

ISSN 2072-8387
ISSN (online) 2310-7251



Вестник

МОСКОВСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
ОБЛАСТНОГО
УНИВЕРСИТЕТА

Серия

**Физика-
Математика**

ВАРИАЦИОННЫЙ ПОДХОД
В ТЕОРИИ ЖИДКИХ КРИСТАЛЛОВ

АНИЗОТРОПИЯ ЭЛЕКТРОННОЙ ПОЛЯРИЗУЕМОСТИ
ДИМЕРОВ КАРБОНОВЫХ КИСЛОТ

ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ
И ТОНКАЯ МЕТАЛЛИЧЕСКАЯ ПЛАСТИНА



2015/ № 3

ВЕСТНИК
МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
ОБЛАСТНОГО УНИВЕРСИТЕТА

ISSN 2072-8387

2015 / № 3

ISSN (online) 2310-7251

серия

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА

Научный журнал основан в 1998 г.

«Вестник Московского государственного областного университета» (все его серии) включён в «Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертации на соискание учёной степени доктора и кандидата наук» Высшей аттестационной комиссии при Министерстве образования и науки Российской Федерации (См.: Список журналов на сайте ВАК при Минобрнауки России) по наукам, соответствующим названию серии.

The academic journal is established in 1998

«Bulletin of Moscow State Regional University» (all its series) is included by the Supreme Certifying Commission of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation into "the List of leading reviewed academic journals and periodicals recommended for publishing in corresponding series basic research thesis results for a Ph.D. Candidate or Doctorate Degree" (See: the online List of journals at the site of the Supreme Certifying Commission of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation).

ISSN 2072-8387

2015 / № 3

ISSN (online) 2310-7251

series

PHYSICS AND MATHEMATICS

BULLETIN OF THE MOSCOW STATE
REGIONAL UNIVERSITY

Учредитель журнала «Вестник МГОУ»: Московский государственный областной университет

Выходит 4 раза в год

Редакционно-издательский совет «Вестника МГОУ»

Хроменков П.Н. — к.филол.н., проф., ректор МГОУ (председатель совета)

Ефремова Е.С. — к.филол.н., и.о. проректора по научной работе МГОУ (зам. председателя);

Клычников В.М. — к.ю.н., к.и.н., проф., проректор по учебной работе и международному сотрудничеству МГОУ (зам. председателя)

Антонова Л.Н. — д.пед.н., проф., академик РАО, Комитет Совета Федерации по науке, образованию и культуре

Асмолов А.Г. — д.псих.н., проф., академик РАО, директор Федерального института развития образования

Климов С.Н. — д.ф.н., проф., Московский государственный университет путей сообщения (МИИТ)

Клобуков Е.В. — д.филол.н., проф., Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Манойло А.В. — д.пол.н., проф., МГУ им. М.В. Ломоносова

Новоселов А.Л. — д.э.н., проф., Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова

Пасечник В.В. — д.пед.н., проф., МГОУ

Поляков Ю.М. — к.филол.н., главный редактор «Литературной газеты»

Рюмцев Е.И. — д.ф.-м.н., проф., Санкт-Петербургский государственный университет

Хухуни Г.Т. — д.филол.н., проф., МГОУ

Чистякова С.Н. — д.пед.н., проф., Российская академия образования (г. Москва)

Редакционная коллегия серии «Физика-Математика»

Ответственный редактор серии:

Бугаев А.С. — д.ф.-м.н., академик РАН, МФТИ

Заместитель ответственного редактора:

Жачкин В.А. — д.ф.-м.н., проф. МГОУ

Ответственный секретарь:

Васильчикова Е.Н. — к.ф.-м.н., доц., МГОУ

Члены редакционной коллегии:

Беляев В.В. — д.т.н., проф., МГОУ;

Богданов Д.Л. — д.ф.-м.н., проф., МГОУ;

Бугримов А.Л. — д.т.н., проф., МГОУ;

Латышев А.В. — д.ф.-м.н., проф., МГОУ;

Рассудовская М.М. — к.п.н., проф., МГОУ;

Осипов М.А. — д.ф.-м.н., проф., Университет Стратклайд (Великобритания);

Чигринов В.Г. — д.ф.-м.н., проф., Гонконгский университет науки и технологий (Китай)

ISSN 2072-8387

ISSN (online) 2310-7251

Вестник Московского государственного областного университета. Серия «Физика-Математика». 2015. № 3. М.: ИИУ МГОУ. 102 с.

Журнал «Вестник МГОУ» серия «Физика-Математика» зарегистрирован в Федеральной службе по надзору за соблюдением законодательства в сфере массовых коммуникаций и охране культурного наследия. Регистрационное свидетельство ПИ № ФС77-26136

Индекс серии «Физика-Математика»

по Объединенному каталогу «Пресса России» 40723

© МГОУ, 2015.

© Издательство МГОУ, 2015.

**Адрес Отдела по изданию научного журнала
«Вестник МГОУ»**

г. Москва, ул. Радио, д.10а, офис 98

тел. (499) 261-43-41; (495) 723-56-31

e-mail: vest_mgou@mail.ru; сайт: www.vestnik-mgou.ru

Журнал включен в базу данных Российского индекса научного цитирования (РИНЦ), имеет полнотекстовую сетевую версию в Интернете на платформе Научной электронной библиотеки (www.elibrary.ru), а также на сайте Московского государственного областного университета (www.vestnik-mgou.ru)

При цитировании ссылка на конкретную серию «Вестника МГОУ» обязательна. Воспроизведение материалов в печатных, электронных или иных изданиях без разрешения редакции запрещено. Опубликованные в журнале материалы могут использоваться только в некоммерческих целях. Ответственность за содержание статей несут авторы. Мнение редколлегии серии может не совпадать с точкой зрения автора. Рукописи не возвращаются.

The founder of journal «Bulletin of the MSRU»: Moscow State Regional University

Issued 4 times a year

Series editorial board «Physics and Mathematics»

Editor-in-chief:

A.S. Bugaev – Doctor of Physics and Mathematics, Academician of RAS, MIPT

Deputy editor-in-chief:

V.A. Zhachkin – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, MSRU

Executive secretary:

E.N. Vasilchikova – Ph.D. in Physics and Mathematics, Associate Professor, MSRU

Members of Editorial Board:

V.V. Belyaev – Doctor of Technical Sciences, Professor, MSRU

D.L. Bogdanov – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, MSRU

A.L. Bugrimov – Doctor of Technical Sciences, Professor, MSRU

A.V. Latyshev – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, MSRU

M.M. Rassudovskaya – Ph.D. in Pedagogical Sciences, Professor, MSRU

M.A. Osipov – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Strathclyde University (UK)

V.G. Chigrinov – University of Science and Technology (Hong Kong, China)

The journal is included into the database of the Russian Science Citation Index, has a full text network version on the Internet on the platform of Scientific Electronic Library (www.elibrary.ru), as well as at the site of the Moscow State Regional University (www.vestnik-mgou.ru)

At citing the reference to a particular series of «Bulletin of the Moscow State Regional University» is obligatory. The reproduction of materials in printed, electronic or other editions without the Editorial Board permission, is forbidden. The materials published in the journal are for non-commercial use only. The authors bear all responsibility for the content of their papers. The opinion of the Editorial Board of the series does not necessarily coincide with that of the author Manuscripts are not returned.

The Editorial Board address: Moscow State Regional University

10a Radio st., office 98, Moscow, Russia

Phones: (499) 261-43-41; (495) 723-56-31

e-mail: vest_mgou@mail.ru; site: www.vestnik-mgou.ru

Publishing council «Bulletin of the MSRU»

P.N. Khromenkov – Ph. D. in Philology, Professor, Principal of MSRU (Chairman of the Council)

E.S. Yefremova – Ph. D. in Philology, Acting Vice-Principal for scientific work of MSRU (Vice-Chairman of the Council)

V.M. Klychnikov – Ph.D. in Law, Ph. D. in History, Professor, Vice-Principal for academic work and international cooperation of MSRU (Vice-Chairman of the Council)

L.N. Antonova – Doctor of Pedagogics, Professor, Member of the Russian Academy of Education, The Council of the Federation Committee on Science, Education and Culture

A.G. Asmolov – Doctor of Psychology, Professor, Member of the Russian Academy of Education, Principal of the Federal Institute of Development of Education

S.N. Klimov – Doctor of Philosophy, Professor, Moscow State University of Railway Engineering

E.V. Klobukov – Doctor of Philology, Professor, Lomonosov Moscow State University

A.V. Manoylo – Doctor of Political Science, Professor, Lomonosov Moscow State University

A.L. Novosjolov – Doctor of Economics, Professor, Plekhanov Russian University of Economics

V.V. Pasechnik – Doctor of Pedagogics, Professor, MSRU

Yu. M. Polyakov – Ph.D. in Philology, Editor-in-chief of "Literaturnaya Gazeta"

E.I. Rjuntsev – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Saint Petersburg State University

G. T. Khukhuni – Doctor of Philology, Professor, MSRU

S.N. Chistyakova – Doctor of Pedagogics, Professor, the Russian Academy of Education

ISSN 2072-8387

Bulletin of the Moscow State Regional University. Series «Physics and Mathematics». 2015. № 3. M.: MSRU Publishing house. 102 p.

The series «Physics and Mathematics» of the Bulletin of the Moscow State Regional University is registered in Federal service on supervision of legislation observance in sphere of mass communications and cultural heritage protection. The registration certificate ПИ № 0С77-26136

Index of the series «Physics and Mathematics» according to the union catalog «Press of Russia» 40723

© MSRU, 2015.

© MSRU Publishing house, 2015.

СОДЕРЖАНИЕ

РАЗДЕЛ I. МАТЕМАТИКА

<i>Абдуллаев А.Р., Конопацкая Е.В.</i> О ПОЛОЖИТЕЛЬНОСТИ ГЛАВНОЙ ЧАСТИ СИНГУЛЯРНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ВТОРОГО ПОРЯДКА.....	8
<i>Петрова В.Т., Сивиркина А.С.</i> ПРОБЛЕМА КЛАССИФИКАЦИИ ДИАГОНАЛЬНЫХ РИМАНОВЫХ МЕТРИК С ФУНКЦИОНАЛЬНО АБЕЛЕВЫМИ СВЯЗНОСТЯМИ.....	15

РАЗДЕЛ II. ФИЗИКА

<i>Чаругин В.М.</i> ФОРМИРОВАНИЕ УНИВЕРСАЛЬНОГО СТЕПЕННОГО СПЕКТРА РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОНОВ В КОСМИЧЕСКИХ РАДИОИСТОЧНИКАХ.....	25
<i>Геворкян Э.В.</i> ВАРИАЦИОННЫЙ ПОДХОД В ТЕОРИИ ЖИДКИХ КРИСТАЛЛОВ.....	30
<i>Зверев Н.В.</i> ОДНОРОДНЫЕ СОСТАВЛЯЮЩИЕ ПОЛЯ И КРИТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ФЕРМИОННЫХ КОРРЕЛЯТОРОВ МОДЕЛИ В ДИСКРЕТНОМ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ.....	35
<i>Назаров А.П., Барабанова Н.Н., Богданов Д.Л., Беляев В.В., Дадиванян А.К.</i> АНИЗОТРОПИЯ ЭЛЕКТРОННОЙ ПОЛЯРИЗУЕМОСТИ ДИМЕРОВ КАРБОНОВЫХ КИСЛОТ.....	42
<i>Барабанова Н.Н., Штрек О.В.</i> ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДИМЕРА КРАСИТЕЛЯ CD-1 С ЛАЗЕРНЫМ ИЗЛУЧЕНИЕМ.....	48
<i>Зверев Н.В., Юшканов А.А.</i> ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ И ТОНКАЯ МЕТАЛЛИЧЕСКАЯ ПЛАСТИНА.....	56
<i>Зудина М.Н.</i> СТАТИСТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МОМЕНТА СИЛЫ В НЕСТАЦИОНАРНОМ ГАЗОПОДОБНОМ ОБЛАКЕ, НАХОДЯЩЕМСЯ В ПОЛЕ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ СИЛ.....	62

РАЗДЕЛ III

ТЕОРИЯ И МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ И ВОСПИТАНИЯ

<i>Власова Е.А., Попов В.С., Латышев А.В.</i> МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ОБЕСПЕЧЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ «ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА» В ТЕХНИЧЕСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ.	69
<i>Синявина А.А., Иманкулова З.</i> ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЕ ЗАДАНИЯ ПО ФИЗИКЕ КАК ОДНО ИЗ СРЕДСТВ ФОРМИРОВАНИЯ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫХ И ТВОРЧЕСКИХ СПОСОБНОСТЕЙ ОБУЧАЮЩИХСЯ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ.	86
<i>Наши авторы</i>	98

CONTENTS

SECTION I. MATHEMATICS

<i>A. Abdullaev, E. Konopatskaya.</i> ABOUT POSITIVITY OF THE MAIN PARTS OF SINGULAR DIFFERENTIAL OPERATORS OF SECOND ORDER.....	8
<i>V. Petrova, A. Sivirkina.</i> THE PROBLEM OF CLASSIFYING DIAGONAL RIEMANNIAN METRICS WITH FUNCTIONALLY ABELIAN CONNECTION.	15

SECTION II. PHYSICS

<i>V. Charugin.</i> THE FORMATION OF UNIVERSAL SPECTRUM OF RELATIVISTIC ELECTRONS IN ACTIVE GALAXIES AND QUASARS.....	25
<i>E. Gevorkyan.</i> THE VARIATIONAL APPROACH IN THE THEORY OF LIQUID CRYSTALS.	30
<i>N. Zverev.</i> UNIFORM COMPONENTS OF A FIELD AND A CRITICAL BEHAVIOR OF FERMION CORRELATION FUNCTIONS IN A DISCRETESPACE-TIME MODEL.....	35
<i>A. Nazarov, N. Barabanova, D. Bogdanov, V. Belyaev, A. Dadivanyan.</i> ELECTRONIC POLARIZATION ANISOTROPY OF CARBOXYLIC ACIDS DIMERS.....	42
<i>N. Barabanova, O. Shtrek.</i> INTERACTION OF THE DIMER OF CD-1 DYE WITH LASER IRRADIATION.....	48
<i>N. Zverev, A. Yushkanov.</i> ELECTROMAGNETIC RADIATION AND A THIN METALLIC SLAB.....	56
<i>M. Zudina.</i> STATISTICAL THEORY OF DISTRIBUTION MOMENT OF FORCE IN NON-STATIONARY GAS-LIKE CLOUD, ARE IN THE FIELD OF POTENTIAL FORCES.	62

SECTION III.
THEORY AND METHODS OF TEACHING AND EDUCATION

<i>E. Vlasova, V. Popov, A. Latyshev.</i> METHODOLOGICAL ASPECTS OF THE SUBJECT «LINEAR ALGEBRA» AT THE TECHNICAL UNIVERSITY.	69
<i>A. Sinyavina, Z. Imankulova.</i> RESEARCH JOBS IN PHYSICS AS ONE OF THE MEANS OF FORMATION OF INTELLECTUAL AND CREATIVE ABILITIES OF STUDENTS SECONDARY SCHOOL.	86
<i>Our authors</i>	98

РАЗДЕЛ I. МАТЕМАТИКА

УДК 517.927

Абдуллаев А.Р., Конопацкая Е.В.

*Пермский национальный исследовательский
политехнический университет*

О ПОЛОЖИТЕЛЬНОСТИ ГЛАВНОЙ ЧАСТИ СИНГУЛЯРНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ВТОРОГО ПОРЯДКА

Аннотация. Для оператора вида $B = I + (k + m)C_0 - mC_1$, где $C_0 y(t) = \frac{1}{t} \int_0^t y(s) ds$,

$C_1 y(t) = \frac{1}{2} \int_0^t sy(s) ds$, $C_0, C_1 : L_2[0, T] \rightarrow L_2[0, T]$ – операторы Чезаро,

k, m – действительные константы, приведено описание области параметров (k, m) , в которой оператор B является положительным. Получены эффективные оценки снизу нижней границы оператора B .

Ключевые слова: положительные операторы, сингулярные операторы, оператор Чезаро.

A. Abdullaev, E. Konopatskaya

Perm national research polytechnic university

ABOUT POSITIVITY OF THE MAIN PARTS OF SINGULAR DIFFERENTIAL OPERATORS OF SECOND ORDER

Abstract. For the operator $B = I + (k + m)C_0 - mC_1$, where $C_0 y(t) = \frac{1}{t} \int_0^t y(s) ds$,

$C_1 y(t) = \frac{1}{2} \int_0^t sy(s) ds$, $C_0, C_1 : L_2[0, T] \rightarrow L_2[0, T]$ are the Cesaro operators and k, m are

real constant, we present the description of the range of parameters (k, m) in which the operator B is positive. Effective lower estimates of the infimum of the operator B are obtained.

Key words: positive operator, singular operator, Cesaro operator.

Рассмотрим оператор

$$Ax(t) = x''(t) + \frac{k}{t}x'(t) + \frac{m}{t^2}x(t),$$

где $t \in [0, T]$, k, m – действительные константы. Как известно, оператор A является левой частью однородного уравнения Эйлера [9, с. 154]. При различных значениях параметров k и m оператор A встречается в квазилинейных сингулярных дифференциальных уравнениях [5]. Кроме того, этот оператор возникает во многих математических моделях уравнений математической физики, например в уравнении Ванье-Штарка [8].

Пусть $L_2 = L_2[0, T]$ – гильбертово пространство суммируемых с квадратом по Лебегу функций $y: [0, T] \rightarrow R$, со скалярным произведением $(y_1, y_2) = \int_0^T y_1(t)y_2(t)dt$ и нормой $\|y\|_{L_2} = \sqrt{(y, y)}$. Через $W_2^0[0, T]$ обозначим пространство абсолютно непрерывных вместе с первой производной функций, таких, что $x'' \in L_2[0, T]$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$, с нормой $\|x\|_{W_2^0} = \|x''\|_{L_2}$.

В соответствии с общей теорией функционально-дифференциальных уравнений [4], под главной частью оператора A будем понимать линейный оператор B , действующий на $x''(t) = y(t)$. Этот оператор B имеет вид:

$$By(t) = y(t) + \frac{k}{t} \int_0^t y(s)ds + \frac{m}{t^2} \int_0^t (t-s)y(s)ds. \quad (1)$$

В работе оператор B будем рассматривать как оператор, действующий в L_2 .

В предлагаемой работе получено описание области параметров (k, m) , в которой оператор B является положительным. Для характеристики положительности оператора будем рассматривать функционал

$$\gamma(B) = \inf_{\|y\|=1} (By, y),$$

называемый нижней границей оператора [7]. Говоря о положительной определенности, подразумеваем выполнение неравенства $\gamma(B) > 0$. Отметим, что при $\gamma(B) > 0$ оператор является положительным, т.е. $(By, y) > 0$, при $y \neq 0$.

1. Вспомогательные утверждения

Рассмотрим операторы $C_0, C_1 : L_2 \rightarrow L_2$, определенные равенствами:

$$C_0 y(t) = \frac{1}{t} \int_0^t y(s) ds, \quad C_1 y(t) = \frac{1}{t^2} \int_0^t s y(s) ds.$$

Оператор C_0 называется оператором Чезаро [10], а C_1 – обобщенным оператором Чезаро. Этот оператор также известен как оператор Харди-Литтлвуда [6, с. 187].

Пусть I – тождественный оператор. Оператор B является суммой тождественного оператора I и линейной комбинации операторов Чезаро, т.е.

$$B = I + (k + m)C_0 - mC_1. \quad (2)$$

Воспользуемся некоторыми результатами, полученными в работах [2; 3]. При этом соответствующие утверждения [2] приведем в удобной для дальнейшего изложения форме.

Лемма 1. Операторы $C_0, C_1 : L_2 \rightarrow L_2$ являются ограниченным и $\|C_0\| = 2$, $\|C_1\| = \frac{2}{3}$.

Сопряженные с операторами C_0, C_1 операторы $C_0^*, C_1^* : L_2 \rightarrow L_2$ имеют вид:

$$C_0^* y(t) = \int_t^T \frac{y(s)}{s} ds, \quad C_1^* y(t) = t \int_t^T \frac{y(s)}{s^2} ds.$$

Лемма 2. Для любого $y \in L_2$ справедливы равенства:

$$(C_0 y, y) = (y, C_0^* y) = \frac{1}{2} \|C_0^* y\|^2, \quad (C_1 y, y) = (y, C_1^* y) = \frac{3}{2} \|C_1^* y\|^2.$$

Лемма 3. Для любого $y \in L_2$ справедливо неравенство $\|C_1^* y\| \leq \|C_0^* y\|$.

2. Положительная определенность оператора B

В силу леммы 2 и представления (2) скалярное произведение (By, y) представим в следующем виде:

$$(By, y) = \|y\|^2 + \frac{k+m}{2} \|C_0^* y\|^2 - \frac{3m}{2} \|C_1^* y\|^2. \quad (3)$$

На плоскости параметров (k, m) определим следующие множества:

$$E_1 = \left\{ (k, m) / k + m \geq 0; \frac{k}{2} - m \geq -\frac{9}{4} \right\},$$

$$E_2 = \left\{ (k, m) / k + m < 0; m > 0; \frac{k}{2} - m \geq -\frac{1}{4} \right\},$$

$$E_3 = \left\{ (k, m) / k + m < 0; m < 0; k + m \geq -\frac{1}{2} \right\}.$$

Положим $E = E_1 \cup E_2 \cup E_3$. На множестве E определим следующий функционал $\gamma_0(k, m)$ равенством

$$\gamma_0(k, m) = \begin{cases} 1 + \frac{4}{9} \left(\frac{k}{2} - m \right), & (k, m) \in E_1, \\ 1 + 4 \left(\frac{k}{2} - m \right), & (k, m) \in E_2, \\ 1 + 2(k + m), & (k, m) \in E_3. \end{cases}$$

Теорема 1. Если параметры $(k, m) \in E$, то оператор B является положительно определенным, причем $\gamma(B) \geq \gamma_0(k, m)$.

Доказательство. Положим, что пара (k, m) принадлежит одному из дизъюнктивных множеств E_1, E_2, E_3 .

Пусть $(k, m) \in E_1$. Тогда $k + m \geq 0$ и $\frac{k}{2} - m \geq -\frac{9}{4}$. В этом случае оценим снизу второе слагаемое (3), используя лемму 3. Получим:

$$(By, y) \geq \|y\|^2 + \left(\frac{k}{2} - m \right) \|C_1^* y\|^2.$$

Отсюда очевидно, что при $\frac{k}{2} - m \geq 0$ оператор B является положительным. Если же $\frac{k}{2} - m < 0$, то воспользуемся утверждением леммы 1 и получим следующую оценку:

$$(By, y) \geq \|y\|^2 + \left(\frac{k}{2} - m \right) \|C_1^*\|^2 \|y\|^2 = \left(1 + \frac{4}{9} \left(\frac{k}{2} - m \right) \right) \|y\|^2 = \gamma_0(k, m) \|y\|^2.$$

Пусть $(k, m) \in E_2$. Следовательно, $k + m < 0$, $m > 0$ и $\frac{k}{2} - m \geq -\frac{1}{4}$.

Для $-m < 0$ применение леммы 3 к третьему слагаемому (3) позволяет получить следующую оценку:

$$(By, y) \geq \|y\|^2 + \left(\frac{k}{2} - m\right) \|C_0^* y\|^2.$$

Так как выражения $\frac{k}{2} - m < 0$, то согласно утверждению леммы 1 получим:

$$(By, y) \geq \|y\|^2 + \left(\frac{k}{2} - m\right) \|C_0^*\|^2 \|y\|^2 = \left(1 + 4\left(\frac{k}{2} - m\right)\right) \|y\|^2 = \gamma_0(k, m) \|y\|^2.$$

Пусть $(k, m) \in E_3$. Тогда $k + m < 0$, $m < 0$, $k + m \geq -\frac{1}{2}$. С учетом (2) и утверждения леммы 2 представим скалярное произведение в виде:

$$(By, y) = \|y\|^2 + (k + m)(C_0 y, y) - \frac{3}{2} m \|C_1^* y\|^2.$$

Для оценки последнего равенства снизу достаточно отбросить третье слагаемое и оценить второе, используя утверждение леммы 1. Получим:

$$(By, y) \geq \|y\|^2 + (k + m) \|C_0^*\| \|y\|^2 = (1 + 2(k + m)) \|y\|^2 = \gamma_0(k, m) \|y\|^2.$$

Переходя в полученных неравенствах к точной нижней грани по всем y , таким, что $\|y\| = 1$, получим утверждение теоремы.

Теорема доказана.

В некоторых случаях имеют значение условия, при которых $\gamma(B) \geq 1$.

Приведем соответствующее утверждение.

Теорема 2. Если $m \leq 0$ и $k + m \geq 0$, то $\gamma(B) \geq 1$.

Доказательство. Анализ выражения (3) показывает, что если $m \leq 0$ и $k + m \geq 0$, то $(By, y) \geq \|y\|^2$. Следовательно, $\gamma(B) \geq 1$.

Теорема доказана.

В качестве применения полученных утверждений рассмотрим следующую задачу Коши.

$$x''(t) + \frac{k}{t}x'(t) + \frac{m}{t^2}x(t) + (Sx)(t) = f(t), \quad (4)$$

$$x(0) = 0, \quad x'(0) = 0,$$

где $t \in [0, T]$, $S: W_2^0 \rightarrow L_2$ – линейный ограниченный оператор.

Теорема 3. Пусть параметры k, m таковы, что $(k, m) \in E$ и $\|S\| < \gamma_0(k, m)$. Тогда задача (4) для произвольной правой части $f \in L_2$ имеет единственное решение в пространстве W_2^0 .

Доказательство. Для доказательства утверждения рассмотрим уравнение, эквивалентное задаче (4)

$$By + \tilde{S}y = f.$$

Здесь оператор $B: L_2 \rightarrow L_2$ определен равенством (1), а оператор $\tilde{S}: L_2 \rightarrow L_2$ имеет вид $\tilde{S} = SV$, где $S: W_2^0 \rightarrow L_2$, $V: L_2 \rightarrow W_2^0$,

$$Vy(t) = \int_0^t (t-s)y(s)ds.$$

Так как $\|Vy\|_{W_2^0} = \|y\|_{L_2}$, то $\|\tilde{S}\| \leq \|S\|$. Утверждение теоремы будет доказано, если установить справедливость неравенства $\gamma(B + \tilde{S}) > 0$. Для этого воспользуемся свойством функционала $\gamma(\cdot)$ [1], а именно:

$$\gamma(B + \tilde{S}) > \gamma(B) - \|\tilde{S}\|. \quad (5)$$

В силу (5) имеем:

$$\gamma(B + \tilde{S}) > \gamma(B) - \|\tilde{S}\| > \gamma(B) - \|S\|.$$

Теорема доказана.

