

ISSN 2072-8387



Вестник

МОСКОВСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
ОБЛАСТНОГО
УНИВЕРСИТЕТА

Серия

ФИЗИКА-
МАТЕМАТИКА

ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО
КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ЧАСТОТой
СТОЛКНОВЕНИЙ, ПРОПОРЦИОНАЛЬНОЙ
МОДУЛЮ СКОРОСТИ МОЛЕКУЛ

РАЗРАБОТКА МЕТОДОВ
КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ
И АНАЛИЗА ТЕЧЕНИЯ ПУАЗЕЙЛЯ

ПОСТУПАТЕЛЬНО НЕРАВНОВЕСНЫЙ ПИРОЛИЗ
В СИЛЬНО ДИСПЕРГИРОВАННЫХ СМЕСЯХ ГАЗОВ



2014/ № 2

МАТЕМАТИКА

УДК 517.9/98+533.72

ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ КИНЕТИЧЕСКОГО ОДНОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ С ЧАСТОТОЙ СТОЛКНОВЕНИЙ, АФФИННО ЗАВИСЯЩЕЙ ОТ МОДУЛЯ СКОРОСТИ

А.Л. Бугримов, А.В. Латышев, А.А. Юшканов

*Московский государственный областной университет (МГОУ),
105005, Москва, ул. Радио, 10 а*

Аннотация. Для одномерного линеаризованного кинетического уравнения получены аналитические решения задач о температурном скачке и слабом испарении (конденсации) над плоской поверхностью. Уравнение имеет интеграл столкновений БГК (Бхатнагар, Гросс и Крук) и частоту столкновений молекул, аффинно зависящей от модуля молекулярной скорости.

Ключевые слова: кинетическое уравнение, частота столкновений, законы сохранения, разделение переменных, характеристическое уравнение, дисперсионное уравнение, дискретный и непрерывный спектры, собственные функции, задача Смолуховского.

Введение

В работе [1] было введено линейное одномерное кинетическое уравнение с интегралом столкновений БГК (Бхатнагар, Гросс и Крук) и частотой столкновений, аффинно зависящей от модуля скорости молекул.

В [1] была доказана теорема о структуре общего решения введенного уравнения.

В настоящей работе, являющейся продолжением [1], получены точные решения задачи о температурном скачке и слабом испарении (конденсации) в разреженном газе. Эти две задачи следуя [2] будем называть обобщенной задачей Смолуховского, или просто задачей Смолуховского.

Остановимся на истории исключительно аналитических решений обобщенной задачи Смолуховского.

Для простого (одноатомного) разреженного газа с постоянной частотой столкновений молекул аналитическое решение обобщенной задачи Смолуховского получено в [3].

В [4] обобщенная задача Смолуховского была аналитически решена для простого разреженного газа с частотой столкновений молекул, линейно зависящей от модуля скорости молекул.

В [5] была аналитически решена задача о сильном испарении (конденсации) с постоянной частотой столкновений.

Отметим, что впервые задача о температурном скачке с частотой столкновений молекул, линейно зависящей от модуля скорости молекул, была аналитически решена Кесселем и Вильямсом в работе [6] в 1972 году.

Затем в работах [7,8,9] задача Смолуховского была обобщена на случай многоатомных (молекулярных) газов и получено аналитическое решение.

В работах [10,11,12] рассмотрена проблема, близкая к задаче о температурном скачке для электронов, о поведении квантового бозе-газа при низких температурах. При этом было использовано кинетическое уравнение с возбуждением фононов согласно Н.Н. Боголюбову.

В работах [13,14] была решена задача о температурном скачке для электронов вырожденной плазмы в металле.

В работе [15] аналитическое решение задачи Смолуховского было получено и для квантовых газов.

В работах Черчиньяни и Фрезотти [16] задача Смолуховского рассматривалась с использованием одномерного кинетического уравнения. Полное аналитическое решение задачи Смолуховского с использованием уравнения Черчиньяни–Фрезотти было получено в работе [17].

В то же время остается нерешенная задача о скачке температуры и концентрации с использованием БГК-уравнения с произвольной зависимостью частоты от скорости, несмотря на очевидную важность решения задачи в подобной постановке.

В настоящей работе делается попытка продвинуться в этом направлении. Здесь рассматривается случай аффинной зависимости частоты столкновений от скорости молекул в модели одномерного газа. Модель одномерного газа давала хорошее согласие с результатами, посвященными трехмерному газу [17].

Приступим к постановке и решению задачи Смолуховского для одномерного кинетического уравнения с частотой столкновений, аффинно зависящей от модуля скорости молекул.

1. Постановка задачи и основные уравнения

Начнем с общей постановки. Пусть газ занимает полупространство $x > 0$. Задана температура поверхности T_s и концентрация насыщенного пара поверхности n_s .

Вдали от поверхности газ движется с некоторой скоростью u и имеет градиент температуры

$$\vartheta_T = \left(\frac{d \ln T}{dx} \right)_{x \rightarrow +\infty}.$$

Необходимо определить скачки температуры и концентрации в зависимости от скорости и градиента температуры.

В задаче о слабом испарении (конденсации) требуется определить скачки температуры и концентрации в зависимости от заданной скорости испарения (конденсации), считая градиент температуры равным нулю. Заданная скорость испарения (конденсации) считается много меньшей тепловой скорости молекул:

$$u \ll v_T,$$

где v_T – есть тепловая скорость молекул, m – масса молекулы,

$$v_T = \frac{1}{\sqrt{\beta}}, \quad \beta = \frac{m}{2kT_s}$$

k – постоянная Больцмана.

В задаче о температурном скачке требуется определить скачки температуры и концентрации в зависимости от заданного градиента температуры, считая, что скорость испарения (конденсации) равна нулю. Будем считать, что градиент температуры достаточно мал. Малость понимается в том смысле, что произведение средней длины свободного пробега молекул на градиент температуры много меньше единицы:

$$lg_T \ll 1, \quad l = v_T \tau,$$

где τ – среднее время свободного пробега газовых молекул.

Скорость испарения (конденсации) в этой задаче равна нулю.

Объединим обе задачи – о слабом испарении (конденсации) и скачке температуры – в одну. Будем предполагать малость градиента температуры (т.е. малость относительного перепада температуры на длине свободного пробега) и малость скорости газа по сравнению со скоростью звука. В этом случае задача допускает линеаризацию и функцию распределения можно искать в виде

$$f(x, v) = f_0(v)(1 + h(x, v)),$$

где

$$f_0(v) = n_0 \left(\frac{m}{2\pi kT_s} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left[-\frac{mv^2}{2kT_s} \right]$$

- есть абсолютный максвеллиан.

Возьмем линейное кинетическое уравнение, записанное относительно функции $h(x, v)$ с интегралом столкновений релаксационного типа, называемым также [1] интегралом столкновений БГК (Бхатнагар, Гросс и Крук), и имеющее следующую общую форму:

$$v \frac{\partial}{\partial x} h(x, v) = v(v) \left[I_1[h] + 2 \frac{v}{v_T} I_2[h] + \left(\left(\frac{v}{v_T} \right)^2 - \beta(\alpha) \right) I_3[h] - h(x, v) \right] \quad (1.1)$$

Здесь $I_m[h]$ ($m = 0, 1, 2$) – некоторые постоянные, подлежащие определению из законов сохранения числа частиц (числовой плотности), импульса и энергии, $v(v)$ – частота столкновений молекул, аффинно зависящая от модуля скорости молекул,

$$v(v) = v_0(1 + \alpha\sqrt{\pi\beta}|v|),$$

α – некоторый неотрицательный параметр.

Правая часть уравнения (1.1) есть линеаризованный интеграл столкновений, разложенный по инвариантом столкновений

$$Y_0(v)=1, \quad Y_1(v)=2\sqrt{\beta}v, \quad Y_2(v)=\beta v^2 - \beta(a).$$

Постоянная $\beta(a)$ находится, как уже указывалось, из условия ортогональности инвариантов $Y_0(v)$ и $Y_2(v)$:

$$\beta = \beta(a) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2a+1}{a+1}.$$

Ортогональность здесь понимается как равенство нулю скалярного произведения с весом $\rho(v) = v(v) e^{-\beta v^2}$:

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(v) f(v) g(v) dv.$$

Перейдем в уравнении (1.1) к безразмерной скорости $C = \sqrt{\beta}v$ и безразмерной координате $x' = x/l$, l – средняя длина свободного пробега газовых молекул. Переменную x' далее снова будем обозначать через x .

В безразмерных переменных уравнение (1.1) записывается в виде:

$$c \frac{\partial h(x, c)}{\partial x} = (1 + \sqrt{\pi} a |c|) [l_0[h] + 2c l_1[h] + (c^2 - \beta(a)) l_2[h] - h(x, c)]. \quad (1.2)$$

2. Законы сохранения и преобразование кинетического уравнения

Модельный интеграл столкновений должен удовлетворять законам сохранения числа частиц (числовой плотности), импульса и энергии:

$$(Y_m, M[h]) = v_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(c) M[h] Y_m(c) dc = 0, \quad m = 0, 1, 2, \quad (2.1)$$

$\rho(c) M[h]$ – модельный интеграл столкновений,

$$M[h] = l_0[h] + 2c l_1[h] + (c^2 - \beta(a)) l_2[h] - h(x, c).$$

Из первого уравнения из (2.1) при $m=0$, т.е. закона сохранения числа частиц получаем, что

$$l_0[h] = \frac{(1, h)}{(1, 1)},$$

Здесь:

$$(1, 1) = v_0 \sqrt{\pi} (a+1),$$

$$(1, h) = v_0 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-c^2} (1 + \sqrt{\pi} a |c|) h(x, c) dc.$$

Из второго уравнения из (2.1) при $m=1$, т.е. закона сохранения импульса получаем, что

$$2i_1[h] = \frac{(c, h)}{(c, c)}.$$

Здесь

$$\begin{aligned} (c, c) &= 0.5 v_0 \sqrt{\pi} (2a+1), \\ (c, h) &= v_0 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-c^2} (1 + \sqrt{\pi} a |c|) c h(x, c) dc. \end{aligned}$$

Из третьего уравнения из (2.1) при $m=2$, т.е. закона сохранения энергии находим, что

$$i_2[h] = \frac{(c^2 - \beta(a), h)}{(c^2 - \beta(a), c^2 - \beta(a))}.$$

Здесь

$$\begin{aligned} (c^2 - \beta(a), c^2 - \beta(a)) &= 0.25 v_0 \sqrt{\pi} \frac{4a^2 + 7a + 2}{a + 1} \\ (c^2 - \beta(a), h) &= v_0 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-c^2} (1 + \sqrt{\pi} a |c|) (c^2 - \beta(a)) h(x, c) dc. \end{aligned}$$

Вернемся к уравнению (1.2) и с помощью полученных выше равенств преобразуем это уравнение к виду:

$$\begin{aligned} c \frac{\partial}{\partial x} h(x, c) + (1 + \sqrt{\pi} a |c|) h(x, c) = \\ - (1 + \sqrt{\pi} a |c|) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-c'^2} (1 + \sqrt{\pi} a |c'|) q(c, c', a) h(x, c') dc'. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь

$$\begin{aligned} q(c, c', a) &= r_0(a) + r_1(a) c c' + r_2(a) (c^2 - \beta(a)) (c'^2 - \beta(a)), \\ r_0 &= r_0(a) = \frac{1}{a + 1}, & r_1 &= r_1(a) = \frac{2}{2a + 1}, \\ r_2 &= r_2(a) = \frac{4(a + 1)}{4a^2 + 7a + 2}, & \beta &= \beta(a) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2a + 1}{a + 1}. \end{aligned}$$

Граничные условия задачи формулируются следующим образом:

$$h(0, c) = 0, 0 \leq c \leq +\infty, \quad (2.3)$$

и

$$h(x, c) = h_{as}(x, c) + o(1), x \rightarrow +\infty, -\infty < c < 0, \quad (2.4)$$

где

$$h_{as}(x, c) = \delta_n + \delta_T + (2u + A\omega)c + \left(c^2 - \frac{3}{2}\right) \left[\delta_T + A \left(x - \frac{c}{1 + \sqrt{\pi a}|c|} \right) \right], \quad (2.5)$$

$$\omega = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-c^2} c^2 \left(c^2 - \frac{3}{2} \right) \frac{dc}{1 + \sqrt{\pi a}|c|}.$$

В асимптотическое распределение Чепмена–Энскога входят неизвестные величины скачков концентрации δ_n и температуры δ_T . Эти величины являются основными неизвестными в обобщенной задаче Смолуховского.

В уравнении (2.2) осуществим замену $\sqrt{\pi a} \rightarrow a$ и запишем полученное уравнение в следующем виде

$$\frac{v}{1 + |v|} \frac{\partial}{\partial x} h(x, v) + h(x, v) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v'^2} q(v, v') (1 + a|v'|) h(x, v') dv'. \quad (2.6)$$

В этом уравнении ядро $q(v, v')$ имеет тот же вид, что и ранее, но теперь r_0, r_1, r_2 и β выражаются равенствами:

$$r_0(a) = \frac{1}{a + \sqrt{\pi}}, \quad r_1(a) = \frac{2}{2a + \sqrt{\pi}},$$

$$r_2(a) = \frac{4(a + \sqrt{\pi})}{4a^2 + 7\sqrt{\pi}a + 2\pi}, \quad \beta(a) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2a + \sqrt{\pi}}{a + \sqrt{\pi}};$$

Сделаем в уравнении (2.6) замену переменных $v = v(\mu)$ и $v' = v(\mu')$, где

$$v(\mu) = \frac{\mu}{1 - a|\mu|}, \quad |\mu| < a, \quad a = \frac{1}{\alpha}. \quad (2.7)$$

Обозначим функцию $h(x, v(\mu))$ снова через $h(x, \mu)$. После замены (2.7) уравнение (2.6) переходит в уравнение

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} h(x, \mu) + h(x, \mu) = \int_{-\alpha}^{\alpha} q(\mu, \mu') h(x, \mu') \rho(\mu') d\mu'. \quad (2.8)$$

Здесь

$$q(\mu, \mu') = r_0 + r_1 v(\mu) v(\mu') + r_2 (v^2(\mu) - \beta(a))(v^2(\mu') - \beta(a)),$$

$$\rho(\mu') d\mu' = e^{-v^2(\mu')} \frac{v(\mu)}{\mu} dv(\mu) = \exp \left[- \left(\frac{\mu}{1 - a|\mu|} \right)^2 \right] \frac{d\mu}{(1 - a|\mu|)^2},$$

$$dv(\mu) = \frac{d\mu}{(1 - a|\mu|)^2}.$$

Заметим, что на концах отрезка интегрирования $\rho(\pm\alpha) = 0$, и, кроме того, $\lim_{\mu \rightarrow \pm\alpha} \rho(\mu) v^n(\mu) = 0$ для любого натурального n .

Граничные условия (2.3) и (2.4) после замены (2.7) переходят в следующие:

$$h(0, \mu) = 0, \quad 0 < \mu < \alpha, \quad (2.9)$$

и

$$h(x, \mu) = h_{as}(x, \mu) + o(1), \quad x \rightarrow +\infty, \quad -\alpha < \mu < 0, \quad (2.10)$$

где

$$h_{as}(x, \mu) = \delta_n + \delta_T + (2U + A\omega(\alpha))v(\mu) + \left(v^2(\mu) - \frac{3}{2}\right)[\delta_T + A(x - \mu)].$$

Теперь все готово для решения граничной задачи (2.8)–(2.10).

3. Собственные функции и собственные значения

Разделение переменных в уравнении (2.8), взятое в виде

$$h_n(x, \mu) = e^{-\frac{x}{\eta}} \Phi(\eta, \mu) \quad (3.1)$$

сводит уравнение (2.8) к характеристическому уравнению

$$(\eta - \mu) \Phi(\eta, \mu) = \eta \tilde{Q}(\eta, \mu), \quad \eta, \mu \in (-\alpha, \alpha) \quad (3.2)$$

где

$$\tilde{Q}(\eta, \mu) = n_0 n_0(\eta) + n_1 v(\mu) n_1(\eta) + n_2 (v^2(\mu) - \beta)(n_2(\eta) - \beta n_0(\eta)). \quad (3.3')$$

Здесь

$$n_\alpha(\eta) = \int_{-\alpha}^{\alpha} \Phi(\eta, \mu) v^\alpha(\mu) \rho(\mu) d\mu, \quad \alpha = 0, 1, 2. \quad (3.3)$$

- нулевой, первый и второй моменты собственной функции с весом $\rho(\mu)$.

Собственные функции непрерывного спектра, заполняющего сплошным образом интервал $(-\alpha, \alpha)$, находим [13] в пространстве обобщенных функций

$$\Phi(\eta, \mu) = \eta \tilde{Q}(\eta, \mu) P \frac{1}{\eta - \mu} + g(\eta) \delta(\eta - \mu), \quad \eta \in (-\alpha, \alpha). \quad (3.4)$$

Здесь $g(\eta)$ – непрерывная неизвестная функция, определяемая из уравнений (3.3), ρx^{-1} – распределение, означающее главное значение интеграла при интегрировании x^{-1} , $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака.

Подставим собственные функции (3.4) в нормировочные соотношения (3.3). Получим следующую систему дисперсионных уравнений:

$$n_{\alpha}(\eta) + \eta \int_{-\alpha}^{\alpha} \tilde{Q}(\eta, \mu) v^{\alpha}(\mu) \rho(\mu) \frac{d\mu}{\mu - \eta} = g(\eta) \rho(\eta) v^{\alpha}(\eta), \alpha = 0, 1, 2. \quad (3.5)$$

Обозначим:

$$t_n(\eta) = \eta \int_{-\alpha}^{\alpha} v^n(\mu) \rho(\mu) \frac{d\mu}{\mu - \eta}, n = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Теперь с учетом (3.3) систему дисперсионных уравнений (3.5) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} n_{\alpha}(\eta) + r_0 n_0(\eta) t_{\alpha}(\eta) + r_1 v(\mu) n_1(\eta) t_{\alpha+1}(\eta) + \\ + r_2 (t_{\alpha+2}(\eta) - \beta t_{\alpha}(\eta)) (n_2(\eta) - \beta n_0(\eta)) = \\ = g(\eta) \rho(\eta) v^{\alpha}(\eta), \end{aligned} \quad (3.6)$$

где $\alpha = 0, 1, 2$.

Запишем уравнения (3.6) в векторном виде

$$\Lambda(\eta) n(\eta) = g(\eta) \rho(\eta) \begin{bmatrix} 1 \\ v(\eta) \\ v^2(\eta) \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

Здесь $\Lambda(\eta)$ – дисперсионная матрица с элементами $\lambda_{ij}(\eta)$ ($i, j = 1, 2, 3$), $n(\eta)$ – нормировочный вектор с элементами $n_{\alpha}(\eta)$, $\alpha = 0, 1, 2$.

Ниже понадобятся элементы дисперсионной матрицы в явном виде

$$\begin{aligned} \lambda_{11}(\eta) &= 1 + (r_0 + \beta^2 r_2) t_0(\eta) - \beta r_2 t_2(\eta), \\ \lambda_{12}(\eta) &= r_1 t_1(\eta), \\ \lambda_{13}(\eta) &= r_2 (-\beta t_0(\eta) + t_2(\eta)), \\ \lambda_{21}(\eta) &= (r_0 + \beta^2 r_2) t_1(\eta) - \beta r_2 t_3(\eta), \\ \lambda_{22}(\eta) &= 1 + r_1 t_2(\eta), \\ \lambda_{23}(\eta) &= r_2 (-\beta t_1(\eta) + t_3(\eta)), \\ \lambda_{31}(\eta) &= (r_0 + \beta^2 r_2) t_2(\eta) - \beta r_2 t_4(\eta), \\ \lambda_{32}(\eta) &= r_1 t_3(\eta), \\ \lambda_{33}(\eta) &= 1 + r_2 (-\beta t_2(\eta) + t_4(\eta)). \end{aligned}$$

Введем дисперсионную функцию $\lambda(z)$:

$$\begin{aligned} \lambda(z) = \det \Lambda(z) &= \lambda_{11}(\eta) \lambda_{12}(\eta) \lambda_{13}(\eta) + r_1 t_3 \lambda_{13}(\eta) \lambda_{21}(\eta) + \\ &+ r_1 t_1 \lambda_{31}(\eta) \lambda_{23}(\eta) - \lambda_{13}(\eta) \lambda_{22}(\eta) \lambda_{31}(\eta) - \\ &- r_2 t_3 \lambda_{11}(\eta) \lambda_{23}(\eta) - r_1 t_1 \lambda_{21}(\eta) \lambda_{33}(\eta). \end{aligned}$$

Из векторного уравнения (3.7) находим

$$n_{\alpha}(\eta) = g(\eta) \rho(\eta) \frac{\Lambda_{\alpha}(\eta)}{\lambda(\eta)}, \quad \alpha = 0, 1, 2. \quad (3.8)$$

где $\Lambda_{\alpha}(\eta)$ – определитель, полученный из определителя системы (3.6) заменой в нем α – го столбца столбцом из свободных членов этой системы.

Выпишем эти определители в явном виде:

$$\begin{aligned} \Lambda_0(\eta) &= \Lambda_{11} - v(\eta)\Lambda_{21} + v^2(\eta)\Lambda_{31} = \lambda_{22}\lambda_{33} - r_1 t_3 \lambda_{23} - \\ &\quad - v r_1 (t_1 \lambda_{33} - t_2 \lambda_{13}) + v^2 (r_1 t_1 \lambda_{23} - \lambda_{22} \lambda_{13}), \\ \Lambda_1(\eta) &= -\Lambda_{12} + v(\eta)\Lambda_{22} - v^2(\eta)\Lambda_{32} = -\lambda_{21}\lambda_{33} + \lambda_{31}\lambda_{33} + \\ &\quad + v(\lambda_{11}\lambda_{23} - \lambda_{21}\lambda_{13}) - v^2(\lambda_{11}\lambda_{23} - \lambda_{21}\lambda_{13}), \\ \Lambda_2(\eta) &= \Lambda_{31} - v(\eta)\Lambda_{32} + v^2(\eta)\Lambda_{33} = r_1 t_3 \lambda_{21} - \lambda_{31}\lambda_{22} - \\ &\quad - v r_1 (t_3 \lambda_{11} - t_1 \lambda_{31}) + v^2 (\lambda_{11}\lambda_{22} - r_1 t_1 \lambda_{21}). \end{aligned}$$

Здесь $\Lambda_{ij}(\eta)$ – минор элемента $\lambda_{ij}(\eta)$.

С помощью соотношений (3.8) преобразуем равенство (3.3') к виду:

$$\tilde{Q}(\eta, \mu) = Q(\eta, \mu) \frac{g(\eta) \rho(\eta)}{\lambda(\eta)}, \quad (3.9)$$

где

$$Q(\eta, \mu) = r_0 \Lambda_0(\eta) + r_1 v(\mu) \Lambda_1(\eta) + r_2 (v^2(\mu) - \beta) (\Lambda_2(\eta) - \beta \Lambda_0(\eta)). \quad (3.10)$$

С помощью равенства (3.10) преобразуем выражение (3.4) для собственных функций:

$$\Phi(\eta, \mu) = \tilde{\Phi}(\eta, \mu) g(\eta), \quad (3.11)$$

где

$$\tilde{\Phi}(\eta, \mu) = \eta \frac{Q(\eta, \mu)}{\lambda(\eta)} \rho(\eta) P \frac{1}{\eta - \mu} + \delta(\eta - \mu). \quad (3.12)$$

Из равенства (3.11) видно, что собственные функции определены с точностью до произвольной мультипликативной функции $g(\eta)$. В силу однородности уравнения (2.8) эту функцию можно считать тождественно равной единице ($g(\eta) = 1$) и далее в качестве собственной функции непрерывного спектра можно рассматривать функции, определяемые равенством (3.12).

По определению, дискретным спектром характеристического уравнения является множество нулей дисперсионной функции.

Разлагая дисперсионную функцию в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки, убеждаемся, что она в этой точке имеет нуль 4-го порядка. Применяя

принцип аргумента [14] можно показать, что других нулей (кроме $x = 0$) дисперсионная функция не имеет. Точке $x = 0$ как 4-кратной точке дисперсионного спектра отвечают следующие четыре дискретные решения уравнения (2.8):

$$\begin{aligned} h_0(x, \mu) &= 1, \\ h_1(x, \mu) &= v(\mu), \\ h_2(x, \mu) &= v^2(\mu) - \frac{1}{2}, \\ h_3(x, \mu) &= (x - \mu) \left(v^2(\mu) - \frac{3}{2} \right). \end{aligned}$$

Ниже понадобятся формулы для разности и суммы граничных значений дисперсионных функций сверху и снизу в интервале $(-\alpha, \alpha)$:

$$\lambda^+(\mu) - \lambda^-(\mu) = 2\pi i \mu \rho(\mu) Q(\mu, \mu) \quad (3.13)$$

и

$$\lambda^+(\mu) + \lambda^-(\mu) = 2\lambda(\mu), \quad \mu \in (-\alpha, \alpha), \quad (3.14)$$

где $Q(\mu, \mu)$ – определяется выражением (3.10).

Для доказательства равенства (3.14) достаточно провести прямолинейные, но весьма громоздкие вычисления.

4. Разложение решения граничной задачи по собственным функциям характеристического уравнения

Теорема 1. Граничная задача (2.8)–(2.10) имеет единственное решение, представимое в виде разложения по собственным функциям характеристического уравнения

$$h(x, \mu) = h_{\text{ss}}(x, \mu) + \int_0^\alpha e^{-\frac{x}{\eta}} \tilde{\Phi}(\eta, \mu) g(\eta) \rho(\eta) d\eta. \quad (4.1)$$

Здесь неизвестными коэффициентами, отвечающими дискретному спектру, являются величины δ_n и δ_T , а неизвестным коэффициентом непрерывного спектра является функция $g(\eta)$.

Доказательство. Подставляя в разложении (4.1) при $x = 0$ собственные функции (3.12), получаем сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши:

$$h_{\text{ss}}(x, \mu) + \int_0^\alpha \eta \frac{Q(\eta, \mu)}{\lambda(\eta)} g(\eta) \rho(\eta) \frac{d\eta}{\eta - \mu} + g(\mu) = 0, \quad (4.2)$$

где $0 < \mu < \alpha$.

Введем вспомогательную функцию

$$N(z) = \int_0^\alpha \eta \frac{Q(\eta, \mu)}{\lambda(\eta)} g(\eta) \rho(\eta) \frac{d\eta}{\eta - z}, \quad (4.3)$$

для которой согласно формулам Сохоцкого имеем:

$$N^+(\mu) - N^-(\mu) = 2\pi i \mu \frac{Q(\mu, \mu)}{\lambda(\mu)} g(\mu) \rho(\mu), \quad (4.4)$$

$$N^+(\mu) + N^-(\mu) = 2 \int_0^\alpha \eta \frac{Q(\eta, \mu)}{\lambda(\eta)} g(\eta) \rho(\eta) \frac{d\eta}{\eta - \mu}. \quad (4.5)$$

Преобразуем уравнение (4.2) согласно равенствам (4.4) и (4.5). Получаем уравнение:

$$h_{\alpha\alpha}(0, \mu) + \frac{N^+(\mu) + N^-(\mu)}{2} + \frac{\lambda(\mu)[N^+(\mu) - N^-(\mu)]}{2\pi i \mu \rho(\mu) Q(\mu, \mu)} = 0$$

Отсюда получаем краевое условие:

$$2\pi i \mu \rho(\mu) Q(\mu, \mu) h_{\alpha\alpha}(0, \mu) + \pi i \mu \rho(\mu) Q(\mu, \mu) [N^+(\mu) + N^-(\mu)] + \lambda(\mu) [N^+(\mu) - N^-(\mu)] = 0 \quad (4.6)$$

Теперь, учитывая равенства (3.13) и (3.14), уравнение (4.6) приведем к краевой задаче Римана:

$$\lambda^+(\mu) [N^+(\mu) + h_{\alpha\alpha}(0, \mu)] - \lambda^-(\mu) [N^-(\mu) + h_{\alpha\alpha}(0, \mu)] = 0, 0 < \mu < \alpha. \quad (4.7)$$

Рассмотрим соответствующую однородную краевую задачу:

$$\frac{X^+(\mu)}{X^-(\mu)} = \frac{\lambda^+(\mu)}{\lambda^-(\mu)}, 0 < \mu < \alpha. \quad (4.8)$$

Решение этой задачи, ограниченное и не исчезающее в точках $z = 0$ и $z = \alpha$ приведем без вывода [3], [19]:

$$X(z) = \frac{1}{z^2} e^{V(z)}, \quad (4.9)$$

где

$$V(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\alpha \frac{\theta(\tau) - 2\pi}{\tau - z} d\tau, \quad (4.10)$$

$\theta(\tau) = \arg \lambda^+(\tau)$ - главное значение аргумента.

Преобразуем задачу (4.7) с помощью однородной задачи (4.8) к задаче по нулевому скачку:

$$X^+(\mu)[N^+(\mu) + h_{\alpha\beta}(0, \mu)] = X^-(\mu)[N^-(\mu) + h_{\alpha\beta}(0, \mu)], 0 < \mu < \alpha. \quad (4.11)$$

Выясним особенность этого условия. Представим функцию $N(z)$ в явном виде, учитывая соотношение (3.14):

$$N(z) = r_0 P(z) + r_1 \frac{z}{1 - \alpha z} Q(z) + r_2 \left[\left(\frac{z}{1 - \alpha z} \right)^2 - \beta \right] R(z), \quad (4.12)$$

где

$$\begin{aligned} P_n(z) &= \int_0^\alpha \eta \frac{\Lambda_n(\eta)}{\lambda(\eta)} g(\eta) \rho(\eta) \frac{d\eta}{\eta - z} \quad (n = 0, 1, 2), \\ Q(z) &= \int_0^\alpha \eta \frac{\Lambda_1(\eta)}{\lambda(\eta)} g(\eta) \rho(\eta) \frac{d\eta}{\eta - z} = P_1(z), \\ R(z) &= \int_0^\alpha \eta \frac{\Lambda_2(\eta) - \beta \Lambda_0(\eta)}{\lambda(\eta)} g(\eta) \rho(\eta) \frac{d\eta}{\eta - z} = P_2(z) - \beta P_0(z). \end{aligned}$$

Преобразуем равенство (4.12), записав его по степеням полюса:

$$N(z) = r_0 P_0(z) - r_2 \beta (P_2(z) - \beta P_0(z)) + r_1 \frac{z}{1 - \alpha z} P_1(z) + r_2 \left(\frac{z}{1 - \alpha z} \right)^2 (P_2(z) - \beta P_0(z)) \quad (4.13)$$

или

$$N(z) = P(z) + r_1 \frac{z}{1 - \alpha z} Q(z) + r_2 \left(\frac{z}{1 - \alpha z} \right)^2 R(z), \quad (4.14)$$

где

$$\begin{aligned} P(z) &= (r_0 + r_2 \beta^2) P_0(z) - r_2 \beta P_2(z), \\ Q(z) &= P_1(z), \\ R(z) &= P_2(z) - \beta P_0(z). \end{aligned}$$

Теперь видно, что краевое условие (4.11) имеет двойной полюс в точке $z = \frac{1}{\alpha}$. Поэтому, умножив краевое условие на $(1 - \alpha\mu)^2$, получаем:

$$X^+(\mu)[M^+(\mu) + (1 - \alpha\mu)^2 h_{\alpha\beta}(0, \mu)] = X^-(\mu)[M^-(\mu) + (1 - \alpha\mu)^2 h_{\alpha\beta}(0, \mu)], 0 < \mu < \alpha. \quad (4.15)$$

где

$$M(z) = (1 - \alpha z)^2 N(z). \quad (4.16)$$

Учитывая поведение функций, входящих в краевое условие (4.15), получим общее решение соответствующей краевой задачи:

$$M(z) = -(1 - \alpha z)^2 h_{\alpha s}(0, z) + \frac{c_0 - c_1 z}{X(z)}, \quad (4.17)$$

где c_0 и c_1 – произвольные постоянные, причем

$$(1 - \alpha z)^2 h_{\alpha s}(0, z) = (1 - \alpha z)^2 (\delta_n + \delta_T) - (1 - \alpha z) z (2U + A\omega) - \\ - \left[z^2 - \frac{3}{2} (1 - \alpha z)^2 \right] (\delta_n - Az).$$

Заметим, что решение (4.17) имеет в точке $z = \infty$ полюс 3-го порядка, в то время как функция $M(z)$, определенная равенством (4.16), имеет в этой точке полюс 1-го порядка. Чтобы решение (4.17) можно было принять в качестве функции $M(z)$, определенной равенством (4.16), понизим порядок полюса у решения (4.17) с трех до единицы, а затем приравняем коэффициенты при z^m ($m = 0, 1$) в разложениях в окрестности точки $z = \infty$ левой и правой частей равенства (4.17). Последнее вызвано тем, что эти коэффициенты в обеих частях равенства содержат неизвестные параметры. Разложим решение (4.17) в ряд Лорана в окрестности точки $z = \infty$:

$$M_1 z + M_2 + o(1) = c_1 z^3 + (c_0 - c_1 V_1) z^2 + (c_1 U_2 - c_0 V_1) z + \\ + (c_1 U_3 - c_0 U_2) - \delta_n + \frac{1}{2} \delta_T + z \left(2\alpha \delta_n - \alpha \delta_T - 2U - A\omega - \frac{3}{2} A \right) + \\ + \left\{ \alpha^2 \delta_n + \delta_T \left(\frac{1}{2} \alpha^2 - 1 \right) + 2U\alpha + \alpha A(\omega + 3) \right\} + z^3 A \left(1 - \frac{3}{2} \alpha^2 \right) + o(1), |z| \rightarrow \infty, \quad (4.18)$$

При выводе равенства (4.17) было использовано разложение

$$V(z) = \frac{V_1}{z} + \frac{V_2}{z^2} + \dots \quad (|z| \rightarrow \infty)$$

и разложение

$$e^{-V(z)} = 1 + \frac{\tilde{V}_1}{z} + \frac{\tilde{V}_2}{z^2} + \dots \quad (|z| \rightarrow \infty), \quad (4.19)$$

Выразим коэффициенты $\tilde{V}_k$ через V_k . Из (4.19) находим:

$$V(z) = \frac{\frac{\tilde{V}_1}{z^2} + 2 \frac{\tilde{V}_2}{z^3} + 3 \frac{\tilde{V}_3}{z^4} + \dots}{1 + \frac{\tilde{V}_1}{z} + \frac{\tilde{V}_2}{z^2} + \frac{\tilde{V}_3}{z^3} + \dots}$$

или

$$- \left(\frac{\tilde{V}_1}{z^2} + 2 \frac{\tilde{V}_2}{z^3} + 3 \frac{\tilde{V}_3}{z^4} + \dots \right) \left(1 + \frac{\tilde{V}_1}{z} + \frac{\tilde{V}_2}{z^2} + \frac{\tilde{V}_3}{z^3} + \dots \right) = \frac{\tilde{V}_1}{z^2} + 2 \frac{\tilde{V}_2}{z^3} + 3 \frac{\tilde{V}_3}{z^4} + \dots.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\tilde{V}_1 &= -V_1 - 2V_2 - V_1 V_2 = 2\tilde{V}_2, \\ \tilde{V}_2 &= -V_2 + \frac{1}{2}V_1^2, \tilde{V}_3 = -V_3 - \frac{2}{3}V_1 V_2 - \frac{1}{3}V_1 V_2, \\ \tilde{V}_3 &= -V_3 + V_1 V_2 - \frac{1}{6}V_1^3, \dots\end{aligned}$$

Приравнявая к нулю в правой части равенства (4.18) коэффициенты при z^3 и z^2 , находим:

$$c_1 = A \left(\frac{3}{2}a^2 - 1 \right), \quad (4.20)$$

$$c_0 = A \left[\left(\frac{3}{2}a^2 - 1 \right) V_1 - a(\omega + 3) \right] + a^2 \delta_n + \left(1 - \frac{1}{2}a^2 \right) \delta_T - 2Ua. \quad (4.21)$$

Приравнявая теперь коэффициенты в (4.18) слева и справа при z и z^0 , находим:

$$M_1 = c_1 \tilde{V}_2 - c_0 V_1 + 2a \delta_n - 2U - A \left(\omega + \frac{3}{2} \right), \quad (4.22)$$

$$M_2 = c_1 \tilde{V}_3 - c_0 \tilde{V}_2 - \delta_n + \frac{1}{2} \delta_T. \quad (4.23)$$

Подставляя в равенства (4.22) и (4.23) C_0 и C_1 , определенные соответственно равенствами (4.20) и (4.21), получим уравнения, из которых однозначно находятся δ_n и δ_T . Таким образом, свободные параметры C_0 и C_1 решения $M(z)$ найдены однозначно, а также найдены однозначно коэффициенты дискретного спектра δ_n и δ_T разложения (4.1). Коэффициент непрерывного спектра находится на основании формул Сохоцкого, применяемых к функции $M(z)$, определенной равенствами (4.16) и (4.17):

$$M^+(\mu) - M^-(\mu) = 2\pi i \mu (1 - a\mu)^2 \frac{Q(\mu, \mu)}{\lambda(\mu)} g(\mu) \rho(\mu)$$

и

$$M^+(\mu) + M^-(\mu) = (c_0 + c_1 \mu) \left(\frac{1}{X^+(\mu)} - \frac{1}{X^-(\mu)} \right).$$

Из этих равенств находим:

$$\frac{\eta g(\eta) \rho(\eta)}{\lambda(\eta)} = \frac{1}{2\pi i (1 - a\eta)^2 Q(\mu, \mu)} (c_0 + c_1 \eta) \left(\frac{1}{X^+(\eta)} - \frac{1}{X^-(\eta)} \right). \quad (4.24)$$

Итак, все коэффициенты разложения (4.1) установлены. По построению, разложение (4.1) удовлетворяет граничным условиям (2.9) и (2.10). Тот факт, что разложение (1) удовлетворяет уравнению (1.9), проверяется непосредственно. Теорема доказана.

