ISSN 2072-8387 (print)
ISSN 2310-7251 (online)

Вестник

Московского государственного областного университета

Серия Физика-математика

Кулоновские поправки к вероятности ионизации двумерного атома суперпозицией постоянного и переменного электрических полей

К вопросу приложения второй ковариантной производной от векторной функции к задачам гидродинамики и теории упругости

Эффект высокоскоростного перехлёста в ударной волне с предельным сжатием

2019/ № 3

ВЕСТНИК
МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
ОБЛАСТНОГО УНИВЕРСИТЕТА

ISSN 2072-8387 (print) 2019 / № 3 ISSN 2310-7251 (online)

серия

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА

Рецензируемый научный журнал. Основан в 1998 г.

Журнал «Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика» включён Высшей аттестационной комиссией при Министерстве образования и науки Российской Федерации в «Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук» по следующим научным специальностям: 01.04.02 – Теоретическая физика (физико-математические науки); 01.04.07 – Физика конденсированного состояния (физико-математические науки) (См.: Список журналов на сайте ВАК при Минобрнауки России).

The peer-reviewed journal was founded in 1998

«Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics» is included by the Supreme Certifying Commission of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation into "the List of leading reviewed academic journals and periodicals recommended for publishing in corresponding series basic research thesis results for a Ph.D. Candidate or Doctorate Degree" on the following scientific specialities: 01.04.02 – Theoretical physics (physical-mathematical sciences); 01.04.07 – Physics of the condensed state (physical-mathematical sciences) (See: the online List of journals at the site of the Supreme Certifying Commission of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation).

ISSN 2072-8387 (print) 2019 / № 3 ISSN 2310-7251 (online)

series

PHYSICS AND MATHEMATICS

BULLETIN OF THE MOSCOW REGION
STATE UNIVERSITY

Учредитель журнала
«Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика»
Государственное образовательное учреждение высшего образования Московской области
Московский государственный областной университет
Выходит 4 раза в год

ISSN 2072-8387 (print)
ISSN 2310-7251 (online)

Рецензируемый научный журнал «Вестник московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика» публикует статьи по математическим проблемам термодинамики, кинетики и статистической физики; теории конденсированного состояния классических и квантовых, макроскопических и микроскопических систем; изучению различных состояний вещества и физических явлений в них; статистической физике и кинетической теории равновесных и неравновесных систем; теоретическому и экспериментальному исследованию физических свойств неупорядоченных неорганических систем; изучению экспериментального состояния конденсированных веществ и фазовых переходов в них. Журнал адресован ученым, докторантам, аспирантам и всем, интересующимся достижениями физико-математических наук.

Журнал «Вестник Московского государственного областного университета. Серия «Физика-математика» зарегистрирован в Федеральной службе по надзору за соблюдением законодательства в сфере массовых коммуникаций и охране культурного наследия. Регистрационное свидетельство ПИ № ФС 77-73344.

Индекс серии «Физика-математика» по Объединенному каталогу «Пресса России» 40723

Журнал включён в базу данных Российского индекса научного цитирования (РИНЦ), имеет полнотекстовую сетевую версию в Интернете на платформе Научной электронной библиотеки (www.elibrary.ru), с августа 2017 г. на платформе Научной электронной библиотеки «КиберЛенинка» (https://cyberleninka.ru), а также на сайте Московского государственного областного университета (www.vestnik-mgou.ru).

Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. – 2019. – № 3. – 98 с.

Адрес Отдела по изданию научного журнала «Вестник Московского государственного областного университета»
г. Москва, ул. Радио, д.10А, офис 98
тел. (495) 723-56-31; (495) 780-09-42 (доб. 6101)
e-mail: vest_mgou@mail.ru; сайт: www.vestnik-mgou.ru

Founder of journal
«Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics»
Moscow Region State University

Issued 4 times a year

ISSN 2072-8387 (print)
ISSN 2310-7251 (online)

The reviewed scientific journal "Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics" publishes articles on mathematical problems of thermodynamics, kinetics and statistical physics; the theory of the condensed state of classical and quantum, macroscopic and microscopic systems; the study of various states of substance and physical phenomena in them; statistical physics and the kinetic theory of equilibrium and non-equilibrium systems; theoretical and experimental research of physical features of disordered inorganic systems; the study of the experimental state of condensed substances and phase transitions in them. The journal is addressed to scientists, doctoral students, PhD students and everyone interested in the achievements of physical and mathematical sciences.

The series «Physics and Mathematics» of the Bulletin of the Moscow Region State University is registered in Federal service on supervision of legislation observance in sphere of mass communications and cultural heritage protection. The registration certificate ПИ № ФС 77 - 73344.

Index series «Physics and Mathematics» according to the union catalog «Press of Russia» 40723

The journal is included into the database of the Russian Science Citation Index, has a full text network version on the Internet on the platform of Scientific Electronic Library (www.elibrary.ru), and from August 2017 on the platform of the Scientific Electronic Library "CyberLeninka" (https://cyberleninka.ru), as well as at the site of the Moscow Region State University (www.vestnik-mgou.ru)

Bulletin of the Moscow State Regional University. Series: Physics and Mathematics. – 2019. – № 3. – 98 p.

The Editorial Board address:
Moscow Region State University
10A Radio st., office 98, Moscow, Russia
Phones: (495) 723-56-31; (495) 780-09-42 (add. 6101)
e-mail: vest_mgou@mail.ru; site: www.vestnik-mgou.ru

СОДЕРЖАНИЕ

РАЗДЕЛ I. МАТЕМАТИКА

РАЗДЕЛ II. ФИЗИКА

CONTENTS

SECTION I. MATHEMATICS

SECTION II. PHYSICS

РАЗДЕЛ I.
МАТЕМАТИКА

УДК 514.76 + 512.54
DOI: 10.18384-2310-7251-2019-3-6-14

О ПРОЕКТИВНО СИММЕТРИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЯХ АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ НУЛЕВОЙ КРИВИЗНЫ

Матвеев О. А., Птицына И. В., Фролов О. В.
Московский государственный областной университет
141014, Московская область, г. Мытищи, ул. Веры Волошиной, д. 24, Российская Федерация

Аннотация. Обсуждаются геометрические свойства многообразий аффинной связности нулевой кривизны, имеющих общие геодезические линии с сохранением аффинного (канонического) параметра с локально симметрическими пространствами. Этот класс пространств характеризуется тождествами, которым удовлетворяет тензорное поле кручения и его ковариантные производные. Для этого класса аффинно связных многообразий исследуются геодезические лупы с гомотетиями.

Ключевые слова: многообразия аффинной связности нулевой кривизны, симметрические пространства аффинной связности, геодезическая лупа, параллельные переносы, гомотетия

ON PROJECTIVE SYMMETRIC ZERO CURVATURE MANIFOLDS WITH AFFINE CONNECTION

O. Matveyev, I. Pticina, O. Frolov
Moscow Region State University
ul. Very Voloshinoi 24, 141014 Mytishchi, Moscow region, Russian Federation

Abstract. The paper deals with the geometric properties of the zero curvature manifolds with affine connection having common geodesic lines with preservation of the affine (canonical) parameter with locally symmetric spaces of affine connectivity. This class of spaces is characterized by identities satisfied by the torsion tensor field and its covariant derivatives. Geodesic loops with homotheties of this class of affine connected manifolds are investigated.

Keywords: manifolds with affine connection of zero curvature, symmetric spaces with affine connection, a geodesic loop, parallel translations, homothety

Свойства параллельных переносов и гомотетий рассматривались в различных классах пространств аффинной связности, см. например [1–7]. В настоящей работе исследуются пространства постоянной кривизны. Поскольку этот класс пространств очень широк, мы накладываем дополнительное условие, требуем, чтобы пространство имело общие геодезические линии с сохранением аффинного (канонического) параметра с локально симметрическим пространством аффинной связности.

Определение 1. Аффинно связное многообразие (M, ∇) называется локально *просимметрическим* (*проективно симметрическим первого типа*), если оно имеет общие геодезические линии с сохранением аффинного (канонического) параметра с локально симметрическим пространством аффинной связности $(M, \overline{\nabla})$.

Предложение 1. Пусть (M, ∇) – аффинно связное многообразие, T и R – его поля кручения и кривизны. Тогда следующие утверждения (a)–(c) эквивалентны:

(a) (M, ∇) является просимметрическим;

(b) аффинно связное многообразие $(M, \overline{\nabla})$, где $\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - \frac{1}{2}T(X,Y)$, является локально симметрическим;

(c) в (M, ∇) выполняется следующее тождество:

$$(\nabla_X \overline{R})(Y,Z,W) + \frac{1}{2}\overline{R}(T(X,Y),Z)W + \frac{1}{2}\overline{R}(Y,T(X,Z))W + \\ + \frac{1}{2}\overline{R}(Y,Z)T(X,W) - \frac{1}{2}T(X,\overline{R}(Y,Z)W) = 0, \qquad (1)$$

где

$$\overline{R}(X,Y)Z = R(X,Y)Z - \frac{1}{2}(\nabla_X T)(Y,Z) + \frac{1}{2}(\nabla_Y T)(X,Z) + \frac{1}{4}T(X,T(Y,Z)) - \\ - \frac{1}{4}T(Y,T(X,Z) + \frac{1}{2}T(Z,T(X,Y)), \qquad (2)$$

X, Y, Z, W – дифференцируемые векторные поля на M.

Предложение 2. Аффинно связное многообразие (M, ∇) просимметрично и имеет нулевую кривизну тогда и только тогда, когда выполняется следующее соотношение:

$$\begin{aligned}
&4(\nabla_W\nabla_Z T)(X,Y)-2(\nabla_W T)(X,T(Y,Z))+2(\nabla_W T)(Y,T(X,Z))+\\
&+2(\nabla_Z T)(T(W,X),Y)-2(\nabla_Z T)(T(W,X),Y)-2T(X,(\nabla_W T)(Y,Z)+\\
&+2T(Y,(\nabla_W T)(X,Z)+2(\nabla_{T(W,Z)}T)(X,Y)-2T(W,(\nabla_Z T)(X,Y))-\\
&-T(T(W,X),T(Y,Z))+T(Y,T(T(W,X),Z))-T(T(W,Y),T(X,Z))-\\
&-T(X,T(T(W,Y),Z)-T(X,T(Y,T(W,Z)))+T(Y,T(X,T(W,Z)))+\\
&\qquad+T(W,T(X,T(Y,Z)))-T(W,T(Y,T(X,Z)))=0. \qquad (3)
\end{aligned}$$

Доказательство. Пусть $\overline{\nabla}_X Y=\nabla_X Y-\frac{1}{2}T(X,Y)$, тогда тензор кривизны $\overline{R}$ в $(M,\overline{\nabla})$ выражается следующим образом:

$$\begin{aligned}
4\overline{R}(X,Z)Z &\overset{(2)}{=} -2(\nabla_X T)(Y,Z)+2(\nabla_Y T)(X,Z)+\\
&+T(X,T(Y,Z))-T(Y,T(X,Z))+2T(Z,T(X,Y))=\\
&=2(\nabla_Z T)(X,Y)-T(X,T(Y,Z))+T(Y,T(X,Z)) \qquad (4)
\end{aligned}$$

Теперь, используя (4) и (1), получим (3). ▲

Предложение 3. Пусть (M, ∇) – аффинно связное многообразие Муфанг, т. е.

$$R=0,\quad 3(\nabla_Z T)(X,Y)=T(Z,T(X,Y))+T(X,T(Y,Z))+T(Y,T(Z,X)).$$

Тогда (M, ∇) является просимметрическим с нулевой кривизной.

Доказательство. Если положить $\overline{\nabla}_X Y=\nabla_X Y-\frac{1}{2}T(X,Y)$, то

$$\begin{aligned}
&12\overline{R}(X,Z)Z=-T(X,T(Y,Z))-T(Y,T(Z,X))+2T(Z,T(X,Y)),\\
&6(\overline{\nabla}_Z T)(X,Y)=-T(X,T(Y,Z))-T(Y,T(Z,X))-T(Y,T(Z,X)).
\end{aligned}$$

Ковариантно дифференцируя обе части первого из этих равенств, и, применяя второе равенство, убеждаемся, что $\overline{\nabla}\overline{R}=0$. ▲

Предложение 4. Пусть $(M,\overline{\nabla})$ – локально симметрическое многообразие, и T – тензорное поле, такое, что

$$T(X,Y)=-T(Y,X), \qquad (5)$$

$$\overline{R}(X,Y)Z=\frac{1}{2}(\overline{\nabla}_Z T)(X,Y)+\frac{1}{4}T(Z,T(X,Y)). \qquad (6)$$

Тогда $(M,\overline{\nabla})$, где $\nabla_X Y=\overline{\nabla}_X Y+\frac{1}{2}T(X,Y)$, является просимметрическим с нулевой кривизной.

Предложение 5. Любое аналитическое просимметрическое многообразие (M, ∇) нулевой кривизны локально определено в достаточно малой окрестности точки $e \in M$ его касательной алгеброй $M_e=\left\langle T_e(M),\left[\ ,\ ,\ \right],*\right\rangle$. Касательная алгебра M_e является тернарной системой Ли с тройной операцией [, ,], связанной с бинарной операцией * следующим тождеством:

$$X*[Z,W,Y]+Y*[W,Z,Y]+Z*[X,Y,W]+W*[Y,Z,X]=0, \qquad (7)$$

$$X,\ Y,\ Z,\ W\in T_e(M).$$

Доказательство. Здесь мы изложим только основную идею. Хорошо известно, что симметрическое пространство (M, ∇) локально определяется его касательной тернарной системой Ли. С другой стороны, дифференциальные продолжения уравнения (6) заключаются в следующем тождестве:

$$T(X,\overline{R}(Z,W)Y)+T(Y,\overline{R}(W,Z)X)+T(Z,\overline{R}(X,Y)W)+T(W,\overline{R}(Y,X)Z)=0. \quad (8)$$

Если положить $X*Y=-T(X,Y)$, $X,Y\in T_e(M)$, то мы получим тождество (7).

Определение 2. Аффинно связное многообразие (M, ∇) называется *проабелевым (проективно плоским первого типа)*, если оно имеет общие геодезические линии с локально плоским пространством $(M,\overline{\nabla})$, с сохранением аффинного (канонического) параметра.

Предложение 6. Проабелево многообразие является просимметрическим (обратное неверно).

Предложение 7. Пусть (M, ∇) – аффинно связное многообразие, T и R – его поля кручения и кривизны.

Тогда эквивалентны следующие утверждения (a)–(c):

(a) (M, ∇) является проабелевым;

(b) аффинно связное многообразие $(M,\overline{\nabla})$, где $\overline{\nabla}_X Y=\nabla_X Y-\frac{1}{2}T(X,Y)$, является локально плоским многообразием;

(c) в (M, ∇) выполняется следующее тождество:

$$R(X,Y)Z=\frac{1}{2}(\nabla_X T)(Y,Z)-\frac{1}{2}(\nabla_Y T)(X,Z)-\frac{1}{4}T(X,T(Y,Z))+$$
$$+\frac{1}{4}T(Y,T(X,Z))-\frac{1}{2}T(Z,T(X,Y)). \qquad (9)$$

Следствие 1. Аффинно связное многообразие (M, ∇) является проабелевым с нулевой кривизной тогда и только тогда, когда выполняется тождество:

$$(\nabla_X T)(Y,Z)-(\nabla_Y T)(X,Z)-\frac{1}{2}T(X,T(Y,Z))+$$
$$+\frac{1}{2}T(Y,T(X,Z))-T(Z,T(X,Y))=0. \qquad (10)$$

Замечание. Используя тождества Бианки, убеждаемся, что тождество (10) эквивалентно следующему:

$$2(\nabla_Z Y)(X,Y)=T(X,T(Y,Z))+T(Y,T(Z,X)). \qquad (11)$$

Предложение 8. Пусть $(M,\overline{\nabla})$ – локально плоское многообразие (т. е. $\overline{T}=0,\ \overline{R}=0$). Пусть T – тензорное поле на M, такое, что $T(X,\ Y) = -T(Y,\ X)$, и

$$2(\overline{\nabla}_Z T)(X,Y) = T(T(X,Y),Z). \tag{12}$$

Тогда $(M,\ \nabla)$, где $\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - \frac{1}{2}T(X,Y)$, является проабелевым нулевой кривизны.

Следующая схема иллюстрирует взаимное расположение подклассов просимметрических пространств (см. рис. 1).

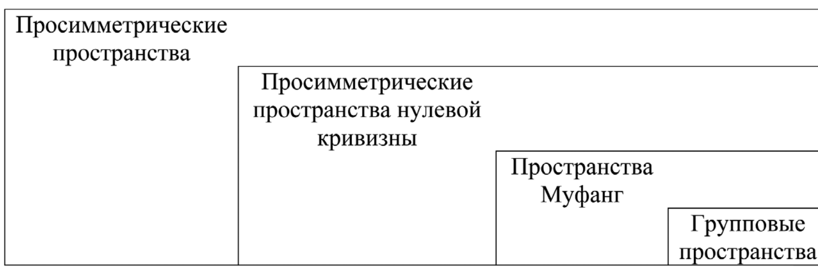

Рис. 1. Расположение подклассов просимметрических пространств.

Определение 3. Геодезическая лупа с гомотетиями $\bar{\mathcal{M}}_e = \left\langle M, S^e, \left\{t_e\right\}_{t\in\mathbb{R}}, e\right\rangle$ называется симметрической, если локально выполняются следующие тождества (когда одновременно правые и левые части имеют смысл):

$$S^e_{t_e x} \circ S^e_{u_e x} = S^e_{(t+u)_e x} \tag{13}$$

$$S^e_{S^e_x\, S^e_y x} = S^e_x \circ S^e_y \circ S^e_x \tag{14}$$

$$\left(-1\right)_e \circ S^e_x = S^e_{\left(-1\right)_e x} \circ \left(-1\right)_e \tag{15}$$

$$\overline{l}^{\,e}\left(x,y\right) \circ t_e = t_e \circ \overline{l}^{\,e}\left(x,y\right), \tag{16}$$

где $\overline{l}^{\,e}\left(x,y\right) = \left(S^e_{S^e_x y}\right)^{-1} \circ S^e_x \circ S^e_y$.

Замечание. Тождество (14) в теории квазигрупп и луп называется левым тождеством Бола.(см.,например, [2; 8]).

Предложение 9. Пространство аффинной связности является симметрическим, если и только если все его локальные геодезические лупы с гомотетиями симметрические.

