

ISSN 2072-8387
ISSN (online) 2310-7251



Вестник

МОСКОВСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
ОБЛАСТНОГО
УНИВЕРСИТЕТА

Серия

ФИЗИКА-
МАТЕМАТИКА

2016 / № 1

1931

МОПИ - МПУ - МГОУ

2016



развитие с опорой на традицию

ВЕСТНИК
МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
ОБЛАСТНОГО УНИВЕРСИТЕТА

ISSN 2072-8387

2016 / № 1

ISSN (online) 2310-7251

серия

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА

Научный журнал основан в 1998 г.

«Вестник Московского государственного областного университета» (все его серии) включён в «Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертации на соискание учёной степени доктора и кандидата наук» Высшей аттестационной комиссии при Министерстве образования и науки Российской Федерации (См.: Список журналов на сайте ВАК при Минобрнауки России) по наукам, соответствующим названию серии.

The academic journal is established in 1998

«Bulletin of Moscow State Regional University» (all its series) is included by the Supreme Certifying Commission of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation into "the List of leading reviewed academic journals and periodicals recommended for publishing in corresponding series basic research thesis results for a Ph.D. Candidate or Doctorate Degree" (See: the online List of journals at the site of the Supreme Certifying Commission of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation).

ISSN 2072-8387

2016 / № 1

ISSN (online) 2310-7251

series

PHYSICS AND MATHEMATICS

BULLETIN OF THE MOSCOW STATE
REGIONAL UNIVERSITY

Учредитель журнала «Вестник МГОУ»: Московский государственный областной университет

Выходит 4 раза в год

Редакционно-издательский совет «Вестника МГОУ»

Хроменков П.Н. — к.филол.н., проф., ректор МГОУ (председатель совета)

Ефремова Е.С. — к.филол.н., и.о. проректора по научной работе МГОУ (зам. председателя);

Клычников В.М. — к.ю.н., к.и.н., проф., проректор по учебной работе и международному сотрудничеству МГОУ (зам. председателя)

Антонова Л.Н. — д.пед.н., проф., академик РАО, Комитет Совета Федерации по науке, образованию и культуре

Асмолов А.Г. — д.псих.н., проф., академик РАО, директор Федерального института развития образования

Климов С.Н. — д.ф.н., проф., Московский государственный университет путей сообщения (МИИТ)

Клобуков Е.В. — д.филол.н., проф., Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Манойло А.В. — д.пол.н., проф., МГУ им. М.В. Ломоносова

Новоселов А.Л. — д.э.н., проф., Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова

Пасечник В.В. — д.пед.н., проф., МГОУ

Поляков Ю.М. — к.филол.н., главный редактор «Литературной газеты»

Рюмцев Е.И. — д.ф.-м.н., проф., Санкт-Петербургский государственный университет

Хухуни Г.Т. — д.филол.н., проф., МГОУ

Чистякова С.Н. — д.пед.н., проф., Российская академия образования (г. Москва)

Редакционная коллегия серии «Физика-Математика»

Ответственный редактор серии:

Бугаев А.С. — д.ф.-м.н., академик РАН, МФТИ

Заместитель ответственного редактора:

Жачкин В.А. — д.ф.-м.н., проф., МГОУ

Ответственный секретарь:

Васильчикова Е.Н. — к.ф.-м.н., доц., МГОУ

Члены редакционной коллегии:

Беляев В.В. — д.т.н., проф., МГОУ;

Богданов Д.Л. — д.ф.-м.н., проф., МГОУ;

Бугримов А.Л. — д.т.н., проф., МГОУ;

Латышев А.В. — д.ф.-м.н., проф., МГОУ;

Рассудовская М.М. — к.п.н., проф., МГОУ;

Осипов М.А. — д.ф.-м.н., проф., Университет Стратклайд (Великобритания);

Чигринов В.Г. — д.ф.-м.н., проф., Гонконгский университет науки и технологий (Китай)

ISSN 2072-8387

ISSN (online) 2310-7251

Вестник Московского государственного областного университета. Серия «Физика-Математика». 2016. № 1. М.: ИИУ МГОУ. 118 с.

Журнал «Вестник МГОУ» серия «Физика-Математика» зарегистрирован в Федеральной службе по надзору за соблюдением законодательства в сфере массовых коммуникаций и охране культурного наследия. Регистрационное свидетельство ПИ № ФС77-26136

Индекс серии «Физика-Математика»

по Объединенному каталогу «Пресса России» 40723

© МГОУ, 2016.

© Издательство МГОУ, 2016.

**Адрес Отдела по изданию научного журнала
«Вестник МГОУ»**

г. Москва, ул. Радио, д.10А, офис 98

тел. (499) 261-43-41; (495) 723-56-31

e-mail: vest_mgou@mail.ru; сайт: www.vestnik-mgou.ru

Журнал включен в базу данных Российского индекса научного цитирования (РИНЦ), имеет полнотекстовую сетевую версию в Интернете на платформе Научной электронной библиотеки (www.elibrary.ru), а также на сайте Московского государственного областного университета (www.vestnik-mgou.ru)

При цитировании ссылка на конкретную серию «Вестника МГОУ» обязательна. Воспроизведение материалов в печатных, электронных или иных изданиях без разрешения редакции запрещено. Опубликованные в журнале материалы могут использоваться только в некоммерческих целях. Ответственность за содержание статей несут авторы. Мнение редколлегии серии может не совпадать с точкой зрения автора. Рукописи не возвращаются.

The founder of journal «Bulletin of the MSRU»: Moscow State Regional University

Issued 4 times a year

Series editorial board «Physics and Mathematics»

Editor-in-chief:

A.S. Bugaev – Doctor of Physics and Mathematics, Academician of RAS, MIPT

Deputy editor-in-chief:

V.A. Zhachkin – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, MSRU

Executive secretary:

E.N. Vasilchikova – Ph.D. in Physics and Mathematics, Associate Professor, MSRU

Members of Editorial Board:

V.V. Belyaev – Doctor of Technical Sciences, Professor, MSRU

D.L. Bogdanov – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, MSRU

A.L. Bugrimov – Doctor of Technical Sciences, Professor, MSRU

A.V. Latyshev – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, MSRU

M.M. Rassudovskaya – Ph.D. in Pedagogical Sciences, Professor, MSRU

M.A. Osipov – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Strathclyde University (UK)

V.G. Chigrinov – University of Science and Technology (Hong Kong, China)

The journal is included into the database of the Russian Science Citation Index, has a full text network version on the Internet on the platform of Scientific Electronic Library (www.elibrary.ru), as well as at the site of the Moscow State Regional University (www.vestnik-mgou.ru)

At citing the reference to a particular series of «Bulletin of the Moscow State Regional University» is obligatory. The reproduction of materials in printed, electronic or other editions without the Editorial Board permission, is forbidden. The materials published in the journal are for non-commercial use only. The authors bear all responsibility for the content of their papers. The opinion of the Editorial Board of the series does not necessarily coincide with that of the author Manuscripts are not returned.

The Editorial Board address: Moscow State Regional University

10A Radio st., office 98, Moscow, Russia

Phones: (499) 261-43-41; (495) 723-56-31

e-mail: vest_mgou@mail.ru; site: www.vestnik-mgou.ru

Publishing council «Bulletin of the MSRU»

P.N. Khromenkov – Ph. D. in Philology, Professor, Principal of MSRU (Chairman of the Council)

E.S.Yefremova – Ph. D. in Philology, Acting Vice-Principal for scientific work of MSRU (Vice-Chairman of the Council)

V.M. Klychnikov – Ph.D. in Law, Ph. D. in History, Professor, Vice-Principal for academic work and international cooperation of MSRU (Vice-Chairman of the Council)

L.N. Antonova – Doctor of Pedagogics, Professor, Member of the Russian Academy of Education, The Council of the Federation Committee on Science, Education and Culture

A.G. Asmolov – Doctor of Psychology, Professor, Member of the Russian Academy of Education, Principal of the Federal Institute of Development of Education

S.N. Klimov – Doctor of Philosophy, Professor, Moscow State University of Railway Engineering

E.V. Klobukov – Doctor of Philology, Professor, Lomonosov Moscow State University

A.V. Manoylo – Doctor of Political Science, Professor, Lomonosov Moscow State University

A.L. Novosjolov – Doctor of Economics, Professor, Plekhanov Russian University of Economics

V.V. Pasechnik – Doctor of Pedagogics, Professor, MSRU

Yu. M. Polyakov – Ph.D. in Philology, Editor-in-chief of "Literaturnaya Gazeta"

E.I. Rjuntsev – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Saint Petersburg State University

G. T. Khukhuni – Doctor of Philology, Professor, MSRU

S.N. Chistyakova – Doctor of Pedagogics, Professor, the Russian Academy of Education

ISSN 2072-8387

ISSN (online) 2310-7251

Bulletin of the Moscow State Regional University. Series «Physics and Mathematics». 2016. № 1. M.: MSRU Publishing house. 118 p.

The series «Physics and Mathematics» of the Bulletin of the Moscow State Regional University is registered in Federal service on supervision of legislation observance in sphere of mass communications and cultural heritage protection. The registration certificate ПИ № 0С77-26136

Index of the series «Physics and Mathematics» according to the union catalog «Press of Russia» 40723

© MSRU, 2016.

© MSRU Publishing house, 2016.

СОДЕРЖАНИЕ

РАЗДЕЛ I. МАТЕМАТИКА

- Усенов И.А.** ПОСТРОЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РОДА В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ..... 08
- Петрова В.Т., Дмитриева М.Н., Сивиркина А.С.** О КЛАССАХ РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВ С ФУНКЦИОНАЛЬНО АБЕЛЕВЫМИ СВЯЗНОСТЯМИ..... 15

РАЗДЕЛ II. ФИЗИКА

- Красовицкий В.Б., Бугримов А.Л.** УСКОРЕНИЕ ЭЛЕКТРОНОВ В ПОЛЕ СВЕТОВОЙ ВОЛНЫ В МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЕ..... 31
- Калашиников Е.В., Бугаев А.А., Кантор М.Ю., Куприенко Д.В., Чикиряка А.В.** ПОРОГ ПРОБОЯ СКВОЗНЫХ ОТВЕРСТИЙ В МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ФОЛЬГАХ МОЩНЫМ ЛАЗЕРНЫМ ИЗЛУЧЕНИЕМ 44
- Латышев А. В., Юшканов А. А., Корнеева Е. Е.** ТЕПЛОВОЕ СКОЛЬЖЕНИЕ РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА ВДОЛЬ ПЛОСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ С ЗЕРКАЛЬНО-ДИФфуЗНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ 60
- Соломатин А.С.** ВЛИЯНИЕ ПРОФИЛЯ МИКРОРЕЛЬЕФА ПЕРИОДИЧЕСКИХ АНИЗОТРОПНЫХ СТРУКТУР НА ИХ ДИФРАКЦИОННЫЕ СВОЙСТВА 74
- Алиев И.Н., Самедова З.А.** РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТОКА В СВЕРХПРОВОДЯЩЕМ УЧАСТКЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ПРОВОДА 88

Богомолова Л.Д., Жачкин В.А., Новичков К.К., Стефановский С.В., Тарасова В.В. ЭЛЕКТРОННЫЙ ПАРАМАГНИТНЫЙ РЕЗОНАНС РАДИАЦИОННЫХ ПАРАМАГНИТНЫХ ЦЕНТРОВ В ОБЛУЧЕННЫХ ЭЛЕКТРОНАМИ НАТРИЙ-АЛЮМО-ФОСФАТНЫХ СТЕКЛАХ..... 98

РАЗДЕЛ III. ТЕОРИЯ И МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ И ВОСПИТАНИЯ

Караськова Н.С., Солдатенков Р.М. ПРИМЕНЕНИЕ ОБЛАЧНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ В ОБРАЗОВАНИИ НА ПРИМЕРЕ MICROSOFT OFFICE 365 108

CONTENTS

SECTION I. MATHEMATICS

- I. Usenov** CONSTRUCTION OF THE APPROXIMATE SOLUTION OF NONLINEAR OPERATOR EQUATIONS OF THE FIRST KIND IN HILBERT SPACE..... 08
- V. Petrova, M. Dmitrieva, A. Sivirkina** ABOUT SOME CLASSES OF RIEMANNIAN SPACES WITH FUNCTIONALLY ABELIAN CONNECTION..... 15

SECTION II. PHYSICS

- V. Krasovitskiy, A. Bugrimov** ACCELERATION OF ELECTRONS IN A LIGHT WAVE IN MAGNETOACTIVE PLASMA..... 31
- E. Kalashnikov, A. Bugayev, M. Kantor, D. Kouprienko, A. Chikiryaka** THRESHOLD BREAKDOWN OF THROUGH HOLES IN METAL FOILS BY POWERFUL LASER RADIATION..... 44
- A. Latyshev, A. Yushmanov, E. Korneeva** THERMAL SLIDING OF RAREFIED GAS ALONG A FLAT SURFACE WITH MIRROR-DIFFUSION BOUNDARY CONDITIONS..... 60
- A. Solomatin** DIFFRACTION ON ANISOTROPIC SUBSTRATES WITH VARIOUS SURFACE MICRORELIEF 74
- I. Aliev, Z. Samedova** THE CURRENT DISTRIBUTION IN THE SUPERCONDUCTING WIRE OF THE CYLINDRICAL PORTION 88
- L. Bogomolova, V. Zhachkin, K. Novichkov, S. Stefanovsky, V. Tarasova** ELECTRON PARAMAGNETIC RESONANCE OF RADIATION PARAMAGNETIC CENTERS IN ELECTRON IRRADIATED SODIUM ALUMINIUM PHOSPHATE GLASSES..... 98

SECTION III.
THEORY AND METHODS OF TEACHING AND EDUCATION

N. Karaskova, R. Soldatenkov THE USE OF CLOUD TECHNOLOGIES
IN EDUCATION FOR EXAMPLE, MICROSOFT OFFICE 365..... 108

РАЗДЕЛ I. МАТЕМАТИКА

УДК 519.683.5

DOI: 10.18384/2310-7251-2016-1-08-14

ПОСТРОЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РОДА В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Усенов И.А.

*Кыргызский Национальный Университет им. Ж. Баласагына,
720033, г. Бишкек, ул. Фрунзе, д. 547, Кыргызстан*

Аннотация. В работе предлагается метод малого параметра для регуляризации решения нового класса нелинейного операторного уравнения первого рода в гильбертовом пространстве. Доказана сходимость регуляризованного решения к точному решению исходного уравнения. Получен выбор параметра регуляризации в зависимости от погрешности правой части. Получена оценка скорости сходимости регуляризованного решения к точному решению.

Ключевые слова: оператор, регуляризация, условие Липшица, параметр регуляризации, сходимость, пространство Гильберта.

CONSTRUCTION OF AN APPROXIMATE SOLUTION OF NONLINEAR OPERATOR EQUATIONS OF THE FIRST KIND IN A HILBERT SPACE

I. Usenov

Jhusup Balasagyn Kyrgyz National University,

© Усенов И.А., 2016

ul. Frunze 547, 720033 Bishkek, Kyrgyzstan

Abstract. A method of a small parameter is proposed for the regularization of a new class of solutions of nonlinear operator equations of the first kind in a Hilbert space. The convergence of the regularized solutions to the exact solution of the original equation is proved. The regularization parameter, depending on the error in the right-hand side, is selected. The rate of convergence of the regularized solutions to the exact solution is estimated.

Key words: operator, regularization, Lipschitz condition, regularization parameter, convergence, Hilbert space.

1. Постановка задач

В гильбертовом пространстве H рассмотрим нелинейное операторное уравнение первого рода вида:

$$Az = u + BK(z), \quad (1)$$

где:

1. A – линейный непрерывный самосопряженный положительный оператор в H ;
2. B – линейный вполне непрерывный самосопряженный положительный оператор в H ;
3. K – нелинейный оператор, определенный в H , и удовлетворяющий условию Липшица, т.е. для любого $z_1, z_2 \in H$:

$$\|K(z_1) - K(z_2)\| \leq N\|z_1 - z_2\|. \quad (2)$$

Допустим, что при $u = u_0$ уравнение (1) имеет единственное решение $z_0 \in H$ и точное решение истокопредставимо в виде:

$$z_0 - K(z_0) = Av_0, \text{ где } v_0 \in H. \quad (3)$$

Предположим, что оператор A^{-1} существует, но не является ограниченным. Тогда решение уравнения (1) не является устойчивым от правой части u , т.к. на практике известно только приближенное значение u , допускается погрешность δ , т.е.

$$\|u_\delta - u_0\| \leq \delta \quad (4)$$

Ставится задача: Найти устойчивое решение уравнения (1).

2. Регуляризация решения задачи

Наряду с уравнением (1) рассмотрим уравнение вида:

$$\alpha z_\alpha + Az_\alpha = u + (\alpha E + B)K(z_\alpha), \quad (5)$$

где α – параметр регуляризации.

В работе [1] доказано, что:

$$\|L_\alpha\| = \|(\alpha E + A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\alpha}. \quad (6)$$

В работе [4] доказано, что для оператора $B_\alpha = \alpha E + B$ имеет место неравенство:

$$\|B_\alpha z\| \leq 2\alpha \|z\|. \quad (7)$$

Из операторного уравнения (5) переходим к операторному уравнению вида:

$$z_\alpha = L_\alpha u + L_\alpha B_\alpha K(z_\alpha). \quad (8)$$

Теорема 1. Пусть: 1. для операторов A, B и K выполнены условия 1), 2) и 3); 2. постоянная Липшица для оператора K удовлетворяет условию $N < \frac{1}{2}$. Тогда при любом $u \in H$ и $\alpha > 0$ уравнение (8) имеет единственное решение $z_\alpha \in H$.

Доказательство: Исходя из начального приближения:

$$\tilde{z}_0 = L_\alpha u, \quad (9)$$

строим последовательность элементов $\{z_n\}_{n=1}^\infty$:

$$z_n = \tilde{z}_0 + K_\alpha(z_{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots, \text{ где } K_\alpha(z) = L_\alpha B_\alpha K(z). \quad (10)$$

Если последовательность $\{z_n\}_{n=0}^\infty$ сходится к некоторому элементу z_α и если оператор $K_\alpha(z)$ непрерывен в точке z_α , то из (10) следует, что z_α является решением уравнения (8). Следовательно, условия, обеспечивающие сходимость последовательности $\{z_n\}_{n=0}^\infty$, являются условиями существования решения уравнения (8).

Во-первых, покажем, что:

1. элемент $\tilde{z}_0 \in H$ при любом $\alpha > 0$, на самом деле:

$$\|\tilde{z}_0\| = \|L_\alpha u\| \leq \frac{1}{\alpha} \|u\| < \infty; \quad (11)$$

2. оператор $K_\alpha : H \rightarrow H$ при любом $\alpha > 0$ и ограничен при $\alpha \rightarrow 0$. Действительно:

$$\|K_\alpha(z)\| \leq \|L_\alpha B_\alpha(K(z) - K(0))\| + \|L_\alpha B_\alpha K(0)\| \leq 2N \left(\|\tilde{z}_0\| + \frac{\|K(0)\|}{N} \right); \quad (12)$$

3. оператор K_α при любом $z_1, z_2 \in H$ удовлетворяет условию Липшица:

$$\|K_\alpha(z_1) - K_\alpha(z_2)\| \leq \|L_\alpha B_\alpha(K(z_1) - K(z_2))\| \leq 2N \|z_1 - z_2\|. \quad (13)$$

Следовательно, при $N < \frac{1}{2}$ оператор K_α является сжимающим.

Теперь оценим $\|z_{n+1} - z_n\|$. Используя оценку (13), из (10) имеем:

$$\|z_{n+1} - z_n\| \leq \|L_\alpha B_\alpha K(z_n) - L_\alpha B_\alpha K(z_{n-1})\| \leq 2N \|z_n - z_{n-1}\|, \text{ где } q = 2N < 1. \quad (14)$$

Продолжая оценку (14) и используя (12), окончательно получаем:

$$\|z_{n+1} - z_n\| \leq q^{n+1} \left(\|\tilde{z}_0\| + \frac{\|K(0)\|}{N} \right). \quad (15)$$

Далее покажем, что последовательность $\{z_n\}_{n=0}^\infty$ является фундаментальной последовательностью. Действительно для любого n и p имеем, используя неравенство треугольника и (15):

$$\|z_{n+p} - z_n\| \leq \|z_{n+p} - z_{n+p-1}\| + \|z_{n+p-1} - z_{n+p-2}\| + \dots + \|z_{n+1} - z_n\| \leq (q^{n+p-1} + q^{n+p-2} + \dots + q^n) \left(\|\tilde{z}_0\| + \frac{\|K(0)\|}{N} \right).$$

Используя сумму геометрической прогрессии, имеем в силу $q < 1$:

$$\|z_{n+p} - z_n\| \leq q^n \frac{1 - q^p}{1 - q} \left(\|\tilde{z}_0\| + \frac{\|K(0)\|}{N} \right). \quad (16)$$

В силу полноты пространства H существует:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_\alpha. \quad (17)$$

Зафиксируем в неравенстве (16) индекс n и устремим p к бесконечности. Тогда получаем оценку:

$$\|z_{n+p} - z_n\| \leq \frac{q^n}{1 - q} \left(\|\tilde{z}_0\| + \frac{\|K(0)\|}{N} \right). \quad (18)$$

Полученная оценка утверждает: приближения z_n сходятся к z_α со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем q .

Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, используя непрерывность оператора K_α и (18), из (10) имеем:

$$z_\alpha = \tilde{z}_0 + K_\alpha(z_\alpha). \quad (19)$$

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Пусть: 1) выполнены все условия теоремы 1; 2) точное решение представимо в виде (3). Тогда решение z_α^0 уравнения (8) при $u = u_0$ сходится к точному решению z_0 уравнения (1) при $\alpha \rightarrow 0$.

Доказательство: Решение уравнения (8) в силу формулы (19) представимо в виде:

$$z_\alpha^0 = L_\alpha u_0 + K_\alpha(z_\alpha^0). \quad (20)$$

По предположению точное решение $z_0 \in H$ представимо в виде:

$$z_0 = A^{-1}u_0 + A^{-1}BKz_0. \quad (21)$$

Вычитая из (20) (21) и используя тождество $u_0 \equiv Az_0 - BKz_0$, имеем:

$$z_\alpha^0 - z_0 = L_\alpha u_0 + K_\alpha(z_\alpha^0) - A^{-1}u_0 - A^{-1}BKz_0 = -\alpha L_\alpha(z_0 - K(z_0)) + L_\alpha B_\alpha(K(z_\alpha^0) - K(z_0)) \quad (22)$$

Используя (3), из (22) имеем:

$$z_\alpha^0 - z_0 = -\alpha L_\alpha A v_0 + L_\alpha B_\alpha(K(z_\alpha^0) - K(z_0)). \quad (23)$$

Оценим разность $z_\alpha^0 - z_0$:

$$\|z_\alpha^0 - z_0\| = \|\alpha L_\alpha A v_0\| + \|L_\alpha B_\alpha(K(z_\alpha^0) - K(z_0))\| \leq \alpha \|v_0\| + 2N \|z_\alpha^0 - z_0\|. \quad (24)$$

Учитывая, что $N < 1/2$, из (24) имеем:

$$\|z_\alpha^0 - z_0\| \leq \frac{\alpha \|v_0\|}{1 - 2N}. \quad (25)$$

Из оценки (25) следует, что при $\alpha \rightarrow 0$ $z_\alpha^0 \rightarrow z_0$ по норме пространства H .

Скорость сходимости удовлетворяет условию (25). Теорема 2 доказана.

Теорема 3. Пусть: 1. выполнены все условия теоремы 2; 2. правая часть u удовлетворяет неравенству (4); 3. зависимость параметра регуляризации α от погрешности правой части δ определяется по закону $\alpha(\delta) = o(\sqrt{\delta})$. Тогда решение уравнения z_α^δ (8) при $u = u_\delta$ сходится к точному решению z_0 уравнения (1) при $\delta \rightarrow 0$.

Доказательство: Решение уравнения (8) при $u = u_\delta$ в силу формулы (19) представимо в виде:

$$z_\alpha^\delta = L_\alpha u_\delta + K_\alpha(z_\alpha^\delta). \quad (26)$$

Используя неравенство треугольника, имеем:

$$\|z_\alpha^\delta - z_0\| \leq \|z_\alpha^\delta - z_\alpha^0\| + \|z_\alpha^0 - z_0\|. \quad (27)$$

Оценим первое слагаемое в правой части (27):

$$\|z_{\alpha}^{\delta} - z_{\alpha}^0\| \leq \|L_{\alpha}(u_{\delta} - u_0)\| + \|L_{\alpha}B_{\alpha}(K(z_{\alpha}^{\delta}) - K(z_{\alpha}^0))\| \leq \frac{\delta}{\alpha} + 2N\|z_{\alpha}^{\delta} - z_{\alpha}^0\|. \quad (28)$$

Отсюда при $N < \frac{1}{2}$, имеем:

$$\|z_{\alpha}^{\delta} - z_{\alpha}^0\| \leq \frac{\delta}{\alpha} \cdot \frac{1}{1 - 2N}. \quad (29)$$

Тогда в силу неравенств (25) и (29), из (27) имеем:

$$\|z_{\alpha}^{\delta} - z_0\| \leq \frac{1}{1 - 2N} \left(\frac{\delta}{\alpha} + \alpha \|v_0\| \right). \quad (30)$$

Минимизируя правую часть неравенства (30), определяем зависимость параметра регуляризации α от погрешности δ , т.е.

$$\alpha(\delta) = \sqrt{\frac{c_1}{c_2}} \cdot \sqrt{\delta}, \text{ где } \frac{1}{1 - 2N} = c_1; \quad \|v_0\| \cdot c_1 = c_2. \quad (31)$$

Найденное значение α подставим в правую часть (30), имеем

$$\|z_{\alpha(\delta)}^{\delta} - z_0\| \leq 2\sqrt{c_1 \cdot c_2} \cdot \sqrt{\delta}. \quad (32)$$

Отсюда следует, что при $\delta \rightarrow 0$ $z_{\alpha(\delta)}^{\delta} \rightarrow z_0$ по норме пространства H , и $z_{\alpha(\delta)}^{\delta}$ является приближенным устойчивым решением уравнения (1).

Скорость сходимости удовлетворяет неравенству (32).

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск: 1962. 96 с.
2. Саадабаев А. Приближенные методы решения нелинейных интегральных и операторных уравнений 1-го рода. Бишкек: 1997. 218 с.
3. Усенов И.А. Метод малого параметра для регуляризации решения нелинейного операторного уравнения первого рода // Исслед. по интегр.-дифф. урав. вып. №40. Бишкек: 2009. С.114-120.

REFERENCES

1. Lavrent'ev M.M. O nekotorykh nekorrektnykh zadachakh matematicheskoi fiziki [Some incorrect problems of mathematical physics]. Novosibirsk, 1962. 96 p.
2. Saadabaev A. Priblizhennyye metody resheniya nelineynykh integral'nykh i operatornykh uravnenii 1-go roda [Approximate methods for solving nonlinear integral and operator equations of the 1st kind]. Bishkek, 1997. 218 p.

3. Usenov I.A. Metod malogo parametra dlya regulyarizatsii resheniya nelineinogo operatornogo uravneniya pervogo roda [Method of a small parameter for the regularization of solutions of the nonlinear operator equation of the first kind] // Issledovaniya po integral'no-differentsial'nym uravneniyam. Vyp. 40. Bishkek, 2009. pp. 114–120.

ИНФОМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Усенов Изат Абдраевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений Кыргызский национальный университет им. Ж. Баласагына;
e-mail: iausen@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Usenov Izat Abdraevich - candidate of physical and mathematical sciences, associate professor of the Chair of Differential Equations at the Zhusup Balasagyn Kyrgyz National University;
e-mail: iausen@mail.ru

БИБЛИОГРАФИЧЕСКАЯ ССЫЛКА

Усенов И.А. Построение приближенного решения нелинейного операторного уравнения первого рода в гильбертовом пространстве // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2016. № 4. С. 8–14.
DOI: 10.18384/2310-7251-2016-1-08-14.

BIBLIOGRAPHIC REFERENCE

I. Usenov. Construction of an approximate solution of nonlinear operator equations of the first kind in a Hilbert space // Bulletin of Moscow State Regional University. Series: Physics and Mathematics. 2016. no. 1. pp. 8–14.
DOI: 10.18384/2310-7251-2016-1-08-14.

УДК 514.7+517.3+517.926

DOI: 10.18384/2310-7251-2016-1-15-30

О КЛАССАХ РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВ С ФУНКЦИОНАЛЬНО АБЕЛЕВЫМИ СВЯЗНОСТЯМИ

Петрова В.Т.¹, Дмитриева М.Н.², Сивиркина А.С.³

¹Московский физико-технический институт

141700, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский пер., 9, Российская Федерация

²Рязанский государственный медицинский университет имени академика И.П. Павлова

390026, г. Рязань, ул. Высоковольтная, д. 9, Российская Федерация

³Рязанский институт (филиал) Университета Машиностроения

390000, г. Рязань, ул. Право-Лыбедская, д. 26/53, Российская Федерация

Аннотация. В статье выделено три класса римановых пространств, аффинные связности которых функционально абелевы, определено и доказано необходимое и достаточное условие того, что трехмерное риманово пространство имеет функционально абелеву связность.

Ключевые слова: мультипликативный интеграл, функционально абелева функция, функционально абелева связность, пространство аффинной связности, матрица связности, риманово пространство, метрика.

ON SOME CLASSES OF RIEMANNIAN SPACES WITH A FUNCTIONALLY ABELIAN CONNECTION

V. Petrova¹, M. Dmitrieva², A. Sivirkina³

¹Moscow Institute of Physics and Technology (State University), Institutskii per. 9, 141700 Dolgoprudnyi, Moscow region, Russia

²I.P. Pavlov Ryazan State Medical University ul. Vysokovol'tnaya 9, 390026 Ryazan, Russia

³Ryazan Institute (Branch) of Moscow State University of Mechanical Engineering, ul. Pravo-Lybedskaya 26/53, 390000 Ryazan, Russia

Abstract. We have defined three classes of Riemannian spaces whose affine connections are functionally Abelian. We have determined and proved a necessary and sufficient condition for a three-dimensional Riemann space to exhibit a functionally Abelian property

Key words: multiplicative integral, functionally Abelian function, space of affine connection, functionally Abelian connection, Riemannian space, metric, connection matrix, Jordan matrix, Teplitz matrix.

Описание свойств пространств аффинной связности в терминах мультипликативного интеграла [1; 2] в значительной мере связано с мультипликативной интегрируемостью в конечном виде матричных функций определенного геометрического содержания, а специфика мультипликативного интеграла вытекает из непрерывности значений подынтегральной функции. Было доказано [3; 4], что матричная функция мультипликативно интегрируема, если она функционально абелева. Поэтому и возник интерес к задаче выделения римановых пространств с функционально абелевыми матрицами связности [1; 2–5; 10].

В настоящей работе для размерности 3 дается полное описание таких пространств и приводятся их примеры. Также показано, что кроме пространств нулевой кривизны существует достаточно большой класс римановых пространств с функционально абелевыми связностями, который не исчерпывается найденным в работе [5] конформным случаем.

Итак, пусть $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$ (по $i, j = 1, 2, 3$ суммирование) – риманова метрика с матрицей $g = \|g_{ij}\|$ и матрицами связности $\Gamma_k = \|\Gamma_{jk}^i\|$, где, как обычно, $\Gamma_{jk}^i = g^{is}\Gamma_{sjk}$, $\Gamma_k = \|\Gamma_{ijk}\|$, а

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right).$$

Для функционально абелевых матриц связности тензор кривизны:

$$R_{ij} = [\Gamma_j, \Gamma_i] + \frac{\partial \Gamma_i}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_j}{\partial x^i} = \frac{\partial \Gamma_i}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_j}{\partial x^i}. \quad (1)$$

При замене координат $x = C(x')x'$ матрица метрики преобразуется по правилу: $g' = C^T g C$, а матрица связности – по правилу:

$$\Gamma'_j = C^{-1} \Gamma_j C c_i^j + C^{-1} C'_{x'i}. \quad (2)$$

Из последней формулы видно, что, если преобразование координат $C = \|c_i^j\|$ постоянно, то связностью Γ_j^i наследуется диагональный, треугольный или блочный вид матриц $C^{-1}\Gamma_i C$.

Согласно результатам В.В. Морозова [3], функционально абелевы матрицы разложимы в линейные комбинации постоянных попарно коммутирующих матриц с функциональными коэффициентами, и значит, для любого значения индекса i можно полагать, что матрицы связности $\Gamma_i = \sum_j \alpha_j(M) A_i^j$, где матрицы A_i^j – постоянны и попарно коммутируют. Если хотя бы одна из них имеет все собственные значения различными, то в базисе из её собственных векторов, к которому можно перейти постоянным преобразованием, все коммутирующие с ней матрицы диагональные, а значит, как отмечено выше, диагональны и матрицы связности Γ_i . В этом случае классификационная задача решена в [9].

Если же среди матриц A_i^j отсутствуют матрицы со всеми различными собственными значениями, но найдётся хотя бы одна матрица с двумя различными собственными значениями, то в базисе, составленном из её собственных векторов, все постоянные матрицы, коммутирующие с ней, будут блочно-треугольными, а значит, и матрицы связности также блочно-треугольные. Этот вид матриц связности был назван [6] функционально кратным жордановому и соответствующие им метрики были найдены для произвольной размерности.

Приведём примеры таких метрик: $a = a(x)$, $b = b(y)$, $c = c(z)$.

Пример 1.

$$g = \begin{vmatrix} a^2 & \alpha ab & \beta ac \\ \alpha ab & b^2 & \gamma bc \\ \beta ac & \gamma bc & c^2 \end{vmatrix}, \quad \text{где} \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha\beta\gamma \neq 1.$$

$$\Gamma_1 = \frac{a'}{a} E_{11}; \quad \Gamma_2 = \frac{b'}{b} E_{22}; \quad \Gamma_3 = \frac{c'}{c} E_{33}; \quad R_{ij} \equiv 0.$$

Пример 2.

$$g = \begin{vmatrix} 1 & b & \beta c \\ b & b^2 + \alpha & \beta bc \\ \beta c & \beta bc & c^2 \end{vmatrix}, \quad \text{где} \quad \alpha(1 - \beta^2) \neq 0.$$

$$\Gamma_1 \equiv 0; \quad \Gamma_2 = b' E_{12}; \quad \Gamma_3 = c' E_{33}; \quad R_{ij} \equiv 0.$$

Пример 3.

$$g = \left\| \begin{array}{ccc} e^{2y} & xe^{2y} & \beta e^{yc} \\ xe^{2y} & x^2 e^{2y} + \alpha & \beta xe^{yc} \\ \beta e^{yc} & \beta xe^{yc} & c^2 \end{array} \right\|, \quad \text{где } \alpha(1 - \beta^2) \neq 0.$$

$$\Gamma_1 \equiv E_{12}; \quad \Gamma_2 \equiv E_{11} + E_{22}; \quad \Gamma_3 = \frac{c'}{c} E_{33}; \quad R_{ij} \equiv 0.$$

Пусть теперь все матрицы A_k^i имеют по одному собственному значению, тогда жорданов тип каждой из них есть либо трёхмерная клетка, либо двумерная и одномерная.