5. Температурный скачок и слабое испарение

Вернемся к решению поставленных физических задач. Коэффициент непрерывного спектра (4.24) подставим сначала в функцию $N(z)$, определенную равенством (4.16), которое представим в виде суммы:

$$M(z) = c_0 K(z) + c_1 L(z), \quad (5.1)$$

где

$$K(z) = (1 - az)^2 \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\frac{1}{a}} \frac{Q(\eta, z)}{(1 - a\eta)^2 Q(\eta, \eta)} \left[\frac{1}{X^+(\eta)} - \frac{1}{X^-(\eta)} \right] \frac{d\eta}{\eta - z} \quad (5.2)$$

и

$$L(z) = (1 - az)^2 \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\frac{1}{a}} \frac{\eta Q(\eta, z)}{(1 - a\eta)^2 Q(\eta, \eta)} \left[\frac{1}{X^+(\eta)} - \frac{1}{X^-(\eta)} \right] \frac{d\eta}{\eta - z}. \quad (5.3)$$

поэтому согласно (5.1) имеем:

$$M(z) = (c_0 K_1 + c_1 L_1)z + (c_0 K_0 + c_1 L_0) + o(1), \quad (5.4)$$

т.е.

$$M_1 = c_0 K_1 + c_1 L_1, M_0 = c_0 K_0 + c_1 L_0. \quad (5.5)$$

Найденные коэффициенты M_1 и M_0 подставим в равенства (4.22) и (4.23), затем заменим в них c_0 и c_1 согласно (4.20) и (4.21). получаем систему из двух уравнений относительно δ_n и δ_T :

$$\begin{aligned} & -\partial_T \left[\alpha + \left(1 - \frac{1}{2} \alpha^2 \right) (V_1 + K_1) \right] + \partial_n [2\alpha - \alpha^2 (V_1 + K_1)] = \\ & = 2U[1 - \alpha(V_1 + K_1)] + A \left[\frac{3}{2} + \omega + \left(\frac{3}{2} \alpha^2 - 1 \right) (L_1 - V_2 + V_1 + K_1) - (3\alpha + \omega)(V_1 + K_1) \right] \end{aligned} \quad (5.6)$$

и

$$\begin{aligned} & \partial_T \left[\frac{1}{2} + \left(1 - \frac{1}{2} \alpha^2 \right) (V_2 - K_0) \right] + \partial_n [-1 + \alpha^2 (V_2 - K_0)] = \\ & = 2U\alpha(V_2 - K_0) + A \left[\left(\frac{3}{2} \alpha^2 - 1 \right) (V_1 K_0 - V_1 V_2 - V_3 + L_0 + (3\alpha + \omega)(V_2 + K_0)) \right]. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Основной определитель этой системы равен:

$$\Delta = V_1 + K_1 - 2\alpha(V_2 - K_0).$$

Решение системы (5.6) и (5.7) запишем в виде:

$$\delta_T = 2U \frac{\Delta_{T,E}}{\Delta} + A \frac{\Delta_{T,A}}{\Delta} \quad (5.8)$$

и

$$\delta_n = 2U \frac{\Delta_{n,E}}{\Delta} + A \frac{\Delta_{n,A}}{\Delta}. \quad (5.9)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Delta_{T,E} &= -1 + \alpha(V_1 + K_1) - \alpha^2(\tilde{V}_2 - K_0), \\ \Delta_{n,E} &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\alpha(V_1 + K_1) - \left(1 + \frac{1}{2}\alpha^2\right)(\tilde{V}_2 - K_0). \end{aligned}$$

Остальные определители громоздки и мы их приведем, не раскрывая:

$$\begin{aligned} \Delta_{T,A} &= \left[1 - \alpha^2(\tilde{V}_2 - K_0)\right] \left[\left(\frac{3}{2}\alpha^2 - 1\right)(\tilde{V}_2 - L_1 - \omega - \frac{3}{2})\right] + \\ &+ \left[\left(\frac{3}{2}\alpha^2 - 1\right)(V_1 - 3\alpha - \omega)\right] [2\alpha(\tilde{V}_2 - K_0) - V_1 - K_1] + \\ &+ \left[\left(\frac{3}{2}\alpha^2 - 1\right)(\tilde{V}_2 - L_0)\right] [2\omega - \alpha^2(V_1 + K_1)], \\ \Delta_{n,A} &= -\left[\alpha + \left(1 - \frac{1}{2}\alpha^2\right)(V_1 + K_1)\right] \left[(3\alpha + \omega)(\tilde{V}_2 - K_0) - \left(\frac{3}{2}\alpha^2 - 1\right)(\tilde{V}_2 - L_0 + V_1\tilde{V}_2 - V_1K_0)\right] - \\ &- \left[\frac{1}{2} + \left(1 - \frac{1}{2}\alpha^2\right)(\tilde{V}_2 - K_0)\right] \left[\frac{3}{2} + \omega + \left(\frac{3}{2}\alpha^2 - 1\right)(L_1 - \tilde{V}_2 + V_1^2 + V_1K_1) - (3\alpha + \omega)(V_1 + K_1)\right]. \end{aligned}$$

Формулы (5.8) и (5.9) представляют собой искомые величины скачка температуры и скачка концентрации соответственно.

6. Заключение

В настоящей работе продолжается изучение и применение одномерного кинетического уравнения с интегралом столкновений БГК (Бхатнагар, Гросс и Крук) релаксационного типа, введенное в работе [1]. Частота столкновений молекул считается аффинно зависящей от модуля молекулярной скорости.

При построении уравнения используются законы сохранения числа частиц (числовой плотности), импульса и энергии. Разделение переменных приводит к характеристическому уравнению. С помощью нормировочных соотношений вводится система дисперсионных уравнений. Ее определитель называется дисперсионной функцией.

Исследуется непрерывный и дискретный спектры характеристического уравнения. Найдены собственные решения исходного кинетического уравнения, отвечающие дискретному спектру. Эта так называемые дискретные (или частные) решения.

Решение характеристического уравнения в пространстве обобщенных функций приводит к собственным функциям, отвечающим непрерывному спектру.

Аналитически решена обобщенная задача Смолуховского, объединяющая две классические задачи кинетической теории – задачу о температурном скачке и задачу о

слабом испарении (конденсации). Результаты проведенного анализа сформулированы в виде теоремы о решении сформулированной граничной задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bugrimov A.A., Latyshev A.V., Yushkanov A.A. The kinetic one-dimensional equation with frequency of collisions, affine depending on the module molecular velocity// arXiv:1403.2068v1 [math-ph] 9 Mar 2014, 20pp.
2. Латышев А.В., Юшканов А.А. Кинетические уравнения типа Вильямса и их точные решения. М.: МГОУ, 2004, 271 с.
3. Latyshev A.V. Application of Case' method to the solution of linear kinetic BGK equation in a problem about temperature jump// Appl. math. and mechanics. 1990. V. 54. Issue 4. P. 581-586. [russian]
4. Latyshev A.V., Yushkanov A.A. Boundary problems for model Boltzmann equation with frequency proportional to velocity of molecules//Izvestiya Russian Academy of Science. Ser. Mechanika, Fluid and Gas (Russian "Fluids Dynamics"). 1993. No 6. 143-155 pp. [russian]
5. Латышев А.В., Юшканов А.А. Аналитическое решение задачи о сильном испарении (конденсации)//Известия РАН. Сер. МЖГ. 1993. №6. 143-155 с.
6. Cassell J.S., Williams M.M.R. An exact solution of the temperature slip problem in rarefied gases// Transport Theory and Statist. Physics, 2(1), 81—90 (1972).
7. Latyshev A.V., Yushkanov A.A. Temperature jump and weak evaporatuion in molecular gases// J. of experim. and theor. physics. 1998. V. 114. Issue. 3(9). P. 956-971. [russian]
8. Latyshev A.V., Yushkanov A.A. The Smoluchowski problem in polyatomic gases// Letters in J. of Tech. Phys. 1998. V. 24. No 17. P. 85-90. [russian]
9. Latyshev A.V., Yushkanov A.A. Analytic solutions of boundary value problem for model kinetic equations// Math. Models of Non-Linear Excitations, Transfer, Dynamics, and Control in Condensed Systems and Other Media. Edited by L.A. Uvarova and A.V. Latyshev. Kluwer Academic. New York-Moscow. 2001. P. 17-24.
10. Latyshev A.V., Yushkanov A.A. Smolukhowski problem for degenerate Bose gases// Theoretical and Mathematical Physics. Springer New York. Vol. 155, No 3, June, 2008, pp. 936 - 948.
11. Latyshev A.V., Yushkanov A.A. Temperature jump in degenerate quantum gases in the presence of the Bose–Einstein condensate // Theor. and Mathem. Phys. 2010. V. 162(1). P. 95-105 [russian]
12. Latyshev A.V., Yushkanov A.A. Temperature jump in degenerate quantum gases with the Bogoliubov excitation energy and in the presence of the Bose–Einstein condensate, Theor. and Math. Phys., 165:1 (2010), 1358–1370.
13. Latyshev A.V., Yushkanov A.A. Smoluchowski problem for electrons in metal// Theor. and Mathem. Phys. 2005, январь, Т. 142. No 1. С. 93-111 [russian]
14. Latyshev A.V., Yushkanov A.A. Smoluchowski problem for metals with mirror-diffusive boundary conditions //Theoretical and Mathematical Physics, October 2009, Volume 161, Issue 1, pp. 1403-1414.

15. Латышев А.В., Юшканов А.А. Граничные задачи для квантовых газов. М.: МГОУ, 2012, 266 с.
16. Cercignani C., Frezzoti A. Linearized analysis of a one-speed B.G.K. model in the case of strong condensation// Bulgarian Academy of sci. theor. appl. mech. Sofia. 1988. V.XIX. No 3. 19-23 P.
17. Латышев А.В., Юшканов А.А. Аналитическое решение одномерной задачи об умеренно сильном испарении (и конденсации) в полупространстве// Прикл. мех. и техн. физ. 1993. №1. 102-109 с.
18. Владимиров В.С., Жаринов В.В. Обобщенные функции в математической физике. М.: Физматлит. 1999. 399 с.
19. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука. 640 с.

**BOUNDARY PROBLEMS FOR KINETIC ONE-DIMENSIONAL EQUATION
WITH COLLISIONAL FREQUENCY AFFINE DEPENDING
ON THE MODULE OF MOLECULAR VELOCITY**

A. Bugrimov, A. Latyshev, A. Yushkanov

*Moscow Region State University
10a, Radio st., Moscow, 105005, Russia*

Abstract. For the one-dimensional linear kinetic equation the analytical solutions of problems about temperature jump and weak evaporation (condensation) over flat surface are received. The equation has integral of collisions BGK (Bhatnagar, Gross and Krook) and frequency of collisions of molecules, affine depending on the module molecular velocity.

Keywords: one-dimensional kinetic equation, affine dependence of collision frequency, conservation laws, separation of variables, characteristic equation, dispersion equation, spectra, eigen functions, Smoluchowski' problem.

ФИЗИКА

THE APPARATUS FOR MEASUREMENT
OF YOUNG'S MODULU
OF CERAMICS AT ELEVATED TEMPERATURES

Tomáš HÚLAN, Anton TRNÍK, Igor ŠTUBŇA

*Department of Physics, Constantine the Philosopher University,
A. Hlinku 1, 949 74 Nitra, Slovakia, tomas.hulan@ukf.sk*

Abstract: The construction of a laboratory-made fully automated resonant apparatus for the modulated force thermomechanical analysis (mf-TMA) is described. The measurement is based on the impulse excitation technique (IET). The apparatus is able to provide the measurements of the resonant frequency, which is a base for determination of Young's modulus, sound velocity and internal damping during heating up to 1200 °C. An expanded relative uncertainty of the Young's modulus determination at elevated temperatures is 1.1 %.

Keywords: resonant measurement, Young's modulus, impulse excitation technique

1 Introduction

Young's modulus is one of the most frequently measured mechanical parameters of materials. Young's modulus depends on the structure of the material as well as external conditions. Therefore, it can be used for the indirect measurement and investigation of porosity, texture, intergranular phases, composition, the creation of cracks, phase changes, sintering, hardness, apparent density, compressive strength, flexural strength, and others.

A great number of experimental techniques have been developed to determine the elastic properties of ceramic materials. Young's modulus can be measured using static or dynamic methods. The disadvantage of the static methods is the impossibility of continuous measurement; therefore these methods are not suitable for thermomechanical analysis (TMA). Methods, which meet the requirements of TMA use resonant frequency as a base for determining Young's modulus. These methods are most often based on the flexural vibration of the sample, which can be easily excited, has large amplitude of deflection and are reliable at high temperatures. Samples have simple geometry (a cylinder/prism with uniform cross-section or circular plate).

The sample can be made to vibrate at the resonant frequency either by a driver that continuously varies the frequency of the output signal or by a mechanical impact. Both methods utilize the same formula for the calculation of Young's modulus. The measured quantities are the dimensions and mass of the sample and the resonant frequency [1-6]. Two techniques serve to acquire the resonant frequency.

The first technique, so called sonic resonance method (SRM), is based on the forced vibration of the sample with the known frequency. The equipment is relatively simple. It contains tunable RC oscillator with an amplifier connected to an exciter as a source of the forced vibration. Sample vibrations are registered with a sensor connected to a preamplifier and its output signal is observed on AC mV-meter (or oscilloscope). The frequency, at which

the mV-meter signal reaches the maximum value, is the resonant frequency. The resonant frequency can be found manually and checked with some methods if the frequency belongs to the fundamental mode of the flexural vibration [7]. This method can be automated if the RC oscillator works in a sweeping regime [8, 9].

The second technique, so called impulse excitation technique (IET), is based on the free vibrations of the sample after being exposed to a mechanical impulse [4, 10]. The free vibrations are registered by the sensor, stored and then analyzed using the fast Fourier transformation (FFT). The result of FFT is a frequency spectrum of the sample vibration, where the resonant frequency of the fundamental mode of the flexural vibrations can be found. The free vibrations are naturally dampened by internal processes in the sample. Therefore, a coefficient of the internal damping (internal friction) can be also determined. The mechanical impulse can be realized by the steel or ceramic projectiles which fall down on the sample, or by the electromagnetic impulse tool (which is probably most often used) or by the exciter fed by the impulse signal. The IET was significantly developed after progress in computer technology and today is more used than SRM.

To compare SRM with IET, both methods give the same resonant frequency, i.e. their accuracy is identical. But IET can be designed as non-contact while SRM needs two thin wire suspensions located in the antinodal points of the sample. These suspensions are weak points of SRM – they are often a source of false resonances and their strength is limited at high temperatures. Consequently, IET is more reliable at high temperatures. In addition to that, IET allows a simultaneous measurement of the resonant frequency and internal damping of the sample.

The aim of the paper is a description of the apparatuses used in the Thermophysical Laboratory of the Constantine the Philosopher University in Nitra.

2 The apparatus for SRM

We constructed two apparatuses for SRM – one for a room-temperature measurement and the other for the high-temperature measurement. A principal scheme of the room-temperature apparatus is depicted in Fig. 1.

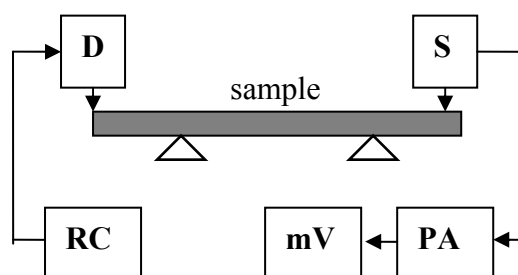


Fig. 1. The scheme of the room-temperature apparatus for SRM. D – driver, S – sensor, RC – RC oscillator, mV- AC mV-meter, PA – preamplifier.

The sample is put on soft supports located 0.224 l from the both ends of the sample, i.e. in the nodal points of the fundamental mode of the flexural vibration. The sensor is movable, so we can measure a sample deflection in different points and unambiguously determine the

vibrating mode. The RC oscillator can work in a sweeping regime or can be tuned manually. The other variant of the apparatus is that it has a non-contact exciter which is a speaker under the middle of the sample. The sensor is a gramophone piezoelectric cartridge.

The high-temperature apparatus has the same principal scheme, but the sample is suspended on PtRh10 wires with a diameter of 0.15 mm as visible in Fig. 2. A furnace is connected to a temperature programmer Classic Clare 4.0 to obtain linear heating with a rate of 1 – 10 °C/min or isothermal heating at selected temperatures up to 1250 °C. The high-temperature apparatus uses a piezoelectric sensor and electrodynamical driver. The furnace is built from porous alumina bricks and alumina fiber pads. The working space (20×10×10 cm) is heated with four silicon carbide rods.

A description of this apparatus is in [8], where an uncertainty analysis of the measurement of Young's modulus is also given. We successfully used this apparatus in our research that is documented in a number of articles, e.g. [11-15]. The relative expanded uncertainty 1.1 % of the Young's modulus at the elevated temperatures evaluated in [8] is also valid for the apparatus pictured in Fig. 3. We empirically confirmed that resonant frequencies determined by the IET and SRM are identical. The same is known from literature [16].

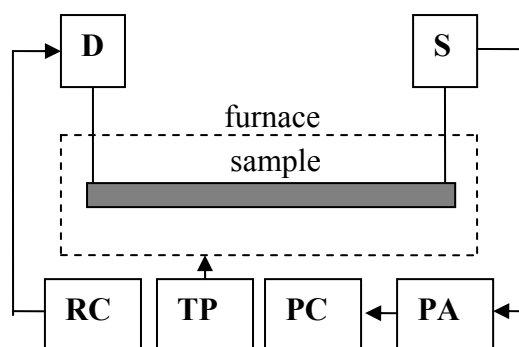


Fig. 2. The scheme of the high-temperature apparatus for SRM.

D – driver, S – sensor, RC – RC oscillator,

PC computer, PA – preamplifier, TP – temperature programmer.

3 The apparatus for IET

In spite of the long history of experience with SRM, we decided to construct a new apparatus on a base of IET because of its advantages that are mainly higher reliability at high temperatures and simultaneous measurement of the resonant frequency and internal damping of the sample. The scheme of this apparatus is depicted in Fig. 3.

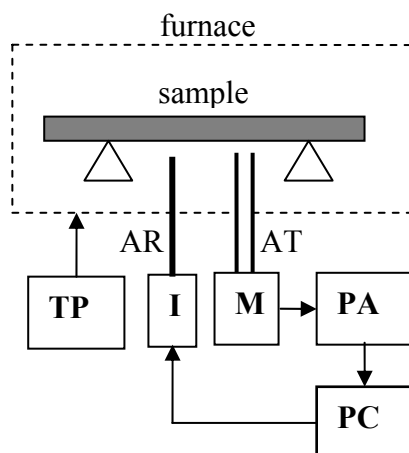


Fig. 3. The scheme of the high-temperature apparatus for IET.

I – impactor, AR – alumina rod, M – microphone, AT – alumina tube, PA – preamplifier, PC – computer, TP – temperature programmer.

3.1 Impactor

To excite vibrations in the sample, the sample must be hit with an impactor (impulse tool). It can be a little hammer moved manually in the case of the room-temperature apparatus, or an electromagnetic hammer in the case of the high-temperature apparatus. The hammer must hit the sample in the area between nodal points as pictured in Fig. 3. We used the impactor depicted in Fig. 4, where a control circuit is also visible. The impactor is made from alumina rod Ø3 mm that is moved in a vertical direction by an electromagnet.

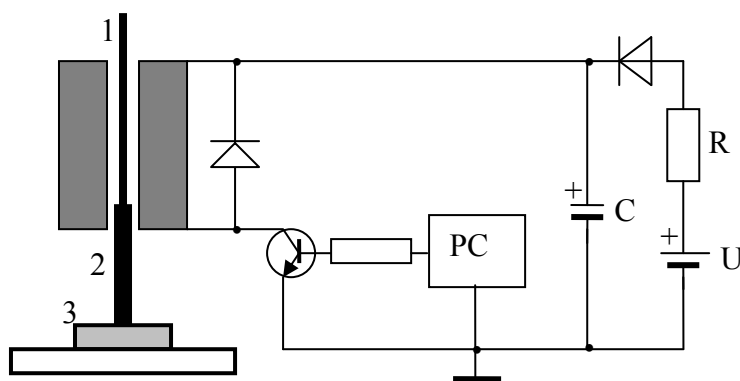


Fig. 4. Impactor. 1 – alumina rod, 2 – iron core in a coil, 3 – rubber pad, $C = 0.1 \text{ F}$ (25 V), $R = 6.5 \Omega$, $U = 5 - 8 \text{ V}$, PC – impulse generator in PC, two diodes 45V/2A, transistor KD602.

The impactor is controlled by a computer program and executed automatically every t seconds. The period t is chosen by the user. Every t seconds the main program calls a subpro-

gram which sends the signal to the impactor, records the response of the sample and processes the recorded signal. The period t must be long enough to charge the capacitor ($t > 4$ s). After every t seconds, the opening signal is sent from the computer via the Advantech PCI-1710HG card interface to the transistor base. The transistor is open, and the capacitor is discharged through the coil which attracts an iron core up and hits the sample. This signal from the computer is adjustable, and its power is proportional to the collector current of the transistor, i.e. to the intensity of the impactor hit. The program adjusts the impulse voltage automatically in order to reach the lowest power of impact to detect the vibrations. When the output of the preamplifier is under the selected threshold, the impulse voltage is slightly increased. After the hit, the current gradually decreases and the core moves down softly. For the measurement period t we usually chose 15 or 30 s.

3.2 Sample holder

It is desirable to have the sample supported in its nodal points of the fundamental mode of the flexural vibrations. Because the mechanical impulse is applied vertically, as visible in Fig. 3, the sample must be reliably fixed with wires. We used kanthal wire $\varnothing 0.3$ mm. The sample, 130 mm long, is put in a horizontal position on the wires in the two nodal points and two other wires fix the sample. Since the ceramic sample shrinks during heating, two weights maintain sufficient forces for fixing the sample (Fig. 5). A similar technique is also used in [17, 18].

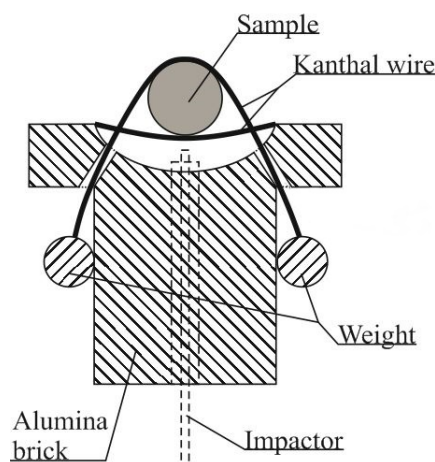


Fig. 5. The sample holder.

3.3. Furnace and temperature control.

The furnace is built from refractory porous alumina bricks and alumina fiber pads. A working space is $120 \times 120 \times 250$ mm where the holder with the sample is located in a homogeneous temperature field. The heating elements are four silicon carbide rods connected to a temperature programmer Clasic Clare 4.0. The temperature is measured with Pt-PtRh10 thermocouple in the close vicinity of the sample.

The measurements can be run in different temperature regimes including heating and cooling with a rate from $1^\circ\text{C}/\text{min}$ to $10^\circ\text{C}/\text{min}$ or isothermal heating at selected temperatures up to 1200°C .

4 Measurement of the sound response

4.1 Sensor and preamplifier

We use an electret microphone to catch the sound response of the sample on the impulse excitation. Since the microphone must be located outside the furnace, an alumina tube with an inner diameter of 5.6 mm and a length of 230 mm was used as a sound guide between the microphone and the sample. There was a small gap of ~ 2 mm between the alumina tube and the sample, so the measurement of the sample vibrations was contact-free.

We located the impactor and sensor under the furnace as visible in Fig. 3. It lowers the vertical flow of the hot air in the furnace (so called a chimney effect), so the temperature field in the furnace is more homogenous. A similar arrangement is applied in [18] where both, impactor and microphone, are located under the furnace. In the apparatus designed in [17], the impactor is under the furnace and the microphone is above it.

A voltage signal from the microphone is weak, for that reason the microphone was connected to an input of the preamplifier CanaKit UK 151 designed around the LM386 amplifier integrated circuit. The output of the preamplifier was connected to the headphone input of the computer.

4.2 Processing of the sound response

The operating software is responsible for four processes: a) controlling the repeating frequency of the measurement and a power of the impactor, b) recording the sample's sound response to the excitation, c) processing the data, and d) displaying the results. The software is developed under the environment of Matlab.

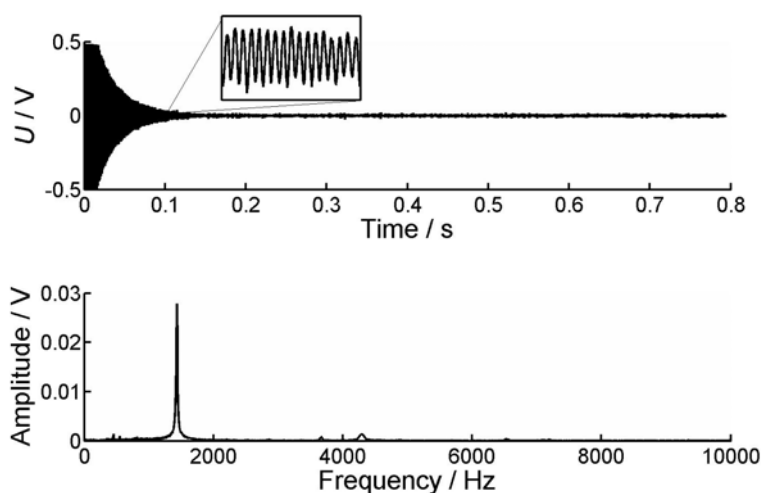


Fig. 6. A typical response of the sample to the mechanical impulse, where the output voltage of the microphone is visible in the upper picture and its frequency spectrum in the lower picture.

Simultaneously with the mechanical impulse, the program begins to record the sound response. We used a computer sound card for the data recording. It is possible to reach the

sampling rate 40 kHz, which is sufficient for determination of the resonant frequency which varies from 700 Hz to 7000 Hz. The measured signal is stored in a time domain, displayed and in the next step is transformed into a frequency domain using fast Fourier transformation (FFT). The typical response of the sample to the mechanical impulse is shown in Fig. 6, where a frequency spectrum of the sound response is also shown. The fast Fourier algorithm is implemented in the Matlab as a function 'fft'. A logarithmic decrement, which characterizes internal damping, is found from the half-height width of the resonant peak [19].

5 The measurement example

The apparatus described above is used for dynamic thermomechanical analysis of ceramic samples. To present the capability of the apparatus to measure elastic and damping quantities of solid materials, we show one example in Fig. 7. Here are results obtained for the unfired ceramic sample (60 mass% of illite and 40 mass% of quartz) in a temperature regime $20\text{ }^{\circ}\text{C} \rightarrow 1100\text{ }^{\circ}\text{C} \rightarrow 50\text{ }^{\circ}\text{C}$, in which the heating and cooling rates were $1\text{ }^{\circ}\text{C}/\text{min}$. The measured results reflect the main processes in the sample: releasing the physically bound water, $\alpha \rightarrow \beta$ and $\beta \rightarrow \alpha$ transformation of quartz and sintering.

This example shows the ability of the apparatus to provide frequency and damping measurements in one experiment during heating/cooling. It can be seen, that damping measurement is accompanied with a scattering. Such a scattering is also often present in a commercial apparatus [17, 18]. The reason for this is in the high sensitivity of the internal damping measurement to the sample quality (inhomogeneities, cracks and pores).

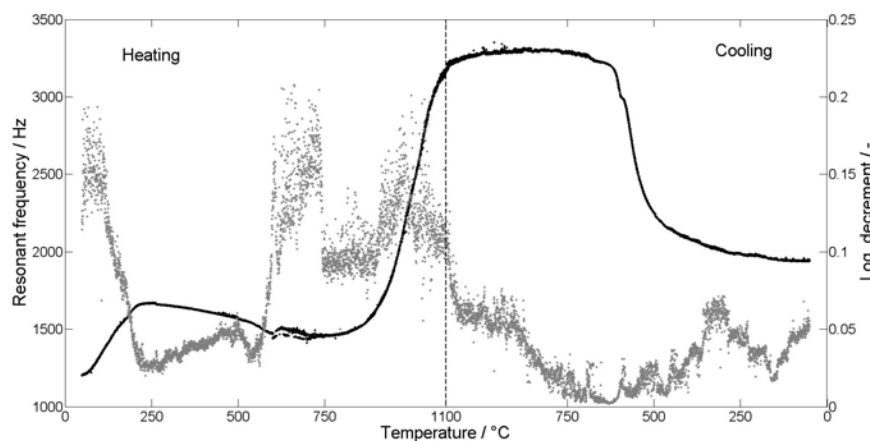


Fig. 7. The resonant frequency (black points) and logarithmic decrement (gray points).

6 Conclusions

A laboratory-made apparatus for the measurement of the resonant frequency and internal damping that exploits an impulse excitation technique (IET) is described. The apparatus is capable of measuring under a dynamic heating program or isothermal heating up to a temperature of $1200\text{ }^{\circ}\text{C}$. The expanded relative uncertainty of Young's modulus at elevated temperatures is 1.1 %. As an example of the measurements shows, the measurement of the reso-

nant frequency is reliable. The internal damping measurement can be accompanied with quite a high scattering due to its strong dependence on defects in the sample.

7 Acknowledgement

This work was supported by the grant VEGA 1/0646/12 from the Ministry of Education of the Slovak Republic. The authors are indebted to K. Mitterpach for technical help.

8 References

1. *Schreiber E., Anderson O., Soga N.* Elastic constants and their measurement. - New York: McGraw-Hill Book Co, 1973.
2. *Štubňa I., Majerník V.* An alternative equation of the flexural vibration // *Acta Acustica united with Acustica* - 1998. - Vol.84. - 999-1001 p.
3. ASTM C 1198-01: Standard test method for dynamic Young's modulus, shear modulus and Poisson's ratio for advanced ceramics by sonic resonance. (Published in 2001. Standard Documents. Philadelphia USA)
4. ASTM C 1259-01: Standard test method for dynamic Young's modulus, shear modulus and Poisson's ratio for advanced ceramics by impulse excitation of vibration. (Published in 2001. Standard Documents, Philadelphia USA)
5. *Martinček G.* Nedeštruktívne dynamické metódy skúšania stavebných materiálov. - Bratislava: SAV, 1962 (in Slovakian).
6. *Bosomworth P.A.* Improved frequency equations for calculating the Young's modulus of bars of rectangular or circular cross section from their flexural resonant frequencies. // *J. ASTM International*. - 2011. - 7. - No.8. - 1-14 p.
7. *Varga G., Štubňa I., Vážanová A., Podoba R., Trník A.* Determination of the vibrating mode of the sample with uniform cross-section. // *Jemná mechanika a optika*. - 2007. - Vol.52. - 334-336 p.
8. *Štubňa I., Trník A., Vozár L.* Determination of Young's modulus of ceramics from flexural vibration at elevated temperatures. // *Acta Acustica united with Acustica* - 2011. - Vol.97. - 1-7 p.
9. *Jung S.S., Kim Y.T., Lee Y.B., Shin S.H., Kim D., Kim H.C.* Measurement of the resonance frequency, the loss factor and the dynamic Young's modulus in structural steel and polycarbonate by using an acoustic velocity sensor. // *J. Korean Phys. Soc.* - 2006. - Vol.49. - 1961-1966 p.
10. *Bosomworth P.* An exciting technique for quality analysis. // *Ceramic Industry*. - 2005. - 20-24 p.
11. *Štubňa I., Trník A., Vozár L.* Thermomechanical and thermodilatometric analysis of green alumina porcelain. // *Ceramics International*. - 2009. - Vol.35. - 1181-1185 p.
12. *Trník A., Štubňa I., Moravčíková J.* Sound velocity of kaolin in the temperature range from 20 °C to 1100 °C. // *International Journal of Thermophysics*. - 2009. - Vol.30. - 1323-1328 p.
13. *Chmelík F., Trník A., Štubňa I., Pešička J.* Creation of microcracks in porcelain during firing. // *Journal of the European Ceramic Society*. - 2011. - Vol.31 - 2205-2209 p.

14. Štubňa I., Šín P., Trník A., Veinthal R. Mechanical properties of kaolin during heating. // Key Engineering Materials. - 2013 - Vol.527 - 14-19 p.
15. Trník A., Štubňa I., Sokolář R., Medved' I. Use of fly ash in ceramic tiles: elastic properties during firing. // J. of the Ceramic Society of Japan. - 2013 - Vol.121 - 925-929 p.
16. Chu W.T. A comparison of two test methods for measuring Young's modulus of building materials. // Canadian Acoustics. - 1996. - Vol.24. - 11 p.
17. IMCE n.v. [website]. [2014]. URL: <http://imce.eu/measurement-systems> (date accessed: 27.5.2014).
18. BuzzMac International [website]. [2014]. URL: <http://buzzmac.com> (date accessed: 27.5.2014).
19. Inman D.J. Engineering vibrations. - Upper Saddle River: Pearson Education, Inc., 2008.

АППАРАТУРА ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ МОДУЛЯ ЮНГА КЕРАМИКИ ПРИ ПОВЫШЕННЫХ ТЕМПЕРАТУРАХ

Томаш ГУЛАН, Антон ТРНИК, Игорь ШТУБНЯ

Кафедра физики, Университет Константина Философа, Нитра, Словакия

Аннотация: В статье описана конструкция автоматизированной установки для динамического термомеханического анализа. Измерение основано на бесконтактном снятии микрофоном свободных изгибательных колебаний (цилиндрического или призматического) образца. Возбуждение колебаний проводится механическим импульсом от электромагнитного импульсора работающем в периодическом режиме с частотой 1 импульс в 15 или 30 с. Снимается зависимость амплитуды свободных колебаний образца от времени, которая переведётся с помощью трансформации Фурье на зависимость амплитуды колебаний от частоты, где определится резонансная частота и также коэффициент затухания по полуширине резонансного пика. Резонансная частота служит для расчёта модуля Юнга или скорости звука. Измерять эти величины могут в режиме линейного нагрева и охлаждения (скорость до 10 °С/мин) или в режиме изотермического нагрева. Максимальная рабочая температура установки 1200 °С. Расширенная относительная неопределённость при повышенных температурах 1,1 %.

