

ISSN 2072-8352



Вестник

МОСКОВСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
ОБЛАСТНОГО
УНИВЕРСИТЕТА

Серия

Физика-
Математика

КИНЕТИЧЕСКОЕ ОДНОМЕРНОЕ УРАВНЕНИЕ
С ЧАСТОТОЙ СТОЛКНОВЕНИЙ, АФФИННО
ЗАВИСЯЩЕЙ ОТ МОДУЛЯ СКОРОСТИ

РАЗВИТИЕ МОТИВАЦИОННЫХ СТИМУЛОВ
ОБУЧЕНИЯ В РАМКАХ МОДУЛЬНО-РЕЙТИНГОВОЙ
СИСТЕМЫ ОРГАНИЗАЦИИ УЧЕБНОГО ПРОЦЕССА

ПОРОЖДАЕМАЯ ГРАВИТАЦИЯ, ЭНТРОПИЯ
И КВАНТОВОЕ ПЕРЕПУТЫВАНИЕ



2014/ №1

Вестник
Московского государственного областного университета
Серия «ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА»

№ 1

Выходит 4 раза в год

2014

Научный журнал основан в 1998 г.

«Вестник МГОУ» (все его серии) включён в «Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертации на соискание учёной степени доктора и кандидата наук» Высшей аттестационной комиссии (См.: Список журналов в редакции от 25.05.2012 г. на сайте ВАК) по наукам, соответствующим названию серии.

Учредитель журнала:

Московский государственный областной университет

Журнал включён в базу данных Российского индекса научного цитирования (РИНЦ), имеет полнотекстовую сетевую версию в Интернете на платформе Научной электронной библиотеки (www.elibrary.ru), а также на сайте Московского государственного областного университета (www.vestnik-mgou.ru)

**Адрес Отдела по изданию научного журнала
«Вестник МГОУ»**

г. Москва, ул. Радио, д.10а, офис 98
тел. (499) 261-43-41; (495) 723-56-31
e-mail: vest_mgou@mail.ru
Сайт: www.vestnik-mgou.ru

При цитировании ссылка на конкретную серию «Вестника МГОУ» обязательна. Воспроизведение материалов в печатных, электронных или иных изданиях без разрешения редакции запрещено. Опубликованные в журнале материалы могут использоваться только в некоммерческих целях. Ответственность за содержание статей несут авторы. Мнение редколлегии серии может не совпадать с точкой зрения автора. Рукописи не возвращаются.

The academic journal is established in 1998

«Bulletin of the Moscow State Regional University» (all its series) is included by the Supreme Certifying Commission into the List of the leading reviewed academic journals and periodicals, in which the basic research results of Ph.D. and Doctorate's academic degree thesis should be published (See: the List of journals edited 25.05.2012 at the site of the Supreme Certifying Commission) in corresponding series.

The founder of journal:

The Moscow State Regional University

The journal is included into the database of the Russian Science Citation Index, has a full text network version on the Internet on the platform of Scientific Electronic Library (www.elibrary.ru), as well as at the site of the Moscow State Regional University (www.vestnik-mgou.ru)

The Editorial Board address:

Moscow State Regional University
10a Radio st., office 98
Moscow, Russia
Phones: (499) 261-43-41; (495) 723-56-31
e-mail: vest_mgou@mail.ru
Site: www.vestnik-mgou.ru

At citing the reference to a particular series of «Bulletin of the Moscow State Regional University» is obligatory. The reproduction of materials in printed, electronic or other editions without the Editorial Board permission, is forbidden. The materials published in the journal are for non-commercial use only. The authors bear all responsibility for the content of their papers. The opinion of the Editorial Board of the series does not necessarily coincide with that of the author. Manuscripts are not returned.

№ 1

Issued 4 times a year

2014

Series «PHYSICS AND MATHEMATICS»

Bulletin of the
Moscow State Regional University

Редакционно-издательский совет «Вестника МГОУ»
Publishing council «Bulletin of the MSRU»

Хроменков П.Н. – к.филол.н., проф., ректор МГОУ (председатель совета)
Никитин О.В. – д.филол.н., проф., проректор по научной работе МГОУ (зам. председателя совета)
Абрамов А.В. – к.пол.н., доц., нач. отдела по изданию журнала «Вестник МГОУ»
Асмолов А.Г. – академик РАО, д.психол.н., проф. МГУ им. М.В. Ломоносова
Белозеров В.Е. – д.ф.-м.н., проф. Днепропетровского национального университета (Украина)
Боголюбов Л.Н. – академик РАО, д.пед.н., проф.
Клычников В.М. – к.ю.н., к.и.н., проф., проректор по учебной работе и международному сотрудничеству МГОУ
Затулин К.Ф. – директор Института диаспоры и интеграции (Института стран СНГ)
Коницев А.С. – д.б.н., проф. МГОУ
Лекант П.А. – д.филол.н., проф. МГОУ
Марченко М.Н. – д.ю.н., проф. МГУ им. М.В. Ломоносова
Нелюбин Л.Л. – д.филол.н., проф. МГОУ
Ницевич В.Ф. – д.пол.н., проф., директор Орловского филиала Российской академии народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ
Пасечник В.В. – д.пед.н., проф. МГОУ
Поляков Ю.М. – канд. филол. н., гл. ред. «Литературной газеты»
Пусько В.С. – д.ф.н., проф. МГТУ им. Н.Э. Баумана
Ху Гумин – д.фил.н., проф. Института иностранных языков Уханьского университета (Китай)

P.N. Khromenkov – Ph. D. in Philology, Professor, Principal of the MSRU (*Chairman of the Council*)
O.V. Nikitin – Doctor of Philology, Professor, Vice-Principal for scientific work of the MSRU (*Deputy Chairman of the Council*)
A.V. Abramov – Ph.D. in Political Sciences, Associate Professor, the Head of the editorial department of the Bulletin of the Moscow State Regional University
A.G. Asmolov – Member of Russian Academy of Education, Doctor of Psychology, Professor of Moscow State University
B.E. Belozеров – Doctor of Physics and Mathematics, Professor of Dnepropetrovsk National University (Ukraine)
L.N. Bogolubov – Member of Russian Academy of Education, Doctor of Pedagogics, Professor
V.M. Klychnikov – Ph.D. in Law, Ph. D. in History, Professor, Vice-Principal for academic work and international cooperation of the MSRU
K.F. Zatulín – the Head of Institute for Diaspora and Integration (Institute of the CIS Countries)
A.S. Konichev – Doctor of Biology, Professor of the MSRU
P.A. Lekant – Doctor of Philology, Professor of the MSRU
M.N. Marchenko – Doctor of Law, Professor of Moscow State University
L.L. Nelyubin – Doctor of Philology, Professor of the MSRU
V. F. Nitseovich – Doctor of Politics, Professor, the Head of the Oryol Branch Russian Academy of National Economy and Public Administration
V.V. Pasechnik – Doctor of Pedagogics., Professor of the MSRU
Yu. M. Polyakov – Ph.D. in Philology, editor-in-chief of "Literaturnaya Gazeta"
V.S. Pus'ko – Doctor of Philosophy, Professor of the Bauman Moscow State Technical University
Hu Gumin – Doctor of Philology, Professor, Institute of Foreign Languages of Uxhan University (China)

Редакционная коллегия серии «Физика-Математика»
Series editorial board «Physics and Mathematics»

Ответственный редактор:
Бугримов А.Л. – д.т.н., проф.
Зам. ответственного редактора:
Латышев А.В. – д.ф.-м.н., проф.
Ответственный секретарь:
Богданов Д.Л. – д.ф.-м.н., проф.
Члены редакционной коллегии:
Беляев В.В. – д.т.н., проф.; **Дадиванян А.К.** – д.ф.-м.н., проф.;
Бугаев А.С. – д.ф.-м.н., проф. (Московский физико-технический институт); **Баланкин А.С.** – д.ф.-м.н., проф. (Национальный политехнический институт, Мексика); **Чернышенко С.В.** – к.ф.-м.н., проф. (Университет Кобленц-Ландау, Германия); **Чигринов В.Г.** – д.ф.-м.н., проф. (Гонконгский университет науки и технологий, Китай)

Editor-in-chief:
A.L. Bugrimov, Doctor of Technical Sciences, Professor
Deputy editor-in-chief:
A. Latyshev, Doctor of Physics and Mathematics, Professor
Executive secretary:
D.L. Bogdanov, Doctor of Physics and Mathematics, Professor
Members of Editorial Board:
V.V. Belyaev, Doctor of Technical Sciences, Professor;
A.K. Dadivanyan, Doctor of Physics and Mathematics, Professor;
A.S. Bugayev, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor (Moscow Institute of Physics and Technology); **A.S. Balankin**, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor (National Polytechnic Institute, Mexico); **S.V. Chernyshenko**, Ph.D. in Physics and Mathematics, Professor (University of Koblenz-Landau, Germany); **V. Chigrinov**, Doctor of Physics and Mathematics, Professor (Gonkong University of Science and Technology, China)

ISSN 2072-8387

Вестник Московского государственного областного университета. Серия «Физика-Математика». 2014. № 1. – М.: Изд-во МГОУ. – 64 с.

Журнал «Вестник МГОУ» серия «Физика-Математика» зарегистрирован в Федеральной службе по надзору за соблюдением законодательства в сфере массовых коммуникаций и охране культурного наследия. Регистрационное свидетельство **ПИ № ФС77-26136**.

Индекс серии «Физика-Математика» по каталогу агентства «Роспечать» **36766**

© МГОУ, 2014
© Издательство МГОУ, 2014

ISSN 2072-8387

Bulletin of the Moscow State Regional University. Series «Physics and Mathematics». 2014. № 1. – M.: MSRU Publishing house. – 64 p.

The series «Physics and Mathematics» of the Bulletin of the Moscow State Regional University is registered in Federal service on supervision of legislation observance in sphere of mass communications and cultural heritage protection. The registration certificate **ПИ № ФС77-26136**.

Index series «Physics and Mathematics» under "Rospechat" agency catalog **36766**

© MSRU, 2014
© MSRU Publishing house, 2014

МАТЕМАТИКА

УДК 517.9/98+533.72

КИНЕТИЧЕСКОЕ ОДНОМЕРНОЕ УРАВНЕНИЕ С ЧАСТОТОЙ СТОЛКНОВЕНИЙ, АФФИННО ЗАВИСЯЩЕЙ ОТ МОДУЛЯ СКОРОСТИ

А.Л. Бугримов, А.В. Латышев, А.А. Юшканов

*Московский государственный областной университет (МГОУ),
105005, Москва, ул. Радио, 10 а*

Аннотация. Построено одномерное кинетическое уравнение с интегралом столкновений БГК (Бхатнагар, Гросс и Крук). Частота столкновений молекул считается аффинно зависящей от модуля молекулярной скорости. При построении используются законы сохранения числа частиц, импульса и энергии. Разделение переменных приводит к характеристическому уравнению. Вводится система дисперсионных уравнений. Ее определитель называется дисперсионной функцией. Исследуется непрерывный и дискретный спектры характеристического уравнения. Множество нулей дисперсионного уравнения составляет дискретный спектр характеристического уравнения. Найдены собственные решения кинетического уравнения, отвечающие дискретному спектру. Решение характеристического уравнения в пространстве обобщенных функций приводит к собственным функциям, отвечающим непрерывному спектру. Результаты проведенного анализа сформулированы в виде теоремы о структуре общего решения введенного кинетического уравнения.

Ключевые слова: кинетическое уравнение, частота столкновений, законы сохранения, разделение переменных, характеристическое уравнение, дисперсионное уравнение, дискретный и непрерывный спектры характеристического уравнения, собственные функции дискретного и непрерывного спектра, общее решение кинетического уравнения.

Введение

К настоящему времени получены аналитические решения целого ряда граничных задач (скачки температуры и плотности, различные скольжения) кинетической теории газа с использованием БГК-уравнения Больцмана с постоянной частотой столкновений [1-5].

Приближение постоянства частоты столкновений далеко не всегда можно рассматривать как адекватное задаче. В связи с этим делаются попытки рассматривать более общие, чем БГК, модели. В частности, задача об изотермическом скольжении рассмотрена для довольно широкого класса БГК-моделей [1]. Рассмотрен также случай с частотой столкновений, пропорциональной скорости молекул (т.е. с постоянной длиной свободного пробега). В этом приближении рассмотрены задачи о скачках темпера-

туры и концентрации [6], а так же более общие, чем БГК, модели (см., например, [7–9]).

В то же время остается нерешенная задача о скачке температуры и концентрации с использованием БГК-уравнения с произвольной зависимостью частоты от скорости, несмотря на очевидную важность решения задачи в подобной обстановке.

В настоящей работе делается попытка продвинуться в этом направлении. Здесь рассматривается случай линейной зависимости частоты столкновений от скорости молекул в модели одномерного газа. Модель одномерного газа широко использовалась в ряде работ [10–12], ибо давала хорошее согласие с экспериментом.

1. Постановка задачи и основные уравнения

Начнем с общей постановки. Пусть газ занимает полупространство $x > 0$. Задана температура поверхности T_s и концентрация насыщенного пара поверхности n_s .

Вдали от поверхности газ движется с некоторой скоростью u и имеет градиент температуры

$$g_T = \left(\frac{d \ln T}{dx} \right)_{x \rightarrow +\infty}.$$

Необходимо определить скачки температуры и концентрации в зависимости от скорости и градиента температуры.

В задаче о слабом испарении (конденсации) требуется определить скачки температуры и концентрации в зависимости от заданной скорости испарения (конденсации), считая градиент температуры равным нулю. Заданная скорость испарения (конденсации) считается много меньшей тепловой скорости молекул:

$$u \ll v_T,$$

где v_T – есть тепловая скорость молекул, m – масса молекулы,

$$v_T = \frac{1}{\sqrt{\beta}}, \quad \beta = \frac{m}{2kT_s},$$

k – постоянная Больцмана.

В задаче о температурном скачке требуется определить скачки температуры и концентрации в зависимости от заданного градиента температуры, считая, что скорость испарения (конденсации) равна нулю. Будем считать, что градиент температуры достаточно мал. Малость понимается в том смысле, что произведение средней длины свободного пробега молекул на градиент температуры много меньше единицы:

$$l g_T \ll 1, \quad l = v_T \tau,$$

где τ – среднее время свободного пробега газовых молекул.

Скорость испарения (конденсации) в этой задаче равна нулю.

Объединим обе задачи – о слабом испарении (конденсации) и скачке температуры – в одну. Будем предполагать малость градиента температуры (т.е. малость относительного перепада температуры на длине свободного пробега) и малость скорости газа по сравнению со скоростью звука. В этом случае задача допускает линеаризацию и функцию распределения можно искать в виде:

$$f(x, v) = f_0(v)(1 + h(x, v)),$$

где

$$f_0(v) = n_0 \left(\frac{m}{2\pi k T_s} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{mv^2}{2kT_s} \right]$$

- есть абсолютный максвеллиан.

Возьмем линейное кинетическое уравнение, записанное относительно функции $h(x, v)$ с интегралом столкновений релаксационного типа, называемым также [1] интегралом столкновений БГК (Бхатнагар, Гросс и Крук), и имеющее следующую общую форму:

$$\begin{aligned} v \frac{\partial}{\partial x} h(x, v) = \\ = v(v) \left[l_1[h] + 2 \frac{v}{v_T} l_2[h] + \left(\left(\frac{v}{v_T} \right)^2 - \beta(\alpha) \right) l_3[h] - h(x, v) \right] \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь $l_m[h]$ ($m = 0, 1, 2$) – некоторые постоянные, подлежащие определению из законов сохранения числа частиц (числовой плотности), импульса и энергии, $v(v)$ – частота столкновений молекул, аффинно зависящая от модуля скорости молекул,

$$v(v) = v_0 (1 + \alpha \sqrt{\pi \beta} |v|),$$

α – некоторый неотрицательный параметр.

Правая часть уравнения (1.1) есть линеаризованный интеграл столкновений, разложенный по инвариантом столкновений

$$\begin{aligned} Y_0(v) &= 1, \\ Y_1(v) &= 2\sqrt{\beta}v, \\ Y_2(v) &= \beta v^2 - \beta(\alpha). \end{aligned}$$

Постоянная $\beta(\alpha)$ находится, как уже указывалось, из условия ортогональности инвариантов $Y_1(v)$ и $Y_2(v)$:

$$\beta = \beta(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\alpha + 1}{\alpha + 1}.$$

Ортогональность здесь понимается как равенство нулю скалярного произведения с весом $\rho(v) = v(v) e^{-\beta v^2}$:

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(v) e^{-\beta v^2} f(v) g(v) dv.$$

Перейдем в уравнении (1.1) к безразмерной скорости $C = \sqrt{\beta} v$ и безразмерной координате $x' = x/l$, l – средняя длина свободного пробега газовых молекул. Переменную x' далее снова будем обозначать через x .

В безразмерных переменных уравнение (1.1) записывается в виде:

$$c \frac{\partial h(x, c)}{\partial x} = (1 + \sqrt{\pi} a |c|) [l_0[h] + 2cl_1[h] + (c^2 - \beta(a))l_2[h] - h(x, c)]. \quad (1.2)$$

3. Законы сохранения и преобразование кинетического уравнения

Модельный интеграл столкновений должен удовлетворять законам сохранения числа частиц (числовой плотности), импульса и энергии:

$$(Y_m, M[h]) = v_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(c) M[h] Y_m(c) dc = 0, \quad m = 0, 1, 2, \quad (2.1)$$

$\rho(c)M[h]$ – модельный интеграл столкновений,

$$M[h] = l_0[h] + 2cl_1[h] + (c^2 - \beta(a))l_2[h] - h(x, c).$$

Из первого уравнения из (2.1) при $m=0$, т.е. закона сохранения числа частиц получаем, что

$$l_0[h] = \frac{(1, h)}{(1, 1)}.$$

Здесь

$$(1, 1) = v_0 \sqrt{\pi} (a+1),$$

$$(1, h) = v_0 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-c^2} (1 + \sqrt{\pi} a |c|) h(x, c) dc.$$

Из второго уравнения из (2.1) при $m=1$, т.е. закона сохранения импульса получаем, что

$$2l_1[h] = \frac{(c, h)}{(c, 1)}.$$

Здесь

$$(c, c) = 0.5 v_0 \sqrt{\pi} (2a+1),$$

$$(c, h) = v_0 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-c^2} (1 + \sqrt{\pi} a |c|) c h(x, c) dc.$$

Из третьего уравнения из (2.1) при $m=2$, т.е. закона сохранения энергии находим, что

$$l_2[h] = \frac{(c^2 - \beta(a), h)}{(c^2 - \beta(a), c^2 - \beta(a))}.$$

Здесь

$$(c^2 - \beta(a), c^2 - \beta(a)) = 0.25 v_0 \sqrt{\pi} \frac{4a^2 + 7a + 2}{a + 1},$$

$$(c^2 - \beta(a), h) = v_0 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-c^2} (1 + \sqrt{\pi} a |c|) (c^2 - \beta(a)) h(x, c) dc.$$

Вернемся к уравнению (1.2) и с помощью полученных выше равенств преобразуем это уравнение к виду:

$$c \frac{\partial}{\partial x} h(x, c) + (1 + \sqrt{\pi} a |c|) h(x, c) =$$

$$= (1 + \sqrt{\pi} a |c|) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-c'^2} (1 + \sqrt{\pi} a |c'|) q(c, c', a) h(x, c') dc'. \quad (2.2)$$

Здесь

$$q(c, c', a) = r_0(a) + r_1(a) cc' + r_2(a)(c^2 - \beta(a))(c'^2 - \beta(a)),$$

$$r_0 = r_0(a) = \frac{1}{a + 1}, \quad r_1 = r_1(a) = \frac{2}{2a + 1},$$

$$r_2 = r_2(a) = \frac{4(a + 1)}{4a^2 + 7a + 2}, \quad \beta = \beta(a) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2a + 1}{a + 1}.$$

Напомним, что в (2.2) введена безразмерная скорость $c = \sqrt{\left(\frac{m}{2k_s T_s}\right)} v$ и введена безразмерная координата $x' = \sqrt{\frac{m}{2k_s T_s}} \frac{x}{a_0}$, штрих у которой опущен.

Параметр a при данном подходе произволен. При $a \rightarrow 0$ получаем из (2.2) БГК-уравнение с постоянной частотой столкновений:

$$c \frac{\partial}{\partial x} h(x, c) + h(x, c) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-c'^2} q(c, c', a) h(x, c') dc'.$$

с ядром

$$q(c, c', 0) = 1 + 2cc' + (c^2 - 0.5)(c'^2 - 0.5).$$

При $a \rightarrow \infty$ приходим к модели с постоянной длиной свободного пробега:

$$\frac{c}{|c|} \frac{\partial}{\partial x} h(x, c) + h(x, c) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-c'^2} |c'| q(c, c') h(x, c') dc'.$$

с ядром

$$q(c, c') = 1 + cc' + (c^2 - 1)(c'^2 - 1).$$

Безразмерная координата в этом уравнении равна размерной, деленной на длину свободного пробега $l = \frac{v_1}{v_1}$, $v_1 = av_0\sqrt{\pi}$.

