

ISSN 2072-8387 (print)  
ISSN 2310-7251 (online)



# Вестник

МОСКОВСКОГО  
ГОСУДАРСТВЕННОГО  
ОБЛАСТНОГО  
УНИВЕРСИТЕТА

*Серия*

**Ф**ИЗИКА-  
МАТЕМАТИКА

ТРИ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ  
ФИЗИКИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО  
ТИПА В РАЗЛИЧНЫХ ПОСТАНОВКАХ

ИЕРАРХИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ  
МАСШТАБОВ И ВРЕМЕН РЕЛАКСАЦИИ  
В ЖИДКОКРИСТАЛЛИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

РАСЧЁТ ВЫСОКОЧАСТОТНОЙ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТИ  
И ПОСТОЯННОЙ ХОЛЛА ДЛЯ ТОНКОЙ МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ  
ПЛЕНКИ



2016/ № 4

ВЕСТНИК  
МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО  
ОБЛАСТНОГО УНИВЕРСИТЕТА

ISSN 2072-8387 (print)

2016 / № 4

ISSN 2310-7251 (online)

серия

# ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА

**Научный журнал основан в 1998 г.**

«Вестник МГОУ» (все его серии) включен в «Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук» Высшей аттестационной комиссии (См.: Список журналов на сайте ВАК) по наукам, соответствующим названию серии.

**The academic journal is established in 1998**

«Bulletin of the Moscow State Regional University» (all its series) is included by the The List of peer – reviewed academic journals recommended for publishing the essential outcomes of Candidate and Doctoral theses should be published (See: the List of journals at the site of the Supreme Certifying Commission) in corresponding series.

ISSN 2072-8387 (print)

2016 / № 4

ISSN 2310-7251 (online)

series

# PHYSICS AND MATHEMATICS

BULLETIN OF THE MOSCOW STATE  
REGIONAL UNIVERSITY

## Учредитель журнала «Вестник Московского государственного областного университета»:

Государственное образовательное учреждение высшего образования Московской области

Московский государственный областной университет

Выходит 4 раза в год

### Редакционно-издательский совет «Вестника Московского государственного областного университета»

**Хромиков П.Н.** – к.филол.н., проф., ректор МГОУ (председатель совета)

**Ефремова Е.С.** – к. филол. н., и.о. проректора по научной работе МГОУ (зам. председателя);

**Клычников В.М.** – к.ю.н., к.и.н., проф., проректор по учебной работе и международному сотрудничеству МГОУ (зам. председателя)

**Антонова Л.Н.** – д.пед.н., проф., академик РАО, Комитет Совета Федерации по науке, образованию и культуре

**Асмолов А.Г.** – д.псх.н., проф., академик РАО, директор Федерального института развития образования

**Климов С.Н.** – д.ф.н., проф., Московский государственный университет путей сообщения (МИИТ)

**Клобуков Е.В.** – д. филол. н., проф., Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

**Манойло А.В.** – д.пол.н., проф., МГУ им. М.В. Ломоносова

**Новоселов А.Л.** – д.э.н., проф., Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова

**Пасечник В.В.** – д.пед.н., проф., МГОУ

**Поляков Ю.М.** – к. филол. н., главный редактор «Литературной газеты»

**Рюмцев Е.И.** – д.ф.-м.н., проф., Санкт-Петербургский государственный университет

**Хухуни Г.Т.** – д.филол.н., проф., МГОУ

**Чистякова С.Н.** – д. пед. н., проф., Российская академия образования (г. Москва)

### Редакционная коллегия серии «Физика-Математика»

*Ответственный редактор серии:*

**Бугаев А.С.** – д. ф.-м. н., академик РАН, МФТИ

*Заместитель ответственного редактора:*

**Жачкин В.А.** – д.ф.-м.н., проф., МГОУ

*Ответственный секретарь:*

**Васильчикова Е.Н.** – к. ф.-м. н., доц., МГОУ

*Члены редакционной коллегии:*

**Беляев В.В.** – д.т.н., проф., МГОУ;

**Богданов Д.Л.** – д. ф.-м. н., проф., МГОУ;

**Бугримов А.Л.** – д. т. н., проф., МГОУ;

**Латышев А.В.** – д. ф.-м. н., проф., МГОУ;

**Рассудовская М.М.** – к.п.н., проф., МГОУ;

**Осипов М.А.** – д. ф.-м. н., проф., Университет Стратклайд (Великобритания);

**Чигринов В.Г.** – д. ф.-м. н., проф., Гонконгский университет науки и технологий (Китай)

ISSN 2072-8387 (print)

ISSN 2310-7251 (online)

Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. – 2016. – № 4. – 94 с.

Журнал «Вестник Московского государственного областного университета. Серия «Физика-Математика» зарегистрирован в Федеральной службе по надзору за соблюдением законодательства в сфере массовых коммуникаций и охране культурного наследия. Регистрационное свидетельство ПИ № ФС77-26136

**Индекс серии «Физика-Математика»  
по Объединенному каталогу «Пресса России» 40723**

© МГОУ, 2016.

© ИИУ МГОУ, 2016.

**Адрес Отдела по изданию научного журнала  
«Вестник Московского государственного  
областного университета»**

г. Москва, ул. Радио, д.10А, офис 98

тел. (495) 723-56-31; (495) 780-09-42 (доб. 6101)

e-mail: vest\_mgou@mail.ru; сайт: www.vestnik-mgou.ru

Журнал включен в базу данных Российского индекса научного цитирования (РИНЦ), имеет полнотекстовую сетевую версию в Интернете на платформе Научной электронной библиотеки ([www.elibrary.ru](http://www.elibrary.ru)), а также на сайте Московского государственного областного университета ([www.vestnik-mgou.ru](http://www.vestnik-mgou.ru))

При цитировании ссылка на конкретную серию «Вестника Московского государственного областного университета» обязательна. Опубликованные в журнале материалы могут использоваться только в некоммерческих целях. Ответственность за содержание статей несут авторы. Мнение редколлегии серии может не совпадать с точкой зрения автора. Рукописи не возвращаются.

## Founder of journal «Bulletin of the Moscow State Regional University»:

Moscow State Regional University

Issued 4 times a year

### Series editorial board «Physics and Mathematics»

*Editor-in-chief:*

**A.S. Bugaev** – Doctor of Physics and Mathematics, Academician of RAS, MIPT

*Deputy editor-in-chief:*

**V.A. Zhachkin** – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, MSRU

*Executive secretary:*

**E.N. Vasilchikova** – Ph.D. in Physics and Mathematics, Associate Professor, MSRU

*Members of Editorial Board:*

**V.V. Belyaev** – Doctor of Technical Sciences, Professor, MSRU

**D.L. Bogdanov** – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, MSRU

**A.L. Bugrimov** – Doctor of Technical Sciences, Professor, MSRU

**A.V. Latyshev** – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, MSRU

**M.M. Rassudovskaya** – Ph.D. in Pedagogical Sciences, Professor, MSRU

**M.A. Osipov** – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Strathclyde University (UK)

**V.G. Chigrinov** – University of Science and Technology (Hong Kong, China)

The journal is included into the database of the Russian Science Citation Index, has a full text network version on the Internet on the platform of Scientific Electronic Library ([www.elibrary.ru](http://www.elibrary.ru)), as well as at the site of the Moscow State Regional University ([www.vestnik-mgou.ru](http://www.vestnik-mgou.ru))

At citing the reference to a particular series of «Bulletin of the Moscow State Regional University» is obligatory. The materials published in the journal are for non-commercial use only. The authors bear all responsibility for the content of their papers. The opinion of the Editorial Board of the series does not necessarily coincide with that of the author. Manuscripts are not returned.

### The Editorial Board address: Moscow State Regional University

10A Radio st., office 98, Moscow, Russia

Phones: (495) 723-56-31; (495) 780-09-42 (add. 6101)

e-mail: [vest\\_mgou@mail.ru](mailto:vest_mgou@mail.ru); site: [www.vestnik-mgou.ru](http://www.vestnik-mgou.ru)

### Publishing council «Bulletin of the Moscow State Regional University»

**P.N. Khromenkov** – Ph. D. in Philology, Professor, Principal of MSRU (Chairman of the Council)

**E.S.Yefremova** – Ph. D. in Philology, Acting Vice-Principal for scientific work of MSRU (Vice-Chairman of the Council)

**V.M. Klychnikov** – Ph.D. in Law, Ph. D. in History, Professor, Vice-Principal for academic work and international cooperation of MSRU (Vice-Chairman of the Council)

**L.N. Antonova** – Doctor of Pedagogics, Professor, Member of the Russian Academy of Education, The Council of the Federation Committee on Science, Education and Culture

**A.G. Asmolov** – Doctor of Psychology, Professor, Member of the Russian Academy of Education, Principal of the Federal Institute of Development of Education

**S.N. Klimov** – Doctor of Philosophy, Professor, Moscow State University of Railway Engineering

**E.V. Klobukov** – Doctor of Philology, Professor, Lomonosov Moscow State University

**A.V. Manoylo** – Doctor of Political Science, Professor, Lomonosov Moscow State University

**A.L. Novosjolov** – Doctor of Economics, Professor, Plekhanov Russian University of Economics

**V.V. Pasechnik** – Doctor of Pedagogics, Professor, MSRU

**Yu. M. Polyakov** – Ph.D. in Philology, Editor-in-chief of “Literaturnaya Gazeta”

**E.I. Rjuntsev** – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Saint Petersburg State University

**G. T. Khukhuni** – Doctor of Philology, Professor, MSRU

**S.N. Chistyakova** – Doctor of Pedagogics, Professor, the Russian Academy of Education

**ISSN 2072-8387 (print)**

**ISSN 2310-7251 (online)**

Bulletin of the Moscow State Regional University. Series: Physics and Mathematics. – 2016. – № 4. – 94 p.

The series «Physics and Mathematics» of the Bulletin of the Moscow State Regional University is registered in Federal service on supervision of legislation observance in sphere of mass communications and cultural heritage protection. The registration certificate ПИ № 0С77-26136

### Index of the series «Physics and Mathematics» according to the union catalog «Press of Russia» 40723

© MSRU, 2016.

© Information & Publishing department of MSRU, 2016.

# СОДЕРЖАНИЕ

## РАЗДЕЛ I. МАТЕМАТИКА

<i>Шабанова Г. И.</i> ТРИ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА В РАЗЛИЧНЫХ ПОСТАНОВКАХ.....	6
--	---

## РАЗДЕЛ II. ФИЗИКА

<i>Геворкян Э.В.</i> ИЕРАРХИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ МАСШТАБОВ И ВРЕМЕН РЕЛАКСАЦИИ В ЖИДКОКРИСТАЛЛИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ ..	24
---	----

<i>Соломатин А.С., Беляев В.В.</i> ОРИЕНТАЦИОННЫЕ И ОПТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СФЕРИЧЕСКИХ ДОМЕНОВ ЖИДКОГО КРИСТАЛЛА С ЦЕНТРАЛЬНОЙ ОРИЕНТИРУЮЩЕЙ И ВНЕШНЕЙ НЕОРИЕНТИРУЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ .....	32
--	----

<i>Савенко О.В.</i> РАСЧЁТ ВЫСОКОЧАСТОТНОЙ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТИ И ПОСТОЯННОЙ ХОЛЛА ДЛЯ ТОНКОЙ МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ ПЛЕНКИ ...	43
--	----

<i>Соломатин А.С., Беляев В.В.</i> ЖИДКОКРИСТАЛЛИЧЕСКИЕ ДИФРАКЦИОННЫЕ ОПТИЧЕСКИЕ ЭЛЕМЕНТЫ С НЕОДНОРОДНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ДИРЕКТОРА .....	56
---	----

<i>Маркеев Б.М.</i> ВЫЧИСЛЕНИЕ МАТРИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ БОЛЬЦМАНОВСКОГО ОПЕРАТОРА СТОЛКНОВЕНИЙ ДЛЯ ГАЗОВОЙ СМЕСИ.....	68
--	----

## РАЗДЕЛ III. ТЕОРИЯ И МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ И ВОСПИТАНИЯ

<i>Власова Е.А., Попов В.С., Пугачев О.В.</i> СОЗДАНИЕ ФОНДА ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ И НОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МАТЛАВ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ .....	77
---	----

<i>Исаев В.И.</i> В. ВИН И ИСТОРИЯ ОТКРЫТИЯ ЗАКОНОВ ТЕПЛОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ.....	86
--	----

# CONTENTS

## SECTION I. MATHEMATICS

**G. Schabanowa.** THREE INVERSE PROBLEMS OF MATHEMATICAL PHYSICS FOR HYPERBOLIC-TYPE EQUATION IN DIFFERENT STATEMENTS. ....6

## SECTION II. PHYSICS

**E. Gevorkyan.** HIERARCHY OF SPATIAL SCALES AND RELAXATION TIMES IN LIQUID-CRYSTAL SYSTEMS. ....24

**A. Solomatin, V. Belyaev.** ORIENTATIONAL AND OPTICAL PROPERTIES OF LIQUID-CRYSTAL DOMAINS BOUNDED BY CENTRAL ORIENTING AND SURROUNDING NONORIENTING SURFACES .....32

**O. Savenko.** CALCULATION OF HIGH-FREQUENCY CONDUCTIVITY AND HALL CONSTANT OF A THIN METAL FILM .....43

**A. Solomatin, V. Belyaev.** LIQUID-CRYSTAL DIFFRACTIVE OPTICAL ELEMENTS WITH AN INHOMOGENEOUS DISTRIBUTION OF THE DIRECTOR .....56

**B. Markeev.** CALCULATION OF MATRIX ELEMENTS OF THE BOLTZMANN COLLISION OPERATOR FOR GAS MIXTURES. ....68

## SECTION III. THEORY AND METHODS OF TEACHING AND EDUCATION

**E. Vlasova, V. Popov, O. Pugachev.** CREATION OF A FUND OF ASSESSMENT TOOLS AND NEW EDUCATIONAL TECHNOLOGIES WITH THE USE OF MATLAB IN THE STUDY OF LINEAR ALGEBRA .....77

**V. Isaev.** W. WIEN AND HISTORY OF THE DISCOVERY OF THE LAWS OF THERMAL RADIATION .....86

# РАЗДЕЛ I. МАТЕМАТИКА

---

УДК 517.946

DOI: 10.18384/2310-7251-2016-4-06-23

## ТРИ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА В РАЗЛИЧНЫХ ПОСТАНОВКАХ

**Шабанова Г. И.**

*Сибирская государственная автомобильно-дорожная академия (СибАДИ)  
644080, Омск, пр. Мира 5, Российская Федерация*

**Аннотация.** Исследуемые задачи состоят в восстановлении источника в граничном условии и потенциала при младшем члене уравнения гиперболического типа в линеаризованной и точной постановках. Рассматриваются случаи зависимости источника и заданной информации от различных переменных. Изучаются свойства искомым функций. Основным результатом исследования являются теоремы единственности потенциала  $q(y)$  на полупрямой  $y \geq 0$  и источников  $f(x)$ ,  $f(t)$  принадлежащих специальным классам функций.

**Ключевые слова:** линеаризация, интегральное уравнение, интегральные преобразования.

## THREE INVERSE PROBLEMS OF MATHEMATICAL PHYSICS FOR HYPERBOLIC-TYPE EQUATION IN DIFFERENT STATEMENTS

**G. Schabanowa**

*Siberian State Automobile and Highway Academy (SibADI)  
prosp. Mira 5, 644080 Omsk, Russia*

**Abstract.** The problems in question consist in recovering an unknown source in the boundary condition and an unknown potential at the smallest term of the hyperbolic-type equation in linearized and exact statements. We consider the dependences of the desired source and given information on different variables. We study the properties of the required functions. The main result of the investigation is the theorems of uniqueness of the potential  $q(y)$  on the semi-axis  $y \geq 0$  and of the sources  $f(x)$ ,  $f(t)$  and which belong to special classes of the functions.

**Keywords:** linearization, integral equation, integral transformations.

---

© Шабанова Г. И., 2016.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ

### 1. Обратная задача для уравнения гиперболического типа с неизвестным источником и неизвестным потенциалом.

Пусть в области  $-\infty < x < \infty, y \geq 0, t > 0$  задано уравнение:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - q(y)U(x, y, t). \quad (1)$$

Обобщенная функция  $U(x, y, t)$  равна нулю для всех  $t < 0$  и удовлетворяет уравнению (1), а также начальным данным

$$U(x, y, t) \Big|_{t=+0} = 0, \quad (2)$$

$$U_t'(x, y, t) \Big|_{t=+0} = 0, \quad (3)$$

и граничному условию:

$$U_y'(x, y, t) \Big|_{y=0} = \delta(t) \cdot f(x), \quad (4)$$

в котором  $\delta(t)$  – дельта-функция Дирака,  $f(x)$  – неизвестная функция действительной переменной, чётная, финитная, положительно определённая и бесконечно дифференцируемая в интервале  $[-\varepsilon, \varepsilon]$ .  $f(x) = 0$  при  $|x| > \varepsilon$ . Будем считать, что множество функций  $f(x)$  с отмеченными свойствами составляет класс  $\Phi^*$ .

По двум значениям решения прямой задачи в точках прямой  $y = 0$

$$U(x^j, 0, t) = \varphi^j(t), \quad j = 0, 1 \quad (5)$$

требуется найти неизвестный коэффициент уравнения (1)  $q(y)$  в классе непрерывных и ограниченных функций и неизвестный источник  $f(x)$  в граничном условии (4) – в классе функций  $\Phi^*$ .

Задачи, близкие по постановке, рассмотрены в [1].

### 2. Обратная задача для уравнения гиперболического типа с неизвестным источником $f(t)$ и неизвестным потенциалом $q(y)$ .

Пусть обобщённая функция  $U(x, y, t)$  удовлетворяет уравнению (1), условиям (2), (3) и граничным данным:

$$U_y' \Big|_{y=0} = \delta(x) f(t), \quad (6)$$

где  $f(t)$  – неизвестная, положительно определённая, обобщенная финитная функция.  $f(t) \neq 0$  при  $0 \leq t \leq T$ , и  $f(t) = 0$  при  $t > T$ ,  $q(y)$  – неизвестная функция класса  $\mathbf{Q}_M$ .

Напомним, что класс  $\mathbf{Q}_M$  был введён в работе [2] как множество функций, удовлетворяющих следующим условиям:

1.  $q(y) \in C^1[0, \infty) \cap L_1[0, \infty)$ ,  $q(y)_{L_1[0, \infty)} \leq M$ .
2. Функция  $q(y)$  имеет абсолютный минимум:  $q_{\min abs} = q(b^*) = m < 0$ .
3. Для больших значений аргумента  $y \geq b^*$  функция  $q(y) < 0$  и монотонно стремится к нулю:  $q(y) = o\left(-\frac{1}{y^2}\right)$ ,  $y \rightarrow \infty$ .

4. Последовательность элементов линейного нормированного пространства  $L_1[0, \infty)$   $q_n(y) = \begin{cases} q(y), & \text{if } y \in [0, b_n], \\ 0, & \text{if } y \in (b_n, \infty) \end{cases}$  сходится в пространстве  $L_1[0, \infty)$  к элементу  $q(y) \in L_1[0, \infty)$  по норме.

По известному обобщённому решению (5) в двух фиксированных точках  $x = x^j$  прямой  $y = 0$  требуется найти неизвестный потенциал  $q(y)$  в классе функций  $Q_M$  и неизвестный источник  $f(t)$ .

### 3. Обратная задача с фиксированным временем.

Пусть обобщённая функция  $U(x, y, t)$  удовлетворяет уравнению (1), начальным данным (2), (3) и граничному условию (4). По известным обобщённым решениям прямой задачи на прямой  $y = 0$  в фиксированные моменты времени:

$$U(x, 0, t^j) = \varphi^j(x), \quad j = 0, 1, \quad (7)$$

где  $|\varphi^j(x)| \geq M^* > 0$ , требуется восстановить потенциал  $q(y)$  в классе функций  $Q_M$  и источник  $f(x)$  в классе функций  $\Phi^*$ .

#### Исследование обратной задачи 1. Линеаризация прямой задачи

Положим:

$$U(x, y, t) = U_0(x, y, t) + \bar{\lambda} U_1(x, y, t), \quad (8)$$

$\bar{\lambda}$  малый параметр. Пусть  $q(y) = 0 + q_1(y)$ ,  $f(x) = [1 + f_1(x)]\theta(\varepsilon - |x|)$ .

$f_1(x)$  – четная функция, определенная на интервале  $\left[-\frac{x^1}{2}, \frac{x^1}{2}\right]$  и периодически

продолженная с помощью равенства  $f_1(x + x^1) = f_1(x)$  на всю числовую ось.  $f_1(x)$

и все ее производные непрерывны на сегменте  $\left[-\frac{x^1}{2}, \frac{x^1}{2}\right]$  и удовлетворяют усло-

виям  $\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} f_1\left(-\frac{x^1}{2}\right) = \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} f_1\left(\frac{x^1}{2}\right)$ .

Линеаризуем задачу (1)–(4), разлагая её решение в ряд по степеням  $\bar{\lambda}$  и пренебрегая членами порядка  $\bar{\lambda}^2$  [3]. Получим два дифференциальных уравнения в частных производных с соответствующими условиями.  $U_0(x, y, t)$  удовлетворяет

уравнению в частных производных  $\frac{\partial^2 U_0}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2}$  и дополнительным условиям:

$$U_0(x, y, t) \Big|_{t=+0} = 0, U_{0t}'(x, y, t) \Big|_{t=+0} = 0, U_{0y}'(x, y, t) \Big|_{y=0} = \delta(t).$$

$U_1(x, y, t)$  – решение задачи

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} - q_1(y)U_0(x, y, t), \quad (9)$$

$$U_1(x, y, t) \Big|_{t=+0} = 0, \quad (10)$$

$$U_{1t}'(x, y, t) \Big|_{t=+0} = 0, \quad (11)$$

$$U_{1y}'(x, y, t) \Big|_{y=0} = \delta(t) \cdot f_1(x). \quad (12)$$

Нетрудно проверить, что:

$$U_0(x, y, t) = -\theta(t - y).$$

Заметим, что  $U_0(x^j, 0, t) = -\theta(t)$ ,  $j = 0, 1$ . В силу (8) при  $\bar{\lambda} = 1$  имеем:

$$U_1(x^j, 0, t) = \varphi^j(t) + \theta(t), \quad j = 0, 1. \quad (13)$$

Задачу (9)–(13) будем решать методом интегральных преобразований. Применяя преобразование Лапласа по переменной  $t$ , получим:

$$p^2 W_1^*(p, x, y) = \frac{\partial^2 W_1^*(p, x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_1^*(p, x, y)}{\partial y^2} + \frac{1}{p} q_1(y) e^{-yp}, \quad (14)$$

$$[W_1^*(p, x, y)]_y \Big|_{y=0} = \int_0^{\infty} e^{-pt} \delta(t) f_1(x) dt = f_1(x), \quad (15)$$

где

$$W_1^*(p, x, y) = \int_0^{\infty} e^{-pt} U_1(x, y, t) dt.$$

В силу (13):

$$W_1^{*(j)}(p, x^j, 0) = \int_0^{\infty} e^{-pt} U_1(x^j, 0, t) dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} \varphi^j(t) dt + \frac{1}{p}, \quad j = 0, 1. \quad (16)$$

К вспомогательной задаче (14), (15) применим преобразование Фурье по переменной  $x$ . Получим дифференциальное уравнение:

$$(p^2 + s^2)W_2^*(s, p, y) = \frac{d^2}{dy^2}W_2^*(s, p, y) + 2\pi\delta(s)\frac{1}{p}q_1(y)e^{-yp} \quad (17)$$

с начальным условием  $[W_2^*(s, p, y)]_y \Big|_{y=0} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} f_1(x) dx = F_1(s)$ ,

где  $W_2^*(s, p, y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} W_1^*(p, x, y) dx$ .

В результате косинус – преобразования Фурье по переменной уравнение (17) перейдёт в функциональное уравнение:

$$W_3^*(s, p, \gamma) = \frac{1}{p^2 + s^2 + \gamma^2} \left( -F_1(s) + \frac{2\pi}{p} \delta(s) B(p, \gamma) \right).$$

Здесь:

$$W_3^*(s, p, \gamma) = \int_0^{\infty} \cos\gamma y W_2^*(s, p, y) dy,$$

$$F_1(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} f_1(x) dx, \quad (18)$$

$$B(p, \gamma) = \int_0^{\infty} \cos\gamma y q_1(y) e^{-yp} dy. \quad (19)$$

Выполним обращение преобразований по переменным  $y$  и  $x$ :

$$W_2^*(s, p, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos\gamma y W_3^*(s, p, \gamma) d\gamma = -F_1(s) \frac{e^{-y\sqrt{p^2+s^2}}}{\sqrt{p^2+s^2}} + \delta(s) \tilde{B}(p, y, s),$$

$$\tilde{B}(p, y, s) = \frac{4}{p} \int_0^{\infty} \cos\gamma y \frac{B(p, \gamma)}{p^2 + s^2 + \gamma^2} d\gamma; \quad (20)$$

$$W_1^*(p, x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} W_2^*(p, s, y) ds = \frac{-1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} F_1(s) \frac{e^{-y\sqrt{p^2+s^2}}}{\sqrt{p^2+s^2}} ds$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} \delta(s) \tilde{B}(p, y, s) ds = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-pt} dt$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} F_1(s) J_0(s\sqrt{t^2-y^2}) \theta(t^2-y^2) ds dt + \frac{1}{2\pi} \tilde{B}(p, y, 0). \quad (21)$$

### Решение обратной задачи. Теоремы единственности

Для решения обратной задачи (9)–(13) вычислим разность  $W_1^*(x^1, 0, p) - W_1^*(x^0, 0, p)$  двумя способами: исходя из полученной формулы (21) и из формулы (16). Сравним результаты.

$$W_1^*(x^1, 0, p) - W_1^*(x^0, 0, p) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-pt} dt.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} [e^{-isx^1} - e^{-isx^0}] F_1(s) J_0(st) ds dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} [\varphi^1(t) - \varphi^0(t)] dt.$$

Интегральные преобразования неизвестной функции  $q_1(y)$  исчезают, и мы имеем интегральное уравнение, однозначно разрешимое относительно функции  $F_1(s)$ . Выбирая  $x^0 = 0$  и фиксируя  $x^1$  из интервала  $(-\varepsilon, \varepsilon)$ , а также, применяя теорему Лерха, получим преобразование Бесселя:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [1 - e^{-isx^1}] F_1(s) J_0(st) ds = \varphi^1(t) - \varphi^0(t),$$

обращение которого позволяет выразить искомую функцию  $F_1(s)$ :

$$F_1(s) = \frac{\pi s}{1 - e^{-isx^1}} \int_0^{\infty} t [\varphi^1(t) - \varphi^0(t)] J_0(st) dt = \frac{\pi s}{1 - e^{-isx^1}} [\bar{\varphi}^1(s) - \bar{\varphi}^0(s)]. \quad (22)$$

В формуле, полученной выше,  $\bar{\varphi}^j(s) = \int_0^{\infty} t \varphi^j(t) J_0(st) dt$ ,  $j = 0, 1$ . Взаимная однозначность операционных соответствий доказывает единственность источника

$$f_1(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} F_1(s) ds. \quad (23)$$

В процессе регуляризации по Тихонову [4] преобразуем функцию  $\Psi(\tau) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{1 - e^{-i\tau}}$  с основным периодом  $\tau = 2\pi$ ;  $\tau = sx^1$ ,  $x^1 \in (0, \varepsilon)$ .

$\Psi(\tau) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik\tau} = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \cos k\tau = \delta(\tau)$ . На всяком интервале  $T_k = ((2k - 1)\pi, (2k + 1)\pi)$  длиной  $2\pi$  функция  $\Psi(\tau)$  есть  $\delta(\tau - 2\pi k)$  с носителем в точках

$\tau = 2\pi k$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  Рассмотрим:

$$F_1(\tau) = \frac{2\pi^2\tau}{x^1} \Psi(\tau) \left[ \bar{\varphi}^1\left(\frac{\tau}{x^1}\right) - \bar{\varphi}^0\left(\frac{\tau}{x^1}\right) \right] \quad (24)$$

на интервале  $T_k$ . Из формулы (24) имеем:

$$F_1^{(k)}(\tau) = \frac{2\pi^2\tau}{x^1} \Psi^{(k)}(\tau) \left[ \bar{\varphi}^1\left(\frac{\tau}{x^1}\right) - \bar{\varphi}^0\left(\frac{\tau}{x^1}\right) \right] = \frac{2\pi^2\tau}{x^1} \delta(\tau - 2\pi k) [\bar{\varphi}^1 - \bar{\varphi}^0]. \quad (25)$$

Вычислим  $f_1(x)$  по формуле (23), учитывая (25). Разобьем точками  $\tau_n = \pm(2n+1)\pi$ ,  $n = 0, 1, \dots, m$ , сегмент  $-R \leq \tau \leq R$ ,  $R = (2m+1)\pi$ ,  $m \in \mathbb{N}$  и фиксировано, на частичные сегменты, не имеющие общих внутренних точек, и преобразуем интеграл:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi x^1} \int_{-R}^R e^{-\frac{i\tau x}{x^1}} F_1(\tau) d\tau &= \frac{1}{2\pi x^1} \int_{-(2m+1)\pi}^{(2m+1)\pi} e^{-\frac{i\tau x}{x^1}} F_1(\tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{2\pi x^1} \sum_{k=-m}^m \int_{(2k-1)\pi}^{(2k+1)\pi} e^{-\frac{i\tau x}{x^1}} \cdot \frac{2\pi^2\tau}{x^1} \delta(\tau - 2\pi k) \left[ \bar{\varphi}^1\left(\frac{\tau}{x^1}\right) - \bar{\varphi}^0\left(\frac{\tau}{x^1}\right) \right] d\tau = \\ &= \frac{2\pi^2}{(x^1)^2} \sum_{k=-m}^m e^{-i\frac{2\pi kx}{x^1}} \cdot k \cdot \left[ \bar{\varphi}^1\left(\frac{2\pi k}{x^1}\right) - \bar{\varphi}^0\left(\frac{2\pi k}{x^1}\right) \right] = \frac{2\pi^2}{(x^1)^2} \sum_{k=-m}^m c_k e^{-i\frac{2\pi kx}{x^1}}, \quad (26) \end{aligned}$$

где:

$$c_k = k \cdot \left[ \bar{\varphi}^1\left(\frac{2\pi k}{x^1}\right) - \bar{\varphi}^0\left(\frac{2\pi k}{x^1}\right) \right] \quad (27)$$

коэффициенты полученного ряда удовлетворяют равенству  $c_k = -c_{-k}$ .

В соотношении (26) перейдем к пределу при  $R \rightarrow \infty$ . Получим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi x^1} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R e^{-\frac{i\tau x}{x^1}} F_1(\tau) d\tau &= \frac{1}{2\pi x^1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{i\tau x}{x^1}} F_1(\tau) d\tau = f_1(x) = \\ &= \frac{\sim \mathfrak{K}^2}{(-1)^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-i\frac{2\pi kx}{x^1}} = \frac{2}{(-1)^2} \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos \frac{kx}{1}. \end{aligned}$$

**Теорема 1.** Неизвестный источник  $f(x) = [1 + f_1(x)]\theta(\varepsilon - |x|)$  одномерной обратной задачи (1)–(5) единственен в классе функций  $\Phi^*$ .

Для определения неизвестного потенциала  $q_1(y)$  рассмотрим интегральные преобразования (19)–(21) и вычислим  $W_1^+(x^0, 0, p)$ :

$$\begin{aligned} W_1^+(x^0, 0, p) &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-pt} \int_0^{\infty} e^{-isx^0} F_1(s) J_0(st) dt ds + \frac{1}{2\pi} \tilde{B}(p, 0, 0) = \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-pt} \int_0^{\infty} F_1(s) J_0(st) dt ds + \frac{2}{\pi p} \int_0^{\infty} \frac{B(p, \gamma)}{p^2 + \gamma^2} d\gamma. \quad (28) \end{aligned}$$

В соответствии с формулой (16):

$$W_1^*(x^0, 0, p) = \int_0^\infty e^{-pt} U_1(x^0, 0, t) dt = \int_0^\infty e^{-pt} \varphi^0(t) dt + \frac{1}{p} \int_0^\infty e^{-pt} [\varphi^0(t) dt + \theta(t)] dt. \quad (29)$$

$$\text{Выразим преобразование функции } B(p, \gamma) = \int_0^\infty \cos \gamma y q_1(y) e^{-yp} dy$$

из системы интегральных уравнений (28)–(29):

$$\frac{2}{\pi p} \int_0^\infty \frac{B(p, \gamma)}{p^2 + \gamma^2} d\gamma = \int_0^\infty e^{-pt} [\varphi^0(t) dt + \theta(t) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty F_1(s) J_0(st) ds] dt. \quad (30)$$

$$\text{Рассмотрим интеграл из правой части (30) } \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty F_1(s) J_0(st) ds = \chi(t).$$

Заменяем подынтегральную функцию  $F_1(s)$ , введённую в (18), по формуле (22). От переменной  $s$  перейдём к  $\tau = sx^1$ . Воспользуемся формулой (24). В результате регуляризации получим функцию:

$$\begin{aligned} \chi(t) &= \frac{1}{2\pi x^1} \int_{-\infty}^\infty F_1\left(\frac{\tau}{x^1}\right) J_0\left(\frac{\tau}{x^1} t\right) d\tau = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi x^1} \sum_{k=-m(2k-1)\pi}^m \int_{(2k-1)\pi}^{(2k+1)\pi} F_1^{(k)}\left(\frac{\tau}{x^1}\right) J_0\left(\frac{\tau}{x^1} t\right) d\tau = \\ &= \frac{2\pi^2}{(x^1)^2} \sum_{k=-\infty}^\infty c_k J_0\left(\frac{2\pi k}{x^1} t\right) = \frac{4\pi^2}{(x^1)^2} \sum_{k=1}^\infty c_k J_0\left(\frac{2\pi k}{x^1} t\right). \end{aligned} \quad (31)$$

В (27) определены коэффициенты функционального ряда (31)  $c_k$ .