Для применения теоремы 3 к задаче вида (4) с конкретным оператором S достаточно оценить $\|S\|$. Для примера рассмотрим задачу вида (4) при $m = 0$ с оператором $S = a(t)x(h(t))$, где $h: [0, T] \rightarrow [0, T]$ такая измеримая функция, что $0 < h(t) \leq T$. Тогда задача (4) примет вид:

$$x''(t) + \frac{k}{t}x'(t) + a(t)x(h(t)) = f(t),$$

$$x(0) = 0, \quad x'(0) = 0.$$

Если функция $a(\cdot)$ ограничена в существенном, т. е. $\|a\| = \text{vrai sup}_{t \in [0, T]} |a(t)| < \infty$, то

норма оператора S имеет оценку $\|S\| \leq \frac{T^{3/2} \|a\|}{\sqrt{3}}$. В общем же случае можно

доказать справедливость оценки $\|S\| \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\int_0^T a^2(t) h^3(t) dt \right)^{1/2}$. При $m = 0$ из теоремы 1 следует оценка:

$$r_0(k) = r_0(k, m) \geq \begin{cases} 1 + \frac{2}{9}k; & k \geq 0, \\ 1 + 2k; & -\frac{1}{2} \leq k < 0. \end{cases}$$

В частности, при $k > 0$ и $\|a\| < +\infty$ неравенство $k > \frac{9}{2} \left(\frac{T^{3/2} \|a\|}{\sqrt{3}} - 1 \right)$

гарантирует существование единственного решения.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Абдуллаев А.Р., Конопацкая Е.В. About fixed sign as a steady property of linear operators // Вопросы трансформации образования. 2013. Т.1. С. 24–27.
2. Абдуллаев А.Р., Конопацкая Е.В., Плехова Э.В. О дифференциальном операторе второго порядка с сингулярным потенциалом // Научно-технический вестник Поволжья. 2014. № 6. С. 14–18.
3. Абдуллаев А.Р., Плехова Э.В. О спектре оператора Чезаро // Научно-технический вестник Поволжья. 2011. № 4. С. 33–37.
4. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений: Методы и приложения. М.: Инс-т компьютер. исслед. 2002. С. 384.
5. Кигурадзе И.Т., Шехтер Б.Д. Сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений // Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы матем.: Новые достижения. 1987. Т. 30. С. 105–201.
6. Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М. Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978. С. 400.
7. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа: учеб. пособ. 2-е изд., стер. СПб.: Лань, 2009. С. 272.
8. Пожарский А.А. Об операторах типа Ванье-Штарка с сингулярными потенциалами // Алгебра и анализ, 2002. Т. 14. № 1. С. 158–193.
9. Симонов Н.И. Прикладные методы анализа у Эйлера. М.: ГИТТЛ, 1957. С. 168.
10. Muntean I. The spectrum of the Cesaro operator // Mathematica. Revue d'analyse numerique et de theorie de l'approximation, 1980. V. 22(45). № 1. P. 97–105.

УДК 514.7+517.3+517.926

Петрова В.Т.*, Сивиркина А.С.****Московский физико-технический институт (МФТИ)****Рязанский институт (филиал) Университета Машиностроения (ММИ)*

ПРОБЛЕМА КЛАССИФИКАЦИИ ДИАГОНАЛЬНЫХ РИМАНОВЫХ МЕТРИК С ФУНКЦИОНАЛЬНО АБЕЛЕВЫМИ СВЯЗНОСТЯМИ

Аннотация. Криволинейный мультипликативный интеграл был впервые использован в дифференциальной геометрии еще Шлезингером. В статье описаны его новые приложения в дифференциальной геометрии, поставлена и полностью решена задача классификации римановых пространств с диагональными метриками и функционально абелевыми связностями. Доказано, что если метрика некоторого n -мерного риманова пространства диагональная и определенные ею матрицы связности функционально абелевы, то это риманово пространство есть прямое произведение некоторого числа двумерных конформных плоскостей на прямое произведение прямых.

Ключевые слова: мультипликативный интеграл, мультипликативная производная, функционально абелева функция, пространство аффинной связности, риманово пространство, метрика, матрица связности.

V.Petrova*, A.Sivirkina****Moscow Physical Techniques Institute****Ryazan Institute (branch) of Moscow state engineering University (MAMI)*

THE PROBLEM OF CLASSIFYING DIAGONAL RIEMANNIAN METRICS WITH FUNCTIONALLY ABELIAN CONNECTION

Abstract. The curvilinear multiplicative integral was first used in differential geometry by Schlesinger. In this paper we have described a new application of this integral in differential geometry. We have formulated and completely solved the problem of classification of Riemannian spaces with diagonal metrics and functionally Abelian connections. It is proved that if the metric of an n -dimensional Riemann space is diagonal and its connectivity matrix is functionally Abelian, then the Riemannian space is the direct product of some number of two-dimensional conformal planes by the direct product of some number of straight lines.

Key words: multiplicative integral, multiplicative derivative, functionally Abelian function, space of affine connection, Riemannian space, metric, connection matrix.

Криволинейный мультипликативный интеграл был использован в дифференциальной геометрии впервые Шлезингером при выводе аналога формулы Грина [1]. Этим было положено начало описания геометрических

свойств пространств аффинной связности в терминах мультипликативного интеграла. Интересное развитие этих идей было получено профессором Мантуровым О.В. и его учениками [2–7]. Возможность такого описания в значительной мере, связана с мультипликативной интегрируемостью в конечном виде матричных функций определенного геометрического истолкования вдоль некоторых типов кривых в пространствах с заданной аффинной связностью. Это возможно, если подынтегральное выражение является полной мультипликативной производной и коммутирует со своим обычным интегралом. Специфика обыкновенного мультипликативного интеграла (к нему, в конечном счете, сводится криволинейный) связана с непрерывностью различных значений подынтегральной функции. В том же случае, когда ассоциативная алгебра с единицей, на которой определяется мультипликативный интеграл, матричная и все значения матричной функции перестановочны, т.е. $f(t_1) \cdot f(t_2) = f(t_2) \cdot f(t_1)$, функцию $f(t)$ называют функционально абелевой [2], мультипликативный интеграл может быть вычислен по формуле:

$$\int_{t_0}^{nt} E + f(\tau) d\tau = \exp \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau.$$

Таким образом, отыскание аффинных, и в частности римановых пространств с функционально абелевыми связностями позволяет выделить и описать еще некоторые классы задач (в частности, интегрирование в явном виде уравнений геодезических) в терминах мультипликативного интеграла в силу такой интегрируемости в конечном виде в этих случаях.

1⁰. Постановка задачи. Пусть метрика g риманова пространства диагональная, то есть $ds^2 = g_{ii}(x^1, x^2, \dots, x^n)(dx^i)^2$, $i, j = 1, 2, \dots, n$. Тогда среди коэффициентов связности Γ_{jk}^i много нулевых. Разобьем решение проблемы отыскания аффинных (в частности, римановых) пространств с функционально абелевыми связностями на два этапа. Сначала найдем условия, которые налагаются на коэффициенты метрики условием равенства 0 коммутаторов $[\Gamma_i, \Gamma_j] = 0$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) в каждой точке области определения метрики g , а

затем для суженного класса метрик – условием коммутирования матриц связности уже в различных точках.

2⁰. Прежде всего рассмотрим трехмерный случай, обозначив для удобства $g_{11} = a(x, y, z)$, $g_{22} = b(x, y, z)$, $g_{33} = c(x, y, z)$. Тогда матрицы связности $\Gamma_j = \|\Gamma_{jk}^i\|$ имеют вид:

$$\Gamma_1 = \frac{1}{2} \left\| \begin{array}{ccc} \frac{a_x}{a} & \frac{a_y}{a} & \frac{a_z}{a} \\ -\frac{a_y}{b} & \frac{b_x}{b} & 0 \\ -\frac{a_z}{c} & 0 & \frac{c_x}{a} \end{array} \right\|, \quad \Gamma_2 = \frac{1}{2} \left\| \begin{array}{ccc} \frac{a_y}{a} & -\frac{b_x}{a} & 0 \\ \frac{b_x}{b} & \frac{b_y}{b} & \frac{b_z}{b} \\ 0 & -\frac{b_z}{c} & \frac{c_y}{c} \end{array} \right\|, \quad \Gamma_3 = \frac{1}{2} \left\| \begin{array}{ccc} \frac{a_z}{a} & 0 & -\frac{c_x}{a} \\ 0 & \frac{b_z}{b} & -\frac{c_y}{b} \\ \frac{c_x}{c} & \frac{c_y}{c} & \frac{c_z}{c} \end{array} \right\|.$$

Учитывая намеченное выше, будем решать относительно неизвестных a, b, c систему уравнений $[\Gamma_i, \Gamma_j] = 0$, где $i, j = 1, 2, 3$, точнее, ей равносильную: $4g[\Gamma_i, \Gamma_j] = 0$.

$$\left\| \begin{array}{ccc} 0 & -\frac{a_x}{a}b_x + \frac{a_y}{b}b_y - \frac{a_z}{c}b_z - \frac{a_y^2}{a} + \frac{b_x^2}{b} & \frac{a_y}{b}b_z + \frac{a_z}{c}c_y - \frac{a_z}{a}a_y \\ -\frac{a_y^2}{a} + \frac{b_x^2}{b} - \frac{a_x}{a}b_x + \frac{a_y}{b}b_y + \frac{a_z}{c}b_z & 0 & \frac{b_x}{b}b_z - \frac{a_z}{a}b_x - \frac{b_z}{c}c_x \\ -\frac{a_y}{b}b_z - \frac{a_z}{c}c_y + \frac{a_z}{a}a_y & \frac{a_z}{a}b_x - \frac{b_z}{c}c_x + \frac{b_x}{b}b_z & 0 \end{array} \right\| = 0;$$

$$\left\| \begin{array}{ccc} 0 & \frac{a_y}{b}b_z + \frac{a_z}{c}c_y - \frac{a_y}{a}a_z & -\frac{a_x}{a}c_x - \frac{a_y}{b}c_y + \frac{a_z}{c}c_z - \frac{a_z^2}{a} + \frac{c_y^2}{c} \\ \frac{a_y}{a}a_z + \frac{a_y}{b}b_z - \frac{a_z}{c}c_y & 0 & \frac{a_y}{a}c_x - \frac{b_x}{b}c_y + \frac{c_x}{c}c_y \\ -\frac{a_z^2}{a} + \frac{c_y^2}{c} + \frac{a_y}{b}c_y + \frac{a_z}{c}a_y - \frac{a_y}{a}c_x & \frac{c_x}{c}a_y - \frac{a_y}{a}c_x - \frac{b_x}{b}c_y & 0 \end{array} \right\| = 0;$$

$$\left\| \begin{array}{ccc} 0 & -\frac{b_x}{b}b_z + \frac{a_z}{a}b_x - \frac{b_z}{c}c_x & -\frac{a_y}{a}c_x + \frac{b_x}{b}c_y - \frac{c_x}{c}c_y \\ \frac{a_z}{a}b_x + \frac{b_z}{c}c_x - \frac{b_x}{b}b_z & 0 & -\frac{b_x}{b}c_x - \frac{b_y}{b}c_y + \frac{b_z}{c}c_z - \frac{b_z^2}{b} + \frac{c_y^2}{c} \\ \frac{c_x}{c}c_y - \frac{a_y}{a}c_x - \frac{b_x}{b}c_y & -\frac{b_z^2}{b} + \frac{c_y^2}{c} + \frac{b_x}{a}c_z - \frac{b_y}{a}c_y + \frac{b_z}{c}c_z & 0 \end{array} \right\| = 0.$$

Замечая, что во всех коммутаторах элементы, симметричные относительно главной диагонали, отличаются только знаком одного слагаемого, можем выписать систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} a_z b_z = 0; \\ a_y b_z = 0; \\ a_z b_x = 0; \\ a_z c_y = 0; \\ a_y c_y = 0; \\ a_y c_x = 0; \\ b_x c_x = 0; \\ b_x c_y = 0; \\ b_x c_z = 0; \end{cases} \wedge \begin{cases} \frac{a_z}{c}c_y - \frac{a_z}{a}a_y = 0; \\ \frac{b_y}{b}b_z - \frac{b_y}{b}c_x = 0; \\ \frac{a_y}{b}b_z - \frac{a_y}{a}a_z = 0; \\ \frac{b_x}{b}c_y - \frac{c_x}{c}c_y = 0; \\ \frac{a_z}{a}b_x - \frac{b_z}{b}b_x = 0; \\ \frac{a_y}{a}c_x - \frac{c_x}{c}c_y = 0; \end{cases} \wedge \begin{cases} -\frac{a_x}{a}b_x + \frac{a_y}{b}b_y - \frac{a_y^2}{a} + \frac{b_x^2}{b} = 0; \\ -\frac{a_x}{a}c_x + \frac{a_y}{b}c_y - \frac{a_z^2}{a} + \frac{c_y^2}{c} = 0; \\ -\frac{b_y}{b}c_y + \frac{b_z}{b}c_z - \frac{b_z^2}{b} + \frac{c_y^2}{c} = 0. \end{cases} \quad (*)$$

Первые две подсистемы не содержат производные a_x, b_y, c_z ; среди остальных же должно быть много нулей, поэтому несложно убедиться, что

среди допустимых решений $\langle a_y, a_z, b_x, b_z, c_x, c_y \rangle$ имеют место только решения следующего вида:

$$\{ \langle 0,0,0,0,0,0 \rangle, \langle p, 0,0,0,0,0 \rangle, \langle 0, p, 0,0,0,0 \rangle, \langle 0,0, p, 0,0,0 \rangle, \langle 0,0,0, p, 0,0 \rangle, \\ \langle 0,0,0,0, p, 0 \rangle, \langle 0,0,0,0,0, p \rangle, \langle p, 0, q, 0,0,0 \rangle, \langle 0, p, 0,0, q, 0 \rangle, \langle 0,0,0, p, 0, q \rangle \},$$

где p и q – произвольные ненулевые функции. Остается выяснить условия, налагаемые третьей подсистемой.

1. Очевидно, что $a_y = a_z = b_x = b_z = c_x = c_y = 0$ удовлетворяет и ей, таким образом, получаем первую метрику:

$$ds^2 = a(x)dx^2 + b(y)dy^2 + c(z)dz^2. \quad (1)$$

2. Если $a_y \neq 0$, но $a_z = b_x = b_z = c_x = c_y = 0$, то последняя подсистема дает условие $\frac{b_y}{b} = \frac{a_y}{a}$, с которым получаем тип метрики:

$$ds^2 = a(x,y)dx^2 + b(y)dy^2 + c(z)dz^2. \quad (2)$$

3. Если же $a_y \cdot b_x \neq 0$, но $a_z = b_z = c_x = c_y = 0$, то дополнительное условие следующее:

$$a_y \left(\frac{b_y}{b} - \frac{a_y}{a} \right) + b_x \left(\frac{b_x}{b} - \frac{a_x}{a} \right) = 0,$$

а метрика получается вида:

$$ds^2 = a(x,y)dx^2 + b(x,y)dy^2 + c(z)dz^2. \quad (3)$$

Замечание 1. Можно видеть, что все остальные решения системы (*) сводятся к описанным случаям 2 или 3 переобозначением переменных.

Тем самым доказана лемма.

Лемма 1. Существует только три типа трехмерных римановых диагональных метрик с коммутирующими в каждой точке матрицами связности.

Замечание 2. Полученные выше метрики есть метрики прямого произведения двумерной плоскости на прямую.

Следствие 1. Матрицы связности указанных метрик следующие:

$$\begin{aligned} 1. \quad \Gamma_1 &= \frac{1}{2} \frac{a'}{a} E_1^1, \quad \Gamma_2 = \frac{1}{2} \frac{b'}{b} E_2^2, \quad \Gamma_3 = \frac{1}{2} \frac{c'}{c} E_3^3. \\ 2. \quad \Gamma_1 &= \frac{1}{2} \left(\frac{a_x}{a} E_1^1 + \frac{a_y}{a} E_2^1 - \frac{a'_y}{b} E_1^2 \right), \quad \Gamma_2 = \frac{1}{2} \frac{b'}{b} (E_1^1 + E_2^2), \quad \Gamma_3 = \frac{1}{2} \frac{c'}{c} E_3^3; \\ 3. \quad \Gamma_1 &= \frac{1}{2} \left(\frac{a_x}{a} E_1^1 + \frac{a_y}{a} E_2^1 - \frac{a'_y}{b} E_1^2 + \frac{b_x}{b} E_2^2 \right), \quad \Gamma_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{a_y}{a} E_1^1 - \frac{b_x}{a} E_2^1 + \frac{b_x}{b} E_1^2 + \frac{b_y}{b} E_2^2 \right), \\ &\quad \Gamma_3 = \frac{1}{2} \frac{c'}{c} E_3^3. \end{aligned}$$

Переходя к реализации второго этапа, будем находить среди этих метрик такие, чтобы их матрицы связности коммутировали уже в разных точках. Для первого типа метрик выполнимость этого очевидна, как и то, что в остальных случаях матрица Γ_3 коммутирует с матрицами Γ_i ($i = 1, 2, 3$) в разных точках. Поэтому в силу замечания 2 можно ограничиться коммутаторами Γ_1 и Γ_2 , суженными до размерности 2.

Тогда для метрики второго типа $\Gamma_2 = \frac{1}{2} \frac{b'}{b} E$ и, значит, Γ_2 коммутирует в любой другой точке с любой другой матрицей связности, и существенны только условия, налагаемые коммутатором $[\Gamma_1(M), \Gamma_1(N)] = 0$, то есть:

$$\left\| \begin{array}{cc} \frac{a_y}{a}(M) \frac{a_y}{b}(N) - \frac{a_y}{a}(N) \frac{a_y}{b}(M) & \frac{a_x}{a}(M) \frac{a_y}{a}(N) - \frac{a_x}{a}(N) \frac{a_y}{a}(M) \\ \frac{a_y}{b}(N) \frac{a_x}{a}(M) - \frac{a_y}{b}(M) \frac{a_x}{a}(N) & -\frac{a_y}{a}(M) \frac{a_y}{b}(N) - \frac{a_y}{a}(N) \frac{a_y}{b}(M) \end{array} \right\| = 0,$$

что в совокупности с условием (2) дает систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{a_y}{a} = \frac{b'}{b}; \\ a_x(M)a_y(N) = a_x(N)a_y(M); \\ b(M)a_y(N) = a_y(M)b(N); \\ \frac{a_x(M)}{a(M)} \cdot \frac{a_y(N)}{b(N)} = \frac{a_x(N)}{a(N)} \cdot \frac{a_y(M)}{b(M)}. \end{array} \right. \quad (4)$$

Из второго уравнения следует, что для функции $a(x, y)$ есть только три возможности: $a_y = 0$, или $a_y = a_x = 0$, или их пропорциональность.

Если $a_y = 0$, то удовлетворяются остальные уравнения системы, а из первого с необходимостью получим $b = \text{const}$ и метрику:

$$ds^2 = a(x)dx^2 + bdy^2 + c(z)dz^2,$$

но она – частный случай метрики первого типа.

Если к тому же $a_x = 0$, то получим, что $a(x, y) = k \cdot b(y)$ и метрику:

$$ds^2 = kb(y)dx^2 + b(y)dy^2 + c(z)dz^2 \quad (5)$$

Если же $a_x(x, y) = k \cdot a_y(x, y)$, $k \neq 0$, то, учитывая первое из условий системы (4), получим, что функции $b(y) = B \cdot e^{\alpha y}$ и $a(x, y) = A \cdot e^{\alpha(kx+y)}$ (где $\alpha \cdot A \cdot B \neq 0$), которые не могут удовлетворить третьему уравнению. Следовательно, метрика второго типа имеет функционально абелевы матрицы связности, только если она имеет вид (5).

В случае метрики третьего типа коммутаторы $[\Gamma_1(M), \Gamma_1(N)] = 0$, $[\Gamma_2(M), \Gamma_2(N)] = 0$ и $[\Gamma_1(M), \Gamma_2(N)] = 0$ порождают систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_y \left(\frac{a_y}{a} - \frac{b_y}{b} \right) + b_x \left(\frac{a_x}{a} - \frac{b_x}{b} \right) = 0; \\ \frac{a_y}{a}(N) \left(\frac{a_x}{a}(M) - \frac{b_x}{b}(M) \right) = \frac{a_y}{a}(M) \left(\frac{a_x}{a}(N) - \frac{b_x}{b}(N) \right); \\ \frac{a_y}{b}(N) \left(\frac{a_x}{a}(M) - \frac{b_x}{b}(M) \right) = \frac{a_y}{b}(M) \left(\frac{a_x}{a}(N) - \frac{b_x}{b}(N) \right); \\ \frac{b_x}{a}(N) \left(\frac{a_y}{a}(M) - \frac{b_y}{b}(M) \right) = \frac{b_x}{a}(M) \left(\frac{a_y}{a}(N) - \frac{b_y}{b}(N) \right); \\ \frac{b_x}{b}(N) \left(\frac{a_y}{a}(M) - \frac{b_y}{b}(M) \right) = \frac{b_x}{b}(M) \left(\frac{a_y}{a}(N) - \frac{b_y}{b}(N) \right); \\ \frac{b_x}{a}(N) \left(\frac{a_x}{a}(M) - \frac{b_x}{b}(M) \right) = -\frac{a_y}{a}(M) \left(\frac{a_y}{a}(N) - \frac{b_y}{b}(N) \right); \\ \frac{b_x}{b}(N) \left(\frac{a_x}{a}(M) - \frac{b_x}{b}(M) \right) = -\frac{a_y}{a}(M) \left(\frac{a_y}{a}(N) - \frac{b_y}{b}(N) \right); \\ \frac{a_y}{a}(M) \frac{a_y}{b}(N) = \frac{a_y}{a}(N) \frac{a_y}{b}(M); \\ \frac{b_x}{a}(M) \frac{b_x}{b}(N) = \frac{b_x}{a}(N) \frac{b_x}{b}(M); \\ \frac{a_y}{a}(M) \frac{b_x}{b}(N) = \frac{a_y}{a}(N) \frac{b_x}{b}(M). \end{array} \right.$$

Последним трем уравнениям удовлетворяют функции $a(M)$ и $b(M)$, только если $a(M) \cdot b(N) = a(N) \cdot b(M) \neq 0$, тогда аналогично предыдущему случаю получим $a(x, y) = k \cdot b(x, y)$, где $k \neq 0$, и значит,

$$\frac{b_x}{b} = \frac{a_x}{a}; \quad \frac{b_y}{b} = \frac{a_y}{a}; \quad \frac{b_x}{b} = \frac{1}{k} \frac{a_x}{a}; \quad \frac{b_y}{b} = \frac{1}{k} \frac{a_y}{a}; \quad \frac{a_x}{b} = \frac{1}{k} \frac{a_x}{a}; \quad \frac{a_y}{b} = \frac{1}{k} \frac{a_y}{a}.$$

Далее проверкой можно убедиться в том, что тогда и все предыдущие уравнения системы удовлетворяются. Это дает метрику вида:

$$ds^2 = k \cdot b(x, y)dx^2 + b(x, y)dy^2 + c(z)dz^2. \quad (6)$$

Замечание 3. Метрики (5) и (6) заменой переменных приводятся к виду:

$$ds^2 = b(y)dx^2 + b(y)dy^2 + c(z)dz^2, \quad (5')$$

$$ds^2 = b(x, y)dx^2 + b(x, y)dy^2 + c(z)dz^2. \quad (6')$$

Очевидно, что (5') представляет собой частный случай (6').

Итак, доказана теорема.

Теорема 1: *Существует только два типа диагональных трехмерных римановых метрик с функционально абелевыми матрицами связности:*

$$1''. \quad ds^2 = a(x)dx^2 + b(y)dy^2 + c(z)dz^2.$$

$$\Gamma_1 = \frac{1}{2} \frac{a'}{a} E_1^1, \quad \Gamma_2 = \frac{1}{2} \frac{b'}{b} E_2^2, \quad \Gamma_3 = \frac{1}{2} \frac{c'}{c} E_3^3.$$

$$2''. \quad ds^2 = b(x, y)dx^2 + b(x, y)dy^2 + c(z)dz^2.$$

$$\Gamma_1 = \frac{b_x}{b} \frac{1}{2} \frac{b_x}{b} \frac{b_x}{b} (E_1^1 + E_2^2) + \frac{1}{2} \frac{b_y}{b} (E_2^1 - E_1^2),$$

$$\Gamma_2 = \frac{1}{2} \frac{b_y}{b} \frac{b_y}{b} (E_1^1 + E_2^2) - \frac{1}{2} \frac{b_x}{b} (E_2^1 - E_1^2), \quad \Gamma_3 = \frac{1}{2} \frac{c'}{c} E_3^3.$$

Замечание 4. Доказанная выше теорема составит базу индукции при решении задачи классификации для произвольной размерности.

3⁰. Теорема 2. *Если метрика некоторого n -мерного риманова пространства диагональная и определенные ею матрицы связности функционально абелевы, то она есть метрика прямого произведения некоторого числа двумерных конформных плоскостей на прямое произведение прямых.*

Доказательство. Предположим, что утверждение имеет место при всех $k < n$. Так как коэффициенты связности $\Gamma_{jk}^i \neq 0$, только если среди индексов i, j, k есть одинаковые, то в матрице Γ_i могут быть ненулевыми только элементы диагонали, i -ой строки и i -ого столбца:

$$\Gamma_i = \frac{1}{2} \left\| \begin{array}{cccccc} \frac{1}{g_1} \frac{\partial g_1}{\partial x^i} & & & -\frac{1}{g_1} \frac{\partial g_i}{\partial x^1} & & \\ & \frac{1}{g_2} \frac{\partial g_2}{\partial x^i} & & -\frac{1}{g_2} \frac{\partial g_i}{\partial x^2} & & \\ & & \ddots & \vdots & & \\ \frac{1}{g_i} \frac{\partial g_i}{\partial x^1} & \frac{1}{g_i} \frac{\partial g_i}{\partial x^2} & \dots & \frac{1}{g_i} \frac{\partial g_i}{\partial x^i} & \dots & \frac{1}{g_i} \frac{\partial g_i}{\partial x^n} \\ & & & \vdots & \ddots & \\ & & & -\frac{1}{g_n} \frac{\partial g_i}{\partial x^n} & & \frac{1}{g_n} \frac{\partial g_n}{\partial x^n} \end{array} \right\|$$

(здесь для удобства обозначений $g_s = g_{ss}(x^1, x^2, \dots, x^n)$).