В уравнении (2.2) осуществим замену $\sqrt{\pi}a \rightarrow a$ и запишем полученное уравнение в следующем виде:

$$\frac{v}{1 + |v|} \frac{\partial}{\partial x} h(x, v) + h(x, v) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v'^2} q(v, v') (1 + a|v'|) h(x, v') dv'. \quad (2.3)$$

В этом уравнении ядро $q(v, v')$ имеет тот же вид, что и ранее, но теперь r_0, r_1, r_2 и β выражаются равенствами:

$$r_0(a) = \frac{1}{a + \sqrt{\pi}}, \quad r_1(a) = \frac{2}{2a + \sqrt{\pi}},$$

$$r_2(a) = \frac{4(a + \sqrt{\pi})}{4a^2 + 7\sqrt{\pi}a + 2\pi}, \quad \beta(a) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2a + \sqrt{\pi}}{a + \sqrt{\pi}};$$

Сделаем в уравнении (2.3) замену переменных $v = v(\mu)$ и $v' = v(\mu')$, где

$$v(\mu) = \frac{\mu}{1 - a|\mu|}, \quad |\mu| < a, \quad a = \frac{1}{\alpha}. \quad (2.4)$$

Обозначим функцию $h(x, v(\mu))$ снова через $h(x, \mu)$. После замены (2.4) уравнение (2.3) переходит в уравнение

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} h(x, \mu) + h(x, \mu) = \int_{-\alpha}^{\alpha} q(\mu, \mu') h(x, \mu') \rho(\mu') d\mu'. \quad (2.5)$$

Здесь

$$q(\mu, \mu') = r_0 + r_1 v(\mu)v(\mu') + r_2 (v^2(\mu) - \beta(a))(v^2(\mu') - \beta(a)),$$

$$\rho(\mu') d\mu' = e^{-v^2(\mu')} \frac{v(\mu)}{\mu} dv(\mu) = \exp \left[- \left(\frac{\mu}{1 - a|\mu|} \right)^2 \right] \frac{d\mu}{(1 - a|\mu|)^3},$$

$$dv(\mu) = \frac{d\mu}{(1 - a|\mu|)^2}.$$

Заметим, что на концах отрезка интегрирования $\rho(\pm\alpha) = 0$, и, кроме того,

$$\lim_{\mu \rightarrow \pm\alpha} \rho(\mu) v^n(\mu) = 0$$

для любого натурального n .

3. Собственные функции и собственные значения

Разделение переменных в уравнении (2.5), взятое в виде:

$$h_{\eta}(x, \mu) = e^{-\frac{x}{\eta}} \Phi(\eta, \mu) \quad (3.1)$$

сводит уравнение (1.9) к характеристическому уравнению

$$(\eta - \mu)\Phi(\eta, \mu) = \eta \tilde{Q}(\eta, \mu), \eta, \mu \in (-\alpha, \alpha) \quad (3.2)$$

где

$$\tilde{Q}(\eta, \mu) = r_0 n_0(\eta) + r_1 v(\mu) n_1(\eta) + r_2 (v^2(\mu) - \beta)(n_2(\eta) - \beta n_0(\eta)). \quad (3.3')$$

Здесь

$$n_{\alpha}(\eta) = \int_{-\alpha}^{\alpha} \Phi(\eta, \mu) v^{\alpha}(\mu) \rho(\mu) d\mu, \alpha = 0, 1, 2. \quad (3.3)$$

- нулевой, первый и второй моменты собственной функции с весом $\rho(\mu)$.

Собственные функции непрерывного спектра, заполняющего сплошным образом интервал $(-\alpha, \alpha)$, находим [13] в пространстве обобщенных функций:

$$\Phi(\eta, \mu) = \eta \tilde{Q}(\eta, \mu) P \frac{1}{\eta - \mu} + g(\eta) \delta(\eta - \mu), \eta \in (-\alpha, \alpha). \quad (3.4)$$

Здесь $g(\eta)$ – непрерывная неизвестная функция, определяемая из уравнений (4), Px^{-1} – распределение, означающее главное значение интеграла при интегрировании x^{-1} , $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака.

Подставим собственные функции (3.4) в нормировочные соотношения (3.3).

Получим следующую систему дисперсионных уравнений:

$$n_{\alpha}(\eta) + \eta \int_{-\alpha}^{\alpha} \tilde{Q}(\eta, \mu) v^{\alpha}(\mu) \rho(\mu) \frac{d\mu}{\mu - \eta} = g(\eta) \rho(\eta) v^{\alpha}(\eta), \alpha = 0, 1, 2. \quad (3.5)$$

Обозначим:

$$t_n(\eta) = \eta \int_{-\alpha}^{\alpha} v^n(\mu) \rho(\mu) \frac{d\mu}{\mu - \eta}, n = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Теперь с учетом (3.3) систему дисперсионных уравнений (3.5) можно преобразовать к виду:

$$\begin{aligned} n_{\alpha}(\eta) + r_0 n_0(\eta) t_{\alpha}(\eta) + r_1 v(\mu) n_1(\eta) t_{\alpha+1}(\eta) + \\ + r_2 (t_{\alpha+2}(\eta) - \beta t_{\alpha}(\eta))(n_2(\eta) - \beta n_0(\eta)) = \\ = g(\eta) \rho(\eta) v^{\alpha}(\eta), \end{aligned} \quad (3.6)$$

где $\alpha = 0, 1, 2$.

Запишем уравнения (3.6) в векторном виде:

$$\Lambda(\eta)n(\eta) = g(\eta)\rho(\eta) \begin{bmatrix} 1 \\ v(\eta) \\ v^2(\eta) \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

Здесь $\Lambda(\eta)$ – дисперсионная матрица с элементами $\lambda_{ij}(\eta)$ ($i, j = 1, 2, 3$), $n(\eta)$ – нормировочный вектор с элементами $n_\alpha(\eta)$, $\alpha = 0, 1, 2$.

Ниже понадобятся элементы дисперсионной матрицы в явном виде:

$$\begin{aligned} \lambda_{11}(\eta) &= 1 + (r_0 + \beta^2 r_2)t_0(\eta) - \beta r_2 t_2(\eta), \\ \lambda_{12}(\eta) &= r_1 t_1(\eta), \\ \lambda_{13}(\eta) &= r_2 (-\beta t_0(\eta) + t_2(\eta)), \\ \lambda_{21}(\eta) &= (r_0 + \beta^2 r_2)t_1(\eta) - \beta r_2 t_3(\eta), \\ \lambda_{22}(\eta) &= 1 + r_1 t_3(\eta), \\ \lambda_{23}(\eta) &= r_2 (-\beta t_1(\eta) + t_3(\eta)), \\ \lambda_{31}(\eta) &= (r_0 + \beta^2 r_2)t_2(\eta) - \beta r_2 t_4(\eta), \\ \lambda_{32}(\eta) &= r_1 t_3(\eta), \\ \lambda_{33}(\eta) &= 1 + r_2 (-\beta t_2(\eta) + t_4(\eta)). \end{aligned}$$

Введем дисперсионную функцию $\lambda(z)$:

$$\begin{aligned} \lambda(z) = \det \Lambda(z) &= \lambda_{11}(\eta)\lambda_{22}(\eta)\lambda_{33}(\eta) + r_1 t_3 \lambda_{13}(\eta)\lambda_{21}(\eta) + \\ &+ r_1 t_1 \lambda_{31}(\eta)\lambda_{23}(\eta) - \lambda_{13}(\eta)\lambda_{22}(\eta)\lambda_{31}(\eta) - \\ &- r_2 t_3 \lambda_{11}(\eta)\lambda_{23}(\eta) - r_1 t_1 \lambda_{21}(\eta)\lambda_{33}(\eta). \end{aligned}$$

Из векторного уравнения (3.7) находим:

$$n_\alpha(\eta) = g(\eta)\rho(\eta) \frac{\Lambda_\alpha(\eta)}{\lambda(\eta)}, \quad \alpha = 0, 1, 2. \quad (3.8)$$

где $\Lambda_\alpha(\eta)$ – определитель, полученный из определителя системы (3.6) заменой в нем α -го столбца столбцом из свободных членов этой системы.

Выпишем эти определители в явном виде:

$$\begin{aligned} \Lambda_0(\eta) &= \Lambda_{11} - v(\eta)\Lambda_{21} + v^2(\eta)\Lambda_{31} = \lambda_{22}\lambda_{33} - r_1 t_3 \lambda_{23} - \\ &- v r_1 (t_1 \lambda_{33} - t_2 \lambda_{13}) + v^2 (r_1 t_1 \lambda_{23} - \lambda_{22} \lambda_{13}), \\ \Lambda_1(\eta) &= -\Lambda_{12} + v(\eta)\Lambda_{22} - v^2(\eta)\Lambda_{32} = -\lambda_{21}\lambda_{33} + \lambda_{31}\lambda_{33} + \\ &+ v(\lambda_{11}\lambda_{23} - \lambda_{21}\lambda_{13}) - v^2(\lambda_{11}\lambda_{23} - \lambda_{21}\lambda_{13}), \\ \Lambda_2(\eta) &= \Lambda_{31} - v(\eta)\Lambda_{32} + v^2(\eta)\Lambda_{33} = r_1 t_3 \lambda_{21} - \lambda_{31}\lambda_{22} - \\ &- v r_1 (t_3 \lambda_{11} - t_1 \lambda_{31}) + v^2(\lambda_{11}\lambda_{22} - r_1 t_1 \lambda_{21}). \end{aligned}$$

Здесь $\Lambda_{ij}(\eta)$ – минор элемента $\lambda_{ij}(\eta)$.

С помощью соотношений (3.8) преобразуем равенство (3.3') к виду:

$$\tilde{Q}(\eta, \mu) = Q(\eta, \mu) \frac{g(\eta) \rho(\eta)}{\lambda(\eta)}, \quad (3.9)$$

где

$$Q(\eta, \mu) = r_0 \Lambda_0(\eta) + r_1 v(\mu) \Lambda_1(\eta) + r_2 (v^2(\mu) - \beta) (\Lambda_2(\eta) - \beta \Lambda_0(\eta)). \quad (3.10)$$

С помощью равенства (3.10) преобразуем выражение (3.4) для собственных функций:

$$\Phi(\eta, \mu) = \tilde{\Phi}(\eta, \mu) g(\eta), \quad (3.11)$$

где

$$\tilde{\Phi}(\eta, \mu) = \eta \frac{Q(\eta, \mu)}{\lambda(\eta)} \rho(\eta) P \frac{1}{\eta - \mu} + \delta(\eta - \mu). \quad (3.12)$$

Из равенства (3.11) видно, что собственные функции определены с точностью до произвольной мультипликативной функции $g(\eta)$. В силу однородности уравнения (2.3) эту функцию можно считать тождественно равной единице ($g(\eta) = 1$) и далее в качестве собственной функции непрерывного спектра можно рассматривать функции, определяемые равенством (3.12).

По определению, дискретным спектром характеристического уравнения является множество нулей дисперсионной функции.

Разлагая дисперсионную функцию в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки, убеждаемся, что она в этой точке имеет нуль 4-го порядка. Применяя принцип аргумента [14] можно показать, что других нулей (кроме $z = \infty$) дисперсионная функция не имеет. Точке $z = \infty$ как 4-кратной точке дисперсионного спектра отвечают следующие четыре дискретные решения уравнения (2.3):

$$\begin{aligned} h_0(x, \mu) &= 1, \\ h_1(x, \mu) &= v(\mu), \\ h_2(x, \mu) &= v^2(\mu) - \frac{1}{2}, \\ h_3(x, \mu) &= (x - \mu) \left(v^2(\mu) - \frac{3}{2} \right). \end{aligned}$$

Ниже понадобятся формулы для разности и суммы граничных значений дисперсионных функций сверху и снизу в интервале $(-\alpha, \alpha)$:

$$\lambda^+(\mu) - \lambda^-(\mu) = 2\pi i \mu \rho(\mu) Q(\mu, \mu) \quad (3.13)$$

и

$$\lambda^+(\mu) + \lambda^-(\mu) = 2\lambda(\mu), \quad \mu \in (-\alpha, \alpha), \quad (3.14)$$

где $Q(\mu, \mu)$ — определяется выражением (3.10).

Для доказательства равенства (3.14) достаточно провести прямолинейные, но весьма громоздкие вычисления.

4. Разложение решения граничной задачи по собственным функциям характеристического уравнения

В этом п. подведем итоги проведенного анализа.

Фактически нами доказана теорема о структуре общего решения уравнения (2.4).

Теорема 1. Общее решение уравнения (2.3) есть сумма линейной комбинации дискретных (частных) решений этого уравнения с произвольными коэффициентами и интеграла по непрерывному спектру от собственных функций, отвечающих непрерывному спектру, с неизвестным коэффициентом:

$$h(x, \mu) = h_{as}(x, \mu) + \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{-\frac{x}{\eta}} \tilde{\Phi}(\eta, \mu) A(\eta) \rho(\eta) d\eta. \quad (4.1)$$

Здесь $h_{as}(x, \mu)$ – асимптотическая функция, называемая в кинетической теории распределением Чепмена–Энскога [1], представляющая собой линейную комбинацию частных (дискретных) решений с произвольными коэффициентами:

$$h_{as}(x, \mu) = A_0 h_0(x, \mu) + A_1 h_1(x, \mu) + A_2 h_2(x, \mu) + A_3 h_3(x, \mu).$$

Здесь неизвестными коэффициентами, отвечающими дискретному спектру, являются величины A_0 , A_1 , A_2 и A_3 , а неизвестным коэффициентом непрерывного спектра является функция $A(\eta)$.

Рассмотрим отдельно случай, когда частота столкновений постоянна, т.е. случай, когда $\alpha = 0$. В этом случае собственные функции непрерывного спектра и дисперсионная функция имеют соответственно следующий вид:

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(\eta, \mu) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \eta \left(\frac{3}{2} - \mu^2 \right) P \frac{1}{\mu - \eta} + e^{\eta^2} \lambda(\eta) \delta(\eta - \mu), \\ \lambda(z) &= -\frac{1}{2} - \left(z^2 - \frac{3}{2} \right) \lambda_c(z), \end{aligned}$$

где

$$\lambda_c(z) = 1 - 2ze^{-z^2} \int_0^z e^{u^2} du \pm \sqrt{\pi} i z e^{-z^2}, \operatorname{Im} z \lessgtr 0.$$

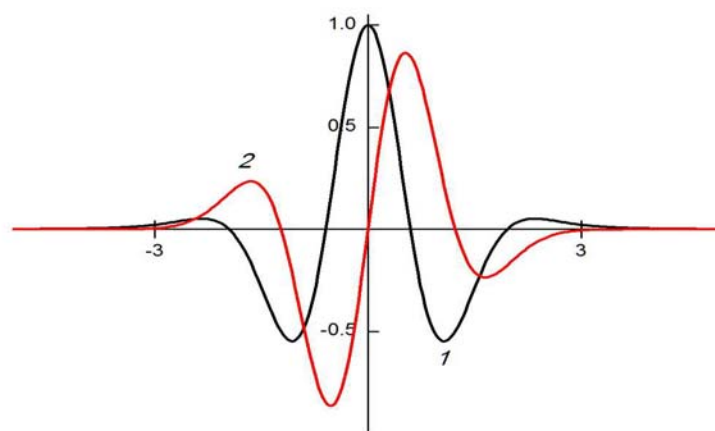


Рис.1. Действительная (кривая 1) и мнимая (кривая 2) части граничных значений дисперсионной функции на действительной оси (сверху). Случай постоянной частоты столкновений.

Изучим другой (и последний) предельный случай, когда $\alpha \rightarrow \infty$. В этом случае уравнение (1.2) переходит в уравнение:

$$\operatorname{sgn} v \frac{d}{dx} h(x, v) + h(x, v) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v'^2} q(v, v') |v'| h(x, v') dv' \quad (4.2)$$

с ядром

$$q(v, v') = 1 + vv' + (v^2 - 1)(v'^2 - 1),$$

причем под x здесь понимается $\sqrt{\pi}ax$, где x – старая координата.

Будем искать решение уравнения (4.2) в виде:

$$h(x, v) = a_1(x) + \tilde{a}_1(x) \operatorname{sgn} v + a_2(x)v + \tilde{a}_2(x)v \operatorname{sgn} v + \\ + a_3(x)(v^2 - 1) + \tilde{a}_3(x)(v^2 - 1) \operatorname{sgn} v.$$

Уравнение (19) распадается в первом случае на шесть линейных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} a'_1(x) + \tilde{a}_1(x) &= 0, \\ \tilde{a}'_1(x) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \tilde{a}_2(x), \\ a'_2(x) + a_2(x) &= 0, \\ \tilde{a}'_2(x) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \tilde{a}_1(x) + \sqrt{\pi} a_3(x), \\ a'_3(x) + a_3(x) &= 0, \\ \tilde{a}'_3(x) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \tilde{a}_2(x). \end{aligned}$$

Решая эту систему уравнений, находим неизвестные функции a_i и $\tilde{a}_i$:

$$\begin{aligned} a_i(x) &= -\frac{1}{\sqrt{3}\alpha_0} A_0 e^{-\alpha_0 x} - \tilde{A}_i x + A_i, \quad i = 1, 3, \\ \tilde{a}_i(x) &= -\frac{1}{\sqrt{3}\alpha_0} A_0 e^{-\alpha_0 x} + A_i, \quad i = 1, 3, \\ a_2(x) &= -\frac{1}{\alpha_0} A_0 e^{-\alpha_0 x} + A_2, \\ \tilde{a}_2(x) &= A_0 e^{-\alpha_0 x}. \end{aligned}$$

Таким образом, искомое решение уравнения (4.2) построено:

$$\begin{aligned} h(x, v) &= A_0 e^{-\alpha_0 x} \cdot \\ &\cdot \left[-\frac{1}{\sqrt{3}\alpha_0} - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{sgn} v + \frac{1}{\alpha_0} v + v \operatorname{sgn} v - \frac{1}{\sqrt{3}\alpha_0} (v^2 - 1) - \frac{1}{\sqrt{3}} (v^2 - 1) \right] - \\ &- \tilde{A}_1 x + A_1 + \tilde{A}_1 \operatorname{sgn} v + A_2 v + (-\tilde{A}_3 x + A_3)(v^2 - 1) + \tilde{A}_3 (v^2 - 1) \operatorname{sgn} v. \end{aligned}$$

Здесь все константы A_m ($m = 0, 1, 2, 3$) и A_m с тильдой являются произвольными постоянными, а $\alpha_0 = \frac{\sqrt{3\pi}}{2}$.

4. Заключение

В настоящей работе построено одномерное кинетическое уравнение с интегралом столкновений БГК (Бхатнагар, Гросс и Крук) релаксационного типа. Частота столкновений молекул считается аффинно зависящей от модуля молекулярной скорости.

При построении уравнения используются законы сохранения числа частиц (числовой плотности), импульса и энергии. Построенное уравнение преобразуется к стандартному виду уравнения типа уравнения переноса с полиномиальным ядром.

Разделение переменных приводит к характеристическому уравнению. С помощью нормировочных соотношений вводится система дисперсионных уравнений. Ее определитель называется дисперсионной функцией.

Исследуется непрерывный и дискретный спектры характеристического уравнения. Множество нулей дисперсионного уравнения составляет дискретный спектр характеристического уравнения. Найдены собственные решения исходного кинетического уравнения, отвечающие дискретному спектру. Это так называемые дискретные (или частные) решения.

Решение характеристического уравнения в пространстве обобщенных функций приводит к собственным функциям, отвечающим непрерывному спектру.

Результаты проведенного анализа сформулированы в виде теоремы о структуре общего решения введенного кинетического уравнения. Исследованы предельные случаи введенного кинетического уравнения, когда оно переходит, во-первых, в уравнение с постоянной частотой столкновений молекул, и, во-вторых, в уравнение с частотой столкновений, пропорциональной модулю молекулярной скорости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черчиньяни, К. Теория и приложения уравнения Больцмана. М.: 1978. 495 с.
2. Латышев, А.В. Аналитические методы решения модельных кинетических уравнений и их приложения//Автореф. дис. на соискание уч. ст. доктора физ.-матем. Наук. М.: ИПМатем. им. М.В. Келдыша РАН. 1993 г. 36 с.
3. Латышев, А.В., Юшканов А.А. Аналитическое решение задачи о сильном испарении (конденсации)//Известия РАН. Сер. МЖГ. 1993. №6. 143-155 с.
4. Латышев, А.В., Юшканов А.А. Теория и точные решения задач скольжения бинарного газа вдоль плоской поверхности//Ж. вычислит. матем. и матем. физики. 1991. Т31. №8. 1201-1210 с.
5. Латышев, А.В., Юшканов А.А. Аналитическое решение задачи Крамерса для плотного газа//Поверхность. 1994. №6. 45-51 с.
6. Cercignani, C. The method of elementary solutions for kinetic models with velocity dependent collision frequency//Ann. Phys. 1966. V.40. 469-481 P.
7. Латышев, А.В., Юшканов А.А. Кинетические уравнения типа Вильямса
8. и их точные решения. М.: МГОУ, 2004, 271 с.

9. Латышев, А.В., Юшканов А.А. Аналитические методы в кинетической
10. теории. М.: МГОУ, 2008, 280 с.
11. Латышев, А.В., Юшканов А.А. Граничные задачи для квантовых газов.
12. М.: МГОУ, 2012, 266 с.
13. Латышев, А.В., Юшканов А.А. Аналитическое решение одномерной задачи об умеренно сильном испарении (и конденсации) в полупространстве//Прикл. мех. и техн. физ. 1993. №1. 102-109 с.
14. Siewert, C.E., Thomas Y.R., jr. Strong evaporation into a half-space//J. Appl. Math. Phys. 1981. V.32. №4. 421-433 P.
15. Cercignani, C., Frezzoti A. Linearized analysis of a one-speed B.G.K. model in the case of strong condensation//Bulgarian Academy of sci. theor. appl. mech. Sofia. 1988. V.XIX. №3. 19-23 P.
16. Владимиров, В.С. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука. 1978. 512 с.
17. Гахов, Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука. 640 с.

