

ISSN 2072-8387



Вестник

МОСКОВСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
ОБЛАСТНОГО
УНИВЕРСИТЕТА

Серия

Физика-
Математика

ВЛИЯНИЕ РАЗЛИЧНЫХ МОЛЕКУЛЯРНЫХ
КОНФОРМАЦИЙ НА ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКИЕ
СВОЙСТВА КЛАСТЕРНЫХ ИЗОМЕРОВ

ВЫЧИСЛЕНИЕ В РАМКАХ КИНЕТИЧЕСКОГО
ПОДХОДА ПОТОКА ТЕПЛА В ДЛИННОМ
КАНАЛЕ ПОСТОЯННОГО ПРЯМОУГОЛЬНОГО
ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

ВЛИЯНИЕ ПРОЦЕССА СТРУКТУРИРОВАНИЯ ОБЪЁМА
И ПОВЕРХНОСТИ МАТЕРИАЛОВ, ВКЛЮЧАЯ ЖИДКИЕ
КРИСТАЛЛЫ, НА СПЕКТРАЛЬНЫЕ, СТРУКТУРНЫЕ
И ФОТОРЕФРАКТИВНЫЕ СВОЙСТВА



2015/ № 2

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА

Научный журнал основан в 1998 г.

«Вестник Московского государственного областного университета» (все его серии) включён в «Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертации на соискание учёной степени доктора и кандидата наук» Высшей аттестационной комиссии при Министерстве образования и науки Российской Федерации (См.: Список журналов на сайте ВАК при Минобрнауки России) по наукам, соответствующим названию серии.

The academic journal is established in 1998

«Bulletin of Moscow State Regional University» (all its series) is included by the Supreme Certifying Commission of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation into “the List of leading reviewed academic journals and periodicals recommended for publishing in corresponding series basic research thesis results for a Ph.D. Candidate or Doctorate Degree” (See: the online List of journals at the site of the Supreme Certifying Commission of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation).

PHYSICS AND MATHEMATICS

Учредитель журнала «Вестник МГОУ»: Московский государственный областной университет

Выходит 4 раза в год

Редакционно-издательский совет «Вестника МГОУ»

Хроменков П.Н. — к.филол.н., проф., ректор МГОУ (председатель совета)

Ефремова Е.С. — к.филол.н., и.о. проректора по научной работе МГОУ (зам. председателя);

Клычников В.М. — к.ю.н., к.и.н., проф., проректор по учебной работе и международному сотрудничеству МГОУ (зам. председателя)

Антонова Л.Н. — д.пед.н., проф., академик РАО, Комитет Совета Федерации по науке, образованию и культуре

Асмолов А.Г. — д.псх.н., проф., академик РАО, директор Федерального института развития образования

Климов С.Н. — д.ф.н., проф., Московский государственный университет путей сообщения (МИИТ)

Клобуков Е.В. — д.филол.н., проф., Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Манойло А.В. — д.пол.н., проф., МГУ им. М.В. Ломоносова

Новоселов А.Л. — д.э.н., проф., Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова

Пасечник В.В. — д.пед.н., проф., МГОУ

Поляков Ю.М. — к.филол.н., главный редактор «Литературной газеты»

Рюмцев Е.И. — д.ф.-м.н., проф., Санкт-Петербургский государственный университет

Хухуни Г.Т. — д.филол.н., проф., МГОУ

Чистякова С.Н. — д.пед.н., проф., Российская академия образования (г. Москва)

ISSN 2072-8387

Вестник Московского государственного областного университета. Серия «Физика-Математика». 2015. № 2. М.: ИИУ МГОУ. 142 с.

Журнал «Вестник МГОУ» серия «Физика-Математика» зарегистрирован в Федеральной службе по надзору за соблюдением законодательства в сфере массовых коммуникаций и охране культурного наследия. Регистрационное свидетельство ПИ № ФС77-26136

**Индекс серии «Физика-Математика»
по Объединённому каталогу «Пресса России» 40723**

© МГОУ, 2015.

© ИИУ МГОУ, 2015.

Редакционная коллегия серии «Физика-Математика»

Ответственный редактор серии:

Бугаев А.С. — д.ф.-м.н., академик РАН, МФТИ

Заместитель ответственного редактора:

Жачкин В.А. — д.ф.-м.н., проф., МГОУ

Ответственный секретарь:

Васильчикова Е.Н. — к.ф.-м.н., доц., МГОУ

Члены редакционной коллегии:

Беляев В.В. — д.т.н., проф., МГОУ;

Богданов Д.Л. — д.ф.-м.н., проф., МГОУ;

Бугримов А.Л. — д.т.н., проф., МГОУ;

Латышев А.В. — д.ф.-м.н., проф., МГОУ;

Рассудовская М.М. — к.п.н., проф., МГОУ;

Осипов М.А. — д.ф.-м.н., проф., Университет Стратклайд (Великобритания);

Чигринов В.Г. — д.ф.-м.н., проф., Гонконгский университет науки и технологий (Китай)

Журнал включён в базу данных Российского индекса научного цитирования (РИНЦ), имеет полнотекстовую сетевую версию в Интернете на платформе Научной электронной библиотеки (www.elibrary.ru), а также на сайте Московского государственного областного университета (www.vestnik-mgou.ru)

При цитировании ссылка на конкретную серию «Вестника МГОУ» обязательна. Воспроизведение материалов в печатных, электронных или иных изданиях без разрешения редакции запрещено. Опубликованные в журнале материалы могут использоваться только в некоммерческих целях. Ответственность за содержание статей несут авторы. Мнение редколлегии серии может не совпадать с точкой зрения автора. Рукописи не возвращаются.

**Адрес Отдела по изданию научного журнала
«Вестник МГОУ»**

г. Москва, ул. Радио, д.10а, офис 98

тел. (499) 261-43-41; (495) 723-56-31

e-mail: vest_mgou@mail.ru; сайт: www.vestnik-mgou.ru

The founder of journal «Bulletin of the MSRU»: Moscow State Regional University

Issued 4 times a year

Series editorial board «Physics and Mathematics»

Editor-in-chief:

A.S. Bugaev – Doctor of Physics and Mathematics, Academician of RAS, MIPT

Deputy editor-in-chief:

V.A. Zhachkin – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, MSRU

Executive secretary:

E.N. Vasilchikova – Ph.D. in Physics and Mathematics, Associate Professor, MSRU

Members of Editorial Board:

V.V. Belyaev – Doctor of Technical Sciences, Professor, MSRU

D.L. Bogdanov – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, MSRU

A.L. Bugrimov – Doctor of Technical Sciences, Professor, MSRU

A.V. Latyshev – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, MSRU

M.M. Rassudovskaya – Ph.D. in Pedagogical Sciences, Professor, MSRU

M.A. Osipov – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Strathclyde University (UK)

V.G. Chigrinov – University of Science and Technology (Hong Kong, China)

The journal is included into the database of the Russian Science Citation Index, has a full text network version on the Internet on the platform of Scientific Electronic Library (www.elibrary.ru), as well as at the site of the Moscow State Regional University (www.vestnik-mgou.ru)

At citing the reference to a particular series of «Bulletin of the Moscow State Regional University» is obligatory. The reproduction of materials in printed, electronic or other editions without the Editorial Board permission, is forbidden. The materials published in the journal are for non-commercial use only. The authors bear all responsibility for the content of their papers. The opinion of the Editorial Board of the series does not necessarily coincide with that of the author Manuscripts are not returned.

The Editorial Board address: Moscow State Regional University

10a Radio st., office 98, Moscow, Russia

Phones: (499) 261-43-41; (495) 723-56-31

e-mail: vest_mgou@mail.ru; site: www.vestnik-mgou.ru

Publishing council «Bulletin of the MSRU»

P.N. Khromenkov – Ph. D. in Philology, Professor, Principal of MSRU (Chairman of the Council)

E.S. Yefremova – Ph. D. in Philology, Acting Vice-Principal for scientific work of MSRU (Vice-Chairman of the Council)

V.M. Klychnikov – Ph.D. in Law, Ph. D. in History, Professor, Vice-Principal for academic work and international cooperation of MSRU (Vice-Chairman of the Council)

L.N. Antonova – Doctor of Pedagogics, Professor, Member of the Russian Academy of Education, The Council of the Federation Committee on Science, Education and Culture

A.G. Asmolov – Doctor of Psychology, Professor, Member of the Russian Academy of Education, Principal of the Federal Institute of Development of Education

S.N. Klimov – Doctor of Philosophy, Professor, Moscow State University of Railway Engineering

E.V. Klobukov – Doctor of Philology, Professor, Lomonosov Moscow State University

A.V. Manoylo – Doctor of Political Science, Professor, Lomonosov Moscow State University

A.L. Novosjolov – Doctor of Economics, Professor, Plekhanov Russian University of Economics

V.V. Pasechnik – Doctor of Pedagogics, Professor, MSRU

Yu. M. Polyakov – Ph.D. in Philology, Editor-in-chief of "Literaturnaya Gazeta"

E.I. Rjuntsev – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Saint Petersburg State University

G. T. Khukhuni – Doctor of Philology, Professor, MSRU

S.N. Chistyakova – Doctor of Pedagogics, Professor, the Russian Academy of Education

ISSN 2072-8387

Bulletin of the Moscow State Regional University. Series «Physics and Mathematics». 2015. № 2. M.: MSRU Publishing house. 142 p.

The series «Physics and Mathematics» of the Bulletin of the Moscow State Regional University is registered in Federal service on supervision of legislation observance in sphere of mass communications and cultural heritage protection. The registration certificate ПИ № 0С77-26136

Index of the series «Physics and Mathematics» according to the union catalog «Press of Russia» 40723

© MSRU, 2015.

© MSRU Publishing house, 2015.

СОДЕРЖАНИЕ

РАЗДЕЛ I. МАТЕМАТИКА

<i>Птицына И.В.</i> СЕТИ ШТЕЙНЕРА С ПОДВИЖНОЙ ГРАНИЦЕЙ: СЛУЧАЙ ПРЯМОЙ И ПАРЫ ТОЧЕК.....	8
--	---

РАЗДЕЛ II. ФИЗИКА

<i>Кузнецов В. М., Терешкина К. Б.</i> ВЛИЯНИЕ РАЗЛИЧНЫХ МОЛЕКУЛЯРНЫХ КОНФОРМАЦИЙ НА ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КЛАСТЕРНЫХ ИЗОМЕРОВ.....	29
<i>Андреанов И.К., Гринкруг М.С.</i> ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ТЕПЛООТДАЧИ ДЛЯ ТРЕБУЕМОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ НА ПОВЕРХНОСТИ КОНТАКТА ЛОПАТКИ И ТЕПЛОЗАЩИТНОГО ПОКРЫТИЯ ПРИ ПОПЕРЕЧНОЙ СХЕМЕ ОХЛАЖДЕНИЯ.....	34

РАЗДЕЛ III. ТЕОРИЯ И МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ И ВОСПИТАНИЯ

<i>Алгазин О.Д., Копяев А.В., Попов В.С., Латышев А.В.</i> ПРИКЛАДНЫЕ АСПЕКТЫ ПРЕПОДАВАНИЯ ТЕМЫ «ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ» ПРИ ИЗУЧЕНИИ ДИСЦИПЛИНЫ «УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ».....	44
---	----

НАУЧНАЯ ЖИЗНЬ МАТЕРИАЛЫ КОНФЕРЕНЦИИ

<i>Беляев В.В., Костицына Л.И.</i> МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ «ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МАТЕРИАЛОВ И ДИСПЕРСНЫХ СРЕД ДЛЯ ЭЛЕМЕНТОВ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ, НАНОЭЛЕКТРОННЫХ ПРИБОРОВ И ЭКОЛОГИЧНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ»	58
<i>Черняев А.П.</i> О НАУЧНОМ НАСЛЕДИИ О.В. ГОЛУБЕВОЙ ПО НАПРАВЛЕНИЮ «ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ В ПЛЕНКАХ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ НА КРИВОЛИНЕЙНЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ» И СОВРЕМЕННОМ СОСТОЯНИИ НАУКИ.....	62

Каманина Н.В., Кухарчик А.А., Кужаков П.В., Зубцова Ю.А., Лихоманова С.В., Шурпо Н.А., Серов С.В., Студенов В.И., Васильев П.Я. ВЛИЯНИЕ ПРОЦЕССА СТРУКТУРИРОВАНИЯ ОБЪЁМА И ПОВЕРХНОСТИ МАТЕРИАЛОВ, ВКЛЮЧАЯ ЖИДКИЕ КРИСТАЛЛЫ, НА СПЕКТРАЛЬНЫЕ, СТРУКТУРНЫЕ И ФОТОРЕФРАКТИВНЫЕ СВОЙСТВА.....	75
Чилая Г. С., Вардосанидзе З.В., Петриашвили Г.Ш., Тавзарашивили С.П., Чанишвили А.Г., Аронишидзе М.Н., Тевдорашивили К.Г. ПРОСТРАНСТВЕННО-МОДУЛИРОВАННАЯ ЛАЗЕРНАЯ ЭМИССИЯ.....	90
Гермидер О.В., Попов В.Н., Юшканов А.А. ВЫЧИСЛЕНИЕ В РАМКАХ КИНЕТИЧЕСКОГО ПОДХОДА ПОТОКА ТЕПЛА В ДЛИННОМ КАНАЛЕ ПОСТОЯННОГО ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ	96
Голов А.Н., Филиппова А.П. ПОЛУЧЕНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ ФОРМУЛЫ ПЛОТНОСТИ ПОТОКА ВЕЩЕСТВА В НЕСТАЦИОНАРНОМ ПОЛУОГРАНИЧЕННОМ ГАЗОПОДОБНОМ ОБЛАКЕ	107
Максимова О.В., Максимов С.М. МОДЕЛИРОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ПОДГОТОВКИ ИЗМЕРЕНИЙ СВЕТОТЕХНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ТОНКОПЛЁНОЧНЫХ ЭЛЕКТРОЛЮМИНЕСЦЕНТНЫХ ИНДИКАТОРНЫХ УСТРОЙСТВ	120
Студенцов С.А., Брежнев В.А., Ежов В.А. АРТЕФАКТЫ В БЫСТРОДЕЙСТВУЮЩИХ ЖК–ЗАТВОРАХ НА STN-ЭФФЕКТЕ ДЛЯ АКТИВНЫХ 3D-ОЧКОВ И ИХ УСТРАНЕНИЕ КОРРЕКЦИЕЙ РЕЖИМА УПРАВЛЕНИЯ	132
Наши авторы.....	138

CONTENTS

SECTION I. MATHEMATICS

<i>Ptitsyna I.V.</i> STEINER NETWORKS WITH A MOVING BOUNDARY: THE CASE OF A STRAIGHT LINE AND A PAIR OF POINTS.....	8
---	---

SECTION II. PHISICS

<i>Kuznetsov V.M., K.B. Tereshkina</i> INFLUENCE OF VARIOUS MOLECULAR CONFORMATIONS ON PHYSICOCHEMICAL PROPERTIES OF CLUSTER ISOMERS	29
<i>I. Andrianov, M. Grinkrug.</i> NUMERICAL METHOD OF HEAT EMISSION CALCULATION FOR THE REQUIRED TEMPERATURE FIELD ON THE CONTACT SURFACE OF A BLADE AND THERMAL BARRIER COATING IN A CROSS-COOLING SCHEME	34

SECTION III. THEORY AND METHODS OF TEACHING AND EDUCATION

<i>O. Algazin, A. Kopaev, V. Popov, A. Latyshev</i> APPLIED ASPECTS OF TEACHING THE TOPIC "FOURIER TRANSFORM" IN THE SUBJECT "EQUATIONS OF MATHEMATICAL PHYSICS"	44
--	----

SCIENTIFIC LIFE CONFERENCE MATERIALS

<i>V.V. Belyaev, L.I. Kostitsyna.</i> INTERNATIONAL CONFERENCE "PHYSICAL PROPERTIES OF MATERIALS AND DISPERSE MEDIA FOR ELEMENTS OF INFORMATION SYSTEMS, NANOELECTRONIC DEVICES AND 'GREEN' TECHNOLOGIES"	58
<i>A.P. Chernyaev.</i> ON THE SCIENTIFIC HERITAGE OF PROFESSOR OLGA V. GOLUBEVA IN THE DIRECTION OF "FLUID MOVEMENT IN FILMS OF VARIABLE THICKNESS ON CURVED SURFACES" AND THE STATE-OF-THE-ART OF THIS SCIENCE	62
<i>N.V. Kamanina , A.A. Kukharchik, P.V. Kuzhakov Yu.A.. Zubtcova, S.V. Likhomanova, N.A. Shurpo S.V. Serov, V.I. Studeonov, P.Ya. Vasilyev</i> INFLUENCE OF THE STRUCTURING PROCESS OF THE BULK AND SURFACE OF MATERIALS, INCLUDING LIQUID CRYSTALS, ON THEIR SPECTRAL, STRUCTURAL AND PHOTOREFRACTIVE PROPERTIES	75

<i>G. Chilaya, Z. Wardosanidze, G. Petriashvili, S. Tavzarashvili, A. Chanishvili, M. Aronishidze, K. Tevdorashvili</i> SPATIALLY MODULATED LASER EMISSION.....	90
<i>O.V. Germider, V.N. Popov, A.A. Yushmanov</i> COMPUTATION OF HEAT FLOW IN A LONG, RECTANGULAR CHANNEL OF CONSTANT CROSS SECTION IN THE FRAMEWORK OF THE KINETIC APPROACH	96
<i>A.N. Golov, A.P. Filippova</i> DERIVATION AND INVESTIGATION OF THE FORMULA OF THE MATTER FLOW DENSITY IN A NONSTATIONARY SEMI-RESTRICTED GAS-LIKE CLOUD	107
<i>O. Maksimova, S. Maksimov</i> MODELING OF PROCESSES FOR THE PREPARATION OF MEASUREMENTS LIGHTING CHARACTERISTICS TFEL DEVICES.....	120
<i>S.A.Studentsov V.A. Brezhnev V.A.Ezhov</i> ARTIFACTS IN FAST-SWITCHING, SUPERTWISTED NEUMATIC LIQUID-CRYSTAL SHUTTERS FOR ACTIVE 3D-GLASSES AND THEIR ELIMINATION BY DRIVING MODE.....	132
<i>Our authors</i>	138

РАЗДЕЛ I. МАТЕМАТИКА

УДК 514.774.8+519.176

Птицына И.В.

Московский государственный областной университет

СЕТИ ШТЕЙНЕРА С ПОДВИЖНОЙ ГРАНИЦЕЙ: СЛУЧАЙ ПРЯМОЙ И ПАРЫ ТОЧЕК

Аннотация. Статья посвящена задаче построения минимальных сетей, связывающих дискретное множество точек и гладкую кривую или поверхность в евклидовом пространстве и является одним из обобщений проблемы Штейнера. В случае двух точек и прямой на евклидовой плоскости описаны множества расположений точек для всех типов абсолютно минимальных графов, а также минимальных остовных графов и графов Штейнера; вычислены длины всех видов минимальных графов и отношения длин графов Штейнера и длин минимальных остовных графов:

множество таких отношений совпадает с множеством точек полуинтервала $\left[\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}; 2 \right)$.

В частности, показано, что отношение Штейнера для прямой и пары точек

равно $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Ключевые слова: проблема Штейнера, остовный граф, граф Штейнера, точка Штейнера, отношение Штейнера.

Ptitsyna I.V.

Moscow State Regional University (Moscow, Russia)

STEINER NETWORKS WITH A MOVING BOUNDARY: THE CASE OF A STRAIGHT LINE AND A PAIR OF POINTS

Abstract. The paper is devoted to the problem of constructing minimal networks spanning a discrete set of points and a smooth curve, or a surface in Euclidean space. The problem represents one of the generalizations of the Steiner problem. In the case of two points and a line in the Euclidean plane, we describe sets of points for all types of absolutely

minimal graphs, as well as minimal spanning graphs and Steiner graphs; the lengths of all kinds of minimal graphs and ratio of the lengths of Steiner graphs to the lengths of the minimal spanning graphs are calculated: a set of such ratios coincides with the set

of points in the interval $\left[\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}; 2 \right)$. In particular, it is shown that the Steiner ratio

for a straight line and a pair of points is equal to $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Keywords: Steiner problem, spanning graph, Steiner graph, Steiner point, Steiner ratio.

Введение

Проблема Штейнера имеет множество различных постановок. Одной из них является поиск на евклидовой плоскости графа с суммарной наименьшей длиной ребер, соединяющего конечный набор точек. Обобщением данной проблемы является поиск графов (сетей), соединяющих не только конечные, но и счетные множества точек в евклидовых, а также в произвольных метрических пространствах, причем как глобально минимальных, так и локально минимальных сетей различной топологии. Одним из наиболее полных обзоров по проблеме Штейнера является монография А.О. Иванова и А.А. Тужилина [1].

Другим направлением обобщения проблемы Штейнера является поиск сетей, соединяющих произвольные, не обязательно дискретные, подмножества евклидова пространства. В [2] данная задача решается для прямой и пары точек в трехмерном евклидовом пространстве, причем рассматривается принципиально не плоский случай. Для прямой и пары точек на евклидовой плоскости в [2] дается ссылка на работу G.X. Chen, The shortest path between two points with a (linear) constraint (in Chinese), Knowledge and Appl. Math., Vol. 4 (1980), pp. 1–8. Данная работа, однако, недоступна. Кроме того, в [2] не рассматривается вопрос об отношении Штейнера.

Цель нашей статьи – дать полное описание минимальных сетей на плоскости, соединяющих прямую и пару точек, вычислить их длины и отношение Штейнера, а в случае минимальных остовных графов, соединяющих кривую (поверхность) и конечный набор точек, предложить алгоритм их построения.

1. Постановка задачи

Пусть γ – гладкая кривая на плоскости, M – конечное множество точек этой плоскости, не принадлежащих кривой γ . Наша задача – построить граф G с суммарной наименьшей длиной ребер, соединяющий M и γ . Поскольку положение вершин искомого графа, принадлежащих кривой γ , заранее не определено, то такие графы будем называть графами с подвижными вершинами. Подвижными вершинами будем называть построенные вершины, принадлежащие кривой γ . Неподвижными вершинами будем называть вершины множества M .

Мы будем рассматривать следующие типы искомым графов.

Если граф G не имеет других вершин вне кривой γ , кроме вершин множества M , то такой граф будем называть остовным графом между M и γ и обозначать $G_{sp;M,\gamma}$.

Если остовный граф имеет минимальную длину среди всех остовных графов между M и γ , то такой граф не имеет циклов (в противном случае его длину можно уменьшить), и мы будем называть его минимальным остовным графом между M и γ . В соответствии с традиционными обозначениями теории сетей Штейнера будем обозначать такой граф $MST_{M,\gamma}$.

Если множество вершин графа G , не принадлежащих кривой γ , содержит заданное множество M и имеет наименьшую возможную длину среди всех графов, множество вершин которых содержит M , то такой граф будем называть абсолютно минимальным графом между M и γ , или минимальным графом Штейнера, и обозначать $SMT_{M,\gamma}$.

Вершины минимального графа Штейнера $SMT_{M,\gamma}$, не принадлежащие множеству M и кривой γ , будем называть точками Штейнера. Это третий вид вершин искомого графа. Известно, что если точка Штейнера имеет степень 3, то ребра графа образуют в этой точке углы 120° ; если же точка Штейнера имеет степень 2, то ребра графа образуют в этой точке угол, не меньший чем 120° . Среди вершин минимального графа Штейнера, отличных от точек множества M , не может быть точек Штейнера степени 2, так как при

выбрасывании таких вершин с входящими в них ребрами суммарная длина графа уменьшается.

Если для любой точки T графа G и для любой ее окрестности $O(T)$, не содержащей вершин графа, кроме случая, когда сама точка T является вершиной, граф $G \cap \overline{O(T)}$ является абсолютно минимальным деревом с множеством неподвижных вершин $\Gamma = G \cap \partial O(T)$, то граф G будем называть графом Штейнера (или локально минимальным графом) между M и γ и обозначать $G_{St;M,\gamma}$. В данной работе мы рассматриваем естественную топологию на плоскости. $\overline{O(T)}$ обозначает замыкание окрестности $O(T)$.

Для всех типов графов их ребра являются отрезками прямых.

Единственным ограничением на множество $M = \{M_1, \dots, M_n\}$ и кривую γ является условие, что для каждой вершины M_i из множества отрезков $M_i H_{i_\alpha}$, $H_{i_\alpha} \in \gamma$, которыми можно соединить точку M_i с кривой γ можно выбрать отрезок наименьшей длины, который мы обозначаем $M_i H_i$. Если таких отрезков несколько, то возьмем любой из них. Также считаем кривую γ связной.

Нашей задачей также является сравнение длин графов $SMT_{M,\gamma}$ и $MST_{M,\gamma}$, $G_{St;M,\gamma}$ и $MST_{M,\gamma}$, а именно вычисление отношения Штейнера

$$\frac{\rho(SMT_{M,\gamma})}{\rho(MST_{M,\gamma})} \text{ и отношения } \frac{\rho(G_{St;M,\gamma})}{\rho(MST_{M,\gamma})}.$$

2. Алгоритм построения минимального остовного графа $MST_{M,\gamma}$

Рассмотрим полный граф G_f с вершинами $M = \{M_1, \dots, M_n\}$. Если некоторые ребра графа G_f пересекаются с кривой γ , то разобьем множество вершин M на такое наименьшее число m , $m \leq n$, подмножеств, что ребра соответствующих им полных графов G_{f_m} не пересекаются с кривой γ . Рассмотрим тогда объединение полных графов $\bigcup_m G_{f_m}$.

Для каждой вершины M_i выберем отрезок $M_i H_i$, $H_i \in \gamma$, наименьшей длины среди всех отрезков $M_i H_{i_a}$, которыми можно соединить точку M_i с кривой γ . Точки H_i соединим дугами $H_i H_j$ кривой γ .

Рассмотрим граф $(\cup_m G_{f_m}) \cup (\cup_i M_i H_i) \cup (\cup_{i,j} H_i H_j)$, который является объединением множества полных графов G_{f_m} , множества всех отрезков $M_i H_i$ и множества всех дуг $H_i H_j$.

В качестве весов построенного графа припишем всем ребрам их длины, кроме ребер $H_i H_j$, которым припишем вес 0.

Применим любой из алгоритмов построения минимального остовного дерева к полученному графу, например, алгоритм Краскала или алгоритм Прима. После выбрасывания, если необходимо, некоторого количества ребер в соответствии с выбранными алгоритмами получим минимальное остовное дерево G_T .

Удалим из G_T все ребра $H_i H_j$. Получим искомый минимальный остовный граф $MST_{M,\gamma}$.

Заметим, что, несмотря на то что G_T – связный граф, граф $MST_{M,\gamma} = G_T \setminus (\cup_{i,j} H_i H_j)$ может состоять из нескольких связных компонент G_k , $k \leq n$, каждая из которых является минимальным остовным деревом для некоторого подмножества множества вершин M и некоторой точки $H_k \in \gamma$ (корня k -го дерева G_k). Заметим также, что графов $MST_{M,\gamma}$ может оказаться несколько.

Данный алгоритм применим и в случае, когда вершины M_i заданы в пространстве. Вместо кривой γ можно рассматривать произвольную гладкую поверхность. Также объемлющее пространство (в нашем случае просто плоскость) может не быть односвязным. В этом случае ребра $M_i M_j$ и $M_i H_i$ могут не быть отрезками.

Если γ – прямая на плоскости, то $M_i H_i$ – перпендикуляры, опущенные из вершин M_i на прямую γ .

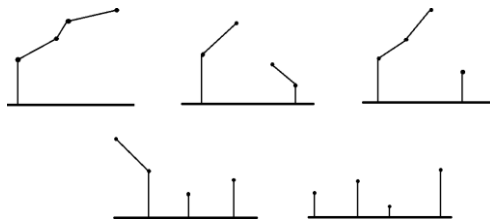


Рис. 1. Примеры минимальных остовных графов для четырех точек ($n = 4$), лежащих по одну сторону от прямой.

3. О графах Штейнера $G_{St;M,\gamma}$ и остовных графах $G_{sp;M,\gamma}$

Для данного множества $M = \{M_1, \dots, M_n\}$ неподвижных граничных вершин и данной кривой γ могут быть построены как различные графы Штейнера $G_{St;M,\gamma}$ между M и γ , так и различные остовные (в том числе минимальные остовные $MST_{M,\gamma}$) графы $G_{sp;M,\gamma}$ между M и γ . Абсолютно минимальных графов $SMT_{M,\gamma}$ между M и γ тоже может быть несколько. Некоторые из графов могут оказаться связными, а некоторые – несвязными.

Граф Штейнера $G_{St;M,\gamma}$, как и остовный граф $G_{sp;M,\gamma}$, может содержать циклы. Связные компоненты и графа Штейнера, и остовного графа могут иметь более одной подвижной вершины. Абсолютно минимальный граф $SMT_{M,\gamma}$, как и минимальный остовный граф $MST_{M,\gamma}$, циклов не содержит, связные компоненты этих графов содержат ровно по одной подвижной вершине.

Абсолютно минимальный граф $SMT_{M,\gamma}$ может являться графом Штейнера без циклов (деревом Штейнера) или минимальным остовным деревом, или объединением деревьев Штейнера и минимальных остовных деревьев для некоторых подмножеств множества неподвижных вершин M и кривой γ .

Пусть p – число связных компонент абсолютно минимального графа $SMT_{M,\gamma}$ между $M = \{M_1, \dots, M_n\}$ и $\gamma: SMT_{M,\gamma} = \bigcup_p G_p$, $p \leq n$.

Пусть k – число связных компонент минимального остовного графа $MST_{M,\gamma}$ между $M = \{M_1, \dots, M_n\}$ и $\gamma: MST_{M,\gamma} = \bigcup_k G_k$, $k \leq n$.

Множество из p подвижных вершин какого-либо абсолютно минимального графа между M и γ в общем случае не совпадает со множеством из k подвижных вершин какого-либо минимального остовного графа между M и γ .

Возможны различные случаи: $p > k$, $p < k$ и $p = k$ (рисунок 2).

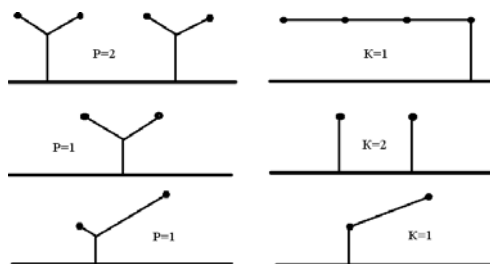


Рис. 2. Примеры различного количества связных компонент $SMT_{M,\gamma}$ и $MST_{M,\gamma}$.

Направления ребер, выходящих из подвижных вершин минимального графа Штейнера и минимального остовного графа, не произвольны. В частности, если γ – прямая на плоскости, то такие ребра ей перпендикулярны.

Все ребра, выходящие из подвижных вершин минимального остовного графа, соединяют подвижные вершины с неподвижными. Ребра, выходящие из подвижных вершин графа Штейнера, могут соединять подвижные вершины с точками Штейнера степени 3. Положение таких точек Штейнера также предстоит найти.

4. Решение задачи для прямой и двух неподвижных вершин

Рассмотрим задачу построения минимального остовного графа $MST_{M,\gamma}$ и абсолютно минимального графа $SMT_{M,\gamma}$ для прямой γ

и множества M , состоящего всего из двух точек M_1, M_2 , расположенных по одну сторону от прямой γ .

4.1 Минимальные остовные графы $MST_{M,\gamma}$

Пусть неподвижная вершина M_1 фиксирована. Для каждого расположения второй неподвижной вершины M_2 на плоскости найдем вид и длину минимального остовного графа $MST_{M,\gamma}$.

Пусть H_1, H_2 – основания перпендикуляров, опущенных из точек M_1, M_2 на прямую γ . Будем считать, что $H_1 \neq H_2$, так как в противном случае минимальный остовный граф является отрезком, перпендикулярным прямой γ . Возможны три вида остовных графов между M и γ : $G_1 = M_1H_1 \cup M_1M_2$, $G_2 = M_2H_2 \cup M_1M_2$, $G_3 = M_1H_1 \cup M_2H_2$ (рисунок 3). Графы G_1, G_2 являются деревьями, а граф G_3 – объединением двух деревьев.



Рис. 3. Три вида остовных графов между $M = \{M_1, M_2\}$ и прямой.

Обозначим их длины через $\rho(G_1), \rho(G_2), \rho(G_3)$ соответственно и выясним, при каком расположении точек M_1, M_2 относительно друг друга следует выбрать G_1, G_2 или G_3 в качестве минимального остовного графа.

Отметим, что для вершин M_1, M_2 , не лежащих на одном перпендикуляре к прямой γ , мы не рассматриваем остовный граф, состоящий из пары отрезков M_1H и M_2H , где $H \in \gamma$: длина такого графа больше суммарной длины двух перпендикуляров M_1H_1 и M_2H_2 к γ .

Введем прямоугольную систему координат Oxy так, чтобы прямая γ совпала с осью Ox , а точка M_1 принадлежала оси Oy . Тогда $H_1 = O$. Можно

считать, что точка M_1 имеет координаты $(0;1)$, а точка M_2 – координаты $(x_2; y_2)$, причем $x_2 > 0$, $y_2 > 0$.

Утверждение 4.1. Пусть P_i , $i=1...7$, подмножества первой четверти I , определенные условиями:

$$\begin{aligned} P_1 &= \left\{ (x; y) \left| x > 0, y > 1, y > \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \right. \right\}, \\ P_2 &= \left\{ (x; y) \left| 0 < x < 1, 0 < y < 1, y > 1 - \sqrt{1 - x^2} \right. \right\}, \\ P_4 &= \left\{ (x; y) \left| x > 1, y > 1, y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \right. \right\}, \\ P_5 &= \left\{ (x; y) \left| 0 < x < 1, 0 < y < 1, y = 1 - \sqrt{1 - x^2} \right. \right\}, \\ P_6 &= \{(x; y) | 0 < x < 1, y = 1\}, \\ P_7 &= \{(1; 1)\}, \quad P_3 = I \setminus \left(\bigcup_{i=1...7, i \neq 3} P_i \right). \end{aligned}$$

Пусть точка M_1 имеет координаты $(0; 1)$; точка $M_2(x_2; y_2)$, $x_2 \neq 0$, принадлежит первой четверти I , H_1, H_2 – основания перпендикуляров, опущенных из точек M_1, M_2 на ось абсцисс. Пусть $G_1 = M_1H_1 \cup M_1M_2$, $G_2 = M_2H_2 \cup M_1M_2$, $G_3 = M_1H_1 \cup M_2H_2$ – три типа остовных графов, соединяющих точки M_1, M_2 и ось абсцисс, а $\rho(G_1)$, $\rho(G_2)$, $\rho(G_3)$ – их длины соответственно.

Тогда:

$$\begin{aligned} 1) \quad \rho(G_1) &= |M_1H_1| + |M_1M_2| = 1 + \sqrt{x_2^2 + (y_2 - 1)^2}, \\ \rho(G_2) &= |M_1M_2| + |M_2H_2| = \sqrt{x_2^2 + (y_2 - 1)^2} + y_2, \\ \rho(G_3) &= |M_1H_1| + |M_2H_2| = 1 + y_2; \end{aligned}$$

2) при $M_2 \in P_1$ минимальным остовным графом является граф G_1 ; при $M_2 \in P_2$ минимальным остовным графом является граф G_2 ; при $M_2 \in P_4$ минимальными остовными графами являются графы G_1, G_3 , их длины равны; при $M_2 \in P_5$ минимальными остовными графами являются графы G_2, G_3 , их

длины равны; при $M_2 \in P_6$ минимальными остовными графами являются графы G_1, G_2 , их длины равны; при $M_2 \in P_7$ минимальными остовными графами являются графы G_1, G_2, G_3 , их длины равны; при $M_2 \in P_3$ минимальным остовным графом является граф G_3 .

Доказательство.

Первое утверждение очевидно. Докажем второе утверждение.

Рассмотрим случай $|M_1H_1| < |M_2H_2|$. В этом случае требуется сравнить длины $\rho(G_1), \rho(G_3)$ графов G_1, G_3 соответственно, что равносильно сравнению длин отрезков $|M_1M_2|$ и $|M_2H_2|$.

Расстояние от точки M_2 до точки M_1 равно расстоянию от точки M_2 до прямой Ox тогда и только тогда, когда точка M_2 является точкой параболы с фокусом M_1 , директрисой Ox и осью Oy . Получим уравнение этой параболы: $\sqrt{x_2^2 + (y_2 - 1)^2} = y_2$ тогда и только тогда, когда $y_2 = \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}$, или точка M_2 лежит на параболе с уравнением $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$.

Обозначим параболу через p . Мы получили, что $\rho(G_1) = \rho(G_3)$ тогда и только тогда, когда $M_2 \in p$; $\rho(G_1) < \rho(G_3)$ тогда и только тогда, когда M_2 лежит над параболой p ; $\rho(G_3) < \rho(G_1)$ тогда и только тогда, когда M_2 лежит под параболой p .

