

ISSN 2072-8387



Вестник

МОСКОВСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
ОБЛАСТНОГО
УНИВЕРСИТЕТА

Серия

ФИЗИКА-
МАТЕМАТИКА

ОРТОГОНАЛЬНОСТЬ СОБСТВЕННЫХ
ФУНКЦИЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ
УРАВНЕНИЙ КАК МЕТОД РЕШЕНИЯ
ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ МОДЕЛЬНЫХ
КИНЕТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

ОРИЕНТАЦИЯ КРАСИТЕЛЕЙ
ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ
С ЛАЗЕРНЫМ ИЗЛУЧЕНИЕМ

НИЗКОТЕМПЕРАТУРНАЯ ТЕПЛОЕМКОСТЬ
ВЕЩЕСТВ С ФРАКТАЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТЬЮ
КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СПЕКТРОВ



2015/ № 1

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА

Научный журнал основан в 1998 г.

«Вестник Московского государственного областного университета» (все его серии) включён в «Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертации на соискание учёной степени доктора и кандидата наук» Высшей аттестационной комиссии при Министерстве образования и науки Российской Федерации (См.: Список журналов на сайте ВАК при Минобрнауки России) по наукам, соответствующим названию серии.

The academic journal is established in 1998

«Bulletin of Moscow State Regional University» (all its series) is included by the Supreme Certifying Commission of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation into “the List of leading reviewed academic journals and periodicals recommended for publishing in corresponding series basic research thesis results for a Ph.D. Candidate or Doctorate Degree” (See: the online List of journals at the site of the Supreme Certifying Commission of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation).

PHYSICS AND MATHEMATICS

BULLETIN OF THE MOSCOW STATE
REGIONAL UNIVERSITY

Учредитель журнала «Вестник МГОУ»: Московский государственный областной университет

Выходит 4 раза в год

Редакционно-издательский совет «Вестника МГОУ»

Хроменков П.Н. — к.филол.н., проф., ректор МГОУ (председатель совета)

Ефремова Е.С. — к.филол.н., и.о. проректора по научной работе МГОУ (зам. председателя);

Клычников В.М. — к.ю.н., к.и.н., проф., проректор по учебной работе и международному сотрудничеству МГОУ (зам. председателя)

Антонова Л.Н. — д.пед.н., проф., академик РАО, Комитет Совета Федерации по науке, образованию и культуре

Асмолов А.Г. — д.псх.н., проф., академик РАО, директор Федерального института развития образования

Климов С.Н. — д.ф.н., проф., Московский государственный университет путей сообщения (МИИТ)

Клобуков Е.В. — д.филол.н., проф., Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Манойло А.В. — д.пол.н., проф., МГУ им. М.В. Ломоносова

Новоселов А.Л. — д.э.н., проф., Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова

Пасечник В.В. — д.пед.н., проф., МГОУ

Поляков Ю.М. — к.филол.н., главный редактор «Литературной газеты»

Рюмцев Е.И. — д.ф.-м.н., проф., Санкт-Петербургский государственный университет

Хухуни Г.Т. — д.филол.н., проф., МГОУ

Чистякова С.Н. — д.пед.н., проф., Российская академия образования (г. Москва)

ISSN 2072-8387

Вестник Московского государственного областного университета. Серия «Физика-Математика». 2015. № 1. М.: ИИУ МГОУ. 120 с.

Журнал «Вестник МГОУ» серия «Физика-Математика» зарегистрирован в Федеральной службе по надзору за соблюдением законодательства в сфере массовых коммуникаций и охране культурного наследия. Регистрационное свидетельство ПИ № ФС77-26136

**Индекс серии «Физика-Математика»
по Объединённому каталогу «Пресса России» 40723**

© МГОУ, 2015.

© ИИУ МГОУ, 2015.

Редакционная коллегия серии «Физика-Математика»

Ответственный редактор серии:

Бугаев А.С. — д.ф.-м.н., академик РАН, МФТИ

Заместитель ответственного редактора:

Жачкин В.А. — д.ф.-м.н., проф., МГОУ

Ответственный секретарь:

Васильчикова Е.Н. — к.ф.-м.н., доц., МГОУ

Члены редакционной коллегии:

Беляев В.В. — д.т.н., проф., МГОУ;

Богданов Д.Л. — д.ф.-м.н., проф., МГОУ;

Бугримов А.Л. — д.т.н., проф., МГОУ;

Латышев А.В. — д.ф.-м.н., проф., МГОУ;

Рассудовская М.М. — к.п.н., проф., МГОУ;

Осипов М.А. — д.ф.-м.н., проф., Университет Стратклайд (Великобритания);

Чигринов В.Г. — д.ф.-м.н., проф., Гонконгский университет науки и технологий (Китай)

Журнал включён в базу данных Российского индекса научного цитирования (РИНЦ), имеет полнотекстовую сетевую версию в Интернете на платформе Научной электронной библиотеки (www.elibrary.ru), а также на сайте Московского государственного областного университета (www.vestnik-mgou.ru)

При цитировании ссылка на конкретную серию «Вестника МГОУ» обязательна. Воспроизведение материалов в печатных, электронных или иных изданиях без разрешения редакции запрещено. Опубликованные в журнале материалы могут использоваться только в некоммерческих целях. Ответственность за содержание статей несут авторы. Мнение редколлегии серии может не совпадать с точкой зрения автора. Рукописи не возвращаются.

**Адрес Отдела по изданию научного журнала
«Вестник МГОУ»**

г. Москва, ул. Радио, д.10а, офис 98

тел. (499) 261-43-41; (495) 723-56-31

e-mail: vest_mgou@mail.ru; сайт: www.vestnik-mgou.ru

The founder of journal «Bulletin of the MSRU»: Moscow State Regional University

Issued 4 times a year

Series editorial board «Physics and Mathematics»

Editor-in-chief:

A.S. Bugaev – Doctor of Physics and Mathematics, Academician of RAS, MIPT

Deputy editor-in-chief:

V.A. Zhachkin – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, MSRU

Executive secretary:

E.N. Vasilchikova – Ph.D. in Physics and Mathematics, Associate Professor, MSRU

Members of Editorial Board:

V.V. Belyaev – Doctor of Technical Sciences, Professor, MSRU

D.L. Bogdanov – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, MSRU

A.L. Bugrimov – Doctor of Technical Sciences, Professor, MSRU

A.V. Latyshev – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, MSRU

M.M. Rassudovskaya – Ph.D. in Pedagogical Sciences, Professor, MSRU

M.A. Osipov – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Strathclyde University (UK)

V.G. Chigrinov – University of Science and Technology (Hong Kong, China)

The journal is included into the database of the Russian Science Citation Index, has a full text network version on the Internet on the platform of Scientific Electronic Library (www.elibrary.ru), as well as at the site of the Moscow State Regional University (www.vestnik-mgou.ru)

At citing the reference to a particular series of «Bulletin of the Moscow State Regional University» is obligatory. The reproduction of materials in printed, electronic or other editions without the Editorial Board permission, is forbidden. The materials published in the journal are for non-commercial use only. The authors bear all responsibility for the content of their papers. The opinion of the Editorial Board of the series does not necessarily coincide with that of the author. Manuscripts are not returned.

The Editorial Board address: Moscow State Regional University

10a Radio st., office 98, Moscow, Russia

Phones: (499) 261-43-41; (495) 723-56-31

e-mail: vest_mgou@mail.ru; site: www.vestnik-mgou.ru

Publishing council «Bulletin of the MSRU»

P.N. Khromenkov – Ph. D. in Philology, Professor, Principal of MSRU (Chairman of the Council)

E.S. Yefremova – Ph. D. in Philology, Acting Vice-Principal for scientific work of MSRU (Vice-Chairman of the Council)

V.M. Klychnikov – Ph.D. in Law, Ph. D. in History, Professor, Vice-Principal for academic work and international cooperation of MSRU (Vice-Chairman of the Council)

L.N. Antonova – Doctor of Pedagogics, Professor, Member of the Russian Academy of Education, The Council of the Federation Committee on Science, Education and Culture

A.G. Asmolov – Doctor of Psychology, Professor, Member of the Russian Academy of Education, Principal of the Federal Institute of Development of Education

S.N. Klimov – Doctor of Philosophy, Professor, Moscow State University of Railway Engineering

E.V. Klobukov – Doctor of Philology, Professor, Lomonosov Moscow State University

A.V. Manoylo – Doctor of Political Science, Professor, Lomonosov Moscow State University

A.L. Novosjolov – Doctor of Economics, Professor, Plekhanov Russian University of Economics

V.V. Pasechnik – Doctor of Pedagogics, Professor, MSRU

Yu. M. Polyakov – Ph.D. in Philology, Editor-in-chief of «Literaturnaya Gazeta»

E.I. Rjuntsev – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Saint Petersburg State University

G. T. Khukhuni – Doctor of Philology, Professor, MSRU

S.N. Chistyakova – Doctor of Pedagogics, Professor, the Russian Academy of Education

ISSN 2072-8387

Bulletin of the Moscow State Regional University. Series «Physics and Mathematics». 2015. № 1. M.: MSRU Publishing house. 120 p.

The series «Physics and Mathematics» of the Bulletin of the Moscow State Regional University is registered in Federal service on supervision of legislation observance in sphere of mass communications and cultural heritage protection. The registration certificate ПИ № 0С77-26136

Index of the series «Physics and Mathematics» according to the union catalog «Press of Russia» 40723

© MSRU, 2015.

© MSRU Publishing house, 2015.

СОДЕРЖАНИЕ

РАЗДЕЛ I. МАТЕМАТИКА

<i>Латышев А.В., Курилов А.Д.</i> ОРТОГОНАЛЬНОСТЬ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ КАК МЕТОД РЕШЕНИЯ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ МОДЕЛЬНЫХ КИНЕТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ.....	8
<i>Апраксина Т.В., Кожухов И.Б.</i> ЗАМЕЧАНИЯ О ДИАГОНАЛЬНЫХ ПОЛИГОНАХ ИНВАРИАНТНЫХ ПОЛУГРУПП.....	22

РАЗДЕЛ II. ФИЗИКА

<i>Алиев И.Н., Самедова З.А.</i> ОПТИКО МЕХАНИЧЕСКАЯ АНАЛОГИЯ И ТРАЕКТОРИЯ КВАНТА	32
<i>Барабанова Н.Н., Беляев В.В., Богданов Д.Л., Бугримов А.Л., Дадиванян А.К., Осипов М.А., Чигринов В.Г.</i> ОРИЕНТАЦИЯ КРАСИТЕЛЕЙ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ С ЛАЗЕРНЫМ ИЗЛУЧЕНИЕМ	37
<i>Кузнецов В.М., Терешкина К.Б.</i> НИЗКОТЕМПЕРАТУРНАЯ ТЕПЛОЕМКОСТЬ ВЕЩЕСТВ С ФРАКТАЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТЬЮ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СПЕКТРОВ	44
<i>Кузьмин М.К.</i> АНАЛИЗ ФОРМУЛ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ВРЕМЕНИ ПОЛНОГО ИСПАРЕНИЯ ОДИНОЧНЫХ КАПЕЛЬ ВОДЫ.....	56
<i>Трегулов В.В.</i> ОСОБЕННОСТИ СТРУКТУРЫ ПЛЕНОК ПОРИСТОГО КРЕМНИЯ С РАЗВИТОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ.....	64
<i>Толпаев В.А.</i> МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДВУМЕРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ И ГАЗА В ИСКРИВЛЕННЫХ НЕОДНОРОДНЫХ ПЛАСТАХ	70
<i>Долгова Е.В., Брюханова А.А., Курушин Д.С., Файзрахманов Р.А.</i> МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ ПЛАТФОРМЫ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОГО МОБИЛЬНОГО РОБОТА.....	85
<i>Лекомцев Д. Г.</i> МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАБОТЫ БАТАРЕИ СОВЕРШЕННЫХ СКВАЖИН В АНИЗОТРОПНОМ ГРУНТЕ	94

РАЗДЕЛ III. ТЕОРИЯ И МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ И ВОСПИТАНИЯ

Забелина С.Б., Пинчук И.А. О РАЗВИТИИ КОГНИТИВНОЙ
СОСТАВЛЯЮЩЕЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ КОМПЕТЕНТНОСТИ
СТУДЕНТОВ ПРИ ИЗУЧЕНИИ СПЕЦИАЛЬНЫХ
ПРОФЕССИОНАЛЬНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ДИСЦИПЛИН..... 103

НАУЧНАЯ ЖИЗНЬ

О.В. Максимова, С.М. Максимов РАЗРАБОТКА МЕТОДОВ
МОДЕЛИРОВАНИЯ СВЕТОТЕХНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК
ТОНКОПЛЕНОЧНЫХ ЭЛЕКТРОЛЮМИНЕСЦЕНТНЫХ
КОНДЕНСАТОРОВ..... 109

Наши авторы 117

CONTENTS

SECTION I. MATHEMATICS

<i>A. Latyshev, A. Kurilov.</i> ORTHOGONALITY OF THE EIGENFUNCTIONS OF CHARACTERISTIC EQUATIONS AS A METHOD FOR SOLVING BOUNDARY VALUE PROBLEMS OF MODEL KINETIC EQUATIONS.....	8
<i>T. Apraksina, I. Kozhukhov.</i> NOTES ON DIAGONAL ACTS OVER INVARIANT SEMIGROUPS	22

SECTION II. PHYSICS

<i>I. Aliev, Z. Samedova.</i> OPTICAL-MECHANICAL ANALOGY AND QUANTUM TRAJECTORY	32
<i>N. Barabanova, V. Belyaev, D. Bogdanov, A. Bugrimov, A. Dadivanyan, M. Osipov, V. Chigrinov.</i> ORIENTATION OF DYES UNDER LASER IRRADIATION ORIENTATION OF DYES UNDER THE ACTION OF LASER IRRADIATION ...	37
<i>V.M. Kuznetsov, K.B. Tereshkina.</i> LOW-TEMPERATURE HEAT CAPACITY OF MATTER WITH FRACTAL DIMENSION OF VIBRATIONAL SPECTRA	44
<i>M. Kuzmin.</i> ANALYSIS OF THE FORMULAS FOR CALCULATING THE TIME OF COMPLETE EVAPORATION OF SINGLE DROPLETS OF WATER	56
<i>V. Tregulov.</i> FEATURES OF THE STRUCTURE OF POROUS SILICON FILMS WITH DEVELOPED SURFACE.....	64
<i>V. Tolpaev.</i> MATHEMATICAL MODELS OF TWO-DIMENSIONAL LIQUID AND GAS FILTERING IN CURVED INHOMOGENEOUS LAYERS.....	70
<i>E. Dolgova, A. Brjuhanova, D. Kurushin, R. Fayzrakhmanov.</i> SIMULATION OF MOBILE ROBOT PLATFORM VIBRATIONS	85
<i>D. Lekomtcev.</i> MATHEMATICAL MODELING OF THE WORK OF A BATTERY OF DRILLED WELLS IN AN ANISOTROPIC BEDLAYER.....	94

SECTION III.
THEORY AND METHODS OF TEACHING AND EDUCATION

S. Zabelina, I. Pinchuk. ON THE COGNITIVE COMPONENT
OF THE RESEARCH COMPETENCE OF STUDENTS IN THE STUDY
OF SPECIAL PROFESSIONAL MATHEMATICAL DISCIPLINES 103

SCIENTIFIC LIFE

O. Maksimova, S. Maksimov. DEVELOPMENT OF METHODS FOR MODELING
LIGHT CHARACTERISTICS OF THIN-FILM ELECTROLUMINESCENT
CAPACITORS 109

Our authors 117

РАЗДЕЛ I. МАТЕМАТИКА

УДК 517.958

Латышев А.В., Курилов А.Д.

Московский государственный областной университет

ОРТОГОНАЛЬНОСТЬ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ КАК МЕТОД РЕШЕНИЯ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ МОДЕЛЬНЫХ КИНЕТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Аннотация. Рассматривается два класса линейных кинетических уравнений: с постоянной частотой столкновений и с постоянной длиной свободного пробега газовых молекул (т.е. с частотой столкновений молекул, пропорциональной модулю молекулярной скорости). На основе однородной краевой задачи Римана с коэффициентом, равным отношению граничных значений дисперсионной функции, развивается теория полупространственной ортогональности обобщенных сингулярных собственных функций соответствующих характеристических уравнений, к которым приводит разделение переменных.

На примере двух граничных задач кинетической теории (о диффузии легкой компоненты бинарного газа и задачи Крамерса об изотермическом скольжении) показано применение теории ортогональности собственных функций для аналитического решения указанных задач.

Ключевые слова: кинетическое уравнение, частота столкновений, граничные задачи, собственные функции, дисперсионная функция, аналитическое решение.

A. Latyshev, A. Kurilov

Moscow State Regional University (Moscow, Russia)

ORTHOGONALITY OF THE EIGENFUNCTIONS OF CHARACTERISTIC EQUATIONS AS A METHOD FOR SOLVING BOUNDARY VALUE PROBLEMS OF MODEL KINETIC EQUATIONS

Abstract. In the present work we consider two classes of linear kinetic equations: with constant collision frequency and constant mean free path of gas molecules (i.e., frequency of molecular collisions, proportional to the modulus molecular velocity). Based homogeneous Riemann

boundary value problem with a coefficient equal to the ratio of the boundary values dispersion function, develops the theory of the half-space orthogonality of generalized singular eigenfunctions corresponding characteristic equations, which leads separation of variables.

On the example of a two boundary value problems of the kinetic theory (diffusion light component of a binary gas and Kramers problem about isothermal slip) shows the application of the theory orthogonality eigenfunctions for analytical solutions these problems.

Key words: kinetic equation, collision frequency, boundary value problems, eigenfunctions, dispersion function, analytical solution.

1. Введение

Построение точных решений для содержательных граничных задач математической физики является большой удачей. Это в полной мере относится и к граничным задачам для кинетических уравнений.

В 1960 г. К. Кейз в работе [10] впервые предложил метод аналитического решения граничных задач для модельного уравнения переноса нейтронов

$$\mu \frac{\partial h}{\partial x} + h(x, \mu) = \frac{c}{2} \int_{-1}^1 h(x, \mu') d\mu'. \quad (1.1)$$

Общий метод разделения переменных Фурье приводит к подстановке

$$h_{\eta}(x, \mu) = \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right) \Phi(\eta, \mu). \quad (1.2)$$

Подстановка (1.2) сводит уравнение (1.1) к характеристическому

$$(\eta - \mu)\Phi(\eta, \mu) = \eta \frac{c}{2} \int_{-1}^1 \Phi(\eta, \mu') d\mu'. \quad (1.3)$$

Гениальная догадка К. Кейза состояла в том, что он предложил искать решение характеристического уравнения (1.3) в пространстве обобщенных функций [1]:

$$\Phi(\eta, \mu) = \eta \frac{c}{\sqrt{\pi}} P \frac{1}{\eta - \mu} + \lambda(\eta) \delta(\eta - \mu), \quad (1.4)$$

где $\lambda(z)$ – дисперсионная функция,

$$\lambda(z) = 1 + \frac{z}{2} \int_{-1}^1 \frac{d\tau}{\tau - z},$$

Px^{-1} – обобщенная функция (главное значение в смысле Коши при интегрировании x^{-1}), $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака.

Свойства собственных функций (1.4), разложение решений уравнений (1.1) и их обобщений по собственным функциям изучались в работах [11–17].

Одной из первых граничных задач для модельного кинетического уравнения БГК (Бхатнагар, Гросс, Крук), для которой было получено точное решение, была линейризованная задача Крамерса об изотермическом скольжении. Эту задачу решил в 1962 г. К. Черчиньяни [18].

После работы Черчиньяни были предприняты многочисленные попытки решить аналитически задачу Смолуховского о температурном скачке и слабом испарении. Обзор таких попыток изложен в работах [2–4]. Эти попытки продолжались вплоть до появления работы [5], в которой был развит аналитический метод решения граничных задач для такого класса кинетических уравнений, которые сводятся к решению векторных интегро-дифференциальных уравнений типа уравнений переноса.

К. Черчиньяни [18] свел решение задачи об изотермическом скольжении к решению следующей граничной задачи:

$$\mu \frac{\partial h}{\partial x} + h(x, \mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\mu'^2) h(x, \mu') d\mu', \quad x > 0, -\infty < \mu < +\infty,$$

$$h(0, \mu) = 0, \quad \mu > 0,$$

$$h(x, \mu) = h_{as}(x, \mu) + o(1), \quad x \rightarrow +\infty.$$

Здесь $h_{as}(x, \mu)$ – асимптотическая функция распределения Чепмена-Энскога,

$$h_{as}(x, \mu) = 2U_0 + 2G_v(x - \mu),$$

U_0 – неизвестная безразмерная скорость скольжения газа, подлежащая отысканию, G_v – заданный вдали от стенки градиент безразмерной массовой скорости, $\mu = C_x, \vec{C} = \vec{v}/v_T, v_T = 1/\sqrt{\beta}$ – тепловая скорость газа, $\beta = m/(2kT), m$ – масса молекулы газа, k – постоянная Больцмана, $T = const.$ – температура газа.

В задаче об испарении легкой компоненты бинарного газа (см., например, [6]) изучалось однопараметрическое семейство уравнений

$$\mu \frac{\partial h}{\partial x} + h(x, \mu) = \frac{c}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\mu'^2) h(x, \mu') d\mu', \quad (1.5)$$

где c – числовой параметр, $0 < c < 1, x > 0, -\infty < \mu < +\infty$.

В работах [7] и [8] при решении граничных задач для модельного кинетического уравнения с частотой столкновений, пропорциональной модулю молекулярной скорости, рассматривалось уравнение

$$\mu \frac{\partial h}{\partial x} + h(x, \mu) = \frac{3}{4} \int_{-1}^1 (1 - \mu'^2) h(x, \mu') d\mu', \quad x > 0, -1 < \mu < 1 \quad (1.6)$$

В настоящей работе развивается теория ортогональности собственных функций характеристических уравнений, отвечающих уравнениям (1.5) и (1.6). В основе этой теории лежит решение краевой задачи Римана [9] из теории функций комплексного переменного. Эта теория затем применяется для решения граничных задач для уравнений (1.5) и (1.6).

2. Собственные функции в задаче о диффузии легкой компоненты бинарного газа и их ортогональность

Рассмотрим уравнение (1.5). Общий метод Фурье разделения переменных приводит к подстановке

$$h_\eta(x, \mu) = \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right) \Phi(\eta, \mu), \quad (2.1)$$

где η – спектральный параметр, вообще говоря, комплексный.

Подставляя (2.1) в (1.5), сразу получаем характеристическое уравнение

$$(\eta - \mu) \Phi(\eta, \mu) = \eta \frac{c}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\mu'^2) \Phi(\eta, \mu) d\mu'. \quad (2.2)$$

Обозначим

$$n(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\mu'^2) \Phi(\eta, \mu) d\mu' \quad (2.3)$$

и перепишем уравнение (2.2) в виде

$$(\eta - \mu) \Phi(\eta, \mu) = \eta \frac{c}{\sqrt{\pi}} n(\eta). \quad (2.4)$$

В силу однородности уравнения (1.1) без ограничения общности можно считать, что

$$n(\eta) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\mu'^2) \Phi(\eta, \mu) d\mu' \equiv 1. \quad (2.5)$$

Из уравнений (2.3) и (2.5) в пространстве обобщенных функций [1] находим собственные функции, отвечающие непрерывному спектру

$$\Phi(\eta, \mu) = \eta \frac{c}{\sqrt{\pi}} P \frac{1}{\eta - \mu} + \exp(\eta^2) \lambda_c(\eta) \delta(\eta - \mu). \quad (2.6)$$

Здесь $\lambda_c(z)$ – дисперсионная функция,

$$\lambda_c(z) = 1 + z \frac{c}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-\tau^2) d\tau}{\tau - z}.$$

В основу теории ортогональности положим скалярное произведение с весом $\rho(\mu) = \exp(-\mu^2) \gamma(\mu)$, где

$$\gamma(\mu) = \mu \frac{X^+(\mu)}{\lambda_c^+(\mu)}.$$

Здесь $X(z)$ – решение однородной краевой задачи Римана из [6]

$$\frac{X^+(\mu)}{X^-(\mu)} = \frac{\lambda^+(\mu)}{\lambda^-(\mu)}, \quad \mu > 0.$$

Решение этой задачи (см. [5]) дается равенствами

$$X(z) = \frac{1}{z} \exp V(z), \quad V(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\theta(\mu) - \pi}{\mu - z} d\mu,$$

$$\theta(\mu) = \arg \lambda_c^+(\mu) = \operatorname{arccot} \frac{\operatorname{Re} \lambda_c^+(\mu)}{\operatorname{Im} \lambda_c^+(\mu)}, \quad \theta(0) = 0,$$

$$\lambda_c^+(\mu) = \operatorname{Re} \lambda_c^+(\mu) + i \operatorname{Im} \lambda_c^+(\mu) = \lambda_c(\mu) + ic\sqrt{\pi}\mu \exp(-\mu^2),$$

$$\lambda_c(\mu) = 1 - 2c\mu^2 \exp(-\mu^2) \int_0^1 \exp(\mu^2 \tau^2) \tau^2 d\tau.$$

Скалярное произведение на множестве функций, зависящих от скоростной переменной μ , введем равенством

$$(f, g) = \int_0^{\infty} \exp(-\mu^2) \gamma(\mu) f(\mu) g(\mu) d\mu.$$

Для удобства собственные функции $\Phi(\eta, \mu)$ будем обозначать через $\Phi_\eta(\eta, \mu)$.

ТЕОРЕМА 1. Скалярное произведение единицы и собственной функции непрерывного спектра равно спектральному параметру, т. е.

$$(\mathbf{1}, \Phi_\eta) = \eta, \quad \eta > 0. \quad (2.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению скалярного произведения имеем:

$$(1, \Phi_\eta) = \int_0^\infty \exp(-\tau^2) \gamma(\tau) \Phi_\eta(\tau) d\tau.$$

Представим это выражение в явном виде:

$$\begin{aligned} (1, \Phi_\eta) &= \int_0^\infty \exp(-\tau^2) \gamma(\tau) \left[\frac{c\eta}{\sqrt{\pi}} P \frac{1}{\eta - \tau} + \exp(\eta^2) \lambda_c(\eta) \delta(\eta - \tau) \right] d\tau = \\ &= -\frac{c\eta}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{\exp(-\tau^2) \gamma(\tau) d\tau}{\tau - \eta} + \gamma(\eta) \lambda_c(\eta) \theta_+(\eta), \end{aligned}$$

где θ_+ – функция Хэвисайда.

Воспользуемся теперь интегральным представлением (см. [6])

$$X(z) = 1 + \frac{c}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{\exp(-\tau^2) \gamma(\tau) d\tau}{\tau - z}.$$

С помощью этого представления получаем:

$$(1, \Phi_\eta) = -\eta X(\eta) + \eta + \eta \frac{X^+(\eta) \lambda_c^+(\eta) + \lambda_c^-(\eta)}{\lambda_c(\eta) 2} = \eta,$$

что и требовалось доказать.

ТЕОРЕМА 2. Собственные функции $\Phi_\eta(\mu)$ образуют ортогональное семейство и имеет место равенство

$$(\Phi_\eta, \Phi_{\eta'}) = N(\eta) \delta(\eta - \mu), \quad (2.8)$$

где

$$N(\eta) = \exp(\eta^2) \gamma(\eta) \lambda_c^+(\eta) \lambda_c^-(\eta). \quad (2.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению скалярного произведения имеем:

$$\begin{aligned} (\Phi_\eta, \Phi_{\eta'}) &= \int_0^\infty \exp(-\tau^2) \gamma(\tau) \left[\frac{c\eta}{\sqrt{\pi}} P \frac{1}{\eta - \tau} + \exp(\eta^2) \lambda_c(\eta) \delta(\eta - \tau) \right] \cdot \\ &\quad \left[\frac{c\eta'}{\sqrt{\pi}} P \frac{1}{\eta' - \tau} + \exp(\eta'^2) \lambda_c(\eta') \delta(\eta' - \tau) \right] d\tau = I_1 + I_2 + I_3 + I_4. \end{aligned}$$

Здесь

$$I_1 = c^2 \frac{\eta \eta'}{\pi} \int_0^\infty \frac{\exp(-\tau^2) \gamma(\tau) d\tau}{(\eta - \tau)(\eta' - \tau)},$$

$$I_2 = \frac{c\eta}{\sqrt{\pi}} \exp(\eta'^2) \lambda_c(\eta') \int_0^\infty \frac{\exp(-\tau^2) \gamma(\tau) \delta(\eta' - \tau)}{\eta - \tau} d\tau,$$

$$I_3 = \frac{c\eta'}{\sqrt{\pi}} \exp(\eta^2) \lambda_c(\eta) \int_0^\infty \frac{\exp(-\tau^2) \gamma(\tau) \delta(\eta - \tau)}{\eta' - \tau} d\tau,$$

$$I_4 = \exp(\eta^2 + \eta'^2) \lambda_c(\eta) \lambda(\eta') \int_0^\infty \exp(-\tau^2) \gamma(\tau) \delta(\eta - \tau) \delta(\eta' - \tau) d\tau.$$

Второй, третий и четвертый интегралы легко вычисляются как свертки с дельта-функций Дирака:

$$I_2 = \frac{c\eta \lambda_c(\eta') \gamma(\eta')}{\sqrt{\pi}(\eta - \eta')},$$

$$I_3 = \frac{c\eta' \lambda_c(\eta) \gamma(\eta)}{\sqrt{\pi}(\eta' - \eta)},$$

$$I_4 = \exp(\eta^2) \lambda_c^2(\eta) \gamma(\eta) \delta(\eta - \eta').$$

Вычислим первый интеграл. Воспользуемся разложением на элементарные дроби

$$\frac{1}{(\eta - \tau)(\eta' - \tau)} = \frac{1}{\eta - \eta'} \left(\frac{1}{\tau - \eta} - \frac{1}{\tau - \eta'} \right),$$

а также формулой Пуанкаре-Бертрана

$$P \frac{1}{\eta - \mu} P \frac{1}{\eta' - \mu} = P \frac{1}{\eta - \eta'} \left(P \frac{1}{\eta' - \mu} - P \frac{1}{\eta - \mu} \right) + \pi^2 \delta(\eta - \mu) \delta(\eta' - \mu).$$

В результате получаем, что

$$I_1 = c^2 \frac{\eta \eta'}{\pi} \left[\frac{1}{\eta - \eta'} \int_0^\infty \frac{\exp(-\tau^2) \gamma(\tau) d\tau}{\tau - \eta} - \frac{1}{\eta - \eta'} \int_0^\infty \frac{\exp(-\tau^2) \gamma(\tau) d\tau}{\tau - \eta'} \right] +$$

$$+ c^2 \eta \eta' \pi \int_0^\infty \exp(-\tau^2) \gamma(\tau) \delta(\eta - \tau) \delta(\eta' - \tau) d\tau.$$

Воспользуемся теперь интегральным представлением [6]

$$X(z) = 1 + \frac{c}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{\exp(-\tau^2) \gamma(\tau) d\tau}{\tau - z}.$$

С его помощью интеграл I_1 равен:

$$I_1 = c \frac{\eta \eta'}{\sqrt{\pi}} \frac{X(\eta) - X(\eta')}{\eta - \eta'} + \pi c^2 \eta^2 \exp(-\eta^2) \gamma(\eta) \delta(\eta - \eta').$$

Воспользуемся определением функции $\gamma(\tau)$. Тогда получаем, что

$$I_2 + I_3 = \frac{c\eta\eta'}{\sqrt{\pi}(\eta - \eta')} \left[\lambda_c(\eta') \frac{X^+(\eta')}{\lambda_c^+(\eta')} - \lambda_c(\eta) \frac{X^+(\eta)}{\lambda_c^+(\eta)} \right].$$

Значение дисперсионной функции на разрезе в этом равенстве заменим полусуммой ее граничных значений, а также воспользуемся однородной краевой задачей Римана. В результате получаем, что

$$I_2 + I_3 = \frac{c\eta\eta'}{\sqrt{\pi}(\eta - \eta')} \left[\frac{X^+(\eta') + X^-(\eta')}{2} - \frac{X^+(\eta) + X^-(\eta)}{2} \right] = \frac{c\eta\eta'}{\sqrt{\pi}(\eta - \eta')} [X(\eta') - X(\eta)].$$

Складывая выражения $I_1, I_2 + I_3$ и I_4 , получаем, что

$$\begin{aligned} (\Phi_\eta, \Phi_{\eta'}) &= [\exp(\eta^2) \lambda_c^2(\eta) + c^2\pi\eta^2 \exp(-\eta^2)] \gamma(\eta) \delta(\eta - \eta') = \\ &= [\lambda_c(\eta) + i\sqrt{\pi}c\eta \exp(-\eta^2)] [\lambda_c(\eta) - i\sqrt{\pi}c\eta \exp(-\eta^2)] e^{\eta^2} \gamma(\eta) \delta(\eta - \eta') = \\ &= \exp(\eta^2) \gamma(\eta) \lambda_c^+(\eta) \lambda_c^-(\eta) \delta(\eta - \eta') = N(\eta) \delta(\eta - \eta'), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Применим доказанную теорему к решению задачи о диффузии легкой компоненты бинарного газа. В [6] показано, что решение этой задачи сводится к решению интегрального уравнения

$$\frac{G_n}{1-c} = \int_0^\infty \Phi(\eta', \mu) a(\eta') d\eta'. \quad (2.10)$$

Здесь $G_n = g_n l$, $g_n = d \ln n(y)/dy$, $l = v_T \tau$ – длина свободного пробега газовых молекул, $\tau = 1/(v_1 + v_2)$, v_1 и v_2 – частоты столкновений молекул первого и второго компонента газа между собой.