**THE KINETIC ONE-DIMENSIONAL EQUATION WITH
COLLISIONAL FREQUENCY AFFINE DEPENDING
ON THE MODULE OF MOLECULAR VELOCITY**

A. Bugrimov, A. Latyshev, A. Yushkanov

*Moscow State Regional University
10a, Radio st., Moscow, 105005, Russia*

Abstract. The one-dimensional kinetic equation with collisional integral type BGK (Bhatnagar, Gross and Krook) is constructed. Frequency of collisions of molecules affine depending on the module of molecular velocity is considered. Laws of preservation of number of particles, momentum and energy at construction equation are used. Separation of variables leads to the characteristic equation. The system of the dispersion equations is entered. Its determinant is called as dispersion function. It is investigated continuous and discrete spectra of the characteristic equation. The set of zero of the dispersion equation makes the discrete spectrum of the characteristic equation. The eigen solutions (of the kinetic equation) correspond to the discrete spectrum are found. The solution of the characteristic equation in space of the generalized functions leads to eigen functions correspond to the continuous spectrum. Results of the spent analysis are formulated in the form of the theorem about a structure of the common decision of the entered kinetic equation.

Keywords: one-dimensional kinetic equation, affine dependence of collision frequency, laws preservation, separation of variables, characteristic equation, dispersion equation, spectra, eigen functions.

УДК 530

ВОЗМОЖНОСТИ ВАРИАЦИИ РАЗМЕРНОСТИ ФРАКТАЛЬНЫХ МНОЖЕСТВ

А.Л. Бугримов, Д.Д. Бычкова, В.С. Кузнецов

*Московский государственный областной университет
105005, Москва, ул. Радио 10 а*

Аннотация. Продемонстрирована возможность вариации размерности фрактальных множеств. Построены фракталы, размерность Хаусдорфа–Безиковича которых превышает топологическую более чем на единицу.

Ключевые слова: фрактал, фрактальная размерность, канторово множество, канторов ковер, триадная кривая фон Коха, скрепка фон Коха.

Классическими примерами фрактальных множеств являются Канторово множество и триадная кривая фон Коха. В настоящей работе рассматривается построение аналогов Канторова множества и кривой фон Коха с возможной вариацией размерности Хаусдорфа – Безиковича в пределах от топологической до размерности несущего пространства.

Строгого определения фракталов пока не существует. Наиболее распространенными являются следующие два определения, оба предложенные Мандельбротом: «Фракталом называется множество, размерность Хаусдорфа - Безиковича которого строго больше его топологической размерности», и «Фракталом называется структура, состоящая из частей, которые в каком-то смысле подобны целому» [1, 2].

Отсутствие точного определения фракталов в некоторых случаях не позволяет провести границу между объектами, которые являются фракталами и объектами, которые таковыми не являются. Не ясно, какое место в геометрии природы занимают фракталы и те множества, размерность которых представляется целым числом. Наконец, особенностью существующих на сегодняшний день примеров фрактальных множеств является то, что их фрактальная размерность отличается от топологической не более чем на единицу.

При оценке фрактальности свойств реальных физических объектов [3] также может возникнуть неопределенность относительно фрактальности свойств реального физического объекта. Фрактальная размерность в ходе экспериментальных исследований определяется всегда с некоторой погрешностью. Поэтому в результате измерений вполне может быть получена величина, близкая к целому числу и «перекрывающая» это число вследствие учета погрешности. При этом, если в случае математических фрактальных объектов топологическая размерность известна (или может быть определена в ходе доказательства), то о топологической размерности физического объекта судить трудно. С большей ясностью в этом случае можно судить о несущем пространстве.

Представляет интерес возможности вариации размерности фрактальных множеств, возможности конструирования множеств, размерность которых более, чем на единицу превосходила бы топологическую размерность.

Указанные вопросы удобно рассмотреть на примере двух математических фракталов: канторова множества и триадной кривой фон Коха. На рис. 1 и 2 показаны исходные элементы и предфракталы трех поколений.

Фрактальная размерность Хаусдорфа - Безиковича самоподобных множеств совпадает с размерностью подобия и определяется соотношением [2, 4]:

$$D = -\frac{\ln N}{\ln r}, \quad (1)$$

где N - число, показывающее сколько экземпляров предыдущего поколения взято для построения следующего; r - коэффициент масштабного преобразования.

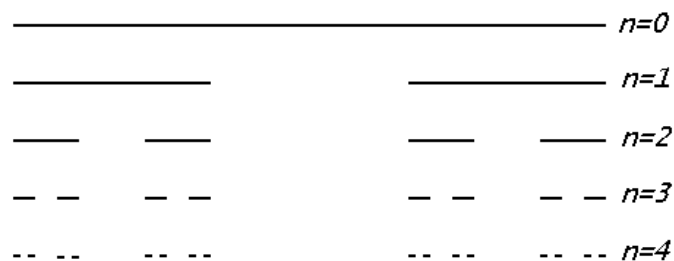


Рис.1. Канторово множество (предфракталы нулевого и первых четырех поколений)

При построении канторова множества на каждом шаге из образующего элемента удаляется средняя треть. Предфрактал каждого из поколений представляет собой совокупность двух ($N=2$) уменьшенных (в соответствии с коэффициентом масштабного преобразования $r=1/3$) копий предфракталов предыдущих поколений, поэтому фрактальная размерность канторова множества равна: $D=\ln 2/\ln 3 \approx 0,6309$ [1, 2, 4].

В случае кривой фон Коха каждое последующее поколение состоит из четырех уменьшенных копий предфракталов предыдущего поколения, поэтому $D=\ln 4/\ln 3 \approx 1,2628$ [1, 2, 4].

Модернизируем способ построения канторова множества. А именно, на каждом шаге будем удалять среднюю часть, размер которой отличен от одной третьей и составляет $r \in (0; 0,5)$. В таком случае размерность $D \in (0, 1)$. На рис.3 показаны первые четыре поколения предфракталов для $r=0,45$ (естественно, $r < 0,5$).

Аналогичные изменения можно внести в способ построения кривой фон Коха. На рис.4 а) и б) показаны поколения №№1, 2 и 3 предфракталов для $r=0,26$ и для $r=0,45$. при $r \in [0,25; 0,5)$ размерность множества $D \in [1, 2)$. По видимому, от случая $r=0,25$, при котором $D=1$ следует отказаться, чтобы выполнить требование превышения топологической размерности. Случай $r=0,5$ недопустим в силу совпадения точек A и B на рис.4, б).

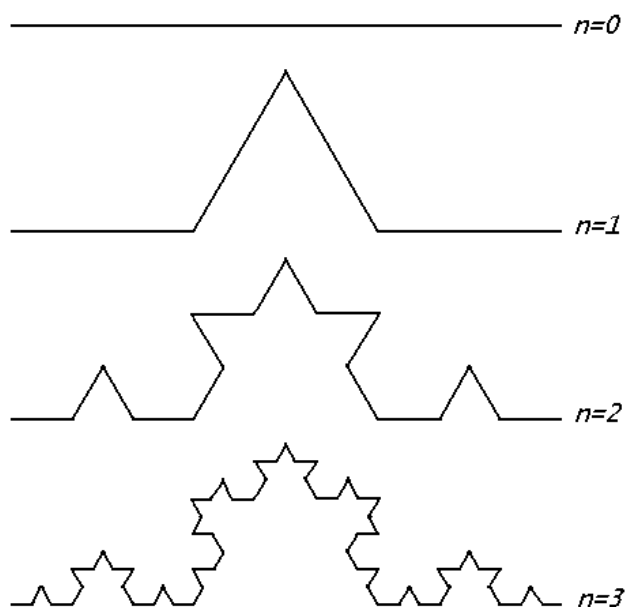


Рис.2. Триадная кривая фон Коха

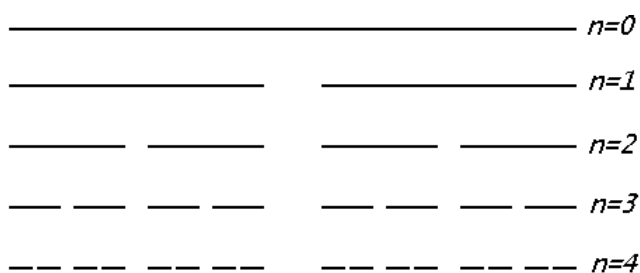


Рис.3. Предфракталы канторова множества для $r = 0,45$

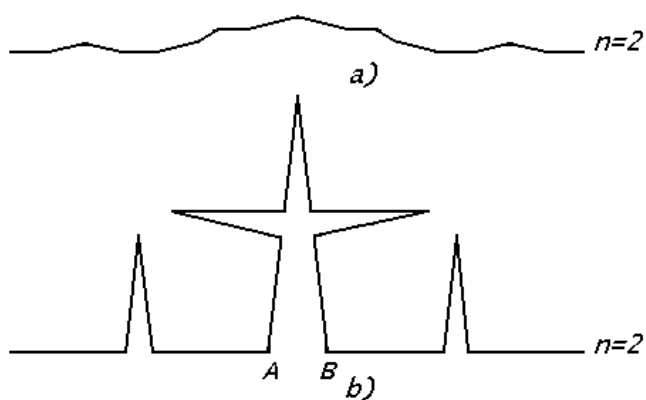


Рис.4. Предфракталы вторых поколений триадной кривой фон Коха
для $r = 0,26$ (a) и $r = 0,45$ (b)

Ограничения сверху размерностей фрактальных множеств обусловлены тем, что в качестве несущих пространств выбраны пространство единичной размерности (в случае канторова множества) и двумерное пространство (в случае кривой фон Коха).

Для получения фрактальных множеств, размерность которых превышает приведенные выше предельные значения, исходные элементы канторова множества и кривой фон Коха следует поместить в двумерное и трехмерное пространства соответственно.

На рис. 5 показаны исходный элемент и предфракталы некоторых поколений. Для построения предфрактала первого поколения взято два элемента. Длина этих элементов составляет величину r относительно исходного элемента.

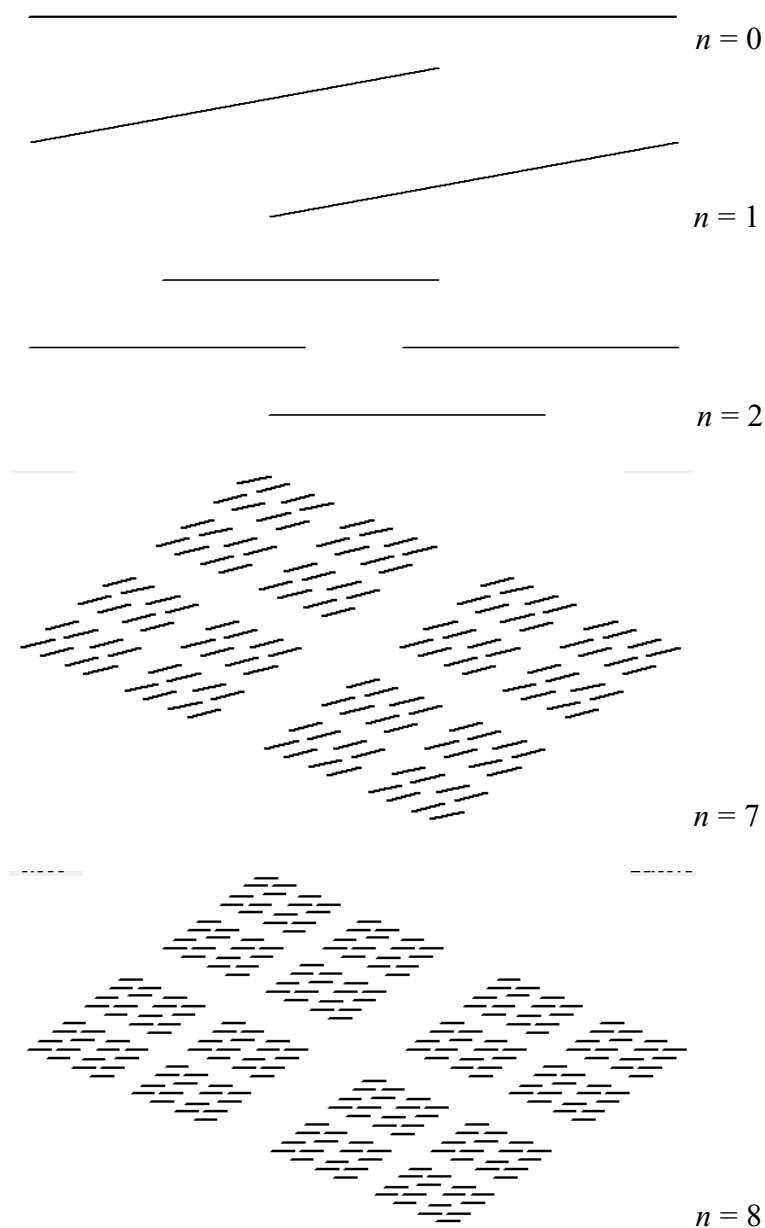


Рис.5. Канторов ковер

На рис.5 представлен случай для $r=0,65$. Элементы предфракталов нечетных поколений разворачиваются против часовой стрелки, а четных поколений - по часовой стрелке. Величина угла поворота в данном случае не имеет значения. Внешний вид предфрактала восьмого поколения позволяет назвать получаемое таким способом фрактальное множество канторовым ковром.

Очевидно, что $r>0$. Ограничение сверху можно оценить на основании требования отсутствия совмещения концов элементов в предфрактале второго поколения. Для предфрактала второго поколения длина элемента составляет r^2 . Наложение концов элементов будет невозможным при $r^2<0,5$. Таким образом $r \in (0, \sqrt{0,5})$, и $D \in (0, 2)$.

Преобразуем предфрактал первого поколения кривой фон Коха так, как это показано на рис.6, и поместим его в трехмерное пространство. Ломаная кривая напоминает определенным образом изогнутую скрепку. Исходный элемент AB имеет единичную длину, на рисунке он не выделен. Каждый из элементов имеет длину r . На рис.6, а) представлен случай: $AB = 2HD = 2CD = 4BD = 1$, $BC=r = \sqrt{5}/4$. Фрактальная размерность получаемого в этом случае множества равна:

$$D = -\frac{\ln 4}{\ln \sqrt{5}/4} \approx 2,3837.$$

(2)

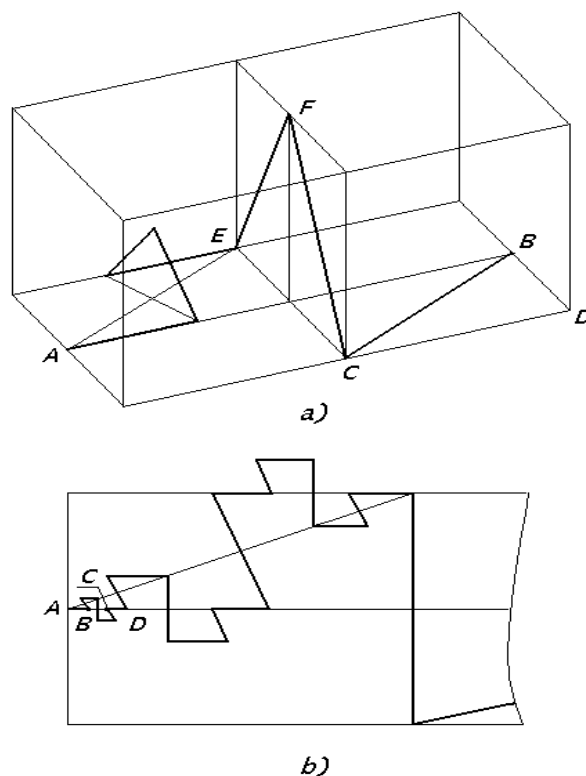


Рис.6. Скрепка фон Коха (а), схема определения предельной размерности (b)

Предельная размерность может быть получена из условия совмещения отдельных элементов предфрактала. На рис.6, *b*) элементы AB и CD - суть элементы предфрактала шестого поколения. Если исходный элемент принять за единицу, то $AD=1/8$, $AB=r^6$. Поэтому чтобы не было наложения точек B и C , должно выполняться неравенство $r^6 < 1/16$, из которого следует, что $r < \sqrt[3]{0,25} \approx 0,62996$. Очевидно, что при

$$r \rightarrow \sqrt[3]{0,25}, \quad D \rightarrow -\frac{\ln 4}{\ln \sqrt[3]{1/4}} = 3.$$

(3)

и для $r \in [0,25, \sqrt[3]{0,25})$ размерность Хаусдорфа - Безиковича полученной фрактальной кривой $D \in [1,3)$.

Таким образом размерности Хаусдорфа - Безиковича построенных фрактальных множеств более чем на единицу превышает их топологические размерности. Как следует из построений, размерности фрактальных множеств могут выражаться целыми числами, но большими, чем соответствующие топологические размерности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mandelbrot B.B. The Fractal Geometry of Nature. New York, 1983.
2. Федер Е. Фракталы. М.: Мир, 1991.
3. Баланкин А.С., Бугримов А.Л., Козлов Г.В., Микитаев А.К., Сандитов Д.С. // Дан. 1992. Т.325. №3. С.463-466.
4. Шредер М. Фракталы, хаос, степенные законы. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.

POSSIBLE VARIATIONS OF THE DIMENSION OF FRACTAL SETS

A. Bugrimov, D. Bychkova, V. Kuznetsov

*Moscow State Regional University
10a, Radio st., Moscow, 105005, Russia*

Abstract. The possibility of variations of the dimension of fractal sets. Constructed fractals, of Hausdorff-Besicovitch dimension topological exceeds by more than one.

Keywords: fractal, fractal dimension, Cantor set, Cantor carpet, triadic von Koch curve, paperclip von Koch.

ФИЗИКА

УДК 539.1.01

EMERGENT GRAVITY, ENTROPY, AND QUANTUM ENTANGLEMENT

D.V. Fursaev

*Dubna International University for Nature, Society and Man
Universitetskaya str. 19, 141980, Dubna, Moscow Region, Russia
e-mail: fursaev@theor.jinr.ru*

Abstract. A brief review of a set of ideas which relate gravity, entropy and quantum entanglement is given. The key idea is that gravity is an emergent or induced, in Sakharov's sense, phenomenon and it is holographic, as has been suggested by t'Hooft. The low-energy physics is described by effective equations of some microscopic degrees of freedom. It is important that the entanglement entropy of these microscopic constituents across a surface is given by the Bekenstein-Hawking entropy formula. It means that all microscopic details are encoded in macroscopic low-energy constants. It is very similar to what happens in thermodynamics so that gravity, by following the Verlinde suggestion, may be interpreted as an entropic gravity. An explicit realization of this idea appears in a holographic description of entanglement entropy in conformal field theories.

Keywords: entropy of quantum entanglement, induced gravity, quantum gravity, quantum theories which allow a dual description in terms of gravity

1. Introduction

A fundamental problem of the modern cosmology is related to the origin and nature of the dark energy. The current observational data indicate that the dark energy may be in a form of cosmological constant and, thus, the resolution of the problem requires understanding properties of the physical vacuum. Due to quantum effects the vacuum can be viewed as a sort of media which possesses energy density, pressure, polarization and etc. In a conventional QFT the energy of vacuum fluctuations is not defined because of ultraviolet divergences. The problem of the cosmological constant is that for different natural cutoff parameters (such as electroweak, SUSY, or Planck scales) the vacuum energy is many orders of magnitude higher than the cosmological value. This fact may indicate that our present knowledge of fundamental physics is too incomplete.

The aim of this paper is to describe and analyse some ideas which enlarge our vision of quantum gravity. All these ideas are connected in a sense that low-energy gravity is considered as an emergent or induced gravity and a generalized notion of entropy takes place.

2. Induced gravity

The fact that gravity is an emergent phenomenon dates back to ideas of the last century suggested by A.D. Sakharov [1] who noticed that the leading part of the one-loop effective

action on a curved manifold behaves as an Einstein action

$$\ln \det(-\nabla^2 + m^2) \cong \frac{1}{16\pi G_{\text{eff}}} \int \sqrt{g} h^4 x (2\Lambda_{\text{eff}} + R + a_{\text{eff}} R^2 + \dots) \quad (1)$$

with 'induced' or 'effective' Newton coupling G_{eff} and a cosmological constant Λ_{eff}

$$G_{\text{eff}} \sim M^2, \quad \frac{G_{\text{eff}}}{\Lambda_{\text{eff}}} \sim M^2, \quad (2)$$

where M is a UV cutoff. The induced action (1) also includes higher curvature corrections. Constants G_{eff} , Λ_{eff} are analogous the Youngs modulus in the solid state physics, while gravitons are analogous to phonons. In the Sakharov theory the underlying degrees of freedom are just different species of relativistic fields.

In the string theory the same idea is realized in a more sophisticated scheme where low-energy gravity equations appear from tree-level amplitudes of closed strings. The similarity with Sakharov's approach is that these diagrams can be reinterpreted as one-loop diagrams of open strings.

3. Black hole thermodynamics

The emergent nature of gravity is supported by properties of black holes. Dynamical laws of black holes can be interpreted as laws of thermodynamic systems. The mass of a black hole is identified with the energy of the system, the entropy of a black hole is given by the Bekenstein-Hawking entropy

$$S^{BH} = \frac{A(B)}{4G}, \quad (3)$$

where $A(B)$ is the area of the black hole horizon B . (Here and in what follows we assume that the Planck constant and the velocity of light are equal to unity). If we consider, for example, a Schwarzschild black hole, it is just an empty space. The problem is what are the degrees of freedom which allow one to explain its entropy.

One of the challenging tasks in quantum gravity is to provide a statistical-mechanical explanation of the Bekenstein-Hawking entropy. A possible source of S^{BH} are quantum correlations of underlying microscopical degrees of freedom across the black hole horizon. In the next section we explain why the induced gravity may be a useful guiding idea [2, 3, 4] to understand horizon correlations.