Рассмотрим случай $|M_1H_1| > |M_2H_2|$. В этом случае требуется сравнить длины $\rho(G_2), \rho(G_3)$ графов G_2, G_3 соответственно, что равносильно сравнению длин отрезков $|M_1M_2|$ и $|M_1H_1|$.

Расстояние от точки M_2 до точки M_1 равно расстоянию от точки M_1 до прямой Ox тогда и только тогда, когда точка M_2 является точкой окружности с центром M_1 и радиусом $R = |M_1H_1| = 1$. Уравнение этой окружности: $x^2 + (y - 1)^2 = 1$.

Обозначим окружность через r . Мы получили, что $\rho(G_2) = \rho(G_3)$ тогда и только тогда, когда $M_2 \in r$; $\rho(G_2) < \rho(G_3)$ тогда и только тогда, когда M_2 лежит внутри окружности r ; $\rho(G_2) > \rho(G_3)$ тогда и только тогда, когда M_2 лежит вне окружности r .

В случае $|M_1 H_1| = |M_2 H_2|$ длины графов G_1 , G_2 равны $\rho(G_1) = \rho(G_2)$.

При $|M_1 M_2| < 1$ минимальными остовными графами являются G_1 , G_2 . При $|M_1 M_2| > 1$ минимальным остовным графом является граф G_3 . При $|M_1 M_2| = 1$ все три графа G_1 , G_2 , G_3 являются минимальными, так как их длины равны $\rho(G_1) = \rho(G_2) = \rho(G_3) = 2$.

Мы получили разбиение первой четверти I на подмножества. Зная, какому подмножеству принадлежит точка M_2 , можно указать минимальный остовный граф и найти его длину (рисунок 4). Утверждение 4.1 доказано.

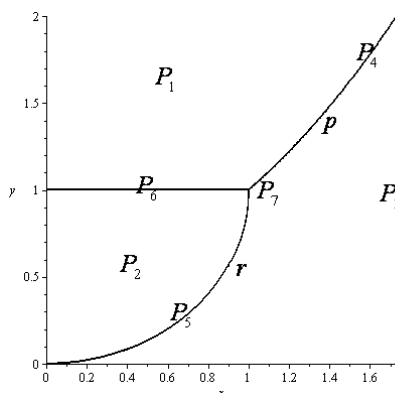


Рис. 4. Подмножества первой четверти, соответствующие различным типам $MST_{M,\gamma}$.

$$\text{Следствие 4.1. } \rho(MST_{M,\gamma}) = \begin{cases} \rho(G_1), & \text{если } M_2 \in P_1, \\ \rho(G_2), & \text{если } M_2 \in P_2, \\ \rho(G_3), & \text{если } M_2 \in P_3, \\ \rho(G_1) = \rho(G_3), & \text{если } M_2 \in P_4, \\ \rho(G_2) = \rho(G_3), & \text{если } M_2 \in P_5, \\ \rho(G_1) = \rho(G_2), & \text{если } M_2 \in P_6, \\ \rho(G_1) = \rho(G_2) = \rho(G_3), & \text{если } M_2 \in P_7. \end{cases}$$

4.2 Графы Штейнера $G_{St;M,\gamma}$

Пусть для данных вершин M_1, M_2 можно построить граф Штейнера $G_{St;M,\gamma}$, S – его точка Штейнера, и H – основание перпендикуляра, опущенного из точки S на прямую γ . Выясним, для какого расположения точки M_2 в первой четверти можно построить такой граф Штейнера.

Утверждение 4.2.

$$\text{Пусть } Q = \left\{ (x; y) \left| x > 0, y < \frac{\sqrt{3}}{3}x + 1, y > -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 1, y > \frac{\sqrt{3}}{3}x - 1 \right. \right\}.$$

Пусть точка M_1 имеет координаты $(0; 1)$; точка $M_2(x_2; y_2)$ принадлежит первой четверти I .

Тогда при $M_2 \in Q$ и только для таких точек M_2 существует граф Штейнера $G_{St;M,\gamma}$, соединяющий точки M_1, M_2 и ось абсцисс, длина $G_{St;M,\gamma}$ равна $\rho(G_{St;M,\gamma}) = \frac{1}{2}(y_2 + \sqrt{3}x_2 + 1)$.

Доказательство.

Так как точка Штейнера S отлична от точек M_1, M_2 , то направления ребер M_1S, M_2S, SH однозначно определены. В частности, прямая SH перпендикулярна оси Ox , прямая M_2S образует с осью Ox угол 30° , а прямая M_1S образует с осью Ox угол 150° .

Рассмотрим прямые l_1 и l_2 , проходящие через точку M_1 под углами 30° и 150° к оси Ox : $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 1$ и $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 1$. Прямой l_2 принадлежит ребро M_1S . Прямая l_2 пересекает ось Ox в точке $F(\sqrt{3}; 0)$. Рассмотрим также прямую l_3 , параллельную прямой l_1 и проходящую через точку F : $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 1$. Прямые l_1 , l_2 и l_3 ограничивают на плоскости в первой четверти I открытую полуполосу $Q = \left\{ (x; y) \mid x > 0, y < \frac{\sqrt{3}}{3}x + 1, y > -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 1, y > \frac{\sqrt{3}}{3}x - 1 \right\}$. Тогда при $M_2 \in Q$ граф Штейнера $G_{St;M,\gamma}$ можно построить (рисунок 5).

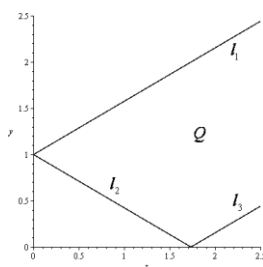


Рис. 5. Подмножество точек M_2 в первой четверти, для которых существуют $G_{St;M,\gamma}$

Найдем длину $\rho(G_{St;M,\gamma})$ графа Штейнера $G_{St;M,\gamma}$:
 $\rho(G_{St;M,\gamma}) = |M_1S| + |SM_2| + |SH|$.

Точка Штейнера S лежит на прямой l_2 и является пересечением l_2 с прямой SM_2 . Прямая SM_2 параллельна прямой l_1 , следовательно, имеет уравнение $y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - x_2) + y_2$. Координаты точки S найдем из системы уравнений:

$$\begin{cases} y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 1, \\ y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - x_2) + y_2. \end{cases}$$

$$\text{Получим } S\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}(y_2 - \frac{\sqrt{3}}{3}x_2 - 1); \frac{1}{2}(y_2 - \frac{\sqrt{3}}{3}x_2 + 1)\right).$$

Следовательно,

$$|M_1 S| = \left| y_2 - \frac{\sqrt{3}}{3}x_2 - 1 \right| = -\left(y_2 - \frac{\sqrt{3}}{3}x_2 - 1 \right),$$

$$|SM_2| = \left| y_2 + \frac{\sqrt{3}}{3}x_2 - 1 \right| = y_2 + \frac{\sqrt{3}}{3}x_2 - 1,$$

$$|SH| = \frac{1}{2}(y_2 - \frac{\sqrt{3}}{3}x_2 + 1).$$

При раскрытии модулей мы использовали положение точки S относительно прямых l_1 и l_2 . Окончательно получим

$$\rho(G_{St;M,\gamma}) = \frac{1}{2}(y_2 + \sqrt{3}x_2 + 1).$$

Утверждение 4.2 доказано.

4.3 Абсолютно минимальные графы $SMT_{M,\gamma}$

Из п. 4.1 и 4.2 следует, что для всех точек M_2 , принадлежащих полуполосе Q , существуют и минимальный остовный граф $MST_{M,\gamma}$ (графы G_i), $i=1,2,3$, и граф Штейнера $G_{St;M,\gamma}$. Наша задача: для каждой точки $M_2 \in Q$ из найденных графов выбрать абсолютно минимальный граф $SMT_{M,\gamma}$.

Теорема 4.3. Пусть R_i , $i=1...9$, – подмножества первой четверти I , определенные условиями:

$$R_1 = \left\{ (x; y) \left| x > 0, y \geq \frac{\sqrt{3}}{3}x + 1, y > \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \right. \right\} = P_1 \setminus Q,$$

$$R_2 = \left\{ (x; y) \left| x > 0, 0 < y \leq -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 1, y > 1 - \sqrt{1 - x^2} \right. \right\} = P_2 \setminus Q,$$

$$\begin{aligned}
R_3 &= \left\{ (x; y) \left| 0 < x < \frac{\sqrt{3}}{2}, y < 1 - \sqrt{1 - x^2}; \frac{\sqrt{3}}{2} < x < \sqrt{3}, y < \sqrt{3}x - 1; \right. \right. \\
&\quad \left. \left. x > \sqrt{3}, y < \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \right\} = P_3 \setminus \left\{ (x; y) \left| \frac{\sqrt{3}}{2} \leq x \leq \sqrt{3}, y \geq \sqrt{3}x - 1 \right. \right\}, \\
R_4 &= \left\{ (x; y) \left| x \geq \sqrt{3}, y \geq 2, y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \right. \right\}, \\
R_5 &= \left\{ (x; y) \left| 0 < x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}, 0 < y \leq \frac{1}{2}, y = 1 + \sqrt{1 - x^2} \right. \right\}, \\
R_6 &= R = \left\{ (x; y) \left| x > 0, y < \frac{\sqrt{3}}{3}x + 1, y > -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 1, y > \sqrt{3}x - 1 \right. \right\}, \\
R_7 &= \left\{ (x; y) \left| \frac{\sqrt{3}}{2} < x < \sqrt{3}, y = \sqrt{3}x - 1 \right. \right\}.
\end{aligned}$$

Пусть точка $M_1(0;1)$, а точка $M_2(x_2; y_2)$ принадлежит первой четверти I . Пусть G_1 , G_2 , G_3 и $G_{St;M,\gamma}$ – три типа остовных графов и граф Штейнера, соединяющие точки M_1 , M_2 и ось абсцисс соответственно.

Тогда при $M_2 \in R_1$ абсолютно минимальным графом $SMT_{M,\gamma}$ является граф G_1 ; при $M_2 \in R_2$ – граф G_2 ; при $M_2 \in R_3$ – граф G_3 ; при $M_2 \in R_4$ – графы G_1 , G_3 ; при $M_2 \in R_5$ – графы G_2 , G_3 ; при $M_2 \in R_6$ – граф $G_{St;M,\gamma}$; при $M_2 \in R_7$ – графы $G_{St;M,\gamma}$, G_3 .

Доказательство.

Рассмотрим последовательно несколько случаев: $M_2 \in Q \cap P_i$, $i = 1, \dots, 7$.

Пусть $M_2 \in Q \cap P_1$. Сравнивая длины $\rho(G_{St;M,\gamma}) = \frac{1}{2}(y_2 + \sqrt{3}x_2 + 1)$ и $\rho(G_1) = 1 + \sqrt{x_2^2 + (y_2 - 1)^2}$, получим $\rho(G_{St;M,\gamma}) < \rho(G_1)$.

Пусть $M_2 \in Q \cap P_2$. Сравнивая длины $\rho(G_{St;M,\gamma}) = \frac{1}{2}(y_2 + \sqrt{3}x_2 + 1)$ и $\rho(G_2) = \sqrt{x_2^2 + (y_2 - 1)^2} + y_2$, получим $\rho(G_{St;M,\gamma}) < \rho(G_2)$.

Пусть $M_2 \in Q \cap P_3$. Сравним длины $\rho(G_{St;M,\gamma}) = \frac{1}{2}(y_2 + \sqrt{3}x_2 + 1)$ и $\rho(G_3) = 1 + y_2$. Рассмотрим прямую l_4 с уравнением $y = \sqrt{3}x - 1$. Для $M_2(x; y)$: при $y > \sqrt{3}x - 1$ получим $\rho(G_{St;M,\gamma}) < \rho(G_3)$, при $y = \sqrt{3}x - 1$ получим $\rho(G_{St;M,\gamma}) = \rho(G_3)$, при $y < \sqrt{3}x - 1$ получим $\rho(G_{St;M,\gamma}) > \rho(G_3)$.

Пусть $M_2 \in Q \cap P_4$. Сравним длины $\rho(G_{St;M,\gamma})$ и $\rho(G_1) = \rho(G_3)$, получим $\rho(G_{St;M,\gamma}) < \rho(G_1) = \rho(G_3)$.

Пусть $M_2 \in Q \cap P_5$. Сравним длины $\rho(G_{St;M,\gamma})$ и $\rho(G_2) = \rho(G_3)$, получим $\rho(G_{St;M,\gamma}) < \rho(G_2) = \rho(G_3)$.

Пусть $M_2 \in Q \cap P_6 = P_6$. Сравним длины $\rho(G_{St;M,\gamma})$ и $\rho(G_1) = \rho(G_2)$, получим $\rho(G_{St;M,\gamma}) < \rho(G_1) = \rho(G_2)$.

Пусть $M_2 \in Q \cap P_7 = P_7$. Сравним длины $\rho(G_{St;M,\gamma})$ и $\rho(G_1) = \rho(G_2) = \rho(G_3)$, получим $\rho(G_{St;M,\gamma}) < \rho(G_1) = \rho(G_2) = \rho(G_3)$.

Рассмотрим треугольник ΔM_1CD , ограниченный прямыми l_1 , l_2 и l_4 , и его внутренность $R = \Delta M_1CD$.

Заметим, что $C(\sqrt{3}; 2)$ – точка пересечения прямой l_1 , прямой l_4 и параболы p , а G_{St} – точка пересечения прямой l_2 , прямой l_4 и окружности r .

Тогда для любой точки $M_2 \in R$ абсолютно минимальным графом $SMT_{M,\gamma}$ является граф Штейнера $G_{St;M,\gamma}$. Для точек $M_2 \in (CD)$ абсолютно минимальными графами являются два графа: граф Штейнера $G_{St;M,\gamma}$ и минимальный остовный граф G_3 ; их длины равны: $\rho(G_{St;M,\gamma}) = \rho(G_3)$. Для точки $M_2 = C$ абсолютно минимальными графами являются два минимальных остовных графа G_1 и G_3 : $\rho(G_1) = \rho(G_3)$. Для точки $M_2 = D$ абсолютно минимальными графами также являются два минимальных остовных графа G_2 и G_3 : $\rho(G_2) = \rho(G_3)$.

Следствие 4.3.2. Допустимыми множествами типов $G_1, G_2, G_3, G_{St;M,\gamma}$ являются множества $\Gamma_1 = R_1 \cup R_4, \Gamma_2 = R_2 \cup R_5, \Gamma_3 = R_3 \cup R_4 \cup R_5 \cup R_7, \Gamma_4 = R_6 \cup R_7$ соответственно.

Вычисление отношения $\frac{\rho(G_{St;M,\gamma})}{\rho(MST_{M,\gamma})}$

Теорема 4.4. Пусть $\rho(G_{St;M,\gamma})$ и $\rho(MST_{M,\gamma})$ – длины графов Штейнера и минимальных остовных графов соответственно для прямой и двух точек на плоскости. Тогда множество отношений $\frac{\rho(G_{St;M,\gamma})}{\rho(MST_{M,\gamma})}$ совпадает с множеством

всех точек полуинтервала $\left[\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}; 2 \right)$.

Доказательство.

1) Рассмотрим длины $\rho(G_{St;M,\gamma})$ и $\rho(MST_{M,\gamma})$ графов Штейнера и минимальных остовных графов соответственно, построенных для точек M_2 из подмножеств R_6, R_7 на плоскости.

Для точек M_2 из R_7 длины $\rho(G_{St;M,\gamma})$ и $\rho(MST_{M,\gamma})$ равны. Поэтому отношение $\frac{\rho(G_{St;M,\gamma})}{\rho(MST_{M,\gamma})} = 1$.

Для точек M_2 из R_6 только граф Штейнера $G_{St;M,\gamma}$ является абсолютно минимальным; $\rho(SMT_{M,\gamma}) = \rho(G_{St;M,\gamma})$. Поэтому отношение

$$\frac{\rho(G_{St;M,\gamma})}{\rho(MST_{M,\gamma})} < 1.$$

Выясним, какие значения может принимать это отношение.

Рассмотрим три криволинейных треугольника $\Delta M_1 C P_7, \Delta M_1 D P_7, \Delta C D P_7$, где точки M_1, C, D, P_7 имеют соответственно координаты $(0;1), (\sqrt{3};2), (\sqrt{3}/2; 1/2), (1;1)$. Внутри каждого треугольника исследуем

соответствующие

отношения

$$\frac{\rho(G_{St;M,\gamma})}{\rho(G_1)} = \frac{\frac{1}{2}(y_2 + \sqrt{3}x_2 + 1)}{1 + \sqrt{x_2^2 + (y_2 - 1)^2}},$$

$$\frac{\rho(G_{St;M,\gamma})}{\rho(G_2)} = \frac{\frac{1}{2}(y_2 + \sqrt{3}x_2 + 1)}{y_2 + \sqrt{x_2^2 + (y_2 - 1)^2}}, \quad \frac{\rho(G_{St;M,\gamma})}{\rho(G_3)} = \frac{\frac{1}{2}(y_2 + \sqrt{3}x_2 + 1)}{1 + y_2}.$$

Для этого для

каждого отношения мы найдем производную по направлению к точке P_7 и покажем, что она отрицательна. В частности, заметим, что на отрезке M_1P_7

равны отношения $\frac{\rho(G_{St;M,\gamma})}{\rho(G_1)} = \frac{\rho(G_{St;M,\gamma})}{\rho(G_2)}$, на дуге CP_7 параболы – отношения

$$\frac{\rho(G_{St;M,\gamma})}{\rho(G_1)} = \frac{\rho(G_{St;M,\gamma})}{\rho(G_3)}, \quad \text{на дуге } DP_7 \text{ окружности} - \text{отношения}$$

$$\frac{\rho(G_{St;M,\gamma})}{\rho(G_2)} = \frac{\rho(G_{St;M,\gamma})}{\rho(G_3)}.$$

Следовательно, от любой точки $M_2 \in R$ в направлении точки P_7 отношения убывают. В единственной точке $P_7(1;1)$ они принимают наименьшее значение, равное $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}$ (рисунок 7).

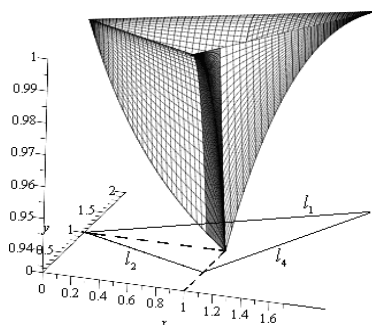


Рис. 7. График отношения $\frac{\rho(G_{St;M,\gamma})}{\rho(MST_{M,\gamma})}$ для точек $M_2(x; y)$ из допустимого множества Γ_4 .

2) Для всех точек полуполосы Q , расположенных вне треугольника ΔM_1CD , отношение $\frac{\rho(G_{St;M,\gamma})}{\rho(MST_{M,\gamma})} > 1$. Так как $MST_{M,\gamma} = G_3$, то найдем все

точки $M_2 \in Q \setminus \Delta M_1 CD$ такие, что $\frac{\rho(G_{St;M,\gamma})}{\rho(G_3)} = c$, где $c = const$.

Из $\frac{\rho(G_{St;M,\gamma})}{\rho(G_3)} = \frac{\frac{1}{2}(y_2 + \sqrt{3}x_2 + 1)}{1 + y_2} = c$ получим $y = \frac{\sqrt{3}}{2c-1}x - 1$. Следовательно, линиями уровня искомого отношения являются прямые. Обозначим прямую с таким уравнением через $l_5(c)$. Мы получили, что отношение $\frac{\rho(G_{St;M,\gamma})}{\rho(G_3)}$

постоянно для всех точек M_2 , лежащих на прямой $l_5(c)$.

Найдем угловой коэффициент прямой $l_5(c)$. Интересующие нас точки M_2 принадлежат углу, образованному прямой l_3 и прямой l_4 . Уравнение прямой l_3 : $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 1$, уравнение прямой l_4 : $y = \sqrt{3}x - 1$. Следовательно, $\frac{\sqrt{3}}{3} < \frac{\sqrt{3}}{2c-1} < \sqrt{3}$. В частности, $2c - 1 > 0$. Решая предпоследнее неравенство, получаем $1 < c < 2$.

Выясним, для каких точек достигается равенство

$$\frac{\rho(G_{St;M,\gamma})}{\rho(G_3)} = \frac{\frac{1}{2}(y_2 + \sqrt{3}x_2 + 1)}{1 + y_2} = 2. \text{ При } c = 2 \text{ уравнение прямой } l_5(c)$$

принимает вид $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 1$, то есть $l_5(c)$ совпадает с прямой l_3 . Итак,

отношение $\frac{\rho(G_{St;M,\gamma})}{\rho(G_3)}$ достигает наибольшего значения, равного 2, для точек

M_2 , лежащих на прямой l_3 . Для таких сетей отрезок SH вырождается в точку, так как $S \in l_3$, поэтому такие сети мы не рассматриваем в качестве сетей Штейнера. Однако для любого числа $c < 2$ для всех точек M_2 прямой $l_5(c)$

отношение $\frac{\rho(G_{St;M,\gamma})}{\rho(MST_{M,\gamma})}$ равно c .

Мы получили, что для прямой и двух точек на плоскости множество таких отношений $\frac{\rho(G_{St;M,\gamma})}{\rho(MST_{M,\gamma})}$ совпадает с множеством всех точек полуинтервала $\left[\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}; 2\right)$. Теорема 4.4 доказана.

Следствие 4.4. Отношение Штейнера для прямой и пары точек, расположенных на плоскости по одну сторону от прямой, равно $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Напомним, что отношение Штейнера для трех точек равно $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Так как $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} > \frac{\sqrt{3}}{2}$, то в случае прямой и пары точек на плоскости сети Штейнера дают меньший выигрыш в длине, чем сети Штейнера для трех точек.

Кроме того, отношение Штейнера для трех точек достигает минимума, если точки расположены в вершинах равностороннего треугольника. В этом случае можно построить наибольшее число минимальных остовных графов, соединяющих эти точки. В случае прямой и пары точек ситуация аналогичная: отношение Штейнера достигает минимума для пары точек, расположенных от прямой и друг от друга на одинаковом расстоянии. Если считать прямую «точкой», то вместе с данными точками она образует «равносторонний треугольник». Отметим также, что функция длины $\rho(MST_{M,\gamma})$ в точке, для которой отношение Штейнера достигает минимума, имеет максимум.

Автор выражает благодарность А.О. Иванову и А.А. Тужилину за внимание к работе и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Иванов А.О., Тужилин А.А. Теория экстремальных сетей. Москва; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. С. 424.
2. R. Booth, D.A. Thomas, and J.F. Weng, Shortest Networks for One line and Two Points in Space // Advances in Steiner Trees edited by Ding-Zhu, J.M. Smith and J.H. Rubinstein, Kluwer Academic Publishers, Boston, London, 2000. P. 15–27.

РАЗДЕЛ II. ФИЗИКА

УДК 539.2

Кузнецов В.М.,*, Терешкина К.Б.**

*Российский химико–технологический университет им. Д.И. Менделеева
(РХТУ им. Д.И. Менделеева)

**Институт химической физики им. Н.Н. Семенова РАН (ИХФ РАН)

ВЛИЯНИЕ РАЗЛИЧНЫХ МОЛЕКУЛЯРНЫХ КОНФОРМАЦИЙ НА ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КЛАСТЕРНЫХ ИЗОМЕРОВ

Аннотация. На основе фрактальной континуальной модели вещества и расчета колебательных спектров кластеров методами ab initio получены результаты по количественному влиянию на теплоемкость различных конформаций молекул в изомерах кластеров воды.

Ключевые слова: кластеры воды, межмолекулярные спектры, фрактальная размерность колебательных спектров, низкотемпературная теплоемкость.

Kuznetsov V.M. *, K.B. Tereshkina **

* D. Mendeleev University of Chemical Technology of Russia (Moscow, Russia)

** Semenov Institute of Chemical Physics of the Russian Academy
of Sciences (Moscow, Russia)

INFLUENCE OF VARIOUS MOLECULAR CONFORMATIONS ON PHYSICOCHEMICAL PROPERTIES OF CLUSTER ISOMERS

Abstract. Based on a fractal continuum model of matter and calculation of vibrational spectra of clusters by ab initio methods, we report the results of the quantitative impact of various molecular conformations on the heat capacity in isomers of water clusters.

Keywords: water clusters, intermolecular spectra, zero dimension, low–temperature heat capacity, fractal dimension of vibrational spectrum.

Известно, что на физико-химические свойства кластеров и нанобъектов влияют различные факторы: размерные эффекты, введение нескольких или даже одного инородного атома или молекулы, структура колебательного спектра, в частности, его размерность d_f [1; 2], значения максимальной и минимальной частот колебаний $\omega_{\max}$, $\omega_{\min}$ и так далее.

В данной работе для изомеров кластеров воды $(H_2O)_N$, в которых различное расположение молекул друг относительно друга изменяет структуру их колебательных спектров, получено количественное влияние этого фактора на теплоемкость кластеров при низких температурах. При этом использовались частотные спектры колебаний кластеров воды $(H_2O)_N$ ($N=2, 3, \dots, 22$) [3; 4], рассчитанные методами *ab initio*. Межмолекулярные колебательные спектры содержат $N^*=6N-6$ частот ω_i с неравными промежутками, и при небольших значениях N фактически являются дискретными. Температурное изменение теплоемкости кластеров при этом может быть рассчитано по сумме независимых эйнштейновских осцилляторов

$$\frac{C_E(T)}{C_\infty} = \frac{1}{N^*} \sum_{i=1}^{N^*} \frac{(\theta_i/T)^2 e^{\theta_i/T}}{(e^{\theta_i/T} - 1)^2}, \quad (1)$$

где $\theta_i = \hbar \omega_i / k_B$, $\hbar$, k_B – постоянные Планка и Больцмана, C_∞ – значение теплоемкости, соответствующее закону Дюлонга и Пти.

Однако, как показано в работах [1; 2], в случае молекулярных кластеров эти результаты совпадают с данными расчетов по континуальной модели вещества [5], в которой теплоемкость имеет вид:

$$\frac{C(T)}{C_\infty} = \frac{d_f}{\left(\frac{\theta_H}{T}\right)^{d_f} - \left(\frac{\theta_N}{T}\right)^{d_f}} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{x^{d_f+1} e^x dx}{(e^x - 1)^2}, \quad (2)$$

$$\text{где } x_{\min} = \theta_N/T, \quad x_{\max} = \theta_H/T, \quad x = \hbar \omega / k_B T, \quad \theta_H = \frac{\hbar \omega_{\max}}{k_B}, \quad \theta_N = \frac{\hbar \omega_{\min}}{k_B}.$$

Совпадение объясняется тем, что пространственные размерности колебательных спектров у молекулярных кластеров невелики ($d_f < 1$) и могут принимать нулевые $d_f = 0$ и даже отрицательные значения $d_f < 0$. В таких пространствах количество необходимых колебательных мод N^* для

обеспечения условия непрерывности спектра $N^* \gg (\theta_H / T)^{d_f}$ при низких температурах ($T \sim 1$ K) выполняется даже для димеров, у которых $N^*=4$, либо $N^*=6$ (соответственно для линейных и нелинейных молекул).

Размерность спектра d_f можно определить, зная его частотный состав ω_i ($i=1, 2 \dots N^*$) из *ab initio* расчетов, приравнивая среднюю частоту спектра $\bar{\omega}$ соответствующему значению $\langle \omega \rangle$ для континуальной модели вещества [1; 2].

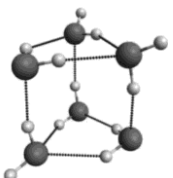
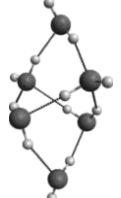
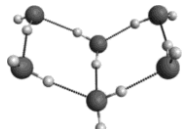
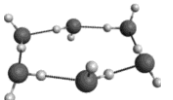
$$\bar{\omega} = \langle \omega \rangle = \frac{1}{N^*} \int_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} \omega g(\omega) d\omega = \omega_{\max} \frac{d_f}{d_f + 1} \frac{1 - \left(\frac{\theta_N}{\theta_H} \right)^{d_f + 1}}{1 - \left(\frac{\theta_N}{\theta_H} \right)^{d_f}},$$

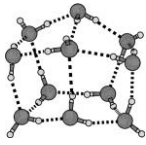
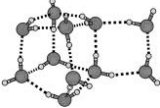
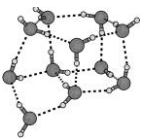
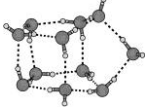
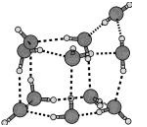
где $g(\omega) = N^* d_f \omega^{d_f - 1} / \left(\omega_{\max}^{d_f} - \omega_{\min}^{d_f} \right)$ – плотность состояний колебательного спектра.

Результаты расчетов параметров колебательного спектра d_f , θ_N , θ_H для четырех изомеров гексамера воды и пяти изомеров кластера $(H_2O)_{11}$ приведены в таблице 1.

Таблица 1.

**Структурные параметры колебательных спектров в изомерах
кластеров воды**

$(H_2O)_6$				
	Prism	Cage	Book	Ring
d_f	0.26	0.41	0.45	0.41
θ_H , K	1430.9	1394.9	1414.4	1348.1
θ_N , K	85.4	58.1	38.9	41.5
θ_H/θ_N	16.7	24.0	36.3	32.5

$(\text{H}_2\text{O})_{11}$					
	1	2	3	4	5
d_f	0.33	0.49	0.43	0.43	0.43
θ_H , K	1486.0	1445.7	1433.6	1459.4	1456.1
θ_N , K	74.7	32.9	57.2	53.5	48.0
θ_H/θ_N	19.9	43.9	25.1	27.3	30.3

Видно, что от изомера к изомеру величина θ_N изменяется на десятки процентов, в то время как температура θ_N всего лишь на проценты. Общая тенденция влияния параметров d_f и отношения θ_H/θ_N на теплоемкость кластеров такова: теплоемкость уменьшается с ростом показателя пространственной размерности колебательного спектра df , если отношение $\theta_H/\theta_N = \text{const}$. Наоборот, при увеличении отношения θ_H/θ_N и $d_f = \text{const}$, теплоемкость растет. Оба этих параметра изменяются при увеличении или уменьшении числа молекул в кластере [1; 2; 5], а также при переходе от одного изомера к другому. На рис. 1, 2 приведены данные расчетов по формуле (2) изменения температурной зависимости теплоемкости для изомеров кластеров воды $(\text{H}_2\text{O})_6$ и $(\text{H}_2\text{O})_{11}$.

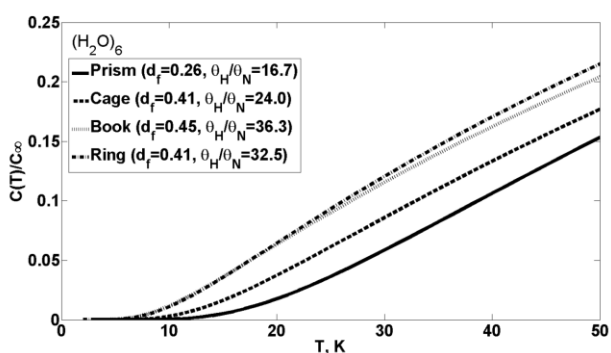


Рис. 1. Теплоемкость изомеров кластеров $(\text{H}_2\text{O})_6$

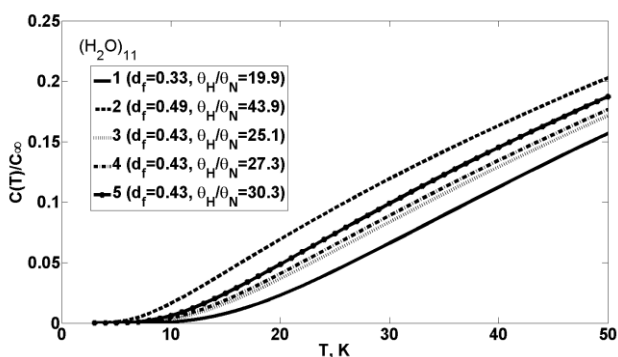


Рис. 2. Теплоемкость изомеров кластеров $(H_2O)_{11}$

Видно, что они заметно отличаются, причем увеличение теплоемкости за счет роста фактора θ_H/θ_N не компенсирует ее уменьшение за счет относительно более слабого роста размерности d_f .

Расчеты показывают, что этот факт имеет место и для других изомеров кластеров воды, а именно пяти изомеров кластера $(H_2O)_{16}$, а также четырех изомеров кластеров $(H_2O)_{17}$ и $(H_2O)_{20}$. Таким образом, в структурах, состоящих из небольшого количества частиц при малых размерностях спектра $d_f < 1$, величина θ_N и изменение параметра θ_H/θ_N весьма существенно влияют на их тепловые свойства.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Кузнецов В.М., Терешкина К.Б., Теплоемкость веществ с колебательными спектрами малой и нулевой размерности // Вестник МГОУ. Сер. «Физика Математика». 2014. № 2. - С. 46–51.
2. Кузнецов В.М., Терешкина К.Б., О веществах с отрицательной размерностью колебательных спектров // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2014. № 4. С. 69–75.
3. Y. Wang, X. Huang, B. Shepler, B.C. Braams and J.M. Bowman Flexible, ab initio potential, and dipole moment surfaces for water. I. Tests and applications for clusters up to the 22-mer // J. Chem. Phys. 2011. T. 134. C. 094509.
4. E. Miliordos, E. Apra, S. S. Xantheas Optimal geometries and harmonic vibrational frequencies of the global minima of water clusters $(H_2O)_n$, $n = 2-6$, and several hexamer local minima at the CCSD(T) level of theory // J. Chem. Phys. 2013. V. 139. – 114302.
5. Кузнецов В.М., Хромов В.И. О существовании макро и наноструктур с фоновыми спектрами малой фрактальной размерности. // ПЖТФ. 2012. Т. 38. № 11. С. 11–18.

УДК 536.24

*Андрианов И.К., Гринкруг М.С.**Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет*

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ТЕПЛООТДАЧИ ДЛЯ ТРЕБУЕМОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ НА ПОВЕРХНОСТИ КОНТАКТА ЛОПАТКИ И ТЕПЛОЗАЩИТНОГО ПОКРЫТИЯ ПРИ ПОПЕРЕЧНОЙ СХЕМЕ ОХЛАЖДЕНИЯ

Аннотация. Получены определяющие соотношения теплообменного процесса при внутреннем поперечном охлаждении оболочковой лопатки газотурбинного двигателя для требуемого температурного поля на поверхности контакта лопатки и покрытия, подверженной наибольшему температурному нагружению. Разработан метод расчета коэффициентов теплоотдачи от внутренней поверхности лопатки к охлаждающему агенту на основе построения конечно-разностной схемы. При выводе разностных соотношений учитывались зависимость теплофизических свойств многослойных теплозащитных покрытий от температуры, вида материала, толщины слоя. Получена рекуррентная формула для оценки температуры охладителя, изменяющейся по контуру лопатки. Ключевые слова: теплоотдача, теплозащитное покрытие, поперечное охлаждение, лопатка.

*I. Andrianov, M. Grinkrug**Komsomolsk-on-Amur State Technical University (Komsomolsk-on-Amur, Russia)*

NUMERICAL METHOD OF HEAT EMISSION CALCULATION FOR THE REQUIRED TEMPERATURE FIELD ON THE CONTACT SURFACE OF A BLADE AND THERMAL BARRIER COATING IN A CROSS – COOLING SCHEME

Abstract. We have derived constitutive equations of the heat exchange process in the case of internal cross-cooling of a gas-turbine engine blade for the desired temperature field on the contact surface of the blade and the coating exposed to the greatest thermal load. The method is developed for calculating heat transfer coefficients from the inner surface of the blade to the cooling agent by constructing a finite-difference scheme. In deriving difference relations, the dependence of thermal properties of multilayer thermal barrier coatings on temperature, type of material and layer thickness is taken into account. A recurrence formula is obtained for estimating the coolant temperature changing along the contour of the blade. Keywords: heat transfer, thermal barrier coating, cross-cooling, blade.

На сегодняшний день в газотурбинных двигателях широко используются охлаждаемые лопатки оболочкового типа. Рабочий цикл таких лопаток во многом зависит от теплового состояния, условий работы систем охлаждения и оптимизации процессов теплоотдачи. Актуальность данного исследования обусловлена тем, что на сегодняшний день повышение начальной температуры газа в газотурбинных двигателях приводит к широкому применению различных систем воздушного охлаждения. Проведено довольно много исследований [3; 4], посвященных решению прямой задачи теплопроводности, разрабатываются различные методы анализа, оценки теплового состояния лопатки, однако практически отсутствуют исследования по решению обратных задач теплообмена, в частности, когда задается необходимое температурное поле и в зависимости от него рассчитываются теплозащитные параметры лопатки.