Учитывая сделанные замечания, перепишем равенство (30) в виде:

$$\frac{2}{\pi p} \int_0^\infty \frac{B(p, \gamma)}{p^2 + \gamma^2} d\gamma = \int_0^\infty e^{-pt} [\varphi^0(t) + \theta(t) + \frac{4\pi^2}{(x^1)^2} \sum_{k=1}^\infty c_k J_0\left(\frac{2\pi k}{x^1} t\right) dt]. \quad (32)$$

Преобразуем левую часть равенства (32), учитывая формулу (19):

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi p} \int_0^\infty \frac{B(p)}{p^2 + \gamma^2} d\gamma &= \frac{2}{\pi p} \int_0^\infty \frac{1}{p^2 + \gamma^2} \int_0^\infty \cos \gamma y q_1(y) e^{-yp} dy d\gamma = \\ &= \frac{2}{\pi p} \int_0^\infty q_1(y) e^{-yp} \int_0^\infty \cos \gamma y \frac{1}{p^2 + \gamma^2} d\gamma dy = \frac{2}{\pi p} \int_0^\infty q_1(y) e^{-yp} \frac{\pi}{2} \frac{e^{-yp}}{p} dy = \frac{1}{p^2} \int_0^\infty q_1(y) e^{-2yp} dy. \end{aligned}$$

Перепишем равенство (32) в виде:

$$\int_0^{\infty} q_1(y) e^{-2yp} dy = p^2 \int_0^{\infty} e^{-pt} [\varphi^0(t) + \theta(t) + \frac{4\pi^2}{(x^1)^2} \sum_{k=1}^{\infty} c_k J_0\left(\frac{2\pi k}{x^1} t\right)] dt.$$

Взаимная однозначность операционных соответствий доказывает единственность потенциала в классе непрерывных и ограниченных функций.

**Теорема 2.** В линеаризованной постановке неизвестный коэффициент  $q(y)$  при младшем члене уравнения (1) единственен в классе непрерывных и ограниченных функций, определённых на полупрямой  $y \geq 0$ .

### Исследование обратной задачи 2 в точной постановке.

#### Решение прямой задачи

Применим к прямой задаче 2 преобразование Лапласа. Пусть

$$W_1(x, y, p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} U(x, y, t) dt. \quad (33)$$

Получим уравнение в частных производных с начальными данными:

$$p^2 W_1(x, y, p) = \frac{\partial^2 W_1(x, y, p)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_1(x, y, p)}{\partial y^2} - q(y) W_1(x, y, p),$$

$$(W_1)_y \Big|_{y=0} = \delta(x) \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = \delta(x) \tilde{A}(p),$$

где  $\tilde{A}(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$ .

Преобразованием Лапласа известной информации являются функции

$$\Phi^j(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \varphi^j(t) dt = W(x^j, 0, p), \quad j=0,1. \quad (34)$$

Далее применим преобразование Фурье по переменной  $x$ :

$$W_2(r, y, p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{irx} W_1(x, y, p) dx.$$

Получим:

$$(p^2 + r^2) W_2(r, y, p) = \frac{\partial^2 W_2(r, y, p)}{\partial y^2} - q(y) W_2(r, y, p), \quad (W_2)_y \Big|_{y=0} = \tilde{A}(p).$$

Обобщённое преобразование Фурье по системе собственных функций  $\varphi(y, \lambda)$  оператора Штурма-Лиувилля обозначим

$$W_3(r, p, \lambda) = \int_0^{\infty} \varphi(y, \lambda) W_2(r, y, p) dy.$$

Из алгебраического уравнения:

$$(p^2 + r^2)W_3(r, p, \lambda) = -\tilde{A}(p) - \lambda W_3(r, p, \lambda)$$

выразим  $W_3(r, p, \lambda) = -\tilde{A}(p) \cdot \frac{1}{p^2 + r^2 + \lambda}$

Операционные методы математической физики и обращения используемых преобразований дают значения функций:

$$\begin{aligned} W_2(r, y, p) &= \int_0^\infty \varphi(y, \lambda) W_3(r, p, \lambda) d\sigma(\lambda) = -\tilde{A}(p) \int_0^\infty \frac{1}{p^2 + r^2 + \lambda} \varphi(y, \lambda) d\sigma(\lambda), \\ W_1(x, y, p) &= -\frac{1}{2\pi} \tilde{A}(p) \int_{-\infty}^\infty e^{-irx} \int_0^\infty \varphi(y, \lambda) \frac{1}{p^2 + r^2 + \lambda} d\sigma(\lambda) dr = \\ &= -\frac{1}{2} \tilde{A}(p) \int_0^\infty \varphi(y, \lambda) \frac{1}{\sqrt{p^2 + \lambda}} e^{-|x|\sqrt{p^2 + \lambda}} d\sigma(\lambda) = \\ &= -\frac{1}{2} \tilde{A}(p) \int_0^\infty e^{-pt} \int_0^\infty \varphi(y, \lambda) J_0(\sqrt{\lambda} \sqrt{t^2 - x^2}) \theta(t^2 - x^2) d\sigma(\lambda) dt. \end{aligned} \quad (35)$$

Сравнивая различные результаты интегральных преобразований  $W_1(x, y, p)$  в формах (33) и (35), можем записать:

$$\begin{aligned} W_1(x, y, p) &= \int_0^\infty e^{-pt} U(x, y, t) dt = \\ &= -\frac{1}{2} \tilde{A}(p) \int_0^\infty e^{-pt} \int_0^\infty \varphi(y, \lambda) J_0(\sqrt{\lambda} \sqrt{t^2 - x^2}) \theta(t^2 - x^2) d\sigma(\lambda) dt. \end{aligned} \quad (36)$$

### Решение обратной задачи. Теоремы единственности

Рассмотрим уравнения (34) и (36) при  $x = x^j$ ,  $j = 0, 1$ . Предположим, что  $0 < x^0 < x^1 < T$ . Получим систему интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} \Phi^j(p) &= \int_0^\infty e^{-pt} \varphi^j(t) dt = W_1^j(x^j, 0, p) = \\ &= -\frac{1}{2} \tilde{A}(p) \int_0^\infty e^{-pt} \int_0^\infty \varphi^j(\lambda) J_0(\sqrt{\lambda} \sqrt{t^2 - x^{j2}}) \theta(t^2 - x^{j2}) d\sigma(\lambda) dt, \quad j = 0, 1, \end{aligned} \quad (37)$$

однозначно разрешимую относительно функций  $\sigma(\lambda) \in \sigma[2]$  и  $\tilde{A}(p)$ . По  $\sigma(\lambda)$  мы можем найти  $q(y) \in \mathbf{Q}_M$  по  $\tilde{A}(p)$  – источник  $f(t)$ .

Исключим из системы (37) неизвестное преобразование  $\tilde{A}(p)$ , почленно разделив уравнения системы:

$$\frac{\Phi^0(p)}{\Phi^1(p)} = \frac{\int_0^\infty e^{-pt} \int_0^\infty J_0(\sqrt{\lambda}\sqrt{t^2-x^{02}}) \theta(t^2-x^{02}) d\sigma(\lambda) dt}{\int_0^\infty e^{-pt} \int_0^\infty J_0(\sqrt{\lambda}\sqrt{t^2-x^{12}}) \theta(t^2-x^{12}) d\sigma(\lambda) dt}.$$

Заменим  $\Phi^j(p)$ ,  $j=0,1$  преобразованием Лапласа (34)  $\Phi^j(p) = \int_0^\infty e^{-pt} \varphi^j(t) dt$ .

Будем иметь:

$$\int_0^\infty e^{-pt} \left\{ \varphi^0(t) * \int_0^\infty J_0(\sqrt{\lambda}\sqrt{t^2-x^{12}}) \theta(t^2-x^{12}) d\sigma(\lambda) \right\} dt =$$

$$\int_0^\infty e^{-pt} \left\{ \varphi^1(t) * \int_0^\infty J_0(\sqrt{\lambda}\sqrt{t^2-x^{02}}) \theta(t^2-x^{02}) d\sigma(\lambda) \right\} dt.$$

К свёртке

$$\varphi^0(t) * \int_0^\infty J_0(\sqrt{\lambda}\sqrt{t^2-x^{12}}) \theta(t^2-x^{12}) d\sigma(\lambda) =$$

$$\varphi^1(t) * \int_0^\infty J_0(\sqrt{\lambda}\sqrt{t^2-x^{02}}) \theta(t^2-x^{02}) d\sigma(\lambda), \quad (38)$$

полученной по теореме Лерха, применим преобразование Фурье по переменной  $t$ . Преобразование Фурье известной информации обозначим через

$$M^j(\alpha) = \int_0^\infty e^{-i\alpha t} \varphi^j(t) dt, \quad j=0,1.$$

Вычислим один из интегралов в (38), используя свойства спектральной функции класса  $\sigma$

$$\int_0^\infty e^{-i\alpha t} \int_0^\infty J_0(\sqrt{\lambda}\sqrt{t^2-x^{12}}) \theta(t^2-x^{12}) \left[ \frac{2}{\pi} d\sqrt{\lambda} + \sigma_1'(\lambda) d\lambda \right] dt =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-i\alpha t} \frac{\theta(t^2-x^{12})}{\sqrt{t^2-x^{12}}} dt + \int_0^\infty \sigma_1'(\lambda) \int_0^\infty e^{-i\alpha t} J_0(\sqrt{\lambda}\sqrt{t^2-x^{12}}) \theta(t^2-x^{12}) dt d\lambda =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) K_0(\alpha x^1) + \int_0^\infty \sigma_1'(\lambda) \frac{1}{\pi i} \operatorname{sign} \alpha \frac{\cos(x^1 \sqrt{\alpha^2 - \lambda})}{\sqrt{\alpha^2 - \lambda}} \theta(\alpha^2 - \lambda) d\lambda.$$

Здесь  $K_0(\alpha x^1)$  – функция Бесселя второго рода. Уравнение (38) сводится к уравнению Абеля относительно функции  $\sigma_1'(\lambda)$ :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi i} \operatorname{sign} \alpha \int_0^{\alpha^2} \frac{M^1(\alpha) \cos(x^0 \sqrt{\alpha^2 - \lambda}) - M^0(\alpha) \cos(x^1 \sqrt{\alpha^2 - \lambda})}{\sqrt{\alpha^2 - \lambda}} \sigma_1'(\lambda) d\lambda = \\ & = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \left[ M^1(\alpha) K_0(\alpha x^0) - M^0(\alpha) K_0(\alpha x^1) \right] = N(\alpha), \end{aligned}$$

$N(\alpha)$  – известная функция. При замене переменных  $\alpha^2 = s$  получим:

$$\frac{1}{\pi i} \int_0^\infty \sigma_1'(\lambda) \left[ M^1(\sqrt{s}) \frac{\cos(x^0 \sqrt{s - \lambda})}{\sqrt{s - \lambda}} - M^0(\sqrt{s}) \frac{\cos(x^1 \sqrt{s - \lambda})}{\sqrt{s - \lambda}} \right] d\lambda = N(\sqrt{s}). \quad (39)$$

Левая часть уравнения Абеля имеет слабую особенность на диагонали  $s = \lambda$ . К (39) применим оператор дробного дифференцирования [5], полагая  $s = (\lambda \cos^2 \theta + t \sin^2 \theta)^{\frac{1}{2}}$ . Вычислим:

$$\begin{aligned} \tilde{N}(t) &= i\pi \int_0^t \frac{N(\sqrt{s})}{\sqrt{t - s}} ds = \\ &= 2 \int_0^t \sigma_1'(\lambda) \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ M^1(\sqrt{\lambda \cos^2 \theta + t \sin^2 \theta}) \cos(x^0 \cdot \sqrt{t - \lambda} \cdot \sin \theta) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - M^0(\sqrt{\lambda \cos^2 \theta + t \sin^2 \theta}) \cos(x^1 \cdot \sqrt{t - \lambda} \cdot \sin \theta) \right\} d\theta \right] d\lambda. \end{aligned}$$

Ядро интегрального преобразования:

$$\begin{aligned} K(t, \lambda) &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ M^1(\sqrt{\lambda \cos^2 \theta + t \sin^2 \theta}) \cos(x^0 \cdot \sqrt{t - \lambda} \cdot \sin \theta) - \right. \\ &\quad \left. - M^0(\sqrt{\lambda \cos^2 \theta + t \sin^2 \theta}) \cos(x^1 \cdot \sqrt{t - \lambda} \cdot \sin \theta) \right\} d\theta \end{aligned}$$

непрерывно, производная по  $t$  существует и имеет интегрируемую особенность  $K(t, t) \neq 0$ .

Уравнение Вольтерра первого рода  $\tilde{N}(t) = \int_0^t \sigma_1'(\lambda) K(t, \lambda) d\lambda$  продифференцируем по переменной  $t$  [6] и получим уравнение Вольтерра второго рода

$$[\tilde{N}(t)]_t = \sigma_1'(t)K(t, t) + \int_0^t \sigma_1'(\lambda)K_t'(t, \lambda)d\lambda.$$

Его решение единственно, и мы можем найти  $\sigma_1'(\lambda)$  методом последовательных приближений [6]. Если  $\sigma_1'(\lambda)$  известна, нетрудно выразить  $\tilde{A}(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt$  из любого уравнения системы (37):

$$\tilde{A}(p) = \frac{-2\Phi^0(p)}{\int_0^\infty e^{-pt} \int_0^\infty J_0(\sqrt{\lambda}\sqrt{t^2 - x^2})\theta(t^2 - x^2)d\sigma(\lambda)dt} = \frac{-2\Phi^0(p)}{\int_0^\infty \frac{e^{-|x^0|\sqrt{p^2 + \lambda}}}{\sqrt{p^2 + \lambda}} d\sigma(\lambda)}.$$

**Теорема 3.** Решение обратной задачи (1)–(3), (6), (5) – неизвестный коэффициент  $q(y)$  при младшем члене уравнения гиперболического типа единственен в классе функций  $Q_M$ .

**Теорема 4.** Неизвестный источник  $f(t)$  в граничном условии (6) обратной задачи 2 единственен в классе непрерывных, финитных, положительно определённых функций.

### Исследование обратной задачи 3 в точной постановке.

#### Решение прямой задачи

Последовательно к задаче (1)–(4) применим преобразование Фурье по переменной  $x$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu x} U(x, y, t) dx = W_1(\mu, y, t),$$

одностороннее преобразование Лапласа по переменной  $t$ :

$$\int_0^\infty e^{-pt} W_1(\mu, y, t) dt = W_2(\mu, y, p)$$

и обобщённое преобразование Фурье по системе собственных функций оператора Штурма-Лиувилля  $\varphi(y, \lambda)$  [1]:

$$\int_0^\infty \varphi(y, \lambda) W_2(\mu, y, p) dy = W_3(\mu, p, \lambda).$$

В результате преобразования Фурье получим уравнение в частных производных:

$$\mu^2 W_1(x, y, p) = -\frac{\partial^2 W_1(\mu, y, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 W_1(\mu, y, t)}{\partial y^2} - q(y) W_1(\mu, y, t)$$

с начальными условиями  $(W_1) \Big|_{t=0} = 0, (W_1)' \Big|_{t=0} = 0,$  и

граничным условием  $(W_1)' \Big|_{y=0} = \delta(t)F(\mu),$

где

$$F(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu x} f(x) dx. \quad (40)$$

В результате преобразования Лапласа дифференциальное уравнение

$$(p^2 + \mu^2)W_2(\mu, y, p) = \frac{\partial^2 W_2(\mu, y, p)}{\partial y^2} - q(y)W_2(\mu, y, p)$$

с начальным условием  $(W_2)' \Big|_{y=0} = F(\mu).$

обобщенное преобразование Фурье приводит к алгебраическому уравнению относительно  $W_3(\mu, p, \lambda):$

$$W_3(\mu, p, \lambda) = -F(\mu) \cdot \frac{1}{p^2 + \mu^2 + \lambda}.$$

Обращение преобразований позволяет получить функции:

$$W_2(\mu, y, p) = \int_0^{\infty} \varphi(y, \lambda) W_3(\mu, p, \lambda) d\sigma(\lambda) = -F(\mu) \int_0^{\infty} \frac{1}{p^2 + \mu^2 + \lambda} \varphi(y, \lambda) d\sigma(\lambda)$$

$$W_1(\mu, y, t) = -F(\mu) \int_0^{\infty} \varphi(y, \lambda) \frac{\sin(\sqrt{\mu^2 + \lambda}t)}{\sqrt{\mu^2 + \lambda}} d\sigma(\lambda). \quad (41)$$

Обращая преобразование Фурье, получим решение прямой задачи:

$$U(x, y, t) = -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} \varphi(y, \lambda) \int_0^{\infty} f(\zeta) J_0\left(\sqrt{\lambda} \sqrt{t^2 - (x - \zeta)^2}\right) \theta\left(t^2 - (x - \zeta)^2\right) \cdot d\zeta d\sigma(\lambda).$$

### Решение обратной задачи. Теоремы единственности

При решении обратной задачи целесообразно исходить из равенства (41). Рассмотрим преобразование Фурье в фиксированные моменты времени  $t = t_0$  и  $t = t_1$ . Пусть  $y = 0$  и  $0 < t^0 < t^1 < \varepsilon$ .

Получим систему двух интегральных уравнений с двумя неизвестными  $F(\mu)$  и  $\sigma(\lambda)$ :

$$W_1^j(\mu, 0, t^j) = -F(\mu) \int_0^{\infty} \frac{\sin(\sqrt{\mu^2 + \lambda}t^j)}{\sqrt{\mu^2 + \lambda}} d\sigma(\lambda), \quad j = 0, 1. \quad (42)$$

По спектральной функции  $\sigma(\lambda)$  искомым коэффициент  $q(y)$  восстанавливается однозначно, по  $F(\mu)$  восстановим  $f(x)$ .

Исключим  $F(\mu)$  из системы (42), получим преобразования Фурье по  $x$ .

$$W_1^0(\mu, y, t^0) \int_0^{\infty} \frac{\sin(\sqrt{\mu^2 + \lambda})t^1}{\sqrt{\mu^2 + \lambda}} d\sigma(\lambda) = W_1^1(\mu, y, t^1) \int_0^{\infty} \frac{\sin(\sqrt{\mu^2 + \lambda})t^1}{\sqrt{\mu^2 + \lambda}} d\sigma(\lambda),$$

или

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix} [\varphi^1(x) \int_0^{\infty} \frac{\sin(\sqrt{\mu^2 + \lambda})t^0}{\sqrt{\mu^2 + \lambda}} d\sigma(\lambda) - \varphi^0(x) \int_0^{\infty} \frac{\sin(\sqrt{\mu^2 + \lambda})t^1}{\sqrt{\mu^2 + \lambda}} d\sigma(\lambda)] dx = 0.$$

Допустим, что  $|\varphi^0(x)| \geq m > 0$  интегральное уравнение:

$$\varphi^1(x) \int_0^{\infty} \frac{\sin(\sqrt{\mu^2 + \lambda})t^0}{\sqrt{\mu^2 + \lambda}} d\sigma(\lambda) - \varphi^0(x) \int_0^{\infty} \frac{\sin(\sqrt{\mu^2 + \lambda})t^1}{\sqrt{\mu^2 + \lambda}} d\sigma(\lambda) = 0$$

преобразуем к виду:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(\sqrt{\mu^2 + \lambda})t^1}{\sqrt{\mu^2 + \lambda}} d\sigma(\lambda) = \frac{\varphi^1(x)}{\varphi^0(x)} \int_0^{\infty} \frac{\sin(\sqrt{\mu^2 + \lambda})t^0}{\sqrt{\mu^2 + \lambda}} d\sigma(\lambda). \quad (43)$$

К (43) применим преобразование Фурье по параметру  $-\infty < \mu < \infty$ .

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu x} \frac{\sin(\sqrt{\mu^2 + \lambda})t^1}{\sqrt{\mu^2 + \lambda}} d\mu d\sigma(\lambda) = \frac{\varphi^1(x)}{\varphi^0(x)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu x} \frac{\sin(\sqrt{\mu^2 + \lambda})t^0}{\sqrt{\mu^2 + \lambda}} d\mu d\sigma(\lambda).$$

Внутренние интегралы в полученном равенстве заменим функцией Бесселя нулевого знака:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} d\sigma(\lambda) \pi J_0(\sqrt{\lambda} \sqrt{(t^1)^2 - x^2}) \theta((t^1)^2 - x^2) = \\ & = \frac{\varphi^1(x)}{\varphi^0(x)} \int_0^{\infty} d\sigma(\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} \pi J_0(\sqrt{\lambda} \sqrt{(t^0)^2 - x^2}) \theta((t^0)^2 - x^2). \end{aligned} \quad (44)$$

Преобразуем левую часть (44), учитывая форму спектральной функции:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} d\sigma(\lambda) \pi J_0(\sqrt{\lambda} \sqrt{(t^1)^2 - x^2}) \theta((t^1)^2 - x^2) = \\ & = \pi \int_0^{\infty} J_0(\sqrt{\lambda} \sqrt{(t^1)^2 - x^2}) \theta((t^1)^2 - x^2) d\left[\frac{2}{\pi} \sqrt{\lambda} + \sigma_1(\lambda)\right] dx = \\ & = 2 \frac{\theta((t^1)^2 - x^2)}{\sqrt{(t^1)^2 - x^2}} + \pi \int_0^{\infty} J_0(\sqrt{\lambda} \sqrt{(t^1)^2 - x^2}) \sigma_1'(\lambda) d\sqrt{\lambda}. \end{aligned}$$

Пусть  $\sqrt{(t^1)^2 - x^2} = 2\sqrt{X}$ . Преобразование Бесселя однозначно разрешим относительно  $\sigma_1'(\lambda)$ . Получим интегральное уравнение:

$$\sigma_1'(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_{\frac{T^2}{4}}^{\frac{(t^1)^2}{4}} J_0(\sqrt{\lambda} 2\sqrt{X}) \left[ \frac{\varphi^1(\sqrt{(t^1)^2 - 4X})}{\varphi^0(\sqrt{(t^1)^2 - 4X})} \cdot \frac{\theta(\sqrt{4X - T^2})}{\sqrt{4X - T^2}} - \frac{\theta(X)}{2\sqrt{X}} \right] dX +$$

$$+ \int_0^{\infty} \sigma_1'(\zeta) \int_{\frac{T^2}{4}}^{\frac{(t^1)^2}{4}} J_0(\sqrt{\lambda} 2\sqrt{X}) \frac{\varphi^1(\sqrt{(t^1)^2 - 4X})}{\varphi^0(\sqrt{(t^1)^2 - 4X})} J_0(\sqrt{\zeta} \sqrt{4X - T^2}) dX d\sqrt{\zeta} \quad (45)$$

с ядром  $K(\zeta, \lambda) = \int_{\frac{T^2}{4}}^{\frac{(t^1)^2}{4}} J_0(\sqrt{\lambda} 2\sqrt{X}) \frac{\varphi^1(\sqrt{(t^1)^2 - 4X})}{\varphi^0(\sqrt{(t^1)^2 - 4X})} J_0(\sqrt{\zeta} \sqrt{4X - T^2}) dX$ ,

которое нельзя назвать фредгольмовым [7], поскольку:

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} |K(\zeta, \lambda)|^2 d\zeta d\lambda \neq \infty.$$

Так как интервал интегрирования бесконечно мал:  $0 < t^0 < t^1 < \varepsilon$  и  $T^2 = (t^1)^2 - (t^0)^2 < \varepsilon$ , то, как следует из теории уравнений Фредгольма, для малых значений  $t$  уравнение (45) однозначно разрешимо [3].

**Теорема 5.** Спектральная функция оператора Штурма-Лиувилля единственным образом определяется заданием информации (7) о решении прямой задачи (1)–(4).

**Теорема 6.** Решение обратной задачи (1)–(4), (7)  $q(y)$  с неизвестным источником однозначно восстанавливается на полупрямой  $y \geq 0$  в специальном классе функций  $Q_M$ .

**Теорема 7.** Неизвестный источник  $f(x)$  в граничном условии (4) единственен в классе функций  $\Phi^*$ . Для доказательства единственности  $f(x)$  выразим  $F(\mu)$  из первого уравнения системы (42):

$$F(\mu) = - \frac{W_1^0(\mu, 0, t^0)}{\int_0^{\infty} \frac{\sin(\sqrt{\mu^2 + \lambda} t^0)}{\sqrt{\mu^2 + \lambda}} d\sigma(\lambda)} = - \frac{\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu x} \varphi^0(x) dx}{\int_0^{\infty} \frac{\sin(\sqrt{\mu^2 + \lambda} t^0)}{\sqrt{\mu^2 + \lambda}} d\sigma(\lambda)} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu x} f(x) dx.$$

Как известно,  $F(\mu)$  введено формулой (40).

Обращение данного преобразования Фурье выражает функцию источника возмущений в явном виде. Из единственности изображения следует единственность оригинала.

### РЕЗЮМЕ

Уравнение (1) с данными начальными и граничными условиями может рассматриваться как математическая модель распространения волн в изотропном пространстве. Задачи (1–3) являются модельными для сейсморазведки и электроразведки. Основным достижением исследования являются теоремы единственности потенциала  $q(y)$  на полупрямой  $y \geq 0$  и источников  $f(x), f(t)$ , принадлежащих специальным классам функций. Доказана разрешимость обратных задач математической физики для уравнения гиперболического типа в различных постановках.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М.М., Резницкая К.Г., Яхно В.Г. Одномерные обратные задачи математической физики. Новосибирск: Наука, 1980. 88 с.
2. Шабанова Г.И. Исследование обратной задачи Штурма-Лиувилля в сингулярном случае // Сибирская автомобильно-дорожная академия. Сборник статей по материалам XXXI научно-практической конференции «Естественные и математические науки в современном мире». 6 (30). Новосибирск, 2015. С. 6–15.
3. Романов В.Г. Обратные задачи математической физики. М.: Наука, 1970. 263 с.
4. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 735 с.
5. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т. 2. М.-Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы. 1951. 544 с.
6. Цлаф Л.Я. Вариационное исчисление и интегральные уравнения. М.: Наука. 1979. 191 с.
7. Михлин С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. М.: Издательство физико-математической литературы. 1959. 232 с.

### REFERENCES

1. Lavrent'ev M.M., Reznitskaya K.G., Yakhno V.G. Odnomernye obratnye zadachi matematicheskoi fiziki [One-dimensional inverse problems of mathematical physics]. Novosibirsk, Nauka, 1980. 88 p.
2. Shabanova G.I. Issledovanie obratnoi zadachi Shturma-Liuvillya v singulyarnom sluchae [The study of the inverse Sturm–Liouville problem in the singular case] // Sibirskaya avtomobil'no-dorozhnaya akademiya. Sbornik statei po materialam XXXI nauchno-prakticheskoi konferentsii «Estestvennye i matematicheskie nauki v sovremennom mire» [Siberian Automobile and Highway Academy. Proc. XXXI Scientific-practical Conf. “Natural and Mathematical Sciences in the Modern World”]. no. 6 (30). Novosibirsk, 2015. pp. 6–15.
3. Romanov V.G. Obratnye zadachi matematicheskoi fiziki [Inverse problems of mathematical physics]. M., Nauka, 1970. 263 p.
4. Tikhonov A.N., Samarskii A.A. Uravneniya matematicheskoi fiziki [Equations of mathematical physics]. M., Nauka, 1977. 735 p.
5. Courant R., Hilbert D. Methods of Mathematical Physics, Volume II. New York, Interscience Publishers, 1962.
6. Tslaf L.Ya. Variatsionnoe ischislenie i integral'nye uravneniya [Calculus of variations and integral equations]. M., Nauka, 1979. 191 p.
7. Mikhlin S.G. Lektzii po lineinyim integral'nyim uravneniyam [Lectures on linear integral equations]. M., Izdatel'stvo fiziko-matematicheskoi literatury, 1959. 232 p.

**ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ**

*Шабанова Галина Ивановна* – старший преподаватель кафедры высшей математики Сибирской автомобильно-дорожной академии «СибАДИ»;  
e-mail: gal\_schabanowa2014@yandex.ru

**INFORMATION ABOUT THE AUTHOR**

*Galina Schabanova* – senior lecturer of the Department of Mathematics at the Siberian Automobile and Highway Academy («SibADI»);  
e-mail: gal\_schabanowa2014@yandex.ru

**БИБЛИОГРАФИЧЕСКАЯ ССЫЛКА**

*Шабанова Г. И.* Три обратные задачи математической физики для уравнения гиперболического типа в различных постановках // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2016. № 4. С. 6–23.  
DOI: 10.18384/2310-7251-2016-4-16-23.

**BIBLIOGRAPHIC REFERENCE**

*G. Schabanova* Three inverse problems of mathematical physics for hyperbolic-type equation in different statements // Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics. 2016. no. 4. pp. 6–23.  
DOI: 10.18384/2310-7251-2016-4-06-23.

# РАЗДЕЛ II. ФИЗИКА

---

УДК: 537.9+539.6

DOI: 10.18384/2310-7251-2016-4-24-31

## ИЕРАРХИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ МАСШТАБОВ И ВРЕМЕН РЕЛАКСАЦИИ В ЖИДКОКРИСТАЛЛИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

**Геворкян Э.В.**

*Московский государственный областной университет  
105005, г. Москва, ул. Радио, д. 10а, Российская Федерация*

**Аннотация.** Показана необходимость учёта промежуточного порядка и спектра времен релаксации в статистической теории жидких кристаллов и, в более общем случае, в теории конденсированного состояния. Рассмотрены простые модели нематических и смектических жидких кристаллов.

**Ключевые слова:** конденсированное состояние, жидкие кристаллы, промежуточные порядки, времена релаксации, многочастичные взаимодействия.

## HIERARCHY OF SPATIAL SCALES AND RELAXATION TIMES IN LIQUID-CRYSTAL SYSTEMS

**E. Gevorkyan**

*Moscow Region State University  
ul. Radio 10a, 105005 Moscow, Russia*

**Abstract.** We have shown the necessity of accounting for the medium-range order and relaxation times in the statistical theory of liquid crystals and, more generally, in the condensed state theory. Simple models of nematic and smectic liquid crystals are considered.

**Keywords:** condensed state, liquid crystals, medium-range orders, relaxation times, many-particle interactions.

### ВВЕДЕНИЕ

Описание структуры и физических свойств вещества микроскопической и макроскопической теориями различается, как известно, пространственными и

---

© Геворкян Э.В., 2016.

временными масштабами. Методы экспериментального изучения этих объектов также характеризуются, прежде всего, этими параметрами.

В настоящей работе обсуждаются некоторые трудности теории конденсированного и, в частности, жидкокристаллического состояния, обосновывается необходимость включения в молекулярные модели мезофаз учёта надмолекулярных структур промежуточного порядка и многочастичных взаимодействий.

### Иерархия масштабов

В основе статистического метода в теории систем многих частиц лежит фундаментальная гипотеза о существовании иерархии характерных времен и соответствующих пространственных масштабов.

Аналогичный подход используется во многих задачах нелинейной динамики при введении сокращенного описания поведения системы в «медленных» путём усреднения по «быстрым» переменным и основанной на этом теории возмущений.

В классической работе Н.Н. Боголюбова [1] в связи с обоснованием метода равновесных и кинетических функций распределения была сформулирована идея об иерархии времён релаксации, соответствующих стадиям эволюции и описания поведения систем: механической, кинетической и гидродинамической.