Умножим уравнение (2.10) на выражение $\exp(-\mu^2) \gamma(\mu) \Phi(\eta, \mu)$ и проинтегрируем полученное уравнение по μ . В результате получаем, что

$$\frac{G_n}{1-c} \int_0^\infty \exp(-\mu^2) \gamma(\mu) \Phi(\eta, \mu) d\mu = \int_0^\infty a(\eta') d\eta' \int_0^\infty \exp(-\mu^2) \gamma(\mu) \Phi(\eta', \mu) \Phi(\eta, \mu) d\mu,$$

или, с помощью введенных обозначений и доказанной теоремы,

$$\frac{G_n}{1-c} (1, \Phi_\eta) = \int_0^\infty a(\eta') N(\eta) \delta(\eta - \eta') d\eta'.$$

Отсюда с помощью теоремы 1 имеем:

$$a(\eta) = \frac{G_n}{1-c} \frac{\eta}{N(\eta)} = \frac{G_n}{1-c} \frac{\eta}{\exp(\eta^2) \gamma(\eta) \lambda_c^+(\eta) \lambda_c^-(\eta)} = \frac{G_n}{1-c} \frac{\exp(-\eta^2)}{X^+(\eta) \lambda_c^-(\eta)},$$

что в точности совпадает с результатом из [6].

Введем еще одно скалярное произведение на множестве собственных функций с интегрированием по спектральному параметру и весом $r(\eta) = 1/N(\eta)$:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^\infty \frac{1}{N(\eta)} f(\eta) g(\eta) d\eta.$$

Аналогично теореме 2 доказывается

ТЕОРЕМА 3. Собственные функции характеристического уравнения, отвечающие непрерывному спектру, ортогональны и имеет место соотношение

$$\langle \Phi_\eta(\mu), \Phi_\eta(\mu') \rangle = \frac{1}{\rho(\mu)} \delta(\mu - \mu'). \quad (2.11)$$

Представим в явном виде равенство (2.11):

$$\begin{aligned} \langle \Phi_\eta(\mu), \Phi_\eta(\mu') \rangle &= \int_0^\infty \frac{\exp(-\eta^2)}{\gamma(\eta) \lambda_c^+(\eta) \lambda_c^-(\eta)} \Phi_\eta(\mu) \Phi_\eta(\mu') d\eta = \\ &= \frac{\exp(\mu^2)}{\gamma(\mu)} \delta(\mu - \mu'). \end{aligned}$$

Из теорем 2 и 3 видно, что при переходе к ортогональности по спектральному параметру меняются местами вес и нормировочный интеграл.

3. Кинетическое уравнение с частотой столкновений, пропорциональной модулю скорости молекул

Перейдем к рассмотрению уравнения (1.6). Подстановка (2.1) сводит это уравнение к характеристическому

$$(\eta - \mu) \Phi(\eta, \mu) = \frac{3}{4} \eta \quad (3.1)$$

с единичной нормировкой

$$\mathbf{n}(\eta) \equiv \int_{-1}^1 (1 - \mu'^2) \Phi(\eta, \mu') d\mu' \equiv 1. \quad (3.2)$$

Из уравнений (3.1) и (3.2) находим собственные функции характеристического уравнения

$$\Phi(\eta, \mu) = \frac{3}{4} \eta P \frac{1}{\eta - \mu} + \frac{\lambda(\eta)}{1 - \eta^2} \delta(\eta - \mu), \quad (3.3)$$

где $\lambda(z)$ – дисперсионная функция,

$$\begin{aligned} \lambda(z) &= 1 + \frac{3}{4} z \int_{-1}^1 \frac{1 - \tau^2}{\tau - z} d\tau = \frac{3}{4} \int_{-1}^1 \frac{\tau(1 - \tau^2)}{\tau - z} d\tau = \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} (1 - z^2) \lambda_0(z), \\ \lambda_0(z) &= 1 + \frac{z}{2} \int_{-1}^1 \frac{d\tau}{\tau - z} = 1 + \frac{z}{2} \ln \frac{1 - z}{1 + z}. \end{aligned}$$

Дискретный спектр характеристического уравнения, как показано в [2, 6], состоит из одной точки $\eta_i = \infty$ кратности два. Этой точке отвечает собственная функция $\Phi_\infty = 1$, отвечающая нормировке $n(\eta) = 4/3$.

Однородная краевая задача Римана

$$\frac{X^+(\mu)}{X^-(\mu)} = \frac{\lambda^+(\mu)}{\lambda^-(\mu)}, \quad 0 < \mu < 1,$$

как показано в [2, 6] имеет решение

$$X(z) = \frac{1}{z} \exp V(z), \quad (3.4)$$

где

$$V(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\theta(\mu) - \pi}{\mu - z} d\mu.$$

Здесь $\theta(\mu) = \arg \lambda^+(\mu)$, или

$$\theta(\mu) = \operatorname{acot} \frac{4\lambda(\mu)}{3\pi\mu(1 - \mu^2)}.$$

Введем скалярное произведение

$$(f, g) = \int_0^1 (1 - \mu^2) \gamma(\mu) f(\mu) g(\mu) d\mu,$$

в котором

$$\gamma(\mu) = \mu \frac{X^+(\mu)}{\lambda^+(\mu)}.$$

Точно так же, как теорема 1, доказывается следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4. Имеют место следующие соотношения

$$(\Phi_{\infty}, \Phi_{\infty}) = -\frac{4}{3}, \quad (3.5)$$

$$(\mu, \Phi_{\infty}) = -\frac{4}{3}V_1, \quad (3.6)$$

где

$$V_1 = -\frac{1}{\pi} \int_0^1 [\theta(\mu) - \pi] d\mu \approx 0.581946 \dots,$$

и

$$(\mu, \Phi_{\eta}) = \eta, \quad \eta > 0. \quad (3.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем равенства (3.5) и (3.6). Воспользуемся интегральным представлением [6]

$$X(z) = \frac{3}{4} \int_0^1 \frac{(1 - \tau^2)\gamma(\tau)}{\tau - z} d\tau. \quad (3.8)$$

Разложим в окрестности бесконечно удаленной точки функцию $X(z)$, представленную равенствами (3.8) и (3.4):

$$\begin{aligned} X(z) = & -\frac{1}{z} \cdot \frac{3}{4} \int_0^1 (1 - \mu^2)\gamma(\mu) d\mu - \\ & -\frac{1}{z^2} \cdot \frac{3}{4} \int_0^1 \mu(1 - \mu^2)\gamma(\mu) d\mu - \dots, \quad z \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (3.9)$$

и

$$X(z) = \frac{1}{z} + \frac{V_1}{z^2} + \dots, \quad z \rightarrow \infty \quad (3.10)$$

Из сравнения коэффициентов рядов (3.9) и (3.10) вытекают равенства

$$\frac{3}{4} \int_0^1 (1 - \mu^2)\gamma(\mu) d\mu = -1$$

и

$$\frac{3}{4} \int_0^1 \mu(1 - \mu^2)\gamma(\mu) d\mu = -V_1,$$

которые и доказывают равенства (3.5) и (3.6).

Остальные равенства доказываются аналогично теореме 1.

ТЕОРЕМА 5. Собственные функции непрерывного спектра ортогональны между собой и имеют место следующие отношения ортогональности

$$(\Phi_\infty, \Phi_\eta) = 0, \quad (3.11)$$

$$(\Phi_\eta, \Phi_{\eta'}) = N(\eta)\delta(\eta - \eta'), \quad (3.12)$$

где

$$N(\eta) = \gamma(\eta) \frac{\lambda^+(\eta)\lambda^-(\eta)}{1 - \eta^2}.$$

Доказывается теорема 5 аналогично теореме 2.

Применим развитую теорию к решению задачи Крамерса. В [2, 6] показано, что решение задачи Крамерса сводится к решению интегрального уравнения

$$2U_0 - 2G_v\mu + \int_0^\infty \Phi(\eta', \mu)a(\eta')d\eta' = 0. \quad (3.13)$$

Здесь U_0 – неизвестная безразмерная скорость скольжения, подлежащая отысканию, а G_v – заданный вдали от стенки градиент безразмерной массовой скорости.

Для нахождения скорости скольжения умножим уравнение (3.13) на $\rho(\mu) = (1 - \mu^2)\gamma(\mu)$ и проинтегрируем по μ от 0 до 1. В результате получаем уравнение

$$2U_0(1, 1) - 2G_v\mu(1, \mu) + \int_0^\infty a(\eta')(1, \Phi_{\eta'})d\eta' = 0. \quad (3.14)$$

Согласно теореме 5, $(1, \Phi_{\eta'}) = 0$. Поэтому из уравнения (3.14) с учетом теоремы 5 получаем известный из [2, 6] результат:

$$U_0 = \frac{(1, \mu)}{(1, 1)} G_v = V_1 G_v.$$

Для нахождения коэффициента непрерывного спектра $a(\eta)$ умножим уравнение (3.14) на $(1 - \mu^2)\gamma(\mu)\Phi(\eta', \mu)$ и проинтегрируем по μ от 0 до 1. В результате получаем уравнение

$$2U_0(1, \Phi_{\eta'}) - 2G_v\mu(\mu, \Phi_{\eta'}) + \int_0^\infty a(\eta')(\Phi_{\eta}, \Phi_{\eta'})d\eta' = 0 \quad (3.15)$$

Согласно теореме 5

$$(1, \Phi_{\eta'}) = 0, \quad (\mu, \Phi_{\eta'}) = \eta, \quad (\Phi_{\eta'}, \Phi_{\eta'}) = N(\eta)\delta(\eta - \eta').$$

Поэтому из уравнение (3.15) получаем, что

$$a(\eta) = \frac{\eta}{N(\eta)}(2G_v) = \frac{(1 - \eta^2)}{X^+(\eta)\lambda^-(\eta)}(2G_v),$$

что в точности совпадает с известным результатом из [2, 6, 7].

4. Заключение

В настоящей работе развивается теория ортогональности собственных функций характеристических уравнений, отвечающих двум кинетическим уравнениям. Эта теория развивается на положительной действительной полуоси (и в интервале $0 < \eta < 1$) с помощью краевой задачи Римана [9] с коэффициентом, равным отношению граничных значений дисперсионной функции на разрезе. Ортогональность применяется для решения граничных задач для рассматриваемых уравнений.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Владимиров В.С., Жаринов В.В. Уравнения математической физики. М.: Физматлит. 2000. 399 с.
2. Латышев А.В., Юшканов А.А. Аналитические решения граничных задач кинетической теории. М.: МГОУ. 2008. 288 с.
3. Латышев А.В., Юшканов А.А. Кинетические уравнения типа Вильямса и их точные решения. М.: МГОУ. 2004. 271 с.
4. Латышев А.В., Юшканов А.А. Граничные задачи для квантовых газов. – М.: МГОУ. 2012. 266 с.
5. Латышев А.В. Применение метода Кейза к решению линеаризованного кинетического БГК уравнения в задаче о температурном скачке // Прикл. Матем. и мех. 1990. Т. 54. Вып. 4. 581–586 с.
6. Латышев А.В., Юшканов А.А. Аналитические методы в кинетической теории. М.: МГОУ. 2008. 280 с.
7. Латышев А.В., Юшканов А.А. Аналитическое решение задачи о скольжении газа с использованием модельного уравнения Больцмана с частотой, пропорциональной скорости молекул // Поверхность. № 1. 1997. 92–99 с.
8. Латышев А.В., Юшканов А.А. Тепловое скольжение для газа с частотой столкновений, пропорциональной скорости молекул // Инженерно физический журнал. Т. 71. № 2, 1998. 353–359 с.

9. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука. 1977. 640 с.
10. Case K. M. Elementary solutions of the transport equations and their applications // *Ann. Phys.* V. 9. № 1. 1960. P. 1–23.
11. Greenberg W., Zweifel P.F. The Riemann Hilbert problem for nonsymmetric system // *J. Math. Phys.* V. 32. № 12. 1991, P. 3540–3545.
12. Greenberg W., Zweifel P.F. The Case eigenfunction expansion for a conservative medium // *J. Math. Phys.* V. 17. №2, 1976. P. 163–167.
13. Greenberg W., van der Mee C., Protopopescu V. Boundary value problems in abstract kinetic theory. Birkhauser Verlag. Basel. 1987.
14. Greenberg W., van der Mee C., Zweifel P.F. Generalized kinetic equation // *Integral Equat. Operator Theory.* № 7. 1984. P. 60–95.
15. Kuscer I., McCormick N.J., Summerfield G.C. Orthogonality of Case's eigenfunctions in one speed transport theory // *Ann. Phys.* V. 30. № 4. 1964. P. 411–421.
16. Slawny J., Zweifel P.F. A note on the singular eigenfunction method in transport theory // *Transport Theory and Statistical Physics.* V 17(2&3). 1988. P. 283–294.
17. Zweifel P.F. Completeness theorems in transport theory // *Transport Theory and Statistical Physics.* V. 13(1&2). 1984. P. 57–67.
18. Cercignani C. Elementary solutions of the linearized gas dynamics Boltzmann equation and their applications to the slip flow problem // *Ann. Phys. (USA)* 1962. V. 20. № 2. P. 219–233.

УДК 512.579

Апраксина Т.В., Кожухов И.Б.

Национальный исследовательский университет «МИЭТ» (г. Москва)

ЗАМЕЧАНИЯ О ДИАГОНАЛЬНЫХ ПОЛИГОНАХ ИНВАРИАНТНЫХ ПОЛУГРУПП

Аннотация. Рассматриваются диагональные полигоны и биполигоны над инвариантными слева или справа полугруппами. Доказано, что диагональный правый полигон $(S \times S)_S$ такой полугруппы S не является конечно порождённым в случае, когда полугруппа S инвариантна слева или справа. Более того, доказывается, что для биполигонов ${}_S(S \times S)_S$ данное утверждение неверно. Кроме того, построен пример бесконечной простой справа (а значит, инвариантной справа) сократимой справа полугруппы S , у которой диагональный биполигон ${}_S(S \times S)_S$ является циклическим.

Ключевые слова: диагональный полигон, биполигон, полигон над полугруппой, инвариантная справа (слева) полугруппа, диагональный ранг полугруппы.

T. Apraksina, I. Kozhukhov

National Research University of Electronic Technology (Moscow, Russia)

NOTES ON DIAGONAL ACTS OVER INVARIANT SEMIGROUPS

Abstract. The diagonal acts and biacts over right or left invariant semigroups are considered. It is proved that the diagonal right act $(S \times S)_S$ of such semigroup S is not finitely generated in case of invariant right or left invariant semigroup. Moreover, it is proved that this statement is wrong in case of biacts ${}_S(S \times S)_S$. Besides an example is constructed where S is an infinite right simple (and therefore right invariant) right cancellative semigroup and the biacts ${}_S(S \times S)_S$ is cyclic.

Keywords: diagonal act, biact, act over a semigroup, right (left) invariant semigroups, diagonal rank of semigroup.

В работе [6] (теорема 6.1) было доказано, что диагональный полигон $(S \times S)_S$ бесконечной коммутативной полугруппы S не может быть конечно порождённым. В [5] (теорема 4.8) этот результат был существенно усилен, а именно, $(S \times S)_S$ не является конечно порождённым для бесконечной полугруппы S удовлетворяющей некоторому нетривиальному полугрупповому

тождеству. В другом направлении обобщение упомянутого выше результата Галлагера состояло в доказательстве того, что для бесконечной инвариантной слева полугруппы S единицей полигон $(S \times S)_S$ не является конечно порождённым (теорема 3.3 из [2], теорема 4.4 из [5]). Цель данной работы — доказать без предположения о наличии в полугруппе единичного элемента, что диагональный правый полигон $(S \times S)_S$ не является конечно порождённым в случае, когда полугруппа S инвариантна слева или справа. Кроме того, мы доказываем, что для биполигонов $(S \times S)_S$ данное утверждение неверно. А именно, строим пример полугруппы S , которая бесконечна, проста справа (а значит, инвариантна справа) и сократима справа, а диагональный биполигон $(S \times S)_S$ является циклическим. Построение примера состоит в некотором упрощении примера из [1], который, в свою очередь, основывался на идеях, использовавшихся в доказательствах леммы 4.1 и теоремы 4.3 из [7].

Для произвольной полугруппы S мы, как обычно, полагаем $S^1 = S$, если S имеет единицу, и $S^1 = S \cup \{1\}$, если S не имеет единицы. Полугруппа S называется *инвариантной слева*, если любой её левый идеал является двусторонним. Инвариантные справа полугруппы определяются двойственным образом. Инвариантность слева полугруппы S очевидно, равносильна следующему условию: $\forall a, x \in S \exists y \in S^1 ax = ya$. Далее, *правым полигоном* [8] над полугруппой S называется множество X , на котором действует полугруппа S , то есть определено отображение $(x, s) \mapsto xs$ такое, что выполняется тождество $(xs)s' = x(ss')$ для $x \in X, s, s' \in S$. *Левый полигон* Y над полугруппой S определяется двойственным образом, то есть как отображение $S \times Y \rightarrow Y, (s, y) \mapsto sy$, причём $s(s'y) = (ss')y$ для $y \in Y, s, s' \in S$. Если множество X является левым полигоном над полугруппой S и правым полигоном над полугруппой T , то оно будет называться *биполигоном* в случае, когда выполняется условие $(sx)t = s(xt)$ при $x \in X, s \in S, t \in T$. Если S — полугруппа, то множество $S \times S$ будет являться правым полигоном над S относительно действия $(x, y)s = (xs, ys)$ при всех $x, y, s \in S$, левым относительно действия $s(x, y) = (sx, sy)$, а также биполигоном. Назовём их

соответственно *правым, левым диагональными полигонами*, а также *диагональным биполигоном*. Будем обозначать их $(S \times S)_s$, $(S \times S)_s$, $(S \times S)_s$.

Подмножество $A \subseteq S \times S$ будем называть *порождающим множеством* полигона $(S \times S)_s$, если $AS^1 = S \times S$. Аналогично определяются порождающие множества диагонального левого и диагонального биполигона. Если никакое собственное подмножество порождающего множества не является порождающим, то оно называется *неприводимым*. Известно, что неприводимое порождающее множество является минимальным по мощности ([3], теорема 1). *Правым диагональным рангом* полугруппы S будем называть мощность минимального порождающего множества полигона $(S \times S)_s$. Аналогичным образом определяются *левый диагональный ранг* и *бидиагональный ранг* полугруппы. Будем обозначать их $\text{rdr } S$, $\text{ldr } S$ и $\text{bdr } S$ соответственно (см. [5]).

Теорема 1. Если S — бесконечная инвариантная слева полугруппа и бидиагональный ранг $\text{bdr } S < \infty$, то $S = A \cup N$, где A — бесконечная простая слева полугруппа, а N — идеал полугруппы S или пустое множество.

Доказательство. Пусть S — бесконечная инвариантная слева полугруппа, у которой $\text{bdr } S < \infty$. Далее пусть $\{(a_1, b_1), K, (a_n, b_n)\}$ — система образующих диагонального биполигона ${}_s(S \times S)_s$. Мы имеем: $S \times S = \bigcup_{i=1}^n S^1(a_i, b_i)S^1$. Отсюда

$S = S^1 a_1 S^1 \cup K \cup S^1 a_n S^1$. Без ограничения общности мы можем считать, что $S^1 a_1 S^1$ — максимальный среди идеалов $S^1 a_i S^1$. Положим $N = \{x \in S \mid a_1 \notin S^1 x S^1\}$. Очевидно, N , если оно непусто, является идеалом полугруппы S . Докажем, что в этом случае N — максимальный идеал. Пусть $y \notin N$. Тогда $a_1 \in S^1 y S^1$. Кроме того, $y \in S^1 a_i S^1$ для некоторого i . Отсюда $S^1 a_1 S^1 \subseteq S^1 y S^1 \subseteq S^1 a_i S^1$. Ввиду максимальной идеала $S^1 a_1 S^1$ имеем: $S^1 a_1 S^1 = S^1 a_i S^1 = S^1 y S^1$. Следовательно, $y \in S^1 a_1 S^1$. Это означает, что $S = S^1 a_1 S^1 \cup N$, то есть N — максимальный идеал.

Предположим, что $N \neq \emptyset$. Тогда полугруппа $\bar{S} = S/N$ не имеет идеалов, кроме $\bar{S}$ и $\{0\}$. Следовательно, по лемме 2.26 из [4] либо $\bar{S}$ — 0-простая полугруппа, либо $\bar{S}$ — двухэлементная полугруппа с нулевым

умножением. Если имеет место второй случай, то $S = \{a_1\} \cup N$, причём $a_1^2 \in N$. Так как S бесконечна, то N также бесконечно. Пусть $u \in N$. Имеем: $(a_1, u) = s(a_i, b_i)t$ для некоторых $i \leq n$ и $s, t \in S^1$. Так как $\bar{S}^2 = \{0\}$, то $s = t = 1$, откуда $u = b_i$. Таким образом, элементов b_i бесконечно много, что противоречит условию. Наши рассуждения показывают, что $\bar{S}$ — 0-простая полугруппа.

Ввиду инвариантности слева $S^1 a S^1 = S^1 a$. Следовательно, $S = S^1 a_1 \cup K \cup S^1 a_n$. Положим $A = S \setminus N$. Пусть $x \in A$. Ранее было доказано, что в этом случае $S^1 x S^1 = S^1 a_1 S^1$. Следовательно, $S^1 x = S^1 a_1$. Отсюда $\bar{S}^1 x = \bar{S}^1 a_1$. Это показывает, что $\bar{S}$ — 0-простая слева полугруппа. Хорошо известно, что в этом случае нуль полугруппы $\bar{S}$ изолированный (то есть $xu \neq 0$ при $x, u \neq 0$), а множество $\bar{S} \setminus \{0\}$ является простой слева полугруппой. Таким образом, A — простая слева полугруппа.

Докажем, что A бесконечна. Пусть $|A| < \infty$. Тогда N бесконечно. Пусть $a \in A, u \in N$. Имеем: $(a, u) = s(a_i, b_i)t$ при некоторых $i \leq n$ и $s, t \in S^1$. Так как $sa_i t \in A$, то $s, t \in A^1$, поэтому $u = sb_i t \in A^1 b_i A^1$. Таким образом, $N \subseteq \bigcup_{i=1}^n A^1 b_i A^1$, то есть N — конечное множество, что противоречит предыдущему. Итак, $S = A \cup N$, где A — бесконечная простая слева полугруппа, а N — идеал.

В случае $N = \emptyset$, рассуждая аналогично предыдущему, мы получаем, что $S = A$ — бесконечная простая слева полугруппа. Теорема доказана.

Следствие 1. Если S — бесконечная инвариантная слева полугруппа и $bdrS \leq 2$, то S простая слева.

Доказательство. По теореме 1 $S = A \cup N$, где A — простая слева, $N = \emptyset$ или N — идеал. Если $N \neq \emptyset$, то в системе образующих биполгона

${}_S(S \times S)_S$ должны быть обязательно пары вида $(a, a'), (a, u), (u, a)$ для некоторых $a, a' \in A, u \in N$, откуда $\text{bdr } S \geq 3$. Следовательно, $N = \emptyset$.

Теорема 2. Если S — бесконечная инвариантная слева полугруппа, то $\text{rdr } S = \infty$.

Доказательство. Предположим, что S — бесконечная инвариантная слева полугруппа и $\text{rdr } S < \infty$. Тогда $\text{bdr } S < \infty$, откуда по теореме 1 получаем, что $S = A \cup N$, где A — бесконечная простая слева полугруппа, а N — пустое множество или идеал. Если $\{(a_1, b_1), K, (a_n, b_n)\}$ — множество образующих правого диагонального полигона $(S \times S)_S$, то нетрудно видеть, что те пары (a_i, b_i) , где $a_i, b_i \in A$, будут образовывать порождающее множество полигона $(A \times A)_A$. Пусть это будут пары $(a_1, b_1), K, (a_k, b_k)$. Имеем: $(a_1, b_1)A^1 \cup K \cup (a_k, b_k)A^1 = A \times A$. Отсюда $A = a_1A^1 \cup K \cup a_kA^1$. Так как A простая слева, то $Aa = A$ для всех $a \in A$. Следовательно, $a_1 = sa_1$ для некоторого $s \in A$. Далее, $s = a_{i_1}t$ при некоторых $i_1 \leq k$ и $t \in A^1$. Кроме того, $a_1 = ua_{i_1}$ при некотором $u \in A$. Таким образом, $a_1 = a_{i_1}tua_{i_1}$, то есть $a_1 \in a_{i_1}Aa_{i_1}$. Рассуждая аналогично, получим $a_{i_1} \in a_{i_2}Aa_{i_2}$, $a_{i_2} \in a_{i_3}Aa_{i_3}$ и т.д. Так как количество a_i конечно, то мы будем иметь $a_{i_{m+d}} = a_{i_m}$ при некоторых $m, d > 0$. Следовательно, $a_{i_m} \in a_{i_m}Aa_{i_m}$. Это влечёт, что a_{i_m} — регулярный элемент полугруппы A . Значит, A имеет идемпотент. По теореме, двойственной теореме 1.27 из [4], простая слева полугруппа с идемпотентом является левой группой, то есть $A \cong L \times G$, где L — полугруппа левых нулей, а G — группа. Так как L и G являются гомоморфными образами полугруппы A , то $\text{rdr } L < \infty$ и $\text{rdr } G < \infty$. Нетрудно видеть, что в этом случае L и G — конечные полугруппы. Таким образом, $|A| < \infty$, а это противоречит ранее доказанному. Теорема доказана.

Теорема 3. Если S — бесконечная инвариантная слева полугруппа, то $\text{ldr } S = \infty$.

Доказательство. Пусть S — бесконечная инвариантная слева полугруппа и $\text{ldr } S < \infty$. Тогда также $\text{bdr } S < \infty$. По теореме 1 $S = A \cup N$, где A — бесконечная простая слева полугруппа, а N — идеал. Очевидно, $\text{ldr } A < \infty$.

Итак, A — бесконечная полугруппа, $Aa = A$ для всех $a \in A$ и $\text{ldr } A < \infty$. Для $a \in A$ положим $\rho_a = \{(x, y) \in A \times A \mid ax = ay\}$. Для $a, b \in A$ имеем: $a = ub, b = va$ при некоторых $u, v \in A$. Поэтому $(x, y) \in \rho_a \Leftrightarrow (x, y) \in \rho_b$, то есть ρ_a не зависит от a . Следовательно, $\rho_a = \{(x, y) \in A \times A \mid \forall u ux = uy\}$. Нетрудно проверить, что ρ_a — конгруэнция полугруппы A . Обозначим ρ_a через ρ . Докажем, что фактор-полугруппа A / ρ бесконечна. Пусть $|A / \rho| < \infty$. Возьмём любое $b \in A$. Тогда $(b^i, b^j) \in \rho$ при некоторых $i \neq j$. Отсюда $ub^i = ub^j$ при всех $u \in S$. Взяв $u = b$, получим: $b^{i+1} = b^{j+1}$. Так как $i \neq j$, то b — элемент конечного порядка, а значит, b^k — идемпотент при некотором $k \in \mathbb{N}$. Снова воспользуемся тем фактом, что простая слева полугруппа с идемпотентом является левой группой, то есть $A \cong L \times G$, где L — полугруппа левых нулей, а G — группа. Но в этом случае, так как L или G бесконечно, $\text{ldr } A = \infty$. Таким образом, $|A / \rho| = \infty$. Положим $\bar{A} = A / \rho$. Проверим, что полугруппа $\bar{A}$ сократима слева. Пусть $\bar{a}\bar{b} = \bar{a}\bar{c}$. Тогда $(ab, ac) \in \rho$. Это влечёт, что $uab = uac$ при всех u . Отсюда $(b, c) \in \rho_{ua}$, а значит, $\bar{b} = \bar{c}$. Обозначим полугруппу $\bar{A}$ снова буквой A , убрав «старое» A из рассмотрения. Таким образом, A — простая слева сократимая слева бесконечная полугруппа и $\text{ldr } A < \infty$. Пусть $\{(a_1, b_1), K, (a_n, b_n)\}$ — система образующих полигона ${}_A(A \times A)$. Возьмём любой элемент $a \in A$. Мы имеем: $(a, a^2) = s_1(a_1, b_1)$ при некоторых s_1, i_1 . Отсюда $a = s_1 a_{i_1}, a^2 = s_1 b_{i_1}$, то есть $s_1 a_{i_1} a = s_1 b_{i_1}$, а значит, $a_{i_1} a = b_{i_1}$. Далее, $(a, a^3) = s_2(a_{i_2}, b_{i_2})$, откуда $a_{i_2} a^2 = b_{i_2}$. Для любого k мы будем иметь $a_{i_k} a^k = b_{i_k}$. Но индексы $i_k \leq n$ при всех k ,

поэтому $i_k = i_t$ при некоторых $k \neq t$. Мы получаем: $a_{i_k} a^k = b_{i_k} = a_{i_k} a^t$. Сократив на a_{i_k} , получим: $a^k = a^t$. Отсюда получаем, что A имеет идемпотент. Следовательно, A – левая группа. Значит, $\text{ldr } A = \infty$, что противоречит ранее установленному. Теорема доказана.

Так как простые слева (справа) полугруппы являются инвариантными слева (справа), то мы получаем следующее следствие из теорем 2, 3 и двойственных к ним.

Следствие 2. *Бесконечная простая справа или слева полугруппа имеет бесконечные диагональные левый и правый ранги.*

Итак, мы установили, что диагональный левый и диагональный правый ранги любой бесконечной инвариантной слева или справа полугруппы всегда бесконечны. Однако, бидиагональный ранг таких полугрупп может равняться единице, как показывает следующее утверждение. Но для его доказательства нужно провести предварительные рассуждения.