При вычислении коммутатора $[\Gamma_i, \Gamma_k]$ получим матрицу, в которой ненулевыми могут быть только i -ая и k -ая строки и столбцы, а диагональ

обязательно нулевая. Вычислив матрицу $4g[\Gamma_i, \Gamma_k] = 0$ и сравнив элементы, симметричные относительно главной диагонали, получим:

$$a_{ik} = - \sum_{s=1}^n g_s \frac{\partial g_i}{\partial x^s} \frac{\partial g_k}{\partial x^s} + 2 \frac{1}{g_k} \frac{\partial g_i}{\partial x^k} \frac{\partial g_k}{\partial x^k} - \frac{1}{g_k} \left(\frac{\partial g_k}{\partial x^i} \right)^2 + \frac{1}{g_i} \left(\frac{\partial g_i}{\partial x^k} \right)^2,$$

$$a_{ki} = \sum_{s=1}^n g_s \frac{\partial g_i}{\partial x^s} \frac{\partial g_k}{\partial x^s} - 2 \frac{1}{g_i} \frac{\partial g_i}{\partial x^i} \frac{\partial g_k}{\partial x^i} + \frac{1}{g_k} \left(\frac{\partial g_k}{\partial x^i} \right)^2 - \frac{1}{g_i} \left(\frac{\partial g_i}{\partial x^k} \right)^2$$

и уравнения:

$$\frac{1}{g_k} \left(\frac{\partial g_k}{\partial x^i} \right)^2 - \frac{1}{g_i} \left(\frac{\partial g_i}{\partial x^k} \right)^2 + \frac{1}{g_k} \frac{\partial g_i}{\partial x^k} \frac{\partial g_k}{\partial x^k} - \frac{1}{g_i} \frac{\partial g_i}{\partial x^i} \frac{\partial g_k}{\partial x^i} = 0;$$

$$\sum_{s=1}^n \frac{1}{g_s} \frac{\partial g_i}{\partial x^s} \frac{\partial g_k}{\partial x^s} - \frac{1}{g_i} \frac{\partial g_i}{\partial x^i} \frac{\partial g_k}{\partial x^i} + \frac{1}{g_k} \frac{\partial g_i}{\partial x^k} \frac{\partial g_k}{\partial x^k} = 0.$$

Симметричные относительно главной диагонали элементы k -ой строки и столбца ($j \neq k, j \neq i$)

$$a_{jk} = \frac{1}{g_i} \frac{\partial g_i}{\partial x^j} \frac{\partial g_k}{\partial x^i} - \frac{1}{g_j} \frac{\partial g_j}{\partial x^i} \frac{\partial g_k}{\partial x^j} + \frac{1}{g_k} \frac{\partial g_k}{\partial x^i} \frac{\partial g_j}{\partial x^j};$$

$$a_{kj} = \frac{1}{g_k} \frac{\partial g_k}{\partial x^i} \frac{\partial g_j}{\partial x^j} - \frac{1}{g_i} \frac{\partial g_k}{\partial x^i} \frac{\partial g_i}{\partial x^j} - \frac{1}{g_j} \frac{\partial g_k}{\partial x^j} \frac{\partial g_i}{\partial x^j}$$

дают уравнения:

$$\frac{1}{g_k} \frac{\partial g_k}{\partial x^i} \frac{\partial g_j}{\partial x^j} - \frac{1}{g_j} \frac{\partial g_j}{\partial x^i} \frac{\partial g_k}{\partial x^j} = 0;$$

$$\frac{\partial g_k}{\partial x^i} \frac{\partial g_i}{\partial x^j} = 0.$$

Аналогичные вычисления для i -ой строки и столбца дают:

$$\frac{1}{g_i} \frac{\partial g_i}{\partial x^k} \frac{\partial g_j}{\partial x^j} - \frac{1}{g_j} \frac{\partial g_j}{\partial x^k} \frac{\partial g_i}{\partial x^j} = 0;$$

$$\frac{\partial g_k}{\partial x^j} \frac{\partial g_i}{\partial x^k} = 0.$$

Объединяя их в систему и несколько упростив ее, получим систему дифференциальных уравнений четырех типов, всего же $(2n-3)(n-1)n$ уравнений.

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{g_p} \left(\frac{\partial g_p}{\partial x^q} \right)^2 + \frac{1}{g_q} \left(\frac{\partial g_q}{\partial x^p} \right)^2 + \frac{1}{g_q} \frac{\partial g_p}{\partial x^q} \frac{\partial g_q}{\partial x^p} - \frac{1}{g_p} \frac{\partial g_p}{\partial x^p} \frac{\partial g_q}{\partial x^q} = 0; \\ \sum_{s=1}^n \frac{1}{g_s} \frac{\partial g_p}{\partial x^s} \frac{\partial g_q}{\partial x^s} - \frac{1}{g_p} \frac{\partial g_p}{\partial x^p} \frac{\partial g_q}{\partial x^p} + \frac{1}{g_q} \frac{\partial g_p}{\partial x^q} \frac{\partial g_q}{\partial x^q} = 0; \\ \frac{\partial g_i}{\partial x^p} \frac{\partial g_q}{\partial x^i} = 0; \\ \frac{\partial g_i}{\partial x^p} \frac{\partial g_i}{\partial x^q} = 0; \end{array} \right.$$

($i, p, q = 1, 2, \dots, n$; $i \neq p, i \neq q, p \neq q$).

Выделим подсистему, содержащую все уравнения с индексами 1 и 2:

$$\frac{\partial g_1}{\partial x^2} \frac{\partial g_q}{\partial x^1} = 0; \quad (7)$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial x^2} \frac{\partial g_1}{\partial x^q} = 0; \quad (8)$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial x^2} \frac{\partial g_2}{\partial x^p} = 0; \quad (9)$$

$$-\frac{1}{g_1} \left(\frac{\partial g_1}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{1}{g_2} \left(\frac{\partial g_2}{\partial x^1} \right)^2 + \frac{1}{g_2} \frac{\partial g_1}{\partial x^2} \frac{\partial g_2}{\partial x^2} - \frac{1}{g_1} \frac{\partial g_1}{\partial x^1} \frac{\partial g_2}{\partial x^1} = 0; \quad (10)$$

$$-\frac{1}{g_1} \left(\frac{\partial g_1}{\partial x^q} \right)^2 + \frac{1}{g_q} \left(\frac{\partial g_q}{\partial x^1} \right)^2 + \frac{1}{g_q} \frac{\partial g_1}{\partial x^q} \frac{\partial g_q}{\partial x^q} - \frac{1}{g_1} \frac{\partial g_1}{\partial x^1} \frac{\partial g_q}{\partial x^1} = 0; \quad (11)$$

$$-\frac{1}{g_2} \left(\frac{\partial g_2}{\partial x^q} \right)^2 + \frac{1}{g_q} \left(\frac{\partial g_q}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{1}{g_q} \frac{\partial g_2}{\partial x^q} \frac{\partial g_q}{\partial x^q} - \frac{1}{g_2} \frac{\partial g_2}{\partial x^2} \frac{\partial g_q}{\partial x^2} = 0; \quad (12)$$

$$\frac{1}{g_1} \frac{\partial g_p}{\partial x^1} \frac{\partial g_q}{\partial x^1} + \frac{1}{g_2} \frac{\partial g_p}{\partial x^2} \frac{\partial g_q}{\partial x^2} + \sum_{s=3}^n \frac{1}{g_s} \frac{\partial g_p}{\partial x^s} \frac{\partial g_q}{\partial x^s} - \frac{1}{g_p} \frac{\partial g_p}{\partial x^p} \frac{\partial g_q}{\partial x^p} + \frac{1}{g_q} \frac{\partial g_p}{\partial x^q} \frac{\partial g_q}{\partial x^q} = 0; \quad (13)$$

$$\sum_{s=1}^n \frac{1}{g_s} \frac{\partial g_1}{\partial x^s} \frac{\partial g_p}{\partial x^s} - \frac{1}{g_1} \frac{\partial g_1}{\partial x^1} \frac{\partial g_p}{\partial x^1} + \frac{1}{g_p} \frac{\partial g_1}{\partial x^p} \frac{\partial g_p}{\partial x^p} = 0; \quad (14)$$

$$\sum_{s=1}^n \frac{1}{g_s} \frac{\partial g_2}{\partial x^s} \frac{\partial g_p}{\partial x^s} - \frac{1}{g_2} \frac{\partial g_2}{\partial x^2} \frac{\partial g_p}{\partial x^2} + \frac{1}{g_p} \frac{\partial g_2}{\partial x^p} \frac{\partial g_p}{\partial x^p} = 0; \quad (15)$$

$$\sum_{s=3}^n \frac{1}{g_s} \frac{\partial g_1}{\partial x^s} \frac{\partial g_2}{\partial x^s} = 0. \quad (16)$$

Из предположения $\frac{\partial g_1}{\partial x^2} \neq 0$ и уравнений (7), (8), (9), (14) немедленно следует, что $\frac{\partial g_q}{\partial x^1} = 0$, $\frac{\partial g_1}{\partial x^q} = 0$, $\frac{\partial g_2}{\partial x^p} = 0$, $\frac{\partial g_p}{\partial x^2} = 0$, которые, в свою очередь,

обращают в тождество уравнения (11), (12), (15), (16). Уравнение же (13) теряет слагаемые с индексами 1 и 2. Резюмируем полученное выше:

$$\frac{\partial g_1}{\partial x^2} \neq 0, \quad \frac{\partial g_1}{\partial x^p} = 0, \quad \frac{\partial g_2}{\partial x^p} = 0, \quad \frac{\partial g_p}{\partial x^1} = 0, \quad \frac{\partial g_p}{\partial x^2} = 0,$$

где $p = 3, 4, \dots, n$ и

$$-\frac{1}{g_1} \left(\frac{\partial g_1}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{1}{g_2} \left(\frac{\partial g_2}{\partial x^1} \right)^2 + \frac{1}{g_2} \frac{\partial g_1}{\partial x^2} \frac{\partial g_2}{\partial x^2} - \frac{1}{g_1} \frac{\partial g_1}{\partial x^1} \frac{\partial g_2}{\partial x^1} = 0,$$

все остальные уравнения не содержат в своей записи индексы 1 и 2. Это означает, что получено прямое произведение двумерной конформной плоскости на пространство размерности $n - 2$, которое по предположению индукции есть прямое произведение некоторого числа двумерных конформных плоскостей и прямых. Шаг индукции выполнен и доказана теорема классификации для диагональных метрик произвольной размерности.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Schlesinger L. Parallel Serschiebung und Krümmungs tensor // Math. Ann. 1928. V. 99. P. 413–434.
2. Козлов В.А., Паланджянц Л.Ж. Мультипликативный интеграл и представления групп и алгебр Ли. – Майкоп, 2011. С. 93.
3. Мантуров О.В. Об одной задаче теории мультипликативного интеграла // Дифференциальная геометрия и приложения. МОПИ. Деп. в ВИНТИ № 1442–83 Деп.
4. Мантуров О.В., Паланджянц Л.Ж. Мультипликативный интеграл и некоторые классы дифференциальных уравнений в частных производных // Прикладные вопросы дифференциальной геометрии. МОПИ. Деп. в ВИНТИ № 5570–83 Деп.
5. Мантуров О.В., Паланджянц Л.Ж. Мультипликативный интеграл и уравнения нулевой кривизны // Дифференциальная геометрия и алгебры Ли. МОПИ. Деп. в ВИНТИ № 2384–84 Деп.
6. Мантуров О.В. Мультипликативный интеграл // Итоги науки и техники. Сер. Проблемы геометрии. 1990. Т. 22. С. 167–215.
7. Петрова В.Т. Классификация диагональных римановых метрик с функционально абелевыми связностями // Инварианты дифференциальной группы. МОПИ. Деп. в ВИНТИ № 8155–88 Деп.
8. Черкасова В.В. Мультипликативный интеграл в дифференциальной геометрии и прикладных задачах // Вестник ТГГПУ. 2010. № 3 (21).

РАЗДЕЛ II. ФИЗИКА

УДК 524.7-7+52.6

Чаругин В.М.

Московский государственный педагогический университет

ФОРМИРОВАНИЕ УНИВЕРСАЛЬНОГО СТЕПЕННОГО СПЕКТРА РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОНОВ В КОСМИЧЕСКИХ РАДИОИСТОЧНИКАХ

Аннотация. Наблюдения указывают на универсальность радиоспектров активных галактик и квазаров. Так, спектральные индексы радиоизлучения у них заключены в пределах $1,3 > \alpha > 0,6$, причем среднее значение $\alpha = 0,8$ с дисперсией 0,15. (Здесь интенсивность излучения $I(\nu) \sim \nu^{-\alpha}$.) Исходя из синхротронной природы радиоизлучения, можно говорить об универсальном распределении электронов по энергиям $N(E) \sim E^{-\gamma}$, где $\gamma = 2\alpha + 1 = 2,6$ с дисперсией 0,3. Учитывая масштабную инвариантность электромагнитного взаимодействия релятивистских электронов, радиоизлучающие области квазаров и активных галактик можно рассматривать как фрактал. Используя теорию фракталов, показано, что в этих небесных телах должен формироваться универсальный спектр релятивистских электронов с $\gamma = 2,4$. Таким образом, универсальность в распределении электронов по энергиям и излучения по частотам связана с фрактальной природой области радиоизлучения квазаров и активных галактик.

Ключевые слова: квазары, активные галактики, синхротронное излучение, степенные спектры, фракталы.

V. Charugin

Moscow State Pedagogical University

THE FORMATION OF UNIVERSAL SPECTRUM OF RELATIVISTIC ELECTRONS IN ACTIVE GALAXIES AND QUASARS

Abstract. Observations indicate the versatility of radiospectra of active galaxies and quasars. Thus, the spectral indices of radio emission from them lie within $1.3 > \alpha > 0.6$, at an average

value of α being equal to 0.8 with a dispersion of 0.15. (Intensity of radiation is $I(\nu) \sim \nu^{-\alpha}$) Based on the synchrotron nature of radio emission, we can speak about a universal distribution of electrons with respect to energies $N(E) \sim E^{-\gamma}$, where $\gamma = 2\alpha + 1 = 2.6$ with a dispersion of 0.3. Bearing in mind the scale invariance of the electromagnetic interaction of relativistic electrons, the radio-emitting area of quasars and active galaxies can be thought of as a fractal. Using the theory of fractals, it is shown that these celestial bodies should produce a universal distribution of relativistic electrons with $\gamma = 2.4$. Thus, the universality in the distribution of electrons with respect to energies and emission on frequencies is associated with the fractal nature of the field of radio emission of quasars and active galaxies.

Key words: quasar, active galaxy, synchrotron radiation, power spectrum, fractals.

Различные типы внегалактических радиоисточников показывают удивительно одинаковое спектральное распределение радиоизлучения [1]. В среднем радиоисточники имеют $\alpha = 0,8 \pm 0,15$ (рис. 1). Еще более интересно, что остаток взрыва сверхновой II типа Кассиопея А имеет такой же спектральный индекс радиоизлучения (рис. 2). Возникает интересный вопрос о том, как у таких разных по мощности и по природе объектов формируется универсальный степенной спектр с $\gamma = 2,6$?

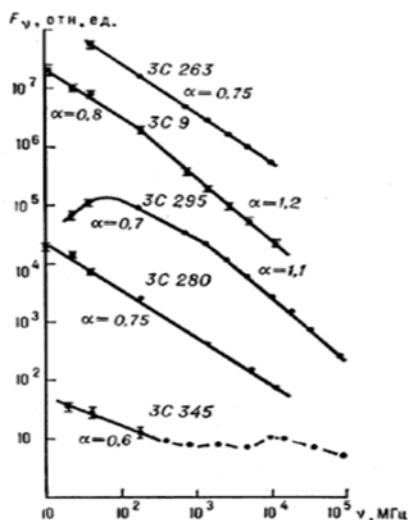


Рис. 1.

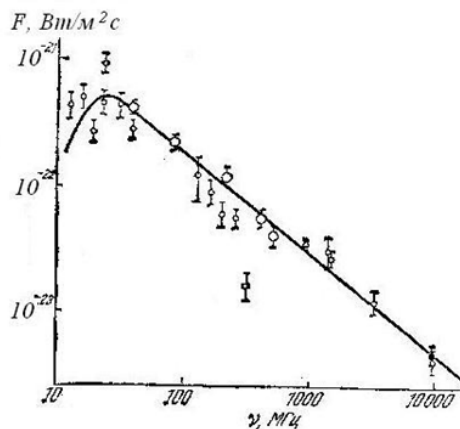


Рис. 2.

Следует иметь в виду, что степенные функции являются фракталами, так как обладают масштабной инвариантностью. Экспериментальные данные и наблюдения свидетельствуют о том, что фрактальность, или самоподобие, характерна как для пространственных свойств стационарных сложных систем, так и для процессов эволюции в сложных системах (например, простейший

механизм хаотизации системы по схеме удвоения периода). Свойство фрактальности устойчиво и сохраняется в процессах самоорганизации и в переходах «порядок-хаос».

Таким образом, фрактальность сложных систем с сохраняющимся электрическим зарядом есть следствие существования в нашем мире электромагнитного взаимодействия, которое описывается уравнениями Максвелла [2]. Это относится и к масштабной инвариантности электромагнитного взаимодействия релятивистской плазмы. Отсюда – фрактальная структура формирования областей синхротронного излучения и формирование степенных спектров излучения.

Попытаемся воспользоваться этим выводом и посмотрим, что еще можно получить, предполагая фрактальную природу синхротронного излучения этих релятивистских объектов.

Двигаясь в магнитном поле, релятивистский электрон излучает в узком диапазоне частот. При этом частота, на которую приходится максимум излучения электрона с энергией E , равна:

$$\nu = 0,25 \frac{eH}{2\pi mc} \left(\frac{E}{mc^2} \right)^2 \quad (1)$$
$$\nu_H = \frac{1}{T} = \frac{eH}{2\pi mc}$$

Здесь ν_H – гирочастота, T – период вращения нерелятивистского электрона в магнитном поле. В работе [3] было показано, что фрактальная природа джетов активных галактик естественным образом объясняет универсальный степенной спектр их радиоизлучения.

Фрактальность структуры распределения релятивистской плазмы, ответственной за нетепловое радиоизлучение в туманности, не столь очевидна. Но на это указывает степенная зависимость распределения релятивистских электронов по энергиям, обладающая масштабной инвариантностью.

Итак, сделаем следующие предположения: область излучения состоит из k облаков намагниченной плазмы с релятивистскими электронами; пусть полная энергия электронов в каждом облаке $w_0 < w_1 < w_2 < \dots < w_k$ и имеют максимумы при энергиях соответственно $E_0 > E_1 > \dots > E_k$, которые зависят от напряженности магнитного поля $E_i \sim \frac{1}{\sqrt{H_i}}$, $H_0 < H_1 < \dots < H_k$.

Пусть спектр k -го облака имеет степенную форму:

$$w_k(E > E_k) = w_k(E_k) \cdot \left(\frac{E}{E_k}\right)^{-\beta}.$$

Будем считать, что $\beta < 1$ у каждого облака одинаково. При фрактальной структуре туманности имеем:

$$E_k = aE_{k-1} = a^k E_0, \quad (2)$$

$$k = \frac{1}{\lg a} \lg \frac{E_k}{E_0}, \quad a < 1, \quad (3)$$

$$w_k(E_k) = b \cdot w_{k-1}(E_{k-1}) = b^k \cdot w_0(E_0), \quad b > 1. \quad (4)$$

Тогда для энергетического распределения k -го облака имеем:

$$w_k(E > E_k) = w_k(E_k) \cdot \left(\frac{E}{E_k}\right)^{-\beta} = b^k w_0(E_0) \frac{E^{-\beta}}{E_0^{-\beta} a^{-k\beta}} = b^k a^{\beta k} w_0(E_0) \left(\frac{E}{E_0}\right)^{-\beta}.$$

Суммарная энергия от всех k облаков при энергии E_k равна:

$$\begin{aligned} W(E_k) = w_0(E_0) \left(\frac{E_k}{E_0}\right)^{-\beta} + b^1 a^{\beta} w_0(E_0) \left(\frac{E_k}{E_0}\right)^{-\beta} + b^2 a^{2\beta} w_0(E_0) \left(\frac{E_k}{E_0}\right)^{-\beta} + \dots \\ + b^N a^{\beta N} w_0(E_0) \left(\frac{E_k}{E_0}\right)^{-\beta}. \end{aligned}$$

При $ba^{\beta} > 1$ и при больших k последнее выражение принимает вид:

$$\begin{aligned} W(E_k) = w_0(E_0) \frac{[(ba^{\beta})^k - 1]}{ba^{\beta} - 1} \left(\frac{E_k}{E_0}\right)^{-\beta} \approx w_0(E_0) \frac{[(ba^{\beta})^k]}{ba^{\beta} - 1} \left(\frac{E_k}{E_0}\right)^{-\beta} = \\ w_0(E_0) \frac{[(ba^{\beta})^k]}{ba^{\beta} - 1} (a^k)^{-\beta} = w_0(E_0) \frac{b^k}{ba^{\beta} - 1}, \end{aligned}$$

с учетом (3) имеем:

$$\lg W(E_k) = \lg w_0(E_0) + k \cdot \lg b - \lg(ba^{\beta} - 1) = \lg w_0(E_0) + \frac{\lg b}{\lg a} \lg \left(\frac{E_k}{E_0}\right).$$

Таким образом, показатель степени в распределении плотности энергии электронов в зависимости от их энергии $m = -\frac{\lg b}{\lg a}$. ($W(E) = K \cdot E^{-m}$) определяется фрактальными параметрами туманности a и b . Теперь надо из общих соображений оценить b и a .

Так как, согласно (1), $E \sim v^2 \sim \frac{1}{\sqrt{t}}$, а из физического эксперимента известно, что обмен энергией в сложных системах наиболее эффективен, когда он проходит по схеме удвоения периода $T_k = 2T_{k-1}$, то $E_k = \frac{1}{\sqrt{2}} E_{k-1}$, а $a = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707$.

Для определения b используем вероятностный подход. Пусть w_k образуют вероятностное множество. Вероятность того, что энергия k -го облака будет w_k , равна $P(w_k) = \frac{w_k}{W}$. Условная вероятность значения w_{k-1} при условии, что энергия k -го облака равна w_k :

$$P_1 = \frac{P(w_{k-1})}{P(w_k)} = \frac{w_{k-1}}{w_k}. \quad (5)$$

Так как взаимодействие облаков зависит от количества энергии в каждом облаке, то вероятность передачи энергии от k -го облака к $(k-1)$ облаку:

$$P_2 = \frac{P(w_k - w_{k-1})}{P(w_{k-1})} = \frac{w_k - w_{k-1}}{w_{k-1}}. \quad (6)$$

При равенстве этих вероятностей $P_1 = P_2$ получаем уравнение:

$$\left(\frac{w_{k-1}}{w_k}\right)^2 + \left(\frac{w_{k-1}}{w_k}\right) - 1 = 0. \quad (7)$$

Как видно, мы получили уравнение золотого сечения для $\frac{w_{k-1}}{w_k}$, его решение $\frac{w_{k-1}}{w_k} = 0,618$, т.е. $b = 1,618$. Следовательно, среднее статистическое значение

показателя энергетического спектра электронов $m = -\frac{\lg b}{\lg a} = -\frac{\lg 1,618}{\lg 0,707} \approx 1,4$.

Обычно принято говорить о показателе энергетического спектра в концентрации релятивистских электронов $N(E) = KE^{-\gamma} = \frac{w(E)}{E} = KE^{-(m+1)}$.

Таким образом, $\gamma = 2,4$. Для таких спектров электронов показатель спектра синхротронного излучения от них $\alpha = (\gamma - 1)/2 = 0,7$. Полученное значение универсального показателя спектра электронов в пределах погрешностей находится в хорошем согласии с наблюдаемыми значениями.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Келлерманн К.И. Радиогалактики и квазары // Галактическая и внегалактическая радиоастрономия: Сб. / под ред. Г.Л. Верскера и К.И. Келлерманна. М: Мир, 1976. С. 406–547.
2. Чаругин В.М., Розгачева И.К., Бруевич Е.А. Об электромагнитной природе фрактальности сложных систем: Фрактальность джетов галактических ядер и хромосферных структур маломассивных звезд главной последовательности // Фракталы и прикладная синергетика: Труды ФиПС-03 / под ред. В.С. Ивановой, В.У. Новикова. М: Изд-во МГОУ, 2003. С. 253–257.
3. Чаругин В.М., Розгачева И.К. Фрактальность джетов активных галактических ядер // Труды всероссийской астрономической конференции ВАК 2004 «Горизонты Вселенной». М.: МГУ, 2004. С. 258–259.

УДК 537.9+539.6

Геворкян Э.В.*Московский государственный областной университет***ВАРИАЦИОННЫЙ ПОДХОД В ТЕОРИИ ЖИДКИХ КРИСТАЛЛОВ**

Аннотация. Показана эффективность вариационного подхода в статистической теории жидких кристаллов и, в более общем случае, в теории конденсированного состояния. Разработанный подход дает возможность оптимизировать простые модели жидких кристаллов, используя реалистичные межмолекулярные потенциалы.

Ключевые слова: жидкие кристаллы, вариационные принципы, конденсированное состояние, многочастичные взаимодействия, фазовые переходы.

E. Gevorkyan*Moscow State Regional University***THE VARIATIONAL APPROACH IN THE THEORY OF LIQUID CRYSTALS**

Abstract. The efficiency of the variational approach in the statistical theory of liquid crystals and, in a general case, in the condensed state theory is shown. The developed approach allows us to optimize the simple models of liquid crystals with the help of realistic intermolecular potentials.

Key words: liquid crystals, variational principles, condensed state, many-particle interactions, phase transitions.

Жидкие кристаллы отличаются структурным разнообразием мезофаз и сложным строением и взаимодействием структурных элементов (в частности, мезогенных молекул).

Они представляют собой конденсированные молекулярные системы с ориентационным дальним порядком и неполным трансляционным порядком. В соответствии с этим «структурным» определением их отличительной особенностью является сильная связь трансляционных и внутренних, ориентационных молекулярных переменных. Таким образом, «размерность» статистической задачи как минимум вдвое выше, чем у простых систем.

Поэтому для приближенного теоретического исследования микроскопических (молекулярных) моделей в рамках статистической теории жидкокристаллического состояния и полимезоморфных фазовых переходов

необходим общий универсальный подход. В феноменологической теории такую роль играет метод молекулярного поля. По нашему мнению, в микроскопической теории таким является подход, основанный на статистических вариационных принципах [1; 2].

Среди вариационных принципов статистической физики наиболее универсальным является вариационный принцип Н.Н. Боголюбова. (Формально аналогичный ему в классическом случае принцип Гиббса для энтропии и функции распределения приводит к условному экстремуму и плохо пригоден для поиска и физического обоснования приближений.)

В основе развиваемого вариационного подхода лежит обобщение этого принципа на случай сложных молекулярных систем с трансляционными $\mathbf{r}_m$ и внутренними (ориентационными $\mathbf{\Omega}_m$, конформационными ζ_m и т.д.) степенями свободы [2]. Важным достоинством этого принципа является то, что в аппроксимирующей модели варьируется непосредственно гамильтониан, описывающий межмолекулярное взаимодействие. Кроме того, он справедлив как для классических, так и для квантовых систем.

Пусть $H(\mathbf{1}, \dots, \mathbf{N})$ – гамильтониан исходной реалистичной модели жидкого кристалла с внутренними степенями свободы (где $\mathbf{m}=(\mathbf{r}_m, \mathbf{\Omega}_m, \zeta_m)$), а H_0 – гамильтониан упрощенной точно решаемой «аппроксимирующей» модели (например, с разделяющимися или дискретными переменными и т.п.). Тогда рассмотрим непрерывный функционал энергии Гельмгольца:

$$F[H_0 + A] = -kT \ln \text{Sp} \exp(-(H_0 + A)/kT), \quad (1)$$

где $A=H-H_0$, k – постоянная Больцмана, T – температура.

Вторая вариация по оператору A алгебраически неположительна, поскольку

$$\delta_A^2 F[H_0 + A] = -k^{-1} T^{-1} \langle \delta A | \delta A \rangle_{H_0 + A} \leq 0, \quad (2)$$

где $\langle a | b \rangle = \langle ab \rangle - \langle a \rangle \langle b \rangle$ – второй семиинвариант (кумулянт) распределения Гиббса.

Поэтому

$$F[H_0 + A] \leq F[H_0] + \langle A \rangle_0, \quad (3)$$

и, следовательно,

$$F[H] \leq F[H_0] + \langle H - H_0 \rangle_0. \quad (4)$$

Отсюда также следует двойное неравенство:

$$F[H_0] + \langle H - H_0 \rangle_H \leq F[H] \leq F[H_0] + \langle H - H_0 \rangle_0 = F_M, \quad (5)$$

которое можно использовать для качественной оценки погрешности приближений.