Наиболее очевидна и обоснована она в теории газообразного состояния. Так, например, время столкновения частиц  $\tau_0 \sim 10^{-12}$  с, радиус взаимодействия  $r_0 \sim 10^{-10}$  м, среднее время между столкновениями  $\tau_0 \sim 10^{-9}$  с, средняя длина свободного пробега  $l_0 \sim 3 \cdot 10^{-7}$  м, время макроскопической релаксации  $T$  и размеры неоднородности внешних сил или сосуда  $R$ . Соответствующие двойные неравенства:

$$\tau_0 \ll t_0 \ll T \quad (1)$$

$$r_0 \ll l_0 \ll R \quad (2)$$

определяют упомянутые выше три стадии.

Кинетическая стадия начинается в процессе «синхронизации» высших функций распределения, которые в результате зависят от времени только через одночастичные функции.

В конденсированных системах ситуация усложняется. Вместо параметров столкновений и пробега используются времена и радиусы корреляции динамических величин. Однако провести строгие оценки сложнее. Тем более, что, по видимому, времена синхронизации высших функций распределения могут быть одного порядка с парной. Возникает проблема малого параметра, по которому можно провести разложение.

Необратимость после механической стадии появляется (в кинетической теории) в результате фазового крупно структурного усреднения или временного усреднения, параметры которых устремляются к нулю после статистического предельного перехода.

По существу, на том же фундаменте стоит равновесная теория Гиббса с гипотезой фазового перемешивания и эргодической гипотезой. Без неё только чу-

довышняя величина времени возврата «защищает» системы многих частиц от неизбежного возврата сколь угодно близко к любому исходному далекому от равновесного состояния.

Частичный отход от ортодоксального метода, основанного на уравнении Лиувилля, позволяющий упростить теорию и феноменологически ввести в неё необратимость, может быть реализован различными способами. Физические основания для этого очевидно есть. Так, структурными элементами в системах многих частиц являются атомы, молекулы и другие устойчивые частицы, имеющие (в отличие от типичных моделей) внутреннюю структуру. Утверждения о том, что влияние этих факторов на эволюцию системы несущественно не выдерживают критики, поскольку характер эволюции как раз необычайно чувствителен именно к этим качествам модели и начальным условиям. Поэтому, если не считать исследование точного уравнения Лиувилля для идеальных моделей самоцелью, то для описания и объяснения экспериментальных данных вполне приемлемы и подходы в духе уравнений Ланжевена и Фоккера – Планка. Заметим, что учёт внутренней структуры частиц приводит также к многочастичным взаимодействиям между ними и зависимости эффективных парных взаимодействий от ближнего порядка.

### **Упорядоченность конденсированных систем**

Долгое время описание упорядоченности конденсированных систем ограничивалось понятиями дальнего и ближнего порядков. В соответствии с этим строится и теория фазовых переходов в таких системах. Пространственная корреляция упорядоченности в системе с дальним порядком распространяется на весь объём, а в системе с ближним порядком убывает экспоненциально с показателем, определяющим соответствующий радиус корреляции.

Однако, давно известны системы, поведение которых не укладывается в эту упрощённую схему. В планарных магнетиках, двумерных кристаллах, в нескольких фазах жидких кристаллов и других корреляционная функция в упорядоченной фазе убывает, хотя и по медленному степенному закону. Причём эти выводы подтверждены как в рамках феноменологических теорий, так и на основе строгих методов статистической физики (см., например, [2]).

Кстати, за открытие топологических фазовых переходов и фаз в таких системах присуждена Нобелевская премия по физике за 2016 год.

В жидкокристаллических системах из-за сильной анизотрии мезогенных молекул, которая имеет принципиальное значение для самого существования мезофаз, даже обычный ближний трансляционный порядок описывается двумя характерными молекулярными размерами, различающимися на порядок. Кроме того, эти системы обладают связанными ориентационным дальним и трансляционным ближним порядками. Некоторые мезофазы (смектики, колончатые дискотики) имеют неполный трансляционный дальний порядок.

В жидких кристаллах трёх типов тепловые флуктуации приводят к неустойчивости традиционного дальнего порядка в статистическом пределе. Это смектики А и С, а также гексатики В.

Для смектика А в рамках континуального приближения находим анизотропные степенные асимптотики парных корреляционных функций смещений слоя  $P_u(R, z)$  и плотностей  $P_p(R, z)$ :

$$P_u = [u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x}')]^2 = \frac{kT}{\pi^2 \sqrt{K_1 B}} \int_0^{z/d} dv \int_0^{R/a} dw \frac{1 - J_0(w) \cos v}{\zeta v^2 + \zeta^{-1} w^2 \left( w^2 + \frac{R^2}{\xi^2} \right)} w, \quad (3)$$

откуда при  $\min(\xi, X) \gg \sqrt{\alpha r}$  следует, что:

$$P_u(R, z) = \frac{kT}{4\pi \sqrt{K_1 B}} \left\{ -\text{Ei} \left( -\frac{\zeta}{4} \right) + 2 \ln \frac{R}{2\sqrt{\alpha r}} + 2C + \frac{R^2}{8\xi^2} \left[ 2 \ln \frac{R}{4\xi} - \text{Ei} \left( -\frac{\zeta}{4} \right) - \frac{4}{\zeta} \exp \left( -\frac{\zeta}{4} \right) + 2C - 1 \right] + \dots \right\} \text{ для } \xi > X; \quad (4)$$

$$P_u(R, z) = \frac{kT}{2\pi \sqrt{K_1 B}} \left\{ \ln \frac{2\xi}{\sqrt{\alpha r}} - \left[ \left( \frac{\alpha z}{\xi^2} \right)^2 + \frac{R}{\xi} \right]^{\frac{1}{2}} + \dots \right\} \text{ для } \xi < X, \quad (5)$$

где  $J_0(w)$  – функция Бесселя,  $\alpha = (K_1/B)^{1/2}$  – глубина проникновения,  $\xi = (K_1/B)^{1/2}/H$  – магнитная длина когерентности,  $\zeta = R^2/(\alpha z)$ ,  $X^2 = \max(\alpha z, R^2)$ ,

$W = (d/a^2)(K_1/B)^{1/2}$ ,  $\text{Ei}(x) = \int_{-\infty}^x e^t t^{-1} dt$  – интегральная показательная функция,

$C = 0,5772\dots$

$$\alpha r = a^2 \exp \left[ \frac{2}{\pi} \int_0^W \frac{\text{arctg } s}{s} ds \right] \approx a^2 \max(1, W). \quad (6)$$

Как видно из формул (4) и (5), характер сильно анизотропной асимптотики различается внутри и вне пространственной области, определяемой магнитной длиной когерентности. Внутри этой области корреляционная функция имеет характерную для квазиупорядоченных систем с сильно развитыми флуктуациями логарифмическую зависимость. Вне этой области магнитное поле подавляет флуктуации и дальнейший рост корреляционной функции ограничивается величиной

$$P_u = \frac{kT\alpha}{2\pi K_1} \ln \frac{2\xi}{\sqrt{\alpha r}} \quad (7)$$

и её анизотропия уменьшается.

В сверхсильных (экспериментально пока недостижимых) полях  $\xi \sim a$  характер асимптотики меняется

$$P_u = \frac{kTW}{\pi^2 \alpha B y^2} \left\{ \ln(1 + y^2) + 2y \arctg y \right\} \quad (8)$$

Учёт ангармонических эффектов практически не ограничивает область применимости формул (4), (5). Соответствующий масштаб  $\min(X, \xi) > R^* \sim 10^{10}$  м в принципе не может быть реализован экспериментально.

Степенная зависимость (4) в отсутствие магнитного поля приводит к анизотропному степенному затуханию пространственных колебаний корреляционной функции плотностей:

$$P_p \cong 2|\rho_1|^2 \cos \frac{2\pi}{d} \exp\left(-\frac{2\pi^2}{d^2} P_u\right)$$

с показателем порядка 0,04. Высшие гармоники практически отсутствуют, поскольку их показатели пропорциональны квадрату номера. Это проявляется в понижении статистического порядка береговского максимума и появлении анизотропной степенной особенности в структурном факторе и качественно соответствует экспериментам по рентгеновской дифракции высокого разрешения в смектике А.

Как мы видим на примере смектических жидких кристаллов, кроме молекулярного и макроскопического (лабораторного) масштабов имеется целый ряд характерных размеров, покрывающих этот диапазон, а иногда и выходящих за его пределы (для экспериментально ненаблюдаемых эффектов).

Большой интерес в этой связи представляет также структура аморфных систем, не имеющих дальнего порядка.

Например, в металлических стёклах сложного состава анализ данных рентгеновской дифракции и спектроскопии поглощения рентгеновских лучей и математического моделирования структуры методами Монте-Карло и молекулярной динамики показал сосуществование ближнего атомного порядка и промежуточного кластерного порядка [4]. Интересно, что неоднородная деформация может влиять на промежуточный порядок в этих стеклах.

Таким образом, не только в системах пониженной размерности, но и в сложных конденсированных системах, таких как термотропные, лиотропные и полимерные жидкие кристаллы, а также в аморфных веществах необходимо многоуровневое описание структуры в нескольких пространственных масштабах. То есть, в их молекулярных моделях наряду с традиционными ближним и дальним порядками следует рассматривать промежуточные пространственные структуры.

Сиботактические группы Стюарта, рои Бозе и Цветкова, кластеры, агрегаты, ассоциаты и другие подобные термины, используемые в разное время для словесного описания ближнего порядка, могут быть отнесены и к промежуточному порядку.

### Молекулярные модели жидких кристаллов

Исторически первая примитивная модель нематика была предложена Бозе в начале прошлого века, и её содержание сводилось к констатации существования

больших невзаимодействующих кластеров (роев) из  $N_0 \sim 10^4$  одинаковым образом ориентированных молекул. Предполагалось, что различные рои ориентированы по-разному и при тепловом движении они изменяют ориентацию как единое целое. В дальнейшем эта модель была полностью отвергнута и заменена континуальной теорией и теорией молекулярного поля.

Рассмотрим самую популярную и простую модель Майера-Заупе. В ней нематик моделируется системой тонких жёстких стержней, закреплённых на шарнирах в узлах простой кубической решётки. Взаимодействие ограничивается анизотропной частью дисперсионного диполь-дипольного притяжения.

Модель молекулярного поля качественно описывает дальний ориентационный порядок и нематико-изотропный фазовый переход первого рода.

Как было показано нами ранее [3], модель и приближение можно значительно усовершенствовать вариационным методом.

Здесь же заметим, что для получения качественного согласия с экспериментом в этой модели анизотропную часть дисперсионного взаимодействия приходится завышать примерно в 200 раз по сравнению с квантовомеханическими расчётами.

В рамках обсуждаемого подхода естественно модифицировать модель Майера-Заупе, закрепив на решётке не отдельные молекулы, а сферические кластеры из порядка  $10^2 - 10^3$  молекул. Внутри кластера ориентационный ближний порядок и энергию оценить, учитывая отталкивание анизометричных твёрдых ядер и только изотропную часть дисперсионного притяжения. Такая модифицированная модель значительно ближе к реальности, чем исходная.

Теоремы сложения для сферических функций позволяют связать параметры ориентационного порядка жидкого кристалла с параметрами подсистем. Так, параметр ориентационного дальнего порядка Цветкова  $Q = \langle P_2(\cos\vartheta) \rangle$  (здесь  $P_2(\dots)$  полином Лежандра) в такой модели оказывается равен произведению надкластерного и внутрикластерного параметров

$$Q = Q_{\text{int}} \cdot Q_{\text{ext}}.$$

Подобную процедуру можно использовать для других, более сложных молекулярных моделей, включающих несколько уровней описания структуры.

Заметим, что даже в такой упрощённой модели структуры нематика есть три пространственных масштаба. Это поперечный  $a$  и продольный  $d$  молекулярные размеры для ближнего трансляционного порядка и размер  $L$  ориентационного кластера.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в молекулярно-статистической теории жидкокристаллического состояния перспективной представляется разработка полуфеноменологических моделей с несколькими пространственным и временными уровнями описания, рассчитанными на соответствующий диапазон экспериментальных данных.

Экспериментальные методы исследования структуры и динамики жидких кристаллов покрывают широкий диапазон пространственно-временных параметров. Это и изучение ближнего порядка рентгеноструктурным анализом и тонких слоев оптикой, и резонансные методы. Для изучения объёмных жидкокристаллических образцов, свободных от искажений ориентационной структуры ограничивающими поверхностями, наиболее эффективны ультразвуковая и диэлектрическая спектроскопии в магнитном поле. Их результаты подтверждают наличие во всех фазах жидких кристаллов сложного и очень широкого спектра времён структурной релаксации.

Эти данные могут быть использованы как для «калибровки» моделей, так и для проверки теории.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Боголюбов Н.Н. Проблемы динамической теории в статистической физике. М.-Л.: ОГИЗ, Государственное издательство теоретико-технической литературы, 1946. 119 с.
2. Базаров И.П., Геворкян Э.В. Статистическая физика жидких кристаллов. М.: Изд-во Московского университета. 1992. 496 с.
3. Геворкян Э.В. Вариационный подход в теории жидких кристаллов // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2015. № 3. С. 30–34.
4. Sheng H. W., Luo W. K., Alamgir F. M., Bai J. M., Ma E. Atomic packing and short-to-medium-range order in metallic glasses // Nature. 2006. Vol. 439. pp. 419–425.

### REFERENCES

1. Bogolyubov N.N. Problemy dinamicheskoi teorii v statisticheskoi fizike [Problems of dynamic theory in statistical physics]. M.-L., OGIZ, Gosudarstvennoe izdatel'stvo teoretiko-tekhnicheskoi literatury, 1946. 119 p.
2. Bazarov I.P., Gevorkyan E.V. Statisticheskaya fizika zhidkikh kristallov [Statistical physics of liquid crystals]. M., Izd-vo Moskovskogo universiteta, 1992. 496 p.
3. Gevorkyan E.V. Variatsionnyi podkhod v teorii zhidkikh kristallov [Variational approach to the theory of liquid crystals] // Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-Matematika [Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics]. 2015. no. 3. pp. 30–34.
4. Sheng H. W., Luo W. K., Alamgir F. M., Bai J. M., Ma E. Atomic packing and short-to-medium-range order in metallic glasses // Nature. 2006. Vol. 439. pp. 419–425.

### ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

*Геворкян Эдвард Вигенович* – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры общей физики, Московский государственный областной университет;  
e-mail: gevev@rambler.ru

### INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

*Edvard Gevorkyan* – doctor of physical and mathematical sciences, professor, professor of the Department of Physics at the Moscow Region State University;  
e-mail: gevev@rambler.ru

**БИБЛИОГРАФИЧЕСКАЯ ССЫЛКА**

*Геворкян Э.В.* Иерархия пространственных масштабов и времен релаксации в жидкокристаллических системах // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2016. № 4. С. 24–31.  
DOI: 10.18384/2310-7251-2016-4-24-31.

**BIBLIOGRAPHIC REFERENCE**

*E. Gevorkyan* Hierarchy of spatial scales and relaxation times in liquid-crystal systems // Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics. 2016. no. 4. pp. 24–31.  
DOI: 10.18384/2310-7251-2016-4-24-31.

УДК 535.012.2

DOI: 10.18384/2310-7251-2016-4-32-42

## ОРИЕНТАЦИОННЫЕ И ОПТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СФЕРИЧЕСКИХ ДОМЕНОВ ЖИДКОГО КРИСТАЛЛА С ЦЕНТРАЛЬНОЙ ОРИЕНТИРУЮЩЕЙ И ВНЕШНЕЙ НЕОРИЕНТИРУЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

**Соломатин А.С., Беляев В.В.**

*Московский государственный областной университет  
105005, г. Москва, ул. Радио, д. 10А, Российская Федерация*

**Аннотация.** Рассмотрены нематические ЖК домены, центральная часть (ядро) которых покрыта ориентирующим покрытием, обеспечивающим заданный угол преднаклона директора, а внешняя сторона домена не оказывает существенного ориентирующего влияния. Предложен метод расчёта и выполнена теоретическая и компьютерная модель зависимости разности фазовой задержки  $\Delta\Phi$  от координат места прохода луча света сквозь домен. Предложены методы определения геометрических параметров домена и его двулучепреломления по наблюдаемой оптической картине.

**Ключевые слова:** нематические жидкие кристаллы, домены, оптическая анизотропия, двулучепреломление.

## ORIENTATIONAL AND OPTICAL PROPERTIES OF LIQUID-CRYSTAL DOMAINS BOUNDED BY CENTRAL ORIENTING AND SURROUNDING NONORIENTING SURFACES

**A. Solomatin, V. Belyaev**

*Moscow Region State University  
ul. Radio 10a, 105005 Moscow, Russia*

**Abstract.** We consider nematic liquid-crystal (LC) domains, the central part (core) of which has an orienting coating providing a predetermined angle of the director pretilt and the outer side of the domain does not exert any significant orienting influence. We propose a calculation method and construct a theoretical and computational model of the dependence of the phase delay difference  $\Delta\Phi$  on the coordinates of the light beam propagation through the domain. The methods are proposed for determining the geometric parameters of the domain and its birefringence in the observed optical pattern.

**Keywords:** nematic liquid crystal, domains, optical anisotropy, birefringence.

### ВВЕДЕНИЕ

Жидкие кристаллы (ЖК) используются при создании индикаторных устройств, модуляторов, дефлекторов, индикаторов температуры и акустических полей, плоских телевизионных экранов (дисплеев).

Получение и исследование композитных материалов, объединяющих электрооптические свойства жидких кристаллов и механические свойства полимеров (полимер-диспергированные жидкие кристаллы, polymer dispersed liquid crystal – в дальнейшем ПДЖК [1–6]), является одним из перспективных направлений развития современной оптоэлектроники.

Одним из перспективных направлений развития является применение в оптических устройствах мультидоменных структур. ЖК-ячейки с такими структурами в отсутствие управляющего напряжения содержат несколько областей с однородной ориентацией молекул нематика. В связи с этим поиск более дешёвых, доступных и технологических подходов к формированию мультидоменных структур, а также исследование их физических характеристик является актуальной технической задачей. На примере ряда ЖК материалов, структурированных микро- и нанообъектами рассмотрено влияние их на свойства ЖК систем. Исследуются вопросы улучшения оптических характеристик. Установлено, что введение микро- и наночастиц, например, кремнезема, фуллеренов, нанотрубок в материалы вызывает изменение параметров среды вне зависимости от вида вводимого нанообъекта [2; 4; 5].

Для прогнозирования зависимости [6–9] оптических свойств от конфигурации домена в ЖК-ячейке необходимо разработать методы расчета для однородно ориентированного нематика с учётом граничных условий для угла наклона директора на подложках, то есть микро- и нанорельефе поверхности, в том числе молекулярном [10].

Целью работы является моделирование пространственно неоднородных структур ЖК и их оптических свойств в зависимости от размеров и формы объектов в жидком кристалле или вокруг него. На основании этого моделирования возможно и решение обратных задач, как определение размеров и формы объектов в жидком кристалле или вокруг него или определение показателя двулучепреломления жидкого кристалла стало задачами данной работы. Особенностью исследования является варьирование граничных условий на поверхности раздела ЖК и микро- или нанообъекта. На первом этапе моделирования были выбраны чисто гомеотропная и чисто планарная ориентация ЖК на границе раздела, как реализующиеся во множестве практических случаев.

## **§1. Сферические гомеотропные нематические ЖК структуры в оптически изотропном объеме**

### **1.1. Компьютерное моделирование.**

Как и в [11–14], ячейка ЖК помещалась между скрещёнными поляризатором и анализатором. Характеристики жидких кристаллов в значительной мере определяются ориентацией молекул мезогенов на поверхности раздела фаз. В [11–14] рассматривалась зависимость интенсивности и разности фаз луча света, прошедшего через ЖК среду с неоднородным распределением директора ЖК, и приводились методики расчета и экспериментальных измерений. Для компьютерной модели сферического оптически анизотропного нематического ЖК домена (образующегося вокруг сферического тела, введенного в изотропную ЖК среду) были приняты (рис. 1) следующие условия.

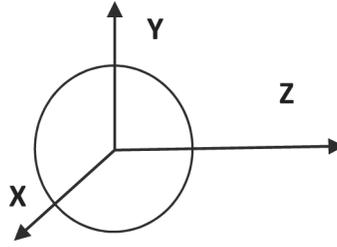


Рис. 1. Сферический домен: оси OX и OZ лежат в плоскости слоя ЖК в ячейке.

Оси OX и OZ лежат в плоскости ячейки ЖК, ось OY перпендикулярна двум другим осям и плоскости ячейки. Луч света падает нормально (вдоль оси OY). Поверхность тела ориентирует прилегающий слой ЖК гомеотропно (директор ЖК в сферическом домене ориентирован радиально). Сферическое тело с осью, совпадающей с OZ, находится посередине между поверхностями ячейки и оптически аналогично изотропной среде (имеет такой же показатель преломления). Изотропная и анизотропная среда полностью прозрачна. На рисунке 2 приведены расчётные данные интенсивности для света, прошедшего через анизотропный ЖК домен (приведены нормированные величины интенсивности света). Толщина слоя ЖК  $L = 10$  микрон. Радиус нематического ЖК домена  $L/2$  (домен во всю толщину слоя ЖК в ячейке). Показатели преломления нематического ЖК: обыкновенный  $n_o = 1,5$ , необыкновенный  $n_e = 1,55$ . Длина волны  $\lambda = 630$  нанометров. Сферический ЖК домен не искажает свою радиально ориентированную структуру там, где он прилегает к поверхности.

По формуле линзы (1.1)  $\frac{n_o}{f} = (n - n_o) \left\{ \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{(n - n_o)d}{nR_1R_2} \right\}$  фокусное расстояние

составляет для рассмотренных в данной работе параметров преломляющих систем около 80 мкм для  $n_o = 1,5$ ,  $n_e = 1,55$ . Поэтому пренебрегаем нелинейностью распространения света.

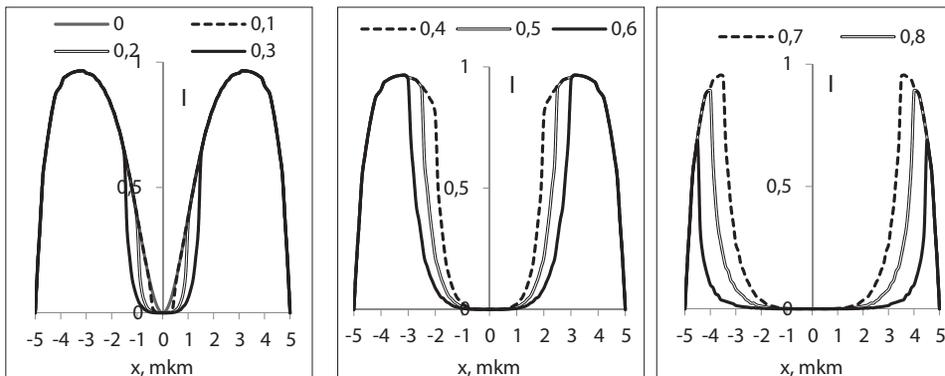


Рис. 2. Интенсивность света, прошедшего через сферический гомеотропный домен, в зависимости от относительного диаметра центрального тела.

$L = 10$  микрон,  $n_o = 1,5$ ,  $n_e = 1,55$ .

Интенсивность света, прошедшего через сферический домен показана на рис. 3. Толщина слоя ЖК на рис. 3  $L = 10$  (слева) или 20 (справа) микрон,  $n_o = 1,5$ ,  $n_e = 1,65$ .

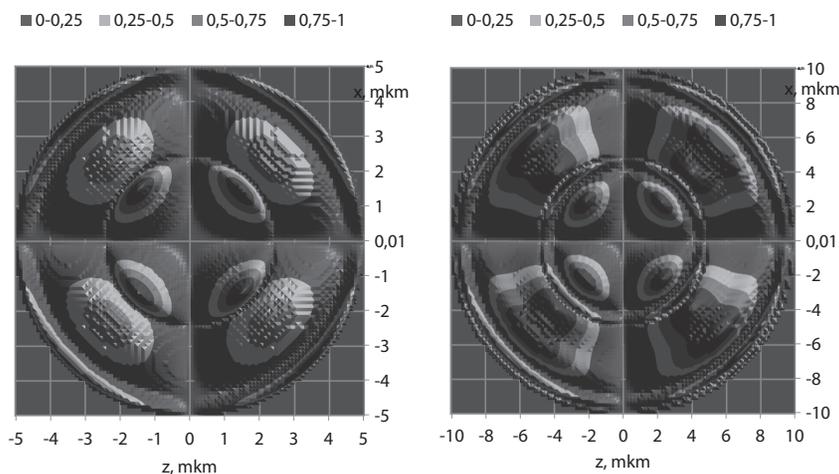


Рис. 3. Интенсивность света, прошедшего через сферический домен, диаметр центрального тела 0,5 от диаметра домена.

## 1.2. Обсуждение результатов компьютерного моделирования

Как видно из результатов компьютерного моделирования, изменение относительного размера центрального тела и изменение радиуса сферического ЖК домена влияют на формирование оптической картины существенно различным образом. В выше рассмотренных случаях, как правило, достаточно отчётливо видно резкое изменение яркости вблизи границ проекции центрального тела. По этому признаку (кольцевая область с очень высокой контрастностью) можно оценить радиус центрального тела, хотя и не вполне точно. Важно не только наличие кольцевой высококонтрастной области, но и характерное распределение экстремумов, позволяющих, сравнивая с данными моделирования (если известно двулучепреломление  $\Delta n$ ), отождествить картину с конкретными геометрическими характеристиками домена и центрального тела.

В случае, если размеры помещённых в среду (на поверхность ячейки) тел, вокруг которых образуются домены сферической формы, известны заранее, и если удалось определить размеры сферического домена, то можно по оптической картине, сравнивая с данными моделирования, определить двулучепреломление  $\Delta n$ .

## §2. Сферические планарные нематические ЖК структуры в оптически изотропном объёме

### 2.1. Компьютерное моделирование

Луч света падает нормально (вдоль оси  $OY$ ). Ось  $OX$  лежит в плоскости поляризации падающего луча света. Ось  $OZ$  перпендикулярна плоскости поляризации

падающего луча света. Директор ЖК в сферическом домене ориентирован тангенциально. Каждый тонкий сферический слой содержит пару точек (полюсов), лежащих на оси  $OY$ . В полюсах сходятся линии тангенциально ориентированного директора ЖК в данном сферическом тонком слое. От полюса к полюсу линии директора ЖК образуют дугу окружности, лежащую в тонком сферическом слое.

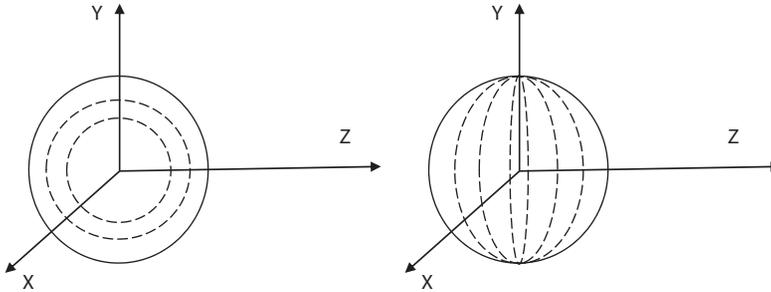


Рис. 4. Сферический домен: оси  $OX$  и  $OZ$  лежат в плоскости слоя ЖК в ячейке. Слева тангенциальная ориентация с полюсами для каждого сферического слоя, расположенными на оси  $OY$  в этих сферических слоях. Справа полюсов два.

Диаметр  $D$  нематического ЖК домена 10 микрон. ЖК оптически аналогичный изотропной среде (имеющим такой же показатель преломления). Показатели преломления ЖК:  $n_o = 1,5$ ,  $n_e = 1,55$ . Длина волны  $\lambda = 630$  нанометров. Изотропную среду и анизотропную среду считаем полностью прозрачной. На рис. 5 и 6 приведены данные для интенсивности света, прошедшего через анизотропный ЖК домен. На остальных участках (на которые падает свет, не прошедший через анизотропный домен) предполагается интенсивность прошедшего света, равная падающему свету. Интенсивность падающего света принята за единицу (то есть приведены нормированные величины интенсивности света).

Также рассмотрен вариант, приведенный на рис. 4 справа, с парой полюсов (бужумов). Смоделированные результаты для такого случая незначительно отличаются от чисто сферического тангенциального распределения. Результаты для случая с парой полюсов приведены на рис. 5 справа.

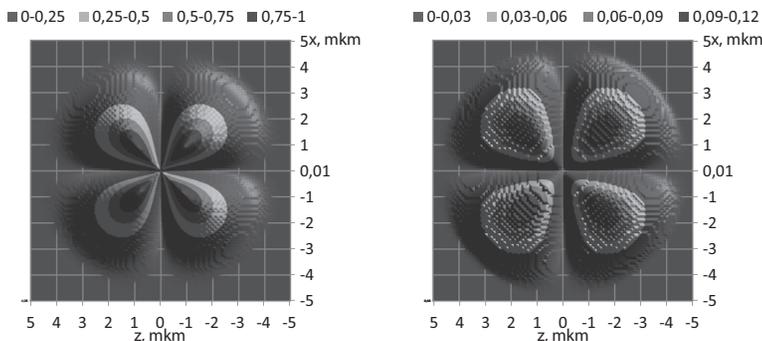
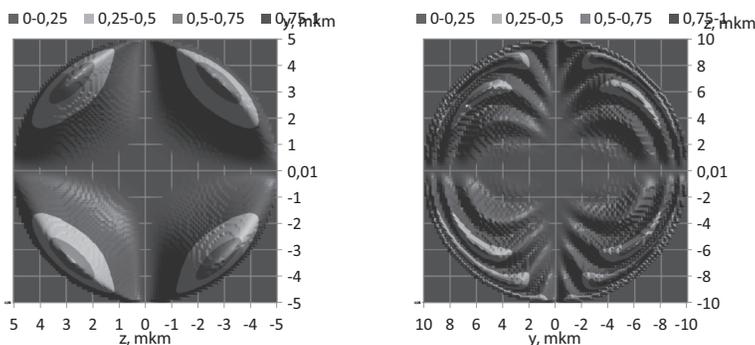


Рис. 5. Вид вдоль оси ЖК капли (с полюса)

Ниже слева на рис. 6а рассмотрен случай прохождения поляризованного света, плоскость поляризации которого параллельна оси  $OY$  капли, полюса капли на рисунке 6а находятся сверху и снизу. Справа на рис. 6б показан случай прохождения поляризованного света, плоскость поляризации которого перпендикулярна оси  $OY$ , на которой лежат полюса. Полюса на рис. 6б справа и слева.



А)  $D = 10$  мкм,  $n_o = 1,5$ ,  $n_e = 1,55$

Б)  $D = 20$  мкм,  $n_o = 1,5$ ,  $n_e = 1,65$

Рис. 6. Вид перпендикулярно оси ЖК капли

Как показано на рис. 5, в случае наблюдения с полюса видимый диаметр капли меньше истинного, то есть кольцевая область, ориентированная по отношению к лучу света (и наблюдателю) параллельно, выглядит чёрной. Кольцевая зона с интенсивностью сигнала ниже 0,05 от полной имеет ширину кольца около 0,1 от радиуса капли. Ниже на рис. 7, рис. 8 приведена схема тангенциальной ориентации ЖК в капле и схемы наблюдаемых оптических эффектов.

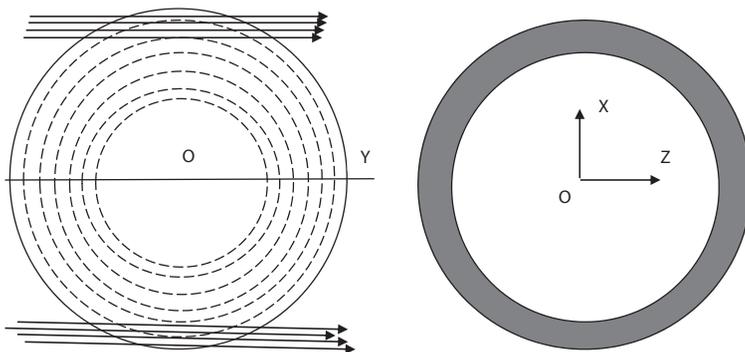


Рис. 7. Показана слева капля ЖК, на которой заштрихованы стрелками, изображающими лучи света, области капли с углами директора ЖК к лучам света, близкими к параллельным. Справа показана затемненная кольцевая зона в оптической картине, сформированной каплей, ширина которой около 0,1 радиуса капли.