1°. Рассмотрим случай, когда среди постоянных матриц A_k^i найдётся матрица, жорданов вид которой – трёхмерная клетка, и тогда любая коммутирующая с ней матрица в базисе собственных векторов матрицы A_k^i – верхняя треугольная, значит, такого же вида в этом же базисе и их линейные комбинации с функциональными коэффициентами, причем матрица перехода к базису постоянная.

Симметрия коэффициентов позволяет уточнить вид матриц связности в таком случае:

$$\Gamma_1 = \left\| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|, \quad \Gamma_2 = \left\| \begin{array}{ccc} 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|, \quad \Gamma_3 = \left\| \begin{array}{ccc} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{array} \right\|.$$

Понятно, что матрицы связности этого вида не только попарно коммутируют, но и являются функционально абелевыми, при этом коэффициенты тензора кривизны, согласно (1), находятся по формулам:

$$R_{21} = \frac{\partial a}{\partial x^1} \hat{E}_2 + \left(\frac{\partial b}{\partial x^1} - \frac{\partial a}{\partial x^2} \right) \hat{E}_3, \quad R_{31} = \frac{\partial a}{\partial x^1} E + \frac{\partial b}{\partial x^1} \hat{E}_2 + \left(\frac{\partial c}{\partial x^1} - \frac{\partial a}{\partial x^3} \right) \hat{E}_3, \quad (3)$$

$$R_{32} = \frac{\partial a}{\partial x^2} E + \left(\frac{\partial b}{\partial x^2} - \frac{\partial a}{\partial x^3} \right) \hat{E}_2 + \left(\frac{\partial c}{\partial x^2} - \frac{\partial b}{\partial x^3} \right) \hat{E}_3,$$

где E – единичная матрица, $\hat{E}_2 = E_{11} + E_{22}$, $\hat{E}_3 = E_{13}$, где $E_{ij} = \|\delta_{ij}\|$ – матрица, элементы которой $\delta_{ij} = 0$, если $i \neq j$, а $\delta_{ii} = 1$.

Координатная форма матричной системы $\Gamma_k = g\Gamma_k$, ($k = 1, 2, 3$) указанного выше типа матриц связности Γ_k даёт систему уравнений:

$$\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} = 0, \quad \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial g_{11}}{\partial x^3} = 2g_{11}a, \quad \frac{\partial g_{12}}{\partial x^1} = 0, \quad \frac{\partial g_{12}}{\partial x^2} = g_{11}a, \quad \frac{\partial g_{12}}{\partial x^3} = g_{11}b + 2g_{12}a,$$

$$\frac{\partial g_{13}}{\partial x^1} = g_{11}a, \quad \frac{\partial g_{13}}{\partial x^2} = g_{11}b + g_{12}a, \quad \frac{\partial g_{13}}{\partial x^3} = g_{11}c + g_{12}b + 2g_{13}a,$$

$$\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} = 0, \quad \frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} = 2g_{12}a, \quad \frac{\partial g_{22}}{\partial x^3} = 2(g_{12}b + g_{22}a), \quad (4)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_{23}}{\partial x^1} &= g_{12}a, \\ \frac{\partial g_{23}}{\partial x^2} &= g_{12}b + (g_{13} + g_{22})a, \quad \frac{\partial g_{23}}{\partial x^3} g_{11}c + (g_{13} + g_{22})b + 2g_{23}a, \\ \frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} &= 2g_{13}a, \quad \frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} = 2(g_{13}b + g_{23}a), \quad \frac{\partial g_{33}}{\partial x^3} = 2(g_{13}c + g_{23}b + g_{33}c).\end{aligned}$$

Условия интегрируемости этой системы:

$$\begin{aligned}g_{11} \frac{\partial a}{\partial x^1} &= 0, \quad g_{11} \frac{\partial a}{\partial x^2} = 0, \quad g_{12} \frac{\partial a}{\partial x^1} = 0, \quad g_{12} \frac{\partial a}{\partial x^2} = 0, \\ g_{11} \frac{\partial b}{\partial x^1} + 2g_{12} \frac{\partial a}{\partial x^1} &= 0, \quad g_{12} \frac{\partial b}{\partial x^1} + g_{22} \frac{\partial a}{\partial x^1} = 0, \\ (g_{13} + g_{22}) \frac{\partial b}{\partial x^1} + 2g_{23} \frac{\partial a}{\partial x^1} &= g_{12} \left(\frac{\partial a}{\partial x^3} - \frac{\partial c}{\partial x^1} \right), \\ g_{11} \left(\frac{\partial a}{\partial x^3} - \frac{\partial c}{\partial x^1} \right) &= g_{12} \frac{\partial b}{\partial x^1} + 2g_{13} \frac{\partial a}{\partial x^1}, \quad g_{13} \left(\frac{\partial a}{\partial x^3} - \frac{\partial c}{\partial x^1} \right) = g_{23} \frac{\partial b}{\partial x^1} + g_{33} \frac{\partial a}{\partial x^1}, \quad (5) \\ g_{11} \left(\frac{\partial a}{\partial x^2} - \frac{\partial b}{\partial x^1} \right) &= g_{12} \frac{\partial a}{\partial x^1}, \quad g_{12} \left(\frac{\partial a}{\partial x^2} - \frac{\partial b}{\partial x^1} \right) = (g_{13} + g_{22}) \frac{\partial a}{\partial x^1}, \\ g_{13} \left(\frac{\partial a}{\partial x^2} - \frac{\partial b}{\partial x^1} \right) &= g_{23} \frac{\partial a}{\partial x^1}, \quad g_{11} \left(\frac{\partial a}{\partial x^3} - \frac{\partial b}{\partial x^2} \right) = 2g_{12} \frac{\partial a}{\partial x^2}, \quad g_{12} \left(\frac{\partial a}{\partial x^3} - \frac{\partial b}{\partial x^2} \right) = g_{22} \frac{\partial a}{\partial x^2}, \\ g_{11} \left(\frac{\partial b}{\partial x^3} - \frac{\partial c}{\partial x^2} \right) + g_{12} \left(\frac{\partial a}{\partial x^3} - \frac{\partial b}{\partial x^2} \right) &= 2g_{13} \frac{\partial a}{\partial x^3}, \\ g_{12} \left(\frac{\partial b}{\partial x^3} - \frac{\partial c}{\partial x^2} \right) + (g_{13} + g_{22}) \left(\frac{\partial a}{\partial x^3} - \frac{\partial b}{\partial x^2} \right) &= 2g_{23} \frac{\partial a}{\partial x^3}, \\ g_{13} \left(\frac{\partial b}{\partial x^3} - \frac{\partial c}{\partial x^2} \right) + g_{23} \left(\frac{\partial a}{\partial x^3} - \frac{\partial b}{\partial x^2} \right) &= g_{33} \frac{\partial a}{\partial x^3}.\end{aligned}$$

Чтобы определить коэффициенты матриц связности a , b и c , рассмотрим несколько случаев.

1^о.1. Если $g_{11} \neq 0$ или $g_{11} = 0$, но $g_{12} \neq 0$, то из последней системы исключаются g_{ij} , и

$$\frac{\partial a}{\partial x^1} = 0, \quad \frac{\partial a}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial b}{\partial x^1} = 0, \quad \frac{\partial c}{\partial x^1} = \frac{\partial b}{\partial x^2} = \frac{\partial a}{\partial x^3}, \quad \frac{\partial c}{\partial x^2} = \frac{\partial b}{\partial x^3}. \quad (6)$$

Отсюда и из (1) следует, что $R_{ij} = 0$ для всех $i, j = 1, 2, 3$.

Интегрируя систему уравнений (6), получим в явном виде, что

$$\begin{aligned}a &= a(x^3), \quad b = a'(x^3)x^2 + \psi'(x^3), \\ c &= a'(x^3)x^1 + \psi''(x^3)x^2 + a''(x^3)(x^2)^2 + \varphi'(x^3),\end{aligned} \quad (7)$$

где $a(x^3)$, $\varphi(x^3)$, $\psi(x^3)$ – произвольные функции от переменной x^3 , по крайней мере, дважды дифференцируемые. Это позволяет выписать и решения системы уравнений (5), обозначив функции:

$$A = \int a(x^3) dx^3, \quad f = a(x^3)x^2 + \varphi(x^3), \quad F = \frac{1}{2}f^2 + ax^1 + \frac{1}{2}a'(x^2)^2 + \varphi'x^2 + \varphi, \quad (8)$$

которые определяют метрики, матрицы которых следующие:

$$g = e^{2A} \begin{vmatrix} 1 & f & F \\ f & f^2 + \alpha & Ff + \alpha(f + \beta) \\ F & Ff + \alpha(f + \beta) & F^2 + \alpha(f + \beta)^2 + \gamma \end{vmatrix}, \quad \text{где } \alpha\gamma \neq 0 \quad (9)$$

и

$$g = e^{2A} \begin{vmatrix} 0 & 1 & f \\ 1 & 2(f + \alpha) & F + (f + \alpha)^2 \\ f & F + (f + \alpha)^2 & 2(Ff + \alpha^2 f + \alpha f^2 + \beta) \end{vmatrix}, \quad \text{где } \beta \neq 0 \quad (10)$$

1^о.2. Если же положить нулевыми коэффициенты $g_{11} = g_{12} = 0$, то в системе уравнений (5) остаются только два нетривиальных условия:

$$\begin{cases} (g_{13} + g_{22}) \left(\frac{\partial a}{\partial x^3} - \frac{\partial b}{\partial x^2} \right) = 0, \\ g_{13} \left(\frac{\partial b}{\partial x^3} - \frac{\partial c}{\partial x^2} \right) + g_{23} \left(\frac{\partial a}{\partial x^3} - \frac{\partial b}{\partial x^2} \right) = 0 \end{cases} \quad (11)$$

помимо того, что $\frac{\partial a}{\partial x^1} = \frac{\partial a}{\partial x^2} = \frac{\partial b}{\partial x^1} = 0$ и $\frac{\partial a}{\partial x^3} = \frac{\partial c}{\partial x^1}$, которые обращают в нуль коэффициенты тензора кривизны R_{12} и R_{13} .

Если же дополнительно предположить, что $g_{13} + g_{22} \neq 0$, то из последней системы уравнений (11) следуют и остальные условия системы (6), как и равенство нулю последнего из коэффициентов тензора R_{23} . Тогда решение системы (3) определяет метрику с матрицей:

$$g = e^{2A} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & (1 + \alpha)f \\ 1 & (1 + \alpha)f & 2F + \alpha f^2 \end{vmatrix}, \quad \text{где } \alpha \neq 0, \quad (12)$$

а функции a, b, c, A, f, F определяются формулами (8) и (7).

Налагая условие $g_{13} + g_{22} = 0$, получим, что

$$a = a(x^3), \quad b = b(x^2, x^3), \quad c = a'(x^3)x^1 + \tilde{c}(x^2, x^3),$$

(здесь $a(x^3)$ – произвольная функция), и система (4) сведется к системе:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{13}}{\partial x^i} &= 0, & \frac{\partial g_{22}}{\partial x^i} &= 0, & \frac{\partial g_{23}}{\partial x^i} &= 0 & \text{при } i = 1, 2, \\ \frac{\partial g_{13}}{\partial x^3} &= 2g_{13}a, & \frac{\partial g_{22}}{\partial x^3} &= 2g_{22}a, & \frac{\partial g_{23}}{\partial x^3} &= 2g_{23}a, \\ \frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} &= 2g_{13}a, & \frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} &= 2(g_{13}b + g_{23}a), & \frac{\partial g_{33}}{\partial x^3} &= 2(g_{13}c + g_{23}b + g_{33}a). \end{aligned}$$

Её решения и определяют метрику с матрицей вида:

$$g = e^{2A} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \alpha \\ -1 & \alpha & 2\Phi \end{vmatrix}, \quad (13)$$

где α – произвольная функция, $\frac{\partial \Phi}{\partial x^1} = -\alpha$, $\frac{\partial \Phi}{\partial x^2} = -b + \alpha a$, $\frac{\partial \Phi}{\partial x^3} = -c + ab$, причём $A = \int a(x^3) dx^3$. Существование этой функции обеспечивается последним из условий системы (11), которое принимает вид:

$$\left(\frac{\partial b}{\partial x^3} - \frac{\partial c}{\partial x^2}\right) + \alpha \left(\frac{\partial a}{\partial x^3} - \frac{\partial b}{\partial x^2}\right) = 0,$$

и коэффициент $R_{32} \neq 0$. Тем самым доказано утверждение.

Утверждение 1. Метриками с матрицами (8), (9), (12), (13) исчерпываются все трёхмерные римановы метрики, которые имеют матрицы связности функционально абелевыми и тёплицевыми.

Пример 4. Метрика с матрицей:

$$g = e^{2(x^3)^2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2(x^3(x^2 - x^1) - (x^2)^2) \end{vmatrix}$$

имеет матрицами своей связности матрицы:

$$\Gamma_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & x^3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \Gamma_2 = \begin{vmatrix} 0 & x^3 & 2x^2 \\ 0 & 0 & x^3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \Gamma_3 = \begin{vmatrix} x^3 & 2x^2 & x^1 + x^2 \\ 0 & x^3 & 2x^2 \\ 0 & 0 & x^3 \end{vmatrix}.$$

Отсюда получим (см. (1)), что $R_{12} = R_{13} = 0$, $R_{32} = E_{12} + E_{23} - 2E_{13}$.

Замечание 1. Метрика с матрицей (13) может быть постоянным преобразованием $C = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ сведена к виду:

$$ds^2 = e^{2A}(-2dx^1 dx^3 + (dx^2)^2 + 2\Phi(dx^3)^2),$$

где $R_{12} = R_{13} = 0$ и $R_{32} = \left(\frac{\partial^2 \Phi}{(\partial x^2)^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^1 \partial x^3}\right) \hat{E}_2 \neq 0$

2°. Рассмотрим второй случай, когда все постоянные матрицы, в линейные комбинации которых с функциональными коэффициентами разлагаются матрицы связности, имеют по одному собственному значению, но жорданов тип каждой из них – двумерная и одномерная клетки. Согласно [11], в базисе из их собственных векторов в этом случае коммутирующие с ней матрицы с одним собственным значением должны иметь блочно-треугольный вид, который переименованием второй и третьей координат (постоянным преобразованием, которому подвергаем, конечно, и метрику) можно свести к треугольному виду с равными элементами по диагонали. Причем матрицы связности метрики таковы:

$$\Gamma_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \Gamma_2 = \begin{vmatrix} 0 & \tilde{a} & b \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \Gamma_3 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & a & \tilde{b} \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix}.$$

Условия их коммутирования:

$$a(M)\tilde{a}(N) = \tilde{a}(M)a(N),$$

$$b(M)\tilde{b}(N) = \tilde{b}(M)b(N),$$

$$\tilde{a}(M)\tilde{b}(N) = a(M)b(N),$$

приводят к необходимости рассмотреть случаи:

- 1) $\tilde{b} = \delta b$, $a = \delta \tilde{a}$, для $\delta \neq 0$.
- 2) $b \equiv 0$, $\tilde{a} \equiv 0$.
- 3) $\tilde{b} \equiv 0$, $a \equiv 0$.

При этом коэффициенты тензора кривизны имеют вид:

$$\begin{aligned} R_{21} &= \frac{\partial \tilde{a}}{\partial x^1} E_{12} + \frac{\partial a}{\partial x^1} E_{23} + \left(\frac{\partial b}{\partial x^1} - \frac{\partial a}{\partial x^2} \right) E_{13}, \\ R_{31} &= \frac{\partial a}{\partial x^1} E + \frac{\partial b}{\partial x^1} E_{12} + \frac{\partial \tilde{b}}{\partial x^1} E_{23} + \left(\frac{\partial c}{\partial x^1} - \frac{\partial b}{\partial x^3} \right) E_{13}, \\ R_{32} &= \frac{\partial a}{\partial x^2} E + \left(\frac{\partial b}{\partial x^2} - \frac{\partial \tilde{a}}{\partial x^3} \right) E_{12} + \left(\frac{\partial \tilde{b}}{\partial x^2} - \frac{\partial a}{\partial x^3} \right) E_{23} + \left(\frac{\partial c}{\partial x^2} - \frac{\partial b}{\partial x^3} \right) E_{13}. \end{aligned} \quad (14)$$

Аналогично (3) получим систему, по существу, её обобщающую:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} &= 0, \quad \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial g_{11}}{\partial x^3} = 2g_{11}a, \quad \frac{\partial g_{12}}{\partial x^1} = 0, \quad \frac{\partial g_{12}}{\partial x^2} = g_{11}\tilde{a}, \quad \frac{\partial g_{12}}{\partial x^3} \\ &= g_{11}b + 2g_{12}a, \\ \frac{\partial g_{13}}{\partial x^1} &= g_{11}a, \quad \frac{\partial g_{13}}{\partial x^2} = g_{11}b + g_{12}a, \quad \frac{\partial g_{13}}{\partial x^3} = g_{11}c + g_{12}\tilde{b} + 2g_{13}a, \\ \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} &= 0, \quad \frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} = 2g_{12}\tilde{a}, \quad \frac{\partial g_{23}}{\partial x^3} = 2(g_{12}b + g_{22}a), \\ \frac{\partial g_{23}}{\partial x^1} &= g_{12}a, \quad \frac{\partial g_{23}}{\partial x^2} = g_{12}b + g_{13}\tilde{a} + g_{22}a, \quad \frac{\partial g_{23}}{\partial x^3} \\ &= g_{12}c + g_{13}b + g_{23}\tilde{b} + 2g_{23}a, \\ \frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} &= 2g_{13}a, \quad \frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} = 2(g_{13}b + g_{23}a), \quad \frac{\partial g_{33}}{\partial x^3} = 2(g_{13}c + g_{23}\tilde{b} + g_{33}a), \end{aligned} \quad (15)$$

и условия её интегрируемости аналогичны условиям интегрируемости системы (4). Отсюда при всех допустимых значениях g_{ij} получим, что обязательны условия:

$$\frac{\partial a}{\partial x^1} = \frac{\partial a}{\partial x^2} = \frac{\partial \tilde{a}}{\partial x^1} = \frac{\partial b}{\partial x^1} = \frac{\partial \tilde{b}}{\partial x^1} = 0, \quad \frac{\partial c}{\partial x^1} = \frac{\partial a}{\partial x^3},$$

из чего следует равенство нулю коэффициентов R_{12} и R_{13} в (14).

Дальше поступаем аналогично случаю трёхмерной жордановой клетки при решении системы уравнений (15).

2⁰.1. Если $g_{11} \neq 0$ или $g_{11} = 0$, но $g_{12} \neq 0$, то рассмотрим случаи:

2⁰.1.1. $\tilde{b} = \delta b$, $a = \delta \tilde{a}$ и $\delta \neq 0$, тогда имеем, что:

$$a = a(x^3), b = \tilde{a}'(x^3) \cdot x^2 + \psi'(x^3), \\ ca'(x^3) \cdot x^1 + \frac{1}{2} \tilde{a}'(x^3) \cdot (x^2)^2 + \psi''(x^3) \cdot x^2 + \varphi'(x^3).$$

Обозначим $A = \int a(x^3) dx^3$, $\tilde{f} = \tilde{a}(x^3) \cdot x^2 + \psi(x^3)$, $f = \delta \tilde{f}$,

$$F = \frac{1}{2} \delta \tilde{f}^2 + a \cdot x^1 + \frac{1}{2} \tilde{a}' \cdot (x^2)^2 + \psi' \cdot x^2 + \varphi,$$

где, как выше, функции $a(x^3)$, $\varphi(x^3)$, $\psi(x^3)$ произвольны и достаточное число раз дифференцируемы. Это дает метрики нулевой кривизны с матрицами:

$$g = e^{2A} \begin{vmatrix} 1 & \tilde{f} & F \\ \tilde{f} & \tilde{f}^2 + \alpha & F\tilde{f} + \alpha^2 \delta(\tilde{f} + \beta) \\ F & F\tilde{f} + \alpha^2 \delta(\tilde{f} + \beta) & F^2 + \alpha^2 \delta^2(\tilde{f} + \beta) + \gamma \end{vmatrix}, \text{ где } |\alpha| \neq |\gamma| \quad (16)$$

или

$$g = e^{2A} \begin{vmatrix} 0 & 1 & f \\ 1 & 2(\tilde{f} + \alpha) & F + \delta(\tilde{f} + \alpha)^2 \\ f & F + \delta(\tilde{f} + \alpha)^2 & 2(Ff + \delta^2 \alpha^2 f + \alpha f^2 + \gamma) \end{vmatrix}, \text{ где } \gamma \neq 0. \quad (17)$$

2⁰.1.2. $b \equiv 0$, $\tilde{a} \equiv 0$, тогда получим, что:

$$a = a(x^3), b \equiv 0, c = a'(x^3) \cdot x' + \varphi'(x^3), \tilde{a} = 0, \tilde{b} = a'(x^3) \cdot x^2 + \psi'(x^3).$$

Обозначим $A = \int a(x^3) dx^3$, $u = a \cdot x^1 + \varphi$, $v = a \cdot x^3 + \psi$.

Как и выше, функции $a(x^3)$, $\varphi(x^3)$, $\psi(x^3)$ произвольны, интегрируя систему (15), получим метрики с нулевой кривизной и матрицами:

$$g = e^{2A} \begin{vmatrix} 1 & \alpha & u + \alpha v \\ \alpha & \beta & \alpha u + \beta v + \gamma \\ u + \alpha v & \alpha u + \beta v + \gamma & u^2 + 2v(\alpha v + \gamma) + \beta v^2 + \delta \end{vmatrix}, \quad (18)$$

где $(\beta - \alpha^2)\delta \neq \gamma$,

или

$$g = e^{2A} \begin{vmatrix} 0 & 1 & v \\ 1 & \beta & u + \alpha v \\ v & u + \alpha v & 2uv + \alpha v^2 + \beta \end{vmatrix}, \text{ где } \beta \neq 0. \quad (19)$$

2⁰.1.3. в случае $\tilde{b} \equiv 0$, $a \equiv 0$, решения системы (15) дают метрики вида:

$$g = \left\| \begin{array}{ccc} 1 & B & C \\ B & B^2 + \alpha & BC + \beta \\ C & BC + \beta & C^2 + \gamma \end{array} \right\|, \quad \text{где } \alpha\gamma \neq \beta^2, \quad (20)$$

или

$$g = \left\| \begin{array}{ccc} 0 & 1 & \alpha \\ 1 & 2B & B + \alpha C \\ \alpha & B + \alpha C & 2(\alpha C + \gamma) \end{array} \right\|, \quad \text{где } \gamma \neq 0. \quad (21)$$

Для функции $\mathcal{D}(x^2, x^3)$ двух переменных обозначены производные

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial x^2} &= B, & \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial x^3} &= C, & \frac{\partial^2 \mathcal{D}}{(\partial x^2)^2} &= \frac{\partial B}{\partial x^2} = \tilde{a}, \\ \frac{\partial^2 \mathcal{D}}{(\partial x^3)^2} &= \frac{\partial C}{\partial x^3} = c, & \frac{\partial^2 \mathcal{D}}{\partial x^2 \partial x^3} &= \frac{\partial B}{\partial x^3} = \frac{\partial C}{\partial x^2} = b, \end{aligned}$$

где $\tilde{a} = \tilde{a}(x^2, x^3)$, $b = b(x^2, x^3)$, $c = c(x^2, x^3)$ и $\frac{\partial b}{\partial x^2} = \frac{\partial \tilde{a}}{\partial x^3}$, $\frac{\partial c}{\partial x^2} = \frac{\partial b}{\partial x^3}$.

Всё это, в конце концов, обеспечивает равенство нулю всех компонент тензора кривизны: $R_{ij} = 0$ для всех $i, j = 1, 2, 3$.

3⁰. Как и выше, интерес представляет случай, когда $g_{11} = g_{12} = 0$, при котором есть возможность иметь ненулевые коэффициенты кривизны R_{ij} . Условия интегрируемости системы (15), помимо соотношений:

$$\frac{\partial a}{\partial x^1} = \frac{\partial a}{\partial x^2} = \frac{\partial \tilde{a}}{\partial x^1} = \frac{\partial b}{\partial x^1} = \frac{\partial \tilde{b}}{\partial x^1} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial c}{\partial x^1} = \frac{\partial a}{\partial x^3}$$

(из которых и системы (14) и следует, что $R_{12} = R_{13} = 0$) содержат уравнения:

$$\begin{cases} g_{13} \left(\frac{\partial \tilde{a}}{\partial x^3} - \frac{\partial b}{\partial x^2} \right) + g_{22} \left(\frac{\partial a}{\partial x^3} - \frac{\partial \tilde{b}}{\partial x^2} \right) = 0, \\ g_{13} \left(\frac{\partial b}{\partial x^3} - \frac{\partial c}{\partial x^2} \right) + g_{23} \left(\frac{\partial a}{\partial x^3} - \frac{\partial \tilde{b}}{\partial x^2} \right) = 0, \end{cases} \quad (22)$$

которые обращаются в тривиальные, если $a \equiv 0$, $\tilde{b} \equiv 0$ или $\tilde{a} \equiv 0$, $b \equiv 0$ (случаи **3⁰.2**, **3⁰.3** – см. выше п. **2⁰.**) и дают $R_{ij} = 0$ для всех $i, j = 1, 2, 3$ для метрик с матрицами, элементы которых в этом случае являются решениями системы уравнений (15) и дают метрику с матрицей:

$$g = \left\| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & B \\ 1 & B & 2C \end{array} \right\|, \quad \text{где } \alpha \neq 0, \quad (23)$$

и производные некоторой функции двух переменных $\mathcal{D}(x^2, x^3)$ обозначены

$$\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial x^2} = B, \quad \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial x^3} = C.$$

Тогда, обозначив:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{D}}{(\partial x^2)^2} = \frac{\partial B}{\partial x^2} = \tilde{a}, \quad \frac{\partial^2 \mathcal{D}}{\partial x^2 \partial x^3} = \frac{\partial B}{\partial x^3} = \frac{\partial C}{\partial x^2} = b, \quad \frac{\partial^2 \mathcal{D}}{(\partial x^3)^2} = \frac{\partial C}{\partial x^3} = c,$$

будем иметь матрицы найденной метрики связности:

$$\Gamma_1 \equiv 0, \quad \Gamma_2 = \begin{vmatrix} 0 & \tilde{a} & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \Gamma_3 = \begin{vmatrix} 0 & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

или

$$g = e^{2A} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & \alpha B \\ 1 & \alpha B & 2C + \alpha B^2 \end{pmatrix}, \quad \text{где } \alpha \neq 0 \quad (24)$$

и $\frac{\partial B}{\partial x^2} = a, \quad \frac{\partial B}{\partial x^3} = \frac{\partial C}{\partial x^2} = \tilde{b}, \quad \frac{\partial C}{\partial x^3} = c$, причем,

$$a = a(x^3), \quad \tilde{b} = a'(x^3) \cdot x^2 + \psi'(x^3), \quad c = a'(x^3) \cdot x^1 + \varphi'(x^3)$$

для $a(x^3)$, $\varphi(x^3)$, $\psi(x^3)$ – произвольных функций одной переменной x^3 , а

$A = \int a(x^3) dx^3$. Матрицы связности в этом случае таковы:

$$\Gamma_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \Gamma_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \Gamma_3 = \begin{vmatrix} \alpha & 0 & c \\ 0 & \alpha & b \\ 0 & 0 & \alpha \end{vmatrix}.$$

3^о.1. При условии же $\tilde{b} = \delta b$, $a = \delta \tilde{a}$, причем $\delta \neq 0$ система уравнений (22) принимает вид:

$$\begin{cases} (g_{13} + \delta g_{22}) \left(\frac{\partial \tilde{a}}{\partial x^3} - \frac{\partial b}{\partial x^2} \right) = 0, \\ g_{13} \left(\frac{\partial b}{\partial x^3} - \frac{\partial c}{\partial x^2} \right) + \delta g_{23} \left(\frac{\partial \tilde{a}}{\partial x^3} - \frac{\partial b}{\partial x^2} \right) = 0. \end{cases} \quad (25)$$

Из неё следует, что, если $g_{13} + \delta g_{22} \neq 0$, то $\frac{\partial \tilde{a}}{\partial x^3} = \frac{\partial b}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial b}{\partial x^3} = \frac{\partial c}{\partial x^2}$, а

$$a = a(x^3), b = \tilde{a}(x^3)x^2 + \psi'(x^3),$$

$$c = a'(x^3)x^1 + \frac{1}{2} \tilde{a}'(x^3) \cdot (x^2)^2 + \psi''(x^3) \cdot x^2 + \varphi'(x^3)$$

(для произвольных функций $a(x^3)$, $\varphi(x^3)$, $\psi(x^3)$). Если обозначить $A = \int a(x^3) dx^3$, то матрица метрики определится так:

$$g = e^{2A} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & f \\ 1 & f & 2C + (1 + \alpha\delta)\delta f^2 \end{vmatrix}, \quad \text{где } \alpha \neq 0, \quad (26)$$

$$f = \tilde{a}(x^3)x^2 + \psi(x^3), c = a'(x^3)x^1 + \frac{1}{2} \tilde{a}''(x^3)(x^2)^2 + \psi'(x^3)x^2 + \varphi(x^3).$$

Когда же $g_{13} + \delta g_{22} = 0$, то, вообще говоря, $R_{23} \neq 0$, а второе из уравнений системы (25) принимает вид:

$$\left(\frac{\partial b}{\partial x^3} - \frac{\partial c}{\partial x^2} \right) + \alpha \left(\frac{\partial \tilde{a}}{\partial x^3} - \frac{\partial b}{\partial x^2} \right) = 0.$$

Это условие обеспечивает существование такой функции $\Phi(x^1, x^2, x^3)$, что $\frac{\partial \Phi}{\partial x^1} = -\delta\alpha$, $\frac{\partial \Phi}{\partial x^2} = -\delta b + \alpha\delta\tilde{a} = -\tilde{b} + \alpha a$, $\frac{\partial \Phi}{\partial x^3} = -\delta c + \alpha\delta b = -\tilde{c} + \alpha\tilde{b}$, где функция $a(x^3)$ – произвольна, а $c(x^1, x^2, x^3) = a'(x^3) \cdot x^1 + \tilde{c}(x^2, x^3)$ для произвольных функций $\tilde{c}(x^2, x^3)$ и $b(x^2, x^3)$. Это дает решение системы уравнений (15), которое определяет метрику с матрицей

$$g = e^{2A} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\delta \\ 0 & 1 & \alpha \\ -\delta & \alpha & 2\Phi \end{pmatrix} \quad (27)$$

при $\delta \neq 0$ и $A = \int a(x^3) dx^3$.

Таким образом, исследованы все возможности случая 2^0 и тем самым установлено и доказано утверждение.

Утверждение 2. Метриками вида (16)–(21), (23), (24), (26), (27) исчерпываются все метрики, для которых матрицы связности разложимы в функциональные линейные комбинации постоянных матриц с одинаковыми собственными значениями и жордановым типом 2–1, которые функционально абелевы.

Замечание 1. Метрики (16)–(21), (23), (24), (26) обобщают метрики, найденные в случае 1^0 , которые определяются формулами (2), (10), (12). Имея нулевые коэффициенты тензора кривизны, они могут быть получены из постоянной метрики преобразованием:

$$C_0 = \left\| \begin{pmatrix} 1 & f & F \\ 0 & 1 & \tilde{f} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\|, \quad (28)$$

где функции $f, \tilde{f}, F$ таковы, что:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x^1} &= 0, & \frac{\partial f}{\partial x^2} &= \tilde{a}, & \frac{\partial f}{\partial x^3} &= b, & \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^1} &= 0, & \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^2} &= a, \\ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^3} &= \tilde{b}, & \frac{\partial F}{\partial x^1} &= a, & \frac{\partial F}{\partial x^2} &= b + fa, & \frac{\partial F}{\partial x^3} &= c + fb. \end{aligned}$$

Замечание 2. Метрика (13) может быть преобразована в метрику (27)

постоянным преобразованием: $C = \left\| \begin{pmatrix} \delta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\|.$

Замечание 3. Обозначив $e^{2A} = f(x^3)$, и поменяв знак первой переменной, можно получить более удобную форму записи метрики (13):

$$ds^2 = f(x^3)(2dx^1 dx^3 + (dx^2)^2 + \Phi(x^1, x^2, x^3)(dx^3)^2)$$

с условием $\frac{\partial \Phi}{\partial x^1} = \frac{f'}{f}$.

Обобщая эти замечания и результаты, полученные ранее в [9] и [10] имеем теорему.

Теорема классификации. Риманова метрика трехмерного пространства имеет функционально абелевы матрицы связности тогда и только тогда, когда она постоянным преобразованием сводится к одному из следующих видов:

1. $ds^2 = b(x, y)(dx^2 + dy^2) + c(z)dz^2$, где $b(x, y)$ и $c(z)$ произвольные функции, а $R_{12} \neq 0$.

2. $ds^2 = f(z)(2dxdz + dy^2) + \Phi(x, y, z)dz^2$, где $\Phi = \Phi(x, y, z)$, $\Phi'_x = f'(z)$, а $R_{23} \neq 0$.

3. Или метрика ds^2 преобразованием координат $C \cdot C_0$ сводится к постоянной метрике, где преобразование C_0 определяется (28), а C – произвольное постоянное преобразование координат, а в этом случае все $R_{ij} = 0$, $i, j = 1, 2, 3$.

Пример 5. Метрика $ds^2 = z^2(2dxdz + dy^2) + 2(zx + \varphi(y, z))dz^2$ имеет своими матрицами связности матрицы:

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \frac{1}{z}E_{13}, \quad \Gamma_2 = \frac{1}{z}(-E_{12} + E_{23}), \quad \Gamma_3 \\ &= \frac{1}{z}E + \frac{\varphi'_y}{z^2}(E_{12} - E_{23}) + \left(\frac{\varphi'_z - x}{z^2} - \frac{2\varphi}{z^3}\right)E_{13} \end{aligned}$$

и ненулевым коэффициентом кривизны $R_{23} = \frac{\varphi''_{yy} - 1}{z^2}(-E_{12} + E_{23})$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мантуров О.В. Паланджянц Л.Ж. Мультипликативный интеграл и уравнения нулевой кривизны // Дифференциальная геометрия и алгебры Ли. М.: МОПИ, 1983. С. 11–18. Деп. в ВИНТИ 17.04.84. № 2384–84 деп.
2. Паланджянц Л.Ж. О геометрических приложениях мультипликативного интеграла// Некоторые приложения дифференциальной геометрии. М.: МОПИ., 1985. С. 94–117. Деп. в ВИНТИ 22.06.85. № 4531–85 деп.
3. Морозов В.В. О коммутативных матрицах // Учёные записки Казанского государственного университета. 1952. Т. 119. № 5. С. 17–20.
4. Dollard J., Friedman Ch. Product integration with application to differential equations. London: Addison-Wesley Publ. Comp. 1979. 254 p.
5. Петрова В.Т. Классификация диагональных римановых метрик с функционально абелевыми связностями // Инвариантные тензоры на однородных пространствах. М.: МОПИ. 1988. С. 118–139. Деп. в ВИНТИ 28.11.88 № 8355-В 88 деп.