Пусть X — множество и $\alpha, \beta: X \rightarrow X$ — отображения. Построим ориентированный двудольный граф $G(\alpha, \beta)$, у которого множеством вершин является объединение двух непересекающихся копий множества X , а рёбрами – пары вида $(x, x\alpha)$ и $(x, x\beta)$, где $x \in X$. Отметим, что начало и конец каждого ребра принадлежат разным экземплярам множества X . Нетрудно видеть, что в случае, когда α и β инъективны, компоненты связности графа $G(\alpha, \beta)$ могут быть лишь следующих видов:

$$K_n^{(1)} = \{x_1, K, x_n, y_1, K, y_n\}, \text{ где } x_1\alpha = y_1, \dots, x_n\alpha = y_n, x_1\beta = y_2, \dots, x_{n-1}\beta = y_n, x_n\beta = y_1;$$

$$K_n^{(2)} = \{x_1, K, x_n, y_1, K, y_{n+1}\}, \text{ где } x_1\alpha = y_1, \dots, x_n\alpha = y_n, x_1\beta = y_2, \dots, x_n\beta = y_{n+1};$$

$$K^{(3)} = \{x_n, y_n \mid n \in \mathbb{N}\}, \text{ где } x_n\alpha = y_n, x_n\beta = y_{n+1} \text{ при } n \in \mathbb{N};$$

$$K^{(4)} = \{x_n, y_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{y_0\}, \text{ где } x_n\alpha = y_n, x_n\beta = y_{n-1} \text{ при } n \in \mathbb{N};$$

$$K^{(5)} = \{x_n, y_n \mid n \in \mathbb{Z}\}, \text{ где } x_n\alpha = y_n, x_n\beta = y_{n+1} \text{ при } n \in \mathbb{Z}.$$

Отсюда видно, что существует лишь счётное число попарно неизоморфных компонент связности.

Предложение 1. Пусть X – счётное множество, представленное в виде непересекающегося объединения счётных подмножеств: $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup K$. Обозначим через S полугруппу всех инъективных отображений $\alpha: X \rightarrow X$ таких, что $X\alpha \subseteq X_1 \cup K \cup X_n$ для некоторого n (зависящего от α). Тогда S – бесконечная простая справа (а значит, и инвариантная справа) сократимая справа полугруппа, причём $\text{bdr } S = 1$.

Доказательство. Так как S состоит из инъективных отображений, то S сократима справа. Докажем, что S проста справа. Пусть $\alpha, \beta \in S$. Тогда $X\beta \subseteq X_1 \cup K \cup X_n$ при некотором n . Положим $x\gamma = (x\alpha^{-1})\beta$ для $x \in X\alpha$. Тогда γ – инъективное отображение $X\alpha \rightarrow X_1 \cup K \cup X_n$. Отобразим остальные элементы ($x \in X \setminus X\alpha$) взаимно однозначно на множество X_{n+1} . Тогда получим инъективное отображение $\gamma: X \rightarrow X_1 \cup K \cup X_{n+1}$. Очевидно, $\gamma \in S$ и $\alpha\gamma = \beta$.

Осталось доказать, что $\text{bdr } S = 1$. Так как множество X_1 счётно и количество возможных неизоморфных компонент связности графов $G(\alpha, \beta)$ также счётно, то существуют инъективные отображения $\alpha_0, \beta_0: X_1 \rightarrow X_1$ такие, что граф $G(\alpha_0, \beta_0)$ имеет счётное число компонент каждого класса изоморфных возможных компонент. Продолжим отображения α_0, β_0 на всё множество X так, чтобы α_0, β_0 осуществляли вложение множества $X_2 \cup X_3 \cup K$ в множество X_2 . Понятно, что в этом случае $\alpha_0, \beta_0 \in S$.

Докажем, что (α_0, β_0) – порождающий элемент диагонального биполигона ${}_S(S \times S)_S$. Пусть $\alpha, \beta \in S$ – произвольные элементы. Требуется построить отображения $\gamma, \delta \in S$ такие, что $\gamma(\alpha_0, \beta_0)\delta = (\alpha, \beta)$.

Построим вначале отображение γ . Пусть K_1, K_2, K – компоненты связности графа $G(\alpha, \beta)$. Отобразим множество $\{K_1, K_2, K\}$ инъективно в

множество компонент графа $G(\alpha_0, \beta_0)$ так, чтобы K_i отображалась в изоморфную ей компоненту K'_i , – это возможно ввиду строения графа $G(\alpha_0, \beta_0)$. Пусть $K_i \subseteq G(\alpha, \beta)$ отображается в $K'_i \subseteq G(\alpha_0, \beta_0)$. По условию $K_i \cong K'_i$. Мы можем считать, что K_i имеет рёбра (x_j, y_j) , а K'_i – (u_j, v_j) . Положим $x_j \gamma = u_j$ для всех j . Аналогичные действия проделаем для других компонент графа $G(\alpha, \beta)$. Очевидно, мы получим инъективное отображение $\gamma: X \rightarrow X_1$. Ясно, что $\gamma \in S$.

Построим теперь отображение δ . Положим $v_j \delta = y_j$ для всех j . Тем самым δ будет определено на множестве $X_1 \alpha_0 \cup X_1 \beta_0 \subseteq X_1$. По определению полугруппы S для некоторого n мы имеем $X \alpha \cup X \beta \subseteq X_1 \cup K \cup X_n$. Доопределим δ на множество $X \setminus (X_1 \alpha_0 \cup X_1 \beta_0)$, например, так, чтобы это множество взаимно однозначно отображалось на множество X_{n+1} . Тогда δ будет вложением X в $X_1 \cup K \cup X_{n+1}$. Следовательно, $\delta \in S$.

Проверим, что $\gamma \alpha_0 \delta = \alpha$ и $\gamma \beta_0 \delta = \beta$. Пусть $x \in X$. Тогда $x \gamma \in X_1$. Пусть $x \alpha = y$, $x \beta = y'$. С учётом построения отображения γ имеем: $x \gamma \in K'_i$. Посмотрим, какому классу изоморфизма принадлежат компоненты K_i и K'_i . Если, например, $K_i \cong K'_i \cong K_n^{(1)}$, то $x = x_j$, $y = y_j$, $y' = y_t$, где $t = j+1$ при $j < n$ и $t = 1$ при $j = n$. При этом $K_i = \{x_1, K, x_n, y_1, K, y_n\}$, $K'_i = \{u_1, K, u_n, v_1, K, v_n\}$. По определению отображения γ мы имеем: $x \gamma = u_j$. Кроме того, $u_j \alpha_0 = v_j$, $u_j \beta_0 = v_t$, $v_j \delta = y_j$, $v_t \delta = y_t$. Отсюда получаем: $x \gamma \alpha_0 \delta = u_j \alpha_0 \delta = v_j \delta = y_j = x \alpha$ и аналогично $x \gamma \beta_0 \delta = x \beta$. Случаи, когда $K_i \cong K_n^{(2)}$, $K^{(3)}$, $K^{(4)}$ или $K^{(5)}$ рассматриваются аналогично. Следовательно, $x \gamma \alpha_0 \delta = x \alpha$ и $x \gamma \beta_0 \delta = x \beta$. Таким образом, $\gamma(\alpha_0, \beta_0) \delta = (\alpha, \beta)$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Апраксина Т. В., Барков И. В., Кожухов И. Б. Два примера диагональных биполигонов. Фунд. и прикл. матем. 2013. Т. 18. Вып. 3. С. 3–9.
2. Барков И.В., Кожухов И.Б. Свойства диагональных полигонов и биполигонов. Уч. Записки Орловского гос. ун-та. 2012. Т. 6 (50). С. 45–51.
3. Карташов В.К. Независимые системы порождающих и свойство Хопфа для унарных алгебр. Дискрет. матем. 2008. Т. 20. № 4. С. 79–84.
4. Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп. Т. 1. М.: «Мир», 1972. 287 с.
5. Apraksina T.V., Barkov I.V., Kozhukhov I.B. Diagonal ranks of semigroups. Semigroup Forum (в печати).
6. Gallagher P. On the finite and non-finite generation of diagonal acts. Commun. Algebra. 2006. V. 34. P. 3123–3137.
7. Gallagher P., Ruškuc N. Generation of diagonal acts of some semigroups of transformations and relations. Bull. Austral. Math. Soc. 2005. V. 72. P. 139–146.
8. Kilp M., Knauer U., Mikhalev A. V. Monoids, acts and categories. Berlin — New York: W. de Gruyter. 2000.

РАЗДЕЛ II. ФИЗИКА

УДК 530.1:514.8

Алиев И.Н., Самедова З.А.

Московский государственный технический университет им. Н.Э.Баумана

ОПТИКО МЕХАНИЧЕСКАЯ АНАЛОГИЯ И ТРАЕКТОРИЯ КВАНТА

Аннотация. В рамках специфичной модели дисперсионной связи между энергией и импульсом получено уравнение траектории релятивистских частиц (в частности, квантов). Выявлена полная аналогия с уравнениями для классических частиц (полученных из вариационного принципа механики) и лучей (выведенных из принципа Ферма). Сформулирована проблема дальнейшего развития задачи, связанная с конкретизацией вида потенциальной энергии кванта.

Ключевые слова: дисперсионное соотношение, вариационный принцип механики, принцип Ферма.

I. Aliev, Z. Samedova

Bauman Moscow State Technical University (Moscow, Russia)

OPTICAL-MECHANICAL ANALOGY AND QUANTUM TRAJECTORY

Abstract. Equation trajectory relativistic particles (in particular, quanta) received within the specific model of the dispersion relation between the energy and momentum. Revealed a complete analogy with the equations for classical particles (obtained from the variational principle of mechanics) and rays (derived from Fermat's principle). We formulate the problem of further development of the tasks associated with a particular form of the potential energy of the quantum.

Key words: dispersion relation, the variational principle of mechanics, Fermat's principle.

Недавние исследования эволюции возмущений заряженной поверхности раздела несмешивающихся жидкостей [1–2] показали возможность существования при определенных условиях дисперсионного соотношения в виде модуля линейной функции. На рис.1 представлен

фрагмент рисунка из работы [2]. Эта специфическая линейная связь между энергией и импульсом привела к идее приложить подобный подход к поведению кванта (фотона) и, применив к этой модели оптико-механическую аналогию, вывести уравнения траектории кванта. В связи с тем, что работа носит чисто квазиклассический характер и квантовость существует только в самом понятии кванта, фигурирующем в условиях приближения нашей задачи как частица, возникает аналогия с разобранными классическими, механическими и оптическими задачами, а также наложениями ограничений на структуру рассматриваемого объекта, поэтому в данном приближении достаточно обойтись понятием траектории, не рассматривая неопределенность координаты.

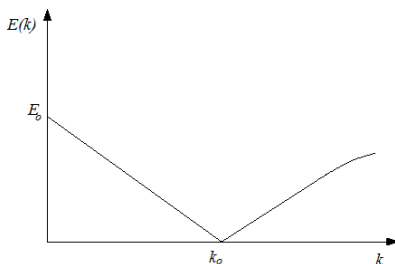


Рис. 1 Характерный вид энергетического спектра электрорипплонов.

(E_0 – энергия, k – волновое число)

Исходя из этой гипотезы попробуем представить энергию кванта в виде

$$E = c|\vec{p}| + U(\vec{r}) \quad (1)$$

и проанализируем к каким выводам может привести подобное предположение. Здесь c – некоторая константа, а структура второго слагаемого будет обсуждена в конце статьи. Для дальнейшего анализа воспользуемся вариационным принципом механики [3].

В начале напомним, что в классической механике предполагаются два различных подхода в постановке задач.

1. Требуется определить закон движения частицы в последующие моменты времени, если даны начальные условия: $\vec{r}(0) = \vec{r}_0$; $\dot{\vec{r}}(0) = \dot{\vec{r}}_0$.

2. Требуется определить закон движения частицы, если заданы ее положения в моменты времени 0 и T : $\vec{r}(0) = \vec{r}_A$; $\vec{r}(T) = \vec{r}_B$.

Знаменательно, что уравнения движения при этом имеют один и тот же вид:

$$\dot{\vec{p}} = m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} = -\text{grad}U(\vec{r})$$

(естественно, что сила предполагается потенциальной).

Далее рассмотрим нерелятивистскую материальную частицу массы m , движущуюся в потенциальном поле с потенциалом $U(\vec{r})$. Уравнение ее движения имеет вид $\dot{\vec{p}} = -\text{grad}U$. Из этого уравнения и закона сохранения энергии $\frac{p^2}{2m} + U(\vec{r}) = E$, вводя единичный вектор $\vec{\tau} = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$, касательный к

траектории движения, несложно вывести соотношение

$$\frac{d\vec{r}}{dl} = \vec{\tau} = \frac{\vec{p}}{\sqrt{2m[E - U(\vec{r})]}}.$$

Отсюда получаем:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{r}}{dl} \sqrt{2m(E - U(\vec{r}))} \right) = \frac{d\vec{p}}{dt} = -\text{grad}U.$$

Далее:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dl} \left(\sqrt{2m(E - U(\vec{r}))} \frac{d\vec{r}}{dl} \right) \frac{dl}{dt} &= -\text{grad}U; \\ \frac{d}{dl} \left(\sqrt{2m(E - U(\vec{r}))} \frac{d\vec{r}}{dl} \right) &= -\frac{1}{v} \text{grad}U = -\frac{\text{grad}U}{\sqrt{2(E - U)/m}} = \\ &= -\frac{2m \text{grad}U}{2\sqrt{2m(E - U)}} = \text{grad} \left(\sqrt{2m(E - U)} \right); \\ \frac{d}{dl} \left(\sqrt{2m(E - U)} \frac{d\vec{r}}{dl} \right) &= \text{grad} \left(\sqrt{2m(E - U)} \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Полученное уравнение (2) совпадает с уравнением для траектории оптического луча в векторном виде, полученное исходя из вариационного принципа Ферма $\frac{d}{dl} \left(n \frac{d\vec{r}}{dl} \right) = \text{grad}n$ (вывод можно посмотреть, например, в [3]), если считать, что показатель преломления среды n пропорционален

выражению $\sqrt{2m(E-U)}$ (заметим, однако, что n – безразмерная величина, а $\sqrt{2m(E-U)}$ имеет размерность импульса).

Попробуем обобщить полученный результат для релятивистского случая.

Если записать закон сохранения энергии для кванта электромагнитного поля в виде (1) трактуя $\vec{p}$ как импульс, а $U(\vec{r})$ – как потенциальную энергию кванта, то удастся получить уравнение, аналогичное (2) (c – в этом случае скорость света в вакууме). В самом деле, из аналога второго закона Ньютона

$$\dot{\vec{p}} = -\text{grad} U \quad (3)$$

с учетом очевидных соотношений

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = c\vec{\tau} \text{ и } \frac{dl}{dt} = c \quad (4)$$

получаем уравнение

$$c \frac{d\vec{p}}{dl} = -\text{grad} U,$$

где dl – элемент длины дуги, а импульс $\vec{p}$, как обычно, направлен по касательной к траектории: $\vec{p} = p\vec{\tau}$.

Далее:

$$\frac{d\vec{r}}{dl} = \vec{\tau} = \frac{c\vec{p}}{E-U(\vec{r})};$$

$$\vec{p} = \frac{1}{c}(E - U(\vec{r})) \frac{d\vec{r}}{dl};$$

$$\frac{d}{dl} \left[(E - U(\vec{r})) \frac{d\vec{r}}{dl} \right] = -\text{grad} U;$$

$$\frac{d}{dl} \left[(E - U(\vec{r})) \frac{d\vec{r}}{dl} \right] = \text{grad}(E - U(\vec{r})).$$

Полученное таким образом выражение является уравнением для световых лучей, если считать, что показатель преломления среды $n(\vec{r})$ пропорционален $(E - U(\vec{r}))$. Заметим, в отличие от (2), n вновь безразмерная величина, но $(E-U)$ имеет размерность энергии.

В заключение покажем, как из предложенных механических уравнений для кванта (3) и (4) можно получить закон сохранения энергии. Рассмотрим очевидные преобразования:

$$\frac{d}{dt}(c|\vec{p}|) = c \frac{d}{dt}(\sqrt{\vec{p}\vec{p}}) = c \frac{\dot{\vec{p}}\vec{p}}{\sqrt{\vec{p}\vec{p}}} = c \frac{d\vec{p}}{dt} \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} = c \frac{d\vec{p}}{dl} \frac{dl}{dt} \vec{\tau} = -\nabla U \vec{\tau} \frac{dl}{dt} - \frac{dU}{dl} \frac{dl}{dt} = -\frac{dU}{dt},$$

из которых следует, что $\frac{d}{dt}(c|\vec{p}| + U(\vec{r})) = 0$, и, следовательно,

$$c|\vec{p}| + U(\vec{r}) = \text{const} = E.$$

Знаменательно, что при выводе нигде не использовалось понятие массы, что и позволило применить полученный результат к кванту.

Остается открытым вопрос о том, как трактовать потенциальную энергию для кванта и, соответственно, соотношение (1). Затронутый вопрос постоянно находится в поле зрения исследователей. Так, на последних конференциях по релятивизму и гравитации в ряде работ рассматривались схожие проблемы, однако существенного прогресса в вопросе трактовки потенциальной энергии добиться не удалось, одной из причин при этом является достаточно сложная математическая запись результатов [4–6]. Видимо, в рамках специальной теории относительности эта гипотеза не может быть разрешена принципиально. Однако отмеченная аналогия с механическим уравнением (2), как нам кажется, позволяет ввести вышеуказанные допущения.

Авторы выражают благодарность за содействие в выполнении этой работы С.О. Юрченко и Российскому министерству образования и науки (проект № 3.1526.2014/К).

ЛИТЕРАТУРА:

1. Aliev I.N., Yurchenko S.O. Evolution of Perturbations of Chargedraemoro Interface between Immiscible Inviscid Fluids in the Interelectrode Gap. *Fluid Dynamics*, 2010. Vol. 45. № 5. P. 817–826.
2. Юрченко С.О., Алиев И.Н. О квантовании поверхностных возмущений невязкой жидкости в однородном внешнем электрическом поле. *Вестник МГТУ им. Н.Э.Баумана. Сер. «Естественные науки»* 2011. № 3. С. 84–89.
3. Алиев И.Н., Толмачев В.В.. *Оптико-механическая аналогия и уравнение Шредингера*. М.: Издательство МГТУ, 1998. С. 80.
4. Tuoma Suntola. Relativity defines the locally available share of total energy. *Proceeding of International Scientific Meeting PIRT-2006. London-2006*. P. 430–439.
5. Shestakov J.I. The scalar mode of gravitation. *Proceeding of International Scientific Meeting PIRT-2009. Moscow-2009*. P. 462–466.
6. Rowlands P. A critical value for dark energy. *Proceeding of International Scientific Meeting PIRT-2013. Moscow-2013*. P. 260–166.

УДК 533

Барабанова Н.Н. *, Беляев В.В. *, Богданов Д.Л. *,
Бугримов А.Л. *,

Дадиванян А.К. *, Осипов М.А. **, Чигринов В.Г. ***

*Московский государственный областной университет

** Университет Стратклайд, Глазго, Великобритания

*** Гонконгский университет науки и технологии, Гонконг, Китай

ОРИЕНТАЦИЯ КРАСИТЕЛЕЙ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ С ЛАЗЕРНЫМ ИЗЛУЧЕНИЕМ

Аннотация. Предложена теория ориентирования красителя в поле лазерного излучения. Определена энергия взаимодействия молекул красителя с магнитным полем излучения. Показано, что ориентация молекул красителя определяется их взаимодействием с электрическим полем излучения.

Ключевые слова: красители, лазерное излучение, поле световой волны, диамагнитная восприимчивость.

N. Barabanova, V. Belyaev*, D. Bogdanov*, A. Bugrimov*, A. Dadivanyan*, M. Osipov**,
V. Chigrinov****

** Moscow State Regional University (Moscow, Russia)*

*** Strathclyde University (Glasgow, UK)*

**** University of Science and Technology (Hong Kong, China)*

ORIENTATION OF DYES UNDER LASER IRRADIATION ORIENTATION OF DYES UNDER THE ACTION OF LASER IRRADIATION

Abstract. A theory of dyes orientation in the field of a light wave is proposed. The energy of dye molecules' interaction with the magnetic field of laser radiation is determined. The orientation of the dye molecules is shown to depend on their interaction with electric field of radiation.

Keywords: dyes, laser radiation, light wave field, diamagnetic susceptibility

Одним из наиболее эффективных методов ориентирования жидких кристаллов (ЖК) является метод их ориентации в смеси с красителями лазерным излучением [1–9]. Теория этого явления была рассмотрена в [5, 10, 11]. Авторы работы [5] рассмотрели поглощение излучения молекулами, решили диффузионное уравнение и получили зависимость параметра порядка от времени. Однако в этой работе не было получено значение угла ориентации

молекул. В [10, 11] была рассмотрена ориентация молекул электрическим полем световой волны и показано, что для ориентации молекул красителя, значительно отличающейся от хаотичной, необходимо, чтобы кооперативно ориентировалось не менее 10^8 молекул. Согласно этим работам, ось легкого ориентирования направлена преимущественно по электрическому полю.

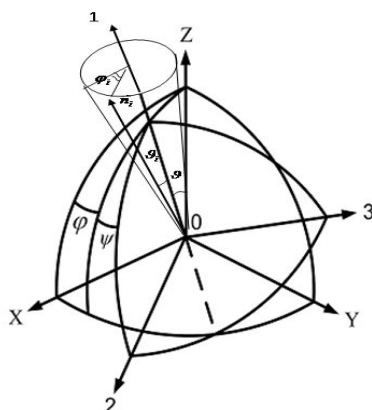


Рис. 1. Взаимное расположение неподвижной XYZ и подвижной 123 систем координат (XYZ – система координат, связанная с поверхностью; 123 – система координат, связанная с кластером; θ – полярный угол оси 1 в неподвижной системе координат; φ – азимут оси 1 (угол между плоскостями XZ и $1Z$); ψ – азимут подвижной системы (угол между плоскостями $1Z$ и 12)). Ось 1 направлена по директору кластера, $\vec{n}_i$ – по оси симметрии эллипсоида диамагнитной восприимчивости χ ; θ , φ – полярный и азимутальный углы, определяющие ориентацию эллипсоида диамагнитной восприимчивости в системе координат 123 .

Цель настоящей работы – найти направление преимущественной ориентации молекул красителя при взаимодействии с магнитным полем лазерного излучения.

Так как молекулы красителя содержат несколько фенильных групп, диамагнитная восприимчивость которых в направлении, перпендикулярном плоскости кольца $\chi_{\perp}$, существенно отличается от диамагнитной восприимчивости в плоскости кольца $\chi_{\parallel}$, то диамагнитную восприимчивость молекул красителя можно аппроксимировать аксиально симметричным

эллипсоидом, ось симметрии которого перпендикулярна плоскости, в которой лежат фенильные кольца молекул.

Энергия взаимодействия магнитного поля с молекулой определяется соотношением:

$$U = -\frac{1}{2} \sum \chi_{ij} H_i H_j, \quad (1)$$

где $i, j = x, y, z$, χ_{ij} – компоненты тензора диамагнитной восприимчивости молекулы, H_x, H_y, H_z – компоненты вектора напряженности магнитного поля в той же системе координат.

Пусть луч света с волновым вектором $\vec{k}$ направлен по оси z , YOZ – плоскость поляризации света (рис. 1). Волновой вектор направлен по оси z , электрическое поле $\vec{E}$ – по оси x , магнитное поле $\vec{H}$ – по оси y .

Найдем компоненты тензора диамагнитной восприимчивости группы кооперативно ориентирующихся молекул – назовем ее кластером – в системе XYZ. Воспользуемся таблицей 1, которая определяет косинусы углов перехода $\cos(i, x), \cos(i, y), \cos(i, z)$ от системы координат 123 к системе координат XYZ [12].

Таблица 1.

Косинусы углов перехода $\cos(i, x), \cos(i, y), \cos(i, z)$ от системы координат 123 к системе координат XYZ.

	x	y	z
1	$\sin \vartheta \cdot \cos \varphi$	$\sin \vartheta \cdot \sin \varphi$	$\cos \vartheta$
2	$\cos \varphi \cdot \cos \psi \cdot \cos \vartheta - \sin \varphi \cdot \sin \psi$	$\sin \psi \cdot \cos \varphi + \cos \psi \cdot \sin \varphi \cdot \cos \vartheta$	$-\sin \vartheta \cdot \cos \psi$
3	$-\sin \psi \cdot \cos \varphi \cdot \cos \vartheta - \cos \psi \cdot \sin \varphi$	$\cos \psi \cdot \cos \varphi + \sin \psi \cdot \sin \varphi \cdot \cos \vartheta$	$\sin \vartheta \cdot \sin \psi$

Значения компонент тензора диамагнитной восприимчивости кластера равны:

$$\begin{aligned} \bar{\chi}_{11} &= N \left[(\chi_{\perp} - \chi_{\parallel}) \cdot \frac{2S+1}{3} + \chi_{\parallel} \right], \\ \bar{\chi}_{22} &= N \left[(\chi_{\perp} - \chi_{\parallel}) \cdot \frac{1-S}{3} + \chi_{\parallel} \right], \end{aligned} \quad (2)$$

$$\bar{\chi}_{33} = N \left[(\chi_{\perp} - \chi_{\parallel}) \cdot \frac{1-S}{3} + \chi_{\parallel} \right],$$

где N – число кооперативно ориентирующихся молекул. Остальные компоненты равны нулю.

Так как магнитное поле направлено по оси y , то необходимо найти χ_{yy} :

$$\chi_{yy} = \chi_{11} \cos^2(1y) + \chi_{22} \cos^2(2y) + \chi_{33} \cos^2(3y).$$

Так как эллипсоид диамагнитной восприимчивости кластера является аксиально симметричным ($\bar{\chi}_{22} = \bar{\chi}_{33}$), то в таблице 1 угол ψ можно взять любым. Пусть $\psi=0$, тогда:

$$\begin{aligned} \chi_{yy} &= N \{ \bar{\chi}_{11} \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi + \bar{\chi}_{22} \cos^2 \vartheta \sin^2 \varphi + \bar{\chi}_{33} \cos^2 \varphi \} = \\ &= N \{ \bar{\chi}_{11} \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi + \bar{\chi}_{22} (1 - \sin^2 \varphi) \sin^2 \varphi + \bar{\chi}_{22} \sin^2 \varphi \} = \\ &= N (\bar{\chi}_{11} - \bar{\chi}_{22}) \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi + \bar{\chi}_{22} \sin^2 \varphi + \bar{\chi}_{22} \cos^2 \varphi = \\ &= N [(\bar{\chi}_{11} - \bar{\chi}_{22}) \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi + \bar{\chi}_{22}]. \end{aligned} \quad (3)$$

Подставляя уравнения (2) в (3), получим:

$$\chi_{yy} = N \left[(\chi_{\perp} - \chi_{\parallel}) \cdot S (\sin^2 \vartheta \cdot \sin^2 \varphi - \frac{1}{3}) + \frac{(\chi_{\perp} + 2\chi_{\parallel})}{3} \right]$$

Тогда энергия кластера в магнитном поле лазерного излучения

$$- \frac{NH^2}{2} \left[(\chi_{\perp} - \chi_{\parallel}) \cdot S (\sin^2 \vartheta \cdot \sin^2 \varphi - \frac{1}{3}) + \frac{(\chi_{\perp} + 2\chi_{\parallel})}{3} \right],$$

а полная энергия кластера в поле излучения будет равна

$$U_1(S) + U_2 - \frac{NH^2}{2} \left[(\chi_{\perp} - \chi_{\parallel}) \cdot S (\sin^2 \vartheta \cdot \sin^2 \varphi - \frac{1}{3}) + \frac{(\chi_{\perp} + 2\chi_{\parallel})}{3} \right] \quad (4)$$

где $U_1(S)$ – энергия взаимодействия молекул внутри кластера, U_2 – энергия взаимодействия кластеров друг с другом.

Величина магнитной восприимчивости в направлении, перпендикулярном плоскости фенильных колец $\chi_{\perp}$, больше восприимчивости в плоскости кольца $\chi_{\parallel}$, поэтому энергия минимальна в случае $\nu=0$ и $\varphi=0$, т. е. когда плоскость колец лежит в плоскости, образованной волновым вектором и магнитным полем. Это означает, что ось легкого ориентирования лежит в этой плоскости, а значит, направлена по магнитному полю.

Магнитная восприимчивость молекулы красителя имеет порядок 10^{-25} см³, а оптическая поляризуемость – 10^{-23} см³. При интенсивности лазерного излучения 100 мВт/см² энергия взаимодействия молекул красителя с электрическим полем излучения имеет порядок 10^{-27} эрг, а с магнитным – 10^{-29} эрг, т. е. энергия взаимодействия с электрическим полем на два порядка больше, чем с магнитным. Это означает, что ось легкого ориентирования молекулы красителя должна быть направлена преимущественно по электрическому полю. При этом чтобы ориентация молекул существенно отличалась от хаотической, энергия кластера должна быть близка к энергии теплового движения, т. е. иметь порядок 10^{-14} эрг, для этого кооперативно должны ориентироваться 10^{13} молекул, что соответствует магнитной длине когерентности [13].

В экспериментах ось легкого ориентирования молекул красителя направлена преимущественно по магнитному полю. Это означает, что поляризуемость молекул красителя в направлении, перпендикулярном оси легкого ориентирования, больше, чем в направлении этой оси. Такой эффект можно объяснить, пользуясь представлением об обменно-резонансном взаимодействии.

Известно, что при поглощении излучения молекулами красителя происходит безызлучательный перенос энергии электронного возбуждения от молекул в триплетном состоянии к невозбужденным [14, 15], что обусловлено обменно-резонансным взаимодействием возбужденной и невозбужденной молекул с перекрыванием их электронных оболочек. При этом происходит обмен как энергией взаимодействия, так и электронами. Такое взаимодействие оказывает влияние на структуру молекул и сопровождается изменением электронной поляризуемости с инверсией анизотропии поляризуемости, при этом поляризуемость в направлении, перпендикулярном оси легкого ориентирования, окажется больше, чем в ее направлении.

В результате ось легкого ориентирования молекулы будет направлена перпендикулярно электрическому полю.

Можно получить зависимость степени ориентации от времени облучения t или от поглощенной энергии, которая при малых t пропорциональна времени облучения:

$$\begin{aligned}dn &= -\xi n dt, \\ n &= n_0(1 - \exp(-\xi t)),\end{aligned}$$

где n – число неориентированных молекул в момент времени t ; n_0 – число неориентированных молекул в необлученном образце, т. е. при $t=0$. Так как энергия излучения пропорциональна времени t , то

$$n = n_0(1 - \exp(-\xi' E)).$$

Выводы:

1. Определена энергия взаимодействия молекул красителя с магнитным полем лазерного излучения.
2. Показано, что ориентация молекул красителя определяется их взаимодействием с электрическим полем излучения.
3. Оценено число молекул в кластере.
4. Получена зависимость числа ориентированных молекул от времени облучения.

Работа выполнена при частичной поддержке по грантам РФФИ #14-07-00574-а, 14-47-03608 (совместно с Правительством Московской области).

ЛИТЕРАТУРА:

1. Квасников Е.Д., Козенков В.М., Барачевский В.А. / Е.Д. Квасников, В.М. Козенков, В.А. Барачевский // Доклады Академии наук СССР. 1977. 237. С. 633.
2. Ishimura K., Hayashi Y., Akiyama H., Ikeda T., Ishizuki N. / K. Ishimura, Y. Hayashi, H. Akiyama, T. Ikeda, N. Ishizuki. // Applied Physics Letters/ 1993. 63. P. 449.
3. Gibbons W.M., Kosa T., Palfy-Muhoray P., Shannon P.J., Sun S.T. / W.M. Gibbons, T. Kosa, P. Palfy-Muhoray, P.J. Shannon, S.T. Sun. // Letters to Nature. 1995. 377. P. 43.
4. Schadt M., Seiberle H., Schuster A. / M. Schadt, H. Seiberle, A. Schuster // Nature. 1996. 381. P. 212.
5. Chigrinov V., Pikin S., Verevochnikov A., Kozenkov V., Khazimullin M., Ho, J., Huang, D.D., Kwok H.-S. / V. Chigrinov, S. Pikin, A. Verevochnikov, V. Kozenkov, M. Khazimullin, J. Ho, D.D. Huang, H.-S. Kwok // Phys. Rev. 2004. 69. 061713. P. 1.
6. Tabiryan N., Hrozhyk U., Serak S. / N. Tabiryan, U. Hrozhyk, S. Serak // Phys. Rev. Lett. 2004. 93. 113901.