Ключевые слова: резонансные измерения, модуль Юнга, импульсное возбуждение колебаний

УДК: 572.33+519.634

**ЗАДАЧА О СКАЧКЕ ХИМИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА
ПРИ ИСПАРЕНИИ ФЕРМИ-ГАЗА
С ПЕРЕМЕННОЙ ЧАСТОТОЙ СТОЛКНОВЕНИЯ МОЛЕКУЛ**

Е.А. Бедрикова, А.В. Латышев

*Московский государственный областной университет
105005, Москва, ул. Радио, 10а*

Аннотация. Рассматривается испарение бинарной смеси для случая, когда испаряющейся компонентой является ферми-газ. Получено аналитическое решение задачи о скачке химического потенциала ферми-газа для случая, когда частота столкновений молекул испаряющейся компоненты является переменной величиной. Найдены величины скачка химического потенциала и концентрации газа. Исследована зависимость коэффициента скачка химического потенциала от коэффициента испарения. Проведено графическое исследование коэффициента скачка химического потенциала и коэффициента концентрации.

Ключевые слова: ферми-газ, испарение, аналитическое решение, скачок химического потенциала.

ВВЕДЕНИЕ

Интерес к решению кинетических уравнений для квантовых газов был заложен в работе [14]. В настоящее время по-прежнему наблюдается интерес к решению граничных задач для квантовых газов [2,13]. Из многочисленного потока работ выделим аналитические работы, посвященные точным решениям [1-3,5-8].

Значительный интерес вызывает поведение разреженных бинарных газовых смесей. Будем считать, что одной из компонентов бинарной газовой смеси является ферми-газ.

Целью настоящей работы является построение аналитического решения БГК (Бхатнагар – Гросс – Крук) модели кинетического уравнения Больцмана для бинарной смеси газов с использованием модели зеркально-диффузного отражения молекул газа от плоской поверхности. Имеется смесь двух газов испаряющихся с плоской поверхности в полупространство. Испаряющийся компонентой является газ ферми и его концентрация много меньше второго газа. В качестве второго газа можно выбрать, например воздух или любой другой газ, в том числе и квантовый. Вдали от поверхности задан постоянный градиент концентрации первого газа.

Требуется построить функцию распределения первого компонента, а также найти его макропараметры: коэффициент диффузии, скачок и профиль химического потенциала и концентрации.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассматривается задача об испарении ферми-газа с плоской поверхности в бинарную смесь квантовых газов. Полагается, что концентрация испаряющегося компонента смеси n_1 много меньше концентрации неиспаряющегося компонента n_2 : $n_1 \ll n_2$ (случай разбавленной смеси).

В квазиклассическом приближении уравнение Больцмана для бинарной газовой смеси имеет вид [9]:

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{r}} = J_{ii} + J_{ij}, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2,$$

где f_i — функция распределения i -го компонента смеси, J_{ii} и J_{ij} — интегралы столкновений молекул i -го компонента между собой и с молекулами j -го компонента соответственно.

Заметим, что $J_{11} \sim n_1^2$, а $J_{12} \sim n_1 n_2$ (так как $f_i \sim n_i$). Величина $\varepsilon = n_1/n_2$ является малым параметром ($\varepsilon \ll 1$), т. к. $n_1 \ll n_2$. Отсюда следует, что $|J_{11}| = |J_{12}| \sim \varepsilon$. Поэтому в первом приближении по ε величиной J_{11} можно пренебречь по сравнению с величиной J_{12} . Заметим также, что в этом приближении по ε воздействием первого компонента на функцию распределения второго можно пренебречь. Значит, в условиях рассматриваемой задачи функцию распределения второго компонента газовой смеси можно считать равновесной со средней нулевой скоростью и постоянными температурой T_2 и концентрацией n_2 . В силу неравенства $n_1 \ll n_2$ температура второго компонента $T_2 = T$ является равновесной температурой системы.

Рассмотрим величину J_{12} , которую можно аппроксимировать кинетической моделью типа БГК [10,12]. Тогда кинетическое уравнение для первого компонента будет иметь вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} = \frac{w}{l} (f^* - f), \quad (1.1)$$

где

$$f^* = \left[1 + \exp \left(\frac{mv^2}{2kT} - \frac{\mu^*(r)}{kT} \right) \right]^{-1}, \quad -\infty < \mu^*(r) < +\infty,$$

f^* — аналог фермиевской функции распределения для первого компонента, k — постоянная Больцмана, $\mu^*(r)$ — аналог химического потенциала первого компонента, T — температура смеси, считающаяся постоянной, l — средняя длина свободного пробега молекул, $w = |\mathbf{v} - \mathbf{u}_0(\mathbf{r})|$ — модуль скорости молекулы в системе отсчета, относительно которой газ покоится, $\mathbf{u}_0(\mathbf{r})$ — среднемассовая скорость в лабораторной системе координат, $\nu(\mathbf{v}) = \frac{w}{l}$ — эффективная частота столкновений молекул первого компонента с молекулами второго.

Рассмотрим декартову систему координат с центром на поверхности, с которой происходит испарение. Ось x_1 проведем перпендикулярно поверхности. При испарении с поверхности вдали от поверхности существует постоянный градиент концентрации первого компонента:

$$g_v = \left(\frac{dn}{dx_1} \right)_{x_1=+\infty},$$

n – концентрация (числовая плотность) первого компонента.

Будем считать испарение слабым, т. е. предположим, что относительное изменение концентрации первого компонента на длине свободного пробега молекул l много меньше единицы:

$$|G_n| \ll 1, \quad G_n = \frac{l}{n_s} |g_n|.$$

Здесь n_s — концентрация насыщенного пара (газа) первого компонента на поверхности испарения, соответствующая температуре поверхности $T_s \equiv T$.

В этих условиях задача допускает линеаризацию. Перейдем к безразмерной скорости $C = v/v_T$, безразмерной координате $x = x_1/l$ и безразмерному аналогу химическому потенциалу $\alpha^*(x) = \mu^*(x)/(kT)$. Здесь $v_T = 1/\sqrt{\beta}$ – тепловая скорость первого компонента, $\beta = m/(2kT)$, $l = v_T \tau$ – средняя длина пробега молекул первого компонента с тепловой скоростью, τ – среднее время между двумя последовательными столкновениями молекул первого компонента. Теперь после линеаризации частоты столкновений уравнение (1.1) можно записать в виде:

$$\mu \frac{\partial f}{\partial x} = f_F^*(C, x) - f(C, x), \quad (1.2)$$

где

$$\mu = \frac{C_x}{C}, \quad f_F^*(C, x) = [1 + \exp(C^2 - \alpha^*(x))]^{-1}.$$

Линеаризацию задачи проведем относительно абсолютного фермиана

$$f_F^s \equiv f_F^s(C, \alpha_s) = [1 + \exp(C^2 - \alpha_s)]^{-1},$$

где α_s – значение безразмерного химического потенциала на стенке т.е.

$$\alpha^*(x) = \alpha_s + \delta \alpha^*(x).$$

Линеаризуя f_F^* относительно f_F^s , получаем:

$$f_F^s(C, \alpha) = f_F^s(C, \alpha_s) + g(C, \alpha_s) \cdot \delta \alpha^*(x), \quad (1.3)$$

где

$$g(C, \alpha_s) = \exp(C^2 - \alpha_s) [1 + \exp(C^2 - \alpha_s)]^{-2}.$$

Функцию распределения будем искать в виде:

$$f(x, C) = f_F^s(C, \alpha_s) + g(C, \alpha_s)h(x, \mu, C). \quad (1.4)$$

С помощью (1.4) уравнение (1.2) записывается в виде:

$$\mu \frac{\partial h}{\partial x} = \delta a^*(x) - h(x, \mu, C). \quad (1.5)$$

Параметр $\delta a^*(x) = a^*(x) - \alpha_s$ найдем с помощью закона сохранения числа частиц:

$$\int C [f(x, C) - f_F^s(x, C)] d^3C = 0.$$

Отсюда мы приходим к уравнению, из которого находим

$$\delta a^*(x) = \frac{\int C g(C, \alpha_s) h(x, \mu, C) d^3C}{\int C g(C, \alpha_s) d^3C} = \frac{1}{4\pi g_1(\alpha_s)} \int C g(C, \alpha_s) h(x, \mu, C) d^3C. \quad (1.6)$$

Здесь:

$$g_1(\alpha_s) = \frac{1}{2} \ln(1 + \exp(\alpha_s)),$$

в общем виде:

$$g_n(\alpha_s) = \int_0^\infty C^{n+2} g(C, \alpha_s) dC.$$

Следовательно, уравнение (1.5) принимает следующий вид:

$$\mu \frac{\partial h}{\partial x} + h(x, \mu, C) = \frac{1}{4\pi g_1(\alpha_s)} \int C g(C, \alpha_s) h(x, \mu, C) d^3C. \quad (1.7)$$

Из постановки задачи будет видно, что граничные условия не зависят от модуля молекулярной скорости, т.е. считать, что $h(x, \mu, C) \equiv h(x, \mu)$. Тогда уравнение (1.7) упрощается и принимает вид:

$$\mu \frac{\partial h}{\partial x} + h(x, \mu) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 h(x, \mu) d\mu. \quad (1.8)$$

Найдем истинное значение химпотенциала и сравним его с аналогом. Для этого воспользуемся свойством равновесной функции

$$\int [f(x, C) - f_{eq}(x, C)] d^3 C = 0, \quad (1.9)$$

где f_{eq} – равновесная фермиевская функция распределения,

$$f_{eq} = \left[1 + \exp \left(\frac{mv^2}{2kT} - \frac{\mu(r)}{kT} \right) \right]^{-1}, \quad \mu(r) < 0.$$

Рассмотрим локально равновесную функцию $f_F(C, x)$, которая имеет вид:

$$f_F(C, x) = \left[1 + \exp(C^2 - \alpha(x)) \right]^{-1},$$

где $\alpha(x)$ – значение безразмерного химического потенциала, причем $\alpha(x) = \alpha_s + \delta\alpha(x)$. Линеаризуя эту функцию относительно абсолютного фермиана f_F^s получаем:

$$f_F^s(C, \alpha) = f_F^s(C, \alpha_s) + g(C, \alpha_s) \cdot \delta\alpha(x). \quad (1.10)$$

С учетом формул (1.10), (1.3) и закона сохранения (1.9) получаем равенство:

$$\delta\alpha^*(x) = \delta\alpha(x). \quad (1.11)$$

Таким образом, истинное значение химпотенциала совпадает с его аналогом и равно:

$$\delta\alpha(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 h(x, \mu) d\mu. \quad (1.12)$$

2. ФОРМУЛИРОВКА ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

Рассмотрим граничное условие на поверхности испарения для молекул первого компонента, учитывающее влияние свойств поверхности путем введения коэффициента испарения q (см [4, 11]):

$$f(0, C) = qf_F^s(C, \alpha_s) + (1 - q)f_F^0(C, \alpha_0), \quad C_x > 0, \quad (2.1)$$

где

$$f_F^0(C, \alpha_0) = \left[1 + \exp(C^2 - \alpha_0) \right]^{-1}.$$

Величины q и $(1-q)$ – вероятности того, что молекула, падающая на стенку, соответственно конденсируется на ней и отражается от нее без конденсации.

Граничное условие на стенке для функции $h(x, \mu)$ выведем из условия (2.1). Для этого результат линеаризации следующий функции

$$f_F^0(C, \alpha_0) = f_F^s(C, \alpha_s) + g(C, \alpha_s)(\alpha_0 - \alpha_s)$$

подставим в условие (2.1)

$$f(0, C) = f_F^s(C, \alpha_s) + (1-q)g(C, \alpha_s)(\alpha_0 - \alpha_s), \quad (2.2)$$

а затем, подставив условие (2.2) в уравнение (1.4) получим:

$$h(0, \mu) = (1-q)(\alpha_0 - \alpha_s), \quad \mu > 0. \quad (2.3)$$

Величина $(\alpha_0 - \alpha_s)$ определяется из условия непротекания для молекул, отразившихся от поверхности без конденсации на ней (вероятность такого процесса равна $1 - q$)

$$(1-q) \int C_x [f_F^0(C, \alpha_0) \theta_+(C_x) + f(0, C) \theta_+(-C_x)] d\Omega = 0,$$

где $\theta_+(x)$ – функция Хэвисайда.

Условие непротекания преобразуем, учитывая определение функции Хэвисайда к виду:

$$\int_{C_x > 0} C_x f_F^0(C, \alpha_0) d^3C + \int_{C_x < 0} C_x f(0, C) d^3C = 0. \quad (2.4)$$

Далее, подставляя в (2.4) функцию (1.4) и функцию (2.2), получаем:

$$\int_0^1 \mu h(0, \mu) d\mu = \frac{1}{2} (1-q)(\alpha_0 - \alpha_s), \quad \mu > 0.$$

Вдали от поверхности - вне слоя Кнудсена толщиной порядка длины свободного пробега молекул - функция $h(x, \mu)$ имеет вид:

$$h(x, \mu) = h_{as}(x, \mu) + o(1), \quad x \rightarrow +\infty, \quad (2.5)$$

где

$$h_{as}(x, \mu) = A_\alpha + G_\alpha(x - \mu),$$

G_α - градиент безразмерного химического потенциала, заданный вдали от стенки:

$$G_\alpha = \left(\frac{d\alpha(x)}{dx} \right)_{x=+\infty}.$$

A_α – скачок химического потенциала - неизвестная величина, которая находится из решения задачи.

Подставляя функцию $h_{as}(x, \mu)$ в формулу (1.6) и учитывая (1.11) получаем асимптотическое распределение безразмерного химпотенциала:

$$a(x) = A_\alpha + G_\alpha x, \quad x \rightarrow +\infty.$$

Отсюда следует, что $A_\alpha = a_{as}(0) = \alpha_{as}(0) - \alpha_s$, т.е. скачок химпотенциала определяется как разность между экстраполированным значением химпотенциала на стенке и его значением непосредственно у стенки.

В явном виде условия непротекания (2.4) имеет вид с учетом того, что функцию распределения мы ищем в виде (1.4):

$$\int_{C_x > 0} C_x [f_F^s(C, \alpha_s) + g(C, \alpha_s)(\alpha_0 - \alpha_s)] d^3 C + \int_{C_x < 0} C_x [f_F^s(C, \alpha_s) + g(C, \alpha_s)h(0, \mu)] d^3 C$$

Отсюда, производя необходимые вычисления, приходим к выражению:

$$(\alpha_0 - \alpha_s) = \frac{4G_\alpha}{3q}. \quad (2.6)$$

Таким образом, с учетом равенства (2.6) граничное условие (2.3) принимает вид:

$$h(0, \mu) = B, \quad \mu > 0, \quad B = \frac{4G_\alpha(1-q)}{3q} \quad (2.7)$$

3. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Решение уравнения (1.8) будем искать в виде:

$$h_\eta(x, \mu) = \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right) \Phi(\eta, \mu), \quad (3.1)$$

где принята следующая единичная нормировка собственной функции характеристического уравнения

$$\int_{-1}^1 \Phi(\eta, \mu) d\mu \equiv 1,$$

η - спектральный параметр, или параметр разделения.

Подставляя (3.1) в уравнение (1.8) найдем характеристическое уравнение:

$$\Phi(\eta, \mu)(\eta - \mu) = \frac{1}{2}\eta. \quad (3.2)$$

Решая уравнение (3.2) в классе обобщенных функций и получим собственные функции:

$$\Phi(\eta, \mu) = \frac{1}{2}\eta^P \frac{1}{\eta - \mu} + \lambda(\eta)\delta(\eta - \mu).$$

где символ Px^{-1} означает главное значение интеграла от x^{-1} , $\delta(x)$ - дельта-функция Дирака, $\lambda(z)$ - дисперсионная функция:

$$\lambda(z) = 1 + \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{z\pi d\mu}{\mu - z}.$$

Теорема: Существует и причем единственное решение кинетического уравнения (1.8) с граничными условиями (2.5) и (2.7) в виде разложения по собственным функциям характеристического уравнения.

Решение задачи (1.8), (2.5) и (2.7) будем искать в виде разложения по собственным функциям характеристического уравнения:

$$h(x, \mu) = A_\alpha + G_\alpha(x - \mu) + \int_0^1 \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right) \Phi(\eta, \mu) A(\eta) d\eta, \quad (3.3)$$

где $A(\eta)$ - неизвестная функция (коэффициент непрерывного спектра), а A_α - неизвестная постоянная (коэффициент дискретного спектра).

Причем коэффициенты A_α и G_α связаны линейным соотношением:

$$A_\alpha = C(\alpha, q)G_\alpha, \quad (3.4)$$

где функция $C(\alpha, q)$ - коэффициент скачка химического потенциала.

Найдем коэффициенты дискретного и непрерывного спектров. Для этого подставим собственные функции в разложение (3.3) и учитывая условие (2.7) получаем сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши:

$$B = A_\alpha - G_\alpha \mu + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\eta A(\eta)}{\eta - \mu} d\eta + \lambda(\mu) A(\mu), \quad \mu > 0. \quad (3.5)$$

Введем вспомогательную функцию:

$$M(z) = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\eta A(\eta)}{\eta - z} d\eta,$$

граничные значения которой на положительной полуоси сверху и снизу связаны формулами Сохоцкого:

$$M^+(\mu) - M^-(\mu) = \pi i \mu A(\mu), \quad \mu > 0, \quad (3.6)$$

$$\frac{M^+(\mu) + M^-(\mu)}{2} = M(\mu),$$

где

$$M(\mu) = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\eta A(\eta)}{\eta - \mu} d\eta,$$

причем интеграл $M(\mu)$ понимается как особый интеграл в смысле главного значения по Коши.

С помощью граничных значений функций $\lambda(z)$ и $M(z)$ сверху и снизу на разрезе $(0,1)$ сведем сингулярное уравнение (3.5) к краевой задаче Римана:

$$\lambda^+(\mu)(M^+(\mu) + A_\alpha - G_\alpha \mu - B) = \lambda^-(\mu)(M^-(\mu) + A_\alpha - G_\alpha \mu - B), \quad \mu > 0. \quad (3.7)$$

Рассмотрим соответствующую однородную краевую задачу

$$\frac{X^+(\mu)}{X^-(\mu)} = \frac{\lambda^+(\mu)}{\lambda^-(\mu)}, \quad \mu > 0.$$

Ее решение [8] имеет вид:

$$X(\mu) = \frac{1}{\mu} e^{V(\mu)},$$

где

$$V(\mu) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\zeta(\tau)}{\tau - \mu} d\tau, \quad \zeta(\mu) = \theta(\mu) - \pi = \operatorname{arccctg} \frac{2\lambda(\mu)}{\mu\pi}.$$

С помощью однородной задачи неоднородную краевую задачу Римана сведем к задаче определения аналитической функции по ее нулевому скачку на разрезе:

$$X^+(\mu)(M^+(\mu) + A_\alpha - G_\alpha\mu - B) = X^-(\mu)(M^-(\mu) + A_\alpha - G_\alpha\mu - B), \mu > 0.$$

Решение этой задачи имеет вид:

$$M(\mu) = -A_\alpha + G_\alpha\mu + B - \frac{G_\alpha}{X(\mu)}.$$

Из условия разрешимости $M(\infty) = 0$ найдем величину скачка безразмерного химического потенциала:

$$A_\alpha = B + G_\alpha V_1,$$

где

$$V_1 = -\frac{1}{\pi} \int_0^1 \zeta(\tau) d\tau \approx 0.71045. \quad (3.9)$$

Коэффициент непрерывного спектра $A(\eta)$ найдем, если подставим решение краевой задачи в равенство (3.6):

$$A(\eta) = 2G_\alpha \frac{\sin \zeta(\eta)}{\pi \eta X(\eta)}.$$

Таким образом, неизвестные коэффициенты разложения (3.3) найдены. Это означает, что функция распределения испаряющейся компоненты полностью построена и представляется в виде:

$$\frac{h(x, \mu)}{G_\alpha} = C(q, \alpha) + x - \mu + \frac{2}{\pi} \int_0^1 \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right) \frac{\Phi(\eta, \mu)}{\eta X(\eta)} \sin \zeta(\eta) d\eta.$$

Отсюда видно, что задача имеет единственное решения в виде разложения по собственным функциям характеристического уравнения.

4. СКАЧОК И ПРОФИЛЬ ХИМПОТЕНЦИАЛА

Сравнивая равенства (3.4) и (3.9), с учетом второго из равенств (2.7) находим коэффициент скачка безразмерного химпотенциала:

$$C(q) = \frac{4(1-q)}{3q} + V_1.$$

Распределение химпотенциала полупространстве $x \geq 0$ задается равенством (1.12). Поставляя разложение функции распределения (3.3) в (1.12) находим профиль химпотенциала:

$$\frac{\delta a(x)}{G_\alpha} = C(q) + x + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \exp\left(-\frac{x}{\eta} - V(\eta)\right) \sin \zeta(\eta) d\eta.$$

5. КОЭФФИЦИЕНТ ДИФФУЗИИ

Рассмотрим функцию

$$f_{as}(x, C) = f_F^s(C, \alpha) + g(C, \alpha) h_{as}(x, \mu),$$

где $h_{as}(x, \mu) = A_\alpha + G_\alpha(x - \mu)$. Эта функция называется функцией распределения Чепмена-Энскога [4,9].

Вычислим коэффициент диффузии D_{12} с помощью функции $h_{as}(x, \mu)$. Диффузный поток $\mathbf{i}$ возникает в результате наличия в газе градиента плотности $\nabla \rho$, поэтому при малых $\nabla \rho$ имеем: $\mathbf{i} = -D_{12} \nabla \rho$ [10]. Отсюда согласно постановке задачи

$$D_{12} = -\frac{i_x}{\rho'_{,x}} = -\frac{m \int f_{as} v_x d\Omega}{m \int (f_{as})'_{x_1} d\Omega} = \frac{1}{3} \frac{l}{\sqrt{\beta}} \frac{g_1(\alpha)}{g_0(\alpha)}.$$

Переходя к безразмерным координатам и вычисляя необходимые интегралы, получаем:

$$D_{12} = \frac{2}{3} \frac{kT}{m v_1} \frac{g_1(\alpha)}{g_0(\alpha)}, \quad (5.1)$$

$$\text{где } v_1 = \frac{1}{\tau}, \quad g_0(\alpha_s) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dC}{1 + \exp(C^2 - \alpha_s)}$$

Отметим, что при $\alpha_s \rightarrow -\infty$ этот результат переходит в классический. Используя асимптотику

$$g_0(\alpha_s) = \frac{\sqrt{\pi}}{4} e^{\alpha_s}, \quad g_1(\alpha_s) = \frac{1}{2} e^{\alpha_s}, \quad \alpha_s \rightarrow -\infty,$$

получаем известный результат [5]:

$$D_{12} = \frac{2}{3\sqrt{\pi}} \frac{l}{\sqrt{\beta}}.$$

6. КОЭФФИЦИЕНТ СКАЧКА ХИМПОТЕНЦИАЛА

Равенство (3.4) представляет собой величину скачка безразмерного химпотенциала. Перейдем в (3.4) к размерным величинам и учитывая, что $l = \frac{1}{v_1 \sqrt{\beta}}$, получим:

$$\delta\mu(0) = C(q) \sqrt{\frac{2kT}{m}} \frac{1}{kTv_1} \left(\frac{d\mu(x_1)}{dx_1} \right)_{x_1=+\infty}.$$

Частоту столкновений v_1 выразим через коэффициент диффузии D_{12} согласно формуле (5.1). В результате получаем:

$$\delta\mu(0) = K(\alpha, q) \frac{1}{kT} \sqrt{\frac{m}{2kT}} D_{12} \left(\frac{d\mu(x_1)}{dx_1} \right)_{x_1=+\infty},$$

где $K(\alpha, q)$ - коэффициент скачка химического потенциала,

$$K(\alpha, q) = 3 \frac{g_0(\alpha)}{g_1(\alpha)} \left[\frac{4(1-q)}{3q} + V_1 \right]. \quad (6.1)$$

Отметим, что при $\alpha_s \rightarrow -\infty$ коэффициент скачка химического потенциала переходит в ранее известный для классического газа результат [5]:

$$K(\alpha, q) = \frac{3\sqrt{\pi}}{2} \left[\frac{4(1-q)}{3q} + V_1 \right], \quad \alpha_s \rightarrow -\infty.$$

Поведение коэффициента скачка химпотенциала (6.1) можно описать с помощью графиков (рис 1,2,3).

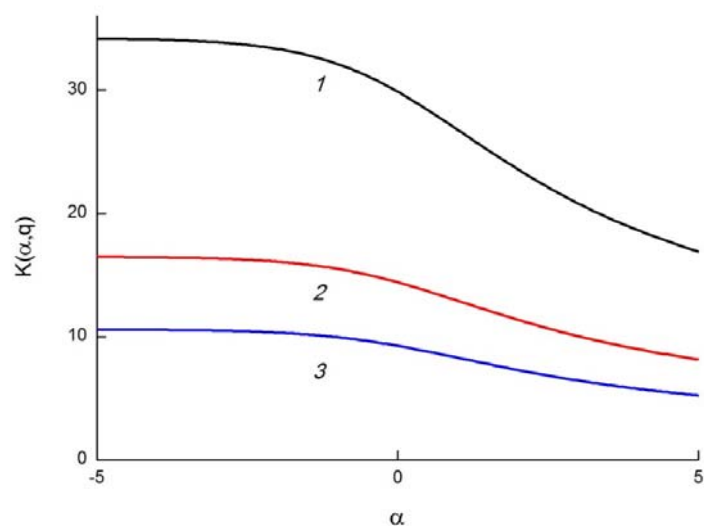


Рис.1. Зависимость коэффициента скачка безразмерного химического потенциала от величины α , кривые 1, 2 и 3 отвечают значениям коэффициента испарения $q=0.1$, $q=0.2$, и $q=0.3$.

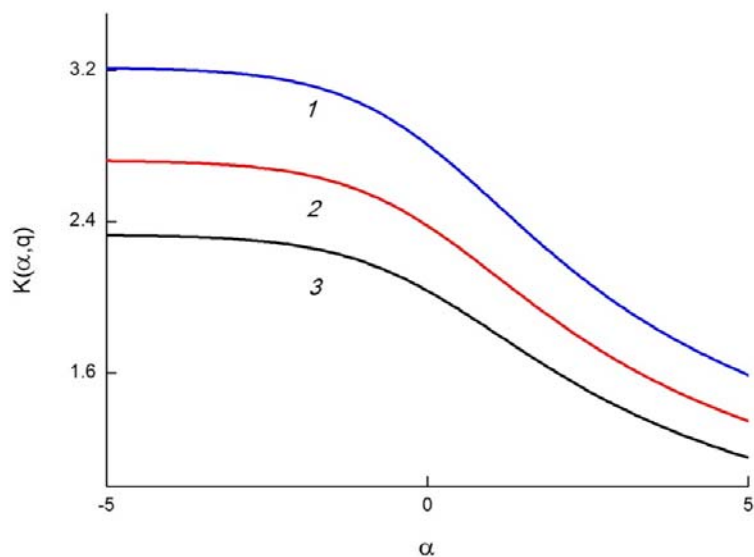


Рис.2. Зависимость коэффициента скачка безразмерного химического потенциала от величины α , кривые 1, 2 и 3 отвечают значениям коэффициента испарения $q=0.8$, $q=0.9$ и $q=1$.

Анализ графиков на рис.1 и на рис.2 показывает что значение коэффициента скачка химпотенциала тем больше, чем меньше значение коэффициента испарения.

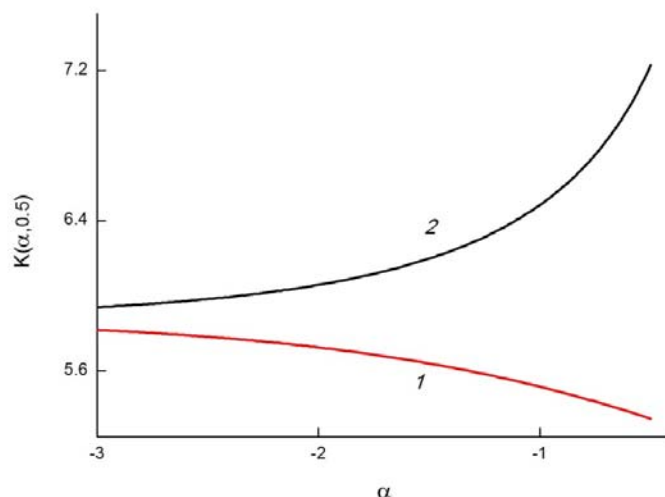


Рис.3: Зависимость коэффициента скачка безразмерного химического потенциала от величины α , кривая 1 отвечает случаю бозе-газ с переменной частотой столкновений, кривая 2 отвечает случаю ферми-газ с переменной частотой столкновений.

Сравнение коэффициента скачка химпотенциала отвечающего случаю бозе-газа с переменной частотой столкновения молекул с коэффициентами отвечающими случаям ферми-газа с переменной частотой столкновения показано на рис. 3. При этом хорошо видно, что коэффициент скачка химпотенциала для ферми-газа больше соответствующих значений для коэффициента для бозе-газа во всем диапазоне значений безразмерного химпотенциала.

7. СКАЧОК И ПРОФИЛЬ КОНЦЕНТРАЦИИ

Профиль концентрации газа $N(x)$ в полупространстве $x \geq 0$ дается равенством

$$N(x) = N_s + n(x),$$

где

$$N_s = \int f_B(C, \alpha) d\Omega, \quad n(x) = \int h(x, \mu) g(C, \alpha) d\Omega.$$

Нетрудно найти, что $N_s = N_0 l(\alpha)$, где

$$N_0 = \frac{4\pi(2s+1)m^3}{(2\pi\hbar)^3(\sqrt{\beta})^3}, \quad l(\alpha) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \ln|1 + \exp(\alpha - C^2)| dC,$$

а отклонение концентрации насыщенного пара вычисляется так:

$$n(x) = P_N G_N$$

где

$$P_N = g_0(\alpha) \left[C(\alpha, q) + x + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \exp\left(-\frac{x}{\eta} - V(\eta)\right) \sin \zeta(\eta) d\eta \right],$$

$$G_N = N_0 G_\alpha \quad (7.1)$$

P_N - коэффициент профиля концентрации, G_N - величина градиента концентрации (по безразмерной координате)

$$G_N = \left(\frac{dN}{dx} \right)_{x=+\infty}$$

Равенство (7.1) означает, что градиент химического потенциала есть градиент логарифма концентрации:

$$G_\alpha = \left(\frac{d \ln N}{dx} \right)_{x=+\infty}$$

Нетрудно найти связь между отклонениями концентрации и химпотенциала от соответствующих значений у стенки

$$n(x) = N_0 g_0(\alpha) a(x). \quad (7.2)$$

Из соотношения (7.2) при $x=0$ находим величину скачка концентрации:

$$n_{as}(0) = G_N C_N(\alpha, q),$$

где $C_N(\alpha, q) = g_0(\alpha) C(\alpha, q)$ - коэффициент скачка концентрации.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе аналитически решена задача об испарении одной из компонент бинарного газа в случае, когда частота столкновений молекул испаряющейся компоненты является переменной величиной. Испаряющейся компонентой является ферми-газ. На основе аналитического решения задачи получено явное представление функции распределения, выражение скачка химпотенциала и распределение химпотенциала в полупространстве. Также найден скачок концентрации и построен профиль концентрации испаряющейся компоненты газа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бедрикова Е.А., Латышев А.В. Chemical Potential Jump during Evaporation of a Quantum Bose Gas// arXiv:1301.1196v1 [math-ph] 7 Jan 2013
2. Квашинин А.Ю., Латышев А.В., Юшканов А.А. Изотермическое скольжение ферми-газа с зеркально-диффузным отражением от границы // Известия высших учебных заведений. Физика. 2009. Т. 52. № 12. С. 3-7.
3. Костиков А.А., Латышев А.В., Юшканов А.А. Скачок химического потенциала при испарении ферми-газа // Журнал технической физики. 2008. Т. 79. Вып. 4. С. 1-8.
4. Козырев А.В., Ситников А.Г. Испарение сферической капли в газе среднего давления// Успехи физ. наук. 2001. Т. 171, №7. С. 765-774.
5. Латышев А.В., Юшканов А.А. Влияние коэффициента испарения на параметры газа вблизи поверхности// ИФЖ. 2007. Т. 80, № 2. С. 121-125.
6. Латышев А.В., Юшканов А.А. Новый метод решения граничных задач кинетической теории// Ж. вычисл. матем. и матем. физики. 2012. Т. 52, №3 С. 539-552.
7. Латышев А.В., Юшканов А.А. Метод решения граничных задач для кинетических уравнений//Ж. вычислит. матем. и матем. физики. 2004. Т. 44. № 6. С. 1107-1118.
8. Латышев А.В., Юшканов А.А. Аналитические методы в кинетической теории. Монография. М.: МГОУ, 2008. 280 с.
9. Силин В.П. Введение в кинетическую теорию газов. Наука, Москва, 1971.
10. Ферцигер Дж., Капер Г. Математическая теория процессов переноса в газах. Мир, Москва, 1976.
11. Хирс Д., Паунд Г. Испарение и конденсация. Металлургия, Москва, 1966.
12. Черчиньяни К. Теория и приложения уравнения Больцмана. Мир, Москва, 1978.
13. Modugno G. Fermi - Bose mixture with tunable interactions // Archiv: cond-mat/0702277.
14. Uehling E.A., Uhlenbeck G.E. Transport Phenomena in Einstein - Bose and Fermi - Dirac Gases// Physical Review. 1933, April, Vol.43. P. 552 – 561.

**CHEMICAL POTENTIAL JUMP DURING EVAPORATION
OF FERMI GAS WITH VARIABLE COLLISIONS FREQUENCY
OF MOLECULES**

E. Bedrikova, A. Latyshev

Moscow State Regional University

Abstract. Evaporation of a binary mixture is considered. Evaporating component is fermi-gas. The case when collision molecules frequency of evaporating components is proportional to the module of molecular velocity is considered. The analytical solution this problem is received. Dependence of chemical potential jump coefficient on evaporation coefficient is investigated. Concentration evaporating components is supposed much less concentration of bearing gas. Graphic research of coefficient of chemical potential jump is carried out.

Keywords: Fermi-gas, evaporation, analytical solution, chemical potential jump, concentration jump

УДК 539.2

ТЕПЛОЕМКОСТЬ ВЕЩЕСТВ С КОЛЕБАТЕЛЬНЫМИ СПЕКТРАМИ МАЛОЙ И НУЛЕВОЙ РАЗМЕРНОСТИ

В.М. Кузнецов*, К.Б Терешкина**

*Российский химико-технологический университет им. Д.И. Менделеева
(РХТУ им. Д.И. Менделеева), 125047, Москва, Россия, Миусская пл., 9

**Институт химической физики им. Н.Н. Семёнова РАН (ИХФ РАН), 119991,
Москва, Россия, ул. Косыгина, 4

Аннотация. Обнаружено, что межмолекулярные колебательные спектры Ван-дер-Ваальсовых димеров, рассчитанные методами ab initio и состоящие из четырёх или шести частот, можно представить в виде степенных зависимостей с нулевой или близкой к нулю размерностью. Веществ с подобного рода спектрами раньше известно не было. Тем самым показано, что Ван-дер-Ваальсовы димеры можно рассматривать как континуальную среду, подобную кристаллической.

Ключевые слова: димеры, межмолекулярные спектры, нулевая размерность

Введённая в [1] фрактальная модель континуальной среды обобщает известную твердотельную модель Дебая с показателями размерности колебательного спектра $d_f = 1, 2, 3$ на весь диапазон их целых и дробных значений $0 \leq d_f \leq \infty$. Дополнительно в этой модели помимо дебаевской температуры $\theta_H = \frac{\hbar \omega_{\max}}{k_B}$ ($\hbar, k_B$ – постоянные Планка и Больцмана, $\omega_{\max}$ – максимальная частота) вводится ещё одна температура $\theta_N = \frac{\hbar \omega_{\min}}{k_B}$, связанная с нижней границей спектра (в модели Дебая $\theta_N = 0$). Температура θ_N существенна при исследованиях тепловых свойств кластеров и наноструктур. В данной работе основное внимание уделено веществам, имеющим размерность колебательных спектров, близких к значению $d_f = 0$. Таких веществ до сих пор обнаружено не было. Выражения для функции плотности частотного спектра $g(\omega)$ и температурной зависимости теплоёмкости $C(T)$ в случае $d_f = 0$ имеют вид [1]

$$g(\omega) = \frac{N^*}{\omega \ln(\omega_{\max}/\omega_{\min})}, \quad \frac{C(T)}{C_\infty} = \frac{1}{\ln(\theta_H/\theta_N)} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{x \exp x}{(\exp x - 1)^2} dx, \quad (1)$$

где $x_{\min} = \theta_N/T$, $x_{\max} = \theta_H/T$, C_∞ – значение теплоёмкости, соответствующее закону Дюлонга и Пти, $N^* = 6N - 6$ – число межмолекулярных колебательных мод, N – число молекул в исследуемом кластере или наноструктуре.