В настоящий момент изучено достаточно большое количество аспектов, связанных с расчетами температурных полей лопаток, состояния теплозащитных покрытий, которые отражены в работах [1; 2; 4]. Акцент современных исследований на анализ теплового состояния лопаток вызван тем, что именно температура, которая может достигать значений свыше 2000 К, оказывает негативное влияние на эксплуатационные характеристики лопатки. Это приводит к необходимости понижать температуру газового потока по сравнению со значениями, которые принципиально может обеспечить система охлаждения. В связи с этим весьма целесообразным является разработка метода, позволяющего задавать необходимое температурное поле на поверхности лопатки, подвергаемой максимальному температурному нагружению.

Цель данного исследования заключается в том, чтобы повысить эффективность охлаждения лопаток оболочкового типа. В соответствии с данной целью была поставлена следующая задача: разработать метод численного расчета коэффициентов теплоотдачи от лопатки к охлаждающему агенту с учетом расхода воздуха, необходимого для охлаждения оболочки до нужной температуры, и рассчитать соответствующее тепловое состояние в каналах лопатки. Зная распределения коэффициентов теплоотдачи, можно

регулировать процесс охлаждения лопаток за счет оптимального теплоотвода: определения необходимых скоростей течения охладителя, расхода воздуха, геометрических размеров внутренних полостей лопатки.

В данной работе рассматривается внутреннее поперечное охлаждение лопатки. Поперечное охлаждение отличается течением потока воздуха поперек пера лопатки, выходящего через специальные отверстия в области выходной кромки или корытца. Особенностью данной схемы охлаждения является то, что охладитель прокачивается через систему специально организованных каналов внутри профиля [2, с. 288].

При исследовании теплового состояния лопатки наиболее термонагруженной является наружная поверхность лопатки a (рис. 1), поскольку на этой поверхности температура достигает наибольших значений. Для расчета распределения коэффициентов теплоотдачи положим, что температурное поле $T_{a,j}$ на поверхности контакта лопатки и покрытия является известным. Соответственно, задавая требуемое температурное поле $T_{a,j}$, определим, как должно изменяться тепловое состояние покрытия и лопатки в заданных условиях.

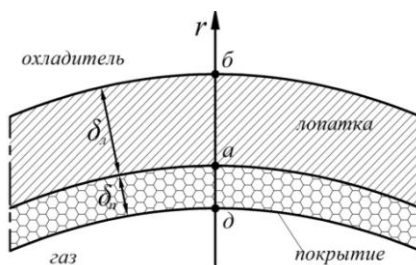


Рис. 1. Участок корытца лопатки с покрытием.

На сегодняшний день разработано и широко применяется большое количество методов расчета коэффициентов теплоотдачи от газа к лопатке, наиболее эффективный из которых предложен в работе Л.М. Зысиной–Моложен [2]. Поскольку принцип работы лопаток в условиях агрессивной газовой среды, несмотря на постоянное изменение

и совершенствование систем внутреннего охлаждения, остается прежним и связан лишь с изменением температуры и продуктов сгорания газового потока, распределение коэффициентов теплоотдачи от газового потока к поверхности покрытия будем считать заданным.

Построим на поверхности лопатки сетку и все исследуемые теплофизические параметры будем представлять в виде сеточных функций. Равномерно разобьем поверхность лопатки с покрытием на n шагов по контуру и m шагов по высоте, тогда

$$\Delta s = \frac{L}{n}, \quad \Delta z = \frac{H}{m},$$

где Δs – длина шага по контуру сетки; Δz – длина шага по высоте сетки; L – длина контура участка лопатки; H – высота пера лопатки.

Произвольная точка на поверхности имеет координаты i и j , где $i = \overline{0, n}$, $j = \overline{0, m}$. Поскольку геометрические характеристики в области корытца при $r_{a_{i,j}} - \delta_n \leq r_{k_{i,j}} \leq r_{a_{i,j}} + \delta_n$ и спинки при $r_{a_{i,j}} - \delta_n \leq r_{s_{i,j}} \leq r_{a_{i,j}} + \delta_n$ (δ_n – толщина теплозащитного покрытия, δ_n – толщина лопатки) различаются, расчет теплоотдачи будем проводить отдельно на вогнутой и выпуклой поверхностях.

Рассмотрим перенос теплоты через покрытие к лопатке в области корытца, описываемый следующими процессами: теплоотдача от газа к поверхности теплозащитного покрытия, теплопередача по толщине покрытия и перенос теплоты через поверхность соприкосновения к стенке лопатки. Для того, чтобы учесть изменение температуры по толщине лопатки и покрытия, представим функцию температуры в виде квадратичной зависимости по радиусу кривизны в рассматриваемой точке на поверхности:

$$T_{l_{i,j}} = A_1 r_{k_{i,j}}^2 + A_2 r_{k_{i,j}} + A_3, \quad T_{n_{i,j}} = B_1 r_{k_{i,j}}^2 + B_2 r_{k_{i,j}} + B_3, \quad (1)$$

где A_1, A_2, A_3 – константы для i, j – точки лопатки, подлежащие определению; B_1, B_2, B_3 – константы для i, j – точки поверхности покрытия, подлежащие определению; $T_{n_{i,j}}$ – температура теплозащитного покрытия в i, j – точке; $T_{l_{i,j}}$ – температура лопатки в i, j – точке, $r_{k_{i,j}}$ – координата,

изменяющаяся в радиальном направлении по толщине лопатки и покрытия в области корытца.

Математическая модель теплообменного процесса, протекающего при воздействии газового потока на лопатку с покрытием, строится на основании дифференциальных уравнений теплопроводности Фурье:

$$\frac{\partial}{\partial r_{i,j}} \left(\lambda_{\lambda_{i,j}} \frac{\partial T_{\lambda_{i,j}}}{\partial r_{i,j}} \right) + \frac{\lambda_{n_{i,j}}}{r_{i,j}} \frac{\partial T_{\lambda_{i,j}}}{\partial r_{i,j}} + \frac{1}{r_{i,j}^2} \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\lambda_{\lambda} \frac{\partial T_{\lambda}}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_{\lambda} \frac{\partial T_{\lambda}}{\partial z} \right) \right]_{i,j} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial r_{i,j}} \left(\lambda_{n_{i,j}} \frac{\partial T_{n_{i,j}}}{\partial r_{i,j}} \right) + \frac{\lambda_{\lambda_{i,j}}}{r_{i,j}} \frac{\partial T_{n_{i,j}}}{\partial r_{i,j}} + \frac{1}{r_{i,j}^2} \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\lambda_n \frac{\partial T_n}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_n \frac{\partial T_n}{\partial z} \right) \right]_{i,j} = 0. \quad (3)$$

Для решения поставленной задачи теплопроводности определим краевые условия. С помощью граничных условий I-го рода зададим распределение температур в радиальном направлении для i, j – точки на поверхности теплоотвода, омываемой охладителем, и поверхности, омываемой высокотемпературным газом:

$$T_{\delta_{i,j}} = A_1(r_{a_{i,j}} + \delta_{\lambda})^2 + A_2(r_{a_{i,j}} + \delta_{\lambda}) + A_3, \quad (4)$$

$$T_{\delta_{i,j}} = B_1(r_{a_{i,j}} - \delta_n)^2 + B_2(r_{a_{i,j}} - \delta_n) + B_3, \quad (5)$$

где $T_{\delta_{i,j}}$ – температура наружной поверхности покрытия.

Для того, чтобы учесть воздействие высокотемпературной газовой среды, используем условие теплопроводности III-го рода, где известными считаются коэффициенты теплоотдачи от газа к теплозащитному покрытию. Данные условия описывают закон теплообмена на поверхностях теплоподвода и теплоотвода:

$$-\frac{\partial T_{n_{i,j}}}{\partial r_{i,j}} \bigg|_{r_{i,j}=r_{\delta_{i,j}}} = \frac{\alpha_{\delta_{i,j}}}{\lambda_{n\delta_{i,j}}} (T_{\delta_{i,j}} - T_{\delta_{i,j}}), \quad (6)$$

$$-\frac{\partial T_{\lambda_{i,j}}}{\partial r_{i,j}} \bigg|_{r_{i,j}=r_{\delta_{i,j}}} = \frac{\alpha_{\delta_{i,j}}}{\lambda_{n\delta_{i,j}}} (T_{\delta_{i,j}} - T_{\delta_{i,j}}), \quad (7)$$

где $\alpha_{\delta_{i,j}}$ – коэффициент теплоотдачи от газа к поверхности покрытия; $\lambda_{n\delta_{i,j}}$ – коэффициент теплопроводности покрытия на поверхности δ ; $T_{\delta_{i,j}}$ – температура газового потока.

Передача теплоты от покрытия к лопатке описывается с помощью граничного условия VI-го рода: равенство температурных полей и плотностей тепловых потоков на поверхности контакта лопатки и покрытия:

$$T_{a_{i,j}} = A_1 r_{a_{i,j}}^2 + A_2 r_{a_{i,j}} + A_3, \quad T_{a_{i,j}} = B_1 r_{a_{i,j}}^2 + B_2 r_{a_{i,j}} + B_3, \quad (8), (9)$$

$$\lambda_{la_{i,j}} \left. \frac{\partial T_{l_{i,j}}}{\partial r_{i,j}} \right|_{r_{i,j}=r_{a_{i,j}}} = \lambda_{na_{i,j}} \left. \frac{\partial T_{n_{i,j}}}{\partial r_{i,j}} \right|_{r_{i,j}=r_{a_{i,j}}}, \quad (10)$$

где $\lambda_{la_{i,j}}$ – коэффициент теплопроводности на поверхности лопатки.

Решая полученную систему уравнений (1–3), (5–6), (9), получим уравнение четвертой степени для определения температурного поля на наружной поверхности покрытия $T_{\partial_{i,j}}$:

$$\begin{aligned} & 2\lambda_{na_{i,j}} (W_{11}T_{\partial_{i,j}}^2 + W_{12}T_{\partial_{i,j}} + W_{13})(W_{14}T_{\partial_{i,j}} + W_{15}) + \left[2r_{a_{i,j}} (W_{11}T_{\partial_{i,j}}^2 + W_{12}T_{\partial_{i,j}} + W_{13}) + \right. \\ & + W_{21}T_{\partial_{i,j}}^2 + W_{22}T_{\partial_{i,j}} + W_{23} \left. \right] \left[(W_{11}T_{\partial_{i,j}}^2 + W_{12}T_{\partial_{i,j}} + W_{13})C_1 + (W_{21}T_{\partial_{i,j}}^2 + W_{22}T_{\partial_{i,j}} + W_{23})C_2 + \right. \\ & + W_{23}C_2 + (W_{31}T_{\partial_{i,j}}^2 + W_{32}T_{\partial_{i,j}} + W_{33})C_3 \left. \right] + \left[2r_{a_{i,j}} (W_{11}T_{\partial_{i,j}}^2 + W_{12}T_{\partial_{i,j}} + W_{13}) + \right. \\ & + W_{21}T_{\partial_{i,j}}^2 + W_{22}T_{\partial_{i,j}} + W_{23} \left. \right] \left[C_4 + \frac{\lambda_{na_{i,j}}}{r_{a_{i,j}}} \right] (W_{14}T_{\partial_{i,j}} + W_{15}) + \left[\left(\frac{T_{a_{i+1,j}} - T_{a_{i-1,j}}}{2\Delta s} \right)^2 + \right. \\ & + \left(\frac{T_{a_{i,j+1}} - T_{a_{i,j-1}}}{2\Delta z} \right)^2 \left. \right] \eta_{na_{i,j}} (W_{14}T_{\partial_{i,j}} + W_{15})^2 - \left[\frac{\lambda_{na_{i,j}}}{r_{a_{i,j}}} \frac{(T_{a_{i+1,j}} - T_{a_{i-1,j}})(r_{a_{i+1,j}} - r_{a_{i-1,j}})}{2\Delta s} - \right. \\ & - \left(\frac{T_{a_{i+1,j}} - 2T_{a_{i,j}} + T_{a_{i-1,j}}}{\Delta s^2} + \frac{T_{a_{i,j+1}} - 2T_{a_{i,j}} + T_{a_{i,j+1}}}{\Delta z^2} \right) \lambda_{na_{i,j}} \left. \right] (W_{14}T_{\partial_{i,j}} + W_{15})^2 = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

где $W_{11} = -\eta_{n\partial}$, $W_{12} = \eta_{n\partial}(T_a + 273) - \alpha_e \delta_n - \xi_{n\partial}$, $W_{14} = \delta_n^2 \eta_{n\partial}$,

$$W_{15} = \delta_n^2 (\xi_{n\partial} - 273\eta_{n\partial}),$$

$$W_{22} = 2[\xi_{n\partial} - \eta_{n\partial}(T_a + 273)](r_a + \delta_n) + \alpha_e \delta_n (2r_a + \delta_n),$$

$$\begin{aligned}
W_{32} &= \eta_{n\partial} T_a (r_a + \delta_n)^2 - \alpha_{\varepsilon} r_a \delta_n (r_a + \delta_n) + r_a (273\eta_{n\partial} - \xi_{n\partial}) (r_a + 2\delta_n), \\
W_{23} &= -[2T_a (\xi_{n\partial} - 273\eta_{n\partial}) + \alpha_{\varepsilon} T_{\varepsilon} \delta_n] (r_a + \delta_n), \\
W_{13} &= T_a (\xi_{n\partial} - 273\eta_{n\partial}) + \alpha_{\varepsilon} \delta_n T_{\varepsilon}, \\
W_{33} &= \alpha_{\varepsilon} r_a \delta_n T_{\varepsilon} (r_a + \delta_n) + T_a (\xi_{n\partial} - 273\eta_{n\partial}) (r_a + \delta_n)^2, \\
W_{31} &= -2r_a \eta_{n\partial} (\delta_n + r_a), \quad W_{21} = 2\eta_{n\partial} (\delta_n + r_a).
\end{aligned}$$

В соотношении (11) частные производные по s и z расписываются с помощью конечно-разностных аппроксимаций производных в средних точках. Уравнение достаточно просто разрешается с использованием метода Феррари, метода Декарта-Эйлера. Опираясь на граничные условия теплопроводности, можем выразить константы B_1, B_2, B_3 относительно температурного поля $T_{\partial_{i,j}}$.

Используя граничные условия теплопроводности I-го рода для внутренней поверхности лопатки $T_{\delta_{i,j}}$, внешней поверхности лопатки $T_{a_{i,j}}$ и граничные условия VI-го рода – условия равенства температур и тепловых потоков в области контакта лопатки и покрытия, можем аналитически решить систему уравнений (4), (7–8), (10–11). В результате соотношение для определения температуры на внутренней поверхности лопатки, омываемой хладагентом, будет иметь вид:

$$\begin{aligned}
&\left(2E_{11}r_{a_{i,j}} + E_{21}\right)^2 \eta_{\lambda} T_{\delta_{i,j}}^2 + \left[\left(2E_{11}r_{a_{i,j}} + E_{21}\right) \left(2E_{12}r_{a_{i,j}} + E_{22}\right) \eta_{\lambda} + \left(2E_{11}r_{a_{i,j}} + E_{21}\right) \left(\frac{\lambda_{\lambda a_{i,j}}}{r_{a_{i,j}}} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(2E_{12}r_{a_{i,j}} + E_{22}\right) \eta_{\lambda} + 2E_{11}\lambda_{\lambda a_{i,j}} \right) \right] T_{\delta_{i,j}} + 2E_{12}\lambda_{\lambda a_{i,j}} + \left(2E_{12}r_{a_{i,j}} + E_{22}\right) \left[\frac{\lambda_{\lambda a_{i,j}}}{r_{a_{i,j}}} + \right. \\
&\quad \left. + \left(2E_{12}r_{a_{i,j}} + E_{22}\right) \eta_{\lambda} \right] + \lambda_{\lambda a} \left[\frac{T_{a_{i+1,j}} - 2T_{a_{i,j}} + T_{a_{i-1,j}}}{\Delta s^2} + \frac{T_{a_{i,j+1}} - 2T_{a_{i,j}} + T_{a_{i,j+1}}}{\Delta z^2} \right] + \\
&\quad + \eta_{\lambda} \left[\left(\frac{T_{a_{i+1,j}} - T_{a_{i-1,j}}}{2\Delta s} \right)^2 + \left(\frac{T_{a_{i,j+1}} - T_{a_{i,j-1}}}{2\Delta z} \right)^2 \right] - \frac{(T_{a_{i+1,j}} - T_{a_{i-1,j}})(r_{a_{i+1,j}} - r_{a_{i-1,j}})}{4\Delta s^2} \frac{\lambda_{\lambda a}}{r_a} = 0,
\end{aligned} \tag{12}$$

$$\text{где } E_{11} = \frac{1}{\delta_a^2}, \quad E_{21} = \frac{-2r_{a_{i,j}}}{\delta_a^2}, \quad E_{31} = \frac{r_{a_{i,j}}^2}{\delta_a^2},$$

$$E_{12} = \frac{\delta_a \lambda_{na_{i,j}} (2B_1 r_{a_{i,j}} + B_2) - T_{a_{i,j}} \lambda_{la_{i,j}}}{\delta_a^2 \lambda_{la_{i,j}}},$$

$$E_{22} = \frac{\delta_a \lambda_{na_{i,j}} (\delta_a - 2r_{a_{i,j}}) (2B_1 r_{a_{i,j}} + B_2) + 2r_{a_{i,j}} \lambda_{la_{i,j}} T_{a_{i,j}}}{\delta_a^2 \lambda_{la_{i,j}}},$$

$$E_{32} = \frac{r_{a_{i,j}} \delta_a \lambda_{na_{i,j}} (r_{a_{i,j}} - \delta_a) (2B_1 r_{a_{i,j}} + B_2) + \lambda_{la_{i,j}} T_{a_{i,j}} (\delta_a^2 - r_{a_{i,j}}^2)}{\delta_a^2 \lambda_{la_{i,j}}}.$$

Получив определяющие соотношения (11) и (12) для расчета изменения теплового состояния покрытия и лопатки, можем определить требуемую теплоотдачу на омываемой хладагентом поверхности лопатки. Поскольку температура охлаждающего агента на входе известна, можем определить коэффициент теплоотдачи на входной кромке, используя условие теплоотдачи внутренней стенки лопатки к охлаждающему агенту:

$$\alpha_{\theta_{0,j}} = \frac{[\lambda_{la_{0,j}} (T_{\theta_{0,j}} - T_{a_{0,j}}) - \delta_a \lambda_{na_{0,j}} (2B_1 r_{a_{0,j}} + B_2)] (r_{a_{0,j}} + \delta_a) \lambda_{la_{0,j}}}{\delta_a^2 \lambda_{la_{0,j}} (T_{\theta_{0,j}} - T_{\theta_{0,j}})} +$$

$$+ \frac{[\delta_a \lambda_{na_{0,j}} (\delta_a + 2r_{a_{0,j}}) (2B_1 r_{a_{0,j}} + B_2) + 2r_{a_{0,j}} \lambda_{la_{0,j}} (T_{a_{0,j}} - T_{\theta_{0,j}})] \lambda_{la_{0,j}}}{\delta_a^2 \lambda_{la_{0,j}} (T_{\theta_{0,j}} - T_{\theta_{0,j}})}.$$

Изменение температуры охладителя по контуру лопатки в области корытца определим из граничного условия III рода для точек от $i+1$ до n :

$$T_{\theta_{i+1,j}} = T_{\theta_{i+1,j}} + \frac{[2A_1 (r_{a_{i+1,j}} + \delta_a) + A_2] [\xi_a + \eta_a (T_{\theta_{i+1,j}} - 273)]}{\alpha_{\theta_{i+1,j}}}. \quad (13)$$

Для нахождения коэффициентов теплоотдачи от внутренней поверхности лопатки к охлаждающему воздуху в области корытца рассмотрим теплообменный процесс, связанный с теплопередачей от стенки лопатки к воздуху и нагреванием охладителя. Используя следствие из закона Ньютона-Рихмана, запишем интегральную формулу количества теплоты, отводимого от стенки лопатки к охлаждающему агенту:

$$\frac{\partial Q_1}{\partial F} = \alpha_{\epsilon} t \Delta T, \quad (14)$$

где Q_1 – количество теплоты, передаваемое от внутренней поверхности лопатки к хладагенту на участке от точки i до $i+1$, F – площадь поверхности, t – время, за которое происходит процесс теплопередачи.

Интегрируя выражение (14), получим следующее соотношение для определения количество теплоты, отдаваемое охладителю:

$$Q_1 = \int_{s_i}^{s_{i+1}} \alpha_{\epsilon} (T_{\delta} - T_{\epsilon}) t \Delta z ds.$$

Процесс нагрева охлаждающего воздуха описывается выражением:

$$Q_2 = c_{p_{i,j}} m_{i,j} (T_{\epsilon_{i+1,j}} - T_{\epsilon_{i,j}}),$$

где Q_2 – количество теплоты, передаваемое от внутренней поверхности лопатки к хладагенту на участке от точки i до $i+1$, $m_{i,j}$ – масса охлаждающего агента на участке от точки i до $i+1$, $c_{p_{i,j}}$ – изобарная теплоемкость охлаждающего агента.

Приравнявая количество теплоты, отданное лопаткой и приобретенное охлаждающим агентом, запишем уравнение теплового баланса $Q_1 = Q_2$ при течении охладителя в канале между дефлектором и лопаткой на участке от точки i до $i+1$:

$$\int_{s_i}^{s_{i+1}} \alpha_{\epsilon} (T_{\delta} - T_{\epsilon}) \Delta z ds = c_{p_{i,j}} G_{\epsilon_{i,j}} (T_{\epsilon_{i+1,j}} - T_{\epsilon_{i,j}}), \quad (15)$$

где $G_{\epsilon_{i,j}}$ – массовый расход охлаждающего воздуха.

Представим интеграл в левой части выражения (15) в приближенном виде с помощью метода трапеций:

$$\frac{\alpha_{\epsilon_{i+1,j}} (T_{\delta_{i+1,j}} - T_{\epsilon_{i+1,j}}) + \alpha_{\epsilon_{i,j}} (T_{\delta_{i,j}} - T_{\epsilon_{i,j}})}{2} \Delta z \Delta s = c_{p_{i,j}} G_{\epsilon_{i,j}} (T_{\epsilon_{i+1,j}} - T_{\epsilon_{i,j}}). \quad (16)$$

Подставим выражение (13) для температуры $T_{\epsilon_{i,j}}$ в уравнение (16):

$$\alpha_{\epsilon_{i+1,j}} = \frac{2c_{p_{i,j}} G_{\epsilon_{i,j}} [2A_1(r_{a_{i+1,j}} + \delta_{\lambda}) + A_2 [\xi_{\lambda} + \eta_{\lambda} (T_{\delta_{i+1,j}} - 273)]]}{2c_{p_{i,j}} G_{\epsilon_{i,j}} (T_{\delta_{i+1,j}} - T_{\epsilon_{i,j}}) - [2A_1(r_{a_{i+1,j}} + \delta_{\lambda}) + A_2] \lambda_{\delta_{i+1,j}} + \alpha_{\epsilon_{i,j}} (T_{\delta_{i,j}} - T_{\epsilon_{i,j}}) \Delta z \Delta s}$$

Таким образом, получено рекуррентное соотношение для определения теплоотдачи от внутренней поверхности лопатки к охладителю. С помощью данного соотношения можно определить распределение коэффициентов теплоотдачи, удовлетворяющих необходимому температурному полю $T_{a_{i,j}}$ на поверхности лопатки в области корытца для каждого отдельного слоя по высоте. В области спинки лопатки расчет проводится аналогично при $r_{a_{i,j}} - \delta_l \leq r_{s_{i,j}} \leq r_{a_{i,j}} + \delta_n$.

Полученные в исследовании соотношения позволяют провести наиболее точный анализ распределения коэффициентов теплоотдачи на поверхности теплоотвода.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Веретенников С.В., Хасанов С.М. Исследование теплового состояния сопловых лопаток с циклонно-вихревой системой охлаждения // Авиационная и ракетно-космическая техника. 2011. С. 323–328.
2. Зысина-Моложен Л.М., Теплообмен в турбомашинах. Л: Машиностроение. 1974. С. 336.
3. Курманов Б.И., Осипов, Петрунин, Сравнительный анализ схем охлаждения выходной кромки турбинной лопатки ГТУ // Проблемы энергетики. 2007. № 3–4. С. 68–75.
4. Самойленко В.М. Исследование стабильности слоев защитных алюминидных покрытий // Научный вестник МГТУ ГА. 2006. № 108. С. 112–114.

РАЗДЕЛ III. ТЕОРИЯ И МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ И ВОСПИТАНИЯ

УДК 517.57

Алгазин О.Д. *, Копеев А.В. *, Попов В.С. *, Латышев А.В. **

*Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана

**Московский государственный областной университет

ПРИКЛАДНЫЕ АСПЕКТЫ ПРЕПОДАВАНИЯ ТЕМЫ «ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ» ПРИ ИЗУЧЕНИИ ДИСЦИПЛИНЫ «УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ»

Аннотация. На примерах решения краевых задач для уравнения Лапласа (задачи Дирихле для полупространства и смешанной краевой задачи Дирихле – Неймана для бесконечного слоя) рассмотрены применения преобразования Фурье. Приведены решения задач фильтрации под точечной плотиной с использованием полученных формул.

Ключевые слова: преобразование Фурье, уравнение Лапласа, краевые задачи, аппроксимативная единица, теория фильтрации.

O. Algazin, A. Kopaev*, V. Popov*, A. Latyshev***

** Bauman Moscow State Technical University (Moscow, Russia)*

***Moscow State Regional University (Moscow, Russia)*

APPLIED ASPECTS OF TEACHING THE TOPIC “FOURIER TRANSFORM” IN THE SUBJECT “EQUATIONS OF MATHEMATICAL PHYSICS”

Abstract. Using the examples of solving boundary-value problems for the Laplace equation (the Dirichlet problem for the half-space and the mixed boundary-value Dirichlet – Neumann problem for an infinite layer), we consider the application of the Fourier transform. We present the solutions to the filtration problems of seepage flows below the dam using the above formulas.

© Алгазин О.Д., Копеев А.В., Попов В.С., Латышев А.В., 2015.

Keywords: Fourier transform, Laplace equation, boundary-value problems, approximate identity, theory of filtration.

Введение

Студенты изучают интегральное преобразование Фурье в рамках дисциплины «Уравнения математической физики». Свойства одномерного преобразования Фурье и его простейшие применения к решению уравнений математической физики описаны в [1]. Между тем, основным методом решения краевых задач для линейных дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами для полупространства является многомерное преобразование Фурье [2], которому и посвящена настоящая работа.

Мы ограничились рассмотрением краевых задач только для уравнения Лапласа, так как гармонические функции двух и трех переменных описывают многие стационарные процессы, происходящие в подземной гидродинамике, электростатике, магнитостатике и др. [3]. Рассмотрены первая краевая задача для полупространства n -мерного пространства, а также смешанная краевая задача для бесконечного слоя в n -мерном пространстве. Получена новая форма решения смешанной краевой задачи для бесконечного слоя в виде интеграла, ядро которого содержит только элементарные функции в случае пространства четной размерности, а в случае пространства нечетной размерности – еще и функции Бесселя. Практическое применение полученных результатов проиллюстрировано несколькими примерами построения фильтрационных течений под плотинной.

Материал статьи может быть полезен преподавателям и использован ими для дополнительных занятий со студентами, а также студентам при написании курсовых работ по дисциплине «Уравнения математической физики».

Обозначения

Введем следующие обозначения:

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; \quad (x, y) = (x_1, \dots, x_n, y) \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad y \in \mathbb{R};$$
$$|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}; \quad xt = x_1 t_1 + \dots + x_n t_n; \quad dx = dx_1 \cdots dx_n;$$

$\Delta u(x, y) = \Delta u = u_{x_1 x_1} + \dots + u_{x_n x_n} + u_{yy}$ – оператор Лапласа;

$$F(t) = \mathcal{F}[f](t) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{ixt} dx$$

– преобразование Фурье суммируемой функции $f(x)$. Если суммируемая по x функция $f(x, y)$ зависит от переменных x и y , то ее преобразование Фурье по x будем обозначать

$$\mathcal{F}_x[f](t, y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) e^{ixt} dx.$$

Аналогично определяется обратное преобразование Фурье суммируемой функции $F(t)$:

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}[F](x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} F(t) e^{-ixt} dt$$

и суммируемой по t функции $F(t, y)$:

$$\mathcal{F}_t^{-1}[F](x, y) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} F(t, y) e^{-ixt} dt.$$

Определение преобразования Фурье обобщенных функций медленного роста приведены в [4].

Задача Дирихле для полупространства. Интеграл Пуассона

В задаче Дирихле требуется найти ограниченное при $y \rightarrow +\infty$ решение уравнения Лапласа

$$\Delta u(x, y) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad 0 < y,$$

удовлетворяющее краевому условию

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Применим преобразование Фурье по x к уравнению Лапласа, обозначив

$$U(t, y) = \mathcal{F}_x[u](t, y); \quad \Phi(t) = \mathcal{F}[\varphi](t).$$

Получим краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения с параметром $t \in \mathbb{R}^n$:

$$-|t|^2 U(t, y) + U_{yy}(t, y) = 0;$$

$$U(t, 0) = \Phi(t).$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$U(t, y) = c_1(t)e^{-|t|y} + c_2(t)e^{|t|y}.$$

Полагая $c_2(t) = 0$, получаем решение краевой задачи

$$U(t, y) = \Phi(t)e^{-|t|y}.$$

Применив обратное преобразование Фурье, получим решение задачи Дирихле в виде свертки (если эта свертка существует):

$$u(x, y) = \varphi(x) * P_n(x, y), \quad (1)$$

где $P_n(x, y)$ – ядро Пуассона,

$$P_n(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|t|y} e^{-itx} dt.$$

Для вычисления этого интеграла перейдем к сферическим координатам в пространстве $\mathbb{R}^n$ [4; 5], обозначив $|x| = r$, $|t| = \rho$, σ_{n-1} – площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} P_n(x, y) &= \frac{\sigma_{n-1}}{(2\pi)^n} \int_0^\infty e^{-\rho y} \rho^{n/2} d\rho \int_0^\pi e^{-ir\rho \cos \theta} \sin^{n-2} \theta d\theta = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2} r^{n/2-1}} \int_0^\infty e^{-\rho y} \rho^{n/2} J_{n/2-1}(r\rho) d\rho, \end{aligned}$$

где $J_{n/2-1}(r\rho)$ – функция Бесселя первого рода порядка $\nu = n/2 - 1$. Эта формула справедлива и при $n = 1$, что легко проверить. Используя для последнего интеграла формулу (6.623.2) из [6, с. 726], получим:

$$P_n(x, y) = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\pi^{(n+1)/2}} \frac{y}{(|x|^2 + y^2)^{(n+1)/2}}.$$

Легко проверить, что ядро Пуассона обладает следующими свойствами:

- 1) $P_n(x, y) > 0$;
- 2) $\int_{\mathbb{R}^n} P_n(x, y) dx = 1$;

$$3) \text{ для } \forall \delta > 0 \lim_{y \rightarrow +0} \sup_{|x| \geq \delta} P_n(x, y) = 0.$$

Эти свойства означают, что $P_n(x, y)$ является *аппроксимативной единицей*, или δ -образной системой функций от x (с параметром y), и при $y \rightarrow +0$ $P_n(x, y)$ слабо сходится к δ -функции $\delta(x)$.

Если $\varphi(x)$ является ограниченной кусочно-непрерывной функцией, то свертка (1) существует и может быть записана в виде интеграла, называемого *интегралом Пуассона*:

$$u(x, y) = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\pi^{(n+1)/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\varphi(t)y}{(|x-t|^2 + y^2)^{(n+1)/2}} dt. \quad (2)$$

Ядро Пуассона является аппроксимативной единицей, следовательно,

$$\lim_{y \rightarrow +0} u(x, y) = \varphi(x)$$

в точках непрерывности $\varphi(x)$. Это равенство означает, что интеграл Пуассона представляет классическое решение задачи Дирихле. Для обобщенных функций медленного роста $\varphi(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ при условии существования свертки (1) функция

$$u(x, y) = \varphi(x) * P_n(x, y)$$

является обобщенным решением задачи Дирихле в пространстве $\mathcal{S}'$:

$$\lim_{y \rightarrow +0} u(x, y) = \varphi(x).$$

Например, если $\varphi(x) = \delta(x)$, то решением задачи Дирихле будет ядро Пуассона:

$$u(x, y) = \delta(x) * P_n(x, y) = P_n(x, y);$$

$$\lim_{y \rightarrow +0} P_n(x, y) = \delta(x).$$

Для случая $n = 1$ интеграл Пуассона имеет вид

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y\varphi(t)}{(x-t)^2 + y^2} dt.$$

Свойства интеграла Пуассона для $n = 1$ подробно описаны в [7], для $n > 1$ — в [8].

В качестве примера применения формулы Пуассона рассмотрим решение известной задачи теории фильтрации об описании течения под точечной плотиной. Фильтрация жидкости (воды) вызывается разностью давления на верхнем ($P_1 = -\varphi_1$) и нижнем ($P_2 = -\varphi_2$) бьефах (рис. 1). Поле скоростей фильтрующейся жидкости описывается вектором $\vec{v} = k \overrightarrow{\text{grad } u}$, где коэффициент k характеризует проницаемость среды (грунта) [3; 9; 10]:

$$\Delta u(x, y) = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad y > 0;$$

$$u(x, 0) = \varphi_1, \quad x < 0, \quad u(x, 0) = \varphi_2, \quad x > 0.$$

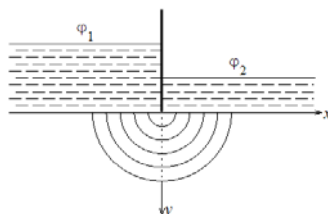


Рис. 1. Фильтрационное течение под точечной плотиной.

Решение задачи получают с помощью интеграла Пуассона:

$$u(x, y) = \frac{\varphi_1}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{y}{(x-t)^2 + y^2} dt + \frac{\varphi_2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{y}{(x-t)^2 + y^2} dt =$$

$$= \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x}{y} + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}.$$

Сопряженная гармоническая функция (с точностью до постоянного слагаемого)

$$v(x, y) = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2\pi} \ln(x^2 + y^2),$$

уравнения линий тока $v(x, y) = \text{const}$ (см. рис. 1).

Заметим, что если определяющая плотность интеграла Пуассона (2) обладает свойством $\varphi(-t_1, t_2, \dots, t_n) = \varphi(t_1, t_2, \dots, t_n)$, то интеграл Пуассона удовлетворяет условию:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(0, x_2, \dots, x_n, y) = 0.$$

Если определяющая плотность интеграла Пуассона (2) обладает свойством $\varphi(-t_1, t_2, \dots, t_n) = -\varphi(t_1, t_2, \dots, t_n)$, то интеграл Пуассона удовлетворяет условию:

$$u(0, x_2, \dots, x_n, y) = 0.$$

Сделанное замечание позволяет описать фильтрационное течение под точечной плотиной (в точке $x = a > 0$), область фильтрации под которой ограничена вертикальной непроницаемой преградой $x = 0$ (рис. 2).

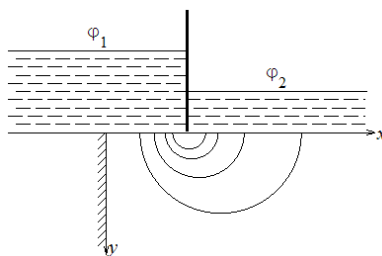


Рис. 2. Фильтрационное течение под точечной плотиной при наличии вертикальной непроницаемой преграды.

Для этого достаточно решить задачу Дирихле с краевым условием

$$u(x, 0) = \begin{cases} \varphi_1, & \text{если } |x| < a; \\ \varphi_2, & \text{если } |x| > a. \end{cases}$$

В результате получаем

$$u(x, y) = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x-a}{y} + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x+a}{y} + \varphi_2.$$

Сопряженная гармоническая функция

$$v(x, y) = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2\pi} \ln \frac{(x-a)^2 + y^2}{(x+a)^2 + y^2},$$

уравнения линий тока $v(x, y) = \text{const}$ (см. рис. 2).

Отметим, что, с одной стороны, мы решали задачу Дирихле, а с другой – можно считать, что мы решали смешанную краевую задачу по краевым условиям

$$u(x, 0) = \varphi_1, \text{ если } 0 < x < a;$$

$$u(x, 0) = \varphi_2, \text{ если } x > a;$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = 0.$$

Указанное обстоятельство демонстрирует актуальность смешанной краевой задачи, в которой на одной части границы задана искомая функция, а на другой – ее нормальная производная.

Решение смешанной краевой задачи для бесконечного слоя.