7. Chigrinov V., Kozenkov V., Kwok H.-S. Photoalignment of Liquid Crystalline Materials / V.Chigrinov, V.Kozenkov, H.-S.Kwok. // Wiley-SID Serlesin Display Technology. John Wiley & Sons. 2008.
8. Невская Г.Е., Томилин М.Г., Чигринов В.Г. / Г.Е. Невская, М.Г. Томилин, В.Г. Чигринов // Жидкие кристаллы и их практическое применение. 2009. Вып. 1. С. 8.
9. Kozenkov V., Belyaev V., Chigrinov V., Tumovskii G., Spakhov A. Structure and Properties of Azo Dye Films for Photoalignment and Photochromic Applications / V.Kozenkov, V.Belyaev, V. Chigrinov, G. Tumovskii, and A. Spakhov // SID'12 Digest. 2012. P. 1411.
10. Барабанова Н.Н., Беляев В.В., Богданов Д.Л., Бутримов А.Л., Дадиванян А.К., Чигринов В.Г. / Н.Н. Барабанова, В.В. Беляев, Д.Л. Богданов, А.Л. Бутримов, А.К. Дадиванян, В.Г. Чигринов // Вестник МГОУ. Серия Физика-Математика 2013. Вып. 2. С. 28–34.
11. Barabanova N.N., Belyaev V.V., Bogdanov D.L., Bugrimov A.L., Chigrinov V.G., Dadivanyan A.K., Rodionova Ye.A. / N.N. Barabanova, V.V. Belyaev, D.L. Bogdanov, A.L. Bugrimov, V.G. Chigrinov, A.K. Dadivanyan, Ye.A. Rodionova // Molecular Crystals and Liquid Crystals. 2014. 596. Issue 1. P. 76–81.
12. Цветков В.Н., Эскин В.Е., Френкель С.Я. Структуры макромолекул в растворах / В.Н. Цветков, В.Е. Эскин, С.Я. Френкель. // М.: Наука, 1964.
13. Фредерикс В.К., Цветков В.Н. / В.К. Фредерикс, В.Н. Цветков // Sov. Phys. 1934. 6. P. 490.
14. Ермолаев В.Л., Теренин А.Н. / В.Л. Ермолаев, А.Н. Теренин. // 1971. Открытие № 108. Государственный реестр открытий СССР.
15. Ермолаев В.Л., Теренин А.Н. / В.Л. Ермолаев, А.Н. Теренин. // 1952. Доклады Академии наук СССР. 85. 547.

УДК 539.2

В. М. Кузнецов*, К. Б. Терешкина**

*Российский химико-технологический университет им. Д.И. Менделеева

(РХТУ им. Д.И. Менделеева),

**Институт химической физики им. Н.Н. Семёнова РАН (ИХФ РАН)

НИЗКОТЕМПЕРАТУРНАЯ ТЕПЛОЕМКОСТЬ ВЕЩЕСТВ С ФРАКТАЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТЬЮ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СПЕКТРОВ

Аннотация. Согласно общепринятой точке зрения, температурная зависимость $C(T)$ решёточной теплоёмкости твёрдых тел в области температур $T \rightarrow 0$ должна иметь участок, соответствующий так называемому предельному закону Дебая $C(T) \sim T^3$. Этот закон должен выполняться независимо от атомной (молекулярной) структуры и типа химической связи в твёрдом теле. В данной работе показано, что такое утверждение справедливо, если принять, что частотный спектр исследуемого тела непрерывен и меняется в диапазоне $0 \leq \omega \leq \omega_{\max}$ (модель бесконечного по спектру длин волн кристалла), а степенной показатель его размерности – в интервале $1 \leq d_f \leq 3$. Эта модель уже столетие успешно применяется в исследовании макротел, но малоприменяется для кластеров и наноструктур. В общем случае, т. е. вне указанного интервала, когда $d_f < 1$ или $d_f > 3$, и конечном с двух сторон спектре и температурное изменение решёточной теплоёмкости имеет иной характер.

Ключевые слова: димеры, межмолекулярные спектры, фрактальная размерность колебательных спектров, низкотемпературная теплоёмкость.

V.M. Kuznetsov*, K.B. Tereshkina**

*D. Mendeleyev University of Chemical Technology of Russia (Moscow, Russia)

**Semenov Institute of Chemical Physics, Russian Academy of Sciences
(Moscow, Russia)

LOW-TEMPERATURE HEAT CAPACITY OF MATTER WITH FRACTAL DIMENSION OF VIBRATIONAL SPECTRA

Abstract. According to common point of view, the temperature dependence $C(T)$ of the lattice heat capacity of solid bodies in the temperature range $T \rightarrow 0$ should have a region corresponding to the so-called Debye limiting law $C(T) \sim T^3$. This law should be obeyed regardless of the atomic (molecular) structure and type of chemical bonding in solid bodies. This paper shows that this is true, if it is assumed that the frequency spectrum of the investigated body is continuous and varies in the range of $0 \leq \omega \leq \omega_{\max}$ (model of infinite wavelength spectrum of the crystal), and the exponent of its dimensions varies in the range of $1 \leq d_f \leq 3$. This model has been successfully applied during the past century studying of macroscopic bodies, but it is practically useless for clusters and nanostructures. In the general

case, i.e. outside this range, when $df < 1$ or $df > 3$, and with finite of the both sides spectrum, the temperature change of the lattice heat capacity has a different nature.

Key words: dimers, intermolecular spectra, zero dimension, low-temperature heat capacity, fractal dimension of vibrational spectrum

Введение

Для расчёта температурной зависимости решёточной теплоёмкости конденсированных сред в континуальных моделях вместо реальных колебательных спектров рассматриваемых объектов используются их осреднённые по степенному закону аналоги со специально подобранными параметрами. Такая замена практически не влияет на результаты расчёта $C(T)$, поскольку задача имеет интегральный характер и нечувствительна к деталям формы спектра. В общем случае, если показатель размерности d_f такого спектра принимает произвольные целые и дробные значения из диапазона $0 \leq d_f \leq \infty$, для функций плотности частотного спектра $g(\omega)$ будем иметь [1,2]

$$g(\omega) = \frac{N^* d_f \omega^{d_f-1}}{\omega_{\max}^{d_f} - \omega_{\min}^{d_f}} \quad \text{для } d_f > 0, \quad (1)$$

и

$$g(\omega) = \frac{N^*}{\omega \ln(\omega_{\max}/\omega_{\min})} \quad \text{для } d_f = 0,$$

где $N^* = 3\mu N - 6$ – число колебательных мод, μ – число атомов в молекуле, N – число молекул; $\omega_{\max}$, $\omega_{\min}$ – значения частот, ограничивающих спектр сверху и снизу соответственно, которым можно поставить в соответствие температуры

$$\theta_H = \frac{\hbar \omega_{\max}}{k_B}, \quad \theta_N = \frac{\hbar \omega_{\min}}{k_B} \quad (\text{здесь } \hbar - \text{постоянная Планка, } k_B - \text{постоянная}$$

Больцмана). В такой обобщённой фрактальной модели, содержащей три параметра θ_H , θ_N , d_f , выражения для температурной зависимости решёточной теплоёмкости имеют вид [1,2]

$$\frac{C(T)}{C_\infty} = \frac{d_f}{(\theta_H/T)^{d_f} - (\theta_N/T)^{d_f}} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{x^{d_f+1} e^x}{(e^x - 1)^2} dx \quad \text{для } d_f > 0, \quad (2)$$

и

$$\frac{C(T)}{C_\infty} = \frac{1}{\ln(\theta_H/\theta_N)} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{x e^x}{(e^x - 1)^2} dx \quad \text{для } d_f = 0,$$

где $x_{\min} = \theta_N/T$, $x_{\max} = \theta_H/T$, C_∞ – значение теплоёмкости, соответствующее закону Дюлонга и Пти.

При этом континуальной модели Дебая соответствует случай, когда $\theta_N = 0$ (модель бесконечного по спектру длин волн кристалла), и $d_f = 3$ (изотропное трёхмерное волновое пространство). При низких температурах $T \ll \theta_H$ показатель d_f размерности частотного (фононного) спектра по величине совпадает с показателем температурной зависимости $C(T)$. Поэтому предельный закон Дебая имеет вид $C(T) = \text{const}(T/\theta_H)^3$. Обычно полагают [3], что этот закон должен иметь место не только для показателя $d_f = 3$, но также и для спектров гетеродинамических структур, когда $1 \leq d_f < 3$. Напомним, что гетеродинамичными обычно считаются плоско-слоистые ($d_f \approx 2$) или линейно-цепочечные ($d_f \approx 1$) структуры, в которых при $T \leq \theta_H$ взаимодействия между атомами (молекулами), находящимися в составе слоёв (цепей) значительно сильнее соответствующих межслоевых (межцепочечных) взаимодействий [3]. Гетеродинамизм имеет место на масштабах нескольких постоянных a решётки и не проявляется при предельно низких $T \ll \theta_H$ температурах, поскольку при этом могут возбуждаться лишь низкочастотные колебания, которым соответствуют длинные волны ($\lambda \gg a$). При этом твёрдое тело в динамическом смысле ведёт себя как трёхмерный изотропный континуум колеблющихся частиц-осцилляторов, и функция распределения (1) для низкочастотной части спектра и температурная зависимость теплоёмкости (2) могут быть представлены формулами дебаевского приближения [3]

$$g(\omega) = \frac{N^* \omega^2}{\omega_{\max}^3} \quad (3)$$

и соответственно

$$\frac{C(T)}{C_\infty} = 3 \left(\frac{T}{\theta_H} \right)^3 \int_0^\infty \frac{x^4 e^x}{(e^x - 1)^2} dx$$

Конечно, в области низких температур $T \rightarrow 0$ помимо колебаний решётки могут быть и другие механизмы, существенно влияющие на ход зависимости $C(T)$. Это электронная теплоёмкость в металлах, наблюдаемый в стёклах линейный вклад в теплоёмкость двухуровневых состояний среды, или вращения молекул в решётке, как, например, у фуллерита C_{60} и др. В дальнейшем предполагается, что вклад таких механизмов в теплоёмкость может быть отделён от колебаний решётки и проанализирован независимо.

1. Параметр θ_N и его влияние на теплоёмкость

Итак, если показатель размерности колебательного спектра вещества находится в интервале значений $1 \leq d_f \leq 3$ и $\theta_N = 0$, то при $T \rightarrow 0$ должен выполняться предельный закон Дебая. Однако, если $\theta_N \neq 0$, то при низких температурах зависимость $C(T)$ имеет вид

$$\frac{C(T)}{C_\infty} = \frac{d_f}{\left(\frac{\theta_H}{T}\right)^{d_f} - \left(\frac{\theta_N}{T}\right)^{d_f}} \int_{\theta_N/T}^{\infty} \frac{x^{d_f+1} e^x}{(e^x - 1)^2} dx \quad (4)$$

При этом интеграл в выражении (4) уже не является числом, как в (3), а функцией температуры. При очень низких температурах $T < \theta_N$, когда в знаменателе подынтегральной функции $\exp x \gg 1$, для целочисленных значений d_f из выражений (2) и (4) для $C(T)$ можно получить следующие оценки

$$d_f = 0$$

$$\frac{C(T)}{C_\infty} \sim \left(\frac{\theta_N}{T}\right) \left[\ln \left(\frac{\theta_H}{\theta_N} \right) \right]^{-1} e^{-\theta_N/T},$$

$$d_f = 1$$

$$\frac{C(T)}{C_\infty} \sim \left(\frac{\theta_N}{T}\right) \left(\frac{\theta_N}{\theta_H}\right) e^{-\theta_N/T},$$

$$d_f = 3$$

$$\frac{C(T)}{C_\infty} \sim \left(\frac{\theta_N}{T}\right) \left(\frac{\theta_N}{\theta_H}\right)^3 e^{-\theta_N/T} = \left(\frac{\theta_N}{T}\right)^4 \left(\frac{T}{\theta_H}\right)^3 e^{-\theta_N/T}$$

Из полученных оценок следует, что даже при $d_f = 3$ предельный закон Дебая не выполняется. Однако, необходимо учесть, что для макрообъектов

отношение $\theta_N/\theta_H \leq 10^{-6} - 10^{-8}$, и области $T \leq \theta_N$ соответствуют значения $T \sim 10^{-4} - 10^{-6} K$, при которых теплоёмкость стремится к нулю. Следовательно, из-за небольшой плотности низкочастотных мод при размерностях $d_f > 1$ и малости содержащейся в них энергии, колебательный спектр можно экстраполировать в область $\omega \rightarrow 0$ ($\theta_N = 0$), т. е. перейти к модели бесконечного по спектру длин волн кристалла, для которой при $1 \leq d_f \leq 3$ должен выполняться предельный закон Дебая. Однако, в случае кластеров и нанообъектов отношение θ_N/θ_H может составлять $\sim 10^{-1}$, а величина $\theta_N \geq 1 - 50 K$.

Так, например, расчёты *ab initio* частот колебаний кластеров воды показали [4], что для димера $(H_2O)_2 \rightarrow \theta_N/\theta_H \approx 0.3$, для $(H_2O)_{10} \rightarrow \theta_N/\theta_H \approx 5 \cdot 10^{-2}$, для $(H_2O)_{21} \rightarrow \theta_N/\theta_H \approx 2 \cdot 10^{-2}$. Из проведённых нами аналогичных расчётов для кластеров метана следует, что для тримера $(CH_4)_3 \rightarrow \theta_N/\theta_H \approx 0.23$, для $(CH_4)_{10} \rightarrow \theta_N/\theta_H \approx 6 \cdot 10^{-2}$ и т. д.

Таким образом, существенных отклонений в поведении температурной зависимости теплоёмкости от предельного закона Дебая следует ожидать в кластерах и наночастицах, а также в материалах со структурой колебательных спектров, размерность которых находится вне интервала значений $1 \leq d_f \leq 3$.

На рис. 1 представлена кривая (1) низкотемпературной зависимости теплоёмкости $C(T)$ с различными значениями θ_H , для семейства тел, соответствующая предельному закону Дебая (3), и отличающаяся от неё кривая 2, полученная из формулы (4) с учётом обрезания частотного спектра при значении $\theta_N/\theta_H = 0.1$. Явное отличие кривой 2 от закона Дебая (прямая 1) наглядно иллюстрируется в координатах $\frac{C(T)}{C_\infty} / T^3$, на вставке В.

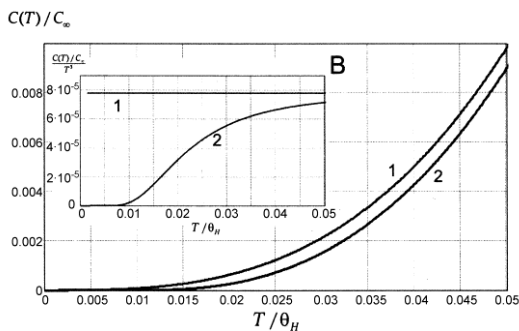


Рис. 1. Иллюстрация влияния параметра θ_N на отклонение от предельного закона

Дебая. Кривая 1 (и прямая 1 на вставке В): $d_f = 3$, $\theta_N/\theta_H = 0$; кривые 2:

$$d_f = 3, \theta_N/\theta_H = 0.1$$

2. Параметр d_f и его влияние на теплоёмкость

Отклонения от закона Дебая возникают также для веществ с колебательными спектрами, имеющими размерность $d_f < 1$. Из-за доминирования в таких спектрах низких частот вещества изначально являются гомодинамичными. Подобными спектрами обладают, например, молекулярные кластеры воды, для которых температура $\theta_N \approx 30 - 50 \text{ K}$ и $d_f \approx 0.3 - 0.5$ [1].

На рис. 2 показаны температурные зависимости теплоёмкости пяти аллотропных модификаций кластеров воды $(\text{H}_2\text{O})_{16}$ (кривые 1-5) с $\theta_H = 1520 - 1560 \text{ K}$, $\theta_N = 40 - 51 \text{ K}$, $d_f \approx 0.45 - 0.48$ и кластера воды $(\text{H}_2\text{O})_{15}$ (кривая 6) с $\theta_H = 1510 \text{ K}$, $\theta_N = 55 \text{ K}$ (данные работы [1]), рассчитанные по соотношениям (2), а также зависимость $C(T)$, соответствующая закону Дебая (3) для $\theta_H = 1500 \text{ K}$, $\theta_N = 0$ (кривая 7). Кажущееся совпадение кривых при $T < 2 \text{ K}$ вызвано малостью всех исследуемых функций в этой области и легко устраняется растяжением масштаба.

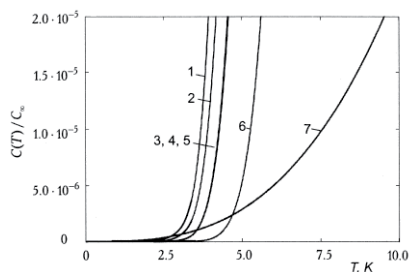


Рис. 2. Теплоёмкость $C(T)$ изомеров кластеров $(\text{H}_2\text{O})_{16}$ (кривые 1-5), кластера $(\text{H}_2\text{O})_{15}$ (кривая 6) и предельный закон Дебая (кривая 7)

Отклонения от закона Дебая имеют место и для ряда веществ более сложного химического состава, например, алкилрезорцинов – биологически активных соединений, обладающих антиоксидантной и антибактериальной активностью [5], которые представляют собой бесцветные кристаллы с температурой плавления $T_m \approx 380\text{K}$. К семейству алкилрезорцинов относится и 5-метилрезорцин с брутто формулой $\text{C}_7\text{H}_6(\text{OH})_2$, структурные формы мономера, димера и гексамера которого показаны на рис. 3. Для указанных структур были проведены ab initio расчёты колебательных частот по методу Хартри-Фока [6] с использованием универсального пакета квантово-химических программ FIREFLY (ранее PC GAMESS) [7] и наборами базисных функций 6-311 G(d,p), 6-31 G(d). Построенная на основе этих расчётов гистограмма колебательного спектра гексамера 5-метилрезорцина ($\mu = 17$, $N = 6$) приведена на рис. 4 (см. вставку). Её отличительной особенностью является смыкание межмолекулярной части спектра, представленной $N^* = 6N - 6 = 30$ колебаниями, с внутримолекулярной (граница отмечена стрелкой с символом A). На рисунке также показаны отдельно вклады в температурную зависимость $C(T)$ теплоёмкости 5-метилрезорцина: от части спектра с $N^* = 30$ межмолекулярных колебаний, их суммы с примыкающей частью внутримолекулярных колебаний ($N^* = 252$) и от общего числа $N^* = 300$ нормальных колебаний. Расчёт $C(T)$ проводился по соотношению Эйнштейна

$$C(T) = k_B \sum_{i=1}^{N^*} \frac{(\theta_i/T)^2 e^{\theta_i/T}}{(e^{\theta_i/T} - 1)^2}, \quad (5)$$

где $\theta_i = \hbar \omega_i / k_B$. Здесь же указано положение точки T_m плавления кристаллической фазы 5-метилрезорцина (для кластеров следует ожидать более низких значений, но они пока не известны).

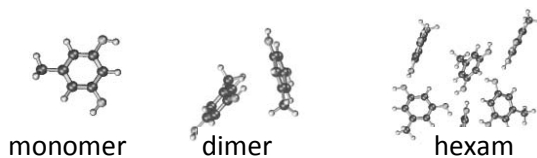


Рис. 3. Пространственные структуры мономера и некоторых кластеров 5-метилрезорцина

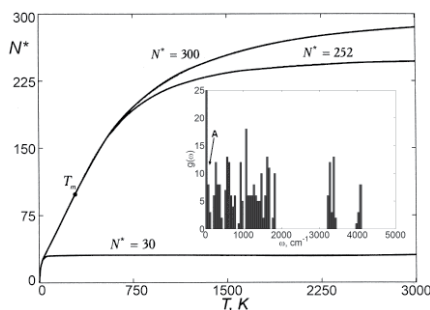


Рис. 4. Температурная зависимость теплоёмкости 5-метилрезорцина для разного числа N^* нормальных колебаний и его колебательный спектр (на вставке), полученный из *ab initio* расчётов.

Из *ab initio* данных для нижней и верхней границы акустической части спектра рассматриваемого кластера получены значения $\theta_N = 2.2K$, $\theta_H = 95K$ и размерность $d_f \approx 0.7$ (определённая способом, описанным в работе [1]).

По этим данным и соотношениям (2) можно построить зависимость $C(T)$ и сравнить её с моделью (5), рассматривая последнюю как «точную». На рис. 5 приведено это сравнение (кривая 1 – модель (5), кривая 2 – модель (2)). Некоторые различия в результатах возможно связаны с нарушением условия $N^* \gg (\theta_H/T)^{d_f}$ непрерывности для акустической части рассматриваемого спектра при температурах $T \approx 1K$.

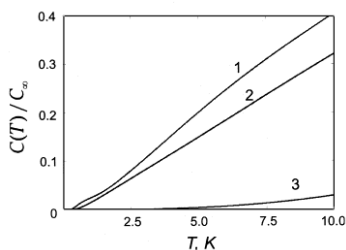


Рис. 5. Температурная зависимость $C(T)$ для гексамера 5-метилрезорцина. Кривая 1 – модель (5); кривая 2 – модель (2); кривая 3 – предельный закон Дебая.

Однако, независимо от результатов сравнения расчётных моделей (5) и (2), ясно одно – функция изменения низкотемпературной теплоёмкости гексамера – 5-метилрезорцина (можно было взять и другой кластер) не следует предельному закону Дебая (кривая 3 на рис. 5 для $\theta_H = 90\text{K}$, $d_f = 3$).

Рассмотрим далее объекты с размерностями колебательного спектра $d_f > 3$, о которых из литературы мало что известно. Так, в работе [8] указывается на принципиальную возможность существования кристаллических структур с размерностью спектров в диапазоне $3 < d_f \leq 4$, но конкретных примеров таких веществ не приводится. Обработка экспериментальных данных из [9] по низкотемпературной теплоемкости одной из разновидностей алмаза с использованием фрактальной модели (1), (2) показала, что лучшее соответствие с экспериментом даёт зависимость $C(T) \sim T^{3.3}$, а не закон (3) [10,2]. Другим примером является температурная зависимость теплоёмкости C_{60} -фуллерита. На рис. 6 в линейных координатах представлен отмеченный звёздочками низкотемпературный ($0.1 \leq T \leq 10\text{K}$) фрагмент экспериментальной зависимости $C(T)$ для C_{60} с примесью 15% C_{70} , полученной в работе [11]. На вставке *b* к рис. 6 в логарифмических координатах приведены соответствующие зависимости $C(T)$ для фуллерита, графита и алмаза [11] с отмеченными углами α_1 , α_2 , α_3 наклона касательных к $C(T)$ в области максимальной крутизны. В этих координатах при низких температурах ($T \ll \theta_H$) величина d_f определяется тангенсом угла наклона к кривой зависимости $C(T)$ в каждой температурной точке. Из представленных экспериментальных данных видно, что для фуллерита в интервале $T \approx 1 - 2\text{K}$

зависимость $C(T)$ более крутая, чем у алмаза, теплоёмкость которого следует предельному закону Дебая. Сравнение экспериментальных данных из [11] для фуллерита и их обработки по модели (2) с помощью нелинейного метода наименьших квадратов (МНК) с независимой вариацией параметров d_f и θ_H при $\theta_N = 0K$ показали (см. рис. 6 вставка *a*), что максимальное значение $d_f \approx 4.5$ достигается при $T \approx 2K$, а условия выполнения предельного закона Дебая ($d_f = 3$) выполняются только в окрестности двух температурных точек $T_1 \approx 1K$ и $T_2 \approx 3K$. Утверждение о том, что в фуллерите C_{60} область выполнения зависимости $C(T) \sim T^3$ действительно очень малая $\sim 1K$ было высказано в работе [12]. Там же для этой области дано уточнённое значение дебаевской температуры $\theta_H \approx 77K$, которое соответствует и нашим данным.

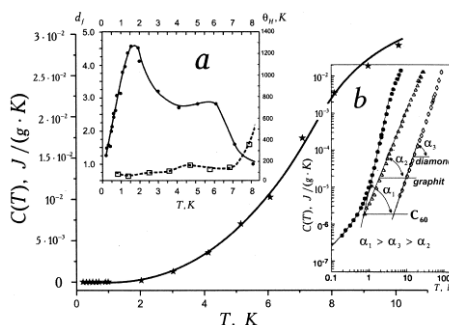


Рис. 6. Экспериментальная зависимость $C(T)$ в линейных координатах для фуллерита C_{60} по данным работы [11]. Сплошная кривая расчет по модели (2). На вставках: *a* – зависимости параметров $d_f(T)$ (верхняя кривая) и $\theta_H(T)$ (нижняя кривая); *b* – данные $C(T)$ работы [11] в логарифмических координатах.

Заключение

Для расчета теплоемкости твердых тел использована континуальная модель вещества существенно расширяющая границы применимости приближения Дебая.

Модель содержит три параметра: две характеристические температуры θ_N и θ_H , соответствующие минимальной $\omega_{\min}$ и максимальной $\omega_{\max}$ частоте

колебательного спектра вещества, и показатель d_f его пространственной размерности, с интервалом изменения $0 \leq d_f < \infty$. При этом предельный закон Дебая выполняется для макроструктур, если величина d_f находится в интервале значений $1 \leq d_f \leq 3$, к которому относятся колебательные спектры большинства известных к настоящему времени твердых тел. Отклонений от предельного закона Дебая следует ожидать в случае, когда $\theta_N \neq 0$, что существенно при исследованиях кластеров и наноструктур, в также в веществах, имеющих колебательные спектры с показателями размерности $d_f < 1$ (включая и окрестность значений $d_f \approx 0$). Отклонения имеют место также в структурах, имеющих участки температурного изменения теплоемкости с показателями размерности спектра $d_f > 3$, но таких веществ пока обнаружено немного.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (12-04-31915) и Министерства образования и науки Российской Федерации.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Кузнецов В.М., Хромов В.И. О существовании макро и наноструктур с фоновыми спектрами малой фрактальной размерности. // ПЖТФ. 2012. Т. 38. № 11. С. 11–18.
2. Байков Ю.А., Кузнецов В.М. Физика конденсированного состояния. М.: Бином. Лаборатория знаний, 2011. 293 с.
3. Тарасов В.В. Проблемы физики стекла. М.: Стройиздат, 1979. 256 с.
4. Wang Y., Huang X., Shepler B., Braams B.C. and Bowman J.M. Flexible, ab initio potential, and dipole moment surfaces for water. I. Tests and applications for clusters up to the 22-mer // J. Chem. Phys. 2011. Т. 134. С. 94.
5. Kozubek A., Tyman J.H.P. Resorcinolic Lipids, The Natural Non-isoprenoic Amphiphiles and Their Biological Activity. // Chem. Rev. 1999. Т. 99. № 1. С. 1-26.
6. Байков Ю.А., Кузнецов В.М. Квантовая механика. М.: Бином. Лаборатория знаний, 2013. 296 с.
7. Granovsky A.A., Firefly version 7.1.G, 7.02.15. [электронный ресурс]. URL: <http://classic.chem.msu.su/gran/firefly/index.html>
8. Изотов А.Д., Шебершнев О.В., Гавричев К.С. Фрактальная модель низко - температурной теплоемкости твердых тел // Тезисы Всероссийской конференции по термическому анализу и калориметрии. Казань. 1996. С. 200.

9. Вундерлих Б., Бауэр Г. Теплоёмкость линейных полимеров. М.: Мир, 1972. 104 с.
10. Кузнецов В.М., Хромов В.И. Фрактальное представление теории Дебая для исследования теплоемкости макро- и наноструктур. // ЖТФ. 2008. Т. 78. № 11. С. 11–18.
11. Olson J.R., Topp K.A., Pohl R.O. Specific Heat and Thermal Conductivity of Solid Fullerenes // Science. 1993. Т. 259. С. 1145–1148.
12. Михальченко В.П. Об эффективных величинах температур Дебая фуллерита C_{60} . // ФТТ. 2010. Т. 52. С. 1444–1452.
13. Kuznetsov V.M., Tereshkina K.B. Debye Limiting Law Violation in Clusters and Nanostructures. // Proceedings of the International Conference Nanomaterials: Applications and Properties. 2013. V.2. N. 1. P. 51.

УДК 533.72

Кузьмин М.К.

Московский государственный областной университет

АНАЛИЗ ФОРМУЛ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ВРЕМЕНИ ПОЛНОГО ИСПАРЕНИЯ ОДИНОЧНЫХ КАПЕЛЬ ВОДЫ

Аннотация: найдены формулы для вычисления времени полного испарения аэрозольных капель интегрированием уравнений, полученных по начальному и конечному предельным значениям скорости изменения радиуса аэрозольной капли. Проведен численный анализ этих формул рассмотрением процесса нестационарного испарения одиночных капель воды в воздушную среду. Указаны возможности упрощения найденных формул в зависимости от начальных размеров испаряющихся капель воды. Ключевые слова: нестационарный процесс испарения, аэрозольные капли, время полного испарения, одиночные капли воды.

M. Kuzmin

Moscow State Regional University (Moscow, Russia)

ANALYSIS OF THE FORMULAS FOR CALCULATING THE TIME OF COMPLETE EVAPORATION OF SINGLE DROPLETS OF WATER

Abstract. Formulas for calculating the time of complete evaporation of aerosol droplets by integrating the equations obtained for the initial and final limits the rate of change of the radius of the aerosol droplets. The numerical analysis of these formulas by considering the process of unsteady evaporation of single droplets of water into the air. Lists features found simplify formulas depending on the initial size of the evaporating water droplets.

Key words: nonstationary evaporation process, aerosol droplets, the time for complete evaporation, single droplets of water.

В статье [1] рассматривалась модель нестационарного процесса испарения аэрозольной капли с учетом следующих факторов: теплоты фазового перехода вещества капли, коэффициентов испарения и поверхностного натяжения.

Характеристикой рассматриваемого процесса может служить скорость нестационарного изменения радиуса капли. В упомянутой статье получено следующее выражение для скорости изменения радиуса капли

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^{(\sigma)} = \frac{\varepsilon D n m_1 \kappa}{\rho_i R^2} \left[\frac{1}{g_2} + \frac{1}{\sqrt{Da}} \sum_{j=1}^2 C(\beta_j) \varphi(\beta_j, t) \right], \quad (1)$$

Важно подчеркнуть, что в этой формуле (1) переменная t — время может принимать значения от 0 до $+\infty$, то есть эта формула справедлива для всех значений времени.