6. Петрова В.Т. Классификация недиагональных римановых метрик с функционально абелевыми связностями // Дифференциальная геометрия и мультипликативный интеграл. МОПИ. М., 1989. С. 128–148. Деп. в ВИНТИ 17.05.89. № 3299-B89 деп.
7. Петрова В.Т. О некоторых классах римановых пространств с функционально абелевыми связностями // Однородные пространства и мультипликативный интеграл М.: МОПИ, 1990. С. 58–78. Деп. в ВИНТИ 12.04. 90. № 248-B90 деп.
8. Черкасова В.В. Мультипликативный интеграл в дифференциальной геометрии и прикладных задачах // Вестник Татарского государственного гуманитарно-педагогического университета. 2010. № 3 (21). С. 79–83.
9. Петрова В.Т., Сивиркина А.С. Проблема классификации диагональных римановых метрик с функционально абелевыми связностями // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2015. № 3. С. 15–24.
10. Петрова В.Т., Сивиркина А.С., Дмитриева М.Н. Проблема классификации недиагональных римановых метрик с функционально абелевыми связностями // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2015. № 4. С. 8–21.
11. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц, 5-е изд. М.: Физматлит, 2004. 560 с.
12. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1967. 664 с.

REFERENCES

1. Manturov O.V., Palandzhyants L.Zh. Mul'tiplikativnyi integral i uravneniya nulevoi krivizny [Multiply integral and equations of zero curvature] // Differentsial'naya geometriya i algebrы Li. M., MOPI, 1983. pp. 11–18. Dep. v VINITI 17.04.84. no 2384–84 dep.
2. Palandzhyants L.ZH. O geometricheskikh prilozheniyakh mul'tiplikativnogo integral [Geometric applications of the multiplicative integral] // Nekotorye prilozheniya differentsial'noi geometrii. M., MOPI, 1985. pp. 94–117. Dep. v VINITI 22.06.85. no 4531–85 dep.
3. Morozov V.V. O kommutativnykh matritsakh [On commutative matrices] // Uchenye zapiski Kazanskogo gosudarstvennogo universiteta. 1952. Vol. 119. no 5. pp. 17–20.
4. Dollard J., Friedman Ch. Product integration with application to differential equations. London: Addison-Wesley Publ. Comp. 1979. 254 p.
5. Petrova V.T. Klassifikatsiya diagonal'nykh rimanovykh metrik s funktsional'no abelevymi svyaznostyami [Classification of diagonal Riemannian metrics with Abelian functional connections] // Invariantnye tenzory na odnorodnykh prostranstvakh. M. MOPI, 1988. pp. 118–139. Dep. v VINITI 28.11.88. no 8355-V 88 dep.
6. Petrova V.T. Klassifikatsiya nedиаgonal'nykh rimanovykh metrik s funktsional'no abelevymi svyaznostyami // Differentsial'naya geometriya i mul'tiplikativnyi integral

- [Classification of off-diagonal Riemannian metrics with functionally Abelian connections // Differential geometry and multiplicative integral]. М., МОПИ, 1989. pp. 128–148. Dep. v VINITI 17.05.89. no 3299-V89 dep.
7. Petrova V.T. O nekotorykh klassakh rimanovykh prostranstv s funktsional'no abelevymi svyaznostyami [On some classes of Riemannian spaces with functionally Abelian connections] // Odnorodnye prostranstva i mul'tiplikativnyi integral М., МОПИ, 1990. pp. 58–78. Dep. v VINITI 12.04. 90. no 248-V90 dep.
 8. Cherkasova V.V. Mul'tiplikativnyi integral v differentsial'noi geometrii i prikladnykh zadachakh [The multiplicative integral in differential geometry and applications] // Vestnik Tatarskogo gosudarstvennogo gumanitarno-pedagogicheskogo universiteta. 2010. no 3 (21). pp. 79–83.
 9. Petrova V.T., Sivirkina A.S. Problema klassifikatsii diagonal'nykh rimanovykh metrik s funktsional'no abelevymi svyaznostyami [The problem of classification of diagonal Riemannian metrics with Abelian functional connections] // Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika. 2015. no 3. pp. 15–24.
 10. Petrova V.T., Sivirkina A.S., Dmitrieva M.N. Problema klassifikatsii nediagonal'nykh rimanovykh metrik s funktsional'no abelevymi svyaznostyami [The problem of classification of the off-diagonal Riemannian metrics with Abelian functional connections] // Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika. 2015. no 4. pp. 8–21.
 11. Gantmakher F.R. Teoriya matrits. 5-e izd [The theory of matrices. 5th ed.]. М., Fizmatlit, 2004. 560 p.
 12. Rashevskii P.K. Rimanova geometriya i tenzornyi analiz [Riemannian geometry and tensor analysis]. М., Nauka, 1967. 664 p.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Петрова Вера Тимофеевна – доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, профессор Московского физико-технического института;
e-mail: petrovavt@gmail.com

Дмитриева Мария Николаевна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры математики, физики и медицинской информатики, Рязанский государственный медицинский университет им. И.П. Павлова; e-mail: dmitrm05@mail.ru

Сивиркина Анна Сергеевна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры высшей математики и информатики, Рязанский институт (филиал) Московского университета машиностроения;
e-mail: SivirkinaAS@yandex.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Petrova Vera Timofeevna – doctor of pedagogical sciences, candidate of physical and mathematical sciences, professor of the Moscow Institute of Physics and Technology (State University);
e-mail: petrovavt@gmail.com

Dmitrieva Mariya Nikolaevna – candidate of pedagogical sciences, assistant professor of the Chair of Mathematics, Physics and Medical Informatics at the I.P. Pavlov Ryazan State Medical University;
e-mail: dmitrm05@mail.ru

Sivirkina Anna Sergeevna – candidate of pedagogical sciences, assistant professor of the Chair of Higher Mathematics and Informatics at the Ryazan Institute (Branch) of the Moscow State University of Mechanical Engineering (MAMI);
e-mail: SivirkinaAS@yandex.ru

БИБЛИОГРАФИЧЕСКАЯ ССЫЛКА

Петрова В.Т., Сивиркина А.С., Дмитриева М.Н. О классах римановых пространств с функционально абелевыми связностями // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2016. № 1. С. 15–30.
DOI: 10.18384/2310-7251-2016-1-15-30.

BIBLIOGRAPHIC REFERENCE

V. Petrova, M. Dmitrieva, A. Sivirkina On some classes of riemannian spaces with a functionally abelian connection // Bulletin of Moscow State Regional University. Series: Physics and Mathematics. 2016. no. 1. pp. 15–30.
DOI: 10.18384/2310-7251-2016-1-15-30.

РАЗДЕЛ II. ФИЗИКА

УДК 533.9

DOI: 10.18384/2310-7251-2016-1-31-43

УСКОРЕНИЕ ЭЛЕКТРОНОВ В ПОЛЕ СВЕТОВОЙ ВОЛНЫ В МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЕ

Красовицкий В.Б.¹, Бугримов А.Л.²

¹Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН
125047, г. Москва, Миусская пл., д.4, Российская Федерация

²Московский государственный областной университет
105005, г. Москва, ул. Радио, д. 10А, Российская Федерация

Аннотация. Обсуждается возможность использования «необыкновенной» световой волны для реализации линейного ускорения в плазме [1]. Показано, что необходимая для ускорения волна существует в условиях плазменного резонанса, когда фазовая скорость равна скорости света, а дрейф электронов поперек внешнего магнитного поля под действием силы Лоренца скомпенсирован электрическим полем волны. Отклонение частоты волны от резонанса сопровождается возникновением нелинейной дисперсии плазмы. Показано, что в этом случае решение системы «медленных» уравнений для амплитуд, полученное усреднением исходных уравнений по высокочастотному периоду волны, является уединенным импульсом (солитоном).

Ключевые слова: плазма, резонанс, фазовая скорость, скорость дрейфа, магнитное поле, сила Лоренца, нелинейная дисперсия плазмы, солитон.

V. Krasovitskiy¹, A. Bugrimov²

ACCELERATION OF ELECTRONS IN THE FIELD OF A LIGHT WAVE IN MAGNETOACTIVE PLASMA

¹*Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences,
Miusskaya pl. 4, 125047 Moscow, Russia*

²*Moscow State Regional University,
ul. Radio 10A, 105005 Moscow, Russia*

Abstract. The possibility of using an ‘extraordinary’ light wave for the implementation of linear acceleration in the plasma [1] is discussed. It is shown that a wave necessary for acceleration exists in the plasma resonance conditions when the phase velocity is equal to the speed of light and the drift of the electrons across the external magnetic field under the influence of the Lorentz force is compensated by the electric field of the wave. The deviation from the resonance frequency of the wave is accompanied by the emergence of nonlinear plasma dispersion. It is shown that in this case the solution of ‘slow’ equations for the amplitudes, obtained by averaging the initial equations for a high-frequency wave period, is a solitary pulse (soliton).

Keywords: plasma, resonance, phase velocity, drift velocity, magnetic field, Lorentz force, nonlinear dispersion plasma, soliton.

1. Введение

Разные способы ускорения заряженных частиц в плазме с помощью света могут быть условно сведены к двум различным методам, в которых ускорение осуществляется с помощью сил линейных или квадратичных по амплитуде поля. В первом случае необходимо обеспечить синхронизм по фазовой скорости между движением ускоряемой частицы и волной, радиальную и фазовую устойчивость в процессе ускорения, а ускоряющее электрическое поле должно иметь составляющую в направлении движения частицы [1].

Альтернативным «линейному» является ускорение заряда в поле плоской волны, распространяющейся вдоль внешнего магнитного поля в условиях циклотронного резонанса. При этом, если фазовая скорость волны равна скорости света, то ускорение отдельного электрона не сопровождается расстройкой резонанса с волной (авторезонанс [2–4]). Приращение энергии частицы в электрическом поле волны возникает поперек магнитного поля, а

продольное ускорение происходит под действием квадратичной по амплитуде поля силы Лоренца. Нелинейное насыщение амплитуды уединенного светового импульса возникает в результате разделения электронов и ионов плазмы и возникновения продольного кулоновского поля [5].

В работе [6] проанализирован процесс возбуждения электростатического поля и ускорения электронов в поле внешнего электромагнитного импульса ($E^{(0)} \sim en_p \lambda$, $E^{(0)}$ – амплитуда электрического поля, λ – длина волны, e – заряд электрона и n_p – плотность плазмы), распространяющегося в плазме со скоростью света под произвольным углом к постоянному магнитному полю. При этом оптимальные условия для нагрева плазмы соответствуют поперечному распространению.

Однако использованное в [6] приближение «фиксированной волны» нарушается в плотной плазме, когда обратное воздействие возбуждаемого в плазме тока на лазерный импульс приводит к необходимости учета дисперсии [7; 8]. Медленная (МН) и быстрая (БН) ветви необыкновенной волны в линейной плазме [7] представлены на рис.1. В области непрозрачности плазмы $\omega > \omega_{UB} = \sqrt{\omega_p^2 + \omega_B^2}$ (ω_p – ленгмюровская частота плазмы, ω_B – гирочастота частота электрона), где проявляется нелинейность плазмы, БН-волна является солитоном огибающей. Ускорение электронов поперек сильного магнитного поля до релятивистских энергий подтверждается численным моделированием этой области частот [8].

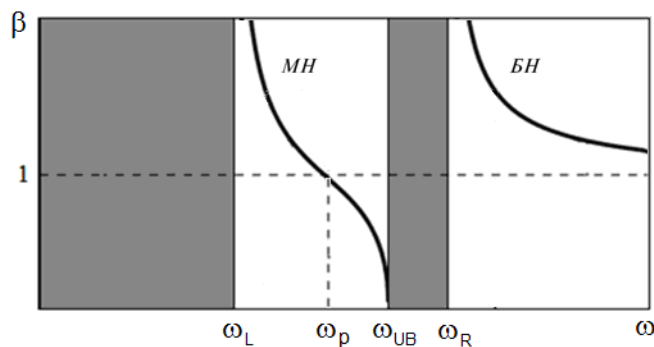


Рис. 1. Медленная (МН) и быстрая (БН) ветви необыкновенной волны в плазме;

$$\beta = v_{ph} / c, \quad \omega_{L,R} = \sqrt{\omega_p^2 + \omega_B^2} / 4 \mp \omega_B / 2, \quad \omega_{UB} = \sqrt{\omega_p^2 + \omega_B^2}, \quad \omega_p - \text{ленгмюровская частота плазмы и } \omega_B - \text{гирочастота электрона.}$$

В этой работе обсуждается возможность использования медленной нелинейной необыкновенной волны (МН) для реализации продольного ускорения в плазме. Из представленной на рис. 1 дисперсионной кривой следует, что необходимая для этого волна существует вблизи плазменного резонанса ($\omega = \omega_p$), где фазовая скорость равна скорости света. Показано, что в условиях, когда дрейф электронов поперек внешнего магнитного поля под действием силы Лоренца компенсируется электрическим полем волны, самосогласованная система нелинейных уравнений упрощается к одномерной.

Отклонение частоты волны от резонанса ($\omega \neq \omega_p$) сопровождается раскачкой продольно-поперечных колебаний. Аналитическое решение, полученное для достаточно сильного магнитного поля ($|\omega - \omega_p| \ll \omega_B$), является солитоном огибающей с групповой скоростью, близкой к скорости света (рис. 2).

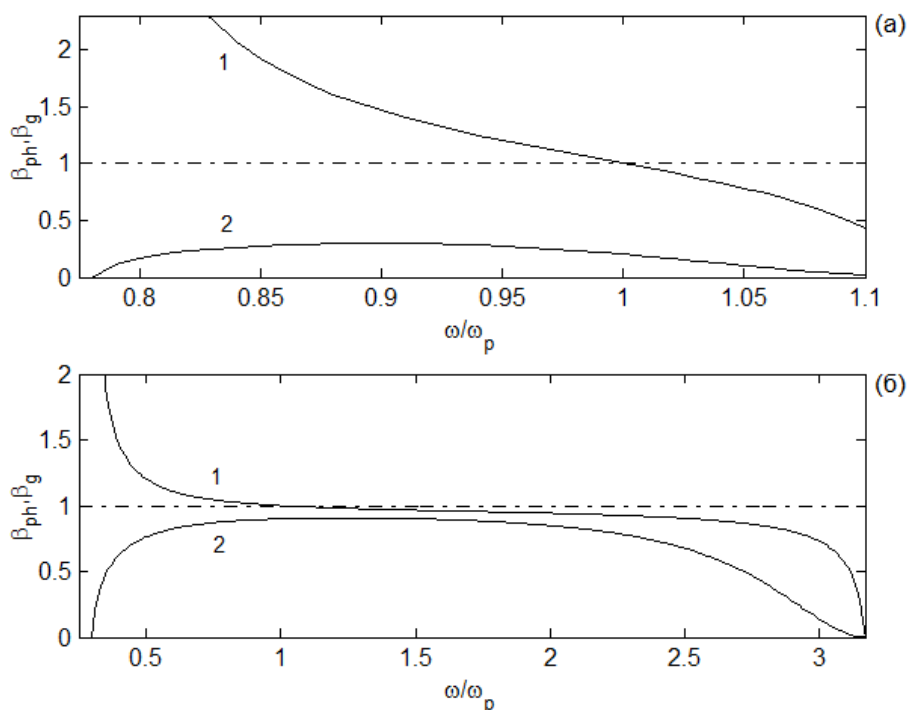


Рис. 2. Фазовая скорость β_{ph} (1) и групповая скорость β_g (2) медленной необыкновенной волны в плазме для: а) $G = 0.5$; б) $G = 3$.

Дисперсионные свойства плазмы в поперечном магнитном поле обсуждаются в разделе 2. Решение нелинейной автомодельной системы уравнений найдено в разделах 3 и 4, а солитонное решение «медленного» уравнения огибающей получено в разделе 5.

2. Медленная необыкновенная волна

Рассмотрим эллиптически поляризованную волну, распространяющуюся в плазме поперек внешнего магнитного поля $\mathbf{B}_0 = (0, B_0, 0)$, и предположим, что магнитное поле волны $\mathbf{B}$ ориентировано вдоль $\mathbf{B}_0$, а электрическое поле $\mathbf{E} = (E_x, 0, E_z)$ поляризовано в плоскости (x, z) .

Самосогласованная система уравнений включает в себя уравнение Максвелла для потенциала [8]:

$$\frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} = -\frac{4\pi e}{c} n v_x, \quad (1)$$

кулоновского поля:

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} + v_z \frac{\partial E_z}{\partial z} = -4\pi e n_0 v_z, \quad (2)$$

и релятивистских уравнений гидродинамики для электронов плазмы:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) p_x &= e E_x - e \beta_z (B_y + B_0), \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) p_z &= e E_z - e \beta_x (B_y + B_0), \end{aligned} \quad (3)$$

где $E_x = -\partial A_x / \partial t$ и $B_y = \partial A_x / \partial z$ – компоненты электромагнитной составляющей волны; p , $\gamma = \sqrt{1 + p^2 / m^2 c^2}$ и $v = p / m \gamma = c \beta$ – импульс, энергия и скорость электрона.

Из уравнений (2) и (3) следует интеграл импульса:

$$p_x + \frac{e}{c} A_x - \frac{E_z B_0}{4\pi c n_0} = \frac{e}{c} A_x(t_0, z_0), \quad (4)$$

учитывающий дрейф электронов вдоль координаты x в скрещенных E_z и B_0 полях (эффект Холла в плазме [9]).

Для малых линейных возмущений $\sim \exp i(\omega t - kz)$ из уравнений (1)–(3) следуют соотношения:

$$v_z = -i \frac{\omega_B \omega}{\omega^2 - \omega_p^2} v_x, \quad v_x = -\frac{\omega^2 - \omega_p^2}{\omega^2 - \omega_{UB}^2} \frac{e A_x}{mc},$$

$$E_z = -\frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_{UB}^2} \frac{\omega_B A_x}{c},$$
(5)

где $\omega_p = \sqrt{4\pi e^2 n_0 / m}$, $\omega_B = eB_0 / mc$ и, $\omega_{UB} = \sqrt{\omega_p^2 + \omega_B^2}$ – ленгмюровская, циклотронная и верхнегибридная частоты.

Зависимость показателя преломления N медленной необыкновенной волны от частоты ω определяется дисперсионным уравнением [7]:

$$N^2 = 1 - \frac{\omega_p^2 (1 - \omega_p^2 / \omega^2)}{\omega^2 - \omega_{UB}^2},$$
(6)

а фазовая скорость волны равна:

$$v_{ph} = \omega / k = \beta c, \quad \beta \equiv \beta_{ph} = N^{-1}.$$

Левая, правая и внутренняя границы областей непрозрачности плазмы соответственно равны: $\omega_{L,R} = \sqrt{\omega_p^2 + \omega_B^2 / 4} \mp \omega_B / 2$ и ω_{UB} , а в плотной плазме $\omega_p \gg \omega_B$ реализуется асимптотика $\omega_{UB} - \omega_L \approx \omega_B / 2$.

Групповая скорость волны $v_g = d\omega / dk$ определяется формулой:

$$\frac{c}{v_g} = \beta \left[1 + \frac{\omega_p^2 \omega_B^2}{(\omega^2 - \omega_{UB}^2)^2} \right]$$
(7)

Графики функций $\beta(\omega)$ и $\beta_g(\omega) = v_g(\omega) / c$ представлены на рис. 2. В условиях плазменного резонанса $\omega = \omega_p$ фазовая скорость волны равна скорости света, $\beta = 1$.

Вблизи резонанса $|\omega_p^2 - \omega^2| \ll \omega_B^2$ на дисперсионной кривой существует «плато», где фазовая скорость близка к световой и реализуются следующие асимптотики формул (6) и (7):

$$(\beta^{-2} - 1) \omega_B^2 / \omega_p^2 = 1 - \omega_p^2 / \omega^2,$$

$$\beta_g \beta = \omega_B^2 / \omega_{UB}^2.$$
(8)

Соответствующая (8) область параметров плазмы (сильного магнитного поля) исследована ниже в разделах (3)–(5) в нелинейном приближении.

3. Одномерная световая волна

Переходя в формулах (1)–(3) к автомодельной переменной $\psi = \omega_p(t - z/v_{ph})$, получаем следующую систему нелинейных уравнений [6]:

$$\begin{aligned} a' &= \beta \left(\zeta - \beta G \frac{P_x}{R} \right), \\ \zeta' &= \frac{\beta}{R} \frac{1 + P_x^2 - a^2}{\beta a + R}, \\ (1 - \beta^{-2}) A'' - \beta \frac{P_x}{R} &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\beta = v_{ph}/c$ – фазовая скорость волны, $P_{x,z} = p_{x,z}/mc$ – безразмерный импульс электрона, а остальные безразмерные переменные есть:

$$\begin{aligned} A &= eA_x / mc^2, \quad \zeta = -eE_z / mc\omega_p, \quad a = \gamma - \beta P_z, \\ P_x &= -A - G\zeta, \quad R = \sqrt{a^2 - (1 - \beta^2)(1 + P_x^2)}, \quad G = \omega_B / \omega_p. \end{aligned}$$

Интеграл энергии системы (9) имеет вид:

$$\frac{1}{2} \left[(1 - \beta^{-2}) A'^2 + \zeta'^2 \right] + \frac{1 + a^2 + P_x^2}{a + \beta R} = H_0, \quad (10)$$

где H_0 – постоянная интегрирования.

Система (9) упрощается для волны, распространяющейся со скоростью света $\beta = 1$:

$$P_x = -A - G\zeta = 0, \quad (11)$$

когда действие на электроны электрического поля eE_x скомпенсировано силой Лоренца $(e/c)[vB_0]_x$, и плазма находится в поперечном равновесии с волной. При этом движение электронов описывается следующей системой нелинейных уравнений:

$$a' = \zeta, \quad \zeta' = (1 - a^2) / 2a^2 \quad (12)$$

Интегрируя (12), получаем уравнение:

$$a' = \sqrt{H - (1 + a^2) / 2a_m}, \quad (13)$$

решение которого с помощью подстановки:

$$a = H + \sqrt{H^2 - 1} \cos \phi, \quad H = (1 + a_m^2) / 2a_m, \quad (14)$$

приводится к неполному эллиптическому интегралу второго рода:

$$\psi = 2\sqrt{a_m} \left[E(k) + E(\phi/2, k) \right], \quad k = \sqrt{a_m - a_m^{-1}}, \quad (15)$$

где $E(x, k) = \int_0^x \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x} dx$ и $E(k) = E(\pi/2, k)$. Минимальная и максимальная и амплитуды соответственно равны $a_{max} = a_m$ и $a_{min} = a_m^{-1}$, а нелинейный период колебаний есть:

$$T = 4\sqrt{a_m} E(k). \quad (16)$$

Колебания малой амплитуды $a_1 = a_m - 1 \ll 1$ близки к гармоническим с периодом:

$$T \cong 2\pi [1 + (3/16)a_1^2], \quad (17)$$

соответствующим формуле (8).

Периодические функции $a(\psi)$ и $\zeta(\psi)$ представлены на рис. 3.

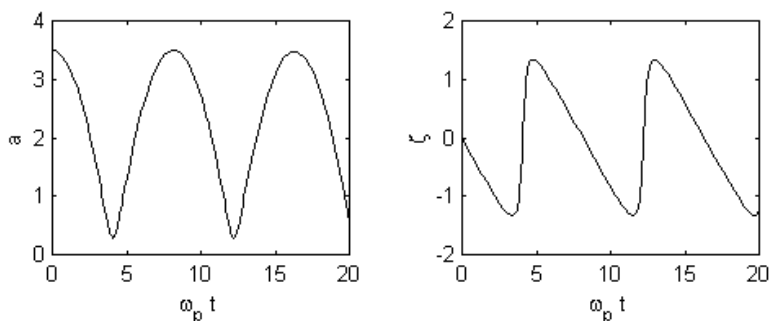


Рис. 3. Одномерная необыкновенная волна в плазме, $\beta = 1$ и $a_m = 3.5$.

4. «Квазисветовая» волна

Отклонение фазовой скорости волны от скорости света сопровождается возникновением поперечных колебаний электронов $|P_x| > 0$. В предельном случае $|1 - \beta^{-2}| \ll 1$ и сильном внешнем магнитном поле $G^2 \gg 1$, опуская в (9) слагаемые $P_x^2 \ll a^2 - 1$ и полагая $R \approx a$, получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} a' &= \zeta + \frac{G}{a}(A + G\zeta), \quad \zeta' = \frac{1 - a^2}{2a^2}, \\ (1 - \beta^{-2})A'' + \frac{1}{a}(A + G\zeta) &= 0, \end{aligned} \quad (18)$$

обобщающую формулы (12).

Исключая векторный потенциал A из последнего уравнения (18) и используя равенство $(a\zeta)'' = -a' + a''\zeta$, находим:

$$(1 - \beta^{-2})(aa''' + 3a''a') + (\mu a^{-3} + 1)a' = [1 + (1 - \beta^{-2})a'']\zeta, \quad (19)$$

где $\mu = (1 - \beta^{-2})G^2$. В сильном магнитном поле $G^2 \gg 1$ $\mu \approx 1$, опуская в (19) старшие производные, получаем уравнение:

$$\left[(\mu a^{-3} + 1) a' \right]' = (1/2)(a^{-2} - 1), \quad (20)$$

которое в предельном случае $\mu \rightarrow 0$ совпадает с (12).

Подстановка $y = 1 - a^{-2}$ преобразует (20) в уравнение:

$$\left[\left[\mu + (1 - y)^{-3/2} \right] y' \right]' = -y. \quad (21)$$

Разложим левую часть (21) по степеням $y \ll 1$:

$$\left[(\mu + 1)y + \frac{3}{4}y^2 + \frac{5}{8}y^3 \right]' = -y \quad (22)$$

и представим решение в виде:

$$y = y_1 \cos \Omega \psi + y_2 \cos 2\Omega \psi \quad (23)$$

Далее, приравнявая коэффициенты для гармоник частоты Ω , получаем систему алгебраических уравнений для амплитуд:

$$\begin{aligned} \Omega^2 \left[(1 + \mu)y_1 + (3/4)y_1 y_2 + (15/32)y_1^3 \right] &= y_1, \\ 4\Omega^2 \left[(1 + \mu)y_2 + (3/8)y_1^2 \right] &= y_2, \end{aligned} \quad (24)$$

определяющую частоту нелинейных колебаний:

$$\Omega^2(u_1) = \frac{1}{1 + \mu} \left[1 - \frac{3}{32} \frac{(1 + 5\mu)}{(1 + \mu)^2} y_1^2 \right]. \quad (25)$$

Возвращаясь к исходной переменной $y_1 = 2a_1$ и $\Omega = \omega/\omega_p$, находим малую нелинейную добавку к частоте необыкновенной волны:

$$\omega^2(a_1) = \frac{\omega_p^2}{1 + \mu} \left[1 - g(\mu)a_1^2 \right], \quad g(\mu) = \frac{3}{8} \frac{1 + 5\mu}{(1 + \mu)^2}, \quad (26)$$

которое в предельном случае $\mu \ll 1$ совпадает с формулой (17).

5. Солитон огибающей

Нелинейное дисперсионное уравнение (26) может быть использовано для вывода нелинейного дифференциального уравнения для амплитуды слабо нелинейного волнового пакета:

$$A(t, z) = A(\xi) \exp[i\psi(t, z)], \quad \xi = z - v_g t, \quad (27)$$

где v_g – групповая скорость огибающей волны (7). Полагая $\beta = \omega / ck$, представим эту формулу, определяющую зависимость частоты ω от волнового числа k и амплитуды поля a_1 , в виде:

$$(1 + G^2)\omega^2 - G^2 c^2 k^2 = \omega_p^2 \{1 - g[\mu(\omega, k)]a_1^2\}. \quad (28)$$

Далее, следуя работе [8], представим волновое число и частоту в виде:

$$k = k_0 + \Delta k, \quad \omega = \omega_0 + \Delta \omega, \quad \Delta \omega = v_g \Delta k \quad (29)$$

и разложим линейную часть уравнения по степеням Δk :

$$-v_g v_{ph} \Delta k^2 + \omega_0^2 (1 + \mu_0) - \omega_p^2 (1 - g_0 a_1^2) = 0, \quad (30)$$

где $v_g v_{ph} = c^2 \omega_B^2 / \omega_{UB}^2$ и $v_{ph} = \omega_0 / k_0$ – групповая и фазовая скорости волны, а остальные обозначения есть:

$$\mu_0 = (1 - c^2 k_0^2 / \omega_0^2) G^2, \quad g_0 \equiv g(\mu_0). \quad (31)$$

Нелинейное дифференциальное уравнение для амплитуды волнового пакета (волны огибающей) может быть найдено с помощью (30). Полагая $\Delta k = id / d\xi$, получаем уравнение для «медленной» амплитуды волны:

$$\frac{d^2 a_1}{d\xi^2} + \frac{1}{v_g v_{ph}} [\omega_0^2 (1 + \mu_0) - \omega_p^2 + \omega_p^2 g_0 a_1^2] a_1 = 0. \quad (32)$$

Рассмотрим область частот ω_0 и волновых чисел k_0 :

$$\Omega^2 = \omega_p^2 - \omega_0^2 (1 + \mu_0) > 0, \quad g_0 > 0, \quad (33)$$

и представим (33) в безразмерных переменных:

$$Y'' - Y + Y^3 = 0, \quad Y = \sqrt{g_0} \frac{\omega_p}{\Omega} a_1, \quad X = \frac{\Omega}{\sqrt{v_{ph} v_g}} \xi. \quad (34)$$

Решение уравнения (34), удовлетворяющее граничному условию $Y' = Y = 0$, является солитоном $Y = \text{ch}^{-1}(X)$,

$$a_1(\xi) = \frac{\Omega}{\omega_p \sqrt{g_0}} \text{ch}^{-1} \left(\frac{\Omega}{\sqrt{v_{ph} v_g}} \xi \right). \quad (35)$$

6. Заключение

Распространяющаяся в плазме поперек внешнего магнитного поля эллиптически поляризованная медленная необыкновенная волна является суперпозицией электростатической и электромагнитной мод, связанных из-за вращения электронов. Анализ волноводных свойств плазмы на основе дисперсионного уравнения (6) показал, что в конечном магнитном поле $\omega_B > 0$

вблизи точки плазменного резонанса $\omega = \omega_p$ на дисперсионной кривой $\beta(\omega)$ существует «плато», где фазовая скорость волны близка к скорости света (рис. 2). Эта область расширяется с увеличением параметра $G = \omega_B / \omega_p$, причем в области резонанса групповая скорость волны приближается к световой.

Резонансные электроны ускоряются в поле волны и нелинейность уравнений движения проявляется уже при малой амплитуде поля. Поэтому проблема взаимодействия резонансных электромагнитных импульсов с плазмой выходит за рамки линейной теории и требует нелинейного рассмотрения в каждом диапазоне параметров волны и плазмы (9), (19) и (32).

В случае, когда действие электрического поля волны на электроны скомпенсировано поперечной проекцией силы Лоренца, плазма находится в поперечном равновесии с волной (11). Поэтому найденное периодическое автомодельное решение системы уравнений (9) представляет собой одномерную нелинейную электромагнитную волну (15), распространяющуюся поперек магнитного поля со скоростью света. Электроны ускоряются продольным полем волны до релятивистских энергий и в режиме сильной нелинейности форма колебаний значительно отличается от гармонической (рис. 3).

Если фазовая скорость волны отличается от скорости света, то в плазме возникают нелинейные продольно-поперечные колебания. Найденное асимптотическое солитонное решение для волны огибающей (35) существует в сильном магнитном поле вблизи плазменного резонанса $|\omega - \omega_p| \ll \omega_B$, когда фазовая скорость волны близка к скорости света.

ЛИТЕРАТУРА

1. Файнберг Я.Б. Ускорение заряженных частиц с помощью света // Физика плазмы и проблемы управляемого термоядерного синтеза. Вып. 3. Киев: Наукова Думка, 1963. С. 300.
2. Коломенский А.А., Лебедев А.Н. Авторезонансное движение частицы в плоской электромагнитной волне // Доклады АН СССР. 1962. Т. 145. С. 1259.
3. Коломенский А.А., Лебедев А.Н. Резонансные явления при движении частицы в плоской волне // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1963. Т. 44. С. 26.

4. Давыдовский В.Я. О возможности резонансного ускорения заряженных частиц электромагнитными волнами в постоянном магнитном поле // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1963. Т. 43. С. 886.
5. Красовицкий В.Б., Прудских В.В. Автрезонансный солитон в плазме // Физика плазмы. 1994. Т. 20. С. 564.
6. Krasovitskii V., Dorofeenko V., Sotnikov V., Bauer B. Interaction of powerful laser pulse with magnetized plasma // Phys. Plasmas. 2004. Vol. 11. p. 724.
7. Ахиезер А.И. и др. Электродинамика плазмы. М.: Наука, 1974. С. 192, 393.
8. Krasovitskiy V., Turikov V., Sotnikov V. Nonlinear dispersion of resonance extraordinary wave in a plasma with strong magnetic field // Phys. Plasmas. 2007. Vol. 14. pp. 092108-1-10.
9. Красовицкий В.Б., Фомин Г.В. Транспортировка электронных сгустков в магнитоактивной плазме // Физика плазмы. 1991. Т. 17. С. 1400.

REFERENCES

1. Fainberg YA.B. Uskorenie zaryazhennykh chastits s pomoshch'yu sveta [The acceleration of charged particles by means of light] // Fizika plazmy i problemy upravlyаемого termoyadernogo sinteza. Vyp. 3. Kiev, Naukova Dumka, 1963. p. 300.
2. Kolomenskii A.A., Lebedev A.N. Avtorezonansnoe dvizhenie chastitsy v ploskoi elektromagnitnoi volne [Autoresonance motion of a particle in a plane electromagnetic wave] // Doklady AN SSSR [Reports of SA USSR]. Vol. 145. 1962. p. 1259.
3. Kolomenskii A.A., Lebedev A.N. Rezonansnye yavleniya pri dvizhenii chastitsy v ploskoi volne [Resonance phenomena in the motion of a particle in a plane wave] // Zhurnal eksperimental'noi i teoreticheskoi fiziki [Journal of experimental and theoretical physics]. Vol. 44. 1963. p. 26.
4. Davydovskii V.YA. O vozmozhnosti rezonansnogo uskoreniya zaryazhennykh chastits elektromagnitnymi volnami v postoyannom magnitnom pole [On the possibility of resonant acceleration of charged particles by electromagnetic waves in a constant magnetic field] // Zhurnal eksperimental'noi i teoreticheskoi fiziki [Journal of experimental and theoretical physics]. Vol. 43. 1963. p. 886.
5. Krasovitskii V.B., Prudskikh V.V. Avtorezonansnyi soliton v plazme [Autoresonance soliton in a plasma] // Fizika plazmy [Physics of plasmas]. Vol. 20. 1994. p. 564.
6. Krasovitskii V., Dorofeenko V., Sotnikov V., Bauer B. Interaction of powerful laser pulse with magnetized plasma // Phys. Plasmas. 2004. Vol. 11. p. 724.
7. Akhiezer A.I et al. Elektrodinamika plazmy [Plasma electrodynamics]. M., Nauka, 1974. pp. 192, 193.