Определение 4. Геодезическая лупа с гомотетиями $\mathcal{M}_e = \left\langle M, L^e, \left\{t_e\right\}_{t\in\mathbb{R}}, e\right\rangle$ называется просимметрической, если $\bar{\mathcal{M}}_e = \left\langle M, S^e, t_e, e\right\rangle$ – симметрическая, где

$$S_x^e = (-1)_{\left(\frac{1}{2}\right)_e x} \circ (-1)_e = L^e_{\left(\frac{1}{2}\right)_e x} \circ (-1)_e \circ \left(L^e_{\left(\frac{1}{2}\right)_e x} \right)^{-1} \circ (-1)_e . \quad (17)$$

Предложение 10. Дифференцируемая просимметрическая локальная геодезическая лупа с гомотетиями $\mathcal{M}_e = \left\langle M, L^e, \{t_e\}_{t\in\mathbb{R}}, e \right\rangle$ является просимметрической, если и только если выполняются следующие тождества:

$$(-1)_x \; t_y z = t_w (-1)_x z, \quad (18)$$

где $w = (-1)_x y$

$$(-1)_x (-1)_a = (-1)_b (-1)_y z, \quad (19)$$

где $a = t_x y, b = t_y x.$

Замечание. Тождество (19) эквивалентно следующему соотношению:

$$(-1)_{(t+1)_x y} \circ (-1)_{t_x y} = (-1)_y \circ (-1)_x \quad (20)$$

Очевидно, что просимметрическая геодезическая лупа с гомотетиями является симметрической, обратное неверно.

Предложение 11. Дифференцируемая просимметрическая локальная геодезическая лупа с гомотетиями $\mathcal{M}_e = \left\langle M, L^e, \{t_e\}_{t\in\mathbb{R}}, e \right\rangle$ является просимметрической, если и только если она может быть включена в качестве геодезической лупы в просимметрическое аффинно связное многообразие.

Предложение 12. Дифференцируемая просимметрическая локальная геодезическая лупа с гомотетиями $\mathcal{M}_e = \left\langle M, L^e, \{t_e\}_{t\in\mathbb{R}}, e \right\rangle$ может быть включена в качестве геодезической лупы в просимметрическое аффинно связное многообразие (M, ∇) нулевой кривизны, если и только если удовлетворяется тождество правой моноальтернативности:

$$L^e_{L^e_x y} t_e y = L^e_x (t+1)_e \, y \Leftrightarrow l^e(x,y) t_e y = t_e y \quad (21)$$

Замечание. Тождества (21) имеют следующие следствия:

$$(-1)_e \left(L^e_x\right)^{-1} y = \left(L^e_y\right)^{-1} x. \quad \left((x \setminus y)^{-1} = y \setminus x \right). \quad (22)$$

Действительно, $L^e_{L^e_x z} (-1) z = L^e_x (1-1)_e \, z = L^e_x e = x.$ Если мы положим

$z = \left(L^e_x\right)^{-1} y,$ то $L^e_x z = y,$ и мы приходим к соотношениям (22).

Предложение 13. Дифференцируемая правомоноальтернативная локальная геодезическая лупа с гомотетиями $\mathcal{M}_e = \left\langle M, L^e, \{t_e\}_{t\in\mathbb{R}}, e \right\rangle$ является просимметрической, если и только если удовлетворяются тождества:

$$x_{\dot{e}}\left(\left[\left(x_{\dot{e}}a\right)_{\dot{e}}\left(t_e z\right)\right]\backslash_e x\right)=\left(x_{\dot{e}}\left(-1\right)_e a\right)_{\dot{e}} t_e[\left(x_{\dot{e}}\left(-1\right)_e a\right)\backslash_e \ (x_{\dot{e}}\left[\left[\left(x_{\dot{e}}a\right)_{\dot{e}} z \backslash_e x\right]\right)\right]. \quad (23)$$

$$\left(x_{\dot{e}}a\right)_{\dot{e}}\left[\left(x_{\dot{e}}\left(z\backslash_e\left(x_{\dot{e}}t_e a\right)\right)\right)_{\dot{e}}\left(x_{\dot{e}}a\right)\right]=$$
$$=\left(x_{\dot{e}}\left(t+1\right)_e a\right)_{\dot{e}}\left[\left[\left(x_{\dot{e}}t_e a\right)_{\dot{e}}\left(\left(-1\right)_e z\right)\right]\backslash_e x_{\dot{e}}\left(t+1\right)_e a\right)\right]. \quad (24)$$

Определение 5. Дифференцируемая правомоноальтернативная локальная лупа с гомотетиями $\mathcal{M}_e=\left\langle M, L^e, \left\{t_e\right\}_{t\in\mathbb{R}}, e\right\rangle$ называется проабелевой, если $\bar{\mathcal{M}}_e=\left\langle M, S^e, \left\{t_e\right\}_{t\in\mathbb{R}}, e\right\rangle$ (см. (17)) является векторным пространством над полем действительных чисел.

Предложение 14. Дифференцируемая локальная геодезическая лупа с гомотетиями $\mathcal{M}_e=\left\langle M, L^e, \left\{t_e\right\}_{t\in\mathbb{R}}, e\right\rangle$ является проабелевой, если и только если выполняются тождества:

$$t_x \circ u_y = u_{t_x y} \circ t_x \quad (25)$$

$$v_x \circ \left(\frac{1}{v}\right)_y \circ v_z = v_z \circ \left(\frac{1}{v}\right)_y \circ v_x; \quad (26)$$

$$t,u,v \ \mathbb{R},\ v\neq 0, x, y, z \ M.$$

Предложение 15. Дифференцируемая локальная геодезическая лупа с гомотетиями $\mathcal{M}_e=\left\langle M, L^e, \left\{t_e\right\}_{t\in\mathbb{R}}, e\right\rangle$ является проабелевой, если и только если выполняются тождества:

$$L_x^e \circ v_e \circ \left(L_x^e\right)^{-1} \circ \left(\frac{1}{v}\right)_e \circ L_z^e \circ v_e \circ \left(L_z^e\right)^{-1} =$$
$$= L_z^e \circ v_e \circ \left(L_z^e\right)^{-1} \circ \left(\frac{1}{v}\right)_e \circ L_x^e \circ v_e \circ \left(L_x^e\right)^{-1} \quad (27)$$

$$m^e\left(z,t\right)\circ u_e = u_e \circ m^e\left(z,t\right); \quad (28)$$

$$l^e \circ \left(x,y\right) u^e = u_e \circ l^e\left(x,y\right), \quad (29)$$

где $m^e\left(z,t\right)=\left(L_{t_e z}^e\right)^{-1}\circ t_e \circ L_z^e$.

Предложение 15. Дифференцируемая локальная лупа с гомотетиями $\mathcal{M}_e=\left\langle M, L^e, \left\{t_e\right\}_{t\in\mathbb{R}}, e\right\rangle$ может быть включена в качестве геодезической лупы с гомотетиями в проективно плоское первого типа (проабелево) пространство аффинной связности нулевой кривизны, если и только если выполняются тождества (21), (27)–(29).

Статья поступила в редакцию 16.04.2019 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гомотетии и параллельные переносы в проективно симметрических пространствах аффинной связности* / Андроникова Е. О., Дмитриева М. Н., Матвеев О. А., Матвеева Н. В. // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика–математика. 2016. № 3. С.8–17.
2. Андроникова Е. О., Матвеев О. А. Левое тождество Бола в теории симметрических пространств аффинной связности // Вестник Московского государственного областного университета. Серия Физика–математика. 2017. № 3. С. 6–11.
3. Matveyev O. A., Nesterenko E. L. On the quasigroup properties of prosymmetric spaces with zero curvature // Webs and Quasigroups. Tver: Tver State University Press, 2002. P. 78–85.
4. Matveyev O. A., Nesterenko E. L. The real prosymmetric spaces // Non-associative algebra and its applications. Vol. 246.A series of lecture notes and applied mathematics / Edited by L Sabinin, L. Sbitneva, I. Shestakov. Boca Raton, FL, USA: CRC Press, Taylor & Francis Group, 2006. P. 253–260.
5. Матвеев О. А., Нестеренко Е. Л. Алгебраическая теория пространств, близких к симметрическим: монография. Germany: Lap Lambert Academic Publishing, 2012. 125 с.
6. Матвеев О. А., Нестеренко Е. Л. Универсальные алгебры в теории пространств аффинной связности, близких к симметрическим: монография. М.: МГОУ, 2012. 132 с.
7. Sabinin L. V., Matveyev O. A. Geodesic loops and some classes of affinely connected manifolds // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия Математика. 1995. №2 (1). С. 135–143.
8. Shelehov A. M. Left Bol three-webs with the IC-property // Russian Mathematics. 2013. Vol. 57. Iss. 5. P. 20–28.

REFERENCES

1. Andronikova E. O., Dmitrieva M. N., Matveyev O. A., Matveeva N. V. [Homotheties and parallel translations in the projective symmetric spaces with affine connection]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika–matematika* [Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], 2016, no. 3, pp. 8–17.
2. Andronikova E. O., Matveyev O. A. [The left Bol identity in the theory of symmetric spaces with affine connection]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya Fizika–matematika* [Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], 2017, no. 3, pp. 6–11.
3. Matveyev O. A., Nesterenko E. L. On the quasigroup properties of prosymmetric spaces with zero curvature. In: *Webs and Quasigroups*. Tver, Tver State University Press, 2002. pp. 78–85.
4. Matveyev O. A., Nesterenko E. L. The real prosymmetric spaces. In: Sabinin L., Sbitneva L., Shestakov I., ed. *Non-associative algebra and its applications. Vol. 246.A series of lecture notes and applied mathematics*. Boca Raton, FL, USA, CRC Press, Taylor & Francis Group Publ., 2006. pp. 253–260.
5. Matveev O. A., Nesterenko E. L. *Algebraicheskaya teoriya prostranstv, blizkikh k simmetricheskim* [Algebraic theory of spaces close to symmetric]. Germany, Lap Lambert Academic Publishing Publ., 2012. 125 p.
6. Matveyev O. A., Nesterenko E. L. *Universal'nye algebry v teorii prostranstv affinnoi svyaznosti, blizkikh k simmetricheskim* [Universal algebra in the theory of spaces with affine connection close to symmetric]. Moscow, Moscow Region State University Publ., 2012. 132 p.

7. Sabinin L. V., Matveyev O. A. [Geodesic loops and some classes of affinely connected manifolds]. In: *Vestnik Rossiiskogo universiteta druzhby narodov. Seriya Matematika* [Bulletin of the Peoples' Friendship University of Russia. Mathematics Series], 1995, no. 2 (1), pp. 135–143.
8. Shelehov A. M. Left Bol three-webs with the IC-property. In: *Russian Mathematics*, 2013, vol. 57, iss. 5, pp. 20–28.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Матвеев Олег Александрович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математического анализа и геометрии Московского государственного областного университета;
e-mail: matveyevoa@mail.ru;

Птицына Инга Вячеславовна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математический анализа и геометрии Московского государственного областного университета;
e-mail: inpt@mail.ru;

Фролов Олег Викторович – студент физико-математического факультета Московского государственного областного университета;
e-mail: frol3661@gmail.com

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Oleg A. Matveyev – PhD in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor at the Department of Mathematical Analysis and Geometry, Moscow Region State University;
e-mail: matveyevoa@mail.ru

Inga V. Pticina – PhD in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor at the Department of Mathematical Analysis and Geometry, Moscow Region State University;
e-mail: inpt@mail.ru

Oleg V. Frolov – student of the Physical and Mathematical Department, Moscow Region State University;
e-mail: frol3661@gmail.com.

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Матвеев О. А., *Птицына И. В.*, *Фролов О. В.* О проективно симметрических многообразиях аффинной связности нулевой кривизны // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2019. № 3. С. 6–14.
DOI: 10.18384-2310-7251-2019-3-6-14

FOR CITATION

Matveyev O. A., *Pticina I. V.*, *Frolov O. V.* On projective symmetric zero curvature manifolds with affine connection. In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*, 2019, no. 3, pp. 6–14.
DOI: 10.18384-2310-7251-2019-3-6-14

РАЗДЕЛ II.
ФИЗИКА

УДК 530.145
DOI: 10.18384-2310-7251-2019-3-15-27

КУЛОНОВСКИЕ ПОПРАВКИ К ВЕРОЯТНОСТИ ИОНИЗАЦИИ ДВУМЕРНОГО АТОМА СУПЕРПОЗИЦИЕЙ ПОСТОЯННОГО И ПЕРЕМЕННОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

Эминов П. А.[1], Соколов В. В.[2]

[1] *Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
101000, г. Москва, ул. Мясницкая, д. 20, Российская Федерация*

[2] *МИРЭА – Российский технологический университет
119454, г. Москва, проспект Вернадского, д. 78, Российская Федерация*

Аннотация. Исследован процесс нелинейной ионизации двумерной наноструктуры с дальнодействующим кулоновским потенциалом суперпозицией постоянного и переменного электрических полей. В адиабатическом приближении вычислена вероятность ионизации двумерного атома с учётом кулоновской поправки. Изучена зависимость вклада кулоновского поля в скорость ионизации от отношения напряжённостей постоянного и переменного электрических полей в процессе многофотонной ионизации атома. Получено аналитическое выражение для вероятности ионизации двумерного атома постоянным электрическим полем с учётом кулоновской поправки.

Ключевые слова: ионизация; метод мнимого времени; двумерный атом

COULOMB CORRECTIONS TO THE IONIZATION PROBABILITY OF A TWO-DIMENSIONAL ATOM BY A SUPERPOSITION OF CONSTANT AND ALTERNATING ELECTRIC FIELDS

P. Eminov[1], V. Sokolov[2]

[1] *National Research University ‘Higher School of Economics’
ul. Myasnitskaya 20, 101000 Moscow, Russian Federation*

[2] *MIREA – Russian Technological University
prosp. Vernadskogo 78, 119454 Moscow, Russian Federation*

Abstract. The process of nonlinear ionization of a two-dimensional nanostructure with a long-range Coulomb potential by a superposition of constant and alternating electric fields is investigated. In the adiabatic approximation, the ionization probability of a two-dimensional atom is calculated taking the Coulomb correction into account. The dependence of the contribution of the Coulomb field to the ionization rate on the ratio of the strengths of constant and alternating electric fields in the process of multiphoton ionization of an atom is investigated. An analytical expression is obtained for the ionization probability of a two-dimensional atom by a constant electric field, taking the Coulomb correction into account.

Keywords: ionization, imaginary time method, two-dimensional atom

Введение

За последние два десятилетия в изучении электронных свойств наноструктур в интенсивных внешних полях наблюдается существенный прогресс. Интерес к таким исследованиям обусловлен потребностями физики и техники низкоразмерных систем, созданием мощных источников когерентного излучения, а также развитием на основе теории Келдыша аналитических [1–7] и численных [8–10] методов изучения процесса нелинейной ионизации атомов интенсивным внешним полем с учётом дальнодействующего характера кулоновского поля ядра [6]. К одной из важных задач, рассмотренных в этой области, можно отнести исследование процесса нелинейной ионизации внешними электромагнитными полями одномерных [11] и двумерных [12–14] структур с короткодействующим удерживающим потенциалом.

В двумерных наноструктурах реализуются также состояния с дальнодействующим кулоновским потенциалом [15–17]. Примером такой системы является электрон в узкой квантовой яме, локализованный на доноре, который в общем случае располагается в барьере. В предельном случае, когда донор располагается в центре ямы, потенциал взаимодействия электрона с донором имеет вид двумерного кулоновского потенциала. Другим примером физической системы, моделируемой двумерным атомом водорода, является структура с двумя узкими квантовыми ямами, в которой возбуждается пространственно-непрямой экситон, образованный электроном в одной яме и дыркой в другой. Физические свойства таких структур с двумерным кулоновским взаимодействием подробно рассматриваются в работе [15].

В настоящей работе проводится исследование процесса ионизации двумерного водородоподобного атома суперпозицией постоянного и переменного электрических полей с учётом дальнодействующего кулоновского взаимодействия вырываемого электрона с атомным ядром. Влияние кулоновского взаимодействия на ионизацию двумерного атома описывается на основе квазиклассической теории возмущений для действия и метода мнимого времени [3–6]. Для укороченного действия за нулевое приближение принимаются траектория и действие для электрона в двумерной квантовой точке с короткодействующим удерживающим потенциалом в рассматриваемой конфигурации внешнего ионизирующего поля [12–14].

В работе используется атомная система единиц, где $e = m = \hbar = 1$ [6].

Скорость ионизация двумерного атома водорода интенсивным внешним полем с учётом кулоновской поправки

Векторный потенциал результирующего электрического поля выберем в виде:

$$A(t)=\left(\frac{F_2\sin\omega t}{\omega}+F_1 t,0,0\right) \qquad (1)$$

Здесь F_1 – напряжённость постоянного электрического поля, F_2 – амплитуда напряжённости переменного электрического поля с частотой ω. Экстремальная подбарьерная траектория, описывающая движение электрона в мнимом времени, описывается формулой:

$$x_0(\tau)=\frac{1}{2}F_1(\tau_0{}^2-\tau^2)+\frac{F_2}{\omega^2}[ch(\omega\tau_0)-ch(\omega\tau)],\tau=-it. \qquad (2)$$

Координата начальной точки подбарьерного движения и начальная скорость электрона в момент выхода из-под барьера равны нулю, а комплексный начальный момент времени t_0 для подбарьерного движения определяется из уравнения:

$$\left(p_x+F_1t_0+\frac{F_2\sin(\omega t_0)}{\omega}\right)^2+p_y{}^2-2E_0=0, \qquad (3)$$

где $E_0=-\frac{\kappa^2}{2}$ – энергия электрона в начальном состоянии. В дальнейшем предполагается выполнение условий:

$$\frac{F_1+F_2}{\kappa^3}\ll 1,\ \ \omega<<\frac{\kappa^2}{2},$$

которые необходимы для возможности квазиклассического рассмотрения задачи. Для экстремальной траектории $p_x = p_y = 0$ и из формулы (3) следует, что величина $u_0 = \varphi\tau_0$ находится из уравнения:

$$shu_0+\frac{F_1}{F_2}u_0=\gamma, \qquad (4)$$

где введён параметр Келдыша $\gamma=\frac{\kappa\omega}{F_2}$ для переменного электрического поля [1].

Ширина туннельного барьера определяет координату точки, из которой начинает своё движение электрон после выхода из-под барьера:

$$b=x_0(\tau=0)=\frac{F_2}{\omega^2}[chu_0-1]+\frac{F_1}{2\omega^2}u_0^2. \qquad (5)$$

Из приведённых формул следует, что в предельных случаях, когда $\gamma \ll 1$ или $\ln 2\gamma \gg 1$, ширина барьера велика по сравнению с размером связанного состояния атома, который оценивается величиной порядка κ^{-1}, что необходимо для применимости квазиклассического приближения.

Кулоновское взаимодействие между вылетающим электроном и ядром будем учитывать по теории возмущений. Скорость ионизации атома с учётом кулоновского взаимодействия представляется в виде [3–5]:

$$w = w_0 \exp[-2\,\mathrm{Im}(\Delta S_1 + \Delta S_2)], \tag{6}$$

где w_0 – вероятность ионизации двумерного атома с удерживающим потенциалом нулевого радиуса действия, которая в квазиклассическом приближении определяется формулами (55–56) работы [13].