В общем случае, когда $d_f \neq 0$, выражение для плотности частотного спектра $g(\omega)$, средней частоты $\langle \omega \rangle$ и теплоёмкости $C(T)/C_\infty$ имеют вид [2]:

$$g(\omega) = \frac{3N^* d_f \omega^{d_f-1}}{\omega_{\max}^{d_f} - \omega_{\min}^{d_f}}, \quad \frac{\langle \omega \rangle}{\omega_{\max}} = \frac{d_f}{d_f + 1} \frac{1 - \left(\frac{\theta_N}{\theta_H}\right)^{d_f+1}}{1 - \left(\frac{\theta_N}{\theta_H}\right)^{d_f}}$$

$$\frac{C(T)}{C_\infty} = \frac{d_f}{\left(\frac{\theta_H}{T}\right)^{d_f} - \left(\frac{\theta_N}{T}\right)^{d_f}} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{x^{d_f+1} e^x dx}{(e^x - 1)^2}$$
(2)

Как было установлено в работе [2], для многих димеров средняя частота межмолекулярных колебаний $\bar{\omega} = \frac{1}{N^*} \sum_{i=1}^{N^*} \omega_i$ близка или практически совпадает со средним значением частоты $\langle \omega \rangle_o$ непрерывного спектра при $d_f = 0$, т.е.

$$\bar{\omega} \approx \langle \omega \rangle_o = \frac{1}{N^*} \int_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} \omega g(\omega) d\omega = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\ln(\omega_{\max}/\omega_{\min})}.$$
(3)

В нижеследующей таблице приведены расчётные данные межмолекулярных частот колебаний ряда Ван-дер-Ваальсовых димеров и их средние значения. Частоты ω_i можно преобразовать в температуры $\theta_i = \hbar \omega_i / k_B$ умножением на множитель 1,4388. Эти данные получены из решения соответствующих уравнений Шредингера методом Хартри-Фока с использованием универсального пакета квантово-химических программ FIREFLY с наборами базисных функций 6-311 G(d,p), 6-31 G(d) [3].

Таблица 1

Межмолекулярные колебательные частоты димеров

Димер	$\omega_i, \text{см}^{-1}$						$\bar{\omega}$	$\langle \omega \rangle_o$
(N ₂) ₂	20.0	27.5	40.0	55.0			35.0	35.0
(CO ₂) ₂	16.7	25.9	35.6	94.7			43.5	44.0
(H ₂ O) ₂	119.0	138.0	152.0	179.0	334.0	592.0	300.0	296.0
(CCl ₄) ₂	2.4	4.9	5.1	6.3	6.8	10.4	6.0	5.7
(SF ₆) ₂	7.5	15.1	15.1	17.4	17.4	29.8	17.0	15.7
[C ₇ H ₆ (OH) ₂] ₂	12.0	17.5	24.3	29.2	41.0	62.0	31.0	31.0
(C ₂ H ₆) ₂	8.3	9.7	10.1	18.2	22.6	26.8	15.9	15.7
(CH ₄ O) ₂	36.4	43.1	56.8	94.4	128.2	181.6	90.1	90.3

Следует отметить, что современные методы расчёта многоэлектронных атомных или молекулярных систем, часто именуемые *ab initio* [4], приводят к некоторому разбросу в конечных результатах, связанному с выбором тех или иных начальных геометрических конфигураций (например, относительного расположения молекул в кластере друг относительно друга), выбором различных моделей потенциалов взаимодействия молекул друг с другом и т.д. Так, приведённые в работе [5] данные шести вариантов расчёта колебательных спектров димеров воды в зависимости от выбора базисных функций приводят к различиям в значениях ω_i до десяти процентов.

Это относится также и к средним значениям $\bar{\omega}$ и $\langle \omega \rangle_o$. Поэтому важно выяснить, как сказывается разброс результатов численного эксперимента на величине показателя размерности спектра d_f . Выражение для средней частоты $\langle \omega \rangle$ спектра (2) имеет две неопределённости при значениях $d_f = 0$ и $d_f = -1$. При раскрытии неопределённостей в первом случае оно сводится к величине $\langle \omega \rangle_o$ (3), а во втором соответственно к значению

$$\langle \omega \rangle_{-1} = \frac{\omega_{\max} \cdot \omega_{\min}}{\langle \omega \rangle_o} . \quad (4)$$

В случае малых значений $d_f \ll 1$ выражение для $\langle \omega \rangle$ в (2) упрощается. Действительно, производя разложение знаменателя $\langle \omega \rangle$ при $d_f \approx \varepsilon \ll 1$, с учётом членов $\sim \varepsilon^2$ в результате получим

$$d_f = \frac{2 \left(1 - \frac{\langle \omega \rangle_o}{\bar{\omega}} \right)}{\ln \frac{\omega_{\max}}{\omega_{\min}}} . \quad (5)$$

Видно, что показатель размерности d_f в зависимости от величины отношения $\langle \omega \rangle_o / \bar{\omega}$ может быть как положительным, так и отрицательным, и равен нулю при $\langle \omega \rangle_o = \bar{\omega}$.

Как следует из таблицы, оба упомянутых случая имеют место в действительности. Поэтому интересно выяснить, насколько разница между значениями $\langle \omega \rangle_o$ и $\bar{\omega}$ и, соответственно, в d_f сказывается на величине теплоёмкости при различных температурах. На рис.1 приведены эти данные, полученные из соотношений (1-2) для диапазона $-0.1 < d_f < 0.1$ в зависимости от параметра θ_H / θ_N (при $\theta_H = 100 K$). Из расчётов *ab initio* следует, что для многих ван-дер-ваальсовых димеров, в том числе указанных в таблице, отношение $\theta_H / \theta_N \approx 5$. При этом в указанном диапазоне изменения N^* значения теплоёмкости близки к тем, которые имеют место при $d_f = 0$. Открытым

остаётся вопрос о том, насколько непрерывная модель (1-2) применима к описанию колебательного спектра димеров, фактически являющегося дискретным. Формально спектр можно считать непрерывным, если для числа колебательных мод N^* выполняется условие $N^* \gg (\theta_H/T)^{d_f}$. Так, если кристаллическое вещество удовлетворяет непрерывному закону Дебая ($d_f = 3$), то при низких температурах $T \sim 1\text{ K}$ и $\theta_H = 100\text{ K}$ оно должно состоять не менее чем из $N \sim N^* \geq 10^5$ частиц. В кластерах число частиц значительно меньше, однако и размерности спектров невелики. Так, для кластеров воды с числом частиц $N=(10 \div 20)$ размерность $d_f \approx (0,3 \div 0,4)$ [1]. При таких значениях, а тем более при $d_f = 0$, условие непрерывности спектра принимает вид $N^* \gg 1$, и формально выполняется даже для димеров, однако нуждается в проверке.

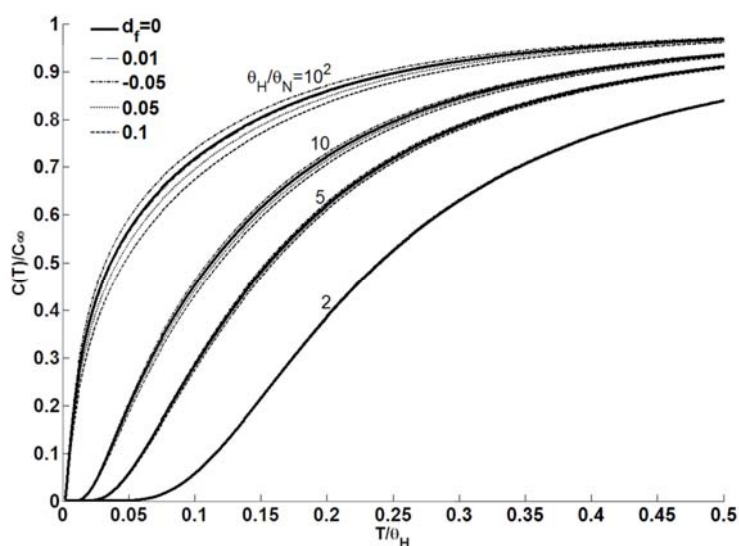


Рис.1 Влияние параметра θ_H/θ_N на теплоёмкость при $d_f \ll 1$

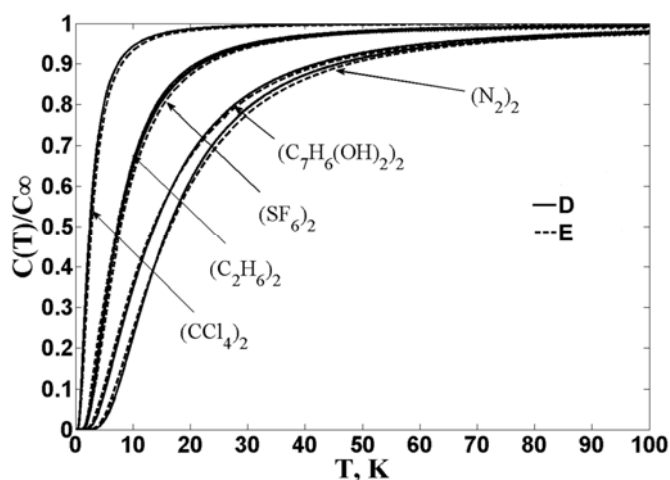


Рис. 2 Теплоёмкость димеров. E – дискретная модель (6), D – непрерывная модель (1).

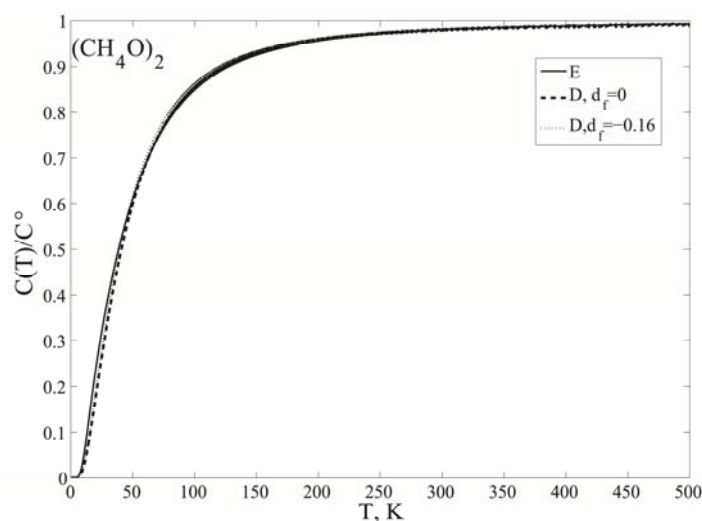


Рис. 3 Теплоёмкость димера метанола

С этой целью сравним температурные зависимости теплоёмкости различных димеров, рассчитанные по континуальной модели (1), с расчётными зависимостями полученными по дискретной модели, представляющий собой обычную сумму эйнштейновских осцилляторов ω_i

$$\frac{C_e(T)}{C_\infty} = \frac{1}{N^*} \sum_{i=1}^{N^*} \frac{(\theta_i/T)^2 e^{\theta_i/T}}{(e^{\theta_i/T} - 1)^2}, \quad (6)$$

где $\theta_i = \hbar\omega_i/k_B$.

Результаты представлены на рис.2 и свидетельствуют о том, что расчёты по континуальной модели (1) с показателем $d_f = 0$ и дискретной модели (6) практически совпадают друг с другом. В случае димеров, для которых из расчётов *ab initio* следовало, что $\bar{\omega} \neq \langle \omega \rangle_0$, сравнение проводилось между зависимостями (2) и (6).

Результаты показаны на рис.3 и свидетельствуют о том, что разница в получающихся значениях теплоёмкости также невелика. Таким образом, из фрактальной теории теплоёмкости (1-5) следует, что континуальное представление о состоянии вещества возможно не только тогда, когда количество составляющих его атомов или молекул велико, но и когда оно незначительно, т.е. в наноструктурах, кластерах и даже для димеров, представляющих минимально возможное связанное состояние частиц в природе.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ и Минобрнауки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кузнецов В.М., Хромов В.И. О существовании макро и наноструктур с фоновыми спектрами малой фрактальной размерности. // ПЖТФ. – 2012. - Т. 38. - № 11. - С. 11-18.
2. Kuznetsov V.M., Tereshkina K.B. Debye Limiting Law Violation in Clusters and Nanostructures. // Proceedings of the International Conference Nanomaterials: Ap-

- plications and Properties. - 2013. - V.2. - N. 1. - C. 01PCSI02(2pp). - <http://nap.sumdu.edu.ua/index.php/nap/nap2013/paper/view/898/339>
3. *Granovsky A.A.*, Firefly version 7.1.G, <http://classic.chem.msu.su/gran/firefly/index.html>
4. *Попл А.Д.* Квантово-химические модели // УФН. – 2002. – Т. 172. - № 3. - С. 348-356
5. *Y. Wang, X. Huang, B. Shepler, B.C. Braams and J.M. Bowman* Flexible, ab initio potential, and dipole moment surfaces for water. I. Tests and applications for clusters up to the 22-mer // J. Chem. Phys.- 2011. Т. 134. - С. 094509

HEAT CAPACITY OF MATERIALS WITH LOW AND ZERO-DIMENSIONAL VIBRATIONAL SPECTRA

V. Kuznetsov*, K. Tereshkina**

**D. Mendeleyev University of Chemical Technology of Russia
9, Miusskaya Pl., 125047 Moscow, Russia*

***Semenov Institute of Chemical Physics of Russian Academy of Sciences
4, Kosygina St., 119991 Moscow, Russia*

Abstract. It was found that Intermolecular vibrational spectra of Van der Waals dimers, calculated by ab initio methods and consisting of four or six frequencies can be represented in the form of power dependency with zero or close to zero dimension. Materials with such spectra was not known earlier. This shows that the Van der Waals dimers can be seen as a continual environment similar to crystal.

Keywords: dimers, intermolecular spectra, zero dimension

УДК 533.72

О ГРАНИЦАХ ПРИМЕНИМОСТИ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ПОДХОДА К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ О ТЕЧЕНИИ ПУАЗЕЙЛЯ

С.В. Гулакова, В.Н. Попов

*Северный (Арктический) федеральный университет (Архангельск)
163002, Архангельск, Набережная Северной Двины, 17*

Аннотация. В рамках кинетического подхода построено аналитическое решение задачи о течении Пуазейля. В качестве основного уравнения используется линеаризованное уравнение Вильямса, а в качестве граничного условия на стенках канала – модель диффузного отражения. Построен профиль массовой скорости газа в канале и вычислена приходящаяся на единицу ширины канала величина потока массы газа. Проведено сравнение с аналогичными результатами, полученными в рамках классической гидродинамики и гидродинамики со скольжением. Установлены границы их применимости.

Ключевые слова: течение Пуазейля, модельные кинетические уравнения, гидродинамика со скольжением.

ВВЕДЕНИЕ

Выбор математического аппарата, используемого для описания течений газа в каналах, существенным образом зависит от соотношения средней длины свободного пробега молекул газа l_g и расстояния D' между его стенками. При $D' \gg l_g$ можно использовать гидродинамический подход, основанный на решении системы уравнений механики сплошной среды с классическими граничными условиями прилипания. В случае же, когда $D' \approx l_g$, необходимо использовать кинетический подход, в основе которого лежит решение кинетического уравнения Больцмана с микроскопическими граничными условиями, которым должна удовлетворять функция распределения молекул газа по координатам и скоростям на стенках канала [1]. Трудности, связанные с использованием кинетического подхода, обусловлены сложностью самого уравнения Больцмана. Даже при его замене модельным кинетическим уравнением, описание течения газа в канале сводится к решению системы из двух сингулярных интегральных уравнений. В итоге, как сама функция распределения, так и макропараметры газа записываются в виде рядов Неймана, число учитываемых членов которых увеличивается по мере того, как уменьшается расстояние между стенками канала [2]. В силу этого интерес представляет получение на основе точных аналитических решений асимптотических выражений для макропараметров газа в канале и оценка диапазона их применения. Решению данной проблемы для плоского течения Пуазейля и посвящена данная статья. С использованием кинетического уравнения Вильямса построен профиль массовой скорости газа, вычислен поток массы газа, приходящийся на единицу ширины канала. На основе полученных аналитических выражений получены соответствующие асимптотические формулы. Проведенное сравнение полученных результатов позволило определить границы их применимости.

ВЫВОД ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ. ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МОЛЕКУЛ ГАЗА

Рассмотрим канал, толщиной D' , стенки которого расположены в плоскостях $x' = \pm d'$ прямоугольной декартовой системы координат ($d' = D'/2$). Предположим, что в канале поддерживается постоянный градиент давления. Направим ось Oz' против градиента давления. Будем рассматривать установившееся течение газа в канале. Тогда, в выбранной системе координат уравнение Вильямса запишется в виде [3]

$$v_x \frac{\partial f}{\partial x'} + v_z \frac{\partial f}{\partial z'} = \frac{\omega}{\gamma l_g} (f_* - f). \quad (1)$$

Здесь $\omega = |\mathbf{v} - \mathbf{u}(\mathbf{r}')|$, $\mathbf{v}$ – скорость молекул газа, $\mathbf{u}(\mathbf{r}')$ – массовая скорость газа, $\mathbf{r}'$ – размерный радиус-вектор, $l_g = \eta_g \beta^{-1/2}/p$ – средняя длина свободного пробега молекул газа, p и η_g – давление и коэффициент динамической вязкости газа, $\gamma = 15\sqrt{\pi}/16$,

$$f_* = n_* \left(\frac{m}{2\pi k_B T_*} \right)^{3/2} \exp \left(- \frac{m}{2k_B T_*} (\mathbf{v} - \mathbf{u}_*)^2 \right).$$

Параметры n_* , T_* и $\mathbf{u}_*$ выбираются из условия, что модельный интеграл столкновений в (1) удовлетворяет законам сохранения числа частиц, импульса и энергии. Будем считать, относительный перепад давления на длине свободного пробега молекул газа малым. Тогда задача допускает линеаризацию и функцию распределения молекул газа по координатам и скоростям можно представить в виде

$$f(\mathbf{r}', \mathbf{v}) = n(z) \beta^{3/2} \pi^{-3/2} [1 + C_z G_n Z(x; C_x)]. \quad (2)$$

Здесь $\mathbf{C} = \beta^{1/2} \mathbf{v}$ – безразмерная скорость молекул газа, $\beta = m/2k_B T$, m – масса молекулы газа, k_B – постоянная Больцмана, T – температура газа, $x = x'/\gamma l_g$ и $z = z'/\gamma l_g$ – безразмерные координаты, G_n – безразмерный градиент давления.

Подставляя (2) в (1), после линеаризации $f_*(n_*, T_*, \mathbf{u}_*)$ относительно абсолютно-го максвеллиана для нахождения $Z(x, C_x) = Z(x, \mu, C)$ приходим к уравнению

$$\mu \frac{\partial Z}{\partial x} + Z(x, \mu, C) + \frac{1}{C} = \frac{3}{4} \int_{-1}^1 (1 - \mu'^2) d\mu' \int_0^{+\infty} \exp(-C'^2) C'^5 Z(x, \mu', C') dC'. \quad (3)$$

При записи (3) перешли к сферической системе координат в пространстве скоростей $C_x = C \cos \theta$, $C_y = C \sin \theta \cos \chi$, $C_z = C \sin \theta \sin \chi$, выполнили в полученном

выражении интегрирование по азимутальному углу χ от 0 до 2π и ввели обозначение $\mu = \cos \theta$.

Условия для функции $Z(x, \mu, C)$ на стенках канала с учетом принятой в работе зеркально-диффузной модели граничного условия записываются в виде:

$$Z(-d, \mu, C) = Z(-d, -\mu, C), \quad 0 \leq \mu \leq 1, \quad (4)$$

$$Z(d, \mu, C) = Z(d, -\mu, C), \quad -1 \leq \mu \leq 0. \quad (5)$$

Решение (3) ищем в виде:

$$Z(x, \mu, C) = Z_1(x, \mu) + \left(\frac{1}{C} - \alpha \right) Z_2(x, \mu), \quad \alpha = \frac{3\sqrt{\pi}}{8}. \quad (6)$$

Подставляя (6) в (3), приходим к системе уравнений для нахождения $Z_1(x, \mu)$ и $Z_2(x, \mu)$

$$\mu \frac{\partial Z_1}{\partial x} + Z_1(x, \mu) + \gamma = \frac{3}{4} \int_{-1}^1 (1 - \mu'^2) Z_1(x, \mu') d\mu', \quad (7)$$

$$\mu \frac{\partial Z_2}{\partial x} + Z_2(x, \mu) + 1 = 0. \quad (8)$$

Граничные условия (4), (5) с учетом (6) перепишем в виде ($k = 1, 2$)

$$Z_k(-d, \mu) = Z_k(-d, -\mu), \quad 0 \leq \mu \leq 1, \quad (9)$$

$$Z_k(d, \mu) = Z_k(d, -\mu), \quad -1 \leq \mu \leq 0. \quad (10)$$

Непосредственной подстановкой легко убедиться, что решение уравнения (8) с граничными условиями (9), (10) имеет вид:

$$Z_2(x, \mu) = \exp\left(-\frac{x+d}{\mu}\right) H_+(\mu) + \exp\left(-\frac{x-d}{\mu}\right) H_+(-\mu) - 1, \quad (11)$$

где $H_+(\mu) = \begin{cases} 0, & \text{если } \mu < 0 \\ 1, & \text{если } \mu > 0 \end{cases}$ – ступенчатая функция Хэвисайда.

Решение уравнения (7) ищем в виде [3]

$$Z_1(x, \mu) = A_0 + A_1(x - \mu) + \int_{-1}^1 \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right) a(\eta) F(\eta, \mu) d\eta + \gamma(x^2 - 2x\mu + 2\mu^2). \quad (12)$$

Здесь A_0 , A_1 и $a(\eta)$ – неизвестные параметры и функция, подлежащие дальнейшему определению, $F(\eta, \mu) = \frac{3}{4} \eta P \frac{1}{\eta - \mu} + \frac{\lambda(\eta)}{1 - \eta^2} \delta(\eta - \mu)$ – собственные векторы непре-

рывного спектра, $\lambda(z) = 1 + \frac{3}{4}z \int_{-1}^1 \frac{(1-\tau^2)d\tau}{\tau-z}$ – дисперсионная функция Вильямса, $\rho \frac{1}{\eta-\mu}$ и $\delta(\eta-\mu)$ – распределение в смысле главного значения при вычислении интеграла от $1/z$ и дельта-функция Дирака. Подставляя (12) в граничные условия (9), (10), после преобразований, приведенных в [2], приходим к системе уравнений:

$$\frac{3}{4} \int_0^1 \frac{\eta[b(\eta;-d) + b(-\eta;d)]d\eta}{\eta-\mu} + \frac{\lambda(\mu)}{1-\mu^2} [b(\mu;-d) + b(-\mu;d)] =$$

$$= 2[-A_0 - \gamma(d^2 + 2\mu d + 2\mu^2)] - \frac{3}{4} \int_0^1 \frac{\eta[b(-\eta;-d) + b(\eta;d)]d\eta}{\eta+\mu}, \quad (13)$$

$$\frac{3}{4} \int_0^1 \frac{\eta[b(\eta;-d) - b(-\eta;d)]d\eta}{\eta-\mu} + \frac{\lambda(\mu)}{1-\mu^2} [b(\mu;-d) - b(-\mu;d)] =$$

$$= 2A_1(d+\mu) - \frac{3}{4} \int_0^1 \frac{\eta[b(-\eta;-d) - b(\eta;d)]d\eta}{\eta+\mu}, \quad (14)$$

$$b(\eta;x) = a(\eta) \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right). \quad (15)$$

Нетрудно видеть, что (14) с учетом (15) при $a(-\eta) = a(\eta)$ и $A_1 = 0$ обращается в тождество. Уравнение (13) при этом можно переписать в виде

$$\frac{3}{4} \int_0^1 \frac{\eta b(\eta;-d)d\eta}{\eta-\mu} + \frac{\lambda(\mu)}{1-\mu^2} b(\mu;-d) = f(\mu), \quad 0 \leq \mu \leq 1, \quad (16)$$

$$f(\mu) = -A_0 - \gamma(d^2 + 2\mu d + 2\mu^2) - \frac{3}{4} \int_0^1 \frac{\eta b(\eta;d)d\eta}{\eta+\mu}. \quad (17)$$

Решение (16) ищем с использованием методов краевых задач теории функций комплексного переменного. С этой целью введем вспомогательную функцию, заданную интегралом типа Коши:

$$N(z) = \frac{3}{4} \int_0^1 \frac{\eta B(\eta;-d)d\eta}{\eta-z}. \quad (18)$$

Учитывая краевые значения функций $N(z)$ и $\lambda(z)$ на верхнем и нижнем берегах разреза и используя решение задачи факторизации, полученное в [3], сингулярное интегральное уравнение (16) сведем к краевой задаче Римана

$$N^+(\mu)X^+(\mu) - N^-(\mu)X^-(\mu) = \frac{3}{2} \frac{X^-(\mu)}{\lambda^-(\mu)} \pi \mu (1-\mu^2) f(\mu). \quad (19)$$

Разрезы функций, входящих в (19), совпадают с контуром краевого условия, следовательно, получили задачу отыскания кусочно-аналитической функции по заданному скачку. Ее решение записываем на основании формул Сохоцкого:

$$N(z) = \frac{1}{X(z)} \frac{3}{4} \int_0^1 \frac{X^-(\mu)}{\lambda^-(\mu)} \frac{\mu(1-\mu^2)f(\mu)d\mu}{\mu-z}. \quad (20)$$

Раскладывая (20) в окрестности бесконечно удаленной точки, приходим к условию разрешимости краевой задачи (19):

$$\frac{3}{4} \int_0^1 \frac{X^-(\mu)}{\lambda^-(\mu)} \mu(1-\mu^2)f(\mu)d\mu = 0. \quad (21)$$

Подставляя (17) в (21), находим коэффициент A_0

$$A_0 = -\gamma(d^2 + 2X_2d + 2X_3) + \frac{3}{4} \int_0^1 \eta X(-\eta)b(\eta;d)d\eta, \quad (22)$$

где $X_2 = 0,581946$, $X_3 = 0,383616$, а для нахождения коэффициентов $a(\eta)$ приходим к интегральному уравнению Фредгольма второго рода:

$$a(\mu) = h(\mu) \left[2\gamma b(\mu) + \frac{3}{4} \int_0^1 \frac{\eta X(-\eta)b_2(-d,\eta)a(\eta)d\eta}{\eta + \mu} \right], \quad (23)$$

$$h(\mu) = -\frac{(1-\mu^2)X(-\mu)}{5|\lambda^+(\mu)|^2 b_2(d,\mu)}, \quad b_2(x,\eta) = \exp\left(\frac{x}{\eta}\right), \quad X(z) = \frac{1}{z} \exp[V(z)],$$

$$V(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{[\theta(\tau) - \pi]d\tau}{\tau - z}, \quad \theta(\tau) = \operatorname{arccctg} \frac{4\lambda(\tau)}{3\pi\tau(1-\tau^2)}, \quad b(\mu) = d + \mu + X_2.$$

Решение (23) ищем в виде степенного ряда:

$$a(\mu) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k a_k(\mu), \quad \lambda = \frac{3}{4}. \quad (24)$$

Подставляя (24) в (23) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях λ , находим:

$$\begin{aligned}
 a_0(\mu) &= 2\gamma h(\mu)b(\mu), \quad a_1(\mu) = 2\gamma h(\mu) \int_0^1 \frac{g(\eta_1)b(\eta_1)d\eta_1}{\eta_1 + \mu}, \\
 a_2(\mu) &= 2\gamma h(\mu) \int_0^1 g(\eta_1)d\eta_1 \int_0^1 \frac{g(\eta_2)b(\eta_2)d\eta_2}{\eta_2 + \eta_1}, \dots \\
 a_k(\mu) &= 2\gamma h(\mu) \int_0^1 g(\eta_1)d\eta_1 \int_0^1 g(\eta_2)d\eta_2 \dots \int_0^1 \frac{g(\eta_k)b(\eta_k)d\eta_k}{\eta_k + \eta_{k-1}}, \\
 g(\mu) &= \mu h(\mu) X(-\mu) b_2(-d, \mu).
 \end{aligned}$$

Таким образом, решение уравнения (3) с граничными условиями (4), (5) построено.

ВЫЧИСЛЕНИЕ МАКРОПАРАМЕТРОВ ГАЗА В КАНАЛЕ

Профиль массовой скорости газа в канале построим, исходя из статистического смысла функции распределения:

$$\begin{aligned}
 u'_z(x') &= \frac{1}{n} \int v_z f(\mathbf{r}', \mathbf{v}) d^3\mathbf{v} = \beta^{-1/2} U_z(x) G_n, \\
 U_z(x) &= \pi^{-3/2} \int \exp(-C^2) C_z^2 Z(x, C_x) d^3\mathbf{C}.
 \end{aligned} \tag{25}$$

Здесь $U_z(x)$ – безразмерная массовая скорость газа. Подставляя (6) в (25), получаем

$$\begin{aligned}
 U_z(x) &= \frac{\gamma}{2} \left[x^2 - \frac{D^2}{4} - X_2 D - 2X_3 + \frac{2}{5} + \frac{3}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k [I_k + J_k(x)] \right] - \\
 &\quad - \frac{2}{3\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{9\pi}{32} \right) \left[1 - \frac{3}{4} \int_0^1 (1 - \mu^2) \left[\exp\left(\frac{x-d}{\mu}\right) + \exp\left(-\frac{x+d}{\mu}\right) \right] d\mu \right].
 \end{aligned} \tag{26}$$

Перейдем теперь к вычислению безразмерного потока массы газа. Заметим, что в рамках кинетического подхода

$$\begin{aligned}
 J'_M &= \rho \int_{-D'/2}^{D'/2} u'_z(x') dx' = \rho \int_{-D/2}^{D/2} \beta^{-1/2} U_z(x) \frac{1}{p} \frac{dp}{dz} l_g \gamma dx = \\
 &= \rho \beta^{-1/2} (l_g \gamma)^2 \frac{D'^2}{2} \left(\frac{2}{D'^2} \int_{-D/2}^{D/2} U_z(x) dx \right) \frac{1}{p} \frac{dp}{dz'} = \frac{\rho D'^2}{2\eta} J_M \frac{dp}{dz'},
 \end{aligned}$$

где

$$J_M = \frac{2}{D^2} \int_{-D/2}^{D/2} U_z(x) dx. \tag{27}$$

есть безразмерный поток массы газа, приходящийся на единицу ширины канала.

Подставляя (25) в (26), находим:

$$J_M = \gamma \left[\frac{D}{6} + X_2 + \frac{1}{D} \left[2X_3 - \frac{4}{5} \left(1 - \frac{16}{9\pi} \right) - \frac{3}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k I_k \right] \right] - \\ - \frac{1}{D^2} \left[\frac{3}{2} \gamma \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k K_k + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{16}{9\pi} \right) \int_0^1 \mu (1 - \mu^2) \left[1 - \exp \left(-\frac{D}{\mu} \right) \right] d\mu \right]. \quad (28)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} I_0 \\ J_0(x) \\ K_0 \end{Bmatrix} &= \int_0^1 \begin{Bmatrix} g(\tau) \\ \gamma(x, \tau) \\ \zeta(\tau) \end{Bmatrix} [\tau + d + X_2] d\tau, \\ \begin{Bmatrix} I_k \\ J_k(x) \\ K_k \end{Bmatrix} &= \int_0^1 \begin{Bmatrix} g(\tau) \\ \gamma(x, \tau) \\ \zeta(\tau) \end{Bmatrix} d\tau \int_0^1 \frac{g(\eta_1) d\eta_1}{\eta_1 + \eta} \dots \int_0^1 \frac{g(\eta_k) [\eta_k + d + X_2] d\eta_k}{\eta_k + \eta_{k-1}}, \\ g(\mu) &= -\frac{\mu(1 - \mu^2) X^2 (-\mu) \exp(-2d/\mu)}{5 |\lambda^+(\mu)|^2}, \\ \gamma(x, \eta) &= -\frac{(1 - \eta^2) X (-\eta) \left[\exp\left(\frac{x-d}{\eta}\right) + \exp\left(-\frac{x+d}{\eta}\right) \right]}{5 |\lambda^+(\eta)|^2}, \\ \zeta(\eta) &= -\frac{2\eta(1 - \eta^2) X (-\eta) \left[1 - \exp\left(-\frac{2d}{\eta}\right) \right]}{5 |\lambda^+(\eta)|^2}. \end{aligned}$$

АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Рассмотрим полученные выше выражения для безразмерной скорости газа в канале (26) и приходящегося на единицу ширины канала безразмерного потока массы газа (28). Аналогичные выражения, полученные в рамках классической гидродинамики и гидродинамики со скольжением, имеют вид [4]:

$$U_z(x) = -\frac{\gamma}{2} \left(x^2 - \frac{D^2}{4} \right), \quad J_M = \frac{\gamma D}{6}, \quad (29)$$

$$U_z(x) = -\frac{\gamma}{2} \left(x^2 - \frac{D^2}{4} - X_2 D \right), \quad J_M = \gamma \left(\frac{D}{6} + X_2 \right). \quad (30)$$

Легко видеть, что, если в (26) оставить два первых слагаемых, а в (28) ограничиться только первым, то (26) и (28) переходят в соответствующие выражения (29), полученные в рамках классической гидродинамики. Если в (26) и (28) учесть еще одно слагаемое, то приходим к соответствующим выражениям (30), полученным в рамках

гидродинамики со скольжением. Если в (28) учесть слагаемые, пропорциональные D^{-1} и D^{-2} , то придем к так называемой формуле Вильямса:

$$J_M = \frac{\gamma D}{6} + \gamma X_2 + \frac{k_2}{\gamma D} + \frac{k_2}{(\gamma D)^2}. \quad (31)$$

Здесь:

$$k_1 = \gamma^2 \left[2X_2^2 - \frac{4}{5} \left(1 - \frac{16}{9\pi} \right) \right] = 0.9112667,$$

$$k_2 = \gamma^3 \left[4(X_2 X_3 - X_4) + \frac{3}{20} \left(1 - \frac{32}{9\pi} \right) \right] = -0.999374, \quad X_4 = 0.272757.$$

Значения J_M , вычисленные согласно (28) – (31) приведены в табл.1. Там же приведены результаты, полученные в [2], [5] в рамках БГК модели кинетического уравнения Больцмана и линеаризованного уравнения Больцмана для молекул твердых сфер (LBE)

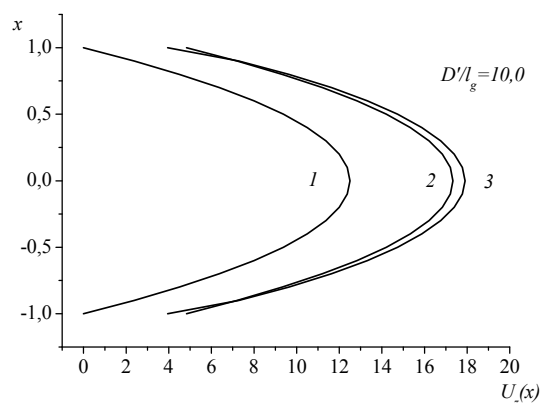
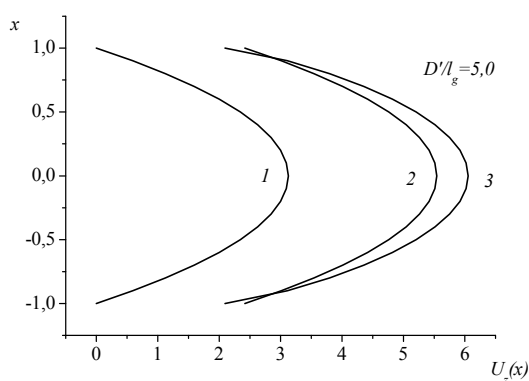
Таблица 1

Значения J_M от D'/l_g

D'/l_g	(28)	(29)	(30)	(31)	BGK [2]	LBE [5]
1.0	1.5446	0.1667	1.1337	1.0456	1.5371	
3.0	1.7106	0.5000	1.4670	1.6597	1.7106	
5.0	1.9445	0.8333	1.8003	1.9426	1.9908	1.9106
6.0	2.0918	1.0000	1.9670	2.0911	2.1411	
7.0	2.2438	1.1667	2.1337	2.2435	2.2949	
8.0	2.3988	1.3333	2.3003	2.3986	2.4512	
9.0	2.5560	1.5000	2.4670	2.5559	2.6093	
10.0	2.7148	1.6667	2.6337	2.7148	2.7687	2.7056
15.0	3.5233	2.5000	3.4670	3.5233	3.5778	
20.0	4.3434	3.3333	4.3003	4.3434	4.3975	4.3450
50.0	9.3182	8.3333	9.3003	9.3182	9.3700	9.3260
100.0	17.642	16.667	17.6337	17.643	17.693	17.693

Графики профиля скорости газа, построенные согласно (26), (29), (30) для различных значений D'/l_g , приведены на рис.1. Как видно из графиков, приведенных на рис.1, для каналов, толщиной более $10l_g$, профиль массовой скорости газа, построенный в рамках гидродинамики со скольжением, достаточно хорошо согласуется с аналогичными результатами, полученным в рамках кинетического подхода. В то же время отличие результатов, полученных в рамках классической гидродинамики, остается значительным даже для достаточно больших значений D' .