Функционал F_M в правой части этого неравенства является модельной энергией Гельмгольца и его минимум по параметрам аппроксимирующего гамильтониана H_0 при

$$\langle H - H_0 | \delta H_0 \rangle_0 = 0 \quad (6)$$

дает наилучшую аппроксимацию $F[H]$ и, таким образом, определяет приближенное выражение для энергии Гельмгольца исходной молекулярной модели жидкого кристалла.

В классическом случае гамильтонианы $H(1, \dots, N)$ и $H_0(1, \dots, N)$ в формулах (1)–(6) заменяем на потенциальные энергии $V(1, \dots, N)$ и $V_0(1, \dots, N)$, а след статистического оператора – на интеграл по конфигурационным переменным и получаем такие же неравенства (3)–(5) для конфигурационных частей энергий Гельмгольца и условие оптимальности (6).

Исходная модель может включать трансляционные, ориентационные, конформационные переменные и трех-, четырехчастичные взаимодействия. В рамках единого вариационного подхода возможно аппроксимировать эту сложную реалистичную модель значительно более простыми «решаемыми» моделями, например, с решеточной пространственной структурой, с дискретным набором возможных ориентаций, с разделением пространственных, конформационных и ориентационных переменных, с эффективным парным взаимодействием и другими. Причем, в каждом случае мы получим лучшую в своем классе моделей аппроксимацию функции Гельмгольца и термодинамических свойств жидкого кристалла. В частности, простейшая аддитивная модель

$$V_0(1, \dots, N) = V_t(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) + V_o(\boldsymbol{\Omega}_1, \dots, \boldsymbol{\Omega}_N) + V_c(\boldsymbol{\xi}_1, \dots, \boldsymbol{\xi}_N) \quad (7)$$

соответствует статистической независимости (или «расщеплению») соответствующих переменных, но в этом случае, в отличие от аналогичного

приближения мультипликативности функций распределения (самосогласованного поля), полученные результаты окажутся термодинамически согласованными.

Для общей модели эффективного парного взаимодействия

$$U_{\text{парн}}^{\text{эфф}} = \sum_{i < j} \Phi_2^{\text{эфф}}(\mathbf{i}, \mathbf{j}), \quad (8)$$

$$U_N = \sum_{p=2}^4 \frac{1}{p!} \sum_{i_1 \neq \dots \neq i_p} \Phi_p(\mathbf{i}_1, \dots, \mathbf{i}_p) \quad (9)$$

из (5), (6) находим:

$$F_M[\Phi_2^{\text{эфф}}; \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4] = F[\Phi_2^{\text{эфф}}] + \langle U_N - U_{\text{парн}}^{\text{эфф}} \rangle_{\text{эфф}}, \quad (10)$$

$$\langle U_N - U_{\text{парн}}^{\text{эфф}} | \delta \Phi_2^{\text{эфф}}(\mathbf{i}, \mathbf{j}) \rangle_{\text{эфф}} = 0. \quad (11)$$

Отсюда находим уравнения, определяющие эффективные потенциалы парных межмолекулярных взаимодействий $\Phi_2^{\text{эфф}}(\dots)$, которые наилучшим образом учитывают истинные многочастичные взаимодействия $\Phi_3(\dots)$ и $\Phi_4(\dots)$:

$$\begin{aligned} \Phi_2^{\text{эфф}}(\mathbf{i}, \mathbf{j}) = & \Phi_2(\mathbf{i}, \mathbf{j}) + \frac{1}{\rho_2^{\text{эфф}}(\mathbf{i}, \mathbf{j})} \left(\sum_{i \neq j \neq i_3} \int \Phi_3(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{i}_3) \rho_3^{\text{эфф}}(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{i}_3) d\mathbf{i}_3 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j \neq i_3 \neq i_4} \int \Phi_p(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{i}_3, \mathbf{i}_4) \rho_p^{\text{эфф}}(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{i}_3, \mathbf{i}_4) d\mathbf{i}_3 d\mathbf{i}_4 \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Однако эффективные потенциалы парных межмолекулярных взаимодействий (12), в отличие от истинных (9), зависят от термодинамических параметров состояния и от условий молекулярного окружения. Это значительно усложняет их «калибровку», в особенности при описании фазовых переходов [3].

Для описания жидкокристаллического состояния принципиально важен учет в модели парного взаимодействия отталкивания анизометричных твердых ядер. Попытки ограничиться анизотропным вандерваальсовым притяжением молекул на решетке (классическая модель молекулярного поля Майера–Заупе) для получения согласия с экспериментом требуют константу взаимодействия, более чем на два порядка превышающую реальные значения!

Вариационная теория позволяет учесть отталкивание твердых ядер, взяв систему с таким взаимодействием в качестве базисной.

$$V_0(\mathbf{1}, \dots, \mathbf{N}) = \sum_{i \neq j} V_{ij}^{\text{тя}} + \sum_i V(i), \quad (13)$$

где твердое ядро аппроксимирующего потенциала $V_{ij}^{\text{тя}}$ должно совпадать или включать в себя ядро исходного реального взаимодействия. Тогда

$$(V(\mathbf{1}) - \Phi(\mathbf{1}))\rho_1^0(\mathbf{1}) = \sum_{p=3}^4 \frac{1}{(p-1)!} \sum_{i_2 \neq \dots \neq i_p \neq 1} \int \Phi_p^{\text{мягк}}(\mathbf{1}, \mathbf{i}_2, \dots, \mathbf{i}_p) \rho_p^0(\mathbf{1}, \mathbf{i}_2, \dots, \mathbf{i}_p) d\mathbf{i}_3 \dots d\mathbf{i}_p, \quad (14)$$

где $\Phi_p^{\text{мягк}}(\dots)$ – «мягкая» часть межмолекулярных потенциалов без твердого ядра.

Таким образом, развитый подход дает возможность оптимизировать простые модели жидких кристаллов, используя реалистичные межмолекулярные потенциалы. Заметим также, что попытка исследования аналогичных молекулярных моделей методом функций распределения приводит к очень громоздким системам уравнений, практически непригодным даже для приближенного численного решения и представляющим, в основном, академический интерес.

В целом, вариационный подход благодаря своей универсальности и эффективности может быть успешно применен для развития теории как жидкокристаллических, так и других конденсированных статистических систем.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Базаров И.П., Геворкян Э.В. Статистическая физика жидких кристаллов. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1992. 496 с.
2. Базаров И.П., Геворкян Э.В. Статистическая теория твердых и жидких кристаллов. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983. 496 с.
3. Геворкян Э.В. Многочастичные взаимодействия в физике конденсированного состояния // Вестник Московского государственного областного университета. Серия «Физика – математика». 2013. № 3. С. 45–48.

УДК 530.1:539.12

Зверев Н.В.*Московский государственный областной университет***ОДНОРОДНЫЕ СОСТАВЛЯЮЩИЕ ПОЛЯ И КРИТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ
ФЕРМИОННЫХ КОРРЕЛЯТОРОВ МОДЕЛИ
В ДИСКРЕТНОМ ПРОСТРАНСТВЕ–ВРЕМЕНИ**

Аннотация. Исследовано влияние однородных составляющих электромагнитного поля на фермионные корреляторы (корреляционные функции) в кулоновской фазе $U(1)$ модели в четырехмерном дискретном пространстве-времени с конечным числом точек. Показано, что эти составляющие поля нарушают необходимое критическое поведение фермионных корреляторов. В результате устранения данных составляющих электромагнитного поля с использованием процедуры фиксации калибровки критическое поведение фермионных корреляторов восстанавливается.

Ключевые слова: $U(1)$ модели, фермионы, однородные составляющие поля, решетка пространства-времени.

N. Zverev*Moscow State Regional University***UNIFORM COMPONENTS OF A FIELD AND A CRITICAL BEHAVIOR OF
FERMION CORRELATION FUNCTIONS IN
A DISCRETE SPACE–TIME MODEL**

Abstract. We have studied the influence of uniform components of the electromagnetic field on fermion correlators (correlation functions) in the Coulomb phase of the $U(1)$ model in the four-dimensional discrete space-time with a finite number of points. The uniform components of the field are shown to violate the necessary critical behavior of the fermion correlators. After elimination of the uniform electromagnetic field components with use of a gauge fixing procedure, the critical behavior of fermion correlators is restored.

Key words: $U(1)$ models, fermions, uniform components of field, space-time lattice.

Для изучения явления неслетания кварков из адронов, а также электромагнитного взаимодействия при больших энергиях применяют метод решетки, т. е. аппроксимацию непрерывного пространства-времени дискретной совокупностью точек [1]. Электромагнитное взаимодействие в этом методе описывают $U(1)$ моделью [1; 2]. Фундаментальная величина данной модели – действие, имеет вид:

$$S = S_G + S_F,$$

где S_G описывает фотоны, а S_F – фермионные частицы (фермионы):

$$S_G = \beta \sum_{\substack{x, \mu, \nu \\ \mu < \nu}} \text{Re} \left(1 - U_{x, \mu} U_{x+\mu, \nu} U_{x+\nu, \mu}^* U_{x, \nu}^* \right), \quad S_F = \sum_{f=1}^{N_f} \sum_{x, y} \bar{\psi}_x^f M_{xy} [U] \psi_y^f.$$

Здесь x , y и μ , ν – соответственно точки и направления четырехмерного пространства-времени (решетки):

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4); \quad y = (y_1, y_2, y_3, y_4);$$

$$x_\mu, y_\mu = 1, 2, \dots, N_\mu; \quad \mu, \nu = 1, 2, 3, 4;$$

N_μ – число точек решетки вдоль направления μ , при этом $\mu = 1, 2, 3$ обозначают направления пространства, а $\mu = 4$ – направление времени. Далее, величина $U_{x, \mu} = \exp(iA_{x, \mu})$ – волновая функция фотонов с потенциалом $A_{x, \mu}$ в области $A_{x, \mu} \in (-\pi, \pi]$; ψ_x^f и $\bar{\psi}_x^f$ – волновые функции фермионов, являющиеся антиперестановочными при произведении друг с другом; N_f – число поколений фермионов; параметр $\beta = 1 / e^2$ – обратный квадрат заряда; $M_{xy}[U]$ – фермионная матрица:

$$M_{xy}[U] = \delta_{xy} - \kappa \sum_{\mu} \left\{ (1 - \gamma_{\mu}) U_{x, \mu} \delta_{x+\mu, y} + (1 + \gamma_{\mu}) U_{y, \mu}^* \delta_{y+\mu, x} \right\},$$

γ_{μ} – матрицы Дирака размером 4×4 ; $\kappa = 1/(8 + 2m)$ – хоппинг-параметр, зависящий от массы m фермионов. На волновые функции фотонов и фермионов накладывают следующие граничные условия:

$$U_{x+N_{\nu}, \nu} = U_{x, \mu}, \quad \psi_{x+N_{\nu}, \nu}^f = \pm \psi_x^f, \quad \bar{\psi}_{x+N_{\nu}, \nu}^f = \pm \bar{\psi}_x^f,$$

где у фермионов знак «+» выбирают для направлений $\nu = 1, 2, 3$, а знак «-» для $\nu = 4$.

При теоретическом изучении элементарных частиц работают в системе единиц, в которой постоянную Планка и скорость света полагают равными $\hbar = c = 1$. Кроме того, при выполнении численных расчетов работают с безразмерными величинами. И для этого временно полагают шаг решетки a , т.е. наименьшее расстояние между соседними точками по каждому конкретному направлению, равным $a = 1$. Впоследствии при теоретическом анализе полученных численных значений восстанавливают шаг решетки a , и

для получения осмысленных физических результатов выполняют переход к непрерывному пределу, т. е. устремляют $a \rightarrow 0$.

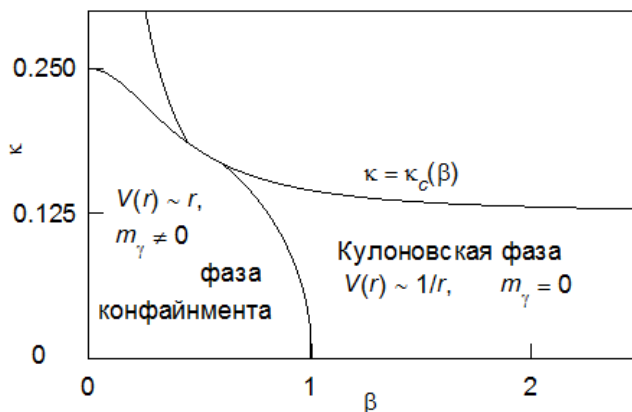


Рис. 1. Фазовая структура U(1) модели [2]. $V(r)$ – потенциал взаимодействия неподвижных точечных зарядов на расстоянии r друг от друга, m_γ – масса фотона.

В случае изучения электромагнитного взаимодействия данную U(1) модель рассматривают в области кулоновской фазы (рис. 1), т. е. в области параметров β и κ , в которой потенциал взаимодействия неподвижных заряженных частиц имеет кулоновский вид, а массы фотонов равны нулю [2]. Правильное описание свойств частиц в непрерывном пределе нулевого шага решетки ($a \rightarrow 0$) требует выбора параметров β и κ вблизи линии раздела фаз $\kappa = \kappa_c(\beta)$ (рис. 1) [2; 3]. На этой линии решеточные корреляторы (корреляционные функции) имеют характерные сингулярные, или критические свойства, а физические массы и энергии частиц в единицах шага решетки, получаемые с помощью данных функций, равны нулю [2; 3].

Однако при численном исследовании данной U(1) модели в кулоновской фазе было обнаружено [4] отсутствие необходимого сингулярного поведения у корреляторов фотонов и несоставных фермионов. Поэтому такие корреляционные функции на решетке неверно описывают свойства этих частиц. В работе [5] выяснено, что причиной отсутствия правильного поведения фотонного коррелятора являются однородные составляющие ϕ_μ электромагнитного поля $A_{x,\mu}$:

$$\phi_\mu = \frac{1}{V} \sum_x A_{x,\mu},$$

где V – полное число точек пространства-времени («объем» решетки пространства-времени): $V = N_1 N_2 N_3 N_4$. Однородные составляющие электромагнитного поля представляют собой составляющие этого поля (моды), имеющие нулевые импульсы. В обычном, бесконечном непрерывном пространстве-времени, такие составляющие поля не влияют на корреляторы электромагнитного поля и фермионных частиц. Однако в случае дискретного пространства-времени с конечным числом точек данные составляющие электромагнитного поля оказывают влияние на эти корреляционные функции.

Было предложено устранять данные составляющие из $A_{x,\mu}$ чередованием вычитания ϕ_μ :

$$U_{x,\mu} \rightarrow U_{x,\mu} \exp(-i\phi_\mu), \quad (1)$$

и процедуры фиксации калибровки Лоренца на решетке:

$$U_{x,\mu} \rightarrow g_x U_{x,\mu}, \quad U_{x-\mu,\mu} \rightarrow U_{x-\mu,\mu} g_x^* : \quad \sum_{x,\mu} \text{Re} U_{x,\mu} \rightarrow \max. \quad (2)$$

Здесь g_x – произвольные комплексные числа с $|g_x| = 1$.

В работе [6] исследовано в кулоновской фазе влияние однородных составляющих ϕ_μ электромагнитного поля на следующие фермионные корреляторы:

$$\Gamma(\tau, U) = \frac{1}{4V} \text{Re tr} \sum_{x,y} \gamma_4 M_{xy}^{-1}[U],$$

$$\Pi(U) = \frac{1}{4V} \text{Tr}(M^+[U]M[U])^{-1}, \quad \overline{\psi\psi}(U) = \frac{1}{4V} \text{Tr} M^{-1}[U].$$

Здесь в случае функции Γ суммирование ведется по всем $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ и $y = (y_1, y_2, y_3)$, и при этом $y = (y, x_4 + \tau)$; tr – след в пространстве матриц Дирака, а Tr – след в пространстве матриц Дирака и точек пространства-времени. Вычислялись средние значения $\langle \Gamma(\tau) \rangle$, $\langle \Pi \rangle$ и $\langle \overline{\psi\psi} \rangle$, где $\langle \dots \rangle$ означает усреднение по всем полям $U_{x,\mu}$ либо с весом $\exp(-S_G[U]) \det^{N_f} M[U]$ (динамические фермионы), либо с весом $\exp(-S_G[U])$ (статические фермионы). Оба этих подхода вычислений средних значений дают в кулоновской фазе примерно одинаковые результаты.

При вычислении $\langle \Pi \rangle$ и $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ либо использовалась процедура (1) и (2) устранения однородных составляющих поля ϕ_μ , либо эта процедура не использовалась и однородные составляющие поля не удалялись. А при вычислении $\langle \Gamma(\tau) \rangle$ либо удалялись однородные составляющие поля ϕ_μ с использованием (1) и (2), либо однородные составляющие поля не удалялись, но использовалась процедура (2) фиксации калибровки Лоренца. В случае динамических фермионов число поколений $N_f = 2$. Число точек решетки по пространственным направлениям выбиралось одинаковым, т. е. $N_1 = N_2 = N_3$, и поэтому «объем» решетки $V = N_1^3 \times N_4$.

По значениям $\langle \Gamma(\tau) \rangle$ вычислялись эффективные фермионные массы $m_{\text{eff}}(\tau)$ согласно формуле:

$$m_{\text{eff}}(\tau) = \exp E(\tau) - 1, \quad \frac{\text{ch}[E(\tau)(\tau + 1 - N_4/2)]}{\text{ch}[E(\tau)(\tau - N_4/2)]} = \frac{\langle \Gamma(\tau + 1) \rangle}{\langle \Gamma(\tau) \rangle}.$$

По $m_{\text{eff}}(\tau)$ находились значения физических фермионных масс m_f в единицах шага решетки как равные $m_{\text{eff}}(\tau)$ на горизонтальных участках данных зависимостей [3].

Типичные результаты расчетов $\langle \Pi \rangle$ и $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ в зависимости от κ представлены на рис. 2. Видно, что однородные составляющие поля нарушают (скрывают) требуемое сингулярное поведение этих функций вблизи линии раздела фаз $\kappa = \kappa_c(\beta)$. После устранения однородных составляющих поля сингулярное поведение этих функций восстанавливается.

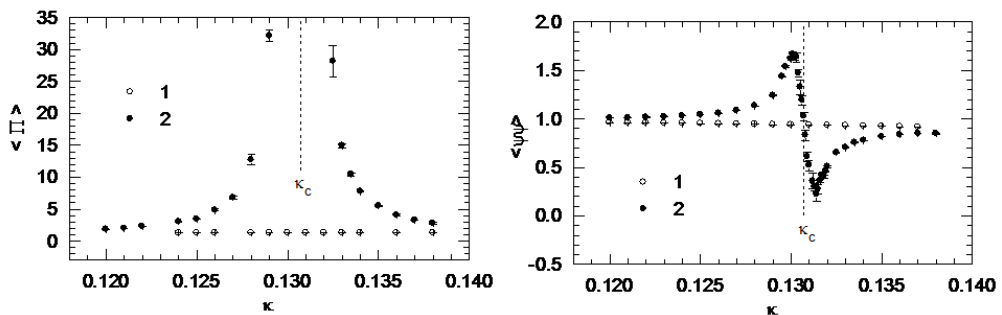


Рис. 2. Зависимости $\langle \Pi \rangle$ и $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ от κ : 1 – в поле с однородными составляющими, 2 – в поле без однородных составляющих. Параметр $\beta = 2$, «объем» решетки пространства-времени $6^3 \times 12$, динамические и статические фермионы, значение $\kappa_c(\beta) = 0.1307 \pm 0.0002$.

На рис. 3 представлены типичные результаты расчетов m_{eff} в зависимости от τ . Видно, что $m_{\text{eff}}(\tau)$ в поле без однородных составляющих практически постоянны и равны фермионным массам m_f . В поле с однородными составляющими массы m_f , определенные как значения $m_{\text{eff}}(\tau)$ на гладких горизонтальных участках зависимости, не стремятся к нулю при $\kappa \rightarrow \kappa_c(\beta)$ [4].

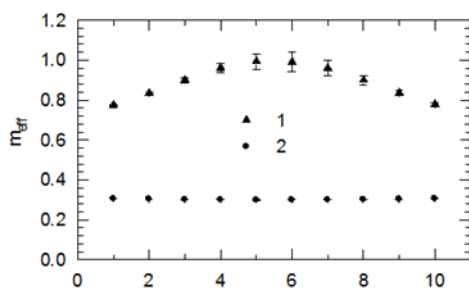


Рис. 3. Зависимость m_{eff} от τ : 1 – в поле с однородными составляющими, 2 – в поле без однородных составляющих. Параметры $\beta = 2$, $\kappa = 0.122$, «объем» решетки пространства-времени $6^3 \times 12$, динамические и статические фермионы.

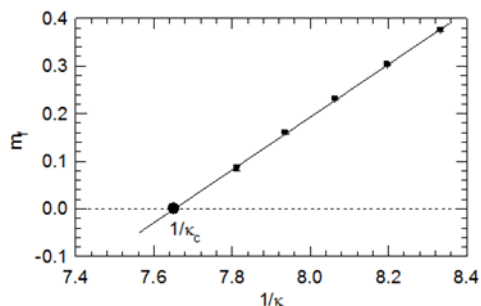


Рис. 4. Зависимость m_f от $1/\kappa$ в поле без однородных составляющих. Параметр $\beta = 2$, «объем» решетки пространства-времени $6^3 \times 12$, динамические и статические фермионы, значение $\kappa_c(\beta) = 0.1307 \pm 0.0001$.

На рис. 4 представлены типичные результаты расчетов зависимости фермионных масс m_f от $1/\kappa$ в поле без однородных составляющих. Видно, что при $\kappa \rightarrow \kappa_c(\beta)$ справедлива аппроксимирующая зависимость

$$m_f \sim 1/\kappa - 1/\kappa_c(\beta),$$

а массы m_f удовлетворяют условию $m_f \rightarrow 0$ при $\kappa \rightarrow \kappa_c(\beta)$.

Таким образом, однородные составляющие поля скрывают требуемое критическое поведение фермионных корреляторов вблизи линии раздела фаз. Однородные составляющие электромагнитного поля необходимо устранять при исследованиях математических моделей фермионов методом решетки.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Wilson K. Confinement of quarks // Phys. Rev. D. 1974. V. 10. P. 2445–2459.
2. DeGrand T., Toussaint D. Topological excitations and Monte Carlo simulation of Abelian gauge theory // Phys. Rev. D. 1980. V. 22. P. 2478–2489.
3. Montvay I., Muenster G. Quantum Fields on a Lattice. Cambridge University Press, 1994.
4. Nakamura A., Plewnia M. Gauge fixing ambiguity and photon propagators in compact U(1) lattice gauge theory // Phys. Lett. B. 1991. V. 255. P. 274–278.
5. Bogolubsky I., Mitrjushkin V., Mueller-Preussker M., Peter P. Lorentz gauge and Gribov ambiguity in the compact lattice U(1) theory // Phys. Lett. B. 1999. V. 458. P. 102–108.
6. Zverev N. Influence of the Uniform Components of the Gauge Field on the Fermion Correlation Functions in the Lattice U(1) Model // Phys. Scripta. V. 72. 2005. P. 19–22.

УДК 539.6:539.22

Назаров А.П., Барабанова Н.Н., Богданов Д.Л., Беляев В.В., Дадиванян А.К.*Московский государственный областной университет***АНИЗОТРОПИЯ ЭЛЕКТРОННОЙ ПОЛЯРИЗУЕМОСТИ ДИМЕРОВ
КАРБОНОВЫХ КИСЛОТ**

Аннотация. Обнаружен эффект экзальтации поляризуемости молекулы при образовании водородных связей в димере. Выявлена зависимость изменения анизотропии поляризуемости при димеризации от средней поляризуемости молекулы. Определена анизотропия поляризуемости водородной связи.

Ключевые слова: поляризуемость, анизотропия электронной поляризуемости, водородная связь, сопряжение.

A. Nazarov, N. Barabanova, D. Bogdanov, V. Belyaev, A. Dadivanyan*Moscow State Regional University***ELECTRONIC POLARIZATION ANISOTROPY OF
CARBOXYLIC ACIDS DIMERS**

Abstract. The effect of exaltation of electronic polarization of a molecule in the process of the formation of hydrogen bonds in a dimer has been discovered. The correlation between the change in the electronic polarization anisotropy in dimerization and the mean anisotropy of the molecule has been found. The electronic polarization anisotropy of the hydrogen bond has been determined.

Key words: polarization, electronic polarization anisotropy, hydrogen bond, conjugation.

Одной из основных характеристик молекулы является ее электронная поляризуемость. Поляризуемостью в значительной мере определяется поведение молекул в электрическом поле, она играет ключевую роль в индукционных и дисперсионных взаимодействиях. Анизотропией оптической поляризуемости определяется ориентация молекул в электромагнитных полях с частотой выше 10^{12} Гц. Анизотропия оптической поляризуемости определяет двойное лучепреломление света.

Исследование анизотропии поляризуемости позволяет определить структуру молекул.

Сильное влияние как на величину, так и на анизотропию поляризуемости оказывает сопряжение валентных связей, в частности, именно сопряжением связей объясняется высокая проводимость углерода, близкая к проводимости металлов. Соединения с сопряженной связью широко применяются в современной науке и технологиях, в частности, азокрасители используются в нелинейной оптике, лазерах с перестраиваемой частотой, квантовой электронике, оптоэлектронных устройствах. Азокрасители используются для создания ориентированных жидких кристаллов. Следует отметить, что этот метод ориентирования ЖК, будучи неконтактным, является наиболее перспективным.

Несмотря на то, что в ряде работ исследовано влияние межмолекулярных взаимодействий на передачу сопряжения химической связи [1], до последнего времени нет сведений о влиянии передачи сопряжения связей через межмолекулярные взаимодействия на анизотропию электронной поляризуемости молекул. В ряде работ было показано, что анизотропия поляризуемости макромолекул в растворе зависит от анизотропии поляризуемости молекул растворителя, но этот эффект связан не с экзальтацией поляризуемости, а с ближним ориентационным порядком полимер – растворитель (корреляция ориентаций макромолекулярных цепей и молекул растворителя) [2–4].

Цель настоящей работы – выявить влияние межмолекулярных взаимодействий на передачу сопряжения химических связей и анизотропию электронной поляризуемости молекул. В связи с тем, что энергия образования водородной связи больше энергии других межмолекулярных взаимодействий, нами были исследованы поляризуемости молекул изомеров карбоновых кислот, в основном, различных ароматических соединений, в которых влияние сопряжения связей на поляризуемость проявляется наиболее сильно: бензойной кислоты, карбоновой кислоты с остатком антрацена (antrcooh), карбоновой кислоты с остатком пирена (purgcooh) и 1, 3, 5 – трибензойной кислоты ($\text{bnz}(\text{cooh})_3$), а также муравьиной кислоты (hcooh). Структурные формулы оптимизированных по энергии димеров соединений приведены на рисунке 1.