8. Krasovitskiy V., Turikov V., Sotnikov V. Nonlinear dispersion of resonance extraordinary wave in a plasma with strong magnetic field // Phys. Plasmas. 2007. Vol. 14. pp. 092108-1-10.
9. Krasovitskii V.B., Fomin G.V. Transportirovka elektronnykh sgustkov v magnitoaktivnoi plazme [Transport of electron bunches in a magnetoactive plasma] // Fizika plazmy [Physics of plasmas]. Vol. 17. 1991. p. 1400.

ИНФОМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Красовицкий Валерий Борисович – доктор физико-математических наук, профессор, институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН;

e-mail: krasovit@mail.ru

Бугримов Анатолий Львович – доктор технических наук, профессор, Московский государственный областной университет;

e-mail: al.bugrimov@mgou.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Krasovitskiy Valerii Borisovich – doctor of physical and mathematical sciences, professor at the Keldysh Institute of Applied Mathematics, RAS;

e-mail: krasovit@mail.ru

Bugrimov Anatolii L'vovich – doctor of technical sciences, professor at the Moscow State Regional University;

e-mail: al.bugrimov@mgou.ru

БИБЛИОГРАФИЧЕСКАЯ ССЫЛКА

Красовицкий В.Б., Бугримов А.Л. Ускорение электронов в поле световой волны в магнитоактивной плазме // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2016. № 1. С. 31–43.

DOI: 10.18384/2310-7251-2016-1-31-43.

BIBLIOGRAPHIC REFERENCE

V. Krasovitskiy, A. Bugrimov Acceleration of electrons in the field of a light wave in magnetoactive plasma // Bulletin of Moscow State Regional University. Series: Physics and Mathematics. 2016. no. 1. pp. 31–43.

DOI: 10.18384/2310-7251-2016-1-31-43.

УДК 535.212+533.9.082.5+537.529+536.248.2+536.42+536.44+537.531:535.2

DOI: 10.18384/2310-7251-2016-1-44-59

ПОРОГ ПРОБОЯ СКВОЗНЫХ ОТВЕРСТИЙ В МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ФОЛЬГАХ МОЩНЫМ ЛАЗЕРНЫМ ИЗЛУЧЕНИЕМ (ЧАСТЬ 1)

**Калашников Е.В.¹, Бугаев А.А.², Кантор М.Ю.³, Куприенко Д.В.³,
Чикиряка А.В.³**

¹Московский государственный областной университет

105005, г. Москва, ул. Радио, д. 10А, Российская Федерация

²Центр прикладных исследований, Олд Доминьон Университет, 12050, Джефферсон
Авеню, Ньюпорт Ньюс, штат Вирджиния, VA 23606, США

³Физико-технический институт им А.Ф. Иоффе

194021, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., д. 26, Российская Федерация

Аннотация. Экспериментально изучается энергетический порог пробоя сквозных отверстий в металлических фольгах разной толщины мощным лазерным излучением. Выявляются свойства вещества фольг, характерные для фазовых переходов второго рода «жидкий металл-газ». Контролирующим параметром порога пробоя является выходное (пороговое) отверстие с теневой стороны мишени, возникающее при минимальной энергии импульса излучения, необходимой лишь только для возникновения выходного отверстия для данной толщины фольги и энергия импульса лазерного излучения.

Ключевые слова: мощное лазерное излучение, лазерный пробой, пороговый пробой, фазовый переход второго рода «жидкий металл-газ», теплопроводность, металлические фольги.

THRESHOLD BREAKDOWN OF THROUGH HOLES IN METAL FOILS BY HIGH-POWERFUL LASER RADIATION (PART 1)

E. Kalashnikov¹, A. Bugayev², M. Kantor³, D. Kouprienko³, A. Chikiryaka³

¹Moscow State Regional University

ul. Radio 10A, 105005 Moscow, Russia

²Applied Research Center, Old Dominion University, VA 23606 USA

³loffe Institute, Russian Academy of Sciences, ul. Politekhnikeskaya 26, 19402 St Petersburg, Russia

Abstract. The energy of a threshold breakdown of through holes in metal foils of different thicknesses by high-power laser radiation is investigated experimentally. Properties of the foil materials, which are typical of 'liquid metal–gas' phase transitions of the second kind, are determined. A controlling parameter of the threshold breakdown is a through (threshold) hole on the shady side of the target, which appears at a minimum pulse energy needed only for the emergence of an outlet for a given foil thickness, and the laser pulse energy.

Key words: high-power laser radiation, laser induced breakdown, threshold breakdown, 'liquid metal–gas' phase transition of second kind, thermal conductivity, metal foils.

Введение

Воздействие мощного лазерного излучения на металлические (диэлектрические и полупроводниковые) мишени приводит к образованию кратеров, сквозных отверстий и удалению вещества из мишени – к абляции [1–14]. Особую роль при этом играют состояния вещества, в которые оно последовательно переходит: «твёрдое тело, жидкость, газ, плазма».

Чтобы контролировать такие возможные состояния, необходимо знать количество энергии, поглощённой веществом. Как правило, это последнее представляет самую большую проблему в задачах взаимодействия мощного лазерного излучения с веществом, поскольку для этого необходимо знать коэффициент поглощения (который, в свою очередь, зависит от температуры и, соответственно, от состояния вещества) и саму температуру.

Практически, измерять и контролировать в процессе эксперимента температуру состояний вещества не удаётся. В лучшем случае решается тепловая задача, в которой по заданному количеству подводимой энергии определяют распределение температуры в поверхности и по нормали к ней [10–13; 15] и сопоставляют с экспериментальными результатами. При малых интенсивностях, когда возмущение электронной подсистемы мало, такой подход позволяет проанализировать и более сложные задачи [16; 17]. Кроме того, плохо определены (или вовсе отсутствуют) экспериментальные характеристики вещества при воздействии на него лазерного излучения, показывающие, в частности, что вещество находится при критической температуре. Тем не менее, в некоторых случаях удаётся выявить

характеристики вещества, указывающие на близость к критической температуре [14], и даже фиксировать границы спинодали в переходе «жидкость-газ» [3].

Цель работы – найти характеристики вещества, взаимодействующего с мощным лазерным излучением, которые бы указывали на наличие фазового перехода второго рода «жидкий металл–газ».

Настоящая работа посвящена экспериментальному исследованию порога пробоя сквозных отверстий в металлических фольгах под воздействием одиночного импульса с минимальной энергией такой, чтобы её хватило только на возникновение сквозного отверстия в фольге заданной толщины. Такая постановка задачи определила требования к излучающему устройству – длительности импульса и мощности излучения.

1. Схема эксперимента

Источником излучения служил рубиновый лазер с длиной волны $\lambda = 694$ нм в режиме свободной генерации. Длительность импульса фиксировалась: $\tau = 1$ мс. Луч лазера фокусировали короткофокусной линзой (с фокусным расстоянием $F = 20$ мм) на поверхность металлической мишени в пятно диаметром $f = 50$ мкм. Плотность потока лазерного излучения в экспериментах варьировалась в пределах $10^6 \div 10^8$ Вт/см², что, как известно [9–13], лежит в пределах прозрачности испаряемого вещества. Для регистрации сквозного пробоя, вслед за мишенью ставили детектор в камере Обскура. Детектор работал в режиме синхронизации с лазером. При сквозном пробое фольг регистрировали время задержки импульса. Мощность излучения фиксировали и регистрировали другим фотодетектором. Вариация же этой мощности (для сохранения неизменной временной структуры импульса) осуществлялась градуированными светофильтрами. Пробой изучали в атмосфере воздуха при нормальном давлении и комнатной температуре.

Образцы в виде металлических фольг разной толщины помещались в обойму. Обойма размещалась на трехкоординатном оптическом столике. Тем самым, в течение одного эксперимента удавалось просмотреть пробиваемость фольг разной толщины практически в одних и тех же условиях.

Металлические фольги готовили из меди чистотой 99,999 вес % основного компонента, из нержавеющей стали, никеля и алюминия. Для очистки

поверхности приготовленные фольги обезжиривались и отжигались в вакууме при 200°C . Возникшие отверстия изучали под оптическим и электронным микроскопами. Для рассмотрения формы, структуры сквозного отверстия и нахождения массы, поглотившей энергию излучения, готовили продольные (вдоль оси отверстия) шлифы.

2. Результаты

Результаты экспериментов приведены на рис. 1–6. Полученные сквозные отверстия, существенно разнятся как по форме, так и по соотношению входных и выходных отверстий (рис. 1). При малых толщинах фольг сквозное отверстие имеет чашеобразную форму, большим диаметром обращённую к падающему излучению (рис. 1а). При увеличении толщины фольги форма сквозного отверстия (рис. 1б) меняется и приобретает форму вытянутого усечённого конуса, образующей которого можно считать гиперболу.

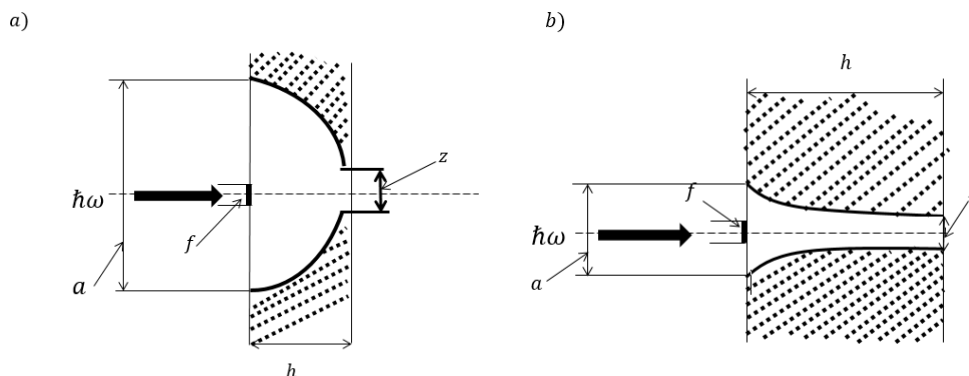


Рис.1. Форма сквозных пороговых отверстий (вдоль оси отверстия) для тонких (а) и толстых (б) фольг; a и z – диаметр входного и выходного отверстий, соответственно, h – толщина мишени, f – фокусное пятно.

В тонких и толстых фольгах характер пробоя существенно различен. В тонких фольгах энергия излучения при её пороговых значениях тратится на образование большой поверхности входного отверстия, существенно превышающего размер фокусного пятна. В толстых фольгах размер входного отверстия не очень превышает размер фокусного пятна. Такое же отличие и в

выходных отверстиях в тонких и толстых фольгах. Рис. 2 демонстрирует значения диаметра z , измеренного (с теневой стороны) на выходе конического отверстия.

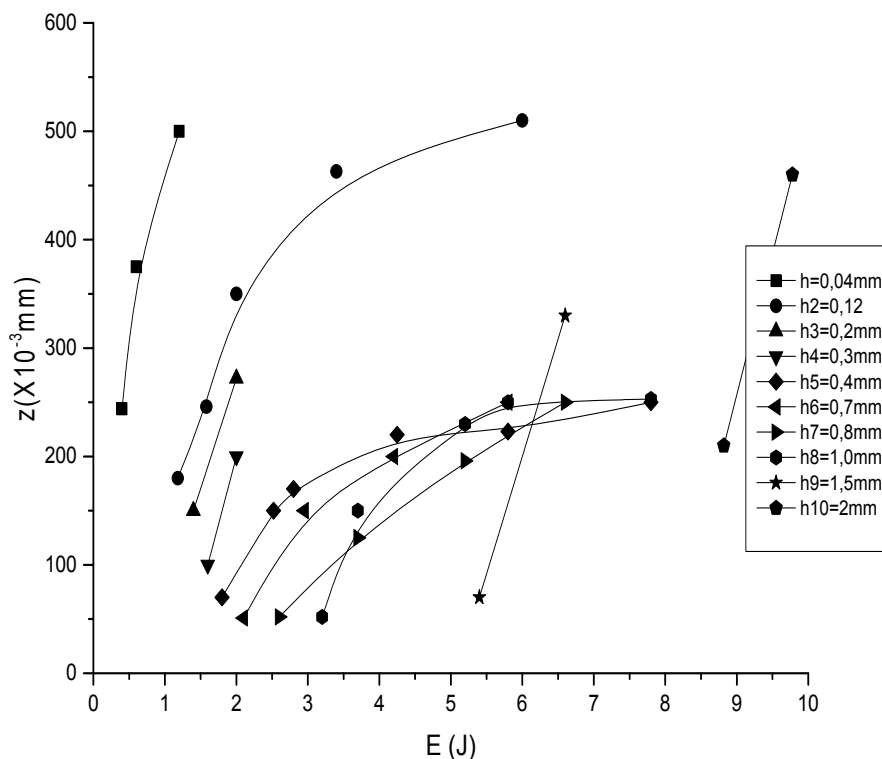


Рис. 2. Диаметр выходного отверстия в зависимости от энергии падающего излучения для разных толщин h фольг.

Зависимость $z = z(E)$ на рис. 2 аналогична по форме зависимости входного диаметра от энергии падающего излучения для несквозных отверстий [2; 9–13]. Но главная особенность зависимостей, представленных на рис. 2, в том, что они ограничиваются снизу минимальными выходными отверстиями, отвечающими пороговым значениям энергии – минимальной энергии, необходимой, чтобы только пробить фольгу заданной толщины (рис. 2 и рис. 3).

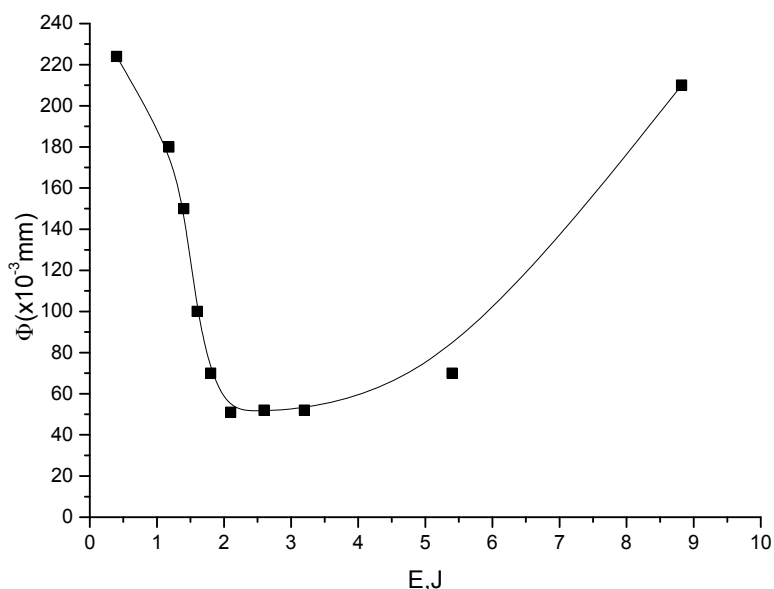


Рис. 3. Зависимость порогового диаметра выходного отверстия Φ от пороговой энергии E_p для меди.

Уменьшение энергии в импульсе лазерного излучения для каждой толщины фольги приводит к тому, что, наконец, сквозное отверстие не пробивается (рис. 2), хотя кратер и глубокая лунка образуются. Диаметр выходного отверстия z , при минимально возможной энергии, ниже которой пробой не происходит, является пороговым диаметром $\Phi = z(E_p)$, соответствующим пороговой энергии пробоя $\mathcal{E}_p$. Огибающая пороговых диаметров $z(E = E_p) = \Phi(E_p) = \Phi$ против энергий пороговых значений приведена на рис. 3. На рис. 4 приведена зависимость порогового диаметра от толщины фольги, $\Phi = \Phi(h)$ для меди и нержавеющей стали, имеющих разные теплопроводности. В зависимостях $\Phi = \Phi(\mathcal{E}_p)$ и $\Phi = \Phi(h)$ обнаруживаются две области с противоположными тенденциями и одна промежуточная область между ними.

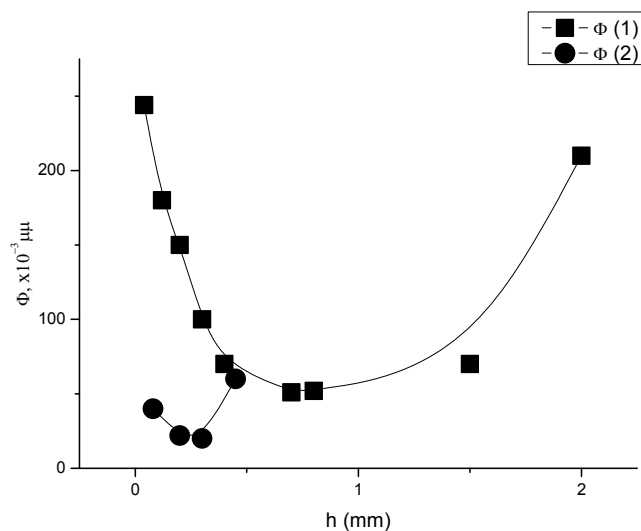


Рис. 4. Диаметр порогового отверстия в зависимости от толщины фольги: для меди (Φ1) и для нержавеющей стали (Φ2).

Учёт времени задержки импульса позволил измерить скорость прохождения импульса через тело фольги или, что одно и то же, скорости продвижения некоторого образования в виде сэндвича «газ–жидкость–твёрдое тело» через толщу фольги (рис. 5).

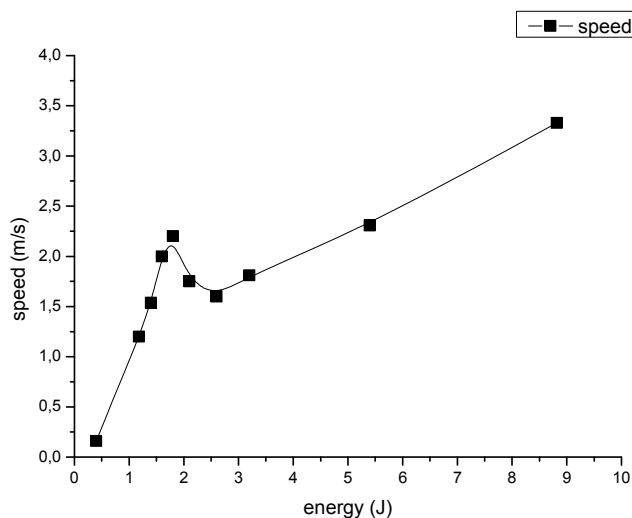


Рис.5. Скорость перемещения фронта «газ–жидкость–твёрдое тело» в зависимости от пороговой энергии пробоя.

Скорость продвижения такого сэндвича «газ – жидкость – твёрдое тело» в зависимости от энергии лазерного импульса при толщинах фольг (0,2–0,8 мм) претерпевает излом.

Наконец, перестраивая отношение пороговой энергии к массе отверстия, поглотившей её при пороговом диаметре $\left(\frac{E_p}{m}\right)$ в отношении к падающей энергии излучения E , получаем зависимость, приведённую на рис. 6.

Если бы можно было выразить адекватно E через температуру T , то отношение $\left(\frac{E_p}{m}\right)$ к E аналогично теплоёмкости C_p . Поведение C_p в зависимости от температуры при фазовом переходе второго рода имеет пикообразный (λ -образный) характер [18]. Так что вид $\left(\frac{E_p}{m}\right)$ в зависимости от падающей энергии излучения вполне может служить показателем фазового перехода второго рода в системе «жидкий металл – газ».

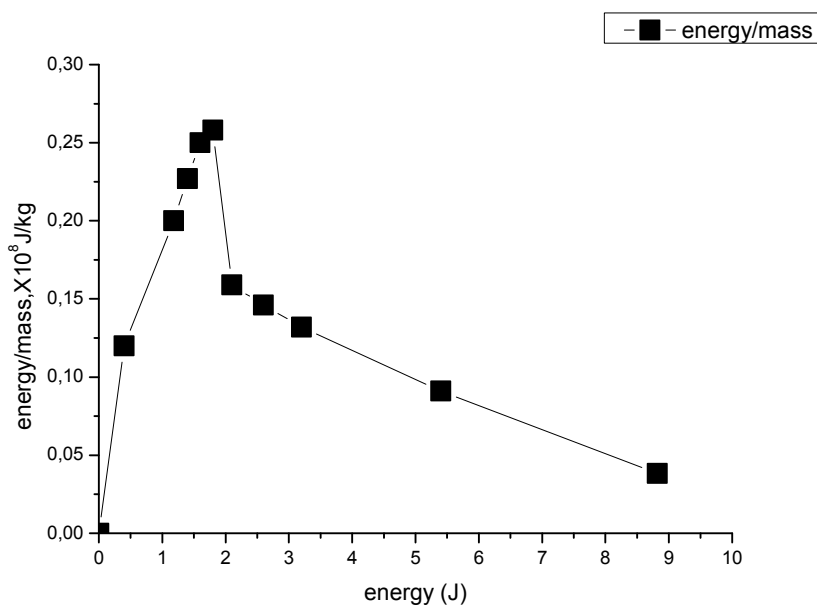


Рис. 6. Отношение пороговой энергии, поглощённой массой порогового отверстия к падающей на мишень энергии излучения.

Приведённые на рис. 2–6 экспериментальные зависимости свидетельствуют об особом характере процессов, протекающих при пороговом пробое фольг, ранее не отмечавшемся в литературе.

3. Обсуждение

Формирование отверстия. Область потоков излучения $10^8 \div 10^{10}$ Вт/см² обеспечивает, как известно, режим развитого испарения. Режим теплопроводности при этом, хотя и исключён, но определяет ту минимальную толщину слоя $l \sim (\chi\tau)^{1/2}$, который успевает превратиться в жидкость и прогреться за время действия импульса $\tau \sim 10^{-3}$ с до высокой температуры испарения T (здесь χ – температуропроводность). Но при острой фокусировке луча [10; 12; 13], радиус облучаемой площадки: $r_o \leq l$. Тепловые потери становятся существенными и, в конечном счёте, определяют условия формирования сквозного отверстия. При этом оказывается, что $l \sim h$ и условия полубесконечной мишени ($h \geq 3(\chi\tau)^{1/2}$), [12; 13] не выполняются. В таком случае, пользуясь традиционным анализом задач теплопроводности, можно провести лишь качественный анализ рассеяния падающей энергии.

Возникающий перепад температуры ΔT между освещённой и теневой сторонами мишени и между центром освещённого пятна и его периферией вызывает перемещение фронта удаления вещества «вдоль» градиента температуры. При этом тепловые потери через площадку, нормальную к падающему лучу (через фронт) на протяжении высоты h фольги, равны:

$$P_h = \lambda \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \Delta T / h, \quad (1)$$

а потери тепла через поверхность образующегося усечённого конуса, приближённо – цилиндра, равны:

$$P_r = \lambda \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \Delta T / r \quad (2)$$

Отношение этих составляющих приводит к соотношению, связывающему радиус отверстия с его высотой:

$$R = P_h / P_r = r^2 / 2h^2. \quad (3)$$

Откуда следует, что:

- 1) если $R \ll 1$, то вся энергия уходит на образование цилиндрической поверхности высотой h , т.е. идёт на образование отверстия.
- 2) если $R \gg 1$, то вся энергия импульса рассеивается в поверхности, замата большую площадь поверхности. Эти результаты вполне согласуются с результатами эксперимента (рис. 1а; 1б.)

Вблизи порога пробоя, когда в конце лазерного импульса образуется отверстие, его радиус можно оценить через соотношение:

$$r^2 = \lambda \cdot \tau / \rho \cdot c, \quad (4)$$

где λ – теплопроводность, ρ – плотность, c – теплоёмкость для испытуемых металлов брали из [19]. Тогда

$$R = \lambda \cdot \tau / 2\rho \cdot c \cdot h^2, \quad (5)$$

а граница между выше упомянутыми крайними случаями, $R = 1$, определяет оптимальную толщину фольги:

$$h = (\lambda \cdot \tau / 2\rho \cdot c)^{1/2}. \quad (6)$$

В результате для меди толщина фольги оказывается равной $h_{Cu} = 0,25\sqrt{\tau}$ мм и для нержавеющей стали толщина фольги $h_{нс} = 0,09\sqrt{\tau}$ мм. Это хорошо подтверждается экспериментом (рис. 4). Отношение толщин $h_{Cu}/h_{нс} \approx 3$ и наблюдается такое же отношение толщин тех же металлов с минимальным сквозным пороговым отверстием (рис. 4). Можно было бы сказать, что всё ограничивается различными механизмами теплоотвода и потерями тепла. Такая ситуация предполагает, что процессы движения некоторого образования «газ–жидкость–твёрдое тело» в виде сэндвича, несмотря на всю сложность процессов, происходящих в толще фольги при различных величинах энергии, полностью контролируется теплопроводностью.

Зависимости $\Phi = \Phi(h)$ для исследованных металлов (и для других, упомянутых в [14],) сходны. Это предполагает, что и процессы, протекающие при пороговом пробое фольг на разных металлах, сходны. При рассматриваемых энергиях излучения исходное состояние вещества предопределяет развитие процесса. Например, медь и сталь разнятся по своей теплопроводности приблизительно на порядок [19]. Это сразу же сказывается на более резком проявлении характера пробиваемости нержавеющей стали (рис. 5). Итак, процесс пробоя порогового отверстия контролируется теплопроводностью твёрдого тела. Сам этот процесс состоит из превращений твёрдого тела в жидкость и газообразное состояние. Однако из этих соотношений (когда формирование порогового отверстия контролируется теплопроводностью) причины появления минимумов на зависимостях «диаметр порогового отверстия–пороговая энергия пробоя» $\Phi = \Phi(\mathcal{E}_p)$ и $\Phi = \Phi(h)$, рис. 2 и рис. 3, излома на зависимости «фронта» перемещения через тело фольги и пика на зависимости $\left(\frac{E_p}{m}\right)$ от энергии излучения E никак не следуют.

Пороговое отверстие. Контроль всего процесса теплопроводностью твёрдого тела предполагает, что на твёрдом теле во всё время процесса происходит образование жидкого металла, превращающегося, в свою очередь, в газообразное состояние. Таким образом, через толщу фольги движется своеобразный сэндвич, состоящий из «насыщенного пара металла–жидкого металла–твёрдого тела». Нагрев, фазовые превращения и продвижение такого сэндвича лимитируется двумя наиболее медленными процессами. Первый из них обязан электрон-фононному взаимодействию, и характеризуется временем изменения решёточной температуры $\tau_1 \sim 10^{-10}$ с [20; 21]. Второй «медленный» процесс связан с возникновением уплотнения или разрежения путём присоединения к возникающему уплотнению (или выходу из возникшего уплотнения) атомов. Этот процесс (возникновение нового состояния – новой фазы вещества) характеризуется временем порядка $\tau_2 = \frac{a}{v} \sim 10^{-14}$ с, где a – межатомное расстояние, v – скорость звука. Это означает, что возникающая жидкость будет достигать своего равновесного состояния при определённой температуре быстрее, чем остывать из-за электрон-фононного взаимодействия. Таким образом, можно было бы предполагать, что для каждой величины пороговой энергии лазерного поля и определённой толщины фольги будет устанавливаться определённая равновесная температура, при которой и будет формироваться пороговое отверстие.

Это предполагает, что каждое пороговое отверстие отвечает некоторой равновесной температуре T , при которой могут происходить те или иные фазовые превращения, то есть:

$$z = z(T). \quad (7)$$

Скорость перемещения фронта «газ–жидкость–твёрдое тело». Излом в зависимости $V = V(E)$ на рис. 5, по-видимому, говорит о том, что по достижении значений энергий, при которых появляется пик в зависимости $\left(\frac{E_p}{m}\right)$ (рис. 6), возникает критическое состояние, соответствующее переходу «жидкий металл–газ». Жидкий металл достигает температуры, равной или близкой к критической температуре. Так что фронт «жидкость–газ» начинает двигаться в противоположную сторону. Жидкость, быстро расширяясь, теряет границу раздела «жидкость–газ» и достигает критического состояния.

Таким образом, можно предположить, что весь набор характеристик порогового пробоя сквозных отверстий при минимально возможной энергии в импульсе в значительной степени вызваны процессами, протекающими при критических и близких к ним параметрах состояния вещества. Однако эти характеристики нуждаются в привязке к температурной шкале. Это делается в следующей части этой работы.

4. Заключение

В эксперименте по изучению энергий порогового пробоя металлических фольг обнаружилось новые характеристики, связывающие величину энергии воздействия лазерного излучения с реакцией металла на это воздействие:

- 1) характеристика $\Phi = \Phi(E_p)$ возникновения минимального (порогового) размера выходного отверстия Φ в зависимости от минимальной–пороговой энергии излучения E_p , при данной толщине фольги. Эта характеристика имеет чётко выраженный минимум.
- 2) характеристика $\Phi = \Phi(E_p)$ по своей форме остаётся неизменной для веществ с разной величиной теплопроводности – от плохо проводящих материалов до металлов с хорошей теплопроводностью.
- 3) отношение $(\frac{E_p}{m})/E$, аналогичное C_p , проявляет пикообразное поведение при значениях энергии, соответствующих минимуму характеристики $\Phi = \Phi(E_p)$. Это соответствует фазовому переходу второго рода «жидкий металл–газ».
- 4) в условиях порогового пробоя сквозных отверстий полностью контролируется энергия, поглощённая объёмом вещества, соответствующего пороговому отверстию.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hamazaki J., Morita R., Chujo K., Koyashi Y., Tanda S., Omatsu T. Optical-vortex laser ablation // OPTICS EXPRESS. 2010. Vol. 18. no. 3. pp. 2144–2151.
2. Autrique D., Chen Z., Alexiades V., Bogaerts A., Rethefeld B. Multiphase Model for Pulsed ns-Laser Ablation of Copper in an ambient Gas // AIP Conference Proceedings. New Mexico, USA. 2012. Vol. 1464. pp. 648–660.
3. Autrique D., Clair G., L'Hermite D., Alexiades V., Bogaerts A., Rethefeld B. The role of mass removal mechanisms in the onset ns-laser induced plasma formation // Journ. Appl. Physics. 2013. Vol. 114. pp. 023301-1-023301-10.

4. Benavides O., de la Cruz May L., Flores Gil A. Effects of Plasma Formation on Reflection of Laser Light in Ablation of Metals in Air // PIERs Proceedings. Stockholm, Sweden. 2013. Vol. 12–15. pp. 1468–1472.
5. Bulgakova N., Bulgakov A. Pulsed laser ablation of solids: transition from vaporization to phase explosion // Appl. Phys. A. 2001. Vol. 73. pp. 199–208.
6. Meijer J. Laser beam machining (LBM), state of the art and new opportunities // Journal of Materials Processing Technology. 2004. Vol. 149. pp. 2–17.
7. Kumar N., Dash S., Tyagi A., Raj B. Thermal dynamics-based mechanism for intense laser-induced material surface vaporation // Prama–J. Phys. 2008. Vol. 71. pp. 529–543.
8. Bugayev M., Gupta C., El-Bandrawy M. Dynamics of laser hole drilling with nanosecond periodically pulsed laser // Optics and Lasers Engineering. 2006. Vol. 44. pp. 797–802.
9. Kato T., Yamaguchi T. Laser Machining // NEC Research Development. 1968. no 12. p. 57.
10. Рэди Дж. Действие мощного лазерного излучения. М.: Мир, 1974. 468 с.
11. Анисимов С.И., Имас Я.А., Романов Г.С., Ходыко Ю.В. Воздействие лазерного излучения большой мощности на металлы. М.: Наука, 1970. 272 с.
12. Gladush G., Smurov I. Physics of laser materials Processing (Theory and experiments). Springer-Verlag Berlin Heidelberg. 2011. 534 p.
13. Вейко В.П., Либенсон М.Н. Лазерная обработка. Л.: Лениздат, 1973. 191 с.
14. Бугаев А.А., Калашников Е.В., Кантор М.Ю., Станкевич А.Л. Лазерное испарение металлов при критической температуре // Физика твёрдого тела. 1992. Т. 34. № 3. С. 801–804.
15. Анисимов С.И., Лукьянчук Б.С. Избранные задачи теории лазерной абляции // Успехи физических наук. 2002. Т. 172. № 3. С. 301–333.
16. Амброк А.Г., Калашников Е.В., Кукушкин С.А. Влияние избирательного нагрева на кинетику поздней стадии фазового перехода первого рода // Журнал технической физики. 2001. Т. 71. № 3. С. 41–45.
17. Ambrok A., Kalashnikov E., Kukushkin S. Kinetics of late stage of first-order phase transitions under irradiation // Journ. Applied Physics. 2002. Vol. 91. no. 8. pp. 4961–4965.
18. Стенли Г. Фазовые переходы и критические явления. М.: Мир, 1973. 419 с.
19. Кикоин И.К. Таблицы физических величин. М.: Атомиздат, 1976. 1008 с.
20. Самохин А.А., Успенский А.Б. Испарение вещества под воздействием лазерного излучения // Физика и химия обработки материалов. 1981. № 3. С. 3–11.
21. Самохин А.А. Действие лазерного излучения на поглощающие конденсированные среды. М.: Наука. Труды ИОФАН. 1988. Т. 13. С. 3.

REFERENCES

1. Hamazaki J., Morita R., Chujo K., Koyashi Y., Tanda S., Omatsu T. Optical-vortex laser ablation // OPTICS EXPRESS. 2010. Vol. 18. no. 3. pp. 2144–2151.