Тот факт, что учет эффекта скольжения на стенках канала позволяет расширить область применения гидродинамического подхода к исследованию процессов переноса в разреженных газах, подтверждается и данными, приведенными в табл.1. Сравнивая результаты, полученные на основе кинетического подхода по формуле (28), с расчетами, выполненными в рамках классической гидродинамики и гидродинамики со скольжением согласно формулам (29) и (30), легко видеть, что погрешность, меньшая 1%, во втором случае достигается при толщине канала $D' > 20l_g$ (соответственно при значениях числа Кнудсена $Kn = l_g / D' < 0,05$). В то же время в первом случае погрешность остается более 5% и при $D' > 100l_g$. Погрешность расчетов при использовании формулы (31) по отношению к результатам, полученных с использованием (28) не превышает 1% при $D' > 5l_g$.



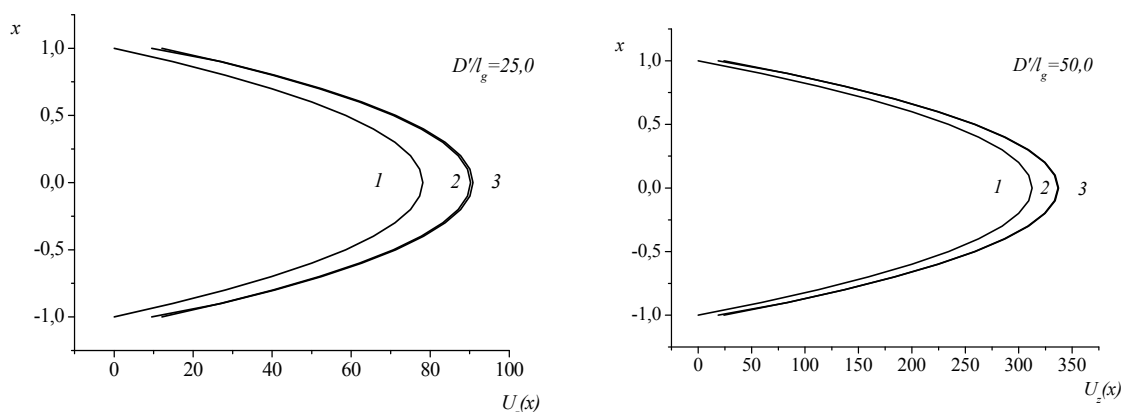


Рис.1. Графики зависимости $U_z(x)$ для различных значений D'/l_g :
1 – рассчитанные по формуле (30), 2 – по формуле (29), 3 – по формуле (26).

Заключение. Итак, в работе в рамках кинетического подхода решена задача о течении Пуазейля. Построен профиль массовой скорости газа в канале, вычислен проходящий на единицу ширины канала поток массовой скорости газа. Проведено сравнение с аналогичными асимптотическими выражениями, полученными в рамках классической гидродинамики и гидродинамики со скольжением. Показано, что при учете явления изотермического скольжения разреженного газа на стенках канала погрешность при вычислении потока массы газа менее 1% обеспечивается при толщине канала $D' > 20l_g$. Использование же формул, полученных на основе классической гидродинамики, остается неудовлетворительным и при $D' > 100l_g$. В то же время формула Вильямса обеспечивает погрешность при вычислении потока массы газа менее 1% при $D' > 5l_g$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кошмаров Ю.А., Рыжов Ю.А. Прикладная динамика разреженного газа. М.: Машиностроение, 1977. 184 с.
2. Попов В., Тестова И., Юшканов А. Математическое моделирование течений газа в каналах: монография. Germany, Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic publishing. 2012. 116 с.
3. Латышев А.В., Юшканов А.А. Кинетические уравнения типа Вильямса и их точные решения: монография. М.: МГОУ, 2004. 271 с.
4. Гулакова С.В., Попов В.Н. Математическое моделирование процессов переноса в задаче о плоском течении Пуазейля в рамках гидродинамики со скольжением // Междисциплинарные исследования в области математического моделирова-

ния и информатики. Материалы 3-й научно-практической интернет-конференции. 20-21 февраля 2014 г. Ульяновск: SIMJET, 2014. С. 158–166.

5. *Siewert C.E.* Poiseuille, Thermal Creep and Couette Flow: Results Based on the CES Model linearized Boltzmann Equation // *European Journal of Mechanics B / Fluids*. 2002. V. 21. P. 579-497.

ON THE BOUNDARIES OF APPLICABILITY OF THE HYDRODYNAMIC APPROACH TO THE SOLUTION OF THE POISEUILLE FLOW PROBLEM

S. Gulakova, V. Popov

*Northern (Arctic) Federal University (Arkhangelsk)
Severnaya Dvina Emb. 17, Arkhangelsk, 163002, Russia*

Abstract. In the framework of the kinetic approach the analytical solution of the problem of the Poiseuille flow is obtained. As the basic equation it is used linearize Williams equation and as a boundary condition on walls of the channel – the model diffuse reflections. Structure of mass speed of gas and mass flux falling to the unit of channel width are calculated. Comparison with the analogous results obtained in the framework of classical hydrodynamics and hydrodynamics with slip is done. Set the limits of obtained expression.

Keywords: Poiseuille flow, model kinetic equations; hydrodynamics with slip.

УДК 669.17

**ИЗУЧЕНИЕ ЯВЛЕНИЯ РАЗУПОРЯДОЧЕНИЯ
ДВУХКОМПОНЕНТНЫХ КРИСТАЛЛОВ, РАСТУЩИХ ИЗ
МЕТАЛЛИЧЕСКИХ 50% ДВУХКОМПОНЕНТНЫХ РАСПЛАВОВ
В ОБЛАСТИ ТЕМПЕРАТУР НИЖЕ ТОЧКИ КЮРИ**

Ю.А. Байков, Н.И. Петров

*Российский химико-технологический университет им. Д.И. Менделеева
(РХТУ им. Д.И. Менделеева)
125047, Москва, Россия, Миусская пл., 9*

Аннотация. Использована схема переходной двухфазной зоны в пространстве концентраций, обусловленной действием механизма спонтанных флуктуаций концентраций частиц твердого состояния с ограниченным спектром их изменения. Используются стационарные кинетические уравнения, описывающие структуру переходной двухфазной зоны, расположенной на границе двух массивных фаз двухкомпонентный металлический расплав-кристалл. Показано, что в случае конечных переохлаждений системы двухкомпонентный металлический расплав-кристалл образуется полностью разупорядоченная кристаллическая фаза в той области температур, где согласно представлениям классической термодинамики, должна расти полностью упорядоченная в смысле параметра дальнего порядка двухкомпонентная система. Рассмотрен случай кристаллов с простой кубической решеткой, растущих из 50% металлических расплавов двухкомпонентных сплавов. Показано, что в случае полного разупорядочения кристаллической фазы кинетика ее роста испытывает скачок на конечную величину, пропорциональную квадрату параметра дальнего порядка.

Ключевые слова: переходная двухфазная зона, двухкомпонентный металлический расплав, параметр дальнего порядка.

Использование флуктуационной теории нормального роста металлических одно- и двухкомпонентных кристаллов из соответствующих расплавов в области малых переохлаждений системы расплав-кристалл, изложенной в работах [1-3], позволило параллельно исследовать процессы разупорядочения вышеуказанных кристаллов в области температур, где, согласно представлениям классической термодинамики, должна расти полностью упорядоченная кристаллическая матрица.

Подобие модели переходной двухфазной зоны, расположенной на стыке двух соприкасающихся сплошных макрофаз – металлический двухкомпонентный кристалл и расплав - и образованной за счет механизмов спонтанных равновесного типа флуктуаций концентраций частиц (мономеров роста) в монокристаллической толщине слоев, и модели шероховатой ступени с изломами кристалла Косселя позволило с одной стороны описать структуру подобной зоны, а с другой стороны дало возможность описать уникаль-

ное явление - разупорядочение двухкомпонентной кристаллической матрицы с простой кубической решеткой.

Сохранение ступенчатого вида границы раздела фаз металлический расплав-кристалл в области конечных переохлаждений сказывается на характере перехода параметра дальнего порядка от некоторых конечных значений непрерывным образом к нулю. Поскольку этот переход происходит при значительных переохлаждениях системы двухкомпонентный расплав-кристалл, имеют место кинетические особенности самого процесса разупорядочения кристаллической металлической двухкомпонентной фазы в области температур, меньших температуры Кюри T_c . На первых стадиях изучения процесса разупорядочения двухкомпонентных металлических кристаллов в модели переходной двухфазной зоны, подобной поверхности кристалла Кесселя, было предположено, что частицы двухкомпонентного расплава (мономеров роста в переходной зоне) при их переходе в кристаллическое состояние с одинаковой (постоянной) частотой совершают подобные переходы (см. [4,5]).

Наиболее полным образом проблема коллективного взаимодействия частиц расплава и кристалла (в модели переходной двухфазной зоны мономеров роста, принадлежащих разным агрегатным состояниям и разным сортам двухкомпонентной системы) может быть описана с учетом зависимости частоты присоединения этих частиц (мономеров роста) в изломах шероховатой поверхности раздела двухкомпонентных фаз – расплава и кристалла от структуры поверхности и температуры.

Задача описания процессов обмена мономерами роста между обеими соприкасающимися массивными фазами – двухкомпонентным металлическим расплавом и двухкомпонентным кристаллом с простой кубической решеткой – решалась с помощью стационарных кинетических уравнений, которые в модели переходной двухфазной зоны в пространстве концентраций мономеров роста обоих агрегатных состояний системы двухкомпонентный металлический расплав 50% сплавов - кристалл позволяли получить замкнутую систему трансцендентных математических уравнений. Эта система с одной стороны описывала стационарную структуру вышеупомянутой переходной двухфазной зоны, а с другой стороны позволяла объяснить значение критической температуры T_k (критического переохлаждения системы двухкомпонентный расплав-кристалл), при которой происходит полное разупорядочение двухкомпонентной кристаллической фазы в смысле параметра дальнего порядка. Кинетика самого процесса кристаллизации двухкомпонентного металлического расплава также описывалась в модели переходной двухфазной зоны той же совокупностью функций распределения мономеров роста по конечной протяженности моноатомной толщины слоев той зоны, что фигурировала в соответствующей системе трансцендентных уравнений.

Было установлено, что при обычных условиях процессов кристаллизации 50% металлических расплавов (частотах колебаний частиц в жидких расплавах и в металлических кристаллах, энергиях связей частиц в различных или одинаковых агрегатных состояниях и т.д.) температура полного разупорядочения двухкомпонентного кристалла T_k находится ниже температуры кинетического равновесия системы двухкомпонентный металлический расплав-кристалл T_e и тем самым ниже температуры разупорядочения Кюри T_c , т.е. $T_k < T_e < T_c$. Это доказывает, что при учете зависимости частоты присоединения мономеров роста к кристаллической фазе из жидкого расплава 50% сплавов процесс разупорядочения имеет место в твердом состоянии. Этот процесс

разупорядочения двухкомпонентной металлической кристаллической фазы сопровождается кинетическим эффектом: средняя скорость роста двухкомпонентной кристаллической фазы из расплава 50% - металлических сплавов испытывает в точке разупорядочения – скачок на конечную величину, пропорциональную квадрату параметра дальнего порядка. Этот эффект был в свое время назван кинетическим фазовым переходом, впервые обнаруженным и исследованным при росте двухкомпонентных кристаллов из соответствующих паро-газовых смесей [6,7].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Baikov Yu.A., Zelenev Yu.V., Haubenreisser W., Pfeiffer H.* Phys.stat.sol. (a), v.61, 1980, p.435-446.
2. *Саркисов П.Д., Байков Ю.А., Мешалкин В.П.* ДАН РФ, 2003, т.390, №6, с.763-768.
3. *Саркисов П.Д., Байков Ю.А., Мешалкин В.П.* Математическое моделирование кристаллизации одно- и двухкомпонентных металлических расплавов. Москва, Физматлит, 2003, 384 с.
4. *Chistyakov Yu.D., Baikov Yu.A., Schneider H.G., Ruth V.* Crystal Research and Technology, v.20, №8, 1985, p.1007-1014.
5. *Chistyakov Yu.D., Baikov Yu.A., Schneider H.G., Ruth V.* Crystal Research and Technology, v.20, №9, 1985, p.1149-1156.
6. *Lewis J., Chernov A. A.* J. Phys. Chem. Solids, 1967, v.28, p.2185
7. *Чернов А.А.* ЖЭТФ т. 53, 1967, с. 2090 – 2099

THE ORDER-DISORDER PROCESSES IN BINARY CRYSTALS GROWING FROM THE 50% - BINARY METALLIC MELTS ARE STUDIED WITHIN TEMPERATURE REGION BELOW CURIE ORDERING POINT

Yu. Baikov, N. Petrov

*D. Mendeleyev University of Chemical Technology of Russia
9, Miusskaya Pl., 125047 Moscow, Russia*

Abstract. Diphasе zone's scheme is used in the case of limited spectrum spontaneous solid state particles concentration fluctuations. There have been used stationary kinetic equations, describing diphasе transitional zone's structure in the binary melt-crystal system. It has been shown in the case of finite supercoolings region completely disordered crystalline phase was formed. This is within temperature region where according to classical thermodynamics a quite ordered crystalline phase should be grown. This concerns a far order parameter for crystalline binary systems which have simple cubic lattice. It has been shown in the case of full disordering the binary crystalline phase kinetics had peculiarity namely: a mean crystallization velocity of binary crystals did some gap proportional to square degree of the far order parameter.

Keywords: diphasе transitional zone, far order parameter, order-disorder transformation.

УДК 533.72

ПРИМЕНЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННЫХ ФОРМУЛ ДЛЯ РАСЧЕТА МОДУЛЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ ДИФФУЗИОФОРЕТИЧЕСКОЙ СКОРОСТИ

В.Е. Ефремов

Московский государственный областной университет
105005, Москва, ул. Радио, 10а

Аннотация. Проведено исследование нестационарной составляющей диффузиофоретической скорости по ее приближенным формулам для разных газов и для сферических частиц, состоящих из конкретных материалов.

Ключевые слова: нестационарная составляющая, диффузиофоретическая скорость, сферическая частица.

В работе [1] мы подробно рассмотрели конкретный случай диффузиофореза, когда нестационарный градиент концентрации задан с помощью функции, имеющей следующее аналитическое выражение:

$$g_{\infty}(t) = \left| \left[\nabla C_1^{(2)}(t) \right]_{\infty} \right| = A \cdot (1 - e^{-\omega t}),$$

где A и ω – положительные постоянные величины, имеющие размерности $1/m$ и $1/c$ соответственно. Получены приближенные формулы для вычисления модуля строго нестационарной составляющей диффузиофоретической скорости частицы:

$$\begin{aligned} |\bar{u}_{2D}(t)| \approx AK_{sl}D_{12}\omega \cdot \left\{ \left[\sum_{j=1}^2 \lambda_j \frac{\omega}{\omega + z_j^2} + 2\Delta \frac{\omega^2 R^4}{\omega^2 R^4 + 4D_{12}^2} \right] \frac{4t}{3} \sqrt{\frac{t}{\pi}} - \frac{4\Delta\omega \cdot R^4}{\omega^2 R^4 + 4D_{12}^2} \sqrt{\frac{t}{\pi}} - \right. \\ \left. - \left[\sum_{j=1}^2 \lambda_j \frac{z_j}{\omega + z_j^2} - \frac{2\Delta R(\omega \cdot R^2 + 2D_{12})\sqrt{D_{12}}}{\omega^2 R^4 + 4D_{12}^2} \right] t \right\} \quad (\rho_e \neq \rho_i, \quad t \rightarrow 0), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} |\bar{u}_{2D}(t)| \approx AK_{sl}D_{12} \left\{ 1 - \left[\sum_{j=1}^2 \frac{\lambda_j}{z_j^2} + 2\Delta \frac{\omega \cdot R^4}{\omega^2 R^4 + 4D_{12}^2} \right] \frac{1}{\sqrt{\pi t}} + \frac{1}{2} \left[\sum_{j=1}^2 \lambda_j \frac{\omega - z_j^2}{z_j^4 \omega} - \right. \right. \\ \left. \left. - 2\Delta \frac{R^4}{\omega^2 R^4 + 4D_{12}^2} \right] \frac{1}{t\sqrt{\pi t}} \right\} \quad (\rho_e \neq \rho_i, \quad t \rightarrow \infty), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} |\bar{u}_{2D}(t)| \approx \frac{2}{3} A\omega \cdot K_{sl}D_{12} \left\{ \left[1 + \frac{D_{12}(\omega \cdot R^2 + 2D_{12})}{\omega^2 R^4 + 4D_{12}^2} \right] t - 2\sqrt{\frac{D_{12}t}{\pi}} \frac{\omega \cdot R^3}{\omega^2 R^4 + 4D_{12}^2} \left(1 - \frac{2\omega \cdot t}{3} \right) \right\} \\ (\rho_e = \rho_i, \quad t \rightarrow 0), \end{aligned}$$

$$|\bar{u}_{2D}(t)| \approx AK_{sl}D_{12} \left\{ 1 - \frac{2}{3} \sqrt{\frac{D_{12}}{\pi t}} \frac{\omega \cdot R^3}{\omega^2 R^4 + 4D_{12}^2} \left(1 + \frac{1}{2\omega \cdot t} \right) \right\} \quad (\rho_e = \rho_i, \quad t \rightarrow \infty),$$

где K_{sl} – коэффициент диффузионного скольжения, D_{12} – коэффициент диффузии, R – радиус частицы, t – время, ρ_e – плотность среды, ρ_i – плотность вещества частицы,

$z_j = -\frac{3\rho_e\sqrt{\nu}}{4R(\rho_e - \rho_i)} \left[3 + (-1)^j \sqrt{1 + 8\rho_i/\rho_e} \right]$ (ν – коэффициент кинематической вязкости среды),

$$\Delta = \frac{3\rho_e\sqrt{\nu}}{R(5\rho_e + 4\rho_i)}, \quad \lambda_j = A_j + \frac{3\rho_e}{R^2(\rho_e - \rho_i)} (-1)^j \frac{\nu + Rz_j\sqrt{\nu}}{z_2 - z_1}.$$

Заметим, что

$$A_1 = \frac{2\sqrt{\nu} \cdot \Delta_1}{R[\Delta_1 + 16(\rho_e - \rho_i)^2] \sqrt{1 + 8\rho_i/\rho_e}}, \quad A_2 = -\frac{2\sqrt{\nu} \cdot \Delta_2}{R[\Delta_2 + 16(\rho_e - \rho_i)^2] \sqrt{1 + 8\rho_i/\rho_e}},$$

где

$$\Delta_1 = (5\rho_e + 4\rho_i - 3\rho_e\sqrt{1 + 8\rho_i/\rho_e})^2, \quad \Delta_2 = (5\rho_e + 4\rho_i + 3\rho_e\sqrt{1 + 8\rho_i/\rho_e})^2.$$

Известно, что к одним из вредных факторов металлообрабатывающего производства относятся повышенная запыленность и загазованность воздуха рабочей зоны.

Рассмотрим газовую резку легированной стали и плазменную резку алюминиевых сплавов [2]. При резке образуются оксид углерода (CO), диоксид азота (NO_2) и пыль оксида железа (Fe_2O_3 , $\rho_i = 5240 \text{ кг/м}^3$) или оксида алюминия (Al_2O_3 (корунд), $\rho_i = 3965 \text{ кг/м}^3$) соответственно. Поэтому в качестве примеров рассмотрим комбинации указанных газов с частицами данных оксидов металлов.

Рассмотрим одиночные частицы сферической формы ($R = 10^{-5} \text{ м}$), взвешенные в смеси воздуха и оксида углерода или диоксида азота. Будем считать, что температура $T = 293 \text{ К}$ и давление $P = 0,1 \text{ МПа}$. Заметим, что коэффициент диффузии для рассматриваемых бинарных смесей мы вычисляли, руководствуясь подходом Чена и Отмера [3], по формуле

$$D_{12} = \frac{0,43 \left(\frac{T}{100} \right)^{1,81} \left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2} \right)^{0,5}}{P \left(\frac{T_{кр.1} T_{кр.2}}{10000} \right)^{0,1406} \left[\left(\frac{V_{мкр.1}}{100} \right)^{0,4} + \left(\frac{V_{мкр.2}}{100} \right)^{0,4} \right]^2},$$

где M_1 , M_2 – молекулярные массы газов, $T_{кр.1}$ и $T_{кр.2}$ – критические температуры газов, $V_{мкр.1}$ и $V_{мкр.2}$ – критические объемы газов. Для системы «воздух – CO » получаем $D_{12} = 0,087 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$, а для системы «воздух – NO_2 » – $D_{12} = 0,065 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$.

Используя формулу (1), построим графики, отражающие изменение скорости движения частиц при малых значениях времени (рис. 1).

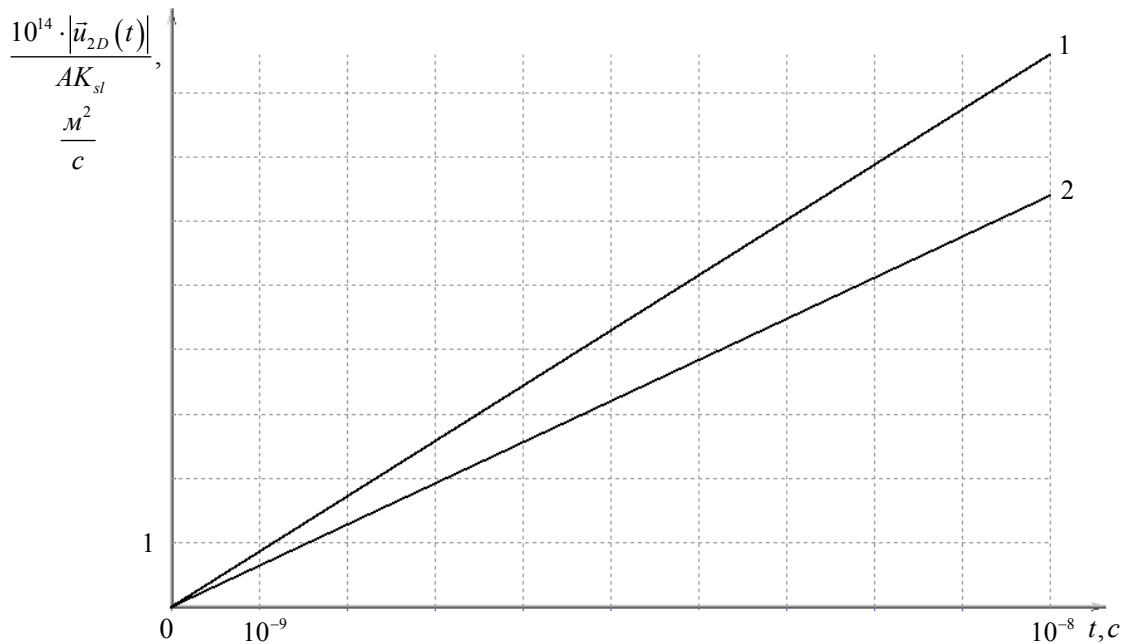


Рис.1. Линии 1, 2 отражают изменение нестационарной составляющей диффузиофоретической скорости сферической частицы в следующих случаях:
1) воздух – CO, Fe₂O₃, 2) воздух – NO₂, Fe₂O₃.

Как видно из рис.1, движение частиц при малых временах является ускоренным. Сравнивая линии 1, 2 можно сказать, что модуль нестационарной составляющей диффузиофоретической скорости частицы больше, когда коэффициент диффузии больше. Кроме того, взяв вторую производную от выражения (1), приходим к выводу, что графики функций вида $\frac{10^{14} |\vec{u}_{2D}(t)|}{AK_{sl}}$ имеют выпуклость, направленную вниз. Относительно случаев «воздух – CO, Al₂O₃», «воздух – NO₂, Al₂O₃» заметим, что значения скорости движения частиц незначительно превосходят (не более, чем на 0,5%) значения для соответствующих случаев с частицей оксида железа. Следовательно, модуль нестационарной составляющей диффузиофоретической скорости частицы больше, когда плотность частицы меньше.

Перейдем к исследованию диффузиофоретической скорости сферической частицы при больших значениях времени. При помощи формулы (2) построим графики функций для каждого из рассматриваемых примеров по выражению $|\vec{u}_{2D}(t)| - AK_{sl} D_{12}$ (совмещаем все асимптоты с осью времени) (рис. 2).

При больших временах происходит замедление движения сферических частиц. При сравнении линий 1 и 2 или 3 и 4, замечаем, что модуль нестационарной составляющей диффузиофоретической скорости частицы больше, когда коэффициент диффузии меньше. Сравнивая линии 1 и 3 или 2 и 4, делаем вывод, что модуль нестационарной составляющей диффузиофоретической скорости частицы больше, когда плотность частицы больше.

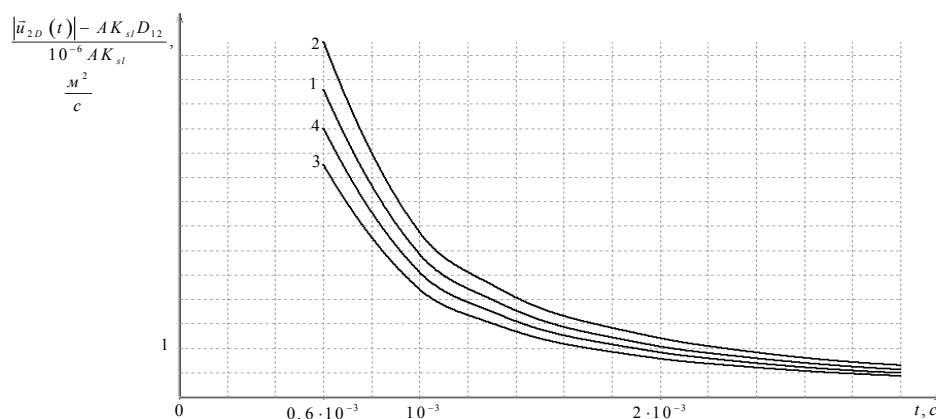


Рис.2. Линии 1 – 4 отражают изменение нестационарной составляющей диффузиофоретической скорости сферической частицы в следующих случаях:

- 1) воздух – CO, Fe_2O_3 , 2) воздух – NO_2 , Fe_2O_3 , 3) воздух – CO, Al_2O_3 ,
4) воздух – NO_2 , Al_2O_3 .

Заметим, что при изменении температуры картина протекания процесса существенно не меняется. При повышении или понижении температуры модуль нестационарной составляющей диффузиофоретической скорости частицы соответственно увеличивается или уменьшается.

ЛИТЕРАТУРА

1. О нестационарной составляющей диффузиофоретической скорости твердой сферической частицы / Ефремов В.Е.; МГОУ. – М., 2013. – 19 с.: ил. – Библиогр.: 8 назв. – Рус. – Деп. в ВИНТИ 21.03.2013 № 82-В 2013
2. Квашин И.М. Промышленные выбросы в атмосферу. Инженерные расчеты и инвентаризация. – М.: АВОК-ПРЕСС, 2005. – 394 с.
3. Бретинайдер С. Свойства газов и жидкостей. Инженерные методы расчета. – М.: Издательство «Химия», 1966. – 536 с.

APPLICATION OF APPROXIMATE FORMULAE FOR NONSTATIONARY DIFFUSIOPHORESIS VELOCITY COMPONENT MODULE CALCULATION

V. Efremov

Moscow State Regional University
10a, Radio st., Moscow, 105005, Russia

Abstract. Investigation of nonstationary diffusiophoresis velocity component on its approximate formulae was carried out for different gases and for spherical particles composed of concrete materials.

Keywords: nonstationary component, diffusiophoresis veloc

УДК.533.72.

ЭВОЛЮЦИЯ ПОЛУОГРАНИЧЕННОГО НЕСТАЦИОНАРНОГО ПЛОСКОГО ГАЗОПОДОБНОГО ОБЛАКА

А.Н. Голов

Московский Государственный Областной университет
105005, Москва, ул. Радио, 10а

Аннотация. Рассмотрена эволюция нестационарного широкого газоподобного облака в полупространстве. Получены аналитические выражения статистических распределений и плотности облака. Дан анализ и графическое представление полученных формул.

Ключевые слова: кинетическая теория, нестационарный газ.

1. Целью данной работы является теоретическое исследование процесса расширения нестационарного газоподобного облака в полуограниченный объём. Подобные явления наблюдаются, например, при испарении, возгонке или быстром диспергировании слоёв конденсированного вещества, нанесённых на непроницаемую подложку, вследствие чего в полупространстве образуется нестационарное облако частиц. Подобные явления широко распространены в природе, а также происходят в ряде технических процессов [1 – 3]. Нестационарные процессы в таких системах, в т. ч., в связи с облучением тел лазерными импульсами рассматривались в [4, 5] и др. Ввиду сказанного, их исследование имеет как теоретический, так и практический интерес. Применимость гидродинамического описания подобных процессов значительно ограничивается условием постоянства плотности среды и сложностью включения в теорию тепловых явлений. Использование газодинамики и неравновесной термодинамики не даёт возможности учесть микроскопическое строение среды, свойства и движение её частиц. Более широк и перспективен подход, исходящий из представлений статистической газодинамики [6]. К подобным задачам применяется также комбинированный подход, основанный на решении уравнения Больцмана в прилегающем к поверхности слое Кнудсена и использовании методов газодинамики за пределами этого слоя [7 и др.] Однако, представляется желательным такое рассмотрение данного процесса, которое, исходя из микроскопической теории, позволяло бы дать и кинетическое описание его в представлении квазинепрерывной среды, включая эволюцию плотности во времени и пространстве.

2. Далее мы исходим из микроскопической неравновесной статистической теории, на основе которой разработанными методами можно дать кинетическое описание рассматриваемых процессов. Рассмотрим нестационарную газоподобную систему N частиц, образованную весьма быстрым разрушением плоского слоя конденсированного вещества в вакууме, причём его подложка (далее – стенка) сохраняется и является непроницаемой. С микроскопической точки зрения стенка является бесконечно толстым и высоким потенциальным барьером, созданным силами отталкивания. Пусть исходный слой имеет массу M и толщину L . Площадь слоя S считается столь большой, что для характерных интегралов Пуассона в его плоскости XY пределы можно принять бесконечными с достаточно хорошим приближением. Т. о., краевые эффекты не рас-

смаатриваются. Слой принят однородным, объёмом $V_0 = S \cdot L$, так что его объёмная плотность ρ_0 и масса на единицу поверхности σ_0 – константы, и при формальном пределе $S \rightarrow \infty$ одновременно $M \rightarrow \infty$. Пусть в начальный момент $t = 0$ происходит весьма быстрое разрушение слоя вследствие некоторого воздействия (например, кратковременного импульса электрического тока, акустического импульса и др.). Будем считать это воздействие однородным в плоскости XY . В результате разрушения структурных связей и расширения вещество превращается в газоподобную систему (облако), которая может состоять как из атомарных (молекулярных), так и из более крупных дисперсных частиц. Далее считаем все образовавшиеся частицы однородными и бесструктурными, массы m . Поскольку межчастичные силы – короткодействующие, а с расширением облака быстро уменьшается его плотность, полагаем в дальнейшей эволюции частицы не взаимодействующими, иначе как через упругие столкновения, пренебрегая диссипацией энергии и возбуждением внутренних степеней свободы частиц. Внешние поля отсутствуют, но система не является изолированной, т. к. облако находится в контакте со стенкой. Столкновения частиц со стенкой и между собой считаем упругими.

3. Поставим задачу описания эволюции образовавшегося облака на основе микроскопической теории. Примем за исходное нестационарное уравнение Лиувилля – Гиббса (УЛГ), позволяющее распространить метод Гиббса на неравновесные состояния [8]. При переходе к кинетическому описанию мы основываемся на представлениях кинетической теории Н. Н. Боголюбова [9, 10].

Для многочастичной функции распределения в облаке $F_N(q_i, p_i, t)$ ($i = 1 \dots s$) имеем нестационарное УЛГ:

$$\partial_t F_N + \hat{L} F_N = 0. \quad (1)$$

($\hat{L}$ – стационарный лиувиллиан, здесь и далее $p_i = m \cdot \dot{q}_i$). При отыскании его решения используем метод интегралов однородного лиувиллиана (интолов) [8] (применительно к сходной задаче см. также [11]), ограничиваясь рассмотрением квазигиббсовых решений. В отличие от статьи [11] здесь добавим в интол импульса константу, что соответствует допущению ненулевой массовой начальной скорости облака v_0 , (что эквивалентно рассмотрению процесса в движущейся системе отсчёта). Основная квадратичная форма η , также удовлетворяющая уравнению вида (1) ищется, как функционал интолов. Учитывая, что задача не симметрична относительно стенки, мы допускаем наличие в η линейных по интолам членов, так что эта форма имеет более общий вид:

$$\eta = \sum_{i=1}^N \sum_{\alpha=1}^2 \left[a \cdot p_{i\alpha}^2 + b \cdot \left(q_{i\alpha} - \frac{p_{i\alpha} t}{m} \right)^2 - c \cdot p_{i\alpha} \left(q_{i\alpha} - \frac{p_{i\alpha} t}{m} \right) \right] + \\ + \sum_{i=1}^N \left[a \cdot (p_{i3} - p_3)^2 + b \cdot \left(q_{i3} - \frac{p_{i3} t}{m} \right)^2 - c \cdot (p_{i3} - p_3) \cdot \left(q_{i3} - \frac{p_{i3} t}{m} \right) + g_3 \cdot (p_{i3} - p_3) + h_3 \cdot \left(q_{i3} - \frac{p_{i3} t}{m} \right) \right]. \quad (2)$$

Здесь (и далее) латинские индексы нумеруют частицы, греческие – степени свободы, причём индекс $\alpha=3$ означает координату, по которой направлен дополнительно вводимый постоянный импульс. a, b, c – константы задачи, как в [11], определяемые из

дополнительных условий; g_3, h_3 - дополнительные константы, появляющиеся в связи с линейными по интолам членами. Константы вводятся так, чтобы выражение (2) было безразмерно, и приняты равными для всех однородных частиц. Это выражение автоматически удовлетворяет уравнению (1), которому удовлетворяет и любой функционал (2). Плотность вероятности ищем в виде такого функционала в квазигиббсовой форме:

$$F_N = \exp(-\eta),$$

где в показатель можно добавить аддитивную безразмерную константу, что эквивалентно умножению экспоненты на постоянный множитель F_0 . Искомое решение должно удовлетворять стандартным требованиям действительности, неотрицательности, нормируемости и граничным условиям обращения в нуль на бесконечно удалённых границах фазового объёма и на стенке. Первые два требования удовлетворяются, когда введённые константы действительны и неотрицательны (при действительных фазовых переменных) и действительное $F_0 > 0$. Выполнение граничных условий на бесконечности обеспечивается знаком минус в показателе экспоненты. Условие нормировки используем в стандартной форме. Аннулирование функционала на стенке обеспечивается умножением функционала на многомерную функцию Хевисайда, исключаящую область отрицательных значений координат (далее не пишется для компактности формул, но имеется в виду). Это соответствует такому выбору координат, при котором расширение системы происходит в положительное полупространство.

