокатки.

Из соотношений (4) вытекает критерий совместности K_I :

$$K_I = |(H_0 - H_{\pi/2}) / H_c| \cdot 100\%, \quad (5)$$

где $H_c = (H_0 + H_{\pi/2}) / 2$.

Из эксперимента на растяжение образцов, вырезанных под углом $\pi/4$, к направлению прокатки вычисляют два значения механической характеристики N :

$$N = N_1 = 2 / \sigma_{\pi/4}^2 - 0,5(F + G), \quad N = N_2 = (R_{xy} + 0,5)(F + G). \quad (6)$$

Из соотношений (4–6) вытекает критерий совместности K_{II} :

$$K_{II} = |(N_1 - N_2) / N_c| \cdot 100\%, \quad (7)$$

где $N_c = (N_1 + N_2) / 2$.

В таблице 1 приведены результаты вычисления показателей совместности экспериментально определенных механических характеристик алюминиевых сплавов [1].

Таблица 1

Алюминиевые сплавы	Материал							
	σ_{s0} , МПа	$\sigma_{\pi/4}$, МПа	$\sigma_{\pi/2}$, МПа	R_0	$R_{\pi/4}$	$R_{\pi/2}$	K_I	K_{II}
АМг6М	171,0	160,0	171,0	0,73	0,85	0,65	6,2	5,6
АМг2М	68,0	68,0	66,0	0,54	0,71	0,47	2,87	22,93
АМцАМ	72,7	65,1	78,8	0,28	0,97	0,33	3,69	15,59

Ниже приводятся данные экспериментов на алюминиевых сплавах [15]. Одноосному растяжению подвергались плоские стандартные образцы, вырезанные под углом 0° , 45° и 90° по отношению к направлению прокатки, по шесть штук каждого вида, в соответствии с ГОСТ 11701-84 ($h_0 < 4$ мм). Точность размеров образцов обеспечивалась их обработкой в специальных шаблонах [18].

Таблица 2.

Характеристики механических свойств исследуемых образцов

Материал	Исходная толщина листа S_0 , мм	Угол вырезки образца α , град.	$\sigma_{0,2}$, МПа	σ_B , МПа	δ , %	δ_p , %	ψ , %	ψ_p , %
Алюминиевый сплав АД0	4,75	0	120,5	218,1	18,7	17,9	27,5	7,2
		45	122,2	213,3	15,2	13,5	27,0	11,6
		90	119,3	219,0	20,0	12,8	24,9	11,4
Алюминиевый сплав АД0	2,8	0	126,0	305,7	17,1	15,4	17,9	15,1
		45	113,4	303,9	20,3	19,7	17,4	16,2
		90	109,9	274,8	7,4	6,8	9,1	5,5

В таблице ψ , % – полное относительное сужение, ψ_p , % – равномерное относительное сужение, δ , % – относительное удлинение, δ_p , % – равномерное относительное удлинение.

Предварительно перед испытаниями на образец в зоне расчётной длины a_0 наносились квадратные ячейки со стороной 10 мм, которые при погрешности измерения размера 0,004 – 0,005 мм обеспечивают точность получения величин с ошибкой, не превышающей 0,25%.

Ячейки с точностью до 0,0025 – 0,0030 мм наносились алмазным индентором на измерительном микроскопе УИМ-21 с приставкой ПМТ-3. Усилие на инденторе подбиралось таким образом, чтобы глубина рисок не влияла на характер разрыва образца и в то же время риска была устойчива и хорошо просматривалась при измерении ячейки после растяжения образца.

Растяжение образцов производилось по этапам на универсальных испытательных машинах Р-5 и УМЭ-ЮТМ до разрушения с записью индикаторных диаграмм.

До испытаний и на каждом этапе испытаний размеры ячеек образцов измерялись на одном и том же микроскопе. На каждом этапе фиксировалось усилие, изменение длины, ширины и толщины образца в области нанесённых ячеек и находились величины коэффициентов анизотропии $R_\alpha = e_b/e_h$, $F_\alpha = e_h/e_a$, $Q_\alpha = e_b/e_a$, где $e_a = \ln(a/a_0)$, $e_b = \ln(b/b_0)$, $e_h = \ln(h/h_0)$, а a_0 , b_0 , h_0 , a , b , h – исходная и текущая на каждом этапе растяжения в процессе деформации длина, ширина и толщина ячейки образца в пределах равномерной деформации. Заметим, что замеры длины a , ширины b и толщины h в процессе эксперимента проводились микрометром со сферическим наконечником малого радиуса с точностью 0,005 мм.

Так же определяется величина коэффициентов анизотропии R_α , F_α , Q_α образца, вырезанного под углом α , на каждом этапе деформирования по замерам ячейки:

$$F_\alpha = e_{h\alpha} / e_{a\alpha}, Q_\alpha = e_{b\alpha} / e_{a\alpha}, R_\alpha = e_{b\alpha} / e_{h\alpha}.$$

Деформации образцов по ширине $e_{b\alpha}$, длине $e_{a\alpha}$ и толщине $e_{h\alpha}$ определяются по формулам:

$$e_{a\alpha} = \ln(u_{a\alpha} / u_{a0\alpha}), e_{b\alpha} = \ln(u_{b\alpha} / u_{b0\alpha}), e_{h\alpha} = \ln(u_{h\alpha} / u_{h0\alpha}),$$

где $u_{a\alpha}$, $u_{a0\alpha}$, $u_{b\alpha}$, $u_{b0\alpha}$, $u_{h\alpha}$, $u_{h0\alpha}$ – размеры ячейки вдоль, поперёк и по толщине образца до и после этапа нагружения.

Для получения наиболее достоверных результатов при максимальной равномерной деформации использовалась та часть разорванного образца, в которой ячейка была наиболее удалена от очага локальной деформации (места разрыва).

Величины пределов текучести $\sigma_{\alpha,0.2}$ определялись в соответствии с ГОСТ 1497-84 или ГОСТ 11701-84 в зависимости от исходной толщины материала.

Для определения продольной, поперечной деформаций и деформации по толщине вырезались продольные образцы в соответствии с ГОСТ 1497-84 или

ГОСТ 11701-84 в зависимости от исходной толщины материала в пределах одного листа под углами $\alpha = 0, \pi/4, \pi/2$ по отношению к направлению прокатки по шесть штук каждого вида.

Как отмечалось выше, растяжение образцов осуществлялось на универсальных испытательных машинах Р-5 и УМЭ-ЮТМ.

Нагружение производилось по этапам [14]. На каждом этапе деформирования фиксировалось усилие, изменение ширины и толщины образца в области нанесённых ячеек, а также изменение продольных размеров ячеек [19].

Экспериментальные данные, приведённые в таблице 2, получены в лаборатории профессора С.С. Яковлева в Тульском государственном университете.

Поскольку эксперименты по определению характеристик пластической анизотропии выполнялись с точностью до 5% [1; 16], то отклонение в критериях K_I и K_{II} за пределы точности эксперимента свидетельствует о том, что материал не подчиняется условию пластичности Мизеса и ассоциированному с ним закону пластического деформирования [12].

В таблице 2 видны значения критериев несогласованности параметров анизотропии, выходящие за рамки точности эксперимента [13; 17].

ЛИТЕРАТУРА

1. Андрейченко В.А. Яковлев С.П., Яковлев С. Обработка давлением анизотропных материалов. Кишинёв: Квант, 1997. 330 с.
2. Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: ГИТТЛ, 1956. 407 с.
3. Mises R. Mechanic der plastischen Formagerung von Kristalen // Z. Angew. Math. und Mech. 1928. 8. № 5. 161-185 (нем. яз.).
4. Зиборов Л.А., Костиков И.Е., Кузнецов Е.Е., Матченко Н.М. Уравнения пространственной задачи теории идеальной пластичности при условии полной пластичности // Сборник материалов XIII международной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики», посвящённой 80-летию Ивлева Д.Д. Воронеж, 20-22 сентября 2010 г.
5. Зиборов Л.А., Костиков И.Е., Кузнецов Е.Е., Матченко Н.М. Полиномиальное условие пластичности ортотропных материалов // Сборник материалов международной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики», посвящённая 80-летию Ивлева Д.Д. Воронеж, 20-22 сентября 2010 г.
6. Матченко Н.М., Толоконников Л.А. Общая плоская задача теории идеальной пластичности анизотропных материалов // Известия АН СССР. Механика твёрдого тела. 1973. № 3. С. 113–115.
7. Матченко Н.М., Толоконников Л.А. Плоская задача теории идеальной пластичности анизотропных материалов // Известия АН СССР. Механика твёрдого тела. 1975. № 1. С. 169–170.
8. Костиков И.Е., Кузнецов Е.Е., Матченко И.Н., Матченко Н.М. Пространственная задача теории идеальной пластичности при условии полной пластичности // Сборник материалов XI международной научно-технической конференции «Актуальные проблемы строительства и строительной индустрии» 30.06-02.07.2010. С. 32–33.
9. Костиков И.Е., Кузнецов Е.Е., Матченко Н.М. Об уравнениях предельного состояния анизотропных идеально связных сред при плоском чистом сдвиге // Известия ТулГУ. Серия: Естественные науки. 2013. Вып. 2. Часть 2. С. 128–139.

10. Костиков И.Е., Кузнецов Е.Е., Матченко Н.М. Об уравнениях предельного состояния анизотропных идеально связанных сред при плоском чистом сдвиге // Сборник материалов XIV Международной научно-технической конференции «Актуальные проблемы строительства и строительной индустрии» (26-29 июня 2013 г.), С. 50–51.
11. Костиков И.Е., Кузнецов Е.Е., Матченко Н.М., Перельгин И.А., Фомичев Е.С. Экспериментальное исследование пластической анизотропии листовых прокатных сталей // Материалы всероссийской научной школы-конференции «Механика предельного состояния и смежные вопросы», посвящённой 85-летию профессора Д.Д. Ивлева. Часть 2 (15-18 сентября 2015 г.). С. 76–81.
12. Barber E.S. Discussion of “Physical Interpretation of Trivial Test Data”. Proc., of the Association Asphalt Paving Technologists, Vol. 20, 1951, pp. 196-199.
13. Biot M.A. Mechanics of incremental deformations. New York: John Willey, 1965. 504 p.
14. Bogue D.C. The yield stress and plastic strain theory for anisotropic materials, Oak Ridge Nat. Lab. Rep. ORLN-TM-1869, 1967.
15. Huber M.T. Die spezifische Formänderungsarbeit als Maß der Amstien-gungeines Matirials. Lemberg, 1904.
16. Hoffman O., J. Compos Mater., 1, 1967. pp. 200-206. Ikegami K. Experimental Plasticity on the Anisotropy of Metals.-Callog. Int. CNRS, Paris, 1982, № 295. pp. 201-242 (англ.). ЗДЕСЬ ДВЕ ССЫЛКИ!!! (если нужна вторая, то она выглядит следующим образом Ikegami, K. (1982). Experimental plasticity on the anisotropy of metals, in Mechanical Behaviour of Anisotropic Solids, pp. 201-242, Boehler, J. P. ed., Alphen aan den Rijn: Nijhoff.)
17. Johnson W., Mellor P. Plasticity for mechanical engineers. D. Van Nostrand Company. LTD, 1962 412 p.
18. Sobotka Z. The plastic flow of ortotropic materials wich different mechanical properties in tension and in compression. Acta techn. CSAV, 1971, 16, № 6, pp. 772-776 (англ.).