Обоснование формулы (6) даётся также и в работе [18], где сообщается об удовлетворительном согласии результатов проведённых экспериментов по нелинейной ионизации атомов в переменном электрическом поле именно с теорией Переломова-Попова-Терентьева [3–6].

Учёт кулоновского взаимодействия между вылетающим электроном и ядром атома приводит к двум поправкам к мнимой части укороченного действия в показателе экспоненты формулы (6). За счёт энергии кулоновского взаимодействия возникает поправка:

$$\Delta S_1 = \int_0^{t_0} U_c(x_0(t))dt = -i\int_0^{\tau_0} \frac{d\tau}{\frac{F_2}{\omega^2}(chu_0 - chu) + \frac{1}{2}F_1(\tau^2{}_0 - \tau^2)}, \tag{7}$$

где интеграл вычисляется вдоль невозмущённой кулоновским полем траектории подбарьерного движения (2), а величина τ_0 определяется формулой (4). Вторая поправка ΔS_2 учитывает влияние кулоновского поля на закон движения электрона (подробнее см. [3–5]).

Сначала рассмотрим случай адиабатического приближения, то есть предельный случай малых значений параметра Келдыша, который реализуется при ионизации атомов излучением инфракрасного или оптического диапазонов длин волн. В этом приближении влияние кулоновского поля на процесс ионизации определяется энергией кулоновского взаимодействия, то есть мнимой частью величины ΔS_1 в формуле (6). В адиабатическом приближении:

$$u_0 = \omega\tau_0 = \frac{\gamma F_2}{F_1 + F_2} \le \gamma \ll 1,$$

причём для подбарьерного движения $0 \le \tau \le \tau_0$.

Тогда из формулы (7) следует:

$$\Delta S_1 \simeq -\frac{2i}{F_1 + F_2}\int_0^{\tau_0} \frac{d\tau}{\tau^2{}_0 - \tau^2}. \tag{8}$$

Интеграл (8) регуляризуется методом, предложенным в работе [3]. Он основан на использовании асимптотики волновой функции свободного атома, которая при условии $\kappa r \gg 1$ для состояний двумерного атома водорода с нулевым значением азимутального квантового числа имеет вид:

$$\psi(r) \sim \frac{1}{\sqrt{r}}(\kappa r)^{n^*} \exp(-\kappa r) = \frac{1}{\sqrt{r}} \exp[-\kappa r - n^* \ln(\kappa r)] =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{r}} \exp[-\operatorname{Im}[S_0(r) + \Delta S(r)]], \qquad (9)$$

где $n^* = \dfrac{Z}{\kappa}$ – эффективное главное квантовое число, Z – заряд ядра. Заметим, что в трёхмерном случае $\psi(r) \sim \dfrac{1}{r}(\kappa r)^{n^*} \exp(-\kappa r)$.

Правую часть формулы (8) представляем в виде суммы двух интегралов по отрезкам $[0, \tau_1]$ и $[\tau_1, \tau_0]$, где параметр τ_1 удовлетворяет условию:

$$\kappa^{-1} \ll x(\tau_1) \ll b = x_0(\tau = 0). \qquad (10)$$

Во второй области выполняются условия $x(\tau) < x(\tau_1) \ll b$, то есть влиянием внешнего поля на подбарьерное движение электрона можно пренебречь. Мнимая часть действия, набираемого за этот промежуток времени, определяется асимптотикой (9) волновой функции, а первый интеграл вычисляется точно.

В итоге получаем следующее выражение для первого множителя в полной кулоновской поправке в формуле (6):

$$G_1 = \exp(-2 \operatorname{Im} \Delta S_1) \simeq \exp\left(2n^* \ln \frac{2F_0}{F_2 + F_1}\right) = \left(\frac{2F_0}{F_2 + F_1}\right)^{2n^*}, \qquad (11)$$

где $F_0 = \kappa^3$ – напряжённость характерного электрического поля ядра атома для уровня с потенциалом ионизации $I = \dfrac{\kappa^2}{2}$.

Используя далее результат (67) работы [13] для вероятности процесса в предельном случае удерживающего потенциала нулевого радиуса действия, из формулы (6) получаем скорость ионизации двумерного атома водорода в адиабатическом приближении:

$$w = \frac{\kappa^2}{2}\sqrt{3} \exp\left(-\frac{2}{3}\frac{F_0}{F_1 + F_2}\right)\left(\frac{2F_0}{F_1 + F_2}\right)^{2n^*-1}\left(\frac{F_1 + F_2}{F_2}\right)^{1/2},$$
$$F_1 > F_2, \quad \frac{F_0 F_2}{\left(F_1 + F_2\right)^2} \gg 1, \quad \frac{\kappa\omega}{F_2} \ll 1. \qquad (12)$$

Таким образом, в адиабатическом приближении кулоновская поправка к мнимой части укороченного действия приводит к увеличению вероятности процесса в $\left[\dfrac{2F_0}{F_1 + F_2}\right]^{2n^*}$ раз. Как и в трёхмерном случае, этот эффект объясняется тем, что кулоновское поле понижает барьер, через который туннелирует электрон. С другой стороны, следует отметить, что увеличение ширины потенциального барьера (5) по сравнению со случаем, когда ионизация происходит под влиянием постоянного или переменного электрических полей по отдельности, приводит к уменьшению кулоновской поправки (11).

Обратимся далее к случаю больших значений параметра Келдыша и рассмотрим вторую часть кулоновской поправки к укороченному действию, которая учитывает влияние кулоновского поля ядра на закон движения электрона. Если $x_1(t)$ – кулоновская поправка к траектории электрона, то соответствующая поправка к действию определяется формулой [3–5]:

$$\Delta S_2 = \int_{t_0}^{0}\left[\frac{dx_0}{dt}\frac{dx_1}{dt}+\frac{1}{2}\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 - x_1(F_1+F_2\cos(\omega t))\right]dt -$$
$$-\left(\frac{dx_0}{dt}\frac{dx_1}{dt}+\frac{dx_1}{dt}x_0+\frac{dx_1}{dt}\frac{dx_1}{dt}\right)\Bigg|_{t=t_0}, \quad t_0 = i\frac{u_0}{\omega}. \tag{13}$$

Для учёта влияния кулоновского взаимодействия на вероятность фотоионизации по теории возмущений в работах [4–5] используется описание движения частицы в реальном времени методом Капицы в быстро осциллирующем поле, а также решение уравнения движения электрона внутри барьера в мнимом времени с ненулевой скоростью в точке выхода из-под барьера.

Здесь следует обсудить вопрос о возможности применения метода Капицы к задаче о движении электрона при одновременном учёте влияния кулоновского поля и суперпозиции переменного и постоянного электрических полей. В методе Капицы под большой понимается частота переменного поля, удовлетворяющая условию $\nu \gg \frac{1}{T}$, где T – порядок величины периода движения, которое частица совершала бы в не зависящем от времени поле [19]. В нашем случае наличие постоянного электрического поля нарушает финитность движения. Для применимости метода Капицы должно выполняться также дополнительное условие, которое состоит в малости напряжённости F_1 постоянного электрического поля по сравнению с напряжённостью кулоновского поля в точке выхода электрона из-под барьера:

$$F_1 << \frac{Z}{b^2}. \tag{14}$$

При многофотонной ионизации атома, когда $\gamma \gg 1$, $\ln 2\gamma \gg 1$, если также выполнено условие:

$$\frac{F_1\left(\ln(2\gamma)\right)^2}{2F_2\gamma} \le 1,$$

ширина барьера (5) оценивается формулой:

$$b \simeq \frac{\kappa}{\omega}\left[1+\frac{F_1\left(\ln(2\gamma)\right)^2}{2F_2\gamma}\right].$$

Тогда, из формулы (14) получаем следующее ограничение на величину напряжённости постоянного электрического поля:

$$\frac{F_1}{F_0} << \frac{\mu}{2K_0}, \tag{15}$$

где $K_0 = \dfrac{\kappa^2}{2\omega}$ – параметр многоквантовости, $\mu = \dfrac{Z\omega}{\kappa^3}$ – параметр, определяющий влияние кулоновского поля на процесс ионизации атома. Согласно экспериментальным данным [4], для случая ионизации положительного иона ксенона Xe^{5+} при энергии фотона $\hbar\omega$ = 12,7 эВ, амплитуде переменного поля $F_2 \simeq 0{,}0044F_0$, $K_0 \simeq 5{,}67$, $\mu \simeq 0{,}230$, $\gamma = 20$, из формулы (15) для напряжённости постоянного электрического поля получаем оценку $F_1 \ll 0{,}002F_0$. Таким образом, в случае многоквантовой ионизации атома условие (14) может выполняться в достаточно широкой области параметров, определяющих характер протекания процесса.

С учётом (14) подбарьерное движение электрона в мнимом времени описывается уравнением:

$$\frac{d^2\xi}{du^2} = \frac{\mu}{\alpha^3\xi^2} - \frac{1}{\alpha\gamma}[chu + \frac{F_1}{F_2}], \tag{16}$$

решение которого удовлетворяет условиям:

$$\frac{d\xi}{du}(u=0) = i\sqrt{\frac{2\mu}{\alpha^3}},\ \ \xi(u=0)=1.$$

Здесь приняты обозначения:

$$\xi = \frac{x}{b},\quad u = -i\omega t,\quad \alpha = \frac{b}{b_0},\quad b_0 = \frac{\kappa}{\omega},\quad \mu = \frac{Z\omega}{\kappa^3},$$

а параметр b определяется формулой (5).

Решение уравнения (16) можно найти в виде разложения в ряд по малому кулоновскому параметру:

$$\xi(u) = \xi_0(u) + \mu\xi_1(u) + ...,$$

где $\xi_0(u)$ – решение уравнения (16) для $\mu = 0$, которое описывается формулой (2).

При выполнении условия (14) минимальный начальный импульс p_0, который необходим электрону для преодоления кулоновского притяжения в надбарьерном движении, усреднённом по быстрым осцилляциям, определяется формулой:

$$p_0 = \kappa\sqrt{\frac{2\mu}{\alpha}},\quad t = 0, \tag{17}$$

которая в мнимом времени определяет первое из начальных условий в (16). Для сравнения отметим, что для экстремальной траектории $\xi_0(u)$ (2) в момент $\tau = 0$ выхода из-под барьера скорость электрона равна нулю.

Далее, используя решение уравнения (16), отвечающее импульсу p_0 электрона в момент времени $\tau = 0$, вычисляем с учётом (3) величину ΔS_2 по формуле (13). Эта процедура эффективно сводится к замене [4; 5]:

$$p^2{}_x \to p^2{}_x + p^2{}_0$$

в формуле для импульсного распределения вероятности процесса ионизации, которая в интересующем нас случае двумерной квантовой точки с короткодействующим удерживающим потенциалом, как это показано в работах [12–14], имеет следующий вид:

$$dW = P\exp\left\{-g\left(F_2, F_1, \kappa, \tau_0, \omega\right) - \frac{1}{\omega}\left(\lambda p^2{}_x + u_0 p^2{}_y\right)\right\}\frac{dp_x dp_y}{(2\pi)^2}, \tag{18}$$

где приняты обозначения:

$$g = \kappa^2\tau_0 - \frac{F_1^2\tau_0^3}{3} + \left(\frac{F_2}{\omega}\right)^2 \frac{1}{\omega}\left(\frac{\omega\tau_0}{2} - \frac{sh2\omega\tau_0}{4}\right) + \\ + \frac{2F_1F_2}{\omega^2}\left[sh\omega\tau_0 - \left(\omega\tau_0\right)ch\omega\tau_0\right], \tag{19}$$

$$\lambda = u_0 - \frac{\gamma}{chu_0 + F_1 / F_2}, \tag{20}$$

а величина u_0 связана с параметром Келдыша и отношением напряжённостей постоянного и переменного полей согласно формуле (4).

Таким образом, в формуле (6) поправка к скорости ионизации двумерного атома, возникающая в результате возмущения траектории движения электрона кулоновским полем в суперпозиции постоянного и переменного электрических полей, определяется формулой:

$$G_2 = \exp[-2\,\mathrm{Im}\,\Delta S_2] \simeq \exp\left(-\frac{2\lambda\mu\kappa^2}{\omega\alpha}\right). \tag{21}$$

В современных источниках ультрафиолетового и рентгеновского излучения, в которых используются лазеры на свободных электронах, характерные значения параметра Келдыша γ могут находиться в интервале 30–100 [6]. В предельном случае, когда:

$$\ln(2\gamma) \gg 1, \tag{22}$$

из формулы (21) находим:

$$G_2 \simeq \exp\left\{-\frac{2Z}{\kappa}\ln(2\gamma)\frac{1}{\left(1 + \frac{F_1}{\gamma F_2}\right)\left(1 + \frac{F_1\ln^2(2\gamma)}{\gamma F_2}\right)}\right\} \le 1. \tag{23}$$

Как это следует из (23), с ростом напряжённости постоянного электрического поля наблюдается увеличение вклада кулоновского взаимодействия в скорость многофотонной ионизации атома, описываемого множителем G_2. Считая, что наряду с (22) выполняется также условие:

$$\frac{F_1 \ln^2(2\gamma)}{\gamma F_2} \ll 1, \tag{24}$$

из формулы (23) получаем:

$$G_2 \simeq \exp\left\{-\frac{2Z}{\kappa}\ln\left(2\gamma\right)\right\} = \left(2\gamma\right)^{-2n^*}. \tag{25}$$

Формула (25), полученная в предельных случаях (22) и (24) из нашего результата (21) для суперпозиции постоянного и переменного электрических полей, совпадает с множителем Q_1, описывающим вклад в вероятность многофотонной ионизации трёхмерного атома водорода в поле электромагнитной волны за счёт искажения кулоновским полем траектории электрона (см., например, формулу (23) работы [4]).

В случае постоянного электрического поля, совершая предельные переходы $F_2 \to 0$ в формуле (11) и, соответственно, $\omega \to 0$, $F_2 \to 0$ в формуле (21), с учётом результата (61) работы [13], получаем вероятность ионизации двумерного атома водорода в постоянном электрическом поле с напряжённостью F_1 с учётом кулоновской поправки:

$$w = \sqrt{\pi}\kappa^2\left(\frac{F_0}{F_1}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{2F_0}{3F_1}\right). \tag{26}$$

Заметим, что предэкспоненциальный множитель в формуле для скорости ионизации атома водорода в постоянном электрическом поле в трёхмерном случае пропорционален параметру $\frac{F_0}{F_1} \gg 1$ [20], а показатель экспоненты в том же квазиклассическом приближении такой же, как и в формуле (26). Таким образом, эффект размерного ограничения движения вырываемого электрона приводит к существенному увеличению вероятности ионизации атома водорода за единицу времени.

Можно, как это сделано в работе [4] в трёхмерном случае, предложить интерполяционную формулу для вероятности ионизации двумерного атома водорода в переменном электрическом поле при произвольных значениях параметра Келдыша. Для этого воспользуемся результатом работы [21], который показывает, что в отличие от одномерного [11] и трёхмерного случая [3-5], парциальная вероятность ионизации при поглощении n фотонов волны для случая удерживающего двумерного потенциала конечного радиуса действия допускает проведение точного суммирования по квантовому числу n.

В итоге, с учётом формулы (16) работы [21], для скорости ионизации двумерного атома водорода переменным электрическим полем при произвольных значениях параметра Келдыша находим следующую интерполяционную формулу:

$$w = \frac{\kappa^2}{4}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)\frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2+1}}\left(\frac{2F_0}{F_2}\right)^{2n*}\left(1+2e^{-1}\gamma\right)^{-2n*}$$

$$\exp\left[-\frac{2\omega_0}{\omega}\left[\left(1+\frac{1}{2\gamma^2}\right)Arsh\gamma-\frac{\sqrt{\gamma^2+1}}{2\gamma}\right]\right] \qquad (27)$$

$$\times\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t-t^2}\,(1-\exp[-Arsh\gamma+\frac{\gamma}{\left(1+\gamma^2\right)^{1/2}}-\frac{\gamma}{\left(1+\gamma^2\right)^{1/2}}t])},$$

где множитель

$$G_1\cdot G_2 \simeq \left(\frac{2F_0}{F_2}\right)^{2n*}\left(1+2e^{-1}\gamma\right)^{-2n*},$$

как и в трёхмерном случае [4; 6], описывает полный вклад дальнодействующего кулоновского взаимодействия в скорость фотоионизации двумерного атома.

Заключение

В работе проведён учёт влияния дальнодействующего кулоновского потенциала на процесс ионизации двумерного атома суперпозицией постоянного и переменного электрических полей. В предельном случае многофотонной ионизации определена зависимость кулоновского вклада в скорость ионизации двумерного атома от отношения напряжённостей постоянного и переменного электрических полей и параметра Келдыша. Вычислена вероятность процесса в адиабатическом приближении. Получено аналитическое выражение для вероятности ионизации двумерного атома водорода постоянным электрическим полем с учётом кулоновской поправки. Предложена интерполяционная формула для скорости ионизации двумерного атома в поле плоской электромагнитной волны с учётом влияния дальнодействующего кулоновского поля при произвольных значениях параметра Келдыша. Из полученных результатов следует, что учёт как кулоновских, так и размерных эффектов существенно увеличивает вероятность ионизации двумерных наноструктур во внешних электромагнитных полях.

Статья поступила в редакцию 12.08.2019 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Келдыш Л. В. Ионизация в поле сильной электромагнитной волны // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1965. Т. 47. Вып. 5. С. 1945–1957.
2. Никишов А. И., Ритус В. И. Ионизация систем, связанных короткодействующими силами, полем электромагнитной волны // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1966. Т. 50. Вып. 1. С. 255–270.