Тогда для принятой модели плотность вероятности имеет вид:

$$F_N = Z_N^{-1} \cdot \exp(-\eta). \quad (3)$$

Для последующих вычислений и более компактной записи формул удобно представить:

$$\eta = \sum_{i=1}^N \sum_{\alpha=1}^2 \left[k_1 \cdot p_{i\alpha}^2 - k_3 \cdot p_{i\alpha} q_{i\alpha} + b \cdot q_{i\alpha}^2 \right] + \sum_{i=1}^N \left[k_1 \cdot p_{i3}^2 + k_2 \cdot p_{i3} - k_3 \cdot p_{i3} q_{i3} + k_4 \cdot q_{i3} + b \cdot q_{i3}^2 + k_5 \right], \text{ где:} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} k_1 &= a + ct / m + bt^2 / m^2; \\ k_2 &= g_3 - 2ap_3 - (h_3 + cp_3) \cdot t / m; \\ k_3 &= -c - 2bt / m; \\ k_4 &= h_3 + cp_3; \\ k_5 &= ap_3^2 - g_3 p_3; \end{aligned} \quad (5)$$

каковые выражения и представляются в (3). При этом статистический интеграл:

$$Z_N = (Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3)^N, \quad (6)$$

где: Z_1 и Z_2 – определяются нормировкой в плоскости XY и те же, что в [8], а Z_3 :

$$Z_3 = \frac{\pi \cdot \exp(C - B^2 / 4A) \cdot [1 + \operatorname{erf}(B / 2\sqrt{-A})]}{2\sqrt{abw}}. \quad (7)$$

Здесь обозначено:

$$\begin{aligned} w &= 1 - c^2 / 4ab; \\ A &= -b + k_3^2 / 4k_1; \\ B &= -k_4 + k_2k_3 / 2k_1; \\ C &= -k_5 + k_2^2 / 4k_1. \end{aligned} \quad (8)$$

Таким образом, Z_N – сложная функция времени, изменяющаяся, как показывает исследование, в конечных пределах. Тогда плотность вероятности приводится к виду:

$$F_N = \prod_{i=1}^N \prod_{\alpha=1}^3 F_{i\alpha}. \quad (9)$$

Причём F_{i1} , F_{i2} – те же, что в [8], а

$$F_{i3} = Z_3^{-1} \cdot \exp(-\eta_{i3}), \quad (10)$$

где (см. (3) и (4)):

$$\eta_{i3} = [k_1 \cdot p_{i3}^2 + k_2 \cdot p_{i3} - k_3 \cdot p_{i3}q_{i3} + k_4 \cdot q_{i3} + b \cdot q_{i3}^2 + k_5]. \quad (11)$$

Функции вида (3) и (9) при устранении ограничений, создаваемых непроницаемой стенкой, переходят в функции, найденные в [8, 11].

4. Найденные распределения вида (3) и (9) содержат в показателях члены, описывающие корреляцию переменных q_i и p_i . Поэтому они не представляются произведением функций импульсов и координат. Эти последние найдём, интегрируя исходное распределение по сопряжённым переменным. При этом распределения по импульсам p_x , p_y те же, что получены и исследованы в [8]. 1-частичное распределение по импульсу p_z (для любого i ; значок z справа здесь и далее опускаем):

$$F_1(p_z) = \frac{\sqrt{aw} \cdot \exp[-aw \cdot (p - P_t)^2] \cdot [1 + \operatorname{erf}(\mu p + v)]}{\sqrt{\pi} \cdot \left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{(\mu P_t + v)}{\sqrt{1 + \mu^2 / aw}}\right) \right]}. \quad (12)$$

Здесь:

$$P_t = \frac{k_3 k_4 - 2bk_2}{4abw}; \quad (13)$$

$$\mu = -k_3 / 2\sqrt{b}; \quad v = -k_4 / 2\sqrt{b}. \quad (14)$$

Из (12) следует, что средняя кинетическая энергия движения частиц по OZ не равна средней кинетической энергии их движения по осям OX и OY. Т. о., в рассматриваемом процессе можно говорить о продольной и поперечной температуре [12].

Распределения по координатам q_x , q_y те же, что получены и исследованы в [8]. 1-частичное распределение по q_z :

$$F_1(q_z) = \frac{2\sqrt{bw} \cdot \exp[-bw \cdot (q_z - Q_t)^2 / u]}{\sqrt{\pi u} \cdot [1 + \operatorname{erf}(\sqrt{bw/u} \cdot Q_t)]}, \quad (15)$$

где обозначено: $u = l + ct/am + bt^2/am^2$; и

$$Q_t = \frac{(4abwp_3 - c \cdot h_3 - 2bg_3) \cdot t - 2amh_3 - cmg_3}{4mabw}. \quad (16)$$

5. Приняв далее

$$q = q_0 + q_t, \quad (17)$$

где q_0 – начальное значение координаты, а q_t – текущее приращение её, можем рассматривать (15) как совместное распределение по q_0 и q_t (см. [13, 14]). При этом

$$q_0 \in [0, L]; \quad q_t \in [-q_0, \infty],$$

Интегрируя (15) (с подстановкой (17)) по q_t (и положив $t=0$), найдём координатное распределение в начальном состоянии, а интегрируя его по q_0 – найдём координатное распределение в текущем состоянии (Эти промежуточные формулы не приводятся). Тогда по обычной рецептуре кинетической теории [10], при помощи взаимных интегральных преобразований (см. [15, 16]) находим начальную и текущую плотности среды. Требуем сохранения массы, так что масса квазинепрерывного облака в полуобъёме в любой текущий момент t равна массе исходного слоя. Из этого требования вытекает дополнительная нормировка плотности на массу при двойном интегрировании по обоим переменным, которая не тривиальна и зависит от порядка интегрирования, т. к. интервал изменения q_t зависит от значения q_0 (вследствие чего из соображений размерности возникают дополнительные нормировочные множители). Это следует учитывать при дальнейшей работе со средними значениями кинетических операторов. Начальная плотность при $t=0$ (обозначения те же, что в [11]):

$$\langle \rho \rangle = \rho_0 \cdot \ddot{A}(z_0, 0, L); \quad (\rho_0 = Nm / V_0); \quad (18)$$

где $\ddot{A}(z_0, 0, L)$ – функция Терлецкого [17], равная 1 при z_0 в исходном слое и 0 – вне его. Текущая плотность среды:

$$|\rho\rangle = \frac{\rho_0 \cdot \varphi(x, y) \cdot \sqrt{\pi\beta} L \cdot \left\{ \Phi \left[\sqrt{\beta} \cdot (Q_t - z) \right] - \Phi \left[\sqrt{\beta} \cdot (Q_t - z - L) \right] \right\}}{\left\{ \sqrt{\pi\beta} L + \exp \left[-\beta (Q_t + L)^2 \right] - \exp \left[-\beta Q_t^2 \right] + \sqrt{\pi\beta} \cdot \left[(Q_t + L) \cdot \Phi \left[\sqrt{\beta} (Q_t + L) \right] - Q_t \cdot \Phi \left(\sqrt{\beta} \cdot Q_t \right) \right] \right\}} \quad (19)$$

Здесь x, y, z – координаты точки в физическом пространстве, $\varphi(x, y)$ – функция координат x, y , найденная в [11], $\beta = bw/u$, $\Phi(\xi)$ – интеграл вероятности. Потребуем, чтобы единственный максимум функции (19) при $t=0$ находился на стенке (когда $z = -L$). Из этого требования уточняется введённая ранее (см. (2)) константа h_3 . Тогда:

$$Q_t = \frac{(4ap_3 - c \cdot L - 2g_3) \cdot t}{4am} - \frac{L}{2} \quad (20)$$

с условием скорости движения максимума прочь от стенки:

$$(4ap_3 - c \cdot L - 2g_3) \geq 0. \quad (21)$$

Соответственно уточняются все уравнения, содержащие h_3 , в т. ч. (12), (13) и (15).

6. Здесь мы не будем рассматривать задачу полного определения неопределённых констант и параметров. Эта задача требует отдельного исследования с привлечением дополнительных граничных условий (см. [8]), и подробное изложение её не включено в данную статью по соображениям объёма. В дальнейшем для графического представления формул мы условно примем $a=b=c=1$, что, в сущности, соответствует выбору специальной СЕ. При этом $w=3/4$. С учётом условия (21), и исходя из удобства масштабирования, выбраны значения прочих параметров, указанные в подписях к рисункам. На рис. 1, 2 показана эволюция со временем импульсного распределения (12). На рис. 1 даны профили распределения в последовательные моменты времени. Начальная асимметрия распределения относительно нуля вызвана начальным движением слоя со скоростью v_0 . Примечательной особенностью задачи является уменьшение доли частиц со значениями $p_z < 0$ (при сохранении нормы). В асимптотике по t все частицы имеют $p_z \geq 0$.

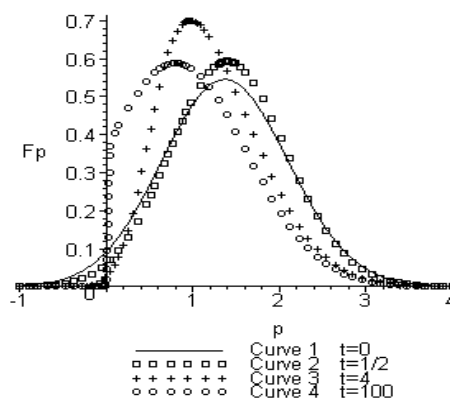


Рис. 1. Профиль распределения по p_z (12)
в разные моменты t . [$m=2, g_3=1, h_3=1, p_3=6/5$]

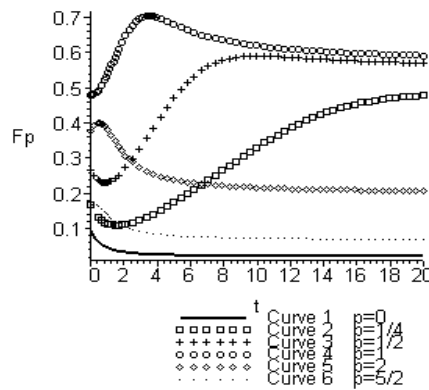


Рис.2. Зависимость распределения (12) от времени для частиц с разными значениями p_z . (Значения параметров те же, что на рис. 1).

Эволюция текущей плотности, описываемой формулой (19), показана на рис.3, 4.

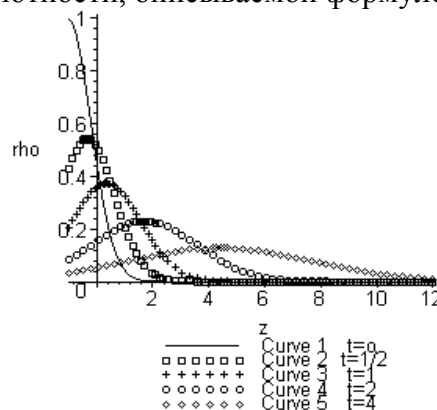


Рис. 3. Профиль текущей плотности (19) в разные моменты времени t .
 $[a=1, b=1, c=0.6, m=1, w=0.9, g_3=1, p_3=2, L=1, N=1]$
 $(m$ и N – в условных единицах, так что $\rho_0=1$)

На рис. 3 даны профили текущей плотности в последовательные моменты времени, причём плотность нормирована на полную массу облака $m \cdot N$ (при построении условно принято $m \cdot N = 1$). Поскольку зависимость от x, y нас не интересует, используем выражение (19), делённое на $\varphi(x, y)$. Видно движение максимума плотности прочь от стенки с одновременным расплыванием облака в полуобъёме (дисперсия плотности возрастает). Значение $z = -1$ соответствует непроницаемой стенке. При построении графиков принято дополнительное условие равенства текущей плотности в момент нуль и начальной плотности слоя. Это условие приводит к трансцендентному уравнению:

$$2\Phi\left(L \cdot \sqrt{bw} / 2\right) = 1, \quad (22)$$

из которого при заданных b и L находим численным решением w и, далее, константу c . Эти численные значения использованы при построении графиков на рис. 3, 4.

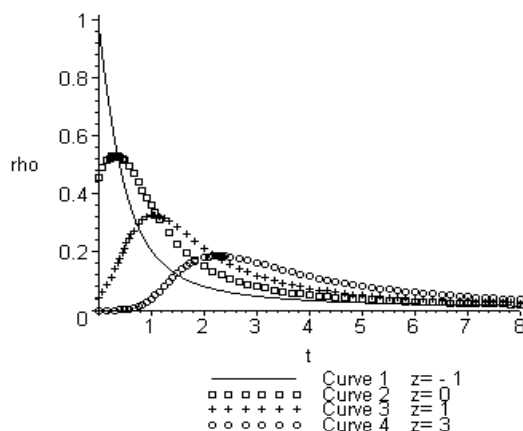


Рис.4. Зависимость текущей плотности (19) от времени t для разных значений текущей координаты z_t . (Значения параметров те же, что на рис. 3).

На рис.4 показано перераспределение частиц в пространстве со временем при разных значениях z . Видно, что на первом этапе эволюции происходит сравнительно быстрое выравнивание плотности в области, близкой к стенке, а затем долгая медленная релаксация её к бесконечно малому асимптотическому значению. Для неотрицательных z предсказывается прохождение максимума плотности.

7. Представляет интерес сравнение графиков с разными m . Профили импульсного распределения и плотности облака приведены на рис. 5 и 6. Эти профили построены для $m = 100$. Значения прочих параметров те же, что на соответствующих рис.1 и 3.

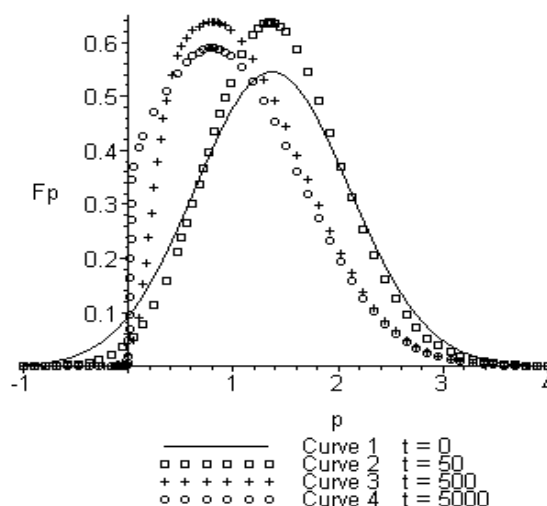


Рис. 5. Профиль распределения по z -проекции импульса (12) в разные моменты t . [$m=100, g_3=1, h_3=1, p_3=6/5$]

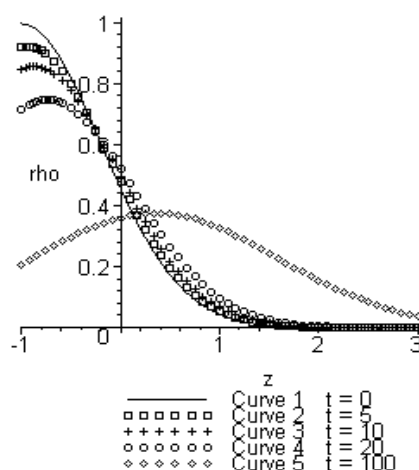


Рис.6. Профиль текущей плотности (19) в разные моменты t .
 (m и N в условных единицах, так что $\rho_0=1$)
 $[a=1, b=1, c=0.6, m=100, w=0.9, g_3=1, p_3=2, L=1, N=1/100]$

Из сравнения рис.5 с рис.1 видно, что характер эволюции импульсного распределения сохраняется, но сильно замедляется её темп. Время приближения распределения к асимптотическому (с исключением отрицательных значений p_z) возрастает почти на 2 порядка. Сходную картину показывает и рис. 6 (сравни с рис. 3). Как и для импульсного распределения, характер эволюции сохраняется, но её темп замедляется почти на 2 порядка. Вплоть до $t \sim 100$, большая часть вещества остаётся в пределах исходного слоя, и максимум плотности не выходит за его внешнюю границу.

Приведённые графики и соответствующие им формулы позволяют прогнозировать, что эволюция облака, состоящего из дисперсных частиц, содержащих $10^6 - 10^{12}$ атомов, протекает на много порядков медленнее, чем молекулярного облака. При образовании подобного облака в результате диспергирования исходного слоя, его вещество будет долго удерживаться вблизи стенки, весьма медленно распространяясь в полуобъём. При образовании смешанного газодисперсного облака прогнозируется весьма быстрое распространение его газовой фазы, после чего у стенки формируется газоподобное облако задержавшихся дисперсных частиц, эволюционирующее практически в вакууме. Это облако почти не взаимодействует уже с удалившимся от него газовым облаком.

8. Из проведённого исследования, помимо предзаданного исключения распространения облака через стенку, следует ряд отличий его эволюции, от модели двустороннего расширения, рассмотренной в [8, 11], вызванных наличием стенки.

- 1) профили плотности не являются монотонно убывающими с удалением от стенки при $z > 0$, но для $t > 0$ образуют максимум, движущийся прочь от стенки, при уменьшении плотности у стенки;
- 2) распределение по импульсам не является максвелловым ни начально и ни при каком $t > 0$, его максимум смещается по сложному закону, и дисперсия не постоянна;
- 3) движение частиц со скоростями, направленными в сторону стенки, асимптотически исключается, и формируется направленное движение облака прочь от стенки.

Автор выражает благодарность сотрудникам кафедры теоретической физики МГОУ за полезное обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Петров Ю.И. Физика малых частиц. «Наука», М., 1982
2. Диспергированные металлические плёнки. // Киев, Ин-т физики АН УССР, 1972.
3. Диспергированные металлические плёнки//Киев, Ин-т проблем материаловедения АН УССР, 1976.
4. Ч. Дж. Найт. Нестационарное испарение в переходном режиме с поверхности в вакуум. Аэрокосмическая техника, Т.1, 7 2, 83 – 89, 1983.
5. Анисимов С.И., Рахматулина А. Х. Динамика расширения пара при испарении в вакуум. ЖЭТФ, т.64, вып. 3, 1973.
6. Рудяк В.Я. Статистическая аэрогидромеханика гомогенных и гетерогенных сред. Т. 1. Кинетическая теория. Новосибирск: Наука, 2004. 320 с.
7. Яламов Ю.И., Галоян В.С. Динамика капель в неоднородных вязких средах.//Луйс, Ереван, 1985
8. Голов, А.Н., Яламов, Ю.И. Статистическая и кинетическая теория нестационарных газоподобных и газодисперсных систем/ А. Н. Голов, Ю. И. Яламов. - М.: изд. МГОУ. 2011, - 230 с.
9. Боголюбов Н.Н. // Проблемы динамической теории в статистической физике. – М., Гостехиздат, 1946. 290 с.
10. Гуров К.П. Основания кинетической теории. – 351 с. «Наука», М.,1966.
11. Яламов Ю.И., Голов А.Н. Эволюция облака, созданного быстрым распылением широкой пластины в вакууме. – Труды Центра фундаментальных научных исследований МГОУ, 7 1, М., Издательство МГОУ, 2005, с. 15 – 26.
12. Бёрд Г. Молекулярная газовая динамика. М.: «Мир», 1981, 320 с.
13. Прохоров Ю.В., Розанов Ю.А. Теория вероятностей. – «Наука», М., 1973
14. Ротт Л.А. Статистическая теория молекулярных систем. М.: «Наука».1979.280с.
15. Голов А.Н. Учёт начального состояния в нестационарном решении уравнения Лиувилля для свободно расширяющегося газа. - 8 с., ВИНТИ 73303-B95, М., МПУ, 1995.
16. Голов А.Н. Нахождение полей плотности, образуемых диспергированием протяжённых тел в вакууме. – 7 с., - ВИНТИ 7 121 - В2002, М., МПУ, 2002.
17. Терлецкий Я.П. Статистическая физика. - 350 с. «Высшая школа», М., 1973.

**THE EVOLUTION OF THE NON-STATIONARY WIDE GAS-LIKED CLOUD
IN A HALF SPACE**

A. Golov

*Moscow State Regional University
10a, Radio st., Moscow, 105005, Russia*

Abstract. The evolution of the non-stationary wide gas-like cloud, expanded into a half-space, is considered. The analytical formulae of the statistical functions of distributions and density of the cloud are obtained. The analysis and graphical presentation of the obtained formulae are performed.

Keywords: kinetics, kinetic theory, non-stationary gas.

УДК 007.51

ПРОГРАММНО-АППАРАТНЫЙ КОМПЛЕКС ОЦЕНКИ ЭФФЕКТИВНОСТИ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ОПЕРАТОРОВ

Д.Н. Чаусов¹, И.В. Петухов², В.В. Беляев¹, К.А. Богачев³, П.А. Курасов²

¹*Московский государственный областной университет,
105005, Москва, ул. Радио, 10а.*

²*Поволжский государственный технологический университет,
424000, Республика Марий Эл, г. Йошкар-Ола, пл. Ленина, д.3.*

³*Московский институт электроники и математики,
109028, Москва, Б. Трехсвятительский пер., д.3.*

Аннотация. В работе реализован аппаратно-программный комплекс для оценки работоспособности и эффективности операторской деятельности при монотонном зрительно-моторном слежении за движущимся объектом. Получены новые данные о механизмах утомления человека-оператора в процессе слежения с использованием электронных дисплеев. Приведен обобщенный график работоспособности оператора в зависимости от времени работы.

Ключевые слова: аппаратно-программный комплекс, электронный дисплей, зрительно-моторное слежение, утомление.

Введение

Исследование состояния организма оператора рабочего места ЭВМ является актуальной задачей для оценки трудоемкости выполняемых работ, утомления работников офисов, школьников и студентов. Особый интерес вызывают такие исследования, выполняемые с помощью самой ЭВМ и ее периферийных средств. Целью настоящей работы является разработка аппаратно-программного испытательного комплекса оценки зрительной работоспособности при работе со средствами отображения информации в составе компьютерных и телевизионных систем.

Поскольку при информационном взаимодействии происходит непрерывное изменение состояния организма, методика определения состояния должна быть объективной и гибкой. Стандартными подходами к решению данной проблемы являются контроль некоторых физиологических параметров, таких как давление, кожно-гальваническая реакция, тремор и т.д.

Зарубежные и отечественные научные публикации [1-2] результатов физиологических, медицинских и эргономических исследований, посвященных проблеме «человек-компьютер», а также многолетний собственный опыт изучения влияния видеотерминальных средств отображения информации на состояние здоровья пользователей, убеждает в том, что особую важность при обеспечении эффективной операторской деятельности, представляет исследование зрительной работоспособности оператора, а также функционального состояния его центральной нервной системы, обеспечивающей работоспособность всего организма.

Современные подходы к гигиеническому регламентированию той или иной деятельности требуют не только констатации сдвигов функционального состояния организма (ФСО) под влиянием данной деятельности, но и учета этих изменений в динамике. Поэтому гигиеническое изучение различной по характеру деятельности

будет более информативно, если наблюдения за изменением ФСО проводится не только до и после, но и непосредственно в процессе этой деятельности.

Таким образом, встает задача исследования работоспособности и эффективности деятельности оператора, учитывающего эффективность решения операторских задач, динамику функционального состояния отдельных подсистем организма человека.

Методика исследования и анализ результатов

Для разработки критериев и моделей оценки эффективности оператора эргатических систем управления (ЭСУ) представим в первую очередь классификацию операторов в зависимости от объекта управления, как показано на рис.1.

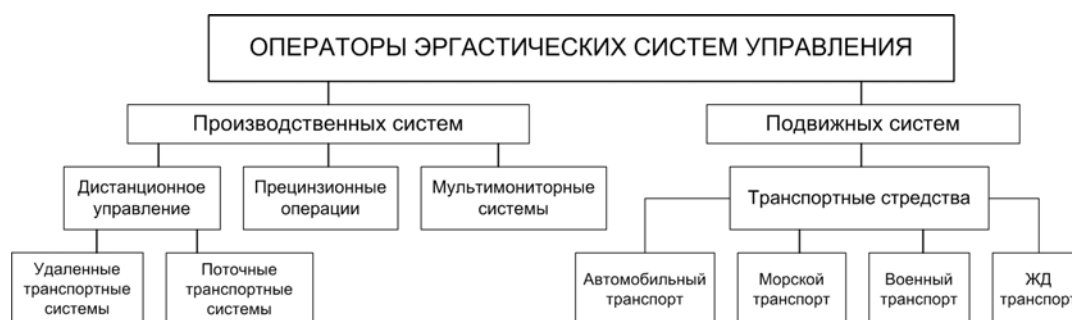


Рис. 1. Классификация операторов в зависимости от объекта управления.

Аналогичным образом может быть предложена классификация методов оценки эффективности операторов ЭСУ, позволяющая определить уровень требуемых функциональных возможностей программно-аппаратного комплекса оценки.

С точки зрения классификации методов исследования эффективности по инструментарию, очевидно, что большими функциональными возможностями обладают аппаратные и компьютерные методы.

В соответствии с поставленной задачей исследования работоспособности и эффективности деятельности оператора, а также формированию рекомендаций по ее улучшению целесообразно выбрать использование интегральных критериев, основанных на лабораторном эксперименте, что позволяет исследовать операторскую деятельность в различных условиях, в том числе и при риске возникновения критической ситуации, что обеспечивает большую информативность и достоверность оценки.

В качестве операторской задачи была выбрана задача зрительно-моторного слежения за движущимся на экране дисплея объектом, как наиболее типичная для диспетчеров железнодорожного транспорта, авиадиспетчеров, операторов РЛС. При этом зрительное слежение за движущимся объектом характеризуется, как зрительно напряженный труд, а использование видеотерминальных средств отображения информации выступает негативным фактором влияния на зрительную систему пользователя.

Тестирование зрительно-моторного слежения предложено осуществлять методом определения времени реакции на движущийся объект (РДО), который позволяет оценить точность восприятия времени и пространства, оценить способность к решению операторских задач [3]. Обобщенная схема реализации способа РДО представлена на рис.2.

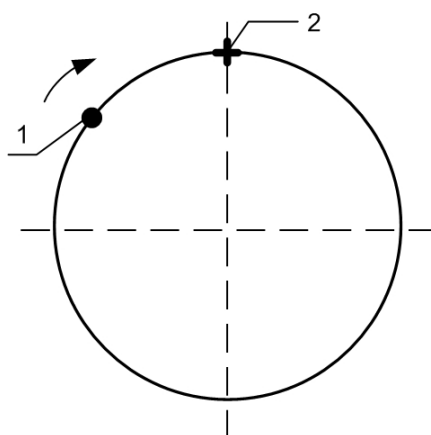


Рис. 2. Схема тестирования способом РДО

Испытуемому предъявляют на экране видеомонитора окружность, на которой помещена метка 2 и точечный объект 1, движущийся по окружности [4]. Точечный объект, передвигаясь по окружности, за заданное время исчезает с экрана видеомонитора. Испытуемый, наблюдая за движением точечного объекта до момента его исчезновения, в момент предполагаемого совпадения положения движущегося точечного объекта с меткой нажатием кнопки «Стоп» останавливает движение точечного объекта по окружности, который после нажатия кнопки «Стоп» снова появляется на экране монитора, в том месте, где было остановлено его движение.

Затем вычисляют ошибку не совпадения точечного объекта и метки – время ошибки запаздывания или упреждения, и через заданное время возобновляют движение точечного объекта по окружности.

При этом действия испытуемого соответствуют типичной схеме последовательности операторских действий, представленных на рис.3.

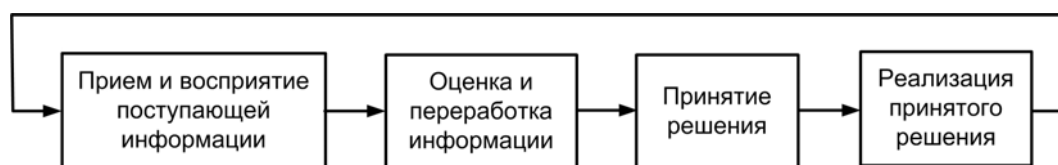


Рис.3. Схема последовательности операторских действий

Испытуемый воспринимает динамичный зрительный образ на экране, оценивает скорость движения объекта по траектории, прогнозирует момент совмещения движущегося объекта и метки, принимает решение о моменте нажатия кнопки «Стоп», формирует и реализует моторную программу по нажатию кнопки «Стоп».

При выполнении измерений времени РДО для обеспечения повторяемости результатов экспериментов скорость движения объекта по окружности принималась постоянной и равной 2 рад/сек, диаметр окружности – 200 мм. В качестве основного фона был принят фон серого цвета, цвет окружности, по которой движется объект, был выбран белым, цвет движущегося объекта – желтым, цвет метки – зеленым.

В качестве испытуемых были выбраны практически здоровые люди 17-23 лет с нормальным или скорректированным зрением. Перед измерениями все испытуемые проходили предварительное обучение.

Для технической реализации оценки времени РДО был разработан аппаратно-программный комплекс, структура которого представлена на рис.4.

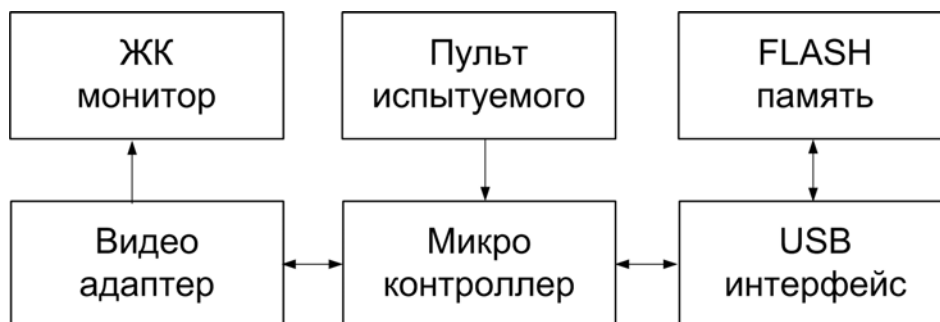


Рис.4. Структурная схема аппаратно-программного комплекса

Целесообразность разработки аппаратно-программного комплекса была обусловлена необходимостью изменения параметров тестовых объектов в широких пределах и автоматизацией обработки данных.

В основе прибора лежит микроконтроллер, обладающий разрядностью не менее 8 бит, быстродействием не менее 10 МГц, имеющий не менее 1024 байт программной памяти и 68 байт памяти данных, порты ввода/вывода.

Тестовое изображение в виде движущегося по окружности точечного объекта и метки предъявляется испытуемому с помощью внешнего ЖК монитора или ЖК-панели, подключаемого через стандартный видео-выход.

Для останова движущегося объекта испытуемый нажимает кнопку пульта испытуемого «Стоп». Сигнал с пульта испытуемого поступает на микроконтроллер, где производится вычисление значения времени ошибки упреждения или запаздывания. Результаты значений ошибок упреждения и запаздывания записываются с использованием USB интерфейса на внешнюю флэш-память.

В эксперименте были использованы дисплеи: Dell, BenQ T705 (60 Гц), Hp mini 110-4100, Hp mini 110-4100, LG 566LM, Acer Aspire V5-171, BenQ FP557, BenQ FP557, Hp mini 110-4100, BenQ FP557.

Эксперимент проводился в течении 150 минут с шагом в 0,5 часа при следующих внешних условиях:

1. Освещенность рабочих мест в пределах действующих норм (300-500 лк).
2. Температура в помещении: 23°C.
3. Атмосферное давление: 743 Торр.
4. Возраст операторов: 20±2 года.

В качестве оценки эффективности операторской деятельности при зрительно-моторном слежении использовали значение времени РДО, для чего каждый из испытуемых выполнил серию тестов. Значение времени РДО вычислялось по формуле:

$$T_p = \frac{\sum_{i=1}^n t_i}{n}$$

где t_i – i -я ошибка запаздывания с положительным знаком или упреждения с отрицательным знаком, мс; n – число остановок точечного объекта в области положения метки.

В результате экспериментальных исследований было установлено, что работоспособность оператора и эффективность его деятельности имеет явную зависимость от его утомления, которое, в свою очередь, выражается в изменении ФСО.

Типичный график динамики значения времени РДО одного из испытуемых представлен на рис.5.

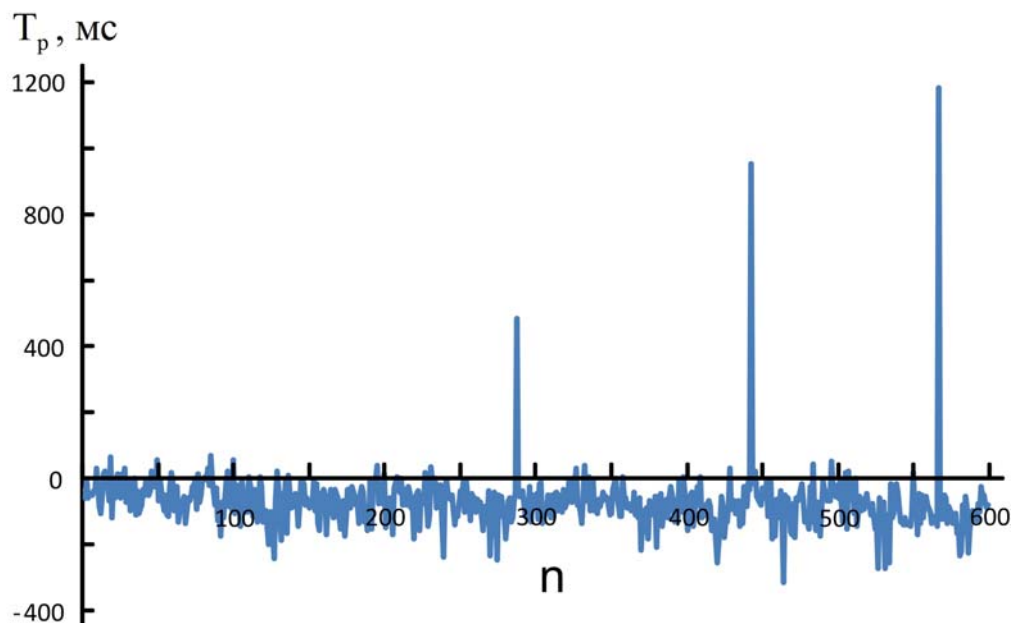


Рис.5. График динамики значения времени РДО одного из испытуемых

На основе анализ графика динамики времени РДО можно сделать ряд выводов.

Так, установлено, что с течением времени, в процессе монотонной деятельности, эффективность решения операторской задачи уменьшается. Это подтверждается увеличением среднего квадратического отклонения значения времени РДО, являющейся оценкой стабильности решения операторской задачи, и отклонением линии тренда значения времени РДО от нулевой отметки, являющейся оценкой точности решения операторской задачи.

Кроме того, по мере наступления утомления увеличивается вероятность грубых ошибок оператора, что выражается в единичных выбросах 289-го, 446-го и 562-го измерений.

В результате исследования и статистической обработки данных эксперимента был получен обобщенный график работоспособности оператора в зависимости от времени работы рис.6.