There is an important support of the idea that gravity is an emergent phenomenon. In 1995 Jacobson [5] made a remarkable observation that the Einstein equations can be derived by applying the first law of black hole thermodynamics to local Rindler horizons. This means that general laws of thermodynamics are applicable to quantum gravity degrees of freedom. Like phonons, gravitons are not fundamental degrees of freedom. They should not be canonically quantized.

Another intriguing concept has been suggested by E. Verlinde [6] who argued that gradients of the entropy of fundamental quantum gravity degrees of freedom might determine the gradients of the gravitational field. We return to Verlinde's idea latter.

4. Entanglement entropy

To understand horizon correlations we introduce the entropy of quantum entanglement.

Quantum entanglement is a property of quantum systems which is known from early days of quantum mechanics. Now this property is well understood, established and it is used in different research areas. An example of entangled states is the following system of two particles, each with its spins 'up' ($|\uparrow\rangle_i$) or 'down' ($|\downarrow\rangle_i$):

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2 + |\uparrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2). \quad (4)$$

If the state of the 1st particle cannot be measured, state of the second particle will be the mixed one, described by the density matrix

$$\rho_2 = \text{Tr}_1 |\psi\rangle\langle\psi|, \quad (5)$$

The trace here is taken over the states of the 1st particle. The degree of entanglement of two particles is quantified by an entropy

$$S_2 = -\text{Tr}_2 \rho_2 \ln \rho_2. \quad (6)$$

This quantity is also called the entanglement entropy. A simple computation shows that $S_2 = 2 \ln 2$.

One can generalize this definition to the case of a system of many particles divided onto two or more subsystems. One can show that the entanglement entropy is always zero if the subsystems are disentangled. In manybody systems, including quantum field theories, entanglement entropy $S(B)$ can be introduced for subsystems which are spatially separated by a surface B . Explicit computations show that this entanglement entropy is divergent and it behaves in the leading order as

$$S(B) = \frac{A(B)}{a^{D-2}}, \quad (7)$$

where $A(B)$ is the area of B , a is a cutoff parameter with the dimensionality of a length, D is the number of space-time dimensions. If B is the black hole horizon and a is of the order of the Planck length the entropy (7) has the same order of magnitude as the Bekenstein-Hawking entropy.

Thus, the entropy of a black hole may be the entropy of entanglement between quantum excitations which live near the horizon, inside and outside [7-9]. These degrees of freedom are related to the physics at the Planck scale, they are not conventional low-energy fields.

To make this explanation complete one has to assume that low-energy gravity action is also induced by quantum effects of the Planck degrees of freedom so that, like in Sakharov's approach [2], the Newton coupling $G \sim a^2$ in $D = 4$. Explicit models of black hole entropy in induced gravity are discussed in [3, 4].

5. The world as a hologram

The idea that gravity might be a holographic theory first appeared in papers by t'Hooft [10] and Susskind [11]. Roughly speaking, it asserts that in the presence of quantum gravity effects all the information about physics inside a region can be described in terms of a theory (one-dimension lower) which is set on a boundary of the region.

Original arguments presented by t'Hooft are very simple. Suppose we want to understand a possible number of microstates located in a region of a volume

$V = L^3$. In classical theory this number is determined by the entropy of quanta. One can make the entropy larger, for example, by pumping an energy E and increasing the temperature T . Thus, one may expect that entropy scales as the volume V , $S \sim T^3 L^3$. However, one can increase the energy only until the value $E_{\max} = L/G$ when the gravitational radius EG remains smaller than the size L of the system. The limiting value for the entropy is $S_{\max} \sim (L/\sqrt{G})^{3/2}$. If $E > E_{\max}$ the system collapses to form a black hole. The entropy of the system will be dominated by the entropy of a black hole $S = S^{BH} \sim L^2/G$. By taking into account quantum gravity degrees of freedom t'Hooft concludes that the entropy scales as the boundary of the region. The theory on the boundary whose degrees of freedom contribute to the entropy is called dual with respect to the theory in the physical volume (in the bulk).

The ideas about the holographic nature of quantum gravity are realized explicitly in what is known now as AdS/CFT correspondence. The conjecture made Maldacena and other authors [12-14] says that for gravity theories with a negative cosmological constant the dual theories are certain types conformal field theories (CFT's) one dimension lower than the theory in the bulk. (We do not provide here a precise formulation of the Maldacena conjecture. It appeals to the string theory.) Abbreviation 'AdS' means 'anti-de Sitter', since solutions in theories with a negative cosmological constant are asymptotically anti-de Sitter geometries.

6. Holographic entanglement entropy

For realistic condensed matter or field systems the entanglement entropy associated to spatial separation of the system is a non-trivial function of microscopical parameters. Its calculation is technically quite involved. Some progress in computations has been achieved either for one and two-dimensional spin chains or in case of non-interacting QFT's. Analytical or numerical computations of the entropy in the regime of strong couplings are not available.

In 2006 Ryu and Takayanagi [15, 16] by using AdS/CFT correspondence made a remarkable conjecture regarding entanglement entropy in conformal field theories. If a d -dimensional CFT admits a dual description in terms of an AdS gravity, the entanglement entropy associated with a partition of the CFT space by an entangling surface B is given by the Bekenstein-Hawking formula

$$S_d(B) = \frac{A(\tilde{B})}{4G_{d+1}}. \quad (8)$$

Here G_{d+1} is the higher dimensional Newton coupling and $A(\tilde{B})$ is the area of a co-dimension 2 hypersurface $\tilde{B}$ located in the bulk. $\tilde{B}$ is defined as minimal (least area) hypersurface with the condition that its asymptotic boundary is conformally equivalent to the physical entangling surface B .

All information about microscopical content of a given CFT is encoded in coupling constants of the bulk AdS gravity. Specification of a quantum state of the CFT is determined by the choice of the bulk solution. Ryu-Takayanagi formula (8) passes a number of non-trivial tests. It is important that (8) allows one to study entanglement entropy in strongly correlated systems.

7. Entanglement entropy in quantum gravity

Let us return now to the question about entanglement of quantum gravity degrees of freedom. In case of black holes, when the entangling surface is the black hole horizon, the entanglement entropy seems to be measured by the Bekenstein-Hawking formula. What one can say about arbitrary entangling surfaces? By taking Ryu-Takayanagi formula (8) as a guide a number of arguments have been presented by the author of this paper [17] that the entanglement entropy of fundamental degrees of freedom lying in a constant time slice and spatially separated by a surface B is

$$S(B) = \frac{A(B)}{4G}. \quad (8)$$

Here G is the Newton coupling and A is the area of B . Equation (9) holds in the semiclassical approximation if the low-energy limit of the fundamental theory is the Einstein gravity.

As we pointed out earlier, for realistic condensed matter systems the entanglement entropy is a non-trivial function of microscopical parameters. The remarkable implication of (9) is that the entanglement entropy in quantum gravity may not depend on a microscopical content of the theory, it is determined solely in terms of geometrical characteristics of the surface and low-energy gravity couplings.

Another feature established in [17] is related to the shape of the separating surface. Because $S(B)$ includes contributions of all fundamental degrees of freedom quantum fluctuations of the geometry should be taken into account in a consistent way. For static space-times this requires that B is minimal surface, i.e. a surface with a least area.

Quite recently Maldacena and Lewkowycz [18] came to entropy formula (9) in an alternative way. They called such entropy generalized gravitational entropy.

Let us also note that results of [17] have an interesting relation to Verlinde's entropic gravity [6]. The hypothesis of [6] is based on a number of assumptions for so called 'holographic screens' which store an information about fundamental microstates ('bits') in such a way that a related entropy is proportional to the area of the screen. A variational formula for the entropy of the screen under the action of a point-like particle is postulated and plays a key role in the arguments. If the holographic screens are identified with minimal surfaces the variational formulas just follow from the properties of minimal surfaces, see [17].

REFERENCES

1. *Sakharov, A.D.* Sov. Phys. Dokl. 12 (1968) 1040.
2. *Jacobson, T.* Black hole entropy and induced gravity, e-Print: gr-qc/9404039.
3. *Fursaev, D.V.* Phys. Part. Nucl. 36 (2005) 81, e-Print: gr-qc/0404038.

4. *Frolov, V.P. and Fursaev D.V.* Class. Quant. Grav. 15 (1998) 2041, e-Print: hep-th/9802010.
5. *Jacobson, T.* Phys. Rev. Lett. 75 (1995) 1260, e-Print: gr-qc/9504004.
6. *Verlinde, E.* On the Origin of Gravity and the Laws of Newton, e-Print: arXiv:1001.0785 [hep-th].
7. *Srednicki, M.* Phys. Rev. Lett. 71 (1993) 666, e-Print: hep-th/9303048.
8. *Bombelli, L., Koul R.K., Lee J. and Sorkin R.D.* Phys. Rev. D34 (1986) 373.
9. *Frolov V. and Novikov I.* Phys. Rev. D48 (1993) 4545.
10. *G t Hooft.* Dimensional Reduction in Quantum Gravity, arXiv: gr-qc/9310026.
11. *Susskind, L.* J. Math. Phys. 36 (1995) 6377, arXiv:hep-th/9409089.
12. *Maldacena, J.* Adv. Theor. Math. Phys. 2 (1998) 231.
13. *Witten, E.* Adv. Theor. Math. Phys. 2 (1998) 253.
14. *Gubser, S., Klebanov I., Polyakov A.* Phys. Lett. B428 (1998) 105.
15. *Ryu, S. and Takayanagi T.* Phys. Rev. Lett. 96 (2006) 181602, e-Print: hep-th/0603001.
16. *Ryu, S. and Takayanagi T.* JHEP 0608 (2006) 045, e-Print: hep-th/0605073.
17. *Fursaev, D.V.* Phys. Rev. D77 (2008) 124002, e-Print: arXiv:0711.1221 [hep-th].
18. *Lewkowycz, A. and Maldacena J.* Generalized gravitational entropy, e-Print: arXiv:1304.4926 [hep-th].

ПОРОЖДАЕМАЯ ГРАВИТАЦИЯ, ЭНТРОПИЯ И КВАНТОВОЕ ПЕРЕПУТЫВАНИЕ

Д.В. Фурсаев

*Международный университет природы, общества и человека "Дубна"
РФ, Московская область, 141980, г. Дубна, ул. Университетская, 19
e-mail: fursaev@theor.jinr.ru*

Аннотация. Дается краткий обзор научных идей, которые связывают такие понятия как гравитация, энтропия и квантовое перепутывание. Ключевая идея состоит в том, что гравитация может быть "порождаемой" или "индуцированной", в духе идей А.Д. Сахарова, а также гравитационные явления могут обладать голографическими свойствами, как впервые было отмечено Г. 'т Хоофтом. Низкоэнергетическая физика описывается эффективными уравнениями некоторых микроскопических степеней свободы. Важно, что энтропия перепутывания этих микроскопических конstituентов на некоторой поверхности дается формулой Бекенштейна-Хокинга. Это означает, что все микроскопические детали теории оказываются "зашифрованными" в конечном наборе макроскопических параметров. Это настолько напоминает то, что происходит в обычной термодинамике, что сама гравитация, следуя Г. Верлинде, возможно, имеет энтропийную основу. Подтверждением этих гипотез и их конкретной реализацией выступает голографическое представление энтропии перепутывания в определенном классе конформных теорий.

Ключевые слова: Энтропия квантового перепутывания, индуцированная гравитация, квантовая гравитация, квантовые теории с дуальным описанием в гравитации.

УДК 532.517;532.526.75

ОБ УСЛОВИЯХ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ НА ГРАНИЦЕ ЖИДКОСТЬ - ПРОНИЦАЕМАЯ ПОВЕРХНОСТЬ С УЧЕТОМ ИНЕРЦИОННЫХ ЭФФЕКТОВ ЖИДКОСТИ

Ю.Н. Гордеев, Е.Б. Сандаков

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ» (Москва)
115409, Москва, Каширское ш., 31

Аннотация. Рассматривается вопрос об условиях на границе вязкая жидкость – проницаемая поверхность с учетом инерционных эффектов жидкости в пористой среде. Этот вопрос и рассмотрен в предлагаемой статье на примере задачи о вращении проницаемого диска на поверхности несжимаемой вязкой жидкости. Указанная задача является обобщением классической задачи Кармана о вращении непроницаемого диска. В предположении, что течение в пористом диске описывается уравнениями Бринкмана, получено автомодельное решение задачи.

Ключевые слова: течение вязкой жидкости, пористая среда, уравнения Бринкмана, условие Биверса-Джозефа.

Для непроницаемого диска задача рассматривалась в работе[4]. Переход к течениям вязкой жидкости по относительно высокой проницаемой поверхности жидкости требует пересмотра граничных условий. На это обстоятельство обращено внимание в [6]. На основе экспериментальных данных влияние относительно высокой проницаемости пластины на течение жидкости вне ее предложено учитывать не условием прилипания, а полуэмпирическим условием проскальзывания (условие Биверса-Джозефа-Сафмана)[2,7]

$$(1.1) \quad \frac{\partial v_{\tau f}}{\partial n} = \frac{B}{\sqrt{k}} (v_{\tau f} - v_{tb}) + O(k^{\frac{1}{2}})$$

где B - постоянная пористой среды, k - коэффициент проницаемости, $\vec{n}$ - нормаль к проницаемой поверхности, $v_{\tau f}$ - тангенциальная компонента скорости жидкости на границе жидкость – твердое тело, v_{tb} - скорость твердого тела или торцевая скорость.

Условие Биверса-Джозефа-Сафмана неоднократно проверялось экспериментально и теоретически обосновывалось. (см. обзор [5]).

1. Постановка задачи. А. Рассмотрим осесимметричную задачу о стационарном течении несжимаемой вязкой жидкости в полупространстве, на поверхности которого с частотой ω вращается диск (слой) толщины d и бесконечного радиуса из высокопроницаемого пористого материала. Будем считать, что в диске имеет место фильтрационное течение жидкости, проникающей через границу жидкость – диск.

Выберем цилиндрическую систему координат r, z, φ с началом в точке пересечения поверхности полупространства ($z \geq 0$) и оси диска, направленной вниз. Течение

свободной жидкости (течении жидкости над пористой поверхностью) описывается уравнениями Навье-Стокса.

Для описания фильтрационного течения жидкости в высокопроницаемом диске используем закон Дарси-Бринкмана [1] (с учетом симметрии задачи относительно угла вращения φ)

$$-\frac{1}{\rho} \nabla p - 2 \langle \omega, \mathbf{V} \rangle - \langle \omega, \langle \omega, \mathbf{r} \rangle \rangle + \nu \Delta \mathbf{V} = 0 \quad (1.2)$$

$$\nabla \mathbf{V} = 0.$$

Здесь $\mathbf{V} = \{V_r, V_\varphi, V_z\}$ – скорость жидкости в потоке; p – давление вязкой жидкости; ρ – плотность; ν – кинематическая вязкость, k – коэффициент проницаемости, ν_{eff} – эффективная кинематическая вязкость жидкости в среде; $\omega = \{0, 0, r\}$, $\mathbf{r} = \{r, 0, 0\}$.

Уравнения (1.1) описывают воображаемый поток жидкости, в каждой точке которого скорость движения равна скорости фильтрации. В общем случае при больших скоростях течения в этом подходе поток жидкости описывается уравнениями Навье - Стокса с силами сопротивления пропорциональными его скорости [3].

2. Краевые условия на границе и на бесконечности. В данной работе не ставится задача получения решения какой либо конкретной сопряженной задачи течения свободной жидкости и фильтрующейся в пористой среде. Здесь для данной задачи найдена общая структура решения задачи о течении жидкости в проницаемой среде и на основе нее получены связи между компонентами скорости и их производными на границе раздела жидкость – диск (новые краевые условия для потока жидкости над плоскостью пористой среды). Затем, используя их, можно не рассматривать сопряженную задачу, а решать только задачу о движении свободной жидкости с этими новыми условиями.

Рассмотрим полный набор условий сшивки двух течений на границе жидкость – проницаемая плоскость:

А) Условия непрерывности компонент скорости и тангенциальных компонент напряжения (трения)

$$\begin{aligned} V_z(r, z = 0 + 0) &= V_z(r, z = 0 - 0), \\ V_r(r, z = 0 + 0) &= V_r(r, z = 0 - 0), \\ V_\varphi(r, z = 0 + 0) &= V_\varphi(r, z = 0 - 0), \\ \nu \frac{\partial}{\partial z} V_r(r, z = 0 + 0) &= \nu_{eff} \frac{\partial}{\partial z} V_r(r, z = 0 - 0), \\ \nu \frac{\partial}{\partial z} V_\varphi(r, z = 0 + 0) &= \nu_{eff} \frac{\partial}{\partial z} V_\varphi(r, z = 0 - 0). \end{aligned} \quad (2.1)$$

В) Граничные условия на поверхности диска положим:

$$\begin{aligned} p(z = d) &= P_0, \quad \text{над поршнем} \\ p(z = 0) &= P_a \quad \text{и на бесконечности} \\ V_\varphi(z \rightarrow \infty) &= 0, \quad V_r(z \rightarrow \infty) = 0 \end{aligned}$$

3. Автомоделное решение. Решение задачи (1.1), (2.1) будем искать в виде

$$\begin{aligned} V_r &= \omega r F(\zeta), \quad V_\varphi = \omega r G(\zeta), \quad \Phi = G - 1, \\ V_z &= \sqrt{\omega v_{eff}} H(\zeta), \quad p - p_0 = -\rho v_{eff} \omega P(\zeta), \\ \zeta &= \frac{z}{\delta}, \quad \delta = \sqrt{\frac{v_{eff}}{\omega}}, \quad \delta_0 = \sqrt{k}, \quad \sigma = \sqrt{\frac{\nu}{k\omega}}, \end{aligned}$$

где p_0 - давление на границе жидкость – пористая среда; δ_0, δ - характерные величины пограничных слоев в пористой среде и свободной жидкости (текущая под пористой средой).

При этом система уравнений (1.1) сведется к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} F'' - \sigma^2 F + 2\Phi + 1 &= 0, \\ \Phi'' - \sigma^2 \Phi - 2F &= 0, \\ H'' - \sigma^2 H &= -P', \\ 2F + H' &= 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

В силу линейности первых двух уравнений системы (3.1) будем искать ее решение в виде

$$F = \Lambda + F_p, \quad \Phi = \Psi + \Phi_p, \quad (3.2)$$

где F_p, Φ_p - частное (стационарное $\zeta \rightarrow -\infty, F'' = \Phi'' \rightarrow 0$), а Λ, Ψ - решение однородной системы.

Частное (стационарное решение) имеет вид

$$F_p = \frac{\sigma^2}{\sigma^4 + 4}, \quad \Phi_p = -\frac{2}{\sigma^4 + 4} \quad (3.3)$$

Подставив второе уравнение (3.1) в первое, получим обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка

$$\Psi^{IV} - 2\sigma^2 \Psi'' + \sigma^4 \Psi + 4\Psi = 0 \quad (3.4)$$

Решением характеристического уравнения для (3.4) является выражение $\lambda_{1-4} = \pm \sqrt{\sigma^2 \pm 2i}$. Так как пористая среда находится в области $\zeta < 0$, и учитывая тор-

можение жидкости пористой средой, знак « - » перед радикалом в выражении для λ_{1-2} отбрасываем. Оставляем два корня

$$(3.5) \quad \lambda_{1,2} = \sqrt{\sigma^2 \pm 2i}$$

После несложных преобразований корни (3.5) можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2}(\sigma) &= \kappa_1(\sigma) \pm i\kappa_2(\sigma), \\ \kappa_1(\sigma) &= \sqrt{\frac{\sqrt{1+(2/\sigma^2)^2} + \nu}{2}}, \quad \kappa_2(\sigma) = \sqrt{\frac{\sqrt{1+(2/\sigma^2)^2} - \nu}{2}} \end{aligned} \quad (3.6)$$

С учетом области задачи ($\zeta < 0$) решение второго уравнения (3.1) имеет вид:

$$\Psi(\zeta) = Ae^{\kappa_1(\sigma)\zeta} \cos(\kappa_2(\sigma)\zeta) + Be^{\kappa_1(\sigma)\zeta} \sin(\kappa_2(\sigma)\zeta). \quad (3.7)$$

Из второго уравнения (3.1) легко находится вторая компонента решения $2\Lambda(\zeta)$, при этом использовались легко получаемые соотношения

$$\kappa_1(\sigma)^2 - \kappa_2(\sigma)^2 = \sigma^2, \quad \kappa_1(\sigma)\kappa_2(\sigma) = 1, \quad \kappa_1(\sigma)^2 + \kappa_2(\sigma)^2 = \sqrt{\sigma^4 + 4}. \quad (3.8)$$

Учитывая частное решение (3.3) и соотношения (2.1), (3.8) и отбрасывая малые слагаемые, получим граничные условия на границе жидкость - пористая среда для функций Φ, F, H :

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi(\zeta=0)}{d\zeta} &= \sigma\Phi(0) + \sigma^{-1}F(0) + \sigma^{-3} + o(\sigma^{-3}) \\ \frac{dF(\zeta=0)}{d\zeta} &= \sigma F(0) - \sigma^{-1}\Phi(0) + \sigma^{-1} + o(\sigma^{-1}) \\ \frac{dH(\zeta=0)}{d\zeta} &= \sigma H(0) - \sigma^{-2}\Phi(0) + \sigma^{-2} + o(\sigma^{-2}) \end{aligned}$$

Переходя в предыдущих граничных условиях к физическим переменным, получим:

$$\begin{aligned} \frac{dV_\varphi(\zeta=0)}{d\zeta} &= \sqrt{\frac{1}{kv/v_{eff}}} (V_\varphi(0) - r\omega) + \frac{\omega\sqrt{v_{eff}}}{v^{3/2}} \sqrt{k} V_r(0) + \frac{\omega^3\sqrt{v_{eff}}}{v^{3/2}} rk^{3/2} \\ \frac{dV_r(\zeta=0)}{d\zeta} &= \sqrt{\frac{1}{kv}} V_r(0) - \frac{\omega\sqrt{v_{eff}}}{v^{3/2}} \sqrt{k} (V_\varphi(0) - r\omega) + \frac{\omega^3\sqrt{v_{eff}}}{v^{3/2}} rk^{1/2} \\ \frac{dV_z(\zeta=0)}{d\zeta} &= \sqrt{\frac{1}{kv}} V_z(0) - \frac{\omega^{3/2}\sqrt{v_{eff}}}{v^2} k (V_\varphi(0) - r\omega) + \frac{\omega^{5/2}\sqrt{v_{eff}}}{v^2} rk \end{aligned} \quad (3.9)$$

Заключение. Из (3.9) следует, что граничные условия с учетом инерционных эффектов при течении вязкой жидкости на границе жидкость-пористая среда совпадают с условиями Сафмана [7] с перемешиванием компонент скорости. Однако при выполнении критерия

$$\frac{\omega}{v} k \ll 1$$

справедливы граничные условия Биверса-Джозефа и влияние инерционных эффектов несущественно [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольдштейн Р.В., Гордеев Ю.Н., Чижов Ю.Л. Задача Кармана для вращающегося проницаемого диска // Изв. РАН/ МЖГ. 2012. №1. С. 72-80
2. Bevers G.S., Joseph D.D. Boundary condition at a naturally permeable wall // J. Fluid Mech. 1967. V. 30. Part 1. P. 197-207.
3. Brinkman H.C. A calculation of the viscous force exerted by of a flowing fluid on a dense swarm of particles // Appl. Sci. Res. 1947. V. A1. P. 27-34.
4. Karman Th. Uber laminare und turbulente Reibung // ZAAM. 1921. V. 1. P. 233-252.
5. Neale G, Nader W. Practical significance of Brinkman extension of Darcy's law: coupled parallel flow within a channel and a bounding porous medium // Canad. J. Chem. Eng. 1974. V. 52. P. 475-478.
6. Nield D.A. The Beavers-Joseph Boundary Conditions and Related Matters: A Historical and Critical Note // Trans. Porous Med. 2009. V. 78. P. 537-540.
7. Saffman P. On the boundary conditions at the surface of a porous medium // Stud. Appl. Math. 1971. V. 50. P. 93-101.