Эта задача рассмотрена в статье [11]. Требуется найти решение уравнения Лапласа

$$\Delta u(x, y) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad 0 < y < a,$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n;$$

$$u_y(x, a) = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Применим преобразование Фурье по x к уравнению Лапласа, обозначив

$$U(t, y) = \mathcal{F}_x[u](t, y); \quad \Phi(t) = \mathcal{F}[\varphi](t); \quad \Psi(t) = \mathcal{F}[\psi](t).$$

Получим краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения с параметром $t \in \mathbb{R}^n$:

$$-|t|^2 U(t, y) + U_{yy}(t, y) = 0;$$

$$U(t, 0) = \Phi(t); \quad U_y(t, a) = \Psi(t).$$

Решением этой краевой задачи будет функция

$$U(t, y) = \Phi(t) \frac{\operatorname{ch}(|t|(a-y))}{\operatorname{ch}(a|t|)} + \Psi(t) \frac{\operatorname{sh}(|t|y)}{|t| \operatorname{ch}(a|t|)}.$$

Применив обратное преобразование Фурье, получим решение исходной смешанной краевой задачи в виде свертки:

$$u(x, y) = \varphi(x) * K_n(x, y) + \psi(x) * L_n(x, y), \quad (3)$$

где для ядер введены обозначения

$$K_n(x, y) = \mathcal{F}_t^{-1}[k_n](x, y), \quad k_n(|t|, y) = \frac{\text{ch}(|t|(a-y))}{\text{ch}(a|t|)}, \quad t \in \mathbb{R}^n;$$

$$L_n(x, y) = \mathcal{F}_t^{-1}[l_n](x, y), \quad l_n(|t|, y) = \frac{\text{sh}(|t|y)}{|t|\text{ch}(a|t|)}, \quad t \in \mathbb{R}^n.$$

Поскольку

$$\frac{\partial}{\partial y} l_n(|t|, y) = k_n(|t|, a-y),$$

то

$$\frac{\partial}{\partial y} L_n(x, y) = K_n(x, a-y)$$

и $\partial L_n(x, y)/\partial y$ ведет себя при $y \rightarrow a-0$ так же, как ядро $K_n(x, y)$ при $y \rightarrow +0$.

Легко видеть, что $k_n(|t|, y)$ и $l_n(|t|, y)$ – бесконечно дифференцируемые и быстро убывающие функции от $t \in \mathbb{R}^n$, т. е. принадлежат пространству $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ [5], но они еще и сферически симметричные, поэтому при вычислении обратного преобразования Фурье можно перейти к сферическим координатам в пространстве $\mathbb{R}^n$. Обозначим $|x| = r$, $|t| = \rho$, σ_{n-1} – площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$. Для любой сферически симметричной функции $h_n(|t|) = h_n(\rho) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ имеем

$$\begin{aligned} H_n(|x|) = H_n(r) &= \mathcal{F}_t^{-1}[h_n](x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} h_n(|t|) e^{-i\langle x, t \rangle} dt = \\ &= \frac{\sigma_{n-1}}{(2\pi)^n} \int_0^\infty h_n(\rho) \rho^{n/2} d\rho \int_0^\pi e^{-ir\rho \cos \theta} \sin^{n-2} \theta d\theta = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2} r^{n/2-1}} \int_0^\infty h_n(\rho) \rho^{n/2} J_{n/2-1}(r\rho) d\rho, \end{aligned}$$

где $J_{n/2-1}(r\rho)$ – функция Бесселя первого рода порядка $\nu = n/2 - 1$ [4; 5].

Эта формула справедлива и при $n = 1$, что легко проверить.

Дифференцируя предыдущее равенство по r и учитывая формулу из теории бesselевых функций [12]

$$\frac{vJ_v(rp)}{rp} - J'_v(rp) = J_{v+1}(rp),$$

получаем рекуррентную формулу:

$$H_{n+2}(r) = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial}{\partial r} H_n(r).$$

При использовании этой формулы нам нужно знать ядра $K_n(x, y)$ и $L_n(x, y)$ только для $n = 1$ и $n = 2$.

Преобразование Фурье переводит пространство $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ в себя, ядра $K_n(x, y) = K_n^*(|x|, y)$ и $L_n(x, y) = L_n^*(|x|, y) \forall y \in (0, a)$ являются сферически симметричными функциями от x из пространства $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Свертка (3) существует для любых обобщенных функций медленного роста $\varphi(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $\psi(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ и имеет вид

$$\begin{aligned} & \varphi(x) * K_n(x, y) + \psi(x) * L_n(x, y) = \\ & = (\varphi(t), K_n(x-t, y)) + (\psi(t), L_n(x-t, y)). \end{aligned}$$

Когда $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — обычные функции полиномиального роста, свертка (3) выражается суммой интегралов

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(t) K_n(x-t, y) dt + \int_{\mathbb{R}^n} \psi(t) L_n(x-t, y) dt.$$

Легко проверить выполнимость следующих свойств в области D:

- 1) $K_n(x, y) > 0$;
- 2) $\int_{\mathbb{R}^n} K_n(x, y) dx = 1$;
- 3) для $\forall \delta > 0 \lim_{y \rightarrow +0} \sup_{|x| \geq \delta} K_n(x, y) = 0$.

Эти свойства означают, что $K_n(x, y)$ является аппроксимативной единицей, или δ -образной системой функций от x (с параметром y), и при $y \rightarrow +0$ $K_n(x, y)$ слабо сходится к δ -функции $\delta(x)$. Поскольку

$$\frac{\partial}{\partial y} L_n(x, y) = K_n(x, a-y),$$

то $\partial L_n(x, y)/\partial y$ является аппроксимативной единицей при $y \rightarrow a-0$.

Если $\varphi(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ и $\psi(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, то формула (1) позволяет получить обобщенное решение задачи:

$$\lim_{y \rightarrow +0} u(x, y) = \varphi(x);$$

$$\lim_{y \rightarrow a-0} u_y(x, y) = \psi(x).$$

Если $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – обычные функции полиномиального роста, то в каждой точке непрерывности

$$\lim_{y \rightarrow +0} u(x, y) = \varphi(x); \quad \lim_{y \rightarrow a-0} u_y(x, y) = \psi(x).$$

В случае двух переменных, учитывая четность функций по t ($k_1(|t|, y) = k_1(t, y)$, $l_1(|t|, y) = l_1(t, y)$), находим обратное преобразование Фурье по таблицам [13, с.187, формула (7.112); с. 188, формула (7.116)]:

$$\mathcal{F}_t^{-1}[k_1](x, y) = \frac{1}{a} \frac{\sin(\pi y/2a) \operatorname{ch}(\pi x/2a)}{\operatorname{ch}(\pi x/a) - \cos(\pi y/a)} = K_1(x, y);$$

$$\mathcal{F}_t^{-1}[l_1](x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{\operatorname{ch}(\pi x/2a) + \sin(\pi y/2a)}{\operatorname{ch}(\pi x/2a) - \sin(\pi y/2a)} \right) = L_1(x, y).$$

Если $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – функции полиномиального роста, то решение смешанной задачи выражается интегральной формулой:

$$u(x, y) = \frac{1}{a} \sin(\pi y/2a) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \frac{\operatorname{ch}(\pi(x-t)/2a)}{\operatorname{ch}(\pi(x-t)/a) - \cos(\pi y/a)} dt +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) \ln \left(\frac{\operatorname{ch}(\pi(x-t)/2a) + \sin(\pi y/2a)}{\operatorname{ch}(\pi(x-t)/2a) - \sin(\pi y/2a)} \right) dt.$$

Решение этой задачи известно, но ядро является суммой бесконечного ряда [14, с. 426, формула (7.2.2–8)].

Для трех переменных ядра не могут быть определены через элементарные функции:

$$K_2(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch}(\rho(a-y))}{\operatorname{ch}(a\rho)} \rho J_0(\rho|x|) d\rho;$$

$$L_2(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\operatorname{sh}(\rho y)}{\operatorname{ch}(\rho a)} J_0(\rho |x|) d\rho.$$

Если $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – функции полиномиального роста, то решение смешанной задачи выражается интегральной формулой

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(t) dt \int_0^\infty \frac{\operatorname{ch}(\rho(a-y))}{\operatorname{ch}(\rho a)} \rho J_0(\rho |x-t|) d\rho + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \psi(t) dt \int_0^\infty \frac{\operatorname{sh}(\rho y)}{\operatorname{ch}(\rho a)} J_0(\rho |x-t|) d\rho.$$

И в этом случае решение рассматриваемой задачи известно и ядро является суммой бесконечного ряда [14, с. 479, формула (8.2.2–7)].

В качестве примера применения формулы для двух переменных рассмотрим решение известной задачи теории фильтрации об описании течения под точечной плотиной с водоупором:

$$\Delta u(x, y) = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < y < a; \\ u(x, 0) = \varphi_1, \quad x < 0; \quad u(x, 0) = \varphi_2, \quad x > 0; \\ u_y(x, a) = 0, \quad -\infty < x < \infty.$$

Решением этой задачи будет функция:

$$u(x, y) = \frac{\varphi_1}{a} \sin(\pi y/2a) \int_{-\infty}^0 \frac{\operatorname{ch}(\pi(x-t)/2a)}{\operatorname{ch}(\pi(x-t)/a) - \cos(\pi y/a)} dt + \\ + \frac{\varphi_2}{a} \sin(\pi y/2a) \int_0^\infty \frac{\operatorname{ch}(\pi(x-t)/2a)}{\operatorname{ch}(\pi(x-t)/a) - \cos(\pi y/a)} dt = \\ = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{sh}(\pi x/2a)}{\sin(\pi y/2a)} \right) + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}.$$

Сопряженная гармоническая функция

$$v(x, y) = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2\pi} \ln \left(\frac{\operatorname{ch}(\pi x/2a) + \cos(\pi y/2a)}{\operatorname{ch}(\pi x/2a) - \cos(\pi y/2a)} \right),$$

уравнения линий тока $v(x, y) = \text{const}$ (рис. 3).

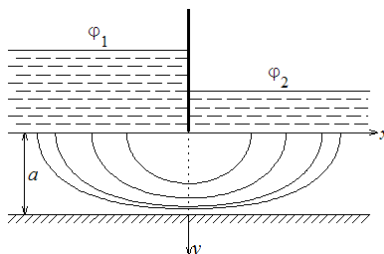


Рис. 3. Фильтрационное течение под точечной плотиной с водоупором.

В заключение отметим, что преобразование Фурье позволяет решать и другие краевые задачи для уравнения Лапласа (например, задачу Дирихле для четверти пространства, для бесконечного слоя и др.).

ЛИТЕРАТУРА:

1. Волков И.К., Канатников А.Н. Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1996. 227 с. (Математика в техническом университете, вып. XI).
2. Комеч А.И. Линейные уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами. // Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики: Фундаментальные направления. 1988. Т. 31. С. 127–261.
3. Радыгин В.М., Голубева О.В. Применение функций комплексного переменного в задачах физики и техники. М.: Высшая школа, 1983. 160 с.
4. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979. С. 320.
5. Бохнер С. Лекции об интегралах Фурье. М.: Физматгиз, 1962. С. 360.
6. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. С. 1108.
7. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1965. С. 716.
8. Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974. С. 336.
9. Голубева О.В. Курс механики сплошных сред. М.: Высшая школа, 1972. С. 367.
10. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. С. 664.
11. Алгазин О.Д., Копаев А.В. Решение смешанной краевой задачи для уравнения Лапласа в многомерном бесконечном слое. // Вестник МГТУ им. Н.Э.Баумана. Сер. «Естественные науки». 2015. № 1. С. 3–13.
12. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1999. С. 798.

13. Диткин В.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: Физматгиз, 1961. С. 524.
14. Полянин А.Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. М.: Физматлит, 2001. С. 576.

НАУЧНАЯ ЖИЗНЬ

МАТЕРИАЛЫ КОНФЕРЕНЦИИ

УДК 621.38

Беляев В.В., Костицына Л.И.

Московский государственный областной университет

МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ «ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МАТЕРИАЛОВ И ДИСПЕРСНЫХ СРЕД ДЛЯ ЭЛЕМЕНТОВ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ, НАНОЭЛЕКТРОННЫХ ПРИБОРОВ И ЭКОЛОГИЧНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ»

Аннотация. Статья информирует о наиболее значительных мероприятиях и научных сообщениях, состоявшихся во время проведения в МГОУ Международной конференции «Физические свойства материалов и дисперсных сред для элементов информационных систем, нанoeлектронных приборов и экологичных технологий», состоявшейся 21 – 24 апреля 2015 г. Особое внимание уделено мемориальной секции, посвященной 100-летию со дня рождения профессора Ольги Владимировны Голубевой, заведовавшей кафедрой теоретической физики МОПИ (МГОУ) в 1955–1975 гг.

Ключевые слова: материалы, дисперсные среды, элементы информационных систем, нанoeлектронные приборы, экологичные технологии, профессор Ольга Владимировна Голубева

V. Belyaev, L. Kostitsyna

Moscow State Regional University (Moscow, Russia)

INTERNATIONAL CONFERENCE “PHYSICAL PROPERTIES OF MATERIALS AND DISPERSE MEDIA FOR ELEMENTS OF INFORMATION SYSTEMS, NANOELECTRONIC DEVICES AND ‘GREEN’ TECHNOLOGIES”

Abstract. The paper presents the most important events and scientific workshops held at the Moscow State Regional University (MSRU) from 21 to 25 April 2015 during the International Conference on “Physical Properties of Materials and Disperse Media for Elements of Information Systems, Nanoelectronic Devices and ‘Green’ Technologies”. Special attention has been paid to a memorial session devoted to the 100th anniversary by prof. Olga V.

© Беляев В.В., Костицына Л.И., 2015.

Golubeva, the Head of the Theoretical Physics Department at the Moscow Regional Teachers Training Institute (MSRU) in 1955–1975.

Keywords: materials, disperse media, elements of information systems, nanoelectronic devices, “green” technologies, prof. Olga V. Golubeva.

С 21 по 24 апреля 2015 г. в МГОУ состоялась Международная конференция «Физические свойства материалов и дисперсных сред для элементов информационных систем, нанoeлектронных приборов и экологических технологий», поддержанная грантом РФФИ № 15–07–20168 г. Председатель оргкомитета конференции – зав. кафедрой теоретической физики, д.т.н., проф. В.В. Беляев председатель программного комитета – профессор кафедры теоретической физики, д.ф.–м.н. М.М. Кузнецов. Большую помощь в организации и проведении конференции оказали ректорат МГОУ и различные службы – бухгалтерия, планово-экономический отдел, управление информационных технологий, АХЧ. Особо следует отметить информационно – издательское управление, в короткий срок напечатавшее сборник с программой и тезисами докладов.

В конференции приняли участие более 200 студентов, аспирантов, преподавателей и учёных. Авторами докладов были сотрудники из разных организаций России, Белоруссии, Грузии, Армении, Казахстана, Республики Корея, Великобритании, Китая, Чили, Израиля и других стран.

На конференции были представлены следующие секции:

ЖК материалы и дисплеи, другие неизлучательные дисплеи

Элементы информационных систем (дисплеи, преобразователи, оптические пленки и др.)

Физика дисперсных жидких и газообразных сред

Физика и технология жидких кристаллов и материалов органической электроники

Материалы и технологии устройств нанoeлектроники

Методы исследования физических свойств материалов

Современные системы отображения информации

Электроника, эргономика и прикладное зрение, системы, приложения, рынков.

Во время конференции была проведена молодежная школа с докладами ведущих ученых современных проблемх по тематике конференции:

- Беляев В.В., МГОУ, «К Международному Году света. Основы светотехники. Об изобретении светодиодов»;
- Компанец И.Н., Физический институт РАН им. П.Н. Лебедева, «Методы и устройства для формирования объемного изображения»;
- Рюмцев Е.И., Санкт-Петербургский государственный университет «Жидкие кристаллы – современные средства отображения информации»;
- Чилая Г.С., Институт кибернетики Тбилисского государственного университета, Грузия, «Жидкие кристаллы со спиральной структурой»;

Выступающие представили новые результаты, полученные в вузах, институтах РАН и отраслевых НИИ, частных компаниях, таких как Институт кристаллографии им. А.В. Шубникова РАН, МФТИ, АО «ГОИ им. С.И. Вавилова», Санкт-Петербургский электротехнический университет (ЛЭТИ), Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт», Санкт-Петербургский государственный университет, Орловский государственный университет, Ульяновский государственный технический университет, Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова, Центральный аэрогидродинамический институт имени профессора Н.Е. Жуковского, Объединённый институт высоких температур РАН, Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирский государственный технический университет, Институт физики Дагестанского научного центра РАН, ОАО «Раменское приборостроительное конструкторское бюро», Санкт-Петербургский государственный технологический институт (технический университет), Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Поволжский государственный технологический университет, Республика Марий Эл и др.

21 апреля была вручена медаль им. В.К. Фредерикса Жидkokристаллического общества «Содружество» профессору Ю.Г. Галяметдинову, (Казанский национальный исследовательский технологический университет), за выдающиеся достижения в области химии

жидких кристаллов. А 22 апреля профессору И.Н. Компанцу (ФИАН) был вручен диплом им. Б.Л. Розинга (изобретатель первого российского электронного дисплея), присуждаемый российским отделением Международного дисплейного общества (SID) за выдающийся вклад в развитие дисплейных технологий и деятельность SID.

23 апреля в рамках мероприятия состоялось отчетно-выборное собрание российского отделения Международного дисплейного общества (SID). На нем был представлен отчетный доклад директора отделения В.В. Беляева, выбраны руководители отделения и члены комитета, намечены пути развития.

Наряду с секциями, объединяющими доклады по физической и технической тематике, на конференции была организована мемориальная секция, посвящённая 100-летию со дня рождения профессора Ольги Владимировны Голубевой, заведовавшей кафедрой теоретической физики в нашем вузе более 20 лет.

Её работы опередившие время и получившие практическое применение в XXI веке, заложили фундамент научной школы по теории фильтрации и механики сплошных сред, пустившей научные корни во многих городах России и зарубежья.

О выдающейся роли этого ученого в жизни нашего вуза и в жизни выпускников его аспирантуры на конференции рассказали многочисленные ученики О.В. Голубевой, ставшие профессорами в вузах и исследовательских институтах. Воспоминания опубликованы в сборнике конференции. Кроме того, участники конференции посетили места захоронения проф. О.В. Голубевой и проф. Ю.И. Яламова.

Научная школа проф. О.В. Голубевой не просто жива, она интенсивно прирастает кандидатами наук, аспирантами и студентами новых поколений.

Конференция показала высокий уровень работ, выполняемых сотрудниками МГОУ, значительную кооперацию с организациями России, СНГ, зарубежных стран, интенсивную работу с молодыми учеными, аспирантами, студентами.

ФУДК 532.5+539.3+532.517+532.546

Черняев А.П.

Московский физико-технический институт (технический университет)

**О НАУЧНОМ НАСЛЕДИИ О.В. ГОЛУБЕВОЙ ПО НАПРАВЛЕНИЮ
«ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ В ПЛЕНКАХ ПЕРЕМЕННОЙ
ТОЛЩИНЫ НА КРИВОЛИНЕЙНЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ»
И СОВРЕМЕННОМ СОСТОЯНИИ НАУКИ**

Аннотация. Статья посвящена 100-летию со дня рождения О.В. Голубевой, заведующей кафедрой теоретической физики МОПИ-МГОУ в 1955–1975 гг. Статья содержит обзор научной деятельности О.В. Голубевой и оценку значимости полученных ею результатов для современной науки и техники. В области механики сплошных сред она изучала движения жидкости в пленках переменной толщины, расположенных на криволинейных поверхностях. Поскольку решения точно удовлетворяли уравнениям, то они описывали как гидродинамические задачи, так и двумерные задачи фильтрации, теплопроводности, электростатики, диффузии и т. д. в неоднородных средах. Это открывает широкое применение теории этих уравнений в разнообразных задачах, выдвигаемых современной практикой.

Ключевые слова: жидкость, течение, слой, поверхность, фильтрация, пласт, потенциал

A. Chernyaev

Moscow Institute of Physics and Technology (State University) (Moscow, Russia)

**ON THE SCIENTIFIC HERITAGE OF PROFESSOR OLGA V. GOLUBEVA IN
THE DIRECTION OF “FLUID MOVEMENT IN FILMS OF VARIABLE
THICKNESS ON CURVED SURFACES” AND THE STATE-OF-THE-ART
OF THIS SCIENCE**

Abstract. The paper presented is devoted to the 100th anniversary of Professor Olga Golubeva, who headed the Chair of the Theoretical Physics Department at the Moscow Regional Teachers Training Institute (at present, Moscow State Regional University, MSRU). The paper comprises a review of her research activity and its impact on modern science and technology. In the field of continuum mechanics, she studied the motion of fluids in films of variable thickness located on curved surfaces. Since the solutions exactly satisfy the equations, they described hydrodynamic problems as well as two-dimensional problems of filtration, thermal conductivity, electrostatics, diffusion, etc. in inhomogeneous media. This enables a broad application of her theory in a variety of tasks challenged by modern practice.

Keywords: fluid, flow, stratum, surface, filtration, reservoir, potential.

В настоящее время наиболее известной работой профессора Ольги Владимировны Голубевой является ее знаменитый учебник «Курс механики сплошных сред» 1972 г. [1]. Между тем, вклад Ольги Владимировны в науку и образование велик и его трудно переоценить. У нее было очень много научных результатов и очень много учеников, защитивших под ее руководством кандидатские и докторские диссертации.

Я стал учеником Ольги Владимировны, когда пришел на ее научный семинар в ИПМ (Институт проблем механики), который работал под руководством академика Пелагеи Яковлевны Кочиной и профессора Ольги Владимировны Голубевой, и сразу включился в научную деятельность Ольги Владимировны.

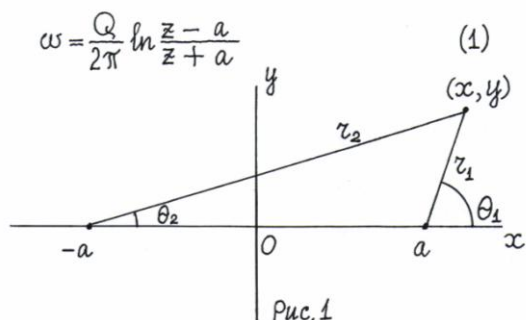
Одним из важных аспектов педагогической деятельности Ольги Владимировны была жесточайшая критика результатов своих учеников, но это было на фоне воспитания своим личным примером.

Значительное место в научном творчестве Ольги Владимировны Голубевой занимали задачи подземной гидродинамики напорной фильтрации жидкости к совершенным скважинам, расположенным в горизонтальных пластах. Имеется в виду, что задана линия равного потенциала (граница области питания), заданы круговые линии равного потенциала (или границы эксплуатационных и нагнетательных скважин), вдоль которых расход жидкости не равен нулю, заданы значения потенциалов на границе области питания и границах скважины [2]. По указанным данным требуется определить количество жидкости, протекающее через границу скважины (дебит скважины на единицу мощности пласта). Такая задача решается построением комплексного потенциала, удовлетворяющего граничным условиям.

Однако в общем случае построение указанного комплексного потенциала представляет весьма сложную задачу. Поэтому такая задача решается приближенно: строится комплексный потенциал, удовлетворяющий только условию на границе области питания. Особыми точками этого комплексного потенциала являются внутри области питания стоки (или источники), расположенные в центрах скважин, которые они

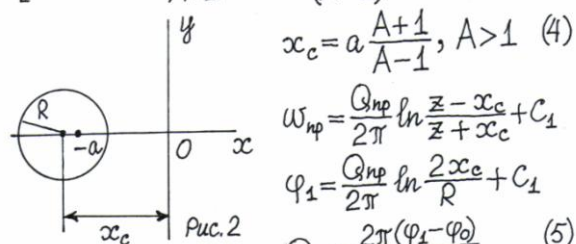
моделируют. Мощности стоков (определяющие дебиты скважин) и аддитивная постоянная определяются из граничных условий, причем границы скважин считаются уже приближенно линиями равного потенциала. В [2] указывается, каков физический смысл сделанного допущения и на примерах, для которых известно точное решение, количественно оценивается ошибка в определении дебитов, которая получается при приближенном решении. Указанное упрощенное решение задачи о фильтрации жидкости к скважинам, однако, не всегда может быть осуществлено, ибо если граница области питания является не простейшей кривой, то не удастся даже в упрощенном виде построить комплексный потенциал. Поэтому в [2] рассматривается вопрос, каково влияние вида границы области питания на дебит скважины, и в связи с этим решается вопрос, насколько допустимо грубо моделировать границы области питания простейшими кривыми. В работе [2] установлена допустимость различных предположений при расчете работы скважин в природных условиях.

Для иллюстрации сказанного приведем фрагмент работы [2] о сравнении точного и приближенного значений дебитов скважин при прямолинейном контуре питания (рис. 1).



$$z-a = r_1 e^{i\theta_1}, \quad z+a = r_2 e^{i\theta_2}, \quad \varphi = \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{r_1}{r_2} + C_1 \quad (2)$$

$$\frac{r_1^2}{r_2^2} = A, \quad \left(x+a\frac{A+1}{A+2}\right)^2 + y^2 = \frac{4Aa^2}{(A-1)^2}, \quad A \neq 1 \quad (3)$$



$$x_c = a \frac{A+1}{A-1}, \quad A > 1 \quad (4)$$

$$\omega_{np} = \frac{Q_{np}}{2\pi} \ln \frac{z-x_c}{z+x_c} + C_1$$

$$\varphi_1 = \frac{Q_{np}}{2\pi} \ln \frac{2x_c}{R} + C_1$$

$$Q_{np} = \frac{2\pi(\varphi_1 - \varphi_0)}{\ln 2k} \quad (5)$$

$$k = \frac{x_c}{R} = \frac{A+1}{2\sqrt{A}}, \quad \sqrt{A} = k + \sqrt{k^2 - 1}, \quad Q = \frac{2\pi(\varphi_1 - \varphi_0)}{\ln \sqrt{A}} \quad (6)$$

$$Q/Q_{np} = \ln(2k)/\ln(k + \sqrt{k^2 - 1}) > 1 \quad (7)$$

Если расположить в точках действительной оси a и $-a$ источник и сток равной мощности Q , то комплексный потенциал, описывающий течение, будет иметь вид (1), откуда потенциал течения определится формулой (2). Тогда линии равного потенциала задаются формулами (3). При $A > 1$ линиями равного потенциала будут окружности, центры которых расположены на отрицательной части оси x , и определяются (4), рис. 2. Отсюда ясно, что центры окружностей равного потенциала смещены влево от стока, расположенного в точке $-a$. Т. о., формула (2) дает точное решение задачи о притоке жидкости к скважине, которая моделируется окружностью с центром в (4) и радиуса R со значением потенциала φ_1 (так на практике задается забойное давление) и прямолинейным контуром питания – осью

ординат со значением потенциала $\varphi_0 = C_1$. Записав формулы для комплексного потенциала и потенциала течения аналогичного (1), но с источником в точке (4) и стоком в симметричной относительно оси ординат точке и мощностью Q_{np} , найдем приближенную формулу определения дебита круговой скважины при прямолинейном контуре питания (5). Сравнив ее с точной формулой (6), которая следует из (2) и (3), получим формулу сравнения точного и приближенного дебитов (7), откуда следует, что приближенная формула вычисления дебита скважины (5) дает заниженный по сравнению с точной формулой (6) результат.

В работах Ольги Владимировны Голубевой в области двумерных задач механики сплошных сред изучались стационарные движения жидкости в пленках переменной толщины, расположенных на криволинейных поверхностях задаваемых, уравнениями [3]. Интерес изучения таких уравнений определялся тем, что они описывают как гидродинамические задачи, так и двумерные задачи фильтрации, теплопроводности, электростатики, диффузии и т. д. в неоднородных средах. Это открывает широкое применение теории этих уравнений в разнообразных задачах, выдвигаемых практикой. Указанные уравнения имеют достаточно сложный вид, и их интеграция при заданных граничных условиях представляет собой сложную проблему, однако выбор на поверхности изотермической координатной сети значительно упрощает первоначальные уравнения. На этих упрощенных уравнениях [3], в основном, и сосредоточились силы Ольги Владимировны и ее учеников.

К вопросам нестационарных двумерных потенциальных течений идеальной несжимаемой жидкости, что также в значительной степени интересовало Ольгу Владимировну Голубеву, относится изучение движения особых точек, находящихся в поле скоростей, ими создаваемых [4]. Эти вопросы могут представить интерес в метеорологии [5]. Изучаемые в [4] течения характерны существованием функции тока, которая удовлетворяет определенному уравнению [6]. В [4] изучаются течения, являющиеся суммами подвижных и неподвижных особых точек, которые представлены своими функциями тока. Интегралы уравнений движения этих особых точек играют

существенную роль в рассматриваемом процессе и поэтому детально изучаются [4]. В качестве особых точек рассматриваются вихреисточники, и на этом основании делаются выводы о течениях источников, стоков и вихрей.

При изучении практически важного и очень сложного для теоретического решения вопроса о продвижении границы раздела двух несмешивающихся жидкостей различной вязкости Ольгой Владимировной Голубевой были указаны два последовательных приближенных метода решения этой задачи в общем виде [7].

В первом приближении при решении этого вопроса предполагается, что физические свойства жидкостей идентичны (система одножидкостная). Физическими условиями на поверхности раздела жидкостей различной вязкости являются условия непрерывности давления и нормальных скоростей. Однако вопрос о продвижении границы раздела жидкостей значительно упрощается, если непрерывность нормальных скоростей заменить равенством векторов скоростей на границе раздела жидкостей. Это условие означает, что на границе раздела жидкостей отсутствует преломление линий тока. В случае течений со стационарными линиями тока это условие равносильно гипотезе жестких трубок тока. Задачу о продвижении границы раздела жидкостей при условиях непрерывности давления и нормальных скоростей можно интерпретировать как второе приближение рассматриваемого вопроса.

Для рассмотрения течений при жестких трубках тока (второе приближение) Ольга Владимировна Голубева считает, что задача уже решена в первом приближении, т. е. найдены линии тока первого приближения и граница раздела жидкостей, как одна из них. Далее предполагаем, что граница раздела двух жидкостей, удовлетворяет условию сохраняемости трубок тока. Построению второго приближения в более простом случае, когда интегрирование заменяется обращением функции тока и потенциала скорости посвящена работа [8].

Физические процессы, протекающие в движущихся средах, которые можно моделировать как сплошные, характеризуются Ольгой Владимировной Голубевой некоторым скалярным полем [9]. Этим полем может быть потенциал скорости при изучении течений идеальной жидкости, приведенное

давление при изучении фильтрационных течений, температурное поле при изучении распространения тепла, потенциал при изучении электрических полей и т. д. Характерными свойствами неподвижной среды являются ее однородность или неоднородность. Неподвижная среда может быть изотропной или анизотропной. Наконец, внешняя неподвижная среда может изменять свои свойства в зависимости от величины скорости. При теоретическом изучении динамических процессов, протекающих в движущихся сплошных средах, при заданных граничных условиях необходимо знание законов, связывающее указанное выше скалярное поле с векторным полем скоростей.

В работе [10] Ольга Владимировна Голубева приводит уравнения, описывающие диффузию компоненты однофазной смеси, фильтрующейся в грунтах, при этом используя общепринятые в этих вопросах характеристики. Также разобраны некоторые частные случаи уравнения диффузии.

Стационарные динамические процессы, протекающие в неоднородных средах, рассмотренные в [11], например фильтрация жидкости, поток тепла и т. д., в распространенных ситуациях описываются векторным уравнением первого порядка и равенством дивергенции скорости нулю. Здесь коэффициент первого уравнения – симметричный тензор второго ранга – характеризует анизотропию среды (а также неоднородность и другие свойства среды). Предполагается, что среда остается неизменной при изменении направления скорости на противоположное. Предполагается также существование ортогональных главных направлений. Подробно разбирается двумерный случай.

В области научных интересов Ольги Владимировны Голубевой всегда были различные фундаментальные вопросы теории динамических процессов в анизотропных средах [12; 13]. Двумерные линейные стационарные динамические процессы, такие как фильтрация, теплопроводность, явления в электрических и магнитных полях, в предельном случае течения идеальной жидкости описываются вектором скорости и некоторым скаляром, которые связаны между собой уравнениями, содержащими симметричный тензор второго ранга, характеризующий среду, где протекает процесс. В двумерном

случае существует функция тока и уравнения процессов на плоскости записываются в виде линейной системы, обобщающей систему Коши-Римана [2; 3]. Эти уравнения инвариантны относительно конформных преобразований, что очень удобно для построений аналогичных процессов на различных поверхностях и плоскостях в изотермических координатах. Изучены случаи возможных упрощений полученной системы.

Приведенные в [12; 13] решения задач о процессах в кусочно-однородных и анизотропных средах представляют собой соответствующие теоремы. Значение их и интерес заключаются в том, что в сочетании с конформными преобразованиями они позволяют решать широкий круг практически важных задач.

Очень большой научный интерес Ольга Владимировна испытывала к, так называемым формулам перехода динамических процессов [1; 14–16]. Это научное направление возникло потому, что построение потенциальных течений идеальной жидкости в пленках переменной толщины в каждом конкретном случае функциональной зависимости этой толщины представляет значительные трудности. Однако можно указать пленки, обладающие различными законами, течения в которых связаны так, что, зная течения в одной пленке, можно построить аналогичные течения в другой пленке [1, с. 204]. Такой переход может быть осуществлен различным образом. Совокупность таких переходов можно назвать методами перехода, а соответствующие формулы – формулами перехода. Значение последних заключается в том, что можно указать серию слоев, построение течений в которых нуждается в нахождении решений только одного уравнения. Для обобщенных систем Коши-Римана эта теория разработана в [1]. Там же приведены множественные конкретные примеры этой теории. Далее О.В. Голубева обобщала эти формулы перехода для более общих уравнений линейных стационарных динамических процессов [16], описывающих соответственно фильтрационные, тепловые, электростатические магнитные и другие поля. Двумерные дифференциальные уравнения их в изотермических переменных при процессах в анизотропных средах, отвечающих симметричному тензору коэффициентов, будут иметь довольно общий вид

[14]. Построение решений, имеющих физический смысл, этих достаточно общих уравнений благодаря, полученным О.В. Голубевой формулам перехода, аналогично построению соответствующих решений для обобщенных систем Коши-Римана. Интересны также своеобразные алгебраические свойства полученных формул перехода [15].

Поскольку многие физические процессы, такие как линейная фильтрация, теплопроводность, электрическое поле, поток постоянного тока и т. д., при стационарности процесса описываются векторным полем скоростей и скалярным полем, которые, в свою очередь, связаны линейными уравнениями связи скорости и градиента скалярного поля с коэффициентом пропорциональности, являющимся тензором, характеризующим анизотропные и неоднородные свойства среды, а поле скоростей безвихревое, то в [17] рассматриваются динамические процессы, описываемые квазианалитическими функциями. Они рассматриваются в двумерном случае. Приводится каноническая форма двумерных уравнений. Основными особыми точками, при помощи которых решаются те или иные краевые задачи, являются источник-сток, вихри, мультиполи в конечных точках и бесконечно удаленной точке.

В статье практического характера [18] рассматривается работа скважин в потоке грунтовых вод в различных ограниченных пластах. Изучаются вопросы чистоты и степени загрязнения и засоления скважин. Применение конформных и квазиконформных преобразований решает серию однотипных задач в изотропных и анизотропных слоях. На одной части границы по предположению находятся воды засоленного моря, а на другой – воды загрязненной реки. Свободный поток чистых подземных вод стекает в открытые бассейны, ограничивающие пласт, в котором работает эксплуатационная скважина. В статье вычисляются условия работы скважины без засоления и загрязнения. При нарушении этих условий устанавливается степень засоления и загрязнения скважины в зависимости от режима ее работы.

Эксплуатация подземных жидкостей играет важную роль в народном хозяйстве, обеспечивая промышленность и население водой, нефтью и газом.

Процессы загрязнения и заводнения этих жидкостей, благодаря воздействию человека на их естественное течение, приводят к нежелательным последствиям, которые необходимо предвидеть, чтобы их предотвратить. В статье [19] исследуется вопрос продвижения границы раздела различных жидкостей в простейшей модели. Процесс предполагается двумерным, граница раздела жидкостей не размыта, и различием физических свойств соприкасающихся жидкостей О.В. Голубева пренебрегает.