REFERENCES

1. Andreichenko V.A., Yakovlev S.P., Yakovlev S. *Obrabotka davleniem anizotropnykh materialov* [Pressure treatment of anisotropic materials]. Chisinau, Kvant Publ., 1997. 330 p.
2. Hill R. *The Mathematical theory of plasticity*. Oxford, Clarendon Press, 1956. 355 p.
3. Mises R. Mechanic der plastischen Formagerung von Kristalen. In: Z. Angew. Math. Und Mech. 1928, 8, no. 5, ss. 161–185 (In German).
4. Equations of spatial problems of the theory of ideal plasticity under the condition of full plasticity. In: *Sbornik materialov XIII mezhdunarodnoi konferentsii ‘Aktual’nye problemy prikladnoi matematiki, informatiki i mekhaniki’, posvyashchennoi 80-letiyu Ivleva D.D.* [The collection of materials of XIII international conference ‘Actual problems of applied mathematics, informatics and mechanics’, devoted to the 80th birthday of D.D. Ivlev]. Ziborov L.A., Kostikov I.E., Kuznetsov E.E., Matchenko N.M. Voronezh, September 20–22, 2010.
5. Polynomial condition of plasticity of orthotropic materials. In: *Sbornik materialov XIII mezhdunarodnoi konferentsii ‘Aktual’nye problemy prikladnoi matematiki, informatiki i mekhaniki’, posvyashchennoi 80-letiyu Ivleva D.D.* [The collection of materials of XIII international conference ‘Actual problems of applied mathematics, informatics and mechanics’, devoted to the 80th birthday of D.D. Ivlev]. Ziborov L.A., Kostikov I.E., Kuznetsov E.E., Matchenko N.M. Voronezh, September 20–22, 2010.
6. Matchenko N.M., Tolokonnikov L.A. The general plane problem of the theory of perfect plasticity of anisotropic materials. In: *Izvestiya AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela* [Bulletin of the Academy of Sciences of the USSR. Ser.: Solid Mechanics]. 1973, no. 3, pp. 113–115.

7. Matchenko N.M., Tolokonnikov L.A. The plane problem of the theory of perfect plasticity of anisotropic materials. In: *Izvestiya AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela* [Bulletin of the Academy of Sciences of the USSR. Ser.: Solid Mechanics]. 1975, no. 1, pp. 169–170.
8. Kostikov I.E., Kuznetsov E.E., Matchenko I.N., Matchenko N.M. Spatial problem of the theory of ideal plasticity under the condition of full plasticity. In: *Sbornik materialov XI mezhdunarodnoi nauchno-tehnicheskoi konferentsii 'Aktual'nye problemy stroitel'stva i stroitel'noi industrii' 30.06-02.07.2010* [The collection of materials of XI international scientific-technical conference 'Actual problems of building and construction industry' 30.06-02.07.2010]. 2010, pp. 32–33.
9. Kostikov I.E., Kuznetsov E.E., Matchenko N.M. About the equations of a limiting condition of anisotropic ideally connected media with a flat pure shear. In: *Izvestiya TulGU. Seriya: Estestvennye nauki* [Bulletin of Tula State University. Series: Natural science]. 2013, no. 2, part 2, pp. 128–139.
10. Kostikov I.E., Kuznetsov E.E., Matchenko N.M. About the equations of a limiting condition of anisotropic ideally connected media with a flat pure shear. In: *Sbornik materialov XIV Mezhdunarodnoi nauchno-tehnicheskoi konferentsii 'Aktual'nye problemy stroitel'stva i stroitel'noi industrii' (26-29 iyunya 2013 g.)* [The collection of materials of XIV International scientific and technical conference 'Actual problems of building and construction industry' (26–29 June 2013)]. 2013, pp. 50–51.
11. Experimental study of plastic anisotropy of sheet rolling of steel. In: *Materialy vs Rossiiskoi nauchnoi shkoly-konferentsii «Mekhanika predelnogo sostoyaniya i smezhnye voprosy», posvyashchennoi 85-letiyu professora D.D. Ivleva* [Proceedings of All-Russian scientific school-conference 'Mechanics of a limiting state and related matters', dedicated to the 85th birthday of Professor D.D. Ivlev]. Kostikov I.E., Kuznetsov E.E., Matchenko N.M., Perelygin I.A., Fomichev E.S. Part 2 (15–18 September 2015). 2015, pp. 76–81.
12. Barber E.S. Discussion of 'Physical Interpretation of Trivial Test Data'. In: Proc. of the Association Asphalt Paving Technologists, vol. 20, 1951, pp. 196–199.
13. Biot M.A. Mechanics of incremental deformations. New York: John Wiley, 1965. 504 p.
14. Bogue D.C. The yield stress and plastic strain theory for anisotropic materials, Oak Ridge Nat. Lab. Rep. ORLN-TM-1869, 1967.
15. Huber M.T. Die spezifische Formänderungsarbeit als Maß der Amstien-gungeines Matirials. Lemberg, 1904.
16. Hoffman O. The brittle strength of orthotropic materials. J. Compos Mater., 1, 1967, pp. 200–206.
17. Johnson W., Mellor P. Plasticity for mechanical engineers. D. Van Nostrand Company. LTD, 1962. 412 p.
18. Sobotka Z. The plastic flow of orthotropic materials with different mechanical properties in tension and in compression. In: Acta techn. Csav, 1971, 16, no. 6, pp. 772–776.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Костиков Иван Евгеньевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры строительства, строительных материалов и конструкций Тульского государственного университета;
e-mail: 01999@list.ru;

Кузнецов Евгений Евгеньевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры строительства, строительных материалов и конструкций Тульского государственного университета;
e-mail: info@tsu.tula.ru;

Матченко Николай Михайлович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры механики пластического формоизменения Тульского государственного университета;
e-mail: info@tsu.tula.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Ivan E. Kostikov – PhD in Physico-mathematical Sciences, senior lecturer of the Department of Building, Building Materials and Designs at the Tula State University;
e-mail: 01999@list.ru

Yevgeniy E. Kuznetsov – PhD in Physico-mathematical Sciences, senior lecturer of the Department of Building, Building Materials and Designs at the Tula State University;
e-mail: info@tsu.tula.ru

Nikolay M. Mattchenko – Doctor in Physico-mathematical Sciences, professor of the Department of Mechanics of Plastic Forming at the Tula State University;
e-mail: info@tsu.tula.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Костиков И.Е., Кузнецов Е.Е., Матченко Н.М. Экспериментальное исследование пластической анизотропии листовых прокатных материалов из алюминиевых сплавов // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика и математика. 2017. № 2. С. 64–71.

DOI: 10.18384/2310-7251-2017-2-64-71.

CORRECT REFERENCE TO THE ARTICLE

I. Kostikov, E. Kuznetsov, N. Mattchenko. Experimental study of plastic anisotropy of sheet-rolled aluminum alloy materials. In: *Bulletin of Moscow Region State University*. Series: Physics & Mathematics. 2017, no. 2, pp. 64–71.

DOI: 10.18384/2310-7251-2017-2-64-71.

УДК 534.232

DOI: 10.18384/2310-7251-2017-2-72-81

ГЕНЕРАЦИЯ ВЫСШИХ ГАРМОНИК В СОСТАВНЫХ СТЕРЖНЕВЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

Неверов А.Н.*Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет (МАДИ)**125319, Москва, Ленинградский пр., 64, Российская Федерация*

Аннотация. Проведено теоретическое и экспериментальное исследование свойств сухого плоского акустического контакта. Показано, что контакт может быть генератором высших гармоник. Их экспериментальному наблюдению способствуют резонансные явления. При субгармоническом возбуждении удалось получить сигналы второй, третьей, пятой, седьмой и девятой гармоник основного сигнала.

Ключевые слова: колебания, амплитуда, резонанс, высшие гармоники, контакт, соленоид, преобразователь.

GENERATION OF HIGHER HARMONICS IN COMPOSITE ROD VIBRATION SYSTEMS

A. Neverov*Moscow Automobile and Road Construction State Technical University (MADI)**Leningradsky prosp. 64, 125319 Moscow, Russian Federation*

Abstract. The properties of a dry flat acoustic contact are studied theoretically and experimentally. It is shown that the contact can be a generator of higher harmonics. It is found that resonance phenomena contribute to their experimental observation. In the case of subharmonic excitation it is possible to obtain the signals of the second, third, fifth, seventh and ninth harmonics of the basic signal.

Key words: vibration, amplitude, resonance, higher harmonics, acoustic contact, solenoid, transducer.

Введение.

Постановка задачи

Факт зависимости параметров составных колебательных систем от усилия статического сжатия элементов известен достаточно давно [1–3]. Во всех этих работах поверхности акустического контакта считались абсолютно гладкими, геометрия же контактирующих поверхностей специально оговаривается лишь в работе [3] (в ней рассматривается контакт сферического наконечника стержневой колебательной системы с плоской поверхностью полупространства).

С другой стороны, авторами ряда теоретических и экспериментальных работ исследовались нелинейные эффекты при отражении упругих волн от поверхности сухого контакта двух полубесконечных твёрдых тел [4–8]. В фундаментальной работе [4] даётся анализ нелинейной динамики системы, которая представляет собой две упругие полубесконечные линейные среды, разделённые несвязанной плоской поверхностью. Эта несвязанная плоская поверхность – зазор, по определению, не может выдерживать растягивающие напряжения и поэтому раскрывается в фазе растяжения распространяющегося возмущения механического напряжения, если не был уже открыт. Открытие и закрытие зазора представляют собой источник нелинейности рассматриваемой системы. Это, по мнению автора, простейшая нелинейная задача, содержащая сплошную среду. В случае падающей синусоидальной волны эффективность генерации второй гармоники определяется как функция отношения постоянного гидростатического давления к амплитуде напряжения (механического) падающей волны. Эта работа объяснила экспериментальные результаты, полученные в [5].