ON THE CONDITIONS OF A VISCOUS LIQUID FLOW ON THE BOUNDARY OF THE FLUID-PERMEABLE SURFACE TAKING INTO ACCOUNT THE INERTIA EFFECTS FLUID

Ju. Gordeev, E. Sandakov

*National Research Nuclear University «MEPhI» (Moscow)
31, Kashirskoe shosse, Moscow, 115409, Russia*

Abstract. Conditions on the boarder of viscous liquid and transparent surface in respect with the inertial effect of a liquid in a porous medium is in question. This problem has been considered in this article in terms of a revolving transparent disc on a surface of viscous incondensable liquid . Given problem is a generalization of a Karman's classical problem about the revolving of a transparent disc Under the assumption that the flow in the porous disk is described by Brinkman, obtained automodel solution of the problem.

Keywords: viscous liquid flow, porous medium, Brinkman's equation, Bivers-Joseff law.

УДК: 539.516

**УСЛОВИЕ БИВЕРСА-ДЖОЗЕФА
ПРИ ТЕЧЕНИИ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ
В ОКРЕСТНОСТИ КРИТИЧЕСКОЙ ТОЧКИ
НА ГРАНИЦЕ С ПОРИСТОЙ СРЕДОЙ**

Ю.Н. Гордеев, Е.Б. Сандаков

*Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ» (Москва)
115409, Москва, Каширское ш., 31*

Аннотация. В данной работе рассматривается задача с критической точкой о стационарном натекании вязкой жидкости на проницаемую плоскость в плоском и осе-симметричном случаях, расположенную перпендикулярно потоку. В таких течениях тангенциальная компонента поля скорости потока вязкой жидкости в критических точках на поверхности проницаемого полупространства меняет знак. Получено автомодельное решение и в рамках рассмотренной модели показано, что краевым условием на границе между жидкостью и средой является условие Биверса-Джозефа-Саффмана.

Ключевые слова: течение вязкой несжимаемой жидкости, уравнение Бринкмана, условие Биверса-Джозефа, граничные условия на границе несжимаемая вязкая жидкость- пористая среда.

Падение потока вязкой жидкости на непроницаемую поверхность с условием прилипания жидкости на поверхности рассматривалось в работе [5]. Такие задачи возникают при обтекании твердых тел и теории пограничного слоя [2]. Для вращающегося пористого диска задача рассматривалась в [1].

Как показали эксперименты, начиная с работы [3], в этих задачах условие прилипания было предложено заменить условием Биверса-Джозефа-Саффмана [3,7], учитывающее проскальзывание между свободной жидкостью и пористым телом.

Дальнейшие экспериментальные работы уточняющие данные [3] приведены в обзоре [6].

$$\frac{\partial v_{\tau f}}{\partial \vec{n}} = \frac{B}{\sqrt{k}} (v_{\tau f} - v_{\tau b}) + O(k^{\frac{1}{2}}) \quad (0.1)$$

B - постоянная пористой среды, k – коэффициент проницаемости, $\vec{n}$ - нормаль к проницаемой поверхности, $v_{\tau f}$ - тангенциальная компонента скорости жидкости на границе жидкость – твердое тело, $v_{\tau b}$ - скорость твердого тела или торцевая скорость в [3].

В работе потенциальное течение свободной жидкости рассматривалось в рамках уравнений Навье-Стокса, а для описания течения несжимаемой вязкой жидкости в пористой среде были использованы уравнения Бринкмана [4], полученные специально для относительно высоко - проницаемых сред. Аналитически найдено обобщенное

условие (0.1) и входящие в него постоянные. Найдена вертикальная компонента скорости.

1. Постановка. Пуазейлевское течение жидкости вблизи критической точки.

А. Рассмотрим натекание потока несжимаемой жидкости из бесконечности на ортогональную потоку проницаемую пористую среду, которое далее течет вдоль среды в противоположные от критической точки ($x = 0, y = 0$) стороны. Систему координат совместим с критической точкой. Ось y направим перпендикулярно к полупространству, заполненному потоком свободной жидкости (верхнее $y > 0$), а ось x направим вдоль проницаемой среды, заполняющей нижнее полупространство ($y < 0$).

Предполагается, что течение свободной жидкости стационарно, и в плоском случае описывается уравнениями Навье – Стокса:

$$(1.1) \quad (\nabla \nabla) \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{V},$$

$$\nabla \mathbf{V} = 0,$$

где $\mathbf{V} = \{V_1, V_2\}$ скорость жидкости; $\nu = \mu/\rho$ – кинематическая вязкость; μ – динамическая вязкость жидкости; ρ – плотность; p – давление жидкости.

Для нахождения давления как функции координат в потоке вблизи критической точки воспользуемся рассуждениями приведенными в [2].

Скорости потенциального течения (без трения) в окрестности критической точки пористой среды равны:

$$V_1 = ax, \quad V_2 = -a(b + y),$$

где a и b – константы. Предполагается, что жидкость может проникать в пористую среду.

Давление в потенциальном потоке будем определять из закона Бернулли:

$$p_0 = p + \frac{\rho}{2} (V_1^2 + V_2^2) = p + \frac{\rho}{2} a^2 (x^2 + (b + y)^2).$$

Здесь p_0 – давление в критической точке; p – в произвольной точке течения.

В отличии от потенциального течения, поток частично может поглощаться пористой средой и частично проскальзывать вдоль нее, поэтому примем, что с учетом уравнения (1.1) скорости и давление вблизи критической точки определяется функцией:

$$(1.2) \quad V_1 = x f'(y),$$

$$V_2 = -f(y),$$

$$p_0 = p + \frac{\rho}{2} (V_1^2 + V_2^2) = p + \frac{\rho}{2} a^2 (x^2 + f(y)).$$

В. В осесимметричной постановке уравнения Навье – Стокса (1.1), описывающие стационарное течение вязкой жидкости в пористой среде в цилиндрической системе координат r, z с началом в центре диска и осью направленной перпендикулярно плос-

кости его вращения, и с учетом симметрии задачи относительно угла вращения φ имеют вид : $\mathbf{V} = \{V_r, V_z\}$.

Аналогично рассуждая с учетом третьего уравнения (1.2) получим для скоростей и давления выражение:

$$\begin{aligned} V_r &= rF'(z), \\ V_z &= -2F(z) \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$p_0 = p + \frac{\rho}{2} (V_r^2 + V_z^2) = p + \frac{\rho}{2} a^2 (r^2 + F(z)).$$

2. Течение вязкой жидкости в пористой среде.

А. Пусть течение вязкой жидкости в пористой среде в плоском случае с началом в точке $(x=0, y=0)$ и осью, направленной перпендикулярно границе раздела жидкость пористая среда $y=0$, описывается законом Дарси – Бринкмана в пренебрежении конвективными слагаемыми [4]:

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{\rho} \nabla p - \frac{\nu}{k} \nabla V + \nu_{eff} \Delta V \\ \nabla V &= 0. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Давление как функцию координат в потоке вблизи критической точки в пористой среде примем в виде (1.2).

В. В осе-симметричной постановке стационарное течение вязкой жидкости в пористой среде в цилиндрической системе координат r, z с осью, направленной перпендикулярно границе раздела жидкость пористая среда $z=0$ и с учетом симметрии задачи относительно угла вращения φ , описывается законом Дарси – Бринкмана (1.4)

Здесь ν_{eff} -эффективная вязкость жидкости в пористой среде.

Давление как функцию координат в потоке вблизи критической точки в пористой среде, как и в плоском случае, примем в виде (1.4).

Уравнения (1.4) описывают воображаемый поток жидкости, в каждой точке которого скорость движения равна скорости фильтрации. В общем случае при больших скоростях течения в этом подходе поток жидкости описывается уравнениями Навье-Стокса с силами сопротивления пропорциональными его скорости [4]. Здесь также предполагается, что давление описывается некоторыми функциями типа (1.2),(1.3). При небольших скоростях течения квадратичными слагаемыми пренебрегают.

3.Автомодельные решения. Получение условия Биверса-Джозефа-Саффмана. Условиями сшивками решений для свободной жидкости и течения в пористой среде на границе раздела жидкость – пористая среда являются неразрывность компонент скорости и непрерывность тангенциальных компонент напряжения (трения):

$$\begin{aligned} V_1(x, y=0+0) &= V_1(x, y=0-0), \\ V_2(x, y=0+0) &= V_2(x, y=0-0), \end{aligned}$$

$$v \frac{\partial}{\partial y} V_1(x, y = 0 + 0) = v_{eff} \frac{\partial}{\partial y} V_1(x, y = 0 - 0), \quad (3.1)$$

$$p(x, y = 0 + 0) = p(x, y = 0 - 0).$$

Для проницаемых сред к краевым условиям надо добавить условие на ненулевую вертикальную скорость жидкости:

$$V_2(x, y = 0) = U_0.$$

В осесимметричном случае аналогичные условия сшивки имеют вид:

$$\begin{aligned} V_r(r, z = 0 + 0) &= V_r(r, z = 0 - 0), \\ V_z(r, z = 0 + 0) &= V_z(r, z = 0 - 0), \\ v \frac{\partial}{\partial z} V_r(r, z = 0 + 0) &= v_{eff} \frac{\partial}{\partial z} V_r(r, z = 0 - 0). \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$p(r, z = 0 + 0) = p(r, z = 0 - 0), \quad V_z(r, z = 0) = U_0$$

Краевые условия для уравнений (1.1), (1.4) на бесконечности имеют вид:

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} V_1 = 0, \quad \lim_{y \rightarrow -\infty} V_2 = 0, \quad (3.3)$$

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} V_r = 0, \quad \lim_{z \rightarrow -\infty} V_z = 0, \quad (3.4)$$

Положим, что давление для свободной жидкости однородно по x , тогда системы уравнений (1.1)-(1.4) имеет автомодельные решения в переменных:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{x}{\delta}, \quad \eta = \frac{y}{\delta}, \quad \delta = \sqrt{\frac{\nu}{a}}, \\ V_1 &= V_r = \sqrt{a\nu\xi} \varphi'(\eta), \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$V_2 = V_z = -\sqrt{a\nu} \varphi(\eta),$$

$$p_0 - p = \frac{\rho\nu a}{2} \Phi.$$

В тех же переменных (3.5) уравнения (1.1) и давления вида (1.2) имеют вид:

$$\varphi''' + \varphi\varphi'\eta - \varphi'^2 + 1 = 0, \quad (3.6)$$

$$\Phi' = \varphi'^2 + \eta^2 \xi^2 \varphi'^2. \quad (3.7)$$

Для уравнений в пористой среде введем переменные

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{x}{\delta_1}, \eta = \frac{y}{\delta_1}, \delta_1 = \sqrt{\frac{\nu_{eff}}{\alpha}}, \\ V_1 &= V_r = \sqrt{\alpha \nu_{eff}} \xi \varphi'(\eta), \\ V_2 &= V_z = -\sqrt{\alpha \nu_{eff}} \varphi(\eta), \\ p_0 - p &= \frac{\rho \nu_{eff} \alpha}{2} \Phi\end{aligned}\quad (3.8)$$

В этих переменных уравнения (1.4) и давления (1.3):

$$\begin{aligned}\varphi'''' - \alpha^2 \varphi' + n &= 0, \\ \Phi' &= \varphi'^2 + n^2 \xi^2 \varphi'^2, \quad \alpha = \sqrt{\frac{\nu}{k\alpha}}.\end{aligned}\quad (3.9)$$

Решение уравнения (3.9) с учетом условий: $\varphi(0) = \beta$, и $\varphi(\eta \rightarrow -\infty) = 0$ (т.к. рассматривается полу-бесконечная пористая среда) может быть записано в виде:

$$\varphi = \beta \exp(\alpha \eta) + \frac{n\eta}{\alpha^2}, \quad \beta > 0, \quad \alpha > 0 \quad (V_2 = V_z < 0, \quad \eta < 0). \quad (3.10)$$

На границе пористое тело-жидкость на основании решения (3.10) может быть получено граничное условие:

$$\varphi'(\eta = 0) = \alpha \varphi(\eta = 0) - \frac{n}{\alpha}$$

Согласуя безразмерные переменные (3.5) и (3.8), краевую задачу для уравнения жидкости (3.6) сведем к условиям:

$$\varphi(0) = \beta, \quad \varphi''(0) = \alpha \varphi'(0), \quad \varphi'(\eta \rightarrow +\infty) = 1, \quad (3.11)$$

где $n = 1$ – для плоского случая, $n = 2$ – для осе- симметричного случая;

Возвращаясь к исходным переменным, получим ($l = 1, r$):

$$\frac{dV_l}{dy} = \frac{1}{\sqrt{k\nu_{eff}/\nu}} V_l. \quad (3.12)$$

И для вертикальной компоненты скорости:

$$\frac{dV_2}{dz} = \frac{1}{\sqrt{k\nu_{eff}/\nu}} V_2 - \frac{\sqrt{ka/\nu_{eff}n\alpha z}}{\nu} + o(\sqrt{k}). \quad (3.13)$$

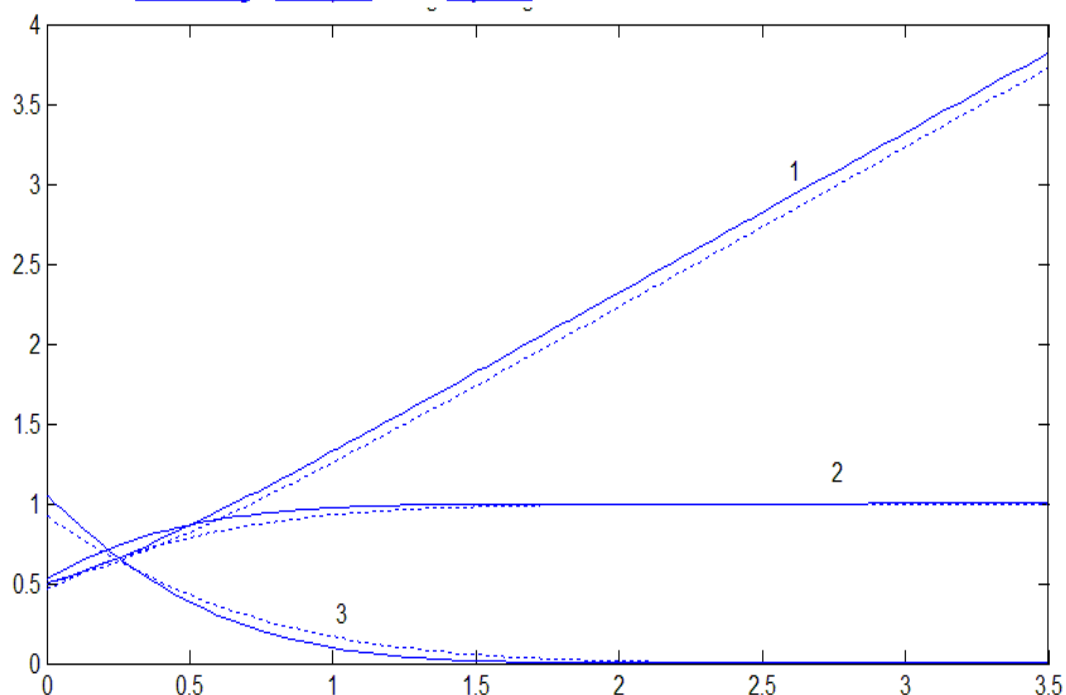
Из уравнения (3.10) можно найти глубину проникновения жидкости в пористую среду (в подземной гидродинамике точка равенства нулю скорости называется «поставленным фронтом»). При $k \ll 1$ приближенно он равен: $\eta_{max} \approx \frac{\beta(1+\beta\alpha^2)}{\alpha^2} \approx \beta^2 \sqrt{\frac{v}{k\alpha}}$.

Так как для высокопроницаемых сред, тем не менее рассматриваются среды с $k \ll 1$, сравнивая выражения (0.1) с (3.12), (3.13), получим, что эти условия совпадают с условиями Биверса – Джозефа с константой $\frac{1}{\sqrt{k v_{eff}/v}}$. В системы уравнений Навье-Стокса, Брикмана входит неизвестная функция Φ - характеризующая давление жидкости в среде, но если интересно только распределение поля скорости потока жидкости в уравнения для которых она не входит, то эта функция может не вычисляться.

4. Результаты численных расчетов. Нелинейная краевая задача (3.9) сводилась к системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка и решалась методом Рунге-Кутты 4-5 порядка.

Для иллюстрации на рис.1. приведены графики решения задачи о критической точке при изменении проницаемости среды, т.е. вертикальной компоненты скорости утечек жидкости в пористую среду β и коэффициента скольжения σ : $\varphi(1), \varphi'(2), \varphi''(3); (\sigma = 0.5, \beta = 0.5) - 1.28$.

Note new toolbar buttons: [data brushing](#) & [linked plots](#)   [Play video](#)



Фиг. 1. Решение задачи о критической точке на проницаемой среде

$\varphi(1), \varphi'(2), \varphi''(3) (\sigma = 0.5, \beta = 0.5) - 1.28$

Заключение

Найдено решение задачи о стационарном натекании вязкой жидкости на высокопроницаемое полу-пространство. Получено автомодельное решение и в рамках рассмотренной модели показано, что краевым условием на границе между жидкостью и средой является условие Биверса-Джозефа-Саффмана. Найдено второе слагаемое в правой части граничного условия вертикальной компоненты скорости и получена константа B , также входящая в граничное условие.

Кроме того показано, что слой проникновения жидкости в пористую среду конечен.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольдштейн, Р.В., Гордеев Ю.Н., Чижов Ю.Л. Задача Кармана для вращающегося проницаемого диска // Изв. РАН/ МЖГ. 2012. №1. С. 72-80.
2. Шлихтинг, Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 712 с.
3. Bevers, G.S., Joseph D.D. Boundary condition at a naturally permeable wall // J. Fluid Mech. 1967. V. 30. P. 197-207
4. Brincman, H.C. A calculation of the viscous force exerted by flowing fluid on a dense swarm of particles. Appl. Sci. Res. A.1, 27-34(1947).
5. Hiemenz, K. Die Grenzschicht an einem in den gleichformigen Flussigkeitsstrom eingetauchten geraden Kreiszylinder// Diglers Polytech/ J/ 1911. V.326. P.321-324
6. Nield, D.A. The Beavers-Joseph Boundary Conditions and Related Matters: A Historical and Critical Note // Trans. Porous Med. 2009. 78.5370540.
7. Saffman, P. On the boundary conditions at the surface of a porous medium. Stud. AAppl. Math. 50, 93-101(1971).

THE BIVERS-YOSEPH CONDITION FOR INCOMPRESSIBLE FLUID FLOW IN THE VICINITY THE CRITICAL POINT OF THE BORDER WITH POROUS MEDIA.

Ju.N.Gordeev, E.B. Sandakov

*National Research Nuclear University «MEPhI» (Moscow)
31, Kashirskoe shosse, Moscow, 115409, Russia*

Abstract. This article deals with the problems with critical point fixed leakage of viscous liquid on the transparent plane in flat and axisymmetric cases situated perpendicular to the flow. In such flows tangential component of the field of speed of viscous liquid in critical points on the surface of transparent half-space change. Obtained automodel solution and the considered model it is shown that the boundary condition on the boundary between the liquid and the environment is a condition Beavers-Joseph-Saffman.

Keywords: viscous incondensable, Brinkman's equation, Bivers-Joseff law, boundary conditions on the incompressible viscous fluid-porous medium.