Отметим, что символом (σ) в формуле (1) отмечен факт учета поверхностного натяжения поверхности капли. Учет этого фактора приобретает особое значение с уменьшением радиуса (или то же самое с увеличением кривизны поверхности) сферической капли. Укажем и другие принятые в статье обозначения:

$$C(\beta_j) = \frac{R^2 \beta_j^2 - R(\sqrt{D} + \sqrt{a}) \beta_j + \sqrt{Da}}{g_0 \beta_j^2 - g_2}, \quad \varphi(\beta_j, t) = \exp(\beta_j^2 t) \operatorname{erfc}(\beta_j \sqrt{t}),$$

далее: $D = nm_2 D_{12} / \rho_e$, где D_{12} — коэффициент взаимной диффузии компонентов бинарной смеси; $n = n_1 + n_2$; n_1, m_1 и n_2, m_2 — концентрация и масса молекул первого и второго компонентов соответственно, ρ_e — плотность парогазовой смеси; a — коэффициент температуропроводности бинарной смеси. В формулу (1) также входят: q — удельная теплота фазового перехода вещества капли, κ — коэффициент теплопроводности парогазовой смеси, α — коэффициент испарения, $v = \sqrt{kT_0 / 2\pi m_1}$ — одна четвертая средней абсолютной тепловой скорости молекул пара, причем $T(r, t)|_{r=0} = T_0$, $T(r, t)|_{r \rightarrow \infty} = T_\infty = T_0$, k — постоянная Больцмана. Кроме того использованы обозначения:

$$k_\sigma = \frac{2m_1 \sigma}{kT_0 \rho_i}, \quad k_q = \frac{qm_1 - kT_0}{kT_0^2},$$

в которые входят: ρ_i — плотность вещества капли, σ — коэффициент поверхностного натяжения, $\varepsilon = \alpha v (c_{10} - c_{1s0})$, $\kappa_{q\sigma} = c_{1s0} k_q \gamma$, где $c_1(r, t)|_{t=0} = c_{10}$, $c_1(r, t)|_{r \rightarrow \infty} = c_{1\infty} = c_{10}$, $c_{1s0} = \bar{c}_{1s0} \left(1 + \frac{k_\sigma}{R}\right)$ (черта над буквой указывает на концентрацию насыщенных паров вещества капли), $\gamma = Dm_1 n q$.

Наконец, последняя группа обозначений:

$$\begin{aligned}\delta &= g_0 p + g_1 \sqrt{p} + g_2, \quad g_0 = \kappa \sqrt{D/a}, \\ g_1 &= \alpha v (\kappa \sqrt{D} + \kappa_{q\sigma} \sqrt{a}) / \sqrt{Da} + g_0 (\sqrt{D} + \sqrt{a}) / R, \\ g_2 &= [D\kappa + \alpha v R (\kappa + \kappa_{q\sigma})] / R^2, \\ \delta &= g_0 (\sqrt{p} + \beta_1) (\sqrt{p} + \beta_2).\end{aligned}$$

Недостатком полученной формулы (1) является ее громоздкость для проведения численных расчетов. Поэтому представляет интерес рассмотрение асимптотических приближений выражения (1) при больших и малых значениях времени t , которые намного проще этого выражения.

Преобразуем выражение правой части равенства (1) к виду

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^{(\sigma)} = \frac{\varepsilon n m_1}{\rho_i} \left[\frac{D\kappa}{D\kappa + \alpha v R (\kappa + \kappa_{q\sigma})} - \frac{g_0}{\sqrt{D\delta}} \sum_{j=1}^2 (-1)^j \left(\beta_j - \frac{\sqrt{D} + \sqrt{a}}{R} + \frac{\sqrt{Da}}{R^2 \beta_j} \right) \varphi(\beta_j, t) \right] \quad (2)$$

Так как $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi(\beta_j, t) = 1$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(\beta_j, t) = 0$, то, обозначив

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{dR}{dt}\right)^{(\sigma)} = \left(\frac{dR}{dt}\right)_0^{(\sigma)}, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{dR}{dt}\right)^{(\sigma)} = \left(\frac{dR}{dt}\right)_\infty^{(\sigma)},$$

по формуле (2) получаем равенства

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)_0^{(\sigma)} = \frac{\varepsilon n m_1}{\rho_i}, \quad (3)$$

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)_\infty^{(\sigma)} = \frac{\varepsilon n m_1}{\rho_i} \cdot \frac{D\kappa}{D\kappa + \alpha v R (\kappa + \kappa_{q\sigma})}, \quad (4)$$

правые части, которых определяют соответственно начальное и конечное (предельные) значения скорости изменения радиуса аэрозольной капли.

Полученные равенства будем рассматривать как обыкновенные дифференциальные уравнения, в которых радиус капли $R = R(t)$, зависящий от времени, выступает в качестве искомой функции. Отметим, что правые части обоих уравнений (3) и (4) зависят от функции $R(t)$.

Проинтегрируем дифференциальные уравнения (3) и (4) при выполнении начального условия

$$R(t)|_{t=0} = R_0.$$

Получаем соответственно:

$$R_0 - R + \frac{k_\sigma}{b} \ln \left| \frac{bR + k_\sigma}{bR_0 + k_\sigma} \right| = a_1 b t, \quad (5)$$

$$\frac{R_0^2 - R^2}{2} + \frac{1}{\kappa_0} \left(\frac{D\kappa}{\alpha\nu} - \frac{\kappa_0 k_\sigma}{b} \right) \left(R_0 - R + \frac{k_\sigma}{b} \ln \left| \frac{bR + k_\sigma}{bR_0 + k_\sigma} \right| \right) = a_2 t, \quad (6)$$

где

$$a_1 = \frac{\alpha\nu n m_1 \overline{c_{1s0}}}{\rho_i}, \quad a_2 = \frac{D\kappa n m_1 (\overline{c_{1s0}} - c_{10})}{\rho_i \kappa_0}, \quad b = 1 - \frac{c_{10}}{c_{1s0}},$$

$$\overline{\kappa_0} = \kappa + \kappa_q \gamma c_{1s0}, \quad \kappa_0 = \kappa + \kappa_q \gamma c_{10}.$$

Из соотношений (5) и (6) найдем формулы для вычисления времени полного испарения аэрозольных капель. Они будут соответствовать уравнениям (3) и (4), полученным по начальному и конечному (предельным) значениям скорости изменения радиуса аэрозольной капли. Отразим это в обозначениях:

$$(t_{n.исп.})_0^{(\sigma)} = \frac{\rho_i \left(R_0 + \frac{k_\sigma}{b} \ln \left| \frac{k_\sigma}{bR_0 + k_\sigma} \right| \right)}{\alpha\nu n m_1 (\overline{c_{1s0}} - c_{10})}, \quad (7)$$

$$(t_{n.исп.})_\infty^{(\sigma)} = \frac{\rho_i}{D\kappa n m_1 (\overline{c_{1s0}} - c_{10})} \left[\frac{\overline{\kappa_0} R_0^2}{2} + \left(\frac{D\kappa}{\alpha\nu} - \frac{\kappa_0 k_\sigma}{b} \right) \left(R_0 + \frac{k_\sigma}{b} \ln \left| \frac{k_\sigma}{bR_0 + k_\sigma} \right| \right) \right] \quad (8)$$

Для анализа полученных формул (7), (8) будем рассматривать процесс нестационарного испарения ($b > 0$) одиночных капель воды в воздушную среду 50 % влажности при двух значениях температуры 293 K, 323 K, когда давление среды $P = 0,1$ МПа. При этом, основываясь на данных, приведенных в книге [2] для коэффициента испарения воды, полагаем, что $\alpha = 0,034$ при $T = 293$ K и $\alpha = 0,026$ при $T = 323$ K. Для всех других физических величин используем значения, приведенные в справочнике [3].

Формула (8) такова, что она позволяет вычислять время полного испарения аэрозольной капли с учетом достаточно большого числа факторов, влияющих на этот процесс. В частности, отметим, что выражение (7) не содержит коэффициента диффузии. Будем считать формулу (8) основной.

Поскольку эта формула не очень проста для проведения вычислений, будем искать возможности ее упрощения в зависимости от начальных размеров испаряющихся капель.

При вычислении времени полного испарения достаточно крупных водяных капель, начальные радиусы которых $R_0 \geq 10^{-6} \text{ м}$ в формуле (8) можно отбрасывать выражения, содержащие k_σ . В этом убеждает нас таблица 1 численных результатов.

Таблица 1.

T, K	$\frac{D\kappa}{\alpha\nu} \cdot 10^7$	$\frac{\kappa_0 k_\sigma}{b}$	$R_0, \text{ м}$	$-\frac{k_\sigma}{b} \ln \left \frac{k_\sigma}{bR_0 + k_\sigma} \right $
293	1,3023	0,0012	10^{-5}	$0,0018 \cdot 10^{-5}$
			10^{-6}	$0,0133 \cdot 10^{-6}$
			10^{-7}	$0,0833 \cdot 10^{-7}$
			10^{-8}	$0,3734 \cdot 10^{-8}$
323	1,2104	0,0032	10^{-5}	$0,0016 \cdot 10^{-5}$
			10^{-6}	$0,0116 \cdot 10^{-6}$
			10^{-7}	$0,0739 \cdot 10^{-7}$
			10^{-8}	$0,3428 \cdot 10^{-8}$

Таким образом, для вычисления времени полного испарения достаточно крупных капель воды, начальные радиусы которых $R_0 \geq 10^{-6} \text{ м}$ приемлема формула

$$\left(t_{\text{н. исп.}}\right)_\infty^{(0)} = \frac{\rho_l R_0}{nm_1(\overline{c_{1s0}} - c_{10})} \left(\frac{\overline{\kappa_0 R_0}}{2D\kappa} + \frac{1}{\alpha\nu} \right). \quad (9)$$

Для подтверждения сказанного приведем еще таблицу 2 численных значений (время указано в секундах).

Таблица 2.

T, K	293		323	
$R_0, м$	$(t_{n.исп.})_{\infty}^{(\sigma)}$	$(t_{n.исп.})_{\infty}^{(0)}$	$(t_{n.исп.})_{\infty}^{(\sigma)}$	$(t_{n.исп.})_{\infty}^{(0)}$
10^{-6}	$0,3067 \cdot 10^{-1}$	$0,3100 \cdot 10^{-1}$	$0,1011 \cdot 10^{-1}$	$0,1019 \cdot 10^{-1}$
10^{-5}	1,0181	1,0186	0,4828	0,4830

Из численных значений последней строки таблицы 2 видно, что вычисленные по разным формулам (8) и (9) значения времени полного испарения капль воды при $R_0 = 10^{-5} м$ отличаются лишь на весьма малые величины, хотя формула (9) значительно проще основной формулы (8).

Обратим внимание на слагаемые, расположенные в последних скобках выражения (9). Первое слагаемое $\frac{\overline{\kappa_0 R_0}}{2D\kappa}$, в частности, зависит от коэффициента диффузии, а второе определяется величиной, характеризующей поток первого компонента, отводимый через слой Кнудсена с поверхности капли.

Соотношение вкладов этих слагаемых в общее время полного испарения капли может быть разным в зависимости от начального размера рассматриваемой капли, ибо первое слагаемое зависит от радиуса капли, а второе нет. Для оценки этого соотношения приведем численные значения

выражений $\frac{\overline{\kappa_0}}{2D\kappa}, \frac{1}{\alpha\nu}$:

$$\frac{\overline{\kappa_0}}{2D\kappa|_{T=293 K}} = 0,6840 \cdot 10^5, \quad \frac{\overline{\kappa_0}}{2D\kappa|_{T=323 K}} = 1,7784 \cdot 10^5; \quad (10)$$

$$\frac{1}{\alpha\nu|_{T=293 K}} = 0,2008, \quad \frac{1}{\alpha\nu|_{T=323 K}} = 0,2501. \quad (11)$$

Формула (8) связана формулой (7) соотношением

$$(t_{n.исп.})_{\infty}^{(\sigma)} = \left(1 - \frac{\alpha\nu\kappa_0 k_{\sigma}}{bD\kappa}\right) (t_{n.исп.})_0^{(\sigma)} + \frac{\rho_i \overline{\kappa_0} R_0^2}{2D\kappa n m_1 (c_{1s0} - c_{10})}.$$

Вычисления показывают, что значения выражения $\frac{\alpha\nu\kappa_0 k_{\sigma}}{bD\kappa}$ намного меньше единицы:

$$\frac{\alpha \nu \kappa_0 k_\sigma}{b D \kappa} \Big|_{T=293 K} = 0,00095, \quad \frac{\alpha \nu \kappa_0 k_\sigma}{b D \kappa} \Big|_{T=323 K} = 0,00143.$$

Поэтому можно положить

$$\left(t_{n.исп.}\right)_\infty^{(\sigma)} \approx \left(t_{n.исп.}\right)_0^{(\sigma)} + \frac{\overline{\rho_i \kappa_0 R_0^2}}{2 D \kappa n m_1 (\overline{c_{1s0}} - c_{10})}.$$

Используя выражение (7) приходим к соотношению

$$\left(t_{n.исп.}\right)_\infty^{(\sigma)} \approx \frac{\overline{\rho_i R_0}}{n m_1 (\overline{c_{1s0}} - c_{10})} \left(\frac{1}{\alpha \nu} + \frac{\overline{\kappa_0 R_0}}{2 D \kappa} \right) + \frac{\overline{\rho_i k_\sigma} \ln \left| \frac{k_\sigma}{b R_0 + k_\sigma} \right|}{\alpha \nu n m_1 (\overline{c_{1s0}} - c_{10})}.$$

Численные значения (10). (11) позволяют убедиться в том, что для достаточно мелких капель воды, начальные радиусы которых $R_0 \leq 10^{-7} \text{ м}$ справедливо соотношение $\frac{\overline{\kappa_0 R_0}}{2 D \kappa} \ll \frac{1}{\alpha \nu}$. Поэтому при $R_0 \leq 10^{-7} \text{ м}$ можно положить

$$\left(t_{n.исп.}\right)_\infty^{(\sigma)} \approx \frac{\overline{\rho_i} \left(R_0 + \frac{k_\sigma}{b} \ln \left| \frac{k_\sigma}{b R_0 + k_\sigma} \right| \right)}{\alpha \nu n m_1 (\overline{c_{1s0}} - c_{10})},$$

то есть

$$\left(t_{n.исп.}\right)_\infty^{(\sigma)} \approx \left(t_{n.исп.}\right)_0^{(\sigma)}.$$

Итак, показали, что для вычисления времени полного испарения достаточно мелких капель воды, начальные радиусы которых $R_0 \leq 10^{-7} \text{ м}$, приемлема формула (7). Подтверждением сказанному служит следующая таблица значений времени полного испарения капель (время указано в секундах).

Таблица 3.

T, K	293		323	
$R_0, \text{ м}$	$\left(t_{n.исп.}\right)_\infty^{(\sigma)}$	$\left(t_{n.исп.}\right)_0^{(\sigma)}$	$\left(t_{n.исп.}\right)_\infty^{(\sigma)}$	$\left(t_{n.исп.}\right)_0^{(\sigma)}$
10^{-7}	0,2196 $\cdot 10^{-2}$	0,2120 $\cdot 10^{-2}$	0,5929 $\cdot 10^{-3}$	0,5514 $\cdot 10^{-3}$
10^{-8}	0,1455 $\cdot 10^{-3}$	0,1449 $\cdot 10^{-3}$	0,3949 $\cdot 10^{-4}$	0,3913 $\cdot 10^{-4}$

Из численных значений последней строки таблицы 3 видно, что вычисленные по разным формулам (8) и (7) значения времени полного испарения капль воды при $R_0 = 10^{-8} \text{ м}$ отличаются лишь на весьма малые величины.

Таким образом, выяснили, что при вычислении времени полного испарения капль воды в воздушную среду (при температуре от 293 K до 323 K) вместо основной формулы (8) для капль достаточно больших размеров, начальные радиусы которых $R_0 \geq 10^{-6} \text{ м}$, можно использовать формулу (9), а для капль, начальные радиусы которых $R_0 \leq 10^{-7} \text{ м}$, приемлема формула (7).

ЛИТЕРАТУРА:

1. Кузьмин М.К. Теория нестационарного процесса испарения сферической аэрозольной капли с учетом зависимости давления насыщенного пара от кривизны поверхности. //Вестник Московского государственного университета. Серия: Физика – математика, 2012. № 3. С. 39 – 49.
2. Амелин А.Г. Теоретические основы образования тумана при конденсации пара. М.: Химия, 1972. 304 с.
3. Варгафтик Н.Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. М.: Наука, 1972. 720 с.

УДК 539.2

Трегулов В.В.

Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина

ОСОБЕННОСТИ СТРУКТУРЫ ПЛЕНОК ПОРИСТОГО КРЕМНИЯ С РАЗВИТОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Аннотация. Представлены результаты исследования структуры пленки пористого кремния, сформированной методом электрохимического травления на поверхности текстурированной кремниевой монокристаллической подложки. Установлено, что обработка пленки пористого кремния в водном растворе HF способствует формированию развитой поверхности. Исследуемая пленка состоит из слоев, различающихся размерами кремниевых кристаллитов и химическим составом.

Ключевые слова: пористый кремний, поверхность, комбинационное рассеяние света, фотолюминесценция.

V. Tregulov

S.A. Esenin Ryazan state University (Ryazan, Russia)

FEATURES OF THE STRUCTURE OF POROUS SILICON FILMS WITH DEVELOPED SURFACE

Abstract. The research results of the structure of the porous silicon film, formed by electrochemical etching method on the textured surface of the monocrystalline silicon substrate are presented. It has been established that, treatment of the porous silicon film in an aqueous solution of HF, promotes formation of developed surface. The investigated film consists of layers with different silicon crystallite size and chemical composition.

Key words: porous silicon, surface, The Raman scattering of light, photoluminescence.

В настоящее время пористый кремний (por-Si) является перспективным материалом современной электроники. В ряде случаев желательно иметь пленки por-Si с развитой поверхностью (поверхность с большой удельной площадью). В частности, это важно при изготовлении химических датчиков и фотоэлектрических преобразователей солнечной энергии.

Целью данной работы являлось исследование структуры пленки por-Si, изготовленной электрохимическим способом с последующим химическим травлением в водном растворе HF для формирования развитой поверхности.

Исследования проводились методами оптической микроскопии, спектроскопии комбинационного рассеяния света (КРС) и фотолюминесценции (ФЛ).

В качестве подложки для роста пленки por-Si использовались монокристаллические кремниевые пластины p -типа проводимости с ориентацией поверхности (100) и удельным сопротивлением 1 Ом·см. Подложки имели текстурированную поверхность, которая формировалась травлением в водном растворе КОН при температуре 90°C в течение 10 минут.

Пленки por-Si выращивались методом анодного электрохимического травления в гальваностатическом режиме в электролите, состоящем из концентрированных HF и $\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$ (соотношение компонентов 1:1), при плотности тока 18 мА/см² в течение 60 минут. В ходе роста пленки por-Si поверхность кремниевой пластины освещалась галогенной лампой.

Затем проводилось химическое травление образцов в водном растворе HF (20 %) в течение 30 секунд для удаления с поверхности рыхлого аморфизированного слоя. В заключение образцы промывались в дистиллированной воде для удаления HF и высушивались на воздухе.

На рис. 1 представлены изображения типичного фрагмента поверхности пленки por-Si , полученные с помощью оптического микроскопа «Olympus BH2-UMA» при разных увеличениях. Из представленных изображений видно, что электрохимическое травление с последующей обработкой в водном растворе HF приводит к формированию пленки por-Si с развитой поверхностью (рис.1).

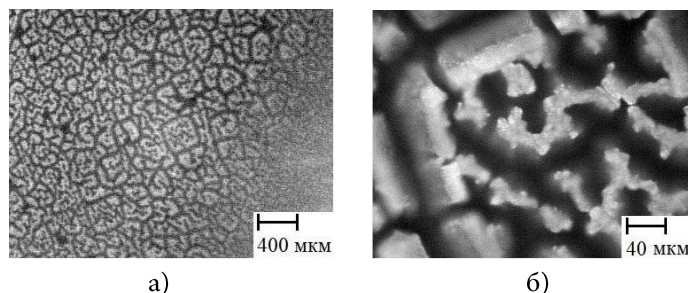


Рис. 1. Изображение типичного фрагмента поверхности пленки por-Si при разных увеличениях.

Толщина пленки por-Si измерялась с помощью микроскопа на поперечном сколе образца и составила 60 ± 7 мкм в разных областях. Столь значительный разброс объясняется неоднородным рельефом текстурированной подложки, в результате чего на разных участках ее поверхности условия формирования пленки por-Si отличаются.

Возбуждение КРС и ФЛ производилось излучением аргонового лазера на длине волны 488 нм. Регистрация спектров КРС и ФЛ производилась спектрометром «U-1000 (Jobin Ivon)», оборудованным микрофотометрической приставкой, что позволило производить измерения при диаметре лазерного пятна 4 мкм на поверхности поперечного скола образца. Измерения проводились в двух точках поперечного скола пленки por-Si , расстояние между которыми составляло 20 мкм. Точка «1» находилась в поперечном сечении поверхностного слоя пленки por-Si , имеющего развитую поверхность. Точка «2» – в поперечном сечении внутреннего слоя пленки por-Si . Спектры КРС внутреннего и поверхностного слоев пленки por-Si , измеренные в диапазоне частот $400 - 600 \text{ см}^{-1}$, представлены на рис. 2.

Наибольшую интенсивность имеет линия КРС первого порядка por-Si , находящаяся вблизи частоты 520 см^{-1} (рис. 2). Она обусловлена рассеянием света на LO-фононах и определяется химической связью между атомами кремния [1].

Спектральная полоса в области 480 см^{-1} характерна для фазы аморфного кремния, она определяется формированием связей Si-O-SiR или Si-SiR , где R-радикалы H_n , OH [1].

Для определения размеров кремниевых кристаллитов в слоях исследуемой пленки por-Si проводилось моделирование спектральной линии КРС первого порядка вблизи частоты 520 см^{-1} по методике, описанной в [2]. Результаты моделирования показаны на рис. 2 пунктирной линией. Расхождение между экспериментальной кривой и результатом моделирования для внутреннего слоя por-Si в области нижних частот объясняется наложением линии 480 см^{-1} . В результате моделирования установлено, что для поверхностного слоя por-Si средний диаметр кремниевых кристаллитов составляет 5,5 нм, для внутреннего слоя – 2,8 нм.

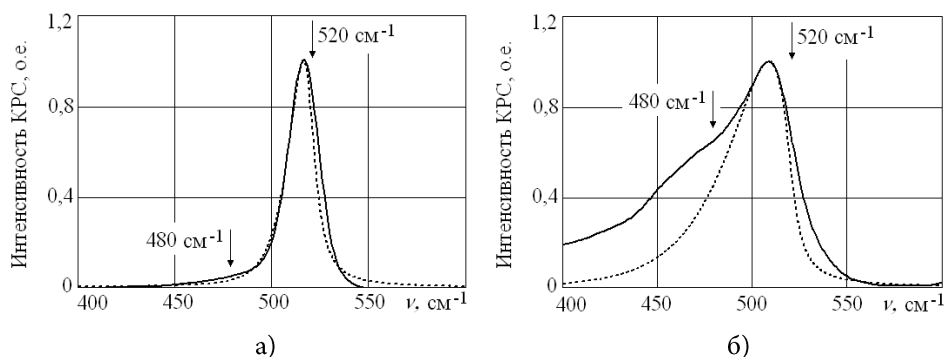


Рис. 2. Спектры КРС в точках «1» (а) и «2» (б) поперечного скола пленки por-Si (сплошная линия – экспериментальные данные, пунктирная – результат моделирования)

Спектры ФЛ, измеренные в точках «1» и «2» поперечного сечения пленки por-Si, представлены на рис. 3.

Интенсивность ФЛ в точке «1» выше, чем в точке (2) внутреннего слоя. Длина волны, соответствующая максимуму интенсивности фотолюминесценции ($\lambda_{\max}$) для внутреннего слоя составляет 710,7 нм, для поверхностного слоя $\lambda_{\max} = 679,2$ нм (рис. 3).

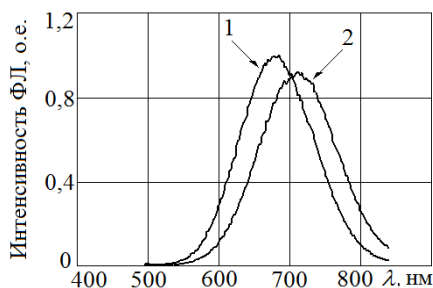


Рис. 3. Спектры ФЛ в точках «1» и «2» поперечного скола пленки por-Si.

Согласно современным представлениям, por-Si представляет собой матрицу кремниевых кристаллитов, пространство между которыми (поры) заполнено окислами кремния SiO_2 , SiO и другими продуктами реакции электрохимического травления [3]. Поверхностный слой пленки por-Si обладает хаотической рыхлой структурой и содержит наиболее мелкие кремниевые кристаллиты, определяющие интенсивную ФЛ в видимой области

спектра. Под ним расположен слой, образованный более крупными кристаллитами, обладающий более низкой интенсивностью ФЛ [4, 5]. Кремниевые кристаллиты поверхностного слоя пленки por-Si формируются как за счет электрохимического окисления материала монокристаллической подложки, так и в результате осаждения вторичных атомов кремния, возникающих при диспропорционировании ионов Si^{2+} [4]. Следовательно, поверхностный слой пленки por-Si непосредственно после электрохимического травления может содержать кремниевые кристаллиты различных размеров.

Химическое травление пленки por-Si в водном растворе HF приводит к удалению наиболее мелких кристаллитов из поверхностного слоя вместе с окислом кремния SiO_2 . Это объясняет более крупный размер кремниевых кристаллитов в поверхностном слое пленки por-Si (5,5 нм) по сравнению с внутренним слоем (2,8 нм). Отсутствие линии 480 см^{-1} на спектре КРС поверхностного слоя пленки por-Si (рис.2,а) также подтверждает удаление SiO_2 и ряда других продуктов электрохимического процесса в ходе травления образца в водном растворе HF. Согласно [6], HF более интенсивно взаимодействует с SiO_2 по сравнению с SiO. Таким образом, наблюдаемые на рис.1,а островки, составляющие развитую поверхность пленки por-Si, могут быть образованы преимущественно моноокисью кремния SiO и кремниевыми кристаллитами со средним диаметром 5,5 нм.

В настоящее время ФЛ por-Si в видимой области спектра большинство исследователей (например, [4], [5]) объясняют квантовым размерным эффектом, согласно которому снижение размера кремниевых кристаллитов приводит к сдвигу λ_{max} в коротковолновую область. В нашем случае такая корреляция не наблюдается. Согласно полученным результатам в ходе исследования спектров КРС и ФЛ, поверхностный слой пленки por-Si после химического травления в водном растворе HF содержит более крупные кремниевые кристаллиты, но имеет меньшее значение λ_{max} (рис. 3) по сравнению с внутренним слоем. Наблюдаемый коротковолновый сдвиг спектра ФЛ поверхностного слоя пленки por-Si может быть объяснен эффектом водородной пассивации кремниевых кристаллитов [5] при химическом травлении в водном растворе HF.

Таким образом, образованию развитой поверхности пленки por-Si способствует химическое травление в водном растворе HF. В результате поверхность пленки por-Si образована преимущественно островками монооксида кремния и более крупными кремниевыми кристаллитами, по сравнению с внутренним слоем. Внутренний слой образован более мелкими кремниевыми кристаллитами, которые разделены порами, заполненными продуктами электрохимического травления кремния.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Salcedo W.J., Fernandez F.R., Rubimc J.C. Influence of laser excitation on Raman and photoluminescence spectra and FTIR study of porous silicon layers // Brazilian Journal of Physics. 1999. Vol. 29. No. 4. P. 751–755.
2. Yang M., Huang D., Hao P. Study of the Raman peak shift and the linewidth of light-emitting porous silicon // J. Appl. Phys. 1994. Vol. 75. No.1. P. 651–653.
3. Тутов Е.А., Бормонтов Е.Н., Кашкаров В.М., Павленко М.Н., Домашевская Э.П. Влияние адсорбции паров воды на вольт-фарадные характеристики гетероструктур с пористым кремнием // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 11. С. 83–89.
4. Горячев Д.Н., Беяков Л.В., Сресели О.М. Формирование толстых слоев пористого кремния при недостаточной концентрации неосновных носителей // ФТП. 2004. Т. 38. Вып. 6. С. 739–744.
5. Венгер Е.Ф., Горбач Т.Я., Кириллова С.И., Примаченко В.Е., Чернобай В.А. Изменение свойств системы пористый Si/ Si при постепенном травлении слоя пористого Si // ФТП. 2002. Т. 36. Вып. 3. С. 349–354.
6. Химические свойства неорганических веществ / Р.А. Лидин и др.; М.: КолосС, 2006. 480 с.

УДК 619.6:532.5

Толпаев В. А.

ОАО «СевКавНИПИгаз», г. Ставрополь

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДВУМЕРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ И ГАЗА В ИСКРИВЛЕННЫХ НЕОДНОРОДНЫХ ПЛАСТАХ

Аннотация. Теория двумерных фильтрационных течений жидкости и газа в искривлённых пластах постоянной и переменной толщины играет важнейшую роль в проектировании разработок нефтегазовых месторождений. Большой вклад в развитие этой теории внесла доктор физико-математических наук, профессор Голубева Ольга Владимировна, долгое время возглавлявшая кафедру теоретической физики в МОПИ им. Н. К. Крупской и создавшая своими трудами совместно с многочисленными учениками гидродинамическую школу по теории двумерных течений жидкости и газа. Представленная к юбилейной дате со дня рождения 19 июля 1915 года профессора Голубевой О. В. статья содержит результаты, являющиеся преемственным развитием подходов Голубевой О. В. к моделированию двумерных фильтрационных течений. Конкретно, рассматриваются двумерные математические модели линейной фильтрации жидкости и газа в искривленных пластах переменной толщины, непроницаемые подошва и кровля которых могут быть заданы как координатные поверхности некоторой ортогональной криволинейной системы координат.

Ключевые слова: Закон Дарси, уравнение неразрывности, криволинейные координаты, радиус кривизны, проницаемость, пористость, упругоёмкость пласта, коэффициент объемного сжатия жидкости.

V. Tolpaev

JSC 'SEVKAVNIPIGAZ' (Stavropol, Russia)

Mathematical models of two-dimensional liquid and gas filtering in curved inhomogeneous layers

Abstract. The theory of two-dimensional filtering liquid and gas flows in curved seams constant and variable thickness plays a crucial role in the design of oil and gas development. Great contribution to the development of this theory has made a Doctor of Physics and Mathematics, Professor Olga Golubeva, a long time headed the Department of Theoretical Physics in MOPI them. N.K. Krupskaya and created hydrodynamic theory school in two-dimensional flows of liquids and gases in cooperation with numerous pupils. Presented to the anniversary date of the birth of 19 July 1915 Professor Golubeva O.V. article contains the results is the continuity of the development of approaches Golubeva O.V. to the modeling of two-dimensional seepage flows. Specifically, the paper is devoted two-dimensional mathematical models of linear filtering liquid and gas in curved seams of varying thickness,

where impenetrable sole and top which can be defined as a coordinate surfaces such as same orthogonal curvilinear coordinate system.

Key words: Darcy's law, equation of continuity, curvilinear coordinates, the radius of curvature, permeability, porosity, formation compressibility, coefficient of thermal contraction of the liquid

Введение. С 1878–1881 гг. в работах Е. Бельтрами [19], М. Хилла [20], А. Аллена [18], Н.А. Умова [16] и др. стали изучаться двумерные потенциальные движения идеальной несжимаемой жидкости, происходящие параллельно некоторой криволинейной поверхности. Из работ этих авторов вытекало, что описание потенциального движения жидкости в весьма тонком криволинейном слое (пласте) постоянной толщины с помощью конформного отображения криволинейной поверхности подошвы слоя на плоскость сводится к потенциальному плоскопараллельному течению в плоскости. Через 70 лет начала заложенной этими авторами теории получили в 1950-х годах дальнейшее развитие и главным образом практические применения к задачам подземной гидромеханики в работах О.В. Голубевой [4, 6] и П.Я. Полубариновой-Кочиной [8]. Далее теория двумерных течений жидкости в искривлённых весьма тонких слоях постоянной и переменной толщины с приложениями к задачам подземной гидромеханики стала развиваться в трудах учеников О.В. Голубевой [5]: К.Н. Быстрова, Ю.А. Гладышева, М.И. Хмельника, В.Ф. Пивня, С.Е. Холодовского и др. Фильтрация жидкости в весьма тонких пластах постоянной толщины с конкретными геометрическими формами (круговые конические, параболоидальные, сферические) изучалась В.П. Пилатовским [7]. В работах О.В. Голубевой и её учеников [5] математическим аппаратом для исследования стационарной линейной двумерной фильтрации жидкости в искривленных весьма тонких пластах переменной толщины служит теория r -аналитических функций Г.Н. Положего и теория Σ -моногенных функций Л. Берса и А. Гельбарта. И.А. Амираслановым и Г.П. Черепановым [1] для расчетов двумерной фильтрации жидкости в криволинейных слоях переменной толщины применялись методы теории потенциала. Все процитированные работы объединяет то, что локальная толщина искривлённого пласта в них считается

весьма малой (равной примерно половине или менее наименьшего из главных радиусов кривизны подошвы слоя), а сам пласт – изотропным.