Если луч света проходит под некоторым углом к продольной оси капли, то затемнённая зона будет иметь другую форму. В плоскости, содержащей луч света

и ось капли, ширина затемнённой полосы не изменится. А в перпендикулярной к ней плоскости ширина затемнённой полосы будет меньше и, по мере роста угла, станет равна нулю. При дальнейшем росте угла начнётся уменьшение ширины затемнённой зоны и в плоскости, содержащей ось капли и луч света. Постепенно, по мере приближения угла к прямому, сформируется картина, показанная на рис. 6 для наблюдения под прямым углом к оси капли. Это обусловлено тем, что при наличии угла между осью капли и лучом света, для тех молекул нематического ЖК, которые лежат в плоскости, содержащей луч и ось, ситуация не изменится и они будут приблизительно параллельны лучу света. А для молекул ЖК, лежащих в плоскости, образующей угол к плоскости, содержащей луч и ось, будет играть заметную роль угол между плоскостями. И их вклад в оптическую картину, формируемую каплей, будет отличаться от вклада параллельных к лучу молекул ЖК. Это схематически показано на рис. 8. Необходимо учитывать, что обычно нематические ЖК не ориентируются тангенциально к поверхности, а под малым углом к ней. В таком случае значительная ширина переходного слоя (длина когерентности) приводит к значительному увеличению ширины затемненной зоны в оптической картине, сформированной каплей. Это схематически показано на рис. 9.

Как было показано выше, если луч света проходит не от полюса к полюсу, а под некоторым углом к продольной оси капли, то затемненная зона будет иметь другую форму (рис. 8). По оптической картине возможно определение зависимости ориентационных углов оси капли в зависимости от приложенного поля. Также по оптической картине возможно определение приповерхностного угла ориентации директора нематического ЖК в каплях, а также толщина переходного слоя и диаметр капли. В свою очередь, по диаметру капли и параметрам переходного слоя (углу у поверхности, толщине) можно определить упругие характеристики ЖК материала.

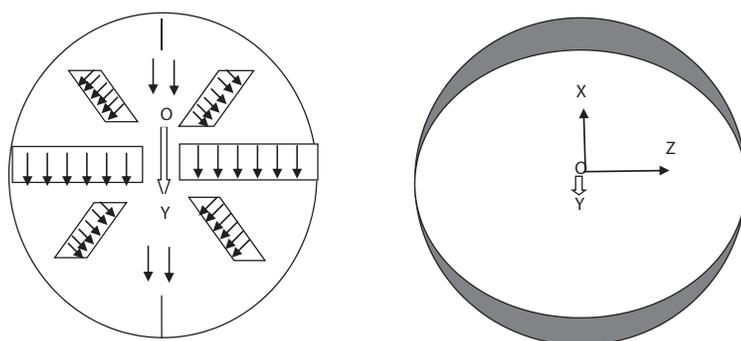


Рис. 8. Слева капля ЖК, на которой заштрихованы стрелками, изображающими директор ЖК, области капли с углами директора ЖК к лучам света, отличными от параллельных. Светлой стрелкой показана ось капли  $OY$  на наблюдателя (то есть по отношению к лучу света) и под углом вниз. Плоскость поляризации света на рисунке вертикальная. Справа показана затемненная неколецевая зона в оптической картине, сформированной лучом света под углом к оси  $OY$  капли, ширина затемнённой зоны от нуля до  $0,1$  радиуса капли. Плоскость поляризации света на рисунке вертикальная, вдоль оси  $OX$ .

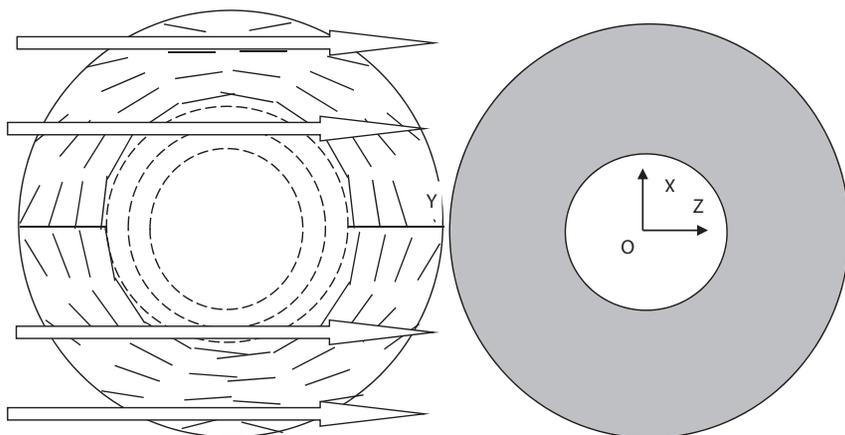


Рис. 9. Слева капля ЖК, на которой светлые стрелки, изображающие лучи света, проходят параллельно оси капли ОУ сквозь области капли с углами директора ЖК к лучам света, близкими к параллельным. Справа затемнённая кольцевая зона в оптической картине, сформированной каплей при прохождении поляризованного света параллельно оси капли ОУ, ширина которой около 0,7 радиуса капли.

### §3. Выводы по сферическим доменам.

Смоделированы оптические свойства, в зависимости от размеров и оптических характеристик, сферических анизотропных нематических ЖК доменов в изотропной фазе, в том числе как планарных, так и гомеотропных. При моделировании рассмотрены как домены с центральным телом незначительного радиуса, так и сформировавшиеся вокруг крупного сферического центрального тела.

Предложено по наблюдаемой оптической картине определять размеры ЖК доменов и радиус центрального тела в них для ЖК с известными оптическими характеристиками (показателями преломления).

Предложено, при предварительно известном размере ЖК доменов и помещённых в среду доменообразующих (центральных) тел, по наблюдаемой оптической картине определять двулучепреломление ( $\Delta n = n_e - n_o$ ) и, при известном обыкновенном показателе преломления, определять необыкновенный ( $n_e$ ).

Предложенные методы определения оптических характеристик и размеров сферических ЖК доменов могут иметь прикладное значение при проектировании ЖК индикаторных средств.

#### Полимер-ЖК

Если анизотропные ЖК домены заключены в полимерную изотропную матрицу и показатель преломления полимерного материала равен обыкновенному показателю преломления ЖК материала, то можно рассматривать по аналогии с вышеописанными сферическим доменами при радиусе внутреннего тела, равном нулю. Результаты будут одинаковые.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Васильев А.А., Касасент Д., Компанец И.Н., Парфенов А.В. Пространственные модуляторы света. М.: Радио и связь. 1987. 320 с.
2. Каманина Н.В., Капорский Л.Н. Влияние фуллеренов на динамические характеристики жидкокристаллических систем // Письма в журнал технической физики. 2000. Т. 26. № 19. С. 30–38.
3. Жаркова Г.М., Сонин А.С. Жидкокристаллические композиты. Новосибирск: ВО «Наука». 1994. 214 с.
4. Каманина Н.В. Ракчеева Л.П. Перспективы использования фуллеренов для ориентации жидкокристаллических композиций // Письма в журнал технической физики. 2002. Т. 28. № 11. С. 28–36.
5. Каманина Н.В. Фуллеренсодержащие диспергированные нематические жидкокристаллические структуры: динамические характеристики и процессы самоорганизации // Успехи физических наук. 2005. Т. 175. № 4. С. 445–454.
6. Машин А.И. Коробков А.В. Электрооптический эффект в плёнках полимера, диспергированного нематическим жидким кристаллом: учебно-методическое пособие. Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет. 2010. 11 с.
7. Томилин М.Г. Взаимодействие жидких кристаллов с поверхностью. СПб.: Политехника. 2001. 325 с.: ил.
8. Sonin A.A. The surface physics of LCs. Amsterdam: Gordon and Breach Publisher. 1995. pp. 118–122.
9. Коньяр Ж. Ориентация НЖК и их смесей. Минск: БГУ. 1986. 104 с.
10. Беляев В.В., Мазаева В.Г., Минько А.А., Тимофеев С.Н., Кремнийорганические пленки с молекулярным микрорельефом для ориентации жидких кристаллов // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2010. № 1. С. 52–56.
11. Belyaev V., Solomatin A., Chausov D., Phase retardation vs. pretilt angle in liquid crystal cells with homogeneous and inhomogeneous LC director configuration // Optics Express. 2013. Vol. 21. pp. 4244–4249.
12. Belyaev V.V., Solomatin A.S., Kurilov A.D., Chausov D.N., Mazaeva V.G., Optical Properties of Hybrid Aligned Nematic (HAN) Cells with Different Pretilt Angles // Applied Optics. 2014. Vol. 53. Issue 29. pp. H51–H57.
13. Беляев В.В., Соломатин А.С. Оптические свойства гибридных жидкокристаллических ячеек при различных углах падения света // Оптический Журнал. 2015. Т. 82. № 1. С. 41–48.
14. Беляев В.В., Соломатин А.С., Чаусов Д.Н. Оптические свойства ЖК ячеек с произвольным краевым углом наклона директора // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2013. № 1. С. 32–41.

## REFERENCES

1. Prostranstvennyye modulyatory sveta [Spatial light modulators]. Vasil'ev A.A., Kasasent D., Kompanets I.N., Parfenov A.V. M., Radio i svyaz', 1987. 320 p.
2. Kamanina N.V., Kaporskii L.N. Vliyanie fullerenov na dinamicheskie kharakteristiki zhidkokristallicheskih sistem [The influence of fullerenes on the dynamic characteristics of liquid-crystal systems] // Pis'ma Zh. Tekh. Fiz. [Tech. Phys. Lett.]. 2000. Vol. 26. no. 19. pp. 30–38.
3. Zharkova G.M., Sonin A.S. Zhidkokristallicheskie kompozity [Liquid-crystal composites]. Novosibirsk, VO "Nauka", 1994. 214 p.

4. Kamanina N.V., Rakcheeva L.P. Perspektivy ispol'zovaniya fullerenov dlya orientatsii zhidkokristallicheskih kompozitsii [Prospects for the use of fullerenes for the orientation of liquid crystal compositions] // Pis'ma Zh. Tekh. Fiz. [Tech. Phys. Lett.]. 2002. Vol. 28. no. 11. pp. 28–36.
5. Kamanina N.V. Fullerenosoderzhashchie dispergirovannye nematicheskie zhidkokristallicheskie struktury: dinamicheskie kharakteristiki i protsessy samoorganizatsii [Fullerene-like dispersed nematic liquid-crystal structures: dynamic characteristics and processes of self-organization] // Uspekhi fizicheskikh nauk [Phys. Usp.]. 2005. Vol. 175. no. 4. pp. 445–454.
6. Mashin A.I., Korobkov A.V. Elektroopticheskiy effekt v plenkakh polimera, dispergirovannogo nematicheskim zhidkim kristallom: uchebno-metodicheskoe posobie [Electro-optical effect in polymer films dispersed by a nematic liquid crystal: a tutorial]. Nizhny Novgorod, Nizhegorodskii gosuniversitet, 2010. 11 p.
7. Tomilin M.G. Vzaimodeistvie zhidkikh kristallov s poverkhnost'yu [Interaction of liquid crystals with surface]. SPb., Politekhnik, 2001. 325 p.
8. Sonin A.A. The surface physics of LCs. Amsterdam: Gordon and Breach Publisher. 1995. pp. 118–122.
9. Konyar Zh. Orientatsiya NZHK i ikh smesei [Orientation of neumatic liquid crystals and their mixtures]. Minsk, BGU, 1986. 104 p.
10. Kremniorganicheskie plenki s molekulyarnym mikrorel'efom dlya orientatsii zhidkikh kristallov [Organosilicon films with a molecular microrelief for orientation of liquid crystals], Belyaev V.V., Mazaeva V.G., Min'ko A.A., Timofeev S.N. // Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika [Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics]. 2010. no. 1. pp. 52–56.
11. Belyaev V., Solomatin A., Chausov D. Phase retardation vs. pretilt angle in liquid crystal cells with homogeneous and inhomogeneous LC director configuration // Optics Express. 2013. Vol. 21. pp. 4244–4249.
12. Belyaev V.V., Solomatin A.S., Kurilov A.D., Chausov D.N., Mazaeva V.G., Optical Properties of Hybrid Aligned Nematic (HAN) Cells with Different Pretilt Angles // Applied Optics. 2014. Vol. 53. Issue 29. pp. H51–H57.
13. Belyaev V.V., Solomatin A.S. Opticheskie svoystva gibridnykh zhidkokristallicheskih yacheek pri razlichnykh uglakh padeniya sveta [Optical properties of hybrid liquid crystal cells at various angles of incidence of light] // Opticheskiy Zhurnal [Journal of Optics]. 2015. Vol. 82. no. 1. pp. 41–48.
14. Belyaev V.V., Solomatin A.S., Chausov D.N. Opticheskie svoystva ZHK yacheek s proizvol'nym kraevym uglom naklona direktora [Optical properties of the LCD cell with an arbitrary boundary angle of the director] // Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika [Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics]. 2013. no. 1. pp. 32–41.

### ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

*Соломатин Алексей Сергеевич* – кандидат физико-математических наук, инженер учебно-научной лаборатории теоретической и прикладной нанотехнологии, Московский государственный областной университет;  
e-mail: Sotrudnica\_UNC@mail.ru

*Беляев Виктор Васильевич* – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической физики, Московский государственный областной университет;  
e-mail: vic\_belyaev@mail.ru

**INFORMATION ABOUT THE AUTHORS**

*Aleksei Solomatin* – candidate of physical and mathematical sciences, engineer of the Education & Science Lab for Theoretical and Applied Nanotechnology at the Moscow Region State University;  
e-mail: Sotrudnica\_UNC@mail.ru

*Victor Belyaev* – doctor of technical sciences, professor, head of the department of theoretical physics at the Moscow Region State University;  
e-mail: vic\_belyaev@mail.ru

**БИБЛИОГРАФИЧЕСКАЯ ССЫЛКА**

*Соломатин А.С., Беляев В.В.* Ориентационные и оптические свойства сферических доменов жидкого кристалла центральной ориентирующей и внешней неориентирующей поверхностью // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2016. № 4. С. 32–42.  
DOI: 10.18384/2310-7251-2016-4-32-42.

**BIBLIOGRAPHIC REFERENCE**

*A. Solomatin, V. Belyaev.* Orientational and optical properties of liquid-crystal domains bounded by central orienting and surrounding non-orienting surfaces // Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics. 2016. № 4. no. 32–42.  
DOI: 10.18384/2310-7251-2016-4-32-42.

УДК 537.312.8

DOI: 10.18384/2310-7251-2016-4-43-55

## РАСЧЁТ ВЫСОКОЧАСТОТНОЙ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТИ И ПОСТОЯННОЙ ХОЛЛА ДЛЯ ТОНКОЙ МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ ПЛЕНКИ

**Савенко О.В.**

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова  
150000, г. Ярославль, ул. Советская, д. 14, Российская Федерация

**Аннотация.** Рассмотрена кинетическая задача о нахождении высокочастотной электропроводности и постоянной Холла для тонкой металлической плёнки в поперечном стационарном магнитном поле и в продольном переменном электрическом поле. Предполагается диффузное отражение электронов от верхней и нижней границ плёнки. На соотношение между толщиной плёнки и длиной свободного пробега электронов ограничений не накладывается. Исследованы зависимости электропроводности и постоянной Холла от безразмерных параметров: частоты электрического поля, индукции магнитного поля и толщины плёнки. Проведено сравнение полученных результатов с экспериментальными данными.

**Ключевые слова:** функция распределения, уравнение Больцмана, электропроводность, постоянная Холла, тонкая пленка.

## CALCULATION OF HIGH-FREQUENCY CONDUCTIVITY AND HALL CONSTANT OF A THIN METAL FILM

**O.Savenko**

P.G. Demidov Yaroslavl State University  
ul. Sovetskaya 14, 150000 Yaroslavl, Russia

**Abstract.** We consider the kinetic problem on high-frequency conductivity and Hall constant of a thin metal film placed in a transverse stationary magnetic field and a longitudinal alternative electric field. The electron reflection from the upper and lower film boundaries is assumed to be diffusive. The relationship between the film thickness and the electron mean free path is arbitrary. The dependences of the conductivity and Hall constant on such dimensionless parameters as the electric field frequency, magnetic field induction and film thickness are investigated. The obtained results are compared with the experimental data.

**Keywords:** distribution function, Boltzmann equation, conductivity, Hall constant, thin film.

### ВВЕДЕНИЕ

Исследования свойств тонких проводящих плёнок стимулированы бурным развитием нанотехнологий. Особый интерес уделяется проводящим плёнкам

толщиной 1–10 нм (сверхтонкие плёнки) в силу специфичности их свойств. Такие плёнки широко используются в микроэлектронике, в СВЧ-электронике [7], нанофотонике, оптоэлектронике, в производстве солнечных элементов [2] и т.д. Поликристаллические плёнки могут применяться при создании высокоёмкостных конденсаторов с малой площадью обкладок [13]. Современные интегральные схемы содержат несколько миллиардов транзисторов, поэтому требования к качеству, параметрам и свойствам тонких плёнок являются довольно высокими [1].

Нанотехнологии позволяют создавать материалы с характерным линейным размером порядка нанометров, тогда как длина свободного пробега носителей заряда в металлах варьируется в пределах 10–100 нм, а в полупроводниках – в интервале 10–1000 нм [3; 10], таким образом, практически реализуется ситуация, когда длина свободного пробега носителей заряда сравнима или больше толщины плёнки. Из эксперимента следует, что для плёнок серебра, золота, меди наблюдается резкая зависимость электропроводности и оптических характеристик, в частности коэффициента отражения, от толщины пленки при её увеличении в диапазоне от 5 до 40 нм [4]. Для удешевления и развития тонкоплёночных технологий является актуальным теоретическое моделирование плёнок с заданными электрическими и оптическими свойствами. Если толщина плёнки много больше длины волны де Бройля, которая в типичных металлах составляет величину порядка межатомного расстояния (~0,3 нм), а в полупроводниках принимает значение ~10 нм [3, 10], то квантовыми эффектами в подобных задачах можно пренебречь.

Ещё в XIX веке Фарадеем было установлено, что электропроводность тонких плёнок может быть много меньше электропроводности массивных металлов. Данное явление было теоретически проанализировано Фуксом [15] и Зондгеймером [17; 18]. В работах [17; 18] впервые рассмотрено влияние магнитного поля на статическую проводимость тонкой металлической плёнки [17; 18] и тонкой цилиндрической проволоки [18].

В настоящей работе проводится исследование высокочастотной электропроводности тонкой металлической плёнки, находящейся в поперечном магнитном поле и в продольном переменном электрическом поле. Предполагаем, что толщина плёнки меньше глубины скин-слоя, что позволяет пренебречь скин-эффектом. Отметим, что скин-эффект учитывался в работе [6] для случая тонкой цилиндрической проволоки. Будем считать, что электрическое и магнитное поле однородны.

### Постановка задачи

Рассмотрим тонкий металлический слой толщины  $a$ , находящийся в поперечном магнитном поле напряжённости  $\mathbf{H}$ . К этому слою приложено однородное периодическое во времени электрическое поле напряжённости  $\mathbf{E}$ , параллельное плоскости плёнки и меняющееся по закону:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t), \quad (1)$$

где  $\omega$  – частота переменного напряжения, приложенного к слою.

Если толщина плёнки много больше длины свободного пробега электронов ( $a \gg \lambda$ ), для решения данной задачи можно воспользоваться классической электродинамикой, т.е. применим локальный закон Ома:

$$\mathbf{j} = \Sigma(\omega)\mathbf{E}, \quad (2)$$

$$\Sigma(\omega) = \sigma_0 / (1 - i\tau\omega),$$

где  $\Sigma(\omega)$  – проводимость Друде,  $\sigma_0 = ne^2\tau/m$  – статическая проводимость,  $e$  и  $m$  – соответственно элементарный заряд и масса электрона,  $n$  – концентрация электронов,  $\tau$  – время релаксации.

В случае, когда толщина плёнки сравнима с длиной свободного пробега электронов или меньше её ( $a \leq \lambda$ ), макроскопическая электродинамика становится неприменимой, и для решения задачи необходимо применять кинетический метод.

Электрическое поле (1) действует на электроны проводимости в плёнке и вызывает отклонение их функции распределения от равновесной функции Ферми-Дирака:

$$f(\mathbf{v}, z, t) = f_0(\varepsilon) + f_1(\mathbf{v}, z, t) = f_0(\varepsilon) + f_1(\mathbf{v}, z) \cdot \exp(-i\omega t), \quad (3)$$

где  $\varepsilon = m\mathbf{v}^2/2$  – кинетическая энергия электрона,  $\mathbf{v}$  – скорость электрона.

Равновесную функцию распределения электронов можно представить в виде ступенчатой аппроксимации:

$$f_0(\varepsilon) = \begin{cases} 1, & 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_F; \\ 0, & \varepsilon > \varepsilon_F, \end{cases} \quad (4)$$

где  $\varepsilon_F = m\mathbf{v}_F^2/2$  – энергия Ферми,  $\mathbf{v}_F$  – скорость Ферми.

Функцию  $f_1$  можно найти из уравнения Больцмана в приближении времени релаксации и в линейном по внешнему полю приближении [18]:

$$\frac{\partial f_1}{\partial z} + \frac{\mathbf{v}}{v_z} f_1 - \frac{eH}{mcv_z} \left( v_y \frac{\partial f_1}{\partial v_x} - v_x \frac{\partial f_1}{\partial v_y} \right) = \frac{e}{mv_z} \left( E_x \frac{\partial f_0}{\partial v_x} + E_y \frac{\partial f_0}{\partial v_y} \right), \quad (5)$$

где  $\nu = \tau^{-1} - i\omega$  – комплексная частота рассеяния.

Будем считать, что электроны отражаются от верхней и нижней границ плёнки диффузно, т.е. неравновесная поправка  $f_1$  к функции распределения отражённых от верхней и нижней границ плёнки электронов равна нулю:

$$\begin{cases} f_1^+(\mathbf{v}, 0) = 0, & v_z > 0; \\ f_1^-(\mathbf{v}, a) = 0, & v_z < 0. \end{cases} \quad (6)$$

Задача сводится к отысканию функции распределения электронов, у которых проекция скорости на ось  $Z$  положительна ( $f_1^+(\mathbf{v}, z)$ ) и у которых проекция скорости на ось  $Z$  отрицательна ( $f_1^-(\mathbf{v}, z)$ ).

Зная функцию распределения электронов, можно рассчитать ток, плотность которого определяется следующим образом:

$$\mathbf{j} = -2e \left( \frac{m}{h} \right)^3 \int \mathbf{v} f_1 d^3v. \quad (7)$$

Используя выражение (7), можно найти проводимость и постоянную Холла для плёнки.

### Математические расчёты

Уравнение Больцмана (5) можно решить способом, аналогичным [18]. Для этого представим функцию  $f_1$  в следующем виде:

$$f_1(\mathbf{v}, z) = [\nu_x c_1(\nu_z, z) + \nu_y c_2(\nu_z, z)] \frac{\partial f_0}{\partial \nu}, \quad (8)$$

где  $c_1(\nu_z, z)$  и  $c_2(\nu_z, z)$  – некоторые функции от  $z$ -й компоненты скорости и координаты  $z$ .

После подстановки (8) в уравнение (5), получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} \nu_x \frac{\partial c_1(\nu_z, z)}{\partial z} + \nu_y \frac{\partial c_2(\nu_z, z)}{\partial z} + \frac{\nu}{\nu_z} [\nu_x c_1(\nu_z, z) + \nu_y c_2(\nu_z, z)] - \\ - \frac{eH}{m\nu_z} [\nu_y c_1(\nu_z, z) - \nu_x c_2(\nu_z, z)] = \frac{e}{m\nu\nu_z} (E_x \nu_x + E_y \nu_y). \end{aligned} \quad (9)$$

Приравнявая коэффициенты при  $\nu_x$  и  $\nu_y$ , получим систему дифференциальных уравнений на функции  $c_1(\nu_z, z)$  и  $c_2(\nu_z, z)$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial c_1(\nu_z, z)}{\partial z} + \frac{eH}{m\nu_z} c_2(\nu_z, z) + \frac{\nu}{\nu_z} c_1(\nu_z, z) = \frac{eE_x}{m\nu\nu_z}; \\ \frac{\partial c_2(\nu_z, z)}{\partial z} - \frac{eH}{m\nu_z} c_1(\nu_z, z) + \frac{\nu}{\nu_z} c_2(\nu_z, z) = \frac{eE_y}{m\nu\nu_z}. \end{cases} \quad (10)$$

Плоскость плёнки можно представить как комплексную плоскость, роль действительной оси которой играет ось  $X$ , а роль мнимой оси – ось  $Y$ . Введём новые переменные:

$$g(\nu_z, z) = c_1(\nu_z, z) - ic_2(\nu_z, z) \quad (11)$$

$$F = E_x - iE_y,$$

где  $F$  – комплексная напряжённость электрического поля.

Система (10) сведётся к одному уравнению

$$\frac{\partial g(\nu_z, z)}{\partial z} + \frac{ieH}{m\nu_z} g(\nu_z, z) + \frac{\nu}{\nu_z} g(\nu_z, z) = \frac{eF}{m\nu\nu_z}, \quad (12)$$

общее решение которого определяет функцию  $g(\nu_z, z)$ :

$$g(v_z, z) = \frac{eF}{m\nu v \left(1 + \frac{ieH}{vmc}\right)} \left\{ 1 + \psi(v_z) \exp \left[ -\frac{zv}{v_z} \left(1 + \frac{ieH}{vmc}\right) \right] \right\}. \quad (13)$$

Здесь  $\psi(v_z)$  – постоянная интегрирования, зависящая только от  $v_z$ . Функцию  $\psi(v_z)$  можно найти из граничных условий (6):

$$\begin{cases} \psi^+(v_z) = -1, & v_z > 0; \\ \psi^-(v_z) = -\exp \left[ \frac{av}{v_z} \left(1 + \frac{ieH}{vmc}\right) \right], & v_z < 0. \end{cases} \quad (14)$$

Для нахождения плотности тока по формуле (7) удобно воспользоваться сферической системой координат в пространстве скоростей  $\mathbf{v} = (v, \theta, \gamma)$ , где  $v$  – модуль скорости,  $\theta$  и  $\gamma$  – соответственно полярный и азимутальный углы в пространстве скоростей).

Подставив функцию  $f_1$  (8) в выражение (7), получим проекции плотности тока на ось  $X$  и  $Y$ :

$$j_x = -2\pi e \left(\frac{m}{h}\right)^3 \int_0^\infty \int_0^\pi v^4 \sin^3 \theta \cdot c_1 \frac{\partial f_0}{\partial v} dv d\theta, \quad (15)$$

$$j_y = -2\pi e \left(\frac{m}{h}\right)^3 \int_0^\infty \int_0^\pi v^4 \sin^3 \theta \cdot c_2 \frac{\partial f_0}{\partial v} dv d\theta. \quad (16)$$

Введём новое обозначение  $J = j_x - ij_y$ , которое будем называть комплексным током, тогда (15) и (16) можно свести к одному выражению:

$$J = -2\pi e \left(\frac{m}{h}\right)^3 \int_0^\infty \int_0^\pi v^4 \sin^3 \theta \cdot g(v_z, z) \frac{\partial f_0}{\partial v} dv d\theta. \quad (17)$$

В экспериментальных условиях обычно находят усреднённый по толщине плёнки ток:

$$\begin{aligned} \bar{J} &= \frac{1}{a} \int_0^a J dz = -\frac{2\pi e}{a} \left(\frac{m}{h}\right)^3 \int_0^\infty \int_0^\pi v^4 \sin^3 \theta \cdot g(v_z, z) \frac{\partial f_0}{\partial v} dv d\theta dz = \\ &= -\frac{2\pi e}{a} \left(\frac{m}{h}\right)^3 \int_0^\infty \int_0^\pi v^4 \frac{\partial f_0}{\partial v} \left\{ \int_0^{\pi/2} \sin^3 \theta \cdot g^+(v_z, z) d\theta + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\pi/2}^\pi \sin^3 \theta \cdot g^-(v_z, z) d\theta \right\} dv dz. \end{aligned} \quad (18)$$

Подставляя функцию  $g(v_z, z)$  в (18) и проведя необходимые вычисления, получим выражение для комплексного тока, усреднённого по толщине плёнки:

$$\bar{J} = \frac{\sigma_0 x_0 F}{\varphi(s)}, \sigma_0 = \frac{ne^2 \tau}{m}, \quad (19)$$

$$\frac{1}{\varphi(s)} = \frac{1}{s} \left\{ 1 - \frac{3}{8s} + \frac{3}{2s} \int_1^\infty \left( \frac{1}{t^3} - \frac{1}{t^5} \right) \exp(-st) dt \right\}, \quad (20)$$

$$t = \frac{1}{\cos \theta}, s = z_0 + i\beta,$$

$$\beta = a \frac{eH}{m\nu_{FC}}, z_0 = \frac{a\nu}{\nu_F} = \frac{a}{\nu_F \tau} - i \frac{a\omega}{\nu_F} = x_0 - iy_0.$$

Используя выражение (19), найдём проводимость и постоянную Холла для плёнки:

$$\sigma = \frac{j_x}{E_x} = \frac{\sigma_0 x_0}{E_x} \frac{E_x \operatorname{Re}(\varphi(s)) - E_y \operatorname{Im}(\varphi(s))}{|\varphi(s)|^2}, \quad (21)$$

$$A_H = \frac{E_y}{Hj_x} = -\frac{E_y A_{H,0}}{\beta} \frac{|\varphi(s)|^2}{E_x \operatorname{Re}(\varphi(s)) - E_y \operatorname{Im}(\varphi(s))}. \quad (22)$$

Здесь  $A_{H,0} = -1/(enc)$  – постоянная Холла в классическом случае.

Предполагая, что ток вдоль оси  $Y$  не течёт ( $j_y = \operatorname{Im}(\bar{J}) = 0$ ), найдём связь между  $x$ - и  $y$ -компонентами напряжённости электрического поля:

$$E_y \operatorname{Re}(\varphi(s)) + E_x \operatorname{Im}(\varphi(s)) = 0. \quad (23)$$

Используя (23) и подставляя выражение (20) для функции  $\varphi(s)$  в (21) и (22), получим окончательное выражение для проводимости и постоянной Холла тонкой металлической плёнки:

$$\sigma(x_0, y_0, \beta) = \sigma_0 \Sigma(x_0, y_0, \beta), \quad (24)$$

$$A_H(x_0, y_0, \beta) = A_{H,0} R_H(x_0, y_0, \beta), \quad (25)$$

$$\Sigma(x_0, y_0, \beta) = x_0 \frac{\left( z_0 - \frac{3}{8}(1-4a) \right)^2 + \left( \beta - \frac{3}{2}b \right)^2}{z_0(z_0^2 + \beta^2) - 3b\beta z_0 + \frac{3}{8}(1-4a)(\beta^2 - z_0^2)}, \quad (26)$$

$$R_H(x_0, y_0, \beta) = \frac{1}{\beta} \frac{\frac{3}{2}b(z_0^2 - \beta^2) - \frac{3}{4}\beta z_0(1-4a) + \beta(z_0^2 + \beta^2)}{\left( z_0 - \frac{3}{8}(1-4a) \right)^2 + \left( \beta - \frac{3}{2}b \right)^2}, \quad (27)$$

$$a = \int_1^{\infty} \left( \frac{1}{t^3} - \frac{1}{t^5} \right) \cdot \exp(-z_0 t) \cdot \cos(\beta t) dt,$$

$$b = \int_1^{\infty} \left( \frac{1}{t^3} - \frac{1}{t^5} \right) \cdot \exp(-z_0 t) \cdot \sin(\beta t) dt.$$

### Предельные случаи

1. Рассмотрим статический случай ( $y = 0$ ). Выражения (20), (26) и (27) будут иметь тот же вид, если переменную  $z_0$  заменить на  $x_0$ . В этом статическом пределе полученные выражения согласуются с результатами работ [5; 18].

2. Рассмотрим другой предельный случай, когда магнитное поле отсутствует ( $\beta = 0$ ). Выражение (26) примет следующий вид:

$$\Sigma(x_0, y_0) = \frac{x_0}{z_0} \left( 1 - \frac{3}{8z_0} + \frac{3}{2z_0} \int_1^{\infty} \left( \frac{1}{t^3} - \frac{1}{t^5} \right) \cdot \exp(-z_0 t) dt \right). \quad (28)$$

Таким образом, безразмерная проводимость  $\Sigma(x_0, y_0)$  (28) в отсутствии магнитного поля совпадает с результатом работы [12] при нулевых значениях коэффициентов зеркальности верхней и нижней границ плёнки.