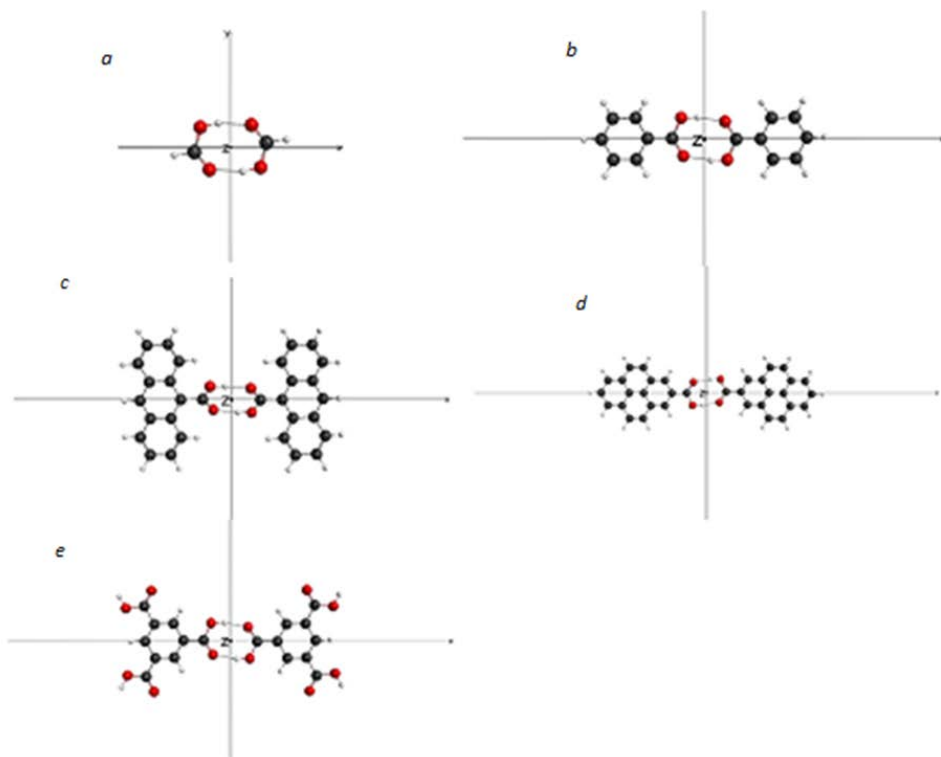


Рис. 1. Димеры соединений с ориентацией водородной связи вдоль оси x. а - муравьиная кислота, b - бензойная кислота, c - antrcooh, d - pyrcooh, e - bnz(cooh)₃.

Поляризуемости молекул и димеров определялись методом Хартри-Фока по программе GAMESS [5]. Компоненты тензора поляризуемости мономеров М и димеров D α_{xx} , α_{yy} , α_{zz} , средняя поляризуемость α_{avg} , разность $\Delta = \alpha(\text{димера}) - 2\alpha(\text{мономера})$ и относительное изменение анизотропии поляризуемости δ исследованных соединений приведены в таблице 1. Как видно из таблицы 1, при димеризации происходит значительная экзальтация поляризуемости соединений, содержащих радикалы ароматических соединений. При этом существенно изменяются компоненты поляризуемости в плоскости молекул, в то время как поляризуемости в направлении, перпендикулярном плоскости молекул, меняются незначительно.

Таблица 1

Данные по поляризуемости

		α_{xx}		α_{yy}		α_{zz}		α_{avg}
bnzcooh	M	140,43	140,43	117,38	117,38	34,66	34,66	97,49
	D	313,14		225,82		68,33		202,43
	Δ	32,28		-8,94		-0,99		7,45
	δ	0,103084882		-0,039589053		-0,014488512		0,036803
hcooh	M	23,46	23,46	28,48	28,48	9,87	9,87	20,61
	D	54,52		51,03		19,67		41,51
	Δ	7,6		-5,93		-0,07		0,29
	δ	0,139398386		-0,116206153		-0,003558719		0,006986
antrcooh	M	249,22	249,22	363,67	363,67	73,58	73,58	228,8
	D	555,33		702,98		144,16		467,5
	Δ	56,89		-24,36		-3		9,9
	δ	0,102443592		-0,034652479		-0,020810211		0,021176
pyrcooh	M	426,01	426,01	272,42	272,42	71,89	71,89	256,77
	D	932,49		532,28		142,43		535,73
	Δ	80,47		-12,56		-1,35		22,19
	δ	0,086295832		-0,023596603		-0,00947834		0,04142
bnz(cooh) ₃	M	179,1	179,1	191,1	191,1	49,8	49,8	140
	D	396,4	396,4	369,3	369,3	98,4	98,4	288
	Δ	38,2		-12,9		-1,2		8
	δ	0,096367306		-0,03493095		-0,012195122		0,027778

Анизотропия поляризуемости в плоскости кольца характеризуется величиной $\alpha_{xx} - \alpha_{yy}$, где α_{xx} и α_{yy} – соответствующие компоненты тензора поляризуемости. Ось x направлена по водородной связи.

Анализ анизотропии электронной поляризуемости ароматических соединений показал, что экзальтация поляризуемости растет с увеличением средней поляризуемости молекулы [6; 7]. Отметим, что поляризуемость и ее анизотропия некоторых из исследованных нами молекул были оценены также в [8].

Рассмотрим зависимость величины $(\alpha_{xx}-\alpha_{yy})_D - 2(\alpha_{xx}-\alpha_{yy})_M$, где индексы D и M обозначают димер и мономер, соответственно, характеризующей экзальтацию поляризуемости от средней поляризуемости мономера α_{avg} .

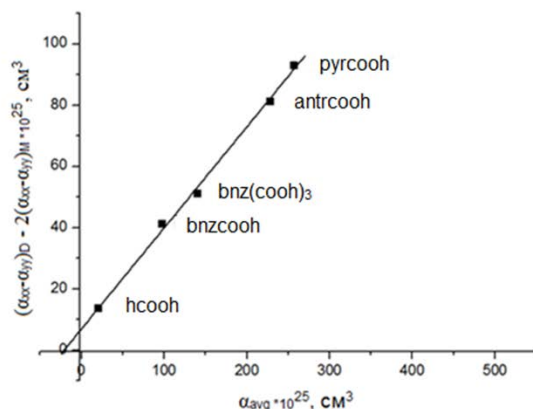


Рис. 2. Зависимость изменения анизотропии поляризуемости при димеризации от средней поляризуемости молекулы.

Как видно из рисунка 2, величина $(\alpha_{xx}-\alpha_{yy})_D - 2(\alpha_{xx}-\alpha_{yy})_M$, как и в случае внутримолекулярного сопряжения связей, растет с увеличением средней поляризуемости молекул, которая пропорциональна объему подвижной электронной системы, при этом зависимость является линейной – коэффициент корреляции равен 0,996. Такая зависимость поляризуемости димера указывает на то, что через водородную связь осуществляется передача сопряжения молекул, что и приводит к увеличению анизотропии поляризуемости димера. Кроме того, если бы экзальтация поляризуемости димера была обусловлена только изменением поляризуемости связей, прямая на рисунке 2 проходила бы через начало координат. Однако эта прямая отсекает на оси ординат отрезок, что свидетельствует о наличии анизотропии электронной поляризуемости водородной связи. Расчеты показали, что анизотропия электронной поляризуемости водородной связи равна $3.5 \cdot 10^{-25} \text{CM}^3$.

Выводы:

1. Обнаружена экзальтация поляризуемости при образовании димеров карбоновых кислот.
2. Для ряда ароматических карбоновых кислот получена линейная зависимость изменения анизотропии поляризуемости при димеризации от величины средней поляризуемости соединения.
3. Найдена анизотропия поляризуемости водородной связи, которая оказалась равной $3.5 \cdot 10^{-25} \text{ см}^3$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты №14-07-00574_а и №15-37-50388 мол_нр) и РФФИ и Правительства Московской области (проект №14-47-03608).

ЛИТЕРАТУРА:

1. Теренин А.Н., Ермолаев В.Л. Межмолекулярный перенос энергии в явлении сенсibilизированной люминесценции // Успехи физ. наук. 1956. Т. 58. С. 37–68.
2. Фрисман Э.В., Дадиванян А.К., Дюжев Г.А. К вопросу об определении оптической анизотропии макромолекул // Доклады АН СССР. 1963. Т. 153. С. 1062–1064.
3. Frisman E., Dadivanyan A. Effect of solvent on the optical behaviour of macromolecules in a laminar flow // Journal of Polymer Science. Part C. 1967. V. 16. P. 1001–1007.
4. Дадиванян А.К., Грищенко А.Е., Цветков Н.В., Рюмцев Е.И. Ближний ориентационный порядок в системах полимер – растворитель // Высокомолек. соед. 2008. Б. Т. 50, № 10. С. 1870–1904.
5. Hurst G., Dupuis M., Clement E. Ab initio analytic polarizability, first and second hyperpolarizabilities of large conjugated organic molecules // J. Chem. Phys. 1988. V. 89. № 1. P. 385–394.
6. Вукс М.Ф. Рассеяние света в газах и жидкостях. Л.: Изд-во. Ленингр. ун-та. 1977. С. 320.
7. Вукс М.Ф. Электрические и оптические свойства молекул и конденсированных сред. Л.: Изд-во. Ленингр. ун-та. 1984. С. 334.
8. Беляев В.В. Определение анизотропии локального поля и параметра порядка 4-алкил-4'-алкокситоланов по рефрактометрическим данным // Журнал физической химии. 2001. Т. 75. № 6. С. 1088–1094.

УДК 539.6:539.22

Барабанова Н.Н., Штрек О.В.*Московский государственный областной университет***ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДИМЕРА КРАСИТЕЛЯ CD-1
С ЛАЗЕРНЫМ ИЗЛУЧЕНИЕМ**

Аннотация. По схеме тензорной аддитивности электронной поляризуемости рассчитаны компоненты тензора поляризуемости димера красителя CD-1. Определена зависимость энергии взаимодействия димера красителя CD-1 с электрическим полем лазерного излучения от углов, определяющих ориентацию димера относительно лабораторной системы координат. Найдено направление преимущественной ориентации димеров красителя относительно электрического поля и функция распределения по углам, определяющим ориентацию димера.

Ключевые слова: жидкий кристалл, фотоориентация, лазерное излучение, димер, функция распределения.

N. Barabanova, O. Shtrek*Moscow State Regional University***INTERACTION OF THE DIMER OF CD-1 DYE WITH LASER IRRADIATION**

Abstract. Components of a polarizability tensor of a CD-1 dye dimer are calculated according to the scheme of tensor additivity of electronic polarizability. The dependence of the energy of interaction of the CD-1 dye dimer with the electric field of laser irradiation on the angles defining the orientation of the dimer in a laboratory system of coordinates is determined. The direction of the primary orientation of the dye dimer in the electric field and the distribution function of the angles defining the dimer orientation are found.

Key words: liquid crystal, photoorientation, laser irradiation, dimer, distribution function of angles.

Среди многих методов ориентирования жидких кристаллов (ЖК) одним из наиболее перспективных является метод фотоориентации: ориентирование ЖК через ориентирование молекул красителя под действием лазерного излучения [1-8]. Теория этого явления рассматривалась в ряде работ [3, 9-11]. В работе [3] было рассмотрено поглощение молекулами красителя лазерного излучения, решено диффузионное уравнение и получена зависимость параметра порядка S от времени, однако не было рассчитано

значение угла ориентации молекул. В работах [9-11] была рассмотрена ориентация вытянутых транс-молекул красителя CD-1 при взаимодействии с электромагнитным полем лазерного излучения. Так как анизотропия оптической поляризуемости положительна, в результате взаимодействия с электрическим полем световой волны оси легкого вращения молекулы должны ориентироваться параллельно направлению электрического поля [3-12], что не соответствует результатам эксперимента.

Авторы работы [11] рассмотрели взаимодействие молекул красителя с магнитным полем излучения. Было показано, что вследствие положительного знака анизотропии магнитной восприимчивости молекулы CD-1 ее взаимодействие с магнитным полем приводит к ориентации оси легкого вращения молекулы в направлении магнитного поля излучения. Однако величина энергии взаимодействия молекулы с магнитным полем на два порядка меньше взаимодействия с электрическим, поэтому ориентация молекул достигается в результате взаимодействия с электрическим полем. Таким образом, ось легкого вращения должна быть направлена по электрическому полю.

Молекулы многих красителей, используемые при фотоориентации, имеют структуру, близкую к структуре молекулы CD-1, поэтому результаты, полученные для CD-1, можно обобщить на большой класс красителей.

В работах [12-13] было высказано предположение, что ориентацию молекул красителя или хромофорных групп можно объяснить с помощью гипотезы о цис-транс-изомеризации в этих молекулах, однако не было приведено доказательство ее справедливости.

В работах [14-15] было показано, что данные по полярной и азимутальной энергии сцепления ЖК можно объяснить тем, что молекулы CD-1 образуют димеры, в которых боковые карбоксильные группы молекул, находящиеся в середине молекулы, образуют водородные связи.

Квантово-механические расчеты, проведенные в этих работах методом Хартри-Фока с использованием программы GAMESS, и расчет энтропии димеризации показали, что вероятность существования красителя в виде

димеров при температурах 300–600 К намного превышает вероятность существования его в виде отдельных молекул.

В связи с этим целью работы является определение энергии взаимодействия димеров красителя с полем лазерного излучения и их ориентации относительно направления электрического поля световой волны.

Величина энергии взаимодействия молекулы красителя с электрическим полем излучения, как указывалось выше, на два порядка больше ее взаимодействия с магнитным полем световой волны. Поэтому найдем энергию взаимодействия димера красителя с электрическим полем лазерного излучения и определим его ориентацию относительно направления электрического поля световой волны.

Энергия взаимодействия димера красителя с электрическим полем определяется выражением:

$$U = -\frac{1}{2} \sum \alpha_{ik} E_i E_k, \quad i, k = x, y, z, \quad (1)$$

где α_{ik} – компоненты тензора поляризуемости молекулы в лабораторной системе координат x, y, z . E_i, E_k – компоненты вектора электрического поля в той же системе координат.

Пусть пучок света направлен по оси z , электрическое поле – по x , магнитное поле – по z .

Тогда величина энергии будет равна:

$$E_{xx} = -\frac{1}{2} \alpha_{xx} E_x^2. \quad (2)$$

Величина $\alpha_{ik} = \sum_{\tau, k=1,2,3} \alpha_{\sigma\tau} (\sigma i) (\tau k)$, где $\alpha_{\sigma\tau}$ – компоненты тензора поляризуемости в собственной системе координат, $(\sigma i), (\tau k)$ – косинусы углов между осями $\vec{\sigma}$ и $\vec{i}$ и $\vec{\tau}$ и $\vec{k}$ соответственно.

В собственной системе координат отличны от нуля только диагональные компоненты тензора поляризуемости, поэтому обозначим

$$\alpha_{11} = \alpha_1, \quad \alpha_{22} = \alpha_2, \quad \alpha_{33} = \alpha_3.$$

Компонента тензора поляризуемости α_{xx} равна:

$$\begin{aligned}
 a_{xx} = & \alpha_1 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \alpha_2 (\cos \varphi \cos \psi \cos \theta - \sin \varphi \sin \psi)^2 + \\
 & + \alpha_3 (-\sin \psi \cos \varphi \cos \theta - \cos \psi \cos \varphi)^2 = \alpha_1 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \\
 & + \alpha_2 (\cos^2 \varphi \cos^2 \psi \cos^2 \theta - 2 \cos \varphi \cos \psi \cos \theta + \sin^2 \varphi \sin^2 \psi) + \\
 & + \alpha_3 (\sin^2 \psi \cos^2 \varphi \cos^2 \theta - 2 \sin \psi \cos \varphi \cos \theta \cos \psi \sin \varphi + \cos^2 \psi \sin^2 \varphi)
 \end{aligned} \quad (3)$$

После усреднения по углам получим:

$$\begin{aligned}
 \overline{a_{xx}} = & \alpha_1 \overline{\sin^2 \theta} \cdot \overline{\cos^2 \varphi} + \alpha_2 (\overline{\cos^2 \varphi} \cdot \overline{\cos^2 \psi} \cdot \overline{\cos^2 \theta} + \overline{\sin^2 \varphi} \cdot \overline{\sin^2 \psi}) + \\
 & + \alpha_3 (\overline{\sin^2 \psi} \cdot \overline{\cos^2 \varphi} \cdot \overline{\cos^2 \theta} + \overline{\cos^2 \psi} \cdot \overline{\sin^2 \varphi})
 \end{aligned} \quad (4)$$

Так как для CD-1 реализуется изомер транс-транс, то рассмотрим димеры данного изомера. Структурные формулы изомеров CD-1 изображены на рис. 1 (а, б) [15]. Плоскости фенильных колец, карбоксильных групп и групп $-N=N-$ составляют с плоскостью, делящей угол между двумя фенильными группами бифенила, угол 16° . Ось 1 выбрана перпендикулярно этой плоскости, ось 2 – в направлении оси легкого вращения, ось 3 – перпендикулярно осям 1 и 2. На рисунке приведены проекции димера CD-1.

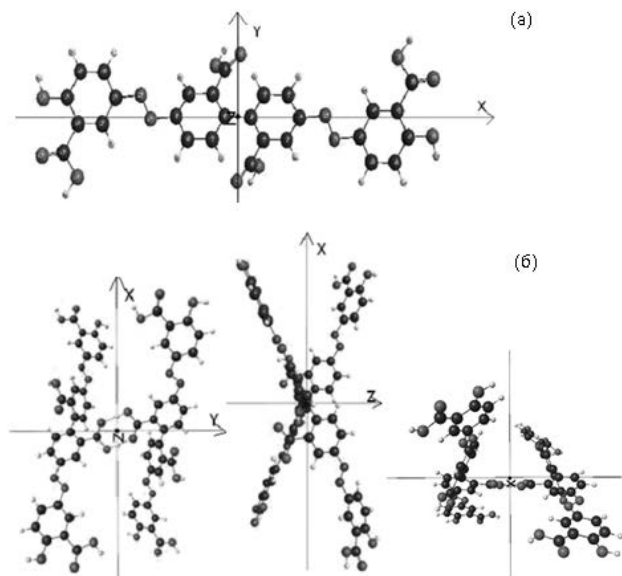


Рис. 1. а) Молекула красителя CD-1; б) молекула димера красителя CD-1.

Пользуясь валентно-оптической схемой и известными значениями поляризуемостей связей [15], рассчитаны компоненты тензора поляризуемости молекулы и димера CD-1:

$$\alpha_{\sigma,\tau} = \sum_{n,u,v} \alpha_{u_nv_n}(\vec{\sigma}, \vec{u}_n)(\vec{\tau}, \vec{v}_n), \quad (5)$$

где $\alpha_{u_nv_n}$ – компоненты тензора поляризуемости n -ой связи; $(\vec{\sigma}, \vec{u}_n)$, $(\vec{\tau}, \vec{v}_n)$ – косинусы углов между осями $\vec{\sigma}$, $\vec{\tau}$ молекулы и $\vec{u}_n$ и $\vec{v}_n$. $\sigma, \tau = 1, 2, 3$, $u_n, v_n = x_n, y_n, z_n$ – оси координат, связанные с n -ой связью.

Для компонент тензора поляризуемости молекулы CD-1 с учетом сопряжения связей были получены значения:

$$\alpha_1 = 167 \cdot 10^{-24} \text{ см}^3,$$

$$\alpha_2 = 123 \cdot 10^{-24} \text{ см}^3,$$

$$\alpha_3 = 92 \cdot 10^{-24} \text{ см}^3.$$

Энергия взаимодействия димера с полем излучения:

$$\Pi = 100 \frac{\text{мВт} \cdot \text{с}}{\text{см}^2} = 10^6 \frac{\text{эрг}}{\text{см}^2},$$

$$\Pi = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}, \vec{H}], \quad \varepsilon E^2 = \mu H^2, \quad E^2 = \frac{\mu}{\varepsilon} H^2,$$

$$H^2 = \frac{4\pi\Pi}{c} \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} = 10^{-3} \text{ Э}^2,$$

$$E = 2 \cdot 10^{-2} \frac{\text{CGSM}}{\text{см}}.$$

Зависимости энергии от углов, определяющих ориентацию молекулы, приведены на рис. 2 и рис. 3. Анализ полученных результатов показывает, что направление преимущественной ориентации легкой оси димера совпадает с направлением электрического поля. Как видно, наблюдается сильная зависимость энергии от θ . При этом максимальное значение соответствует следующим условиям: $\psi=0^\circ$, $\varphi=0^\circ$ и $\theta=90^\circ$. Таким образом, молекулы димера ориентируются так, что ось легкого вращения составляет с направлением электрического поля угол 30° .

Можно оценить число кооперативно ориентирующихся молекул N . Энергия N кооперативно ориентирующихся молекул в электрическом поле равна:

$$NU = -\frac{1}{2} N \alpha_{xx} E^2 \approx N \cdot 5 \cdot 10^{-26} \text{ эрг.}$$

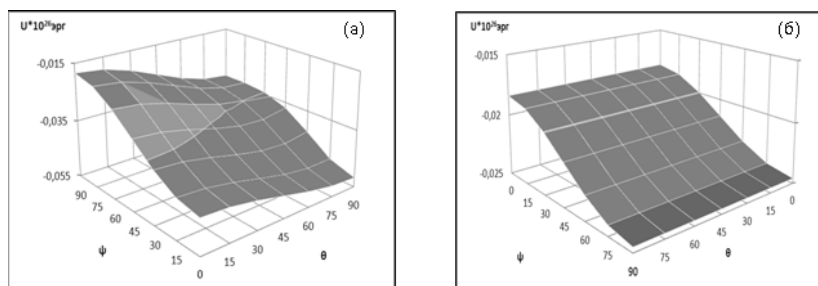


Рис. 2. Зависимость энергии взаимодействия димера красителя CD-1 с электрическим полем излучения от углов ψ и θ при значениях $\varphi=0^\circ$ (а) и $\varphi=90^\circ$ (б).

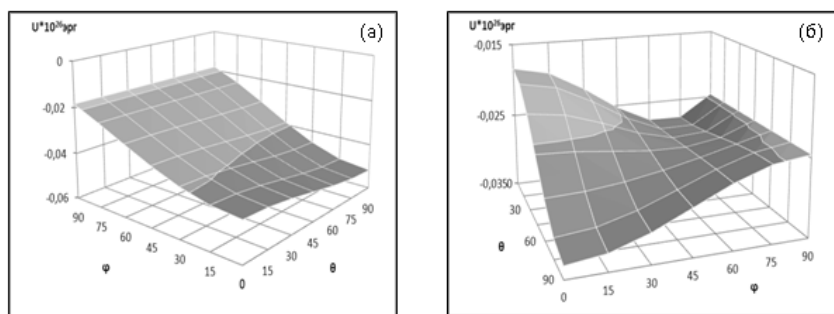


Рис. 3. Зависимость энергии взаимодействия димера красителя CD-1 с электрическим полем излучения от углов φ и θ при $\psi=0^\circ$ (а) и $\psi=90^\circ$ (б).

Чтобы N молекул могли кооперативно ориентироваться при температуре T , эта энергия должна быть равна энергии теплового движения kT :

$$NU \approx kT \approx 4,2 \cdot 10^{-14} \text{ эрг.}$$

Тогда $N \approx 10^{12}$, что примерно равно числу кооперативно ориентирующихся молекул без димеризации [10].

Функция распределения димера красителя в электрическом поле лазерного излучения по углам θ , φ и ψ :

$$\rho(\theta, \varphi, \psi) = C \cdot e^{\frac{1}{2} N \left(\frac{n^2 + 2}{3} \right)^2 \frac{\alpha_{xx} E^2}{kT}},$$

$$C = \frac{1}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{\frac{1}{2} N \left(\frac{n^2 + 2}{3} \right)^2 \frac{\alpha_{xx} E^2}{kT}} \sin \theta d\theta d\varphi d\psi}.$$

Выводы:

1. По схеме тензорной аддитивности электронной поляризуемости рассчитаны компоненты тензора поляризуемости димера красителя CD-1.
2. Определена зависимость энергии взаимодействия димера красителя CD-1 с электрическим полем лазерного излучения от углов, определяющих ориентацию димера относительно лабораторной системы координат.
3. Найдено направление преимущественной ориентации димеров красителя относительно электрического поля.
4. Оценено число димеров, кооперативно ориентирующихся в поле лазерного излучения.
5. Найдена функция распределения по углам, определяющим ориентацию димера.

Авторы выражают глубокую благодарность проф. А.К. Дадиваняну за полезное обсуждение.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант №14-07-00574_a) и частично по проекту РФФИ и Правительства Московской области №14-47-03608).

ЛИТЕРАТУРА:

1. Коньяр Ж. Ориентация НЖК и их смесей. Минск: БГУ, 1986. 104 с.
2. Cui L., Xie P., Zhang R., Yang T. Photo-driven liquid crystal cell with high sensitivity // *Liq. Cryst.* 1999. Vol. 26. № 10. P. 1541–1546.
3. Chigrinov V., Pikin S., Verevochnikov A., Kozenkov V., Khazimullin M., Ho J., Huang D., Kwok H. Diffusion model of photoaligning in azo-dye layers // *Phys. Rev.* 2004. P. 1.
4. Tabiryan N., Hrozhyk U., Serak S. Nonlinear Refraction in Photoinduced Isotropic State of Liquid Crystalline Azobenzenes // *Phys. Rev. Lett.* 2004. P. 93.
5. Muravsky A., Murauski A., Chigrinov V., Kwok H. Optical rewritable liquid-crystal-alignment technology // *J. SID.* 2007. Vol. 15. № 4. P. 267–273.

6. Statman D., Basore V., Sulai Y., Dunlap B., Janossy I. Photoinduced gliding of the surface director in azo-dye doped nematic liquid crystals // *Liquid Crystals*. 2008. Vol. 35. № 1. P. 33–38.
7. Chigrinov V., Kozenkov V., Kwok H. Photoalignment of Liquid Crystalline Materials // *Wiley-SID Series Display Technology*. John Wiley & Sons, 2008.
8. Невская Г.Е., Томилин М.Г., Чигринов В.Г. Достижения в ориентации жидких кристаллов // *Жидкие кристаллы и их практическое применение*, 2009. Вып. 1. С. 8–23.
9. Барабанова Н.Н., Беляев В.В., Богданов Д.Л., Бугримов А.Л., Дадиванян А.К., Чигринов В.Г. Распределение ориентации молекул красителя в фотоориентирующем слое в зависимости от угла падения поляризованного пучка // *Вестник Московского государственного областного университета. Серия «Физика-Математика»*. 2013. № 2. С. 28–34.
10. Barabanova N, Belyaev V., Bogdanov D., Bugrimov A., Chigrinov V., Dadivanyan A., Rodionova Ye. Distribution of Dye and Mesogen Molecules Orientation in Photoaligning Layer vs. aperture of Polarized Light Beam // *Molecular Crystals and Liquid Crystals*, 2014. 596. Issue 1. P. 76–81.
11. Барабанова Н.Н., Беляев В.В., Богданов Д.Л., Бугримов А.Л., Дадиванян А.К., Осипов М.А., Чигринов В.Г. Ориентация красителей при взаимодействии с лазерным излучением // *Вестник Московского государственного областного университета. Серия «Физика-Математика»*. 2015. № 1. С. 37–43.
12. Ichimura K., Suzuki Y., Seki T., Kawanishi Y., Aoki K. Photo alignment of liquid crystalline polymers systems // *Makromol. Chem. Rapid Commun*. 1989. Vol. 10. P. 5.
13. Takotoh K., Hasegawa M., Koden M. et al. Alignment technologies and applications of liquid crystal devices. Taylor & Francis, 2005. P. 263.
14. Барабанова Н.Н., Беляев В.В., Богданов Д.Л., Бугримов А.Л., Дадиванян А.К., Назаров А.П., Чигринов В.Г. Влияние димеризации молекул азокрасителей на свойства систем ЖК–краситель при взаимодействии с лазерным излучением // *Жидкие кристаллы и их практическое применение*. 2015. Вып. 3. С. 13.
15. Вукс М.Ф. Электрические и оптические свойства молекул конденсированных сред. Л., 1984.