В настоящей статье делается обзор результатов совместных работ, выполненных автором и его учениками [9–15], преемственно развивающих теорию О.В. Голубевой [4, 5, 6] и позволяющих исследовать фильтрационные течения не только в весьма тонких, но и в «толстых» пластах. Локальная толщина «толстых» пластов больше в 5–6 раз по сравнению с тонкими пластами, что, естественно, повышает практическую значимость выведенных в [9–15] уравнений.

1. Аппроксимация кинематики двумерных фильтрационных течений в искривленных пластах и уравнение неразрывности

Рассматриваются фильтрационные течения жидкости (газа) в искривленных пластах переменной толщины, непроницаемые подошва и кровля которых могут быть заданы гладкими координатными поверхностями $\zeta = \zeta_1 = \text{const}$ и $\zeta = \zeta_2 = \text{const}$ соответственно в некоторой криволинейной ортогональной системе координат ξ, η, ζ (рис. 1).

Реальные фильтрационные течения в таких пластах с толщиной, не превышающей в текущей точке M подошвы пласта некоторого значения $\bar{H}(M)$, почти всюду имеют поверхности тока по форме близкие к координатным поверхностям $\zeta = \text{const}$. Строгих оценок для величины $\bar{H}(M)$, не найдено. На основании ряда частных задач фильтрации несжимаемой жидкости в искривленных пластах [11, 12], для локальной толщины $\bar{H}(M)$ можно указать лишь примерную оценку: $\bar{H}(M) \approx (2 \div 3)R$, где R – наименьший из главных радиусов кривизны подошвы и кровли в точках M и M' (рис.1). В принимаемой аппроксимации кинематики фильтрационного течения составляющая скорости фильтрации $v_\zeta = 0$ вдоль ζ -координатных линий и, соответственно, скорость фильтрации будет представляться в виде

$$\vec{v} = v_\xi(\xi, \eta, \zeta, t) \cdot \vec{e}_1 + v_\eta(\xi, \eta, \zeta, t) \cdot \vec{e}_2 \quad (1)$$

где $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ – орты локального базиса в системе ξ, η, ζ , а v_ξ и v_η – проекции скорости фильтрации на ξ - и η -координатные линии.

Для вывода основного дифференциального уравнения фильтрации жидкости (газа) в искривленном пласте воспользуемся уравнением неразрывности, динамическим уравнением движения и уравнениями состояния пористой среды и насыщающего её флюида.

Уравнение неразрывности фильтрационного потока для принятой схемы течения (1) сжимаемой жидкости в искривленных пластах переменной толщины имеет вид [14]

$$\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \left\{ \frac{\partial(\rho v_{\xi} H_2 H_3)}{\partial \xi} + \frac{\partial(\rho v_{\eta} H_1 H_3)}{\partial \eta} + \frac{\partial(\rho \cdot m)}{\partial t} H_1 H_2 H_3 \right\} d\zeta = 0 \quad (2)$$

где H_1 , H_2 и H_3 – параметры Ламе выбранной расчетной ортогональной криволинейной системы координат ξ, η, ζ , а ρ и m – соответственно плотность флюида и пористость пласта.

2. Уравнения двумерной упругой фильтрации малосжимаемой жидкости в искривленных неоднородных пластах

Уравнение состояния упругой жидкости задается в виде [2, 17]

$$\rho(p) = \rho_0 \cdot [1 + \beta_{жс} \cdot (p - p_0)] \quad (3)$$

где p – давление в жидкости, $\beta_{жс}$ – коэффициент её объемного сжатия, а ρ_0 – её плотность при некотором фиксированном начальном значении давления p_0

Поведение изотропной непрерывно неоднородной как по пористости, так и по проницаемости пористой среды должно описываться двумя уравнениями состояния, описывающими зависимости проницаемости и пористости от координат и давления. Первое уравнение состояния пористой среды, следуя общепринятому в линейной теории упругого режима фильтрации допущению о возможности пренебрежения зависимостью проницаемости от давления [2, 17], принимается в виде $K = k_0 \cdot k(\xi, \eta, \zeta)$, где k_0 – постоянный коэффициент с размерностью проницаемости, а $k(\xi, \eta, \zeta)$ – безразмерная функция. Второе уравнение состояния пористой среды – в виде [2, 17]

$$m(\xi, \eta, \zeta, p) = m_0(\xi, \eta, \zeta) + \beta_c(\xi, \eta, \zeta) \cdot (p - p_0) \quad (4)$$

обобщающим известное уравнение состояния однородной изотропной пористой среды. В (4) $m_0(\xi, \eta, \zeta)$ – пористость пласта при начальном значении

давления p_0 , а $\beta_c(\xi, \eta, \zeta)$ – коэффициент объемной упругости твердого скелета пласта. В качестве фиксированного начального значения p_0 принимается пластовое давление в зафиксированный момент времени (например, на момент начала разработки месторождения, или на момент последних геофизических обследований скважин).

В. Н. Щелкачев в своей монографии [17, с. 36] отмечает, что «величина объемного коэффициента сжатия для нефти и воды не более чем 10^{-3} МПа $^{-1}$. Изменения же давления $(p - p_0)$ в условиях разработки нефтяных и артезианских пластов обычно меньше или в редких случаях несколько больше (но того же порядка), чем 10 МПа». Поэтому, пользуясь уравнением (3) и приведенными данными, легко подсчитать, что колебание между максимальным ρ_{max} и минимальным ρ_{min} значением плотности фильтрующейся малосжимаемой жидкости относительно среднего значения ρ_0 составит величину порядка 1 %. Поэтому в динамическом уравнении фильтрации сжимаемой жидкости [2, 17]

$$\vec{v} = -\frac{K}{\mu} \cdot (\text{grad } p + \rho g \vec{e}_z) \quad (5)$$

где μ – постоянный коэффициент динамической вязкости жидкости, g – ускорение свободного падения, $\vec{e}_z$ – единичный вектор направленной вертикально вверх оси z декартовой системы координат x, y, z , переменную плотность ρ заменим на её среднее значение ρ_0 . Тогда уравнение (5) примет вид

$$\vec{v} = -\frac{k_0 \cdot k(\xi, \eta, \zeta)}{\mu} \cdot \text{grad}(P) \quad (6)$$

где $P = p + \rho_0 g z$ – приведенное давление, при подсчете которого z отсчитывается от некоторой зафиксированной (нивелировочной) горизонтальной плоскости xOy .

На основании уравнения (6) для проекций скорости фильтрации упругой жидкости на направления ξ - и η -координатных линий в искривленном пласте получаем выражения

$$v_{\xi} = -\frac{k_0 \cdot k(\xi, \eta, \zeta)}{\mu} \cdot \frac{1}{H_1} \cdot \frac{\partial P}{\partial \xi}, \quad v_{\eta} = -\frac{k_0 \cdot k(\xi, \eta, \zeta)}{\mu} \cdot \frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial P}{\partial \eta} \quad (7)$$

Подчеркнем, что поскольку $v_{\zeta} = 0$, то в формулах (7) приведенное давление не зависит от ζ , т. е. будет функцией вида $P = P(\xi, \eta, t)$. Подставляя далее (7) в (2) получаем уравнение

$$\begin{aligned} & \frac{k_0}{\mu} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\rho \cdot k(\xi, \eta, \zeta) \cdot H_2 \cdot H_3}{H_1} \frac{\partial P}{\partial \xi} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{\rho \cdot k(\xi, \eta, \zeta) \cdot H_1 \cdot H_3}{H_2} \frac{\partial P}{\partial \eta} \right] \right\} d\zeta = \\ & = \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \left[\frac{\partial(\rho \cdot m)}{\partial t} \cdot H_1 \cdot H_2 \cdot H_3 \right] d\zeta \end{aligned} \quad (8)$$

При вычислении интеграла в левой части уравнения (8) снова воспользуемся тем обстоятельством, что плотность упругой жидкости ρ с большой степенью точности можно принять за постоянную величину, равную ρ_0 . Заменяя ρ на ρ_0 и меняя в левой части (8) порядок операций интегрирования и дифференцирования по независимым переменным ξ , η и ζ , получим следующее уравнение

$$\frac{k_0 \rho_0}{\mu} \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[T_1(\xi, \eta) \frac{\partial P}{\partial \xi} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[T_2(\xi, \eta) \frac{\partial P}{\partial \eta} \right] \right\} = \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \left[\frac{\partial(\rho \cdot m)}{\partial t} \cdot H_1 \cdot H_2 \cdot H_3 \right] d\zeta, \quad (9)$$

где

$$T_1(\xi, \eta) = \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} k(\xi, \eta, \zeta) \frac{H_2 \cdot H_3}{H_1} d\zeta, \quad T_2(\xi, \eta) = \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} k(\xi, \eta, \zeta) \frac{H_1 \cdot H_3}{H_2} d\zeta \quad (10)$$

Теперь преобразуем интеграл в правой части формулы (9). В соответствии с формулами (3) и (4) имеем:

$$\rho \cdot m = \rho_0 \left[m_0 + \beta_c \cdot (p - p_0) + m_0 \beta_{жс} \cdot (p - p_0) + \beta_c \cdot \beta_{жс} \cdot (p - p_0)^2 \right]. \quad (11)$$

Последним слагаемым в формуле (11) по сравнению с первыми тремя, ввиду малости произведения $\beta_c \cdot \beta_{жс}$, можно пренебречь [2, 17] и, поэтому, считать

$$\rho \cdot m = \rho_0 \cdot m_0 \cdot \left[1 + \frac{\beta^*}{m_0} (p - p_0) \right] \quad (12)$$

где $\beta^* = \beta_c + m_0 \beta_{жс}$ – коэффициент упругоёмкости пласта, зависящий в общем случае от координат ξ , η и ζ .

Из равенства (12) для производной по времени получаем выражение

$$\frac{\partial(\rho m)}{\partial t} = \rho_0 \cdot \beta^* \cdot \frac{\partial P}{\partial t} \quad (13)$$

Из определения $P(\xi, \eta, t) = p + \rho_0 g z$ приведенного давления вытекает, что $\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial t}$. Поэтому для интеграла в правой части (9) получаем

$$\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \left[\frac{\partial(\rho \cdot m)}{\partial t} \cdot H_1 \cdot H_2 \cdot H_3 \right] d\zeta = \rho_0 \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \left[\beta^* \frac{\partial P}{\partial t} \cdot H_1 \cdot H_2 \cdot H_3 \right] d\zeta = \rho_0 \cdot T_3(\xi, \eta) \cdot \frac{\partial P}{\partial t}. \quad (14)$$

В (14) через $T_3(\xi, \eta)$ обозначен интеграл

$$T_3(\xi, \eta) = \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} (\beta^* \cdot H_1 \cdot H_2 \cdot H_3) d\zeta \quad (15)$$

Теперь из формул (9) и (14) для описания линейной фильтрации упругой жидкости в упругом искривленном пласте конечной толщины окончательно получим следующее уравнение

$$\frac{k_0}{\mu} \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[T_1(\xi, \eta) \frac{\partial P}{\partial \xi} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[T_2(\xi, \eta) \frac{\partial P}{\partial \eta} \right] \right\} = T_3(\xi, \eta) \cdot \frac{\partial P}{\partial t}.$$

Естественно, для решения конкретных задач упругого режима фильтрации в искривленных неоднородных пластах переменной толщины для уравнения (16) еще необходимо будет задать начальные и граничные условия.

То, что выведенное с общепринятыми допущениями уравнение (16) оказалось линейным, указывает на значительную схематизацию упругого режима фильтрации в изотропных неоднородных искривленных пластах. Но при изучении фильтрационных потоков при упругом режиме в искривленных пластах важно выделить главные особенности фильтрационного процесса. Это и позволяет сделать уравнение (15) с помощью вытекающих из него всевозможных линейных математических моделей.

Отметим некоторые частные случаи, вытекающие из уравнения (15).

2. Уравнения двумерной упругой фильтрации малосжимаемой жидкости в весьма тонких однородных по толщине искривленных пластах

Криволинейный пласт-коллектор, ограниченный непроницаемыми подошвой $\zeta = \zeta_1 = const$ и кровлей $\zeta = \zeta_2 = const$ будем называть весьма

тонким (в краткой речи – тонким), если можно пренебречь изменениями параметров Ламе по толщине пласта и принять их равными своим средним значениям

$$H_1 \equiv \frac{1}{\zeta_2 - \zeta_1} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} H_1(\xi, \eta, \zeta) d\zeta = h_1(\xi, \eta), \quad H_2 \equiv \frac{1}{\zeta_2 - \zeta_1} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} H_2(\xi, \eta, \zeta) d\zeta = h_2(\xi, \eta). \quad (17)$$

Криволинейный пласт-коллектор будем называть однородным по толщине, если проницаемость и упругоемость пласта не меняются вдоль его толщины и зависят только от координат ξ и η , т. е. $k = k(\xi, \eta)$ и $\beta^* = \beta^*(\xi, \eta)$.

Для однородных по толщине тонких криволинейных пластов переменные коэффициенты $T_1(\xi, \eta)$, $T_2(\xi, \eta)$ и $T_3(\xi, \eta)$ на основании формул (10), (15) и (17) будут равны следующим значениям

$$T_1(\xi, \eta) = \frac{h_2(\xi, \eta)}{h_1(\xi, \eta)} \cdot k(\xi, \eta) \cdot H(\xi, \eta), \quad T_2(\xi, \eta) = \frac{h_1(\xi, \eta)}{h_2(\xi, \eta)} \cdot k(\xi, \eta) \cdot H(\xi, \eta) \quad (18)$$

$$T_3(\xi, \eta) = \beta^*(\xi, \eta) \cdot h_1(\xi, \eta) \cdot h_2(\xi, \eta) \cdot H(\xi, \eta), \text{ где } H(\xi, \eta) = \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} H_3(\xi, \eta, \zeta) d\zeta. \quad (19)$$

Подчеркнем, что в формуле (19) $H(\xi, \eta)$ представляет собой длину дуги MM' (рис. 1) ζ – координатной линии, принимаемой в качестве толщины тонкого слоя.

После подстановки коэффициентов $T_1(\xi, \eta)$, $T_2(\xi, \eta)$ и $T_3(\xi, \eta)$ из (18), (19) в уравнение (16) для описания упругого режима фильтрации жидкости в тонком искривленном пласте получим уравнение

$$\frac{k_0}{\mu} \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{h_2(\xi, \eta)}{h_1(\xi, \eta)} \cdot k(\xi, \eta) \cdot H(\xi, \eta) \cdot \frac{\partial P}{\partial \xi} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{h_1(\xi, \eta)}{h_2(\xi, \eta)} \cdot k(\xi, \eta) \cdot H(\xi, \eta) \cdot \frac{\partial P}{\partial \eta} \right] \right\} = \quad (20)$$

$$= \beta^*(\xi, \eta) \cdot h_1(\xi, \eta) \cdot h_2(\xi, \eta) \cdot H(\xi, \eta) \cdot \frac{\partial P}{\partial t}$$

по виду совпадающее с уравнением Ю.А.Гладышева [3]. Однако между уравнением (20) и уравнением Ю.А.Гладышева в [3] есть существенные отличия. В (20) одновременно задаются и подошва и кровля пласта ζ – координатными поверхностями выбранной ортогональной системы координат ξ, η, ζ , а в [3] заранее уравнениями вида $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$, $z = z(\xi, \eta)$ задается только одна криволинейная поверхность подошвы. Вместо криволинейной поверхности кровли в [3] задается достаточно произвольно

функция $H(\xi, \eta)$, называемая «толщиной» слоя. Тем самым, по уравнению [3] можно исследовать течения в серии криволинейных слоёв с общей подошвой и разными кровлями, что указывает на применение грубой аппроксимации кинематики течения в криволинейном слое. В уравнении (20) аналогом «толщины» выступает рассчитываемая (а не произвольно задаваемая!) длина $H(\xi, \eta)$ дуги ζ – координатной линии соединяющей подошву и кровлю пласта. Поэтому по сравнению с [3] уравнение (20) с конкретно заданной геометрией криволинейного слоя является более корректной математической моделью упругой фильтрации в тонких искривленных неоднородных по простиранию пластах переменной толщины.

3. Уравнения двумерной фильтрации малосжимаемой жидкости в недеформируемых искривленных неоднородных пластах

Отметим следующий важный частный случай уравнения (16). Пусть жидкость несжимаема (коэффициент объемного сжатия жидкости $\beta_{жс} = 0$), а пласт недеформируемый (коэффициент объемной упругости пласта $\beta_c = 0$). Тогда коэффициент упругоёмкости пласта $\beta^* = \beta_c + m_0 \beta_{жс}$ тоже будет равен нулю, а значит в соответствии с (15) коэффициент $T_3(\xi, \eta) = 0$. Таким образом, двумерные фильтрационные течения несжимаемой жидкости в недеформируемых неоднородных искривленных пластах будут описываться в соответствии с (16) уравнением

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left[T_1(\xi, \eta) \frac{\partial P}{\partial \xi} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[T_2(\xi, \eta) \frac{\partial P}{\partial \eta} \right] = 0 \quad (21)$$

Переменные коэффициенты $T_1(\xi, \eta)$ и $T_2(\xi, \eta)$ в уравнении (21) определяются по формулам (10).

Уравнения двумерной фильтрации несжимаемой жидкости в весьма тонких однородных по толщине недеформируемых искривленных пластах

Подставляя в (21) переменные коэффициенты $T_1(\xi, \eta)$, $T_2(\xi, \eta)$ из формул (18), получаем следующее уравнение для описания двумерной фильтрации несжимаемой жидкости в весьма тонких однородных по толщине недеформируемых искривленных пластах

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{h_2(\xi, \eta)}{h_1(\xi, \eta)} \cdot k(\xi, \eta) \cdot H(\xi, \eta) \cdot \frac{\partial P}{\partial \xi} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{h_1(\xi, \eta)}{h_2(\xi, \eta)} \cdot k(\xi, \eta) \cdot H(\xi, \eta) \cdot \frac{\partial P}{\partial \eta} \right] = 0, \quad (22)$$

по виду совпадающее с уравнением О.В. Голубевой [6]. Однако между уравнением (22) и уравнением О.В. Голубевой [6] сохраняются те же отличия, которые уже отмечались по поводу уравнения Ю.А. Гладышева [3].

В заключение отметим, что в отличие от уравнений общего вида (16) и (21) их частные случаи (20) и (22), судя по результатам отдельных задач [10, 11, 12], могут применяться к решениям задач фильтрации в слоях, локальная толщина $H(\xi, \eta)$ которых не превышает $\approx 50\%$ от наименьшего в точке $M(\xi, \eta)$ главного радиуса кривизны подошвы. Уравнения же (16) и (21) позволяют рассчитывать фильтрационные потоки в искривленных слоях с большей локальной толщиной, которая в текущих точках M и M' (рис. 1) может достигать удвоенного – утроенного значения наименьшего из главных радиусов кривизны подошвы и кровли слоя.

4. Уравнение двумерной фильтрации газа в недеформируемых искривленных неоднородных пластах

Рассмотрим изотермические фильтрационные течения газа в искривленных пластах переменной толщины с непроницаемыми подошвой и кровлей (рис. 1). Особенностью фильтрации газа является то, что массовые силы тяжести газа $\rho g \vec{e}_z$ по сравнению с поверхностными силами давления $\text{grad } p$ на течения газа оказывают пренебрежимо малое влияние. Поэтому обобщенный закон Дарси линейной изотермической фильтрации газа в изотропных неоднородных средах не содержит массовых сил $\rho g \vec{e}_z$ и имеет вид

$$\vec{v} = - \frac{k_0 \cdot k(\xi, \eta, \zeta)}{\mu(p)} \cdot \text{grad } p \quad (23)$$

При записи закона Дарси (23) учтена зависимость $\mu = \mu(p)$ коэффициента динамической вязкости газа от давления.

Фильтрационные течения газа в искривленном неоднородном пласте моделируем течениями по ζ -координатным поверхностям с полем скоростей фильтрации (1) и с составляющей скорости фильтрации $v_\zeta = 0$. В связи с

принятой аппроксимацией поля скоростей фильтрации газа давление аппроксимируем функцией вида $p = p(\xi, \eta, t)$. В принятой модели течений в искривленном пласте проекции скорости фильтрации газа на направления ξ – и η – координатных линий в соответствии с (23) будут находиться из формул

$$v_{\xi} = -\frac{k_0 \cdot k(\xi, \eta, \zeta)}{\mu(p)} \cdot \frac{1}{H_1} \cdot \frac{\partial p}{\partial \xi}, \quad v_{\eta} = -\frac{k_0 \cdot k(\xi, \eta, \zeta)}{\mu(p)} \cdot \frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial p}{\partial \eta} \quad (24)$$

Уравнение неразрывности, выражающее закон сохранения массы газа, запишется в виде (2).

Уравнение состояния реального газа при изотермическом режиме фильтрации имеет, как известно, вид

$$\rho = \rho_{am} \cdot \frac{p}{p_{am}} \cdot \frac{z(p_{am})}{z(p)}, \quad (25)$$

где ρ – плотность газа; ρ_{am} – плотность газа при пластовой температуре и атмосферном давлении p_{am} ; через $z(p)$ обозначен коэффициент сверхсжимаемости газа [2, 17], который нужно учитывать при пластовых давлениях выше 10 МПа. Для давлений ниже 10 МПа газ можно рассматривать как совершенный и считать $z(p) = 1$.

Подставляя в уравнение неразрывности (2) проекции скоростей фильтрации из (24) и выражение для плотности газа из (25), после тождественных преобразований относительно давления $p = p(\xi, \eta, t)$ получим уравнение

$$k_0 \cdot \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{p}{z(p)} \cdot \frac{k(\xi, \eta, \zeta)}{\mu(p)} \cdot \frac{H_2 H_3}{H_1} \cdot \frac{\partial p}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{p}{z(p)} \cdot \frac{k(\xi, \eta, \zeta)}{\mu(p)} \cdot \frac{H_1 H_3}{H_2} \cdot \frac{\partial p}{\partial \eta} \right) \right\} d\zeta = \\ = \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \left\{ H_1 H_2 H_3 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p}{z(p)} \cdot m(\xi, \eta, \zeta) \right) \right\} d\zeta \quad (26)$$

Меняя в левой и правой части (26) порядок операций интегрирования по ζ и дифференцирования по независимым переменным ξ , η , t , получим следующее нелинейное уравнение

$$k_0 \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(T_1(\xi, \eta) \cdot \frac{\partial \Phi(p)}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(T_2(\xi, \eta) \cdot \frac{\partial \Phi(p)}{\partial \eta} \right) \right\} = T_3^*(\xi, \eta) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p}{z(p)} \right) \quad (27)$$

В уравнении (27) $\Phi(p) = \int \frac{P}{\mu(p) \cdot z(p)} \cdot dp$ – функция Л.С. Лейбензона [2, 17], коэффициенты $T_1(\xi, \eta)$ и $T_2(\xi, \eta)$ по-прежнему определяются по формулам (10), а коэффициент $T_3^*(\xi, \eta)$ равен

$$T_3^*(\xi, \eta) = \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} m(\xi, \eta, \zeta) \cdot H_1 H_2 H_3 \cdot d\zeta. \quad (28)$$

Уравнения двумерной стационарной фильтрации газа в недеформируемых искривленных пластах.

Для установившихся фильтрационных потоков, когда в каждой точке области фильтрации давление не меняется с течением времени и зависит только от координат, в правой части (27) производная $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p}{z(p)} \right) = 0$. Поэтому для стационарной фильтрации газа в искривленных пластах переменной толщины на основании (27) получаем линейное относительно функции Л. С Лейбензона уравнение

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(T_1(\xi, \eta) \cdot \frac{\partial \Phi(p)}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(T_2(\xi, \eta) \cdot \frac{\partial \Phi(p)}{\partial \eta} \right) = 0. \quad (29)$$

Уравнения двумерной фильтрации газа в недеформируемых весьма тонких однородных по толщине искривленных пластах.

Для однородных по толщине весьма тонких криволинейных пластов переменные коэффициенты $T_1(\xi, \eta)$ и $T_2(\xi, \eta)$ определяются по формулам (18), а коэффициент $T_3^*(\xi, \eta)$ на основании (28), (17) и (19) будет равен

$$T_3^*(\xi, \eta) = m(\xi, \eta) \cdot h_1(\xi, \eta) \cdot h_2(\xi, \eta) \cdot H(\xi, \eta). \quad (30)$$

После подстановки коэффициентов $T_1(\xi, \eta)$, $T_2(\xi, \eta)$ и $T_3^*(\xi, \eta)$ соответственно из (18) и (30) в уравнение (27) для описания двумерной фильтрации газа в недеформируемых весьма тонких однородных по толщине искривленных пластах получим нелинейное уравнение

$$k_0 \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{h_2(\xi, \eta)}{h_1(\xi, \eta)} \cdot k(\xi, \eta) \cdot H(\xi, \eta) \cdot \frac{\partial \Phi(p)}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{h_1(\xi, \eta)}{h_2(\xi, \eta)} \cdot k(\xi, \eta) \cdot H(\xi, \eta) \cdot \frac{\partial \Phi(p)}{\partial \eta} \right) \right\} = \quad (31)$$

$$= m(\xi, \eta) \cdot h_1(\xi, \eta) \cdot h_2(\xi, \eta) \cdot H(\xi, \eta) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p}{z(p)} \right)$$

Закключение. В настоящее время в классической нефтегазовой гидромеханике преобладают плоскопараллельные модели фильтрационных течений – модели плановой напорной фильтрации. В частности, исследование естественных фильтрационных течений в искривленных пластах переменной толщины сводят к исследованию проекций этих течений на вспомогательную горизонтальную плоскость (нивелировочную плоскость), а кривизну и силы тяжести в распределении давления пытаются учесть путем использования в расчетах приведенного давления, отсчитываемого от нивелировочной плоскости. Для того чтобы определить точность фильтрационных расчетов по моделям плановой напорной фильтрации необходимо выполнить массу сравнительных расчетов реальных течений в искривленных пластах переменной толщины с расчетами этих течений в рамках плановой напорной фильтрации. Кроме того, в настоящее время обработка данных газогидродинамических исследований (ГДИ) скважин осуществляется в рамках классических моделей стационарного и нестационарного плоскорадиального притока жидкости (газа) к скважине. Для учета при обработке данных ГДИ таких факторов, как, например, кривизна и локальная толщина пласта в месте расположения скважины нужны более точные модели, которые потребуют применение уравнений фильтрации в искривленных пластах переменной толщины. Для решения этих и множества других подобных задач и понадобятся представленные в статье уравнения двумерных фильтрационных течений в искривленных слоях переменной толщины.

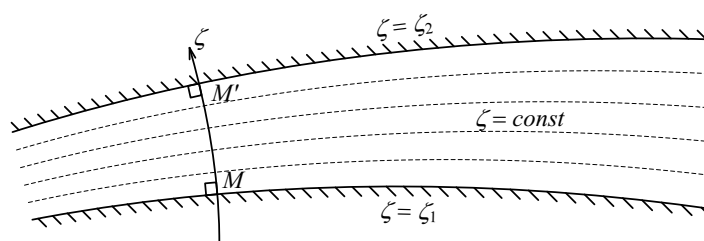


Рис. 1. Сечение искривленного слоя (пласта) переменной толщины. Под локальной «толщиной» $H(M)$ слоя в точке M понимается длина дуги MM' ζ – координатной линии. За поверхности тока стационарных и нестационарных фильтрационных течений в искривленных слоях принимаются координатные поверхности $\zeta = const$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амирасланов И.А., Черепанов Г.П. Фильтрация жидкости в криволинейных слоях переменной толщины // ПММ. 1981. Вып.6. С. 1142–1146.
2. Басниев К.С., Дмитриев Н.М., Розенберг Г.Д. Нефтегазовая гидромеханика. Учебное пособие для вузов. М.: Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005, 544с.
3. Гладышев Ю. А. Некоторые вопросы нестационарной фильтрации в искривленном слое переменной толщины. // Гидродинамика. (Материалы совещания секции физики по гидродинамике 14-15 апреля 1970 года). М.: МОИП, 1970. С. 7–12.
4. Голубева О.В. О комплексном потенциале и комплексной скорости течений в искривленных пленках переменной толщины // Учёные записки МОПИ им. Н. К. Крупской. Т. LXXV, Труды кафедры теоретической физики, Вып. 4, М., 1959. С. 3–9.
5. Голубева О.В. О работах в области механики сплошных сред коллектива кафедры теоретической физики МОПИ им. Н.К. Крупской // Учёные записки МОПИ им. Н.К. Крупской. Т. 200, Теоретическая физика, Вып. 7, М., 1968. С. 5–11.
6. Голубева О.В. Уравнения двумерных движений идеальной жидкости по криволинейной поверхности и их применение в теории фильтрации // ПММ, 1950, т. 14, Вып. 3. С. 287–294.
7. Пилатовский В.П. Основы гидромеханики тонкого пласта. М.: Недра, 1966. 317 с.
8. Полубаринова-Кочина П.Я. Об источниках и стоках на поверхности // ПММ. 1950. Т. 14. вып. 1.
9. Толпаев В.А., Ледовской В.И. Математическое моделирование фильтрационных течений несжимаемой жидкости в искривлённых пластах конечной толщины // Обозрение прикладной и промышленной математики. Том 12. В. 2. М. 2005. С. 524–527.
10. Толпаев В. А., Баско Д. В. Математическая модель линейного упругого режима фильтрации в искривленных пластах переменной толщины. // Нефтепромысловое дело. М.: ОАО «ВНИИОЭНГ», 2008. № 12, С. 9–13.
11. Толпаев В.А., Ледовской В.И. Оценки точности расчета дебитов скважин в искривленных пластах // Нефтепромысловое дело. М.: ОАО «ВНИИОЭНГ», 2004. № 12, С. 9–13.

12. Толпаев В.А., Ледовской В.И. Расчет дебита нефтедобывающей скважины, расположенной в куполе осесимметричного пласта // Нефтепромышленное дело. – М.: ОАО «ВНИИОЭНГ», 2005. № 1. С. 20–23.
13. Толпаев В.А., Ледовской В.И. Уравнения линейной двумерной фильтрации в искривленных пластах конечной толщины // Обозрение прикладной и промышленной математики, 2004. т. 11, Вып. 1. С. 143–146.
14. Толпаев В.А., Палиев В.В. Уравнение неразрывности в двумерных моделях фильтрации жидкости и газа в искривленных пластах конечной толщины. // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия "Математика. Механика. Информатика", Вып. 2, 2007. С. 49–53.
15. Толпаев В.А., Палиев В.В., Баско Д.В. Двумерные математические модели линейной фильтрации жидкости и газа в искривленных пластах конечной толщины. / Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2008 г., № 2. С. 43–47.
16. Умов Н.А. О стационарном движении электричества на проводящих поверхностях произвольного вида. Математический сборник. 1878. Т.9. С. 121–127.
17. Щелкачев В.Н. Основы и приложения теории неустановившейся фильтрации. М.: Нефть и газ, 1995. ч. 1, 586 с.
18. Allen A.J.C. On some problems in the conduction of electricity // Quarterly Journal of pure and applied mathematics, 1881, vol. 17, P. 65–86.
19. Beltrami E. Intorno ad un caso di moto a due coordinate // Rendiconti d. Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, 1878, vol. 11, p. 199–210.
20. Hill M.J. The steady motion of electricity in spherical current sheets. – Quarterly Journal of pure and applied mathematics, 1879, vol. 16, P. 306–323.