УДК 538.956 + 621.362.1

ЖИДКОКРИСТАЛЛИЧЕСКИЙ ЕМКОСТНОЙ ДАТЧИК ТЕМПЕРАТУРЫ

Ан.Ал. Муравский¹, Ал.Ан. Муравский¹, В.В. Беляев^{2,3}, Д.О. Рыбаков²,
В.Г. Мазаева⁴, А.С. Соломатин², Д.Н. Чаусов², В.М. Шошин², Ю.П. Бобылев²

¹Институт химии новых материалов НАН Беларуси
220141, Минск, ул. Ф. Скорины, 36

²Московский государственный областной университет
105005, Москва, ул. Радио, 10а

³Российский университет дружбы народов
117198, ул. Миклухо-Маклая, д.6

⁴ГосНИИ химии и технологии элементоорганических соединений, Москва
111123, г.Москва, ш. Энтузиастов, д. 38

Аннотация. Данная работа посвящена исследованию диэлектрических свойств жидких кристаллов с целью создания, на их основе, датчиков температуры. Отличительной чертой таких датчиков является компактность, универсальность и высокая точность измерения. Новизна данной исследовательской работы обусловлена новой методикой проведения эксперимента. Предметом исследования является реакция(отклик) ЖК материалов при воздействии на них температуры. Для достижения этой цели были созданы комбинированные ячейки с ЖК материалом, которые подвергались воздействию температуры. В ходе исследования выяснилось, что предложенная структура с комбинированной ориентацией ЖК дает возможность формировать сигналы высокого и низкого уровня при изменении температуры, а так же возможность создавать устройства для контроля и регулирования равномерности распределения температуры ЖК панели и других электронных устройств.

Ключевые слова: жидкие кристаллы, диэлектрические свойства, датчик температуры, комбинированная ориентация ЖК

1. Введение

Работа посвящена изучению зависимости анизотропии диэлектрической проницаемости от температуры для разработки датчиков температуры на основе жидких кристаллов (ЖК). Термодатчики могут применяться в различных устройствах. Современные ЖК телевизоры требуют контроля равномерности распределения температуры ЖК панели и ее регулирования в процессе работы устройства. Компактные датчики температуры, потребляющие минимальное количество энергии нужны, например, для автономных систем контроля температуры при транспортировке продуктов. Помимо компактности, надежности работы в широком диапазоне температур и дешевизны, особенностью таких термодатчиков является то, что они реагируют непосредственно на изменение температуры рабочей среды, что отличает их от датчиков, используемых в настоящее время, измеряющие температуру вблизи среды. Это термометры сопротивления и термоэлектрические преобразователи [1-3].

2. Диэлектрические свойства жидких кристаллов (ЖК)

Типичная зависимость компонент диэлектрической проницаемости нематического ЖК (4-пентил-4'-цианобифенил, в литературе 5ЦБ или 5СВ) $\epsilon_{\parallel}$ и $\epsilon_{\perp}$ и ее анизотропии $\Delta\epsilon=\epsilon_{\parallel}-$

$\epsilon_{\perp}$ приведена на рис. 1. Величина ϵ измеряется мостовым методом [4-6]. Для ее описания обычно используется теория Майера-Мейера [7,8] и выражение:

$$(\epsilon_{\parallel} - \epsilon_{\perp})\epsilon_0 = NFhS \left[\Delta\alpha - \frac{F\mu^2}{2kT}(1 - 3\cos^2 \beta) \right] \quad (1)$$

где $\Delta\alpha$ – анизотропия молекулярной поляризуемости, μ – дипольный момент молекулы, F – параметр действующего поля (reaction field), h – форм-фактор полости для расчета действующего поля, k_B – постоянная Больцмана, T – температура, β – угол между направлениями оси молекулы и дипольного момента, S – параметр порядка (степень упорядоченности) ЖК, N – мольная концентрация НЖК, ϵ_0 – диэлектрическая постоянная. Из (1) следует, что обычно диэлектрическая анизотропия пропорциональна первой степени параметра порядка (рис.1). В широком диапазоне температуры при $T < T_{NI} - 10K$ зависимость $\Delta\epsilon(T)$ имеет квазилинейный вид, а при $T \rightarrow T_{NI}$ ее крутизна растет. Величина $\Delta\epsilon$ увеличивается с ростом дипольного момента молекулы и может достигать для ряда НЖК +90 [9-14]. Поэтому для емкостных ЖК датчиков температуры следует выбирать НЖК с широким температурным интервалом мезофазы, большим значением $\Delta\epsilon$, высокой крутизной зависимости $\Delta\epsilon(T)$.

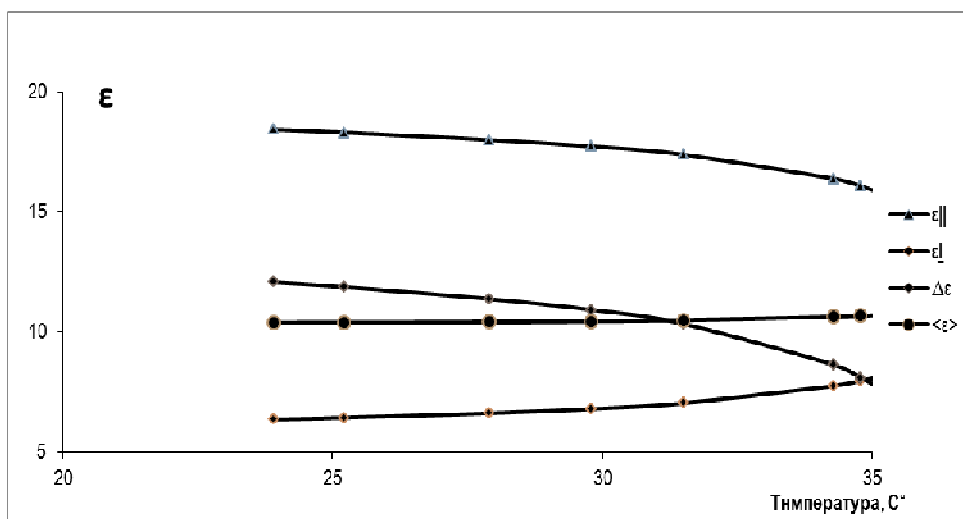


Рис.1. Графики зависимости составляющих диэлектрической проницаемости $\epsilon_{\parallel}$ и $\epsilon_{\perp}$, ее средней величины в нематической и изотропной фазах $\langle \epsilon \rangle$ и ϵ_{is} , соответственно, и ее анизотропии $\Delta\epsilon$ для ЖК 5ЦБ.

3. Принцип работы ячейки

Для изучения диэлектрических свойств ЖК ячейки была использована установка на базе платы аналогового входа-выхода DAC-NI PCI-6281, National Instruments, США. Электрическая схема ячейки показана на рис. 2.

Рабочей средой ячейки является ЖК с положительной диэлектрической анизотропией ($\Delta\epsilon = \epsilon_{\parallel} - \epsilon_{\perp} > 0$, где $\epsilon_{\parallel}$ и $\epsilon_{\perp}$ – параллельная и перпендикулярная составляющие диэлектрической проницаемости, соответственно).

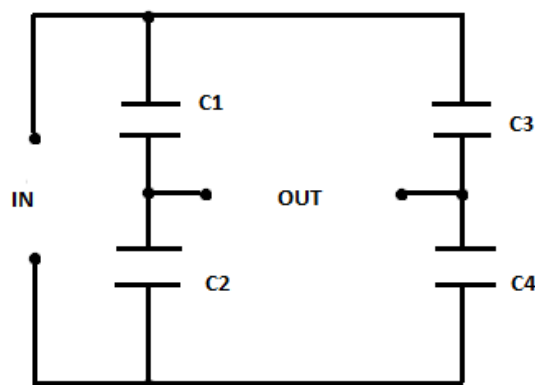


Рис.2. Электрическая схема комбинированной ЖК ячейки

Жидкие кристаллы, из-за своих физико-химических свойств, чувствительны к внешним воздействиям, таким как электрическое и магнитное поле, механическое воздействие или изменение температуры. При внешних воздействиях и постоянной температуре директор ЖК изменяет направление ориентации в пространстве. При изменении температуры изменяются параметры, характеризующие упорядочение молекул внутри жидкого кристалла. Это параметр порядка, анизотропия диэлектрической проницаемости и величина двулучепреломления. Для нас важно изменение диэлектрических свойств, изменение же других свойств не должно влиять на опыт. Следовательно, на эксперимент накладываются определенные ограничения.

1) Подаваемый на ячейку сигнал должен быть коротким импульсом прямоугольной формы. Его длительность τ должна быть меньше 1 мс, но не короче времени заряда электрической емкости

$$t=RC \quad (2)$$

где R – сопротивление электродов в ЖК ячейке, не превышающее 1 кОм, C – емкость ячейки, равная 10 нФ. Таким образом, исходя из этих значений, длительность импульса должна быть $\tau = 100$ мкс.

2) Средняя величина напряжения, подаваемого на ЖК ячейку, должна быть меньше порогового напряжения переключения жидкого кристалла $V_{th}=2\pi(K_{11}/\epsilon_0\Delta\epsilon)^{1/2}$, где K_{11} – коэффициент упругости, ϵ_0 – диэлектрическая постоянная.

3) Подаваемый сигнал должен быть электрически симметричным. При этом амплитуды входного и выходного сигнала связаны следующим образом

$$V_{OUT} = \frac{\Delta\epsilon}{\epsilon_{\parallel} + \epsilon_{\perp}} V_{IN} , \quad (3)$$

$$C_1 = C_4 = \frac{\epsilon_{\perp}\epsilon_0 S}{d}, \quad C_2 = C_3 = \frac{\epsilon_{\parallel}\epsilon_0 S}{d} \quad (4)$$

Емкость конденсаторов C_1 и C_4 определяются величиной $\epsilon_{\perp}$, C_2 и C_3 определяются $\epsilon_{\parallel}$.

3. Конструкция ячейки

Для изучения зависимости диэлектрических свойств ЖК ячейки от температуры, как датчика, использовались ячейки, состоящие из двух стеклянных подложек с зазором

порядка 20 микрон (рис.3). Эти ячейки были заполнены жидкокристаллическими материалами: 5СБ с интервалом температур существования ЖК фазы 25-35°C (рис.1), Е7 (интервал существования ЖК фазы от -20 до +60°C, смесь MLC-5700-000 (от -30 до +90°C). Зависимость отклика ЖК ячеек ΔU от температуры представлена в разделе 5.

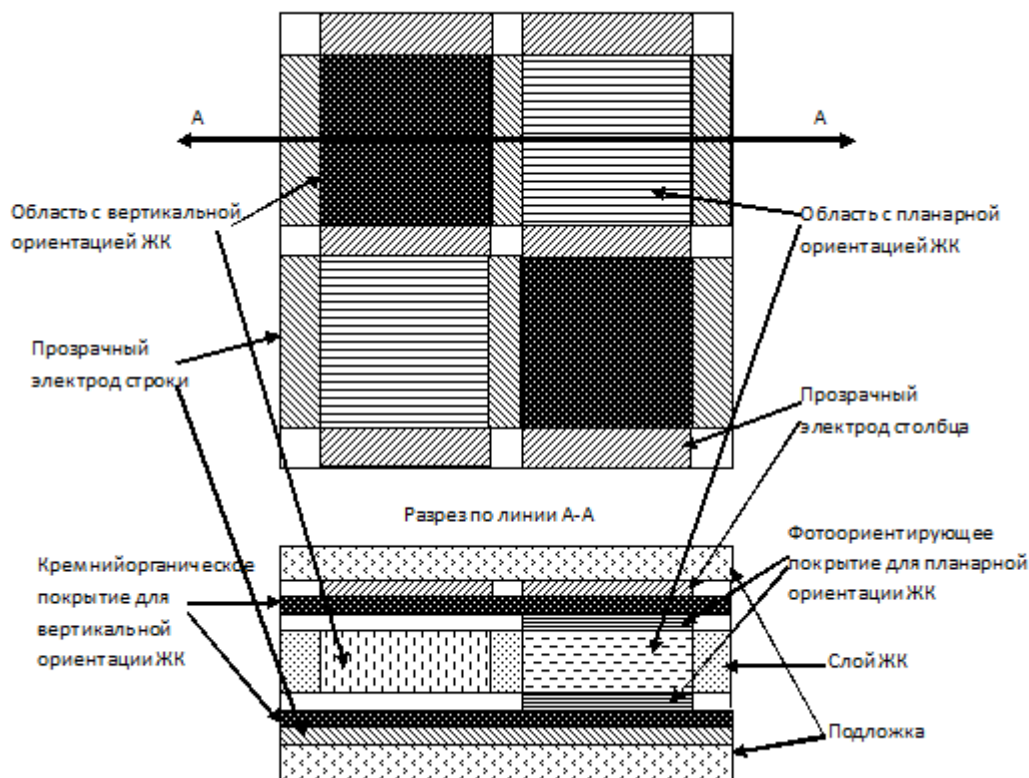


Рис.3. Конструкция комбинированной ЖК ячейки.

4. Метод изготовления ячейки

Для ячеек, имеющих области с разной ориентации ЖК, разработаны методы формирования многослойных покрытий, сформированных из ориентирующих материалов различного типа. Проведение этой работы обусловлено особенностями ориентирующих материалов: материалы, задающие вертикальную ориентацию ЖК (Табл.1), имеют слабую энергию взаимодействия с другими материалами [15,16] и, как следствие, проблемы с образованием сплошной пленки, наносимой на тонкий слой такого материала, что проявляется появлением разрывов и дефектов в наносимом слое. С другой стороны, слои кремнийорганических полимеров, которые используются в данной работе в качестве вертикально ориентирующих материалов (химические формулы и угол подвеса приведены в таблице), не позволяют формировать рисунок методами фотолитографии.

Кроме того, эти материалы после нанесения надо отжечь при температуре 200°C. При таких температурах происходит разориентация фоториорируемых красителей. В связи с этим было определено, что нижним слоем должен быть слой, задающий вертикальную ориентацию. В качестве верхнего слоя был использован водорастворимый краси-

тель АВА2522. Нанесение его методом печати, позволяет формировать рисунок слоя красителя верхнего (второго) слоя показано на рис.4.

Таблица 1

Материалы для вертикальной ориентации ЖК

Ориентирующий материал	Угол подвеса
Олигометилгидридсилоксан $[(CH_3)HSiO]_m$	89,8°
Олигоэтилгидридсилоксан $[(C_2H_5)HSiO]_m$	89,9°
Олигодизтил(метилгидрид)силоксан $[(C_2H_5)_2SiO]_m[(CH_3)HSiO]_p$	90,0°
Олигодиметил(метилгидрид)силоксан $[(CH_3)_2SiO]_m[(CH_3)HSiO]_p$	89,9°

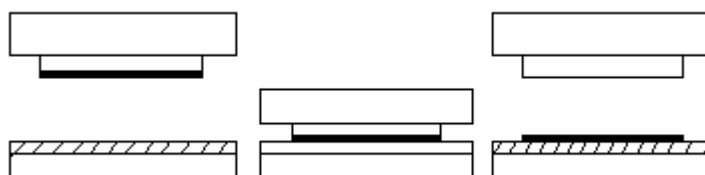


Рис.4. Создание рисунка ориентации методом печати.

Условия сушки и фотоориентации верхнего слоя не нарушают ориентирующие свойства нижнего слоя. Методы печати позволяют делать рисунок ориентации только низкого разрешения, и условия совмещения с элементами на подложке проблематичен. Для получения рисунка высокого качества и точного совмещения с рисунком ИТО (прозрачный электрод из окиси индия и олова) на подложке было решено использовать фотосшиваемый ориентирующий материал М16. Последовательность операций при работе с этим материалом показана на рис. 5.

Нанесение материала методом центрифугирования дает сплошную однородную пленку. После сушки, материал натирается для придания ему ориентирующих свойств. Затем следует операция облучения УФ светом с дозой 1 Дж/см², за которой следует удаление необлученных областей материала. Скорость травления необлученного материала примерно равна 80 нм /мин. Поэтому для пленки толщиной 50 нм время травления определено как 40 с. Проверка ориентации структурированной поверхности проводилась анализом ориентации жидкого кристалла в ячейке с зазором 20 мкм и с рисунком ориентации одинаковым на верхней и нижней подложках. В областях, где был удален ориентирующий материал М16, формируется вертикальная ориентация, а в облученных областях, формируется однородная планарная ориентация с направлением ориентации, соответствующей направлению натирания. Таким образом, если не требуется высокое качество рисунка ориентации, то может быть использован метод печати водорастворимого фоториориентируемого красителя поверх слоя кремний органического полимера и последующего ориентирования последнего поляризованным светом. Если требуется более высокое качество изображения, аккуратный край элементов формируемых элементов и точное совмещение их с рисунком электродов на подложке, должен использоваться фотосшиваемый материал М16.

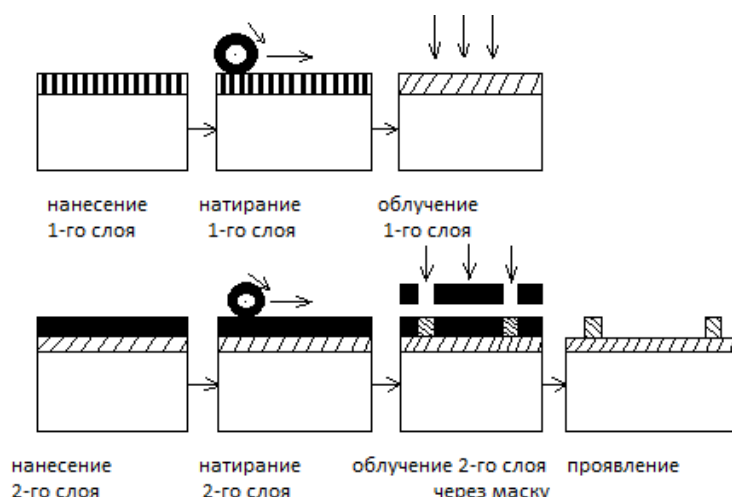


Рис.5. Последовательность операций при работе с материалом M16

6. Экспериментальные результаты. Режим датчика

Зависимость отклика ЖК ячеек ΔU от температуры представлена на рис.6.

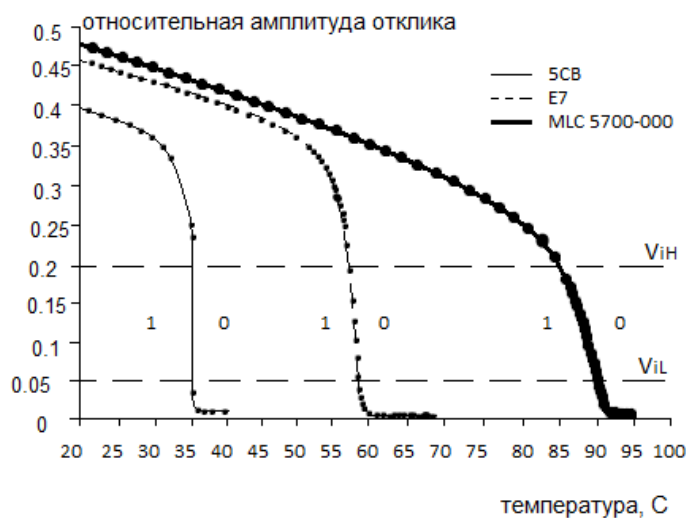


Рис.6. График зависимости $\Delta U(T)$ для ячеек с веществами 5ЦБ, E7, MLC-5700-000.

V_H и V_L – выходное напряжение высокого и низкого уровня, соответственно, характеризующее сигналы логических единицы и нуля.

Из графика видно, что с ростом температуры изменение величины отклика индивидуального вещества (5ЦБ), при фазовом переходе из изотропной жидкости в ЖК фазу, происходит резче, чем для смесей ЖК. У смесей в области существования ЖК фазы происходит монотонное и плавное изменение значений величины анизотропии диэлектрической проницаемости, что приводит к монотонному изменению величины отклика ЖК ячейки.

7. Выводы и заключение

Разработана и исследована жидкокристаллическая ячейка для использования ее в качестве емкостного датчика температуры. Предложенная структура с комбинированной ориентацией ЖК позволяет формировать сигналы высокого и низкого уровня при изменении температуры и создавать устройства для контроля и регулирования равномерности распределения температуры ЖК панели и других электронных устройств.

Работа выполнена по совместному проекту при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант №12-07-90007-Бел_а, и Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований, грант № Ф12Р-188.