В работе [6] контакт аппроксимируется ансамблем одинаковых пружинок различной длины. При этом, в отличие от [4], контакт может не раскрываться полностью.

Аналитические соотношения

В настоящей работе исследуется возможность генерации гармоник в составных ультразвуковых колебательных системах за счёт нелинейности, обусловленной шероховатостью поверхностей соединяемых элементов.

Расчет ведётся на основе стержневой модели. Такая модель приведена на рис. 1.

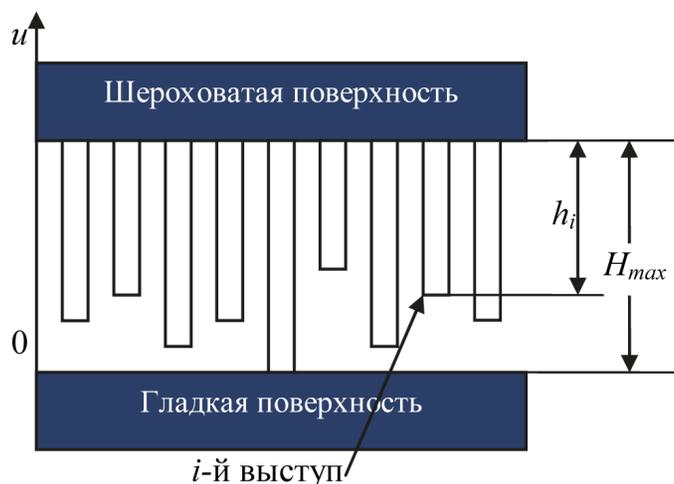


Рис. 1. Стержневая модель контакта

Контакт двух шероховатых поверхностей описывается как контакт гладкой поверхности с шероховатой, параметры опорной кривой которой b_s и v_s определяются по формулам:

$$b_S = k_{v1,2} b_{S1} b_{S2} \frac{(H \max_1 + H \max_2)^{v_{S1} + v_{S2}}}{H^{v_{S1}} \max_1 \cdot H^{v_{S2}} \max_2}; \quad v_S = v_{S1} + v_{S2},$$

где b_{S1} , v_{S1} , b_{S2} , v_{S2} – параметры опорных кривых контактирующих поверхностей, $H \max_1$, $H \max_2$ – максимальные высоты их неровностей,

$$k_{v1,2} = \frac{v_{S1} \cdot v_{S2}}{v_{S1} + v_{S2}} \cdot \frac{\Gamma(v_{S1})\Gamma(v_{S2})}{\Gamma(v_{S1} + v_{S2})}.$$

Шероховатая поверхность моделируется набором однородных стержней различной высоты. Эта модель физически вполне обоснована, так как, хотя площадь пятна касания каждого отдельного выступа увеличивается при сближении поверхностей, средняя площадь пятна касания остаётся практически неизменной из-за того, что в контакт вступают всё новые и новые выступы. Распределение выступов по длине задаётся функцией $n(\varepsilon)$.

Пусть гладкая поверхность сближается с линией впадин шероховатой поверхности на величину u (координата $u = 0$ соответствует линии выступов). При этом сила, воздействующая на i -й выступ высоты h_i в соответствии с законом Гука должна быть равна

$$F_i = ES_i \frac{h_i + u - H \max}{h_i}, \quad (1)$$

где E – модуль Юнга, S_i – площадь сечения i -го выступа, $H \max$ – наибольшая высота неровностей профиля шероховатой поверхности.

Выражение (1) может быть приведено к виду:

$$F_i = ES_i \frac{x - \varepsilon_i}{1 - \varepsilon_i} \tilde{I}(x - \varepsilon_i), \quad (2)$$

где $x = \frac{u}{H \max}$ – относительное сближение поверхностей, $\varepsilon_i = 1 - \frac{h_i}{H \max}$,

$\tilde{I}(x - \varepsilon_i)$ – единичная функция Хевисайда.

Сила, воздействующая на все выступы шероховатой поверхности, определится суммированием выражений (2) по всей поверхности:

$$F(x) = \sum ES_i \frac{-\varepsilon}{-\varepsilon} I(x - \varepsilon_i), \quad (3)$$

где N – число контактирующих выступов. Так как это число велико, сумма в (3) может быть заменена интегралом:

$$F(x) = ES \int_0^x \frac{x - \varepsilon}{1 - \varepsilon} n'(\varepsilon) d\varepsilon, \quad (4)$$

где $S(x) = \sum_{i=1}^{N(x)} S_i$ – номинальная площадь контакта, функция $n = n(\varepsilon)$ представля-

ет собой уравнение опорной кривой шероховатой поверхности, штрихом помечено дифференцирование по ε . На практике всегда выполняются соотношения $0 \leq \varepsilon \leq x \ll 1$. В этом случае начальный участок опорной кривой шероховатой поверхности может быть аппроксимирован степенной функцией

$$n(\varepsilon) = b\varepsilon^\nu, \quad (5)$$

где b и ν – параметры опорной кривой.

Подставляя (5) в (4), представляя знаменатель подынтегрального выражения в виде ряда и, интегрируя, получаем:

$$F(x) = ESbv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+\nu+1}}{(n+\nu)(n+\nu+1)} \quad (6)$$

Пусть поверхности стянуты статической силой P_0 , а закон колебаний задан в виде $u_m \cos \omega t$, где t – время, u_m – амплитуда колебательного смещения в нём, ω – круговая частота колебаний. Тогда смещение в контакте u будет представлять собой сумму статического смещения u_0 и синусоидального колебания с частотой ω и амплитудой u_m и может быть записано в виде:

$$u = u_0 + u_m \cos \omega t, \text{ или } x = x_0 + x_m \cos \omega t \quad (7)$$

Акустический контакт не разрывается при $u_0 \geq u_m$. Для подсчёта амплитуд гармоник подставим (7) в (6) и разложим полученное выражение в ряд Тейлора, который должен сходиться. Ограничиваясь в разложении членами порядка x_m^5 , получаем:

$$F = F_0 + F_1 \cos \omega t + F_2 \cos 2\omega t + F_3 \cos 3\omega t + F_4 \cos 4\omega t + F_5 \cos 5\omega t + \dots, \quad (8)$$

где F_0 – постоянная составляющая силы, $F_1 \div F_5$ – амплитуды 1–5 гармоник силы, причём

$$F_0 = ESb \left[\frac{x_0^{\nu+1}}{\nu+1} + \frac{\nu}{4} x_0^{\nu-1} x_m^2 + \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{64} x_0^{\nu-3} x_m^4 + \dots \right], \quad (9)$$

$$F_1 = ESb \left[x_0^\nu x_m + \frac{\nu(\nu-1)}{8} x_0^{\nu-2} x_m^3 + \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)}{64} x_0^{\nu-4} x_m^5 + \dots \right], \quad (10)$$

$$F_2 = ESb \left[\frac{\nu}{4} x_0^{\nu-1} x_m^2 + \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{64} x_0^{\nu-3} x_m^4 + \dots \right], \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
 F_3 &= ESb \left[\frac{v(v-1)}{24} \varepsilon_0^{v-2} \varepsilon_m^3 + \frac{v(v-1)(v-2)(v-3)}{384} \varepsilon_0^{v-4} \varepsilon_m^5 + \dots \right] = \\
 &= ESb \frac{v(v-1)}{24} \varepsilon_0^{v-2} \varepsilon_m^3 \left(1 + \frac{(v-2)(v-3)}{16} \left(\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_0} \right)^2 (1 + \dots) \right), \quad (12)
 \end{aligned}$$

$$F_4 = ESb \frac{v(v-1)(v-2)}{192} \varepsilon_0^{v-3} \varepsilon_m^4 + \dots, \quad (13)$$

$$F_5 = ESb \frac{v(v-1)(v-2)(v-3)}{384} \varepsilon_0^{v-4} \varepsilon_m^5 + \dots \quad (14)$$

При $\varepsilon_m = 0$ постоянная составляющая силы F_0 равна статической силе P_0 . Тогда, ограничиваясь в (8) первым членом разложения, получаем:

$$x_0 = \left(\frac{P_0(v+1)}{ESb} \right)^{\frac{1}{v+1}}. \quad (15)$$

Для расчёта составных стержневых ультразвуковых колебательных систем необходимо знать величину эквивалентной податливости акустического контакта по первой гармонике C_{J1} . Её легко определить в линейном приближении при помощи (10):

$$C_{J1} = \frac{u}{F_1} = \frac{\varepsilon_m H \max}{F_1} \approx \frac{1}{ESb} \left(\frac{ESb}{(v+1)P_0} \right)^{\frac{v}{v+1}} = \left(\frac{ESb}{((v+1)P_0)^v} \right)^{\frac{1}{v+1}}.$$

Учитывая только первое слагаемое формулы (10), получаем связь между относительным смещением в контакте ε_m и первой гармоникой действующей силы F_1 :

$$\varepsilon_m = \frac{F_1}{ESb} \left(\frac{ESb}{(v+1)P_0} \right)^{\frac{v}{v+1}}. \quad (16)$$

Подставляя (15) и (16) в уравнения (8)–(13), получаем для амплитуды n -й гармоники:

$$F_2 = \frac{v}{4(v+1)} \frac{F_1}{P_0} F_1;$$

$$F_3 = \frac{v(v-1)}{24(v+1)^2} \left(\frac{F_1}{P_0} \right)^2 F_1;$$

$$F_4 = \frac{v(v-1)(v-2)}{192(v+1)^3} \left(\frac{F_1}{P_0} \right)^3 F_1;$$

$$F_5 = \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)}{1920(\nu+1)^4} \left(\frac{F_1}{P_0}\right)^4 F_1.$$

...

$$F_n = \frac{\Gamma(\nu+1)}{2^{n-1}(\nu+1)^{n-1} \Gamma(n+1)\Gamma(\nu-n)} \left(\frac{F_1}{P_0}\right)^{n-1}$$

$$F_1 = \frac{1}{B(n+1, \nu-n)} \left(\frac{F_1}{2(\nu+1)P_0}\right)^{n-1} F_1, \quad (13)$$

где $B(n+1, \nu-n)$ – бета-функция, $\Gamma(n+1)$, $\Gamma(\nu-n)$, $\Gamma(\nu+1)$, – гамма-функции от соответствующих аргументов.

Эксперимент

Полученные соотношения проверялись на электромагнитном соединении волноводов, так как в этом случае предположения, при которых проводились вычисления, выполняются в максимальной степени.