3. Переломов А. М., Попов В. С. Ионизация атомов в переменном электрическом поле // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1967. Т. 52. Вып. 2. С. 514–526.
4. Многофотонная ионизация атомов и ионов интенсивным излучением рентгеновских лазеров / Попруженко С. В., Мур В. Д., Попов В. С., Бауэр Д. // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 2009. Т. 135. Вып. 6. С. 1092–1108.
5. Ионизация атомов и ионов интенсивным лазерным излучением / Карнаков Б. М., Мур В. Д., Попов В. С., Попруженко С. В. // Письма в журнал экспериментальной и теоретической физики. 2011. Т. 93. Вып. 4. С. 256–268.
6. Карнаков Б. М., Мур В. Д., Попруженко С.В., Попов В.С. Современное развитие теории нелинейной ионизации атомов и ионов // Успехи физических наук. 2015. Т. 185. Вып. 1. С. 3–34.
7. Крайнов В. П. Ионизация атомов в сильном низкочастотном электромагнитном поле // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 2010. Т. 138. Вып. 2. С. 196–205.
8. Bauer D., Koval P. Qprop: A Schrцdinger-solver for intense laser–atom interaction // Computer Physics Communications. 2006. Vol. 174. Iss. 5. P. 396–421.
9. Milosevic D. B. Strong-field approximation for ionization of a diatomic molecule by a strong laser field // Physical Review A. 2006. Vol. 74. Iss. 6. P. 063404.
10. Bauer J. H. Quasistatic limit of the strong-field approximation describing atoms in intense laser fields: Circular polarization // Physical Review A. 2011. Vol. 83. Iss. 3. P. 035402.
11. Демиховский В. Я., Вугальтер Г. А. Физика квантовых низкоразмерных структур. М: Логос, 2000. 186 с.
12. Эминов П. А., Гордеева С. В. Ионизация квантовой точки электрическими полями // Квантовая электроника. 2012. Т. 42. Вып.8. С. 733–738.
13. Eminov P. A. Ionization induced by strong electromagnetic field in low dimensional systems bound by short range forces // Physica B: Condensed Matter. 2013. Vol. 426. P. 158–164.
14. Эминов П. А, Соколов В. В., Гордеева С. В. Нелинейная ионизация двумерной наноструктуры // Физика и техника полупроводников. 2014. Т. 48. Вып. 1. С. 15–22.
15. Семина М. А., Сурис Р. А. Кулоновские состояния в наноструктурах, случайное вырождение и оператор Лапласа-Рунге-Ленца // Письма в журнал экспериментальной и теоретической физики. 2011. Т. 94. Вып. 7. С. 614–618.
16. De Souza J. F. O., De Lima Ribeiro C. A., Furtado C. Bound states in desalinated graphene with Coulomb impurities in the presence of a uniform magnetic field // Physics Letters A. 2014. Vol. 378. Iss. 30–31. P. 2317–2324.
17. Zhu J.-L., Li G., Yang N. Coulomb impurities in two-dimensional topological insulators // Physical Review B. 2017. Vol. 95. Iss. 12. P. 125431.
18. Experimental investigation of strong-field-ionization theories for laser fields from visible to midinfrared frequencies / Lai Y. H., Xu J., Szafruga U. B., Talbert B. K., Gong X., Zhang K., Fuest H., Kling M. F., Blaga C. I., Agostini P., Di Mauro L. F. // Physical Review A. 2017. Vol. 96. Iss. 6. P. 063417.
19. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 1. Механика. М: Наука, 1988. 216 с.
20. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 3. Квантовая механика. М: Наука, 1974. 752 с.
21. Эминов П. А., Гордеева С. В. Ионизация двумерной квантовой точки полем электромагнитной волны // Вестник Московского государственного университета. Серия 3. Физика и Астрономия. 2013. №4. С. 3–7.

REFERENCES

1. Keldysh L. V. [Ionization in the field of a strong electromagnetic wave]. In: *Zhurnal eksperimental'noi i teoreticheskoi fiziki* [Journal of Experimental and Theoretical Physics], 1965, vol. 47, iss. 5, pp. 1945–1957.
2. Nikishov A. I., Ritus V. I. [Ionization of systems bound by short-range forces by the field of an electromagnetic wave]. In: *Zhurnal eksperimental'noi i teoreticheskoi fiziki* [Journal of Experimental and Theoretical Physics], 1966, vol. 50, iss. 1, pp. 255–270.
3. Perelomov A. M., Popov V. S. [Ionization of atoms in an alternating electrical field]. In: *Zhurnal eksperimental'noi i teoreticheskoi fiziki* [Journal of Experimental and Theoretical Physics], 1967, vol. 52, iss. 2, pp. 514–526.
4. Popruzhenko S. V., Mur V. D., Popov V. S., Bauer D. [Multiphoton ionization of atoms and ions by high-intensity X-ray lasers]. In: *Zhurnal eksperimental'noi i teoreticheskoi fiziki* [Journal of Experimental and Theoretical Physics], 2009, vol. 135, iss. 6, pp. 1092–1108.
5. Karnakov B. M., Mur V. D., Popov V. S., Popruzhenko S. V. [Ionization of atoms and ions by intense laser radiation]. In: *Pis'ma v zhurnal eksperimental'noi i teoreticheskoi fiziki* [Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters], 2011, vol. 93, iss. 4, pp. 256–268.
6. Karnakov B. M., Mur V. D., Popruzhenko S.V., Popov V.S. [Current progress in developing the nonlinear ionization theory of atoms and ions]. In: *Uspekhi fizicheskikh nauk* [Physics-Uspekhi], 2015, vol. 185, iss. 1, pp. 3–34.
7. Krainov V. P. [Ionization of atoms in a strong low-frequency electromagnetic field]. In: *Zhurnal eksperimental'noi i teoreticheskoi fiziki* [Journal of Experimental and Theoretical Physics], 2010, vol. 138, iss. 2, pp. 196–205.
8. Bauer D., Koval P. Qprop: A Schrцdinger-solver for intense laser–atom interaction. In: *Computer Physics Communications*, 2006, vol. 174, iss. 5, pp. 396–421.
9. Milosevic D. B. Strong-field approximation for ionization of a diatomic molecule by a strong laser field. In: *Physical Review A*, 2006, vol. 74, iss. 6, pp. 063404.
10. Bauer J. H. Quasistatic limit of the strong-field approximation describing atoms in intense laser fields: Circular polarization. In: *Physical Review A*, 2011, vol. 83, iss. 3, pp. 035402.
11. Demikhovskii V. Ya., Vugal'ter G. A. *Fizika kvantovykh nizkorazmernykh struktur* [Physics of Low-Dimensional Quantum Structures]. Moscow, Logos Publ., 2000. 186 p.
12. Eminov P. A., Gordeeva S. V. [Ionisation of a quantum dot by electric fields]. In: *Kvantovaya elektronika* [Quantum Electronics], 2012, vol. 42, iss. 8, pp. 733–738.
13. Eminov P. A. Ionization induced by strong electromagnetic field in low dimensional systems bound by short range forces. In: *Physica B: Condensed Matter*, 2013, vol. 426, pp. 158–164.
14. Eminov P. A., Sokolov V. V., Gordeeva S. V. [Nonlinear ionization of a two-dimensional nanostructure]. In: *Fizika i tekhnika poluprovodnikov* [Semiconductors], 2014, vol. 48, no. 1, pp. 15–22.
15. Semina M. A., Suris R. A. [Coulomb states in nanostructures, accidental degeneracy, and the Laplace-Runge-Lenz operator]. In: *Pis'ma v zhurnal eksperimental'noi i teoreticheskoi fiziki* [Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters], 2011, vol. 94, iss. 7, pp. 614–618.
16. De Souza J. F. O., De Lima Ribeiro C. A., Furtado C. Bound states in desalinated graphene with Coulomb impurities in the presence of a uniform magnetic field. In: *Physics Letters A*, 2014, vol. 378, iss. 30–31, pp. 2317–2324.
17. Zhu J.-L., Li G., Yang N. Coulomb impurities in two-dimensional topological insulators. In: *Physical Review B*, 2017, vol. 95, iss. 12, pp. 125431.
18. Lai Y. H., Xu J., Szafruga U. B., Talbert B. K., Gong X., Zhang K., Fuest H., Kling M. F., Blaga C. I., Agostini P., Di Mauro L. F. Experimental investigation of strong-field-ionization theories for laser fields from visible to midinfrared frequencies. In: *Physical Review A*, 2017, vol. 96, iss. 6, pp. 063417.

19. Landau L. D., Lifshits E. M. Mechanics. Oxford, Butterworth-Heinemann, 1995.
20. Landau L. D., Lifshits E. M. Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory. Oxford, Pergamon Press, 1958. 515 p.
21. Eminov P. A., Gordeeva S. V. [Ionization of a two-dimensional quantum dot by the field of an electromagnetic wave]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 3. Fizika i Astronomiya* [Moscow University Physics Bulletin], 2013, no. 4, pp. 3–7.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Эминов Павел Алексеевич – доктор физико-математических наук, профессор, профессор департамента прикладной математики Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики»;
e-mail: peminov@mail.ru;

Соколов Виктор Васильевич – доктор физико-математических наук, советник по научной работе МИРЭА – Российского технологического университета;
e-mail: vvs195326@gmail.com

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Pavel A. Eminov – Doctor in Physical and Mathematical Sciences, Professor at the Department of Applied Mathematics, National Research University 'Higher School of Economics';
e-mail: peminov @mail.ru;

Victor V. Sokolov – Doctor in Physical and Mathematical Sciences, scientific advisor at the MIREA – Russian Techonological University;
e-mail: vvs195326@gmail.com

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Эминов П. А., Соколов В. В. Кулоновские поправки к вероятности ионизации двумерного атома суперпозицией постоянного и переменного электрических полей // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика–математика. 2019. № 3. С. 15–27.
DOI: 10.18384-2310-7251-2019-3-15-27

FOR CITATION

Eminov P. A., Sokolov V. V. Coulomb corrections to the ionization probability of a two-dimensional atom by a superposition of constant and alternating electric fields. In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics.* 2019, no. 3, pp. 15–27.
DOI: 10.18384-2310-7251-2019-3-15-27

УДК 535.361; 610.849.19; 618.723
DOI: 10.18384-2310-7251-2019-3-28-41

КОМПЬЮТЕРНЫЙ АНАЛИЗ ХАРАКТЕРИСТИК ТОНКИХ ЖК ЯЧЕЕК С АНТИСИММЕТРИЧНЫМИ УГЛАМИ ПРЕДНАКЛОНА НА ОРИЕНТИРУЮЩИХ ПОВЕРХНОСТЯХ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ЭНЕРГИЯХ СЦЕПЛЕНИЯ МОЛЕКУЛ ЖК НА ГРАНИЦАХ

Симоненко Г. В.
Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83, Российская Федерация

Аннотация. Цель работы – проведение с помощью компьютерного моделирования исследования влияния значений углов преднаклона и энергии сцепления молекул ЖК в тонких ячейках с различными углами закрутки структуры при антисимметричных граничных условиях на их оптические и динамические характеристики. В результате показано, что увеличение значений углов преднаклона молекул ЖК на ориентирующих поверхностях ячеек приводит к незначительному росту контрастного отношения в ЖК ячейках с углами закрутки, равными 0°, 90° и 270°, при незначительном изменении полного времени срабатывания таких ячеек. В ЖК ячейках с углом закрутки структуры 180° увеличение значения угла преднаклона приводит к уменьшению контрастного отношения и одновременному росту полного времени срабатывания таких устройств. В то же время уменьшение энергии сцепления в тонких ЖК ячейках с антисимметричными граничными условиями приводит к увеличению полного времени срабатывания таких модуляторов для всех углов закрутки структуры ЖК. Однако для различных углов закрутки структуры ЖК контрастное отношение с уменьшением энергии сцепления молекул ЖК с подложками ведет себя другим образом. Так, для структур с углами закрутки 180° и 270° контрастное отношение тонких ЖК ячеек с уменьшением энергии сцепления существенно уменьшается, а для структур с углами закрутки 0° и 90° с уменьшением энергии сцепление контрастное отношение незначительно растет.

Ключевые слова: жидкий кристалл, моделирование, граничные условия

COMPUTER ANALYSIS OF CHARACTERISTICS OF THIN LC CELLS WITH ANTISYMMETRIC ANGLES OF THE PRE-TILT ON THE ORIENTING SURFACES AT DIFFERENT ANCHORING ENERGIES OF LC MOLECULES AT BORDERS

G. Simonenko
N. G. Chernyshevsky Saratov National Research State University
ul. Astrakhanskaya 83, 410004 Saratov, Russian Federation

Abstract. The aim of the work is to carry out a computer simulation of the influence of the values of the pre-tilt angles and the anchoring energy of LC molecules in thin cells with different twist angles of the structure with antisymmetric boundary conditions on their optical and dynamic characteristics. It is shown that an increase in the values of the pretilt angles of the LC molecules on the orienting surfaces of the cells leads to a slight increase in the contrast ratio in the LC cells with spin angles of 0°, 90° and 270°, with a slight change in the total response time of such cells. In LC cells with a twist angle of the structure of 180°, an increase in the value of the pre-tilt angle leads to a decrease in the contrast ratio and a simultaneous increase in the total response time of such devices. At the same time, a decrease in the anchoring energy in thin LC cells with antisymmetric boundary conditions leads to an increase in the total response time of such modulators for all twist angles of the LC structure. However, for different twist angles of the LC structure, the contrast ratio with a decrease in the anchoring energy of LC molecules with substrates behaves in a different way. Thus, for structures with twist angles of 180° and 270°, the contrast ratio of thin LC cells decreases significantly with the anchoring energy, while for structures with twist angles of 0° and 90°, the contrast ratio increases slightly with decreasing the anchoring energy.

Keywords: liquid crystal, modeling, boundary conditions

Введение

Одной из проблем, которая до сих пор решена не полностью, является создание ЖК устройств с приемлемыми для быстродействующих приложений временами срабатывания [1]. Наиболее востребованными быстродействующими ЖК устройствами являются ЖК модуляторы для многочисленных 3D приложений [2]. В настоящее время существует масса ЖК модуляторов на основе ЖК ячеек с антисимметричными граничными условиями, в которых используются различные ЖК структуры, начиная от классических π-ячеек [3], до твист-структур с углами 90° [4], 180° [5], или 270° [6; 7]. В табл. 1 приведено сравнение их смоделированных характеристик, полученных с помощью компьютерного моделирования с использованием пакета программ MOUSE LCD [8–10].

Таблица 1.
Характеристики тонких ЖК-ячеек с антисимметричными граничными условиями на основе структур с различными углами закрутки

Характеристика	Угол закрутки антисимметричной структуры			
	0°	90°	180°	270°
Среднее по спектру пропускание ЖК устройства в состоянии «выключено» T_{off}	0,39	0,42	0,42	0,372
Среднее по спектру контрастное отношение ЖК устройства C	334	3500	1396	318
Полное время срабатывания ЖК устройства τ, ms	9	6	5	4,25
Ахроматичность ЖК устройства в состоянии «выключено» H_{off}	H ≤ 0,08	H ≤ 0,05	H ≤ 0,1	H ≤ 0,05

Стоит отметить, что на данный момент выполнено достаточно большое число исследований, посвящённых вопросу улучшения характеристик таких ЖК устройств (см. например, [5; 11–12]), однако за рамками этих исследований остался вопрос о влиянии граничных условий на характеристики этих ЖК модуляторов. Актуальность этого вопроса связана с тем, что в настоящий момент появились новые технологии ориентации ЖК на подложках, которые могут позволять создавать различные граничные условия [13; 14]. Стоит отметить, что недавно группой исследователей были выполнены основополагающие работы по измерению величины полярной и азимутальной энергии сцепления молекул ЖК с ориентирующими поверхностями [15] и разработана молекулярная теория взаимодействия ЖК с твёрдой поверхностью [16]. Однако влияние энергии сцепления ЖК с поверхностью на динамику перехода Фредерикса в тонких ячейках с различными граничными условиями не выяснено, что важно для практических применений ЖК ячеек в различных устройствах обработки и отображения информации. В связи с этим в данной работе методом компьютерного моделирования выполнено исследование влияния величин углов преднаклона и энергии сцепления молекул ЖК на ориентирующих подложках в тонких ячейках на характеристики модуляторов с антисимметричными граничными условиями и различными углами закрутки ЖК структуры.

Характеристики ЖК устройств и метод их исследования

Для описания свойств различных ЖК устройств отображения и обработки информации существует большой набор оптических (спектры пропускания или отражения для различных управляющих напряжений, контраст или контрастное отношение), электрооптических (крутизна вольт-контрастной характеристики) и динамических характеристик (времена включения и выключения) [17–19]. Однако для поиска оптимальной конструкции ЖК устройства достаточно использовать четыре интегральные характеристики [20–22]:

- среднее по спектру пропускание ЖК модулятора в состоянии «выключено» T_{off} (управляющее напряжение на затвор не подано или его значение ниже порогового), или «включено» T_{on} (управляющее напряжение на затвор подано выше порогового значения) [19];
- среднее по спектру контрастное отношение изображения C [19; 20];
- ахроматичность изображения H, величина которой определяется как расстояние на цветовом треугольнике текущей точки изображения от точки белого цвета D_{65} [21–23]. При этом для получения полноцветного изображения должно выполняться условие $H \leq 0{,}05$ [22];
- полное время срабатывания ЖК устройства τ, которое в данном случае определяется так [20]:

$$\tau = \tau_{reac} + \tau_{relax},$$

где τ_{reac} – время включения устройства; τ_{relax} – время выключения устройства.

Для описания характеристик и поиска оптимальных параметров ЖК устройства чаще всего применяется метод компьютерного моделирования [17; 18].

Нами для этой цели использовался пакет программ *MOUSE–LCD* [8–10]. Отметим, что расхождение между экспериментальными и рассчитанными значениями оптических характеристик ЖК устройств, работающих на основе различных электрооптических эффектов (твист-эффекта, эффекта интерференции поляризованных лучей и эффекта «гость -хозяин»), находится в пределах погрешности эксперимента и в худшем случае не превышает 10% [9; 10]. Кроме этого заметим, что различие между вычисленной и экспериментальной зависимостью времени реакции оптического отклика от управляющего напряжения для ЖК устройства, работающего на основе интерференции оптических мод в ЖК структуре с углом закрутки 180°, не превышает 5% [24]. Поэтому можно считать, что система компьютерного моделирования *MOUSE–LCD* количественно верно описывает все характеристики ЖК устройств отображения и обработки информации, а погрешность расчётов будет определяться точностью задания физических и конструктивных параметров модулятора.

Результаты и обсуждение

Нами исследовались характеристики ЖК устройств, выполненных на базе тонких ЖК ячеек с антисимметричными граничными условиями и различными углами закрутки структуры Φ_t (0°, 90°, 180°, 270°). Все ЖК устройства, кроме одного на основе структуры с углом закрутки 180°, состояли из ЖК ячейки, перед которой помещался входной поляризатор, а за ней друг за другом размещались фазовый компенсатор и выходной поляризатор. В устройстве с ячейкой со 180-градусной структурой фазовый компенсатор отсутствовал. В табл. 2 приведены основные конструктивные параметры для исследуемых ЖК устройств.