ЛИТЕРАТУРА

1. В.В. Беляев, В.И. Карлацук, Технические средства систем управления. Часть 1. Операционные усилители и измерительные преобразователи, Учебное пособие: М: РУДН, 2009, С.1-100.
2. <http://www.piezoelectric.ru/Products/TransmittersTemperature/ThermalTransformerSOS.php>
3. М. Нойманн, Холодильник с индикацией диапазона температур, Патент РФ №2265166.
4. М.Ф. Гребенкин, А.В. Иващенко, Жидкокристаллические материалы / М.: Химия, 1989. 288 с.
5. S. Urban, Static dielectric properties of nematics, In: Physical Properties of Liquid Crystals: Nematics. Eds. G. R. Luckhurst, David A. Dunmur, Atsuo Fukuda. Institution of Electrical Engineers, 2001.
6. D. Dunmur and K. Toriyama, Dielectric Properties, In: Handbook of Liquid Crystals, Low Molecular Weight Liquid Crystals II, Eds. George W. Gray, Volkmar Vill, Hans W. Spiess, Wiley-VCH, pp.231-252 (1998).
7. W. Maier and G. Meier, Eine einfache Theorie der dielektrischen Eigenschaften homogen orientierter kristallin-glüssiger Phasen des nematischen Typs, Z. Naturforsch., 16a, 262 (1961).
8. W. Maier and G. Meier, Hauptdielektrizitätskonstanten der kristallin-glüssiger Phasen des nematischen Typs, Z. Naturforsch., 16a, 470 (1961).
9. Безбородов В.С. «Синтез новых карбо- и гетероциклических соединений и создание эффективных жидкокристаллических материалов на их основе». Диссертация на соискание уч. степ. докт. хим. наук, 02.00.03, Белорусский гос. университет, Минск, 1999
10. П.Адоменас, В.В. Беляев, С.А.Иванов, А.Б.Кузнецов, Н.Ф.Ковтонюк, В.Шешкаускас, В.С.Безбородов, Р.Папконене, Жидкокристаллический материал с положительной диэлектрической анизотропией для оптоэлектронных устройств, Положит. реш. по заявке на Авторское свидетельство СССР № 4821614/04 от 30.07.91, приор.03.05.90.
11. V. Bezborodov, S. Mikhalyonok, I. Zharski, O. Dormeshkin, A. Smirnov and A. Stsiapanau, "New Concept for the Design, Synthesis, and Application of Nanostructured Anisotropic Materials and Conductive and Alignment Coatings for High-Efficient Displays and Photonic Devices", 33rd International Display Research Confer-

ence EuroDisplay 2013, London, UK. 16-19 September 2013. Conference Proceedings. P.81-84.

12. *В.С.Безбородов, О.А.Гринкевич, М.Ф.Гребенкин*, 2-(4-карбокси-3-галогенфенил)-5-алкил-1,3,2-диоксаборинаны в качестве полупродуктов синтеза жидкокристаллических производных галогенфенил-5-алкил-1,3,2-диоксаборинанов, Авторское свидетельство СССР №4162761/04 (Патент SU 1766922). Приоритет 17.12.86. Оpubл. 07.10.92. Бюл. изобр. № 37 (1992).
13. *R.Dąbrowski, V.Bezborodov*, "Developing syntheses of new liquid crystals", *Liq. Cryst.*, 33, 1487-1489 (2006).
14. *M.J. Lim, S.H. Kim, Y.J. Lee, D.J. Jeong, K.H. Uh, E.S. Lee, and Y.S. Choi*, Physical Properties of Liquid Crystal Single Compounds with 1,3,2-Dioxaborinane Group for LCD Applications, *Molecular Crystals and Liquid Crystals Science and Technology. Section A. Molecular Crystals and Liquid Crystals*, V. 352, p. 319-326 (2000).
15. *V.V. Belyaev, V.G. Mazaeva, A.S. Solomatin, A.A. Muravskii, A.A. Gorbunov, A.A. Muravskii*, New organosilicon oligomer films for NLC alignment, *Proc. International Conference 2011 China display/Asia display*, Kunshan, China, 6-9 November 2011.
16. *Al. Muravsky, An. Murauski, V. Mazaeva, V. Belyaev*, "Parameters on the LC alignment of organosilicon compound films", *J. Soc. Inf. Display*. **13**, 349-354 (2005).
17. *De Jeu W.H.* "Physical Properties of Liquid Crystalline Materials", Gordon & Breach, New York, 1980

LIQUID CRYSTAL CAPACITOR TEMPERATURE SENSOR

**An.Al. Murauski¹, Ak.An. Muravsky¹, V. V. Belyaev^{2,3}, D. O. Rybakov²,
V. G. Mazayeva⁴, A.S. Solomatin², D. N. Chausov², V. M. Shoshin², Yu.P. Bobyliov²**

¹*Institute of Chemistry of New Materials NAS Belarus
36, F. Skorina st., Minsk, 220141, Belarus*

²*Moscow Region State University
10a, Radio st., Moscow, 105005, Russia*

³*People's Friendship University of Russia,
6, Miklukho-Maklay st., Moscow, 11719, Russia*

⁴*GNIKHTEOS (State R&D Institute for Chemistry and Technology of Organo-Element Compounds)
38, Shaussee Enthuziastov, Moscow, 111123, Russia*

Abstract. This work is devoted to research of dielectric properties of liquid crystals for the purpose of creation, on their basis, temperature sensors. Distinctive feature of such sensors is compactness, universality and high precision of measurement. Novelty of this research work is caused by a new technique of carrying out experiment. Object of research is reaction (response) of NLC of materials at impact of temperature on them. For achievement of this purpose the combined cells with NLC a material which were affected by temperature were created. During research it became clear that the offered structure with the combined orientation of NLC gives the chance to form signals of high and low level at temperature change, and as opportunity to create devices for control and regulation of uniformity of distribution of temperature of NLC of the panel and other electronic devices.

Key words: liquid crystal, dielectric properties, temperature sensor, LC combined alignment

ТЕХНОЛОГИИ И МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ

УДК 37.012

РАЗВИТИЕ МОТИВАЦИОННЫХ СТИМУЛОВ ОБУЧЕНИЯ В РАМКАХ МОДУЛЬНО-РЕЙТИНГОВОЙ СИСТЕМЫ ОРГАНИЗАЦИИ УЧЕБНОГО ПРОЦЕССА

Е.А. Власова*, А.Ф. Грибов*, В.С. Попов*, А.В. Латышев**

**Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана
105005, Москва, ул. 2-я Бауманская, 5*

***Московский государственный областной университет (МГОУ),
105005, Москва, ул. Радио, 10 а*

Аннотация. В статье рассматриваются вопросы, связанные с введением индивидуального рейтинга обучающегося, его влияние на развитие мотивационных стимулов обучения, освоения образовательных программ на базе дифференциации оценки результатов учебной работы.

Ключевые слова: модульно-рейтинговая система, блочно-модульная система, рейтинг, индивидуальный рейтинг, система контроля качества образования, модель образования, мотивационный стимул, уровни сложности.

Блочно-модульная система преподавания призвана стимулировать работу студента непрерывно в течение всего периода обучения, способствовать активизации и системности учебной деятельности, повысить мотивацию студента к получению знаний.

Серьезным мотивационным стимулом студентов к освоению образовательных программ является индивидуальный рейтинг студента. Учитывая тот факт, что многим учащимся важно общественное признание, каждый студент должен иметь интегрированный рейтинг, напрямую связанный со всякого рода поощрениями. Индивидуальный рейтинг студента может непосредственно влиять на получение именных и президентских стипендий, на зачисление в программы двойных дипломов с направлением на различного рода стажировки (в том числе и в зарубежные вузы), на перевод на бюджетные места лучших студентов, обучающихся на договорной основе с оплатой стоимости обучения. Кумулятивный рейтинг используется и как один из показателей при отборе на программы магистерской подготовки. Введение индивидуального рейтинга стимулирует каждого студента к освоению образовательных программ на базе глубокой дифференциации оценки результатов их учебной работы. Рейтинг показывает реальное место, которое занимает студент среди сокурсников в соответствии со своими успехами в учебе, что способствует формированию навыков самоорганизации учебного труда и самооценки у студентов.

Покажем, как можно рассчитать индивидуальный рейтинг студента за учебный год по результатам освоения всех дисциплин учебного плана, учитывая различные характеристики и показатели.

Пусть в учебном плане на N -ом курсе предусмотрено изучение n дисциплин. Будем считать, что по каждой дисциплине студент может набрать не более 100 баллов.

Таким образом, рейтинг студента по s -ой дисциплине, обозначим его R_s , удовлетворяет неравенству $R_s \leq 100$. Пусть значимость дисциплины определяют l параметров, например, трудоемкость дисциплины в зачетных единицах или часах, соотнесенная с общей трудоемкостью всех дисциплин за год, итоговый контроль знаний (экзамен или зачет), уровень сложности выбранной программы дисциплины и т.п. Положим, что для каждого i -го параметра выполняется условие

$$\sum_{s=1}^n k_i^{(s)} = 1,$$

где $k_i^{(s)}$ – максимальное значение i -го параметра для s -ой дисциплины. Индивидуальный рейтинг студента X по итогам обучения на N -ом курсе можно вычислить по следующей формуле:

$$R_N(X) = \frac{1}{l} \sum_{s=1}^n \sum_{i=1}^l k_i^{(s)}(X) R_s(X),$$

где $R_s(X)$ – рейтинг студента X по s -ой дисциплине, $0 \leq k_i^{(s)}(X) \leq k_i^{(s)}$. Таким образом, для рейтинга студента за учебный год справедливо неравенство $R_N \leq 100$.

Поясним, изложенные выше выкладки, на примере.

Пусть на 1 курсе (см. таблица 1) технического вуза в 1 и 2 семестрах изучаются по 9 дисциплин, следовательно, $n = 18$. Выделим три показателя значимости каждой дисциплины:

$k_1^{(s)}(X) = k_1^{(s)}$ – доля трудоемкости s -ой дисциплины в общей трудоемкости всех дисциплин за весь учебный год;

$k_2^{(s)}(X) = k_2^{(s)}$ – доля трудоемкости итогового контроля s -ой дисциплины в итоговой аттестации по всем дисциплинам за весь учебный год;

$k_3^{(s)}(X)$ – уровень сложности выбранной программы дисциплины (принимает столько значений, сколько предусмотрено программ данной дисциплины разного уровня сложности).

Покажем, как рассчитываются эти параметры:

$$k_1^{(s)} = \frac{t_s}{\sum_{s=1}^n t_s},$$

где t_s – общая трудоемкость s -ой дисциплины в зачетных единицах;

$$k_2^{(s)} = \frac{c_s}{\sum_{s=1}^n c_s},$$

где c_s – итоговая аттестация; при этом $c_s = 1$, если в качестве итогового контроля предусмотрен зачет, $c_s = 2$, если в качестве итогового контроля предусмотрен дифференцированный зачет, $c_s = 3$, если в качестве итогового контроля предусмотрен экзамен. Методику определения третьего параметра $k_3^{(s)}(X)$ опишем отдельно.

При индивидуально-ориентированной организации учебного процесса каждому студенту предоставляется возможность посещать занятия по дисциплине определенного уровня, то есть обучение организуется с учетом индивидуальных возможностей сту-

дента в текущий период времени. На младших курсах можно ограничиться введением **базовых** и **продвинутых** уровней по дисциплинам естественнонаучного и профессионального циклов. В учебные планы включены дисциплины, имеющие одно название, но разные уровни сложности программы. Для дисциплины устанавливается базовый уровень (А), если целью ее изучения является введение в предмет. Дисциплина имеет продвинутый уровень (В), если целью ее изучения является получение углубленных знаний по предмету. Программы разных уровней сложности могут иметь одинаковую трудоемкость, что обеспечивает единство структуры учебного плана. Отличия могут заключаться в количестве модулей. Например, программа дисциплины продвинутого уровня может содержать дополнительный модуль. Отличия возможны также в содержании самих модулей. Например, в количестве и степени подробности изложения отдельных теорем, методик, алгоритмов.

Задания для самостоятельной работы также могут отличаться в зависимости от уровня дисциплины, например, количеством и сложностью входящих в них задач.

Введение параметра $k_3^{(s)}(X)$ обеспечивает дифференциацию студентов, которые выбрали при изучении одной и той же дисциплины разные уровни сложности. Если для s -ой дисциплины имеется выбор из двух уровней сложности, то параметр $k_3^{(s)}(X)$ может принимать два значения, и вычисляется по формуле:

$$k_3^{(s)}(X) = \frac{u_s(X)}{\sum_{s=1}^n u_s},$$

где u_s – максимальное количество программ дисциплины s разного уровня сложности (в данном примере u_s равно 1 или 2), $u_s(X)$ – уровень сложности, который выбрал студент X , а именно, $u_s(X) = 1$, если студент выбрал базовый уровень сложности (А), и $u_s(X) = 2$, если студент выбрал продвинутый уровень сложности (В). Отметим, что

$$k_3^{(s)} = \frac{u_s}{\sum_{s=1}^n u_s}.$$

Рассмотрим пример расчета индивидуального рейтинга студентов.

В примере (таблица 1) для дисциплины с двумя уровнями сложности $k_3^{(s)}(X)$ равно либо **1/14**, либо **1/28**.

Таблица 1

№ s	Дисциплины	t_s	$k_1^{(s)}$	c_s	$k_2^{(s)}$	u_s	$k_3^{(s)}$
1 семестр							
1	Аналитическая геометрия	4	1/15	3	1/12	2	1/14
2	Математический анализ	5	1/12	3	1/12	2	1/14
3	Начертательная геометрия	3	1/20	3	1/12	1	1/28
4	Инженерная графика	2	1/30	2	1/18	1	1/28
5	Иностранный язык	2	1/30	1	1/36	2	1/14

6	Информатика	6	1/10	3	1/12	2	1/14
7	История	3	1/20	1	1/36	1	1/28
8	Культурология	3	1/20	1	1/36	1	1/28
9	Физическая культура	2	1/30	1	1/36	1	1/28
2 семестр							
10	Интегралы и дифференциальные уравнения	5	1/12	3	1/12	2	1/14
11	Линейная алгебра и функции нескольких переменных	4	1/15	3	1/12	2	1/14
12	Физика	4	1/15	3	1/12	2	1/14
13	Теоретическая механика	4	1/15	1	1/36	2	1/14
14	Инженерная графика	3	1/20	2	1/18	1	1/28
15	Иностранный язык	2	1/30	1	1/36	2	1/14
16	Информатика	2	1/30	1	1/36	2	1/14
17	Химия	4	1/15	3	1/12	1	1/28
18	Физическая культура	2	1/30	1	1/36	1	1/28

Предположим, что пять студентов-первокурсников по итогам года имели рейтинги $R_s(X), s = 1, \dots, 18$, по дисциплинам учебного плана, представленные в таблице 2.

Таблица 2

№ X	Фамилия	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7	R_8	R_9	R_{10}	R_{11}	R_{12}
1	Иванов	60	71	80	82	80	63	87	93	91	65	70	65
2	Климов	60	60	60	60	60	60	60	60	60	60	60	60
3	Петров	60	60	60	60	60	60	60	60	60	60	60	60
4	Семин	60	60	60	60	90	60	95	95	95	60	60	60
5	Шишов	95	95	95	70	60	95	60	60	60	95	95	95

R_{13}	R_{14}	R_{15}	R_{16}	R_{17}	R_{18}
64	85	80	70	60	95
60	60	60	60	60	60
60	60	60	60	60	60
60	60	90	60	60	95
80	70	60	80	95	60

Пусть эти студенты выбрали уровни сложности $u_s(X), s = 1, \dots, 18$, дисциплин учебного плана, представленные в таблице 3.

Таблица 3

№ X	Фами- лия	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	Иванов	2	1	1	1	1	2	1	1	1	2	1	2
2	Климов	2	2	1	1	2	2	1	1	1	2	2	2
3	Петров	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4	Семин	1	2	1	1	2	2	1	1	1	1	2	1
5	Шишов	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1

13	14	15	16	17	18
1	1	2	1	1	1
2	1	2	2	1	1
1	1	1	1	1	1
2	1	2	1	1	1
1	1	2	1	1	1

Вычислим индивидуальные рейтинги студентов по итогам обучения на 1 курсе:
 $R(\text{Иванов}) =$
 $(1/3) [(1/15 + 1/12 + 1/14) \cdot 60 + (1/12 + 1/12 + 1/28) \cdot 71 + (1/20 + 1/12 + 1/28) \cdot 80 +$
 $+(1/30 + 1/18 + 1/28) \cdot 82 + (1/30 + 1/36 + 1/28) \cdot 80 + (1/10 + 1/12 + 1/14) \cdot 63 +$
 $+(1/20 + 1/36 + 1/28) \cdot 87 + (1/20 + 1/36 + 1/28) \cdot 93 + (1/30 + 1/36 + 1/28) \cdot 91 +$
 $+(1/12 + 1/12 + 1/14) \cdot 65 + (1/15 + 1/12 + 1/28) \cdot 70 + (1/15 + 1/12 + 1/14) \cdot 65 +$
 $= 68,45370370 \approx 68;$

$R(\text{Климов}) = 60; R(\text{Петров}) = 53; R(\text{Семин}) = 65; R(\text{Шишов}) = 75.$

Отметим, что студенты Петров и Климов по всем дисциплинам имели одинаковые баллы, но Климов выбирал дисциплины второго уровня сложности, а Петров - первого. В итоге, индивидуальный рейтинг Климова больше рейтинга Петрова на 7 баллов.

Выводы.

1. Введение индивидуального рейтинга позволяет более объективно оценить уровень знаний обучающегося, его стремление (или не стремление) к получению углубленных знаний по предмету.
2. Индивидуальный рейтинг – это мотивационный стимул, направленный на освоение образовательных программ.
3. Рейтинг показывает реальные достижения обучающихся, их успехи в учебе, способствует формированию самооценки студентов, что в конечном результате положительно сказывается на повышении качества обучения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Власова, Е.А., Попов В.С. Принципы блочно-модульной системы преподавания математики // Проблемы совершенствования качества образования в вузе: материалы второй науч.-практ. конф., Орехово- Зуево, 5 февраля 2010 г. – Орехово-Зуево: Изд-во Орехово-Зуевского филиала инс-та экономики и предпринимательства, 2010. – С. 88-93.
2. Власова, Е.А., Попов В.С. О разработке вузовских учебных программ математических дисциплин // Проблемы совершенствования качества образования: материалы четвертой междунар. науч.-практ. конф., Орехово- Зуево, 17 февраля 2012 г. – Орехово-Зуево: Изд-во Орехово-Зуевского филиала инс-та экономики и предпринимательства, 2012. – С. 52-57.
3. Власова, Е.А., Красновский Е.Е. Повышение качества обучения студентов в рамках модульно-рейтинговой системы организации учебного процесса. Инженерный журнал: наука и инновации, - 2012. -№4(4).- С. 7.
4. Власова, Е.А., Грибов А.Ф., Попов В.С., Латышев А.В. Принципы модульно-рейтинговой системы преподавания высшей математики//Вестник Московского государственного областного университета.-Серия «Физика-Математика».- 2013.-№3.-С.93-99.

**THE DEVELOPMENT OF INCENTIVES TRAINING
IN THE FRAMEWORK OF THE RATING SYSTEMS
OF THE EDUCATIONAL PROCESS**

Е. Vlasova*, А. Gribov*, V. Popov* А. Latyshev**

**Bauman Moscow State Technical University
5, 2-nd Baumanskaya st., Moscow, 105005, Russia*

***Moscow State Regional University
10a, Radio st., Moscow, 105005, Russia*

Abstract. The article discusses the issues associated with the introduction of the individual rating of the student, his influence on the development of incentives training, development of educational programs on the basis of the assessment differentiation of training.

Key words: modular-rating system, a modular system, rating individual rating of the quality control system of education, the education model, motivational incentive levels of complexity.