Исследуемая колебательная система представляла собой два идентичных пакетных пьезопреобразователя, один из которых использовался как источник продольных упругих колебаний, а другой – в качестве их приёмника. Конструкция преобразователей подбиралась таким образом, чтобы они при расчёте могли аппроксимироваться однородными стержнями. Частотопонижающие накладки преобразователей изготавливались из ферромагнитного материала – стали 45.

Характеристические сопротивления преобразователей были равны. Собственные частоты преобразователей составляли $22,6 \pm 0,05$ кГц. Преобразователи подвешивались на длинных тонких нитях и помещались в соленоид. Преобразователь-источник возбуждался гармоническим сигналом от генератора звуковой частоты. Частота возбуждающего сигнала определялась при помощи частотомера.

При пропуске по обмотке соленоида постоянного тока оба преобразователя втягивались в него с постоянной силой, равной

$$P_0 = \frac{1}{2\mu_0} \int_S B^2 dS,$$

где B – индукция магнитного поля в соленоиде, μ_0 – магнитная постоянная, интегрирование ведётся по сечению обкладок преобразователей S .

Втягиваясь в соленоид, преобразователи сжимались и контактировали своими торцами. На преобразователь-источник подавалось электрическое напряжение, в нем возбуждались механические колебания. Из-за нелинейности контакта он становился источником колебаний высших частот, которые фиксировались преобразователем-приемником. Эти колебания легко наблюдать, если их частоты близки к одной из собственных частот составной системы, так как в этом

случае сигнал пропорционален добротности системы. Амплитуды гармоник определялись по показаниям анализатора спектра. Формы входного и выходного сигналов фиксировались на экране двухлучевого осциллографа.

Экспериментально снимались амплитудно-частотные характеристики системы при постоянных входном электрическом напряжении и токе соленоида. По этим характеристикам определялись резонансные частоты системы и амплитуды выходного сигнала системы на этих частотах, а также вычислялись эквивалентные добротности.

Нам удалось наблюдать при субгармоническом возбуждении второй, третьей, пятой, седьмой и девятой гармоник.

На рис. 2 приведены осциллограммы второй, третьей и пятой гармоник при различных условиях.

При малых токах и большом входном напряжении на осциллограмме фиксируется только сигнал высшей гармоники (рис. 2а, в, д), при увеличении тока и уменьшении входного напряжения снижается амплитуда гармоник и увеличивается сигнал основной частоты (рис. 2б, г, е).

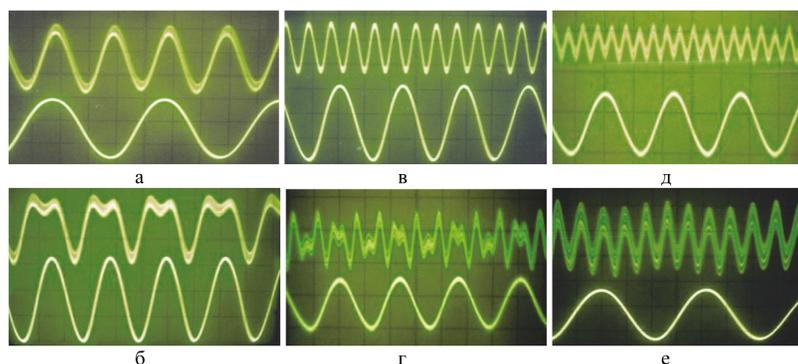


Рис. 2. Осциллограммы высших гармоник при различных условиях; а, б – 2-я, в, г – 3-я, д, е – 5-я гармоники; а, в, д – $U_{вх} = 50\text{В}$, $I = 0,5\text{А}$; б, г, е – $U_{вх} = 10\text{В}$, $I = 2\text{А}$. В нижней части осциллограмм – возбуждающее электрическое напряжение (основная частота)

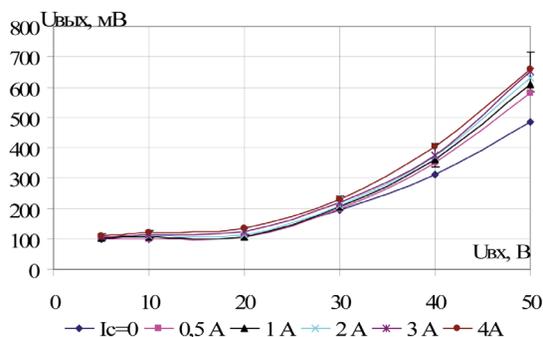


Рис. 3. Экспериментальная зависимость амплитуды второй гармоники от амплитуды входного сигнала

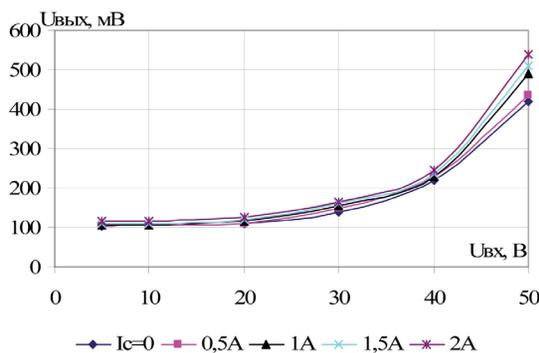


Рис. 4. Экспериментальная зависимость амплитуды третьей гармоники от амплитуды входного сигнала

На рис. 3 и 4 приведены соответственно экспериментальные зависимости амплитуд второй и третьей гармоник от амплитуды входного электрического сигнала.

Сигналы второй и третьей гармоник зависят от величины входного сигнала приблизительно по квадратичному и кубическому закону, соответственно. Зависимость же сигнала пятой гармоники от входного сигнала хуже соответствует теоретическим результатам.

Следует отметить аномальное увеличение амплитуды выходного сигнала на второй и третьей гармониках при амплитудах входного сигнала больше 40 В. Величина выходного сигнала при этом была очень неустойчива, отмечался характерный дребезжащий звук. Это может быть объяснено полным раскрытием акустического контакта.

Заключение

Результаты настоящей работы подтверждают заключение теоретической статьи о том, что акустический контакт в составных стержневых колебательных системах нелинеен и может быть источником высших гармоник. Подтверждена также возможность управления свойствами составной системы изменением тока соленоида.

Расхождение теоретических и экспериментальных зависимостей можно объяснить сильно нелинейной зависимостью между индукцией и напряженностью магнитного поля в соленоиде, а также тем, что при уменьшении усилия стягивания стержней резко падает добротность системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Захаров В.И. Расчёт и конструирование элементов резьбовых соединений магнитоstrictionных преобразователей с настроенными колебательными системами // Применение ультразвука в технологии машиностроения: Труды НИТИ, вып. VIII, часть I. М., 1964. С. 39–48.
2. Мечетнер Б.Х. Концентраторы-инструменты для ультразвуковой обработки, способы их крепления. М.: НИИМАШ, 1965. 54 с.

3. Kazantsev V.F. Oscillation of rod pressed to elastic surface // Proc. Int. Congr. Acoust., Liege, 7–14 sept., 1965. L. 48–5.
4. Richardson J.M. Harmonic generation at unbounded interface. I. Planar interface between semi-infinite elastic media // Int. J. Eng. Sci. 1979, vol. 17, no. 1, pp. 73–85.
5. Buck O., Morris W.L., Richardson J.M. Acoustic harmonic generation at unbounded interface and fatigue cracks // Appl. Phys. Lett. 1978. v. 33. no. 5, pp. 371–373.
6. Руденко О.В., Чинь Ань Ву. Нелинейные акустические свойства контактных поверхностей и возможности акустодиагностики статистических характеристик неровностей // Акустический журнал. 1994. Т. 40. № 4. С. 668–672.
7. Солодов И.Ю., Чин Ан Ву. «Хлопающая» нелинейность и хаос при колебаниях контактной границы твёрдых тел // Акустический журнал. 1993. Т. 39. № 5. С. 904–910.
8. Ко Сел Лен, Северин Ф.М., Солодов И.Ю. Экспериментальное наблюдение влияния контактной нелинейности на отражение объёмных и распространение поверхностных акустических волн // Акустический журнал. 1991. Т. 37. № 6. С. 1165–1169.
9. Крагельский И.А., Добычин М.Н., Комбалов В.А. Основы расчётов на трение и износ. М.: Машиностроение, 1977. 525 с.
10. Основы трибологии (трение, износ, смазка): учебник для технических вузов / Э.Д. Браун и др.; под ред. А.В. Чичинадзе. М.: Наука и техника, 1995. 778 с.

REFERENCES

1. Zakharov V.I. Calculation and design of threaded joints of magnetostrictive transducers with tuned vibration systems. In: *Primenenie v tekhnologii mashinostroeniya: NITI, iss. VIII, I* [Application in technology engineering: SITI, vol. VIII, I]. Moscow, 1964. pp. 39–48.
2. Mechetner B.Kh. *Kontsentratory-instrumenty dlya ul'trazvukovoi obrabotki, ikh krepleniya* [Hub-tools for ultrasonic processing, ways of their attachment]. Moscow, NIIMASH Publ., 1965. 54 p.
3. Kazantsev V.F. Oscillation of rod pressed to elastic surface. In: Proc. Int. Congr. Acoust., Liege, 7–14 sept., 1965. L. 48–5.
4. Richardson J.M. Harmonic generation at unbounded interface. I. Planar interface between semi-infinite elastic media. In: Int. J. Eng. Sci. 1979, vol. 17, no. 1, pp. 73–85.
5. Buck O., Morris W.L., Richardson J.M. Acoustic harmonic generation at unbounded interface and fatigue cracks. In: Appl. Phys. Lett. 1978. vol. 33, no. 5, pp. 371–373.
6. Rudenko O.V., Vu C.A.. Nonlinear acoustic properties of a rough surface contact surfaces and acoustodiagnostics of a roughness height distribution. In: *Akusticheskii zhurnal*. [Acoustical Physics]. 1994, vol. 40, no. 4, pp. 668–672.
7. Solodov I.Yu., Vu C.A. Popping nonlinearity and chaos in vibrations of a contact interface between solids. In: *Akusticheskii zhurnal* [Acoustical Physics]. 1993, vol. 39, no. 5, pp. 904–910.
8. Ko Sel Len, Severin F.M., Solodov I.Yu. Experimental observation of contact nonlinearity for bulk and surface acoustic waves. In: *Akusticheskii zhurnal* [Acoustical Physics]. 1991. vol. 37, no. 6, pp. 1165–1169.
9. Krageľskii I.A., Dobychin M.N., Kombalov V.A. *Osnovy raschetov na trenie i iznos* [Foundations of friction and wear calculations]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1977. 525 p.
10. Braun E.D. et al. *Osnovy tribologii (trenie, iznos, smazka): uchebnik dlya tekhnicheskikh vuzov* [Fundamentals of tribology (friction, wear, lubrication): textbook for technical schools]. Moscow, Nauka i tekhnika Publ., 1995. 778 p.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Неверов Александр Николаевич – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры технологии конструкционных материалов Московского автомобильно-дорожного государственного технического университета (МАДИ);
e-mail: neverov_an@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Alexandr N. Neverov – PhD in Technical Sciences, associate professor of the Department of Technology of Construction Materials at the Moscow Automobile and Road Construction State Technical University (MADI);
e-mail: neverov_an@mail.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Неверов А.Н. Генерация высших гармоник в составных стержневых колебательных системах // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика и математика. 2017. № 2. С. 72–81.
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-2-72-81.