Таблица 2.
Конструктивные параметры ЖК устройств на основе тонких ЖК-ячеек с антисимметричными граничными условиями и различными углами закрутки структуры ЖК

Конструктивный параметр	Угол закрутки антисимметричной структуры			
	0°	90°	180°	270°
Угол ориентации входного поляризатора α_{in}, град.	45	0	45	0
Угол ориентации выходного поляризатора α_{out}, град.	–45	90	–45	90
Фазовая задержка ЖК ($\Delta n \times L$) на длине волны 550 нм, мкм	0,35	0,7	0,35	0,7
Угол ориентации фазового компенсатора β, град.	20	38	–	28
Фазовая задержка компенсатора на длине волны 550 нм, мкм	0,0345	0,023	–	0,0345

При моделировании электрооптических характеристик ЖК устройства считалось, что ЖК ячейка заполнена смесью со следующими физическими параметрами: $K_{11} = 10{,}5 \cdot 10^{-6}$ дин, $K_{22} = 6{,}9 \cdot 10^{-6}$ дин, $K_{33} = 16{,}8 \cdot 10^{-6}$ дин, $\varepsilon_{\perp} = 4{,}88$, $\varepsilon_{\parallel} = 13{,}54$, вращательная вязкость $\gamma_1 = 0{,}15$ единиц СГС. При этом предполагалось, что дисперсия анизотропии показателей преломления ЖК (Δn) слабая. Во всех расчётах эти физические параметры ЖК оставались постоянными. В качестве поляризаторов использовалась плёнка *NPF – F* 1205 *DU*. При моделировании значения остальных конструктивных параметров ЖК устройства считались равными средним технологическим величинам [11]. С целью исключения влияния значения управляющего напряжения на характеристики ЖК устройства были выбраны одинаковыми для всех граничных условий ЖК на подложках (для состояния «выключено» $U_{off} = 0$ В, а для состояния «включено» $U_{on} = 12$ В). Кроме этого, во всех случаях толщина слоя ЖК L в рабочей ячейке всегда бралась равной 3,5 мкм. Для антисимметричных граничных условий угол преднаклона в отсутствии управляющего напряжения на одной ориентирующей подложке в ячейке θ_{01}, а на противоположной – $\theta_{02} = -\theta_{01}$. Сцепление молекул ЖК в азимутальном направлении считалось жёстким, а в полярном направлении энергия сцепления выбиралась в виде потенциала Рапини [25]:

- $W = W_{01}\sin^2(\theta_1 - \theta_{01})/2$ на первой подложке, где θ_1 – угол наклона молекул ЖК на первой подложке при подаче управляющего напряжения; W_{01} – энергия сцепления молекул ЖК на первой ориентирующей подложке;
- $W = W_{02}\sin^2(\theta_2 - \theta_{02})/2$ на второй подложке, где θ_2 – угол наклона молекул ЖК на второй подложке при подаче управляющего напряжения; W_{02} – энергия сцепления молекул ЖК на второй ориентирующей подложке.

Заметим, что далее везде в расчётах считается $W_{01} = W_{02} = W_0$. Введём безразмерный параметр жёсткости $\beta = \pi K_{11}/W_0 L$ [26], который удобно использовать для описания всех зависимостей характеристик ЖК модулятора от энергии сцепления молекул ЖК с ориентирующей подложкой.

Рассмотрим зависимость интегральных оптических характеристик ЖК модулятора от значения угла преднаклона молекул ЖК с ориентирующей подложкой ($\theta_{01} = -\theta_{02}$). Как показало моделирование, пропускание ЖК модулятора в состоянии «выключено» практически не зависит значения угла θ_{01}. Это является следствием того, что все эти состояния слабо различимы при $U_{off} = 0$. По этой же причине ахроматичность изображения в этом состоянии H_{off} ЖК модулятора также не зависит от величины угла преднаклона. Значения этих характеристик для различных типов ЖК модуляторов представлены в табл. 1. Единственной интегральной оптической характеристикой ЖК модулятора на основе ЖК структур с различными углами закрутки Φ_t, которая зависит от угла преднаклона ЖК с ориентирующей подложкой, является среднее по спектру контрастное отношение *C*. На рис. 1 представлена зависимость нормированного среднего по спектру контрастного отношения C^{nor} для ЖК модулятора от значения угла преднаклона ЖК с ориентирующей подложкой с антисимметричными граничными условиями ($\theta_{01} = -\theta_{02}$). При этом

$$C^{nor} = C/C^{max},$$

где C – текущее значение контрастного отношения; C^{max} – максимальное значение контрастного отношения.

Как видно из этого рисунка, значение среднего по спектру контрастного отношения для ЖК модулятора на основе структуры с углом закрутки 180° падает с ростом значения угла преднаклона θ_{01}. В тоже время для ЖК модулятора на основе антисимметричных ячеек, в которых используется структура с углом закрутки 0°, значение среднего по спектру контрастного отношения устройства с ростом угла преднаклона молекул ЖК незначительно растёт. Это связано с тем, что при одних и тех же значениях управляющих напряжений деформация монослоя ЖК в структуре с углом закрутки 180° меньше при больших углах преднаклона молекул ЖК на подложках, а в структуре с $\Phi_t = 0°$ наоборот.

Это приводит к тому, что пропускание в состоянии «включено» для ЖК структуры с $\Phi_t = 180°$ при малых значениях θ_{01} меньше, чем при больших. Поэтому с увеличением величины угла θ_{01} среднее по спектру контрастное отношение изображения C падает. Для структуры с $\Phi_t = 0°$ ситуация обратная. С ростом угла θ_{01} значение T_{on} из-за большей деформации монослоя ЖК падает, и, как следствие, среднее по спектру контрастное отношение изображения C растёт. Стоит отметить, что для модулятора на основе антисимметричных ЖК ячеек с углами закрутки структуры 90° и 270° среднее по спектру контрастное отношение зависит очень слабо от значений угла θ_{01}.

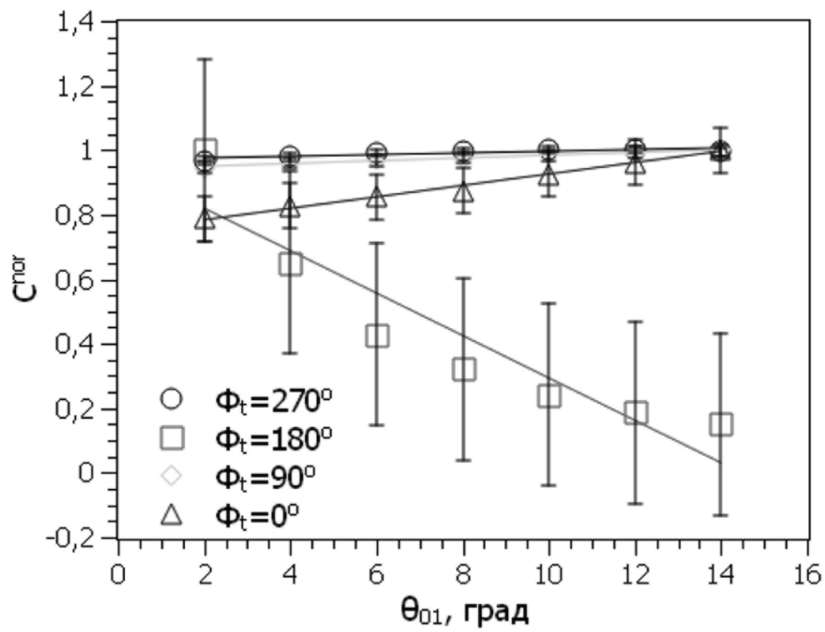

Рис. 1. Зависимость нормированного контрастного отношения ЖК модулятора от величины угла преднаклона молекул ЖК на ориентирующих подложках при антисимметричных граничных условиях

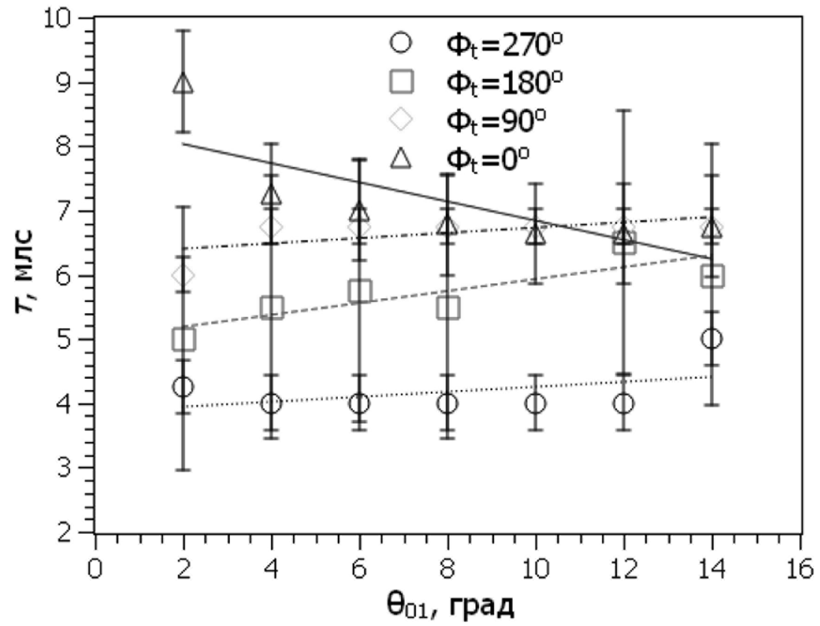

Рис. 2. Зависимость полного времени срабатывания ЖК модулятора от величины угла преднаклона молекул ЖК на ориентирующих подложках при антисимметричных граничных условиях

На рис. 2 показана зависимость полного времени срабатывания τ модулятора на основе антисимметричных ЖК ячеек с различными углами закрутки структуры от значения угла преднаклона молекул ЖК θ_{01} на подложках. Как и в предыдущем случае, для структур с углами закрутки 90° и 270° зависимость $\tau = \tau(\theta_{01})$ слабая. В то же время для модулятора с $\Phi_t = 0°$ зависимость $\tau = \tau(\theta_{01})$ линейно убывающая, а для модулятора с $\Phi_t = 180°$ слабо линейно возрастающая. Это объясняется также как и зависимость $C^{nor} = C^{nor}(\theta_{01})$ для этих же углов закрутки структуры ЖК. А именно, при одних и тех же значениях управляющих напряжений деформация монослоя ЖК в структуре с углом закрутки 180° меньше при больших углах преднаклона молекул ЖК на подложках, а в структуре с $\Phi_t = 0°$ наоборот. Это приводит к тому, что полное время срабатывания больше для ЖК структуры с $\Phi_t = 180°$ при малых значениях θ_{01} и меньше, чем при больших. Для структуры с $\Phi_t = 0°$ ситуация обратная.

На рис. 3 представлена зависимость нормированного среднего по спектру контрастного отношения для модулятора на основе антисимметричной ЖК ячейки с различными углами закрутки ЖК структуры от параметра жёсткости сцепления молекул ЖК с подложками.

Для ЖК модулятора на основе ячейки с углом закрутки структуры 180° ситуация следующая. При жёстких граничных условиях высокие значения контрастного отношения для таких устройств обусловлены эффектом самокомпенсации [5]. Эффект самокомпенсации состоит в том, что в состоянии «включено» π-ячейку с углом закрутки структуры 180° можно представить в виде двух планарных ячеек, ориентированных друг относительно друга на 90°. Это позволяет компенсировать разницу фаз световых волн, прошедших через ЖК, почти до π.

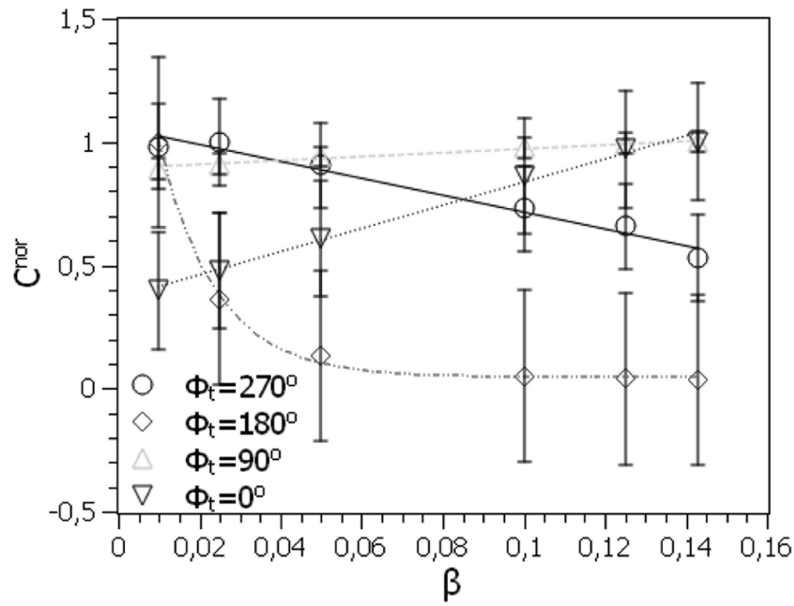

Рис. 3. Зависимость нормированного контрастного отношения ЖК модулятора от параметра жёсткости молекул ЖК на ориентирующих поверхностях при антисимметричных граничных условиях

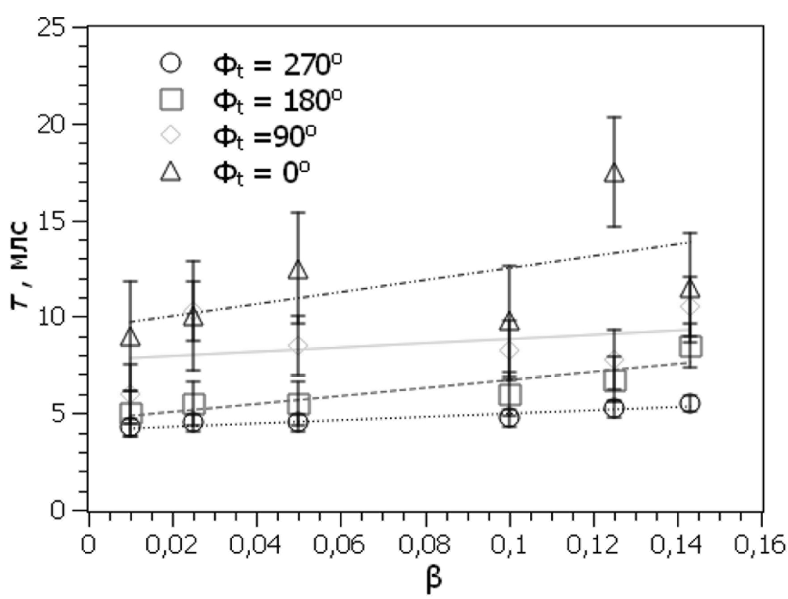

Рис. 4. Зависимость полного времени срабатывания ЖК модулятора от параметра жёсткости молекул ЖК на ориентирующих поверхностях при антисимметричных граничных условиях

Для мягких граничных условий с уменьшением энергии сцепления молекул ЖК с ориентирующими подложками в состоянии «включено» нарушается эффект фазовой самокомпенсации.

Это приводит к тому, что с ростом β, растёт и T_{on}, а так как T_{off} от β не зависит, то контрастное отношение падает. Для модулятора на основе ЖК ячейки с нулевым углом закрутки ситуация иная. Так, при уменьшении энергии сцепления деформация ЖК становится более сильной и в предельном случае стремится к гомеотропной, что приводит к уменьшению T_{on} с ростом β, поэтому контрастное отношение возрастает. Для модуляторов на основе ЖК структуры с $\Phi_t = 90°$ контрастное отношение практически не зависит от параметра жёсткости, в то время как для ячеек со структурой закрученной на 270° ситуация аналогичная со 180-градусной ячейкой. Это объясняется тем, что для этой структуры, работающей в волноводном режиме, этот режим сохраняется для более высоких уровней деформации ЖК, так как мягкие граничные условия в полярном направлении не позволяют существенным образом развернуть закрученную структуру.

На рис. 4 представлены зависимости $\tau = \tau(\beta)$ для модуляторов на основе антисимметричных ЖК ячеек с различными углами закрутки, которые наиболее востребованы в быстродействующих устройствах. Как видно из этого рисунка, зависимости хорошо описываются линейными функциями при изменении параметра жёсткости в пределах от 0 до 0,2. Этот факт хорошо согласуется с аналитической зависимостью $\tau = \tau(\beta)$, полученной ранее [26]. Для всех ориентационных ЖК структур дальнейшее ослабление энергии сцепления молекул ЖК с ориентирующей подложкой, что соответствует случаю $\beta > 0{,}2$, приводит к резкому росту полного времени срабатывания. Аналогичный прогноз следует также из аналитических выражений для τ_{relax} и τ_{reac}, представленных в работе [26]. Стоит отметить, что резкий рост полного времени срабатывания ЖК модулятора при изменении параметра жёсткости β происходит только за счёт увеличения времени релаксации τ_{relax}, в то время как τ_{reac} практически не изменяется. Резкий рост τ_{relax} при увеличении параметра жёсткости β происходит потому, что при слабой энергии сцепления молекул ЖК с ориентирующей подложкой при высоких управляющих напряжениях молекулы ЖК принимают гомеотропную ориентацию, и упругая сила, которая возвращает ЖК в исходное состояние при снятии напряжения, отсутствует.

Заключение

Методом компьютерного моделирования проведено исследование зависимости характеристик модуляторов на основе тонких антисимметричных ячеек с различными углами закрутки структуры ЖК в зависимости от граничных условий на ориентирующих подложках. В результате выполненных численных экспериментов установлено, что:

1) увеличение угла преднаклона (от 2° до 14°) молекул ЖК на ориентирующих подложках ячейки модулятора приводит к ухудшению оптических характеристик и одновременному уменьшению полного времени срабатывания устройств, работающих на основе планарных антисимметричных ЖК ячеек. Для модулято-

ров, выполненных на основе тонких антисимметричных ячеек с углами закрутки структуры 90°, 180° и 270°, увеличение угла преднаклона (от 2° до 14°) молекул ЖК на ориентирующих подложках не оказывает существенного влияния на оптические и динамические характеристики устройства;

2) уменьшение энергии сцепления молекул ЖК с ориентирующими поверхностями в модуляторах на основе тонких антисимметричных ячеек с различными углами закрутки структуры ЖК не способствует одновременному улучшению оптических и динамических характеристик таких устройств.

Статья поступила в редакцию 03.06.2019 г.

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена в рамках проекта РФФИ №19-07-01005.

ACKNOWLEDGMENTS

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (Project No. 19-07-01005).

ЛИТЕРАТУРА

1. Беляев В. В., Островский Б. И., Пикина Е. С. 14-я Европейская конференция по жидким кристаллам (ECLC-2017), 25–30 июня 2017, Москва // Жидкие кристаллы и их практическое использование. 2018. Т. 18. № 1. С. 84–94.
2. Display Search: 3D DisplayTechnology and Market Forecast Report, January 2010 [Электронный ресурс]. URL: https://www.yumpu.com/en/document/read/48202518/3d-display-technology-and-market-forecast-report-displaysearch (дата обращения: 20.05.2019)
3. *Bos* P. J., *Koehler/Beran K. R.* The π-cell: A fast *liquid-crystal* optical-switching device // *Mol*ecular *Crystals* and *Liquid Crystals*. 1984. Vol. 113. P. *329–339*.
4. Симоненко Г. В. Жидкокристаллический модулятор на основе твист-ячейки с антисимметричными граничными условиями. Заявка на полезную модель № 2019106704. Приор. от 11.03.2019 [Электронный ресурс]. URL: https://patents.s3.yandex.net/RU191765U1_20190821.pdf (дата обращения: 20.05.2019).
5. Симоненко Г. В., Студенцов С. А., Ежов В. А. Выбор оптимальной конструкции оптического затвора на π-ячейке // Оптический журнал. 2013. Т. 80. № 9. С. 18–22.
6. Lipton L., Tilton M. Fast switching 270° twist nematic liquid crystal device and eyewear incorporating the device. Patent US 5327269, 1994 [Электронный ресурс].URL: https://patentimages.storage.googleapis.com/39/41/56/d10f69283db7b5/US5327269.pdf (дата обращения: 20.05.2019).
7. Студенцов С. А., Брежнев В. А., Ежов М. А. Артефакты в быстродействующих ЖК-затворах на STN эффекте для активных 3D очков и их устранение коррекцией режима управления // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика–математика. 2015. № 2. С. 132–137.
8. LCD-design: universal system for computer simulation and optimization of electrooptical devices on the base of liquid crystal / Yakovlev D. A., Simonenko G. V., Tsoy V. I., Chigrinov V. G., Khokhlov N. A., Pdyachev Yu. B. // Proceedings of SPIE. Vol. 4705. Saratov Fall Meeting 2001: Coherent Optics of Ordered and Random Media II (Saratov, 2–5 October, 2011) / ed. D. A. Zimnyakov. SPIE, 2011. P. 255–263.