Построенную теорию Ольга Владимировна постоянно пыталась применить к практическим задачам [20], где решается проблема расчета времени осушения поверхности затопленных земель дренажами и области промывки грунтов поверхностными водами. Поверхность земли может быть покрыта слоем воды в силу каких-либо естественных условий либо намеренно затоплена в целях промывки загрязненных или засоленных грунтов. Дренажные устройства, в качестве которых принимается система параллельных дренажных труб, расположенных в земле, осушают поверхность земли. Процесс представляет собой фильтрацию жидкости в грунте, и в работе принята модель, на основе которой можно произвести расчет процесса: грунт однороден и изотропен, процесс квазистационарен, подчиняется закону Дарси, плоскопараллельный, происходящий в вертикальной плоскости, перпендикулярной к системе параллельных дренажных труб. Отсюда, процесс описывается комплексным потенциалом в указанной плоскости. Квазистационарность процесса определяется тем, что напряжение особых точек синхронно меняется от времени, не влияя на вид действительной и мнимой частей комплексного потенциала, зависящих только от координат. Следовательно, геометрическая картина процесса остается неизменной и только меняется синхронно со временем поле скоростей, в котором время играет роль параметра. Моделируя поверхность грунта горизонтальной плоскостью, предположим, что дренирующие трубы расположены в плоскости параллельной поверхности грунта, их диаметры пренебрежимо малы по сравнению с расстоянием труб до поверхности грунта, расстояние между соседними трубами одинаково и принято за единицу в безразмерных уравнениях.

Загрязнение подземных жидкостей представляет одну из важных проблем современности, модель которой, математическая постановка задачи и пути ее решения излагаются в статье [21]. Рассматривается напорная фильтрация при заданных граничных условиях и расположении скважин, для которых заданы давления на границах или их дебиты. Фильтрация представляет собой вытеснение одной жидкости другой жидкостью. Вязкости жидкостей различны, жидкости не смешиваются и граница их раздела некоторая поверхность. Физическими условиями на границе раздела должны предполагаться равенства давлений и нормальных скоростей фильтрации при подходе к границе с разных сторон. Примем гипотезу жестких трубок тока, при которой линии тока остаются неизменными при течении однородной жидкости и жидкостей с различной вязкостью, что влечет за собой равенство скоростей на границе раздела. Но это возможно только при равенстве вязкостей или пренебрежении различием вязкости жидкости, тогда продвижение границы раздела жидкостей представляет собой движение отдельных частиц. Сохраняя гипотезу жестких трубок тока, можно приближенно учесть различие вязкостей, если положить, что точки границы раздела жидкостей будут полусуммой точек границ, подсчитанных при движении однородных жидкостей различных вязкостей.

В итоге, на основании изложенного, можно заключить, что Ольга Владимировна Голубева не только выдающийся ученый-механик своего времени, но и основатель своей научной школы гидродинамики. Ее научные направления весьма актуальны, результаты содержательны, а методы исследования очень перспективны. Для нас, учеников Ольги Владимировны, она навсегда останется примером служения науке.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Голубева О.В. Курс механики сплошных сред: Учеб. Пособ. для педвузов. М.: Высшая школа, 1972. С. 368.
2. Голубева О.В. О моделировании работы скважин при напорной фильтрации жидкости в горизонтальных пластах // Ученые записки МОПИ им. Н.К. Крупской. Т. 99. Тр. каф. Физики. Вып. 5. М., 1961. С. 3–21.

3. Голубева О.В. О работах в области механики сплошных сред коллектива кафедры теоретической физики МОПИ им. Н.К. Крупской // Ученые записки МОПИ им. Н.К. Крупской. Т. 200. Теоретическая физика. Вып. 7. М., 1968. С. 5–11.
4. Голубева О.В. Некоторые интегралы уравнений движения особых точек // Ученые записки МОПИ им. Н.К. Крупской, Т. 299. Гидромеханика. Вып. 1. М., 1971. С. 3–11.
5. Голубева О.В. К движению особых точек вблизи препятствий // Ученые записки МОПИ им. Н.К. Крупской, Т. 227, ч. 1, Вып. 9. М., 1970.
6. Голубева О.В. Некоторые задачи ламинарной фильтрации в неоднородных искривленных слоях переменной толщины // Прикладная математика и механика. Изд-во АН СССР. Т. 27, вып. 4.
7. Голубева О.В. Два приближенных решения задачи о продвижении границы раздела различных жидкостей // Сборник научных трудов. Гидромеханика. МОПИ им. Н.К. Крупской, Вып. 2. М., 1973. С. 3–9.
8. Голубева О.В. К вопросу о продвижении границы раздела жидкостей различной вязкости // Калининградский Университет, труды кафедры теоретической и экспериментальной физики, Вып. 3. 1970.
9. Голубева О.В. К вопросу об уравнениях динамических стационарных процессов сплошных сред // Гидромеханика. Сборник трудов. МОПИ им. Н.К. Крупской. Вып. 3. М., 1974. С. 12–17.
10. Голубева О.В. Уравнения диффузии в фильтрационных потоках // Гидромеханика. Сборник трудов. МОПИ им. Н.К. Крупской. Вып. 4. М., 1975. С. 5–7.
11. Голубева О.В. К вопросу о двумерных процессах в неоднородных средах // Гидромеханика. Сборник трудов. МОПИ им. Н.К. Крупской. Вып. 4. М., 1975. С. 8–10.
12. Голубева О.В. Двумерные динамические процессы в анизотропных средах // Прикладная математика и механика. 1980. Т. 41, Вып. 1. С. 166–171.
13. Голубева О.В. Теоремы о динамических процессах в анизотропных средах // Проблемы математики в физико-технических задачах: Междувед. сб. / М: МФТИ, 1987. С. 39–44.
14. Голубева О.В. Задачи фильтрации в анизотропных средах (Математика и проблемы водного хозяйства). Киев: Наукова Думка, 1986. С. 57–63.
15. Радыгин В.М., Голубева О.В. Применение функций комплексного переменного в задачах физики и техники. М.: Высшая школа, 1983. С. 160.
16. Голубева О.В. Формулы перехода динамических процессов // Некоторые проблемы математики в задачах физики и механики: Междувед. сб. / М: МФТИ, 1988. С. 37–41.
17. Голубева О.В., Хмельник М.И. Динамические процессы, описываемые квазианалитическими функциями // Теория гидродинамических моделей технических задач: Сб. науч. трудов / Свердлов. пед. ин-т. Свердловск, 1988. С. 9–16.
18. Голубева О.В., Петров Н.П. Засоление и загрязнение скважин // Теория гидродинамических моделей технических задач: Сб. науч. трудов / Свердлов. пед. ин-т. Свердловск, 1988. С. 16–22.

19. Голубева О.В. Уравнения границы раздела однородных подземных жидкостей и метод их интеграции // Проблемы современной математики в задачах физики и механики: Междувед. сб. / М: МФТИ, 1989. С. 63–66.
20. Голубева О.В. Расчет осушения поверхности затопленных земель дренажами // Некоторые проблемы математики в задачах физики, механики, экономики: Междувед. сб. / М. МФТИ, 1990. С. 46 – 54.
21. Голубева О.В. Модель продвижения границы раздела различных жидкостей при фильтрации // Задачи технической гидродинамики (Материалы совещания секции физики Московского общества испытателей природы по гидродинамике). М.: Наука, 1991. С. 51–55.

УДК 535.8; 535.015; 535.016; 544.032

Каманина Н.В.¹, Кухарчик А.А.^{1,2}, Кужаков П.В.¹,
Зубцова Ю.А.¹, Лихоманова С.В.^{1,3}, Шурпо Н.А.¹,
Серов С.В.¹, Студенов В.И.¹, Васильев П.Я.¹

¹АО «ГОИ им.С.И.Вавилова», отдел «Фотофизика сред с нанообъектами»

²Санкт-Петербургский электротехнический университет («ЛЭТИ»)

³Санкт-Петербургский государственный университет
информационных технологий, механики и оптики

ВЛИЯНИЕ ПРОЦЕССА СТРУКТУРИРОВАНИЯ ОБЪЁМА И ПОВЕРХНОСТИ МАТЕРИАЛОВ, ВКЛЮЧАЯ ЖИДКИЕ КРИСТАЛЛЫ, НА СПЕКТРАЛЬНЫЕ, СТРУКТУРНЫЕ И ФОТОРЕФРАКТИВНЫЕ СВОЙСТВА

Аннотация. В настоящей работе рассмотрено влияние нано- и биоструктурирования объема тонких пленок полимерных и жидкокристаллических композитов, а также модификации рельефа поверхности на границе раздела твердая подложка – наноструктура, на спектр пропускания, самоорганизацию, совершенствование фотопроводниковых и фоторефрактивных параметров ряда систем, применяемых в оптоэлектронике, дисплейной технике и биомедицине.

Ключевые слова: наноструктурирование, нанообъекты, биообъекты, мезофаза, органические материалы, жидкие кристаллы, фоторефрактивные свойства, поверхность, граница раздела, взаимодействие лазерного излучения с веществом.

N. Kamanina^{1,2}, A. Kukharchik^{1,2},
P. Kuzhakov¹, Yu. Zubtcova¹, S. Likhomanova^{1,3}, N. Shurpo¹,
S. Serov¹, V. Studeonov¹, P. Vasilyev¹

¹Vavilov State Optical Institute (Saint-Petersburg, Russia)

²Saint Petersburg Electrotechnical University «LETI» (Saint-Petersburg, Russia)

³ITMO University (Saint-Petersburg, Russia)

INFLUENCE OF THE STRUCTURING PROCESS OF THE BULK AND SURFACE OF MATERIALS, INCLUDING LIQUID CRYSTALS, ON THEIR SPECTRAL, STRUCTURAL AND PHOTOREFRACTIVE PROPERTIES

Abstract. We consider the influence of nano- and biostructuring of the bulk of thin polymer films and liquid crystals as well as the modification of the solid substrate-nanostructure interface on the transmission spectrum, self-assembly, improvement of photoconductive and photorefractive properties of a number of systems that can be applied in the optoelectronics, display equipment and biomedicine.

Keywords: nanostructuring, nano-objects, bio-objects, mesophase, organic materials, liquid crystals, photorefractive properties, surface, interface, laser– matter interaction.

Введение

Известно, что после открытия эффективных современных нанообъектов – фуллеренов (1985 г.) и углеродных нанотрубок (1991 г.), с началом использования последующего ряда других наноструктур, как-то: квантовые точки, графены, шунгиты, нановолокна, нанопроволоки, J-агрегаты, а также с применением ДНК и др. био объектов многие научные и научно-технические группы стали детально, теоретически и экспериментально изучать свойства органических и неорганических материалов, объём которых и граница раздела сред эффективно модифицируются данными типами нано- и биообъектов [1–12]. Этому способствует и тот факт, что современные инновационные разработки широко используются в наукоёмких технологических процессах, что стимулирует указанные выше скрупулёзные исследования в области изучения физико-химических свойств новых материалов, включая жидкие кристаллы, и поверхностей раздела. Однако, несмотря на большое количество работ в указанной области исследования, проблема нахождения новых подходов к структурированию объёма мезофазы и границы раздела сред, расширения перспектив их использования, является актуальной, решение задач с нею связанных, – своевременным. Наши собственные исследования в данном направлении занимают определённую нишу [13–25].

Стоит сказать, что основная причина использования фуллеренов, квантовых точек, шунгитов связана с их развитой поверхностью, уникальной системой энергетических уровней, а также высоким значением сродства к электрону [3–5; 15–17]. Так, сродство к электрону фуллеренов C_{60} и C_{70} ~ 2.65 – 2.7 эВ, сродство к электрону шунгита ~ 2 эВ, таковая величина для квантовых точек находится в диапазоне значений 3.8 – 4.2 эВ. Заметим, что шунгиты имеют довольно большой собственный дипольный момент [26], существенно превышающий таковой у фуллеренов. Основные преимущества использования углеродных нанотрубок обусловлены высокой прочностью их C—C связей [11; 27], а также комплексными механизмами переноса носителей

заряда [24]. Такие особенности наночастиц делают их необычайно интересным объектом формирования новых областей изучения материалов и поиска инновационных практических приложений оптоэлектроники и дисплейной техники. Что касается биочастиц, то актуальность их исследования вызвана возобновляемостью из Мирового океана, а также близостью ряда величин, скажем, по фоторефрактивным параметрам, к таковым, установленным для материалов с наноструктурами [28–33].

Экспериментальные условия

Поскольку основной акцент в данной работе делается на изменение фоторефрактивных особенностей, а также коррелирующие с ними спектральные, структурные, фотопроводниковые изменения мезофазы вещества, то базовые эксперименты были связаны с измерением дифракционной эффективности в первом порядке дифракции тонкоплёночных систем, тестируемых в режиме дифракции Рамана-Ната на пространственных частотах $90\text{--}150\text{ мм}^{-1}$. Таким образом, выполнялось условие превалирования периода решётки, созданной при записи амплитудно-фазовой голограммы над толщиной тонкоплёночной системы, которая состояла от 2–5 (тонкие полимерные наноструктурированные материалы) до 10 микрон (жидкокристаллические наноструктурированные ячейки). Схема была аналогична представленной ранее в работе [34], одна из её модификаций показана на рис. 1.

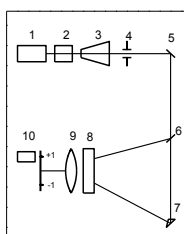


Рис. 1. Экспериментальная установка для записи тонких дифракционных решеток:

1 – Nd:YAG-лазер; 2 – преобразователь во вторую гармонику (532 нм); 3 – телескоп; 4 – диафрагма; 5 – поворотное зеркало ($R\sim 99.9\%$ на $\lambda=532\text{ нм}$); 6 – делительное зеркало ($R\sim 49.9\%$ на $\lambda=532\text{ нм}$); 7 – призма; 8 – образец; 9 – линза; 10 – детектор.

Чтобы не разрушать исследуемые органические материалы и работать при обратимых процессах записи-считывания, плотность энергии записи тонких дифракционных решёток варьировалась в диапазоне 0.03–0.6 Дж·см⁻². В Таблице 1 представлены расчётные значения светоиндуцированного изменения показателя преломления, определяемого из соотношения:

$$\eta = \frac{I_1}{I_0} = \left(\frac{\pi \Delta n_i d}{2\lambda} \right)^2, \quad (1)$$

где η – дифракционная эффективность; I_1 – интенсивность в первом порядке дифракции; I_0 – интенсивность падающего излучения; Δn_i – наведенное изменение показателя преломления; d – толщина пленки; λ – длина волны излучения лазера. Для последующего пересчёта коэффициентов нелинейной рефракции n_2 и кубичной нелинейной восприимчивости $\chi^{(3)}$ использовалась процедура, аналогичная [35], распространённая для наноструктурированных материалов в [17; 19; 20].

В качестве матричных органических модельных структур использовались полиимидные, полианилиновые, пиридиновые композиции (2-циклооктиламин-5-нитропиридин –COANP) и нематические ЖК из класса цианобифенилов. Для сенсibilизации органических материалов были применены фуллерены C60 и C70, квантовые точки, шунгиты, а также углеродные нанотрубки. Часть сенсibilизаторов была куплена по каталогам Sigma и Alfa Aesar (например, SWCNTs 704121 и fullerene powder #39720, 97 % C70); использовались нанотрубки и отечественных разработчиков. Так, одностенные углеродные нанотрубки (ОСУНТ) были синтезированы в группе А.В.Крестинина (Лаборатория Дисперсных углеродных материалов, Институт проблем химической физики РАН, г. Черноголовка), многостенные углеродные нанотрубки (МСУНТ) типа XNM-HP-11050 были получены из компании XinNano Materials, Inc. (Taiwan), а шунгиты – из Института геологии Карельского НЦ РАН (группа Н.Н. Рожковой). Биочастицы – ДНК красных рыб – были предоставлены в рамках работы по гранту “BIOMOLEC” (FP7 Program, Marie Curie Action, 2011–2015) зарубежными коллегами.

Тонкие плёнки получали из растворов методом центрифугирования. ЖК-ячейки собирались вручную в S- и T- конфигурациях при использовании

разработанного рельефа поверхности на основе лазерно-осаждаемых УНТ на проводящие контакты ИТО- и последующей обработки поверхностной электромагнитной волной (ПЭВ). Процесс получения подобного рельефа, при котором структурированное ИТО покрытие выполняет как роль проводника, так и роль ориентанта ЖК-диполей, позволяет существенно снизить напряжение питания, прикладываемое к ЖК-ячейке, а также установить гомеотропное ориентирование ЖК-молекул [22]. Также нанесение УНТ было выполнено на поверхность некоторых кристаллических материалов УФ-ИК-диапазона с целью расширения спектрального диапазона функционирования ЖК-устройства в целом. Использовалось излучение CO_2 -лазера на длине волны 10.6 микрометров при варьировании мощности излучения максимум в 30 Вт.

При изучении спектральных характеристик чистых матричных и структурированных материалов использовались спектрометры видимого и ИК-диапазонов, а именно: СФ-26 и Фурье-спектрометр Инфралюм ФТ-08. При изучении смачиваемости модифицируемого рельефа поверхности для подтверждения возможности увеличения угла наклона при вертикальной ориентации использовалась камера Genius FaceCam3000, с объективом CCTV с фокусным расстоянием 6.0 – 60 мм; формат изображения 1/3"; диафрагма F1.6).

Результаты и обсуждение

Основные результаты изучения фоторефрактивных параметров представлены в таблице 1. Здесь c – концентрация вводимой сенсibiliзирующей добавки, W – плотность энергии записи, Λ – пространственная частота, Δn_i – изменение показателя преломления.

Заметим, что оценённые значения нелинейной рефракции n_2 и кубичной нелинейной восприимчивости $\chi^{(3)}$, на основе выражений: $n_2 = \frac{\Delta n_i}{I}$, $\chi^{(3)} = \frac{n_2 n_0 c}{16\pi^2}$ дают основание сказать, что данные параметры находятся для нано- и био-сенсibiliзированных изучаемых структур в диапазоне:

$n_2 = 10^{-10} - 10^{-9} \text{ см}^2 \times \text{Вт}^{-1}$ и $\chi^{(3)} = 10^{-10} - 10^{-9} \text{ см}^3 \times \text{эрг}^{-1}$. С одной стороны, для сравнения, такие классические нелинейно-оптические среды, как кварц, CS_2 ,

CCl_4 , др. проявляют n_2 и $\chi^{(3)}$ на уровне $\sim 10^{-16} \text{ см}^{-2} \cdot \text{Вт}^{-1}$ и $\sim 10^{-14} \text{ см}^3 \text{ эрг}^{-1}$, соответственно, что показывает перспективу использования органических нано- и биоструктурированных тонкоплёночных материалов и элементов на их основе, включая ЖК, для целей оптоэлектроники и биомедицины. С другой стороны, близкие величины фоторефрактивных параметров при нано- и биоструктурировании аналогичных модельных систем дают основание утверждать, что процесс наноструктурирования вполне логично может быть заменён на биоструктурирование и даже его преобладание в силу возобновляемости нетоксичных биочастиц из Мирового океана.

Таблица 1

Наведённое значение показателя преломления

Изучаемая структура	s , вес. %	W , $\text{Дж} \cdot \text{см}^{-2}$	Λ , мм^{-1}	Δn_i
Чистый полиимид	0	0.6	90	$10^{-4} - 10^{-5}$
ПИ+квант. точки CdSe(ZnS)	0.003	0.2–0.3	90–100	2.0×10^{-3}
ПИ+окислы графена	0.1	0.2	100	3.4×10^{-3}
ПИ+шунгит	0.2	0.063–0.1	150	3.8– 5.3×10^{-3}
ПИ+C60	0.2	0.5–0.6	90	4.2×10^{-3}
ПИ+C70	0.2	0.6	90	4.68×10^{-3}
ПИ+CNTs	0.1	0.5–0.8	90	5.7×10^{-3}
ПИ+ CNTs	0.05	0.3	150	4.5×10^{-3}
ПИ+ CNTs	0.07	0.3	150	5.0×10^{-3}
ПИ+ CNTs	0.1	0.3	150	5.5×10^{-3}
ПИ+двустенные УНТ	0.1	0.063–0.1	100	9.4×10^{-3}
ПИ+двустенные УНТ	0.1	0.063–0.1	150	7.0×10^{-3}
ПДЖК на основе комплекса COANP-C70	1	0.017–0.02	100	1.4×10^{-3}
ПДЖК на основе комплекса ПИ-C70	0.2	0.1–0.3	90–100	1.2×10^{-3}
ПДЖК на основе ДНК	*	0.1	120	1.39×10^{-3}
ПДЖК на основе комплекса квантовые	**	0.1	120	1.35×10^{-3}

точки CdSe(ZnS)-ДНК				
ЖК	***	0.2 Вт×см ⁻²		0.16×10 ⁻³

* Соотношение ЖК к водному раствору ДНК (с концентрацией ~4.72 г·л⁻¹) составляло 5:1.

** Содержание квантовых точек в ЖК1289 (и, аналогично в LC 5CB) было на уровне 0.003 вес. %

*** Данные работы [36], длина волны 514,5 нм.

Для объяснения получаемых результатов ранее была предложена модель доминирования межмолекулярного комплекса с переносом заряда (КПЗ) над внутримолекулярным для фуллеренсодержащих органических систем с изначально существующим донорно-акцепторным взаимодействием [17], расширенная для других наносенсибилизаторов с высоким сродством к электрону, доминирующим над сродством к электрону внутримолекулярного акцепторного фрагмента органической молекулы, в работах [19; 20]. Указывалось на создание увеличенного безбарьерного пути переноса электронов при межмолекулярном взаимодействии и на повышенную плотность заряда, как следствие – формирование повышенного дипольного момента. Для примера, сродство внутримолекулярного акцептора модельных полиимидной и пиридиновой матриц находится в диапазоне 1.1–1.4 и 0.45–0.5 эВ соответственно. При введении в них наночастиц происходит доминирование межмолекулярных акцепторов со сродством к электрону 2 (шунгит); 2.65–2.7 (фуллерен); 3.8–4.2 eV (квантовые точки) над внутримолекулярным акцептором. Более того, вводимые частицы, к примеру, фуллерен, способны захватывать не один, а несколько электронов. Так, в публикации [37] было показано, что C₆₀ делокализует вблизи своей поверхности до 6 электронов. Соответственно, мы предполагали создание большего дипольного момента в системе с межмолекулярным КПЗ, превалирующим над таковым при внутримолекулярном КПЗ. С одной стороны, квадратичная зависимость между дипольным моментом и сечением поглощения предполагает существенное влияние межмолекулярного КПЗ на оптическое ограничение излучения, по крайней мере, в видимом и ближнем

ИК-диапазоне, что регистрируется для всех изученных нами материалов как на 532 нм, так и в области длин волн 805–1315 нм. С другой стороны, увеличение безбарьерного переноса заряда также способствует увеличению подвижности носителей заряда, что проявляется в росте тока при приложении напряжения смещения. Ныне вполне логично расширить таковую модель, включив биочастицы на примере ДНК. На рис. 2 представлена качественная иллюстрация такого процесса.

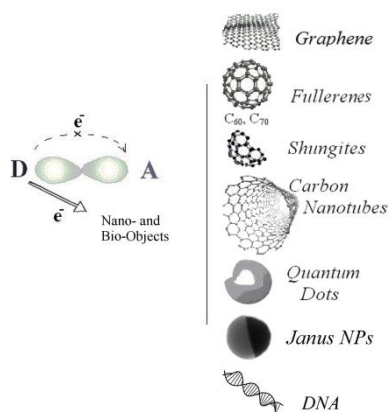


Рис. 2. Модельное представление картины доминирования межмолекулярного КТЗ над внутримолекулярным.

Обращают на себя внимание и такие аргументы в пользу доминирования межмолекулярного КТЗ над внутримолекулярным процессом. Практически во всех изученных материалах наблюдался батохромный сдвиг в спектрах поглощения, а также образование квазисетки – network – в сенсibilизированных системах как результат самоорганизации и изменения параметра порядка. Первичные данные по такому спектральному сдвигу и по наведённой самоорганизации модельных материалов при их структурировании нано- и биочастицами, были представлены, например, в работах [14; 15; 25]. Более того, накоплены данные и по влиянию структурирования углеродными нанотрубками проводящего покрытия ИТО на существенный сдвиг в ИК-область спектральных характеристик ЖК-мезофазы, превышающий таковой, наблюдаемый для ЖК-ячеек

с ориентирующим рельефом в отсутствии УНТ. На рис. 3 показаны спектральные характеристики ЖК-ячеек с одним и тем же фуллеренсодержащим сенсibilизатором объёма мезофазы, но с разным способом обработки границы раздела сред: твёрдая подложка – ЖК. Чётко регистрируется сдвиг спектра в длинноволновую область. Аналогичный эффект был установлен нами и для других сенсibilизаторов, например, наночастиц празеодима и серия, исследуемых для аналогичных смесей, но при разном рельефе ориентирующей поверхности.

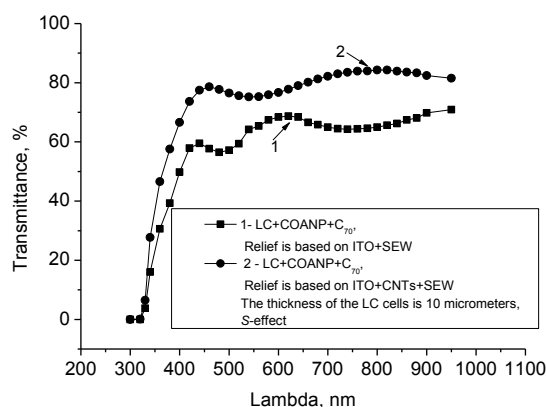


Рис. 3. Спектральные параметры ЖК-ячеек, сенсibilизированных комплексом COANP+C70 при использовании рельефа на границе раздела сред: проводящее покрытие ИТО, обработанное поверхностной электромагнитной волной (1); и та же мезофаза, но с рельефом вида: проводящее покрытие ИТО, лазерно осаждённые УНТ, далее обработанные поверхностной электромагнитной волной.

Предлагается такое модельное рассмотрение установленного эффекта. На рис. 4. приведена возможная картина влияния УНТ на спектральные параметры ЖК-ячеек при создании рельефа с углеродными нанотрубками на поверхности проводящего покрытия. Вполне возможно, что этот процесс можно объяснить, во-первых, существенными проводниковыми свойствами углеродных нанотрубок, связанным большим потоком электронов с остова УНТ, во-вторых, образованием так называемых конусовидных сплетений за счёт частичного слипания УНТ при лазерном воздействии, что способствует

созданию квазиграфеновых поверхностей с повышенной проводимостью. В-третьих, поскольку УНТ обладают как донорными, так и акцепторными свойствами, следовательно, возможна организация переноса заряда между самими нанотрубками; этот иницируемый перенос заряда между углеродными нанотрубками может существенно влиять на энергетическую систему уровней ЖК смесей, которые ориентированы с участием подобного рельефа.

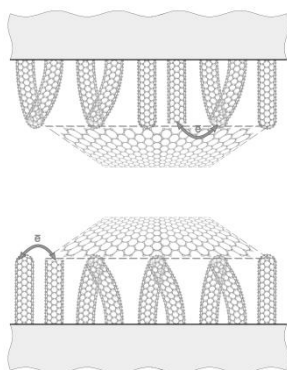


Рис. 4. Модельное рассмотрение ситуации влияния УНТ на спектральные параметры ЖК-ячеек при создании рельефа с углеродными нанотрубками на поверхности проводящего покрытия.

Подтверждением отмеченных обстоятельств может служить экспериментально наблюдаемое снижение сопротивления проводящих контактов с УНТ, в сравнении с меньшим изменением сопротивления при обработке ИТО без УНТ, что показано в таблице 2.

Видно, что сопротивление проводящих контактов без УНТ меняется в пределах 2–2.3 раза после последующей обработки ПЭЭВ, в то время как сопротивление структурированных углеродными нанотрубками проводящих контактов меняется в диапазоне от 2.8 до 3.6. Скорость прохода лазерного луча для приводимых данных была одинакова и составляла $1000 \text{ мм}\cdot\text{с}^{-1}$.

Таблица 2

**Влияние рельефа поверхности проводящего покрытия ИТО без нанотрубок
и с нанотрубками до и после обработки поверхностной**

электромагнитной волной

№ п/п	Тип обработки (на стекле ИТО или ИТО и CNTs)	Расстояние между лазером и образцом, см	Величины сопротивления образца до обработки ПЭВ, Ом	Величины сопротивления образца после обработки ПЭВ, Ом
1	ИТО	21	100	46
2	ИТО	21	115	52
3	ИТО	23.5	237	100
4	ИТО	23.5	190	95
5	ИТО+CNT	28	195	70
6	ИТО+CNT	28	155	52
7	ИТО+CNT	28	155	43
8	ИТО + CNT	23	250	67

Заметим, что аналогичное снижение сопротивления было обнаружено при лазерном нанесении непосредственно окислов графена на поверхность проводящего покрытия, что также даёт основание полагать, что углеродные наночастицы, а именно УНТ и графен, вполне могут представлять интерес в качестве ориентантов для дисплейных элементов и различных устройств модуляционной техники, использующих в своей конструкции ЖК-мезофазу для электрооптического переключения потоков излучения.

Заключение

Анализируя вышеприведённые результаты, можно сделать следующие выводы:

– Фоторефрактивные, а значит, и фотопроводниковые свойства органических сопряжённых материалов, включая ЖК, могут быть существенно улучшены при нано- и биосенсибилизации объёма вещества.

– Вполне вероятно рассмотреть биочастицы, как конкурирующие сенсibilизаторы органических материалов, в сравнении с наночастицами, в силу схожести величин фоторефрактивных параметров.

– Предлагаемая качественная модель доминирования межмолекулярного взаимодействия над внутримолекулярным может быть распространена на материалы с биообъектами, что показано на примере использования ДНК в качестве сенсibilизатора ЖК-мезофазы.

– Проводниковые слои ИТО, модифицированные углеродными нанотрубками и окислами графена, дополнительно обработанные ПЭВ, способны выполнять как функцию проводника, так и функцию ориентанта жидкокристаллических диполей.

– Рельеф с УНТ, проявляющими донорно-акцепторные свойства, существенно влияет на спектральные параметры ЖК-мезофазы в целом, приводя к ИК-сдвигу спектральных характеристик.

– Установленное существенное снижение сопротивления ИТО-слоев при их модификации УНТ или графенами позволяет существенно снизить напряжение смещения, прикладываемое к ЖК-устройствам в целом.

– Область применения рассмотренных материалов может быть распространена не только на системы нано- и микроэлектроники, но и на устройства, применяемые в биомедицине и микроскопии живых организмов.

Результаты исследований были частично опубликованы в работах [1–3] и представлены на ряде международных и российских конференций (2nd International Workshop on Nano and Bio-Photonics, Биарриц, Франция, 2013; Нанотехнологическая секция в рамках конференции ММТ–2014, Ариэль, Израиль; VIII Международная научная конференция «Кинетика и механизм кристаллизации. Кристаллизация как форма самоорганизации вещества», Иваново, Россия, 2014; Международная конференция «Физические свойства материалов и дисперсных сред для элементов информационных систем, нанoeлектронных приборов и экологических технологий», 21–24 апреля 2015 г., МГОУ, Москва; и др.).

Исследования выполнены при частичной поддержке гранта РФФИ №.13-03-00044 (2013–2015), а также международного гранта по рамочной программе FP7, Marie Curie International researchers exchange proposal “BIOMOLEC” (2011–2015).

ЛИТЕРАТУРА:

1. Sam-Shajing Sun; Larry R. Dalton. Introduction to Organic Electronic and Optoelectronic Materials and Devices. University of Washington, USA, 2008. 936 p.
2. Третьяков Ю.Д. Богатство наномира. Фоторепортаж из глубин вещества. М., 2009. 176 с.
3. Kroto H.W., Heath J.R., O'Brien S.C., Curl R.F., Smalley R.E. C60: Buckminsterfullerene. Nature. Vol. 318. P.162–163. 1985.
4. Krätschmer W., Lamb L.D., Fostiropoulos K., Huffman D.R. Solid C60: a new form of carbon. Nature. Vol. 347. P. 354–58. 1990.
5. Couris S., Koudoumas E., Ruth A.A., Leach S. Concentration and wavelength dependence of the effective third-order susceptibility and optical limiting of C60 in toluene solution. J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys., Vol. 8. P. 4537–4554. 1995.
6. Елецкий А.В., Смирнов Б.М. Фуллерены и структуры углерода. // УФН. 1995. Т. 165. № 9. С. 977–1009.
7. Лозовик Ю.Е., Попов А.М. Образование и рост углеродных наноструктур–фуллеренов, наночастиц, нанотрубок и конусов. // УФН 1997. Т. 167. № 7. С. 751–774.
8. Барабанова Н.Н., Беляев В.В., Богданов Д.Л., Дадиванян А.К., Козенков В.М., Чигринов В.Г. Распределение ориентации молекул красителя в фотоориентирующем слое в зависимости от угла падения поляризованного пучка // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2013. № 2. С. 28–33.
9. Дадиванян А.К., Чаусов Д.Н., Ноа О.В., Беляев В.В., Чигринов В.Г., Пашинина Ю.М. Влияние параметра порядка на энергию сцепления жидких кристаллов // ЖЭТФ. 2012. Т.142. Вып. 6(12). С. 1253–1257.
10. Белоусов В.П., Белоусова И.М., Будтов В.П., Данилов В.В., Данилов О.Б., Калинин А.Г., Мак А.А. Структурные, физико-химические и нелинейно-оптические свойства. Оптический журнал. 1997. Т. 64. № 12. С. 3–37.
11. Robertson J. Realistic applications of CNTs. Materialstoday. October 2004, P. 46–52. 2004.
12. Khoo I.C., Williams Y.Z., Lewis B., Mallouk T. Photorefractive CdSe and Gold Nanowire-Doped Liquid Crystals and Polymer-Dispersed-Liquid-Crystal Photonic Crystals. Mol. Cryst. Liq. Cryst. Vol. 446. P. 233–244. 2006.
13. Kamanina N., Barrientos A., Leyderman A., Cui Y., Vikhnin V., Vlasse M. Effect of fullerene doping on the absorption edge shift in COANP. Molecular Materials. Vol. 13., No. 1–4. P. 275–280. 2000.

14. Каманина Н.В., Плеханов А.И. Механизмы ограничения оптического излучения в фуллеренсодержащих π -сопряженных органических структурах на примере молекул полиимида и COANP. // Оптика и спектроскопия. 2002. Т. 93. № 3. С. 443–452.
15. Kamanina N.V. Nonlinear optical study of fullerene-doped conjugated systems: new materials for nanophotonics applications. Proceedings of the NATO Advanced Research Workshop on Organic Nanophotonics. Vol. II/100. P. 177–192. 2003.
16. Каманина Н.В., Шека Е.Ф. Ограничители лазерного излучения и дифракционные элементы на основе системы COANP–фуллерен: нелинейно-оптические свойства и квантово-химическое моделирование. Оптика и спектроскопия. 2004. Т. 96. № 4. С. 659–673.
17. Каманина Н.В. Фуллеренсодержащие диспергированные нематические жидкокристаллические структуры: динамические характеристики и процессы самоорганизации. // УФН. 2005. Т. 175. № 4. С. 445–454.
18. Каманина Н.В., Комолкин А.В., Евлампиева Н.П. Изменение параметра ориентационного порядка в структуре композита нематический жидкий кристалл–COANP–C70. Письма в ЖТФ. 2005. Т. 31. № 11. С. 65–70.
19. Kamanina N.V., Uskokovic D.P. Refractive Index of Organic Systems Doped with Nano-Objects. Materials and Manufacturing Processes. Vol. 23. P. 552–556. 2008.
20. Kamanina N.V., Emandi A., Kajzar F., Attias A.-J. Laser-Induced Change in the Refractive Index in the Systems Based on Nanostructured Polyimide: Comparative Study with Other Photosensitive Structures. Mol. Cryst. Liq. Cryst. Vol. 486. P. 1–11. 2008.
21. Kamanina N.V., Reshak A.H., Vasilyev P.Ya., Vangonen A.I., Studeonov V.I., Usanov Yu.E., Ebothe J., Gondek E., Wojcik W., Danel A. Nonlinear absorption of fullerene- and nanotubes-doped liquid crystal systems. Physica E. Vol. 41. P. 391–394. 2009.
22. Каманина Н.В., Васильев П.Я. О возможности получения гомеотропной ориентации нематических жидкокристаллических элементов при использовании наноструктур. Письма в ЖТФ 2009. Т. 35. Вып. 11. С. 39–43.
23. Каманина Н.В., Богданов К.Ю., Васильев П.Я., Студенов В.И. Повышение поверхностной механической прочности «мягких» материалов УФ и ИК диапазонов спектра и увеличение их спектра пропускания: модельная система MgF₂–нанотрубки. // Оптический журнал. Т. 2010. 76. № 2. С. 84–86.
24. Каманина Н.В. Влияние пути переноса заряда при межмолекулярном комплексообразовании на нелинейно-оптические и фотопроводниковые характеристики нанокompозитов. Письма в ЖТФ. 2012. Т. 38. Вып. 3. С. 25–32.
25. Kamanina N.V. Book “Features of Optical Materials Modified with Effective Nanoobjects: Bulk Properties and Interface”, New York, Physics Research and Technology, “Novinka”, Published by Nova Science Publishers, Inc., New York. 2014. 116 p.
26. Rozhkova N.N., Griбанov A.V., Khodorkovskii M.A. Water mediated modification of structure and physical chemical properties of nanocarbons. Diamond Relat. Mater. No. 16. P. 2104–2108. 2007.