УДК 004.942: 519.876.5

Долгова Е.В., Брюханова А.А., Курушин Д.С.,
Файзрахманов Р.А.

Пермский национальный исследовательский политехнический университет

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ ПЛАТФОРМЫ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОГО МОБИЛЬНОГО РОБОТА*

Аннотация. Представлены результаты программной имитации механических колебаний, возникающих в конструкции мобильного робота с системой технического зрения. Представлена модель и элементы программной системы для исследований. На основе численного решения системы дифференциальных уравнений получены зависимости, которые позволяют выбрать параметры и режим безопасного функционирования робота. Таким образом, появляется возможность воздействия на колебания, которые возникают из-за совместной работы самой платформы и механических элементов системы технического зрения и избежать ситуации опрокидывания платформы.

Ключевые слова: робот, платформа, колебания, моделирование, программа, дифференциальное уравнение.

*E. Dolgova, A. Brjuhanova, D. Kurushin, R. Fayzrakhmanov
Perm National Research Polytechnic University (Perm, Russia)*

SIMULATION OF MOBILE ROBOT PLATFORM VIBRATIONS

Abstract. The results of modelling of the mechanical oscillations which can take place in a suspension system of the autonomous vehicle-like robot are presented in this paper. If the robot has computer-vision stabilized platform, it's movements can interact with vehicle's suspension. To ensure stability of the robot computer simulation of the system were performed. Dependencies allowing to select safe operation modes of the robot are calculated basing on the numerical solution of differential equations. Thus, there is a possibility to control the fluctuations arising from the interaction between the platform and mechanical components of the computer vision system and to avoid a situation of overturning the platform.

Key words: robot, platform, oscillations, modelling, programm, differential equation

Рассмотрим задачу управления мобильным роботом, который перемещается по произвольной местности [3, 4, 6]. При этом груз,

© Долгова Е.В., Брюханова А.А., Курушин Д.С., Файзрахманов Р.А. 2015.

* Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (договор № 02.G25.31.0068) в рамках реализации Постановления Правительства РФ № 218 «О мерах государственной поддержки развития кооперации российских высших учебных заведений и организаций, реализующих комплексные проекты по созданию высокотехнологичного производства».

перевозимый роботом, ограничен, наращивание мощности его вычислителя имеет определенные пределы, рельеф местности образован конечным числом поверхностей, а положение робота задается двумя непрерывными переменными.

Распознавание является важной частью систем управления интеллектуальными устройствами [1, 5, 7, 8], и позволяет, как ориентироваться на местности, так и осуществлять поиск заданных объектов. В лежит использование системы машинного зрения, которая предполагает работу подвижной видеокамеры. Однако в силу механического взаимодействия подвеса камеры и собственно платформы могут возникать непредусмотренные спецификацией колебания, которые предположительно способны вызвать ее опрокидывание. Таким образом, целью данной работы является исследование возможности возникновения таких процессов, их моделирование, а в итоге – разработка конструкции, исключающей нештатные ситуации подобного рода.

Предположим, мобильную платформу можно представить в виде двух тел, соединенных осью. Одно из тел (тело А) подвешено на двух пружинах (рис. 1), второе (тело В) представляет из себя гироскоп (рис. 1).

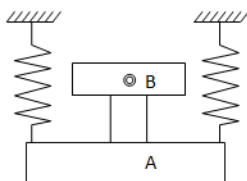


Рис. 1. Схема платформы

Если одну из пружин вывести из равновесного состояния, то тело 2 начнет совершать гармонические затухающие колебания, отклоняясь от своего начального положения на некоторый угол α (рис. 2).

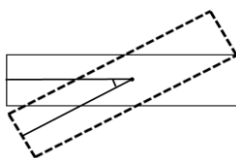


Рис. 2. Угол отклонения

Пусть $\vec{F}$ – результирующий вектор всех сил, действующих на тело А.
Тогда $\vec{F}$ можно представить в виде суммы векторов следующих сил:

$$\vec{F} = \vec{F}_c + \vec{F}_y + \vec{F}_p \quad (1)$$

где

$\vec{F}_c$ – сила сопротивления,

$\vec{F}_y$ – сила упругости пружины,

$\vec{F}_p$ – сила, действующая от верхней платформы.

$\vec{F}_p$ – рассчитывается по следующей формуле:

$$F_p = F_y \cdot \sin \alpha \quad (2)$$

где F_y – центростремительная сила,

α – угол, под которым направлена сила к нижней платформе.

В свою очередь, центростремительную силу можно посчитать следующим образом [9]:

$$F_y = \frac{M \cdot r \cdot \omega^2}{2} \quad (3)$$

где М – масса платформы,

r – радиус,

ω – угловая скорость.

Распишем все силы, действующие на платформу, тогда формула (1) запишется как:

$$F = -c \cdot v - k \cdot x + \frac{M \cdot r \cdot \omega^2 \cdot \sin \alpha}{2} \quad (4)$$

где с – коэффициент сопротивления, устанавливающий соотношение между скоростью движения тела А и возникающей при этом силой сопротивления,

v – скорость, с которой тело А совершает колебания,

k – коэффициент упругости пружины.

Угловая скорость вычисляется по формуле:

$$\omega = \cos 0, 1t \quad (5)$$

Так как скорость является производной расстояния, то уравнение (4) можно записать следующим образом:

$$F = -c \cdot v - k \cdot x + m \cdot r \cdot (\cos 0,1t)^2 \cdot \sin \alpha \quad (6)$$

Чтобы проверить, будет ли переворачиваться платформа, нужно проанализировать изменение угла наклона платформы и изменение координат крайних точек платформы. Запишем уравнение для расчета координат:

$$x = x_0 + v \cdot t \quad (7)$$

где x – координата точки,

x_0 – начальная координата точки,

v – скорость,

t – время.

Величина скорости будет рассчитана следующим образом:

$$v = v_0 + a \cdot dt \quad (8)$$

Для расчета координат левой и правой примем значение массы равное половине массы тела А. Выразим ускорение, используя формулу (6):

$$a = \frac{-c \cdot v_0 - k \cdot x + m \cdot r \cdot \omega^2 \cdot \sin \alpha}{m} \quad (9)$$

$$a = \frac{-c \cdot v_0}{m} - \frac{k \cdot x}{m} + r \cdot \cos(0,1t) \cdot \sin \alpha \quad (10)$$

Известно, что скорость движения:

$$v = v_0 + a \cdot dt \quad (11)$$

Чтобы решить систему уравнений методом Эйлера относительно параметра t , представим систему уравнений следующим образом:

$$\begin{cases} x_1(t) = x_{01} + dt(v_0 + dt(-\frac{c \cdot dx_1}{m} - \frac{k \cdot x}{m} + r(\cos 0,1dt)^2 \cdot \sin \alpha)) \\ x_2(t) = x_{02} + dt(v_0 + dt(-\frac{c \cdot dx_1}{m} - \frac{k \cdot x}{m} + r(\cos 0,1dt)^2 \cdot \sin \alpha)) \\ \Delta x = x_1 - x_2 \end{cases} \quad (12)$$

Тогда листинг имитационной модели примет вид:

```
import javax.swing.*;
import java.io.FileWriter;
```

```
import java.io.IOException;
import java.io.OutputStreamWriter;
import java.io.PrintWriter;
import java.util.Locale;
import java.util.Map;

public class Robot{
    public static void main(String[] args) throws IOException {
        new Robot().run();
    }
```

```
    public void run() throws IOException{
        double c = 0.1;//1.78*0.00001;
        double k = 0.5;//коэффициент жесткости пружины
        double m = 5; //масса
        double alfa=Math.toRadians(40);
        double yc=0;//центр платформы
        double xv=0;//вектор
        double yv=0;
        int n=45000;
        double w=0.5;
        double[][] x = new double[n][4];
        double[][] a = new double[n][2];
        double[][] v = new double[n][2];
        double dt = 0.01;
        double t=0;
```

```
        PrintWriter out = new PrintWriter(new FileWriter("C:/Program Files
(x86)/gnuplot/bin/data.log"));
        double r=0.5;//радиус
        x[0][0]=r*Math.sin(alfa);//1 пружина
        x[0][1]=-x[0][0];//2 пружина
```

```

x[0][2]=x[0][1]-x[0][0]; // dx
v[0][0]=0;
v[0][1]=0;
out.println("#index  U[index]  exact_U[index]  V[index]  exact_V[index] ");
for(int i=1;i<x.length;i++){
    w=Math.cos(0.1*t);
    a[i][0]=(-c*v[i-1][0])/(m)-(k*x[i-1][0])/(m)+r*w*w*Math.sin(alfa);
    a[i][1]=(-c*v[i-1][1])/(m)-(k*x[i-1][1])/(m)+r*w*w*Math.sin(-alfa);
    v[i][0]=v[i-1][0]+a[i][0]*dt;
    v[i][1]=v[i-1][1]+a[i][1]*dt;
    x[i][0]=x[i-1][0]+v[i][0]*dt;
    x[i][1]=x[i-1][1]+v[i][1]*dt;
    x[i][2]=x[i][0]-x[i][1];
    t+=dt;
    yc=(x[i][0]+x[i][1])/2;
    xv=-Math.sqrt(r*r-x[i][0]*x[i][0]);
    yv=x[i][0]-yc;
    alfa=-Math.atan2(yv,xv);
    x[i][3]=180-Math.toDegrees(alfa);
    if(x[i][3]>180)x[i][3]=x[i][3]-360;
}
for(int i=0;i<n;i+=10)
    out.printf(Locale.US,"%d                %.6f                %.6f                %.6f\n",i/10,x[i][0],x[i][1],x[i][2],x[i][3]);
    out.println("");

    out.flush();
}

}

```

Рассмотрим пример полученных в результате моделирования результатов.

Были приняты следующие начальные условия:

- 1) Коэффициент сопротивления $c = 0.1$;
- 2) коэффициент жесткости пружины $k = 0.5$;
- 3) масса платформы $m = 10$;
- 4) начальный угол отклонения от равновесного состояния $\alpha = 30^\circ$;
- 5) шаг по времени $\Delta t = 0.01$;
- 6) начальное значение времени $t = 0$;
- 7) радиус $r = 0.5$;
- 8) смещение первой пружины $x_{01} = \sin \alpha$.

Будем считать, что платформа мобильного робота перевернется, если угол отклонения от равновесного состояния превысит 90° или значение координаты x превысит величину r .

На рисунке 3 показаны графики движения пружин и разница между ними в каждой точке. Видно, что со временем обе пружины начинают колебаться синхронно в противофазе.

При заданных начальных условиях получены результаты, отраженные на рисунке 3. Из графиков видно, что платформа совершает затухающие колебания, угол отклонения, стремится к установившемуся значению 0 (рис. 4).

Максимальный начальный угол отклонения, при котором платформа ведет себя стабильно – 40° .

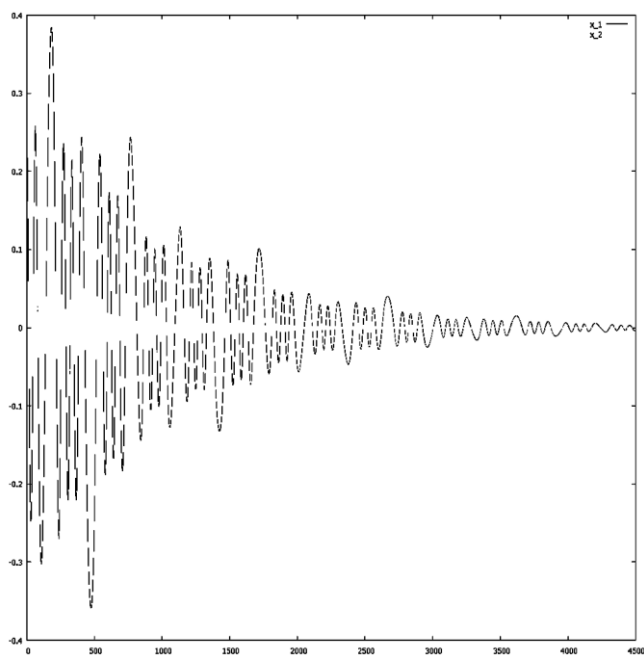


Рис. 3 Колебания пружин при начальном угле 30° . Ось абсцисс – время, ось ординат – углы отклонения.

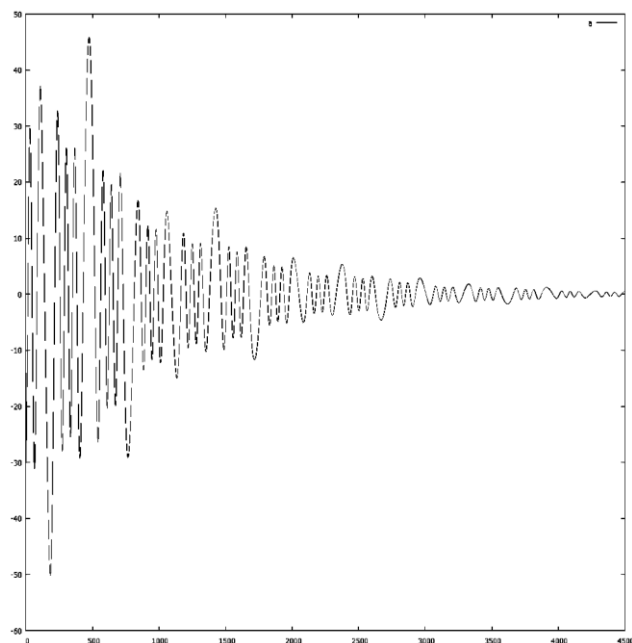


Рис. 4 – График изменения угла отклонения при начальном угле 30° . Ось абсцисс – время, ось ординат – углы отклонения.

Таким образом, проведенное исследование позволяет сделать следующие выводы. Вышеописанный способ соединения конструктивных частей мобильного робота может стать причиной не предусмотренных спецификацией колебаний. При определенных параметрах, которые можно вычислить при помощи разработанной имитационной модели, эти колебания затухают. Полученный результат можно использовать на этапе создания исследовательских прототипов роботизированных мобильных платформ, если в них используется подвеска и гироскоп. Учет обнаруженного эффекта на этапе исследований позволяет избежать его возникновения в рабочем прототипе изделия устройством, которое способно решать широкий класс прикладных задач.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Искусственный интеллект. Современный подход : пер. с англ. / С. Рассел, П. Норвиг . 2-е изд. М. : Вильямс, 2006. 1407 с.
2. Моделирование динамики перемещения груза в компьютерном тренажере погрузочно-разгрузочного устройства / Е.В. Долгова, Р.А. Файзрахманов, Д.С. Курушин и др. // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика, 2012. № 2. С. 57–64.
3. Моделирование огибания препятствий мобильным роботом / Д.С. Курушин, Е.В. Долгова, Р.А. Файзрахманов // Информационно-измерительные и управляющие системы. 2014. Т. 12. № 9. С. 58–61.
4. Принципы организации работ с применением мобильного робота / Курушин, Е.В. Долгова, Р.А. Файзрахманов // Научное обозрение, 2014, № 7. 219–221.
5. Принципы построения онтологии мобильного робота / Е.В. Долгова Д.С. Курушин // Научное обозрение, 2014. № 7. С. 253–256.
6. Программно-аппаратный модуль колесного робота / Е. В. Долгова, В. В. Зубов // Вестник Пермского государственного технического университета. Электротехника, информационные технологии, системы управления. 2010. № 4 . С. 108–114.
7. Производственные системы с искусственным интеллектом / Р. А. Алиев, Н. М. Абдикеев, М. М. Шахназаров. Москва.: Радио и связь, 1990. 263 с.
8. Распознавание как этап создания модели технической системы / Е. В. Долгова // Вестник ПГТУ. Электротехника, информационные технологии, системы управления. 2009. № 3. С. 102–105.
9. Фейнмановские лекции по физике. 2. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М., М.:МИР, 1967. 272 с.

УДК 532.546

*Лекомцев Д.Г.**Орловский государственный университет*

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАБОТЫ БАТАРЕИ СОВЕРШЕННЫХ СКВАЖИН В АНИЗОТРОПНОМ ГРУНТЕ

Аннотация. В статье ставится плоскопараллельная краевая задача о работе батареи совершенных скважин в анизотропно – однородном грунте, для случая, когда тензор проницаемости не симметричен, а контур питания моделируется прямой. В этом случае получена система уравнений, описывающая работу батареи скважин. В статье исследовано влияние анизотропии грунта на дебит батареи скважин. Изучен вклад отдельной скважины в общий дебит батареи скважин.

Ключевые слова: скважина, дебит, анизотропный пласт, прямолинейный контур питания, тензор проницаемости.

*D. Lekomtcev**Orel State University (Orel, Russia)*

MATHEMATICAL MODELING OF THE WORK OF A BATTERY OF DRILLED WELLS IN AN ANISOTROPIC BEDLAYER

Abstract. The article raises the plane-parallel boundary value problem of the battery performed well in anisotropic – homogeneous soil, for the case when the permeability tensor is not symmetric and simulated circuit power line. In this case, a system of equations describing the operation of the battery wells. The paper studied the effect of soil anisotropy on the battery discharge wells. Studied the contribution of a single well in the overall production rate of the battery wells.

Key words: well, debit, anisotropic bedlayer, straight – line contour of feeding, tensor of penetrability.

1. Постановка задачи.

В известных работах [1, с. 394–397, 4, с. 323–330, 5, с. 30–71, 6, с. 129–139] изучается фильтрация жидкости (в частности, осесимметричное течение к несовершенной скважине) в ортотропных пористых средах (грунтах), проницаемость которых характеризуется симметричным тензором второго ранга.

На физической комплексной плоскости $z=x+iy$ (x, y – декартовы координаты, рис. 1) скважина расположена в точке $z_{0v} = x_{0v} + iy_{0v}$, и течение происходит в области D с границей Σ , включающей контур питания σ_{Π} и контуры скважин σ_{Cv} , $(\Sigma = \sigma_{\Pi} \cup_{v=1}^n \sigma_{Cn})$. Контур питания σ_{Π} – прямая (ось Oy), а контур σ_{Cv} , $v=1,2,\dots,n$, представим в виде малой окружности с центром в точке z_{0v} . Контуры σ_{Π} и σ_{Cv} не пересекаются, d – минимальное расстояние от контура питания до батареи скважин на физической плоскости Oxy , L – расстояние между соседними скважинами на плоскости Oxy .

На контуре Σ течение должно удовлетворять условиям для обобщенного потенциала φ , эти условия запишем в виде [1, с. 394]

$$\varphi^+(z) = \alpha_{\Pi}(z), \quad z \in \sigma_{\Pi}, \quad (1.2)$$

$$\varphi(z) = \alpha_{Cv}(z), \quad z \in \sigma_{Cv}, \quad v=1,2,\dots,n \quad (1.3)$$

Здесь $\alpha_{\Pi}(z)$ и $\alpha_{Cv}(z)$ – непрерывные периодические функции, знаком «+» обозначено предельное значение обобщенного потенциала на контуре питания σ_{Π} при подходе к нему со стороны орта нормали $\vec{n}$. Так как контур σ_{Cv} мал, то можно требовать выполнения условия (1.3) в любой точке $z_* \in \sigma_{Cv}$.

Для практики представляют интерес два случая исследования работы скважины в пласте грунта заданной проницаемости K . В первом из них определяются дебит v – скважины Q_v по заданным на контуре Σ давлениям (на контуре Σ' заданы $\alpha'_{\Pi}(z)$ и $\alpha'_{Cv}(z)$). Во втором случае находятся давления (значения $\alpha_{Cv}(z)$, $z = z_* \in \sigma_{Cv}$ на контуре скважины) по заданному дебиту Q_v и давлению (задана функция $\alpha_{\Pi}(z)$) на контуре питания σ_{Π} . Для определенности решим задачу в первом случае.

Итак, на физической плоскости z ставится следующая граничная задача. Задана проницаемость пласта $K = (K_{ij})$ и условия (1.2), (1.3). Нужно найти дебит Q_v скважины. Задача сводится к решению уравнения (1.1) при условиях (1.2) и (1.3). Эта задача относится к первой внутренней краевой задаче (задаче Дирихле) которая имеет единственное решение [3, с. 243].

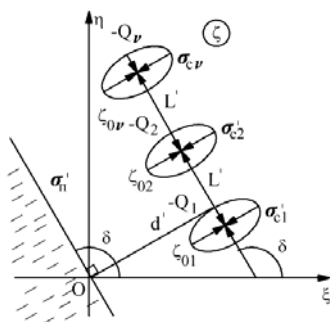


Рис. 2. Постановка задачи на вспомогательной плоскости $O\xi\eta$.

Сложный вид уравнения (1.1) затрудняет решение поставленной задачи, поэтому для исследования течения введем вспомогательную плоскость $\zeta = \xi + i\eta$ (ξ, η – декартовы координаты, рис. 2). Перейдем на плоскость ζ , для этого применим гомеоморфное (взаимно однозначное и непрерывное) аффинное прямое (и обратное) преобразование [1, с.395]

$$\zeta = z + \mu_0 \bar{z} \quad \left(z = \frac{\zeta + \mu_0 \bar{\zeta}}{1 - |\mu_0|^2} \right) \quad (1.4)$$

$$\text{где } \mu_0 = \frac{K_{22} - K_{11} - i(K_{12} + K_{21})}{K_{22} + K_{11} + 2\sqrt{D(K_s)}}, |\mu_0| < 1.$$

Из (1.4) следуют формулы связывающие координаты физической (x, y) и вспомогательной плоскостей (ξ, η):

$$\xi = (1+a)x + by, \quad \eta = bx + (1-a)y \quad (1.5)$$

$$x = \frac{(1-a)\xi - b\eta}{1-a^2-b^2}, \quad y = \frac{(1+a)\eta - b\xi}{1-a^2-b^2}$$

$$\text{в которых } a = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1 + 2\sqrt{\alpha - \beta^2}}, \quad b = -\frac{2\beta}{\alpha + 1 + 2\sqrt{\alpha - \beta^2}},$$

$$\alpha = \frac{K_{22}}{K_{11}} > 0, \quad \beta = \frac{K_{12} + K_{21}}{2K_{11}}, \quad \gamma = \frac{K_{12} - K_{21}}{2K_{11}} \quad (\beta^2 < \alpha).$$

Сформулируем поставленную задачу на вспомогательной плоскости ζ . На плоскости ζ течение описывает следующее из (1.1), согласно преобразованиям (1.4) (или (1.5)), уравнение Лапласа для $\varphi = \varphi(\xi, \eta)$:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} = 0. \quad (1.6)$$

На плоскости ζ , область течения D' ограничена кривой $\Sigma' = \sigma'_{\Pi} \cup_{\nu=1}^n \sigma'_{C\nu}$ (σ'_{Π} – контур питания, $\sigma'_{C\nu}$ – эллипс с центром в точке $\zeta_{0\nu}$), являющейся в соответствии с (1.4) образом кривой Σ . Таким образом ν – скважина того же дебита Q_{ν} расположена в точке $\zeta_{0\nu} = z_{\nu} + \mu_0 \bar{z}_{\nu}$ этой плоскости.

Работу ν – скважины моделируем стоком мощности Q_{ν} ($Q_{\nu} > 0$), расположенном в точке $\zeta_{0\nu}$. Течение в отсутствии границы Σ' описывает обобщенный потенциал $\varphi_0(\zeta)$, который запишем в виде

$$\varphi_0(\zeta) = \sum_{\nu=1}^n Q_{\nu} \Phi_{\nu}(\zeta, \zeta_{0\nu}) \quad (1.7)$$

Здесь $\Phi_{\nu}(\zeta, \zeta_{0\nu})$ – первое фундаментальное решение по переменной ζ уравнения (1.6), которое имеет вид [3, с.395]:

$$\Phi_{\nu}(\zeta, \zeta_{0\nu}) = \frac{1}{2\pi\sqrt{D(K_s)}} \ln \frac{1}{|\zeta - \zeta_{0\nu}|} \quad (1.8)$$

$$(|\zeta - \zeta_{0\nu}| = [(\xi - \xi_{0\nu})^2 + (\eta - \eta_{0\nu})^2]^{1/2})$$

Обобщенный потенциал течения $\varphi(\zeta)$ представим в виде:

$$\varphi(\zeta) = \varphi_0(\zeta) + \varphi_*(\zeta),$$

где $\varphi_*(\zeta)$ – обобщенный потенциал возмущений (гармоническая функция), обусловленный существованием границы Σ' . В этом случае условия (1.2), (1.3) для $\varphi_*(\zeta)$ можно записать в виде:

$$\varphi_*^+(\zeta) = \alpha'_{\Pi}(\zeta) - \varphi_0(\zeta), \quad \zeta \in \sigma'_{\Pi}, \quad (1.9)$$

$$\varphi_*(\zeta) = \alpha'_{C\nu}(\zeta) - \varphi_0(\zeta), \quad \zeta \in \sigma'_{C\nu}, \quad \nu=1,2,\dots,n. \quad (1.10)$$

Условие (1.10) выполняется на контуре скважины $\sigma'_{C\nu}$, размер которого мал в сравнении с характерным размером области D' . Поэтому можно потребовать выполнение условия (1.10) в какой-нибудь точке ζ_* контура $\sigma'_{C\nu}$ ($\zeta = \zeta_* \in \sigma'_{C\nu}$). Согласно (1.5) контур скважины $\sigma'_{C\nu}$ – эллипс с полуосями $A_C = R_C(1 + \mu_0)$ и $B_C = R_C(1 - \mu_0)$ [2, с. 71]. Заменим эллиптический контур

скважины $\sigma'_{c\nu}$ окружностью $\tilde{\sigma}'_{c\nu}$ «эффективного» радиуса R'_c . Радиуса R'_c выберем так, чтобы площадь круга ограниченного окружностью $\tilde{\sigma}'_{c\nu}$ была равна площади ограниченной контуром $\sigma'_{c\nu}$: $\pi R'^2_c = \pi A_C B_C$. Отсюда следует $R'_c = \sqrt{A_C B_C}$ или, как показано в [2, с. 71], $R'_c = R_C \sqrt{1 - |\mu_0|^2}$.

Следовательно, решение задачи о дебите ν -скважины сводится в плоскости $O\xi\eta$ к нахождению гармонической функции φ (потенциала скорости), удовлетворяющего уравнению (1.6) с учетом условий (1.9), (1.10).

2. Дебит скважины.

Следуя [2, с. 72, 6, с. 107], задачу о работе системы скважин с прямолинейным контуром питания в анизотропном пласте грунта сведем к решению системе уравнений

$$\begin{cases} \varphi_n - \varphi_{c1} = \frac{1}{2\pi\sqrt{D(K_s)}} \left(Q_1 \ln \frac{2d'}{R'_c} + Q_2 \ln \frac{2d'}{r_{2,1}} + Q_3 \ln \frac{2d'}{r_{3,1}} + \dots + Q_n \ln \frac{2d'}{r_{n,1}} \right) \\ \varphi_n - \varphi_{c2} = \frac{1}{2\pi\sqrt{D(K_s)}} \left(Q_1 \ln \frac{2d'}{r_{1,2}} + Q_2 \ln \frac{2d'}{R'_c} + Q_3 \ln \frac{2d'}{r_{3,2}} + \dots + Q_n \ln \frac{2d'}{r_{n,2}} \right) \\ \dots \\ \varphi_n - \varphi_{c\nu} = \frac{1}{2\pi\sqrt{D(K_s)}} \left(Q_1 \ln \frac{2d'}{r_{1,\nu}} + Q_2 \ln \frac{2d'}{r_{2,\nu}} + \dots + Q_\nu \ln \frac{2d'}{R'_c} + \dots + Q_n \ln \frac{2d'}{r_{n,\nu}} \right) \\ \dots \\ \varphi_n - \varphi_{cn} = \frac{1}{2\pi\sqrt{D(K_s)}} \left(Q_1 \ln \frac{2d'}{r_{1,n}} + Q_2 \ln \frac{2d'}{r_{2,n}} + Q_3 \ln \frac{2d'}{r_{3,n}} + \dots + Q_n \ln \frac{2d'}{R'_c} \right) \end{cases} \quad (2.1)$$

где $\varphi_{c\nu}$ - забойное давление ν - скважины, $r_{1,\nu}$, $r_{2,\nu}$, ..., $r_{n,\nu}$ - расстояние от центров остальных скважин до центра ν - скважины.

В соответствии с преобразованием (2.1) контур питания в плоскости $O\xi\eta$ - прямая σ'_Π :

$$(1-a)\xi - b\eta = 0 \quad (2.2)$$

Согласно [2, с. 71] прямая σ'_Π образует с осью $O\xi$ угол δ ($\operatorname{tg}\delta = (1-a)/b$ при $b \neq 0$; $\delta = \pi/2$ при $b=0$). Используя преобразование (1.4) можно найти расстояния d' и L' на вспомогательной плоскости $O\xi\eta$. Минимальное расстояние от контура питания до батареи скважин:

$$d' = \frac{d(1 - |\mu_0|^2)}{\sqrt{(1-a)^2 + b^2}}. \quad (2.3)$$

Кратчайшее расстояние между соседними скважинами на вспомогательной плоскости $O\xi\eta$ выражается соотношением:

$$L' = \frac{L(1 - |\mu_0|^2)}{\sqrt{(1-a)^2 + b^2}} \quad (2.4)$$

Дебит Q_v ищем из (2.1) с учетом выражений (2.3) и (2.4). Если $n=1$, то система (2.1) переходит в уравнение, описывающее работу совершенной скважины с прямолинейным контуром питания в анизотропном пласте грунта [2, с.72].

Для исследования влияния анизотропии грунта на дебит введем величину ε - относительный дебит.

$$\varepsilon = \frac{\sum_{v=1}^n Q_v}{Q_0} - 1 \quad (2.5)$$

где Q_0 - дебит скважины с прямолинейным контуром питания в изотропной среде [6, с. 106].

$$Q_0 = \frac{2\pi(\varphi_n - \varphi_c)}{\ln \frac{2d}{R_c}}. \quad (2.6)$$

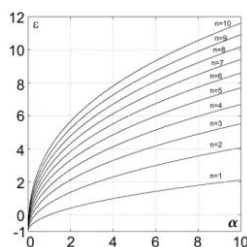


Рис. 3. Зависимости относительного дебита ε от коэффициента α ($\beta=0$, $\gamma=0$, $d=10L$, $L=1000 R_C$).

На рис. 3 показаны рассчитанные зависимости относительного дебита ε от значений коэффициента α . Анизотропия грунта может значительно изменять дебит батареи (возможно, его увеличение или уменьшение по

сравнению с Q_0). Для случая $n=1$, кривая отражает работу одиночной совершенной скважины с прямолинейным контуром питания в анизотропном пласте грунта, результат совпадает с [2, с. 72]. Данных характеризующие вклад каждой последующей скважины в общий дебит батареи представлены в таблице 1. Величина $\frac{\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n}{\varepsilon_n}$ характеризует изменение дебита батареи из $n+1$ скважин, по сравнению с дебитом батареи из n скважин. Видно, что вклад каждой последующей скважины в общий дебит батареи уменьшается.

Таблица 1

Вклад скважин в дебит батареи, $\alpha=10$ ($\beta=0$, $\gamma=0$, $d=10L$, $L=1000 R_C$).