2. Autrique D., Chen Z., Alexiades V., Bogaerts A., Rethefeld B. Multiphase Model for Pulsed ns-Laser Ablation of Copper in an ambient Gas // AIP Conference Proceedings. New Mexico, USA. 2012. Vol. 1464. pp. 648–660.
3. Autrique D., Clair G., L'Hermite D., Alexiades V., Bogaerts A., Rethefeld B. The role of mass removal mechanisms in the onset ns-laser induced plasma formation // Journ. Appl. Physics. 2013. Vol. 114. pp. 023301-1-023301-10.
4. Benavides O., de la Cruz May L., Flores Gil A. Effects of Plasma Formation on Reflection of Laser Light in Ablation of Metals in Air // PIERS Proceedings. Stockholm, Sweden. 2013. Vol. 12–15. pp. 1468–1472.
5. Bulgakova N., Bulgakov A. Pulsed laser ablation of solids: transition from vaporization to phase explosion // Appl. Phys. A. 2001. Vol. 73. pp. 199–208.
6. Meijer J. Laser beam machining (LBM), state of the art and new opportunities // Journal of Materials Processing Technology. 2004. Vol. 149. pp. 2–17.
7. Kumar N., Dash S., Tyagi A., Raj B. Thermal dynamics-based mechanism for intense laser-induced material surface vaporation // Prama-J. Phys. 2008. Vol. 71. pp. 529–543.
8. Bugayev M., Gupta C., El-Bandrawy M. Dynamics of laser hole drilling with nanosecond periodically pulsed laser // Optics and Lasers Engineering. 2006. Vol. 44. pp. 797–802.
9. Kato T., Yamaguchi T. Laser Machining // NEC Research Development. 1968. no. 12. p. 57.
10. Redi Dzh. Deistvie moshchnogo lazernogo izlucheniya [The action of powerful laser radiation]. M., Mir, 1974. 468 p.
11. Anisimov S.I., Imas YA.A., Romanov G.S., Khodyko YU.V. Vozdeistvie lazernogo izlucheniya bol'shoi moshchnosti na metally [The effect of laser radiation on metals]. M., Nauka, 1970. 272 p.
12. Gladush G., Smurov I. Physics of laser materials Processing (Theory and experiments). Springer-Verlag Berlin Heidelberg. 2011. 534 p.
13. Veiko V.P., Libenson M.N. Lazernaya obrabotka [Laser treatment]. L., Lenizdat, 1973. 191 p.
14. Bugaev A.A., Kalashnikov E.V., Kantor M.YU., Stankevich A.L. Lazernoe isparenie metallov pri kriticheskoi temperature [Laser evaporation of metals at a critical temperature] // Fizika tverdogo tela. Vol. 34. 1992. no. 3. pp. 801–804.
15. Anisimov S.I., Luk'yanchuk B.S. Izbrannyye zadachi teorii lazernoi ablyatsii [Selected problems of laser ablation theory] // Uspekhi fizicheskikh nauk. 2002. Vol. 172. no. 3. pp. 301–333.
16. Ambrok A.G., Kalashnikov E.V., Kukushkin S.A. Vliyanie izbiratel'nogo nagreva na kinetiku pozdnei tadia fazovogo perekhoda pervogo roda [The influence of selective heating on the kinetics of the late stage of phase transition of the first kind] // Zhurnal tekhnicheskoi fiziki. 2001. Vol. 71. no. 3. pp. 41–45.

17. Ambrok A., Kalashnikov E., Kukushkin S. Kinetics of late stage of first-order phase transitions under irradiation // Journ. Applied Physics. 2002. Vol. 91. no. 8. pp. 4961–4965.
18. Stanley H.E. Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena (New York: Oxford Univ. Press, 1971).
19. Kikoin I.K. Tablitsy fizicheskikh velichin [Tables of physical quantities]. M., Atomizdat, 1976. 1008 p.
20. Samokhin A.A., Uspenskii A.B. Испарение вещества под воздействием лазерного излучения [The evaporation of the substance under the influence of laser radiation] // Физика и химия обработки материалов. 1981. no. 3. pp. 3–11.
21. Samokhin A.A. Действие лазерного излучения на поглощательные конденсированные среды [The action of laser radiation on absorbing condensed media]. Vol. 13. M., Nauka, Trudy IOFAN, 1988. p. 3.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Калашников Евгений Владимирович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительной математики и методики преподавания информатики, Московский государственный областной университет;
e-mail: ekevkalashnikov1@gmail.com

Бугаев Алексей Алексеевич – доктор, физико-математических наук, академик РАН, профессор Центра прикладных исследований, Олд Доминьон Университет;
e-mail: bugayev@jlab.org

Кантор Михаил Юльевич – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории физики высокотемпературной плазмы Физико-технического института им. А.Ф. Иоффе Российской академии наук;
e-mail: m.kantor@mail.ioffe.ru

Купrienko Денис Васильевич – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории физики высокотемпературной плазмы Физико-технического института им. А.Ф. Иоффе Российской академии наук;
e-mail: denis.kouprienko@mail.ioffe.ru

Чикиряка Андрей Викторович – младший научный сотрудник лаборатории совершенных кристаллов Физико-технического института им. А.Ф. Иоффе Российской академии наук;
e-mail: chikiryaka@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Kalashnikov Evgenii Vladimirovich – doctor of physical and mathematical sciences, professor of the Chair of Computational Mathematics and Methodology of Teaching Informatics at the Moscow State Regional University;

e-mail: ekevkalashnikov1@gmail.com

Bugayev Aleksei Alekseevich – doctor of physical and mathematical sciences, academician of the Russian Academy of Sciences, professor of the Applied Research Center at Old Dominion University;

e-mail: bugayev@jlab.org

Kantor Mikhail Yul'evich – candidate of physical and mathematical sciences, senior researcher of the Laboratory of High-Temperature Plasma Physics at the Ioffe Institute of the Russian Academy of Sciences;

e-mail: m.kantor@mail.ioffe.ru

Kuprienko Denis Vasil'evich – candidate of physical and mathematical sciences, senior researcher of the Laboratory of High-Temperature Plasma Physics at the Ioffe Institute of the Russian Academy of Sciences;

e-mail: denis.kouprienko@mail.ioffe.ru

Chikiryaka Andrei Viktorovich – junior researcher of the Laboratory of Perfect Crystals at the Ioffe Institute of the Russian Academy of Sciences;

e-mail: chikiryaka@mail.ru

БИБЛИОГРАФИЧЕСКАЯ ССЫЛКА

Калашников Е.В., Бугаев А.А., Кантор М.Ю., Куприенко Д.В., Чикиряка А.В. Порог пробоя сквозных отверстий в металлических фольгах мощным лазерным излучением // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2016. № 1. С. 44–59.

DOI: 10.18384/2310-7251-2016-1-44-59.

BIBLIOGRAPHIC REFERENCE

E. Kalashnikov, A. Bugayev, M. Kantor, D. Kouprienko, A. Chikiryaka Threshold breakdown of through holes in metal foils by high-powerful laser radiation (part 1) // Bulletin of Moscow State Regional University. Series: Physics and Mathematics. 2016. no. 1. pp. 44–59.

DOI: 10.18384/2310-7251-2016-1-44-59.

УДК 533.72

DOI: 10.18384/2310-7251-2016-1-60-73

ТЕПЛОВОЕ СКОЛЬЖЕНИЕ РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА ВДОЛЬ ПЛОСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ С ЗЕРКАЛЬНО-ДИФфуЗНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Латышев А. В., Юшканов А. А., Корнеева Е. Е.

Московский государственный областной университет

105005, г. Москва, ул. Радио, д. 10А, Российская Федерация

Аннотация. Рассматривается одна из классических граничных задач кинетической теории – задача о тепловом скольжении разреженного газа вдоль плоской твердой поверхности. Используется модельное кинетическое уравнение Больцмана с модельным интегралом столкновений БГК (Бхатнагар, Гросс, Крук). В качестве граничных условий используются граничные условия Максвелла (зеркально-диффузные). Для решения задачи применяется обобщенный метод источника. Проведено сравнение с ранее полученными результатами.

Ключевые слова: тепловое скольжение, разреженный газ, коэффициент аккомодации, кинетическое уравнение, уравнение Фредгольма, функция распределения.

THERMAL SLIDING OF A RAREFIED GAS ALONG A FLAT SURFACE WITH MIRROR-DIFFUSION BOUNDARY CONDITIONS

A. Latyshev, A. Yushkanov, E. Korneeva

Moscow State Regional University,

ul. Radio 10A, 105005 Moscow, Russia

Abstract. One of classical boundary problems of the kinetic theory (the problem of thermal sliding) of a rarefied gas along a flat solid surface is considered. A model kinetic Boltzmann equation with a model integral of collisions in the BGK (Bhatnagar, Gross, Krook) form is used. As boundary conditions use is made of the boundary Maxwell conditions (mirror–diffusion). The generalized method of a source is applied to solve the problem. Comparison with previously obtained results is performed.

Keywords: thermal sliding, rarefied gas, accommodation coefficient, kinetic equation, boundary conditions, Fredholm equation, distribution function.

Введение

Максвелл был первым, кто обратил внимание на движение разреженного газа под действием неоднородного распределения температуры [1–3]. Задача о тепловом скольжении газа вдоль поверхности (не обязательно плоской) вызывает постоянный интерес (см., например, [4–12]). Это связано как с чисто теоретическим интересом, так и с многочисленными приложениями в области аэродинамики и физики аэродисперсных систем.

Наиболее полный обзор работ в этом направлении представлен в работе [4] и монографии [5]. Отметим ряд работ [6–9], в которых рассматривались зеркально-граничные условия. Большой вклад в изучение теплового скольжения внес Лойалка С.К. [7–9].

В наших работах [10–15] были разработаны приближенные [10–12] и точные [13; 14] методы решения граничных задач для модельных кинетических уравнений. В работах [10; 11] коэффициент теплового скольжения аппроксимируется дробно-рациональными функциями. Аналитическое решение задачи о тепловом скольжении для газов с частотой столкновений, пропорциональной модулю скорости молекул, и диффузными граничными условиями было получено в [15].

Затем в работах [16–18] тепловое скольжение рассматривалось для квантовых газов.

1. Постановка задачи

Пусть разреженный газ заполняет полупространство $x > 0$ и движется вдоль оси y . Вдали от поверхности $x = 0$ задан логарифмический градиент

температуры $g_T = \left(\frac{d \ln T}{dy} \right)_{x=+\infty}$. Требуется найти скорость теплового

скольжения u_{sl} и распределение массовой скорости газа в полупространстве.

В работе [12] показано, что если функцию распределения искать в виде:

$$f = f_M (1 + h), \quad \text{где} \quad f_M = n(y) \left(\frac{m}{2\pi kT(y)} \right)^3 \exp \left(-\frac{mv^2}{2kT(y)} \right),$$

$T(y) = T_0(1 + g_T y)$, то функция $h(x, \mu)$ ($\mu = C_x$) удовлетворяет неоднородному кинетическому уравнению:

$$\mu \frac{\partial h}{\partial x} + G_T \left(\mu^2 - \frac{1}{2} \right) + h(x, \mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu'^2} h(x, \mu') d\mu'. \quad (1.1)$$

Здесь и ниже:

$$G_T = \left(\frac{d \ln T}{dy_1} \right)_{x_1=+\infty}, \quad x_1 = \nu \sqrt{\beta} x, \quad y_1 = \nu \sqrt{\beta} y, \quad \beta = \frac{m}{2kT}, \quad U_{sl} = \sqrt{\beta} u_{sl},$$

ν – частота столкновений, x_1, y_1 – безразмерные координаты. Далее индексы у этих координат будем опускать.

Будем считать, что молекулы отражаются от стенки зеркально-диффузно:

$$f(0, \mathbf{C}) = q \cdot f_M(y) + (1 - q) f(0, -C_x, C_y, C_z), \quad C_x > 0, \quad (1.2)$$

где q – коэффициент диффузности, $0 \leq q \leq 1$. При $q = 1$ условие (1.2) является условием диффузного отражения, при $q = 0$ – условием зеркального отражения.

Для функции $h(x, \mu)$ условие (1.2) переходит в условие:

$$h(0, \mu) = (1 - q) h(0, -\mu), \quad \mu > 0. \quad (1.3)$$

Вдали от стенки функция распределения переходит в свое Чемпен-Энскоговское распределение:

$$h(\infty, \mu) = 2U_{sl} - G_T \left(\mu^2 - \frac{1}{2} \right). \quad (1.4)$$

Обозначим далее: $h(x, \mu) + G_T \left(\mu^2 - \frac{1}{2} \right) = \psi(x, \mu)$. Тогда уравнение (1.1)

переходит в однородное уравнение:

$$\mu \frac{d\psi}{dx} + \psi(x, \mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu'^2} \psi(x, \mu') d\mu'. \quad (1.5)$$

Граничные условия (1.3) и (1.4) переходят в следующие:

$$\psi(0, \mu) = q \cdot G_T \left(\mu^2 - \frac{1}{2} \right) + (1 - q) \psi(0, -\mu), \quad \mu > 0, \quad (1.6)$$

и

$$\psi(\infty, \mu) = 2U_{sl} \quad (1.7)$$

Далее положим: $\psi(x, \mu) = 2U_{sl} + h_c(x, \mu)$. При этом функция $h_c(x, \mu)$ удовлетворяет уравнению (1.5):

$$\mu \frac{\partial h_c}{\partial x} + h_c(x, \mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu'^2} h_c(x, \mu') d\mu' \quad (1.8)$$

и граничным условиям:

$$h_c(0, \mu) = -2qU_{sl} + q \cdot G_T(\mu^2 - \frac{1}{2}) + (1-q)h_c(0, -\mu), \quad \mu > 0 \quad (1.9)$$

и

$$h_c(\infty, \mu) = 0. \quad (1.10)$$

2. Включение граничных условий в кинетическое уравнение

Продолжим функцию распределения на сопряженное полупространство $x < 0$ симметричным образом: $h(x, \mu) = h(-x, -\mu)$, $\mu > 0$. При таком продолжении функция $h_c(x, \mu)$ в отрицательном полупространстве $x < 0$ снова удовлетворяет уравнению (1.8) и граничным условиям:

$$h_c(-0, \mu) = -2qU_{sl} + q \cdot G_T(\mu^2 - \frac{1}{2}) + (1-q)h_c(-0, -\mu), \quad \mu < 0, \quad (2.1)$$

и

$$h_c(-\infty, \mu) = 0 \quad (2.2)$$

Включим граничные условия (1.9), (1.10) и (2.1) (2.2) в кинетическое уравнение в виде источника – члена, содержащего дельта-функцию Дирака:

$$\mu \frac{\partial h_c}{\partial x} + h_c(x, \mu) = 2U_c(x) + |\mu| \delta(x) \left[-2qU_{sl} + qG_T(\mu^2 - \frac{1}{2}) - qh_c(\mp 0, -\mu) \right], \quad (2.3)$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака,

$$2U_c(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu'^2} h_c(x, \mu') d\mu'. \quad (2.4)$$

Заметим, что $U_c(x)$ удовлетворяет граничным условиям:

$$U_c(\pm\infty) = 0. \quad (2.5)$$

Решая уравнения (2.3) при $x > 0$, $\mu < 0$, получаем решение, удовлетворяющее граничным условиям (1.9) и (2.5):

$$h_c^+(x, \mu) = -\frac{1}{\mu} e^{-x/\mu} \cdot \int_x^{+\infty} e^{t/\mu} \cdot 2U_c(t) dt. \quad (2.6)$$

Аналогично, при $x < 0$, $\mu > 0$ находим:

$$h_c^-(x, \mu) = -\frac{1}{\mu} e^{-x/\mu} \cdot \int_x^{-\infty} e^{t/\mu} \cdot 2U_c(t) dt. \quad (2.7)$$

Перепишем уравнение (2.3), заменим в нем последний член, используя продолжение функции h на сопряженное полупространство и равенства (2.6) и (2.7). На этом пути приходим к следующему уравнению:

$$\mu \frac{\partial h_c}{\partial x} + h_c(x, \mu) = 2U_c(x) + |\mu| \delta(x) \left[-2qU_{sl} + qG_T(\mu^2 - \frac{1}{2}) - qh_c^\pm(0, -\mu) \right] \quad (2.8)$$

Решение уравнений (2.8) и (2.4) ищем в виде интегралов Фурье:

$$2U_c(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} E(k) dk, \quad \delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk, \quad (2.9)$$

$$h_c(x, \mu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} \Phi(k, \mu) dk \quad (2.10)$$

При этом функция $h_c^+(x, \mu)$ выражается через спектральную плотность $E(k)$ массовой скорости следующим образом:

$$h_c^+(x, \mu) = -\frac{1}{\mu} e^{-\frac{x}{\mu}} \cdot \int_x^{\infty} e^{t/\mu} dt \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} E(k) dk = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx} E(k) dk}{1 + ik\mu}.$$

Аналогично получаем, что

$$h_c^-(x, \mu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx} E(k) dk}{1 + ik\mu}.$$

Используя четность $E(k)$, далее получим:

$$h_c^\pm(0, \mu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E(k) dk}{1 + k^2 \mu^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{E(k) dk}{1 + k^2 \mu^2}.$$

Теперь уравнение (2.8) можем переписать в виде

$$\mu \frac{\partial h_c}{\partial x} + h_c(x, \mu) = 2U_c(x) + |\mu| \delta(x) \left[-2qU_{sl} + qG_T(\mu^2 - \frac{1}{2}) - \frac{q}{\pi} h_c \int_0^{\infty} \frac{E(k_1) dk_1}{1 + k_1^2 \mu^2} \right] \quad (2.11)$$

3. Характеристическое уравнение

Теперь уравнения (2.4) и (2.11) с помощью интеграла Фурье (2.9) и (2.10) преобразуются в следующую систему уравнений

$$E(k) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\mu^2} \Phi(k, \mu) d\mu, \quad (3.1)$$

$$(1 + ik\mu)\Phi(k, \mu) = E(k) + |\mu| \left[-2qU_{sl} + qG_T \left(\mu^2 - \frac{1}{2} \right) - \frac{q}{\pi} \int_0^\infty \frac{E(k_1) dk_1}{1 + k_1^2 \mu^2} \right]. \quad (3.2)$$

Выразим функцию $\Phi(k, \mu)$ из уравнения (3.2) и подставим в уравнение (3.1). Получаем характеристическое уравнение:

$$E(k)L(k) = -2q \cdot U_{sl} \cdot T_1(k) + qG_T \left(T_3(k) - \frac{1}{2} T_1(k) \right) - \frac{q}{\pi} \int_0^\infty K(k, k_1) E(k_1) dk_1 \quad (3.3)$$

с ядром

$$K(k, k_1) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-\mu^2} \mu d\mu}{(1 + k^2 \mu^2)(1 + k_1^2 \mu^2)}. \quad (3.4)$$

Уравнение (3.3) – это интегральное уравнение Фредгольма второго рода. Кроме того, в (3.3) введено обозначение:

$$T_n(k) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-\mu^2} \mu^n d\mu}{1 + k^2 \mu^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.5)$$

$$L(k) = 1 - T_0(k) = k^2 \cdot T_2(k). \quad (3.6)$$

4. Ряды Неймана

Решение уравнения (3.3) ищем в виде:

$$E(k) = qG_T \left(E_0(k) + qE_1(k) + q^2 \cdot E_2(k) + \dots \right), \quad (4.1)$$

$$U_{sl} = \frac{1}{2} G_T \cdot \left(V_0 + V_1 q + V_2 q^2 + \dots \right) \quad (4.2)$$

Подставим разложения (4.1) и (4.2) в уравнение (3.3). С помощью равенств (3.4)–(3.6) получаем счетную систему уравнений:

$$E_0(k) \cdot L(k) = -V_0 T_1(k) + T_3(k) - \frac{1}{2} T_1(k), \quad (4.3)$$

$$E_1(k) \cdot L(k) = -V_1 T_1(k) - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} K(k, k_1) E_0(k_1) dk_1, \quad (4.4)$$

$$E_2(k) \cdot L(k) = -V_2 T_1(k) - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} K(k, k_1) E_1(k_1) dk_1, \quad (4.5)$$

.....

$$E_n(k) \cdot L(k) = -V_n T_1(k) - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} K(k, k_1) E_{n-1}(k_1) dk_1, \quad n=1,2. \quad (4.6)$$

Из уравнения (4.3) находим:

$$E_0(k) = \frac{-(V_0 + \frac{1}{2}) \cdot T_1(k) + T_3(k)}{k^2 \cdot T_2(k)}. \quad (4.7)$$

Устраним полюс второго порядка в правой части (4.7). Заметим, что:

$$T_1(k) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} - k^2 \cdot T_3(k), \quad T_3(k) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} - k^2 \cdot T_5(k).$$

Тогда:

$$E_0(k) = \frac{-(V_0 + \frac{1}{2}) \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} + (V_0 + \frac{1}{2}) k^2 T_3(k) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} - k^2 \cdot T_5(k)}{k^2 T_2(k)}.$$

Для устранения полюса потребуем, чтобы $-(V_0 + \frac{1}{2}) \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} = 0$, откуда $V_0 = \frac{1}{2}$.

Тогда:

$$E_0(k) = \frac{T_3(k) - T_5(k)}{T_2(k)}.$$

С помощью последнего равенства из уравнения (4.4) находим:

$$E_1(k) = - \frac{V_1 \cdot T_1(k) + \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\infty} K(k, k_1) E_0(k_1) dk_1}{k^2 T_2(k)} \quad (4.8)$$

Для устранения полюса в правой части (4.8) выберем V_1 в виде:

$$V_1 = - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{T_1(k_1)}{T_1(0)} E_0(k_1) dk_1 = 0.28566.$$

Найдем числитель правой части (4.8). Имеем:

$$V_1 T_1(k) + \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\infty} K(k, k_1) E_0(k_1) dk_1 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\infty} \left[K(k, k_1) - \frac{T_1(k) T_1(k_1)}{T_1(0)} \right] E_0(k) dk_1.$$

Заметив, что:

$$K(k, k_1) = T_1(0) - k_1^2 T_3(k_1) - k^2 T_3(k) + k^2 k_1^2 \cdot K_5(k, k_1),$$

найдем разность:

$$\begin{aligned} K(k, k_1) - \frac{T_1(k) T_1(k_1)}{T_1(0)} &= K(k, k_1) - \frac{(T_1(0) - k^2 T_3(k))(T_1(0) - k_1^2 T_3(k_1))}{T_1(0)} = \\ &= K(k, k_1) - T_1(0) - k^2 T_3(k) - k_1^2 T_3(k_1) - \frac{k^2 k_1^2}{T_1(0)} \cdot T_3(k) T_3(k_1) = \\ &= k^2 k_1^2 \cdot [K_5(k, k_1) - \sqrt{\pi} \cdot T_3(k) T_3(k_1)] = k^2 \cdot S(k, k_1), \end{aligned}$$

где:

$$S(k, k_1) = k_1^2 \cdot [K_5(k, k_1) - \sqrt{\pi} \cdot T_3(k) T_3(k_1)].$$

Согласно (4.8) теперь получаем:

$$E_1(k) = -\frac{1}{\pi T_2(k)} \cdot \int_0^{\infty} S(k, k_1) E_0(k_1) dk_1.$$

Из уравнения (4.5) находим:

$$E_2(k) = -\frac{V_2 \cdot V_1(k) + \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\infty} K(k, k_1) E_1(k_1) dk_1}{k^2 \cdot T_2(k)}.$$

Отсюда находим:

$$V_2 = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^{\infty} T_1(k_1) E_1(k_1) dk_1 = -0.021135.$$

С помощью этого соотношения предыдущее равенство преобразуем к виду:

$$E_2(k) = -\frac{1}{\pi T_2(k)} \cdot \int_0^{\infty} S(k, k_1) E_1(k_1) dk_1.$$

Аналогично из уравнения (4.6) находим:

$$E_n(k) = -\frac{V_n \cdot T_1(k) + \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\infty} K(k, k_1) E_{1-n}(k_1) dk_1}{k^2 \cdot T_2(k)}.$$

Отсюда находим, что:

$$V_n = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} T_1(k_1) E_{n-1}(k_1) dk_1, \quad n = 1, 2, \dots$$

При этом

$$E_n(k) = -\frac{1}{\pi T_2(k)} \cdot \int_0^{\infty} S(k, k_1) E_{n-1}(k_1) dk_1, \quad n = 1, 2, \dots$$

Выпишем формулы для распределения массовой скорости во втором приближении:

$$U_c(x) = U_{sl}(q) + \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} (E_0(k) + E_1(k)q + E_2(k)q^2) dk.$$

Для функции $h(x, \mu)$ получаем:

$$h(x, \mu) = -G_T(\mu^2 - \frac{1}{2}) + 2U_{sl} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \Phi(k, \mu) dk,$$

где

$$\Phi(k, \mu) = \frac{(1 - ik\mu)}{1 + k^2\mu^2} \left[E_0(k) + q \left(E_1(k) + |\mu| G_T(\mu^2 - \frac{1}{2} - V_0) - \right. \right. \\ \left. \left. - |\mu| \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{E_0(k_1) dk_1}{1 + k_1^2\mu^2} \right) + q^2 \left(E_2(k) - |\mu| G_T V_1 - \frac{|\mu|}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{E_1(k_1) dk_1}{1 + k_1^2\mu^2} \right) \right].$$

5. Обсуждение результатов и заключение

Сравним полученные результаты с предшествующими, в частности, с точным решением для скорости теплового скольжения при $q = 1$: $U_{sl} = 0.38316 G_T$ [13]. Перепишем эту формулу в размерном виде:

$$u_{sl} = 1.1495 \zeta g_T.$$

Безразмерная скорость теплового скольжения согласно полученным результатам равна:

$$U_{sl}(q) = 0.5(V_1 + V_2 q + V_2 q^2) G_T = 0.5(0.5 + 0.2857q - 0.0211q^2) G_T.$$

Приведем эту формулу к размерному виду:

$$u_{sl}(q) = 0.75(1 + 0.5714q - 0.0422q^2) \zeta g_T, \quad (5.1)$$

где ζ – кинематическая вязкость газа.

В нулевом приближении из формулы (5.1) видно, что нами получен точный результат Максвелла для зеркальных граничных условий: $u_{sl} = 0.75\zeta g_T$. Введем относительную ошибку:

$$O_n(q) = \frac{u_{sl} - u_{sl}(q)}{u_{sl}} \cdot 100\%, \quad (5.2)$$

где $u_{sl}(q)$ определяется равенством (5.1).

В первом приближении скорость теплового скольжения равна: $u_{sl}^{(1)}(q) = 0.75(0.5 + 0.2857q)\zeta g_T$, во втором приближении она определяется равенством (5.1): $u_{sl}^{(2)}(q) = 0.75(1 + 0.5714 \cdot q - 0.0422q^2)\zeta g_T$. Нетрудно видеть, что относительная ошибка в нулевом приближении равна: $O_0(1) = 34.48\%$, в первом: $O_1(1) = 2.52\%$, во втором – $O_2(1) = 0.23\%$. Сравнивая приведенные оценки, приходим к заключению, что именно нелинейный анализ приводит к эффективной аппроксимационной формуле для вычисления скорости теплового скольжения.

Перепишем формулу (5.1) в виде: $u_{sl} = K(q)\zeta g_T$, где K – коэффициент теплового скольжения. Проведем сравнение коэффициента скольжения из данной работы с коэффициентами, найденными в [6–8]. В работах [6] и [7] был найден один и тот же коэффициент: $K = 0.75(1 + 0.5q)$. Сравнение этого коэффициента с (5.1) согласно (5.2) показывает, что при $q=1$ отклонение коэффициента из [6] и [7] не превосходит 2%. В работе [8] было получено, что $K = 0.75(1 + 0.532q)$. Согласно (5.2) получаем, что отклонение коэффициента из [7] от полученного в работе коэффициента не превосходит 0.2%.

Таким образом, в работе выведены эффективные аппроксимационные формулы для решения задачи о тепловом скольжении с зеркально-диффузными граничными условиями. В дальнейшем авторы намерены рассмотреть задачу о тепловом скольжении для квантовых газов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Maxwell J. Illustrations of the dynamical theory of gases. I. On the motion and collisions of perfectly elastic spheres; II. On the process of diffusion of two or more kinds of moving particles among one another; III. On the collision of perfectly elastic bodies of any form // Phil. Mag., 1860.
2. Maxwell J. On the dynamical theory of gases // Phil. Trans. Roy. Soc. London, 1867.

3. Maxwell J. On stress in rarefied gases, arising from inequalities of temperature // *Phil. Trans. Roy. Soc.* 1879. Vol. 170. pp. 231–256.
4. Дерягин С.П. Термофорез в газах при малых числах Кнудсена // *Успехи физических наук.* Т. 162. № 9. С. 133–152.
5. Яламов Ю.И., Галоян В.С. Динамика капель в неоднородных вязких средах. Ереван: Луйс. 208 с.
6. Абрамов Ю.Ю. Приближённый метод решения кинетического уравнения вблизи границы. II. Температурный скачок // *Теплофизика высоких температур.* 1970. Т. 8. № 5. С. 1013–1021.
7. Loyalka S. Slip in the thermal creep flow // *Phys. Fluids.* 1971. Vol. 14. no. 1. pp. 21–24.
8. Loyalka S., Cipolla J. Thermal creep sleep with arbitrary accommodation at the surface // *Phys. Fluids.* 1971. Vol. 14. no. 8. pp. 1656–1661.
9. Loyalka S. Slip and jump coefficients for rarefied gas flows: variational results for Lennard-Jones and $n(r)$ -6 potentials // *Physica A.* 1990. Vol. 163. pp. 813–821.
10. Латышев А.В., Юшканов А.А. Метод решения граничных задач для кинетических уравнений // *Журнал вычислительной математики и математической физики.* 2004. Т. 44. № 6. С. 1107–1118.
11. Латышев А.В., Юшканов А.А. Метод сингулярных интегральных уравнений в граничных задачах кинетической теории // *Теоретическая и математическая физика.* Т. 44 (4). № 3. С. 855–870.
12. Латышев А.В., Юшканов А.А. Новый метод решения граничных задач кинетической теории // *Журнал вычислительной математики и математической физики.* 2012. Т. 52. № 3. С. 539–552.
13. Латышев А.В. Юшканов А.А. Аналитическое решение граничных задач кинетической теории: монография. М.: МГОУ, 2004. 286 с.
14. Латышев А.В., Юшканов А.А. Кинетические уравнения типа Вильямса и их точные решения. М.: МГОУ, 2005. 273 с.
15. Латышев А.В., Юшканов А.А. Тепловое скольжение для газа с частотой столкновений, пропорциональной скорости молекул // *Инженерно-физический журнал.* 1998. Т. 71. № 2. С. 353–359.
16. Любимова Н.Н. Точное решение граничной задачи о тепловом скольжении для квантового ферми-газа // *Доклады РАН.* 2008. Т. 422. № 4. С. 463–465.
17. Латышев А.В., Любимова Н.Н., Юшканов А.А. Тепловое скольжение ферми-газа // *Извест. вузов. Сер. «Физика».* 2006. № 7. С. 11–17.
18. Латышев А.В., Юшканов А.А. Граничные задачи для квантовых газов: монография. М.: МГОУ. 2012. 265 с.

REFERENCES

1. Maxwell J. Illustrations of the dynamical theory of gases. I. On the motion and collisions of perfectly elastic spheres; II. On the process of diffusion of two or more kinds of moving particles among one another; III. On the collision of perfectly elastic bodies of any form // Phil. Mag., 1860.
2. Maxwell J. On the dynamical theory of gases // Phil. Trans. Roy. Soc. London, 1867.
3. Maxwell J. On stress in rarefied gases, arising from inequalities of temperature // Phil. Trans. Roy. Soc. 1879. Vol. 170. pp. 231–256.
4. Deryagin S.P. Termoforez v gazakh pri malykh chislakh Knudsena [Termoflores in gases at small Knudsen numbers] // Uspekhi fizicheskikh nauk. Vol. 162. no. 9. pp. 133–152.
5. Yalamov Yu.I., Galoyan V.S. Dinamika kapel' v neodnorodnykh vyazkikh sredakh [Dynamics of droplets in inhomogeneous viscous media]. Yerevan, Luis, 208 p.
6. Abramov Yu.Yu. Priblizhennyi metod resheniya kineticheskogo uravneniya vblizi granitsy. II. Temperaturnyi skachok [Approximate method for solving the kinetic equations near the boundary. II. Temperature rise] // Teplofizika vysokikh temperatur. 1970. Vol. 8. no. 5. pp. 1013–1021.
7. Loyalka S. Slip in the thermal creep flow // Phys. Fluids. 1971. Vol. 14. no. 1. pp. 21–24.
8. Loyalka S., Cipolla J. Thermal creep sleep with arbitrary accommodation at the surface // Phys. Fluids. 1971. Vol. 14. no. 8. pp. 1656–1661.
9. Loyalka S. Slip and jump coefficients for rarefied gas flows: variational results for Lennard-Jones and $n(r)$ -6 potentials // Physica A. 1990. Vol. 163. pp. 813–821.
10. Latyshev A.V., Yushkanov A.A. Metod resheniya granichnykh zadach dlya kineticheskikh uravnenii [Method of solution of boundary value problems for kinetic equations] // Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki. 2004. Vol. 44. no 6. pp. 1107–1118.
11. Latyshev A.V., Yushkanov A.A. Metod singulyarnykh integral'nykh uravnenii v granichnykh zadachakh kineticheskoi teorii [Method of singular integral equations in boundary problems of the kinetic theory] // Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika. Vol. 44 (4). no 3. pp. 855–870.
12. Latyshev A.V., Yushkanov A.A. Novyi metod resheniya granichnykh zadach kineticheskoi teorii [A new method for solving boundary problems of the kinetic theory] // Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki. 2012. Vol. 52. no. 3. pp. 539–552.
13. Latyshev A.V., Yushkanov A.A. Analiticheskoe reshenie granichnykh zadach kineticheskoi teorii: monografiya [Analytical solution of boundary problems of the kinetic theory: monograph]. M., MGOU, 2004. 286 p.
14. Latyshev A.V., Yushkanov A.A. Kineticheskie uravneniya tipa Vil'yamsa i ikh tochnye resheniya [The kinetic equation of Williams type and their exact solutions]. M., MGOU,

2005. 273 p.

15. Latyshev A.V., Yushkanov A.A. Teplovoe skol'zhenie dlya gaza s chastotoi stolknovenii, proporsional'noi skorosti molekul [Thermal slip for a gas with a collision frequency proportional to the speed of molecules] // Inzhenerno-fizicheskii zhurnal. 1998. Vol. 71. no. 2. pp. 353–359.
16. Lyubimova N.N. Tochnoe reshenie granichnoi zadachi o teplovom skol'zhenii dlya kvantovogo fermi-gaza [The exact solution of a boundary problem of the thermal slip for a quantum Fermi gas] // Doklady RAN. 2008. Vol. 422. no. 4. pp. 463–465.
17. Latyshev A.V., Lyubimova N.N., Yushkanov A.A. Teplovoe skol'zhenie fermi-gaza [Slide of the thermal Fermi gas] // Izvestiya vuzov. Seriya: Fizika. 2006. no. 7. pp. 11–17.
18. Latyshev A.V., Yushkanov A.A. Granichnye zadachi dlya kvantovykh gazov: monografiya [Boundary value problems for quantum gases: monograph]. M., MГОU, 2012. 265 p.

ИНФОМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Латышев Анатолий Васильевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа и геометрии, Московский государственный областной университет;
e-mail: avlatyshev@mail.ru

Юшканов Александр Алексеевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической физики, Московский государственный областной университет;
e-mail: yushkanov@inbox.ru

Корнеева Елена Евгеньевна – учитель, муниципальное образовательное учреждение «Осташевская средняя общеобразовательная школа», аспирант, Московский государственный областной университет;
e-mail: korneeva@yandex.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Latyshev Anatolii Vasil'evich – doctor of physical and mathematical sciences, professor of the Chair of Mathematical Analysis and Geometry at the Moscow State Regional University;
e-mail: avlatyshev@mail.ru

Yushkanov Aleksandr Alekseevich – doctor of physical and mathematical sciences, professor of the Chair of Theoretical Physics at the Moscow State Regional University;
e-mail: yushkanov@inbox.ru

Korneeva Elena Evgen'evna – teacher, municipal educational institution "Ostashevskaya Secondary School", post-graduate student, Moscow State Regional University;
e-mail: korneeva@yandex.ru

БИБЛИОГРАФИЧЕСКАЯ ССЫЛКА

Латышев А. В., Юшканов А. А., Корнеева Е. Е. Тепловое скольжение разреженного газа вдоль плоской поверхности с зеркально-диффузными граничными условиями // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2016. № 1. С. 60–73.

DOI: 10.18384/2310-7251-2016-1-60-73.

BIBLIOGRAPHIC REFERENCE

A. Latyshev, A. Yushkanov, E. Korneeva Thermal sliding of a rarefied gas along a flat surface with mirror-diffusion boundary conditions // Bulletin of Moscow State Regional University. Series: Physics and Mathematics. 2016. no. 1. pp. 60–73.

DOI: 10.18384/2310-7251-2016-1-60-73.

УДК 535.421+535.5

DOI: 10.18384/2310-7251-2016-1-74-87

ВЛИЯНИЕ ПРОФИЛЯ МИКРОРЕЛЬЕФА ПЕРИОДИЧЕСКИХ АНИЗОТРОПНЫХ СТРУКТУР НА ИХ ДИФРАКЦИОННЫЕ СВОЙСТВА

Соломатин А.С.

Московский государственный областной университет,

Учебно-научная лаборатория теоретических и практических нанотехнологий

105005, г. Москва, ул. Радио, д. 10а, Российская Федерация

Аннотация. Получены расчетные данные о влиянии профиля периодического микро рельефа на оптические дифракционные свойства. Предложен метод расчета дифракционной картины, позволяющий рассчитать параметры рельефа для задания требуемых оптических свойств пространственно неоднородной анизотропной структуры.

Ключевые слова: дифракция, оптическая анизотропия, двулучепреломление, микро рельеф, профиль рельефа, пространственно неоднородные структуры, оптические свойства.

EFFECT OF THE MICRORELIEF SURFACE OF PERIODIC ANISOTROPIC STRUCTURES ON THEIR DIFFRACTION PROPERTIES

A. Solomatina

Moscow State Region University, Education & Science Lab for Theoretical and Applied Nanotechnology,

ul. Radio 10A, 105005 Moscow, Russia

Abstract. We have obtained data on the effect of the periodic microrelief profile on optical diffraction properties. A method is proposed for calculating a diffraction pattern, which makes it possible to estimate the relief parameters for specified optical properties of a spatially nonuniform anisotropic structure.

Keywords: diffraction, optical anisotropy, birefringence, microrelief, relief profile, spatially nonuniform structures, optical properties.

1. Введение

Данная работа посвящена исследованию влияния профиля периодического микрорельефа на оптические дифракционные свойства пространственно неоднородной анизотропной структуры. Такие структуры пока еще недостаточно широко используются в дисплейных системах и других оптических элементах, хотя их использование позволяет получить некоторые преимущества перед известными устройствами за счет управления поляризацией излучения. Двулучепреломляющие свойства материалов имеют большое значение при изготовлении таких структур. При изготовлении возникают технологически наиболее удобные формы рельефа, которые актуально исследовать с целью определения методов расчета дифракционной картины, позволяющих рассчитать параметры рельефа для задания требуемых оптических свойств пространственно неоднородной анизотропной структуры.

Оптически анизотропные полимерные материалы с микрорельефом и процесс приготовления образцов описаны в [1–14]. Для компьютерного моделирования дифракции на структурах с пространственной периодичностью оптических параметров вещества и рельефа поверхности было рассмотрено прохождение света через слоистую двулучепреломляющую структуру с периодическим изменением показателей преломления и поверхностным микрорельефом. Использован метод расчета комплексной амплитуды световой волны при прохождении через последовательные слои структуры и дифракционной эффективности для нормального падения света, описанный в [6] и применявшийся в [14–20].

Возможно рассматривать любые направления падающей волны и ее поляризацию, любую ориентацию решетки (при условии постоянства тангенциальной составляющей вектора обратной решетки), любую анизотропию среды.

Описанный метод расчета дифракции на анизотропных решетках с периодическим микрорельефом обеспечивает высокую точность и простую процедуру счета. Такой метод может быть использован для управления направлением распространения и поляризации световых пучков света, проходящих через кристаллооптические среды с неоднородной поверхностью, для расчета однородной подсветки жидкокристаллических дисплеев при применении таких подложек в качестве пленок – усилителей яркости

(Brightness Enhancement Films), для расчета оптических характеристик ЖК дисплеев с неоднородным зазором, например, зенитно-бистабильных дисплеев (Zenithal Bistable Devices).

В данной работе этот метод использован для теоретического моделирования как отраженного, так и прошедшего сквозь решетку светового потока.

2. Компьютерное моделирование

2.1. Периодические структуры и параметры луча света

Сравнивались следующие типы:

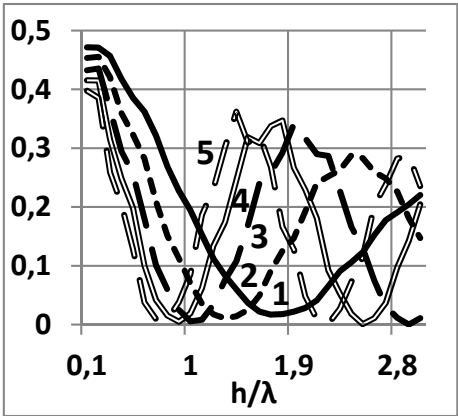
А) Синусоидальный, период 2,52 мкм (четыре длины волны), глубина рельефа от 0,1 до 3 длин волны (от 0,63 мкм до 1,89 мкм), подстилающий слой 0,63 мкм (учитывается дополнительно к слою с рельефом).

Б) Прямоугольный, период 2,52 мкм, ширина щели (борозды) 1,26 мкм, глубина рельефа от 0,1 до 3 длин волны (от 0,63 мкм до 1,89 мкм), подстилающий слой 0,63 мкм.

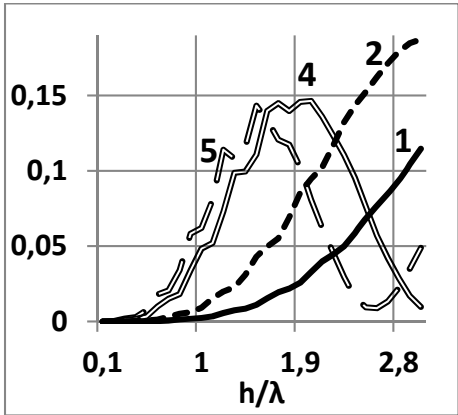
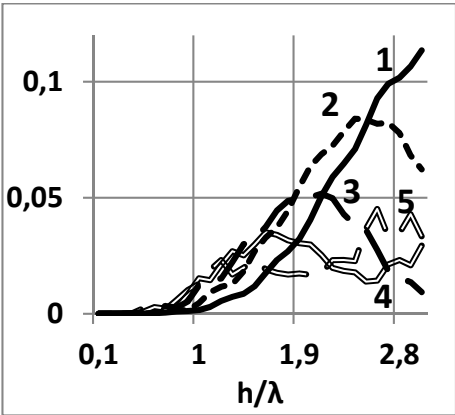
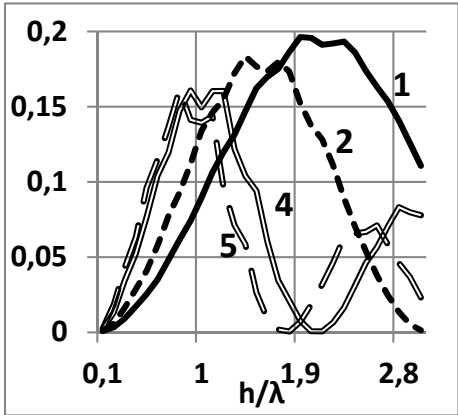
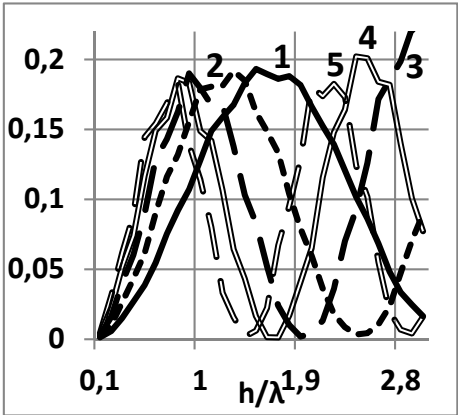
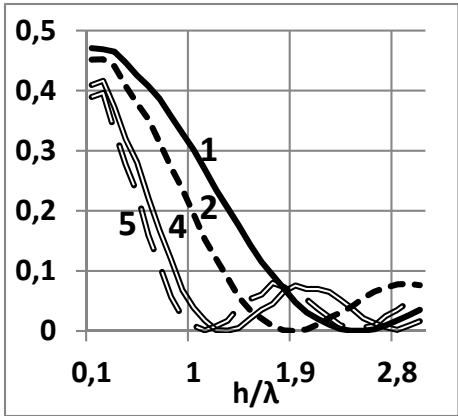
2.2. Результаты моделирования для дифракционной интенсивности прошедшей ТЕ волны (вектор E параллелен линиям рельефа)

На рис. 1 показаны результаты моделирования (прямоугольный рельеф) интенсивности прошедшей ТЕ волны I_0 , I_1 , I_2 , I_3 для дифракционных максимумов 0, 1, 2, 3 порядка. При нормальном падении луча света интенсивности в порядках с положительными и отрицательными номерами равны ($I_1=I_{-1}$, $I_2=I_{-2}$, $I_3=I_{-3}$). Сумма интенсивностей прошедших и отраженных ТЕ- и ТМ-волн принята за единицу, для каждого максимума показан его удельный вклад.

Прямоугольный профиль, ширина
борозды 1,26мкм



Синусоидальный профиль



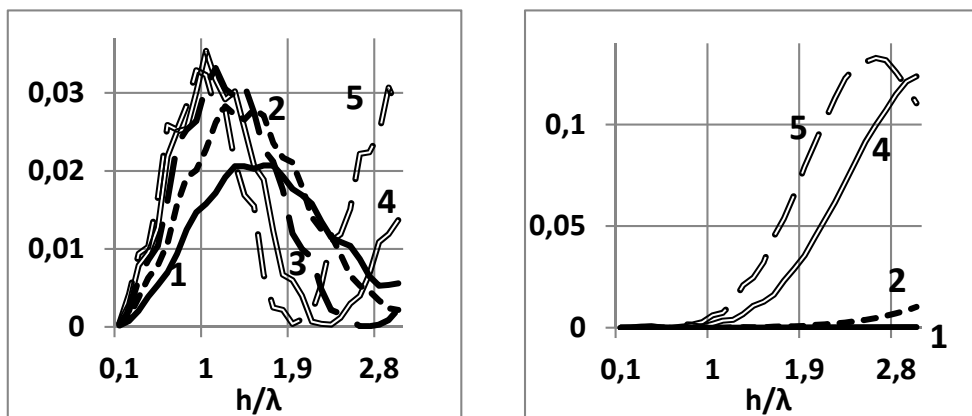
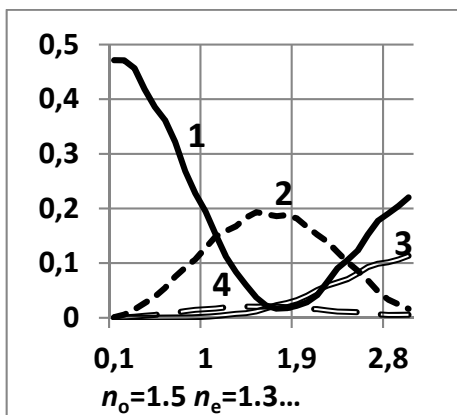


Рис. 1. Интенсивности дифракционных максимумов 0, 1, 2, 3 порядка (сверху вниз) для прошедшей ТЕ-волны для образцов с показателями преломления $n_o=1,5$ и n_e от 1,3 до 1,7, в зависимости от глубины рельефа, выраженной в длинах волны (h/λ). Цифрами обозначены

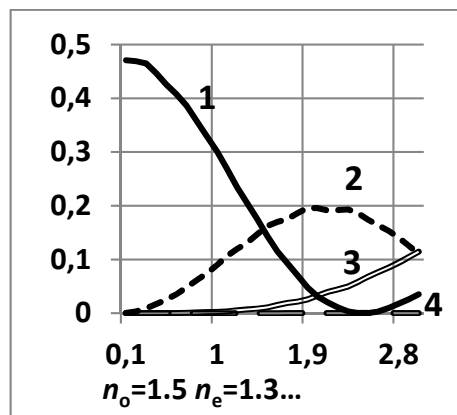
(1) $n_o=1,5$, $n_e=1,3$; (2) $n_o=1,5$, $n_e=1,4$; (3) $n_o=1,5$, $n_e=1,51$; (4) $n_o=1,5$, $n_e=1,6$; (5) $n_o=1,5$, $n_e=1,7$.

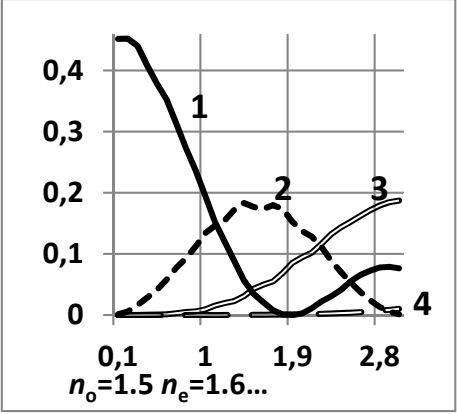
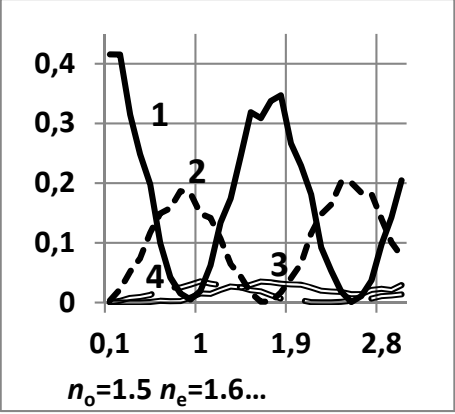
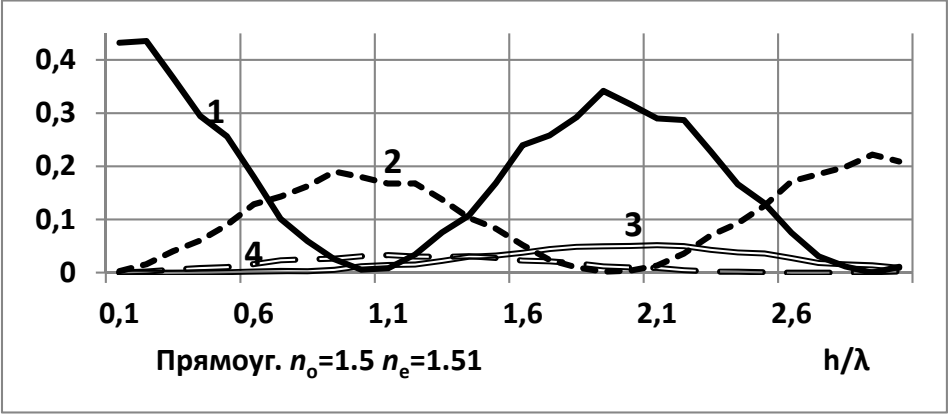
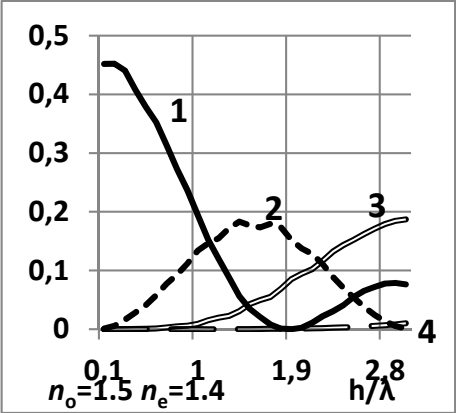
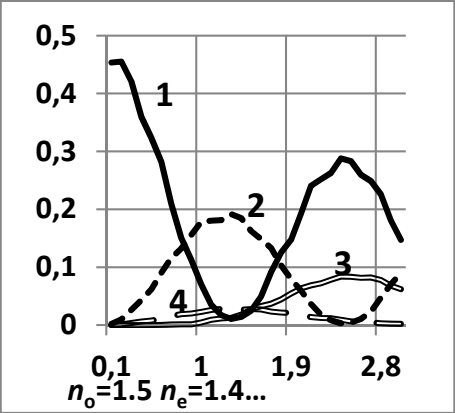
На рис. 2 показаны зависимости интенсивности в порядках дифракции от величины h/λ при $n_o=1,5$ и n_e от 1,3 до 1,7 (сверху вниз) для прошедшей ТЕ волны.

Прямоугольный профиль, ширина борозды
1,26мкм



Синусоидальный профиль





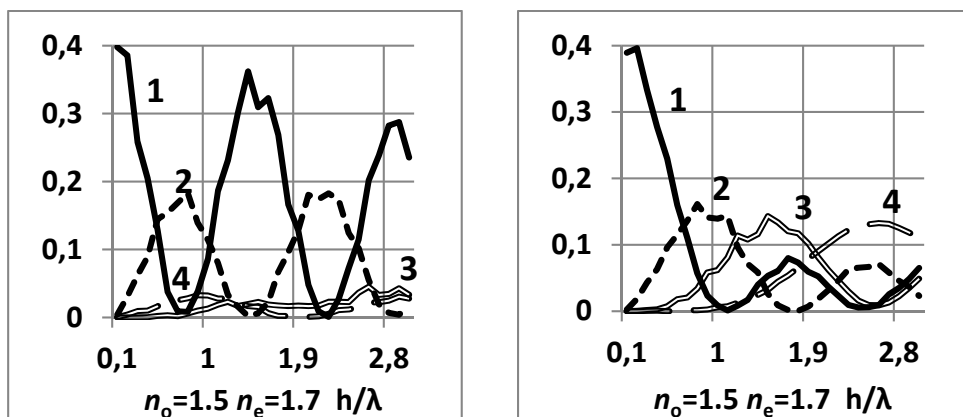


Рис. 2. Зависимость интенсивности в порядках дифракции от h/λ при $n_0=1,5$ и n_e от 1,3 до 1,7 (сверху вниз) для прошедшей ТЕ волны.

Цифрами обозначены

(1) 0-й максимум; (2) 1-й максимум; (3) 2-й максимум; (4) 3-й максимум

Рассмотрим сначала зависимости $I_n(h/\lambda)$ для разных порядков дифракции. Прежде всего отметим, что относительные интенсивности отраженных ТЕ- и ТМ-волн малы по сравнению с интенсивностями прошедших ТЕ- и ТМ-волн и составляют не более 0,01-0,02 (см. ниже). Это сравнимо с точностью вычислений. Поэтому в дальнейшем в статье почти везде речь идет об интенсивности дифракции прошедших волн. Проанализируем зависимости для ТЕ-волн, так как интенсивности дифракции ТМ-волн не зависят от оптической анизотропии материала.

Сравним зависимости $I_n(h/\lambda)$ для 0-го и 1-го порядков дифракции. Их экстремумы антикоррелируют – максимум зависимости $I_1(h/\lambda)$ приблизительно соответствует минимуму линии $I_0(h/\lambda)$ при $h/\lambda=0.85$. Это почти справедливо для прямоугольного рельефа, однако для синусоидального рельефа при $\Delta n=0,1$ первый минимум линии $I_0(h/\lambda)$ находится при $h/\lambda=1.3$, а первый максимум зависимости $I_1(h/\lambda)$ при $h/\lambda=1.1$. Однако для вторых экстремумов такая разница сглаживается. Первый максимум линии $I_0(h/\lambda)$ находится при $h/\lambda=2.0$, а первый минимум зависимости $I_1(h/\lambda)$ при $h/\lambda=2.1$.

Во всех расчетах при $h/\lambda \sim 0$ интенсивность $I_0 \sim 0.5$, а $I_1 \sim 0$. В случае прямоугольного рельефа интенсивность первого максимума в нулевом порядке составляет от 0.35 при $\Delta n=0.2$ до 0.2 при $\Delta n=-0.2$, т.е. убывает при уменьшении двулучепреломления. Но для синусоидального рельефа соответствующая

интенсивность в первом максимуме намного меньше. Она составляет около 0.07 и практически не зависит от Δn . Что касается интенсивности первого максимума в первом порядке дифракции, то для прямоугольного рельефа она практически не изменяется при уменьшении двулучепреломления, а для синусоидального растёт с 0.15 до 0.2 при уменьшении Δn с 0.2 до -0.2.

По мере увеличения показателя преломления n_e от 1,3 до 1,7 при постоянном значении $n_o=1,5$ дифракционные максимумы смещаются в сторону меньшей глубины рельефа (h/λ). Так, при уменьшении двулучепреломления Δn на 0,4 смещение первого минимума интенсивности дифракции нулевого порядка $I_0(h/\lambda)$ составляет в единицах h/λ -1,1 для прямоугольного рельефа или -1,4 h/λ для синусоидального рельефа. Для обоих типов микрорельефа можно ввести величину $\Delta(h/\lambda)/\Delta n \sim -2,75$ (прямоугольный) или $\Delta(h/\lambda)/\Delta n \sim -2,2$ (синусоидальный). Смещение первого минимума интенсивности дифракции первого порядка $I_1(h/\lambda)$ меньше – $\Delta(h/\lambda)/\Delta n \sim -1,25$ (прямоугольный) или $\Delta(h/\lambda)/\Delta n \sim -1,3$ (синусоидальный).

При сравнении дифракции на решетках с прямоугольным и синусоидальным микрорельефом смещение первого минимума интенсивности дифракции нулевого порядка $I_0(h/\lambda)$ при $\Delta n=-0,2$ составляет в единицах h/λ +0,4, если форма рельефа изменяется с прямоугольной и синусоидальную. В среднем смещение приведенной толщины, соответствующей первому экстремуму зависимости $I_n(h/\lambda)$ ($n=0,1,2,3$), при таком же изменении формы рельефа эффективно увеличивается в 1.5 раза для 0-го порядка, 1,25 раза для 1-го порядка, 1.1–1.2 раза для 2-го порядка, 2.7 раза для 3-го порядка.

Для второго и третьего порядков дифракции зависимости $I_n(h/\lambda)$ существенно отличаются от аналогичных линий для 0-го и 1-го порядков. Для $I_2(h/\lambda)$ и случая прямоугольного микрорельефа положение первого максимума по оси h/λ ($h/\lambda \sim 1.6$) приблизительно соответствует положению первого минимума зависимости $I_1(h/\lambda)$ $h/\lambda \sim 1.7$ при $\Delta n=0,1$. Для аналогичной зависимости при синусоидальном рельефе разница в положении экстремумов более выражена: максимум $I_2(h/\lambda)$ при $h/\lambda \sim 1.6$ и минимум $I_1(h/\lambda)$ при $h/\lambda \sim 2.0$.

Интенсивность первого максимума $I_2(h/\lambda)$ в случае прямоугольного микрорельефа растёт с 0.02 до 0.12 при изменении Δn от 0,2 до -0.2, а в случае синусоидального рельефа составляет 0.15 и слабо зависит от оптической анизотропии.

Для третьего порядка дифракции интенсивность первого максимума $I_3(h/\lambda)$ мала (около 0.02-0.03) в случае прямоугольного микрорельефа и в несколько раз выше (до 0.13) в случае синусоидального рельефа. Положение максимума $I_3(h/\lambda)$ по оси h/λ в случае прямоугольного микрорельефа промежуточное между соответствующими по номеру максимумами зависимостей $I_1(h/\lambda)$ и $I_2(h/\lambda)$. Но для синусоидального рельефа значение h/λ для первого максимума почти в три раза выше.

4. Влияние глубины рельефа

Как для синусоидального, так и для прямоугольного профиля дифракционной решетки с одинаковым периодом и диапазоном глубин характерны примерно одинаковые закономерности, описанные выше. При малой глубине решетки сходны и сами графики для обеих решеток, как показано выше. Однако при большой глубине решетки уже значительно различается расположение максимумов в единицах h/λ , при которых они расположены на графиках.

Следовательно, при малой глубине решетки основное значение имеет не ее профиль, а период. Надо отметить, что при малой глубине профиля и при тонком подстилающем слое будет малая суммарная толщина материала двулучепреломляющей решетки и малое двулучепреломление, то есть ситуация скорее может рассматриваться как обычная дифракция.

5. Выводы

Получены расчетные данные о влиянии профиля периодического микрорельефа как с положительной, так и с отрицательной оптической анизотропией, на оптические дифракционные свойства. Предложен метод расчета дифракционной картины, позволяющий рассчитать параметры рельефа для задания требуемых оптических свойств пространственно неоднородной анизотропной структуры. Получены расчетные данные о влиянии оптической анизотропии периодического микрорельефа как с положительной, так и с отрицательной оптической анизотропией, на оптические дифракционные свойства.

ЛИТЕРАТУРА

1. Беляев В.В. Применение подложек с различными микрорельефами поверхности в оптоэлектронике и устройствах отображения информации // Оптический журнал. 2005. Т. 72. № 9. С. 79.
2. Васильев А.А., Касасент Д., Компанец И.П., Парфенов А.В. Пространственные модуляторы света. М.: Радио и связь, 1987. 320 с.
3. Бакеев Н.Ф., Беляев В.В., Волынский А.Л., Иванов С.А., Коновалов В.А., Муравский А.А., Минько А.А., Чистовская Л.В., Яковенко С.Е. Изготовление полимерных подложек с периодическим микрорельефом и исследование их оптических свойств // Оптический журнал. 2001. Т. 68. № 9. С. 8995–9001.
4. Щуньянь Чжуан, Гун Жэньао. Рассеяние волн поверхностями с периодической структурой // Труды института инженеров по электротехнике и электронике. 1981. Т. 69. С. 43–56.
5. Belyaev V., Tsoy V., Tarasishin A. Modeling Optical Properties of Birefringent Substrates with Periodical Surface Microrelief for Application in Display Devices // Conf. proc. of The 22nd int. display research conf. Nice, France. 2002. pp. 413–416.
6. Цой В.И. Граничные матрицы передачи для световых волн в слоистой системе анизотропных диэлектрических решеток // Оптический журнал. 1999. Т. 66. № 6. С. 100–102.
7. Tsoy V., Belyaev V., Tarasishin A., Litovchenko D., Misnik V. Simulation of light propagation through birefringent substrates with periodical surface microrelief // Optics Communications. 2005. Vol. 246. pp. 57–66.
8. Tsoy V., Belyaev V., Tarasishin A., Trofimov S. Modelling the diffraction of light by structures with spatial periodicity of the optical parameters of the substance and of the surface relief // J. Optical Technology. 2003. Vol. 70. pp. 465–470.
9. Merkulov A., Belyaev V., Belyaev A., Gorbunov A. Diffraction on anisotropic substrates with sinusoidal surface microrelief // Molecular Crystals & Liquid Crystals. 2014. Vol. 596. pp. 122–127.
10. Belyaev V., Tsoy V., Kushnir E., Klyckov A., Kalashnikov A. Polarized light diffraction on anisotropic substrates with rectangular and sine microrelief // Journal of the SID. 2005. Vol. 13. pp. 305–308.
11. Belyaev V., Novikovich V., Denisenko P. Diffraction on birefringent elements with sine surface microrelief // Journal of the SID. 2008. Vol. 16. pp. 961–967.
12. Physical properties of stretched polymeric substrates with periodic microrelief for optical diffraction elements and liquid crystals alignment / Belyaev V., Chistovskaya L., Konovalov V., Muravsky A., Tarasishin A., Trofimov S., Tsoy V., Volynsky A., Yakovenko S. // Journal of the SID. 2003. Vol. 11. pp. 3–13.
13. Belyaev V. Using substrates with various surface microreliefs in optoelectronics and information-display devices // J. Optical Technology. 2005. Vol. 72. pp. 719–724.

14. Rokushima K., Yamakita J. Analysis of anisotropic dielectric gratings // J. Opt. Soc. Am. 1983. Vol. 73. pp. 901–908.
15. Rokushima K., Yamakita J. Analysis of diffraction in periodic liquid crystals: the optics of the chiral smectic C phase // J. Opt. Soc. Am. A. 1987. Vol. 4. pp. 27–33.
16. Mirotznik M., Prather D., Mait J., Beck W., Shi S., Gao X. Three-Dimensional Analysis of Subwavelength Diffractive Optical Elements with the Finite-Difference Time-Domain Method // Applied Optics-IP. 2000. Vol. 39. no. 17. pp. 2871–2880.
17. Оганесян Д.Л., Маргарян А.Л., Акопян Н.Г., Арутюнян В.М., Беляев В.В., Соломатин А.С. Управление излучением в среднем инфракрасном диапазоне длин волн с помощью жидкокристаллической фазовой решётки // Известия НАН Армении, Физика. 2015. Т. 50. № 1. С. 74–84.
18. Belyaev V., Merkulov A., Belyaev A., Solomatin A., Gorbunov A. Diffraction on Anisotropic Substrates with Surface Microrelief // Proc. EuroDisplay'11. Arcachon, France. 2011. pp. 121–124.
19. Соломатин А.С. Физические свойства конденсированных систем с неоднородной структурой в микро- и нанометровом диапазоне. Международная конференция «Физические свойства материалов и дисперсных сред для элементов информационных систем, нанoeлектронных приборов и экологичных технологий». МГОУ, Москва, 21–24 апреля 2015 г. С. 17.
20. Беляев В.В., Соломатин А.С., Маргарян А.Л., Абрамян В.К., Оганесян Д.Л., Акопян Н.Г., Арутюнян М.В. Дифракция света на решётках с периодическим микрорельефом при отрицательном знаке оптической анизотропии материала // Международная конференция «Физические свойства материалов и дисперсных сред для элементов информационных систем, нанoeлектронных приборов и экологичных технологий», МГОУ, Москва, 21–24 апреля 2015. С. 100.

REFERENCES

1. Belyaev V.V. Primenenie podlozhek s razlichnymi mikrorel'efami poverkhnosti v optoelektronike i ustroystvakh otobrazheniya informatsii [The use of substrates with different surface microreliefs in optoelectronics and display devices] // Opticheskii zhurnal. 2005. Vol. 72. no. 9. p. 79.
2. Vasil'ev A.A., Kasasent D., Kompanets I.P., Parfenov A.V. Prostranstvennye modulyatory sveta [Spatial light modulators]. M., Radio i svyaz', 1987. 320 p.
3. Bakeev N.F., Belyaev V.V., Volynskii A.L., Ivanov S.A., Kononov V.A., Muravskii A.A., Min'ko A.A., Chistovskaya L.V., Yakovenko S.E. Izgotovlenie polimernykh podlozhek s periodicheskim mikrorel'efom i issledovanie ikh opticheskikh svoistv [Fabrication of polymeric substrates with periodic microrelief and study of their optical properties] // Opticheskii zhurnal. 2001. Vol. 68. no. 9. pp. 8995–9001.

4. Shchunlyan Chzh., Gun Zh. Rasseyanie voln poverkhnostyami s periodicheskoi strukturoi [Wave scattering surfaces with a periodic structure] Trudy instituta inzhenerov po elektrotekhnike i elektronike [Proceedings of Institute of electrical and electronics engineers]. 1981. Vol. 69. pp. 43–56.
5. Belyaev V., Tsoy V., Tarasishin A. Modeling Optical Properties of Birefringent Substrates with Periodical Surface Microrelief for Application in Display Devices // Conf. proc. of The 22nd int. display research conf. Nice, France. 2002. pp. 413–416.
6. Tsoy V.I. Granichnye matritsy peredachi dlya svetovykh voln v sloistoi sisteme anizotropnykh dielektricheskikh reshetok [The boundary of the transfer matrix for light waves in a layered system of anisotropic dielectric gratings] // Opticheskii zhurnal. 1999. Vol. 66. no. 6. pp. 100–102.
7. Tsoy V., Belyaev V., Tarasishin A., Litovchenko D., Misnik V. Simulation of light propagation through birefringent substrates with periodical surface microrelief // Optics Communications. 2005. Vol. 246. pp. 57–66.
8. Tsoy V., Belyaev V., Tarasishin A., Trofimov S. Modelling the diffraction of light by structures with spatial periodicity of the optical parameters of the substance and of the surface relief // J. Optical Technology. 2003. Vol. 70. pp. 465–470.
9. Merkulov A., Belyaev V., Belyaev A., Gorbunov A. Diffraction on anisotropic substrates with sinusoidal surface microrelief // Molecular Crystals & Liquid Crystals. 2014. Vol. 596. pp. 122–127.
10. Belyaev V., Tsoy V., Kushnir E., Klyckov A., Kalashnikov A. Polarized light diffraction on anisotropic substrates with rectangular and sine microrelief // Journal of the SID. 2005. Vol. 13. pp. 305–308.
11. Belyaev V., Novikovich V., Denisenko P. Diffraction on birefringent elements with sine surface microrelief // Journal of the SID. 2008. Vol. 16. pp. 961–967.
12. Physical properties of stretched polymeric substrates with periodic microrelief for optical diffraction elements and liquid crystals alignment / Belyaev V., Chistovskaya L., Kononov V., Muravsky A., Tarasishin A., Trofimov S., Tsoy V., Volynsky A., Yakovenk S. // Journal of the SID. 2003. Vol. 11. pp. 3–13.
13. Belyaev V. Using substrates with various surface microreliefs in optoelectronics and information-display devices // J. Optical Technology. 2005. Vol. 72. pp. 719–724.
14. Rokushima K., Yamakita J. Analysis of anisotropic dielectric gratings // J. Opt. Soc. Am. 1983. Vol. 73. pp. 901–908.
15. Rokushima K., Yamakita J. Analysis of diffraction in periodic liquid crystals: the optics of the chiral smectic C phase // J. Opt. Soc. Am. A. 1987. Vol. 4. pp. 27–33.