НАШИ АВТОРЫ

Беляев Виктор Васильевич – Московский государственный областной университет, 105005, Москва, ул. Радио, 10а, главный научный сотрудник, заведующий кафедрой теоретической физики, доктор технических наук, профессор; e-mail: vv.belyaev@mgou.ru

Бобылев Юрий Петрович – Московский государственный областной университет, 105005, Москва, ул. Радио, 10а, техник учебно-научной лаборатории теоретической и прикладной нанотехнологии; e-mail: vv.belyaev@mgou.ru

Бугримов Анатолий Львович – Московский государственный областной университет, 105005, Москва, ул. Радио, 10а, декан физико-математического факультета, заведующий кафедрой вычислительной математики и методики преподавания информатики, доктор технических наук, профессор; e-mail: al.bugrimov@mgou.ru

Бычкова Дарья Дмитриевна – Московский государственный областной университет, 105005, Москва, ул. Радио, 10а, доцент кафедры вычислительной математики и методики преподавания информатики, кандидат педагогических наук; e-mail: kav-vmmpi@mgou.ru

Власова Елена Александровна – Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, 105005, Москва, ул. 2-я Бауманская, 5, кандидат физико-математических наук, доцент; e-mail: kaf-matan@mgou.ru

Гордеев Юрий Николаевич – Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», 115409, Москва, Каширское ш., 31, профессор, доктор физико-математических наук, профессор; e-mail: YuGordeyev@yandex.ru

Грибов Александр Федорович – Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, 105005, Москва, ул. 2-я Бауманская, 5; e-mail: kaf-matan@mgou.ru

Кузнецов Вячеслав Сергеевич – Московский государственный областной университет, 105005, Москва, ул. Радио, 10а, доцент кафедры вычислительной математики и методики преподавания информатики, кандидат физико-математических наук; e-mail: kav-vmmpi@mgou.ru

Латышев А.В. – Московский государственный областной университет, 105005, Москва, ул. Радио, д. 10 а, заведующий кафедрой математического анализа и геометрии, доктор физико-математических наук, профессор; e-mail: kaf-matan@mgou.ru

Мазаева Вера Генриховна – ГНЦ РФ ФГУП «ГНИИХТЭОС», 111123, г. Москва, ш. Энтузиастов, д. 38, научный сотрудник, кандидат технических наук; e-mail: vera0710@yandex.ru

Муравский Александр Анатольевич – Институт химии новых материалов НАНБ, 220141, Минск, ул. Ф. Скорины, 36, заведующий лабораторией материалов и технологий ЖК-устройств, кандидат физико-математических наук; e-mail: alexander.muravsky@gmail.com

Попов Владимир Семенович – Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, 105005, Москва, ул. 2-я Бауманская, 5, кандидат физико-математических наук, доцент; e-mail: kaf-matan@mgou.ru

Рыбаков Дмитрий Олегович – Московский государственный областной университет, 105005, Москва, ул. Радио, 10а, аспирант; e-mail: rubakov_lis@mail.ru

Сандаков Евгений Борисович – Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», 115409, Москва, Каширское ш., 31, доцент, кандидат физико-математических наук, доцент; e-mail: SandakovEvg@mail.ru

Соломатин Алексей Сергеевич – Московский государственный областной университет, 105005, Москва, ул. Радио, 10а, инженер учебно-научной лаборатории теоретической и прикладной нанотехнологии, кандидат физико-математических наук, e-mail: assolomatin@hotmail.com

Фурсаев Дмитрий Владимирович – Международный университет природы, общества и человека «Дубна», РФ, Московская область, 141980, г. Дубна, ул. Университетская, 19, и.о. ректора, доктор физико-математических наук, профессор; e-mail: fursaev@theor.jinr.ru

Чausов Денис Николаевич – Московский государственный областной университет, 105005, Москва, ул. Радио, 10а, доцент кафедры теоретической физики, заведующий учебно-научной лабораторией теоретической и прикладной нанотехнологии, кандидат физико-математических наук, e-mail: dn.chausov@mgou.ru

Шошин Вадим Михайлович – Московский государственный областной университет, 105005, Москва, ул. Радио, 10а, инженер учебно-научной лаборатории теоретической и прикладной нанотехнологии, кандидат физико-математических наук; e-mail: vv.belyaev@mgou.ru

Юшканов Александр Алексеевич – Московский государственный областной университет, 105005, Москва, ул. Радио, 10а, кафедра теоретической физики, доктор физико-математических наук, профессор. 105005, Москва, ул. Радио, д. 10 а; e-mail: kaf-tfiz@mgou.ru

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА	3
<i>Бугримов А.Л., Латышев А.В., Юшканов А.А.</i> Кинетическое одномерное уравнение с частотой столкновений, аффинно зависящей от модуля скорости	3
<i>Бугримов А.Л., Бычкова Д.Д., Кузнецов В.С.</i> Возможности вариации размерности фрактальных множеств	16
ФИЗИКА	22
<i>Фурсаев Д.В.</i> Порождаемая гравитация, энтропия и квантовое перепутывание	22
.....	
<i>Гордеев Ю.Н., Сандаков Е.Б.</i> Об условиях течения вязкой жидкости на границе жидкость - проницаемая поверхность с учетом инерционных эффектов жидкости ..	28
<i>Гордеев Ю.Н., Сандаков Е.Б.</i> Условие Биверса-Джозефа при течении несжимаемой жидкости в окрестности критической точки на границе с пористой средой	33
<i>Муравский Ан.Ал., Муравский Ал.Ан., Беляев В.В., Рыбаков Д.О., Мазаева В.Г., Соломатин А.С., Чаусов Д.Н., Шошин В.М., Бобылев Ю.П.</i> Жидкокристаллический емкостной датчик температуры	40
ТЕХНОЛОГИИ И МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ	48
<i>Власова Е.А., Грибов А.Ф., Попов В.С., Латышев А.В.</i> Развитие мотивационных стимулов обучения в рамках модульно-рейтинговой системы организации учебного процесса	48
НАШИ АВТОРЫ	54

CONTENTS

MATHEMATICS	3
<i>Bugrimov A., Latyshev A., Yushmanov</i> The kinetic one-dimensional equation with collisional frequency affine depending on the module of molecular velocity	3
<i>Bugrimov A., Bychkova D., Kuznetsov V.</i> Possible variations of the dimension of fractal sets	16
 PHYSICS	22
<i>Fursaev D.</i> Emergent gravity, entropy, and quantum entanglement	22
<i>Gordeev Ju., Sandakov E.</i> On the conditions of a viscous liquid flow on the boundary of the fluid-permeable surface taking into account the inertia effects fluid	28
<i>Gordeev Ju., Sandakov E.</i> The Bivens-Yoseph condition for incompressible fluid flow in the vicinity the critical point of the border with porous media	33
<i>Murauski An, Muravsky Ak, Belyaev V, Rybakov D, Mazayeva V, Solomatin A, Chausov D, Shoshin V, Bobyllov Yu.</i> Liquid crystal capacitor temperature sensor	40
 TECHNOLOGIES AND TECHNIQUES OF TRAINING	48
<i>Vlasova A., Gribov A., Popov V., Latyshev A.</i> The development of incentives training in the framework of the rating systems of the educational process	48
 OUR AUTHORS	54

УДК 517.9/98+533.72

Кинетическое одномерное уравнение с частотой столкновений, аффинно зависящей от модуля скорости / А.Л. Бугримов, А.В. Латышев, А.А. Юшканов // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2014. №1. С.3-15.

Построено одномерное кинетическое уравнение с интегралом столкновений БГК (Бхатнагар, Гросс и Крук). Частота столкновений молекул считается аффинно зависящей от модуля молекулярной скорости. При построении используются законы сохранения числа частиц, импульса и энергии. Разделение переменных приводит к характеристическому уравнению. Вводится система дисперсионных уравнений. Ее определитель называется дисперсионной функцией. Исследуется непрерывный и дискретный спектры характеристического уравнения. Множество нулей дисперсионного уравнения составляет дискретный спектр характеристического уравнения. Найдены собственные решения кинетического уравнения, отвечающие дискретному спектру. Решение характеристического уравнения в пространстве обобщенных функций приводит к собственным функциям, отвечающим непрерывному спектру. Результаты проведенного анализа сформулированы в виде теоремы о структуре общего решения введенного кинетического уравнения.

Ил.1. Библиогр.17.

УДК 530

Возможности вариации размерности фрактальных множеств / А.Л. Бугримов, Д.Д. Бычкова, В.С. Кузнецов // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2014. №1. С.16-21.

Продемонстрирована возможность вариации размерности фрактальных множеств. Построены фракталы, размерность Хаусдорфа–Безиковича которых превышает топологическую более чем на единицу.

Ил.6. Библиогр.4.

УДК 539.1.01

Emergent gravity, entropy, and quantum entanglement / D.V. Fursaev // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2014. №1. С.22-27.

Порождаемая гравитация, энтропия и квантовое перепутывание / Д.В. Фурсаев // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2014. №1. С.22-27

A brief review of a set of ideas which relate gravity, entropy and quantum entanglement is given. The key idea is that gravity is an emergent or induced, in Sakharov's sense, phenome-

non and it is holographic, as has been suggested by t'Hooft. The low-energy physics is described by effective equations of some microscopic degrees of freedom. It is important that the entanglement entropy of these microscopic constituents across a surface is given by the Bekenstein-Hawking entropy formula. It means that all microscopic details are encoded in macroscopic low-energy constants. It is very similar to what happens in thermodynamics so that gravity, by following the Verlinde suggestion, may be interpreted as an entropic gravity. An explicit realization of this idea appears in a holographic description of entanglement entropy in conformal field theories.

Дается краткий обзор научных идей, которые связывают такие понятия как гравитация, энтропия и квантовое перепутывание. Ключевая идея состоит в том, что гравитация может быть "порождаемой" или "индуцированной", в духе идей А.Д. Сахарова, а также гравитационные явления могут обладать голографическими свойствами, как впервые было отмечено Г. 'т Хоофтом. Низкоэнергетическая физика описывается эффективными уравнениями некоторых микроскопических степеней свободы. Важно, что энтропия перепутывания этих микроскопических конститuentов на некоторой поверхности дается формулой Бекенштейна-Хокинга. Это означает, что все микроскопические детали теории оказываются "зашифрованными" в конечном наборе макроскопических параметров. Это настолько напоминает то, что происходит в обычной термодинамике, что сама гравитация, следуя Г. Верлинде, возможно, имеет энтропийную основу. Подтверждением этих гипотез и их конкретной реализацией выступает голографическое представление энтропии перепутывания в определенном классе конформных теорий.

Библиогр.18.

УДК 532.517;532.526.75

Об условиях течения вязкой жидкости на границе жидкость - проницаемая поверхность с учетом инерционных эффектов жидкости / Ю.Н.Гордеев, Е.Б. Сандаков // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2014. №1. С.28-32.

Рассматривается вопрос об условиях на границе вязкая жидкость – проницаемая поверхность с учетом инерционных эффектов жидкости в пористой среде. Этот вопрос и рассмотрен в предлагаемой статье на примере задачи о вращении проницаемого диска на поверхности несжимаемой вязкой жидкости . Указанная задача является обобщением классической задачи Кармана о вращении непроницаемого диска .В предположении, что течение в пористом диске описывается уравнениями Бринкмана, получено автомодельное решение задачи.

Библиогр.7.

УДК: 539.516

Условие Биверса-Джозефа при течении несжимаемой жидкости в окрестности критической точки на границе с пористой средой / Ю.Н.Гордеев, Е.Б.Сандаков // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2014. №1. С.33-39

В данной работе рассматривается задача с критической точкой о стационарном натекании вязкой жидкости на проницаемую плоскость в плоском и осесимметричном случаях, расположенную перпендикулярно потоку. В таких течениях тангенциальная компонента поля скорости потока вязкой жидкости в критических точках на поверхности проницаемого полупространствам меняет знак. Получено автомодельное решение и в рамках рассмотренной модели показано, что краевым условием на границе между жидкостью и средой является условие Биверса-Джозефа-Саффмана.

Ил.1. Библиогр.7.

УДК 538.956 + 621.362.1

Жидкокристаллический емкостной датчик температуры / Ан.Ал. Муравский, Ал.Ан. Муравский, В.В. Беляев, Д.О. Рыбаков, В.Г. Мазаева, А.С. Соломатин, Д.Н. Часусов, В.М. Шошин, Ю.П. Бобылев // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2014. №1. С.40-47.

Данная работа посвящена исследованию диэлектрических свойств жидких кристаллов с целью создания, на их основе, датчиков температуры. Отличительной чертой таких датчиков является компактность, универсальность и высокая точность измерения. Новизна данной исследовательской работы обусловлена новой методикой проведения эксперимента. Предметом исследования является реакция(отклик) ЖК материалов при воздействии на них температуры. Для достижения этой цели были созданы комбинированные ячейки с ЖК материалом, которые подвергались воздействию температуры. В ходе исследования выяснилось, что предложенная структура с комбинированной ориентацией ЖК дает возможность формировать сигналы высокого и низкого уровня при изменении температуры, а так же возможность создавать устройства для контроля и регулирования равномерности распределения температуры ЖК панели и других электронных устройств.

Ил.6. Библиогр.17. Табл.1.

УДК 37.012

Развитие мотивационных стимулов обучения в рамках модульно-рейтинговой системы организации учебного процесса / Е.А. Власова, А.Ф. Грибов, В.С. Попов, А.В. Латышев // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2014. №1. С.48-53

В статье рассматриваются вопросы, связанные с введением индивидуального рейтинга обучающегося, его влияние на развитие мотивационных стимулов обучения, освоения образовательных программ на базе дифференциации оценки результатов учебной работы.

Библиогр.4.Табл.3.

ПРАВИЛА

подготовки рукописей, представленных для опубликования в журнале
«Вестник Московского государственного областного университета.
Сер. Физика - математика»

Для публикации научных работ в выпусках серии «Вестник МГОУ» принимаются статьи на русском языке. Публикуются научные материалы преимущественно докторантов, аспирантов, соискателей, преподавателей ВУЗов, докторов и кандидатов наук.

Требования к оформлению статей. Статья должна быть представлена:

- в текстовом варианте (текст статьи должен быть подписан всеми авторами);
- в виде документа MS Word (с расширением doc);
- в виде файла в формате rtf;

Файл должен содержать построчно:

На русском языке	УДК (в верхнем левом углу первого листа рукописи) НАЗВАНИЕ СТАТЬИ – прописными буквами Фамилия, имя, отчество Полное наименование организации (в скобках – сокращенное), почтовый адрес Должность (другие сведения, например, E-mail, телефон) Аннотация (1 абзац до 400 символов) под заголовком «АННОТАЦИЯ» Ключевые слова
На английском языке	НАЗВАНИЕ СТАТЬИ – прописными буквами Фамилия, инициалы Полное наименование организации, почтовый адрес Аннотация (1 абзац до 400 символов) под заголовком «Abstract» Ключевые слова (Key words)
На русском языке	Объем статьи ограничен темя уровнями: а) 12 страниц с числом иллюстраций до пяти (к этим статьям предъявляются повышенные требования); б) 6 страниц с числом иллюстраций до трех (содержатся основные результаты без излишних деталей выводов и доказательств); в) 4 страницы с числом иллюстраций до двух (выходят в разделе краткие сообщения вне очереди). Список использованной литературы под заголовком «ЛИТЕРАТУРА»

Формат страницы – А4, книжная ориентация. Поля – 2,5 см. Шрифт Times New Roman Cyrillic, цвет шрифта черный, размер 12 пикселей, междустрочный интервал – полуторный.

Запрещены специфические действия над текстом и встраиваемые коды: уплотнение интервалов, использование цветовых заливок, «красные строки», центрирование, табуляция, отступы, переносы в словах (делаемые автором), ссылки, гиперссылки, сноски (лучше их оформлять в виде примечаний, замечаний и т.п.). Не допускаются сокращения слов, имен, названий, за исключением общепринятых (и оговоренных).

Формулы нумеруются (справа) только те, на которые в тексте имеются ссылки.

Рисунки и таблицы допускаются в том случае, если описать процесс в текстовой форме невозможно. В этом случае каждый из объектов не должен превышать указанные размеры страницы, а шрифт в нем – 12 пикселей. Возможно использование только вертикальных таблиц и рисунков. Запрещены цветовые заливки, применение «фонов».

Рисунки, схемы, графики выполняются на отдельных листах в формате, обеспечивающем ясность передачи деталей. Места расположения иллюстраций в тексте должны быть указаны простым карандашом на полях. На обороте иллюстрации должны быть написаны фамилия автора и название статьи. Текст к иллюстрациям, а также таблицы следует поместить на отдельных страницах. Все рисунки, схемы, графики, таблицы должны иметь названия.

Все формулы должны быть созданы с использованием компонента Microsoft Equation, (MathType 4.0). Размер шрифта также 12 пикселей. Формула создается однократным запуском компонента Microsoft Equation (MathType 4.0). Запрещается создавать составные формулы! Небольшие строчные фрагменты типа ΔU_{ij} или $C^{(m)} = (c_{1m}, c_{1m}, \dots)^T$ следует набирать обычным способом в латинице, используя средства панели инструментов: изменение шрифта на курсив, написание верхних и нижних индексов, а также вставку символов. При этом следует обратить внимание на написание цифр, скобок, операторов и наименований функций (Δ , $\sin$, $\cos$, ...) прямым шрифтом. Хорошее представление об оформлении математических текстов дает чтение научных журналов Российской академии наук физико-математического направления, классических учебников по физике и математике для высших учебных заведений.

Абзацы должны быть отделены друг от друга пустой строкой (дополнительным «Enter»).

Список литературы должен содержать библиографические сведения о всех публикациях, упоминаемых в статье, и не должен содержать указаний на работы, на которые в тексте нет ссылок. Располагать публикации в списке следует по алфавиту, вначале следует приводить отечественные публикации, затем – иностранные. Список литературы приводится на отдельном листе с обязательным указанием следующих данных: для книг (монография, сборник и т.д.) – фамилия (после фамилии ставится запятая), инициалы автора, название книги, место издания (город), издательство, год издания; для журнальных статей – фамилия и инициалы автора, название статьи, название журнала, год издания, том, номер, выпуск, страницы (первая и последняя). **Обращаем Ваше внимание!** С 01.07.2004 введен новый стандарт ГОСТ 7.1-2003 «Библиографическая запись. Библиографическое описание. Общие требования и правила составления». Наиболее распространенные примеры:

1. Иванов, И.И. Название книги / И.И. Иванов. - М.: Наука, 2009. – 205 с.
2. Иванов, И.И. Название книги / И.И. Иванов, П.М. Петров, К.Л. Данилов. - М.: Наука, 2009. – 205 с.
3. Иванов, И.И. Название книги / И.И. Иванов [и др. (если 4 автора и более)]. - М.: Наука, 2009. – 205 с.
4. Название книги / И.И. Иванов [и др.], под ред. И.И. Иванова. - М.: Наука, 2009. – 205 с.
5. Иванов, И.И. Название статьи / И.И. Иванов, П.М. Петров, К.Л. Данилов // Название сборника. - М.: Механика, 2009. – С.51-59.
6. Иванов, И.И. Название статьи / И.И. Иванов, П.М. Петров, К.Л. Данилов // Название журнала. – 2009. - №2. - С.51-59.

Ссылки на неопубликованные работы не допускаются.

Редакционная коллегия оставляет за собой право на редактирование статей, хотя с точки зрения научного содержания авторский вариант сохраняется. Статьи, не соответствующие указанным требованиям, решением редакционной коллегии серии не публикуются и не возвращаются (почтовой пересылкой).

В случае принятия статьи, условия опубликования оговариваются с ответственным редактором.

Ответственный редактор серии «Физика-математика» декан физико-математического факультета, доктор технических наук, профессор Бугримов Анатолий Львович.

Адрес редколлегии серии «Физика-математика» «Вестника МГОУ»: 105005, Москва, ул. Радио, д.10-а, комн. 36. Тел. (495) 261-09-48



ВЕСТНИК Московского государственного областного университета

Научный журнал «Вестник МГОУ» основан в 1998 г. На сегодняшний день выходят десять серий «Вестника»: «История и политические науки», «Экономика», «Юриспруденция», «Философские науки», «Естественные науки», «Русская филология», «Физика-математика», «Лингвистика», «Психологические науки», «Педагогика». Все серии включены в составленный Высшей аттестационной комиссией Перечень ведущих рецензируемых научных журналов, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертации на соискание ученой степени доктора и кандидата наук по наукам, соответствующим названию серии. Журнал включен в базу данных Российского индекса научного цитирования (РИНЦ).

Печатная версия журнала зарегистрирована в Федеральной службе по надзору за соблюдением законодательства в сфере массовых коммуникаций и охране культурного наследия. Полнотекстовая версия журнала доступна в Интернете на платформе Научной электронной библиотеки (www.elibrary.ru), а также на сайте Московского государственного областного университета (www.vestnik.mgou.ru).

ВЕСТНИК МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ОБЛАСТНОГО УНИВЕРСИТЕТА

**Серия «Физика-Математика»
2014. № 1**

Над номером работали:

менеджер Отдела по изданию журнала «Вестник МГОУ» *И.А. Потапова*
компьютерная верстка *А.Л. Бугримов*

Отдел по изданию научного журнала «Вестник МГОУ»
105005, г. Москва, ул. Радио, д.10а, офис 98
тел. (499) 261-43-41; (495) 723-56-31
e-mail: vest_mgou@mail.ru
Сайт: www.vestnik-mgou.ru

Формат 60x86/8. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Гарнитура «Minion Pro». Тираж 320 экз. Усл. п.л. 8.
Подписано в печать 21.03.2014. Заказ № 28.
Отпечатано в типографии МГОУ
105005, г. Москва, ул. Радио, 10а

К сведению авторов «Вестника МГОУ»

Для публикации научных работ в выпусках серий «Вестника МГОУ» принимаются статьи на русском языке. Статья должна соответствовать научным требованиям и общему направлению серии журнала, быть интересной достаточно широкому кругу российской научной общественности.

Материал, предлагаемый для публикации, должен быть оригинальным, неопубликованным ранее в других печатных изданиях, написан в контексте современной научной литературы, и содержать очевидный элемент создания нового знания. Представленные статьи проходят проверку в программе «Антиплагиат». Отдел по изданию научного журнала «Вестника МГОУ» проводит независимое (внутреннее) рецензирование.

За точность воспроизведения имен, цитат, формул, цифр несет ответственность автор. Редакционная коллегия оставляет за собой право на редактирование статей без изменения научного содержания авторского варианта. Статьи, не соответствующие требованиям Отдела по изданию «Вестника МГОУ», решением редакционной коллегии серии не публикуются.

Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается. Статьи аспирантов МГОУ печатаются в первую очередь, статьи аспирантов других вузов по мере возможности, определяемой в каждом конкретном случае ответственным редактором предметной серии. Оплата статей сторонних авторов (не аспирантов) после принятия статьи ответственным редактором предметной серии должна покрыть издательские расходы «Вестника МГОУ» на ее публикацию. В журнале не будут публиковаться статьи авторов, не предоставивших квитанцию почтовой подписки на «Вестник МГОУ».

Для публикации научной статьи в определенной серии «Вестника МГОУ» автору необходимо предоставить в Отдел по изданию научного журнала «Вестник МГОУ»: 1) авторскую анкету; 2) заявление на имя ответственного редактора (оригинал или факсимильную копию); 3) выписку из заседания кафедры (отдела, сектора), где выполнялась работа (оригинал или факсимильную копию); 4) текст статьи в электронном виде; 5) квитанцию о полугодовой подписке (оригинал или факсимильную копию); 6) внешнюю рецензию (отзыв) (оригинал или факсимильную копию).

По вопросам публикации следует обращаться в Отдел по изданию научного журнала «Вестник МГОУ»: статья регистрируется автором в Отделе, после чего проходит внутреннее рецензирование и при положительной рецензии и наличии необходимых документов принимается к публикации.

В случае положительного решения вопроса о публикации, автор, предоставивший свою статью в определенную серию «Вестника МГОУ», выражает согласие на размещение полного текста статьи в сети Интернет на официальных сайтах журнала «Вестник Московского государственного областного университета» (www.vestnik.mgou.ru) и Научной электронной библиотеки (www.elibrary.ru) (См.: ст. 1286 и 1238 Гражданского Кодекса Российской Федерации).

Подробная информация об оформлении статей и условиях их публикации размещена на сайте журнала (<http://vestnik.mgou.ru>), пункт «Авторам».

По финансовым и организационным вопросам публикации статей
обращаться в Отдел по изданию журнала «Вестник МГОУ» к Потаповой Ирине Александровне
105005, г. Москва, ул. Радио, д.10а, офис 98;
тел. (499) 261-43-41; (495) 723-56-31;
e-mail: vest_mgou@mail.ru