CORRECT REFERENCE TO THE ARTICLE

A. Neverov. Generation of higher harmonics in composite rod vibration systems. In: *Bulletin of Moscow Region State University*. Series: Physics & Mathematics. 2017, no. 2, pp. 72–81.
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-2-72-81.

РАЗДЕЛ III. ТЕОРИЯ И МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ И ВОСПИТАНИЯ

УДК 517.925

DOI: 10.18384/2310-7251-2017-2-82-87

КОМПЬЮТЕРНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ КАК СРЕДСТВО ПОВЫШЕНИЯ ЭФФЕКТИВНОСТИ ИЗУЧЕНИЯ МЕЖПРЕДМЕТНЫХ ПОНЯТИЙ

Паркесов А.В.

*Московский государственный областной университет (МГОУ)
105005, Москва, ул. Радио, 10а, Российская Федерация*

Аннотация. Проведён сопоставительный анализ понятия скорости, применяемого в различных разделах естествознания. Продемонстрирована целесообразность использования компьютерных технологий, которые обеспечивают быстроту и лёгкость получения информации, что способствует совершенствованию познавательной деятельности обучающегося.

Ключевые слова: межпредметные связи, скорость, фрактал, синергетика, компьютерные технологии.

COMPUTER TECHNOLOGY AS A MEANS OF IMPROVING EFFICIENCY OF STUDY OF CROSS-CURRICULAR CONCEPTS

A. Parkesov

*Moscow Region State University
ul. Radio 10A, 105005 Moscow, Russian Federation*

Abstract. We have performed a comparative analysis of the concept 'velocity', used in various areas of Natural Sciences. The feasibility of using computer technologies, which provide quick and easy information that helps to improve the cognitive activity of a student, is demonstrated.

Key words: interdisciplinary connections, velocity, fractal, synergetics, computer technology.

Понятия, которыми оперируют в науке, в большинстве случаев или изначально являются универсальными межпредметными, или становятся таковыми в процессе её развития.

Наглядными примерами в современном знании могут служить такие понятия, как фракталы, синергетика и др.

Понятие фрактальности [10], например, становится общим для таких областей знаний, как математика, физика, психология. При этом поисковая компьютерная система предоставляет сразу, как минимум, 10 млн ссылок на информацию о ресурсах, где используется это понятие.

Понятие синергетики [6; 8] помимо естественнонаучных областей знания получило распространение в философии (6 млн результатов), в праве (19 млн результатов), в психологии (19 млн результатов) и т.д. Здесь в скобках приведена информация о работе компьютерной поисковой системы. Понятно, что результаты работы поисковой системы – в силу постоянного развития науки – непрерывно меняются.

Здесь следует обратить внимание на то, что использование компьютерных технологий существенно облегчает процесс «добывания» информации, больше времени предоставляет для её анализа. Это способствует повышению мотивации к глубокому, более качественному и всеобъемлющему анализу объекта исследования.

Одним из наиболее важных понятий, с которыми сталкиваются обучающиеся, является скорость.

С понятием «скорость» обучающиеся знакомятся уже в 4 классе, решая задачи по математике с применением формулы, устанавливающей связь между скоростью, временем и пройденным расстоянием при равномерном движении [2]:

$$V = \frac{S}{t}.$$

В данной формуле S – это путь, пройденный при движении с постоянной скоростью V за время движения t .

Уроки физики в 7 классе глубже в мышлении обучающихся раскрывают понятие скорости. Впервые скорость называют векторной физической величиной. Вводится понятие равнопеременного движения [9]:

$$V = V_0 + at,$$

где V_0 – скорость движения в начальный момент времени; a – ускорение. Правда, на начальном этапе движение рассматривается из состояния покоя, когда $V_0 = 0$.

Следует заметить, что в рассматриваемых примерах путь измеряется в единицах длины: километр, метр, сантиметр и т.д. Время измеряется в часах, минутах, секундах. Скорость, как путь, пройденный за единицу времени, измеряется в «километрах в час» (км/час), в «метрах в секунду» (м/с) и т.д. Тем самым, формируется понятие размерности.

При изучении информатики в 8 классе понятия скорости и её размерности расширяются. Вводится понятие «скорость передачи данных» – как объём данных, передаваемых за единицу времени. «Скорость» в этом случае измеряется в битах в секунду [3].

В 9 классе обучающиеся знакомятся с новым понятием «скорости» как скорости изменения количества вещества в ходе той или иной химической реакции. При этом количество вещества соотносится с единичным объёмом реакционного пространства – концентрацией (C). Таким образом, изменение концентрации участвующего в химической реакции вещества ($C_2 - C_1$) в единицу времени определяет скорость химической реакции [4]:

$$V_{\partial} = \frac{C_2 - C_1}{t}.$$

Размерность в этом случае: моль/(лЧс).

Учебный материал уроков химии как основной, так и средней школы связан с программой уроков биологии, где в 7 классе обучающиеся сталкиваются с новым пониманием скорости: «скорость диффузии». «Диффузия» – процесс взаимного проникновения молекул или атомов одного вещества между молекулами или атомами другого, приводящий к самопроизвольному выравниванию их концентраций по всему занимаемому объёму [5].

Уроки истории также апеллируют к понятию скорости. В частности, показывается, что «скорость развития цивилизации» неравномерна от процесса эволюции человека разумного до развития лёгкой и тяжёлой промышленности, и на что требовались сотни лет, сегодня достигается менее, чем за десятилетие.

На уроках литературы книга, вызывая интерес обучающихся к более детальной информации, является основным источником знания. Одной из важнейших составляющих технического и социального усовершенствования и развития общества является функция передачи знаний будущим поколениям. В настоящее время компьютеры аккумулируют информацию человечества; благодаря сети интернет сегодняшний специалист обеспечен простым, быстрым и удобным доступом к знаниям библиотек всего мира.

На занятиях по физической культуре обучающиеся сталкиваются с физиологической составляющей человека и неотделимой связью характеристик скорости с пространством, то есть с расстоянием, которое человеку необходимо преодолеть в процессе жизнедеятельности. Компьютерные технологии предоставляют обучающемуся возможность ознакомиться с существующим диапазоном этого понятия, например, в животном мире, и при этом сравнить основные показатели со способностями человека. Быстрота и лёгкость получения информации несомненно способствует совершенствованию познавательной деятельности обучающегося. Пример такого сопоставления приведён в табл. 1, оперативное получение информации для которой оказалось возможным лишь с применением компьютерных технологий.

Таблица 1.

Пример: результат оперативного поиска физических характеристик живых существ

№ п/п	Существо	Средняя скорость, м/с	Средняя масса, г	Средний размер тела, мм
1	Муха комнатная	1,8	0,01	8
2	Мышь домовая	2,2	25	80
3	Немецкая овчарка	10,6	35000	700
4	Сизый голубь	27,8	265 – 380	290 – 360
5	Сокол Сапсан	89,5	700	400
6	Человек разумный	6,5	80 000	2000 (корпус)

На уроках географии через устройство биосферы затрагиваются абсолютно иные скорости: перемещение земной коры в литосфере, движение воздушных масс в тропосфере, скорость распространения звука, зависящая от скорости изменения температуры и т.д. При этом обучающиеся различают (на качественном уровне) скорости материальных объектов и скорости волновых процессов (например, землетрясения). Изменение температуры воздуха и скорости ветра с высотой делают атмосферу неоднородной средой с переменной скоростью звука, что приводит к искривлению (рефракции) звуковых лучей. Поскольку скорость распространения звука зависит от температуры, в разных слоях атмосферы, температура слоёв которых различна, звук будет иметь разную скорость [1].

В процессе образования расширяется и сфера понятий, в которых важной характеристикой является скорость. Расширяется шкала значений скоростей различных объектов, с которыми школьнику необходимо ознакомиться в процессе своего образования и развития. Обучающийся знакомится не только с понятиями скорости в живой и неживой природе, но и со скоростями очень маленьких – микроскопических объектов и со скоростями очень больших (макроскопических) и даже космических объектов (табл. 2).

Таблица 2.

Пример: результат оперативного поиска справочных данных о скоростях

№ п/п	Объект	Средняя скорость, м/с
1	Самолёт ТУ-204	230
2	Звук в воздухе	332
3	Луна вокруг Земли	1000
4	Искусственный спутник Земли	8000
5	Земля вокруг Солнца	30000
6	Свет и радиоволны	~ 300 000 000

Также термин «скорость» используют в науке в широком смысле, понимая под ним быстроту изменения какой-либо величины (не обязательно радиус-вектора) в зависимости от другой величины – времени [7]. Измерение и вычисление подобных характеристик демонстрирует тесные междисциплинарные связи.

Таким образом, можно утверждать, что необходимость использования компьютерных технологий в качестве средства повышения эффективности изучения межпредметных понятий обусловлена тем, что они предоставляют широкие возможности оперативного получения информации о скоростях различных процессов и объектов для последующего анализа и представления, в том числе и визуального.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алексеев А.И., Липкина Е.К., Николина В.В. «География. 5-6 классы»: учебник для общеобразовательных учреждений. М.: Просвещение. 2012. 192 с.
2. Александрова Э.И. «Математика. 4 класс»: учебник в 2 ч. Ч. 2. М.: Дрофа. 2008. 252 с.
3. Быкадоров Ю.А. «Информатика и ИКТ»: учебник для общеобразовательных учреждений. М.: Дрофа, 2012. 336 с.
4. Габриелян О.С. «Химия. 9 класс»: учебник. 2-е изд., стереотип. М.: Дрофа. 2014. 275 с.
5. Захаров В.Б., Сонин Н.И. «Биология. Многообразие живых организмов. 7 класс»: учебник для общеобразовательных учреждений. 4-е изд., стереотип. М.: Дрофа, 2011. 256 с.
6. Лоскутов А.Ю., Михайлов А.С. Введение в синергетику: учебное руководство. М.: Наука, 1990. 272 с.
7. Скакун В.А. «Организация и методика профессионального обучения» Учебное пособие. М.: ФОРУМ–ИНФРА-М, 2007. 336 с.
8. Хакен Г. Синергетика. М.: Мир, 1980. 406 с.
9. Хижнякова Л.С., Синявина А.А. «Физика 7 класс»: учебник для общеобразоват. учреждений М.: «Вентана-Граф», 2013. 208 с.
10. Mandelbrot B. *Fractals: Form, Chance, and Dimension*. San Francisco: W.H. Freeman and Company. 1977. 352 p.