УДК 519.6:537.84

Зверев Н.В., Юшканов А.А.*Московский государственный областной университет***ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ И ТОНКАЯ
МЕТАЛЛИЧЕСКАЯ ПЛАСТИНА**

Аннотация. Численно исследовано влияние эффектов конечных размеров и пространственной дисперсии электронной плазмы на взаимодействие электромагнитного излучения с тонкой металлической пластиной в определенных диапазонах частот. Изучены коэффициенты отражения, прохождения и поглощения электромагнитного излучения. Показано, что поперечные колебания электронной плазмы приводят к отклонению данных коэффициентов от значений, рассчитанных по классической теории Друде-Лоренца без учета пространственной дисперсии.

Ключевые слова: электронная плазма, пространственная дисперсия, тонкая металлическая пластина.

N. Zverev, A. Yushkanov*Moscow State Regional University***ELECTROMAGNETIC RADIATION AND A THIN METALLIC SLAB**

Abstract: The influence of the finite size and electron plasma spatial dispersion effects on the interaction of the electromagnetic radiation with a thin metallic slab in certain frequency ranges is investigated numerically. The reflection, transmission and absorption electromagnetic radiation coefficients are studied. It is shown that the transverse oscillations of the electron plasma lead to a deviation of the above coefficients from those evaluated in the classical Drude-Lorentz theory disregarding the spatial dispersion.

Key words: electron plasma, spatial dispersion, thin metallic slab.

В последнее время большое внимание уделяется исследованиям взаимодействия электромагнитного излучения с материалами малых размеров [1; 2]. Одним из таких исследований является изучение взаимодействия электромагнитного излучения с тонкой металлической пластиной. Однако при этом часто не учитываются эффекты пространственной дисперсии электронной плазмы. В то же время эти эффекты оказываются существенными в случае металлических объектов малых размеров, сравнимых с толщиной скин-слоя [2]. В данной работе выполнено сравнение коэффициентов взаимодействия электромагнитного излучения с тонкой металлической

пластиной для двух случаев электронной плазмы: с пространственной дисперсией и классической по Друде-Лоренцу.

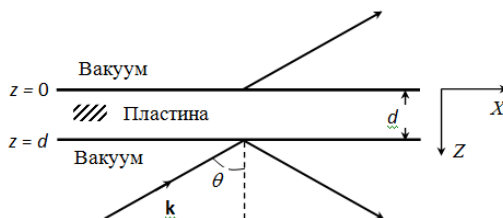


Рис. 1. Схема распространения электромагнитного излучения.

Пусть плоская монохроматическая электромагнитная волна падает в вакууме под углом θ к поверхности металлической пластины толщиной d (рис. 1). Тогда коэффициенты отражения от пластины R , прохождения через пластину T и поглощения в пластине A электромагнитного излучения определяются по следующим формулам [3; 4]:

$$R = \frac{1}{4} |P^{(1)} + P^{(2)}|^2, \quad T = \frac{1}{4} |P^{(1)} - P^{(2)}|^2, \quad A = 1 - R - T,$$

где величины $P^{(1)}$ и $P^{(2)}$ в случае Р-волны (напряженность электрического поля $\mathbf{E}$ лежит в плоскости падения волны XZ) равны:

$$P^{(j)} = \frac{\cos \theta + Z_P^{(j)}}{\cos \theta - Z_P^{(j)}}, \quad j = 1, 2,$$

а в случае S-волны (напряженность магнитного поля $\mathbf{H}$ лежит в плоскости падения волны):

$$P^{(j)} = \frac{Z_S^{(j)} \cos \theta - 1}{Z_S^{(j)} \cos \theta + 1}, \quad j = 1, 2.$$

Здесь $Z_P^{(j)}$ и $Z_S^{(j)}$ – безразмерные поверхностные импедансы электромагнитного излучения, определяемые на поверхности падения на пластину $z = d$ по формулам:

$$Z_P^{(j)} = \frac{1}{Z_0} \frac{E_x}{H_y} \bigg|_{z=d}, \quad Z_S^{(j)} = \frac{1}{Z_0} \frac{E_y}{H_x} \bigg|_{z=d}.$$

В случае зеркального отражения электронов от поверхностей пластины эти импедансы равны [4]:

$$Z_P^{(j)} = -\frac{2i\Omega}{W_1\beta} \sum_n \frac{1}{Q_{1n}^2} \left(\frac{k_1^2}{\Omega^2 \varepsilon_l(Q_{1n}, \Omega)} + \frac{(\pi n / W_1)^2}{\Omega^2 \varepsilon_{tr}(Q_{1n}, \Omega) - (Q_{1n} / \beta)^2} \right),$$

$$Z_S^{(j)} = \frac{2i\Omega}{W_1\beta} \sum_n \frac{1}{\Omega^2 \varepsilon_{tr}(Q_{1n}, \Omega) - (Q_{1n} / \beta)^2}, \quad j = 1, 2.$$

В этих формулах индекс $j = 1$ соответствует нечетным конфигурациям полей внутри пластины, а индекс $j = 2$ – четным конфигурациям полей, т. е. в случае Р-волны

$$E_x(x, y, z) = (-1)^j E_x(x, y, d - z),$$

а в случае S-волны

$$H_x(x, y, z) = (-1)^j H_x(x, y, d - z),$$

где $0 \leq z \leq d$. В случае $j = 1$ суммирование ведется по всем нечетным целым n от $-\infty$ до $+\infty$, а в случае $j = 2$ – по всем четным целым n от $-\infty$ до $+\infty$.

В данных формулах ε_l и ε_{tr} – продольная и поперечная диэлектрические проницаемости вырожденной электронной плазмы [3; 4]:

$$\varepsilon_l(Q_1, \Omega) = 1 + \frac{3}{Q_1^2} \frac{1 + \frac{\Omega + i\gamma}{2Q_1} \ln \frac{\Omega + i\gamma - Q_1}{\Omega + i\gamma + Q_1}}{1 + \frac{i\gamma}{2Q_1} \ln \frac{\Omega + i\gamma - Q_1}{\Omega + i\gamma + Q_1}}, \quad (1a)$$

$$\varepsilon_{tr}(Q_1, \Omega) = 1 - \frac{3}{4\Omega Q_1^3} \left\{ 2(\Omega + i\gamma)Q_1 + [(\Omega + i\gamma)^2 - Q_1^2] \ln \frac{\Omega + i\gamma - Q_1}{\Omega + i\gamma + Q_1} \right\}, \quad (16)$$

и введены следующие безразмерные величины:

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_p}, \quad W_1 = \frac{\omega_p d}{v_F}, \quad \beta = \frac{v_F}{c}, \quad k_1 = \frac{kv_F}{\omega_p},$$

$$Q_{1n} = \sqrt{\left(\frac{\pi n}{W_1} \right)^2 + k_1^2}, \quad \gamma = \frac{1}{\omega_p \tau},$$

где ω – циклическая частота волны, ω_p – плазменная частота, v_F – скорость Ферми электронов, τ – характерное время столкновений электронов в плазме, c

– скорость света, $k = \frac{\omega}{c} \sin \theta$ – проекция волнового вектора k падающей волны на ось X (рис. 1), Z_0 – размерное волновое сопротивление вакуума в системе СИ.

Формулы (1a) и (1б) учитывают пространственную дисперсию электронной плазмы. По классической теории Друде-Лоренца, соответствующей пределу $Q_l \rightarrow 0$, поперечная и продольная диэлектрические проницаемости вырожденной электронной плазмы равны:

$$\varepsilon_l^{(DL)}(\Omega) = \varepsilon_{tr}^{(DL)}(\Omega) = \varepsilon_l(Q_l \rightarrow 0, \Omega) = \varepsilon_{tr}(Q_l \rightarrow 0, \Omega) = 1 - \frac{1}{\Omega(\Omega + i\gamma)}. \quad (2)$$

Численные расчеты показали, что коэффициенты отражения, прохождения и поглощения, рассчитанные с диэлектрическими проницаемостями электронной плазмы по формулам (1a) и (1б) с учётом пространственной дисперсии, отличаются от данных коэффициентов с классическими диэлектрическими проницаемостями по (2) без учёта пространственной дисперсии. Данное отличие отчётливо наблюдается в случае больших углов падения излучения θ для безразмерных частот $\Omega \sim \frac{\pi}{W_1}$ (рис. 2),

а также для $\Omega \sim 1$, когда имеют место «осцилляции» с шагом $\Delta\Omega \sim \frac{\pi}{W_1}$ коэффициентов излучения, учитывающих пространственную дисперсию вырожденной электронной плазмы (рис. 3).

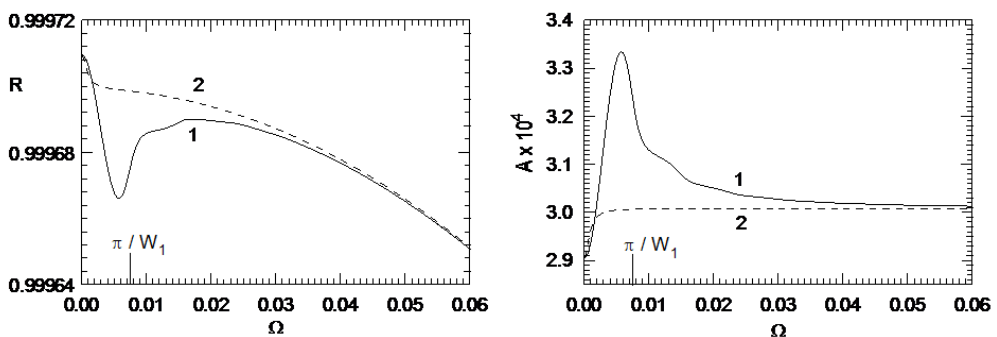


Рис. 2. Зависимость коэффициента отражения R и поглощения A от безразмерной частоты $\Omega \sim \pi / W_1$ для диэлектрических проницаемостей электронной плазмы: 1 – по формулам (1a) и (1б), 2 – по формуле (2). Случай S-волны. Угол падения $\theta = 85^\circ$, безразмерные параметры $W_1 = 400$, $\beta = 3 \cdot 10^{-3}$, $\gamma = 10^{-3}$.

Такое отличие вызвано колебаниями электронной плазмы перпендикулярно плоскости металлической пластины (поперечных колебаний, см. также [2; 3]).

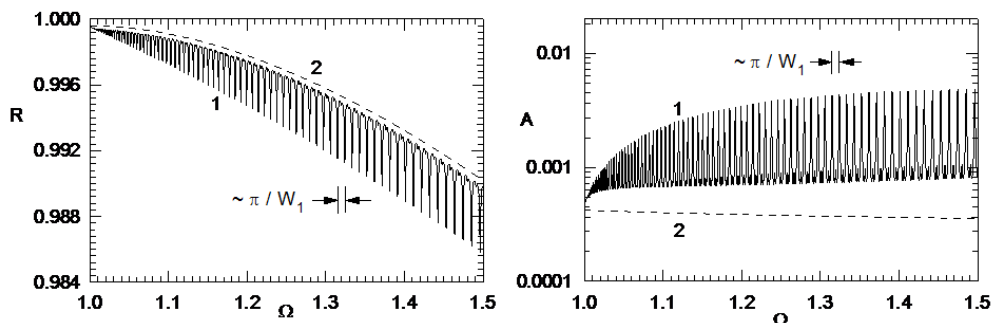


Рис. 3. Зависимость коэффициента отражения R и поглощения A от безразмерной частоты $\Omega \sim 1$ для диэлектрических проницаемостей электронной плазмы: 1 – по формулам (1а) и (1б), 2 – по формуле (2). Случай Р-волны. Угол падения $\theta = 85^\circ$, безразмерные параметры $W_1 = 400$, $\beta = 3 \cdot 10^{-3}$, $\gamma = 10^{-3}$.

На рис. 2 и 3 приведены данные расчетов для пластины с безразмерной толщиной $W_1 = 400$ и величин $\beta = 3 \cdot 10^{-3}$, $\gamma = 10^{-3}$, характерных для щелочных металлов Na , K . Плазменная частота для этих металлов $\omega \cong 6 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$, и тогда рассматриваемая пластина имеет толщину $d \cong 60 \text{ нм}$. Таким образом, размерные эффекты вместе с эффектами пространственной дисперсии существенны для тонких металлических пластин в случае частот терагерцового, инфракрасного и видимого диапазонов. Это необходимо учитывать при анализе взаимодействия излучения с тонкой металлической фольгой, при конструировании волноводов с тонкими металлическими стенками, а также при создании управляемых оптических фильтров из слоев с чередующимися металлическими пленками.

Работа выполнена при поддержке грантов Президента РФ МК-2382.2014.9 и РФФИ № 15-37-20441 мол_а_вед, 14-47-03608 (Совместно с правительством Московской области).

ЛИТЕРАТУРА:

1. Pitarke J., Silkin V., Chulkov E., Echenique P. Theory of surface plasmons and surface-plasmon polaritons // Rep. Progr. Phys. 2007. V. 70. P. 1–87.
2. Парадес-Хуарес А., Диас-Монхе С., Макаров М.Н., Перес-Родригес Ф. Нелокальные эффекты в электродинамике металлических пластин // Письма в ЖЭТФ. 2009. Т. 90. С. 687–692.
3. Kliever K., Fuchs R. Anomalous Skin Effect for Specular Electron Scattering and Optical Experiments at Non-Normal Angles of Incidence // Phys. Rev. 1968. V. 172. № 3. P. 607–624.
4. Jones W., Kliever K., Fuchs R. Nonlocal Theory of the Optical Properties of Thin Metallic Films // Phys. Rev. 1969. V. 178. № 3. P. 1201–1203.

УДК 533.72.

Зудина М. Н.*Московский государственный областной университет***СТАТИСТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МОМЕНТА СИЛЫ В
НЕСТАЦИОНАРНОМ ГАЗОПОДОБНОМ ОБЛАКЕ,
НАХОДЯЩЕМСЯ В ПОЛЕ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ СИЛ**

Аннотация. Рассмотрена задача определения плотности момента силы в газоподобной среде. Для статистической модели нестационарного газоподобного облака в однородном поле потенциальных сил построен кинетический оператор плотности момента силы. Найдены компоненты тензора плотности момента силы. Ненулевые компоненты момента силы лежат на плоскости, ортогональной внешнему полю. Дан анализ и графическое представление полученных формул.

Ключевые слова: кинетика, вихревые движения, газоподобная среда, момент силы.

M. Zudina*Moscow State Regional University***STATISTICAL THEORY OF DISTRIBUTION MOMENT OF FORCE IN NON-
STATIONARY GAS-LIKE CLOUD, ARE IN THE FIELD OF POTENTIAL FORCES**

Abstract. The problem of determining the density of the moment of force for a gas-like medium is analyzed. The kinetic functional of the density of the moment of force for a statistical model of a nonstationary gas-like cloud in a uniform field of potential forces is constructed. The components of the tensor of the density of the moment of force are obtained. Nonzero components of the moment of force lie on a plane orthogonal to the external field. The analysis and graphical presentation of the obtained formulae are performed.

Key words: kinetics, vortex motion, gas-liked medium, moment of force.

Вихревые движения в нестационарных газоподобных системах широко распространены в природе, а также происходят в ряде технических процессов. Однако в имеющейся литературе [1; 2; 7 и др.] недостаточно объяснена эволюция вихрей, включая их возникновение и затухание. К тому же большинство авторов предпочитают исследовать несжимаемые среды, исходя обычно из уравнений гидродинамики. В наших предыдущих работах [3; 4; 5] был рассмотрен ряд задач с целью теоретического описания вихревых движений при эволюции нестационарных газоподобных облаков на основе

микроскопической теории. Были найдены строгие аналитические выражения плотности потока вещества j и вихря этого вектора $\text{rot } j$ для некоторых моделей. В связи с этим возникает задача выявления и микроскопического описания других характеристик вращательного движения неоднородной газоподобной среды. Такая среда описывается кинетической теорией на основе статистико-механической модели системы молекул или дисперсных частиц. В данной работе ставится задача нахождения распределения плотности момента силы в неоднородной газоподобной среде.

Рассмотрим эту задачу на примере модели облака частиц, расширяющегося из неподвижного малого источника в однородном внешнем поле (например, гравитационном). При отсутствии внешнего поля расширение облака сферически симметрично; эта задача была рассмотрена в [9]. Очевидно, что при наличии поля эта сферическая симметрия нарушается и возникает анизотропия задачи относительно направления поля (далее выбрана по оси z). Когда облако находится в однородном изотропном пространстве и в начальный момент времени не вращается в целом, а внешнее потенциальное поле – однородное, очевидно, что суммарный момент сил, действующих на облако, равен нулю в начальный момент и сохраняет это значение при любом $t > 0$. Однако в общем случае на любую частицу облака действует внешняя сила и, следовательно, момент этой силы не равен нулю. В таком случае мы имеем картину распределения плотности момента силы в объеме облака, причем эта плотность знакопеременна, так что интеграл от нее по всему объему равен нулю. Это распределение мы и будем искать далее. Распределение момента импульса в данной работе не рассматривается, но, очевидно, в задаче выполняется закон сохранения момента импульса в интегральной форме.

Для такой модели была получена [4; 6] нестационарная функция распределения системы в виде:

$$F_N = Z^{-1} \cdot \exp \left\{ -k_1 \cdot p_{i\alpha} p_{i\alpha} + k_3 \cdot p_{i\alpha} q_{i\alpha} - b \cdot q_{i\alpha} q_{i\alpha} - k_1 \cdot p_{i3} p_{i3} - k_2 \cdot p_{i3} + k_3 \cdot p_{i3} q_{i3} - k_4 \cdot q_{i3} - b \cdot q_{i3} q_{i3} - k_6 \right\}, \quad (1)$$

где $i = 1 \dots N$, $\alpha = 1, 2$ и подразумевается сумма по всем значениям повторяющихся индексов, как это принято в тензорном исчислении. Значение $\alpha = 3$ закреплено для z -проекций фазовых переменных. Z – Статистический

интеграл, p и q – обобщенные координаты и импульсы, b – константа задачи, определяемая из дополнительных условий.

Для однородных частиц коэффициенты $k_1 \dots k_6$ одни и те же для любого i , причём:

$$k_1 = au; \quad k_3 = c + \frac{2bt}{m}, \quad (2)$$

как в [4; 6]. Так как здесь принят неподвижный источник, то выражения других коэффициентов упрощаются (сравнительно с [4]) и имеют вид:

$$k_2 = -2aft - \frac{3cft^2}{2m} - \frac{bft^3}{m^2}; \quad k_4 = cft + \frac{bft^2}{m}; \quad k_6 = af^2t^2 + \frac{cf^2t^3}{2m} + \frac{bf^2t^4}{4m^2}, \quad (2a)$$

причём:

$$u = 1 + \frac{ct}{am} + \frac{bt^2}{am^2}; \quad w = 1 - \frac{c^2}{4ab}; \quad Z = \left(\pi / \sqrt{abw} \right)^{3N} \quad (26)$$

Выше и далее: m – масса частицы, f – действующая на неё сила, a, c – константы задачи, определяемые из дополнительных условий, t – время.

Функция (1) была использована в [3; 4] для получения выражений плотности ρ , плотности потока вещества j и вихря этого вектора $rot j$ в рассматриваемой модели.

По аналогии с другими динамическими величинами, вводимыми в кинетической теории [8], для нахождения плотности момента силы предложен оператор плотности момента силы в виде:

$$\hat{M}_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^N \hat{M}_{i\alpha\beta} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} (q_{i\alpha} f_{i\beta} - q_{i\beta} f_{i\alpha}) \cdot \delta(q_{i\alpha} - x_{\alpha}) \cdot \delta(q_{i\beta} - x_{\beta}). \quad (3)$$

Это – антисимметричный тензор, причём индексы α, β принимают значения 1, 2, 3. При этом плотность момента силы по определению кинетической теории [8] выражается антисимметричным тензором 2-го ранга:

$$\mu_{\alpha\beta} = \int_{\Gamma} d\Gamma \cdot \hat{M}_{\alpha\beta} \cdot F_N = \frac{1}{2} N \int_{\Gamma} d\Gamma \cdot F_N \cdot (q_{i\alpha} f_{i\beta} - q_{i\beta} f_{i\alpha}) \cdot \delta(q_{i\alpha} - x_{\alpha}) \cdot \delta(q_{i\beta} - x_{\beta}), \quad (4)$$

где $f_{i\alpha}$ – проекции вектора силы, действующей на каждую i -ю частицу, $d\Gamma$ – элемент фазового объёма. Ось z направлена вдоль поля, так что ненулевая только проекция f_{i3} .

Для одинаковых частиц в однородном поле при любом i имеем $f_{i3} = f_3$. Три независимые недиагональные компоненты выражения (4) образуют псевдовектор плотности момента силы.

Из (4), используя найденное выражение F_N (1), получим компоненты плотности момента силы:

$$\mu_{12} = 0; \quad \mu_{13} = \frac{x_1 f_3 \rho}{2m}; \quad \mu_{23} = \frac{x_2 f_3 \rho}{2m}, \quad (5)$$

где плотность

$$\rho = Nm \left(\frac{\beta}{\pi} \right)^{3/2} \exp \left\{ -\beta \left[r^2 + \left(z - \frac{ft^2}{2m} \right)^2 \right] \right\}, \quad (6)$$

Здесь обозначено: $\beta = bw/u$, $r^2 = x^2 + y^2$, $x = x_1$, $y = x_2$, $z = x_3$.

Таким образом, найдены компоненты псевдовектора плотности момента силы в квазинепрерывной среде, эффективно представляющей статистическую систему по представлениям кинетической теории. Этот момент создаётся совокупностью действий внешнего поля (например, гравитационного) на множество движущихся частиц нестационарной, пространственно неоднородной системы. Для стационарной, пространственно однородной системы это явление не обнаруживается. Ненулевые компоненты момента силы лежат на плоскости, ортогональной внешнему полю.

Исследование найденных формул показывает, что: 1) полученные функции нечетные и меняют знак при $x_2, x_3 = 0$; 2) они удовлетворяют асимптотическим условиям обращения в нуль при $x_2, x_3 \rightarrow \pm\infty$ и при $t \rightarrow \infty$; 3) они пропорциональны плотности среды; 4) они имеют экстремумы при конечных x_2, x_3 , причем эти экстремумы удаляются со временем от нуля, одновременно понижаясь. Общей закономерностью является «расползание» плотности момента силы по пространству при одновременном его асимптотическом убывании со временем к нулю. Очевидно, что на оси z плотность момента силы всегда равна 0. Свойства функций μ_{13} и μ_{23} таковы, что интегралы от них по неограниченному объёму равны нулю. Таким образом, полный момент силы равен нулю при ненулевой (знакопеременной) локальной плотности его.

Для некоторых задач имеет значение модуль псевдовектора плотности момента силы, находимый из компонент (5), который приводится к виду:

$$\mu = \frac{f_3 r \rho}{2m} . \quad (7)$$

Для этой неотрицательной функции имеется радиальный максимум, который движется по закону:

$$r_m = \frac{\sqrt{\left(1 + \frac{ct}{am} + \frac{bt^2}{am^2}\right)}}{\sqrt{2bw}}$$

(при любом конечном z), и максимум по оси z , движущийся (при $r \neq 0$) по закону:

$$z_m = ft^2 / 2m$$

Примечательно, что движение r_m зависит от коэффициента a , который в подобных задачах обратно пропорционален температуре [9]. «Расползание» момента силы асимптотически определяется тепловой скоростью частиц среды. «Чистая» гидродинамика не объясняет это расползание.

Поведение найденных компонент тензора плотности момента силы и модуля плотности момента силы иллюстрируется представленными ниже графиками.

На рис. 1 представлены трехмерные графики компоненты μ_{23} , т. е. x -проекции плотности момента силы, как функции радиальной переменной r и полярного угла α (в плоскости xy) при $z = 0$ в разные моменты времени.

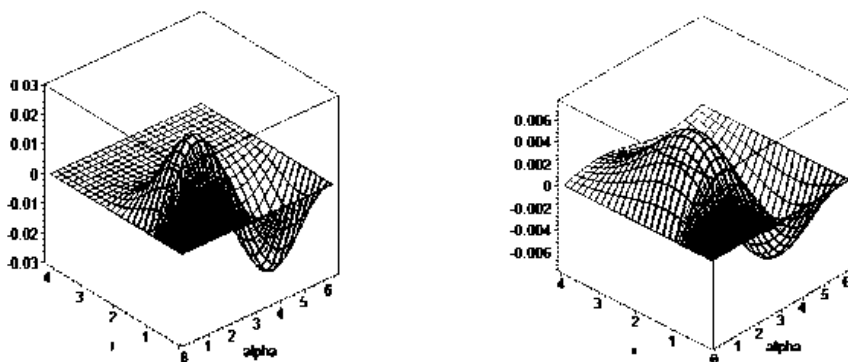


Рис. 1. Компонента плотности момента силы μ_{23} , как функция r, α при $z = 0$ для $t = 0; 1$.

На графиках видно, как с течением времени максимум функции понижается и смещается в пространстве в область больших r . Также видны

области с противоположным знаком функции, причём знак меняется при $\alpha = \pi$. В двух полупространствах имеем вихревые движения, направленные в разные стороны, что соответствует указанному выше обращению в нуль интегрального значения момента силы. Поведение компоненты μ_{13} вполне аналогично.

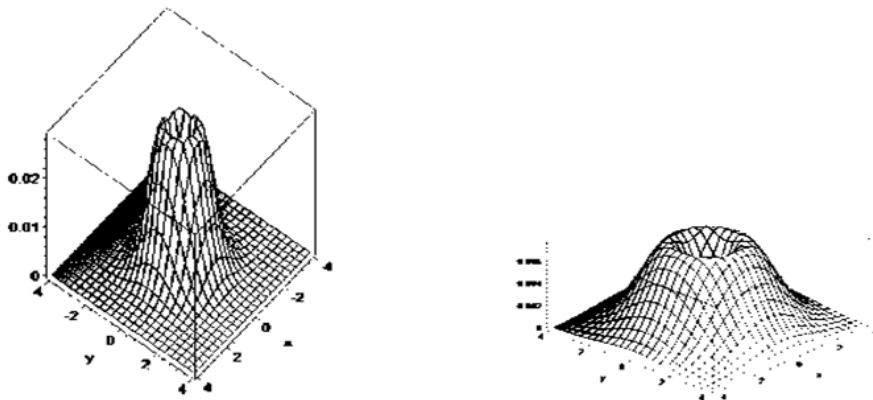


Рис. 2. Модуль плотности момента силы как функция x, y при $z = 0$ для $t = 0; 1$.

На рис. 2 представлены трехмерные графики модуля плотности момента силы μ как функции декартовых координат в плоскости xy при $z = 0$ в разные моменты времени.