3. В предельном случае  $|z_0| \gg 1$  в выражениях (26) и (27) доминируют слагаемые с наибольшей степенью  $z_0$ , а экспоненциальными членами можно пренебречь. В результате получим классический результат [9]:

$$\Sigma = \frac{x_0}{z_0}, \quad \sigma = \sigma_0 \frac{x_0}{z_0} = \frac{\sigma_0}{1 - i\omega\tau}, \quad (29)$$

$$R_H = 1, \quad A_H = A_{H,0} = -\frac{1}{\text{enc}}. \quad (30)$$

### Анализ полученных результатов

На рис. 1а, 1б, изображены частотные зависимости модуля (рис. 1а) и аргумента (рис. 1б) безразмерной проводимости тонкой металлической плёнки (формула (26)) при значении безразмерной индукции магнитного поля  $\beta = 0$  (сплошные кривые) и  $\beta = 5$  (пунктирные кривые) и при различных значениях безразмерной обратной длины свободного пробега электронов  $x_0$ . Из графиков видно, что зависимости модуля проводимости с увеличением безразмерной частоты электрического поля  $y_0$  монотонно уменьшаются, а при больших значениях  $y_0$  все кривые сливаются. Это объясняется тем, что электронный газ, не успевая откликнуться на высокочастотные колебания вектора напряжённости электрического поля, ведёт себя, в какой-то мере, как совокупность связанных зарядов, которые не вносят вклад в проводимость. Аргумент проводимости с увеличением частоты электрического поля монотонно возрастает и стремится к  $\pi/2$ , т.е. проводимость становится чисто мнимой величиной. Из графиков также видно, что в области

относительно низких частот ( $y_0 < 1$  для модуля проводимости и  $y_0 < 3$  для аргумента проводимости) при включении магнитного поля модуль и аргумент проводимости становятся больше, чем в отсутствии магнитного поля.

На рис. 2а, 2б, 3а и 3б построены частотные зависимости модуля (а) и аргумента (б) безразмерной постоянной Холла (формула (27)) тонкой металлической плёнки при значении безразмерной индукции внешнего магнитного поля  $\beta = 0,1$  (рис. 2) и  $\beta = 2$  (рис. 3). На этих рисунках наблюдаются осцилляции, которые усиливаются с уменьшением толщины плёнки и увеличением длины свободного пробега электронов (уменьшением  $x_0$ ). С увеличением частоты электрического поля эти осцилляции постепенно затухают. При совпадении безразмерной частоты электрического поля и безразмерной индукции внешнего магнитного поля значения модуля безразмерной постоянной Холла становятся близкими для всех значений  $x_0$ , и наблюдается резкое возрастание аргумента безразмерной постоянной Холла ( $y_0 = 0,1$  и  $\beta = 0,1$  на рис. 2;  $y_0 = 2$  и  $\beta = 2$  на рис. 3) при малых значениях  $x_0$ .

На рис. 4а и 4б построены зависимости модуля и аргумента безразмерной проводимости (формула (26)) от безразмерной индукции магнитного поля  $\beta$  при различных значениях безразмерной обратной длины свободного пробега электронов  $x_0$ . Значения безразмерной частоты электрического поля  $y_0 = 0$  и  $y_0 = 0,5$  (рис. 4а), а также  $y_0 = 0,3$  и  $y_0 = 0,5$  (рис. 4б). На этих рисунках наблюдаются осцилляции модуля и аргумента проводимости, которые затухают с увеличением безразмерной индукции магнитного поля  $\beta$  и безразмерной обратной длины свободного пробега электронов  $x_0$ . В случае нестационарного электрического поля (пунктирные кривые на рис. 4а) осцилляции модуля безразмерной проводимости исчезающе малы. Из рис. 4б видно, что осцилляции аргумента проводимости начинаются, когда безразмерная индукция магнитного поля становится больше безразмерной частоты электрического поля.

На рис. 5 приведено сравнение экспериментальных и теоретических зависимостей тангенса угла Холла от индукции магнитного поля для четырёх пленок золота различной толщины: 185 нм, 150 нм, 93 нм и 69 нм при температуре 50 К. Экспериментальные данные взяты из работы [16], а теоретические кривые рассчитаны по формулам (24) – (27). Удельное сопротивление золота и длина свободного пробега электронов при температуре 50 К были рассчитаны по формуле Блоха-Грюнайзена [11]:  $\rho_{273\text{К}} = 2,2 \cdot 10^{-7}$  Ом · см,  $\lambda = 386$  нм, полагая, что температура Дебая для золота равна 165 К, а удельное сопротивление при температуре 273 К:  $\rho_{273\text{К}} = 2,04 \cdot 10^{-6}$  Ом · см [11]. Наблюдается различие в поведении теоретических и экспериментальных зависимостей, которое усиливается с увеличением индукции магнитного поля и уменьшением толщины пленки. Расхождение теоретических и экспериментальных зависимостей можно объяснить тем, что исследуемые в работе [16] сплошные плёнки имеют зернистую структуру, т.е. присутствует дополнительное рассеяние электронов на границах зёрен, которое приводит к уменьшению проводимости с уменьшением толщины пленки.

На рис. 6 представлено сравнение теоретических и экспериментальных зависимостей проводимости от частоты падающей электромагнитной волны для

трёх пленок золота различной толщины (9 нм, 5 нм и 3 нм) при комнатной температуре. Экспериментальные данные (сплошные кривые 1 – 3) были получены из работы [14]. Авторы данной работы измеряли коэффициент отражения пленки золота при различных частотах падающей электромагнитной волны, затем рассчитывали оптическую проводимость пленки для каждой частоты. Также построены теоретические зависимости (пунктирные кривые 4 – 6), рассчитанные по формулам (24) и (26). Расчётные данные для золота [8]: удельная электропроводность при температуре 300 К без учета размерных эффектов:  $\sigma_{300\text{К}} = 4,35 \cdot 10^5 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-1}$ , концентрация электронов:  $n = 5,8 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$ , длина свободного пробега электронов при температуре 300 К:  $\lambda = 37 \text{ нм}$ . Различие между теоретическими и экспериментальными кривыми увеличивается с уменьшением толщины плёнки. Для плёнки толщиной 3 нм различие в поведении теоретических и экспериментальных зависимостях становится существенным, что объясняется тем, что при толщинах плёнки меньших 4 нм [14] плёнка становится островковой.

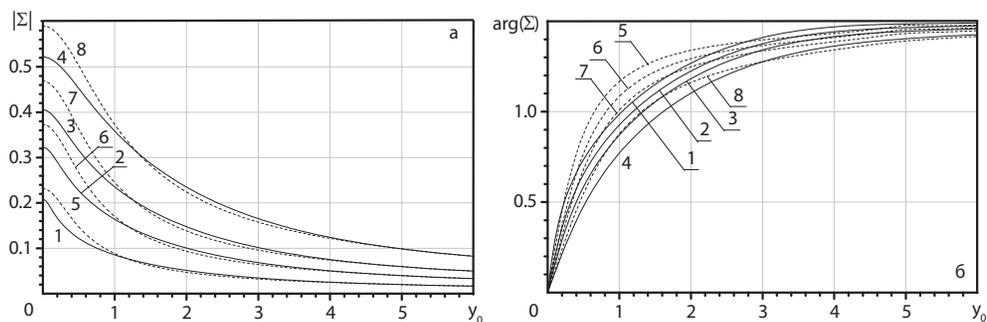


Рис. 1. Зависимости модуля (а) и аргумента (б) безразмерной проводимости  $\Sigma$  от безразмерной частоты электрического поля  $y_0$  при значении безразмерной индукции внешнего магнитного поля  $\beta = 0$  (сплошные кривые 1 – 4) и  $\beta = 5$  (пунктирные кривые 5 – 8): 1, 5 –  $x_0 = 0,1$ ; 2, 6 –  $x_0 = 0,2$ ; 3, 7 –  $x_0 = 0,3$ ; 4, 8 –  $x_0 = 0,5$ .

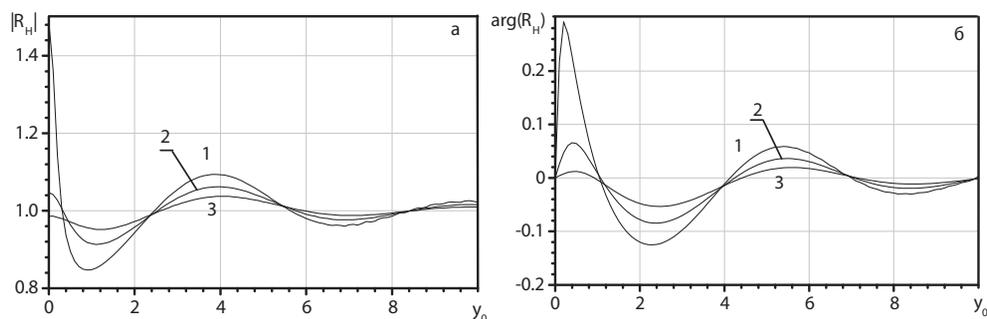


Рис. 2. Зависимости модуля (а) и аргумента (б) безразмерной постоянной Холла  $R_H$  от безразмерной частоты электрического поля  $y_0$  при значении безразмерной индукции внешнего магнитного поля  $\beta = 0,1$ : 1 –  $x_0 = 0,1$ ; 2 –  $x_0 = 0,5$ ; 3 –  $x_0 = 1$ .

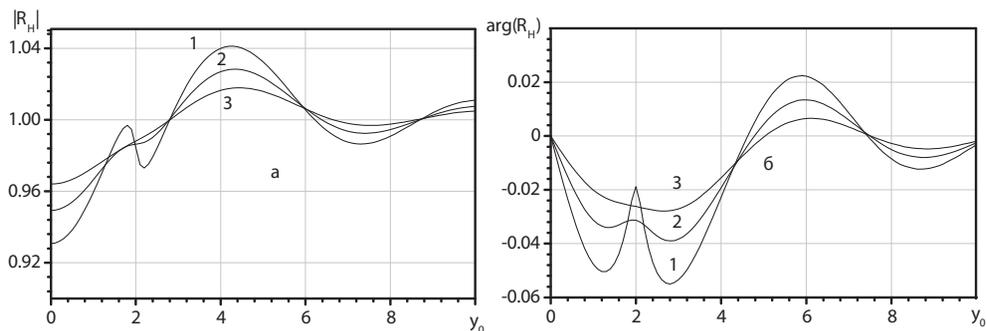


Рис. 3. Зависимости модуля (а) и аргумента (б) безразмерной постоянной Холла  $R_H$  от безразмерной частоты электрического поля  $y_0$  при значении безразмерной индукции внешнего магнитного поля  $\beta = 2$ : 1 –  $x_0 = 0,1$ ; 2 –  $x_0 = 0,5$ ; 3 –  $x_0 = 1$ .

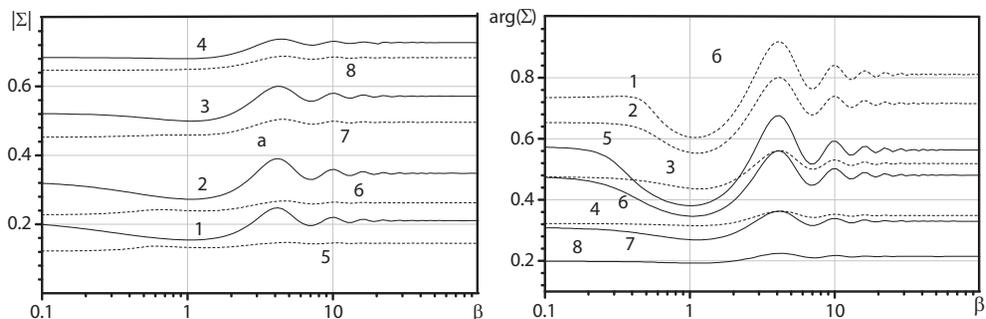


Рис. 4. Зависимости модуля (а) и аргумента (б) безразмерной проводимости  $\Sigma$  от безразмерной индукции магнитного поля  $\beta$ :

- а) сплошные кривые –  $y_0 = 0$ ; пунктирные кривые –  $y_0 = 0,5$ ;  
 б) сплошные кривые –  $y_0 = 0,3$ ; пунктирные кривые –  $y_0 = 0,5$ ;  
 1, 5 –  $x_0 = 0,1$ ; 2, 6 –  $x_0 = 0,2$ ; 3, 7 –  $x_0 = 0,5$ ; 4, 8 –  $x_0 = 1$ .

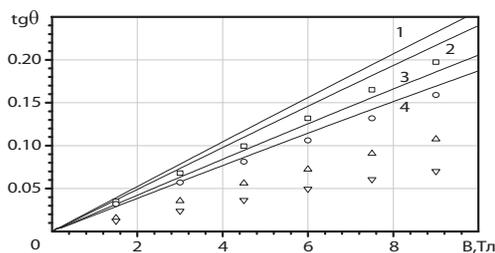


Рис. 5. Зависимости угла Холла от индукции магнитного поля для четырёх плёнок золота различной толщины. Сплошные кривые – теоретические зависимости, рассчитанные по формулам (24) – (27): 1, 2, 3, 4 – 185 нм, 150 нм, 93 нм, 69 нм соответственно. Точками обозначены экспериментальные данные работы [16]:  $\square$  – 185 нм;  $\circ$  – 150 нм;  $\triangle$  – 93 нм;  $\nabla$  – 69 нм.

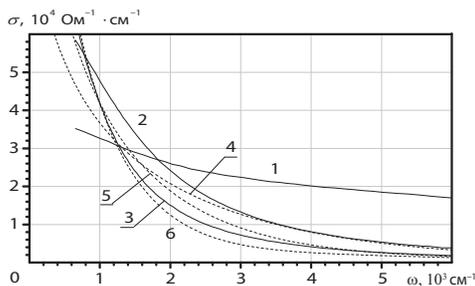


Рис. 6. Зависимости проводимости от частоты электрического поля для трех пленок золота различной толщины. Сплошные кривые (1-3) – экспериментальные данные работы [14]; пунктирные кривые (4–6) – теоретические зависимости, рассчитанные по формулам (24) и (26): 1, 4 – 3 нм; 2, 5 – 5 нм; 3, 6 – 9 нм.

### Заключение

Полученные результаты показали, что поверхностные эффекты оказывают существенное влияние на электрические свойства тонкой металлической плёнки, толщина которой сопоставима или меньше длины свободного пробега электронов. Показано, что зависимости высокочастотной проводимости и постоянной Холла от таких параметров, как индукция магнитного поля, частота электрического поля и толщина плёнки ведут себя нетривиальным образом; в частности, обнаружены осцилляции зависимостей проводимости от индукции магнитного поля и постоянной Холла от частоты электрического поля.

### ЛИТЕРАТУРА:

1. Абелес Ф. Оптические свойства металлических плёнок. Физика тонких плёнок / Под ред. М.К. Франкомба и Р.У. Гофмана. М.: Мир, 1973. Т. 2. 392 с.
2. Андреев В.М. и др. Концентраторные модули нового поколения на основе каскадных солнечных элементов: конструкция, оптические и температурные свойства // Журнал технической физики. 2014. Т. 84. Вып. 11. С. 72–79.
3. Ансельм А.И. Введение в теорию полупроводников. М.: Наука, 1978. 616 с.
4. Антонец И.В. и др. Проводящие и отражающие свойства тонких металлических плёнок // Журнал технической физики. 2004. Т. 74. Вып. 11. С. 102–106.
5. Гришин и др. Кратные осцилляции Зондгеймера в пластинах вольфрама с атомно чистыми поверхностями // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1979. Т. 76. № 4. С. 1325–1341.
6. Завитаев Э.В. и др. Скин-эффект в тонкой цилиндрической проволоке из металла // Физика твёрдого тела. 2012. Т. 54. Вып. 6. С. 1041–1047.
7. Касаткин Л.В., Чайка В.Е. Полупроводниковые устройства диапазона миллиметровых волн. / Под ред. В.П. Тараненко, С.П. Ракитина. Севастополь: Вебер, 2006. 319 с.
8. Кикоин И.К. Таблицы физических величин. М.: Атомиздат, 1976. 1008 с.
9. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. Т. 8. 656 с.
10. Лифшиц И.М. и др. Электронная теория металлов. М.: Наука, 1971. 415 с.
11. Малков М.П. и др. Справочник по физико-техническим основам криогеники. М.: Энергоатомиздат, 1985. 432 с.
12. Уткин А.И., Юшканов А.А. Влияние коэффициентов зеркальности на взаимодей-

- ствие Н-волны с тонкой металлической пленкой // *Оптика и спектроскопия*. 2014. Т. 117. № 4. С. 650–654.
13. Учайкин В.В. и др. Эффекты памяти и нелинейного транспорта в процессах зарядки-разрядки суперконденсатора // *Журнал технической физики*. 2016. Т. 86. Вып. 2. С. 95–104.
  14. Brandt T. et al. Temperature- and frequency-dependent optical properties of ultrathin Au films // *Phys. rev. B*. 2008. Vol. 78. 205409.
  15. Fuchs K. The conductivity of thin metallic films according to the electron theory of metals // *Proc. Camb. Phil. Soc.* 1938. Vol. 34. pp. 100–108.
  16. Munoz R.C. et al. Size effects under a strong magnetic field: Hall effect induced by electron-surface scattering on thin gold films deposited onto mica substrates under high vacuum // *Phys. rev. lett.* 2006. Vol. 96. 206803.
  17. Sondheimer E.H. The influence of a transverse magnetic field on the conductivity of thin metallic films // *Phys. Rev.* 1950. Vol. 80. pp. 401–406.
  18. Sondheimer E.H. The mean free path of electrons in metals // *Advances in Physics*. 2001. Vol. 50. no. 6. pp. 499–537.

### REFERENCES

1. Abelès F. Optical properties of metallic films. In: *Physics of thin films*. Ed. by M.H. Francombe, R.W. Hoffman. New York, London, Acad. Press, 1971. pp. 151–204.
2. Andreev V.M. i dr. Kонтраторные модули нового поколения на основе каскадных солнечных элементов: конструкция, оптические и температурные свойства [Concentrator modules of the new generation of cascading solar cells: design, optical and thermal properties] // *Журнал технической физики [J. Tech. Phys.]*. 2014. Vol. 84. no. 11. pp. 72–79.
3. Ансельм А.И. Введение в теорию полупроводников [Introduction to the theory of semiconductors]. М., Наука, 1978. 616 p.
4. Антонетс И.В. и др. Проводящие и отражающие свойства тонких металлических пленок [Conductive and reflective properties of thin metallic films] // *Журнал технической физики [J. Tech. Phys.]*. 2004. Vol. 74. no. 11. pp. 102–106.
5. Kratnye ostsillyatsii Zondgeimera v пластинках vol'фрама с атомно чистыми поверхностями [Multiple oscillations of Sondheimer in plates of tungsten with an atomic clean surfaces] / Grishin A.M., Lutsishin P.P., Ostroukhov Yu.S., Panchenko O.A. // *Журнал экспериментальной и теоретической физики [J. Exp. Theor. Phys.]*. 1979. Vol. 76. no. 4. pp. 1325–1341.
6. Skin-эффект в тонкой цилиндрической проволоке из металла [Skin effect in thin cylindrical wire of metal] / Zavitaev E.V. et al. // *Физика твердого тела [Phys. Solid State]*. 2012. Vol. 54. no. 6. pp. 1041–1047.
7. Kasatkin L.V., Chaika V.E. Полупроводниковые устройства диапозона миллиметровых волн [Semiconductor devices of the millimeter wave]. Sevastopol, Veber, 2006. 319 p.
8. Kikoin I.K. Tablitsy fizicheskikh velichin [Tables of physical quantities]. М., Atomizdat, 1976. 1008 p.
9. Landau L.D., Lifshits E.M. *Electrodynamics of continuous media*. Oxford, Pergamon Press, 1960.
10. Lifshits I.M. et al. *Electronic theory of metals*. New York, Springer, 1973.
11. *Справочник по физико-техническим основам криогеники [Handbook of physical-technical fundamentals of cryogenics]* // Malkov M.P. et al. М., Energoatomizdat, 1985. 432 p.
12. Utkin A.I., Yushkanov A.A. Vliyaniye koeffitsientov zerkal'nosti na vzaimodeystvie N-volny s tonkoi metallicheskoj plenкой [Effect of reflectivity coefficients on the interaction of the N-wave with a thin metal film] // *Оптика и спектроскопия [Opt. Spectrosc.]*. 2014. Vol. 117. no. 4. pp. 650–654.

13. Uchaikin V.V. et al. Effekty pamyati i nelineinogo transporta v protsessakh zaryadki-razryadki superkondensatora [Memory effects and nonlinear transport processes of charge-discharge of supercapacitor] // Zhurnal tekhnicheskoi fiziki [J. Tech. Phys.]. 2016. Vol. 86. no. 2. pp. 95–104.
14. Brandt T. et al. Temperature- and frequency-dependent optical properties of ultrathin Au films // Phys. Rev. B. 2008. Vol. 78. 205409.
15. Fuchs K. The conductivity of thin metallic films according to the electron theory of metals // Proc. Camb. Phil. Soc. 1938. Vol. 34. pp. 100–108.
16. Munoz R.C. et al. Size effects under a strong magnetic field: Hall effect induced by electron-surface scattering on thin gold films deposited onto mica substrates under high vacuum // Phys. rev. lett. 2006. Vol. 96. 206803.
17. Sondheimer E.H. The influence of a transverse magnetic field on the conductivity of thin metallic films // Phys. Rev. 1950. Vol. 80. pp. 401–406.
18. Sondheimer E.H. The mean free path of electrons in metals // Advances in Physics. 2001. Vol. 50. no. 6. pp. 499–537.

#### ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

*Савенко Олег Владиславович* – аспирант кафедры микроэлектроники и общей физики, Ярославский государственный университета им. П.Г. Демидова;  
e-mail: cryak92@mail.ru

#### INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

*Oleg Savenko* – post-graduate student of the department of microelectronics and general physics at P.G. Demidov Yaroslavl State University;  
e-mail: cryak92@mail.ru;

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКАЯ ССЫЛКА

*Савенко О.В.* Расчёт высокочастотной электропроводности и постоянной Холла для тонкой металлической пленки // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2016. № 4. С. 43–55.  
DOI: 10.18384/2310-7251-2016-4-43-55.

#### BIBLIOGRAPHIC REFERENCE

*Savenko O.V.* Calculation of high-frequency conductivity and Hall constant of a thin metal film // Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics & Mathematics. 2016. no. 4. pp. 43–55.  
DOI: 10.18384/2310-7251-2016-4-43-55.

УДК 535.012.2, 771.36

DOI: 10.18384/2310-7251-2016-4-56-57

## ЖИДКОКРИСТАЛЛИЧЕСКИЕ ДИФРАКЦИОННЫЕ ОПТИЧЕСКИЕ ЭЛЕМЕНТЫ С НЕОДНОРОДНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ДИРЕКТОРА

**Соломатин А.С., Беляев В.В.**

*Московский государственный областной университет  
105005, г. Москва, ул. Радио, д. 10А, Российская Федерация*

**Аннотация.** Получены расчетные данные о влиянии пространственного распределения директора ЖК на оптические свойства элемента регулярного микро рельефа. Предложены ориентационные распределения, пригодные к использованию в составе дифракционных решеток.

**Ключевые слова:** дифракция, линза ЖК, оптическая анизотропия, двулучепреломление, пространственно неоднородные структуры, оптические свойства.

## LIQUID-CRYSTAL DIFFRACTIVE OPTICAL ELEMENTS WITH AN INHOMOGENEOUS DISTRIBUTION OF THE DIRECTOR

**A. Solomatin, V. Belyaev**

*Moscow Region State University  
ul. Radio 10a, 105005 Moscow, Russia*

**Abstract.** We have obtained calculation data on the effect of the spatial distribution of the liquid-crystal director on the optical properties of a regular microrelief element. We have proposed orientation distributions suitable for use in the composition of diffraction gratings.

**Keywords:** diffraction, liquid-crystal lens, optical anisotropy, birefringence, spatially nonuniform structures, optical properties.

### ВВЕДЕНИЕ

Принципы и основы теории построения дифракционных оптических элементов (ДОЭ) рассмотрены в [1]. Важные тенденции их развития: возрастание требований к точному соответствию их физической геометрии теоретически рассчитанной и высокая стоимость прецизионных технологий.

Высокая стоимость, а также угроза снижения эксплуатационных характеристик (что может иметь принципиальное значение) сверхточно изготовленных ДОЭ под воздействием пыли, микро и даже наночастиц и дефектов разного происхождения обусловили актуальность исследований в области ДОЭ с управляемыми (например, электроуправляемыми) формами оптически анизотропного микро-

нанорельефа, способными значительно корректировать свои характеристики по отдельным микро- и наноэлементам (в дальнейшем будем их называть микроэлементами), из совокупности которых состоит ДОЭ. При этом способы управления микроэлементами ДОЭ могут быть аналогичны управлению пикселями дисплея (для наноэлементов способы управления могут быть подобны присвоению заданных значений элементам оперативной памяти компьютера).

Дифракционные решётки с прямоугольным микрорельефом предлагается в данной работе изготавливать в виде совокупности микро- (нано-) элементов с индивидуально адресованными управляющими воздействиями (например, амплитуда электрического поля), обеспечивающими изменение свойств оптически анизотропного микро и нанорельефа ДОЭ.

Свойства микроэлемента ДОЭ изменяются с изменением фазовой задержки слоя ЖК, а она в свою очередь меняется при изменении пространственного распределения директора ЖК, зависящего от приложенного поля.

Если толщина слоя ЖК одинакова по всему полю микроэлемента, то от зависимости фазовой задержки от горизонтальной координаты вдоль решётки (поперёк борозд) перейдём к зависимости необыкновенного показателя преломления от той же координаты.

Если зависимость необыкновенного показателя преломления от координаты является константой, то тогда ЖК микроэлемент соответствует прямоугольному элементу микрорельефа

## 2. Неоднородные ЖК структуры, формирующие микроэлемент дифракционного оптического элемента (ДОЭ)

Нематические жидкокристаллические структуры с неоднородным распределением директора рассмотрены в [3–7].

ЖК микроэлемент ДОЭ, то есть бороздка, заполненная ЖК, эквивалентен элементу микрорельефа с геометрическим профилем, соответствующим форме кривой зависимости необыкновенного показателя преломления от координаты. Показатель преломления  $n$  вычисляется [2] по формуле:

$$n = \frac{n_o n_e}{\sqrt{n_o^2 \cos^2 \theta + n_e^2 \sin^2 \theta}},$$

где угол  $\theta$  зависит от горизонтальной координаты.

На рис. 1 сверху показан ступенчатый микрорельеф (прямоугольный), бороздки которого заполнены нематическим ЖК, и на рис. 1 снизу показан оптически эквивалентный ему рельеф, в предположении, что показатели преломления ЖК и твёрдого материала совпадают. Это можно реализовать на практике, если на дне канавок находятся электроды и, например, естественная ориентация ЖК материала планарная (параллельная дну канавок), боковые стенки не оказывают существенного ориентирующего влияния (верхняя часть рельефа из другого материала, чем нижняя, или при формировании канавок рельефа было оказано соответствующее воздействие на дно и стенки). Тогда при включении поля в некоторых канавках, как показано на рис. 1, ориентация изменится на гомеотропную.

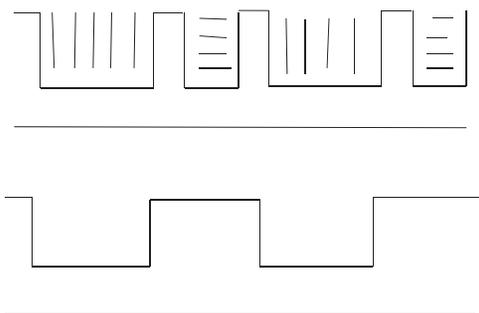


Рис. 1. Сверху: микрорельеф, бороздки заполнены ЖК. Снизу: оптически эквивалентный ему рельеф, если показатели преломления ЖК и твердого материала совпадают.

Если включить наоборот, то будет как на рис. 2.

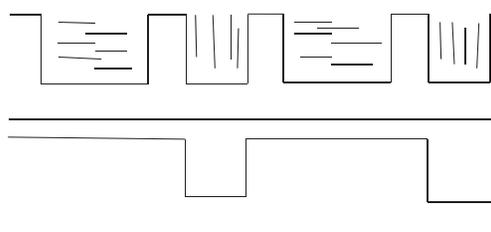


Рис. 2. Сверху: микрорельеф, бороздки заполнены ЖК. Снизу: оптически эквивалентный ему рельеф, если показатели преломления ЖК и твердого материала совпадают.

Как показано на рис. 1 и рис. 2 для нормально падающего луча света, можно сформировать микроэлемент ДОЭ, эквивалентный прямоугольному с произвольным профилем, зависящим от переключения электроуправляемых элементов.

На рис. 3 показано для случая наклонной естественной ориентации нематического ЖК на дне бороздок рельефа и при неодинаковых оптических характеристиках ЖК и твердого материала. Получается ступенчатый рельеф.

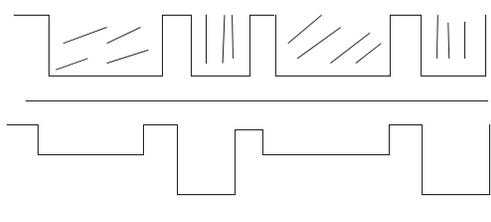


Рис. 3. Сверху: микрорельеф, бороздки заполнены ЖК. Снизу: оптически эквивалентный ему рельеф, если показатели преломления ЖК и твердого материала не совпадают.

Таким образом, возможности управления ориентацией ЖК и оптическими свойствами микроэлемента ДОЭ достаточно обширные. Дифракционные решетки с различной микроструктурой описаны в [8–24].

В [22; 24] приведены результаты компьютерного моделирования дифракционных свойств для рельефа, показанного на рис. 1 и рис. 2 и проанализированы зависимости свойств от параметров рельефа.

### 3. Синусоидальный профиль

Свойства микроэлемента ДОЭ изменяются с изменением фазовой задержки слоя ЖК, а она, в свою очередь, меняется при изменении пространственного распределения директора ЖК, зависящего от приложенного поля.

Если толщина слоя ЖК одинакова по всему полю микроэлемента, то от зависимости фазовой задержки от горизонтальной координаты вдоль решётки (поперек борозд) перейдём к зависимости необыкновенного показателя преломления от той же координаты.

Тогда, если зависимость необыкновенного показателя преломления от координаты квадратична (парабола), то ЖК микроэлемент соответствует синусоидальному элементу микрорельефа.

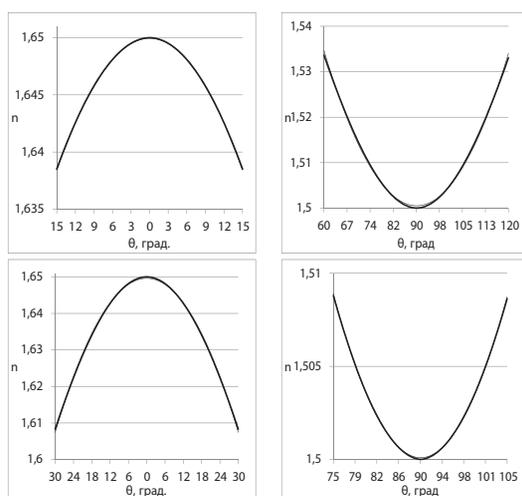


Рис. 4. Зависимость показателя преломления от координаты и, соответственно, от углового диапазона (сверху вниз). Слева для S распределения директора ЖК, справа для V распределения.  $K_{33}/K_{11}=0,5$ .

Угол наклона директора ЖК при  $K_{33}/K_{11}$  отличном от единицы распределён по координате нелинейно. В связи с этим на рис. 4 и по горизонтальной оси указаны углы наклона директора. Они распределены вдоль горизонтальной оси неравномерно, в соответствии с нелинейностью их зависимости от горизонтальной координаты, для которой по горизонтальной оси выбран линейный масштаб. Для зависимости показателя преломления от координаты вдоль решётки (по-

перёк борозд) показано сравнение с квадратичной функцией. Сама координата на горизонтальной оси не подписана во избежание загромождения графика. Очевидно, начало отсчёта координаты находится при угле, равном нулю для  $S$  распределения, и равном  $90^\circ$  для  $B$  распределения. Показатели преломления  $n_o = 1,5$ ,  $n_e = 1,65$ . Распределение директора ЖК зависит от коэффициентов упругости  $K_{33}$  и  $K_{11}$  и, следовательно, от их отношения  $K_{33}/K_{11}$ . В данной работе оно рассмотрено при  $K_{33}/K_{11} = 0,5$ .

Как показано на рис. 4 для нормально падающего луча света, как для  $S$  распределения, так и для  $B$  распределения, можно сформировать микроэлемент ДОЭ, эквивалентный криволинейному с произвольным профилем (в том числе синусоидальный), зависящим от выбора углового диапазона. Как показано на рис. 5, можно сформировать микроэлемент ДОЭ, эквивалентный синусоидальному, при различных диапазонах краевых углов. Принципиально от изменения величины отношения  $K_{33}/K_{11}$  ситуация не изменится. Как видно из рис. 4, квадратичная зависимость показателя преломления от координаты при небольших угловых диапазонах. В то же время отношение  $K_{33}/K_{11}$  играет важную роль, определяя угловые диапазоны.