27. Namilae S., Chandra N., Shet C. Mechanical behavior of functionalized nanotubes. *Chemical Physics Letters*. Vol. 387. P. 247–252. 2004.
28. Fritz J., Cooper, E.B., Gaudet S., Sorger P.K., Manalis S.R. Electronic detection of DNA by its intrinsic molecular charge. *PNAS*. Vol. 99. P. 14142–14146. 2002.
29. Firmino A., Grote J.G., Kajzar F., M’Peko J.-C., Pawlicka A. DNA-based ionic conducting membranes. *Journal of Applied Physics*. Vol. 110. No. 3. P. 033704–1– 033704–5. 2011.
30. Hamidreza S., Mahdi E., Houssien M. Double-stranded DNA field effect transistor and logical cells. *Journal of Applied Physics*. Vol. 113. P. 074701–1–074701–4. 2013.
31. Kamanina N.V., Serov S. V., Zubtsova Yu.A., Bretonniere Ya., Andraud Ch., Baldeck P., Kajzar F. Photorefractive Properties of Some Nano- and Bio-Structured Organic Materials. *Journal of Nanotechnology in Diagnosis and Treatment*. Vol. 2. No.1. P. 2–5. 2014
32. Каманина Н.В., Зубцова Ю.А., Шурпо Н.А., Серов С.В., Кухарчик А.А., Кужаков П.В. Структурные, спектральные и фоторефрактивные свойства нано- и биоструктурированных органических материалов, включая жидкие кристаллы. Жидкие кристаллы и их практическое использование. 2014. Т. 14. № 1. С. 5–12.
33. Kamanina N.V., Serov S.V., Bretonniere Ya, Andraud Ch. Organic Systems and Their Photorefractive Properties under the Nano- and Biostructuration: Scientific View and Sustainable Development. *Journal of Nanomaterials*, Hindawi Publishing Corporation, Article ID 278902, accepted 19 December 2014.
34. Kamanina N.V. and Vasilenko N.A. Influence of operating conditions and of interface properties on dynamic characteristics of liquid-crystal spatial light modulators. *Opt. Quantum Electron*. Vol. 29. No. 1. P. 1–9. 1997.
35. Ахманов С.А., Никитин С. Ю. Физическая оптика. М.: Изд-во Московского ун-та. 1998. 656 с.
36. Khoo I.C., Li. H., Liang Y. Observation of orientational photorefractive effects in nematic liquid crystal. *Opt. Lett*. Vol. 19. No. 21. P. 1723–1725. 1994.
37. Brabec C.J., Padinger F., Sariciftci N.S., Hummelen J.C. Photovoltaic properties of conjugated polymer/methanofullerene composites embedded in a polystyrene matrix. *Journal of Applied Physics*. Vol. 85. No. 9. P. 6866–6872. 1999.

УДК 535.41

Чилая Г.С., Вардосанидзе З.В., Петриашвили Г.Ш.,
Тавзарашвили С.П., Чанишвили А.Г.,
Аронишидзе М.Н., Тевдорашвили К.Г.

Институт кибернетики им. В. Чавчанидзе Грузинского Технического Университета
(Тбилиси, Грузия)

ПРОСТРАНСТВЕННО-МОДУЛИРОВАННАЯ ЛАЗЕРНАЯ ЭМИССИЯ

Аннотация. Исследованы особенности генерации пленочных лазеров на красителях в случае пространственно-модулированного возбуждения. Модуляция интенсивности возбуждения производилась в плоскости пленки, а генерация рассматривалась в направлении, перпендикулярном плоскости пленки. Диаметр генерирующей области выбирался на 1...2 порядка больше толщины пленки. В результате пространственно-модулированной накачки, наблюдалась пространственно-модулированная лазерная генерация. Сечение расходящегося лазерного луча пленочного лазера представляло собой интерференционную картину в виде светлых и темных полос, период которых определялся пространственным периодом накачки. Т. о., луч пленочного лазера нес информацию о пространственном распределении интенсивности накачки, а полученный пленочный лазер функционировал как активная элементарная динамическая голограмма. Ключевые слова: лазерная генерация, пространственная модуляция интенсивности, динамическая голограмма.

G. Chilaya, Z. Wardosanidze, G. Petriashvili, S. Tavzarashvili,
A. Chanishvili, M. Aronishidze, K. Tevdorashvili

Georgian Technical University, V. Chavchanidze Institute of Cybernetics (Tbilisi, Georgia)

SPATIALLY MODULATED LASER EMISSION

Abstract. Peculiar properties of lasing from film dye lasers in the case of spatially modulated excitation are studied. The modulation of the excitation intensity in the plane of the film is performed and the laser emission perpendicular to the film plane is considered. The lasing area diameter is chosen 1...2 orders larger than the layer thickness. As a result of spatially modulated pumping, spatially modulated laser emission is observed. The cross section of the divergent laser beam represents an interference pattern in the form of light and dark stripes whose period depends on the spatial period of excitation. Thus, the beam of the film laser carries information about the spatial distribution of the pump intensity and the obtained film laser operates as an active elementary dynamic hologram.

Keywords: lasing, spatial modulation of intensity, dynamic hologram.

© Чилая Г. С., Вардосанидзе З.В., Петриашвили Г.Ш., Тавзарашвили С.П., Чанишвили А.Г.,
Аронишидзе М.Н., Тевдорашвили К.Г., 2015.

Для возбуждения лазеров на красителях с активным веществом в виде тонкой пленки обычно используется накачка импульсным лазером. Лазер накачки возбуждает в слое активного вещества область, которая и генерирует лазерное излучение в направлении, перпендикулярном слою. При достаточной мощности и соответствующей длительности импульса лазера накачки генерирующая область может достигать существенных размеров. Поэтому представляет определенный интерес накачка активной лазерной среды пространственно-модулированным по интенсивности пучком вместо обычно применяемой накачки пространственно-однородным пучком.

Для получения пространственно-модулированного возбуждения был использован голографический метод [1; 2]. Отличие от традиционного метода возбуждения состояло в добавлении второго когерентного луча (рис. 1), в результате чего пятно накачки превращалось в интерференционную картину в виде чередующихся светлых и темных полос.

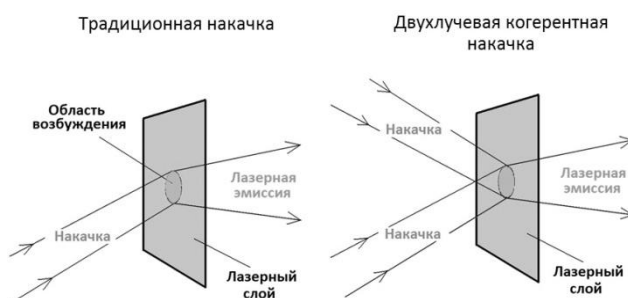


Рис. 1. Традиционная однолучевая накачка и накачка двумя взаимно когерентными лучами.

Таким образом, в слое активного материала создавалось пространственно-распределенное возбуждение (рис. 2).

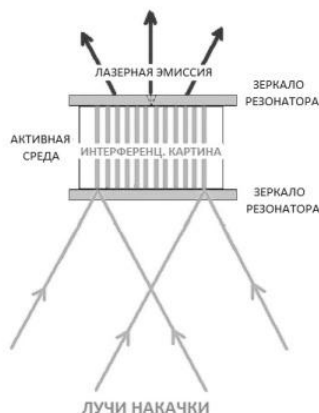


Рис. 2. Пространственно-распределенная накачка.

Для накачки был использован YAG:Nd-лазер с модуляцией добротности (длина волны 532 нм, длительность импульса около 10 нс, мощность в импульсе порядка 100 МВт). Лазер имел длину когерентности более 10 см, что позволило легко получать интерференционную картину. Луч лазера накачки делился на два луча с помощью полупрозрачного зеркала, после чего лучи соединялись в плоскости слоя пленочного лазера и создавали интерференционную картину. Период интерференционной картины задавался углом схождения и изменялся от 15 мкм до 70 мкм.

В качестве пленочного лазера были использованы два типа лазеров – полимерный и жидкокристаллический. Полимерный лазер представлял собой пленку поливинилового спирта с растворенным в нем известным лазерным красителем родамин-6Ж. Пленка была зажата между зеркалами резонатора. Толщина пленки была около 150 мкм. Диаметр области возбуждения – 1...3 мм.

На рис. 3 показана фотография генерирующей области пленки, сделанная с помощью микроскопа.

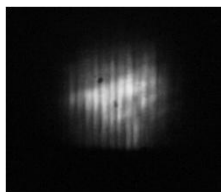


Рис. 3. Генерирующая область пленки. Период светлых и темных полос – 53 мкм.

Фотографии пятна излучения лазера показаны на рис. 4. Видно, что излучение создает интерференционную картину, и период этой картины зависит от периода накачки. Углы между направлениями интерференционных максимумов определялись зависимостью, известной для картины дифракции на плоской решетке:

$$\theta = 2 \arcsin \frac{\lambda}{2d},$$

где d – период решетки, λ – длина волны лазерного излучения.

Для сравнения на рис. 4 показано также пятно при перекрытом одном луче накачки – интерференционная картина отсутствует. Таким образом, при двухлучевом возбуждении излучение такого лазера пространственно промодулировано по интенсивности и, что самое важное, несет информацию о пространственной модуляции интенсивности накачки.

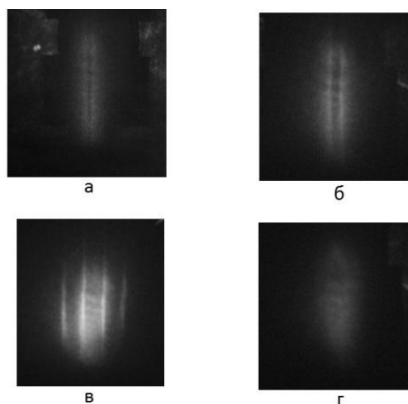


Рис. 4. Пятно излучения полимерного лазера на экране при разных периодах интерференционной картины накачки: а – 53 мкм, б – 36 мкм, в – 18 мкм.

г – накачка одним лучом.

Кроме полимерного лазера с резонаторными зеркалами мы исследовали также лазер с распределенной обратной связью – жидкокристаллический лазер [3–5]. В качестве тонкослойного лазера на красителях это очень интересная и удобная система, т.к. в слое толщиной не более 40 мкм она сочетает в себе как активный лазерный материал, так и распределенный резонатор.

Использованный жидкокристаллический лазер представлял собой планарный слой холестерического жидкого кристалла (смесь BL-036 и MLC-6247, Merck), легированный красителем (DCM, Exciton). Толщина слоя – 40 мкм. Жидкокристаллический лазер был изготовлен по обычной технологии.

Так же, как и в случае полимерного лазера, пучок излучения жидкокристаллического лазера был пространственно модулирован (рис. 5). Приведены фотографии пятна лазерного излучения на экране. Период модуляции зависит от периода модуляции накачки.

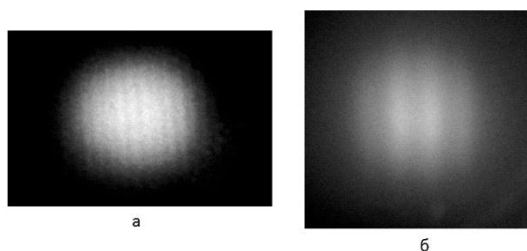


Рис. 5. Пятно излучения жидкокристаллического лазера при разных периодах интерференционной картины накачки: а – 50 мкм, б – 18 мкм.

Закключение. В пленочных лазерах на красителях при двухлучевой когерентной накачке получена пространственно-модулированная лазерная генерация. В отличие от известных лазеров, излучение имеет пространственно-модулированный характер и образует интерференционную картину, схожую с картиной дифракции на плоской решетке. Пространственное распределение интенсивности лазерного излучения несет информацию о распределении интенсивности в интерференционной картине накачки, т. е. об относительной фазе пучков накачки. Следовательно,

полученные пленочные лазеры функционируют как активные элементарные динамические голограммы.

Работа выполнена при поддержке гранта Shota Rustaveli National Science Foundation (SRNSF) FR-403.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1973. С. 719.
2. Кольер Р., Беркхарт К., Лин Л. Оптическая голография. М: Мир, 1973. С. 686.
3. Barberi R., Chilaya G. Strategies for tunable cholesteric lasers. // In.: "Liquid Crystal Microlasers", edited by Lev M. Blinov and Roberto Bartolino (Transworld Research Network, 2010). ISBN: 978-81-7895-469-1, chapter 11, P. 199–222.
4. Chilaya G.S. Light-Controlled Change in the helical pitch and broadband tunable cholesteric liquid-crystal lasers. // Crystallography Reports, 2006, Vol. 51, Suppl. 1, P. S108–S118 doi:10.1134/S1063774506070169.
5. Different Approaches of Employing Cholesteric Liquid Crystals in Dye Lasers / Chilaya G. et al, Materials Sciences and Applications. 2011, № 2, P. 116–129. doi:10.4236/msa.2011.22014. Published Online February 2011.

УДК 533.72

*Гермидер О.В. *, Попов В.Н. *, Юшканов А.А. ***** Северный (Арктический) федеральный университет (Архангельск)**** Московский государственный университет (Москва)*

ВЫЧИСЛЕНИЕ В РАМКАХ КИНЕТИЧЕСКОГО ПОДХОДА ПОТОКА ТЕПЛА В ДЛИННОМ КАНАЛЕ ПОСТОЯННОГО ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

Аннотация. С использованием метода характеристик в рамках кинетического подхода построено аналитическое решение задачи о переносе тепла в длинном канале постоянного прямоугольного поперечного сечения. В качестве основного уравнения, описывающего кинетику процесса, в работе используется БГК (Бхатнагар, Гросс, Крук) модель кинетического уравнения Больцмана с частотой столкновений, пропорциональной скорости молекул (уравнение Вильямса), а в качестве граничного условия на стенках канала – модель диффузного отражения. Построен профиль вектора потока тепла в канале, а также вычислен поток тепла через поперечное сечение канала. Проведен анализ полученных решений в предельном случае, когда один размеров канала много больше другого. Показано, что в этом случае полученные в работе результаты переходят в аналогичные результаты, полученные для плоского канала с бесконечными параллельными стенками.

Ключевые слова: течение газа в канале, модельные кинетические уравнения, кинетическое уравнение Вильямса, модели граничных условий.

O. Germider, V. Popov*, A. Yushkanov***** Northern (Arctic) Federal University (Arkhangelsk, Russia)**** Moscow State Regional University (Moscow, Russia)*

COMPUTATION OF HEAT FLOW IN A LONG, RECTANGULAR CHANNEL OF CONSTANT CROSS SECTION IN THE FRAMEWORK OF THE KINETIC APPROACH

Abstract. Using the method of characteristics in the framework of the kinetic approach, we have constructed an analytical solution to the problem of heat transfer in a long, rectangular channel of constant cross section. As the main equation describing the kinetics of the process, we use the BGK (Bhatnagar, Gross and Krook) model of the kinetic Boltzmann equation with a frequency of collisions, which is proportional to the speed of molecules (Williams equation), and as a boundary condition on the walls of the channel, use is made of the diffuse reflection model. The profile of the heat flux vector in the channel is constructed and the heat flux through the cross section of the channel is calculated. The solutions obtained in the limiting case, when one of the channel dimensions is greater than the other, are analyzed. It is

shown that in this case the results of this paper are transferred to similar results obtained for a flat channel with infinite parallel walls.

Keywords: gas flow in the channel, model kinetic equations, kinetic Williams equation, model of boundary conditions.

Введение

К числу важнейших в прикладном значении задач динамики разреженного газа относятся задачи, связанные с описанием процессов переноса в каналах [1]. В общем случае решение этой задачи может быть получено с использованием численных методов [2–6]. Однако в ряде случаев задача может быть решена аналитически. Например, в случае течения разреженного газа между двумя бесконечными параллельными пластинами [7], в зазоре между двумя коаксиальными цилиндрами, в канале цилиндрического сечения. Целью представленной работы является получение методом характеристик решения задачи о переносе тепла в канале постоянного прямоугольного сечения при наличии параллельного его стенкам градиента температуры. В качестве основного уравнения, описывающего кинетику процесса, в работе используется кинетическое уравнение Вильямса [8], а в качестве граничного условия на стенках канала – модель диффузного отражения. В качестве приложения в работе при различном соотношении поперечных размеров стенок канала построен профиль вектора потока тепла в канале, а также вычислен поток тепла через его поперечное сечение. Проведен анализ полученных решений в предельном случае, когда один из поперечных размеров канала много больше другого. Показано, что в этом случае полученные в работе результаты переходят в аналогичные результаты, полученные для канала с бесконечными параллельными стенками, представленными в [7].

Вывод основных уравнений

Рассмотрим канал прямоугольного сечения $a' \times b'$, стенки которого расположены в плоскостях $x' = \pm a'/2$ и $y' = \pm b'/2$, а ось симметрии канала совпадает с осью Oz' декартовой системы координат. Предположим, что в канале поддерживается постоянный градиент температуры, направленный

вдоль оси Oz' . Кинетику процесса будем описывать на основе уравнения Вильямса, которое в выбранной системе координат записывается в виде [8]:

$$v_x \frac{\partial f}{\partial x'} + v_y \frac{\partial f}{\partial y'} + v_z \frac{\partial f}{\partial z'} = \frac{\omega}{\gamma l_g} (f_* - f). \quad (1)$$

Здесь $\omega = |\mathbf{v} - \mathbf{u}(\mathbf{r}')|$, $\mathbf{v}$ – скорость молекул газа, $\mathbf{u}(\mathbf{r}')$ – массовая скорость газа, $\mathbf{r}'$ – размерный радиус-вектор, $l_g = \eta_g \beta^{-1/2}/p$ – средняя длина свободного пробега молекул газа, p и η_g – давление и коэффициент динамической вязкости газа, $\gamma = 15\sqrt{\pi}/16$,

$$f_* = n_* \left(\frac{m}{2\pi k_B T_*} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{m}{2k_B T_*} (\mathbf{v} - \mathbf{u}_*)^2 \right).$$

Параметры n_* , T_* и $\mathbf{u}_*$ выбираются из условия, что модельный интеграл столкновений в (1) удовлетворяет законам сохранения числа частиц, импульса и энергии. В качестве граничного условия на стенках канала будем использовать модель диффузного отражения. Будем считать относительный перепад температуры на длине свободного пробега молекул газа малым. В этом случае задача допускает линеаризацию, и решение уравнения (1) в объеме газа можно записать в виде [8]

$$f_\infty(\mathbf{r}', \mathbf{v}) = f(C) \left[1 + 2C_z U_0 + G_T \left[\left(z - \frac{C_z}{C} \right) \left(C^2 - \frac{5}{2} \right) - \frac{2}{3\sqrt{\pi}} C_z \right] \right]. \quad (2)$$

Здесь $f(C) = n_0 (\beta / \sqrt{\pi})^{3/2} \exp(-C^2)$ – абсолютный максвеллиан, $\mathbf{C} = \beta^{1/2} \mathbf{v}$ – безразмерная скорость молекул газа, $\beta = m/2k_B T_0$, m – масса молекулы газа, k_B – постоянная Больцмана, n_0 и T_0 – концентрация молекул и температура газа в некоторой точке, принятой за начало координат, $z = z'/\gamma l_g$, G_T – безразмерный градиент температуры. Функция $f_\infty(\mathbf{r}', \mathbf{v})$, определяемая выражением (2), является решением уравнения (1), однако она не удовлетворяет граничным условиям на стенках канала. Для того чтобы это условие выполнялось, поступим следующим образом.

Образуем на множестве функций, зависящих от модуля молекулярной скорости, скалярное произведение с весом $\rho(C) = C^5 \exp(-C^2)$:

$$(f, g) = \int_0^{+\infty} \rho(C) f(C) g(C) dC. \quad (3)$$

Возьмем две ортогональные функции: $e_1(C) = 1$ и $e_2(C) = C - \frac{5}{2C}$ (ортогональность понимается здесь как равенство нулю введенного выше скалярного произведения) и будем искать решение уравнения (1) в виде:

$$f(\mathbf{r}', \mathbf{v}) = f_\infty(\mathbf{r}', \mathbf{v}) \left[1 + G_T C_z \left[Z_1(x, y, c_x, c_y) + \left(C - \frac{5}{2C} \right) Z_2(x, y, c_x, c_y) \right] \right], \quad (4)$$

где $x = x' / \gamma l_g$, $y = y' / \gamma l_g$, $c_x = C_x / C$, $c_y = C_y / C$.

Подставив (4) в (1) и линеаризовав функцию $f_*(n_*, T_*, \mathbf{u}_*)$ относительно абсолютного максвеллиана, как это приведено в [8], приходим к уравнению:

$$\begin{aligned} & C_z \left(C_x \frac{\partial Z_1}{\partial x} + C_y \frac{\partial Z_1}{\partial y} \right) + C_z \left(C - \frac{5}{2C} \right) \left(C_x \frac{\partial Z_2}{\partial x} + C_y \frac{\partial Z_2}{\partial y} \right) + \\ & + C C_z \left(Z_1(x, y, c_x, c_y) + \left(C - \frac{5}{2C} \right) Z_2(x, y, c_x, c_y) \right) = \\ & = \frac{C}{2\pi} \int C' \exp(-C'^2) k(\mathbf{C}, \mathbf{C}') C'_z \left(Z_1(x, y, c'_x, c'_y) + \left(C' - \frac{5}{2C'} \right) Z_2(x, y, c'_x, c'_y) \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь [8] $k(\mathbf{C}, \mathbf{C}') = 1 + \frac{3}{2} \mathbf{C} \mathbf{C}' + \frac{1}{2} (C^2 - 2)(C'^2 - 2)$. Вычисляя интегралы, стоящие в правой части, уравнение (5) перепишем в виде

$$\begin{aligned} & c_x \frac{\partial Z_1}{\partial x} + c_y \frac{\partial Z_1}{\partial y} + \left(C - \frac{5}{2C} \right) \left(c_x \frac{\partial Z_2}{\partial x} + c_y \frac{\partial Z_2}{\partial y} \right) + Z_1(x, y, c_x, c_y) + \\ & + \left(C - \frac{5}{2C} \right) Z_2(x, y, c_x, c_y) = \frac{3}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi Z_1(x, y, c'_x, c'_y) \cos^2 \theta \sin \theta d\theta d\varphi. \end{aligned} \quad (6)$$

При вычислении интегралов мы перешли к сферической системе координат в пространстве скоростей, полагая:

$$c_x = \sin \theta \cos \varphi, \quad c_y = \sin \theta \sin \varphi, \quad c_z = \cos \theta. \quad (7)$$

Здесь угол θ отсчитывается в пространстве скоростей от положительного направления оси C_z , а угол φ – от положительного направления оси C_x . С учетом ортогональности в смысле скалярного произведения (3) функций $e_1(C)=1$ и $e_2(C)=C-\frac{5}{2C}$ уравнение (6) расщепляется на два незацепленных уравнения:

$$c_x \frac{\partial Z_1}{\partial x} + c_y \frac{\partial Z_1}{\partial y} + Z_1(x, y, c_x, c_y) = \frac{3}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} Z_1(x, y, c'_x, c'_y) \cos^2 \theta \sin \theta d\theta d\varphi;$$

$$c_x \frac{\partial Z_2}{\partial x} + c_y \frac{\partial Z_2}{\partial y} + Z_2(x, y, c_x, c_y) = 0. \quad (8)$$

Рассмотрим теперь вопрос о граничных условиях к полученным уравнениям. Учитывая, что

$$f(\mathbf{r}', \mathbf{v})|_s = f(C) \left[1 + G_T z \left(C^2 - \frac{5}{2} \right) \right],$$

а также принятую в работе модель граничного условия и способ линеаризации искомого решения, определяемый равенством (4), находим:

$$Z_1(x, y, c_x, c_y)|_s = \frac{2U_0}{G_T} + \frac{2}{3\sqrt{\pi}},$$

$$Z_2(x, y, c_x, c_y)|_s = 1. \quad (9)$$

Так как $\int \exp(-C^2) C_z^2 \left(C^2 - \frac{5}{2} \right) Z_1(x, y, c_x, c_y) d^2 \mathbf{C} = 0$, функция $Z_1(x, y, c_x, c_y)$ не вносит вклад в поток тепла. Таким образом, решение задачи сводится к отысканию функции $Z_2(x, y, c_x, c_y)$, определяемой уравнением (8) с граничными условиями (9). Решение (8) ищем в виде:

$$Z_2(x, y, c_x, c_y) = Z(x, y, c_x, c_y) - 1. \quad (10)$$

С учетом (8) и (9) уравнение для нахождения функции $Z(x, y, c_x, c_y)$ примет вид:

$$c_x \frac{\partial Z}{\partial x} + c_y \frac{\partial Z}{\partial y} + Z(x, y, c_x, c_y) + 1 = 0. \quad (11)$$

При этом граничные условия для функции $Z(x; y; c_x; c_y)$ на стенках канала записываются в виде

$$Z(x; y; c_x; c_y) = 0, \quad x = \pm \frac{a}{2}, \quad -\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2}, \quad xc_x < 0, \quad (12)$$

$$Z(x; y; c_x; c_y) = 0, \quad y = \pm \frac{b}{2}, \quad -\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}, \quad yc_y < 0. \quad (13)$$

Построение функции распределения молекул газа

Решение уравнения (11) с граничными условиями (12), (13) ищем методом характеристик [9]. Система уравнений характеристик уравнения (11) имеет вид:

$$\frac{dx}{c_x} = \frac{dy}{c_y} = -\frac{dZ}{Z(x; y; c_x; c_y) + 1} = dt. \quad (14)$$

Из (14) находим

$$x = x_0 + c_x t, \quad y = y_0 + c_y t, \\ Z(x; y; c_x; c_y) = e^{-t} - 1. \quad (15)$$

Здесь, с учетом соотношений (12) и (13), значения параметра t при отражении от стенок канала имеют вид:

$$t_1 = \frac{2x - a}{2c_x}, \quad c_x < 0 \text{ - на правой стенке } x_0 = \frac{a}{2}, \quad (16)$$

$$t_2 = \frac{2y - b}{2c_y}, \quad c_y < 0 \text{ - на верхней стенке } y_0 = \frac{b}{2}, \quad (17)$$

$$t_3 = \frac{2x + a}{2c_x}, \quad c_x > 0 \text{ - на левой стенке } x_0 = -\frac{a}{2}, \quad (18)$$

$$t_4 = \frac{2y + b}{2c_y}, \quad c_y > 0 \text{ - на нижней стенке } y_0 = -\frac{b}{2}. \quad (19)$$

Соотношения (16) – (19) с учетом (6) позволяют определить характерные области интегрирования по углу φ . А именно:

– при отражении молекул от правой стенки:

$$\arctg \frac{2y + b}{2x - a} + \pi \leq \varphi \leq \arctg \frac{2y - b}{2x - a} + \pi; \quad (20)$$

– при отражении молекул от верхней стенки:

$$\arctg \frac{2y-b}{2x-a} + \pi \leq \varphi \leq \arctg \frac{2y-b}{2x+a} + 2\pi; \quad (21)$$

– при отражении молекул от левой стенки:

$$\arctg \frac{2y-b}{2x+a} + 2\pi \leq \varphi \leq \arctg \frac{2y+b}{2x+a} + 2\pi; \quad (22)$$

– при отражении молекул от нижней стенки:

$$\arctg \frac{2y+b}{2x+a} + 2\pi \leq \varphi \leq \arctg \frac{2y+b}{2x-a} + 3\pi. \quad (23)$$

Соотношения (15) – (23) полностью определяют решение уравнения (11) с граничными условиями (12), (13).

Вычисление потока тепла в канале

С учетом полученных результатов находим отличную от нуля компоненту вектора потока тепла $q_z(x, y)$ и поток тепла через поперечное сечение канала J_Q :

$$\begin{aligned} q_z(x, y) &= \pi^{-3/2} \int \exp(-C^2) C_z^2 \left(C^2 - \frac{5}{2} \right) \left(C - \frac{5}{2C} \right) Z(x, y, \theta, \varphi) d^3 \mathbf{C} = \\ &= \pi^{-3/2} \sum_{k=1}^4 \int_0^{+\infty} \exp(-C^2) C^3 \left(C^2 - \frac{5}{2} \right)^2 dC \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \int_{M_k}^{N_k} [e^{-t_k} - 1] d\varphi = \\ &= \frac{9}{8\pi^{3/2}} \sum_{k=1}^4 \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \int_{M_k}^{N_k} [e^{-t_k} - 1] d\varphi, \end{aligned} \quad (24)$$

$$J_Q = \frac{8}{a^2 b} \int_0^{a/2} \int_0^{b/2} q_z(x, y) dx dy. \quad (25)$$

Здесь, согласно (20) – (23)

$$\begin{aligned} M_1 &= \arctg \frac{2y+b}{2x-a} + \pi, \quad N_1 = \arctg \frac{2y-b}{2x-a} + \pi, \quad t_1 = \frac{2x-a}{2 \sin \theta \cos \varphi}, \\ M_2 &= \arctg \frac{2y-b}{2x-a} + \pi, \quad N_2 = \arctg \frac{2y-b}{2x+a} + 2\pi, \quad t_2 = \frac{2y-b}{2 \sin \theta \sin \varphi}, \\ M_3 &= \arctg \frac{2y-b}{2x+a} + 2\pi, \quad N_3 = \arctg \frac{2y+b}{2x+a} + 2\pi, \quad t_3 = \frac{2x+a}{2 \sin \theta \cos \varphi}, \\ M_4 &= \arctg \frac{2y+b}{2x+a} + 2\pi, \quad N_4 = \arctg \frac{2y+b}{2x-a} + 3\pi, \quad t_4 = \frac{2y+b}{2 \sin \theta \sin \varphi}. \end{aligned}$$

Расчеты потока тепла согласно (25) выполнены с использованием пакета символьных вычислений Maple 17. Результаты расчетов приведены в таблице 1.

Таблица 1

Значения J_Q , вычисленные согласно (25)

b'/l_g	a'/l_g				
	100	10	5	1	0,1
1000	0,0279	0,2636	0,4927	1,5907	4,1525
100	0,0278	0,2622	0,4903	1,5851	4,1448
10	0,0262	0,2482	0,4657	1,5292	4,0678
1	0,0159	0,1529	0,2934	1,0887	3,4248
0,1	0,0041	0,0407	0,0797	0,3425	1,7045

Анализ результатов

Сравним полученные выше результаты с аналогичными, полученными для канала, стенки которого образованы двумя бесконечными параллельными пластинами. В этом случае [10]:

$$q_z(x) = -\frac{3}{2\sqrt{\pi}} \left[1 - \frac{3}{4} \int_0^1 (1-\mu^2) \left[e^{-\frac{2x+a}{2\mu}} + e^{\frac{2x-a}{2\mu}} \right] d\mu \right], \quad (26)$$

$$J_Q = \frac{4}{a^2} \int_0^{a/2} q_z(x) dx. \quad (27)$$

Результаты расчетов согласно (27) приведены в таблице 2.

Таблица 2

Значения J_Q , вычисленные согласно (27)

a'/l_g	100	10	5	1	0,1
J_Q	0,0279	0,2636	0,4927	1,5907	4,1525

Как видно из приведенных таблиц, значения потока тепла, вычисленные согласно (25) в случае, когда $b \gg a$, хорошо согласуются

с результатами расчетов, выполненных на основе (27). К подобному же выводу приводит и анализ предельных случаев для выражения (24).

1. Пусть $b \gg a$. В этом случае

$$M_1 = \operatorname{arctg} \frac{2y+b}{2x-a} + \pi \approx -\frac{\pi}{2} + \pi = \frac{\pi}{2},$$

$$N_1 = \operatorname{arctg} \frac{2y-b}{2x-a} + \pi \approx \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3\pi}{2},$$

$$M_2 = \operatorname{arctg} \frac{2y-b}{2x-a} + \pi \approx \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3\pi}{2},$$

$$N_2 = \operatorname{arctg} \frac{2y-b}{2x+a} + 2\pi \approx -\frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{3\pi}{2},$$

$$M_3 = \operatorname{arctg} \frac{2y-b}{2x+a} + 2\pi \approx -\frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{3\pi}{2},$$

$$N_3 = \operatorname{arctg} \frac{2y+b}{2x+a} + 2\pi \approx \frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2},$$

$$M_4 = \operatorname{arctg} \frac{2y+b}{2x+a} + 2\pi \approx \frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2},$$

$$N_4 = \operatorname{arctg} \frac{2y+b}{2x-a} + 3\pi \approx -\frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2}.$$

Тогда

– на правой грани $\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}$, соответственно, $c_x = \sin \theta \cos \varphi < 0$;

– на верхней грани $\frac{3\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, соответственно, $c_y = \sin \theta \sin \varphi < 0$;

– на левой грани $\frac{3\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{2}$, соответственно, $c_x = \sin \theta \cos \varphi > 0$;

– на нижней грани $\frac{5\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, соответственно, $c_y = \sin \theta \sin \varphi > 0$.

Таким образом, в рассматриваемом случае полученные выше границы интегрирования по азимутальному углу φ приводят к результатам, согласующимся с условиями (16–19). С учетом сказанного вектор, потока тепла при этом запишется в виде:

$$q_z(x, y) = -\frac{3}{2\pi^{1/2}} \left[1 - \frac{3}{4\pi} \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \left[e^{\frac{2x-a}{2\sin\theta\cos\varphi}} + e^{\frac{2x+a}{2\sin\theta\cos\varphi}} \right] d\varphi \right]$$

2. Пусть $a \gg b$. В этом случае

$$\begin{aligned} M_1 &= \operatorname{arctg} \frac{2y+b}{2x-a} + \pi \approx \pi, & N_1 &= \operatorname{arctg} \frac{2y-b}{2x-a} + \pi \approx \pi, \\ M_2 &= \operatorname{arctg} \frac{2y-b}{2x-a} + \pi \approx \pi, & N_2 &= \operatorname{arctg} \frac{2y-b}{2x+a} + 2\pi \approx 2\pi, \\ M_3 &= \operatorname{arctg} \frac{2y-b}{2x+a} + 2\pi \approx 2\pi, & N_3 &= \operatorname{arctg} \frac{2y+b}{2x+a} + 2\pi \approx 2\pi, \\ M_4 &= \operatorname{arctg} \frac{2y+b}{2x+a} + 2\pi \approx 2\pi, & N_4 &= \operatorname{arctg} \frac{2y+b}{2x-a} + 3\pi \approx 3\pi. \end{aligned}$$

Тогда

- на правой грани $\pi \leq \varphi \leq \pi$, соответственно, $c_x = \sin \theta \cos \varphi < 0$;
- на верхней грани $\pi \leq \varphi \leq 2\pi$, соответственно, $c_y = \sin \theta \sin \varphi < 0$;
- на левой грани $2\pi \leq \varphi \leq 2\pi$, соответственно, $c_x = \sin \theta \cos \varphi > 0$;
- на нижней грани $2\pi \leq \varphi \leq 3\pi$, соответственно, $c_y = \sin \theta \sin \varphi > 0$.

Таким образом, и в этом случае границы интегрирования по азимутальному углу φ приводят к результатам, согласующимся с условиями (16) – (19). При этом

$$q_z(x, y) = -\frac{3}{2\pi^{1/2}} \left[1 - \frac{3}{4\pi} \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \int_\pi^{2\pi} \left[e^{\frac{2y-b}{2\sin\theta\sin\varphi}} + e^{\frac{2y+b}{2\sin\theta\sin\varphi}} \right] d\varphi \right]$$

Легко видеть, что в обоих предельных случаях полученные выражения для вектора потока тепла переходят в выражение (26).

Заключение

В работе в рамках кинетического подхода решена задача о переносе тепла в канале постоянного прямоугольного сечения. Для различных размеров стенок канала построен профиль вектора потока тепла и вычислены значения потока тепла через поперечное сечение канала. Проведено сравнение с аналогичными асимптотическими выражениями, полученными для случая,

когда один из размеров канала много больше другого. Показано, что в этом случае значения потока тепла хорошо согласуются с аналогичными результатами, полученными для каналов, стенки которых образованы двумя бесконечными параллельными пластинами.

Работа выполнена при частичном финансировании в рамках Государственного задания «Создание вычислительной инфраструктуры для решения наукоемких прикладных задач» (Проект № 3628).