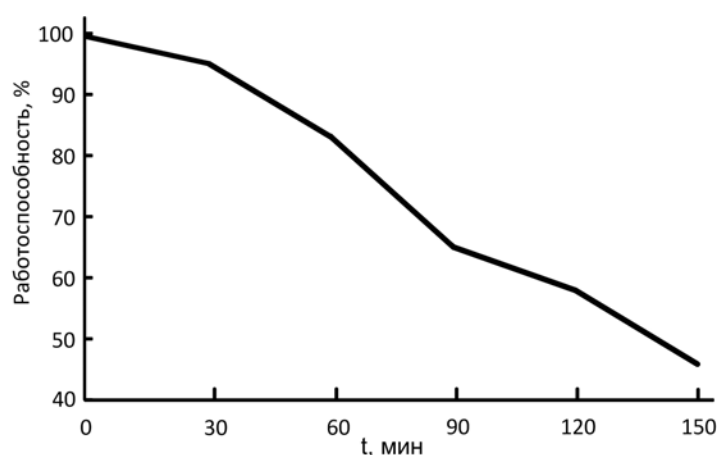


Рис.6. Зависимость состояния работоспособности оператора от времени работы

Таким образом, очевидно, что для обеспечения эффективности операторского труда необходимо тщательно учитывать основные воздействующие факторы, влияющие на работоспособность оператора, обеспечить контроль не только продолжительности операторской работы, но также и контроля функционального состояния организма оператора за время работы.

Выводы

На основании экспериментальных исследований можно сделать следующие выводы:

- исследование утомления человека в процессе решения операторских задач, основанных на зрительно-моторном слежении, позволяет выявить индивидуумов в наибольшей степени устойчивых к утомлению при выполнении данного типа работы, что является одним из критериев профессиональной пригодности;

- учет индивидуальных особенностей утомления при зрительно-моторном слежении позволяет своевременно внести коррективы объема и (или) интенсивности нагрузки, правильно организовать время и длительность рабочих перерывов и снизить уровень утомления. Это, в свою очередь, повлечет уменьшение количества ошибок оператора и приведет к повышению эффективности его профессиональной деятельности.

Результаты данной работы могут быть практически без ограничений использованы в приложении к системам телевидения, технического зрения, а также любым радиотехническим системам, использующим устройства визуального отображения информации, с целью оптимизации процессов отображения и восприятия информации, и повышения качества и надежности работы комплексов в целом.

Работа была выполнена при поддержке по гранту РФФИ № 13-07-00339_a.

ЛИТЕРАТУРА

1. Estimating the Perceptual Limits of Mobile Displays, Fahad Zafar, Mina Choi, Aldo Badano. Center for Devices and Radiological Health, FDA, Silver Spring, MD. Department of Bioengineering, The George Washington University, Washington, DC. Department of Computer Science and Engineering, University of Maryland, Baltimore County, Baltimore, MD, 2008.

2. *S.B. Lee*. Emotional image quality evaluation technology for display devices. The Korean Institute of Illuminating & Electrical Installation Engineers, Vol. 21, No. 5 pp.13-20 (Korean) (2007).
3. Петухов, И.В. Исследование деятельности человека-оператора в режиме слежения / И.В. Петухов // Системы управления и информационные технологии. 2011. № 2. (44). С. 39–44.
4. Эргатические системы: техногенная безопасность / И. В. Петухов, Л. А. Стешина // Воронеж: Научная книга, 2012. – 280 с.

HARDWARE-SOFTWARE COMPLEX FOR EVALUATION OF OPERATOR'S ACTIVITY

D. Chausov¹, I. Petukhov², V. Belyaev¹, K. Bogachyov³, P. Kurasov²

¹*Moscow Region State University
10a, Radio st., Moscow, 105005, Russia*

²*Volga State University of Technology
Ploshchad' Lenina, 3, Yoshkar-Ola, Respublika Mariy El 424000, Russia*

³*Moscow Institute of electronics and Mathematics
3, Bolshoy Trekhsvyatitskiy per., Moscow, 109028, Russia*

Abstract. In this paper, implemented in hardware-software system to evaluate the health and efficiency of the monotonic operator activity of visual-motor tracking a moving object. New data on the mechanisms of fatigue in the human operator tracking process using electronic displays. Health is a generalized graph operator depending on the time of work.
Keywords: hardware-software complex, electronic displays, visual-motor tracking.

УДК 004.512

ЗРИТЕЛЬНОЕ УТОМЛЕНИЕ ЧЕЛОВЕКА-ОПЕРАТОРА В ПРОЦЕССЕ ВОСПРИЯТИЯ ИНФОРМАЦИИ С ЭЛЕКТРОННЫХ ДИСПЛЕЕВ

И.В. Петухов¹, Д.Н. Чаусов², В.В. Беляев², П.А. Курасов¹, И.О. Танрывердиев¹

¹*Поволжский государственный технологический университет,
424000, Республика Марий Эл, г. Йошкар-Ола, пл. Ленина, д. 3*

²*Московский государственный областной университет,
105005, Москва, ул. Радио, 10а*

Аннотация. В работе проведен анализ деятельности человека-оператора при работе с электронными средствами отображения информации как системы «человек-машина-среда». Показано, что эффективность работы оператора во многом зависит от его способности к восприятию информации. Предложен инновационный подход к решению задачи информационного согласования оператора и технической системы, когда наряду с оценкой технических параметров средства отображения производится контроль и оптимизация зрительной нагрузки оператора. Получены новые данные о механизмах зрительного утомления человека-оператора в процессе работы с электронными дисплеями.

Ключевые слова: зрительная нагрузка, человек-оператор, электронный дисплей

Введение и постановка задачи

Работоспособность и утомляемость операторов являются одними из наиболее важных характеристик определяющих эффективность его работы в процессе трудовой смены.

Согласно работам [1-3] оценка эффективности деятельности оператора может быть основана как на оценке развитости его профессионально-важных качеств (ПВК), так и на основе анализа эффективности на отдельных этапах операторской деятельности.

В настоящее время одним из наиболее широко используемых для решения данной задачи методов является аналитический лабораторный эксперимент. Согласно этому, в лабораторных условиях воспроизводят определенный фрагмент профессиональной деятельности, а остальные элементы сознательно исключаются, что позволяет, в определенной степени, сегментировать отдельные этапы операторской деятельности.

Разновидностью аналитического лабораторного эксперимента являются тестовые испытания. При этом тестом называется задача или задание, с помощью которого проверяется уровень развития у оператора того или иного психофизиологического качества. Этот вид эксперимента обычно применяется для изучения влияния различных условий и факторов, например трудовой среды, организации трудового процесса, функционального состояния оператора [4] на отдельные элементы его профессиональной деятельности.

Таким образом, возникает задача оценки эффективности деятельности оператора на основе оценки степени развитости профессионально-важных качеств с использованием аналитического лабораторного эксперимента.

Методика проведения эксперимента

В общем виде операторская деятельность может быть представлена в виде следующих этапов:

$$St = \{St\ 1, St\ 2, St\ 3, St\ 4\},$$

где St 1 – этап приема и восприятия поступающей информации, St 2 – этап оценки и переработки информации, St 3 – этап принятия решений, St 4 – этап реализации принятого решения.

Согласно представленной схемы можно сформулировать следующие задачи аналитического лабораторного эксперимента по оценке эффективности операторской деятельности:

- Оценка способности к обнаружению полезного сигнала, выделения приоритетного сигнала на фоне сигналов с меньшим приоритетом, расшифровке и декодированию информации.
- Оценка способности к переработке, запоминанию информации, извлечения из памяти информативных образцов, декодированию информации.
- Оценка способности к принятию правильного решения в условиях самостоятельно выделенного критерия правильного решения, соответствующего представлениям оператора о цели и результате своей работы.
- Оценка способности к реализации принятого решения, которая во многом зависит от готовности оператора быстро, на уровне автоматизма выполнять сложные действия.

Способность индивидуума к определенному виду деятельности зависит от типологических особенностей нервной системы и выражается, применительно к профессиональной деятельности, в профессионально важных качествах (ПВК). То есть для эффективного выполнения операторских действий на каждом этапе оператор должен обладать специфическим набором ПВК, каждое из которых при этом может быть связано с несколькими этапами операторских действий.

На основе этого предложена следующая обобщенная модель аналитического лабораторного тестового эксперимента, схема которого представлена на рис.1.

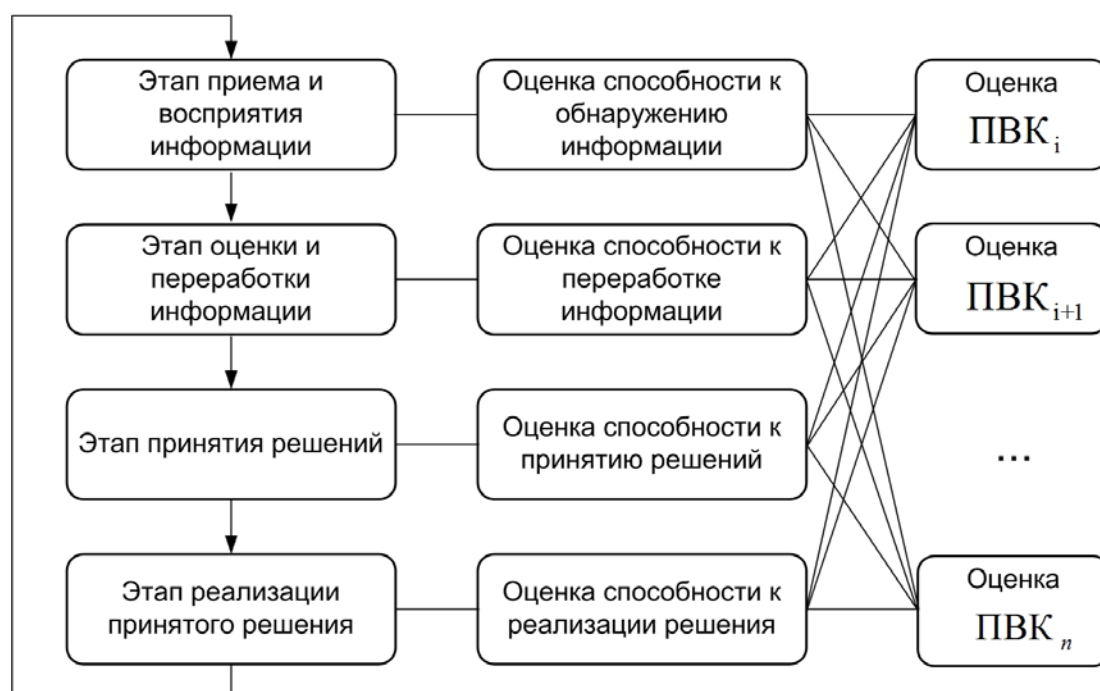


Рис.1. Схема оценок успешности операторской деятельности на отдельных ее этапах.
ПКВ – профессионально-важные качества.

Под каждый из этапов операторской деятельности, согласно представленной модели эксперимента, можно подобрать тесты или набор тестов, характеризующих соответствующие способности испытуемого.

Анализ соотношения ошибок четырех этапов деятельности оператора свидетельствует, что в ее структуре при выполнении задачи преобладают ошибки на этапе переработки информации и принятия решения (55%), значительно меньше приходится на этапы приема информации (18%), выполнения решения (17%) и контроля реализации решения (10%) [5]. В тоже время, ошибки на этапе приема информации приводят к неправильной оценке ситуации и принятию последующих решений.

Для оценки эффективности операторской деятельности и зрительного утомления в процессе восприятия информации с электронных дисплеев была выбрана группа операторов, занятых переносом (вводом) информации с одного электронного носителя в другой с использованием электронного дисплея. Условия работы операторов регламентировались в соответствии с санитарными правилами «Гигиенические требования к видеодисплейным терминалам, персональным электронно-вычислительным машинам и организации работы» (СанПиН 2.2.2.542–96), а также государственными стандартами (ГОСТ): «Средства отображения информации индивидуального пользования. Общие эргономические требования и требования безопасности» (ГОСТ Р 50949) и «Дисплей. Рабочее место оператора. Общие эргономические требования и требования к производственной среде» (ГОСТ Р 50923–96).

Каждый из испытуемых работал по вводу информации при 8-ми часовой рабочей смене, регламентированные перерывы при которой осуществлялись по следующей схеме: через два часа от начала рабочей смены и через два часа после обеденного пере-

рыва продолжительностью пятнадцать минут каждый. Во время тестирования все операторы вводили один и тот же текст при максимальной индивидуальной скорости ввода.

Известно, что устойчивое снижение качества слежения сопровождается достоверным снижением уровня лабильности нервной системы операторов, а снижение лабильности органа зрения является характерной чертой утомления организма человека в целом [6]. Имеются данные о зависимости зрительных функций от степени утомления организма человека [7].

В связи с вышеизложенным, в качестве показателей зрительного утомления были выбраны такие временные параметры зрительного восприятия, как время зрительного восприятия (ВЗВ) и лабильность зрительного анализатора. Измерение указанных временных параметров зрительного восприятия проводили в соответствии с известными способами их измерения [8, 9], с использованием перцептивно-простых световых импульсов типа «да-нет» желтого цвета.

В процессе тестирования при фиксации значения временных параметров зрительного восприятия, отображалась динамика изменения указанных параметров в координатах «значение параметра – время тестирования» и формировался файл данных результатов измерений для документирования. Кроме того, определяли процентное содержание ошибок в набранном за контрольный период тексте, являющееся индикатором утомления.

Измерения временных параметров зрительного восприятия проводилось в начале тестирования и через каждые тридцать минут работы.

Анализ результатов исследования

Графики динамики времени зрительного восприятия (ВЗВ) и процентного содержания ошибок представлены на рис.2, где Т – время зрительного восприятия, а пунктиром отмечено время регламентированных перерывов.

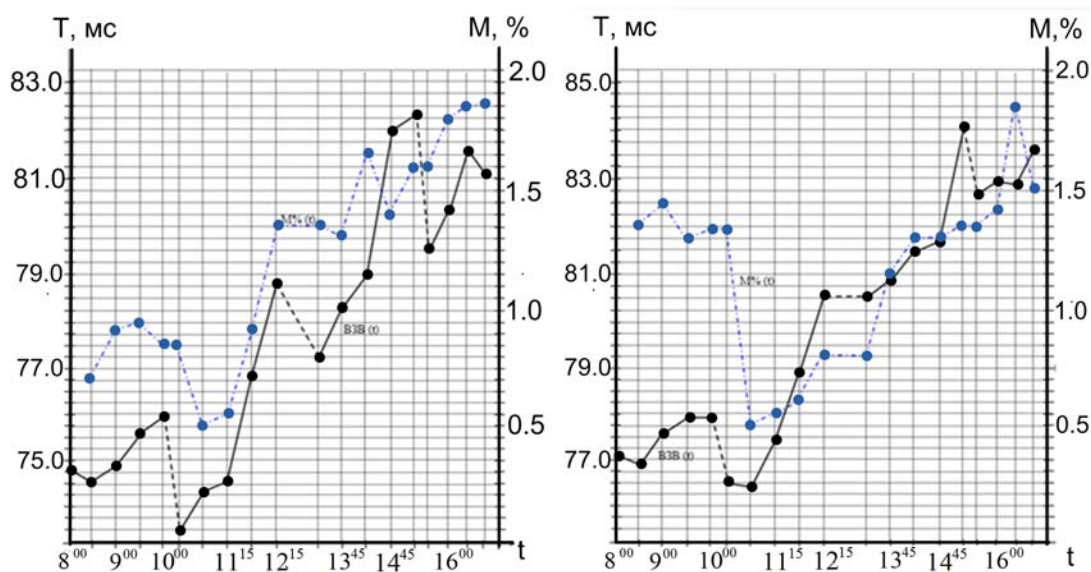


Рис. 2. График динамики значения ВЗВ в процессе трудовой смены

Проведен анализ результатов измерений ВЗВ и используемого для диагностики зрительного утомления критерия. Оценка связи между двумя рядами наблюдений проводилась с использованием коэффициента корреляции рангов по Спирмену. Результаты анализа показали значимость связи в диапазоне от 0,439 до 0,913, соответствующей умеренной и высокой тесноты связи.

Аналогичным образом осуществлено исследование лабильности, результаты которого представлены на рис.3, где F – лабильность зрительного анализатора.

По результатам экспериментальных исследований, установлено, что утомление оператора в процессе трудовой деятельности находит отражение в изменении параметров зрительного восприятия, в частности в значении ВЗВ и лабильности.

При этом из анализа графиков следует, что ВЗВ и лабильность зрительного анализатора обладают достаточно высокой динамической чувствительностью, так как позволяют оценить изменения в функциональном состоянии операторов ЭВМ за время 15-минутных перерывов в работе.

Так, анализ индивидуальных графиков лабильности свидетельствует, что у испытуемого А. (рисунок 3 а), в процессе трудовой деятельности утомление накапливалось относительно равномерно. При этом на начальном этапе деятельности отмечался этап вработывания (с 8:00 до 8:30), во время первого регламентированного перерыва (с 10:00 до 10:15) и во время обеденного перерыва (с 12:15 до 13:15) отдых позволил уменьшить утомление, второй регламентированный перерыв (с 15:15 до 15:30) видимого эффекта не дал – утомление продолжало накапливаться.

Анализ индивидуального графика испытуемого Б. (рисунок 3 б) свидетельствует о похожей картине утомления, с тем отличием, что этап вработывания наблюдался на большем временном отрезке (с 8:00 до 9:00). Эффект релаксации наблюдался после каждого регламентированного перерыва. При этом можно констатировать, что испытуемый Б. за время смены утомился в меньшей степени, чем испытуемый А.

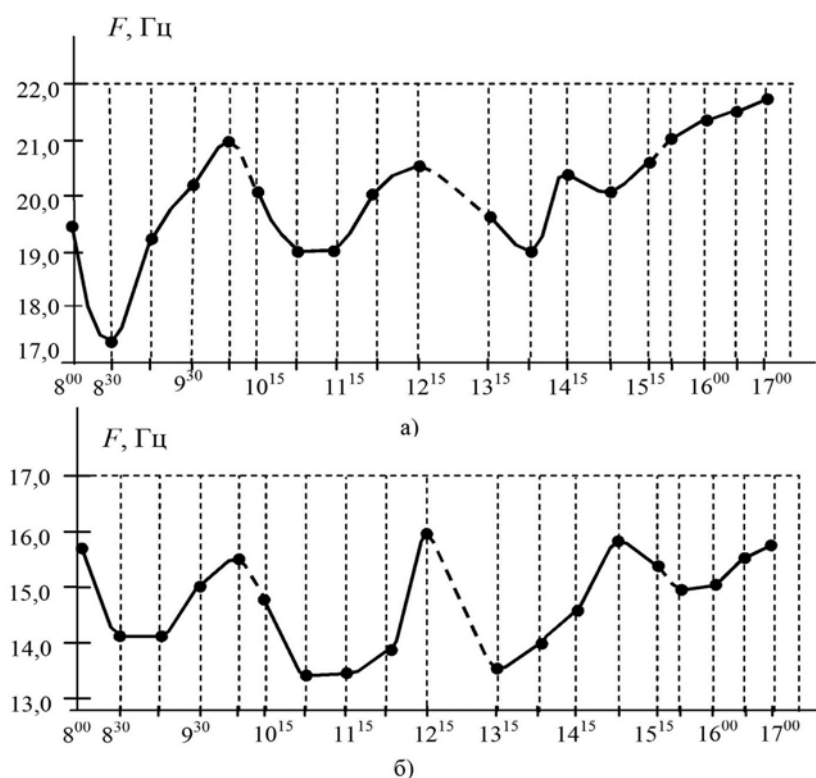


Рис. 3. Графики динамики лабильности в процессе трудовой деятельности операторов А (а) и Б (б)

Учитывая одинаковый объем работы, проделанный испытуемыми А. и Б., можно предположить, что испытуемый Б. обладает большим запасом работоспособности при зрительно-напряженном труде и более устойчив к зрительному утомлению.

Таким образом, анализ полученных графиков позволяет оценить характер адаптации человека к работе, определить период оптимальной работоспособности, время наступления утомления. Это свидетельствует о том, что время зрительного восприятия и лабильность зрительного анализатора являются диагностическими параметрами зрительного утомления при зрительно-напряженной работе, позволяющие выявить этапы наступления утомления и момент перехода в состояние острого утомления.

Выводы

Корреляционные физиологические связи органа зрения с другими физиологическими системами обширны и интегрированы во все системно очерченные отделы центральной нервной системы (ЦНС), включая сенсорную, моторную, эмоциональную, вегетативную, эндокринную и др. [10]. В связи с этим, очевидно, что изменение функционального состояния зрительного анализатора при утомлении сопровождается изменением функционального состояния организма человека в целом, при этом утомление ЦНС находит отражение в ухудшении зрительных функций.

Таким образом, проведенные исследования зрительного утомления человека-оператора свидетельствуют, что:

- параметры инерционности зрительного анализатора и лабильности являются диагностическими показателями сенсорного утомления;

- исследование зрительного утомления позволяет выявить индивидуумов в наибольшей степени устойчивых к данному виду утомления при выполнении зрительно-напряженной работы; и, следовательно, в наибольшей степени пригодных к данному виду операторской деятельности.

- исследование утомления в процессе зрительно-напряженного труда позволяет выявить индивидуумов, для которых с наступлением утомления не наблюдается критического ухудшения зрительных функций;

- использование описанного способа исследования зрительного утомления позволит своевременно внести коррективы объема и (или) интенсивности нагрузки, правильно организовать время и длительность рабочих перерывов и снизить уровень зрительного утомления.

Работа была выполнена при поддержке по гранту РФФИ № 13-07-00339 _а.

ЛИТЕРАТУРА

1. Глебова, Е.В. Снижение риска аварийности и травматизма в нефтегазовой промышленности на основе модели профессиональной пригодности операторов: автореф. дис. ... д-ра техн. наук: 05.26.03 / Глебова Елена Витальевна. – Уфа, 2009. – 46 с.
2. Петухов, И.В. Эргатические системы: техногенная безопасность: монография / И. В. Петухов, Л. А. Стешина. – Воронеж: Науч. кн., 2012. – 280 с.
3. Liu, Y. Queuing Network-Model Human Processor (QN-MHP): A Computational Architecture for Multitask Performance in Human-Machine Systems / Y. Liu, R. Feyen, O. Tsimhoni // ACM Transactions on Computer-Human Interaction. – 2006. – Vol.13. – No.1. – P. 37 – 70.
4. Кальниш, В.В. Современные подходы к анализу надежности операторской деятельности / В. В. Кальниш // Український журнал з проблем медицини праці. – 2009. – № 4(20). – С. 75 – 85.
5. Жовнерчук, Е.В. Система психопрофилактики информационного стресса специалистов операторского профиля: автореф. дисс. ... докт. мед. наук: 14.03.11 / Жовнерчук Евгений Владимирович. – М.: 2011. – 48 с.
6. Бушов, Ю.В. Связь индивидуальных свойств человека-оператора с продуктивностью деятельности и устойчивостью к влиянию фактора монотонности труда / Ю. В. Бушов, Ю. А. Рябчук // Вопросы психологии. – 1981. – № 1. – С. 126 – 130.
7. Халфина, Р.Р. Психофизиологические показатели обработки зрительной информации при зрительном утомлении / Р. Р. Халфина, Т. Ф. Емелева, Р. М. Халфин // Вестник НГПУ. – 2012. – №3. – С. 80 – 85.
8. Патент 2209030 РФ, МПК А61В5/00 Способ определения времени восприятия зрительной информации / Роженцов В.В., Петухов И.В. // Заяв. № 2002116877/14. – опубл. 27.07.2003, Бюл. № 21.
9. Патент 2233115 РФ, МПК А61В5/16 Способ определения лабильности зрительной системы человека / Роженцов О.В., Петухов И.В. // Заяв. № 2003127900/14. – опубл. 27.07.2004, Бюл. № 21.

10. Корнюшко, В.И. Роль и значение вестибулярной системы в физиологической функции зрительной фиксации цели в норме и при патологии: автореф. ... канд. мед. наук / Корнюшко Вадим Игоревич. – СПб., 2011. – 19 с.

**VISUAL FATIGUE OF THE HUMAN OPERATOR
IN THE PERCEPTION INFORMATION
FROM ELECTRONIC DISPLAYS**

I. Petukhov¹, D. Chausov², V. Belyaev², P. Kurasov¹, I. Tanryverdiev¹

¹*Volga State University of Technology*

Ploshchad' Lenina, 3, Yoshkar-Ola, Respublika Mariy El 424000, Russia

²*Moscow Region State University*

10a, Radio st., Moscow, 105005, Russia

Abstract The analysis of the activities of the human operator when working with electronic means of information as the "man - machine-environment". It is shown that the operator's efficiency depends largely on its ability to process information. We propose an innovative approach to solving the problem of information and coordination of the technical system operator, when combined with the assessment of technical parameters display means made control and optimization of visual load of the operator. New data on the mechanisms of visual fatigue of the human operator in the process of working with electronic displays.

Keywords: visual load, human-operator, electronic display

УДК 533.6

**СТРУКТУРА ПУЛЬСАЦИЙ ПОТОКА ГАЗА
В РАЗВИТОМ ТУРБУЛЕНТНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ.
ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ**

В.А. Жаров

*ФГУП Центральный аэрогидродинамический институт им. Н.Е. Жуковского (ЦАГИ)
140180, ул. Жуковского-1, г. Жуковский, Московская обл., РФ,*

Анотация. Рассмотрен слабонелинейный вариант волновой модели развитого турбулентного пограничного слоя. Определены дисперсионные характеристики волн наименее затухающей моды, проанализированы условия множественного трехволнового резонанса этой моды волн Толлмина-Шлихтинга. На основе метода многих масштабов получены уравнения для когерентной и стохастической части пульсаций.

Ключевые слова: уравнения Навье-Стокса, турбулентный пограничный слой, когерентные структуры

Ранние прецизионные экспериментальные исследования [1] показали, что развитый турбулентный пограничный слой содержит организованные вихревые структуры, определяющие многие физические свойства этого течения. Последние экспериментальные [3] и численные исследования [5] подтверждают наличие когерентных структур. Представляет интерес построение упрощенной математической модели этого явления, основываясь на уравнениях Навье-Стокса. Одним из содержательных подходов решения этой задачи является волноводная модель развитого турбулентного пограничного слоя [6]. По аналогии с этой моделью из уравнений Навье-Стокса получено нелинейное уравнение для фурье-компонент вертикальной скорости волн Толлмина-Шлихтинга, описывающих пульсации в пограничном слое, до третьего порядка по амплитуде в одномодовом приближении. Уравнение содержит малый параметр

$$\varepsilon^2 \sim \delta^{**}/L,$$

где δ^{**} – толщина потери импульса, L – характерный продольный масштаб длины. Для согласования членов уравнения вводится соотношение (закон подобия)

$$\delta^{**}/L \sim \delta^{**} |\text{Im}[\omega^{**}(\mathbf{k}, \delta^{**})]|/U_{\infty},$$

где $|\text{Im}[\omega^{**}(\mathbf{k}, \delta^{**})]|$ – минимальный по $\mathbf{k}$ инкремент основной моды волн Толлмина-Шлихтинга, U_{∞} – скорость набегающего потока. Амплитуды волн, в соответствии с принципом тройной декомпозиции [1], представляются в виде суммы когерентной и некогерентной частей, для которых получается система уравнений, содержащих малый параметр ε . Для решения этой системы использован метод многих масштабов [4] в соответствии с определением величин этих масштабов:

$$\tau_0 = \delta^{**}/U_{\infty}, \tau_1 = \tau_0/\varepsilon, \tau_2 = \tau_0/\varepsilon^2.$$

(Отметим, что масштаб τ_1 имеет величину, сравнимую со средним периодом бёрта.) В результате для амплитуд волн когерентной структуры в масштабе τ_1 получено уравнение множественного 3-х волнового резонанса.

$$\frac{da_l}{dt_1} = \sum_{l=1}^n \Lambda_l^l a_2^l a_3^l, \quad \frac{da_2^l}{dt_1} = \Lambda_2^l a_1 a_3^{l*}, \quad \frac{da_3^l}{dt_1} = \Lambda_3^l a_1 a_2^{l*}, \quad l=1,2,\dots,n$$

В этом уравнении величины Λ_m^l , $m=1,2,3$, определяются через спектральные характеристики (собственные числа и собственные функции) профиля продольной средней скорости турбулентного пограничного слоя.

На основе известного из эксперимента профиля (профиль Мускера) средней продольной скорости развитого турбулентного пограничного слоя проведен численный анализ уравнений для когерентной структуры. Получены дисперсионные характеристики волн Толлмина –Шлихтинга и матричные элементы в виде функций от компонентов волнового вектора. Кривая 3-х волнового резонанса представлена на рис.1(а) и показывает, что в турбулентном пограничном слое вследствие наличия когерентной структуры появляются продольные вихри. Для некогерентной части в масштабе τ_2 получено замкнутое интегродифференциальное уравнение для двухточечной корреляционной функции. Замыкание цепочки уравнений для моментов определено наличием малого параметра ε [4]. Это уравнение содержит источник член, определяемый когерентной структурой.

Кроме того, показано, что динамика множественного 3-х волнового резонанса в представлении дискретного набора n триплетов удовлетворяет инварианту, который представляется квадратичной формой для комплексных амплитуд с действительными весовыми множителями.

$$q_1 |a_1|^2 + \sum (q_2 |a_2|^2 + q_3 |a_3|^2) = const$$

Здесь сумма берется по всем резонансным триплетам.

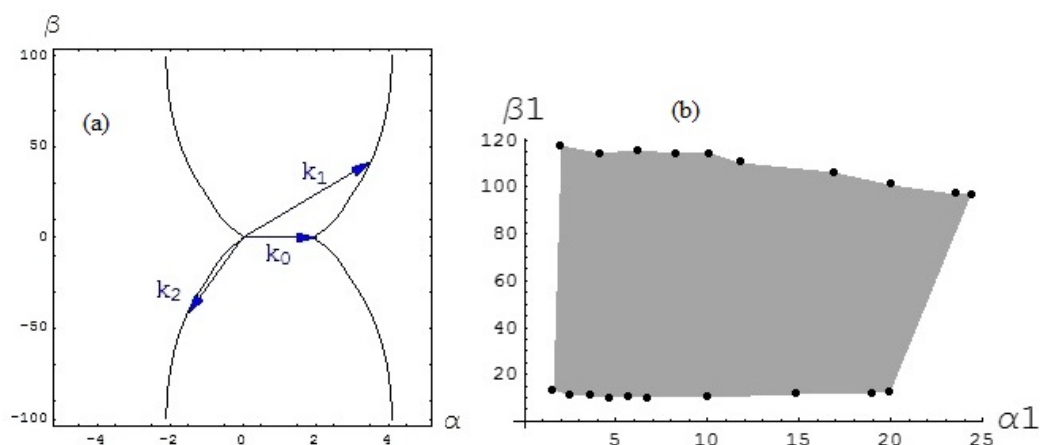


Рис. 1. (а) Кривая 3-х волнового резонанса, $\mathbf{k}_i = (\alpha_i, \beta_i)$, $i = 0, 1, 2$. (b) Область волновых векторов $\mathbf{k}_1$, в которой весовые множители положительны (при различных α_0)

Если весовые множители q_m , $m = 1, 2, 3$, положительны, то система совершает финитное движение, при надлежащей нормировке амплитуд, по поверхности единичной сферы размерности $2(1+4n)$, n – число резонансных триплетов. Нормировка квадратичной формы на единицу возможна, так как существует преобразование амплитуд и времени, оставляющее исходное уравнение неизменным. Множитель этого преобразования удовлетворяет уравнению в масштабе τ_2 . Численный анализ на профиле Мускера показал наличие области волновых чисел (α_1, β_1) , в которой весовые множители квадратичной формы положительны. На рис. 1(b) показана область волновых чисел с положительными весовыми множителями. Поэтому эту область волновых чисел можно сопоставить когерентной структуре. Сопоставление закона подобия с экспериментальными данными [2] в диапазоне чисел Рейнольдса $R_\delta = 10^4 - 10^5$, δ – толщина пограничного слоя по скорости, показало хорошее соответствие (рис.2). Определены также средние по $t_1 = t / \tau_1$ величины

$$\langle uv \rangle_{t_1}, \langle uu \rangle_{t_1}, \langle vv \rangle_{t_1}, \langle ww \rangle_{t_1}$$

для когерентной структуры, u, v, w – компоненты скорости пульсаций, определяемые когерентной структурой. Результаты приведены на рис.3.

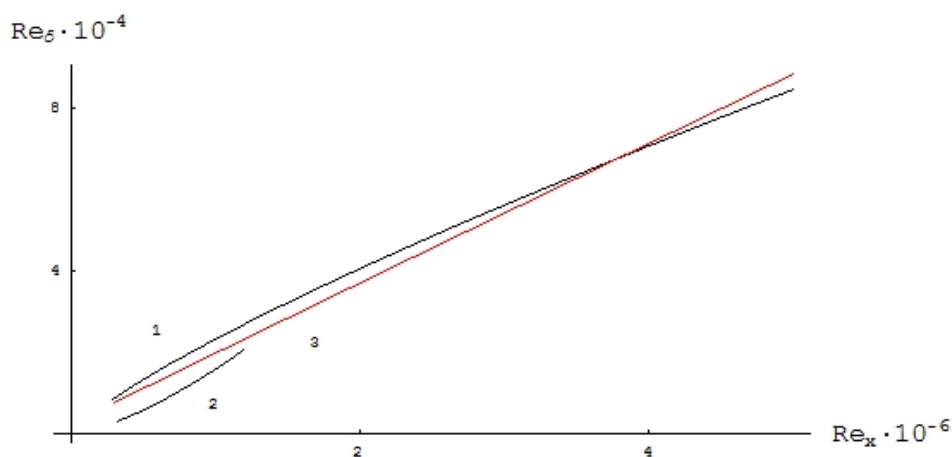


Рис. 2. Сравнение закона подобия с экспериментальными данными: 1,2 – [7], 3 – настоящая теория

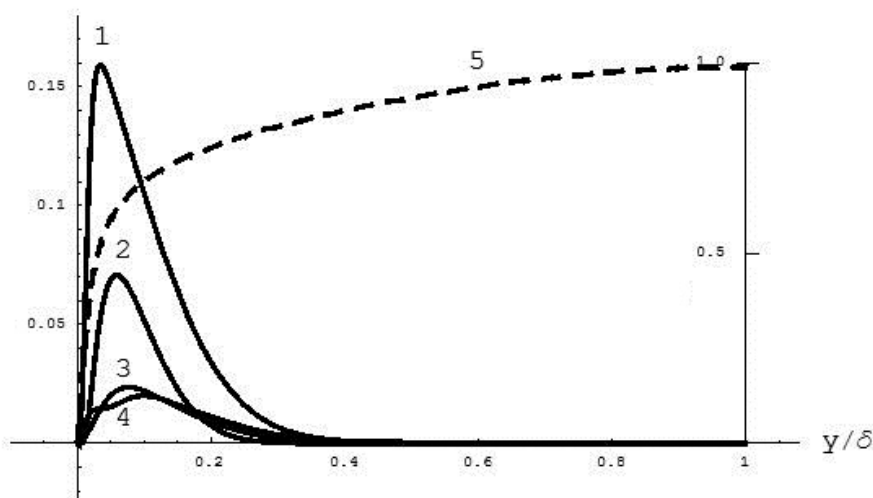


Рис. 3. Среднеквадратичные величины компонентов пульсационной скорости (относительные единицы):

$$1 - \sqrt{\langle uu \rangle}, 2 - 20\langle uv \rangle, 3 - \sqrt{\langle vv \rangle}, 4 - \sqrt{\langle ww \rangle}, 5 - U(y), \text{Re}_\delta = 10^4.$$

Полученные средние значения качественно отражают поведение этих величин в вязком подслое турбулентного пограничного слоя. Отличие от известных экспериментальных результатов [2] на масштабе толщины пограничного слоя по скорости, по-видимому, обусловлено потерей точности использованного в работе численного метода при больших числах Рейнольдса в области малых волновых чисел.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белоцерковский, О.М. Организованные структуры в турбулентных течениях. Анализ экспериментальных работ по турбулентному пограничному слою / О.М. Белоцерковский и др. – М.: МФТИ, 2009. – 302 с.
2. Шлихтинг, Г. Теория пограничного слоя / Г. Шлихтинг. – М.: Наука, 1974. – 711 с.
3. Borodulin, V.I. Experimental detection of deterministic turbulence / V.I. Borodulin, Y.S. Kachanov, A.P. Roschekhtayev // Journal of Turbulence. – 2011. V. 12. N 23. – С.1–34.
4. Davidson, R.C. Methods in nonlinear plasma theory / R.C. Davidson. N.Y.; L.: Acad. Press, 1972. – 356 с.
5. Khujadze, G. Coherent vorticity extraction in turbulent boundary layers using orthogonal wavelets / G. Khujadze, R. Nguyen van yen, K. Schneider, M. Oberlack, Farge M. // 13th European Turbulence Conference (ETC-13). Warsaw, Poland, 2011.
6. Landahl, M.T. A wave-guide model for turbulent shear flow / M.T. Landahl // J.Fluid Mech. – 1967. V. 29. Pt. 3. – С.441–459.