REFERENCES

1. Alekseev A.I., Lipkina E.K., Nikolina V.V. *‘Geografiya. 5-6 klassy’: uchebnik dlya obshcheobrazovatel’nykh uchrezhdenii* [‘Geography. Grades 5-6’: textbook for educational institutions]. Moscow, Prosveshchenie Publ., 2012. 192 p.
2. Aleksandrova E.I. *‘Matematika. 4 klass’: uchebnik v 2 ch. Ch. 2* [‘Mathematics. Grade 4’: the textbook in 2 parts. Part 2]. Moscow, Drofa Publ., 2008. 252 p.
3. Bykadorov Yu.A. *‘Informatika i IKT’: uchebnik dlya obshcheobrazovatel’nykh uchrezhdenii* [‘Informatics and ICT’: a textbook for educational institutions]. Moscow, Drofa Publ., 2012. 336 p.
4. Gabrielyan O.S. *‘Khimiya. 9 klass’: uchebnik* [‘Chemistry. Grade 9’: textbook]. 2nd ed., stereotype. Moscow, Drofa Publ., 2014. 275 p.
5. Zakharov V.B., Sonin N.I. *‘Biologiya. Mnogoobrazie zhivykh organizmov. 7 klass’: uchebnik dlya obshcheobrazovatel’nykh uchrezhdenii* [‘Biology. The diversity of living organisms. Grade 7: textbook for educational institutions]. 4th ed., stereotype. Moscow, Drofa Publ., 2011. 256 p.
6. Loskutov A.Yu., Mikhailov A.S. *Vvedenie v sinergetiku: uchebnoe rukovodstvo* [Introduction to synergetics: a tutorial]. Moscow, Nauka Publ., 1990. 272 p.

7. Skakun V.A. *‘Organizatsiya i metodika professional’nogo obucheniya’: uchebnoe posobie* [‘Organization and methods of professional education’: textbook]. Moscow, FORUM-INFRA-M Publ., 2007. 336 p.
8. Haken H. *Synergetics. An Introduction: Nonequilibrium Phase Transitions and Self-Organization in Physics, Chemistry, and Biology*, 3rd rev. enl. ed. New York: Springer-Verlag, 1983.
9. Khizhnyakova L.S., Sinyavina A.A. *‘Fizika 7 klass’: uchebnik dlya obshcheobrazovatel’nykh uchrezhdenii* [‘Physics grade 7’: textbook for educational institutions]. Moscow, «Ventana-Graf» Publ., 2013. 208 p.
10. Mandelbrot B. *Fractals: Form, Chance, and Dimension*. San Francisco: W.H. Freeman and Company. 1977. 352 p.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Паркесов Алексей Васильевич – аспирант, ассистент кафедры социальной безопасности Московского государственного областного университета;
e-mail: mothrubbish@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Aleksei V. Parkesov – postgraduate student, assistant lecturer of the Social Security Department at the Moscow Region State University;
e-mail: mothrubbish@mail.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Паркесов А.В. Компьютерные технологии как средство повышения эффективности изучения междисциплинарных понятий // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика и математика. 2017. № 2. С. 82–87.
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-2-82-87.

CORRECT REFERENCE TO THE ARTICLE

A. Parkesov. Computer technology as a means of improving efficiency of study of cross-curricular concepts. In: *Bulletin of Moscow Region State University*. Series: Physics & Mathematics. 2017, no. 2, pp. 82–87.
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-2-82-87.

УДК 517

DOI: 10.18384/2310-7251-2017-2-88-99

СПЕЦИФИКА ВЫПОЛНЕНИЯ КУРСОВОЙ РАБОТЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ»

Власова Е.А., Попов В.С., Пугачев О.В.

*Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана
105005, Москва, ул. 2-я Бауманская, 5, Российская Федерация*

Аннотация. В работе отмечена особая роль курсовой работы в формировании творческих и исследовательских компетенций будущего специалиста, способности к самоорганизации и саморазвитию. Обозначена особенность курсовой работы по функциональному анализу, заключающаяся в применении общих абстрактных принципов в конкретных и прикладных случаях. Приведены примеры тем и описание задач курсовых работ по функциональному анализу. Указана роль интегрированного междисциплинарного курсового проекта в учебном процессе. В статье представлены темы и перечень заданий для междисциплинарного курсового проекта по методам вычислений, функциональному анализу и интегральным уравнениям.

Ключевые слова: функциональный анализ, интегральные уравнения, методы вычислений, курсовая работа, междисциплинарный курсовой проект.

SPECIFICS OF TERM PAPERS IN THE SUBJECT 'FUNCTIONAL ANALYSIS'

E. Vlasova, V. Popov, O. Pugachev

*Bauman Moscow State Technical University,
ul. 2-ya Baumanskaya 5, 105005 Moscow, Russian Federation*

Abstract. We discuss the special role of students' term papers in the formation of creative and research skills of future specialists and development of their ability of self-organization and self-development. We determine the features of the term paper in Functional Analysis. The most important feature consists in applying general abstract principles to specific cases and applications. The paper provides examples of topics of tasks of term papers on Functional Analysis. The role of the integrated interdisciplinary course in the educational process is specified. The topics and the list of tasks for interdisciplinary term projects on methods of calculation, functional analysis and integral equations are presented.

Key words: functional analysis, integral equations, methods of computation, term paper, interdisciplinary term project.

Введение

Основная задача высшего образования заключается в формировании творческой личности специалиста, способного к саморазвитию, самообразованию, инновационной деятельности. Для решения этой задачи необходима правиль-

ная организация самостоятельной работы студентов, которая должна стать основой образовательного процесса [1]. Учебно-воспитательный процесс в вузе должен строиться так, чтобы развивать умение учиться, формировать у студента способность к саморазвитию, творческому применению полученных знаний, способам адаптации к профессиональной деятельности в современном мире. Неотъемлемой частью самостоятельной работы студента в ходе обучения в высшем учебном заведении является курсовая работа или проект. Этот вид учебной деятельности способствует формированию познавательных, творческих, исследовательских и общепрофессиональных компетенций. Студент получает навыки находить нужную информацию из различных источников, творчески её обрабатывать и применять при решении различных практических задач.

Курсовая работа (проект) является завершающим шагом в освоении какой-либо дисциплины или группы дисциплин. При выполнении работы у студента есть возможность применить полученные во время занятий знания, а также получить новые с помощью самостоятельного изучения темы. При выполнении курсовой работы студент должен научиться искать необходимые для исследования материалы, проводить анализ, систематизацию, классификацию, интерпретацию полученной информации, выстраивать логику рассуждений, формулировать выводы, адекватные полученным результатам. Студент учится оформлять отчёты о проделанной работе, получает опыт выступления перед комиссией при защите.

Особенности курсовой работы по функциональному анализу и интегральным уравнениям

Функциональный анализ стал необходимым элементом серьёзного математического образования, и преподавание его основ включено в учебные планы математических, физических и многих инженерных специальностей классических и технических университетов [2]. Функциональный анализ имеет множество приложений в различных областях математики, его методы проникают в смежные технические дисциплины. Для успешного освоения дисциплины «Функциональный анализ» требуется интеграция знаний, полученных при изучении различных дисциплин математического цикла: математического анализа, аналитической геометрии, линейной алгебры, дифференциальных уравнений, кратных интегралов и рядов. Курсовая работа по функциональному анализу должна продемонстрировать работу общих абстрактных принципов в конкретных и прикладных случаях.

Тематика курсовых работ разрабатывается ведущими преподавателями в соответствии с основным содержанием учебной дисциплины. Задания для курсовых работ должны иметь прикладной характер. Выполняя курсовую работу, студент должен познакомиться с приложениями функционального анализа в смежных областях математики и математической физике. Предполагается, что в каждом случае студент должен основательно изучить определённый теоретический материал, подробно и грамотно изложить его, а затем самостоятельно разобрать несколько практических примеров и решить ряд прикладных задач

по данной теме. Преподаватель, консультирующий студента, составляет подробный план работы, включающий постановку задачи, этапы и сроки её решения, необходимый теоретический материал, различные типы рассматриваемых в работе задач и примеров. При этом в плане приводятся ссылки (с указанием страниц или параграфов) на основные литературные источники, дополнительную литературу, рассчитанную на более глубокое знакомство с материалом, различные Интернет-ресурсы. Рекомендуемый подробный план поможет студенту в организации самостоятельной работы над выбранной темой курсовой работы.

Для своевременного выполнения курсовой работы и стимулирования её качественного выполнения используется балльно-рейтинговая система оценки результатов обучения [3; 4]. Пример реализации этой системы при выполнении курсовой работы представлен в таблице 1.

Таблица 1.

Шкала оценки выполнения курсовой работы в баллах

№	Этап выполнения курсовой работы	Баллы по итогам модуля	
		Минимум	Максимум
1	Выбор и согласование с руководителем темы курсовой работы, сбор и анализ первичных материалов	15	25
2	Точная постановка математической задачи и выбор пути ее решения	15	25
3	Решение задачи, его теоретическое обоснование. Анализ полученных результатов	15	25
4	Выводы и общее оформление курсовой работы, презентация. Защита курсовой работы	15	25
	Итого	60	100

Приведём примеры тем и заданий курсовых работ по дисциплине «Функциональный анализ».

Пример 1. Тема «Упругая мембрана».

Пусть мембрана с закреплённым краем занимает ограниченную область $\Omega \subset R^2$ (задана конкретная область – прямоугольник, круг, сектор и т.п.), функция $u(x, y)$, $(x, y) \in \Omega$ – отклонение мембраны от плоского положения. Потенциальная энергия мембраны пропорциональна следующему интегралу:

$$E(u) = \iint_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) dx dy.$$

Обозначим через $C_0^1(\Omega)$ пространство непрерывно дифференцируемых функций в области Ω , обращающихся в 0 на её границе $\partial\Omega$.