ЛИТЕРАТУРА:

1. Кошмаров Ю.А., Рыжов Ю.А. Прикладная динамика разреженного газа. М.: Машиностроение, 1977. 184 с.
2. Loyalka S.K., Storvik T.S., Park H.S. Poiseuille flow and thermal creep flow in long, rectangular channels in the molecular and transition flow regimes // J. Vac. Sci. Technol. A. 1976. V. 13. № 5. P. 1188–1192.
3. Sharipov F.M. Rarefied gas flow through a long rectangular channel // J. Vac. Sci. Technol. A. 1999. V. 17. № 5. P. 3062–3066.
4. Graur I., Sharipov F. Gas flow through an elliptical tube over the whole range of the gas rarefaction // Eur. J. Mech. B/Fluids. 2008. V. 27. № 3. P. 335–345.
5. Шахов Е.М. Течение разреженного газа между коаксиальными цилиндрами под действием градиента давления // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2003. Т. 43. № 7. С. 1107–1116.
6. Титарев В.А., Шахов Е.М. Кинетический анализ изотермического течения в длинном микроканале прямоугольного поперечного сечения // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2010. Т. 50, № 7, С. 1285–1302.
7. Попов В., Тестова И., Юшканов А. Математическое моделирование течений газа в каналах: моногр. Germany, Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic publishing. 2012. 116 с.
8. Латышев А.В., Юшканов А.А. Кинетические уравнения типа Вильямса и их точные решения: моногр. М.: Московский государственный областной университет, 2004. 271 с.
9. Завитаев Э.В., Юшканов А.А. Высокочастотная проводимость тонкой прямоугольной проволоки из металла // ЖЭТФ, 2006. Т. 129, Вып. 5. С. 938–944.
10. Гулакова С.В., Попов В.Н. Вычисление потока тепла в задаче о тепловом крипе на основе уравнения Вильямса // Физический вестник Института естественных наук и биомедицины. Сб. науч. трудов. Архангельск: ФГАОУ ВПО Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова. 2013. Вып. 12. С. 25–29.

УДК.533.72.

Голов А.Н., Филиппова А.П.

Московский Государственный Областной университет

ПОЛУЧЕНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ ФОРМУЛЫ ПЛОТНОСТИ ПОТОКА ВЕЩЕСТВА В НЕСТАЦИОНАРНОМ ПОЛУОГРАНИЧЕННОМ ГАЗОПОДОБНОМ ОБЛАКЕ

Аннотация. Рассмотрена эволюция нестационарного широкого газоподобного облака в полупространстве. Рассмотрена плотность потока вещества в нестационарной газоподобной системе многих частиц. Найдено аналитическое выражение плотности потока вещества с учетом непотенциального слагаемого. Даны анализ и графическое представление полученных формул.

Ключевые слова: кинетическая теория, нестационарный газ, поток массы.

A. Golov, A. Filippova

Moscow State Regional University (Moscow, Russia)

DERIVATION AND INVESTIGATION OF THE FORMULA OF THE MATTER FLOW DENSITY IN A NONSTATIONARY SEMI-RESTRICTED GAS-LIKE CLOUD

Abstract. The evolution of a nonstationary wide gas-like cloud expanded into the half-space is considered. The density of the matter flow in a nonstationary gas-liked system of many particles is studied. The analytical formulae of the matter flow density with allowance for a nonpotential term are derived. The analysis and graphical presentation of the obtained formulae are performed.

Keywords: kinetics, kinetic theory, nonstationary gas, matter flow.

1. Целью данной работы является нахождение и исследование формулы плотности потока вещества в процессе расширения нестационарного газоподобного облака в полуограниченный объем вакуума.

Вопросы, связанные с процессами интенсивного испарения газов, представляют большой интерес как с практической, так и с теоретической точки зрения и постоянно находятся в поле внимания исследователей ([1 – 5] и др.). Изучение этих процессов обусловлено, в частности, необходимостью

создания и развития новых наукоемких технологий. К этим технологиям относятся и вакуумные технологии. Исследование процессов интенсивного испарения, а также эволюции облака, возникшего в результате такого испарения, актуально для практических разработок приборов для вакуумного напыления, теплообменного оборудования, систем комплексной тепловой защиты летательных аппаратов. Таким образом, актуальность исследования рассматриваемого процесса определяется важными практическими приложениями в физике аэродисперсных систем, в аэродинамике, микроэлектронике, экологии, а также теоретическим интересом.

В настоящее время подобные процессы рассматривают в трех подходах: гидродинамики, газодинамики и неравновесной термодинамики и, наконец, статистической газодинамики. Из них наиболее глубоким и перспективным считается последний. Гидродинамическое описание ограничивается сложностью включения в теорию тепловых явлений и уравнения состояния, а также, обычно, не учитывает непостоянство плотности среды (модель несжимаемой жидкости). Второй подход, так же как и гидродинамический, не учитывает микроскопическое строение среды. К подобным задачам применяется также комбинированный подход, основанный на решении уравнения Больцмана в прилегающем к поверхности слое Кнудсена и использовании методов газодинамики за пределами этого слоя. Однако представляется желательным такое рассмотрение данного процесса, которое, исходя из микроскопической теории, позволяло бы дать и кинетическое описание его в представлении квазинепрерывной среды, включая эволюцию плотности потока вещества во времени и пространстве.

2. В данной работе мы используем модель и результаты статьи [6]. Как и в указанной работе, будем рассматривать систему N однородных слабо взаимодействующих частиц массы m , образованную путем быстрого испарения или диспергирования в вакуум достаточно тонкого плоского слоя, нанесенного на весьма широкую непроницаемую пластину (далее – стенку) площадью S . Частицами могут быть как молекулы, так и более крупные дисперсные частицы. Внешние поля в данной задаче не учитываем. Т. о., имеем полуограниченное

облако, для которого стенка, с микроскопической точки зрения, является бесконечно толстым и высоким потенциальным барьером.

Задачу исследования процесса расширения нестационарного газоподобного облака в полуограниченный объём можно разбить на два этапа. На первом этапе целью является отыскание неравновесной, многочастичной, статистической функции распределения, удовлетворяющей уравнению Лиувилля - Гиббса и условиям поставленной задачи. Второй этап заключается в описании, с помощью найденной функции эволюции рассматриваемой системы в рамках кинетической теории. 1-й этап рассмотрен в статье [6], где получена функция распределения в виде:

$$F_N = \frac{1}{Z_N} \exp \left[- \sum_{i=1}^{3N} (k_1 p_i^2 + k_2 p_i + k_3 p_i q_i + k_4 q_i + b q_i^2 + k_5) \right], \quad (1)$$

где Z_N – статистический интеграл, определяемый условием нормировки, q_i, p_i – фазовые переменные, и введены для упрощения записи коэффициенты:

$$k_1 = a + \frac{ct}{m} + \frac{bt^2}{m^2}; \quad k_2 = -\frac{h_3 t}{m} - 2p_3 a - \frac{cp_3 t}{m} + g_3; \quad k_3 = -\frac{2bt}{m} - c; \quad k_4 = cp_3 + h_3; \quad k_5 = ap_3^2 - g_3 p_3. \quad (2)$$

a, b, c, g_3, h_3, p_3 – константы задачи, вводимые из соображений размерности [6] и определяемые из дополнительных условий. Далее, выберем систему координат так, что плоскость XY совпадает с плоскостью стенки, а OZ ортогональна этой плоскости. Входящие в (2) константы g_3, h_3, p_3 допускаются только в членах, связанных с z -компонентами фазовых переменных, для прочих членов они равны нулю. Следовательно, для этих членов аннулируются коэффициенты k_2, k_4, k_5 .

Задача 2-го этапа, в частности, нахождение и исследование формулы плотности потока вещества, является предметом данного исследования. Предшествующая задача – получение формулы плотности облака – рассмотрена в той же статье [6]. Найденное там выражение совместной плотности имеет вид:

$$\rho = \frac{2mN\sqrt{B} \cdot \exp[-B \cdot (z-Q)^2]}{LS\sqrt{\pi} \cdot [1 + \Phi(\sqrt{B}Q)]}, \quad (3)$$

где: z – координата точки в физическом пространстве, ортогональная плоскости стенки, L – толщина исходного слоя, $\Phi(\xi)$ – интеграл вероятности,

$$B = -k_4 + \frac{k_2 k_3}{2k_1} = \frac{bw}{u},$$

$$Q = \frac{(4abwp_3 - c \cdot h_3 - 2bg_3) \cdot t - 2amh_3 - cmg_3}{4mabw} \quad (4)$$

– координата максимума плотности. При этом:

$$w = 1 - \frac{c^2}{4ab}; \quad u = 1 + \frac{ct}{am} + \frac{bt^2}{am^2}.$$

Далее примем z равной сумме начальной координаты и её приращения:

$$z = z_0 + z_t. \quad (5)$$

При этом плотность в начальном состоянии системы (в слое конденсированного вещества на стенке при $t=0$), получаемая из (3) методом, предложенным в [7]:

$$\langle \rho \rangle = \rho_0 \cdot \Delta(z_0, 0, L); \quad \rho_0 = Nm / V_0, \quad (6)$$

где $\Delta(z_0, 0, L)$ – функция, равная 1 при $z_0 \in [0, L]$ и нулю при $z_0 \notin [0, L]$.

Плотность в текущем состоянии системы:

$$|\rho\rangle = \frac{\rho_0 \cdot \sqrt{\pi BL} \cdot \left\{ \Phi[\sqrt{B} \cdot (Q - z_t)] - \Phi[\sqrt{B}(Q - z_t - L)] \right\}}{\left\{ \sqrt{\pi BL} + \exp[-B(Q+L)^2] - \exp[-BQ^2] + \sqrt{\pi B} \cdot [(Q+L) \cdot \Phi[\sqrt{B}(Q+L)] - Q \cdot \Phi(\sqrt{B}Q)] \right\}}.$$

3. Для плотности потока в кинетической теории [8] вводится оператор:

$$\hat{\mathbf{j}} = \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i \delta_i(\mathbf{q}_i - \mathbf{r}) \quad (7)$$

($\mathbf{p}_i$, $\mathbf{q}_i$ – импульс и координата i -ой частицы в фазовом пространстве, $\mathbf{r}$ – радиус-вектор в физическом пространстве). Тогда для динамической величины (плотности потока) имеем

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \int_{\Gamma} \hat{\mathbf{j}} F_N \cdot d\Gamma \quad (8)$$

($d\Gamma$ – элемент фазового объёма). Из (8) получим искомое выражение для плотности потока массы. В данной задаче нас интересует только z -проекция, которая имеет вид:

$$j = - \frac{(k_2 + k_3 z) N \sqrt{B} \cdot e^{(-B(z-Q)^2)}}{k_1 \sqrt{\pi} \cdot S \cdot (1 + \Phi(Q\sqrt{B}))}, \quad (9)$$

где, как и выше, $z = z_0 + z_t$, так что это – совместная плотность потока, зависящая от начальной координаты z_0 и приращения z_t .

4. В начальный момент времени ($t = 0$) плотность совместного потока имеет вид:

$$j_0 = \frac{(2ap_3 - g_3 + cz)N\sqrt{bw} \cdot \exp[-bw(z - Q_0)^2]}{aS\sqrt{\pi}[1 + \Phi(Q_0\sqrt{bw})]}, \quad (10)$$

где (см. (4))

$$Q_0 = -\frac{2ah_3 + cg_3}{4abw}.$$

На стенке (при $z = 0$) в начальный момент времени совместный поток:

$$j_{00} = \frac{(2ap_3 - g_3)N\sqrt{bw} \cdot \exp[-bw(Q_0)^2]}{aS\sqrt{\pi}[1 + \Phi(Q_0\sqrt{bw})]}. \quad (11)$$

Асимптотически, с течением времени, равно как и с увеличением координаты, имеем

$$\lim_{z \rightarrow \infty} j = 0; \quad \lim_{t \rightarrow \infty} j = 0.$$

Условие неразрывности среды (при отсутствии источников массы):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$$

для данной задачи приводится к виду:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial z} = 0, \quad (12)$$

где ρ – совместная плотность облака (3), j – совместная плотность потока массы (9). Подставляя в (12) выражения (3) и (9), находим, что условие неразрывности действительно выполняется при любых значениях координат и времени. Сравнивая формулы (3) и (9), можем записать:

$$j = \frac{-(k_2 + k_3 \cdot z) \cdot \rho}{2mk_1}. \quad (13)$$

Совместный поток (13) можно разбить на части, выделив в нем конвективный поток, пропорциональный плотности (3) и неконвективный поток, пропорциональный градиенту плотности, причем первый равен произведению плотности на некоторую массовую скорость:

$$j_c = \rho \cdot v_m; \quad (v_m = \frac{k_2 + k_3 Q}{k_1 m}) \quad (14)$$

Неконвективный (кондуктивный) поток пропорционален градиенту плотности, аналогично потоку диффузии:

$$j_g = \frac{k_3 \cdot \text{grad}(\rho)}{4mB \cdot k_1}, \quad (15)$$

где

$$\text{grad}(\rho) = -\frac{4mN \cdot B^{(3/2)}(z-Q) \cdot e^{(-B(z-Q)^2)}}{\sqrt{\pi} \cdot (1 + \Phi(\sqrt{BQ}))}.$$

Очевидно, с течением времени оба потока стремятся к нулю, причем множители в правых частях (14) и (15) зависят от времени. Поэтому, в зависимости от времени, один из этих потоков может преобладать. Важно, что условие неразрывности выполняется для полного потока массы, а не отдельно для конвективного и неконвективного потока, как это имеет место в модели несжимаемой жидкости и в линейной теории переноса.

Зададим начальные условия. Примем, что в начальный момент плотность облака на стенке максимальна. Отсюда следует: 1) кондуктивный поток на стенке равен нулю, ввиду обнуления градиента плотности; 2) полный поток в момент $t=0$ создается только конвективным потоком. Из этого следует:

$$h_3 = -\frac{g_3 c}{2a}. \quad (16)$$

Выше p_3 мы ввели формально, как некоторый постоянный импульс, приходящийся на одну частицу, вследствие придания слою начальной массовой скорости v_0 в момент его отрыва от стенки. Дополнительным условием выбираем $p_3 = m \cdot v_0$. Используя определение массовой скорости (14) в начальный момент времени, находим:

$$p_3 = mv_0 + \frac{g_3}{2a}.$$

При выборе $p_3 = m \cdot v_0$ имеем $g_3 = 0$, следовательно, и $h_3 = 0$. Тогда все вышеприведенные выражения для плотности и плотности потоков упрощаются.

Далее найдем значения потоков в начальном и текущем состояниях, аналогично тому, как это сделано выше для плотности с помощью представления (5) и взаимно дуального интегрирования. В начальный момент

имеем с некоторой вероятностью частицы, имеющие координаты со значениями от нуля до L . Для нахождения значений конвективного и кондуктивного потоков в начальном состоянии интегрируем их выражения по z_t в пределах от $-z_0$ до ∞ и подставим $t = 0$. В результате получаем:

$$j_{c0} = \frac{Nmv_0}{LS}; \quad j_{g0} = \frac{Nc}{2aLS\sqrt{\pi bw}}, \quad (17)$$

где j_{c0} – конвективный поток в начальном состоянии; j_{g0} – кондуктивный поток в начальном состоянии. Из формул (17) видно, что начальный конвективный поток равен плотности направленного импульса всех частиц, а кондуктивный поток, в отличие от конвективного, создается средней скоростью хаотического движения и не равен нулю при $c \neq 0$. Следует обратить внимание на то, что начальное значение кондуктивного потока в составе формулы полного потока (9) не равно значению кондуктивного потока в начальном состоянии, определённое выше. Если градиент плотности большой, температура велика, а масса частиц мала, то кондуктивный поток может преобладать над конвективным. Полный поток в начальном состоянии создается суммой потоков (17).

Для нахождения значений потоков в текущем состоянии используем второй нормировочный множитель C_2 (дополнительная нормировка), полученный из условия неизменности полной массы [6]. Тогда конвективный поток в текущем состоянии оказывается пропорционален текущей плотности с коэффициентом пропорциональности, имеющим смысл начальной скорости:

$$j_{ct} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{\pi B}N(k_2 + k_3Q)(\Phi(-\sqrt{B}z_t + \sqrt{B}Q) + \Phi(\sqrt{B}L + \sqrt{B}z_t - \sqrt{B}Q))}{(L\sqrt{\pi B} + e^{-B(L+Q)^2} - e^{-BQ^2} + (Q+L)\sqrt{\pi B} \cdot \Phi(\sqrt{B}(L+Q)) - \Phi(\sqrt{B}Q)\sqrt{\pi B}Q) \cdot k_1 \cdot S}. \quad (18)$$

Кондуктивный поток в текущем состоянии:

$$j_{gt} = \frac{Nk_3(e^{-B(L+z_t-Q)^2} - e^{-B(-z_t-Q)^2})}{(L\sqrt{\pi B} + e^{-B(L+Q)^2} - e^{-BQ^2} + (Q+L)\sqrt{\pi B} \cdot \Phi(\sqrt{B}(L+Q)) - \Phi(\sqrt{B}Q)\sqrt{\pi B}Q) \cdot k_1 \cdot S}. \quad (19)$$

Полный поток в текущем состоянии равен сумме потоков (18) и (19) и имеет вид:

$$j_t = -\frac{1}{2} \frac{N(2k_3e^{(-B(z_t-Q)^2)} - e^{(-B(L+z_t-Q)^2}) + \sqrt{\pi B}(k_2 + k_3Q) \cdot \Phi(\sqrt{B}(L+z_t-Q) + \Phi(\sqrt{B}(-z_t+Q)))}{k_1[\sqrt{\pi B}(Q+L)\Phi(\sqrt{B}(Q+L)) + L\sqrt{\pi B} + e^{-B(L+Q)^2} - e^{-BQ^2} - \Phi(\sqrt{B}Q) \cdot Q\sqrt{\pi B}]S}$$

5. Ниже даны графическое представление и анализ полученных результатов. На рис. 1 представлены профили совместных кондуктивного и конвективного потоков (14) и (15) с учетом определенных выше констант. Область отрицательных значений кондуктивного потока обусловлена движением максимума плотности от стенки и отрицательным значением градиента в области слева от максимума. Конвективный поток всегда знакопостоянен, вектор его плотности направлен прочь от стенки и по модулю на порядок больше модуля плотности кондуктивного потока при выбранных нами масштабных константах. Все профили плотности потока имеют промежуточные экстремумы в интервале $z \in (0, \infty)$.

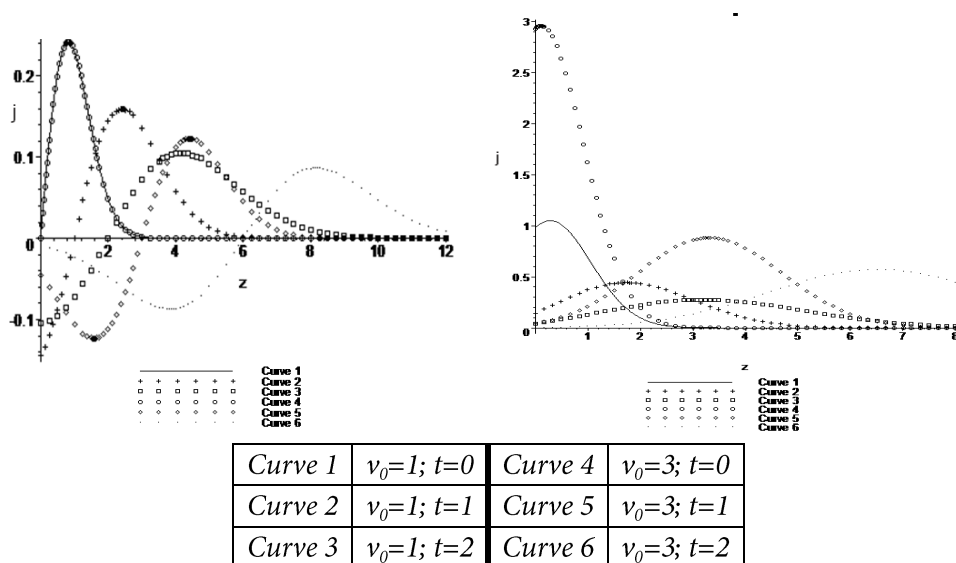


Рис. 1. Профили кондуктивного (слева) и конвективного (справа) потоков в разные моменты времени при разных значениях скорости v_0 .

Графики зависимости от времени кондуктивного (14) и конвективного (15) потоков представлены на рис. 2. Видно, что данные графики так же в общем случае имеют экстремумы на интервале $t \in (0, \infty)$.

В зависимости от v_0 возможны различные соотношения полного, конвективного и кондуктивного потоков.

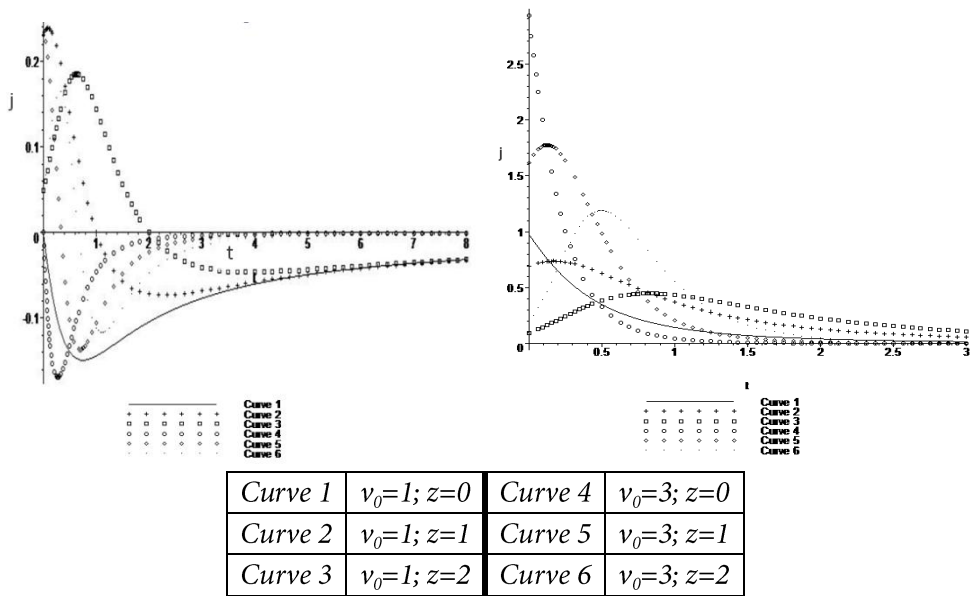


Рис. 2. Зависимость от времени кондуктивного (слева) и конвективного (справа) потоков для различных значений координаты z при разных значениях скорости v_0 .

На рис. 3 показано поочередное превышение одного потока над другим для больших и малых скоростей.

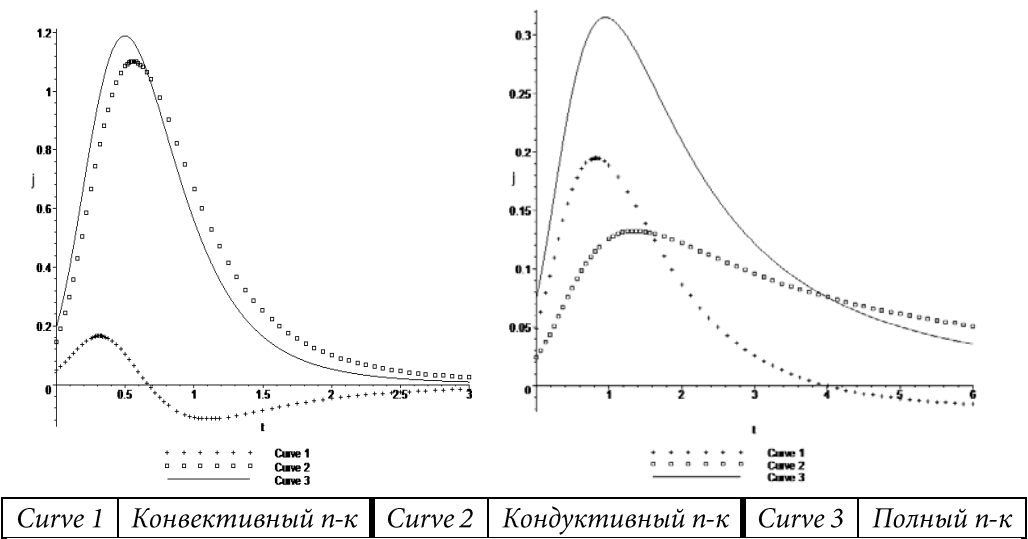
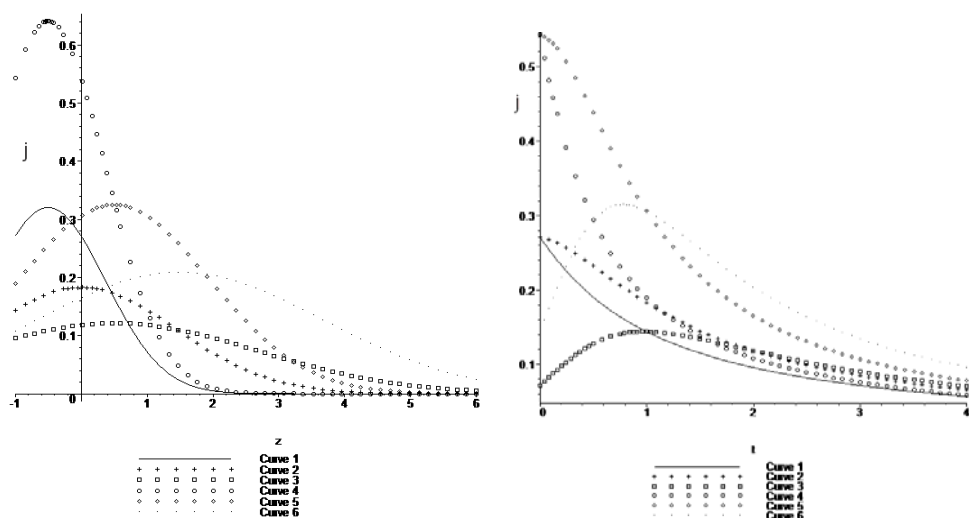


Рис. 3. Сравнение потоков при больших (слева) и малых (справа) начальных скоростях.

На рис. 4 показаны профили конвективного потока в текущем состоянии и его зависимость от времени. Графики профилей по оси абсцисс построены от $z = -1$, т.к. выбрана толщина слоя $L = 1$, и максимальная отрицательная координата не превышает толщины слоя. Видно, что поток всюду неотрицателен и асимптотически стремится к нулю.



Curve 1	$v_0=1/2; t=0$	Curve 1	$v_0=1/2; z=-1$
Curve 2	$v_0=1/2; t=1$	Curve 2	$v_0=1/2; z=0$
Curve 3	$v_0=1/2; t=2$	Curve 3	$v_0=1/2; z=1$
Curve 4	$v_0=1; t=0$	Curve 4	$v_0=1; z=-1$
Curve 5	$v_0=1; t=1$	Curve 5	$v_0=1; z=0$
Curve 6	$v_0=1; t=2$	Curve 6	$v_0=1; z=1$

Рис. 4. Профили конвективного потока в текущем состоянии (слева) и его зависимость от времени (справа) при различных значениях начальной скорости.

Графики для кондуктивного потока в текущем состоянии – см. рис. 5.

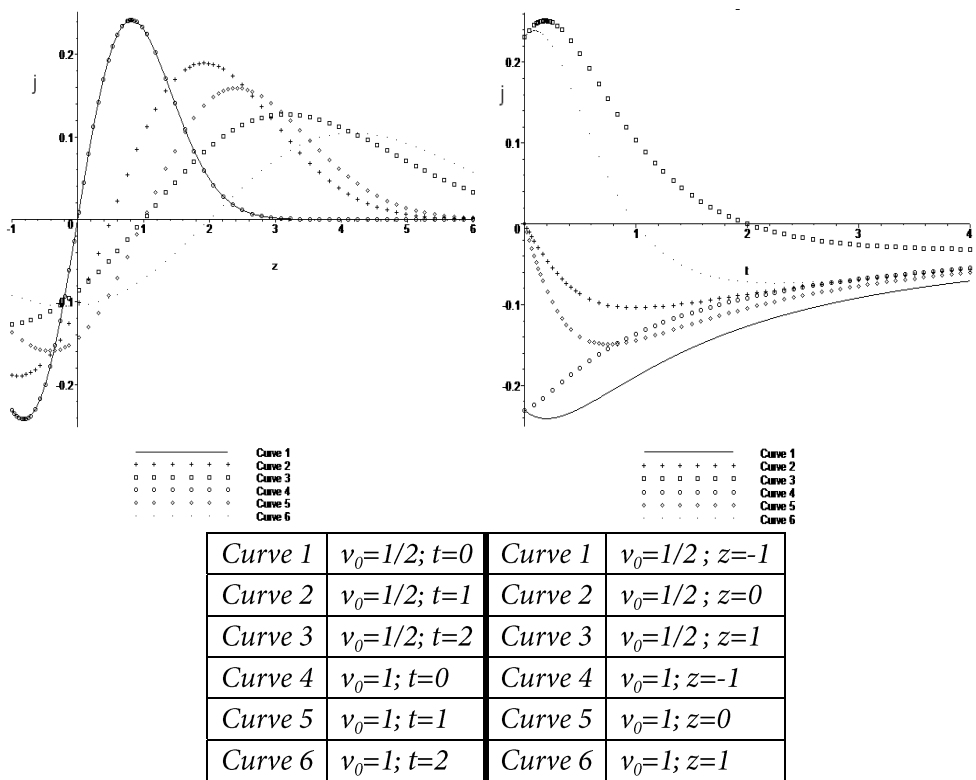
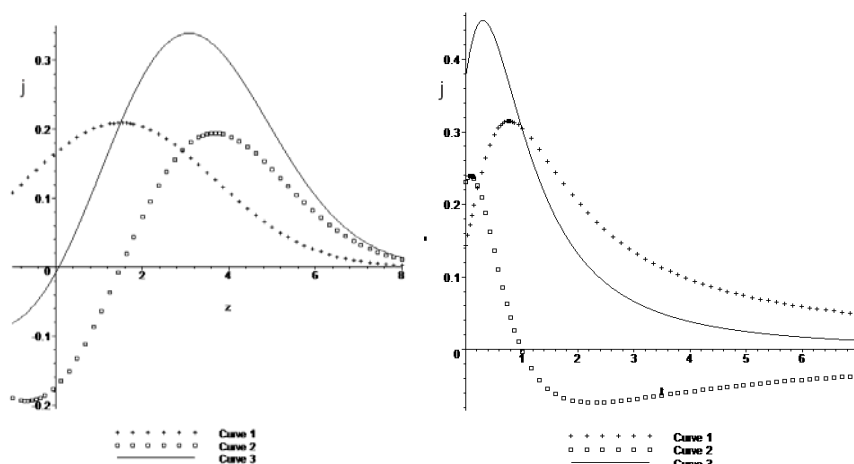


Рис. 5. Профили кондуктивного потока в текущем состоянии (слева) и его зависимость от времени (справа) при различных значениях начальной скорости.

Плотность потока знакопеременная и асимптотически стремится к нулю. Область с отрицательной плотностью потока образуется «в хвосте» прошедшего максимума. По графику зависимости плотности текущего кондуктивного потока от времени видно, что при достаточно больших t для любого z значения z -проекции плотности потока отрицательны. Область, где преобладает конвективный поток, будет возрастать с течением времени ввиду удаления максимума плотности от стенки, поэтому с течением времени полный текущий поток будет стремиться к нулю из области отрицательных значений (см. рис. 6).



Curve 1	Конвективный n -к	Curve 2	Кондуктивный n -к	Curve 3	Полный n -к
---------	---------------------	---------	---------------------	---------	---------------

Рис. 6. Сравнение профилей конвективного, кондуктивного и полного потоков в текущем состоянии (слева) и их зависимости от времени (справа).

Полученные результаты согласуются с результатами предыдущей работы [6] и имеют ясный физический смысл. Важно, что полученная общая формула плотности потока массы автоматически включает как конвективную, так и неконвективную части, причём описывает нестационарные состояния системы.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Бёрд Г. Молекулярная газовая динамика. М.: Мир, 1981. С. 320.
2. Анисимов С.И., Рахматуллина А. Х. Динамика расширения пара при испарении в вакуум // ЖЭТФ. 1973.Т. 64. Вып. 3. С. 869 – 876.
3. Кузнецова И. А., Юшканов А.А., Яламов Ю.И. Интенсивное испарение молекулярного газа с поверхности сферической частицы в вакуум // ЖТФ. 2000.Т. 70, Вып. 11. С. 140–142.
4. Анисимов С.И., Лысыков Ю.И. // О расширении газового облака в вакууме. // ПММ. 1970. № 34. С. 926.
5. Яламов Ю.И., Голов А.Н. Эволюция облака, созданного быстрым распылением широкой пластины в вакууме. // Труды Центра фундаментальных научных исследований Московский государственный областной университет. № 1. М., Издательство Московский государственный областной университет, 2005. С. 15–26.
6. Голов А.Н. // Эволюция полугораниченного нестационарного плоского газоподобного облака. // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. № 2, 2014. С. 69–78.

7. Голов А.Н., Яламов Ю.И. Статистическая и кинетическая теория нестационарных газоподобных и газодисперсных систем М.: изд. Московский государственный областной университет. 2011. С. 230.
8. Гуров К.П. Основания кинетической теории. М.: Наука, 1966. С. 351.

УДК 681.883.7

*Максимова О.В., Максимов С.М.**Ульяновский государственный технический университет*

МОДЕЛИРОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ПОДГОТОВКИ ИЗМЕРЕНИЙ СВОТОТЕХНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ТОНКОПЛЕНОЧНЫХ ЭЛЕКТРОЛЮМИНЕСЦЕНТНЫХ ИНДИКАТОРНЫХ УСТРОЙСТВ

Аннотация. В статье рассматриваются вопросы исследования процессов подготовки измерений светотехнических характеристик тонкопленочных электролюминесцентных индикаторных устройств. Проанализированы физические свойства параметров индикаторов. Были разработаны подходы и процедуры, применимые для создания аппаратно-программного комплекса измерения светотехнических параметров тонкопленочных электролюминесцентных индикаторных элементов. Анализ формализуемых этапов проведения измерений при наличии банка данных конструкций, параметров индикаторных элементов, методов измерения и перечня измерительных инструментов показал, что можно разработать автоматизированную систему подготовки эксперимента. Модули, входящие в программный комплекс передачи, обработки и хранения результатов измерений, разрабатываются в зависимости от вида выходных экспериментальных данных (графики, числовые массивы данных, численные значения параметров индикаторов).

Ключевые слова: тонкие пленки, электролюминесценция, индикатор, измерения, автоматизация, эксперимент, яркость, вольт-яркостная характеристика, толщины слоев.

*O. Maksimova, S. Maksimov**Ulyanovsk State Technical University*

MODELING OF PROCESSES FOR THE PREPARATION OF MEASUREMENTS LIGHTING CHARACTERISTICS TFEL DEVICES

Abstract. The article deals with the study of processes of preparation measurements lighting characteristics TFEL devices. We analyzed the physical properties of indicator parameters. Have developed approaches and procedures applicable to the creation of hardware and software measurement lighting parameters TFEL elements. Analysis of formalized steps of measuring, in the presence of a data bank structures, parameters of indicator elements, measurement methods and the list of measuring instruments showed that it is possible to develop an automated system for training experiment. Modules included in the software package transmission, processing and storage of the measurements are developed depending

on the type of output experimental data (graphic, numeric data arrays, numerical values indicators).

Key words: thin film, electroluminescence, indicator, measurement, automation, experiment, brightness, current–brightness characteristics, layer thickness.

Технология производства тонкопленочных электролюминесцентных дисплеев является уникальной в области разработки специальной техники. Сочетание технических и оптических характеристик таких дисплеев делает их непревзойденными для применения в самых сложных и взыскательных областях, в которых другие технологии могут быть неработоспособны. Разработчики средств отображения информации предпочитают применять ТПЭЛ дисплеи в техническом оборудовании и системах вследствие возрастающих требований заказчиков к качеству изображения, продолжительности жизненного цикла и надежности.

Сложность конструирования такого типа устройств связана с необходимостью обеспечения как высоких электрических показателей, так и светотехнических. Для этого необходимо проводить постоянный научно-исследовательский поиск новых конструкций и материалов тонкопленочных электролюминесцентных структур.

Технологической задачей разработки любого метода исследований является скорость и простота измерений, что может обеспечиваться автоматизацией управления параметрами измерительного процесса и автоматизацией регистрации результатов измерений [1–4]. При этом может использоваться комбинация различных методик измерения в одной установке.

Целью исследования является моделирование процессов подготовки измерений светотехнических характеристик тонкопленочных электролюминесцентных индикаторных устройств с учетом их физических свойств.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

1. Выделение этапов подготовки физического эксперимента и проведения измерений светотехнических характеристик тонкопленочных электролюминесцентных структур;

2. Анализ экспериментальных процедур на предмет их формализации;
3. Определение элемента банков данных экспериментов, определяющих параметры тонкопленочных электролюминесцентных структур;
4. Разработка универсальных подходов к измерениям параметров наноструктурированных индикаторных устройств.