На рис. 5 показан рельеф (микро- или нанорельеф), который, как было показано на рис. 4, оптически аналогичен синусоидальному. Он сформирован как жёстким рельефом твёрдой подложки, так и пространственным распределением директора ЖК. На поверхности боковых сторон рельефа (материал, обладающий значительным ориентирующим действием) приповерхностный угол ЖК-ориентант обозначен  $\theta_0$ . На нижней поверхности рельефа другой материал, не обладающий значительным ориентирующим действием.

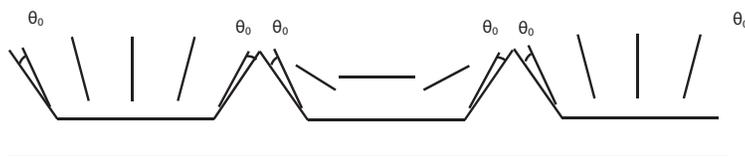


Рис. 5. Рельеф, оптически аналогичный синусоидальному, сформирован как жёстким рельефом твёрдой подложки, так и пространственным распределением директора ЖК.

Если изготавливать жёсткий рельеф целиком из одного материала, то в процессе формирования (удаления материала из выемок или наращивания материала на выступах) верхняя часть может приобрести ориентирующие свойства или же можно внести необходимые для этого этапы технологического процесса.

Приповерхностный угол ЖК-ориентант в сочетании с углом элемента твёрдого рельефа к направлению освещения задаёт угол между директором ЖК в приповерхностном слое и лучом света (при нормальном падении сверху вниз на рис. 5). Эти краевые углы (пары краевых углов) и соответствующее пространственное распределение директора ЖК при  $K_{33}/K_{11} = 0,5$  определяют оптические

свойства ЖК слоев, как показано на рис. 4, соответствующие синусоидальному рельефу.

Если расположить в системе на рис. 5 электроды, то можно дополнительно регулировать конфигурацию директора ЖК и, следовательно, оптически эквивалентный профиль рельефа.

Изменение оптических свойств микроэлемента осуществляется [2] изменением параметров электрического поля (амплитуда, частота). Электрическое поле может прилагаться с помощью электродов [3–7] при различных вариантах их размещения [2]. Таким образом, возможности управления ориентацией ЖК и оптическими свойствами микроэлемента ДОЭ достаточно обширные. Дифракционные решетки с различной микроструктурой описаны в [8–24].

В [22; 24] приведены результаты компьютерного моделирования дифракционных свойств для синусоидального рельефа, показанного на рис. 4 и рис. 5, проанализированы зависимости свойств от параметров рельефа и в сравнении с прямоугольным рельефом.

#### 4. Трапецевидный профиль

Если зависимость необыкновенного показателя преломления от координаты линейна, то тогда ЖК микроэлемент соответствует трапецевидному элементу микрорельефа.

ЖК микроэлемент ДОЭ, то есть бороздка, заполненная ЖК, изображена на рис. 6а для случая  $S$  распределения, на рис. 6б для случая  $B$  распределения и на рис. 6в для случая  $H$  распределения [3–7], он эквивалентен элементу микрорельефа с геометрическим профилем, соответствующим форме кривой зависимости необыкновенного показателя преломления от координаты.

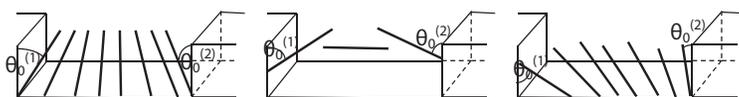


Рис. 6. Слева направо:  $S$ ,  $B$ ,  $H$  распределения директора по горизонтальной координате

Как показано на рис. 6, как для  $S$  распределения, так и для  $B$  распределения, можно сформировать микроэлемент ДОЭ, эквивалентный криволинейному с произвольным профилем, зависящим от выбора углового диапазона. Как показано на рис. 7, для  $H$  распределения можно сформировать микроэлемент ДОЭ, эквивалентный трапецевидному, при различных диапазонах краевых углов. Показатели преломления  $n_o = 1,5$ ,  $n_e = 1,65$ . Распределение директора ЖК зависит от коэффициентов упругости  $K_{33}$  и  $K_{11}$  и, следовательно, от их отношения  $K_{33}/K_{11}$ . в данной работе оно рассмотрено при  $K_{33}/K_{11} = 0,5$ . Принципиально от изменения величины отношения  $K_{33}/K_{11}$  ситуация не изменится. Приведён параметр  $R^2$ , показывающий расхождение с линейной функцией.

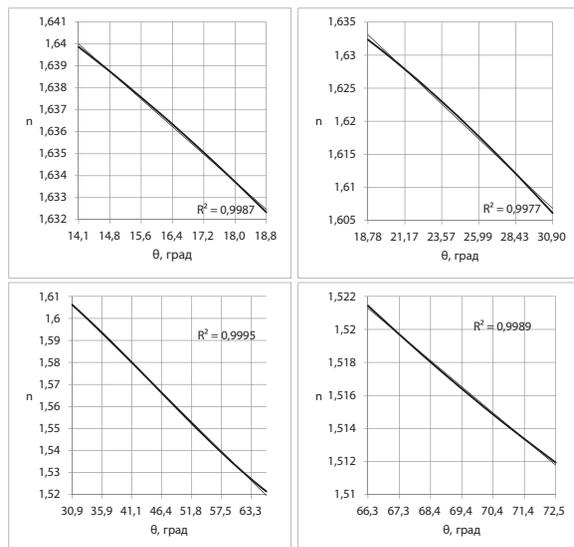


Рис. 7. Зависимости показателя преломления от горизонтальной координаты при  $K_{33}/K_{11}=0,5$ . Показано сравнение с линейной функцией. Выбранные угловые диапазоны, обеспечивают соответствие трапециевидному рельефу.

Такие приповерхностные углы, как на рис. 7 для  $H$  распределения вполне реализуемы на практике [3–7].

На рис. 8 показан рельеф (микро- или нанорельеф), который, как было показано на рис. 7, оптически аналогичен трапециевидному. Он сформирован как жёстким рельефом твёрдой подложки, так и пространственным распределением директора ЖК. На поверхности боковых сторон рельефа (материал, обладающий значительным ориентирующим действием) приповерхностный угол ЖК-ориентант обозначен  $\theta_0$ . На нижней поверхности рельефа другой материал, не обладающий значительным ориентирующим действием.

Если изготавливать жёстким рельеф целиком из одного материала, то в процессе формирования (удаления материала из выемок или наращивания материала на выступах) верхняя часть может приобрести ориентирующие свойства или же можно внести необходимые для этого этапы технологического процесса.

Приповерхностный угол ЖК-ориентант в сочетании с углом элемента твёрдого рельефа к направлению освещения задает угол между директором ЖК в приповерхностном слое и лучом света (при нормальном падении сверху вниз на рис. 8). Эти краевые углы (пары краевых углов) и соответствующее пространственное распределение директора ЖК при  $K_{33}/K_{11}=0,5$  определяют оптические свойства ЖК слоёв, как показано на рис. 7, соответствующие трапециевидному рельефу.

Если расположить в системе на рис. 8 электроды, то можно дополнительно регулировать конфигурацию директора ЖК и, следовательно, оптически эквивалентный профиль рельефа.

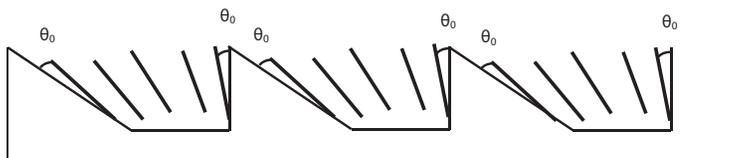


Рис. 8. Рельеф, оптически аналогичный трапецевидному, сформирован как жёстким рельефом твёрдой подложки, так и пространственным распределением директора ЖК.

## 5. Выводы

В данной работе впервые предложены ЖК микроэлементы ДОЭ  $S$ ,  $B$  и  $H$  типов. Впервые предложены оптически эквивалентные прямоугольному, ступенчатому, синусоидальному и трапецевидному типам дифракционного рельефа на основе ЖК.

Были смоделированы зависимости показателя преломления от горизонтальной координаты для различных ЖК микроэлементов.

Показано, что возможности управления ориентацией ЖК и оптическими свойствами микроэлемента ДОЭ достаточно обширные.

Показано, что и без приложения поля можно получить микроэлемент, аналогичный заранее выбранному профилю. Указаны диапазоны углов и оценено влияние упругих свойств ЖК.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Сойфер В.А., Котляр В.В., Досколович Л.Л. Дифракционные оптические элементы в устройствах нанофотоники // Компьютерная оптика. 2009. Т. 33. № 4. С. 352–368.
2. Невская Г.Е., Томилин М.Г. Адаптивные линзы на основе жидких кристаллов // Оптический журнал. 2008. Т. 75. № 9. С. 35–48.
3. Belyaev V., Solomatin A., and Chausov D. Phase retardation vs. pretilt angle in liquid crystal cells with homogeneous and inhomogeneous LC director configuration // Optics Express. 2013. Vol. 21, pp. 4244–4249.
4. Belyaev V.V., Solomatin A.S., Kurilov A.D., Chausov D.N., Mazaeva V.G. Optical Properties of Hybrid Aligned Nematic (HAN) Cells with Different Pretilt Angles // Applied Optics. 2014. Vol. 53. Issue 29. pp. H51–H57.
5. Беляев В.В., Соломатин А.С. Оптические свойства гибридных жидкокристаллических ячеек при различных углах падения света // Оптический Журнал. 2015. Т. 82. № 1. С. 41–48.
6. Belyaev V.V., Solomatin A.S., Chausov D.N., Phase retardation difference of liquid crystal cells with symmetric and asymmetric boundary conditions // Molecular Crystals & Liquid Crystals. 2014. Vol. 596. pp. 22–29.
7. Беляев В.В., Соломатин А.С., Чаусов Д.Н. Оптические свойства ЖК ячеек с произвольным краевым углом наклона директора // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2013. № 1. С. 32–41.
8. Беляев В.В. Применение подложек с различными микрорельефами поверхности в оптоэлектронике и устройствах отображения информации // Оптический журнал. 2005. Т. 72. № 9. С. 79.
9. Васильев А.А., Касасент Д., Компанец И.П., Парфенов А.В. Пространственные моду-

- ляторы света. М.: Радио и связь. 1987. 320 с.
10. Бакеев Н.Ф., Беляев В.В., Волынский А.Л., Иванов С.А., Коновалов В.А., Муравский А.А., Минько А.А., Чистовская Л.В., Яковенко С.Е. Изготовление полимерных подложек с периодическим микрорельефом и исследование их оптических свойств // Оптический журнал. 2001. Т. 68. № 9. С. 8995–9001.
  11. Belyaev V., Tsoy V., Tarasishin A. Modeling Optical Properties of Birefringent Substrates with Periodical Surface Microrelief for Application in Display Devices // Conf. Proc. of The 22nd Int. Display Research Conf. Nice, France. 2002. pp. 413–416.
  12. Tsoy V.I., Belyaev V.V., Tarasishin A.V., Litovchenko D.T., Misnik V.P. Simulation of light propagation through birefringent substrates with periodical surface microrelief // Optics Communications. 2005. Vol. 246. pp. 57–66.
  13. Tsoy V.I., Belyaev V.V., Tarasishin A.V., Trofimov S.M. Modelling the diffraction of light by structures with spatial periodicity of the optical parameters of the substance and of the surface relief // J. Optical Technology. 2003. V.70. pp. 465–470.
  14. Merkulov A.Y., Belyaev V.V., Belyaev A.A., Gorbunov A.A. Diffraction on anisotropic substrates with sinusoidal surface microrelief // Molecular Crystals & Liquid Crystals. 2014. Vol. 596. pp. 122–127.
  15. Belyaev V.V., Tsoy V.I., Kushnir E.M., Klyckov A.V., Kalashnikov A.Y. Polarized light diffraction on anisotropic substrates with rectangular and sine microrelief // Journal of the SID. 2005. Vol. 13. pp. 305–308.
  16. Belyaev V.V., Novikov V.M., Denisenko P.L. Diffraction on birefringent elements with sine surface microrelief // Journal of the SID. 2008. Vol. 16. pp. 961–967.
  17. Belyaev V.V., Chistovskaya L., Konovalov V., Muravsky A., Tarasishin A., Trofimov S., Tsoy V., Volynsky A., Yakovenko S. Physical properties of stretched polymeric substrates with periodic microrelief for optical diffraction elements and liquid crystals alignment. // Journal of the SID. 2003. Vol. 11. pp. 3–13.
  18. Belyaev V.V. Using substrates with various surface microreliefs in optoelectronics and information-display devices // J. Optical Technology. 2005. Vol. 72. pp. 719–724.
  19. Belyaev V.V., Mazaeva V.G., Solomatin A.S., Muravskii A.A., Gorbunov A.A., Muravskii A.A., New organosilicon oligomer films for NLC alignment, Proc. Int. Conf. 2011 China display/Asia display, Kunshan, China, 6–9 November 2011.
  20. Оганесян Д.Л., Маргарян А.Л., Акопян Н.Г., Арутюнян В.М., Беляев В.В., Соломатин А.С. Управление излучением в среднем инфракрасном диапазоне длин волн с помощью жидкокристаллической фазовой решётки // Известия НАН Армении. 2015. Физика. Т. 50. № 1. С. 74–84.
  21. Belyaev V.V., Merkulov A.Y., Belyaev A.A., Solomatin A.S., Gorbunov A.A. Diffraction on Anisotropic Substrates with Surface Microrelief. // Proc. EuroDisplay'11 Arcachon, France. 2011. pp. 121–124.
  22. Соломатин А.С., Физические свойства конденсированных систем с неоднородной структурой в микро- и нанометровом диапазоне // Международная конференция «Физические свойства материалов и дисперсных сред для элементов информационных систем, наноэлектронных приборов и экологических технологий». Москва, 21–24 апреля 2015 г. М.: ИИУ МГОУ, 2015. С. 17.
  23. Беляев В.В., Соломатин А.С., Маргарян А.Л., Абрамян В.К., Оганесян Д.Л., Акопян Н.Г., Арутюнян В.М. Дифракция света на решётках с периодическим микрорельефом при отрицательном знаке оптической анизотропии материала // Международная конференция «Физические свойства материалов и дисперсных сред для элементов информационных систем, наноэлектронных приборов и экологических технологий».

Москва, 21–24 апреля 2015 г. М.: ИИУ МГОУ, 2015. С. 100.

24. Соломатин А.С. Влияние профиля микрорельефа периодических анизотропных структур на их дифракционные свойства // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2016. № 1. С. 74–87.

## REFERENCES

1. Soifer V.A., Kotlyar V.V., Doskolovich L.L. Difraktsionnye opticheskie elementy v ustroistvakh nanofotoniki [Diffractive optical elements in nanophotonic devices] // *Komp'yuternaya optika* [Computer optics]. 2009. Vol. 33. no. 4. pp. 352–368.
2. Nevskaya G.E., Tomilin M.G. Adaptivnye linzy na osnove zhidkikh kristallov [Adaptive lenses based on liquid crystals] // *Opticheskii zhurnal* [Journal of Optics]. 2008. Vol. 75. no. 9. pp. 35–48.
3. Belyaev V., Solomatin A., and Chausov D. Phase retardation vs. pretilt angle in liquid-crystal cells with homogeneous and inhomogeneous LC director configuration // *Optics Express*. 2013. Vol. 21. pp. 4244–4249.
4. Belyaev V.V., Solomatin A.S., Kurilov A.D., Chausov D.N., Mazaeva V.G. Optical Properties of Hybrid Aligned Nematic (HAN) Cells with Different Pretilt Angles // *Applied Optics*. 2014. Vol. 53. Issue 29. pp. H51–H57.
5. Belyaev V.V., Solomatin A.S. Opticheskie svoystva gibridnykh zhidkokristallicheskikh yacheek pri razlichnykh uglakh padeniya sveta [Optical properties of hybrid liquid-crystal cells at various angles of incidence of light] // *Opticheskii Zhurnal* [Journal of Optics]. 2015. Vol. 82. no. 1. pp. 41–48.
6. Belyaev V.V., Solomatin A.S., Chausov D.N. Phase retardation difference of liquid-crystal cells with symmetric and asymmetric boundary conditions // *Molecular Crystals & Liquid Crystals*. 2014. Vol. 596. pp. 22–29.
7. Belyaev V.V., Solomatin A.S., Chausov D.N. Opticheskie svoystva ZhK yacheek s proizvol'nym kraevym uglom naklona direktora [Optical properties of liquid-crystal cells with an arbitrary boundary angle of the director pretilt] // *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-Matematika* [Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics]. 2013. no. 1. pp. 32–41.
8. Belyaev B.B. Primenenie podlozhek s razlichnymi mikrorel'efami poverkhnosti v optoelektronike i ustroistvakh otobrazheniya informatsii [The use of substrates with different surface microreliefs in optoelectronics and display devices] // *Opticheskii zhurnal* [Journal of Optics]. 2005. Vol. 72. no. 9. P. 79.
9. Prostranstvennye modulyatory sveta [Spatial light modulators]. Vasil'ev A.A., Kasasent D., Kompanets I.P., Parfenov A.V. M., *Radio i svyaz'*, 1987. 320 p.
10. Izgotovlenie polimernykh podlozhek s periodicheskim mikrorel'efom i issledovanie ikh opticheskikh svoystv [Fabrication of polymeric substrates with a periodic microrelief and study of their optical properties] / Bakeev N.F., Belyaev V.V., Volynskii A.L., Ivanov S.A., Konovalov V.A., Muravskii A.A., Min'ko A.A., Chistovskaya L.V., Yakovenko S.E. // *Opticheskii zhurnal* [Journal of Optics]. 2001. Vol. 68. no. 9. pp. 8995–9001.
11. Belyaev V., Tsoy V., Tarasishin A. Modeling Optical Properties of Birefringent Substrates with Periodical Surface Microrelief for Application in Display Devices // *Conf. Proc. of The 22nd Int. Display Research Conf. Nice, France*. 2002. pp. 413–416.
12. Tsoy V.I., Belyaev V.V., Tarasishin A.V., Litovchenko D.T., Misnik V.P. Simulation of light propagation through birefringent substrates with periodical surface microrelief // *Optics Communications*. 2005. Vol. 246. pp. 57–66.
13. Tsoy V.I., Belyaev V.V., Tarasishin A.V., Trofimov S.M. Modelling the diffraction of light

- by structures with spatial periodicity of the optical parameters of the substance and of the surface relief // *J. Optical Technology*. 2003. Vol. 70. pp. 465–470.
14. Merkulov A.Y., Belyaev V.V., Belyaev A.A., Gorbunov A.A. Diffraction on anisotropic substrates with sinusoidal surface microrelief // *Molecular Crystals & Liquid Crystals*. 2014. Vol. 596. pp. 122–127.
  15. Belyaev V.V., Tsoy V.I., Kushnir E.M., Klyckov A.V., Kalashnikov A.Y. Polarized light diffraction on anisotropic substrates with rectangular and sine microrelief // *Journal of the SID*. 2005. Vol. 13. pp. 305–308.
  16. Belyaev V.V., Novikov V.M., Denisenko P.L. Diffraction on birefringent elements with sine surface microrelief // *Journal of the SID*. 2008. Vol. 16. pp. 961–967.
  17. Belyaev V.V., Chistovskaya L., Konovalov V., Muravsky A., Tarasishin A., Trofimov S., Tsoy V., Volynsky A., Yakovenko S. Physical properties of stretched polymeric substrates with periodic microrelief for optical diffraction elements and liquid crystals alignment. // *Journal of the SID*. 2003. Vol. 11. pp. 3–13.
  18. Belyaev V.V. Using substrates with various surface microreliefs in optoelectronics and information-display devices // *J. Optical Technology*. 2005. Vol. 72. pp. 719–724.
  19. Belyaev V.V., Mazaeva V.G., Solomatin A.S., Muravskii A.A., Gorbunov A.A., Muravskii A.A., New organosilicon oligomer films for NLC alignment, Proc. Int. Conf. 2011 China display/Asia display, Kunshan, China, 6–9 November 2011.
  20. Upravlenie izlucheniem v srednem infrakrasnom diapazone dlin voln s pomoshch'yu zhidkokristallicheskoj fazovoi reshetki [Control of radiation in the middle infrared range of wavelengths using liquid-crystal phase gratings] / Oganessian D.L., Margaryan A.L., Akopyan N.G., Arutyunyan V.M., Belyaev V.V., Solomatin A.S. // *Izvestiya NAN Armenii. Fizika*. [Izvestia of Armenia NAS. Physics.]. 2015. Vol. 50. no. 1. pp. 74–84.
  21. Belyaev V.V., Merkulov A.Y., Belyaev A.A., Solomatin A.S., Gorbunov A.A. Diffraction on Anisotropic Substrates with Surface Microrelief. // Proc. EuroDisplay'11 Arcachon, France. 2011. pp. 121–124.
  22. Solomatin A.S. Fizicheskie svoystva kondensirovannykh sistem s neodnorodnoi strukturoi v mikro- i nanometrovom diapazone [The physical properties of condensed systems with non-uniform structure in the micro- and nanometer range] // Mezhdunarodnaya konferentsiya «Fizicheskie svoystva materialov i dispersnykh sred dlya elementov informatsionnykh sistem, nanoelektronnykh priborov i ekologichnykh tekhnologii». Moskva, 21–24 aprelya 2015 g [International conference "Physical properties of materials and disperse media for elements of information systems, nanoelectronic devices and environmentally friendly technologies." Moscow, 21–24 April 2015]. M., IIU MGOU, 2015. P. 17.
  23. Difraktsiya sveta na reshetkakh s periodicheskim mikrorel'efom pri otritsatel'nom znake opticheskoi anizotropii materiala [The light diffraction on lattices with periodic microrelief with a negative sign of the optical anisotropy of the material] // Mezhdunarodnaya konferentsiya «Fizicheskie svoystva materialov i dispersnykh sred dlya elementov informatsionnykh sistem, nanoelektronnykh priborov i ekologichnykh tekhnologii». Moskva, 21–24 aprelya 2015 g [International conference "Physical properties of materials and disperse media for elements of information systems, nanoelectronic devices and environmentally friendly technologies." Moscow, 21–24 April 2015] / Belyaev V.V., Solomatin A.S., Margaryan A.L., Abramyan V.K., Oganessian D.L., Akopyan N.G., Arutyunyan V.M. M., IIU MGOU, 2015. P. 100.
  24. Solomatin A.S. Vliyaniye profilya mikrorel'efa periodicheskikh anizotropnykh struktur na ikh difraktsionnye svoystva [The influence of the microrelief profile of periodic anisotropic structures on their diffraction properties] // *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo*

oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-Matematika [Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics]. 2016. no. 1. pp. 74–87.

### ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

*Соломатин Алексей Сергеевич* – кандидат физико-математических наук, инженер учебно-научной лаборатории теоретической и прикладной нанотехнологии, Московский государственный областной университет;  
e-mail: Sotrudnica\_UNC@mail.ru

*Беляев Виктор Васильевич* – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической физики, Московский государственный областной университет;  
e-mail: vic\_belyaev@mail.ru

### INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

*Aleksei Solomatin* – candidate of physical and mathematical sciences, engineer of the Education & Science Lab for Theoretical and Applied Nanotechnology at the Moscow Region State University;  
e-mail: Sotrudnica\_UNC@mail.ru

*Victor Belyaev* – doctor of technical sciences, professor, head of the department of theoretical physics at the Moscow Region State University;  
e-mail: vic\_belyaev@mail.ru

### БИБЛИОГРАФИЧЕСКАЯ ССЫЛКА

Соломатин А.С., Беляев В.В. Жидкокристаллические дифракционные оптические элементы с неоднородным распределением директора. // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2016. № 4. С. 56–67.  
DOI: 10.18384/2310-7251-2016-4-56-57.

### BIBLIOGRAPHIC REFERENCE

*A. Solomatin, V. Belyaev.* Liquid-crystal diffractive optical elements with an inhomogeneous distribution of the director. // Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics. 2016. no. 4. pp. 56–57.  
DOI: 10.18384/2310-7251-2016-4-56-57.

УДК 533.9(075.8)

DOI 10.18384/2310-7251-2016-4-68-76

## ВЫЧИСЛЕНИЕ МАТРИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ БОЛЬЦМАНОВСКОГО ОПЕРАТОРА СТОЛКНОВЕНИЙ ДЛЯ ГАЗОВОЙ СМЕСИ

**Маркеев Б.М.**

*Московский государственный областной университет  
105005, Москва, ул. Радио, 10а, Российская Федерация*

**Аннотация.** В работе вычислены матричные элементы больцмановского оператора столкновений для неравновесной газовой смеси в рамках обобщенного моментного метода. Получена величина изменения парциального импульса за счёт столкновений, которая выражается через матричные элементы для произвольного закона взаимодействия между частицами для сильнонеравновесной смеси с большой разностью температур компонент и относительными скоростями сравнимыми с тепловой скоростью, когда функцией нулевого приближения является максвелловская функция. Разложение для изменения парциального импульса за счёт столкновений включает в себя слагаемые относительно гидродинамических переменных вплоть до третьей степени и поэтому область его применимости распространяется на малые, но конечные их значения. Причём вклад высших моментов существенным образом зависит от закона взаимодействия между сталкивающимися частицами и для степенного закона взаимодействия оценен. Получено уравнение для эволюции парциальной хаотической энергии. Оценен вклад в искомое выражение нелинейных слагаемых относительно гидродинамических переменных.

**Ключевые слова:** обобщённый моментный метод, больцмановский оператор, максвелловская функция, матричные элементы сильнонеравновесной смеси, закон взаимодействия между сталкивающимися частицами.

## CALCULATION OF MATRIX ELEMENTS OF THE BOLTZMANN COLLISION OPERATOR FOR GAS MIXTURES

**B. Markeev**

*Moscow Region State University  
ul. Radio 10a, 105005 Moscow, Russia*

**Abstract.** We have calculated matrix elements of the Boltzmann collision operator for nonequilibrium gas mixtures in the framework of the generalized torque method. The value of the partial change in the momentum due to collisions is obtained, which is expressed through the matrix elements for an arbitrary law of interaction between particles of a nonequilibrium mixture with a large temperature difference between the component and the relative velocity comparable to the thermal speed, when the function of the zero approximation is the Maxwell function. Decomposition for a partial change in the momentum due to collisions includes terms regarding

hydrodynamic variables up to third degree and, therefore, the scope of its applicability applies to small, but finite values. Moreover, the contribution of higher moments strongly depends on the law of interaction between colliding particles and is evaluated for the power-law interaction. We have derived an equation for the evolution of the partial chaotic energy. We have estimated the contribution of nonlinear terms of the hydrodynamic variables to the desired expression.

**Keywords:** generalized torque method, Boltzmann operator, Maxwell's function, matrix elements of a nonequilibrium mixture, law of interaction between colliding particles.

Для получения замкнутой системы уравнений переноса, а также вычисления матричных элементов столкновительного оператора, представим парциальную функцию распределения в виде разложения

$$f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{v}_{\alpha}, t) = f_{\alpha}^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{v}_{\alpha}, t) \sum_i a_i(\mathbf{r}, t) M_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}_{\alpha}, t),$$

где  $f_{\alpha}^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{v}_{\alpha}, t)$  – аппроксимационная функция нулевого приближения,  $M_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  – ортогональный полином,  $a_i(\mathbf{r}, t)$  – коэффициенты разложения, используется для обозначения совокупности координатных индексов, по которым происходит суммирование. В [1] развивается гидродинамическая теория течения сильнонеравновесной газовой смеси на основе разложения решения уравнения Больцмана по ортогональным полиномам в пространстве скоростей возле парциальной максвелловской функции. Классическим примером могут служить течения в области ударной волны, в слабоионизованном газе, помещенном в сильное электрическое поле, а также в кнудсеновском слое вблизи твердых поверхностей. Анализируются особенности обобщенного моментного метода решения кинетического уравнения по сравнению с классическим методом Чепмена – Энскога. Показано, что решения в рамках обобщенного моментного метода обладают для течения сильнонеравновесной газовой смеси более быстрой асимптотической сходимостью по сравнению с классическим методом Чепмена – Энскога.