1) Доказать, что функция

$$(u, v) = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy,$$

определённая на $C_0^1(\Omega) \times C_0^1(\Omega)$, удовлетворяет всем аксиомам скалярного произведения.

2) Доказать, что евклидово пространство $C_0^1(\Omega)$ с данным скалярным произведением не является полным.

3) Доказать неравенство Фридрихса:

$$\iint_{\Omega} u^2(x, y) dx dy \leq m(\Omega) E(u).$$

4) Пусть $W_0^{1,2}(\Omega)$ – пополнение евклидова пространства $C_0^1(\Omega)$. Доказать, что элементами пространства $W_0^{1,2}(\Omega)$ являются функции, принадлежащие $L_2(\Omega)$, и их частные производные тоже принадлежат $L_2(\Omega)$.

5) Пусть функция $u(x, y)$ является решением задачи

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u, (x, y) \in \Omega, \\ u = 0, (x, y) \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Доказать, что для любой функции $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ верно равенство

$$(u, v) = \lambda \iint_{\Omega} uv dx dy. \quad (1)$$

б) Доказать, что функция $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ является решением уравнения (1) для любой функции $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ тогда и только тогда, когда u является решением однородного уравнения $u = \lambda Ku$, где K – некоторый линейный вполне непрерывный самосопряженный строго положительный оператор, действующий в пространстве в $W_0^{1,2}(\Omega)$.

Пример 2. Тема «Колебания струны».

Обозначим через Y пространство дважды непрерывно дифференцируемых функций f на отрезке $[0; l]$, таких, что $f(0) = f(l) = 0$. Колебания струны длины l с закреплёнными концами описываются уравнениями

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, 0 < x < l, \\ y(0, t) = y(l, t) = 0, \end{cases} \quad t \geq 0.$$

Пусть в начальный момент $t = 0$ струна имела положение $y(x, 0) = y_0(x)$ и нулевые скорости.

- 1) Доказать, что при каждом $t > 0$ для любого $y_0(x) \in Y$ выполнена оценка

$$\int_0^l y^2(x, t) dx \leq C(t) \int_0^l y_0^2(x) dx.$$

- 2) Доказать, что множество Y плотно в $L_0[0; l]$.

3) Продолжить линейный оператор $T_t : Y \rightarrow Y$, где $(T_t y_0)(x) = y(x, t)$ для любой функции $y_0(x) \in Y$, до непрерывного линейного оператора $\tilde{T}_t : L_2[0; l] \rightarrow L_2[0; l]$.

Описать свойства оператора \tilde{T}_t .

- 4) Пользуясь оператором \tilde{T}_t , решить уравнение колебания струны длины 1 с начальным положением $y_0(x) = \min\{2x; 1 - x\}$.

Пример 3. Тема «Температура стержня».

Обозначим через Y пространство дважды непрерывно дифференцируемых функций f на отрезке $[0; l]$ таких, что $f(0) = f'(l) = 0$. Изменения температуры в стержне длины l с фиксированной температурой в левом конце и отсутствием теплообмена в правом конце описываются уравнениями

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} = a \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, 0 < x < l, \\ y(0, t) = y_x'(l, t) = 0, \end{cases} \quad t \geq 0.$$

Пусть в начальный момент $t = 0$ стержень имел распределение температур $y(x, 0) = y_0(x)$.

- 1) Доказать, что при каждом $t > 0$ для любого $y_0(x) \in Y$ выполнена оценка

$$\int_0^l y^2(x, t) dx \leq C(t) \int_0^l y_0^2(x) dx.$$

- 2) Доказать, что множество Y плотно в $L_2[0; l]$.

3) Продолжить линейный оператор $T_t : Y \rightarrow Y$, где $(T_t y_0)(x) = y(x, t)$ для любой функции $y_0(x) \in Y$, до непрерывного линейного оператора $\tilde{T}_t : L_2[0; l] \rightarrow L_2[0; l]$.

Описать свойства оператора \tilde{T}_t .

- 4) Пользуясь оператором \tilde{T}_t , решить уравнение теплопроводности в стержне длины 2 с начальным распределением температур $y_0(x) = |x - 1|$.

Междисциплинарные курсовые проекты по методам вычислений, функциональному анализу и интегральным уравнениям

Итогом изучения дисциплин «Функциональный анализ и интегральные уравнения», «Методы вычислений» и «Информатика» может служить междисциплинарный курсовой проект. Он поможет раскрыть практическую значимость изучения такой абстрактной науки, как функциональный анализ, тем самым закрепить полученные в ходе изучения дисциплины теоретические знания, послужить стимулом к получению новых знаний в этой области и их применению при решении прикладных задач. Многие приближённые и численные методы решения интегральных уравнений не излагаются в ходе изучения дисциплин «Функциональный анализ и интегральные уравнения» и «Методы вычислений». Однако, владение этими методами необходимо для дальнейшей профессиональной деятельности будущего инженера-математика. Освоить эти методы студент может, выполняя курсовой проект. В ходе работы над проектом студент изучает аналитические и численные методы решения какого-либо типа интегральных уравнений, используя при этом знания функционального анализа. Такой проект содержит теоретические исследования, описание алгоритмов выполнения практических заданий, расчеты, графики, таблицы значений и листинги программ, выводы и рекомендации, выработанные в результате проведённого анализа результатов исследования. Смысл такого вида самостоятельной работы заключается в непосредственном закреплении и комплексном применении приобретённых в ходе изучения различных дисциплин учебного плана знаний, умений и навыков, как в ходе дальнейшего углублённого освоения теории, так и при выполнении конкретных практических заданий. Курсовой проект по методам вычислений, функциональному анализу и интегральным уравнениям является одновременно научно-исследовательской и расчётно-практической работой.

Выполнение междисциплинарного курсового проекта по методам вычислений, функциональному анализу и интегральным уравнениям способствует формированию у студентов готовности к самостоятельной работе, способности самостоятельно приобретать, осмысливать, структурировать и использовать в профессиональной деятельности новые знания, умения и навыки, расширять и углублять своё научное мировоззрение. Работа над проектом развивает владение межпредметными связями, способность самостоятельно изучать новые разделы фундаментальных наук, применять на практике полученные знания. Студент получает навыки подготовки и оформления технической документации и ведения отчётности по утверждённым формам, приобретает умение составлять отчёты, рефераты, библиографии и списки публикаций по теме.

Приведём примерный план выполнения курсового проекта по методам вычислений, функциональному анализу и интегральным уравнениям:

- Исследовать, изучить учебную и научную литературу по заданной теме, используя в том числе и Интернет-ресурсы. Коротко изложить в работе основные сведения по теме: определения понятий, основные утверждения, цели и задачи исследования.

- Провести необходимые теоретические исследования по вопросам, вынесенным на самостоятельное изучение в рамках программы дисциплин.
- Изложить алгоритмы аналитического и численного решения практических задач, поставленных в курсовом проекте.
- Решить предложенные задачи аналитически.
- Решить предложенные задачи, используя различные численные методы, составив программы для ЭВМ, реализующие соответствующие алгоритмы.
- Сравнить полученные разными методами решения с аналитическими решениями, сделать соответствующие выводы и рекомендации по использованию тех или иных численных методов при решении задач данного типа.
- Подготовить отчёт и презентацию.

В качестве примеров рассмотрим темы курсовых проектов и опишем перечень заданий, которые можно предложить студенту при выполнении междисциплинарного курсового проекта по методам вычислений, функциональному анализу и интегральным уравнениям.

Пример 4. Тема «Аналитические и численные методы решения интегральных уравнений Вольтерры второго рода».

- 1) Изложить вводные сведения об интегральных уравнениях Вольтерры второго рода и их приложениях.
- 2) Для уравнения

$$y(x) = \lambda Ay(x) + f(x), \quad (2)$$

где $Ay(x) = \int_a^x K(x,s)y(s)ds$, функция $K(x,s)$ непрерывна в любой точке (x,s) , для которой $a \leq s \leq x \leq b$, функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, доказать, что при любом значении $\lambda \in R$ уравнение имеет единственное решение, непрерывное на отрезке $[a;b]$.

3) Доказать, что решение уравнения (2) может быть найдено как предел равномерно сходящейся последовательности приближений $\psi_n(x)$, определяемой рекуррентным соотношением $\psi_{n+1}(x) = \lambda A\psi_n(x) + f(x)$, где $\psi_0(x)$ – произвольная непрерывная функция на отрезке $[a;b]$.

- 4) Доказать, что (см. пункт 1)

$$A^n y(x) = \int_a^x K_n(x,s)y(s)ds,$$

где $K_n(x,s) = \int_a^x K(x,t)K_{n-1}(t,s)ds$ ($K_n(x,s)$ – повторные ядра).

- 5) Для повторных ядер доказать неравенство

$$|K_n(x,s)| \leq \frac{M^n (x-s)^{n-1}}{(n-1)!}, \quad a \leq s \leq x \leq b, \quad M = \sup_{a \leq s \leq x \leq b} |K(x,s)|.$$

б) Доказать, что решение уравнения (2) при любом значении $\lambda \in R$ представимо в виде:

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^x R(x, s, \lambda) f(s) ds.$$

Для функции $R(x, s, \lambda)$ (резольвентного ядра) найти её аналитическую зависимость от $K(x, s)$ и λ .

7) Вычислить резольвентное ядро для

а) $K(x, s) = e^{x^2 - s^2}$, $\lambda = 2$;

б) $K(x, s) = -2 + 3(x - s)$, $\lambda = 1$;

с) $K(x, s) = \operatorname{ch}(x - s)$, $\lambda = 1$.

8) Найти решение уравнения (1) с точностью 10^{-2} по норме в $C[0;1]$, используя методы простой итерации и квадратур, при

а) $K(x, s) = e^{x^2 - s^2}$, $\lambda = 2$, $f(x) = 2 + 2x$;

б) $K(x, s) = -2 + 3(x - s)$, $\lambda = 1$, $f(x) = 1$.

Найти решение аналитически и сравнить полученные результаты.

Пример 5. Тема «Решение интегральных уравнений Фредгольма второго рода проекционными методами».

1) Изложить вводные сведения об интегральных уравнениях Фредгольма и их приложениях.

2) Описать метод наименьших квадратов решения интегральных уравнений Фредгольма второго рода.

3) Найти точное решение уравнения

$$y(x) = \cos x + 4\pi x^2 + \int_{-\pi}^{\pi} x^2 s^2 y(s) ds.$$

Найти собственные значения и собственные функции интегрального оператора этого уравнения. Решить это уравнение с помощью метода наименьших квадратов, в качестве приближённого решения выбирая

а) $\tilde{y}(x) = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3 + C_5 x^4$;

б) $\tilde{y}(x) = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x$.