THE PULSATION STRUCTURE OF GAS FLOW IN THE DEVELOPED TURBULENT BOUNDARY LAYER. THEORETICAL ANALYSIS

V. Zharov

*Zukovski Central Aerohydrodynamic Institute (TsAGI),
140180, Zukovski str-1, Zukovski, Moscow Region, Russian Federation*

Abstract. The weakly nonlinear variant of the wave model of the developed turbulent boundary layer is considered. Dispersion properties of the least damping Tollmien-Schlichting waves are defined and conditions of 3-wave resonance existence are given. Equations for the coherent and the stochastic part of the pulsations are received by the multiscale method.

Keywords: Navier-Stokes equations, turbulent boundary layer, coherent structures

ТЕХНОЛОГИИ И МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ

УДК 37.016:51

ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРАМИ И ТЕКСТОВЫХ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРАМИ

Д.В. Жарков

*Московский государственный областной университет (МГОУ)
105005, Москва, ул. Радио, 10а*

Аннотация. В данной статье были выделены основные методы решения текстовых задач с параметрами. Показано, какими методами решения учащийся может овладеть в зависимости от его уровня подготовки и профиля школы. Автор считает необходимым подчеркнуть, что ни в коем случае нельзя «выдёргивать» отдельные методы и на специально подобранных примерах показывать преимущества использования того или иного метода. Очень важно, чтобы учащийся воспринимал задачи этих двух классов как нечто неделимое и взаимодополняющее друг друга. Подобное совмещение представляется нам особенно важным, поскольку иначе теряется та основа, которая была заложена нашими предками-математиками.

Ключевые слова: исторический метод, простейший вариант научно-исследовательской задачи, графический метод, аналитический метод, инверсия, метод перехода от общего к частному.

В самом начале данной статьи, мы хотим сказать несколько слов о способе изложения материала данной статьи. По нашему мнению, было бы некорректно «выдёргивать» отдельные методы и на специально подобранных примерах показывать преимущества использования того или иного метода. Мы считаем, что целесообразнее дать обзор литературы по применению различных методов решения к задачам с параметрами и текстовым задачам с параметрами, в целом не отделяя их друг от друга, делая редкие исключения в силу необходимости. Мы убеждены в том, что школьник должен иметь право выбора использования того или иного метода при решении соответствующих задач. Мы полностью разделяем точку зрения Голубева В.И, который говорит: «... цель любого читателя, в первую очередь, состоит в овладении всеми методами решения» [1, с. 71].

Метод первый – исторический. Как писал великий французский учёный Анри Пуанкаре, «Всякое обучение становится ярче от каждого соприкосновения с историей изучаемого предмета», поэтому и мы начнём с одного из важнейших методов - исторического. Однако, прежде чем начать, сделаем небольшое замечание: среди всех известных нам источников [1-15], имеющих отношение к текстовым задачам с параметрами или просто к «задачам с параметрами», нигде не проведено никаких исторических ссылок или параллелей. Итак, исторический метод, в основе своей, предполагает построение ряда событий. К прошлому относят уже закончившиеся процессы, к настоящему – продолжающиеся, к будущему – ещё не начавшиеся. Естественно, что между прошлым, настоящим и будущим существует определённая преемственность. Её учёт яв-

ляется основным достоинством исторического метода. Новое рождается на основе уже достигнутого. Нижеследующая задача имеет непосредственное отношение к древнева-вилонскому периоду, где уже существовала шестидесятеричная система счисления (данные в задаче представлены в шестидесятеричной системе счисления).

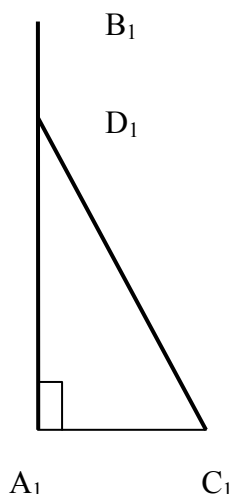
Задача 1 [16, с. 62-63]; [17, с. 103]. «Балка длины 0;30 (приставлена к стене). Её верхний конец опустился на 0;6. Как далеко отодвинется её нижний конец?»

Р е ш е н и е:

Реализуя преемственность между прошлым, настоящим и будущим вариантами решения, разложим их решение по шагам с переводом на современную числовую и перспективную буквенную символику.

Первый вариант решения.

Дано: $A_1B_1=C_1D_1=l$, $D_1B_1=m$, $A_1C_1=x$.



Вавилонский текст	Современная символика	Общий вид
1) Ты 0;30 умножь на 0;30, ты видишь 0;15	1) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$	1) $l \cdot l = l^2$
2) 0;6 отними от 0;30, ты видишь 0;24	2) $\frac{1}{2} - \frac{1}{10} = \frac{2}{5}$	2) $l - m$
3) 0;24 умножь на 0;24, ты видишь 0;9,36	3) $\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$	3) $(l - m) \cdot (l - m) =$ $= (l - m)^2$
4) 0;9,36 от 0;15 отними. Ты видишь 0;5,24	4) $\frac{1}{4} - \frac{4}{25} = \frac{9}{100}$	4) $l^2 - (l - m)^2 = x^2$

5) 0;5,24 что имеет квад-

$$5) \sqrt{\frac{9}{100}} = \frac{3}{10}$$

$$5) x = \sqrt{l^2 - (l-m)^2}$$

ратным корнем?

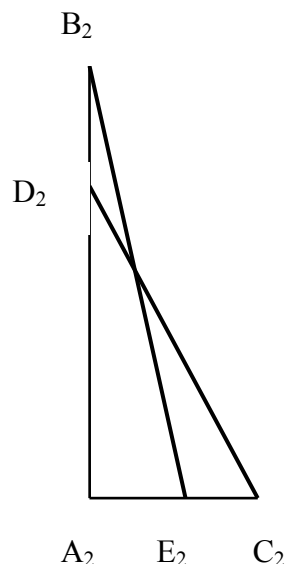
0;18 квадратный корень.

На 0;18 на земле она удалилась

Проведём исследование данной задачи в общем виде. Подкоренное выражение должно быть больше или равно нулю. Следовательно, $l^2 - (l-m)^2 \geq 0$. Далее раскрываем скобки и приводим подобные члены, имеем: $m(2l-m) \geq 0$. Решая данное неравенство методом интервалов, получаем: $m \in [0; 2l]$. Заметим, что при $m=0$ или $m=2l$ задача имеет тривиальный характер, так как $x=0$. Это означает, что нижний конец балки никуда не сдвигается, а остаётся на месте.

Второй вариант решения.

Дано: $A_2B_2=y$, $D_2B_2=m$, $A_2E_2=z$, $E_2C_2=x$, $B_2E_2=D_2C_2=l$.



По условию задачи составляем систему уравнений:

$$\begin{cases} y^2 + z^2 = l^2 \\ (y-m)^2 + (z+x)^2 = l^2 \end{cases} \Rightarrow y^2 + z^2 = (y-m)^2 + (z+x)^2$$

$$y^2 - 2my + m^2 + z^2 + 2xz + x^2 = y^2 + z^2, x^2 + 2zx + (m^2 - 2my) = 0, x_{1,2} = -z \pm \sqrt{z^2 - m^2 + 2my}.$$

Учитывая, что $z^2 = l^2 - y^2$, получаем: $x_{1,2} = -\sqrt{l^2 - y^2} \pm \sqrt{l^2 - (y-m)^2}$.

Очевидно, что $x_1 < 0$. Рассмотрим случай с $x_2 = -\sqrt{l^2 - y^2} + \sqrt{l^2 - (y-m)^2}$.

По условию задачи $x_2 \geq 0$, $\sqrt{l^2 - (y-m)^2} - \sqrt{l^2 - y^2} \geq 0$, $\sqrt{l^2 - (y-m)^2} \geq \sqrt{l^2 - y^2}$

Данное неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} l^2 - y^2 \geq 0 \\ l^2 - (y - m)^2 \geq l^2 - m^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l \in [y; \infty) \\ l^2 \leq 2my \end{cases}. \text{ При } l=y \text{ имеем: } y \in [0; 2m].$$

Итак, мы получили три варианта решения задачи. Данная задача является примером **простейшей научно-исследовательской задачи**. Желательно, чтобы учитель начал своё занятие с урока-практикума: ведь ещё К.Д. Ушинский писал: «Учение есть труд и должно остаться трудом, но трудом, полным мысли, так чтобы самый интерес учения зависел от серьёзной мысли, а не от каких-нибудь не идущих к делу прикрас» [18]. Тем самым, он предостерегал учителей от игнорирования интересов подростков и призывал объективно подходить к решению требований учебного процесса: строить преподавание на совмещении непосредственного интереса и серьёзной учебной работы. Решая практические задачи, подобные данной, учитель реализует это завещание К.Д. Ушинского.

Применение исторического метода на уроках математики не только позволяет осваивать учащимся важный культурно-исторический пласт истории человечества, связанный с поиском решения задач, но и вносит разнообразие в их мыслительную деятельность. Отметим, что совместное использование исторического и абстрактного методов при решении текстовых задач – важный внутренний (связанный с предметом), а не внешний (связанный с отметками, поощрениями и т. п.) стимул к поиску решения задач и изучению математики.

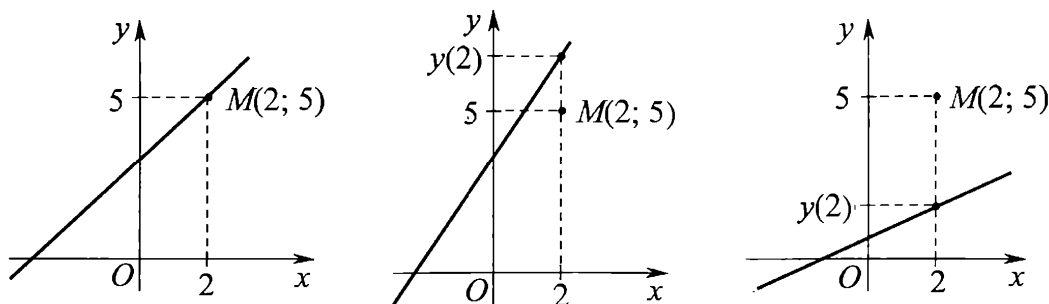
Метод второй – графический метод. Любая задача с параметром – это задача с двумя компонентами: переменной (аргументом) и параметром. Графический метод представляет искомые решения в виде геометрического места точек на координатной плоскости, где в качестве одной из координат выступает переменная, а в качестве другой – параметр. Следовательно, решением задачи является упорядоченный набор пар координат точек евклидова пространства. Данный метод широко используется и находит практическое применение в учебной и методической литературе [1-15] (см., например, [3]). Так книга [3] посвящена решению задач с параметрами, которые для многих школьников традиционно являются задачами повышенной трудности. При этом в гл. 6 «Графические методы. Метод сечений» В.С. Высоцкий разделяет метод сечений и координатно-графический метод, вполне оправдано отмечая, что «Такое разнесение методов сделано для того, чтобы у школьников, которые впервые знакомятся с графическими методами, не возникло путаницы из-за их смешения» [3, с.107].

Задача 2 [3, задача 4, с. 111-112]. При каких a прямая $y = (3a-7)x + 2a-5$:

- а) проходит через точку $M(2;5)$;
- б) проходит выше точки M ;
- в) проходит ниже точки M .

Р е ш е н и е: а) Прямая $y = (3a-7)x + 2a-5$ проходит через точку $M(2;5)$, если координаты точки M удовлетворяют уравнению этой прямой (рис.13). Имеем $5 = (3a-7) \cdot 2 + 2a-5$. Отсюда находим $a=3$. б) Прямая $y = (3a-7)x + 2a-5$ проходит выше точки $M(2;5)$, если ордината y прямой при $x=2$ будет больше, чем 5 (рис.14). Имеем $y(2) = (3a-7) \cdot 2 + 2a-5 > 5$, $a > 3$. в) Аналогично, прямая $y = (3a-7)x + 2a-5$ проходит ниже точки $M(2;5)$, если $y(2) < 5$ (рис. 15). Имеем $y(2) = (3a-7) \cdot 2 + 2a-5 < 5$, $a < 3$.

Ответ: при $a=3$ прямая проходит через точку M ; при $a > 3$ прямая проходит выше точки M ; при $a < 3$ проходит ниже точки M .



На наш взгляд, одним из отличительных достоинств этой книги является привнесение в неё элементов неформального стиля общения с читателем, например: «...Фраза, которая должна всё время крутиться в голове, должна быть такой: «Я ищу такое число a , что для любого числа b система ... имеет решение»» [3, с.165]. Однако, отметим, что упущением является тот факт, что название гл. 5: «Задачи, сводящиеся к исследованию квадратного трёхчлена» не содержит текстовые задачи с параметром.

Пирютко О.Н. в своей книге [19] также предлагает использовать графический метод как основной метод для решения текстовых задач. Среди них мы обнаружили пять текстовых задач с параметрами, которые встречаются попеременно с «обычными» текстовыми задачами, т.е. носят характер «точечных включений». Предлагаем одну из них в качестве примера.

Задача 3 [19, задача 35, с. 76-77].

Три мотоциклиста проезжают с постоянными, но различными скоростями один и тот же участок AB дороги. Сначала пункт A проехал первый мотоциклист, а 5 с спустя в том же направлении – второй и третий. Через некоторое время первого мотоциклиста обогнал третий, а через 10 с – второй. За какое время (в секундах) первый проходит весь путь (AB), если второй проехал это расстояние за 1 мин, а третий – за 40 с?

Решение:

$$\frac{p}{z} = \frac{40}{t}; \quad \frac{x}{p} = \frac{t+10}{60}; \quad \frac{z}{x} = \frac{5+t}{15+t}.$$

Далее выполним почленное умножение этих равенств, получим

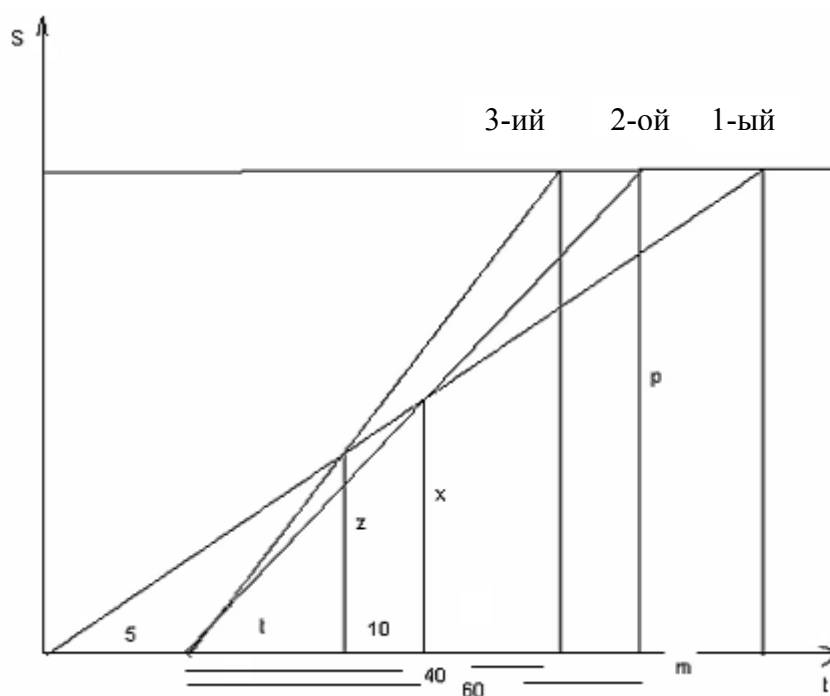
$$\frac{2}{t} \cdot \frac{t+10}{3} \cdot \frac{5+t}{15+t} = 1 \Rightarrow t = 5, \quad \frac{20}{65+m} = \frac{z}{p} = \frac{1}{4} \Rightarrow 65+m = 80$$

Ответ: 80 с.

Заметим, что графический метод применяется и при решении «обычных» текстовых задач на вычисление компонентов смеси, например:

Задача 4 [20, задача 7, с.13].

При растворении в кислоте 2,33 г смеси железа и цинка было получено 896 мл водорода. Какова масса каждого из металлов содержалась в смеси?



Однако задачи такого уровня трудности выходят за рамки программ общеобразовательных школ и предлагаются лишь участникам олимпиады по химии: «материал предназначен для учителей химии при подготовке участников Всероссийской олимпиады школьников по химии 2 и 3-го этапов» [20, с. 2]. Вообще говоря, эта задача решается шестью способами, в том числе и графическим (см. [20, с. 17]).

Восполнение некоторых теоретических знаний, касающихся использования и применения графического метода удачно сделано в книге Абатуровой В.С. [21]. В ней (см. например, с.47-50) «предлагается строгое доказательство теоретических положений о графике линейной функции, графике линейного уравнения с двумя неизвестными, графическом способе решения систем линейных уравнений и неравенств с двумя неизвестными и их приложениях» [21, с. 6]. Изучив теоретический материал данной книги, ещё раз убеждаешься в справедливости высокой оценки, данной научным редактором книги Кусраевым А.Г.: «Он [курс] ориентирует школьника на проникновение в суть явлений, на постижение глубинных причин процессов, происходящих в природе и обществе, нацеливает на поиск истины и скрытого порядка в окружающем хаосе, воспитывает объективное и строгое отношение к себе и к окружающим» (с. 5). К сожалению, тираж данного пособия всего сто экземпляров (!), а отсутствие изложения данного материала в других книгах является упущением. Вообще говоря, использование графического метода при решении текстовых задач с параметрами трудоёмко и весьма затруднительно для не вполне подготовленного учащегося. Это связано с тем, что даже при решении «обычных» текстовых задач необходимо владеть многими из разделов школьного курса геометрии, а именно: уметь использовать подобие треугольников, уметь комбинировать алгебраический и геометрический методы.

Метод третий – Инверсия. Инверсия – понятие многозначное. Оно используется при описании геометрических преобразований. В частности в книге [22, с. 517] даётся такое определение инверсии: «Пусть на плоскости дана окружность S с центром O и радиусом R . *Инверсией относительно окружности S* называют преобразование, переводящее произвольную точку A , отличную от O , в точку A^* , лежащую на луче OA на расстоянии $OA^* = R^2/OA$ от точки O ».

А.В. Хуторской в [23], говоря о креативных методах обучения, в частности, упоминает придумывание, агглютинацию (учащимся предлагается соединить несовместимые в реальности качества, физические свойства объекта), «мозговой штурм» и, наконец, инверсию. *Метод инверсии или метод обращений (по Хуторскому)* применяется как принципиально противоположная альтернатива решения. Например, прочность изделия пытаются увеличить через увеличение его массы, а эффективным оказывается обратное решение — изготовление полого изделия. Или объект исследуется с внешней стороны, а решение проблемы происходит при рассмотрении его изнутри. Например, К. Э. Циолковский «придумал пушку, но пушку летающую, с тонкими стенками и пускающую вместо ядер газы...» [23, с. 322-336].

В нашем случае, **инверсия** – это перестановка определённых фраз или слов в тексте задачи таким образом, что при составлении соответствующей математической модели задачи, обнаруживаются схожие алгебраические выражения в числителе или знаменателе дробей (см. ниже задача 5). Этот метод, в большей степени, используется при решении задач «на движение» и «на сплавы». Задача 5 (см. ниже) составлена на основании аналогичных задач, использованных в [24, с.84, №№ 515-516].

Задача 5. Дорога между посёлками A и B сначала имеет *подъём*, а потом *спуск*. Велосипедист, двигаясь на спуске со скоростью на a км/ч большей, чем на подъёме, затрачивает на путь *от A до B* ровно t ч, а на *обратный путь от B до A* – половину этого времени. Найти скорости велосипедиста на подъёме и на спуске, если расстояние между посёлками b км.

Р е ш е н и е:

В таких задачах используют следующие обозначения:

- 1) Пусть x км/ч – скорость велосипедиста на подъёме, тогда по условию $(x+a)$ км/ч – его скорость на спуске.
- 2) Пусть y км – длина подъёма, тогда по условию $(b-y)$ км – длина спуска.
- 3) Составляем систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{y}{x} + \frac{b-y}{x+a} = t \\ \frac{b-y}{x} + \frac{y}{x+a} = \frac{t}{2} \end{cases}.$$

Метод инверсии помогает учащемуся выделить в предложении опорные слова или словосочетания, значимые для понимания смысла написанного текста задачи (см. фразы, выделенные в тексте курсивом). Инверсия является одним из важнейших средств **интонационно– стилистического выделения слов и их сочетаний**. Она состоит в постановке выделяемых слов на синтаксически необычное для них место. Задача автора задачи - произвести воздействие на читателя, вызвать у него определённое зрительное восприятие.

Обращаем внимание на то, что уравнения содержат по две похожие дроби, у которых поменялись местами числители.

$$4) \begin{cases} y(x+a) + x(b-y) = t(x+a)x \\ 2(b-y)(x+a) + 2xy = tx(x+a) \end{cases} \begin{cases} yx + ay + xb - xy = tx(x+a) \\ 2xb - 2xy + 2ab - 2ay + 2xy = tx(x+a) \end{cases};$$

$$\begin{cases} ay + bx = tx(x+a) \\ 2xb + 2ab - 2ay = tx(x+a) \end{cases}; ay + bx = 2xb + 2ab - 2ay; 3ay = 2ab + xb, y = \frac{2ab + xb}{3a}$$

Подставляем y в первое уравнение системы:

$$\frac{a(2ab + xb)}{3a} + bx = tx(x+a); 2ab + xb + 3bx = 3tx^2 + 3atx; (3t)x^2 + (3at - 4b)x - 2ab = 0;$$

$$D = 9a^2t^2 - 24atb + 16b^2 + 24abt = 9a^2t^2 + 16b^2$$

$$x_{1,2} = \frac{4b - 3at \pm \sqrt{9a^2t^2 + 16b^2}}{6t}.$$

Очевидно, что $x_2 = \frac{4b - 3at - \sqrt{9a^2t^2 + 16b^2}}{6t} < 0$ (не подходит). Следовательно,

$$x = \frac{4b - 3at + \sqrt{9a^2t^2 + 16b^2}}{6t}; x + a = \frac{4b + 3at + \sqrt{9a^2t^2 + 16b^2}}{6t}.$$

Текст задачи 6 (см. ниже) составлен на основе задачи в [25, с.42]. Также используем метод инверсии.

Задача 6. От двух однородных кусков сплава с различным процентным содержанием меди, имеющих массу m и n кг соответственно, отрезано по куску одинаковой массы. Каждый из отрезанных кусков был сплавлен с остатком другого куска, после чего процентное содержание меди в обоих получившихся слитках стало одинаковым. Определить массу каждого отрезанного куска.

Решение:

1) Пусть p и q – содержание меди в первом и во втором кусках соответственно, а буквой μ обозначим массу каждого отрезанного куска.

2) в части, отрезанной от первого куска, содержится $\mu \cdot p$ кг меди, а

в части, отрезанной от второго куска, содержится $\mu \cdot q$ кг меди.

3) в остатке первого куска содержится $(m - \mu) \cdot p$ кг меди, а

в остатке второго куска содержится $(n - \mu) \cdot q$ кг меди.

4) После того, как куски снова сплывили, в первом и во втором кусках оказалось соответственно $(m - \mu) \cdot p + \mu \cdot q$ и $(n - \mu) \cdot q + \mu \cdot p$ кг меди.

5) Так как по условию после сплавления массы получившихся кусков будут вновь равны m и n кг соответственно и концентрации меди сравниваются, то

$$\frac{(m - \mu) \cdot p + \mu \cdot q}{m} = \frac{(n - \mu) \cdot q + \mu \cdot p}{n}.$$

6) Решая это уравнение, получаем: $mn \cdot (p - q) = \mu(p - q) \cdot (m + n)$.

7) В условии задачи сказано, что первоначальные концентрации p и q различны, поэтому разность $(p - q) \neq 0$, на неё можно разделить обе части уравнения. Далее находим

$$\mu = \frac{m \cdot n}{m + n}.$$

Очевидно, что вышеперечисленные задачи (№5, №6) требуют глубокого понимания сути процесса, свободного владения различными математическими методами. Именно поэтому одной из важнейших задач современной школы (центров образования) является привитие учащимся умения, позволяющего активно включаться в исследовательскую деятельность. Можно сказать, что задачи с параметрами являются прообразом важных научно-исследовательских задач. Необходимой частью решения подобных задач является исследование характера и конечного результата процесса в зависимости от значений параметров, причем часто оказывается, что решение зависит не от каждого параметра в отдельности, а от некоторого их характерного комплекса.

Метод четвёртый – аналитический. Это один из самых распространённых и широко применяемых методов, который встречается практически в каждом пособии. Чаще всего его используют наравне с графическим методом, например в пособии [1]. Оно посвящено методам решения задач повышенной сложности по алгебре и началам анализа. Основная часть задач, рассмотренных в книге, взята из вариантов вступительных экзаменов на различные факультеты вузов, предъявляющих высокие требования к знаниям по математике (МГУ имени М.В. Ломоносова, МФТИ и др.). Основной акцент в этой книге сделан на изложение малоизвестных эффективных технологий решения нестандартных задач, таких, например, как метод трех точек, метод замены множителей, метод минимакса. В частности, прямо указываются методы, использующиеся для решения задач с параметрами: «На примере задачи вступительных экзаменов в Московском институте радиотехники, электроники и автоматики (МИРЭА) мы детально разбираем шесть различных путей ее решения: решение первое — методом интервалов; решение второе — графическое в плоскости $(x; a)$; решение третье — методом нестандартных преобразований неравенств с модулем; решение четвертое — графическое в плоскости $(x; y)$; решение пятое — относительно параметра; решение шестое — по правилу минимакса» [1, с. 71]. Отметим, что описаны малоизвестные технические приемы, используемые при решении задач для обеспечения высокого темпа продвижения к ответу. Главная цель книги состоит в снятии комплекса страха у абитуриентов и учителей при попытках овладения идеями и методами решения нестандартных задач. Материал книги составляет часть многочисленных лекций автора для школьников и преподавателей в различных регионах страны. Тем не менее, автор также отмечает, что «... цель любого читателя, в первую очередь, состоит в овладении всеми методами решения. При этом под овладением мы понимаем *способность воспроизводить демонстрируемые решения* [курсив автора – Ж. Д.] с любой степенью подробности любому желающему и без неоправданных пауз в период демонстрации. Очевидно, что владение информацией является необходимым условием для изложения ее в любой аудитории» [1, с. 71]. Очевидно, что автор, осознавая в полной мере те трудности, с которыми придётся столкнуться учащимся при решении соответствующих задач, рассчитывает на аудиторию, способную использовать в процессе обучения только репродуктивный метод. В послесловии автор настаивает на том, что «Еще раз предупреждаем читателя, чтобы он ни в коей мере после ознакомления со всеми решениями не устанавливал между методами какой-либо иерархии по эффективности их применения, поскольку, как известно, эффективность выбранного пути решения зависит от постановки задачи» [1, с. 89].

Отметим и пособие [8], в котором на многочисленных примерах показано применение аналитического метода. Кроме того, мы полностью разделяем мысли автора Е.А. Поляковой, сказанные в предисловии: «Опыт показывает, что после решения определённого количества специально подобранных задач конкретного типа целесообразно предложить учащимся самим попытаться *выработать алгоритм (схему) решения задач рассмотренного типа* [курсив автора – Ж. Д.]. Наиболее сильные ученики легко справляются с этой по-настоящему исследовательской проблемой. Для всех учеников полученная схема служит руководством, оберегающим их от ошибок при решении задач» [8, с.3] Нам эти слова представляются очень важными, тем более что при объяснении темы: «Линейные уравнения и уравнения, приводимые к линейным» Полякова использовала текстовую задачу с параметром. Пусть даже она была единственной (!) во всём пособии.

Метод пятый – метод перехода от общего к частному. При решении какой-либо задачи мы получаем некое условие, которое верно при всех значениях переменной. Найдя какое-либо «удобное» значение, мы получаем различные случаи решения одной общей задачи, при этом получая из неё различные следствия (частные задачи). Иллюстрируем эти мысли на следующем примере. Текст задачи 7 был основан на [26, с. 817, № 13.013].

Задача 7. За год число мальчиков в школе увеличилось на a %, число девочек уменьшилось на b %, при этом общее число учащихся осталось прежним. Кого было больше в прошлом году в школе – мальчиков или девочек? На сколько процентов?

Р е ш е н и е:

1) Пусть год назад в школе было m мальчиков и d – девочек.
 2) Стало: $m+0,01am$ – мальчиков, $d-0,01bd$ – девочек.
 3) Далее, читая по тексту задачи: «При этом общее число учащихся осталось прежним». Следовательно, $m+0,01am+d-0,01bd=m+d$. Решая уравнение, получаем: $d = \frac{a}{b} m$.

4) Проводим исследование.

4.1) Если $\frac{a}{b} = 1$, то число девочек равно числу мальчиков ($m=d$).

4.2) Если $\frac{a}{b} > 1$, то девочек в школе было больше на $\frac{a}{b} m - m = m(\frac{a}{b} - 1)$.

4.3) Если $\frac{a}{b} < 1$, то девочек в школе стало меньше на $m - \frac{a}{b} m = m(1 - \frac{a}{b})$.

Достоинство этой задачи в том, что учащиеся комплексно повторяют и осознают «на новом витке» два важнейших понятия – правильной и неправильной обыкновенной дроби, а также действий над дробями и основного свойства дроби. В процессе дополнительной работы над задачей школьники учатся с поверхности явлений, связей проникать в их сущность, учатся такой деятельности, которая необходима при изучении любого другого школьного предмета, важна и в жизни. Она приносит большое удовлетворение ученикам и служит развитию их интереса, вкуса к процессу познания. Процесс исследования помогает учащимся не только осмыслить задачу, формирует умения обобщать, систематизировать, сравнивать, развивает наблюдательность, но и повторить и закрепить в памяти элементы теоретического знания.

Примечание. Учитель может использовать такие приёмы как решение задачи другим методом; решение задачи с изменённым условием (см. выше случаи 4.1; 4.2; 4.3), оставив условие прежним; составление обратных задач; сравнение задач и их решений; составление по этому решению другой задачи; постановка вопросов, помогающих осмыслить взаимосвязь между величинами, входящими в задачу.

В современных условиях изобилия информации и её источников общение становится главным механизмом обучения. Педагогическое общение занимает одно из приоритетных мест. При этом критерием эффективности педагогического общения является, в конце концов, качество обученности и воспитанности учащихся и их способность к образовательно-воспитательному самодвижению.

ЛИТЕРАТУРА

1. Голубев В.И. Решение сложных и нестандартных задач по математике.- М: ИЛЕКСА, 2007. - 252 с.
2. Амелькин В.В., Рабцевич В.Л., Задачи с параметрами: Справочное пособие по математике. – 2-е изд. – Мн.: ООО «Асар», 2002. – 464 с.
3. Высоцкий В. С. Задачи с параметрами при подготовке к ЕГЭ. М.: Научный мир, 2011. - 316 с.
4. Горништейн П.И., Полонский В.Б., Якир М.С. Задачи с параметрами. - 3-е изд., доп. и перераб. – М.: Илекса, Харьков: Гимназия, 2005. – 328 с.
5. Иванов С. О. Математика. Учимся решать задачи с параметром. Подготовка к ЕГЭ: задание С5 / С. О. Иванов, Е. А. Войта, А. С. Ковалевская, Л. С. Ольховая; под ред. Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова. — Ростов-на-Дону: Легион-М, 2011. — 48с. — (Готовимся к ЕГЭ).
6. Козко А.И., Чирский В.Г. Задачи с параметром и другие сложные задачи. – М.: МЦНМО, 2007.
7. Субханкулова С.А. Задачи с параметрами.— 2010.— 208 с. (Серия «Математика: элективный курс»).
8. Полякова Е.А. Уравнения и неравенства в профильном 11 классе. Методические рекомендации и поурочное планирование. – М.: Илекса, 2010. – 96 с. (Серия «Математика: элективный курс»).
9. Севрюков, П. Ф. Школа решения задач с параметрами: учебно-методическое пособие / П. Ф. Севрюков, А. Н. Смоляков. — Изд. 2-е, испр. и доп. — М.: Илекса; Народное образование; Ставрополь: Сервисшкола, 2009. - 212 с.
10. Ястребинецкий Г.А. Уравнения и неравенства, содержащие параметры. – М., Просвещение, 1972.
11. Родионов Е.М. Справочник по математике для поступающих в вузы. Решение задач с параметрами. - М.: МЦ "Аспект", 1992. - 144с.
12. Натяганов В.Л., Лужина Л.М. Методы решения задач с параметрами: Учеб. пособие. М.: Изд-во МГУ, 2003. - 368 с.
13. Ефимов Е.А., Коломиец Л.В. Задачи с параметрами. Учебное пособие для факультета довузовской подготовки СГАУ. - Самара, 2006. - 64с.
14. Прокофьев А.А. Задачи с параметрами: пособие по математике для учащихся старших классов – М.: МИЭТ, 2004. – 258 с.

15. Крамор В. С. Задачи с параметрами и методы их решения / В. С. Крамор. — М.: ООО «Издательство Оникс»: ООО «Издательство «Мир и Образование», 2007. — 416 с: ил. — (Школьный курс математики).
16. Андронов И.К. Трилогия предмета и метода математики, ч.1. М.- 2004
17. Ван дер Варден Б.Л. Пробуждающаяся наука. М. – 1959
18. Ушинский К.Д. Сочинения. – Т.5. – с.27
19. Пирютко О.Н. Графический метод решения текстовых задач: пособие для подготовки к централизованному тестированию. – Минск: Новое знание, 2010. – 128с.
20. Шишкин Е.А. Решение задач на вычисление компонентов в смеси: Методика обучения/ Е.А. Шишкин. – М.: Чистые пруды, 2008. – 32с. – (Библиотечка «Первое сентября», серия «Химия». Вып.19).
21. Абатурова В.С. Математическое моделирование школьникам 1. Линейные модели: Учебное пособие / Институт прикладной математики и информатики. – Владикавказ: Владикавказский научный центр РАН и РСО-А, 2007.- 112с.
22. Прасолов В.В. Задачи по планиметрии: Учебное пособие. – 6-е изд., стер. – М.: МЦНМО, 2007. – 640 с.
23. Хуторской А.В. Современная дидактика. СПб.: Питер, 2001
24. Шевкин А.В. Текстовые задачи по математике: 5-6. – М.: ИЛЕКСА, 2009. – 106 с.
25. Лурье М.В. Задачи на составление уравнений. Техника решения. Учебное пособие. 2-е изд., стер. – М.: Издательство УНЦ ДО, 2004. – 124с. – (Серия «В помощь поступающим в вузы»).
26. Полный сборник решений задач для поступающих в вузы. Группа А / Под ред. М.И. Сканави. – М.: ООО «Издательство «Мир и Образование»» Мн.: ООО «Харвест», 2003. – 912 с.

BASICAL SOLUTION METHODS OF EXERCISES WITH PARAMETERS AND PROBLEM SOLVING EXERCISES WITH PARAMETERS

D. Zharkov

²*Moscow Region State University
10a, Radio st., Moscow, 105005, Russia*

Abstract: this article was devoted to the basic methods of the solution of problem solving exercises with parameters. It is shown that the range of methods, which student is able to acquire, depend on his level of training and profile of the school. The author considers it necessary to emphasize that in no event it is impossible "to pull out" of certain methods and specially selected examples to show the advantages of using this or that method. It is very important that the student took the tasks of these two classes as something indivisible and mutually reinforcing. Such a combination seems to us particularly important because it loses is the Foundation that was laid by our ancestors-mathematicians.

Key words: the historical method, the simplest version of the research objectives, a GUI method, an analytical method, the inversion, method of transition from the general to the particular.