Функция распределения нулевого приближения и система ортогональных полиномов выбраны в предположении, что бесконечное разложение (1) быстро сходится и поэтому достаточно учесть лишь несколько первых слагаемых данного разложения. Характерная особенность процедуры вычисления матричных элементов оператора столкновений определяется тем фактом, что высшие матричные элементы, начиная с некоторого, приравниваются к нулю, а оставшиеся элементы затем используют при решении уравнения Больцмана [2] в рамках соответствующего метода. Умножая уравнение Больцмана (1) с интегралом для упругих столкновений на  $\psi = 1$  и интегрируя по всему пространству скоростей, получим:

$$\nabla_i n_{\alpha} + \nabla_r n_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha} = (\delta n_{\alpha} / \delta t) = 0 \quad (2)$$

а соответствующие матричные элементы тождественно равны нулю в силу хорошо известного свойства сохранения числа частиц в результате столкновений

интегралом упругих столкновений. Умножая кинетическое уравнение с интегралом столкновений Больцмана:

$$(\delta f_\alpha(r, v_\alpha, t) / \delta t) = \Sigma_\beta \int dv_\alpha d\Omega g_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta}(g_{\alpha\beta}, \theta) (f'_\alpha f'_\beta - f_\alpha f_\beta) = \Sigma_\beta J_{\alpha\beta} \quad (3)$$

на  $\psi = m_\alpha v_\alpha$  и интегрируя по всему пространству скоростей, получим парциальное уравнение движения:

$$\begin{aligned} n_\alpha m_\alpha [\nabla_i \mathbf{u}_\alpha + (\mathbf{u}_\alpha \nabla) \mathbf{u}_\alpha]^V + \nabla_\nu n_\alpha k_B T_\alpha - \nabla_j \sigma_{\alpha j} v_j - \\ - e_\alpha n_\alpha (\mathbf{E} + (1/c) [\mathbf{u}_\alpha \mathbf{B}])^V = \Sigma_\beta \int dv_\alpha m_\alpha v_\alpha^j J_{\alpha\beta}^V = \\ = \Sigma_\beta (\delta M_\alpha / \delta t)_\beta^V \end{aligned} \quad (4)$$

Величина для изменения парциального импульса за счёт столкновений  $\Sigma_\beta (\delta M_\alpha / \delta t)_\beta^V$  только для случая, когда в аппроксимации (1) функцией нулевого приближения является максвелловская функция, возможно выразить через матричные элементы для произвольного закона взаимодействия между частицами для сильнонеравновесной смеси с большой разностью температур компонент и относительными скоростями, сравнимыми с тепловой скоростью. В результате выражение для изменения парциального импульса, обусловленного столкновениями с молекулами сорта  $\beta$ , будет иметь вид:

$$\begin{aligned} (\delta M_\alpha / \delta t)_\beta^V = n_\alpha n_\beta m_{\alpha\beta} \Omega_{\alpha\beta}^{(1,1)} V_{\alpha\beta} \{ \Psi_1 a^V + \Psi_2 a^2 a^V + \\ + \Psi_3 a^{iv} a^i + \Psi_4 a_\beta^{iv} a^i + \Psi_5 a_\alpha^{ssv} + \Psi_6 a_\beta^{ssv} + (a^2 \delta^{iv} + 2a^i a^v) \times \\ \times (\Psi_7 a_\alpha^{ssv} + \Psi_8 a_\beta^{ssv}) + \Psi_9 a_\alpha^{ssi} a_\beta^{iv} + \Psi_{10} a_\beta^{ssi} a_\alpha^{iv} + \\ + \Psi_{11} (a_\alpha^{ssi} a_\beta^{kki} a^v + a_\alpha^{ssi} a_\beta^{kkv} a^i + a_\alpha^{ssv} a_\beta^{kki} a^i) \} \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь  $a^i = (u_\alpha - u_\beta)^i / V_{\alpha\beta}$ ,  $a_\alpha^{ij} = 2\sigma_\alpha^{ij} / n_\alpha m_\alpha V_{T\alpha}^2$ ,  $a_\alpha^{ssv} = \frac{4q_\alpha^v}{n_\alpha m_\alpha V_{T\alpha}^3}$  – без-

размерные гидродинамические переменные, перед которыми в качестве сомножителя фигурирует соответствующий матричный элемент,  $V_{T\alpha}^2 = 2K_B T_\alpha / m_\alpha$ ,  $V_{\alpha\beta}^2 = V_{T\alpha}^2 + V_{T\beta}^2$ ,  $\Omega_{\alpha\beta}^{(p,q)}$  – интеграл Чепмена – Каулинга, определяемый соотношением:

$$\begin{aligned} \Omega_{\alpha\beta}^{(p,q)} (8/3\sqrt{\pi}) V_{\alpha\beta} = \exp \int (-g^2) g^{2q+3} \sigma_{\alpha\beta}(g, \theta) (1 - \cos^p \theta) dg d\Omega, \\ d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi \end{aligned} \quad (6)$$

Коэффициенты  $\psi_i$  ( $i = 1, \dots, 11$ ) представляют собой линейные выражения относительно величин X, XU, XUS и приведены в таблице 1. Величины X, U, S являются функциями омега – интегралов Чепмена – Каулинга, алгоритм расчёта которых для произвольных законов взаимодействия и больших скоростей и разностей парциальных температур в случае, когда функция нулевого прибли-

**Таблица 1.** Зависимость коэффициентов  $\psi_i$  от  $X$ ,  $XU$ ,  $XUS$  и  $\beta_\alpha$  и  $\beta_\beta$ .

$i$	$\psi_i$
1	-1
2	$X$
3	$-\beta_\alpha X$
4	$-\beta_\beta X$
5	$(1/2)X\beta_\alpha^{3/2}$
6	$-(1/2)X\beta_\beta^{3/2}$
7	$-(7/10)XU\beta_\alpha^{3/2}$
8	$(7/10)XU\beta_\beta^{3/2}$
9	$(7/20)XU\beta_\beta\beta_\alpha^{3/2}$
10	$-(7/20)XU\beta_\alpha\beta_\beta^{3/2}$
11	$-(63/50)XUS\beta_\alpha^{3/2}\beta_\beta^{3/2}$
$\beta_\alpha$	$V_{T\alpha}^2 / (V_{T\alpha}^2 + V_{T\beta}^2)$
$\beta_\beta$	$V_{T\beta}^2 / (V_{T\alpha}^2 + V_{T\beta}^2)$

жения является максвелловской функцией, нетрудно воспроизвести. Наиболее простой вид величины  $X$ ,  $U$ ,  $S$  принимают в случае степенного закона взаимодействия между частицами:

$$X = (4/n - 1), XU = (16/n^2 - 1)/35, \quad (7)$$

$$XUS = (16/n^2 - 1)(1 + 4/3n)/105$$

где  $n$  – показатель в степенном законе взаимодействия. В случае максвелловского закона взаимодействия между частицами, когда  $n = 4$  все коэффициенты  $\psi_i$  обращаются в нуль за исключением  $\psi_1 = -1$ . Таким образом в максвелловском газе не зависимо от величины относительной скорости по сравнению с тепловой изменение парциального импульса за счет столкновений будет пропорционально относительной скорости и совпадает с [3; 4], где для вычисления матричных использовался линеаризованный оператор столкновений. Для частных случаев газа из твердых сфер и газа, молекулы которого взаимодействуют по кулоновскому закону, выражения для изменения парциального импульса для произвольных относительных скоростей при аппроксимации парциальной функции распределения максвелловской функцией (пятимоментная аппроксимация), было получено в работах [3; 5]. Разложение (5) для изменения парциального импульса за счёт столкновений включает в себя слагаемые относительно гидродинамиче-

ских переменных вплоть до третьей до третьей степени и поэтому область его применимости распространяется на малые, но конечные значения  $a^i, a_{\alpha}^{ij}, a_{\alpha}^{ssv}$ . Данное выражение естественным образом совпадает с соответственным выражением работ [1–5], в области относительных скоростей, пренебрежимо малых по сравнению с тепловыми ( $a^i \approx a_{\alpha}^{ij} \approx a_{\alpha}^{ssv} < 1$ ). По сравнению с [3; 4] в (5) учитывается вклад в изменение парциального импульса за счёт столкновения моментов от функции распределения более высокого порядка – тензора вязких напряжений и потока тепла для произвольного закона взаимодействия. Причём вклад высших моментов существенным образом зависит от закона взаимодействия между сталкивающимися частицами и для степенного закона взаимодействия может быть оценен, используя соотношение (7). Значение величин X, XU и XUS характеризует вклад нелинейных слагаемых в общее выражение (5). Для модели твёрдых сфер ( $n = \infty$ ) широко используемой для оценки величин коэффициентов переноса, данные коэффициенты имеют значения  $-1/5, -1/35$  и  $-7/(9 \times 35)$  соответственно. Для предельного случая кулоновского взаимодействия ( $n = 2$ ) данные величины принимают значения  $-1/5, 3/35, -28/(9 \times 35)$ . Поэтому вклад нелинейных слагаемых, представляющих собой моменты третьего порядка от интеграла столкновений и пропорциональных величине X, не превосходит 25% в (5). Моменты пятого порядка от интеграла столкновений в (5) (с седьмого по десятое слагаемые, пропорциональные величине XU) дают уже меньший вклад, не превосходящий восьми процентов для предельных случаев смесей газов, состоящих из твердых сфер или заряженных частиц. И, наконец, момент восьмого порядка от интеграла столкновений определяет одиннадцатое слагаемое в (5) пропорциональное величине XUS и даёт вклад, не превосходящий процента. Таким образом можно утверждать, что для ( $a^i \approx a_{\alpha}^{ij} \approx a_{\alpha}^{ssv} \approx 1$ ). во всей области степенных взаимодействий между частицами газа вклад от матричных элементов в (5) с возрастанием степени полинома уменьшается. В случае более сложных законов взаимодействия между частицами газа вклад матричных элементов в (5) существенным образом зависит от температуры [7; 8]. На фиг. 1, 2 приводятся зависимости величин X, XU, XUS от приведенной температуры  $T^* = T/\varepsilon$ , где  $\varepsilon$  – глубина потенциальной ямы для модели потенциала Букингема:

$$\varphi(r) = \begin{cases} [\varepsilon/(1-6/\alpha)][(6/\alpha)\exp\{\alpha(1-r/\sigma)\} - (\sigma/r)^6], & r_{max} > r \\ \infty, & r_{max} < r \end{cases} \quad (8)$$

$\sigma$  – эффективное сечение столкновения,  $\alpha$  – третий подгоночный параметр. Потенциал Букингема достаточно точно моделирует взаимодействие относительно сложных молекул газовой смеси. Для предельных значений  $\alpha = 12$  и  $\alpha = 15$  как следует из рис. 1 и 2 наблюдается уменьшение вклада матричных элементов оператора столкновений соответствующих более высокому моменту относительно больцмановского интеграла для широкого интервала температур. При этом в предельном случае  $\alpha = 12$  вклад матричных элементов в (5), соответствующих моменту третьего порядка от интеграла столкновений, про-

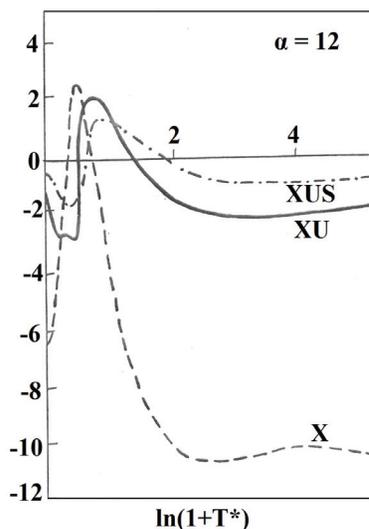


Рис. 1.

Зависимость величин X, XU и XUS в случае потенциала Букингема при  $\alpha = 12$  от безразмерной температуры.

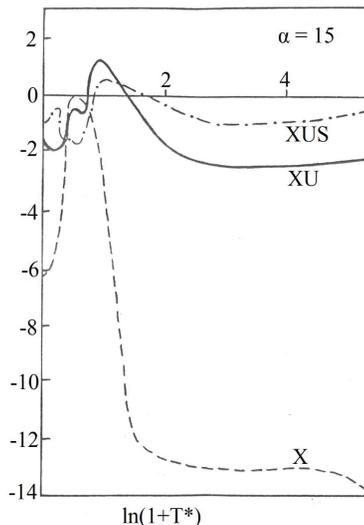


Рис. 2.

Зависимость величин X, XU и XUS в случае потенциала Букингема при  $\alpha = 15$  от безразмерной температуры.

порциональных X, не превосходит 11%, пропорциональных XU и соответствующих моменту пятого порядка, не превосходит 3% и пропорциональных XUS, соответствующих моменту восьмого порядка, не превосходит 2,5%. Следует отметить, что знак вклада матричных элементов, пропорциональных X, XU, XUS зависит от величины приведенной температуры  $T^*$  и в отличие от степенного потенциала взаимодействия может быть как положительным, так и отрицательным. В предельном случае  $\alpha = 15$  для потенциала Букингема вклад матричных элементов пропорциональных X, XU, XUS в величину изменения парциально-го импульса за счет столкновений не превосходит 14%, 3% и 1% соответственно. Обратимся к вычислению матричных элементов, обуславливающих изменение парциальной хаотической энергии за счет столкновений. Умножая уравнение Больцмана с интегралом для упругих столкновений на  $\psi = (m_\alpha/2)(\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{u}_\alpha)^2$  и интегрируя по всему пространству скоростей, получим уравнение для эволюции парциальной хаотической энергии

$$\begin{aligned} & (3n_\alpha / 2)k_B (\nabla_t + \mathbf{u}_\alpha \nabla) T_\alpha + n_\alpha T_\alpha k_B (\nabla \mathbf{u}_\alpha) + (\nabla \mathbf{q}_\alpha) - \sigma_\alpha^{ij} \nabla_j u_\alpha^i = \\ & = \Sigma_\beta \int d\mathbf{v}_\alpha (m_\alpha / 2) (\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{u}_\alpha)^2 J_{\alpha\beta} = \Sigma_\beta (\delta E_\alpha / \delta t)_\beta. \end{aligned} \tag{9}$$

Для сильнонеравновесной газовой смеси должна сохраняться полная кинетическая энергия, состоящая из кинетической поступательной энергии, определяемой парциальной гидродинамической скоростью, и энергии хаотического движения, характеризуемой парциальной температурой. Поэтому в правой части (9) фигурирует величина изменения парциальной хаотической энергии за счет столкновений:

**Таблица 2.** Зависимость коэффициентов  $\delta_i$  от  $X$ ,  $XU$ ,  $XUS$  и  $\beta_\alpha$  и  $\beta_\beta$ .

$i$	$\delta_i$
1	$1 - \lambda_{\alpha\beta} + (5/2)\lambda_{\alpha\beta}X$
2	$\beta_\alpha^{3/2} \left\{ \left[ (3/2)(R_{\alpha\beta} - \lambda_{\alpha\beta} / M_\beta) + 2\lambda_{\alpha\beta} - 1/2 \right] X - (7/2)\lambda_{\alpha\beta}XU \right\}$
3	$\beta_\beta^{3/2} \left\{ (3/2 - 2\lambda_{\alpha\beta} + 1/2) X (7/2)\lambda_{\alpha\beta}X \right\}$
4	$-(\beta_\alpha\beta_\beta)^{3/2} \left\{ (1 - R_{\alpha\beta} + \lambda_{\alpha\beta} / M_\alpha - 2\lambda_{\alpha\beta}) \times \right.$ $\left. \times (21/20)XU + (63/20)\lambda_{\alpha\beta}XUS \right\}$
$\lambda_{\alpha\beta}$	$M_\alpha (1 - T_\beta / T_\alpha)$
$M_\alpha$	$m_\alpha / (m_\alpha + m_\beta)$
$R_{\alpha\beta}$	$m_\alpha / m_\alpha$

$$\begin{aligned}
 (\delta E_\alpha / \delta t)_\beta = & \beta_\alpha n_\alpha n_\beta m_{\alpha\beta} \Omega_{\alpha\beta}^{(1,1)} V_{\alpha\beta}^2 \{ -(3/2)\lambda_{\alpha\beta} + \delta_1 a^2 + \delta_2 a^i a_\alpha^{ssi} + \\
 & + \delta_3 a_\beta^{ssi} a^i + \delta_4 a_\alpha^{ssi} a_\beta^{kki} \}
 \end{aligned} \quad (10)$$

В котором матричные элементы фигурируют в качестве сомножителей перед гидродинамическими переменными. В (10) используются следующие обозначения:

$$\lambda_{\alpha\beta} = (1 - T_\alpha / T_\beta) M_\alpha, M_\alpha = m_\alpha / m_\beta \quad (11)$$

и значения  $\delta_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ), приведенные в таблице 2. Первое слагаемое в (10) определяет обмен хаотической энергией между компонентами сильнонеравновесной газовой смеси и пропорциональное разности парциальных температур, второе – трансформацию поступательной кинетической парциальной кинетической энергии в хаотическую (пропорциональное квадрату относительной скорости). Эффект трансформации поступательной кинетической энергии в хаотическую при взаимодействии лёгкой заряженной компоненты с тяжёлой, с привлечением двух первых слагаемых разложения (10) изучались впервые в [8]. Слагаемое в (10), пропорциональное  $\delta_1$ , обуславливает вклад в величину изменения парциальной хаотической энергии за счёт столкновений, пропорциональный полиномам второй степени в пространстве скоростей, третье и четвёртое слагаемые, пропорциональные  $\delta_2$  и  $\delta_3$  – вклад, пропорциональный полиномам четвертой степени, пятое слагаемое, пропорциональное  $\delta_4$  – вклад, пропорциональный полиномам шестой степени. При этом  $\delta_2$ ,  $\delta_3$  и  $\delta_4$  пропорциональны величинам  $X$ ,  $XU$  и  $XUS$ , которые тождественно обращаются в нуль для максвелловского газа. Таким образом, для максвелловского газа слагаемые, пропорциональные полиномам более, чем полиномам более, чем второго порядка, не дают

вклада в столкновительную часть уравнения переноса (9). Для прочих законов взаимодействия слагаемые разложения оператора столкновений, пропорциональные полиномам более, чем второго порядка, дают малый вклад. Например, для степенного закона взаимодействия между молекулами вклад слагаемых в разложение оператора столкновений, пропорциональных четвёртой степени не превосходит двадцати пяти процентов, а пропорциональных шестой степени не превосходит шести процентов. Для более реалистичного потенциала взаимодействия Букингема вклад слагаемых, пропорциональных четвертой и шестой степени для широкого интервала температур не превосходит 14% и 3% соответственно.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Маркеев Б.М. Кинетическая теория неоднородных и неравновесных газовых смесей // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика, 2016. № 3. С. 30–36.
2. Ender A.Ya., Ender I.A., Bakaleinikov L.A., Flegontova E.Yu. Recurrence relations between kernels of the nonlinear Boltzmann collision integral // *Europ. J. Mech B/Fluids* 36, 17–24 (2012).
3. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. М. Иностранная литература, 1960. 510 с.
4. Бакалейников Л.А., Флегонтова Е.Ю., Эндер А.Я., Эндер И.А. Рекуррентная процедура расчёта ядер нелинейного интеграла столкновений уравнения Больцмана // *Журнал технической физики*. 2016. Том 86. Вып. 4. С. 10–20.
5. Shunk R.W. Mathematically Structure of Transport Equations for Multispecies Flows. *Reviews of Geophys. And Space Physics*, 1977. Vol. 15. no. 4. pp. 429–445.
6. Иванов М.С., Коротченко М.А., Михайлов Г.А., Рогазинский С.В. Глобально-весовой метод Монте-Карло для нелинейного уравнения Больцмана // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2005. Т. 45. Вып. 10. С. 1860–1870.
7. Черемисин Ф.Г. Метод прямого численного интегрирования уравнения Больцмана // *Доклады Академии наук*. 1997. Вып. 10. С. 53–57.
8. Ферцигер Дж., Капер Г. Математическая теория процессов переноса в газах. М.: Мир, 1976. 554 с., ил.

### REFERENCES

1. Markeev B.M. Kineticheskaya teoriya neodnorodnykh i neravnovesnykh gazovykh smesei [Kinetic theory and nonequilibrium inhomogeneous gas mixtures] // *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-Matematika* [Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics]. 2016. no. 3. pp. 30–36.
2. Ender A.Ya., Ender I.A., Bakaleinikov L.A., Flegontova E.Yu. Recurrence relations between kernels of the nonlinear Boltzmann collision integral // *Europ. J. Mech B/Fluids* 36, 17–24 (2012).
3. *Chapman S., Cowling T. The mathematical theory of nonuniform gases*. Cambridge: Cambridge University Press, 1953.
4. Rekurrentnaya protsedura rascheta yader nelineinogo integrala stolknovenii uravneniya Bol'tsmana [Recurrent procedure of calculation of kernels of nonlinear collision integral of the Boltzmann equation] / Bakaleinikov L.A., Flegontova E.Yu., Ender A.Ya., Ender I.A. // *Zhurnal tekhnicheskoi fiziki* [J. Tech. Phys.]. 2016. Vol. 86. no. 4. pp. 10–20.

5. Shunk R.W. Mathematically Structure of Transport Equations for Multispecies Flows. *Reviews of Geophys. and Space Physics*, 1977. Vol. 15. no. 4. pp. 429–445.
6. Global'no-vesovoi metod Monte-Karlo dlya nelineinogo uravneniya Bol'tsmana [Monte Carlo global weight method for the nonlinear Boltzmann equation] / Ivanov M.S., Korotchenko M.A., Mikhailov G.A., Rogazinskii S.V. // *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki* [Computational mathematics and mathematical physics]. 2005. Vol. 45. no. 10. pp. 1860–1870.
7. Cheremisin F.G. Metod pryamogo chislennogo integrirovaniya uravneniya Bol'tsmana [The method of direct numerical integration of the Boltzmann equation] // *Doklady Akademii nauk*. 1997. no. 10. pp. 53–57.
8. Ferziger J.H., *Kaper* Y.G. *Mathematical theory of transport processes in gases*. Amsterdam–London: North-Holland Publishing comp., 1972.

#### ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

*Маркеев Борис Михайлович* – доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительной математики и методики преподавания информатики, Московский государственный областной университет;  
e-mail: markeevb@gmail.com

#### INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

*Boris Markeev* – doctor of physical and mathematical sciences, professor of the Department of Computational Mathematics and Methodology of Teaching Informatics at the Moscow State Regional University;  
e-mail: markeevb@gmail.com

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКАЯ ССЫЛКА

Маркеев Б.М. Вычисление матричных элементов больцмановского оператора столкновений для газовой смеси // *Вестник Московского государственного областного университета*. Серия: Физика-математика. 2016. № 4. С. 68–76.  
DOI: 1018384/2310-7251-2016-4-68-76.

#### BIBLIOGRAPHIC REFERENCE

B. Markeev. Calculation of matrix elements of the Boltzmann collision operator for gas mixtures // *Bulletin of Moscow Region State University*. Series: Physics and Mathematics. 2016. no. 4. pp. 68–76.  
DOI: 1018384/2310-7251-2016-4-68-76.

# РАЗДЕЛ III. ТЕОРИЯ И МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ И ВОСПИТАНИЯ

---

УДК 517

DOI: 10.18384/2310-7251-2016-4-77-85

## СОЗДАНИЕ ФОНДА ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ И НОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ MATLAB ПРИ ИЗУЧЕНИИ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

**Власова Е.А., Попов В.С., Пугачев О.В.**

*Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана  
105005, Москва, ул. 2-я Бауманская, 5, Российская Федерация*

**Аннотация.** Предлагаются генераторы заданий, созданные в среде MATLAB, обеспечивающие формирование фонда оценочных средств для проведения текущих и промежуточных аттестаций при обучении по дисциплине «Линейная алгебра». Показано использование созданного в MATLAB генератора матриц с целыми собственными значениями для формирования банка тестовых задач. Изложены способы наглядного геометрического представления действия линейного оператора в двумерном и трехмерном пространствах. Приведены примеры.

**Ключевые слова:** MATLAB, генератор заданий, целочисленные матрицы, собственные значения, жорданова форма, симметричные матрицы, геометрическое представление линейного оператора.

## CREATION OF A FUND OF ASSESSMENT TOOLS AND NEW EDUCATIONAL TECHNOLOGIES WITH THE USE OF MATLAB IN THE STUDY OF LINEAR ALGEBRA

**E. Vlasova, V. Popov, O. Pugachev**

*Bauman Moscow State Technical University  
2-ya Baumanskaya ul. 5, 105005 Moscow, Russia*

**Abstract.** Our generators of tasks created in the MATLAB environment provide the formation of a fund of assessment tools for current and intermediate certification in teaching the subject 'Linear algebra'. We demonstrate the use of the MATLAB-created generator of matrices with integer eigenvalues for the formation of the bank of test tasks. We describe methods for visual

---

© Власова Е.А., Попов В.С., Пугачев О.В., 2016.

geometric representation of the action of a linear operator in two-dimensional and three-dimensional spaces. Examples are presented.

**Key words:** MATLAB, generator of tasks, integer matrices, eigenvalues, Jordan canonical form, symmetric matrix, geometric action of a linear operator.

## ВВЕДЕНИЕ

Одним из важных методов проверки знаний является тестирование. Этот метод имеет ряд преимуществ перед традиционными устными и письменными экзаменами, недостатками которых является высокая организационная сложность, большая трудоемкость работ, ограниченное (регламентированное) время проверки, присутствие субъективного и психологического факторов. Он также стимулирует учебно-познавательную активность студентов [1–2]. Тестирования должны быть как промежуточными, так и итоговыми.

Процесс тестирования предполагает наличие большого банка задач для каждого раздела тестируемых математических курсов. Создание банка задач – довольно сложная процедура, требующая соблюдения определённых требований к содержанию и виду таких задач: однозначность их формулировки, определенность метода решений, единственность получаемого результата. Создание «вручную» набора тестового материала во многих случаях оказывается малоэффективным занятием и отнимает довольно много времени у преподавателя. Поэтому использование современных математических пакетов (МП) существенно облегчает процесс создания такого рода тестовых наборов задач.

Для создания банка тестовых задач могут быть использованы системы MathCad и MATLAB, которые имеют встроенную матричную и комплексную арифметику, поддерживают выполнение операций с векторами, матрицами и массивами данных, используют общепринятый способ изображения математических объектов и удобную операционную среду, которая позволяет формулировать задачи и получать решения в обычной математической форме, не прибегая к рутинному программированию.

В данной работе предлагаются генераторы заданий, созданные в среде MATLAB, обеспечивающие формирование фонда оценочных средств для проведения текущих и промежуточных аттестаций при обучении по дисциплине «Линейная алгебра».

В статье представлены также способы наглядного представления действия линейного оператора в двумерном и трёхмерном пространствах. Владение этими способами позволяет успешно использовать новые образовательные технологии при изучении абстрактной и сложной для усвоения дисциплины «Линейная алгебра» [3]. Принцип наглядности и компьютерные технологии тесно взаимосвязаны, и их грамотное сочетание может привести к хорошим результатам в обучении. Наглядные и технические средства обучения способствуют не только эффективно-му усвоению соответствующей информации, но и активизируют познавательную деятельность обучающихся, развивают способность увязывать теорию с практикой, повышают интерес к учению, делают процесс обучения более доступным.

## Генераторы целочисленных матриц с целыми собственными значениями

При составлении или обновлении задач на нахождение собственных значений и собственных векторов линейных операторов и приведение их к жордановой форме, которые студенты должны решать на контрольной работе или дома без использования компьютера и не прибегая к приближенным вычислениям, а также выполняя тестовые задания для самопроверки знаний, возникает трудность: нужно составить такую матрицу, чтобы собственные значения были целыми, и чтобы жордановы клетки имели определённый размер.

Для решения этой проблемы можем предложить преподавателям использовать следующий созданный в MATLAB генератор матриц  $3 \times 3$  с целыми собственными значениями. Сначала с помощью генератора случайных чисел выбираем три целых числа – собственные значения матрицы, некоторые из них могут совпадать. Далее определяем один из трёх видов жордановой формы матрицы:

$$A1 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, A2 = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}, A3 = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

После этого создаём случайную целочисленную матрицу  $T$ , посредством которой матрицу  $A$  преобразуем из жордановой формы в произвольную по формуле  $T^{-1}AT = M$ . Получающаяся матрица  $M$  имеет рациональные коэффициенты, но нам желательно получить целые. Для этого матрицу  $M$  умножаем на целые числа от 1 до 12, получается матрица  $N$ , и выбираем тот множитель, при котором элементы матрицы  $N$  наиболее близки к целым. Однако, множитель, не превышающий числа 12, может оказаться недостаточным, в этом случае пользователь видит число  $\text{err}$ , заметно отличающееся от 0, и вынужден запускать программу заново (это случается примерно в 60% случаев).

Приведём скрипт программы (рис. 1) и пример её работы с пояснениями.

```

g=round(rand(1,3)*10-5); %Три случайных целых числа от -5 до 5 будут
a=g(1); b=g(2); c=g(3); %собственными значениями (некоторые могут
совпадать).
A1=[a 0 0;0 b 0;0 0 c]; %диагональная матрица
A2=[a 1 0;0 a 0;0 0 b]; %Матрица с жордановой клеткой 2 порядка
A3=[a 1 0;0 a 1;0 0 a]; %Матрица с жордановой клеткой 3 порядка
A=A2 %НАДО ВЫБРАТЬ ОДНУ ИЗ ТРЕХ: A1, A2 или A3.
T=round(rand(3)*10-5) %Случайная матрица из чисел от -5 до 5
M=inv(T)*A*T; %M -- матрица, подобная A (возможен сбой, если T
вырождена). Элементы M могут оказаться дробными.
for i=1:12
    N=i*M; %Умножаем M на числа от 1 до 12
    er(i)=max(max(N-round(N))); %и оцениваем отклонение от целых.
end
[err j]=min(er);
err %будет близко к 0, если матрица N целочисленная;
%если же err не 0, то надо повторно запустить программу. сбоек
примерно 60%.
N=round(j*M) %Искомая целочисленная матрица (округлим, чтобы
избавиться от "00000" или "99999")
eig(N) %Собственные значения матрицы N.

```

Рис. 1. Скрипт программы генерирования целочисленной матрицы с целыми собственными значениями.

**Пример 1.** Пусть выбраны собственные значения  $a = 3$  кратности 2 и  $b = 1$ , тип A2 жордановой формы матрицы. Используем предложенный выше генератор целочисленной матрицы с целыми собственными значениями:

A = Матрица с жордановой клеткой 2 порядка – жорданова форма искомой матрицы

```
3 1 0
0 3 0
0 0 1
```

T = Случайная матрица из чисел от -5 до 5 – матрица перехода

```
-3 0 2
4 -3 0
-5 5 0
```

err = оказалось близко к 0

```
1.0658e-14
```

N = Искомая целочисленная матрица

```
18 -12 0
16 -10 0
22 -21 6
```

ans = Проверка: собственные значения матрицы N

```
6
2
6
```

Если матрица симметрична, то для неё существует ортонормированный базис из собственных векторов. Рассмотрим задачу генерирования целочисленных симметричных матриц с целыми собственными значениями. Если действовать таким же способом, как описано выше, то придётся создавать случайную ортогональную матрицу перехода T из рациональных чисел, что очень сложно.

Здесь применим другой подход: будем генерировать случайные целочисленные симметричные матрицы и из них выбирать те, чьи собственные значения целые. Выбирать придётся из многих сотен, поэтому процедура выбора поручается системе MATLAB. Будем создавать по 500 таких матриц и выбирать ту, у которой собственные значения наиболее близки к целым (рис. 2). Примерно в 3/4 случаев они будут точно целыми хотя бы для одной матрицы из 500.

```
N=500; %Из N матриц с вер. 75% найдется нужная.
V=round(rand(N,6)*20-10); %N строк по 6 случ. целых от -10 до 10
for i=1:N
    A=[V(i,1) V(i,2) V(i,3); V(i,2) V(i,4) V(i,5); V(i,3) V(i,5)
    V(i,6)]; %i-ая симметричная матрица
    er(i)=norm(eig(A)-round(eig(A))); %насколько собственные значения
    близки к целым
end;
[err j]=min(er) %погрешность минимальна для j-ой матрицы.
A=[V(j,1) V(j,2) V(j,3);V(j,2) V(j,4) V(j,5);V(j,3) V(j,5) V(j,6)]
%Это j-ая матрица.
%Полученная матрица A -- искомая, ТОЛЬКО ЕСЛИ число err близко к 0.
eig(A) %проверяем, целые ли собственные значения.
```

Рис. 2. Скрипт программы генерирования симметричной целочисленной матрицы с целыми собственными значениями.

**Пример 2.** Используем предложенный выше генератор целочисленной симметричной матрицы с целыми собственными значениями:

err = Погрешность минимальна для j-ой матрицы  
0

j =  
414

A = j-ая матрица  
-1 3 -6  
3 -5 -4  
-6 -4 1

ans = Собственные значения матрицы A  
-7  
-6  
8

### Наглядное представление действия линейного оператора

Покажем, как в среде MATLAB можно представить геометрическую интерпретацию действия линейного оператора, заданного сначала в двумерном, а затем в трехмерном линейном пространстве.

```
A=[1 1;4 1]; %На плоскости дан линейный оператор A.
v=[1;0]; w=[0;1]; %Сначала рассмотрим стандартный базис.
%ломаная задается матрицей: 1-я строка x, 2-я строка y. Столбец --
%вершина ломаной.
L=zeros(2,5); %1-я и 5-я вершины -- начало координат.
L(:,2)=v;L(:,3)=v+w;L(:,4)=w; %L -- квадрат, натянутый на v и w.
M=A*L; %M -- образ квадрата L под действием A.
x=L(1,:);y=L(2,:);plot(x,y); %Рисует квадрат L,
hold on %затем на той же картинке
x=M(1,:);y=M(2,:);plot(x,y) %рисует параллелограмм M.
figure %НОВАЯ КАРТИНКА
[V,D]=eig(A);v=v(:,1);w=v(:,2); %Теперь v и w собственные вектора A.
L=zeros(2,5); %1-я и 5-я вершины -- начало коорд.
L(:,2)=v;L(:,3)=v+w;L(:,4)=w; %L -- параллелограмм, натянутый на
%вектора v и w.
M=A*L; %M -- образ L под действием A.
x=L(1,:);y=L(2,:);plot(x,y); %Рисует параллелограмм L,
hold on %затем на той же картинке
x=M(1,:);y=M(2,:);plot(x,y) %рисует параллелограмм M.
```

Рис. 3. Скрипт программы создания геометрической интерпретации действия линейного оператора на плоскости.

Действие линейного оператора на плоскости (матрицу задает пользователь) можно изобразить как преобразование параллелограмма, натянутого на базисные вектора. Рассмотрим сначала стандартный ортонормированный базис  $(1;0)$ ,  $(0;1)$ , затем – базис из собственных векторов. Параллелограмм задается как ломаная с 5 вершинами, координаты которых записаны в матрицу из 5 столбцов и 2 строк (координаты первой вершины совпадают с координатами последней). Умножение слева на матрицу A линейного оператора преобразует вершины исходного параллелограмма в вершины его образа. Параллелограмм, построенный на стандартном

базисе (единичный квадрат) преобразуется произвольно. В базисе из собственных векторов картина яснее: каждый собственный вектор умножается на своё собственное значение, при этом сохраняет направление или меняет на противоположное. Приведём скрипт программы (рис. 3) и полученные геометрические образы (рис. 4).

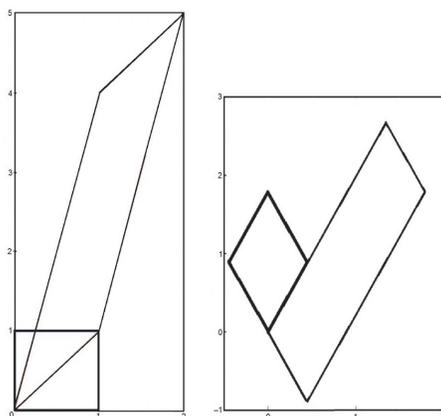


Рис. 4. Преобразование параллелограмма в стандартном и собственном базисах.