16. Mirotznik M., Prather D., Mait J., Beck W., Shi S., Gao X. Three-Dimensional Analysis of Subwavelength Diffractive Optical Elements with the Finite-Difference Time-Domain Method // *Applied Optics-IP*. 2000. Vol. 39. no. 17. pp. 2871–2880.
17. Oganessian D.L., Margaryan A.L., Akopyan N.G., Arutyunyan V.M., Belyaev V.V., Solomatin A.S. Upravlenie izlucheniem v srednem infrakrasnom diapazone dlin voln s pomoshch'yu zhidkokristallicheskoj fazovoi reshetki [Management of radiation in the middle infrared range of wavelengths using liquid crystal phase gratings] // *Izvestiya NAN Armenii, Fizika*. 2015. Vol. 50. no. 1. pp. 74–84.
18. Belyaev V., Merkulov A., Belyaev A., Solomatin A., Gorbunov A. Diffraction on Anisotropic Substrates with Surface Microrelief // *Proc. EuroDisplay'11*. Arcachon, France. 2011. pp. 121–124.
19. Solomatin A.S. Fizicheskie svoystva kondensirovannykh sistem s neodnorodnoi strukturoi v mikro- i nanometrovoe diapazone [The physical properties of condensed matter systems with a non-uniform structure in the micro- and nanometer range] // *Mezhdunarodnaya konferentsiya «Fizicheskie svoystva materialov i dispersnykh sred dlya elementov informatsionnykh sistem, nanoelektronnykh priborov i ekologichnykh tekhnologii»* [International conference "Physical properties of disperse materials and environments to elements of information systems, nanoelectronic devices and environmentally friendly technologies"]. M., MGOU, 21–24 April 2015, p. 17.
20. Belyaev V.V., Solomatin A.S., Margaryan A.L., Abramyan V.K., Oganessian D.L., Akopyan N.G., Arutyunyan M.V. Difraktsiya sveta na reshetkakh s periodicheskim mikrorel'efom pri otritsatel'nom znake opticheskoi anizotropii materiala [The light diffraction on lattices with periodic microrelief with a negative sign of the optical anisotropy of the material] // *Mezhdunarodnaya konferentsiya «Fizicheskie svoystva materialov i dispersnykh sred dlya elementov informatsionnykh sistem, nanoelektronnykh priborov i ekologichnykh tekhnologii»*, MGOU, Moskva, 21–24 aprelya [International conference "Physical properties of disperse materials and environments to elements of information systems, nanoelectronic devices and environmentally friendly technologies", MGOU, Moscow, 21–24 April]. M. P. 100.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Соломатин Алексей Сергеевич – кандидат физико-математических наук, инженер учебно-научной лаборатории теоретической и прикладной нанотехнологии, Московский государственный областной университет;
e-mail: Sotrudnica_UNC@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Solomatin Aleksei Sergeevich – candidate of physical and mathematical sciences, engineer of the Education & Science Lab for Theoretical and Applied Nanotechnology at the Moscow State Regional University;

e-mail: Sotrudnica_UNC@mail.ru

БИБЛИОГРАФИЧЕСКАЯ ССЫЛКА

Соломатин А.С. Влияние профиля микрорельефа периодических анизотропных структур на их дифракционные свойства // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2016. № 1. С. 74–87.

DOI: 10.18384/2310-7251-2016-1-74-87.

BIBLIOGRAPHIC REFERENCE

A. *Solomatin* Effect of the microrelief surface of periodic anisotropic structures on their diffraction properties // Bulletin of Moscow State Regional University. Series: Physics and Mathematics. 2016. no. 1. pp. 74–87.

DOI: 10.18384/2310-7251-2016-1-74-87.

УДК 538.945

DOI: 10.18384/2310-7251-2016-1-88-97

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТОКА В СВЕРХПРОВОДЯЩЕМ УЧАСТКЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ПРОВОДА *

Алиев И.Н., Самедова З.А

*Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана
105005, г. Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, Российская Федерация*

Аннотация. Рассматривается в классической постановке задача о постоянном токе в цилиндрическом проводнике с вставкой конечной длины из сверхпроводника. Приводится полученное решение без учета граничного растекания тока. Показано, что в рамках предложенной авторами модели имеется принципиально другое решение. *Постоянный ток*, как было показано авторами в предыдущей работе, в проводнике любого типа вытесняется на поверхность вместе с магнитным полем, что приводит к появлению так называемого поверхностного тока. Этот ток можно рассматривать как объемный, но протекающий в некотором тонком слое *конечной* толщины. И, поскольку эта толщина не зависит от материала и природы проводника, можно считать, что он порядка характерной глубины проникновения магнитного поля в сверхпроводнике согласно теории Лондонов.

Ключевые слова: сверхпроводник, уравнения Лондонов, уравнения Максвелла, уравнение Лапласа, поверхностные и объемные токи, граничные условия в магнетизме, магнитные заряды.

CURRENT DISTRIBUTION IN A SUPERCONDUCTING SEGMENT OF A CYLINDRICAL WIRE

I. Aliev, Z. Samedova

*Bauman Moscow State Technical University,
ul. 2-ya Baumanskaya 5, 105005 Moscow, Russia*

Abstract. We consider the classical formulation of the problem of the direct current in a cylindrical conductor with an embedded superconductor of finite length. We present the

©Алиев И.Н., Самедова З.А., 2016

*Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (Проект №3.1526.2014/К)

solution obtained without boundary current spreading. It is shown that the authors' model has a fundamentally different solution. The direct current, as was shown in the previous work of the authors, is pushed in any type of a conductor to the surface together with the magnetic field, which leads to the so-called surface current. This current can be regarded as a volume one but flowing in a thin layer of finite thickness. Because this thickness does not depend on the thickness of the material and the nature of the conductor, it can be assumed that it is on the order of the characteristic depth of penetration of the magnetic field into the superconductor according to London's theory.

Key words: superconductor, London equation, Maxwell's equations, Laplace equation, surface and volume currents, boundary conditions in magnetism, magnetic charges.

1. Рассмотрим практически значимую задачу о постоянном токе в неоднородной цепи, одно из звеньев которой является сверхпроводником. Экспериментально подобную задачу реализовать несложно: для этого надо рассмотреть контакт двух материалов, один из них, у которого критическая температура выше экспериментальной, ведет себя как сверхпроводник, а у другого критическая температура, соответственно, ниже. Общепринятый подход к решению этой задачи выглядит следующим образом. Предположим, что у бесконечно длинного кругового цилиндрического провода есть участок от $z = -b$ до $z = b$, который является сверхпроводником (рис. 1), а участки провода до $z = -b$ и после $z = b$ выполнены из нормального материала. Пусть по проводнику течет постоянный электрический ток, заданной силы I . Требуется найти распределение тока по объему и поверхности цилиндрического провода.

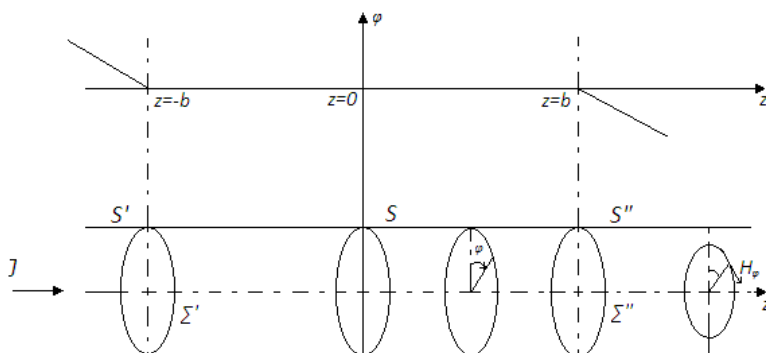


Рис. 1. Схема контакта в составной цепи – сверхпроводник и обычный проводник.

Видимо, впервые эта задача решалась в базовой работе Лондонов [1; 4], в которой исследовалась глубина проникновения магнитного поля и тока в сверхпроводник. В настоящей работе в рамках уравнений Максвелла вначале мы попытаемся показать внутреннюю непротиворечивость задачи. Используется также открытое Мейсснером и Оксенфельдом [2] основное свойство сверхпроводников – выталкивать магнитные поля на поверхность.

Так как магнитное поле внутри сверхпроводника равно нулю, то полная объемная плотность тока (истинная и намагничивания) также равна нулю внутри сверхпроводящего цилиндрического участка. Следовательно, может считаться общепринятым фактом: по сверхпроводящему участку цилиндра может течь только поверхностный ток.

2. Решим сначала задачу о распределении тока в нормальных участках цилиндрического провода. Используем следующие уравнения:

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0, \quad \vec{j} = \sigma \vec{E}, \quad \vec{E} = -\nabla \varphi, \quad (1)$$

где σ – электропроводность нормального металла цилиндрического провода. Первое очевидное граничное условие на боковой цилиндрической поверхности S' и S'' имеет вид: $j_n|_{S', S''} = 0$, где S' , S'' – боковые поверхности нормального участка. Рассмотрим теперь второе граничное условие. Поверхности Σ' и Σ'' , ограничивающие нормальные участки цилиндрического провода от центрального сверхпроводящего участка, имеют одинаковый электрический потенциал. Действительно, поверхность сверхпроводника является эквипотенциальной поверхностью, так как электрической поле в любой точке внутри сверхпроводника равно нулю $\vec{E} = 0$. Таким образом, на поверхностях Σ' и Σ'' имеем условие: $\varphi|_{\Sigma', \Sigma''} = \varphi_0$, где φ_0 – некоторая постоянная. Значит, для потенциала внутри нормальных участков цилиндрического провода нужно решить уравнение Лапласа:

$$\Delta \varphi = 0 \quad (2)$$

со следующими граничными условиями:

$$\varphi|_{\Sigma', \Sigma''} = \varphi_0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n}|_{S', S''} = 0. \quad (3)$$

Легко убедиться непосредственной подстановкой, что решением этой задачи является потенциал φ постоянный на любом сечении Σ провода и линейно убывающий при увеличении Z . На рис. 1 показан график зависимости $\varphi = \varphi(z)$, отсчитываемой вдоль цилиндрического провода. Заметим, что наклон

прямых на рисунке, равный k ($k > 0$), может быть каким угодно. Аналитически можно записать:

$$\varphi = \varphi_0 - k(z + b) \text{ при } z < -b$$

$$\varphi = \varphi_0 - k(z - b) \text{ при } z > b.$$

$$\text{Откуда: } E_z = -\frac{d\varphi}{dz} = k, \quad j_z = \sigma k.$$

Следовательно, ток распределен по сечению нормальной части цилиндра равномерно. Константу k можно определить из условия:

$$I = \pi a^2 j_z = \pi a^2 k \quad k = \frac{I}{\pi a^2}$$

Как видим, электрический ток I равномерно распределен по сечению прямых участков провода. Он натекает равномерным потоком и упирается в поверхность Σ' . Далее в объеме сверхпроводника этот ток течь не может. Электрический ток превратится в поверхностный ток, который сначала будет растекаться по радиусам круговой поверхности Σ' и, в конце концов, протечет через окружность, ограничивающую поверхность Σ' и лежащую на поверхности цилиндрического провода. Затем ток I будет течь по поверхности сверхпроводящего участка, а потом, пройдя через окружность, ограничивающую поверхность Σ'' , он начнет двигаться по радиусам к центру поверхности Σ'' . При этом от этого поверхностного тока будет отрываться объемный ток, который равномерным потоком будет течь далее в нормальной части провода, расположенной справа от поверхности Σ'' . Естественно, в переходных областях (вблизи Σ' и Σ'') картина распределения токов намного сложнее.

Подтвердим указанную интересную физическую картину непосредственными расчетами. Для этого определим индукцию $\vec{B}$ в пространстве около цилиндрического провода и внутри него. Поле вне провода ($r > a$) на всем участке одинаково и находится обычным способом:

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = I \quad H \equiv H_\varphi = \frac{I}{2\pi r}.$$

При $r < a$ магнитное поле внутри сверхпроводящего участка равно нулю, а внутри нормального участка снова определяется из теоремы Стокса:

$$2\pi H_\varphi = j\pi r^2 = \frac{I}{\pi a^2} \pi r^2 \quad H_\varphi = \frac{I r}{2\pi a^2}.$$

Плотность поверхностных токов, у которых нас интересуют азимутальные

(тангенциальные) составляющие, могут быть вычислены по стандартным формулам граничного условия:

$$\begin{cases} [\vec{H} - \vec{H}_0, \vec{n}]|_s = \vec{i} \\ (\vec{B} - \vec{B}_0, \vec{n}) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Азимутальные составляющие найдем с помощью первого из этих уравнений.

Для поверхностей S' и S'' : $\vec{H} = \vec{H}_0$ и поэтому $\vec{i} = 0$

Для сверхпроводящей поверхности из этого же уравнения следует: $i_z = \frac{I}{2\pi a}$.

Полный поверхностный ток в сверхпроводнике равен: $I' = i_z 2\pi a = I$, как и должно быть по закону сохранения тока.

3. При решении этой задачи использовался общеизвестный факт: магнитное поле в сверхпроводнике равно нулю. При этом мы предполагали равенство нулю напряженности магнитного поля. Что интересно, если в упомянутой выше первой работе Лондонов [1] фигурировала именно напряженность магнитного поля, то уже в следующей работе, изданной годом позже, произошел переход к записи в терминах магнитной индукции [3, формула 2A], причем из-за использования абсолютной системы единиц переход от одной формы записи к другой выглядел предельно простым: $\vec{B} = \vec{H}$. Ясно, что при подобной записи магнитные свойства вещества полностью игнорируются, однако в дальнейшем в большинстве классических задачах об ослаблении поля в сверхпроводниках используется именно этот подход [4]. Ясно, что даже при простом переходе к другой системе единиц появляются множители, не говоря уже о магнитной проницаемости вещества.

В предыдущем разделе расчеты базировались на первом из граничных условий (4) с учетом $\vec{H} = 0$. Это условие естественным образом получается из уравнений Максвелла, достоверность которых никоим образом не вызывает сомнений. Более подробно этот вопрос анализируется в работе авторов [5]. Если же перейти к подходу $\vec{B} = 0$, то задача физически простого решения не имеет.

В связи со всем вышесказанным возникает естественный вопрос – в чем физический смысл и отличие векторов $\vec{H}$ и $\vec{B}$? Почему магнитное поле в намагниченной среде характеризуется не одним, а сразу двумя векторами? Часто на эти вопросы отвечают так, как на них ответил еще В. Томсон

(K.W. Thomson. Reprint of papers on electrostatics and magnetism. 1872), и говорят, что $\vec{B}$ – это вектор, определяющий силу, действующую на точечный магнитный заряд g , помещенный в полость, вырезанную в намагничивающейся среде в виде бесконечно тонкого диска перпендикулярно силовой линии. Указанная сила равна $\vec{F} = g\vec{B}$. Вектор $\vec{H}$ – это вектор, определяющий силу, действующую на точечный магнитный заряд g , помещенный в полость в виде бесконечно тонкого длинного цилиндра, вырезанного в намагничивающейся среде вдоль магнитной силовой линии. В этом случае сила равна $\vec{F} = g\vec{H}$ (рис. 2)

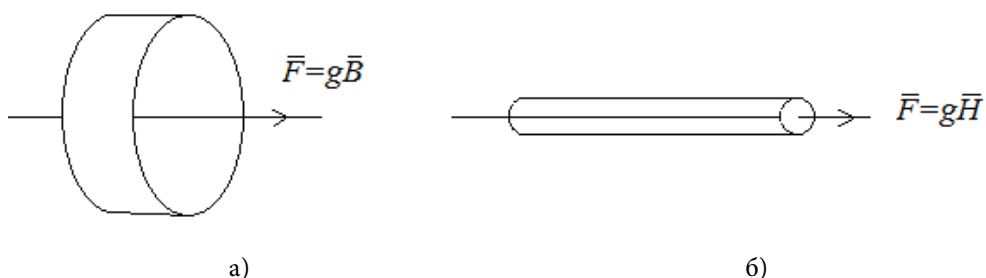


Рис. 2. Схема экспериментального способа определения $\vec{H}$ и $\vec{B}$.

Такой ответ на поставленные вопросы, разумеется, нельзя считать полным, хотя он и указывает, конечно, простые экспериментальные способы измерения векторов $\vec{H}$ и $\vec{B}$ внутри намагничивающейся среды. В нашем исследовании, в отличие от работы авторов [5], мы не используем понятие магнитных зарядов, поэтому подход через магнитный закон Кулона здесь неприемлем.

Анализируя полученное, можно попытаться сформулировать физический смысл магнитных векторов $\vec{H}$ и $\vec{B}$ следующим образом. Какое из этих магнитных полей следует считать истинным магнитным полем намагниченного образца? Намагниченность образца, по гипотезе Ампера, является проявлением имеющих внутримолекулярных и внутриатомных электрических токов, то есть, в конечном счете, связана с магнетизмом токов. Поэтому магнитное поле $\vec{B}$ является истинным магнитным полем, оно имеет реальный физический смысл, в то время как магнитное поле $\vec{H}$ внутри образца физического смысла не имеет. Это формальное математическое поле. Такой категоричный ответ, по-видимому, не верен, так как с атомно-молекулярной

точки зрения, кроме магнетизма внутримолекулярных и внутриатомных электрических токов существует магнетизм спиновых магнитных дипольных моментов электронов и атомных ядер. Последний, как известно, к магнетизму электрических токов свести, по-видимому, нельзя. Для того, чтобы ответить на вопрос о том, как следует определять истинное магнитное поле внутри намагничивающегося материала, необходимо, по-видимому, покинуть феноменологический подход и заняться выяснением в каждой конкретной ситуации микроскопической атомно-молекулярной физической природы вектора намагничивания $\vec{M}$.

4. В чисто формальной постановке задачи мы использовали, казалось бы, довольно простое условие – в цилиндрическом сечении сплошной твердой среды равномерно распределен ток с объемной плотностью, определяемой стандартным образом $\vec{j} = \frac{dI}{dS}$. Однако в этой ситуации возникает вопрос об отсутствии поверхностного тока. Конечно, в принципе, возможно плавное зануление тока к периферии, но тогда не ясен механизм этого явления, в каком-то смысле обратный эффекту Мейсснера. Интересно отметить, что принципиально невозможно прямым экспериментом измерить объемную плотность тока в толще *сплошного твердого тела*.

5. В работе авторов [6] для нахождения равновесного распределения поверхностных и объемных *стационарных* токов в сплошном теле была применена термодинамическая гипотеза Гиббса, позволяющая решить задачу с помощью магнитного принципа виртуальных работ. Вариация магнитной энергии рассматривалась с дополнительными условиями, определяющими постоянство токов, два из которых, носящих дифференциальный характер, необходимы и достаточны для решения задачи в случае односвязного тела. Если же рассматриваемое тело двусвязное (тор, толстое кольцо) оказывается необходимым ввести еще одно условие. В работе показано, что этим условием, заодно обеспечивающим условие единственности решения, может быть или постоянство тока, протекающего через поперечное сечение тора, или задание постоянного потока магнитной индукции через отверстие тора. При постановке задачи был выбран первый вариант как более наглядный. Задача была решена с помощью метода множителей Лагранжа. Основным полученным результатом является то обстоятельство, что индукция магнитного поля и

объемный ток внутри сплошного твердого проводника обращаются в нуль, то есть магнитное поле вместе с токами выдавливается на поверхность. Единственное условие, как и было указано – *постоянство токов*. В этом случае предлагаемая нами модель выглядит следующим образом. Никаких переходных процессов физических величин на границах раздела сред Σ' и Σ'' нет. На всем протяжении проводников по их цилиндрическим поверхностям текут токи одной и той же величины, так как структура среды согласно результатам, полученным в [6], не влияет на поведение токов. И, самое главное, под поверхностным током мы понимаем ток, в каком-то смысле объемный, текущий в тонком приповерхностном слое *конечной толщины*, причем эта толщина соизмерима с глубиной проникновения магнитного поля в сверхпроводник. В этом случае большинство вопросов, возникших при решении поставленной задачи, снимаются. Учитывая, что толщина слоя проникновения для сверхпроводников просчитывается с помощью уравнений Лондонов [8] и измеряется экспериментально (так, для $Nb \delta = 10^{-6}$ см), можно считать, что именно нанослой с такой толщиной и есть область, в которой распространяется поверхностный ток. Интересно также отметить, что принципиально, в отличие от объемных токов, поверхностные можно экспериментально померить – ведь инородные проводящие вкрапления в поверхность, согласно нашей теории, не должны искажать общую картину. Авторы понимают, что ряд положений предлагаемой работы являются дискуссионными и поэтому будут признательны за любые замечания по сути изложения.

Мы благодарим С.О. Юрченко, который при обсуждении работы [9] указал на еще одно важное, на наш взгляд, обстоятельство. Если верна теория о поверхностном характере всех постоянных токов, то тогда находит объяснение общеизвестный экспериментальный факт о том, что при разогревании проводников постоянными токами плавление последних начинается с поверхности. Это обстоятельство может быть использовано в качестве верхнего ограничения силы постоянного тока в проводнике.

Мы приносим благодарности В.В. Толмачеву, при обсуждении с которым статьи [7] и родилась идея настоящего исследования, А.М. Макарову и А.Н. Морозову за постоянный интерес к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. London H. The electromagnetic equations of the superconductor // Proc. Roy. Soc. 1935. Vol. 149. pp. 71–88.
2. Meissner W., Ochsenfeld R. Ein neuer effekt bei eintritt der supraleitfähigkeit // Naturwissenschaften. 1933. Vol. 21. Issue 44. pp. 787–788.
3. London H. Phase-equilibrium of superconductors in a magnetic field // Proc. Roy. Soc. 1935. Vol. 152. pp. 650–663.
4. Линтон Э., Мак-Лин У. Сверхпроводники II рода // Успехи физических наук. 1969. Т. 97. № 3. С. 495–523.
5. Алиев И.Н., Копылов И.С. Использование формализма монополей Дирака в некоторых задачах магнетизма // Вестник МГТУ. Серия: Естественные науки. 2015. № 6. С. 25–39.
6. Алиев И.Н., Копылов И.С. Применение метода множителей Лагранжа к вычислению магнитного поля постоянного тока // Динамика сложных систем. 2015. № 4. С. 3–10.
7. de Llano M., Tolmachev V. Multiple phases in a new statistical boson-fermion model of superconductivity // Physica A. Vol. 317. 2003. pp. 546–564.
8. Алиев И.Н., Меликянц Д.Г. О теоремах Пойтинга и Абрагама в электродинамике сверхпроводников Лондонов // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2015. № 4. С. 83–91.
9. Yurchenko S., Komarov K., Pustovoi V. Multilayer-graphene-based amplifier of surface acoustic waves. AIP advances 5, 057144. (2015).

REFERENCES

1. London H. The electromagnetic equations of the superconductor // Proc. Roy. Soc. 1935. Vol. 149. pp. 71–88.
2. Meissner W., Ochsenfeld R. Ein neuer effekt bei eintritt der supraleitfähigkeit // Naturwissenschaften. 1933. Vol. 21. Issue 44. pp. 787–788.
3. London H. Phase-equilibrium of superconductors in a magnetic field // Proc. Roy. Soc. 1935. Vol. 152. pp. 650–663.
4. Linton E., Mak-Lin U. Sverkhprovodniki II roda [The type-II superconductors] // Uspekhi fizicheskikh nauk. 1969. Vol. 97. no. 3. pp. 495–523.
5. Aliev I.N., Kopylov I.S. Ispol'zovanie formalizma monopolei Diraka v nekotorykh zadachakh magnetizma [Using the formalism of Dirac monopoles in some problems of magnetism] // Vestnik MGTU. Seriya: Estestvennye nauki. 2015. no. 6. pp. 25–39.
6. Aliev I.N., Kopylov I.S. Primenenie metoda mnozhitelei Lagranzha k vychisleniyu magnitnogo polya postoyannogo toka [The application of the method of Lagrange

- multipliers to the calculation of the DC magnetic field] // *Dinamika slozhnykh sistem*. 2015. no. 4. pp. 3–10.
7. de Llano M., Tolmachev V. Multiple phases in a new statistical boson-fermion model of superconductivity // *Physica A*. no. 317. 2003. pp. 546–564.
8. Aliev I.N., Melikyants D.G. O teoremakh Poitinga i Abragama v elektrodinamke sverkhprovodnikov Londonov [On theorems of Poynting and Abraham in electrodynamics of London superconductors] // *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika*. 2015. no. 4. pp. 83–91.
9. Yurchenko S., Komarov K., Pustovoi V. Multilayer-graphene-based amplifier of surface acoustic waves. *AIP advances* 5, 057144. (2015).
-

ИНФОМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Алиев Исмаил Новруз оглы – доктор физико-математических наук, профессор кафедры физики, Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана;
e-mail: alievprof@yandex.ru

Самедова Зарифа Алышан кызы – студент Московского государственного технического университета им. Н. Э. Баумана;
e-mail: samezara@bk.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Aliev Ismail Novruz ogly – doctor of physical and mathematical sciences, professor of the Chair of Physics at the Bauman Moscow State Technical University; e-mail: alievprof@yandex.ru

Samedova Zarifa Alyshan kyzy – student at the Bauman Moscow State Technical University, e-mail: samezara@bk.ru

БИБЛИОГРАФИЧЕСКАЯ ССЫЛКА

Алиев И.Н., Самедова З.А. Распределение тока в сверхпроводящем участке цилиндрического провода // *Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика*. 2016. № 1. С. 88–97.

DOI: 10.18384/2310-7251-2016-1-88-97.

BIBLIOGRAPHIC REFERENCE

I. Aliev, Z. Samedova Current distribution in a superconducting segment of a cylindrical wire // *Bulletin of Moscow State Regional University. Series: Physics and Mathematics*. 2016. no. 1. pp. 88–97.

DOI: 10.18384/2310-7251-2016-1-88-97.

УДК 537.635+537.9

DOI: 10.18384/2310-7251-2016-1-98-107

ЭЛЕКТРОННЫЙ ПАРАМАГНИТНЫЙ РЕЗОНАНС РАДИАЦИОННЫХ ПАРАМАГНИТНЫХ ЦЕНТРОВ В ОБЛУЧЕННЫХ ЭЛЕКТРОНАМИ НАТРИЙ-АЛЮМО-ФОСФАТНЫХ СТЕКЛАХ

**Богомолова Л.Д.¹, Жачкин В.А.², Новичков К.К.², Стефановский С.В.³,
Тарасова В.В.⁴**

¹Научно-исследовательский институт ядерной физики им. Д.В. Скобельцына
Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова,
119991, г. Москва, Ленинские горы, 1, строение 2, НИИЯФ МГУ, Российская
Федерация

²Московский государственный областной университет
105005, г. Москва, ул. Радио, д. 10А, Российская Федерация

³Институт физической химии и электрохимии им. А.Н. Фрумкина РАН,
119071, г. Москва, Ленинский проспект, 31, корп. 4, Российская Федерация

⁴Физический факультет Московского государственного университета
им. М.В. Ломоносова,
119991, г. Москва, Ленинские горы, 1, стр. 2, Физический факультет, Российская
Федерация

Аннотация. Фосфатные стекла (в мол.%) $40\text{Na}_2\text{O}-20\text{Al}_2\text{O}_3-40\text{P}_2\text{O}_5$ (серия I) и $40\text{Na}_2\text{O}-15\text{Al}_2\text{O}_3-5\text{Fe}_2\text{O}_3-40\text{P}_2\text{O}_5$ (серия II) были облучены электронами с энергией 8 МэВ и дозами, эквивалентными 0,5 и 1,0 МГр. Спектры ЭПР всех стекол измерены при комнатной температуре. Установлено, что облучение приводит к образованию фосфор-кислородных дырочных центров PO_4^{2-} (D5), ион-радикалов PO_3^{2-} (D2) и РПЦ D_6 с $g = 2.006$ и $A = 0,75$ мТл, которые могут быть связаны со структурными единицами Q^3 в стеклах. Эти РПЦ наблюдались в спектрах ЭПР стекол серии I, не содержащих Fe_2O_3 . В облученных электронами стеклах серии II с 5 mol.% Fe_2O_3 фосфор-кислородные центры практически исчезают и в спектрах ЭПР наблюдаются интенсивные широкие линии, обусловленные ионами Fe(III) .

Ключевые слова: электронный парамагнитный резонанс, радиационные парамагнитные центры, электронное облучение, фосфатные стекла, сверхтонкая структура.

ELECTRON PARAMAGNETIC RESONANCE OF RADIATION PARAMAGNETIC CENTERS IN ELECTRON IRRADIATED SODIUM ALUMINIUM PHOSPHATE GLASSES

L. Bogomolova¹, V. Zhachkin², K. Novichkov², S. Stefanovsky³, V. Tarasova⁴

¹Skobel'tsyn Research Institute of Nuclear Physics, M.V. Lomonosov Moscow State University,

Vorob'evy gory, 11991, Moscow, Russia

²Moscow State Regional University,

ul. Radio 10A, 105005 Moscow, Russia

³A.N. Frumkin Institute of Physical Chemistry and Electrochemistry, Russian Academy of Sciences,

Leninsky prosp. 31, korpus 4, 119071 Moscow, Russia

⁴Physical Department, M.V. Lomonosov Moscow State University,

Vorob'evy gory, 119991 Moscow, Russia

Abstract. Phosphate glasses (in mol%) $40\text{Na}_2\text{O}-20\text{Al}_2\text{O}_3-40\text{P}_2\text{O}_5$ (series I) and $40\text{Na}_2\text{O}-15\text{Al}_2\text{O}_3-5\text{Fe}_2\text{O}_3-40\text{P}_2\text{O}_5$ (series II) were irradiated with 8 MeV electrons to doses equivalent to 0.5 and 1.0 MGy. ESR spectra of all the glasses were recorded at room temperature. It was found that irradiation leads to the formation of phosphorus-oxygen hole centers PO_4^{2-} (D_5), PO_3^{2-} ion-radicals (D_2) and centers (D_6) associated with the Q^3 units. ESR spectra of these radiation paramagnetic centers were observed in series-I glasses that do not contain Fe_2O_3 . In electron irradiated series-II glasses with 5 mol% Fe_2O_3 , phosphorus-oxygen centers almost disappear and ESR spectra exhibit intense broad lines caused by Fe (III) ions.

Key words: electron paramagnetic resonance, radiation-induced paramagnetic centers, electron irradiation, phosphate glass, hyperfine structure.

Введение

Натрий-алюмо-фосфатные (NaAlP)-стекла представляют интерес для некоторых практических применений, включая захоронение ядерных отходов от переработки отработанного ядерного топлива. Интересна и роль добавок Fe в (NaAlP)-стекла, так как ионы железа могут быть в двух- и трехвалентной формах и оба имеют октаэдрическое кислородное окружение.

Гамма- и электронное облучение фосфатных стекол до умеренных доз ($<10^8$ Гр) вызывает образование различных точечных дефектов (центров окраски), включая парамагнитные центры [1–5]. Увеличение дозы облучения в

атмосфере воздуха увеличивает глубину разрушения поверхностного слоя и скорость выщелачивания Na из стекла.

Цель настоящей работы заключается в том, чтобы оценить влияние электронного облучения на структуру высокощелочных натрий-алюмо-железо-фосфатных стекол.

Приготовление образцов и обработка результатов

Стекла $40\text{Na}_2\text{O}-20\text{Al}_2\text{O}_3-40\text{P}_2\text{O}_5$ (мол.%) [серия I] и $40\text{Na}_2\text{O}-15\text{Al}_2\text{O}_3-5\text{Fe}_2\text{O}_3-40\text{P}_2\text{O}_5$ (мол.%) [серия II] были синтезированы, как описано в деталях в работе [6]. Все образцы были признаны однородными и аморфными. Их реальные химические составы были очень близки к заданным. Стекла были облучены электронными пучками с энергией 8 МэВ и дозами в 0,5 и 1,0 МГр на линейном ускорителе UELV-10-10-C70. Спектры ЭПР регистрировались при комнатной температуре с помощью модифицированного радиоспектрометра РЭ-1306 трехсантиметрового диапазона. Положение резонансных линий определялось с помощью эталонного образца Mn:MgO.

Параметры спин-гамильтониана (g -фактор и константа сверхтонкой структуры (СТС)) были определены путем сопоставления экспериментальных спектров с рассчитанными по программе [7].

Результаты и их обсуждение

В облученных электронами образцах серии I в спектрах ЭПР (рис. 1 и рис. 3) наблюдались три дублетные резонансные линии от радиационных парамагнитных центров (РПЦ), которые могут быть приписаны фосфор-кислородным ион-радикалам. Для всех трех дублетов были рассчитаны модельные спектры D_5 , D_6 и D_2 (Обозначения выбраны в соответствии с классификацией, приведенной в работе [4]). Расчетные параметры спин-гамильтониана приведены в таблице. Самый интенсивный дублет D_5 обусловлен хорошо известным ион-радикалом PO_4^{2-} , являющимся фосфор-кислородным дырочным центром, в котором дырка захвачена немостиковым атомом кислорода в структурной ячейке PO_4 [4]. Расщепление сигнала ЭПР на две линии СТС обусловлено сверхтонким взаимодействием неспаренного электрона с ядром атома фосфора ($I=1/2$).

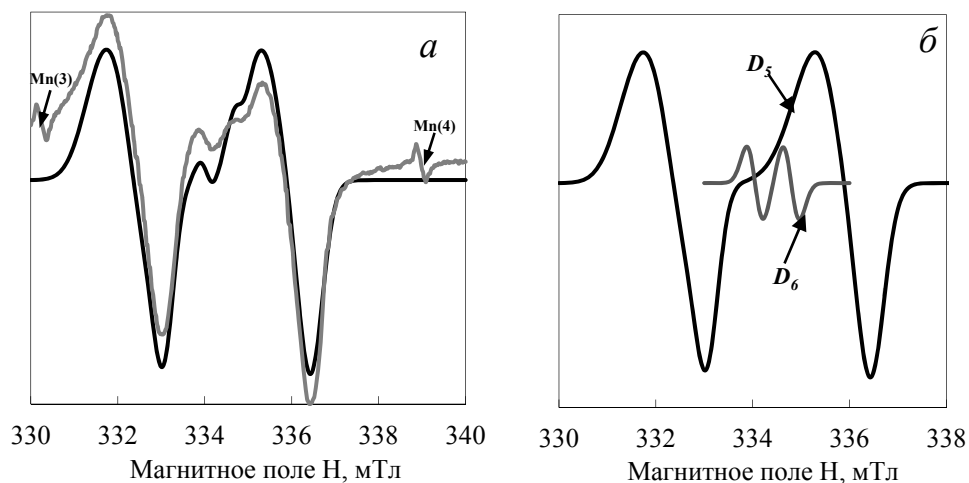


Рис. 1. а) Фрагмент экспериментального спектра ЭПР стекла $40\text{Na}_2\text{O}-20\text{Al}_2\text{O}_3-40\text{P}_2\text{O}_5$ (мол.%), облученного электронами дозой 1,0 МГр, в диапазоне 330÷340 мТл (серая кривая), и суперпозиция расчетных дублетов D_5 и D_6 (черная кривая). Метками Mn(3) и Mn(4) обозначены 3-я и 4-я линии СТС Mn^{2+} в эталонном образце Mn:MgO.
б) Расчетные дублеты D_5 и D_6 .

Слабый дублет с $g = 2.006$ и небольшой константой СТС $A = 0,75$ мТл (Рис. 1 и Табл. 1) приписывается РПЦ D_6 [4]. Его природа и происхождение являются предметом обсуждения в работах [4; 8–10]. В работе [8] аналогичный центр был отнесен к одной из форм ион-радикала PO_4^{2-} .