4) Описать проекционный метод Галеркина–Петрова приближённого решения интегральных уравнений Фредгольма второго рода.

5) Найти точное решение уравнения

$$y(x) = 1 - 3x + \int_{-1}^1 (x^2 s + x) y(s) ds$$

Решить это уравнение с помощью метода Галеркина–Петрова, выбирая базисные функции $\varphi_1(x) = x$, $\varphi_2(x) = x^2$, $\psi_1(x) = 1$, $\psi_2(x) = x$.

б) Описать метод Бубнова–Галеркина приближенного решения интегральных уравнений Фредгольма второго рода.

7) Решить уравнение $y(x) = 1 - x(e^x - e^{-x}) + \int_{-1}^1 x^2 e^{xs} y(s) ds$ с помощью метода

Бубнова–Галеркина, выбирая базисные функции $\varphi_1(x) = x$, $\varphi_2(x) = x^2$.

8) Найти точное решение уравнения

$$y(x) = -4(\ln 4 - 1)x + 4 \int_0^1 (x + s \ln(1+x)) y(s) ds.$$

Решить это уравнение с помощью метода Бубнова–Галеркина. Приближенное решение искать в виде $y_n(x) = f(x) + \sum_{k=1}^n C_k x^k$, причем $\|y_n - y_{n+1}\|_{L_2[0;1]} < \varepsilon$, $\varepsilon = 0,001$.

9) Решить уравнение $y(x) = 1 - x(e^x - e^{-x}) + \int_{-1}^1 x^2 e^{xs} y(s) ds$ с помощью метода

Бубнова–Галеркина. Приближённое решение искать в виде:

$$y_n(x) = f(x) + \sum_{k=1}^n C_k x^k, \text{ причём } \|y_n - y_{n+1}\|_{L_2[0;1]} < \varepsilon, \varepsilon = 0,001.$$

Пример 6. Тема «Решение интегральных уравнений Фредгольма второго рода для случая малого параметра»

Дано уравнение $y(x) = \lambda Ay(x) + f(x)$, где $Ay(x) = \int_a^b K(x, s) y(s) ds$,

где функция $K(x, s)$ непрерывна на квадрате $[a; b]^2$, функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, $M = \max_{x, s \in [a; b]} |K(x, s)|$.

1) Доказать, что если $|\lambda| < (M(b-a))^{-1}$, то существует единственное непрерывное на отрезке $[a; b]$ решение данного уравнения, причём это решение может быть найдено как предел равномерно сходящейся последовательности приближений $\psi_n(x)$, определяемой рекуррентным соотношением $\psi_{n+1}(x) = \lambda A\psi_n(x) + f(x)$, где $\psi_0(x)$ – произвольная непрерывная функция на отрезке $[a; b]$.

2) Доказать, что собственные значения μ оператора A удовлетворяют неравенству $|\mu| \leq M(b-a)$.

3) Доказать, что решения уравнения при $|\lambda| < (M(b-a))^{-1}$ выражаются в виде:

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x, s, \lambda) f(s) ds.$$

Для функции $R(x, s, \lambda)$ (резольвентного ядра) найти её аналитическую зависимость от $K(x, s)$ и λ .

4) Найти резольвенту для ядра $K(x, s) = xs + x^2s^2$, предварительно показав, что, если $K(x, s) = K_1(x, s) + K_2(x, s)$ и $K_1(x, s) \perp K_2(x, s)$, то есть

$$\int_a^b \hat{E}_1(x, t) \hat{E}_2(t, s) ds = 0, \int_a^b \hat{E}_2(x, t) \hat{E}_1(t, s) ds = 0$$

для любых $x, s \in [a; b]$, то $R(x, s, \lambda) = R_1(x, s, \lambda) + R_1(x, s, \lambda)$.

5) С помощью резольвенты найти точное решение уравнения

$$y(x) = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 (xs + x^2 s^2) y(s) ds + x^3. \quad (3)$$

6) Найти решение уравнения (3) с точностью 10^{-2} по норме $C[0; 1]$

а) методом последовательных приближений;

б) методом квадратур (используя формулу Симпсона).

Заключение

Курсовые работы по функциональному анализу и другим абстрактным математическим дисциплинам должны включаться в учебные планы подготовки математических, физических и многих инженерных специальностей классических и технических университетов. Именно выполняя курсовую работу, студент осознаёт практическую значимость таких дисциплин, востребованность в приложениях, закрепляя при этом теоретические основы, полученные в процессе учебы. Разрабатывая темы курсовых работ, необходимо теоретические исследования тесно увязывать с конкретными практическими и прикладными задачами.

Особое внимание необходимо уделять междисциплинарным курсовым проектам. Именно при выполнении такого вида самостоятельной работы формируется способность использовать фундаментальные и специальные знания, аналитические и численные методы, виртуальные модели для выполнения инновационных инженерных проектов с целью достижения новых результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Власова Е.А., Красновский Е.Е. Методические рекомендации к проведению аудиторской контролируемой самостоятельной работы студентов // Инженерный журнал: наука и инновации. 2013. вып. 4. URL: <http://engjournal.ru/catalog/pedagogika/hidden/677.html> (дата обращения: 12.06.2017)
2. Власова Е.А. Особенности методического обеспечения дисциплины «Функциональный анализ и интегральные уравнения» в техническом университете // Инженерный вестник (МГТУ им. Н.Э. Баумана). Электронный журнал. 2015. № 5. <http://engbul.bmstu.ru/doc/770547.html> (дата обращения: 12.06.2017)
3. Власова Е.А., Грибов А.Ф., Попов В.С., Латышев А.В. Принципы модульно-рейтинговой системы преподавания высшей математики // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2013. № 3. С. 93–99.
4. Власова Е.А., Грибов А.Ф., Попов В.С., Латышев А.В. Развитие мотивационных стимулов обучения в рамках модульно-рейтинговой системы организации учебного процесса // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2014. №1. С. 48–53.

REFERENCES

1. Vlasova E.A., Krasnovskii E.E. Methodical recommendations to carrying out a controlled classroom independent work of students. In: *Inzhenernyi zhurnal: nauka i innovatsii*. [Engineering journal: science and innovation]. 2013, iss. 4. Available at: <http://engjournal.ru/catalog/pedagogika/hidden/677.html> (accessed 12.06.2017)
2. Vlasova E.A. The features of methodical maintenance of the discipline 'Functional analysis and integral equations' at a technical University. In: *Inzhenernyi vestnik (MGTU im. N.E. Baumana). Elektronnyi zhurnal*. [Engineering journal (Bauman MSTU). E-journal]. 2015, no. 5. Available at: <http://engbul.bmstu.ru/doc/770547.html> (accessed 12.06.2017)
3. Principles of module-rating system of teaching mathematics, Vlasova E.A., Gribov A.F., Popov V.S., Latyshev A.V. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika* [Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics]. 2013, no. 3, pp. 93–99.
4. The development of motivational incentives for learning within module-rating system of organization of educational process, Vlasova E.A., Gribov A.F., Popov V.S., Latyshev A.V. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika* [Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics]. 2014, no. 1, pp. 48–53.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Власова Елена Александровна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Прикладная математика» Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана;
e-mail: elena.a.vlasova@yandex.ru

Попов Владимир Семенович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Прикладная математика» Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана;
e-mail: vspopov@bk.ru

Пугачев Олег Всеволодович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Прикладная математика» Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана;
e-mail: opugachev@yandex.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Elena A. Vlasova – PhD in Physico-mathematical Sciences, associate professor of the Applied Mathematics Department at the Bauman Moscow State Technical University;
e-mail: elena.a.vlasova@yandex.ru

Vladimir S. Popov – PhD in Physico-mathematical Sciences, associate professor of the Applied Mathematics Department at the Bauman Moscow State Technical University;
e-mail: vspopov@bk.ru

Oleg Vs. Pugachev – Doctor in Physico-mathematical Sciences, professor of the Applied Mathematics Department at the Bauman Moscow State Technical University;
e-mail: opugachev@yandex.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Власова Е.А., Попов В.С., Пугачев О.В. Специфика выполнения курсовой работы по дисциплине «Функциональный анализ» // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2017. № 2. С. 88–99.
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-2-88-99.

CORRECT REFERENCE TO THE ARTICLE

E. Vlasova, V. Popov, O. Pugachev. Specifics of term papers in the subject 'Functional Analysis'. In: *Bulletin of Moscow Region State University*. Series: Physics and Mathematics. 2017, no. 2, pp. 88–99.
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-2-88-99.



ВЕСТНИК МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ОБЛАСТНОГО УНИВЕРСИТЕТА

Научный журнал «Вестник Московского государственного областного университета» основан в 1998 г. Выпускается десять серий журнала: «История и политические науки», «Экономика», «Юриспруденция», «Философские науки», «Естественные науки», «Русская филология», «Физика-математика», «Лингвистика», «Психологические науки», «Педагогика». Все серии включены в составленный Высшей аттестационной комиссией Перечень ведущих рецензируемых научных журналов, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертации на соискание ученой степени доктора и кандидата наук по наукам, соответствующим названию серии. Журнал включен в базу данных Российского индекса научного цитирования (РИНЦ).

Печатная версия журнала зарегистрирована в Федеральной службе по надзору за соблюдением законодательства в сфере массовых коммуникаций и охране культурного наследия. Полнотекстовая версия журнала доступна в Интернете на платформе Научной электронной библиотеки (www.elibrary.ru), а также на сайте журнала www.vestnik-mgou.ru.

ВЕСТНИК МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ОБЛАСТНОГО УНИВЕРСИТЕТА

СЕРИЯ: ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА
2017. N 2

Над номером работали:

Литературный редактор Д.Д. Дрошнев
Переводчик И.А. Улиткин
Корректор Д.Д. Дрошнев
Компьютерная верстка Н.Н. Жильцов

Отдел по изданию научного журнала
«Вестник Московского государственного областного университета»
Информационно-издательского управления МГОУ
105005, г. Москва, ул. Радио, д. 10А, офис 98
тел. (495) 723-56-31; (495) 780-09-42 (доб. 6101)
e-mail: vest_mgou@mail.ru
сайт: www.vestnik-mgou.ru

Формат 70x108/16. Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура «Minion Pro».
Тираж 500 экз. Уч.-изд. л. 6, усл. п. л. 6,5.
Подписано в печать: 30.06.2017. Дата выхода в свет: 31.07.2017. Заказ № 2017/06-31.
Отпечатано в ИИУ МГОУ
105005, г. Москва, ул. Радио, 10А