Рассмотрим аналогичный способ наглядного представления действия линейного оператора в трёхмерном пространстве. Вместо квадрата построим куб на стандартном ортонормированном базисе  $(1; 0; 0)$ ,  $(0; 1; 0)$ ,  $(0; 0; 1)$  и преобразуем его оператором с матрицей  $A$ . Затем возьмём параллелепипед, построенный на собственных векторах оператора  $A$ , и так же его преобразуем.

```
A=[-2.5 2 -2; 2 0 0.5; -2 0.5 0]; %дан линейный оператор с матрицей A.
a=rand(1,3)-0.5; b=rand(1,3)-0.5; %a и b два случайных вектора-строки.
a=a/norm(a); %Орthonормируем a и b.
b=b-(a*b')*a; b=b/norm(b); %Это будет базис плоскости п.
P(1,:)=a; P(2,:)=b; %P матрица проекции на плоскость п.
%Сначала рассмотрим стандартный базис.
u=[1;0;0]; v=[0;1;0]; w=[0;0;1];
%Ломаная задаётся матрицей: 1-я строка x, 2-я строка y, 3-я строка z.
%Столбец -- вершина ломаной.
L=zeros(3,16); %1-я и 11-я вершины -- начало координат.
L(:,2)=u; L(:,3)=u+w; L(:,4)=u; L(:,5)=u+v; L(:,6)=u+v+w;
L(:,7)=u+v; L(:,8)=v; L(:,9)=v+w; L(:,10)=v;
L(:,12)=w; L(:,13)=w+u; L(:,14)=w+u+v; L(:,15)=w+v; L(:,16)=w;
%L -- куб, натянутый на u, v и w.
M=A*L; %M -- образ куба L под действием A.
PL=P*L; PM=P*M; %Проецируем L и M на п.
x=PL(1,:); y=PL(2,:); plot(x,y); %Рисует проекцию куба L,
hold on %затем на той же картинке
x=PM(1,:); y=PM(2,:); plot(x,y) %рисует проекцию параллелепипеда M.
%Пусть теперь u, v и w -- собственные вектора A.
[V,D]=eig(A); u=V(:,1); v=V(:,2); w=V(:,3); figure %НОВАЯ КАРТИНКА
L=zeros(3,16);
L(:,2)=u; L(:,3)=u+w; L(:,4)=u; L(:,5)=u+v; L(:,6)=u+v+w;
L(:,7)=u+v; L(:,8)=v; L(:,9)=v+w; L(:,10)=v;
L(:,12)=w; L(:,13)=w+u; L(:,14)=w+u+v; L(:,15)=w+v; L(:,16)=w;
%L -- параллелепипед, натянутый на вектора u, v и w.
M=A*L; %M -- образ L под действием A.
PL=P*L; PM=P*M; %Проецируем L и M на п.
x=PL(1,:); y=PL(2,:); plot(x,y); %Рисует проекцию параллелепипеда L,
hold on %затем на той же картинке
x=PM(1,:); y=PM(2,:); plot(x,y) %рисует проекцию параллелепипеда M.
```

Рис. 5. Скрипт программы действия линейного оператора в пространстве.

Поскольку параллелепипед имеет 8 вершин нечётного порядка, три ребра придётся проходить по 2 раза, и параллелепипед конструируется в виде ломаной с 16 вершинами. Поскольку мы сможем увидеть, строго говоря, не сам параллелепипед, а его проекцию на плоскость, в программе предусмотрен случайный выбор проекционной плоскости, на которой взяты ортонормированные векторы  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$ . Пользователь может запускать программу несколько раз, получая проекции указанных четырёх параллелепипедов на различные плоскости и выбирая оптимальный «ракурс». Приведём скрипт программы (рис. 5) и полученные геометрические образы (рис. 6). На этом рисунке цифры, расставленные по осям – координаты не самих векторов, а их проекций.

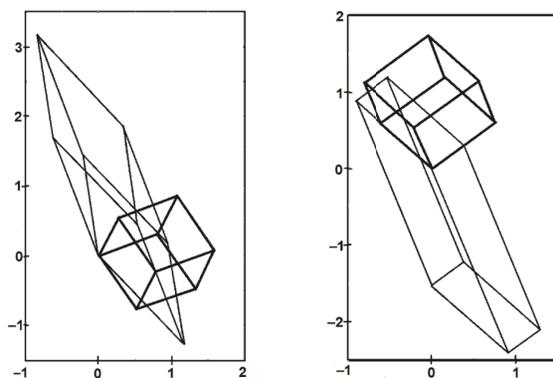


Рис. 6. Преобразование параллелепипеда в стандартном и собственном базисах.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Использование новейших компьютерных технологий, в том числе интерактивных компьютерных систем и математических пакетов, в рамках дисциплин математического образования позволяет проводить мобильное обновление банка заданий, формировать методическое обеспечение индивидуальной траектории обучения студентов.

На примере применения MATLAB для составления контрольных заданий по дисциплине «Линейная алгебра» показаны конкретные алгоритмы, которые можно использовать в практической деятельности.

Изложенная в статье методика создания в среде MATLAB генераторов заданий может быть применена для обучения других математических дисциплин.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Власова Е.А., Грибов А.Ф., Попов В.С., Латышев А.В. Принципы модульно-рейтинговой системы преподавания высшей математики // Вестник Московского государственного областного университета. Серия Физика-Математика. 2013. № 3. С. 93–99.
2. Власова Е.А., Грибов А.Ф., Попов В.С., Латышев А.В. Развитие мотивационных стимулов обучения в рамках модульно-рейтинговой системы организации учебного процесса // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2014. № 1. С. 48–53.

3. Власова Е.А., Попов В.С., Латышев А.В. Методические аспекты обеспечения дисциплины «Линейная алгебра» в техническом университете // Вестник Московского государственного областного университета. Серия Физика–Математика. 2015. № 3. С. 69–85.

#### REFERENCES

1. Printsipy modul'no–reitingovoi sistemy prepodavaniya vysshei matematiki [Principles of the module–rating system of teaching mathematics] / Vlasova E.A., Gribov A.F., Popov V.S., Latyshev A.V. // Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika–matematika [Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics]. 2013. no. 3. pp. 93–99.
2. Razvitie motivatsionnykh stimulov obucheniya v ramkakh modul'no–reitingovoi sistemy organizatsii uchebnogo protsessa [The development of motivational incentives for learning within the module–rating system of organization of educational process], Vlasova E.A., Gribov A.F., Popov V.S., Latyshev A.V. // Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika–matematika [Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics]. 2014. no. 1. pp. 48–53.
3. Vlasova E.A., Popov V.S., Latyshev A.V. Metodicheskie aspekty obespecheniya distsipliny «Lineinaya algebra» v tekhnicheskoy universitete [Methodological aspects of the discipline 'Linear algebra' at the technical University] // Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika–matematika [Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics]. 2015. no. 3. pp. 69–85.

#### ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

*Власова Елена Александровна* – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики, Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана;  
e-mail: elena.a.vlasova@yandex.ru

*Попов Владимир Семенович* – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики, Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана;  
e-mail: vspopov@bk.ru

*Пугачев Олег Всеволодович* – доктор физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики, Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана;  
e-mail: opugachev@yandex.ru

#### INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

*Elena Vlasova* – candidate of physical and mathematical sciences, associate professor of the Applied Mathematics Department at Bauman Moscow State Technical University;  
e-mail: elena.a.vlasova@yandex.ru;

*Vladimir Popov* – candidate of physical and mathematical sciences, associate professor of the Applied Mathematics Department at Bauman Moscow State Technical University;  
e-mail: vspopov@bk.ru;

*Oleg Pugachev* – doctor of physical and mathematical sciences, professor of the Applied Mathematics Department at Bauman Moscow State Technical University;  
e-mail: opugachev@yandex.ru

### БИБЛИОГРАФИЧЕСКАЯ ССЫЛКА

*Власова Е.А., Попов В.С., Пугачев О.В.* Создание фонда оценочных средств и новых образовательных технологий с использованием MATLAB при изучении линейной алгебры // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2016. № 4. С. 77–85.

DOI: 10.18384/2310-7251-2016-4-77-85.

### BIBLIOGRAPHIC REFERENCE

*E. Vlasova, V. Popov, O. Pugachev.* Creation of a fund of assessment tools and new educational technologies with the use of MATLAB in the study of linear algebra // Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics. 2000. no. 0. pp. 00–00.

DOI: 10.18384/2310-7251-2016-4-77-85.

УДК 530.145(09)

DOI: 10.18384/2310-7251-2016-4-86-93

## В. ВИН И ИСТОРИЯ ОТКРЫТИЯ ЗАКОНОВ ТЕПЛООВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

**Исаев В.И.***Независимый исследователь (г. Москва)*

**Аннотация.** В работе рассмотрены теоретические исследования по тепловому излучению немецкого физика В. Вина, в результате которых В. Вин в 1893–1896 гг. открыл законы теплового излучения, а в 1895 г. совместно с немецким физиком О. Люммером сконструировал лабораторный источник теплового излучения.

**Ключевые слова:** теория теплового излучения, Кирхгоф, Гельмгольц, Вин, Планк.

## W. WIEN AND HISTORY OF THE DISCOVERY OF THE LAWS OF THERMAL RADIATION

**V. Isaev***Independent researcher (Moscow)*

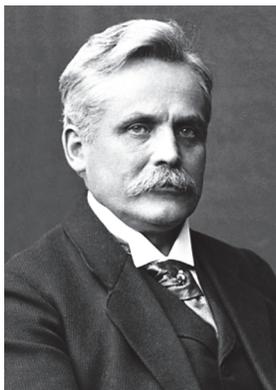
**Abstract.** We consider theoretical studies of thermal radiation by German physicist W. Wien. As a result of these studies, W. Wien discovered laws of thermal radiation in 1893–1896, and together with German physicist O. Lummer he designed a laboratory source of thermal radiation in 1895.

**Keywords:** theory of thermal radiation, Kirchhoff, Helmholtz, Wien, Planck.

Настоящая работа является кратким изложением одного из разделов лекционного курса по истории квантовой теории, разрабатываемого автором. Необходимость создания такого курса диктуется тем, что студенты при изучении квантовой теории зачастую испытывают трудности и для облегчения понимания автор предлагает читать студентам одновременно курс истории квантовой теории.

Две работы автора [1; 2] были посвящены описанию основных проблем физики теплового излучения конца XIX века, а также вкладу российских физиков В.А. Михельсона [1] и Б.Б. Голицына [2] в теорию теплового излучения, и, в частности, в решение проблемы определения вида универсальной функции Кирхгофа. После работ Л. Больцмана, В.А. Михельсона и Б.Б. Голицына по тепловому излучению следующим этапом в проблеме определения универсальной функции Кирхгофа стали работы немецкого физика Вильгельма Вина 1893–1896 гг.

Вильгельм Вин родился 13 января 1864 г. в семье фермера Карла Вина и его жены Каролины Герц. В. Вин после окончания гимназии весной 1882 г. поступил в Гёттингенский университет, известный своей математической школой, и про-



В. Вин

слушав там курсы математики и физики в течение одного семестра, осенью 1882 г. продолжил учёбу в Берлинском университете. В Берлинском университете В. Вин учился и проходил лабораторный практикум по физике в 1883-1885 гг. под руководством Г. Гельмгольца. В. Вин окончил в 1886 г. Берлинский университет, защитив диссертацию, тема которой была посвящена экспериментальному исследованию дифракции света и работал с 1890 г. по 1894 г. ассистентом Г. Гельмгольца в Германском физико-техническом институте в Берлине [3].

9 февраля 1893 г. в Берлине Г. Гельмгольд на заседании Академии Наук представил первую работу своего ассистента В. Вина по теории теплового излучения под названием: «Новое о связи между излучением чёрного тела и вторым законом термодинамики», позже эта работа В. Вина была опубликована в Трудах Берлинской Академии наук [4].

В этой работе В. Вин нашел связь между двумя равновесными состояниями излучения абсолютно чёрного тела, характеризующимися двумя значениями температуры. В качестве исходных предпосылок В. Вин принял электродинамику Максвелла, из которой следует известная связь между давлением света  $p(T)$  и плотностью электромагнитного излучения  $u(T)$ , а именно  $p(T) = u(T)$ , также предполагается существование абсолютно чёрных тел и идеально отражающих тел, из которых конструируется цилиндр, имеющий два подвижных поршня, снабжённых клапанами. В. Вин рассмотрел идеальный тепловой процесс, при котором увеличение плотности теплового излучения достигается либо за счёт повышения температуры, либо за счёт уменьшения объёма. Рассматривая изменение распределения энергии при мысленном эксперименте с движением поршней в цилиндре, В. Вин приходит к соотношению, получившему впоследствии название закона смещения Вина, а именно: «в нормальном спектре испускания чёрного тела при изменении температуры каждая длина волны смещается таким образом, что произведение температуры на длину волны остается постоянным» [4]:

$$\lambda_0 T_0 = \lambda_{\max} T = \text{const.} \quad (1)$$

В. Вин отмечал: «На основании этого закона смещения легко вычислить распределение по длинам волн интенсивности теплового излучения, если это распределение известно для какой-нибудь одной температуры. Законом смещения исчерпываются все выводы, которые могут быть сделаны для теории излучения из чистой термодинамики. Все эти выводы были подтверждены опытом» [5].

В.А. Михельсон дал такую эквивалентную формулировку закона смещения В. Вина: «При изменении температуры лучеиспускающей оболочки, заключающей в себе вполне нестройную радиацию, спектральный состав этой радиации изменяется так, как будто бы длина волны каждой отдельной монохроматической радиации изменялась обратно пропорционально абсолютной температуре.

Это есть так называемый «закон смещения» В. Вина. Он, как и закон Стефана, относится только к радиации вполне нестройной, т.е. к лучеиспусканию идеального-чёрного тела» [6].

М. Лауэ так оценил значение этого закона: «Закон смещения Вина – великое открытие, недостаточно оценённое в современных учебниках, – даёт возможность вычислить распределение энергии при любой температуре, если оно известно при данной температуре. Но даже без этого знания закон даёт объяснение, почему с возрастанием температуры максимум интенсивности в спектре всё больше и больше смещается к коротким волнам; почему, таким образом, тепловое излучение при более низких температурах остается невидимым, а при температурах около 6000° максимум интенсивности становится видимым; если известно его положение, то возможно вычислить температуру источника излучения, например Солнца» [7].

Во второй статье, опубликованной в 1894 г. под названием «Температура и энтропия излучения» [8], В. Вин рассмотрел отдельные монохроматические составляющие тепловое излучения и ввёл для них понятия плотности энтропии и температуры, различные для разных монохроматических составляющих. Плотность энтропии всего излучения определялась как сумма от плотностей энтропии всех монохроматических составляющих и она достигала максимума для равновесного теплового излучения, при этом в состоянии равновесия температура монохроматических компонент излучения была одинакова.

В работе [8] В. Вин дал второе доказательство закона смещения, устранив недостатки первого доказательства этого закона, допущенные в работе 1893 г. В этой работе В. Вин рассмотрел адиабатическое радиальное движение излучения внутри идеально отражающей сферы. При этом излучение уже было направленным, оно радиально распространялось от центра к границе сферы, претерпевало отражения и вновь сходилось в центре и т.д., при этом механизм перемешивания монохроматических компонент оставался тем же, что и в первой работе, т.е. доплеровским. В этой статье В. Вин показал, что спектральная плотность излучения  $\varepsilon(\lambda, T)$  должна иметь следующий вид

$$\varepsilon(\lambda, T) = T^5 \Phi(\lambda T) = \Phi(\lambda T) \text{const} / \lambda^5, \quad (2)$$

где  $\Phi(\lambda T)$  – некоторая неизвестная функция произведения температуры и длины волны излучения, или если учесть известную связь между частотой  $\nu$  и длиной волны  $\lambda$  для электромагнитных волн:  $\nu = c/\lambda$ ,  $d\nu/d\lambda = -c/\lambda^2$ , то формула (2) может быть записана в эквивалентном виде

$$\varepsilon(\nu, T) = T^3 \Psi(T/\nu) = \nu^3 \Psi(T/\nu) \text{const}, \quad (3)$$

что было отмечено в 1902 г. в обзорной работе В.А. Михельсона [9]. Формулы (2) или (3) представляют собой значительный шаг вперёд в проблеме нахождения вида универсальной функции Кирхгофа, поскольку являются дифференциальными критериями для спектральной плотности теплового излучения  $\varepsilon(\lambda, T)$  и оставляют неизвестным вид только одной функции  $\Phi(\lambda T)$  (или  $\Psi(T/\nu)$ ) в выражении для спектральной плотности теплового излучения  $\varepsilon(\lambda, T)$  (или соответственно  $\varepsilon(\nu, T)$ ).

М. Лауэ отмечал: «Закон смещения, выражаясь математически, представляет сведение некоторой функции  $\epsilon(\nu, T)$  двух независимых переменных  $\nu$  и  $T$  к функции  $\Psi(T/\nu)$  одной переменной. Непосредственно отсюда видно, что как для больших, так и для малых значений аргумента эта функция должна быть исчезающе малой и что она обладает лишь одним максимумом» [10].

Трудности, которые должны были преодолеть физики-экспериментаторы второй половины XIX века были огромными, т.к. в течение 1860–1895 гг. не существовало ни лабораторных моделей абсолютно чёрных тел, ни достаточно чувствительных спектрометров, позволявших провести достаточно точные спектральные измерения потоков энергии. В 1880 г. американский астрофизик Сэмюэл Ленгли сконструировал спектроболومتر – прибор, благодаря которому им были получены первые экспериментальные данные по спектральному распределению энергии в спектре раскалённой угольной сажи и Солнца, которые были использованы в 1888 г. В.А. Михельсоном для проверки предложенной им спектральной формулы. Впервые изотермическая полость как источник теплового излучения для создания лабораторной модели абсолютно чёрного тела была использована в 1895 г. О. Люммером и В. Винном [11] в Германском физико-техническом институте, при этом спектроболومتر Ленгли использовался как регистрирующий прибор.

В 1896 г. в немецком физическом журнале «Annalen der Physik» В. Вин опубликовал свою третью теоретическую статью «О распределении энергии в спектре испускания чёрных тел» [12], которая явилась вершиной его исследований теплового излучения. В этой статье В. Вин сформулировал закон для спектральной плотности энергии теплового излучения, получивший впоследствии название закона излучения В. Вина.

Отметим, что по структуре физических гипотез и полученных математических соотношений эта статья представляет собой по существу исправленный и дополненный учёт принципа Доплера критический пересмотр главных идей статьи В.А. Михельсона 1887 г. [13], с учётом ранее полученного закона смещения (1) и дифференциального критерия для спектральной плотности (2). Отмечая ошибочность предшествующих попыток отыскания функции Кирхгофа вследствие принятия неверных гипотез о природе излучения, В. Вин отметил [12], что единственной «счастливой идеей» в данной проблеме была работа В.А. Михельсона. [13], в которой В.А. Михельсон применил статистический метод распределения Максвелла для расчета спектральной плотности излучения к гипотетической модели атомных колебаний твёрдого тела.

В. Вин предположил, что равновесное излучение, заключённое в замкнутую полость с идеально отражающими внутренними стенками, можно представлять в виде некоторого молекулярного газа, к этому газу естественно применимо распределение Максвелла по скоростям молекул.

При этом В. Вин предполагает, что между скоростью  $\nu$  и периодом колебаний  $\tau$  выполняется соотношение  $\tau = \frac{4r}{\nu^2}$ , которое следует из закона смещения (1) и максвелловской пропорциональности в законе распределения скоростей газа  $Kt \approx mv^2$ .

В обзорной статье по теории теплового излучения в 1902 г. В.А. Михельсон отметил: «Первая попытка выяснить форму этой функции Кирхгофа на основании свойств нестройных колебаний была сделана мною в 1887 году [13]. Исходя из закона Максвелла о наивероятнейшем распределении скоростей между частицами и пользуясь подстановкою  $v = \frac{c}{\tau}$ , где  $\tau$  – период колебания, я получил

некоторое общее соотношение между периодами и соответственной энергией, дававшее возможность в известных частных предположениях и принимая во внимание закон Стефана, – определить функцию, удовлетворявшую всем требованиям, которые мы тогда могли предъявить к функции Кирхгофа  $\varepsilon(\lambda, T)$ .

Впоследствии в 1896 г. В. Вин [12] несколько видоизменил мой вывод, заменяя подстановку  $v = \frac{c}{\tau}$  следующей  $v^2 = \frac{c}{\tau}$ . Другими словами: между тем как я

полагал число колебаний в секунду для кадой радиации  $\left(\frac{1}{\tau}\right)$  пропорциональным скорости движения испускающих её атомов, В. Вин полагает число колебаний пропорциональным квадрату скорости» [9].

Далее Михельсон отмечает: «Считая недозволительным применять закон Ксвелла к атомам твёрдого тела, В. Вин представляет себе в качестве лучеиспускающего тела некоторый «идеальный» газ. Затем радиация испускаемая таким газом, делается вполне чёрной тем, что его заключают в замкнутую вполне зеркальную оболочку. Для того, чтобы найти состав этой чёрной радиации, В. Вин допускает, что плотность энергии  $\varepsilon(\lambda, T)d\lambda$  для волн, заключающихся между  $\lambda$  и  $\lambda + d\lambda$  пропорциональна:

1) числу (Максвелла) молекул, испускающих радиацию такого периода, т.е. величине  $v^2 \exp\left(-\frac{v^2}{\alpha^2}\right)dv$ , в которой согласно уравнению  $v^2 = \frac{c}{\tau}$ ,  $v^2$  следует заменить величиной  $\frac{k}{\lambda}$ ;  $\alpha^2$  как пропорциональную средней живой силе (т.е. кинетической энергии) молекул положить равной,

2) некоторой пока неизвестной функции скорости  $v$ , а стало быть и длины волны  $\lambda$ . Эту функцию, в которую В. Вин включает и множитель  $\lambda^{3,5}$ , получающийся при замене  $dv$  через  $d\lambda$ , обозначим через  $f(\lambda)$ . Таким образом В. Вин находит

$$\varepsilon(\lambda, T)d\lambda = f(\lambda) \exp\left(-\frac{c}{T\lambda}\right)d\lambda \quad (4)$$

Вид функции  $f(\lambda)$  он определяет из условия, что полная энергия должна удовлетворять закону Стефана-Больцмана  $\int_0^{\infty} f(\lambda) \exp\left(-\frac{c}{T\lambda}\right)d\lambda = \text{const } T^4$ .

Пользуясь способом неопределённых коэффициентов, он разлагает  $f(\lambda)$  в ряд, интегрирует и находит  $f(\lambda) = \frac{\text{const}}{\lambda^5}$ . Следовательно, по В. Вину закон распределения энергии имеет вид

$$\varepsilon(\lambda, T) = \frac{C}{\lambda^5} \exp\left(-\frac{c}{T\lambda}\right). \quad (5)$$

Таким образом, в 1896 г. В. Вин в своей работе [12], уточнив гипотезы, высказанные в статье [13] В.А. Михельсоном и используя принцип Доплера, получил асимптотическое выражение для универсальной функции Кирхгофа  $\varepsilon(\lambda, T)$ , применимое для коротких ультрафиолетовых волн и имеющее в современных обозначениях вид

$$\varepsilon(\lambda, T) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \exp\left(-\frac{hc}{kT\lambda}\right), \quad (6)$$

и названное впоследствии законом теплового излучения В. Вина.

За исследования и открытие законов теплового излучения В. Вину была присуждена Нобелевская премия 1911 г. [3; 5]. В. Вин в своей Нобелевской лекции в 1911 г. так оценивал свою работу 1896 г.: «Как бы ни была несовершенна эта первая попытка, она всё-таки дала формулу, которая только для больших длин волн значительно отличается от истинной. Но так как наблюдения с несомненностью установили эти отклонения, то не подлежало никакому сомнению, что формула должна быть изменена» [5].

Фактически в неявном виде в статье В. Вина 1896 г. [12] введено предположение о частицах (фотонах), из которых состоит электромагнитное излучение, как было отмечено Ф.Хундом, «впервые возникла мысль, что излучение связано с частицами, энергия которых пропорциональна частоте – это еще не были в полной мере будущие кванты света Эйнштейна, но они были близки к ним» [14].

Для В. Вина лабораторная реализация модели излучающего абсолютно чёрного тела в 1895 г. совместно с О. Люммером [14] – это одна из основных предпосылок успеха в открытии закона излучения (6), поскольку после успешной экспериментальной реализации такой модели у В. Вина появилась возможность достаточно точной численной проверки предложенной им формулы (6) для универсальной функции Кирхгофа  $\varepsilon(\lambda, T)$ , у В.А. Михельсона же в 1887 г. не было такой возможности, он использовал для численной проверки предложенных им формул только неточные данные первых спектральных измерений, произведенных С.Ленгли в 1886 г.

Значение работ В. Вина для теории теплового излучения очень ёмко оценил М. Лауэ: «И бессмертной заслугой Вильгельма Вина остается то, что он довёл физику непосредственно до ворот квантовой физики, а уже следующий шаг, который предпринял Планк, провёл её через эти ворота» [10].

**ЛИТЕРАТУРА**

1. Исаев В.И. История поисков и открытия универсальной функции Кирхгофа и вклад В.А. Михельсона и Б.Б. Голицына в теорию теплового излучения. Часть 1 // Физическая мысль России. 2004. № 1. С. 79–98.
2. Исаев В.И. История поисков и открытия универсальной функции Кирхгофа и вклад В.А. Михельсона и Б.Б. Голицына в теорию теплового излучения. Часть 2 // Физическая мысль России. 2005. № 1. С. 39–57.
3. Вин В. / Биографический словарь деятелей естествознания и техники, Т. 1. М.: Госиздат, «БСЭ», 1958.
4. Wien W., *Über eine neue Beziehung der Strahlung schwarzer Körper zum zweiten Hauptsatz der Warmtheorie* // Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin. 1893, bd. 19, s. 55–62.
5. Вин В. О законах теплового излучения (Нобелевская речь 1911 г.) // «Новые идеи в физике»: сборник. 1914. № 6. С. 104–122.
6. Михельсон В.А., *Очерки по спектральному анализу* // Физическое обозрение. 1901. Т. 2. С. 165–183, 231–245, 273–284.
7. Лауэ М. История физики. М.: Государственное издательство теоретико-технической литературы, 1956. С. 145–151, 164–200.
8. Wien W., *Temperature und Entropie der Strahlung* // Annalen der Physik., 1894, bd. 52, s. 132–165.
9. Михельсон В.А. Обзор новейших исследований по термодинамике лучистой энергии // Журнал русского физико-химического общества, часть физики. 1902. Т. 34. Вып. 5. С. 155–207.
10. Лауэ М. Статьи и речи. М., Наука, 1966. С. 103–118.
11. Lummer O., Wien W., *Methode zur Prüfung des Strahlungsgesetzes absolut schwarzer Körper* // Annalen der Physik, 1895, bd. 56, s. 451–456.
12. Wien W., *Über die Energievertheilung im Emissionsspectrum eines schwarzen Körpers* // Annalen der Physik, 1896, bd. 58, s. 662–669.
13. Михельсон В.А. Опыт теоретического объяснения распределения энергии в спектре твердого тела // Журнал русского физико-химического общества, часть физики. 1887. Т. 19. Вып. 4. С. 79–99.
14. Хунд Ф. История квантовой теории. Киев: Наукова думка, 1980.

**REFERENCES**

1. Isaev V.I. *Istoriya poiskov i otkrytiya universal'noi funktsii Kirkhgofa i vklad V.A. Mikhel'sona i B.B. Golitsyna v teoriyu teplovogo izlucheniya. Chast' 1* [The history of research and discovery of the universal Kirchhoff function and the contribution of V.A. Michelson, and B.B. Golitsyn to the theory of thermal radiation. Part 1] // *Fizicheskaya mysl' Rossii* [Russian Physical thought]. 2004. no. 1. pp. 79–98.
2. Isaev V.I. *Istoriya poiskov i otkrytiya universal'noi funktsii Kirkhgofa i vklad V.A. Mikhel'sona i B.B. Golitsyna v teoriyu teplovogo izlucheniya. Chast' 2* [The history of research and discovery of the universal Kirchhoff function and the contribution of V.A. Michelson, and B.B. Golitsyn to the theory of thermal radiation. Part 2] // *Fizicheskaya mysl' Rossii* [Russian Physical thought]. 2005. no. 1. pp. 39–57.
3. Wien W. / *Biograficheskii slovar' deyatelei estestvoznaniya i tekhniki, T. 1* [Wien W. / Biographical dictionary figures of science and technology, vol. 1]. M., Gosizdat, «BSE», 1958.
4. Wien W., *Über eine neue Beziehung der Strahlung schwarzer Körper zum zweiten Hauptsatz der Warmtheorie* // Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin. 1893, bd. 19, s. 55–62.

5. Wien W. O zakonakh teplovogo izlucheniya (Nobelevskaya rech' 1911 g.) [On the laws of thermal radiation (Nobel prize acceptance speech, 1911)] // «Novye idei v fizike»: sbornik [New ideas in Physics: collection]. 1914. no. 6. pp. 104–122.
6. Mikhel'son V.A. Ocherki po spektral'nomu analizu [Essays on spectral analysis] // Fizicheskoe obozrenie. T. 2. [The physical review. Vol. 2]. 1901. pp. 165–183, 231–245, 273–284.
7. Von Laue M. History of Physics. New York: Academic Press, 1950.
8. Wien W., Temperatur und Entropie der Strahlung // Annalen der Physik., 1894, bd. 52, s. 132–165.
9. Mikhel'son V.A. Obzor noveishikh issledovaniy po termodinamike luchistoi energii [A review of the recent research on the thermodynamics of radiant energy] // Zhurnal russkogo fiziko-khimicheskogo obshchestva, chast' fiziki [The journal of Russian physico-chemical society, of physics]. 1902. Vol. 34. no. 5. pp. 155–207.
10. Laue M. Stat'i i rechi [Articles and speeches]. M., Nauka, 1966. pp. 103–118
11. Lummer O., Wien W., Methode zur Prufung def Strahlungsgesetzes absolut schwarzer Korper // Annalen der Physik, 1895, bd. 56, s. 451–456.
12. Wien W., Uber die Energievertheibung im Emissionsspectrum eines schwarzen Korpers // Annalen der Physik, 1896, bd. 58, s. 662–669.
13. Mikhel'son V.A. Opyt teoreticheskogo ob'yasneniya raspredeleniya energii v spektre tverdogo tel [The experience of theoretical explanations of the distribution of energy in the spectrum of solids] // Zhurnal russkogo fiziko-khimicheskogo obshchestva, chast' fiziki [The journal of Russian physico-chemical society, of physics]. 1887. Vol. 19. no. 4. pp. 79–99.
14. Hund F. The History of Quantum Theory. London: Harrap, 1974.

#### ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

*Исаев Вячеслав Игоревич* – кандидат физико-математических наук, независимый исследователь (г. Москва);  
e-mail: vis961@yandex.ru

#### INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

*Vyacheslav Isaev* – candidate of physical and mathematical sciences, independent researcher (Moscow);  
e-mail: vis961@yandex.ru

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКАЯ ССЫЛКА

*Исаев В.И.* В. Вин и история открытия законов теплового излучения // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2016. № 4. С. 86–93.  
DOI: 10.18384/2310-7251-2016-4-86-93.

#### BIBLIOGRAPHIC REFERENCE

*V. Isaev.* W. Wien and history of the discovery of the laws of thermal radiation // Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics. 2016. no. 4. pp. 86–93.  
DOI: 10.18384/2310-7251-2016-4-86-93.



## ВЕСТНИК МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ОБЛАСТНОГО УНИВЕРСИТЕТА

Научный журнал «Вестник Московского государственного областного университета» основан в 1998 г. Выпускается десять серий журнала: «История и политические науки», «Экономика», «Юриспруденция», «Философские науки», «Естественные науки», «Русская филология», «Физика-математика», «Лингвистика», «Психологические науки», «Педагогика». Все серии включены в составленный Высшей аттестационной комиссией Перечень ведущих рецензируемых научных журналов, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертации на соискание ученой степени доктора и кандидата наук по наукам, соответствующим названию серии. Журнал включен в базу данных Российского индекса научного цитирования (РИНЦ).

Печатная версия журнала зарегистрирована в Федеральной службе по надзору за соблюдением законодательства в сфере массовых коммуникаций и охране культурного наследия. Полнотекстовая версия журнала доступна в Интернете на платформе Научной электронной библиотеки ([www.elibrary.ru](http://www.elibrary.ru)), а также на сайте журнала [www.vestnik-mgou.ru](http://www.vestnik-mgou.ru).

---

## ВЕСТНИК МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ОБЛАСТНОГО УНИВЕРСИТЕТА

СЕРИЯ: ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА  
2016. N 4

Над номером работали:

Литературный редактор Д.Д. Дрошнев  
Переводчик И.А. Улиткин  
Корректор Д.Д. Дрошнев  
Компьютерная верстка Н.Н. Жильцов

Отдел по изданию научного журнала  
«Вестник Московского государственного областного университета»  
Информационно-издательского управления МГОУ  
105005, г. Москва, ул. Радио, д.10А, офис 98  
тел. (495) 723-56-31; (495) 780-09-42 (доб. 6101)  
e-mail: [vest\\_mgou@mail.ru](mailto:vest_mgou@mail.ru)  
сайт: [www.vestnik-mgou.ru](http://www.vestnik-mgou.ru)

Формат 70x108/16. Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура «Minion Pro».  
Тираж 500 экз. Уч.-изд. л. 5,5, усл. п. л. 6,0.  
Подписано в печать: 30.12.2016. Дата выхода в свет: 28.02.2017. Заказ № 2016/12-07.  
Отпечатано в ИИУ МГОУ  
105005, г. Москва, ул. Радио, 10А