Позднее подобный дублет наблюдался в γ -облученных щелочно-лантан-фосфатных стеклах, главным образом, в области ультрафосфатных составов [9; 10], где он был приписан структурным ячейкам Q^3 (три мостиковых кислорода), показанным на Рис. 2. В работе [4] этот РПЦ приписывали радикалу PO_3 .

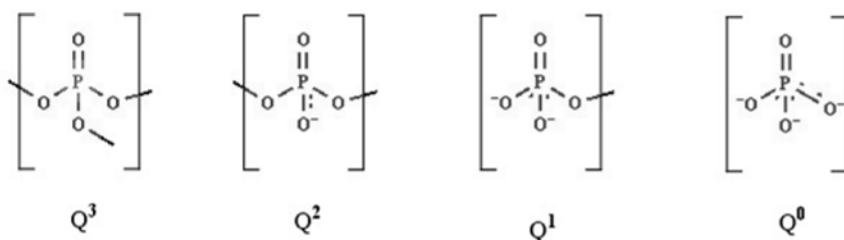


Рис. 2. Тетраэдры Q^n .

Третий дублет, наблюдаемый в спектрах ЭПР стекол серии I, имеет константу СТС A , равную 70 мТл, и $g = 1,994$. Он предположительно связан с РПЦ, который образуется, когда электрон захватывается кислородной вакансией, и обозначается как D_2 . Этот РПЦ ассоциируется с концевыми ячейками PO_3 и представляет собой ион-радикал PO_3^{2-} .

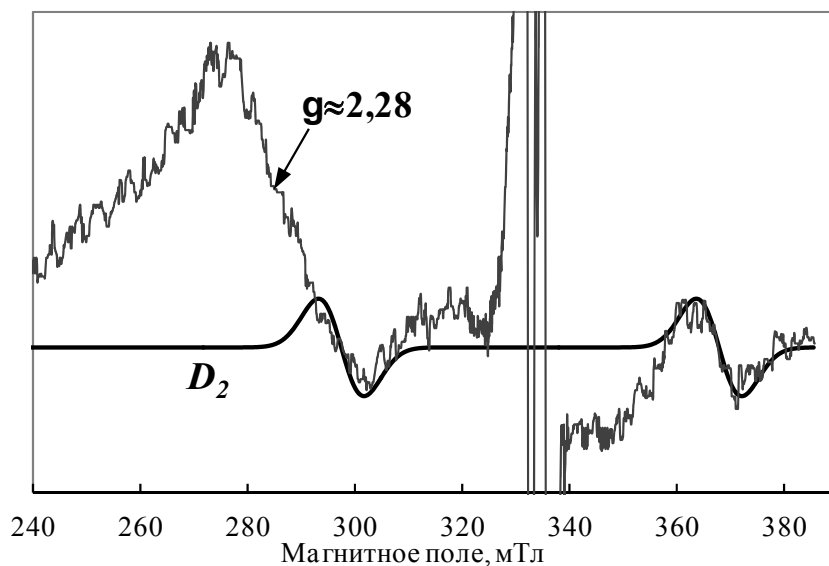


Рис. 3. Фрагмент спектра ЭПР стекла $40Na_2O-20Al_2O_3-40P_2O_5$ (мол.%), облученного электронами дозой 1,0 МГр, в диапазоне 240÷390 мТл, где наблюдается РПЦ D_2 . (Спектр записан при большом усилении, так что его средняя часть с РПЦ D_5 и D_6 зашкаливает)

Таблица 1

Параметры спектра ЭПР стекол $40Na_2O-20Al_2O_3-40P_2O_5$ (в мол.%), облученных электронами с энергией 8 МэВ

РПЦ	g_1	g_2	g_3	A_1 , мТл	A_2 , мТл	A_3 , мТл	ΔH_1 , мТл	ΔH_2 , мТл	ΔH_3 , мТл			
D_5	2,0123	2,0085	2,0043	3,64	3,43	3,37	0,98	0,88	0,54			
							1,25	1,00	0,60			
D_6	2,006			0,75			0,4					
D_2	1,994			70			10					

РПЦ D_5 и D_2 обычно образуются в β - и γ -облученных фосфатных стеклах, при этом центр D_2 оказался значительно более стабильным по сравнению с другими. Считается, что центры D_2 ответственны за накопление зарядов при электронном облучении [11].

Спектры ЭПР стекол состава 40 Na₂O-15 Al₂O₃-5 Fe₂O₃-40 P₂O₅ (мол.%), облученного электронами дозой 0,5 и 1,0 МГр, показаны на Рис.4.

На этих спектрах можно выделить три резонансные линии с g -факторами: $g \approx 2,0$, $g \approx 2,28$ и $g \approx 4,28$. Форма спектров несколько изменяется в зависимости от доз облучения в 0,5 МГр и 1,0 МГр. Спектральные линии с $g \approx 2,0$ и $g \approx 2,3$ обычно приписывают двум магнитно-неэквивалентным положениям октаэдрически координированного иона Fe³⁺, а линию с $g \approx 4,3$ – тетраэдрическому окружению иона Fe³⁺ [8].

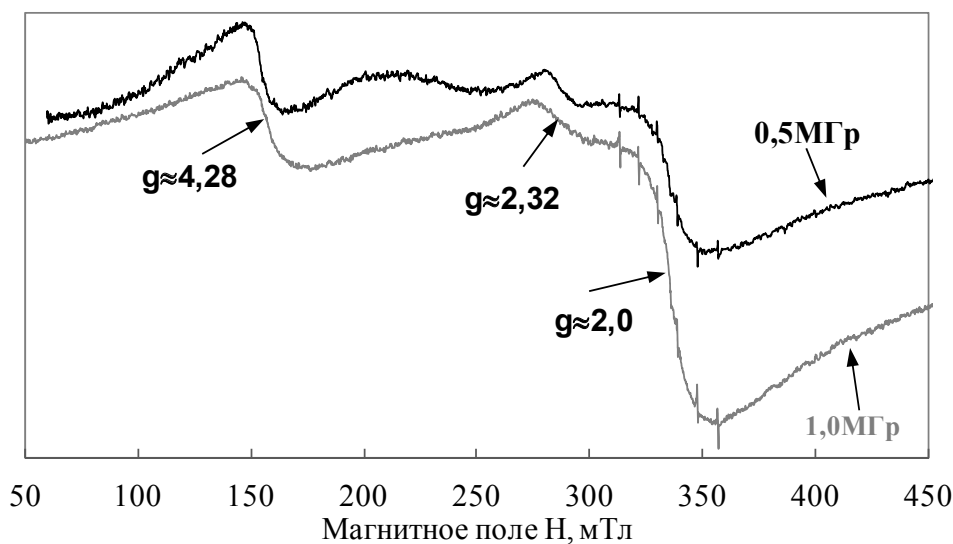


Рис. 4. Спектр ЭПР стекол 40 Na₂O-15 Al₂O₃-5 Fe₂O₃-40 P₂O₅ (мол.%), облученных электронами дозой 0,5 и 1,0 МГр.

В этих спектрах практически не видны резонансные линии от радиационных парамагнитных центров на фоне спектральных линий, обусловленных ионами железа Fe³⁺.

РПЦ D_6 довольно редко встречаются в фосфатных стеклах. Так как эти центры наблюдались главным образом в облученных ультрафосфатных

стеклах, они были приписаны структурным единицам Q^3 [10]. Стекла, исследованные в настоящей работе, имеют составы, промежуточные между орто-фосфатными и пиррофосфатными, и их структурная сеть состоит из структурных единиц Q^1 и Q^0 , связанных полиэдрами AlO_n и FeO_n . Для этих стекол формальное молярное отношение концентрации стекломодифицирующих оксидов к концентрации P_2O_5 рассчитывается как $R = ([Na_2O] + 2[MO] + 3 [N_2O_3]) / [P_2O_5] = 2,5$ (М и N – это FeO и $Al_2O_3 + Fe_2O_3$, соответственно), но это справедливо только для не содержащего железа натрий–алюмо–фосфатного стекла ($x = 0$).

Мёссбауэровские исследования показывают, что относительная доля $Fe(II)$ во всех Fe -содержащих стеклах уменьшается с ростом содержания окислов железа в стекле [4]. Это приводит к уменьшению R . При этом структурные ячейки Q^3 все еще присутствуют в стекле, особенно если в его составе содержатся многовалентные элементы. Таким образом, центры D_6 фактически могут образовываться на ячейках Q^3 , но их концентрация низка из-за незначительности фракции Q^3 в структуре стекла.

Заключение

Облучение фосфатных стекол составов $40 Na_2O$, $(20-x) Al_2O_3$, $x Fe_2O_3$, $40 P_2O_5$ (мол.%) электронами с энергией 8 МэВ и дозами до 1 МГр приводит к образованию трех типов радиационных парамагнитных центров: ион-радикалов PO_4^{2-} (фосфор-кислородный дырочный центр D_5); PO_3^{2-} (электрон, захваченный концевой кислородной вакансией, D_2) и РПЦ D_6 с $g = 2.006$ и $A = 0,75$ мТл, которые могут быть связаны со структурными единицами Q^3 в стеклах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Weeks R., Bray P. Electron spin resonance spectra of gamma-ray-irradiated phosphate glasses and compounds: Oxygen vacancies // Journ. Chem. Phys. 1968. Vol. 48. pp. 5–13.
2. Griscom D., Friebele E., Longet K., Fleming J. Fundamental defect centers in glass: Electron spin resonance and optical absorption studies of irradiated phosphorus-doped silica glass and optical fibers // J. Appl. Phys. 1983. Vol. 54. pp. 3743–3762.
3. Ebendorff-Heidepriem H., Ehrt D. Effect of Tb^{3+} ions on X-ray-induced defect formation in phosphate glasses // Optical Materials. 2002. Vol. 18. pp. 419–430.

4. Стародубцев В.А., Шиян Л.Н., Заусаева Н.Н. Образование фосфорно-кислородных радикалов в фосфатных стеклах при импульсном облучении электронами средних энергий // Физика и химия стекла. 1990. Т. 16. № 2. С. 165–173.
5. Иванов И.А., Стефановский С.В., Гулин А.Н. Водоустойчивость и диффузия ионов в стекломатериалах, имитирующих остеклованные радиоактивные отходы // Физика и химия стекла. 1993. Т. 19. Вып. 5. С. 746–755.
6. Stefanovsky S., Stefanovsky O., Kadyko M., Presnyakov I., Myasoedov B. The effect of Fe_2O_3 substitution for Al_2O_3 on the phase composition and structure of sodium-aluminium-iron phosphate glasses // J. Non-Cryst. Solids. 2015. Vol. 425. pp. 138–145.
7. Богомолова Л.Д., Жачкин В.А., Красильникова Н.А., Гречко Е.Г., Сахаров В.В., Семенова Т.В. ЭПР ионов Cu^{2+} в стеклах на основе тетрафторидов циркония и гафния // Физика и химия стекла. 1987. Т. 13. Вып. 2. С. 202–208.
8. Griscom D. Electron spin resonance in glasses // J. Non-Cryst. Solids. 1980. Vol. 40. pp. 211–272.
9. Корниенко Л.С., Денкер Б.И., Осико В.В., Рыбалтовский А.О., Тихомиров В.А. Радикал-ионы в стеклообразных редкоземельных фосфатах, содержащих различные щелочные модификаторы // Физика и химия стекла. 1984. Т. 10. Вып. 5. С. 592–598.
10. Стефановский С.В., Александров А.И., Пикаев А.К. Исследование структуры стекол системы $\text{Na}_2\text{O}-\text{P}_2\text{O}_5-\text{SO}_3$ методом ЭПР радиационно-индуцированных парамагнитных центров // Физика и химия стекла. 1990. Т. 16. Вып. 1. С. 48–52.
11. Стародубцев В.А., Шиян Л.Н., Портнягин А.С., Заусаева Н.Н. Роль радикалов $(\text{PO}_3)^{2-}$ в накоплении заряда при облучении фосфатных стекол электронами // Физика и химия стекла. 1991. Т. 17. Вып. 5. С. 816–817.

REFERENCES

1. Weeks R., Bray P. Electron spin resonance spectra of gamma-ray-irradiated phosphate glasses and compounds: Oxygen vacancies // Journ. Chem. Phys. 1968. Vol. 48. pp. 5–13.
2. Griscom D., Friebele E., Longet K., Fleming J. Fundamental defect centers in glass: Electron spin resonance and optical absorption studies of irradiated phosphorus-doped silica glass and optical fibers // J. Appl. Phys. 1983. Vol. 54. pp. 3743–3762.
3. Ebendorff-Heidepriem H., Ehrt D. Effect of Tb^{3+} ions on X-ray-induced defect formation in phosphate glasses // Optical Materials. 2002. Vol. 18. pp. 419–430.
4. Starodubtsev V.A., Shiyani L.N., Zausaeva N.N. Obrazovanie fosforno-kislородnykh radikalov v fosfatnykh steklakh pri impul'snom obluchenii elektronami srednikh energii [The formation of phosphorus-oxygen radicals in phosphate glasses under pulsed irradiation by electrons of average energies] // Fizika i khimiya stekla. 1990. Vol. 16. no. 2. pp. 165–173.

5. Ivanov I.A., Stefanovsky S.V., Gulin A.N. Vodoustoichivost' i diffuziya ionov v steklomaterialakh, imitiruyushchikh osteklovannye radioaktivnye otkhody [Water resistance and the diffusion of ions in glass materials, simulating vitrified radioactive wastes] // Fizika i khimiya stekla. 1993. Vol. 19. no. 5. pp. 746–755.
6. Stefanovsky S., Stefanovsky O., Kadyko M., Presnyakov I., Myasoedov B. The effect of Fe_2O_3 substitution for Al_2O_3 on the phase composition and structure of sodium-aluminium-iron phosphate glasses // J. Non-Cryst. Solids. 2015. Vol. 425. pp. 138–145.
7. Bogomolova L.D., Zhachkin V.A., Krasil'nikova N.A., Grechko E.G., Sakharov V.V., Semenova T.V. EPR ionov Cu_{2+} v steklakh na osnove tetraftoridov tsirkoniya i gafniya [EPR of Cu_{2+} ions in glasses based on the tetra fluoride of zirconium and hafnium] // Fizika i khimiya stekla. 1987. Vol. 13. no. 2. pp. 202–208.
8. Griscom D. Electron spin resonance in glasses // J. Non-Cryst. Solids. 1980. Vol. 40. pp. 211–272.
9. Kornienko L.S., Denker B.I., Osiko V.V., Rybaltovskii A.O., Tikhomirov V.A. Radikal-iony v stekloobraznykh redkozemel'nykh fosfatakh, soderzhashchikh razlichnye shchelochnye modifikatory [Radical ions in vitreous rare-earth phosphates containing various alkaline modifiers] // Fizika i khimiya stekla. 1984. Vol. 10. no. 5. pp. 592–598.
10. Stefanovsky S.V., Aleksandrov A.I., Pikaev A.K. Issledovanie struktury stekol sistemy $\text{Na}_2\text{O}-\text{P}_2\text{O}_5-\text{SO}_3$ metodom EPR radiatsionno-indutsirovannykh paramagnitnykh tsentrov [The study of the structure of glasses of the system $\text{Na}_2\text{O}-\text{P}_2\text{O}_5-\text{SO}_3$ by EPR of radiation-induced paramagnetic centers] // Fizika i khimiya stekla. 1990. Vol. 16. no. 1. pp. 48–52.
11. Starodubtsev V.A., Shiyani L.N., Portnyagin A.S., Zausaeva N.N. Rol' radikalov $(\text{PO}_3)_2$ v nakoplenii zaryada pri obluchenii fosfatnykh stekol elektronami [The role of radicals $(\text{PO}_3)_2$ in the charge accumulation during irradiation of phosphate glasses by electrons] // Fizika i khimiya stekla. 1991. Vol. 17. no. 5. pp. 816–817.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Богомолова Лидия Дмитриевна – кандидат физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник, Научно-исследовательский институт ядерной физики им. Д.В. Скобельцына Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова;

e-mail: klide1995@mail.ru

Жачкин Владимир Арефьевич – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный областной университет;

e-mail: V_Zhachkin@mail.ru

Новичков Кирилл Константинович – студент, Московский государственный областной университет;

e-mail: itdby@yandex.ru

Стефановский Сергей Владимирович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией радиоэкологических и радиационных проблем, Институт физической химии и электрохимии им. А.Н. Фрумкина РАН;

e-mail: serge.stefanovsky@yandex.ru

Тарасова Валентина Васильевна – кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры атомной физики, физический факультет Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова;

e-mail: vvtarasova2012@gmail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Bogomolova Lidia Dmitrievna – candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, senior researcher of the D.V. Skobel'tsyn Research Institute of Nuclear Physics at the M.V. Lomonosov Moscow State University;

e-mail: klide1995@mail.ru

Zhachkin Vladimir Arefevich – doctor of physical and mathematical sciences, professor at the Moscow State Regional University;

e-mail: V_Zhachkin@mail.ru

Novichkov Kirill Konstantinovich – student at the Moscow State Regional University;

e-mail: itdby@yandex.ru

Stefanovsky Sergei Vladimirovich – doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the Laboratory of Radioecological and Radiation Problems at the A.N. Frumkin Institute of Physical Chemistry and Electrochemistry, Russian Academy of Sciences;

e-mail: serge.stefanovsky@yandex.ru

Tarasova Valentina Vasil'evna – candidate of physical and mathematical sciences, assistant of the Chair of Atomic Physics of the Physical department at the M.V. Lomonosov Moscow State University;

e-mail: vvtarasova2012@gmail.ru

БИБЛИОГРАФИЧЕСКАЯ ССЫЛКА

Богомолова Л.Д., Жачкин В.А., Новичков К.К., Стефановский С.В., Тарасова В.В. Электронный парамагнитный резонанс радиационных парамагнитных центров в облученных электронами натрий-алюмо-фосфатных стеклах // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2016. № 1. С. 98–107.

DOI: 10.18384/2310-7251-2016-1-98-107.

BIBLIOGRAPHIC REFERENCE

L. Bogomolova, V. Zhachkin, K. Novichkov, S. Stefanovsky, V. Tarasova Electron paramagnetic resonance of radiation paramagnetic centers in electron irradiated sodium aluminium phosphate glasses // Bulletin of Moscow State Regional University. Series: Physics and Mathematics. 2016. no. 1. pp. 98–107.

DOI: 10.18384/2310-7251-2016-1-98-107.

РАЗДЕЛ III.

ТЕОРИЯ И МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ И ВОСПИТАНИЯ

УДК 371.2, 378

DOI: 10.18384/2310-7251-2016-1-108-116

ПРИМЕНЕНИЕ ОБЛАЧНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ В ОБРАЗОВАНИИ НА ПРИМЕРЕ MICROSOFT OFFICE 365

Караськова Н.С., Солдатенков Р.М.

Московский государственный областной университет

105005, г. Москва, ул. Радио, д. 10А, Российская Федерация

Аннотация. Данная статья посвящена комплексному исследованию применения облачных технологий в образовательном процессе. Исследование проводится на примере Microsoft Office 365. Было проведено исследование использования компонентов данной облачной технологии в образовании, и на основании полученных результатов была выявлена частота применения их в образовательном процессе. На основании этих данных сформулированы выводы о необходимости знакомства всех участников образовательного процесса с наименее популярными компонентами.

Ключевые слова. Облачные технологии, образование, принципы обучения, Microsoft Office 365, электронная почта, One Drive.

USE OF CLOUD TECHNOLOGIES IN EDUCATION ON THE EXAMPLE OF MICROSOFT OFFICE 365

N. Karaskova, R. Soldatenkov

*Moscow State Regional University,
ul. Radio 10A, 105005 Moscow, Russia*

Abstract. We report a complex study of cloud technologies in the educational process. The investigation is carried out by the example of Microsoft Office 365. The study was performed using components of the cloud-based technology in education, and the obtained results made it possible to determine the frequency of their use in the educational process. On the basis of these data, we drew conclusions on the need to explore the least popular components by all the participants in the educational process.

Key words: cloud technology, education, principles of education, Microsoft Office 365, e-mail, One Drive.

Информационные технологии сегодня являются неотъемлемой частью нашей жизни. Без них немыслима ни одна из сфер общества, и образование – не исключение. Значительную роль среди различных информационных технологий, используемых в образовании, играют облачные технологии.

Под облачными технологиями понимают технологию обработки данных, в которой компьютерные ресурсы и мощности предоставляются пользователю как Интернет-сервис [1].

Под образованием понимается целенаправленный процесс воспитания и обучения в интересах человека, общества, государства, сопровождающийся констатацией достижения гражданином (обучающимся) установленных государством образовательных уровней (образовательных цензов) [2].

Итак, рассмотрим использование облачных технологий в образовании на примере Microsoft Office 365.

Microsoft Office 365 – это программный продукт, объединяющий набор [веб-сервисов](#), который распространяется на основе подписки по схеме «программное обеспечение + услуги». Для работы с Office 365 не нужно дополнительного обучения, поэтому его легко и удобно применять. Microsoft Office 365 состоит из множества компонентов, многие из которых

специализированы для применения в образовании, каждый из которых способствует реализации дидактических принципов обучения.

Принципы обучения или дидактические принципы (принципы дидактики) – это основные положения, определяющие содержание, организационные формы и методы учебного процесса в соответствии с его общими целями и закономерностями [3; 4].

К дидактическим принципам относятся: принцип научности обучения, принцип связи обучения с жизнью, с практикой государственного строительства, принцип систематичности и последовательности в обучении, принцип доступности, принцип сознательности и активности учащихся в обучении при руководящей роли преподавателя, принцип наглядности обучения, принцип прочности, осознанности и действенности результатов образования, воспитания и развития [5].

Microsoft Office 365 включает в себя следующие компоненты: электронная почта (E-mail), OneDrive, Video, Sway, Word Online, Excel Online, Power Point Online.

Рассмотрим компоненты Microsoft Office 365 и выясним их возможности в реализации дидактических принципов при помощи таблицы (таблица 1), где на пересечении компонентов и принципов указано в баллах от 1 до 3, насколько тот или иной компонент способствует реализации каждого из принципов обучения:

- 1 – слабо реализуется (компонент практически не используется или используется очень редко);
- 2 – реализуется, но не всегда (компонент используется время от времени);
- 3 – реализуется (компонент используется достаточно часто).

Проведем анализ применимости компонентов Microsoft Office 365 в процессе обучения. Участникам опроса был задан вопрос, как часто в своей деятельности вы используете компоненты Microsoft Office 365. На основании результатов была составлена таблица (Таблица 1).

Изучая результаты таблицы (Таблица 1), можно выяснить степень реализации дидактических принципов при использовании каждого из компонентов Microsoft Office 365.

Таблица 1.

Использование компонентов Microsoft Office 365 в образовании

Компоненты Принципы	E-mail	One Drive	Video	Sway	Word Online	Excel Online	Power Point Online
Принцип научности обучения	3	2	1	2	2	2	2
Принцип связи обучения с жизнью, с практикой	3	1	2	1	2	3	2
Принцип систематичности и последовательности в обучении	1	1	1	3	1	2	2
Принцип доступности	3	3	3	1	3	1	1
Принцип наглядности обучения	1	2	1	3	3	3	3
Принцип сознательности и активности учащихся в обучении	2	1	1	2	1	1	1
Принцип прочности, осознанности и действенности результатов образования, воспитания и развития	1	1	1	1	1	1	1

Исходя из результатов таблицы (Таблица 1), можно утверждать, что электронная почта является одним из основных компонентов, который чаще всего используется. Обобщая понятие электронной почты, введем в рассмотрение понятие облачной почты. Облачная почта позволяет отправлять вложения размером до 150 МБ. Кроме того, 50 ГБ свободного места в хранилище для каждого пользователя позволяют сохранять нужные сообщения и файлы. Электронная почта предоставляет возможность общаться,

обмениваться информацией всем участниками образовательного процесса. Данный компонент способствует реализации ряда дидактических принципов. Принцип доступности реализуется при обмене информацией на расстоянии, даже из различных точек мира, достаточно иметь только доступ к сети Интернет, а также мало мобильные учащиеся имеют возможность обучаться. Принцип научности может быть реализован при использовании данного компонента, так как электронная почта предоставляет возможность обмениваться научной литературой. Принцип связи обучения с жизнью, с практикой государственного строительства реализуется благодаря развитию умения пользоваться электронной почтой, а также применения данного умения на сайте государственных услуг. Принцип сознательности и активности учащихся в обучении при руководящей роли преподавателя может быть реализован за счет активного общения преподавателя и учащегося при помощи электронной почты.

OneDrive – компонент, позволяющий хранить нужную информацию на диске. Среди данной информации могут быть как документы, так и различные средства обучения. Преимущество облачного хранилища заключается в следующем: вы можете хранить до 1 ТБ данных, доступ к которым можно получить в любое удобное время. Данный компонент способствует реализации ряда дидактических принципов. OneDrive предоставляет возможность не только хранить учебные и методические пособия, но и иметь доступ к ним в любое время. В данном случае реализуется принцип доступности. Данный компонент способствует реализации принципа научности, при помощи него учащиеся и преподаватели имеют возможность хранить научную литературу. OneDrive позволяет просматривать и демонстрировать сохраненные файлы на экране. Тем самым реализуется принцип наглядности.

Video – компонент, позволяющий просматривать видео других пользователей и загружать свои видео-файлы. Эти видеофайлы могут представлять собой различные учебные материалы. Данный компонент способствует реализации принципа доступности: позволяет просматривать видео в удобное время и в удобном месте, например, любой преподаватель может создать свой канал с видео-лекциями для тех учащихся, кто не может или не смог присутствовать на лекции по какой-либо причине. При

использовании Video реализуется принцип научности: предоставляется возможность просмотра видео-конференций и видео-лекций.

Sway – компонент, позволяющий легко и быстро создавать безупречные интерактивные отчеты, презентации, личные рассказы и многое другое, а также делиться ими. Sway может быть использован для иллюстрации какой-либо учебной информации, например, с помощью данного компонента преподаватели могут создавать интерактивные онлайн-занятия прямо с телефона, планшета или из браузера, а учащиеся – привлекательные доклады, оформлять задания, проекты, учебные материалы и портфолио. Данный компонент способствует реализации принципа научности: предоставляет возможность демонстрировать научные знания, а также принципа наглядности обучения: обычная лекция может быть заменена на рассказ, иллюстрированный изображениями по данной теме. При помощи Sway учащиеся учатся демонстрировать знания, полученные самостоятельно, тем самым реализуется принцип сознательности и активности учащихся в обучении при руководящей роли преподавателя, а также грамотно работать с информацией и на ее основании строить рассказ, при этом реализуется принцип связи обучения с жизнью, с практикой государственного строительства. Принцип систематичности и последовательности тоже реализуется при использовании данного компонента: развитие умения выделять основного учебного материала.

Word Online – компонент, позволяющий легко и быстро создавать, редактировать документы и предоставлять к ним доступ. Просматривать документы в Word и работать с ними способны большинство пользователей: это самый популярный текстовый редактор в мире. Особенность Word Online заключается в возможности не только просматривать, но и редактировать документ онлайн и отправлять его уже с внесенными изменениями. Данный компонент способствует реализации принципа доступности, так как при его помощи может осуществляться проверка контрольных и самостоятельных работ без фактического присутствия учащегося. Word Online позволяет реализовать принцип научности: создание и редактирование курсовых работ, рефератов и докладов в режиме онлайн. Данный компонент способствует реализации принципа связи обучения с жизнью, с практикой государственного строительства: умение работать с данным компонентом является необходимым

сегодня, а также развитие умения формулировать свои мысли в ходе создания курсовых работ, рефератов. Word Online позволяет реализовать принцип наглядности, так как предоставляет возможность демонстрировать различные работы на экране.

Excel Online – компонент, позволяющий работать с таблицами онлайн: создавать и редактировать. Excel Online незаменим для структурирования и упорядочивания учебного материала в таблицы. Данный компонент способствует реализации принципа научности: возможность систематизации научных знаний. Excel Online позволяет демонстрировать учебный материал при помощи таблиц. Тем самым реализуется принцип наглядности обучения. Принцип связи обучения с жизнью, с практикой государственного строительства также реализуется при использовании данного компонента и приобретения навыка работать с программой. При помощи Excel Online реализуется принцип систематичности и последовательности: учебный материал можно структурировать и систематизировать при помощи таблиц, что позволяет лучше усваивать учебный материал.

PowerPoint Online – компонент, позволяющий создавать и редактировать презентации онлайн. PowerPoint Online дает возможность иллюстрирования учебного материала в виде презентации. Данный компонент способствует реализации принципа наглядности: учебный материал может быть представлен в виде презентации, что позволяет широкое использование зрительной (картинки), слуховой (аудиозапись) и зрительно-слуховой (таблицы, схемы) памяти. При помощи PowerPoint Online реализуется принцип научности: возможность передачи научных знаний при помощи презентаций; а также принцип связи обучения с жизнью, с практикой государственного строительства: развитие умения создавать презентации. Данный компонент способствует реализации принципа систематичности и последовательности: последовательное изложение материала при помощи презентаций.

На основании всего выше сказанного можно сделать вывод: основной компонент Microsoft Office 365 – электронная почта. Другие компоненты используются гораздо реже, и чаще всего из-за того, что многие пользователи не знают об их существовании. Поэтому необходимо знакомить всех участников образовательного процесса с данными компонентами. Ведь

благодаря использованию Microsoft Office 365 можно сделать образовательный процесс продуктивнее и интересней для всех его участников.

ЛИТЕРАТУРА

1. Облачные Технологии. Теория и практика / Д. Монахов, Н. Монахов, Г. Прончев, Д. Кузьменков. МАКС Пресс Москва, МГУ, 2013. с. 128
2. Федеральный закон от 29.12.2012 N 273-ФЗ (ред. от 30.12.2015) "Об образовании в Российской Федерации".
3. Педагогика. Новый курс: учебник для студ. пед. вузов: в 2 кн. М.: Гуманит. изд. центр ВЛАДОС. 1999. Кн. 1: Общие основы. Процесс обучения. 576 с.
4. Педагогическая энциклопедия. Т.1. А-Е. Под. ред. И.А. Каирова, Ф.Н. Петрова. М.: «Советская энциклопедия». 1964. 832 с.
5. Солдатенков Р.М. О концепции комплекса автоматизированных систем управления университетом // Вестник Московского государственного областного университета. Серия Педагогика. 2015. № 3. С. 172-177.

REFERENCES

1. Monakhov D., Monakhov N., Pronchev G., Kuz'menkov D. Oblachnye tekhnologii. Teoriya i praktika [Cloud-Based Technology. Theory and practice] M., MAKS-Press, MGU, 2013. p. 128.
2. Federal'nyi zakon ot 29.12.2012 N 273-FZ (red. ot 30.12.2015) "Ob obrazovanii v Rossiiskoi Federatsii" [Federal law of 29.12.2012 N 273-FL (ed. from 30.12.2015) "On education in Russian Federation"].
3. Pedagogika. Novyi kurs: uchebnik dlya stud. ped. vuzov: v 2 kn. Kn. 1: Obshchie osnovy [Pedagogics. New course: textbook for stud. of higher education at pedagogical institutions: in 2 books. Book 1: General principles]. M., Gumanit. izd. tsentr VLADOS. Protsess obucheniya, 1999. 576 p.
4. Pedagogicheskaya entsiklopediya. T. 1. A-E [Pedagogical encyclopedia. Vol. 1. A-E] / Ed. by I.A. Kairov, F.N. Petrov. M., Sovetskaya entsiklopediya, 1964. 832 p.
5. Soldatenkov R.M. O kontseptsii kompleksa avtomatizirovannykh sistem upravleniya universitetom [On the concept of complex automated systems for university management] // Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Pedagogika. 2015. no. 3. pp. 172–177.

ИНФОМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Солдатенков Роман Михайлович – кандидат педагогических наук, доцент кафедры высшей алгебры, элементарной математики и методики преподавания математики, Московский государственный областной университет;

e-mail: rm.soldatenkov@mgou.ru

Караськова Наталия Сергеевна – студент физико-математического факультета Московского государственного областного университета,

e-mail: ns.karaskova@mgou.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Soldatenkov Roman Mikhailovich – candidate of pedagogical sciences, associate professor of the Chair of Higher Algebra, Elementary Mathematics and Methods of Teaching Mathematics at the Moscow State Regional University;

e-mail: rm.soldatenkov@mgou.ru

Karaskova Natalia Sergeevna – student of the Department of Physics and Mathematics at the Moscow State Regional University;

e-mail: ns.karaskova@mgou.ru

БИБЛИОГРАФИЧЕСКАЯ ССЫЛКА

Караськова Н.С., Солдатенков Р.М. Применение облачных технологий в образовании на примере Microsoft office 365 // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2016. № 1. С. 108–116.

DOI: 10.18384/2310-7251-2016-1-108-116.

BIBLIOGRAPHIC REFERENCE

N. Karaskova, R. Soldatenkov Use of cloud technologies in education on the example of microsoft office 365 // Bulletin of Moscow State Regional University. Series: Physics and Mathematics. 2016. no. 1. pp. 108–116.

DOI: 10.18384/2310-7251-2016-1-108-116.



ВЕСТНИК МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ОБЛАСТНОГО УНИВЕРСИТЕТА

Научный журнал «Вестник МГОУ» основан в 1998 г. На сегодняшний день выходят десять серий «Вестника»: «История и политические науки», «Экономика», «Юриспруденция», «Философские науки», «Естественные науки», «Русская филология», «Физика-математика», «Лингвистика», «Психологические науки», «Педагогика». Все серии включены в составленный Высшей аттестационной комиссией Перечень ведущих рецензируемых научных журналов, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертации на соискание ученой степени доктора и кандидата наук по наукам, соответствующим названию серии. Журнал включен в базу данных Российского индекса научного цитирования (РИНЦ).

Печатная версия журнала зарегистрирована в Федеральной службе по надзору за соблюдением законодательства в сфере массовых коммуникаций и охране культурного наследия. Полнотекстовая версия журнала доступна в Интернете на платформе Научной электронной библиотеки (www.elibrary.ru), а также на сайте Московского государственного областного университета (www.vestnik.mgou.ru).

ВЕСТНИК МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ОБЛАСТНОГО УНИВЕРСИТЕТА

СЕРИЯ «ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА»
2016. N 1

Над номером работали:

менеджер Отдела по изданию журнала «Вестник МГОУ» И.А. Потапова
литературный редактор Д.Д. Дрошнев
переводчик И.А. Улиткин
корректор Д.Д. Дрошнев
компьютерная верстка Е.Н. Васильчикова

Отдел по изданию научного журнала «Вестник МГОУ»
105005, г. Москва, ул. Радио, д.10а, офис 98
тел. (499) 261-43-41; (495) 723-56-31
e-mail: vest_mgou@mail.ru
Сайт: www.vestnik-mgou.ru

Формат 70x108/16. Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура «Minion Pro».
Тираж 500 экз. Уч.-изд. л. 5,5, усл. п. л. 7,5.
Подписано в печать: 18.03.2016. Дата выхода в свет: 16.05.2016. Заказ № 2016/03-04.
Отпечатано в типографии МГОУ
105005, г. Москва, ул. Радио, 10А