Для создания автоматизированной системы подготовки измерений параметров индикаторных устройств необходимо определить ее основные компоненты и их взаимосвязь. Прежде всего, для этого была составлена классификация параметров индикаторных устройств [5; 6]. Параметры различных типов индикаторов можно разделить на следующие группы:

1. Электрические параметры (ток, напряжение питания, мощность рассеяния).

Согласно [1], при малых значениях приложенного напряжения ($u < U_n$) внешнее напряжение распределяется в слоях структуры в соответствии с их геометрическими емкостями. В этом случае ток заряда электролюминесцентного конденсатора равен току смещения в люминесцентной и диэлектрической пленке:

$$i = C \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \quad (1.1)$$

При превышении внешним напряжением порогового значения ($U_n < u < U_A$) дальнейший рост приложенного напряжения не приводит к увеличению падения напряжения в люминофоре. Изменение приложенного напряжения полностью перераспределяется на слои диэлектриков. В этом случае полный ток в структуре равен току проводимости в слое люминофора и является зарядным током емкости диэлектрика:

$$i = C_0 \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \quad (1.2)$$

Для управления электролюминесцентными излучателями в реальных условиях широко применяется переменное напряжение, изменяющееся по гармоническому закону:

$$u = U_A \cdot \sin(\omega \cdot t), \quad (1.3)$$

где $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$ – циклическая частота управляющего напряжения,
 f – частота изменения внешнего напряжения.

С учетом (1.3), производная напряжения по времени может быть записана следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = U_A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t), \quad (1.4)$$

Тогда значения токов при напряжениях больше и меньше порогового могут быть выражены в следующем виде:

$$\begin{cases} i = C \cdot U_A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t), & u < U_n \\ i = C_0 \cdot U_A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t), & u \geq U_n \end{cases} \quad (1.5)$$

Рассматривая случай превышения приложенным напряжением порогового значения, можно определить амплитудное значение рабочего тока в электролюминесцентной структуре:

$$I_A = \varepsilon_0 \cdot S \cdot U_A \cdot \omega \cdot \left(\frac{d_{d1}}{\varepsilon_{d1}} + \frac{d_{d2}}{\varepsilon_{d2}} + \dots + \frac{d_{dm}}{\varepsilon_{dm}} \right)^{-1} \quad (1.6)$$

Полученное выражение характеризует зависимость значения тока проводимости от конструктивных факторов в ТПЭЛ-структуре. Это позволяет оценить потребляемую энергию при функционировании индикаторов.

2. Светотехнические параметры (яркость, светоотдача, контрастность, угол обзора, спектр излучения).

Основной характеристикой электролюминесцентных источников света является вольт-яркостная характеристика, то есть зависимость яркости излучения ТПЭЛ-индикаторного элемента от амплитуды и частоты приложенного напряжения [1]. Типичная вольт-яркостная характеристика ТПЭЛ-индикатора представлена на рис. 1.

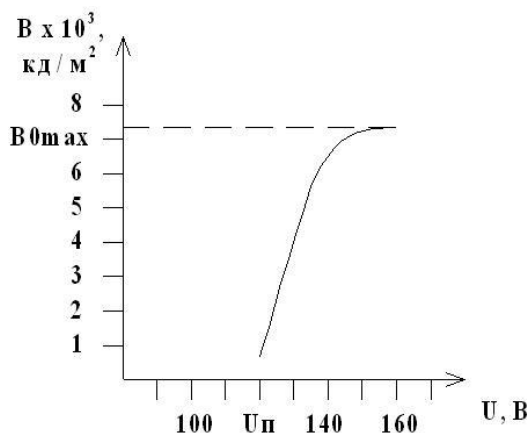


Рис. 1. Вольт–яркостная характеристика тонкопленочного электролюминесцентного индикатора.

Данная характеристика имеет пороговый характер – рост яркости происходит при превышении некоторого значения напряжения. Данное значение было обозначено как пороговое напряжение. Оно определяется свойствами материала люминофора, пороговой напряженностью электрического поля в нем, величиной и соотношением емкостей люминесцентного и диэлектрического слоев. Значения пороговой напряженности электрического поля в пленках люминофоров варьируется в диапазоне $7 \cdot 10^5 \div 7 \cdot 10^6 \text{ В/см}$ [1].

Максимальное значение яркости излучения тонкопленочного электролюминесцентного индикатора ограничивается максимально допустимым напряжением в рабочем диапазоне. Значение максимального напряжения зависит от свойств люминофора и диэлектрических слоев, конструктивных параметров светоизлучающей структуры и от условий возбуждения свечения [5].

Эффективность процессов преобразования электрической энергии в световое излучение характеризуется коэффициентом светоотдачи тонкоплёночного электролюминесцентного излучателя, определяемого как отношение излучаемого светового потока к потребляемой активной мощности. Величина светоотдачи зависит от состава и толщины плёнки люминофора, параметров диэлектрических слоев, амплитуды, частоты

и формы возбуждающего напряжения. Основными процессами, определяющими значение светоотдачи, являются: возбуждение центров свечения ускоренными электронами; излучательные переходы в активаторах; выход света во внешнюю среду [1; 5].

Максимальная средняя яркость излучения ТПЭЛ индикатора описывается выражением:

$$B_0 = \frac{\eta_{onm} \cdot d_l \cdot N}{W \cdot \tau_r}, \quad (1.7)$$

где

$$W = \frac{I}{B_{cp} \cdot Q_{\Pi}} \int_0^T \eta_{onm} \cdot d_l \cdot \frac{N^*}{\tau_r} \cdot i_{aэ} dt = \frac{I}{B_{cp} \cdot Q_{\Pi}} \int_0^T B(t) \cdot i_{aэ}(t) dt \quad (1.8)$$

Физический смысл максимальной средней яркости излучения в том, что она соответствует значению средней яркости при условии перехода всех активаторных центров в основное состояние за период изменения напряжения. Согласно формуле (1.8), величина W характеризуется взаимодействием ускоренных электронов с возбужденными атомами активаторной примеси [1].

Проанализировав полученные выражения, можно прийти к выводу, что в данных условиях достижение максимальной средней яркости является практически невозможным, так как описываемая ситуация равенства средней яркости и максимальной требует бесконечно большой плотности тока в слое люминофора.

Для упрощения расчета максимальной средней яркости вводится ряд допущений. Величина W полагается постоянной, а рассеяние электрической энергии в диэлектрических слоях отсутствует. В этом случае для расчета максимальной яркости ТПЭЛ-индикаторного элемента используется выражение [1; 5]:

$$B_0 = \frac{h \cdot c \cdot \eta_{onm} \cdot d_l \cdot K(\lambda) \cdot N}{\lambda \cdot \tau_r}, \quad (1.9)$$

где $\frac{h \cdot c}{\lambda}$ – энергия кванта излучения, h – постоянная Планка, c – скорость света, λ – максимум спектра излучения люминофора.

Важной особенностью определения максимальной яркости ТПЭЛ-индикаторного элемента (с точки зрения разработки методов проектирования) является ее линейная зависимость от толщины слоя люминофора.

Световая отдача ТПЭЛ-источника излучения определяется энергетическим выходом и спектральным составом излучения люминофора. Отношение излученной энергии к поглощенной за один и тот же промежуток времени является энергетическим выходом. Согласно [1; 5], светоотдача ТПЭЛ-индикаторного элемента определяется как отношение среднего значения светового потока излучения к энергии электрического поля в люминесцентном слое за период изменения внешнего управляющего напряжения, то есть к средней рассеиваемой мощности:

$$\eta = \frac{\pi \cdot B_{cp}}{P_{cp}}, \quad (1.10)$$

Анализ позволяет выделить максимальную величину светоотдачи:

$$\eta_0 = \frac{\pi \cdot \eta_{onm} \cdot d_l \cdot \sigma \cdot N}{e \cdot U_{nl}} = \frac{\pi \cdot \eta_{onm} \cdot \sigma \cdot N}{e \cdot E_{nl}}. \quad (1.11)$$

Физический смысл этой величины соответствует значению светоотдачи при условиях, что в результате протекания активного тока в люминесцентном слое ТПЭЛ-структуры возбуждаются все активаторные центры свечения. Также для данного процесса протекания тока принимается допущение об отсутствии взаимосвязи между ускоренными электронами и возбужденными центрами свечения.

3. Конструктивные параметры (толщины слоев, размеры диагонали экрана, параметры материалов).

4. Показатели надежности (долговечность, виброустойчивость, радиационная стойкость, рабочий диапазон температур).

Проанализировав данную классификацию, можно сделать вывод, что светотехнические параметры являются наиболее важными для конечного пользователя индикаторов общего назначения, а показатели надежности являются основными для разработчиков специальной индикаторной техники

при сохранении светотехнических характеристик неизменными в течение всего срока эксплуатации устройства [7].

На ранних этапах исследования были проведены измерения яркости и светоотдачи тонкопленочного электролюминесцентного конденсатора [1; 3–7]. В лабораторных условиях это достаточно трудоемкая процедура. Сначала необходимо получить образец тонкопленочной структуры с заданными конструктивными параметрами, далее собрать измерительную установку, включающую достаточно дорогостоящее оборудование, а затем провести цикл измерений. Были обозначены следующие этапы исследовательских процессов [9]:

1. Определение конструкции и параметра индикаторного элемента для проведения измерений (определение объекта и предмета исследования);
2. Выбор методики исследования параметров индикаторов;
3. Формирование аппаратного решения для проведения физического эксперимента;
4. Обеспечение передачи данных на персональный компьютер;
5. Обработка и хранение результатов измерений.

Анализ данных экспериментальных процедур позволил определить степень формализации задач измерения параметров индикаторных устройств:

1. Полностью формализуемые процессы:
 - 1.1. Обеспечение передачи данных на персональный компьютер;
 - 1.2. Обработка и хранение результатов измерений.
2. Частично формализуемые процессы:
 - 2.1. Выбор методики исследования параметров индикаторов;
 - 2.2. Формирование аппаратного решения для проведения физического эксперимента.
3. Неформализуемые процессы:
 - 3.1. Принятие решений о повторном эксперименте;
 - 3.2. Проверка эксперимента на адекватность.

Определение степени формализации задач исследования необходимо для создания автоматизированной системы подготовки измерений параметров индикаторных устройств.

Любая автоматизированная система включает в себя следующие составные элементы:

1. Интерфейс пользователя.
2. Модули, обеспечивающих автоматизацию вычислений конечных параметров индикаторных устройств.
3. Банк данных входных и выходных параметров с возможностью хранения и пополнения.

Для определения задач банка данных в автоматизированной системе подготовки измерений параметров тонкопленочных электролюминесцентных индикаторных устройств была проведена классификация ее возможных элементов [8]. В результате в состав банка данных входят:

1. Производственная оснастка для получения индикаторных структур;
2. Измерительные средства эксперимента;
3. Конструкции (структуры) индикаторных устройств;
4. Материалы индикаторных устройств и их параметры;
5. Методики измерения светотехнических параметров индикаторных устройств:

5.1. Математические модели эксперимента;

5.2. Физические модели эксперимента (схемы экспериментальных установок).

Для того чтобы разработать физическую модель процессов подготовки измерений светотехнических характеристик тонкопленочных электролюминесцентных индикаторных устройств в целях дальнейшей автоматизации эксперимента, необходимы следующие составляющие [9]:

- Схема с автоматическим управлением параметрами исследования;
- Инструменты измерения с возможностью передачи результатов исследования в автоматизированном режиме на персональный компьютер;
- Программное обеспечение передачи и регистрации результатов экспериментов;
- Результаты эксперимента в виде чисел, числовых массивов, графиков.

Вышеуказанные подходы и процедуры применимы для создания аппаратно-программного комплекса измерения светотехнических параметров тонкопленочных электролюминесцентных индикаторных элементов. В результате анализа методов и средств исследования светотехнических параметров для измерения яркости тонкопленочных электролюминесцентных структур были выполнены следующие процедуры [9]:

- разработана схема с автоматическим управлением амплитудным напряжением и частотой для измерения яркости при различных формах управляющего напряжения;

- определены приборы для измерения яркости – спектрометры, колориметры с интерфейсами для современных персональных компьютеров;

- разработано программное обеспечение «Автоматизированная система научных исследований тонкопленочных электролюминесцентных индикаторных устройств (АСНИ ТПЭЛИ)» (Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2012610067 10.01.2012г.), которая позволяет обрабатывать результаты эксперимента и хранить их в пополняемой базе данных. В случае применения математических автоматизированных систем (MathCAD, MatLAB) достоинством является их универсальность и гибкость расчета, так как позволяет вносить коррективы в системы уравнений, участвующих в расчете, в то время как готовый программный модуль может быть изменен только программистом с большими затратами времени и недоступен исследователю для внесения коррективов в процесс моделирования. Математические автоматизированные системы имеют ряд ограничений: они обусловлены заложенными алгоритмами решения, имеют пределы по сложности решаемых уравнений. Однако, ввиду их гибкости и быстроты, они являются наиболее оптимальным вариантом для решения уравнений. В случае, когда решение не может быть найдено существующими программами или не является объективным, возникает необходимость в специальном программном обеспечении [9];

- разработано программное обеспечение, позволяющее моделировать зависимость яркости от напряжения и формировать вольт-яркостную характеристику тонкопленочных электролюминесцентных элементов

«Автоматизированная система анализа вольт–яркостной характеристики тонкопленочных электролюминесцентных структур» (Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2015610262 12.01.2015 г.).

ЛИТЕРАТУРА:

1. Евсевич Д.А. Методы и средства структурно-параметрического синтеза тонкопленочных электролюминесцентных индикаторов в автоматизированном проектировании / Д.А. Евсевич, О.В. Максимова; под реда. Проф. М.К. Самохвалова. Ульяновск: УлГТУ, 2014. 92 с.
2. Максимова, О.В. Анализ процессов проектирования и технологии наноструктурированных тонкопленочных электролюминесцентных индикаторных устройств / О.В. Максимова, М.К. Самохвалов, С.М. Максимов. Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2013. № 3. С. 74–78.
3. Максимова, О.В. САПР тонкопленочных электролюминесцентных индикаторов / О.В. Максимова, Д.А. Евсевич // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2012. № 2. С. 131–135.
4. Максимова О.В. Задачи автоматизации моделирования яркости и светоотдачи тонкопленочных электролюминесцентных конденсаторов / О.В. Максимова, С.М. Максимов, М.К. Самохвалов // Автоматизация процессов управления. 2014. № 2 (36). С. 98–105.
5. Максимова, О.В. Математическое обеспечение САПР тонкопленочных электролюминесцентных индикаторов при решении задач синтеза конструкций / О.В. Максимова, М.К. Самохвалов // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2012. № 1. С. 77–85.
6. Evseichev, D. The CAD System of the Thin Film Electroluminescent Display: collection of scientific papers / D. Evseichev, O. Maksimova, M. Samokhvalov // The 11th International Meeting on Information Display (IMID 2011). KINTEX, Seoul, Korea. 2011. P. 768–769.
7. Максимова О.В. Разработка алгоритмов и программ исследования светотехнических характеристик тонкопленочных электролюминесцентных индикаторов / О.В. Максимова, Д.А. Евсевич, А.С. Яманчев // Актуальные проблемы электронного приборостроения АПЭП-2014: Материалы 11 междунар. науч.-техн. конференции, г. Саратов, 25–26 сентября 2014 г. Саратов: ООО «Буква», 2014. С. 72–74.
8. Максимова О.В. Разработка средств автоматизации конструирования тонкопленочных электролюминесцентных индикаторов / О.В. Максимова, Д.А. Евсевич, М.К. Самохвалов, С.М. Максимов // Актуальные проблемы электронного приборостроения АПЭП-2014: Мат-лы 11 междунар. Науч.-техни. конференции, г. Саратов, 25–26 сентября 2014 г. Саратов: ООО «Буква», 2014 С. 66–71.

9. Максимова О.В. Автоматизация процессов измерения светотехнических характеристик наноструктурированных индикаторных устройств / О.В. Максимова, С.М. Максимов, С.В. Мойсеенко // Автоматизация процессов управления. 2015. № 1 (39). С. 106–113.

УДК 004.932.72'1

Студенцов С.А.^{*}, Брежнев В.А.^{**}, Ежов В.А.^{***}^{*}ООО «НПП «Фотон», г. Саратов,^{**}ООО «Волга-Модулятор», г. Саратов,^{***}ООО «АСФ», г. Москва

АРТЕФАКТЫ В БЫСТРОДЕЙСТВУЮЩИХ ЖК-ЗАТВОРАХ НА STN-ЭФФЕКТЕ ДЛЯ АКТИВНЫХ 3D-ОЧКОВ И ИХ УСТРАНЕНИЕ КОРРЕКЦИЕЙ РЕЖИМА УПРАВЛЕНИЯ

Аннотация. Рассмотрены артефакты, возникающие в жидкокристаллических затворах для активных 3D-очков. Описаны факторы, влияющие на их форму и расположение. Предложены способы устранения данного дефекта.

Ключевые слова: быстродействующие ЖК-затворы, активные 3D-очки, артефакты.

S. Studentsov^{*} V. Brezhnev^{**} V. Ezhov^{***}^{*}Photon, ltd, Saratov^{**}Volga-Modulator, ltd, Saratov^{***}ASF, ltd, Moscow

ARTIFACTS IN FAST-SWITCHING, SUPERTWISTED NEUMATIC LIQUID-CRYSTAL SHUTTERS FOR ACTIVE 3D-GLASSES AND THEIR ELIMINATION BY DRIVING MODE

Abstract. We consider the artifacts arising in fast-switching, supertwisted neumatic (STN) liquid-crystal (LC) shutters for active 3D-glasses. The factors, influencing their shape and location, are reviewed. The methods for elimination of this defect are suggested.

Keywords: fast-switching LC-shutters, active 3D-glasses, artifacts.

В настоящее время наиболее распространенным средством получения 3D-изображения на плоском экране являются устройства с активными очками на быстродействующих ЖК-затворах. По оценкам экспертов, это положение сохранится еще на многие годы [1].

Стереоизображение в таких очках формируется черезкадровым закрытием правого и левого оптических каналов активных очков и синхронным с этим формированием на экране изображения для каждого глаза. Для закрытия затвора в течение времени кадра обычно подается

управляющее напряжение с несущей частотой 1 (или 2 кГц) [2]. Энергопотребление в этом случае достаточно велико, поэтому гораздо предпочтительнее вариант управления с минимальной кадровой частотой со скважностью 2. В этом случае во время одного кадра изображения на ЖК-затвор подается постоянное рабочее напряжение одной полярности, а через кадр – другой [2]. При этом энергопотребление будет в 8 (или 16) раз меньше.

Проблемой такого управления является возникновение при работе в 3D-режиме темных областей (полос или пятен), которые ухудшают качество стереоизображения. Причем дефекты неравномерности пропускания отсутствуют в первые 1–2 минуты (рис. 1а) включения 3D-режима (здесь и далее, если не оговорено иное, – напряжение амплитудой 12 В со скважностью 2, при обычной для современных 3D-устройств кадровой частоте 120 Гц), но уже через 10–15 минут отсекают 20–30 % площади электрода (рис. 1б). Еще через 30–60 минут дефект уменьшается в размерах до вытянутого пятна размером 2...6 мм (рис. 1в) и далее практически не изменяется. На всех стадиях развития дефект находится в поле зрения или требует закрытия до 30 % площади затвора, что недопустимо.

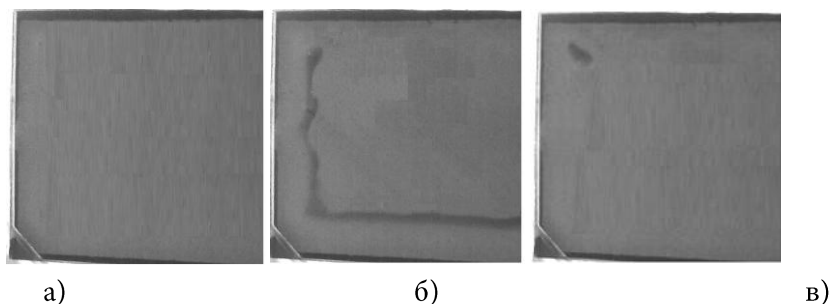


Рис. 1. Динамика изменения затемнения быстродействующего ЖК-затвора на STN-эффекте: а) в течение первой минуты после включения в 3D-режиме; б) через 10 минут после включения 3D-режима; в) через 60 минут после включения 3D-режима

Различие в пропускании отдельных участков достигает 50 %. Установлено, что визуализация локального изменения пропускания является следствием увеличения времени релаксации в этих зонах на 1,5–2,5 мс

относительно остальных участков (рис. 2). Это означает, что в области артефакта в каждом глазу происходит наложение световых потоков обоих каналов и наблюдатель видит двоение изображения без стереозффекта.

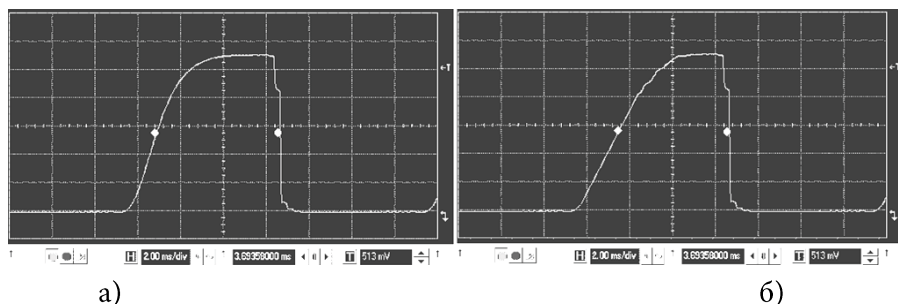


Рис. 2. Оптический отклик быстродействующего ЖК-затвора на STN-эффекте в стандартной области (а) и в зоне затенения (б).

Эффект наблюдается как на ЖК-затворах на пи-ячейках [3], так и в закрученных на 270° структурах [4].

Эксперименты показали, что возникновение этих артефактов связано именно с 3D-режимом. Ни при длительном воздействии переменного напряжения, ни при многочасовой подаче постоянного напряжения их нет.

При частоте управляющего сигнала 120 Гц артефакт появляется при напряжениях выше 6–7 В и исчезает при напряжениях выше 18 В. Максимальные размеры дефектов наблюдаются при напряжениях 8–11 В.

При стандартной для 3D-устройств амплитуде управляющего напряжения 12 В дефект отсутствует при кадровой частоте ниже 50 Гц и выше 600 Гц.

Особенностью эффекта является зависимость расстояния от края дисплея до внешней границы затененного пятна от напряжения. При низких напряжениях затемнение начинается на расстоянии 6–8 мм от торца, при высоких оно смещается к краю и при 15–16 В уменьшается до 2–3 мм.

Очевидно, что режимы, в которых артефакт отсутствует, неприемлемы или из-за большого времени реакции, или энергопотребления, или мерцания.

Впервые это явление под названием "ion shadow defect" описано в [5]. Авторы [5] для минимизации артефактов в пи-ячейках использовали

напряжение представленной на рис. 3 формы. Однако наши расчеты показывают, что при таком управлении энергопотребление по сравнению с режимом несущей 1–2 кГц снижается только на 30–33 %, а рост относительно идеального варианта с подачей меандра кадровой частотой со скважностью 2 – семикратный.

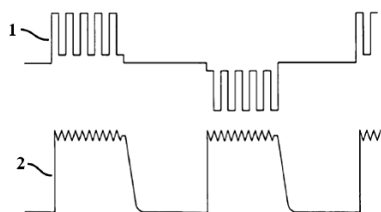


Рис. 3. Форма управляющего сигнала для уменьшения эффекта ионной тени [5]:

кривая 1 – форма напряжения, подаваемого на ЖК-затвор;

кривая 2 – соответствующий оптический отклик.

Вопрос распределения электромагнитных волн при их распространении в различных средах рассматривался в статьях [6; 7]. В этих работах показано, что при распространении и отражении электрического тока вблизи границы проводника наблюдаются различного рода неоднородности поля.

Мы исходим из предположения, что причиной образования затенения является концентрация встречного заряда в ЖК-слое в краевых областях дисплея. На основании этой модели нами предложен иной способ управления, минимизирующий эффект затенения.

Согласно этому способу, время кадра T , в течение которого затвор находится под напряжением, делится на две части: T_1 , когда на ячейку подается напряжение одной полярности, и τ_p , в течение которого на затвор подается напряжение противоположной полярности (рис. 4). Время τ_p – это время реакции ЖК-слоя, оно много меньше T_1 . За время τ_p действием напряжения одной полярности ликвидируется встречный заряд в ЖК-структуре, образованный в данном кадре действием напряжения другой

полярности, причем периода τ_p недостаточно для образования в том же цикле нового встречного заряда.

Для затвора с 6-микронной толщиной ЖК-слоя длительность импульса противоположной полярности составляла $\tau_p = 0,5$ мс, а для 4-микронной толщины - $\tau_p = 0,3$ мс.

При работе в указанном режиме дефект или не образуется, или мало заметен даже после 96 часов непрерывной работы. Важным моментом является то, что затворы, управлявшиеся стандартным прямоугольным меандром и имеющие уже сформировавшийся дефект, при переключении на управление в режиме согласно рис. 4 были однородны по пропусканию.

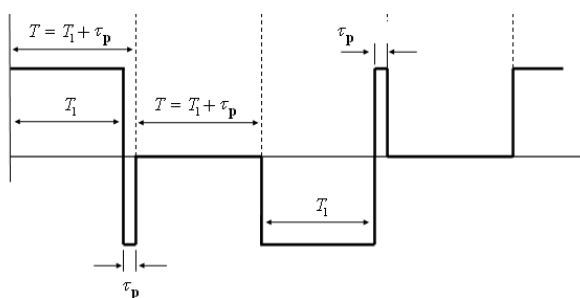


Рис. 4. Форма управляющего сигнала, минимизирующего эффект затенения быстродействующего ЖК-затвора на STN-эффекте.

Очевидно, что в данном режиме энергопотребление относительно варианта управления с несущей частотой 1 кГц снижается в 4,17 раза. Относительно идеального варианта меандра кадровой частоты скважность 2 в этом случае энергопотребление больше в 2 раза, зато не имеет артефакта затенения.

С изменением напряжения U время реакции τ_p изменяется по формуле:

$$\tau_p = \frac{1}{U^2 - U_0^2}, \quad (1)$$

где U_0 – пороговое напряжение

Поэтому с ростом напряжения длительность τ_p кратковременного импульса противоположной полярности уменьшается, а при уменьшении напряжения τ_p увеличивается в соответствии с формулой (1). Таким образом, при установленной величине τ_p допустимы любые колебания напряжений.

В частности, для 6-микронного затвора при длительности кратковременного импульса противоположной полярности $\tau_p = 0,5$ мс дефект неравномерности пропускания отсутствует или малозаметен при колебаниях напряжений от 10,5 до 15 В. Для 4-микронного затвора диапазон допустимых колебаний напряжения еще больше.

Поскольку время реакции экспоненциально зависит от температуры, аналогичное поведение наблюдается при нагреве или охлаждении затвора. Правда, при охлаждении уменьшается и подвижность свободных ионов, что в какой-то степени компенсирует увеличение τ_p . По этим причинам диапазон температур, при которых режим был эффективен – от 15° до 40°С. Это перекрывает возможные колебания температуры внутри помещения.

Итак, в результате проведенной работы описан дефект ионной тени при работе 270° STN-ячейки в различных режимах активных 3D-очков (меандр амплитудой 5–20 В, скважность 2, кадровая частота 32–250 Гц) и предложен способ управления, при котором указанный артефакт отсутствует или минимизирован.

ЛИТЕРАТУРА:

1. DisplaySearch 3D Display Technology and Market Forecast Report, January 2010.
2. Berman A. et al, патент США US 4792850, «Method and system employing a push-pull liquid crystal modulator», опублик. 20.12.88.
3. Berman A., L. Meyer, L. Lipton, патент US 4884876 «Achromatic Liquid Crystal Shutter for stereoscopic and other applications», опублик. 05.12.1989.
4. Lipton L., M.Tilton, патент US5327269 «Fast switching 270° twisted nematic liquid crystal device and eyewear incorporating the device», опублик. 05.07.1994.
5. Dorworth B. et al. Eliminating π -cell artifacts // Proc. SPIE 3957, Stereoscopic Displays and Virtual Reality Systems VII (May 3, 2000), vol. 3295. P.264-270.
6. А.И. Уткин. Распределение электрического тока в тонком металлическом слое под действием переменного тока // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика, 2014. № 3. С. 38–45.
7. Е.П.Захарченко. Особенности отражения электромагнитных волн от границы раздела диэлектрик–запредельная усиливающая среда с электрической гиротропией // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика, 2010. № 3, С.18–22.

НАШИ АВТОРЫ

Алгазин Олег Дмитриевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры вычислительной математики и математической физики Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана; e-mail: mori66@yandex.ru

Андреианов Иван Константинович – ассистент кафедры общей физики Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета; e-mail: ivan_andrianov_90@mail.ru

Аронишидзе Марина Никитична – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник Института кибернетики им В.В. Чавчанидзе Грузинского технического университета (г. Тбилиси); e-mail: gchilaya@gmail.com

Беляев Виктор Васильевич – доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник, заведующий кафедрой теоретической физики Московского государственного областного университета; e-mail: vv.belyaev@mgou.ru

Брежнев Владимир Алексеевич – директор ООО «Волга-Модулятор» (г. Саратов); e-mail: brezhnev1944@mail.ru

Вардосанидзе Зураб Вахтангович – кандидат физико-математических наук, главный научный сотрудник Института кибернетики им В.В. Чавчанидзе Грузинского технического университета (г. Тбилиси); e-mail: zvward@yahoo.com

Васильев Пётр Яковлевич – старший научный сотрудник Государственного оптического института им. С.И. Вавилова (г. Санкт-Петербург); e-mail: nvkamanina@mail.ru

Гердимер Оксана Владимировна – аспирант Северного (Арктического) федерального университета им. М.В. Ломоносова (г. Архангельск); e-mail: o.gerdimer@narfu.ru

Голов Александр Николаевич – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры теоретической физики Московского государственного областного университета; e-mail: alexandergolov@mail.ru

Гринкруг Мирон Соломонович – кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой общей физики Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета; e-mail: ivan_andrianov_90@mail.ru

Ежов Василий Александрович – кандидат технических наук, старший научный сотрудник Института общей физики им. А.М. Прохорова РАН (г. Москва); e-mail: ezhov@3dstereo.ru

Зубцова Юлия Александровна – научный сотрудник Государственного оптического института им. С.И. Вавилова (г. Санкт-Петербург); e-mail: nvkamanina@mail.ru

Каманина Наталия Владимировна – доктор технических наук, профессор, заведующий лабораторией фотофизики сред с нанообъектами Государственного оптического института им. С.И. Вавилова (г. Санкт-Петербург), профессор Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина); e-mail: nvkamanina@mail.ru

Конаев Анатолий Владимирович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры вычислительной математики и математической физики Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана; e-mail: 5736234@mail.ru

Костицына Людмила Ивановна – кандидат физико-математических наук, профессор; e-mail: vv.belyaev@mgou.ru

Кужаков Павел Викторович – младший научный сотрудник Государственного оптического института им. С.И. Вавилова (г. Санкт-Петербург); e-mail: nvkamanina@mail.ru

Кузнецов Вадим Михайлович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры физики Российского химико-технологического университета имени Д.И. Менделеева; e-mail: Vadim.kuznetsov.37@mail.ru

Кухарчик Александр Александрович – младший научный сотрудник Государственного оптического института им. С.И. Вавилова (г. Санкт-Петербург), аспирант СПбГЭТУ «ЛЭТИ»; e-mail: nvkamanina@mail.ru

Латышев Анатолий Васильевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа и геометрии Московского государственного областного университета; e-mail: avlatyshev@mail.ru

Лихоманова Светлана Владимировна – аспирант Санкт-Петербургского национального исследовательского университета информационных технологий, механики и оптики, младший научный сотрудник Государственного оптического института им. С.И. Вавилова (г. Санкт-Петербург); e-mail: lsv-87@bk.ru

Максимов Сергей Михайлович – аспирант кафедры проектирования и технологии электронных средств Ульяновского государственного технического университета; e-mail: first32007@yandex.ru

Максимова Оксана Вадимовна – кандидат технических наук, доцент кафедры проектирования и технологии электронных средств Ульяновского государственного технического университета; e-mail: first32007@yandex.ru

Петриашвили Гиа Шалвович – кандидат физико-математических наук, главный научный сотрудник Института кибернетики им В.В. Чавчанидзе Грузинского технического университета (г. Тбилиси); e-mail: g.petriashvili@yahoo.co.uk

Попов Василий Николаевич – доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой математики Северного (Арктического) федерального университета им. М.В. Ломоносова (г. Архангельск); e-mail: o.gerdimer@narfu.ru

Попов Владимир Семенович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана; e-mail: vspopov@bk.ru

Птицына Инга Вячеславовна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математического анализа и геометрии Московского государственного областного университета; e-mail: inpt@mail.ru

Серов Сергей Владимирович – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник Государственного оптического института им. С.И. Вавилова (г. Санкт-Петербург); e-mail: sergei.serov.spb@gmail.com

Студёнов Владислав Игоревич – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Государственного оптического института им. С.И. Вавилова (г. Санкт-Петербург); e-mail: sergei.serov.spb@gmail.com

Студенцов Сергей Александрович – директор ООО Научно-производственного предприятия «Дисплей» (г. Саратов); e-mail: Lcspectrum@mail.ru

Тавзарашвили Светлана Петровна – научный сотрудник Института кибернетики им В.В. Чавчанидзе Грузинского технического университета (г. Тбилиси); e-mail: stavzar@inbox.ru

Тевдорашвили Кетеван Гиоргиевна – научный сотрудник Института кибернетики им В.В. Чавчанидзе Грузинского технического университета (г. Тбилиси); e-mail: ketonuka@rambler.ru

Терешкина Ксения Борисовна – кандидат физико-математических наук, доцент старший научный сотрудник отдела строения вещества Института химической физики им. Н.Н. Семёнова РАН (г. Москва); e-mail: Ksenia.tereshkina@gmail.com

Филиппова Александра Петровна – студент Московского государственного областного университета; e-mail: a.renard04@yandex.ru

Чанишвили Андрей Гурамович – кандидат физико-математических наук, главный научный сотрудник Института кибернетики им В.В. Чавчанидзе Грузинского технического университета (г. Тбилиси); e-mail: achanishvili@yahoo.com

Черняев Александр Петрович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики Московского физико-технического института (государственный университет); e-mail: info@mipt.ru

Чилая Гурам Сергеевич – доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Института кибернетики им В.В. Чавчанидзе Грузинского технического университета (г. Тбилиси); e-mail: gchilaya@gmail.com

Шурпо Наталия Александровна – младший научный сотрудник Государственного оптического института им. С.И. Вавилова (г. Санкт-Петербург); e-mail: shurpon@mail.ru

Юшканов Александр Алексеевич – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры теоретической физики Московского государственного областного университета; e-mail: yushkanov@inbox.ru



ВЕСТНИК МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ОБЛАСТНОГО УНИВЕРСИТЕТА

Научный журнал «Вестник МГОУ» основан в 1998 г. На сегодняшний день выходят десять серий «Вестника»: «История и политические науки», «Экономика», «Юриспруденция», «Философские науки», «Естественные науки», «Русская филология», «Физика-математика», «Лингвистика», «Психологические науки», «Педагогика». Все серии включены в составленный Высшей аттестационной комиссией Перечень ведущих рецензируемых научных журналов, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертации на соискание ученой степени доктора и кандидата наук по наукам, соответствующим названию серии. Журнал включен в базу данных Российского индекса научного цитирования (РИНЦ).

Печатная версия журнала зарегистрирована в Федеральной службе по надзору за соблюдением законодательства в сфере массовых коммуникаций и охране культурного наследия. Полнотекстовая версия журнала доступна в Интернете на платформе Научной электронной библиотеки (www.elibrary.ru), а также на сайте Московского государственного областного университета (www.vestnik.mgou.ru).

ВЕСТНИК МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ОБЛАСТНОГО УНИВЕРСИТЕТА

СЕРИЯ «ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА»
2015. N 2

Над номером работали:

менеджер Отдела по изданию журнала «Вестник МГОУ» И.А. Потапова
корректор А.С. Барминова
компьютерная верстка К.С. Карасёва

Отдел по изданию научного журнала «Вестник МГОУ»
105005, г. Москва, ул. Радио, д.10а, офис 98
тел. (499) 261-43-41; (495) 723-56-31
e-mail: vest_mgou@mail.ru
Сайт: www.vestnik-mgou.ru

Формат 70х108/₁₆. Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура «Minion Pro».

Тираж 500 экз. Уч.-изд. л. 5,25, усл. п.л. 9.

Подписано в печать 16.06.2015. Заказ № 2015/06-02.

Отпечатано в типографии МГОУ
105005, г. Москва, ул. Радио, 10а