9. Проектирование ЖК – устройств отображения информации / Финкель А. Г., Цой В. И., Симоненко Г. В., Яковлев Д. А. // Электронная промышленность. 2000. №2. С. 11–16.
10. The optimization of LCD electrooptical behavior using MOUSE-LCD software / Chigrinov V. G., Simonenko G. V., Yakovlev D. A., Podjachev Yu. B. // *Mol*ecular *Crystals* and *Liquid Crystals*. 2000. Vol. 351. P. 17–25.
11. Experimental and theoretical study of optical characteristics of LC shutter on π-cells / Sevostianov V. P., Simonenko G. V., Brezhnev V. A., Studentsov S. A., Yakovlev D. A. // Photonics and Optoelectronics. 1997. Vol. 4. No. 4. P. 139–146.
12. Симоненко Г. В. Анализ различных конструкций оптического жидкокристаллического затвора // Оптический журнал. 2014. Т. 81. № 10. С. 50–55.
13. Chigrinov V. G., Kozenkov V. M., Kwok H. S. Photoalignment of liquid crystalline materials: Physics and applications. Great Britain: John Wiley & Sons, 2008. 248 p.
14. One Methylene Group in the Side Chain Can Alter by 90 Degrees the Orientation of a Main-Chain Liquid Crystal on a Unidirectional Substrate / Odarchenko Ya., Defaux M., Rosenthal M., Akhkiamova A., Bovsunovskaya P., Melnikov A., Rodygin A., Rychkov A., Gerasimov K., Anokhin D. V., Zhu X., Ivanov D. I. // ACS Macro Letters. 2018. Vol. 7. Iss. 4. P. 453–458.
15. Dadivanyan A. K., Noah O. V., Pashinina Yu. M. Anchoring Energy of Liquid Crystals // Molecular Crystals and Liquid Crystals. 2012. Vol. 560. P. 108–114.
16. Влияние параметра порядка на энергию сцепления жидких кристаллов / Дадиванян А. К., Чаусов Д. Н., Ноа О. В., Беляев В. В., Чигринов В. Г., Пашинина Ю. М. // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 2012. Т. 142. № 6. С. 1253–1257.
17. Сухариер А. С. Жидкокристаллические индикаторы. М.: Радио и связь, 1991. 256 с.
18. Chigrinov V. G. Liquid crystal devices: Physics and applications. Boston-London: Artech House, 1999. 359 p.
19. Симоненко Г., Тучин В., Зимняков Д. Оптические характеристики жидкокристаллических и биологических сред. Leipzig: LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co.KG., 2010. 210 с.
20. Симоненко Г. В. Влияние углов преднаклона молекул ЖК на ориентирующих подложках на характеристики ЖК модулятора на основе π-ячеек // Жидкие кристаллы и их практическое использование. 2018. Т. 18. № 3. С. 26–36.
21. Симоненко Г. В., Студенцов С. А., Ежов В. А. Ахроматичность ЖК-модулятора для 3D приложений // Жидкие кристаллы и их практическое использование. 2015. Т. 15. № 3. С. 82–90.
22. Симоненко Г. В. Оптические характеристики жидкокристаллических модуляторов на основе эффекта управляемого электрическим полем двойного лучепреломления в различных планарных структурах малой толщины // Оптический журнал. 2018. Т. 85. № 1. С. 3–11.
23. Шашлов А. Б., Уварова Р. М., Чуркин А. В. Основы светотехники. М.: МГУП, 2002. 278 с.
24. Симоненко Г. В., Брежнев В. А., Студенцов С. А. Компьютерное моделирование оптического отклика жидкокристаллического дисплея при высоких управляющих напряжениях. Часть 1. Динамика оптического отклика в зависимости от конструктивных параметров дисплея // Оптический журнал. 2003. Т. 70. № 7. С. 42–45.
25. Rapini A., Papoula M. J. Distorsion d'une lamelle nйmatique sous champ magnйtique conditions d'ancrage aux parois // Journal de Physique Colloques. 1969. Vol. 30. No. C4. P. 11–12.

26. Tsoy V. I. Freedericsz Transition Dynamics in a Nematic Layer with a Surface Viscosity // *Mol*ecular *Crystals* and *Liquid Crystals*. 1995. Vol. 264. P. 51–56.

REFERENCES

1. Belyaev V. V., Ostrovskii B. I., Pikina E. S. [The 14th European Conference on Liquid Crystals (ECLC-2017), June 25–30, 2017, Moscow]. In: *Zhidkie kristally i ikh prakticheskoe ispol'zovanie* [Liquid Crystals and their Application], 2018, vol. 18, no. 1, pp. 84–94.
2. Display Search: 3D Display Technology and Market Forecast Report, January 2010. Available at: https://www.yumpu.com/en/document/read/48202518/3d-display-technology-and-market-forecast-report-displaysearch (accessed: 20.05.2019).
3. Bos P. J., Koehler/Beran K. R. The π-cell: A fast liquid-crystal optical-switching device. In: *Molecular Crystals and Liquid Crystals*, 1984, vol. 113, pp. 329–339.
4. Simonenko G. V. *Zhidkokristallicheskii modulyator na osnove tvist-yacheiki s antisimmetrichnymi granichnymi usloviyami. Zayavka na poleznuyu model' №2019106704. Prior. ot 11.03.2019* [Liquid crystal modulator based on twist-cell with antisymmetric boundary conditions. The application for useful model №2019106704. Priority from 11.03.2019]. Available at: https://patents.s3.yandex.net/RU191765U1_20190821.pdf (accessed: 20.05.2019).
5. Simonenko G. V., Studentsov S. A., Ezhov V. A. [Choosing the optimum design for an optical shutter based on a π-cell]. In: *Opticheskii zhurnal* [Journal of Optical Technology], 2013, vol. 80, no. 9, pp. 18–22.
6. Lipton L., Tilton M. Fast switching 270° twist nematic liquid crystal device and eyewear incorporating the device. Patent US 5327269, 1994. Available at: https://patentimages.storage.googleapis.com/39/41/56/d10f69283db7b5/US5327269.pdf (accessed: 20.05.2019).
7. Studentsov S. A., Brezhnev V. A., Ezhov M. A. [Artifacts in fast-switching, supertwisted neumatic liquid-crystal shutters for active 3D-glasses and their elimination by driving mode]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika–matematika* [Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], 2015, no. 2, pp. 132–137.
8. Yakovlev D. A., Simonenko G. V., Tsoy V. I., Chigrinov V. G., Khokhlov N. A., Pdyachev Yu. B. LCD-design: universal system for computer simulation and optimization of electrooptical devices on the base of liquid crystal. In: Zimnyakov D. A., ed. *Proceedings of SPIE. Vol. 4705. Saratov Fall Meeting 2001: Coherent Optics of Ordered and Random Media II (Saratov, 2–5 October, 2011)*. SPIE, 2011. pp. 255–263.
9. Finkel' A. G., Tsoi V. I., Simonenko G. V., Yakovlev D. A. [Design of LCD display devices]. In: *Elektronnaya promyshlennost'* [Electronic industry, 2000, no. 2, pp. 11–16.
10. Chigrinov V. G., Simonenko G. V., Yakovlev D. A., Podjachev Yu. B. The optimization of LCD electrooptical behavior using MOUSE-LCD software. In: *Molecular Crystals and Liquid Crystals*, 2000, vol. 351, pp. 17–25.
11. Sevostianov V. P., Simonenko G. V., Brezhnev V. A., Studentsov S. A., Yakovlev D. A. Experimental and theoretical study of optical characteristics of LC shutter on π-cells. In: *Photonics and Optoelectronics*, 1997, vol. 4, no. 4, pp. 139–146.
12. Simonenko G. V. [Analysis of various liquid-crystal optical-shutter designs]. In: *Opticheskii zhurnal* [Journal of Optical Technology], 2014, vol. 81, no. 10, pp. 50–55.
13. Chigrinov V. G., Kozenkov V. M., Kwok H. S. Photoalignment of liquid crystalline materials: Physics and applications. Great Britain: John Wiley & Sons, 2008. 248 p.
14. Odarchenko Ya., Defaux M., Rosenthal M., Akhkiamova A., Bovsunovskaya P., Melnikov A., Rodygin A., Rychkov A., Gerasimov K., Anokhin D. V., Zhu X., Ivanov D. I. One Methylene

Group in the Side Chain Can Alter by 90 Degrees the Orientation of a Main-Chain Liquid Crystal on a Unidirectional Substrate. In: *ACS Macro Letters*, 2018, vol. 7, iss. 4, pp. 453–458.
15. Dadivanyan A. K., Noah O. V., Pashinina Yu. M. Anchoring Energy of Liquid Crystals In: *Molecular Crystals and Liquid Crystals*, 2012, vol. 560, pp. 108–114.
16. 16. Dadivanyan A. K., Chausov D. N., Noa O. V., Belyaev V. V., Chigrinov V. G., Pashinina Yu. M. [Influence of the order parameter on the anchoring energy of liquid crystals]. In: *Zhurnal eksperimental'noi i teoreticheskoi fiziki* [Journal of Experimental and Theoretical Physics], 2012, vol. 142, no. 6, pp. 1253–1257.
17. Sukharier A. S. *Zhidkokristallicheskie indikatory* [Liquid crystal displays]. Moscow, Radio i svyaz' Publ., 1991. 256 p.
18. Chigrinov V. G. Liquid crystal devices: Physics and applications. Boston-London: Artech House, 1999. 359 p.
19. Simonenko G., Tuchin V., Zimnyakov D. *Opticheskie kharakteristiki zhidkokristallicheskikh i biologicheskikh sred* [Optical characteristics of liquid crystalline and biological environments]. Leipzig, LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co.KG. Publ, 2010. 210 p.
20. Simonenko G. V. [Influence of pretilt angles of liquid crystalline molecules placed onto orienting substrates on characteristics of liquid crystalline modulators based on π-cells]. In: *Zhidkie kristally i ikh prakticheskoe ispol'zovanie* [Liquid Crystals and their Application], 2018, vol. 18, no. 3, pp. 26–36.
21. Simonenko G. V., Studentsov S. A., Ezhov V. A. [Achromaticity of the LC modulator for 3D applications]. In: *Zhidkie kristally i ikh prakticheskoe ispol'zovanie* [Liquid Crystals and their Application], 2015, vol. 15, no. 3, pp. 82–90.
22. Simonenko G. V. [Optical characteristics of liquid-crystal modulators based on electric-field-controlled birefringence in various low-thickness planar structures]. In: *Opticheskii zhurnal* [Journal of Optical Technology], 2018, vol. 85, no. 1, pp. 3–11.
23. Shashlov A. B., Uvarova R. M., Churkin A. V. *Osnovy svetotekhniki* [The basics of lighting technology]. Moscow, Moscow State University of Printing Arts Publ., 2002. 278 p.
24. Simonenko G. V., Brezhnev V. A., Studentsov S. A. [Computer simulation of the optical response of a liquid crystal display at high control voltages. Part 1. Dynamics of the optical response depending on the design parameters of the display]. In: *Opticheskii zhurnal* [Journal of Optical Technology], 2003, vol. 70, no. 7, pp. 42–45.
25. Rapini A., Papoula M. J. Distorsion d'une lamelle nйmatique sous champ magnйtique conditions d'ancrage aux parois. In: *Journal de Physique Colloques*, 1969, vol. 30, no. C4, pp. 11–12.
26. Tsoy V. I. Freedericsz Transition Dynamics in a Nematic Layer with a Surface Viscosity. In: *Molecular Crystals and Liquid Crystals,* 1995, vol. 264, pp. 51–56.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Симоненко Георгий Валентинович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры оптики и биофотоники Саратовского государственного университета имени Н. Г. Чернышевского;
e-mail: gvsim1960@hotmail.com

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Georgy V. Simonenko – Doctor in Physical and Mathematical Sciences, Professor at the Department of Optics and Biophotonics, N. G. Chernyshevsky Saratov State University;
e-mail: gvsim1960@hotmail.com

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Симоненко Г. В. Компьютерный анализ характеристик тонких ЖК ячеек с антисимметричными углами преднаклона на ориентирующих поверхностях при различных энергиях сцепления молекул ЖК на границах // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика–математика. 2019. № 3. С. 28–41.
DOI: 10.18384-2310-7251-2019-3-28-41

FOR CITATION

Simonenko G. V. Computer analysis of the characteristics of thin LC cells with antisymmetric angles of the principle on the orienting surfaces at different energy of clutters molecules of the LC on borders. In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics.* 2019, no. 3, pp. 28–41.
DOI: 10.18384-2310-7251-2019-3-28-41

УДК 514.765
DOI: 10.18384-2310-7251-2019-3-42-67

К ВОПРОСУ ПРИЛОЖЕНИЯ ВТОРОЙ КОВАРИАНТНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ОТ ВЕКТОРНОЙ ФУНКЦИИ К ЗАДАЧАМ ГИДРОДИНАМИКИ И ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Гладков С. О.
Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
125080, г. Москва, Волоколамское ш., д. 4, Российская Федерация

Аннотация. С помощью изложенного автором ранее в статье «Об альтернативном вычислении ковариантных производных с приложением к проблемам механики, физики и геометрии» метода вычислен результат действия оператора Лапласа на ковариантную и контравариантную векторные функции. Найдены проекции векторов **B** и **C**, определяемые как $B^i = (\Delta\mathbf{A})^i$ и $B_i = (\Delta\mathbf{A})_i$, на соответствующие криволинейные ортонормированные базисы e^i и e_i. Приведены общие ковариантные выражения для операторов $\Delta\mathbf{A}$ и *graddiv***A**, справедливые в любой криволинейной системе координат. В качестве справочного материала вычислены проекции вектора $C_i = (\Delta\mathbf{A})_i$ в параболической системе координат. В качестве иллюстрирующего примера решена задача о кручении упруго-деформируемого вертикально стоящего цилиндрического тела в условиях его радиального неравномерного нагрева при условии, что его нижний торец жёстко закреплён.

Ключевые слова: ортонормированный единичный базис, ковариантное дифференцирование, символ Кристоффеля, метрический тензор, параболические координаты, объёмное расширение, крутящий момент

APPLICATION OF THE SECOND COVARIANT DERIVATIVE FROM THE VECTOR FUNCTION TO THE PROBLEMS OF HYDRODYNAMICS AND ELASTICITY THEORY

S. Gladkov
Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI)
Volokolamskoe shosse 4, 125080 Moscow, Russian Federation

Abstract. Based on the method described in our paper “Alternative calculation of covariant derivatives with an application to the problems of mechanics, physics and geometry”, we have calculated the result of the action of the Laplace operator on covariant and contravariant vector functions. The projections of the vectors **B** and **C**, defined as $B^i = (\Delta\mathbf{A})^i$ and $C_i = (\Delta\mathbf{A})_i$, on the corresponding curvilinear orthonormal bases e^i and e_i are found. The general covariant expressions for the operators $\Delta\mathbf{A}$ and graddiv**A** that are valid in any curvilinear coordinate system are presented. As a reference material, the projections of the vector $C_i = (\Delta\mathbf{A})_i$ in a parabolic coordinate system are calculated. As an illustrative example, the problem of torsion of an elastically deformable vertically standing cylindrical body under the conditions of its uneven radial heating, provided that its lower end is rigidly fixed, is solved.

Keywords: orthonormal unit basis, covariant differentiation, Christoffel symbol, metric tensor, parabolic coordinates, volume expansion, torque

Введение

Вопрос, на котором мы хотели бы сейчас остановиться, относится к классической теории ковариантного дифференцирования, весьма подробно изложенной в многочисленных учебниках и научных монографиях (см., к примеру, [1–4]). Эта теория может применяться при решении огромного класса чисто теоретических проблем из области гидродинамики, теории упругости, электродинамики и теории поля. Сразу же следует заметить, что при использовании ортогональных систем координат (сокращённо – ОСК) все авторы (и отмеченные выше в том числе) используют размерные базисы, которые в итоге приводят и к разным размерностям компонент метрического тензора, символов Кристоффеля, тензора Римана и т. д. Это связано просто с тем обстоятельством, что используемый ими базис не ортонормированный. Всё наше нижеследующее изложение не будет страдать подобным недостатком, и также, как и в работе [5], мы будем использовать только ортонормированный базис, автоматически приводящий к правильным физическим и геометрическим размерностям соответствующих величин. Несложный алгоритм этого подхода, подробно изложенный в [5], поможет нам и в решении задач, составляющих суть настоящей статьи, посвящённой выяснению действия оператора Лапласа на ковариантную и контравариантную векторные функции с его приложением к проблемам гидродинамики и теории упругости.

При вычислении оператора Лапласа от скалярной функции обычно используется формула (см., например, [1]):

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(g^{ik}\sqrt{g}\,\frac{\partial}{\partial x^k}\right), \tag{1}$$

где g – определитель метрического тензора g_{ik}, g^{ik} – компоненты контравариантного метрического тензора, которая имеет общий вид и может быть применена к любой, и не только ортогональной системе координат.

Ортогональная система координат

В процессе решения широчайшего круга физических задач часто бывает удобным использовать не формулу (1), а несколько иную, на которой мы сейчас ненадолго остановимся. В самом деле, если ввести ковариантный вектор:

$$a_i = \frac{\partial \psi}{\partial x^i}, \tag{2}$$

где $\psi(x^k)$ – произвольная скалярная функция, дифференцируемая на некотором множестве, то согласно общим правилам ковариантного дифференцирования [1] имеем:

$$a_{i,k} = \frac{\partial a_i}{\partial x^k} - \Gamma^l_{ik} a_l, \tag{3}$$

где Γ^i_{kl} – символ Кристоффеля второго рода, а по повторяющимся индексам, как обычно, подразумевается суммирование.

Подставляя сюда (2) и сворачивая полученное выражение по индексам i, k, мы приходим к искомой формуле для оператора Лапласа, справедливой в любой ортогональной системе координат, и весьма удобной при вычислениях:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\left(\partial x^i\right)^2} - \Gamma^k_{ii} \frac{\partial}{\partial x^k}. \tag{4}$$

В качестве конкретного примера её приложения рассмотрим цилиндрическую систему координат.