Число скважин n	Дебит батареи ε	$\frac{\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n}{\varepsilon_n}$
1	2.11	-
2	4.07	0.927
3	5.52	0.355
4	6.69	0.212
5	7.69	0.150
6	8.59	0.116
7	9.41	0.096
8	10.18	0.082
9	10.91	0.072
10	11.61	0.064

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Орловской области в рамках научного проекта №12-01-97522 р_центр_а.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Пивень В.Ф. Задача о работе системы скважин в анизотропном пласте грунта // Труды XIV Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики», Херсон, 8-12 июня 2009 г. Харьков: Издательство Харьковского национального университета, 2009. С. 394–397.
2. Пивень В.Ф., Лекомцев Д.Г. Математическое моделирование работы совершенной скважины

- с прямолинейным контуром питания в анизотропном пласте грунта // Ученые записки Орловского государственного университета. 2012. № 3. С. 69–74.
3. Пивень В.Ф. Постановка основных граничных задач фильтрации в анизотропной пористой среде // Труды XIII Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики», Херсон, 11–16 июня 2007 г. Харьков: Издательство Харьковского национального университета, 2007. С. 239–243.
 4. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука. 1977. 664 с.
 5. Радьгин В.М., Голубева О.В. Применение функций комплексного переменного в задачах физики и техники: учеб. пособие для студентов педвузов. М.: Высшая школа, 1983. 160 с.
 6. Чарный И.А. Подземная гидрогазодинамика. М.: Государственное научно-техническое издательство нефтяной и горно-топливной литературы, 1963. 397 с.

РАЗДЕЛ III. ТЕОРИЯ И МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ И ВОСПИТАНИЯ

УДК 512

Забелина С.Б., Пинчук И.А

Московский государственный областной университет

О РАЗВИТИИ КОГНИТИВНОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ КОМПЕТЕНТНОСТИ СТУДЕНТОВ ПРИ ИЗУЧЕНИИ СПЕЦИАЛЬНЫХ ПРОФЕССИОНАЛЬНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ДИСЦИПЛИН

Аннотация. В статье обсуждается когнитивная составляющая исследовательской компетентности будущих учителей математики, и рассматриваются уровни строгости изложения математического знания при изучении математических дисциплин в целях развития когнитивной составляющей исследовательской компетентности, раскрыта методика работы преподавателя согласно уровня строгости учебного материала. Выделенные уровни строгости изложения иллюстрируются возможными подходами к построению поля комплексных чисел как расширения поля действительных чисел.

Ключевые слова: математические дисциплины, математическое доказательство, показатели строгости доказательства, уровни строгости, исследовательская компетентность.

S. Zabelina, I. Pinchuk

Moscow State Regional University (Moscow, Russia)

ON THE COGNITIVE COMPONENT OF THE RESEARCH COMPETENCE OF STUDENTS IN THE STUDY OF SPECIAL PROFESSIONAL MATHEMATICAL DISCIPLINES

Abstract. This paper discusses the cognitive component of the research competence of future teachers of mathematics and examines levels rigor of mathematical knowledge in the study of

mathematical disciplines in order to develop the cognitive component of research competence, discloses a technique for working pre- feeder according to severity level of educational material. These selected levels rigor are illustrated by possible approaches to the construction of the complex numbers as an extension of the field of real numbers.

Key words: mathematics, mathematical proof, indicators of stringency of evidence, levels of stringency, research competence.

Когнитивная составляющая исследовательской компетентности раскрывается через знания об актуальных направлениях исследований математической и педагогической науке, нацеленность на открытие нового, способность целенаправленно управлять своей умственной деятельностью, умение выявлять причинно - следственные связи, устанавливать новые связи между явлениями; умение применять логический анализ, умение синтезировать научные знания и исследовательский опыт. Развитие когнитивной составляющей исследовательской компетентности учителей математики осуществляется в процессе их профессиональной подготовки в педагогических вузах при освоении в частности математических дисциплин. Для обеспечения этого процесса обучение студентов математическим дисциплинам должно иметь направленность на решение проблем восприятия, познания обучающимися математических фактов, внешних и внутренних их логических связей, на приобретение, обработку, структурирование, сохранение и использование знаний для проектирования будущих обучающих стратегий. В условиях введения новых государственных образовательных стандартов меняются объем и подходы к освоению учебного материала, наборы задач по специальным математическим дисциплинам, что естественно влечет изменения в уровне строгости изложения математического знания.

В математических дисциплинах понятие доказательства играет центральную роль, так как статус любых математических результатов определяется присутствием доказательств и их корректностью. Корректность математического доказательства - сложное качество. Приступая к доказательству математического предложения, мы определяем некоторое число исходных посылок - аксиом, предполагая, что не потребуется никакой другой внешней по отношению к выявленным аксиомам информации необходимой для осуществления доказательства теоремы. Таким образом, корректное, или

строгое доказательство - это доказательство, выводимое из конечного числа явных утверждений, и «герметичное» по отношению к ним [1]. Математическое доказательство является строгим, если также мы предполагаем, что примененные в нем логические правила вывода адекватные, надежные, безупречные. Различные доказательства используют более или менее богатый набор логических схем, но с принципиальной стороны это несущественно. Свойства герметичности и адекватности логических норм не исчерпывают собой показатели строгости математического доказательства. Может оказаться так, что в системе предпосылок осуществленного доказательства можно доказать и противоположное утверждение. В этом случае доказательство перестает быть для нас таковым. Следовательно, для строгости доказательства математического утверждения необходимо также обосновать непротиворечивость всех утверждений, выводимых из выбранной системы аксиом.

С понятием строгости доказательства связано понятие его достоверности. Достоверность характеризует доказательство с позиции предмета рассуждения, с фактического положения дел в некоторой внутриматематической реальности. Достоверное доказательство – значит, гарантированное от контрпримеров.

Возвращаясь к вопросу об уровне строгости изложения математических знаний в процессе преподавания математических дисциплин, мы будем вынуждены расширить границы понимания строгости доказательства, точнее привнесем в наши представления о математической строгости методический аспект, что превратит последнее в доказательство содержательное, психологическое. В.А. Успенский отмечает, что доказательство есть «рассуждение, которое убеждает того, кто его воспринял, настолько, что он делается готовым убеждать других с помощью этого же рассуждения» [2, с. 12]. Доказательство должно не только формально убеждать обучающегося в истинности той или иной теоремы, но и объяснять смысл доказываемого утверждения, воспитывать интуицию к суждениям, выявлению закономерностей, формировать у студента исследовательский тип поведения.

Постижение студентом логики процесса математического доказательства должно проходить постепенно, согласно с его познавательными возможностями, через противопоставление с интуицией и эвристическими методами рассуждений. Мы выделяем три уровня строгости изложения математических знаний в процессе преподавания математических дисциплин: элементарный, функциональный, преобразующий. По мере изучения предмета уровень строгости изучаемых теорем должен возрасти. Каждый уровень строгости должен быть подготовлен преподавателем, а обучающиеся должны «дорасти» до него, должны испытать внутреннюю потребность в таком усилении логической строгости. На элементарном уровне строгости изложения математических знаний преподавателю необходимо выработать такой подход к проведению математического доказательства, в котором дидактически целесообразно соотносились бы интуиция и логика.

На функциональном уровне строгости изложения математических знаний преподаватель выстраивает доказательства из логически строгих путем изъятия из них некоторых частей, которые восстанавливаются самими студентами в ходе их самостоятельной работы. Методическая задача в этом случае состоит в том, чтобы, исходя из строгого доказательства теоремы, сконструировать такое ее доказательство, которое бы не нарушало логики, не содержало математической ошибки. Примером могут служить доказательства, в которых не рассмотрены до конца все возможные случаи, при условии, что их рассмотрение происходит аналогично. Или дается лишь общая логическая схема доказательства без углубления в его детали.

На преобразующем уровне строгости изложения математических курсов преподаватель выстраивает строгие доказательства, активизируя студентов на поиск, отбор исходных положений, выбор метода рассуждений, подбор аргументов.

Для примера рассмотрим возможные доказательства, связанные с построением поля комплексных чисел [3]. Напомним один из возможных способов такого построения. Пусть $M = \{(a, b) | a, b \in R\}$ – декартов квадрат поля действительных чисел R , на котором определяются операции сложения и умножения пар: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d); (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, bc +$

ad). Проверяется, что для так заданных операций выполняются все аксиомы из определения поля, причем некоторую часть этих аксиом можно предложить доказать студентам самостоятельно, ориентируясь на доказательства, проведенные преподавателем. Таким образом, получаем, что M – поле. На следующем этапе выбираем подмножество $T = \{(a, 0) | a \in R\}$ поля M и проверяем, что оно является его подполем, изоморфным полю действительных чисел R . Это означает, что подмножество T замкнуто относительно операций, определенных в M , и существует биективное отображение $f: T \rightarrow R$, заданное условием $f(a, 0) = a$, сохраняющее операции. Далее на функциональном уровне строгости изложения математических знаний можно предложить студентам отождествить поле T с полем действительных чисел, то есть каждую пару вида $(a, 0)$ считать действительным числом a . Тогда M превращается в расширение поля действительных чисел и называется полем комплексных чисел. На преобразующем уровне строгости изложения рассмотрим множество $K = (M \setminus T) \cup R$ и превратим его в поле. Для определения операций в K используем отображение $\varphi: M \rightarrow K$, определенное условиями: для всех $(a, b) \in M \setminus T$ $\varphi(a, b) = (a, b)$; для всех $(a, 0) \in T$ $\varphi(a, 0) = f(a, 0) = a$. φ – биективное отображение, так как на множестве $M \setminus T$ это отображение тождественно, а на T совпадает с отображением f . Для любых элементов $u, v \in K$ зададим их сумму и произведение следующим образом

$$u + v = \varphi(\varphi^{-1}(u) + \varphi^{-1}(v));$$

$$u \cdot v = \varphi(\varphi^{-1}(u) \cdot \varphi^{-1}(v)).$$

Покажем, что относительно этих операций K является полем. Биективное отображение φ , очевидно, является изоморфизмом, а, следовательно, множество K как множество, изоморфное полю, является полем, и поле действительных чисел R его подполем. Таким образом, поле K есть расширение поля действительных чисел, оно называется полем комплексных чисел.

Каким должно быть соотношение между уровнями строгости математических доказательств при изучении математических дисциплин? Это зависит от многих факторов: кому читается данный курс, какие цели ставятся по его изучению, сколько времени на него отводится и т. п. Однако стоит

отметить, что изучение строгих математических доказательств составляет ту сторону математики, которая в большей степени развивает мышление, воспитывает целеустремленность и настойчивость. Кроме того, строгие математические доказательства помогают глубже раскрыть смысл вводимых математических понятий, овладеть ими и правильно применять на практике, помогают установить логические связи между отдельными частями математического курса. Они позволяют полнее овладеть математическими методами, выработать необходимые для их использования умения, лучше осознать границы применимости этих методов. Преподавание математических курсов в педвузе будущим учителям математики на наш взгляд должно быть преимущественно строго доказательным. Те, кто в будущем сами будут обучать математике, должны как можно большую часть своего предмета изучить, опираясь на логически строгие доказательства.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Перминов В.Я., Развитие представлений о надежности математического доказательства / М.: Едиториал УРСС, 2004. Изд. 2-е. 240 с.
2. Успенский В.А., Простейшие примеры математических доказательств. М.: Изд-во МЦНМО, 2012. Изд. 2-е. 56 с.
3. Д.К. Фаддеев, Лекции по высшей алгебре. М.: Изд-во Лань, 2005. 416 с.

УДК 681.883.7

Максимова О.В., Максимов С.М.

Ульяновский государственный технический университет

РАЗРАБОТКА МЕТОДОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ СВОТТЕХНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ТОНКОПЛЕНОЧНЫХ ЭЛЕКТРОЛЮМИНЕСЦЕНТНЫХ КОНДЕНСАТОРОВ

Аннотация: Исследование тонкопленочных электролюминесцентных индикаторов является актуальной задачей, особенно при проектировании средств отображения информации для техники специального назначения. Особый интерес представляет исследование светотехнических характеристик. В данной работе рассмотрен один из способов определения яркости, на основе применения вычислительных средств. В настоящий момент тонкопленочные электролюминесцентные индикаторы являются наиболее перспективными в рамках специализированной техники, в виду высокой яркости, надёжности, широкого угла обзора и быстродействия. Для определения параметров тонкопленочных структур, а так же их характеристик, используют различные системы уравнений. Оценивать получаемую яркость, а так же конструкторские параметры оказывающие влияние на результат, является важной задачей при проектировании новых изделий.

Ключевые слова: Индикатор, яркость, светоотдача, электролюминесценция, численные методы, моделирование.

O. Maksimova, S. Maksimov

Ulyanovsk State Technical University (Ulyanovsk, Russia)

DEVELOPMENT OF METHODS FOR MODELING LIGHT CHARACTERISTICS OF THIN-FILM ELECTROLUMINESCENT CAPACITORS

Abstract. For the design of display products for technique of special purpose thin-film electroluminescent investigation of indicators is an important task. Of particular interest is

investigation of lighting characteristics. In this paper we consider one of the ways to determine the brightness based on the use of computational tools. Currently thin-film electroluminescent indicators are the most promising, since high brightness, reliability, wide viewing angle and speed. For determining the parameters of thin-film structures that have used different systems of equations. Evaluate the resulting brightness, as well as design parameters influencing the result is an important task in the design of new products.

Key words: Indicator, brightness, luminous efficiency, electroluminescence, numerical methods, modeling.

Одной из важнейших задач при проектировании современной специальной техники является разработка средств отображения информации с оптимальными техническими и эргономическими характеристиками. В настоящее время к эксплуатационным параметрам индикаторной техники предъявляют все более жесткие требования.

Тонкопленочные электролюминесцентные индикаторы обладают рядом преимуществ по сравнению с другими типами плоских излучателей: высокой яркостью и светотдачей, большим углом обзора, высокой разрешающей способностью и пространственной однородностью изображения, малой потребляемой мощностью, быстродействием, относительной простотой изготовления и др. В связи с этим они рассматриваются в качестве перспективных активных светоизлучающих устройств.

За последние годы были получены значительные результаты в исследовании индикаторных устройств на основе тонкопленочных электролюминесцентных конденсаторов.

В ранних работах авторов были исследованы процессы, протекающие в тонкопленочных электролюминесцентных конденсаторах. Исследования проведены для треугольной, трапецеидальной, синусоидальной и прямоугольной форм напряжения в случае периодического знакопеременного симметричного возбуждения. Были получены аналитические уравнения, описывающие электрические характеристики. Но вместе с тем анализ зависимости светотехнических характеристик, таких как яркость и светотдача, при различных условиях возбуждения и формах напряжения не проводился.

Для проектирования тонкопленочных электролюминесцентных индикаторов и устройств на их основе с заданными характеристиками особый интерес представляет математическое моделирование зависимости

светотехнических характеристик от условий возбуждения и форм напряжения. Задача эта является актуальной в связи с тем, что яркость и светоотдача являются основными характеристиками для пользователей тонкопленочных электролюминесцентных средств отображения информации.

На предыдущих этапах исследования была проанализирована основная характеристика электролюминесцентных источников света - зависимость яркости излучения от приложенного напряжения (вольт - яркостная характеристика) [2]. На рисунке 1 представлена типичная вольт - яркостная характеристика тонкопленочной электролюминесцентной структуры на основе сульфида цинка, легированного марганцем [3].

Вольт - яркостная характеристика тонкопленочных излучателей имеет пороговый характер. При превышении некоторого значения напряжения происходит рост яркости.

Были исследованы свойства материалов люминофоров, а именно, пороговая напряженность электрического поля, которая определяет значение величины порогового напряжения, а также величина и соотношение емкостей люминесцентного и диэлектрического слоев. Значение пороговой напряженности электрического поля в слоях люминофора, изолированных от слоев металлизации, осуществляется механизмом генерации свободных носителей заряда $10^5 \sim 10^6$ В/см [3].

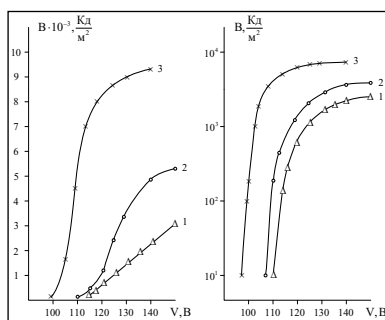


Рис. 1. Вольт-яркостная характеристика тонкопленочного электролюминесцентного конденсатора в линейных и полулогарифмических координатах ($f=1$ кГц (1); 5 кГц (2) и 20 кГц (3)).

В ранних работах по данной тематике была установлена и проанализирована зависимость величины максимальной яркости тонкопленочных электролюминесцентных структур от свойств люминофора и конструктивных параметров светоизлучающего конденсатора. Было установлено [2] что с увеличением приложенного напряжения для вольт – яркостных характеристик происходит насыщение яркости. При увеличении частоты знакопеременного возбуждающего напряжения, насыщение можно наблюдать при меньших его значениях и величина максимальной яркости увеличивается. Все вышеуказанные наблюдения проводились для тонкопленочных электролюминесцентных структур на основе сульфида цинка, легированного марганцем. Полученное экспериментальным путем значение максимальной яркости для таких структур составляет $3,4 \cdot 10^4$ кд/м².

Спектр излучения тонкопленочных электролюминесцентных структур, так же как у порошковых конструкций зависит от материала люминесцентного слоя, характера и количества активаторных центров свечения, порядка возбуждения электролюминесценции. При выборе активаторной примеси желательно, чтобы она образовывала центры свечения, излучающие в видимом диапазоне, обладающие высокой эффективностью свечения, хорошо растворяющиеся в материале основы и изовалентные или нейтральные по отношению к основному веществу. Перспективными светотехническими и спектральными характеристиками обладают структуры, в которых в качестве люминесцентного слоя использован сульфид цинка, легированный марганцем или фторидами редкоземельных элементов, где люминесценция носит внутрицентровой характер.

Из таблицы 1 и исследований [1] видно, что параметры люминофоров тонкопленочных электролюминесцентных излучателей зависят от различных факторов, таких как условие возбуждения (амплитуда и форма напряжения, подаваемого на структуру, его частота), характеристик материала образцов и т. д.

Был сделан положительный вывод о показателях надежности тонкопленочных электролюминесцентных конденсаторов. Так яркость деградирует менее чем на 25 % спустя десять лет непрерывной эксплуатации.

Средства отображения информации на базе таких индикаторов обладают минимальной зрительной нагрузкой.

Таблица 1.

Параметры ТПЭЛ конденсаторов

Цвет свечения	Состав люминофора	Максимум спектра, лм/нм	Максимальная яркость, кд/м ²	Условия возбуждения	Максимальная светоотдача, лм/Вт
Красный	ZnS:SmF ₃	650	1000 14	5 кГц 60 Гц	0,08 0,1
	ZnS:SmP	-	14	60 кГц	-
	CaS:Eu	650	450	5 кГц	-
Желтый	ZnS:Mn	-	9000	-	8-10
		585	10000	5 кГц	3-6
		590	34000	5 кГц	8
		585	10000	10 кГц	3,5
	ZnS:Dy ₂ F ₃	570	445	5 кГц	0,05
Эелёный	ZnS:TbF ₃	542	10000 100	- 60 Гц	0,4 -
	ZnS:Eu	525 550-0,4 665-0,1	495	5 кГц	0,04
	CaS:Ce	-	650	5 кГц	-
Синий	SrS:Ce	475 520-550	1300	5 кГц	-
		470	1600 144	5 кГц 1 кГц	- 0,15
	ZnS:TmF ₃	800-0,5 476	- 10	- 5 кГц	- 0,003
		490 660	950 950	1 кГц 1 кГц	-
Белый	SrS:Ce/CaS:Eu	-	1400	5 кГц	-
	SrS:Ce/ZnS:Mn	-	110	-	-
	ZnS,PrF ₃	-	342	5 кГц	0,03

Эффективность процессов преобразования электрической энергии в световое излучение характеризуется коэффициентом светоотдачи тонкопленочного электролюминесцентного излучателя, определяемого как отношение излучаемого светового потока к потребляемой активной мощности [2]:

$$\eta = L / P \quad (1)$$

Значение светоотдачи зависит от конструктивных параметров материалов люминесцентных и диэлектрических слоев, амплитуды, частоты и формы возбуждающего напряжения. В результате проведенных исследований был произведен автоматизированный подбор комбинаций пятислойных структур тонкопленочных электролюминесцентных конденсаторов с оптимальными значениями светоотдачи, для этого на этапах разработки автоматизированной системы научных исследований характеристик тонкопленочных электролюминесцентных конденсаторов были детально изучены физические процессы, лежащие в основе преобразования энергии в тонкопленочных структурах [2, 6, 7].

Прикладной характер результатов математического моделирования яркости и светоотдачи заключается в разработке математического обеспечения систем автоматизации проектирования (САПР) тонкопленочных электролюминесцентных конденсаторов и комплексов программ автоматизации расчетов их основных светотехнических параметров.

Для прямого ударного возбуждения было получено уравнение изменения плотности возбуждённых центров свечения в плёнке люминофора [2]. Для решения этого уравнения используют различные приближения. Так решение разбивается на несколько частных случаев: когда ток люминофора равен нулю, а яркость имеет отличное от нуля значение, в начальный момент времени, и в случае максимальной яркости. Методы приближения позволяют значительно упростить решение уравнения, однако несколько частных случаев приводят к неточностям в построении зависимостей. Так же нельзя забывать, что все уравнения являются аппроксимацией реальных процессов, и вносить дополнительную погрешность нецелесообразно [4]. Все эти ограничения влекут

к значительной погрешности результатов моделирования. Поэтому для решения данного уравнения предлагается использовать другие методы, например, решение с помощью математического моделирования с использованием САПР и найти зависимость яркости от времени излучения.

В случае применения математических САПР достоинством является их универсальность и гибкость расчёта, так как позволяет вносить коррективы в системы уравнений участвующих в расчёте, в то время как готовый программный модуль, может быть изменён только программистом, с большими затратами времени. Так же к достоинству можно отнести наглядность, так как все зависимости видны пользователя, у программного модуля должна быть соответствующая программа. С другой стороны математические САПР имеют ряд ограничений: они ограничены заложенными алгоритмами решения, имеют ограничения по сложности решаемых уравнений. Однако в виду их гибкости и быстроты решения уравнения, они являются наиболее оптимальным вариантом для решения уравнения. В случае, когда решение не может быть найдено САПР или не является объективным, применяют специальный программный модуль [5].

Комбинированный подход, позволяет в некоторых случаях, решить сложные уравнения в автоматизированных системах математического моделирования, путём математических упрощений, понятных человеку, но не понятных машине, в виду того что она ограничена алгоритмом заложенным в неё, и не обладает аналитическим походом. В комбинированном подходе существует проблема формализации задачи анализа характеристик яркости и светоотдачи.

На основе проведенных исследований было предложено создать собственный программный модуль для решения вышеуказанной задачи. Предлагается следующая аналитическая последовательность этапов алгоритмизации. Используя метод численного интегрирования, в случае сходимости задачи до второго знака, найти решение. В качестве изменяемого параметра берется время с шагом в 0,25 с. на время заданное пользователем. В случае если задача не сошлась, вывести пользователю сообщение о не сходимости. В качестве начального значения взять рассчитанное значение

яркости в начальный момент времени или случай максимальной яркости. Решить данное уравнение методом Эйлера, сравнить результаты, если они были получены. Вывести пользователю данные о результатах расчётов. Построить графики зависимости яркости от времени, полученные двумя способами, в течение заданного пользователем времени.

В результате работы были рассмотрены варианты решений задачи нахождения зависимости яркости свечения тонкопленочного электролюминесцентного конденсатора от времени. Была предложена последовательность этапов алгоритмизации для нахождения зависимости яркости от времени. Что позволит в будущем создать программный модуль, моделирующий в автоматизированном режиме вольт-яркостную зависимость с учетом времени излучения.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Электролюминесцентные источники света. / И.К. Верещагин и др. М.: Энергоатомиздат, 1990. 168 с.
2. Максимова О.В., Самохвалов М.К. Разработка методов анализа и синтеза тонкопленочных электролюминесцентных элементов в индикаторных устройствах. Ульяновск: УлГТУ, 2010. 101 с.
3. Максимова О.В., Максимов С.М., Самохвалов М.К. Задачи автоматизации моделирования яркости и светоотдачи тонкопленочных электролюминесцентных конденсаторов. // Автоматизация процессов управления. 2014. 2(36). С. 98–105.
4. Максимова О.В., Евсевичев Д.А. САПР тонкопленочных электролюминесцентных индикаторов // Вестник Московского государственного областного университета. Серия «Физика и математика». 2012. № 2. С. 131–135.
5. Максимова О.В., Евсевичев Д.А., Самохвалов М.К. Автоматизированная система технологической подготовки производства тонкопленочных электролюминесцентных индикаторных устройств TFEL DDS // Автоматизация в промышленности. 2013. № 9. С. 39–42.
6. Самохвалов, М.К. тонкопленочные электролюминесцентные источники излучения. Ульяновск: УлГТУ, 1999. 117 с.
7. Самохвалов, М.К. Конструкции и технология тонкопленочных электролюминесцентных индикаторов. Ульяновск: УлГТУ, 1997. 56 с.

НАШИ АВТОРЫ

Алиев Исмаил Новруз оглы – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры ФН4 (физика) Московского государственного технического университета имени Н.Э. Баумана; e-mail: alievprof@yandex.ru

Апраксина Татьяна Валентиновна – аспирант Национального исследовательского университета «МИЭТ» (г. Москва); e-mail: Taya.apraksina@gmail.com

Барabanова Наталья Николаевна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры общей физики Московского государственного областного университета; e-mail: d21215507@yandex.ru

Беляев Виктор Васильевич – доктор технических наук, профессор, почетный член Международного дисплейного общества, главный научный сотрудник, заведующий кафедрой теоретической физики Московского государственного областного университета; e-mail: vic_belyaev@mail.ru

Богданов Дмитрий Леонидович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой общей физики Московского государственного областного университета; e-mail: bogdl@rambler.ru

Брюханова Анастасия Александровна – студент-магистр группы РИС-13-1м Пермского национального исследовательского политехнического университета; e-mail: a.bryuhanova@gmail.com

Бугримов Анатолий Львович – доктор технических наук, профессор, декан физико-математического факультета Московского государственного областного университета; e-mail: al.bugrimov@mgu.ru

Дадиванян Артем Константинович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры теоретической физики Московского государственного областного университета; e-mail: vic_belyaev@mail.ru

Долгова Елена Владимировна – доктор экономических наук, профессор, профессор кафедры информационных технологий и автоматизированных систем Пермского национального исследовательского политехнического университета; e-mail: Elena.dolgova@gmail.com

Забелина Светлана Борисовна – старший преподаватель кафедры высшей алгебры, элементарной математики и методики преподавания математики Московского государственного областного университета; e-mail: zabelina_sb@mail.ru

Кожухов Игорь Борисович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры высшей математики Национального исследовательского университета «МИЭТ» (г. Москва); e-mail: kozhuhov_i_b@mail.ru

Кузнецов Вадим Михайлович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой физики Российского химико-технологического университета им. Д.И. Менделеева (г. Москва); e-mail: vadim.kuznetsov.37@mail.ru

Кузьмин Михаил Кузьмич – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры математического анализа и геометрии Московского государственного областного университета; e-mail: lesir179@infoline.su

Курилов Александр Дмитриевич – старший лаборант кафедры теоретической физики Московского государственного областного университета; e-mail: ad.kurilov@gmail.com

Курушин Даниил Сергеевич – кандидат технических наук, доцент кафедры информационных технологий и автоматизированных систем Пермского национального исследовательского политехнического университета; e-mail: Elena.dolgova@gmail.com

Латышев Анатолий Васильевич – доктор физико-математических наук, заслуженный деятель науки РФ, заслуженный работник высшей школы, заведующий кафедрой математического анализа и геометрии Московского государственного областного университета; e-mail: avlatyshev@mail.ru

Лекомцев Денис Геннадьевич – аспирант Орловского государственного университета; e-mail: lekomtcevdg@yandex.ru

Максимова Оксана Вадимовна – кандидат технических наук, доцент кафедры проектирования и технологии электронных средств Ульяновского государственного технического университета; e-mail: pites@ulstu.ru

Максимов Сергей Михайлович – аспирант кафедры проектирования и технологии электронных средств Ульяновского государственного технического университета; e-mail: pites@ulstu.ru

Осипов Михаил Алексеевич – доктор физико-математических наук, профессор, профессор университета Стретчклайд (г. Глазго); e-mail: m.osipov@strath.ac.uk

Пинчук Ирина Александровна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей алгебры, элементарной математики и методики преподавания математики Московского государственного областного университета; e-mail: kaf-vaem@mgou.ru

Самедова Зарифа Алышан кызы – студентка Московского государственного технического университета имени Н.Э. Баумана; e-mail: samezara@b.k.ru

Терешкина Ксения Борисовна – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории динамики биополимеров Института химической физики им. Н.Н. Семёнова РАН (г. Москва); e-mail: ksenia.tereshkina@gmail.com

Толпаев Владимир Александрович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией подземной гидродинамики ОАО «СевКавНИПИГаз» (г. Ставрополь); e-mail: v.a.tolpaev@mail.ru

Трегулов Вадим Викторович – кандидат технических наук, доцент кафедры общей и теоретической физики и методики преподавания физики Рязанского государственного университета имени С.А. Есенина; e-mail: trwww@yandex.ru

Файзрахманов Рустам Абубакирович – доктор экономических наук, профессор, заведующий кафедрой информационных технологий и автоматизированных систем Пермского национального исследовательского политехнического университета; e-mail: Fayzrakhmanov@gmail.com

Чигринов Владимир Григорьевич – доктор технических наук, профессор, почетный член Международного дисплейного общества, профессор Гонконгского университета науки и техники; e-mail: eechig@ust.hk



ВЕСТНИК МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ОБЛАСТНОГО УНИВЕРСИТЕТА

Научный журнал «Вестник МГОУ» основан в 1998 г. На сегодняшний день выходят десять серий «Вестника»: «История и политические науки», «Экономика», «Юриспруденция», «Философские науки», «Естественные науки», «Русская филология», «Физика-математика», «Лингвистика», «Психологические науки», «Педагогика». Все серии включены в составленный Высшей аттестационной комиссией Перечень ведущих рецензируемых научных журналов, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертации на соискание ученой степени доктора и кандидата наук по наукам, соответствующим названию серии. Журнал включен в базу данных Российского индекса научного цитирования (РИНЦ).

Печатная версия журнала зарегистрирована в Федеральной службе по надзору за соблюдением законодательства в сфере массовых коммуникаций и охране культурного наследия. Полнотекстовая версия журнала доступна в Интернете на платформе Научной электронной библиотеки (www.elibrary.ru), а также на сайте Московского государственного областного университета (www.vestnik.mgou.ru).

ВЕСТНИК МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ОБЛАСТНОГО УНИВЕРСИТЕТА

СЕРИЯ «ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА»
2015. N 1

Над номером работали:

менеджер Отдела по изданию журнала «Вестник МГОУ» И.А. Потапова
корректор А.С. Барминова
компьютерная верстка К.С. Карасёва

Отдел по изданию научного журнала «Вестник МГОУ»
105005, г. Москва, ул. Радио, д.10а, офис 98
тел. (499) 261-43-41; (495) 723-56-31
e-mail: vest_mgou@mail.ru
Сайт: www.vestnik-mgou.ru

Формат 70х108/16. Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура «Minion Pro».

Тираж 500 экз. Уч.-изд. л. 4,25, усл. п.л. 7,5.

Подписано в печать 20.03.2015. Заказ № 2015/03-05.

Отпечатано в типографии МГОУ
105005, г. Москва, ул. Радио, 10а