Трехмерные графики модуля плотности момента силы имеют характерный «кратерообразный» вид. Из рисунков видно, что вихрь имеет осесимметричную структуру с нулевым минимумом на оси z и с течением времени расплывается при понижении максимума.

Итак, мы получили распределение плотности момента силы в неоднородной газоподобной среде. Эта величина знакопеременна и зависит от времени. Она определяется нестационарной плотностью среды, силой действия внешнего поля и массой частиц среды. В ходе эволюции облака поле плотности момента силы изменяется по сложным пространственно-временным закономерностям и асимптотически со временем обращается в нуль, что вызвано рассеянием облака в пространстве. При этом суммарный момент сил, действующих на облако в целом, остается равным нулю. Это согласуется с законом сохранения момента импульса облака, который также остается равным нулю, если облако не было закручено изначально.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Алексеев С.В., Куйбин П.А., Окулов В.Л. Введение в теорию концентрированных вихрей // Новосибирск: Ин-т теплофизики СО РАН, 2003. С. 504.
2. Белоцерковский О.М., Андрущенко В.А., Шевелев Ю.Д. Динамика пространственных вихревых течений в неоднородной атмосфере // М.: Янус-К, 2000, 444 с.
3. Голов А.Н., Зудина М.Н. Кинетика вихревых движений газоподобной среды в постоянном потенциальном поле // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2012. № 1. С. 39–43.
4. Голов А.Н., Зудина М.Н. Вихревые движения газоподобного облака с начальной скоростью в однородном постоянном поле // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2012. № 3. С. 50–55.
5. Голов А.Н., Зудина М.Н., Перов А.А., Шутов А.И. Кинетическая теория вихревых движений газоподобного облака, движущегося в потенциальном поле с начальной скоростью, ортогональной полю // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2013. № 2. С. 11–16.
6. Голов А.Н., Харитонов А.П. Эволюция газоподобной системы многих дисперсных частиц в потенциальном поле // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2008. № 3–4. С. 12–21.
7. Гольдштик М.А. Вихревые потоки. Новосибирск: Наука, 1981, 366 с.
8. Гуров К.П. Основания кинетической теории. М: Наука, 1966, 351 с.
9. Яламов Ю.И., Голов А.Н. Статистическая и кинетическая теория нестационарных газоподобных и газодисперсных систем М.: Изд-во. МГОУ, 2011, 230 с.

РАЗДЕЛ III. ТЕОРИЯ И МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ И ВОСПИТАНИЯ

УДК 378

Власова Е.А.^{*}, Попов В.С.^{*}, Латышев А.В.^{}**

^{}Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана*

*^{**}Московский государственный областной университет*

МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ОБЕСПЕЧЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ «ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА» В ТЕХНИЧЕСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

Аннотация. Обобщен опыт преподавания дисциплины «Линейная алгебра» студентам технического университета. Описаны место и назначение курса в рамках профессионального математического образования. Указана важность дисциплины в формировании у студента познавательных, творческих и общепрофессиональных компетенций. Представлены методические проблемы преподавания дисциплины, основные идеи их разрешения, методы и приемы обучения, организации самостоятельной работы студентов, педагогические инструменты достижения поставленных целей. Обозначены наиболее важные проблемы, возникающие при переходе к модульно-рейтинговой системе оценивания учебных достижений, указаны возможные пути их преодоления.

Ключевые слова: линейная алгебра, линейные (векторные) пространства, евклидовы пространства, линейные отображения (линейные операторы), линейные формы, билинейные формы, квадратичные формы, методические проблемы преподавания, приемы обучения, оценочные средства, модульно-рейтинговая система.

E. Vlasova^{*}, V. Popov^{*}, A. Latyshev^{**}

^{} Bauman Moscow State Technical University*

*^{**} Moscow State Regional University*

METHODOLOGICAL ASPECTS OF THE SUBJECT «LINEAR ALGEBRA» AT THE TECHNICAL UNIVERSITY

Abstract. We summarize the experience of teaching the course 'Linear algebra' to students of a technical University. The place and purpose of the course within the professional mathematics education are described. The importance of the subject in the formation of a student's cognitive, creative and professional competencies is outlined. We report the methodological problems of teaching, the main ideas of their solution, teaching methods and techniques, organization of independent work of students, and pedagogical tools to achieve the goals. The most important issues arising from the transition to the rating system of evaluation of educational achievements are described, and possible ways of their overcoming are presented.

Key words: linear algebra, linear (vector) spaces, Euclidean spaces, linear mappings, linear operators, linear forms, bilinear forms, quadratic forms, methodological problems of teaching, teaching techniques, assessment tools, module-rating system.

Введение. Линейная алгебра – это раздел алгебры, в котором изучаются линейные (векторные), евклидовы пространства, линейные отображения (линейные операторы), линейные, билинейные и квадратичные формы. Исторически первым разделом линейной алгебры была теория линейных алгебраических уравнений, систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). В связи с решением СЛАУ возникло понятие определителя, в 1750 г. было получено правило (формулы Крамера) для решения СЛАУ, где число уравнений равнялось числу неизвестных, и определитель системы отличен от нуля. На основе изучения систем линейных уравнений и их определителей возникло понятие матрицы, ранга матрицы (1877 г., Г. Фробениус), что позволило сформулировать условия совместности и определенности систем линейных алгебраических уравнений (теорема Кронекера-Капелли). Тем самым в конце XIX в. завершилось построение общей теории СЛАУ. В XX в. основным содержанием линейной алгебры становятся понятие линейного пространства и связанные с ним понятия линейных преобразований, линейной, билинейной функций на линейном пространстве. За последующие десятилетия методы линейной алгебры глубоко проникли почти во все области

математики. Основой для широких приложений линейной алгебры является то, что большинство задач, возникающих в математике и математической физике, касается не отдельных объектов, например, функций, мер или уравнений, а целых классов таких объектов. Линейная алгебра с ее методами представляет аппарат для единообразного изучения различных линейных физических и математических процессов. С помощью методов линейной алгебры изучаются и нелинейные задачи на основе линеаризации; многие нелинейные методы испытываются на линейных моделях. Линейная алгебра дает весьма важную возможность установить связи между различными разделами в самой математике. Поэтому изучение линейной алгебры, как одного из сложных курсов высшей математики, с ее языком, «психологией» и методами стало необходимым элементом серьезного математического образования, и преподавание ее основ включено в учебные планы технических специальностей университетов.

Остановимся на особенностях преподавания этой дисциплины, учитывая опыт изложения линейной алгебры в МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Цели и задачи дисциплины. Дисциплина «Линейная алгебра» входит в базовую часть математического и естественнонаучного цикла учебного плана студентов. Продолжительность изучения – половина семестра. Трудоемкость дисциплины – 3 зачетные единицы. На аудиторную работу отводится около 60% времени, остальное – для самостоятельной работы.

Основными целями изучения дисциплины являются приобретение теоретических знаний основ линейной алгебры, теории линейных операторов и практических навыков по использованию стандартных методов решения типовых задач, в том числе прикладных.

Главные задачи освоения дисциплины состоят в том, чтобы ознакомить студентов с основами теории линейных, евклидовых пространств, теории линейных операторов, квадратичных форм в конечномерных пространствах с применением этих теорий к различным задачам геометрии и физики, а также привить умение самостоятельно изучать литературу, развивать логическое и алгоритмическое мышление, научить строго излагать свои мысли, выработать

способность к математическому исследованию прикладных вопросов и умение перевести практическую задачу на математический язык.

Изучение дисциплины «Линейная алгебра» должно способствовать формированию навыков самостоятельной работы, необходимых для использования знаний при изучении дисциплин математического, естественнонаучного и профессионального циклов образовательной программы [1; 2].

Для успешного освоения дисциплины «Линейная алгебра» требуется интеграция знаний, полученных при изучении дисциплин математического цикла: математического анализа, аналитической геометрии.

Дисциплина имеет два модуля одинаковой трудоемкости: «Линейные и евклидовы пространства» и «Линейные операторы и квадратичные формы». В состав каждого модуля входит самостоятельная работа студентов, которая предусматривает выполнение домашнего задания и рубежного контроля. Оценка результатов освоения каждого модуля и дисциплины в целом проводится на основе модульно-рейтинговой системы.

Результаты освоения дисциплины. Необходимо отметить важность изучения дисциплины «Линейная алгебра» в формировании у студентов познавательных, творческих и общепрофессиональных компетенций (в частности, способности к саморазвитию, творческому применению полученных знаний), современных функционально-аналитических методов решения прикладных задач.

В результате изучения дисциплины у обучающихся на основе полученных знаний и приобретенных умений и навыков должны быть сформированы следующие профессиональные компетенции.

Студент должен:

- владеть терминологией основных разделов дисциплины: теории линейных и евклидовых пространств, линейных, самосопряженных, ортогональных операторов, квадратичных форм;
- иметь представление об основных источниках информации по дисциплине (печатных и электронных учебниках, учебных и методических

пособиях, электронных конспектах лекций, справочных изданиях), в том числе Интернет-ресурсах (математических журналах и сайтах);

- самостоятельно работать со справочной и учебно-методической литературой для приобретения знаний и поиска решений типовых задач дисциплины;

- иметь представление о сущности и прикладном характере основных понятий и теорем дисциплины, таких как линейное пространство, базис, размерность линейного пространства, евклидово пространство, ортогональные системы, ортонормированные базисы, процесс ортогонализации Грама-Шмидта; линейные операторы и их матрицы, собственные векторы и собственные значения линейного оператора; самосопряженные операторы и их матрицы, ортогональные операторы и их матрицы, квадратичные формы, их канонический вид;

- использовать основные пакеты прикладных математических программ для численных и аналитических расчетов (Maple, Mathematica, MATLAB, MATHCad и др.), в частности, для решения различных задач линейной алгебры: вычисление координат векторов при переходе к новому базису, нахождение подобных матриц, вычисление собственных значений и собственных векторов матрицы, нахождение характеристического многочлена, приведение квадратичной формы к каноническому виду;

- владеть методиками выполнения типовых заданий по дисциплине, таких как преобразование координат вектора при переходе к новому базису, вычисления в ортонормированном базисе, ортогонализация системы векторов, вычисление матрицы линейного оператора, преобразование матрицы линейного оператора при замене базиса; вычисление собственных значений и собственных векторов линейного оператора, приведение симметрической матрицы к диагональному виду, приведение квадратичной формы к каноническому виду;

- быть готовым к применению полученных теоретических и практических навыков для поиска и решения стандартных задач линейной алгебры в других дисциплинах и исследовательской работе;

- демонстрировать ответственность и работоспособность, быть готовым выполнять задания в установленные сроки, успешно использовать преимущества модульно-рейтинговой системы оценки знаний [3];

- проявлять инициативу и заинтересованность в учебе, осознавать необходимость в получении дополнительных теоретических знаний и практических навыков (выступать с докладами и презентациями по темам, выделенным на самостоятельную подготовку: жорданова нормальная форма матрицы, билинейные формы; решать дополнительные задачи повышенной трудности, изучать дополнительную литературу).

В процессе изучения такой абстрактной дисциплины, как линейная алгебра, у студентов появляется способность выявлять, формулировать, преобразовать поставленную задачу и принимать верные решения, самостоятельно выбирать способ решения проблемы из нескольких вариантов, переносить знания из одной области в другую, решать нестандартные задачи, в том числе за пределами профессионального поля деятельности. В результате изучения дисциплины формируются такие компетенции, как:

- компетенция профессиональной мобильности: способность к самостоятельному обучению новым методам исследования, к изменению научного и научно-производственного профиля своей профессиональной деятельности;
- компетенция системного аналитического мышления: способность к системному мышлению и анализу, к аналитической оценке событий и процессов в природе, технике и обществе;
- компетенция креативности: способность к творчеству, генерации новых идей, созданию нового знания;
- компетенция обобщения и презентации результатов исследований: способность к самостоятельному формированию выводов и подготовке научных и аналитических отчетов, публикаций и презентаций результатов научных и аналитических исследований.

Проблемы обучения. В начале обучения возникает большой поток новой информации с высоким уровнем абстракции и специфичной терминологией, что создает значительные трудности при освоении

дисциплины. Рекомендуется разработать компактный и удобный в использовании справочный материал, содержащий основные определения, понятия, свойства линейных, евклидовых пространств и др. Решение каждой задачи на семинарах рекомендуется начинать с повторения определений, понятий, которые содержатся в формулировке условия. Следует решать больше совсем простых задач, поясняющих суть того или иного отдельного понятия. Для успешного освоения материала и методов решения задач нужны всевозможные учебные и методические пособия, в которых содержится теоретический материал и подробные решения большого количества задач по каждой изучаемой теме.

Оценочные средства. Контроль знаний учащихся – неотъемлемая часть процесса обучения, оценки качества образования.

Оценка результатов освоения дисциплины «Линейная алгебра» проводится на основе модульно-рейтинговой системы [3]. Эта система предполагает непрерывность контроля работы и успеваемости студентов в течение всего срока обучения. Такая система призвана активизировать и систематизировать учебную работу студентов, повысить мотивацию студентов к получению знаний и поднять их уровень, способствовать повышению качества образования [4]. Проведение промежуточных рейтинговых аттестационных оценок полученных знаний должно способствовать равномерному освоению дисциплин, снизить перегрузки и напряженность в работе студентов, упорядочить их самостоятельную учебную работу.

Блочно-модульная система преподавания позволяет осуществлять проверку полученных студентами теоретических и практических знаний более одного раза в течение семестра, и тем самым неоднократно в семестр объективно оценивать уровень таких знаний и принимать меры по корректировке учебного материала индивидуально для каждого студента [1].

Модульно-рейтинговая система предполагает, что учебная дисциплина (курс) делится на модули, каждый из которых состоит из набора разделов курса и представляет собой логически завершенную часть этого курса [3]. Таких модулей может быть несколько в зависимости от конкретной учебной

дисциплины, ее объема, специфики. Модуль (блок) содержит набор контрольных мероприятий, каждое из которых оценивается некоторым числом баллов, называемым рейтингом. Рейтинги по всем отдельным модулям, входящим в состав учебного курса, а также «премиальные» баллы (активность работы на семинарах, посещаемость занятий, качественное и своевременное выполнение домашних и текущих заданий) складываются, и таким образом определяется рейтинг студента за работу в течение семестра (промежуточный рейтинг). Итоговый рейтинг за изучение дисциплины складывается из промежуточных рейтингов и рубежного рейтинга – баллов, набранных студентом за сдачу экзамена (зачета). В дальнейшем итоговый рейтинг переводится (согласно принятой таблице) в пятибалльную оценку. В случае если программой по дисциплине не предусмотрен итоговый контроль (экзамен или зачет), то итоговый рейтинг совпадает с промежуточным рейтингом. Очевидно, что такой принцип стимулирует студента к непрерывной работе в семестре, своевременной сдаче домашних заданий, серьезной подготовке к контрольным мероприятиям.

Программа дисциплины «Линейная алгебра» предусматривает в каждом из двух модулей проведение двух контрольных мероприятий в форме домашнего задания и рубежного контроля [2]. Выполнение домашнего задания связано с проработкой и закреплением теоретического материала и применением его на практике. Рубежный контроль проходит в письменной форме, обязательно включает теоретические вопросы (несколько вопросов на определения основных понятий, формулировки теорем, один вопрос с доказательством) и практические задания.

Опыт показал, что насыщенность теоретического материала абстрактного характера, мало подкрепленного практическими занятиями, не позволяет его усваивать в должной степени в отведенный промежуток времени. Появление в расписании студентов контролируемой самостоятельной работы (КСР) способствовало улучшению ситуации с успеваемостью.

В течение изучения курса на занятиях, проводимых под контролем преподавателя (КСР), можно проводить тестирование студентов. Текущий контроль в форме тестирования позволяет выявить знания и на их основе

строить и совершенствовать технологию преподавания. Тестовый контроль дает возможность оперативно проверить знания студентов, психологически меньше нагружает и студентов, и преподавателей. На этапе текущего контроля знаний основной упор должен быть сделан на отслеживание движения учащихся по ступенькам знаний, на установление причин непонимания материала. Поэтому тестовый материал должен содержать задания, проверяющие знание и понимание определений и теорем, предлагающие устанавливать причинно-следственные отношения, проводить классификации, позволяющие проводить сравнения, сопоставления, распознавать противоречия в предлагаемых вариантах решений. При этом тестовые задания должны быть очень наглядными и несложными для выполнения. Для проверки терминологии это могут быть задания открытой формы с пропусками слов, знание определений можно эффективно проверить с помощью заданий закрытого типа с большим числом вариантов ответов. При конструировании тестовых заданий следует помнить, что освоение любого теоретического материала может быть у студента чисто механическим. Задача преподавателя – выяснить, понимает ли он содержание заученного. В этом помогут задания на соответствие. Для диагностирования причинно-следственных знаний и умений можно конструировать цепные задания, в которых правильный ответ на последующее задание зависит от ответа на предыдущее. Так, например, для проверки и закрепления знаний по разделу «Линейные пространства» может быть предложен следующий тест:

А. В следующих заданиях вставьте пропущенные слова или выражения.

Для того чтобы система векторов $x_1, x_2, \dots, x_k$ была _____, необходимо и достаточно, чтобы один из векторов системы являлся линейной комбинацией остальных.

Система элементов, содержащая линейно зависимую подсистему, линейно _____.

Коэффициенты разложения вектора по базису линейного пространства, записанные в соответствии с порядком векторов в базисе, называют _____ в этом базисе.

Максимальное количество линейно независимых векторов в линейном пространстве называют _____ линейного пространства.

Б. В следующих заданиях выберите правильный ответ.

Какова размерность линейного пространства квадратных матриц второго порядка, элементами которых являются действительные числа?

- а) 1, б) 2, в) 3, г) 4, д) 0.

Пусть вектор x в базисе $\{e\} = (e_1, e_2, e_3)$ имеет координаты $\{1, 2, 3\}$.

Вектор x в базисе $\{e'\} = (e'_1, e'_2, e'_3)$, где $e'_1 = e_1 + 2e_3$, $e'_2 = e_2 + e_3$, $e'_3 = -e_1 - e_2 - 2e_3$ имеет координаты:

- а) $\{-1, 0, 2\}$, б) $\{0, -1, 0\}$, в) $\{0, 1, 2\}$, г) $\{0, 1, -1\}$, д) $\{-2, 0, 1\}$.

В линейном пространстве V^3 заданы два базиса $\{f\} = (f_1, f_2, f_3)$ и $\{g\} = (g_1, g_2, g_3)$, где

$$f_1 = \{1, 1, 1\}, \quad f_2 = \{2, 1, 1\}, \quad f_3 = \{1, 1, 3\};$$

$$g_1 = \{0, 1, 1\}, \quad g_2 = \{1, 0, 1\}, \quad g_3 = \{1, 0, 2\}.$$

Матрица перехода P от базиса $\{f\}$ к базису $\{g\}$ равна:

$$\begin{aligned} \text{а)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{б)} \begin{pmatrix} 2 & -3/2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{в)} \begin{pmatrix} 2 & 1/2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1/2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \\ \text{г)} \begin{pmatrix} -1 & 3/2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1/2 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{д)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Пусть в линейном пространстве R^2 задана система векторов:

$$a_1 = \{1, 0\}, \quad a_2 = \{0, -1\}, \quad a_3 = \{2, 3\}, \quad a_4 = \{1, 1\}.$$

Число базисов, которые можно построить, используя данные векторы, равно:

- а) 2, б) 4, в) 6, г) 10, д) 12.

При постоянной тестовой проверке у студентов формируется полезная привычка читать лекции и учебно-методическую литературу, вникать в их содержание, а не обращаться к ним от случая к случаю. Студента, правильно

выполнявшего тестовые задания в течение семестра, можно поощрить дополнительными рейтинговыми баллами.

Рейтинг. Максимальная сумма баллов, которую студент может набрать по дисциплине, составляет 100 баллов. Программа учебной дисциплины предусматривает итоговую аттестацию в виде экзамена, его прохождение является обязательным для студента контрольным мероприятием. На экзамен выделяется 30 баллов из 100. Экзамен считается сданным, если за него студент получил не менее 16 баллов. Экзамен проводится в два этапа: сначала в письменной форме по билетам, утвержденным на заседании кафедры, затем в виде беседы с преподавателем. Полностью отказываться от устного ответа на экзамене нецелесообразно, поскольку именно в процессе беседы с преподавателем студент учится последовательно и логически излагать свои мысли и отстаивать свою точку зрения. Рейтинг студента по дисциплине за семестр определяется как сумма баллов, полученных им за все дисциплинарные модули, и баллов за экзамен. Рейтинговый балл за каждый модуль складывается из баллов, полученных за выполнение домашнего задания и рубежного контроля. Баллы за домашнее задание составляют не более 30 % от баллов за модуль. Таким образом, в системе начисления баллов за отдельный модуль акцент сделан на успешную сдачу рубежного контроля. Все контрольные мероприятия проводятся во всех группах в одни и те же сроки по единым комплектам заданий и оцениваются по единой системе. Каждое задание контрольного мероприятия оценивается по трехбалльной системе: 0, 1, 2 (возможно с некоторым весом), что дает возможность уменьшить субъективность при выставлении оценок разными преподавателями. Затем набранные баллы, согласно общим правилам, пересчитываются в рейтинговый балл контрольного мероприятия. Для каждого контрольного мероприятия и модуля в целом установлен минимальный балл. Необходимым условием положительной аттестации студента по модулю является получение за домашнее задание и рубежный контроль количества баллов не ниже установленного минимального балла. Разработана система начисления премиальных баллов за своевременную сдачу контрольных мероприятий, активность на занятиях и КСР. Таким образом,

студент может набрать за работу в семестре максимально 70 баллов и дополнительно 30 баллов по результатам экзамена. Окончательная оценка за дисциплину выставляется, согласно шкале перевода рейтингового балла в экзаменационную оценку.

Заключение. Преподавание в техническом университете такой сложной и абстрактной дисциплины, как «Линейная алгебра» требует особого методического обеспечения, включающего большое количество справочной литературы, методических пособий и указаний к решению как простейших, так и сложных задач, различных иллюстраций работы общих абстрактных принципов в конкретных и прикладных случаях, четко продуманной модульно-рейтинговой системы оценки знаний учащихся.

Приложение 1

Рубежный контроль

Модуль 1. Линейные и евклидовы пространства

Вариант № 1

Дать определение линейного пространства и доказать следствия из его аксиом.

Даны векторы $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ и $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Доказать, что $\{\vec{a}; \vec{b}\}$ – базис линейного пространства R^2 . Найти координаты вектора $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ в базисе $\{\vec{a}; \vec{b}\}$.

Найти размерность и базис линейной оболочки следующих векторов из R^4 : $a_1 = (1, -1, 1, 1)$, $a_2 = (2, 3, 1, 2)$, $a_3 = (4, 1, 3, 4)$.

Найти ортонормированный базис в линейном подпространстве свободных векторов, параллельных плоскости $3x = y + 2z = 0$.

Вариант № 2

Дать определение нормы вектора в евклидовом пространстве. Вывести неравенство Коши-Буняковского и неравенство треугольника.

Доказать, что векторы $e_1 = (1, 1, 0)$, $e_2 = (1, 0, 2)$, $e_3 = (0, 2, 1)$ образуют базис в R^3 и найти координаты вектора $x = (-2, 2, -6)$ в этом базисе.

Выяснить, является ли система векторов $a_1 = (1, 3, -1, 0, 2)$, $a_2 = (5, 1, 6, 1, 1)$, $a_3 = (-7, 7, -15, -2, 4)$ линейно зависимой в линейном пространстве R^5 . Если система линейно зависима, то найти зависимость между векторами.

Применить процесс ортогонализации Грама-Шмидта к системе векторов:

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

заданных своими координатами в ортонормированном базисе.

Модуль 2. Линейные операторы и квадратичные формы

Вариант № 1

Сформулировать определения собственного значения и собственного вектора линейного оператора. Доказать, что характеристический многочлен линейного оператора не зависит от выбора базиса линейного пространства.

Даны векторы $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ и $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Доказать, что $\{\vec{a}; \vec{b}\}$ – базис линейного пространства R^2 . Найти координаты вектора $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ в базисе $\{\vec{a}; \vec{b}\}$.

Доказать, что отображение $A: R^3 \rightarrow R^3$, задаваемое формулой $A(x_1; x_2; x_3) = (-2x_1 + x_3; 3x_2; x_1 - 2x_3)$, является линейным оператором. Записать матрицу линейного оператора A в каноническом базисе линейного пространства R^3 .

Квадратичная форма в некотором ортонормированном базисе имеет вид $2x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_1x_2$. Найти ортогональное преобразование, приводящее квадратичную форму к каноническому виду. Записать этот канонический вид.

Вариант № 2

Сформулировать определение матрицы линейного оператора. Вывести формулу преобразования матрицы линейного оператора при переходе к новому базису.

Доказать, что оператор поворота на угол $\pi/4$ вокруг оси Ox в V^3 является линейным. Выписать матрицу этого оператора и найти образ вектора $x = \{1, 1, 1\}$. Ответ проверить геометрически.

Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора $A: R^3 \rightarrow R^3$, задаваемого формулой $A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_3, -4x_2, 2x_1 + x_3)$. Записать матрицу этого преобразования в базисе из собственных векторов.

Привести уравнение поверхности $3x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_1x_2 - x_3 = 0$ к каноническому виду ортогональным преобразованием. Указать связь между исходными и каноническими координатами. Назвать поверхность.

Вариант № 3

Сформулировать определение самосопряженного линейного оператора. Доказать, что линейный оператор является самосопряженным, если его матрица в некотором ортонормированном базисе симметрическая.

Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ является матрицей линейного оператора $A: L \rightarrow L$ в базисе $\{e\} = (e_1, e_2)$. Найти его матрицу в базисе $\{e'\} = (e'_1, e'_2)$, если $e'_1 = e_1 - 2e_2$, $e'_2 = 2e_1 + e_2$.

Доказать, что преобразование, действующее в пространстве геометрических векторов V^3 по формуле $Ax = [a, x]$, где $a = i + 2j + k$, линейное.

Привести уравнение поверхности $3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_3 - 15 = 0$ к каноническому виду ортогональным преобразованием. Указать связь между исходными и каноническими координатами. Назвать поверхность.

Приложение 2

Домашнее задание

Модуль 1. Линейные и евклидовы пространства

Даны векторы p и q евклидова пространства E_4 с координатами в базисе $\{a\} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$, векторы которого определены относительно некоторого ортонормированного базиса этого пространства.

- 1) Применяя процесс ортогонализации, ортонормировать базис $\{a\}$, т.е. получить базис $\{b\}$.
- 2) Найти матрицу перехода от полученного ортонормированного базиса $\{b\}$ к исходному базису $\{a\}$.
- 3) Найти координаты векторов p и q в ортонормированном базисе $\{b\}$.
- 4) Вычислить скалярное произведение (p, q) в базисе $\{b\}$.
- 5) Вычислить угол φ между векторами p и q в ортонормированном базисе $\{b\}$.