Действительно, благодаря преобразованиям:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z \end{cases} \tag{5}$$

квадрат метрики будет выглядеть как:

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2. \tag{6}$$

В соответствии с алгоритмом, подробно описанным в [5], введём следующие частные дифференциалы:

$$\partial x^1 = dr, \quad \partial x^2 = r d\varphi, \quad \partial x^3 = dz. \tag{7}$$

В результате вместо (6) мы автоматически приходим к ортонормированной метрике:

$$dl^2 = \left(\partial x^1\right)^2 + \left(\partial x^2\right)^2 + \left(\partial x^3\right)^2. \tag{8}$$

Как видим, для метрики (8) метрический тензор есть просто символ Кронекера, то есть:

$$g_{ik} = g^{ik} = \delta_{ik} = \delta^{ik} = \delta^i_k. \tag{9}$$

Поэтому, чтобы вычислить символы Кристоффеля, нам следует использовать уже не формулу [1]:

$$\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2} g^{is} \left(\frac{\partial g_{sl}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{sk}}{\partial x^l} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^s} \right), \tag{10}$$

поскольку в соответствии с (9) она даёт просто нуль, а изначальную формулу для символа Кристоффеля первого рода, приведённую, скажем, в [1; 2]:

$$\Gamma_{ikl} = \frac{\partial x_n}{\partial x^i} \frac{\partial^2 x_n}{\partial x^k \partial x^l}. \tag{11}$$

Вышесказанное означает, что все наши последующие вычисления будут вестись только в ортонормированном базисе, автоматически обеспечивающем (как это уже было отмечено выше) правильную размерность всех физических и геометрических величин.

В итоге, в соответствии с преобразованиями (5) и с учётом дифференциалов (7), которые просто подставляем в знаменатели выражения (11), мы немедленно получаем, что отличными от нуля будут только две величины:

$$\Gamma^{\varphi}_{r\varphi} = \Gamma^{\varphi}_{\varphi r} = \Gamma_{\varphi r\varphi} = \Gamma_{\varphi\varphi r} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial x_n}{\partial\varphi}\frac{\partial^2 x_n}{\partial r\partial\varphi} = \frac{1}{r},$$
$$\Gamma^{r}_{\varphi\varphi} = \Gamma_{r\varphi\varphi} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial x_n}{\partial r}\frac{\partial^2 x_n}{\partial\varphi^2} = -\frac{1}{r}. \tag{12}$$

Поэтому согласно формуле (4), определению (7) и выражениям (12), находим:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\left(\partial x^i\right)^2} - \Gamma^k_{ii}\frac{\partial}{\partial x^k} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} =$$
$$= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{13}$$

Как и должно быть. Этот же результат, конечно, получается и из формулы (1).

Не ортогональная система координат

В том случае, когда мы имеем дело с произвольной криволинейной системой координат (в общем случае не ортогональной), можно воспользоваться формулой (1), но переписать её при этом удобно в несколько ином виде.

Дело в том, что для любой ортонормированной системы координат ковариантные и контравариантные величины тождественны [2], то есть:

$$\Gamma^i_{kl} = \Gamma_{ikl}, \quad R^i_{klm} = R_{iklm},$$

где R_{iklm} – тензор Римана.

Это связано просто с тем фактом, что в случае бесконечно малых преобразований, если мы говорим о нелинейных преобразованиях на языке дифференциалов, метрический тензор в ОСК представляет собой, согласно (9), обычный символ Кронекера.

Поэтому в случае произвольной не ортогональной СК необходимо уже учитывать разницу между ковариантными и контравариантными компонентами, поскольку в этом случае у безразмерного метрического тензора будут отличны от нуля все недиагональные элементы.

Действительно, введём в рассмотрение контравариантный вектор $a_i = g^{ik}a_k$, где $a_k = \dfrac{\partial\psi}{\partial x^k}$. В результате ковариантная производная от него с учётом леммы Риччи, согласно которой ковариантная производная от метрического тензора равна нулю, то есть $g_{ik,l} = 0$, будет иметь вид:

$$a^{i}{}_{,k}=\left(g^{is}a_s\right)_{,k}=g^{is}\left(\frac{\partial a_s}{\partial x^k}-\Gamma^{p}_{sk}a_p\right).$$

Подставляя сюда $a_k=\dfrac{\partial\psi}{\partial x^k}$ и сворачивая по индексам i, k, после несложных преобразований мы пришли бы к формуле (1), как и должно быть, но в нашем подходе, в котором нет места коэффициентам Ламе, её необходимо представить следующим образом:

$$\Delta=g^{ik}\frac{\partial^2}{\partial x^i\partial x^k}-g^{is}\Gamma^{p}_{si}\frac{\partial}{\partial x^p}. \tag{14}$$

Отсюда сразу же видно, что при переходе к ОНСК следует просто считать, что $g^{ik}=\delta_{ik}=\delta^{ik}$, и мы приходим к формуле (3).

На примере двухмерного случая покажем, как необходимо проводить вычисления, автоматически приводящие к правильным физическим и геометрическим размерностям любых величин.

В качестве простого демонстрационного примера рассмотрим не ортогональные двухмерные преобразования, которые по каким-то причинам ни в одном известном нам учебнике по тензорному анализу никогда не разбирались.

Пусть

$$x=\mathrm{uv},\qquad y=\frac{\mathrm{u}^2+\mathrm{v}^2}{2}. \tag{15}$$

Тогда элемент метрики будет иметь вид:

$$dl^2=\left(\mathrm{u}^2+\mathrm{v}^2\right)d\mathrm{u}^2+4\,\mathrm{uv}\,d\mathrm{u}\,d\mathrm{v}+\left(\mathrm{u}^2+\mathrm{v}^2\right)d\mathrm{v}^2. \tag{16}$$

В соответствии с намеченным алгоритмом вычислений полагаем:

$$\partial x^1=\sqrt{\mathrm{u}^2+\mathrm{v}^2}\,d\mathrm{u},\qquad \partial x^2=\sqrt{\mathrm{u}^2+\mathrm{v}^2}\,d\mathrm{v}. \tag{17}$$

Поэтому из (15) следует, что:

$$dl^2=\left(\partial x^1\right)^2+\frac{4\,\mathrm{uv}}{\mathrm{u}^2+\mathrm{v}^2}\partial x^1\partial x^2+\left(\partial x^2\right)^2. \tag{18}$$

Из (18) видно, что метрический тензор, как и должно быть, автоматически оказывается безразмерным, и имеет вид:

$$g_{ik}=\begin{pmatrix}1 & \dfrac{2\,\mathrm{uv}}{\mathrm{u}^2+\mathrm{v}^2}\\ \dfrac{2\,\mathrm{uv}}{\mathrm{u}^2+\mathrm{v}^2} & 1\end{pmatrix}, \tag{19}$$

а его безразмерный определитель есть:

$$g=\left(\frac{u^2-v^2}{u^2+v^2}\right)^2, \qquad (20)$$

где $u \neq v$.

Поэтому контравариантный метрический тензор $\hat{g}^{ik}=\hat{g}_{ik}^{-1}$ будет таким:

$$g^{ik}=\left(\frac{u^2+v^2}{u^2-v^2}\right)^2\begin{pmatrix} 1 & -\frac{2uv}{u^2+v^2} \\ -\frac{2uv}{u^2+v^2} & 1 \end{pmatrix}. \qquad (21)$$

Вычисление символов Кристоффеля первого рода по схеме, приведённой выше, приводит нас к следующим выражениям (за подробностями выкладок можно обратиться к работе [5])

$$\Gamma_{vvv}=\frac{v}{q^3},\ \Gamma_{vuv}=\Gamma_{vvu}=0,\ \Gamma_{vuu}=\frac{u}{q^3},$$
$$\Gamma_{uvv}=\frac{v}{q^3},\ \Gamma_{uuv}=\Gamma_{uvu}=0,\ \Gamma_{uuu}=\frac{u}{q^3}, \qquad (22)$$

где $q=\sqrt{u^2+v^2}$.

Благодаря же формулам (22), отличные от нуля компоненты символа Кристоффеля второго рода будут такими:

$$\Gamma^{v}_{vv}=g^{vv}\Gamma_{vvv}+g^{vu}\Gamma_{uvv}=\left(g^{vv}+g^{vu}\right)\frac{v}{q^3}=\left(\frac{u^2+v^2}{u^2-v^2}\right)^2\frac{(u-v)^2}{u^2+v^2}\frac{v}{\left(u^2+v^2\right)^{\frac{3}{2}}}=$$
$$=\frac{v}{(u+v)^2\sqrt{u^2+v^2}},$$
$$\Gamma^{u}_{vv}=g^{uv}\Gamma_{vvv}+g^{uu}\Gamma_{uvv}=\left(g^{uu}+g^{vu}\right)\frac{v}{q^3}=\frac{v}{(u+v)^2\sqrt{u^2+v^2}},$$
$$\Gamma^{v}_{uu}=g^{vv}\Gamma_{vuu}+g^{vu}\Gamma_{uuu}=\left(g^{vv}+g^{vu}\right)\frac{u}{q^3}=\left(\frac{u^2+v^2}{u^2-v^2}\right)^2\frac{(u-v)^2}{u^2+v^2}\frac{u}{\left(u^2+v^2\right)^{\frac{3}{2}}}=$$
$$=\frac{u}{(u+v)^2\sqrt{u^2+v^2}},$$
$$\Gamma^{u}_{uu}=g^{uv}\Gamma_{vuu}+g^{uu}\Gamma_{uuu}=\left(g^{uu}+g^{vu}\right)\frac{u}{q^3}=\frac{u}{(u+v)^2\sqrt{u^2+v^2}},$$
$$\Gamma^{v}_{vu}=g^{vk}\Gamma_{kvu}=0,\ \Gamma^{u}_{vu}=g^{uk}\Gamma_{kvu}=0. \qquad (23)$$

Далее, в соответствии с формулой (14), легко получается следующая цепочка простых преобразований:

$$\Delta = g^{ik}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^k} - \Gamma^p_{ik}\frac{\partial}{\partial x^p}\right) = g^{\mathrm{uu}}\left(\frac{\partial^2}{\left(\partial x^1\right)^2} - \Gamma^p_{\mathrm{uu}}\frac{\partial}{\partial x^p}\right) + 2g^{\mathrm{uv}}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^1 \partial x^2} - \Gamma^p_{\mathrm{uv}}\frac{\partial}{\partial x^p}\right) +$$

$$+ g^{\mathrm{vv}}\left(\frac{\partial^2}{\left(\partial x^2\right)^2} - \Gamma^p_{\mathrm{vv}}\frac{\partial}{\partial x^p}\right) = \frac{1}{q^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial \mathrm{u}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \mathrm{v}^2}\right) + \frac{2g^{\mathrm{uv}}}{q^2}\frac{\partial^2}{\partial \mathrm{u}\partial \mathrm{v}} - \frac{\Gamma^{\mathrm{u}}_{\mathrm{uu}}}{q}\frac{\partial}{\partial \mathrm{u}} - \frac{\Gamma^{\mathrm{v}}_{\mathrm{uu}}}{q}\frac{\partial}{\partial \mathrm{v}} -$$

$$- \frac{\Gamma^{\mathrm{u}}_{\mathrm{vv}}}{q}\frac{\partial}{\partial \mathrm{u}} - \frac{\Gamma^{\mathrm{v}}_{\mathrm{vv}}}{q}\frac{\partial}{\partial \mathrm{v}} - \frac{2g^{\mathrm{uv}}}{q}\left(\Gamma^{\mathrm{u}}_{\mathrm{uv}}\frac{\partial}{\partial \mathrm{u}} + \Gamma^{\mathrm{v}}_{\mathrm{uv}}\frac{\partial}{\partial \mathrm{v}}\right). \tag{24}$$

Подставляя сюда найденные выражения для символов Кристоффеля из (23) и недиагональные компоненты метрического тензора из (21), получаем в итоге:

$$\Delta_2 = \frac{1}{q^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial \mathrm{u}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \mathrm{v}^2}\right) - \frac{4\mathrm{uv}}{\left(\mathrm{u}^2 - \mathrm{v}^2\right)^2}\frac{\partial^2}{\partial \mathrm{u}\partial \mathrm{v}} - \frac{1}{q^2}\frac{\mathrm{u}}{\left(\mathrm{u}+\mathrm{v}\right)^2}\frac{\partial}{\partial \mathrm{u}} - \frac{1}{q^2}\frac{\mathrm{u}}{\left(\mathrm{u}+\mathrm{v}\right)^2}\frac{\partial}{\partial \mathrm{v}} -$$

$$- \frac{1}{q^2}\frac{\mathrm{v}}{\left(\mathrm{u}+\mathrm{v}\right)^2}\frac{\partial}{\partial \mathrm{u}} - \frac{1}{q^2}\frac{\mathrm{v}}{\left(\mathrm{u}+\mathrm{v}\right)^2}\frac{\partial}{\partial \mathrm{v}}.$$

И окончательно, после простой группировки слагаемых, приходим к искомому ответу:

$$\Delta_2 = \frac{1}{\left(\mathrm{u}^2 + \mathrm{v}^2\right)}\left(\frac{\partial^2}{\partial \mathrm{u}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \mathrm{v}^2}\right) - \frac{4\mathrm{uv}}{\left(\mathrm{u}^2 - \mathrm{v}^2\right)^2}\frac{\partial^2}{\partial \mathrm{u}\partial \mathrm{v}} - \frac{1}{\left(\mathrm{u}^2 + \mathrm{v}^2\right)}\frac{1}{\left(\mathrm{u}+\mathrm{v}\right)}\left(\frac{\partial}{\partial \mathrm{u}} + \frac{\partial}{\partial \mathrm{v}}\right). \tag{25}$$

Стоит подчеркнуть, что излагаемый подход, на наш взгляд, является значительно более рациональным, чем использование коэффициентов Ламе в случае ортогональных координат. Заметим также, что их приложение к не ортогональным координатам мы нигде не обнаружили.

Выражение (25) получено в случае двухмерного преобразования, поэтому для него оператор Лапласа имеет довольно компактный вид.

Стоит также заметить, что если использовать не преобразования (14), а ортогональные преобразования:

$$x = \mathrm{uv},$$
$$y = \frac{\mathrm{u}^2 - \mathrm{v}^2}{2}, \tag{26}$$

то, как легко проверить, оператор Лапласа будет [5]:

$$\Delta_2 = \frac{1}{\mathrm{u}^2 + \mathrm{v}^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial \mathrm{u}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \mathrm{v}^2}\right). \tag{27}$$

Из сравнения (25) и (27) видна не только их схожесть, но и принципиальная разница, отличающая ортогональные преобразования от не ортогональных.

Некоторые практические приложения римановой геометрии можно найти, например, в работах [6; 7].

Действие оператора Лапласа на контравариантный вектор

Рассмотрим теперь более сложную задачу. Пусть имеется некоторая непрерывная контравариантная векторная функция **A**, и нас интересует результат действия на неё оператора Лапласа, то есть вектор:

$$\mathbf{B} = \Delta\mathbf{A}.$$

Тогда его проекции на оси x^i будут:

$$B^i = \left(\Delta\mathbf{A}\right)^i. \tag{28}$$

Чтобы вычислить это выражение, найдём вначале первую и вторую ковариантные производные от вектора $\mathbf{A} = (A^i)$.

Для первой ковариантной производной имеем:

$$A^i_{,k} = B^i_k = \frac{\partial A^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{kl}A^l, \tag{29}$$

где B^i_k – смешанный по индексам тензор второго ранга.

Вторая ковариантная производная будет:

$$B^i_{k,l} = \frac{\partial B^i_k}{\partial x^l} + \Gamma^i_{ls}B^s_k - \Gamma^s_{kl}B^i_s. \tag{30}$$

Её легко найти, если представить тензор B^i_k в виде произведения контравариантного **M** и ковариантного **N** векторов, то есть как $B^i_k = M^i N_k$, и использовать известные правила их дифференцирования $M^i_{,k} = \dfrac{\partial M^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{kl}M^l$, $N_{i,k} = \dfrac{\partial N_i}{\partial x^k} - \Gamma^s_{ik}N_s$.

Подставляя в (30) определение (29) для тензора B^i_k, немедленно получаем:

$$\begin{aligned}
B^i_{k,l} &= \frac{\partial B^i_k}{\partial x^l} + \Gamma^i_{ls}B^s_k - \Gamma^s_{kl}B^i_s = \frac{\partial}{\partial x^l}\left(\frac{\partial A^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{ks}A^s\right) + \Gamma^i_{ln}\left(\frac{\partial A^n}{\partial x^k} + \Gamma^n_{ks}A^s\right) - \\
&\quad - \Gamma^n_{kl}\left(\frac{\partial A^i}{\partial x^n} + \Gamma^i_{ns}A^s\right) = \\
&= \frac{\partial^2 A^i}{\partial x^k \partial x^l} + \Gamma^i_{ks}\frac{\partial A^s}{\partial x^l} + \Gamma^i_{ls}\frac{\partial A^s}{\partial x^k} - \Gamma^n_{kl}\frac{\partial A^i}{\partial x^n} + \left(\frac{\partial \Gamma^i_{ks}}{\partial x^l} + \Gamma^i_{ln}\Gamma^n_{ks} - \Gamma^i_{ns}\Gamma^n_{kl}\right)A^s = \\
&= \frac{\partial^2 A^i}{\partial x^k \partial x^l} + \Gamma^i_{ks}\frac{\partial A^s}{\partial x^l} + \frac{\partial\left(\Gamma^i_{ls}A^s\right)}{\partial x^k} - \Gamma^n_{kl}\frac{\partial A^i}{\partial x^n} + R^i_{kls}A^s,
\end{aligned} \tag{31}$$

где тензор кривизны Римана определён как:

$$R^i_{kls} = \frac{\partial \Gamma^i_{ks}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^i_{ls}}{\partial x^k} + \Gamma^i_{ln}\Gamma^n_{ks} - \Gamma^i_{ns}\Gamma^n_{kl}. \tag{32}$$

Сворачивая выражение (31) по индексам k, l с учётом явного выражения (32), мы приходим к следующему результату:

$$(\Delta \mathbf{A})^i = \frac{\partial^2 A^i}{\left(\partial x^k\right)^2} + 2\Gamma^i_{ks}\frac{\partial A^s}{\partial x^k} - \Gamma^n_{kk}\frac{\partial A^i}{\partial x^n} + \left(\frac{\partial \Gamma^i_{ks}}{\partial x^k} + \Gamma^i_{kn}\Gamma^n_{ks} - \Gamma^i_{ns}\Gamma^n_{kk}\right)A^s. \tag{33}$$

Выделяя здесь оператор Лапласа в явном виде (см. выше и работу [5]), как:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\left(\partial x^i\right)^2} - \Gamma^n_{kk}\frac{\partial}{\partial x^n}, \tag{34}$$

получаем окончательно для вектора B^i выражение:

$$B^i = (\Delta \mathbf{A})^i = \Delta A^i + 2\Gamma^i_{ks}\frac{\partial A^s}{\partial x^k} + \left(\frac{\partial \Gamma^i_{ks}}{\partial x^k} + \Gamma^i_{kn}\Gamma^n_{ks} - \Gamma^i_{ns}\Gamma^n_{kk}\right)A^s. \tag{35}$$

Действие оператора Лапласа на ковариантный вектор

Рассмотрим теперь другую задачу. Пусть имеется ковариантный вектор:

$$\mathbf{C} = \Delta \mathbf{A},$$

где $\mathbf{A} = (A_i)$, и нас интересует результат

$$C_i = (\Delta \mathbf{A})_i. \tag{36}$$

Так же, как и в разделе 4, найдём предварительно первые две ковариантные производные от вектора $\mathbf{A} = (A_i)$.