Вариант №1

$$p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}_{\{a\}}, \quad q = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}_{\{a\}}, \quad a_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Вариант №2

$$p = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}_{\{a\}}, \quad q = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}_{\{a\}}, \quad a_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad a_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Вариант №3

$$p = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\{a\}}, \quad q = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\{a\}}, \quad a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad a_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Модуль 2. Линейные операторы и квадратичные формы

Уравнение линии второго порядка (а) на плоскости Ox_1x_2 и уравнение поверхности второго порядка (б) в пространстве $Ox_1x_2x_3$ привести к каноническому виду, указав:

- 1) одно из преобразований перехода от заданной прямоугольной декартовой системы координат к канонической системе координат (собственные числа ортогонального преобразования расположить в порядке возрастания);
- 2) канонический вид уравнения линии (а) и поверхности (б), значения всех параметров, характеризующих форму линии и поверхности;
- 3) на плоскости Ox_1x_2 построить каноническую систему координат, линию (а) и найти в системе Ox_1x_2 для центральной линии координаты центра, вершин, фокусов, уравнения асимптот (для гиперболы), а для параболы – координаты вершины, фокуса, уравнение директрисы;
- 4) в канонической системе координат построить поверхность (б), используя метод сечений для исследования формы поверхности, заданной каноническим уравнением.

Вариант №1

$$а) -16x_1^2 + 8x_1x_2 - x_2^2 + 6\sqrt{17}x_1 - 10\sqrt{17}x_2 + 51 = 0,$$

$$б) x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 6x_1x_3 - 4x_1 + 2\sqrt{2}x_2 - 2\sqrt{2}x_3 + 25 = 0.$$

Вариант №2

$$а) 5x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_2^2 - 32x_1 - 56x_2 + 80 = 0,$$

$$б) x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 + 8x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3 - 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 0.$$

Вариант №3

$$а) 9x_1^2 + 24x_1x_2 + 16x_2^2 - 230x_1 + 110x_2 - 475 = 0,$$

$$б) 2x_1^2 + 2x_2^2 - 5x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1 - 4x_2 - 4x_3 + 2 = 0.$$

ЛИТЕРАТУРА:

1. Власова Е.А., Попов В.С. Принципы блочно-модульной системы преподавания математики // Проблемы совершенствования качества образования в вузе: мат-лы второй науч.-практ. конф., Орехово-Зуево, 5 февраля 2010 г. Орехово-Зуево: Изд-во Орехово-Зуевского филиала института экономики и предпринимательства, 2010. С. 88–93.
2. Власова Е.А., Попов В.С. О разработке вузовских учебных программ математических дисциплин // Проблемы совершенствования качества образования: мат-лы четвертой междунар. науч.-практ. конф., Орехово-Зуево, 17 февраля 2012 г. Орехово-Зуево: Изд-во Орехово-Зуевского филиала института экономики и предпринимательства, 2012. С. 52–57.
3. Власова Е.А., Грибов А.Ф., Попов В.С., Латышев А.В. Принципы модульно-рейтинговой системы преподавания высшей математики // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2013. № 3. С. 93–99.
4. Власова Е.А., Грибов А.Ф., Попов В.С., Латышев А.В. Развитие мотивационных стимулов обучения в рамках модульно-рейтинговой системы организации учебного процесса // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2014. № 1. С. 48–53.

УДК 53:37.016

Синявина А.А., Иманкулова З.*Московский государственный областной университет***ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЕ ЗАДАНИЯ ПО ФИЗИКЕ КАК ОДНО ИЗ СРЕДСТВ
ФОРМИРОВАНИЯ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫХ И ТВОРЧЕСКИХ
СПОСОБНОСТЕЙ ОБУЧАЮЩИХСЯ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ**

Аннотация. В статье проанализированы некоторые психологические концепции развития интеллектуальных и творческих способностей обучающихся. Отражено их использование при изучении курса физики средней школы. Представлены примеры исследовательских заданий при изучении постоянного тока в курсе физики средней школы, направленных на формирование интеллектуальных и творческих способностей обучающихся. Приведена классификация исследовательских заданий, включающая теоретическое исследование, экспериментальное исследование, знакомство с техническими объектами. Представлены варианты выполнения заданий и методические рекомендации к ним.

Ключевые слова: интеллектуальные и творческие способности, исследовательские задания, теоретическое исследование, экспериментальное исследование, способы деятельности, планируемые результаты обучения.

A. Sinyavina, Z. Imankulova*Moscow State Regional University***RESEARCH JOBS IN PHYSICS AS ONE OF THE MEANS OF FORMATION OF
INTELLECTUAL AND CREATIVE ABILITIES OF STUDENTS
SECONDARY SCHOOL**

Abstract. The paper analyzes some of the psychological concepts of the development of intellectual and creative abilities of students and outlines their use in the study of the physics courses in high school. Examples of research tasks in the study of the 'direct current' in physics courses in high school, aimed at the development of intellectual and creative abilities of students, are presented. The research tasks, including theoretical research, experimental research, and familiarity with technical objects, are classified. The ways of performing tasks and guidelines to them are presented.

Key words: intellectual and creative abilities, research assignments, theoretical research, experimental research, methods, activities, planned learning outcomes.

В современном мире характерной особенностью становления и развития личности, способной реализоваться в быстро изменяющихся

условиях, является творческий подход к выполнению любой деятельности. Федеральный государственный стандарт среднего общего образования выдвигает требования к формированию интеллектуальных и творческих способностей обучающихся, проявляющихся в достижении личностных, метапредметных и предметных результатов обучения при изучении физики. Сформированность мировоззрения, соответствующего современному уровню развития науки и общественной практики, а также готовность и способности к самостоятельной, творческой и ответственной деятельности характерны для личностных достижений. Определение цели деятельности, реализация планов её достижения относится к метапредметным достижениям. Развитие индивидуальных способностей обучающихся через освоение систем знаний фундаментальных физических теорий и способов действий осуществляется в виде предметных результатов [1; 2].

Особенности формирования интеллектуальных и творческих способностей обучающихся раннего юношеского возраста раскрыты в разных психологических концепциях. Например, концепция Пиаже трактует интеллект в широком смысле как глобальную, интегральную биопсихическую особенность человека, характеризующую его возможные адаптации. Она заключается в способности решать новые мыслительные задачи без проб и переносить найденные способы на другие ситуации. В узком смысле интеллект представляет общее название познавательных способностей. Модели интеллекта, представленные в психологической науке, содержат различные составляющие, например, модель интеллекта Дж. Гилфорда. Она включает 15 свойств личности, которые оцениваются по трём измерениям: содержанию, операциям и результату. В психологии различают несколько видов интеллекта. К ним относятся, например, академический, вербальный, общий, практический, рассудочный, эмоциональный. Так, общий интеллект предполагает умственную способность, влияющую на выполнение любой деятельности, проявляющуюся в скорости и точности решения мыслительных задач [3; 4].

Творческое начало присуще всем видам деятельности, в том числе и учебной. Анализируя различные психологические концепции развития

интеллекта и творческой одарённости, учителя-исследователи применяют их в своей практической деятельности, например, при разработке авторских методик, учебных программ, учебно-методических комплектов по физике, т. е. в организации и проведении учебного процесса по физике. Одним из средств развития интеллектуальных и творческих способностей являются индивидуальные задания исследовательского характера по физике в средней школе, которые представляют собой особый вид содержания учебного материала. Индивидуальные задания подразумевают самостоятельную, творческую работу. Любое исследование начинается с выяснения и анализа проблемы, которую необходимо разрешить. Выполняя исследовательское задание, школьники учатся выдвигать гипотезы и предлагать способы их проверки, планировать учебную деятельность, искать нестандартные решения задачи [5].

При изучении авторского курса физики средней школы разработана система заданий, направленных на исследование явлений, связей между величинами, конструирование объектов, в частности физических приборов, контроль сформированности знаний и умений. Раскрываются этапы исследовательского процесса при изучении физики, т. е. учебного исследования: цель, объект, формы выражения научного знания на двух уровнях – эмпирическом и теоретическом, общие формы выражения для них, основные общие методы познания, а также оценка, самооценка и интерпретация результатов исследования. Система заданий направлена на их выполнение при углублённом изучении предмета. Технология их выполнения объединяет уровни познания, творческий цикл, методы познания в виде действий и деятельности и является их системообразующим фактором. Система творческих заданий представлена следующими рубриками: сведения из истории развития физики, экспериментальное исследование, теоретическое исследование, измерение физической величины, знакомство с техническими объектами. Так, задания, связанные с историей развития физики, посвящены анализу фрагментов из работ классиков физики, определению физических величин, анализу задач, решённых физиками. Экспериментальные исследования предполагают по описанию нескольких опытов установить

свойство объектов, эмпирическую закономерность, объяснить результаты опыта. Задания, направленные на ознакомление с техническими объектами, позволяют выяснить конструкцию и действие установок и приборов, с их помощью – методы установления зависимостей между величинами. Теоретические исследования направлены на определение физических величин, овладение теоретическим методом для вывода неизвестных формул, анализ графиков и уравнений. Задания, связанные с измерением физической величины, предполагают учёт максимальной абсолютной или относительной погрешности измерений.

Технология выполнения подобных заданий позволяет организовать учебный процесс по физике через усвоение методов познания, действия, характерных для исследования. Такой способ освоения содержания курса физики позволяет одновременно формировать интеллектуальные, творческие способности и мотивацию к обучению. Обучающиеся на любом этапе этого процесса могут объективно оценить свои возможности и перспективы в исследовательской деятельности по физике [6–8].

Рассмотрим на примере изучения законов постоянного тока некоторые примеры заданий, содержащихся в учебнике физики средней школы и ориентированных на процесс творчества.

Теоретическое исследование

Однородный металлический проводник длиной Δl и площадью поперечного сечения S ограничен сечением 1 и 2 (рис. 1). Концентрация свободных электронов равна n , сила тока в проводнике — I . Используя формулу определения силы тока и формулу определения общего заряда этих электронов $q = enS\Delta l$, покажите, что модуль скорости дрейфа электронов в проводнике $v = \frac{I}{enS}$.

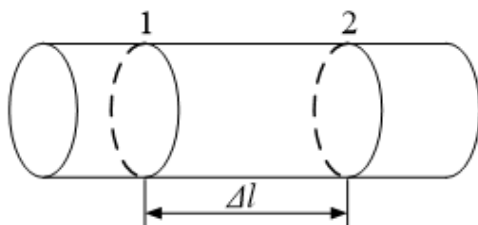


Рис. 1

Вариант выполнения задания предполагает формулировку *гипотезы исследования*: если использовать формулу определения силы тока $I = \frac{q}{\Delta t}$, формулу определения общего заряда электронов $q = enS\Delta l$ и найти время $t = \frac{\Delta l}{v}$, за которое все частицы, заключённые в выделенном объёме, пройдут через поперечное сечение 2 со скоростью дрейфа, то в результате преобразований можно найти модуль скорости дрейфа по формуле: $v = \frac{I}{enS}$.

Этапы выполнения исследования:

1. Согласно определению, сила тока равна отношению заряда q , переносимого через поперечное сечение проводника за промежуток времени Δt , к этому промежутку:

$$I = \frac{q}{\Delta t}.$$

2. Найдём время Δt , за которое все частицы, заключённые в выделенном объёме, пройдут через поперечное сечение 2 со скоростью дрейфа v : $\Delta t = \frac{\Delta l}{v}$.

3. Подставим в формулу силы тока выражения для заряда электронов и времени:

$$I = \frac{q}{\Delta t} = \frac{enS\Delta l}{\frac{\Delta l}{v}} = \frac{enS\Delta l v}{\Delta l} = enSv.$$

4. Из полученной формулы следует, что скорость дрейфа электронов равна $v = \frac{I}{enS}$.

Для выполнения задания школьникам необходимо изучить содержание учебного материала об электронной проводимости металлов,

проанализировать связи между физическими величинами, характеризующими электрический ток в металлах.

Теоретическое исследование

Для объяснения действия источника тока применяют гидродинамическую аналогию между электрическим током в цепи и потоком воды, протекающей в замкнутой системе труб (рис. 2).

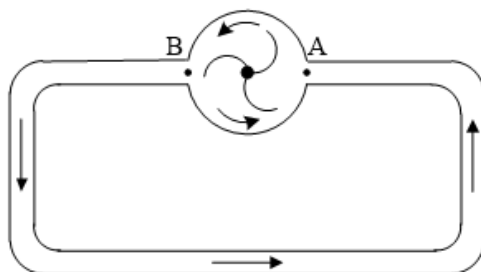


Рис. 2

Перекачивание воды в системе осуществляется благодаря насосу. Вода течёт вследствие разности давлений в точках А и В.

Используя эту аналогию, объясните роль сторонних сил, действующих в источнике тока.

Вариант выполнения задания

Гипотеза исследования: если использовать метод аналогии между электрическим током в замкнутой электрической цепи и потоком воды, протекающей в замкнутой системе труб, то можно объяснить роль сторонних сил, действующих в источнике тока.

Этапы выполнения исследования:

Течение жидкости, движущейся из точки В вниз под действием силы тяжести, сопровождается потерями энергии на трение. Для циркуляции жидкости, протекающей в замкнутой системе труб, необходим насос, сообщаящий жидкости дополнительную скорость. Сторонней силой в этом

случае является сила давления на воду вращающейся крыльчатки насоса вследствие разности давлений в токах А и В.

С помощью сторонних сил электрические заряды внутри источника тока движутся от катода к аноду против действующих на них кулоновских сил. Работа сторонних сил вдоль замкнутого контура должна быть отличной от нуля. В процессе совершения работы этими силами заряженные частицы приобретают внутри источника энергию и затем отдают ее проводникам электрической цепи.

Вывод: роль сторонних сил в источнике тока аналогична роли насоса для перекачивания жидкости.

Выполнение задания направлено на ознакомление обучающихся с методом аналогии при изучении физики. Подобные задания позволяют формировать определенную систему действий, например, выдвигать гипотезы при исследовании физических явлений и процессов, моделировать физические явления и процессы, объяснять различия между теоретическими и материальными моделями.

Экспериментальное исследование

Мультиметр — физический прибор для измерения силы тока, напряжения и сопротивления. С его помощью проведите экспериментальное исследование простейшей электрической цепи, содержащей источник тока (батарейку), лампочку на подставке, проводники.

Нарисуйте схему цепи.

Оцените силу тока в цепи и напряжение на зажимах лампочки.

Предложите способы измерения силы тока в цепи.

Вариант выполнения задания

Цель исследования – 1) оценить силу тока в спроектированной электрической цепи; 2) измерить напряжение на зажимах лампочки.

Средства измерения и материалы: источник тока (батарейка), электрическая лампа, ключ, мультиметр, действующий в режимах амперметра и вольтметра, соединительные провода.

Гипотеза исследования

Если последовательно собрать электрическую цепь, состоящую из источника тока, ключа, электрической лампы, соединительных проводов, мультиметра, действующего в режиме амперметра, то можно измерить силу тока в цепи.

Если разомкнуть электрическую цепь, перевести мультиметр в режим вольтметра, подключив его к зажимам лампочки, и снова замкнуть электрическую цепь, то можно измерить напряжение на зажимах лампочки.

Порядок выполнения исследования

Схема электрической цепи, состоящая из последовательно соединённых источника тока (батарейки), ключа, электрической лампы, мультиметра, действующего в режиме амперметра (рис. 3).

С помощью мультиметра, действующего в режиме амперметра, можно оценить силу тока в электрической цепи.

3. Видоизменим электрическую цепь, включив мультиметр в режиме вольтметра (рис. 4).

4. Измерим напряжение на зажимах лампочки.

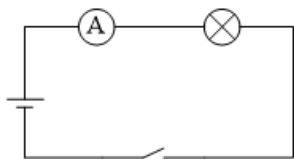


Рис. 3

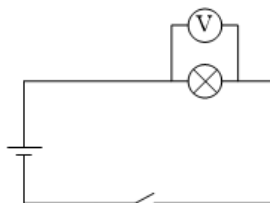


Рис. 4

В ходе экспериментального исследования обучающиеся планируют свою деятельность, обосновывая и определяя цель исследования, его объект, формулируя гипотезу и предлагая порядок проведения исследования. Осознанное и направленное конструирование простейших электрических схем и их исследование позволяют формировать безопасные приёмы работы с электрическими приборами и установками.

Знакомство с техническими объектами

Электрическую цепь, схема которой изображена на рис. 5, называют *мостиком Уитстона*. Резисторы R_1 , R_2 , R_3 и R_4 с сопротивлениями R_1 , R_2 , R_3 и R_4 — плечи мостика. Мостиковую схему используют для измерения одного из неизвестных сопротивлений, входящих в плечи мостика, например R_1 . Найдите, при каком соотношении сопротивлений ток через резистор R_5 не протекает.

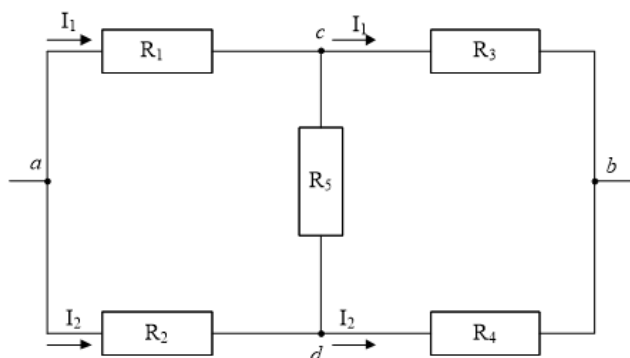


Рис. 5

Указание. Если через резистор R_5 ток не протекает, то сила тока в резисторах R_1 и R_3 одинакова и равна I_1 . Соответственно, сила тока в резисторах R_2 и R_4 будет равна I_2 . Отсутствие тока между точками c и d означает, что их потенциалы $\varphi_c = \varphi_d$. Следовательно, будут равны друг другу и разности потенциалов:

$$U_{ac} = U_{ad}; \quad U_{cb} = U_{db}, \quad (1)$$

так как $\varphi_a - \varphi_c = \varphi_a - \varphi_d$; $\varphi_c - \varphi_b = \varphi_d - \varphi_b$.

Используя закон Ома для участка цепи, можно записать:

$$I_1 R_1 = I_2 R_2; \quad (2)$$

$$I_1 R_3 = I_2 R_4 \quad (3)$$

а) Разделите почленно равенство (2) на равенство (3) и сделайте вывод, при каком соотношении сопротивлений ток через резистор R_5 не протекает.

б) Выразите из полученного соотношения сопротивление одного из резисторов, например R_1 .

*Вариант выполнения задания**Гипотеза исследования*

Используя указания к выполнению задания и преобразуя ряд формул, можно найти соотношение сопротивлений, при котором ток через резистор R_5 не протекает, а из полученного соотношения можно выразить сопротивление одного из резисторов.

Порядок выполнения исследования:

а) Разделив почленно равенство (2) на равенство (3), получим:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_2}{R_4} \quad (4)$$

или

$$R_1 R_4 = R_2 R_3. \quad (5)$$

Вывод: электрический ток через резистор R_5 не протекает, если произведения сопротивлений противоположных плеч мостика равны друг другу.

б) Выразим из полученного соотношения (5) сопротивление одного из резисторов, например R_1 . Оно равно $R_1 = \frac{R_2 R_3}{R_4}$.

В учебнике физики [6] мостик Уитстона рассматривается только в виде задания. Выполнение представленного задания связано с тем, что обучающимся необходимо самостоятельно ознакомиться с этим устройством. В тексте задания используется термин «плечи мостика», который им необходимо применить с помощью метода аналогии, конкретизировать, а следовательно, более глубоко изучить это техническое устройство и затем провести ряд преобразований для нахождения одного из неизвестных сопротивлений. Выполнение подобных заданий мотивирует обучающихся на изучение технических устройств – практических приложений физических законов, на творческую и инновационную деятельность.

Как видно, каждое исследовательское задание содержит проблему, которую необходимо разрешить относительно начальных условий, а затем следует конкретизировать гипотезу относительно представленных условий исследования. Теоретические исследования связаны с доказательством тех или иных утверждений, выводом формул. При их выполнении у обучающихся

формируются элементы знаний, связанные с единой концептуальной системой – физической теорией, которая входит в состав физической картины мира. Технология выполнения экспериментальных исследований предполагает следующий план действий обучающихся: мысленное конструирование объекта исследования – схемы электрической цепи, сборка цепи (выбор ее элементов), рассмотрение свойств исследуемого физического явления, наблюдение за ходом эксперимента, запись результатов, формулирование выводов. Такая последовательность действий обучающихся при выполнении заданий аналогична деятельности научного исследователя.

Ознакомление с техническими объектами предполагает изучение их назначения, конструкции, примеров практического использования.

Представленные задания позволяют усилить теоретическую составляющую содержания курса и способствуют приобретению опыта учебно-исследовательской деятельности обучающихся. Они направлены на развитие интеллектуальных и творческих способностей обучающихся с учётом их профессиональных намерений и интересов.

Примерами основных видов деятельности обучающихся (на уровне учебных действий) при изучении законов постоянного тока на углублённом уровне являются: понимание смысла и запись формул определения основных физических величин, характеризующих постоянный ток; вывод и анализ формулы определения модуля скорости дрейфа электронов в проводнике; объяснение условий существования постоянного тока; измерение силы тока с помощью амперметра и напряжения с помощью вольтметра с учётом максимальной абсолютной погрешности измерения; объяснение роли сторонних сил; сборка и испытание электрических цепей с разным соединением проводников и расчёт их параметров; исследование электрической цепи – мостика Уитстона.

Таким образом, выполнение исследовательских заданий при изучении курса физики в средней школе направлено на приобретение опыта разнообразной учебно-познавательной деятельности, поиска, анализа и обработки информации физического содержания, эффективного и безопасного использования различных технических устройств.

Систематическое выполнение подобных заданий при изучении всего курса физики средней школы способствует формированию интеллектуальных и творческих способностей обучающихся.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Рузавин Г.И. Методология научного познания: Учеб. пособ. для вузов. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2013. С. 287.
2. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего (полного) общего образования.[электронный ресурс]. 2014. URL: <http://standart.edu.ru/> (дата обращения: 15.11.14).
3. Гамезо М.В., Герасимова В.С., Машурцева Д.А., Орлова Л.М. Общая психология: Учеб. метод. пособ. / Под общ. Ред. М.В. Гамезо. М.: Ось-89, 2007. С. 352.
4. Крайг Г. Психология развития. СПб.: Питер, 2000. С. 992.
5. Савенков А.И. Психология детской одарённости. М.: Генезис, 2010. С. 440.
6. Хижнякова Л.С., Синявина А.А. Физика: 8 класс: учеб. для учащихся общеобр. орг-ций. М.: Вентана-Граф, 2011. 224 с.
7. Физика: 11 класс: базовый и углублённый уровни: учеб. для учащихся общеобр. орг-ций / Л.С. Хижнякова, А.А. Синявина, С.А. Холина и др. М.: Вентана-Граф, 2014. С. 408.
8. Физика: программы: 7–9 классы, 10–11 классы / Л.С. Хижнякова, А.А. Синявина, В.В. Кудрявцев и др. М.: Вентана-Граф, 2014. С. 288.

НАШИ АВТОРЫ

Абдуллаев Абдула Рамазанович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, факультет прикладной математики и механики; e-mail: h.m@pstu.ru

Барabanова Наталья Николаевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей физики Московского государственного областного университета; e-mail: d21215507@yandex.ru

Беляев Виктор Васильевич – доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник, заведующий кафедрой теоретической физики Московского государственного областного университета; e-mail: vv.belyaev@mgou.ru

Богданов Дмитрий Леонидович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой общей физики Московского государственного областного университета; e-mail: bogdl@ramdlr.ru

Власова Елена Александровна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики МГТУ им. Н.Э. Баумана; e-mail: elena.a.vlasova@yandex.ru

Геворкян Эдвард Вигенович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры общей физики Московского государственного областного университета; e-mail: gevev@rambler.ru

Дадиванян Артем Константинович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической физики Московского государственного областного университета; e-mail: dadivank@mail.ru

Зверев Николай Витальевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической физики Московского государственного областного университета; e-mail: zverev_nv@mail.ru

Зудина Марина Николаевна – аспирант, кафедра теоретической физики Московского государственного областного университета; e-mail: marishkazudina@yandex.ru

Иманкулова Зухра – магистрант кафедры методики преподавания физики Московского государственного областного университета; e-mail: zuhra2828@gmail.com

Конопацкая Екатерина Викторовна – ассистент кафедры высшей математики, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, факультет прикладной математики и механики; e-mail: Evkonopatskaya@yandex.ru

Латышев Анатолий Васильевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа и геометрии Московского государственного областного университета, e-mail: avlatyshev@mail.ru

Назаров Артем Павлович – аспирант, кафедра общей физики Московского государственного областного университета; e-mail: kleinekrokodil@yandex.ru

Петрова Вера Тимофеевна – доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, профессор Московского физико-технического института; e-mail: petrovavt@gmail.com

Попов Владимир Семенович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики МГТУ им. Н.Э. Баумана; e-mail: vsporov@bk.ru

Сивиркина Анна Сергеевна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры высшей математики и информатики, Рязанский институт (филиал) Московского университета машиностроения; e-mail: SivirkinaAS@yandex.ru

Синявина Анна Афанасьевна – доктор педагогических наук, профессор кафедры методики преподавания физики Московского государственного областного университета; e-mail: aas_47@mail.ru

Чаругин Виктор Максимович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической физики Московского государственного педагогического университета; e-mail: charugin@mail.ru

Штрек Ольга Викторовна – аспирант, кафедра общей физики Московского государственного областного университета; e-mail: shtrek92@bk.ru

Юшканов Александр Алексеевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической физики Московского государственного областного университета; e-mail: yushkanov@inbox.ru



ВЕСТНИК МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ОБЛАСТНОГО УНИВЕРСИТЕТА

Научный журнал «Вестник МГОУ» основан в 1998 г. На сегодняшний день выходят десять серий «Вестника»: «История и политические науки», «Экономика», «Юриспруденция», «Философские науки», «Естественные науки», «Русская филология», «Физика-математика», «Лингвистика», «Психологические науки», «Педагогика». Все серии включены в составленный Высшей аттестационной комиссией Перечень ведущих рецензируемых научных журналов, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертации на соискание ученой степени доктора и кандидата наук по наукам, соответствующим названию серии. Журнал включен в базу данных Российского индекса научного цитирования (РИНЦ).

Печатная версия журнала зарегистрирована в Федеральной службе по надзору за соблюдением законодательства в сфере массовых коммуникаций и охране культурного наследия. Полнотекстовая версия журнала доступна в Интернете на платформе Научной электронной библиотеки (www.elibrary.ru), а также на сайте Московского государственного областного университета (www.vestnik.mgou.ru).

ВЕСТНИК МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ОБЛАСТНОГО УНИВЕРСИТЕТА

СЕРИЯ «ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА»
2015. N 3

Над номером работали:

менеджер Отдела по изданию журнала «Вестник МГОУ» И.А. Потапова
корректор Е.В. Хомякова
компьютерная верстка К.С. Карасёва

Отдел по изданию научного журнала «Вестник МГОУ»
105005, г. Москва, ул. Радио, д. 10а, офис 98
тел. (499) 261-43-41; (495) 723-56-31
e-mail: vest_mgou@mail.ru
Сайт: www.vestnik-mgou.ru

Формат 70x108/₁₆. Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура «Minion Pro».
Тираж 500 экз. Уч.-изд. л. 3,5, усл. п.л. 6,5.
Подписано в печать 20.10.2015. Заказ № 2015/10-7.
Отпечатано в типографии МГОУ
105005, г. Москва, ул. Радио, 10а