Для первой производной имеем:

$$A_{i,k} = B_{ik} = \frac{\partial A_i}{\partial x^k} - \Gamma^s_{ik}A_s, \tag{37}$$

где B_{ik} – ковариантный тензор второго ранга.

Для второй ковариантной производной (представляя этот тензор в факторизованном виде, как $B_{ik} = M_iN_k$) получаем:

$$B_{ik,l} = \frac{\partial B_{ik}}{\partial x^l} - \Gamma^s_{il}B_{sk} - \Gamma^s_{kl}B_{is}. \tag{38}$$

Подставляя в (38) определение (37) для тензора B_{ik}, немедленно находим:

$$B_{ik,l} = A_{i,k,l} = \frac{\partial^2 A_i}{\partial x^k \partial x^l} - \Gamma^s_{ik}\frac{\partial A_s}{\partial x^l} - \Gamma^s_{il}\frac{\partial A_s}{\partial x^k} - \Gamma^s_{kl}\frac{\partial A_i}{\partial x^s} +$$
$$+ \left(\Gamma^n_{il}\Gamma^s_{nk} + \Gamma^n_{kl}\Gamma^s_{in} - \frac{\partial \Gamma^s_{ik}}{\partial x^l}\right)A_s. \tag{39}$$

Сворачивая это выражение по индексам k, l, получаем:

$$C_i = \frac{\partial^2 A_i}{\left(\partial x^k\right)^2} - 2\Gamma^s_{ik}\frac{\partial A_s}{\partial x^k} - \Gamma^s_{kk}\frac{\partial A_i}{\partial x^s} + \left(\Gamma^n_{ik}\Gamma^s_{nk} + \Gamma^n_{kk}\Gamma^s_{in} - \frac{\partial \Gamma^s_{ik}}{\partial x^k}\right)A_s =$$
$$= \Delta A_i - 2\Gamma^s_{ik}\frac{\partial A_s}{\partial x^k} + \left(\Gamma^n_{ik}\Gamma^s_{nk} + \Gamma^n_{kk}\Gamma^s_{in} - \frac{\partial \Gamma^s_{ik}}{\partial x^k}\right)A_s. \qquad (40)$$

Глядя на выражение (40), кажется, что оно справедливо только в ортогональной системе координат. Однако это не так. Действительно, в общем случае [8; 5] выражение (39) следует переписать в виде:

$$A^i_{,k,l} = g^{ip}\left[\frac{\partial^2 A_p}{\partial x^k \partial x^l} - \Gamma^s_{pk}\frac{\partial A_s}{\partial x^l} - \Gamma^s_{pl}\frac{\partial A_s}{\partial x^k} - \Gamma^s_{kl}\frac{\partial A_p}{\partial x^s} + \right.$$
$$\left. + \left(\Gamma^n_{pl}\Gamma^s_{nk} + \Gamma^n_{kl}\Gamma^s_{pn} - \frac{\partial \Gamma^s_{pk}}{\partial x^l}\right)A_s\right]. \qquad (41)$$

Сворачивая это общее выражение по индексам k, l, приходим к интересующему нас результату:

$$C^i = \left(\Delta \mathbf{A}\right)^i = g^{ip}\left[\frac{\partial^2 A_p}{\left(\partial x^k\right)^2} - 2\Gamma^s_{pk}\frac{\partial A_s}{\partial x^k} - \Gamma^s_{kk}\frac{\partial A_p}{\partial x^s} + \right.$$
$$\left. + \left(\Gamma^n_{pk}\Gamma^s_{nk} + \Gamma^n_{kk}\Gamma^s_{pn} - \frac{\partial \Gamma^s_{pk}}{\partial x^k}\right)A_s\right]. \qquad (42)$$

Опуская здесь индекс i, с помощью известного правила $C_i = g_{im}C^m$ получаем:

$$C_i = g_{im}\left(\Delta \mathbf{A}\right)^m = g_{im}g^{mp}\left[\frac{\partial^2 A_p}{\left(\partial x^k\right)^2} - 2\Gamma^s_{pk}\frac{\partial A_s}{\partial x^k} - \Gamma^s_{kk}\frac{\partial A_p}{\partial x^s} + \right.$$
$$\left. + \left(\Gamma^n_{pk}\Gamma^s_{nk} + \Gamma^n_{kk}\Gamma^s_{pn} - \frac{\partial \Gamma^s_{pk}}{\partial x^k}\right)A_s\right] =$$
$$= \delta^i_p\left[\frac{\partial^2 A_p}{\left(\partial x^k\right)^2} - 2\Gamma^s_{pk}\frac{\partial A_s}{\partial x^k} - \Gamma^s_{kk}\frac{\partial A_p}{\partial x^s} + \left(\Gamma^n_{pk}\Gamma^s_{nk} + \Gamma^n_{kk}\Gamma^s_{pn} - \frac{\partial \Gamma^s_{pk}}{\partial x^k}\right)A_s\right] =$$
$$= \frac{\partial^2 A_i}{\left(\partial x^k\right)^2} - 2\Gamma^s_{ik}\frac{\partial A_s}{\partial x^k} - \Gamma^s_{kk}\frac{\partial A_i}{\partial x^s} + \left(\Gamma^n_{ik}\Gamma^s_{nk} + \Gamma^n_{kk}\Gamma^s_{in} - \frac{\partial \Gamma^s_{ik}}{\partial x^k}\right)A_s =$$
$$= \Delta A_i - 2\Gamma^s_{ik}\frac{\partial A_s}{\partial x^k} + \left(\Gamma^n_{ik}\Gamma^s_{nk} + \Gamma^n_{kk}\Gamma^s_{in} - \frac{\partial \Gamma^s_{ik}}{\partial x^k}\right)A_s. \qquad (43)$$

Сравнивая (43) с формулой (40), мы видим их полную тождественность. Однако, если сравнить (43) с (35), то можно увидеть и весьма существенную разницу между ними. Действительно, в общем случае векторы $B_i = (\Delta\mathbf{A})_i$ и $C^i = (\Delta\mathbf{A})^i$, как и должно быть, не совпадают.

Рассмотрим теперь такое выражение:

$$A_i = g_{is}A^s$$

и найдём от него ковариантную производную второго порядка.

В силу леммы Риччи, согласно которой ковариантная производная от метрического тензора равна нулю, то есть $g_{ik,l} = 0$, имеем:

$$A_{i,k,l} = g_{is}\left[\frac{\partial^2 A^s}{\partial x^k \partial x^l} + \Gamma^s_{kn}\frac{\partial A^n}{\partial x^l} + \Gamma^s_{ln}\frac{\partial A^n}{\partial x^k} - \Gamma^n_{kl}\frac{\partial A^s}{\partial x^n} + \right.$$
$$\left. + A^p\left(\frac{\partial \Gamma^s_{kp}}{\partial x^l} + \Gamma^s_{ln}\Gamma^n_{kp} - \Gamma^n_{kl}\Gamma^s_{np}\right)\right] =$$
$$= g_{is}\frac{\partial^2 A^s}{\partial x^k \partial x^l} + \Gamma_{iks}\frac{\partial A^s}{\partial x^l} + \Gamma_{ils}\frac{\partial A^s}{\partial x^k} - g_{is}\Gamma^n_{kl}\frac{\partial A^s}{\partial x^n} +$$
$$+ A^s\left(\frac{\partial \Gamma_{iks}}{\partial x^l} - \Gamma^n_{ks}\frac{\partial g_{in}}{\partial x^l} + \Gamma_{iln}\Gamma^n_{ks} - \Gamma^n_{kl}\Gamma_{ins}\right).$$

Но поскольку $\dfrac{\partial g_{in}}{\partial x^l} = \Gamma_{inl} + \Gamma_{nil}$, то отсюда следует, что

$$A_{i,k,l} = g_{is}\frac{\partial^2 A^s}{\partial x^k \partial x^l} + \Gamma_{iks}\frac{\partial A^s}{\partial x^l} + \Gamma_{ils}\frac{\partial A^s}{\partial x^k} - g_{is}\Gamma^n_{kl}\frac{\partial A^s}{\partial x^n} +$$
$$+ A^s\left(\frac{\partial \Gamma_{iks}}{\partial x^l} - \Gamma^n_{ks}\left(\Gamma_{inl} + \Gamma_{nil}\right) + \Gamma_{iln}\Gamma^n_{ks} - \Gamma^n_{kl}\Gamma_{ins}\right) \quad (44)$$

Сворачивая выражение (44) по индексам k, l, получим выражение:

$$A_{i,k,k} = g_{is}\Delta A^s + 2\Gamma_{iks}\frac{\partial A^s}{\partial x^k} + A^s\left(\frac{\partial \Gamma_{iks}}{\partial x^k} - \Gamma^n_{ks}\Gamma_{nik} - \Gamma^n_{kk}\Gamma_{ins}\right), \quad (45)$$

где введено сокращённое обозначение для обычного оператора Лапласа согласно (4).

Совершенно ясно, что, с целью введения правильного оператора Лапласа в криволинейных координатах, нам необходимо привести в соответствие друг с другом формулу (45) и формулу (40), которую запишем в виде:

$$C_i = \Delta A_i - 2\Gamma^s_{ik}\frac{\partial A_s}{\partial x^k} + \left(\Gamma^n_{ik}\Gamma^s_{nk} + \Gamma^n_{kk}\Gamma^s_{in} - \frac{\partial \Gamma^s_{ik}}{\partial x^k}\right)A_s. \quad (46)$$

Взяв среднее арифметическое от формул (45) и (46), получаем искомое общее определение для вычисления результата действия оператора Лапласа на ковариантный вектор в произвольной криволинейной системе координат:

$$\left(\Delta\mathbf{A}\right)_i=\frac{g_{is}\Delta A^s+\Delta A_i}{2}+\Gamma_{isk}\frac{\partial A^s}{\partial x^k}-\Gamma^s_{ik}\frac{\partial A_s}{\partial x^k}-\frac{\Gamma^s_{kk}}{2}\left(g_{ip}\frac{\partial A^p}{\partial x^s}+\frac{\partial A_i}{\partial x^s}\right)+$$
$$+\frac{A^s}{2}\left(\frac{\partial\Gamma_{isk}}{\partial x^k}-\Gamma^n_{kk}\Gamma_{isn}-\Gamma^n_{ik}\Gamma_{nsk}\right)+\frac{A_s}{2}\left(\Gamma^n_{ik}\Gamma^s_{nk}+\Gamma^n_{kk}\Gamma^s_{in}-\frac{\partial\Gamma^s_{ik}}{\partial x^k}\right). \tag{47}$$

В случае же ортонормированного базиса, в котором, как мы знаем [5], выполняются соотношения:

$$\Gamma^i_{kl}=\Gamma_{ikl},\;\; A_i=A^i,\;\; g_{ik}=\delta_{ik}, \tag{48}$$

имеем:

$$\left(\Delta\mathbf{A}\right)_i=\Delta A_i+\left(\Gamma_{isk}-\Gamma_{sik}\right)\frac{\partial A_s}{\partial x^k}+$$
$$+\frac{A_s}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\Gamma_{isk}-\Gamma_{sik}\right)+\Gamma_{nkk}\left(\Gamma_{sin}-\Gamma_{isn}\right)+\Gamma_{nik}\left(\Gamma_{snk}-\Gamma_{nsk}\right)\right]. \tag{49}$$

Формула (49) и является той замечательной формулой, о которой почему-то в [1; 2; 8; 9], к сожалению, даже не упоминается. Между тем эта формула является основной при вычислении результата действия оператора Лапласа на любую векторную функцию и в любой (а не только в сферической и цилиндрической) ортонормированной системе координат.

Что же касается формулы (47), то она является обобщением действия оператора Лапласа на любую векторную функцию для произвольной криволинейной системы координат.

Посмотрим теперь, как «работает» формула (49) в сферической и цилиндрической СК, и начнём со сферической СК.

Оставляя лишь не нулевые символы Кристоффеля благодаря таблице, приведённой, скажем, в [5], согласно которой:

$$\Gamma_{r\theta\theta}=\Gamma^r_{\theta\theta}=-\frac{1}{r},\;\;\Gamma_{r\varphi\varphi}=\Gamma^r_{\varphi\varphi}=-\frac{1}{r},\;\;\Gamma_{\theta\varphi\varphi}=\Gamma^\theta_{\varphi\varphi}=$$
$$=-\frac{ctg\theta}{r},\;\;\Gamma_{\theta r\theta}=\Gamma_{\theta\theta r}=\Gamma^\theta_{r\theta}=\Gamma^\theta_{\theta r}=\frac{1}{r},$$
$$\Gamma_{\varphi r\varphi}=\Gamma_{\varphi\varphi r}=\Gamma^\varphi_{\varphi r}=\Gamma^\varphi_{r\varphi}=\frac{1}{r},\;\;\Gamma_{\varphi\theta\varphi}=\Gamma_{\varphi\varphi\theta}=\Gamma^\varphi_{\varphi\theta}=\Gamma^\varphi_{\theta\varphi}=\frac{ctg\theta}{r}. \tag{50}$$

В соответствии с (49) для проекции на орт $\mathbf{e}_r$ сферического единичного базиса ($\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_\varphi$) имеем:

$$\left(\Delta\mathbf{A}\right)_r=\Delta A_r+\left(\Gamma_{rsk}-\Gamma_{srk}\right)\frac{\partial A_s}{\partial x^k}+$$
$$+\frac{A_s}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\Gamma_{rsk}-\Gamma_{srk}\right)+\Gamma_{nkk}\left(\Gamma_{srn}-\Gamma_{rsn}\right)+\Gamma_{nrk}\left(\Gamma_{snk}-\Gamma_{nsk}\right)\right]=$$
$$=\Delta A_r+\left(\Gamma_{r\theta\theta}-\Gamma_{\theta r\theta}\right)\frac{\partial A_\theta}{\partial x^\theta}+\left(\Gamma_{r\varphi\varphi}-\Gamma_{\varphi r\varphi}\right)\frac{\partial A_\varphi}{\partial x^\varphi}+$$

$$+\frac{A_r}{2}\Big[\Gamma_{\theta r\theta}\left(\Gamma_{r\theta\theta}-\Gamma_{\theta r\theta}\right)+\Gamma_{\varphi r\varphi}\left(\Gamma_{r\varphi\varphi}-\Gamma_{\varphi r\varphi}\right)\Big]+$$
$$+\frac{A_\theta}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x^\theta}\left(\Gamma_{r\theta\theta}-\Gamma_{\theta r\theta}\right)+\Gamma_{\theta\varphi\varphi}\left(\Gamma_{\theta r\theta}-\Gamma_{r\theta\theta}\right)+\Gamma_{\varphi r\varphi}\left(\Gamma_{\theta\varphi\varphi}-\Gamma_{\varphi\theta\varphi}\right)\right]+$$
$$+\frac{A_\varphi}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x^\varphi}\left(\Gamma_{r\varphi\varphi}-\Gamma_{\varphi r\varphi}\right)+\Gamma_{\varphi\theta\theta}\left(\Gamma_{\varphi r\varphi}-\Gamma_{r\varphi\varphi}\right)+\Gamma_{\theta r\theta}\left(\Gamma_{\varphi\theta\theta}-\Gamma_{\theta\varphi\theta}\right)\right].$$

Подставляя сюда символы Кристоффеля из (50) и частные дифференциалы рассматриваемого нами ортонормированного базиса:

$$\partial x^r = dr,\ \ \partial x^\theta = rd\theta,\ \ \partial x^\varphi = r\sin\theta d\varphi, \qquad (51)$$

окончательно находим:

$$\left(\Delta\mathbf{A}\right)_r = \Delta A_r - \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta} - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} - \frac{2A_r}{r^2} - \frac{2ctg\theta A_\theta}{r^2} =$$
$$= \Delta A_r - \frac{2}{r^2}\left(A_r + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\left(\sin\theta A_\theta\right)}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}\right). \qquad (52)$$

Далее, для проекции на орт $\mathbf{e}_\theta$ получаем:

$$\left(\Delta\mathbf{A}\right)_\theta = \Delta A_\theta + \left(\Gamma_{\theta sk}-\Gamma_{s\theta k}\right)\frac{\partial A_s}{\partial x^k}+$$
$$+\frac{A_s}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\Gamma_{\theta sk}-\Gamma_{s\theta k}\right)+\Gamma_{nkk}\left(\Gamma_{s\theta n}-\Gamma_{\theta sn}\right)+\Gamma_{n\theta k}\left(\Gamma_{snk}-\Gamma_{nsk}\right)\right]=$$
$$= \Delta A_\theta + \left(\Gamma_{\theta r\theta}-\Gamma_{r\theta\theta}\right)\frac{\partial A_r}{\partial x^\theta}+\left(\Gamma_{\theta\varphi\varphi}-\Gamma_{\varphi\theta\varphi}\right)\frac{\partial A_\varphi}{\partial x^\varphi}+$$
$$+\frac{A_r}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x^\theta}\left(\Gamma_{\theta r\theta}-\Gamma_{r\theta\theta}\right)+\Gamma_{\theta\varphi\varphi}\left(\Gamma_{r\theta\theta}-\Gamma_{\theta r\theta}\right)+\Gamma_{\varphi\theta\varphi}\left(\Gamma_{r\varphi\varphi}-\Gamma_{\varphi r\varphi}\right)\right]+$$
$$+\frac{A_\theta}{2}\Big[\Gamma_{r\theta\theta}\left(\Gamma_{\theta r\theta}-\Gamma_{r\theta\theta}\right)+\Gamma_{\varphi\theta\theta}\left(\Gamma_{\theta\varphi\theta}-\Gamma_{\varphi\theta\theta}\right)+\Gamma_{\varphi\theta\varphi}\left(\Gamma_{\theta\varphi\varphi}-\Gamma_{\varphi\theta\varphi}\right)\Big]+$$
$$+\frac{A_\varphi}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x^\theta}\left(\Gamma_{\theta\varphi\theta}-\Gamma_{\varphi\theta\theta}\right)+\frac{\partial}{\partial x^\varphi}\left(\Gamma_{\theta\varphi\varphi}-\Gamma_{\varphi\theta\varphi}\right)+\Gamma_{\theta\varphi\varphi}\left(\Gamma_{\varphi\theta\theta}-\Gamma_{\theta\varphi\theta}\right)+\right.$$
$$\left.+\Gamma_{\varphi\theta\theta}\left(\Gamma_{\varphi\theta\varphi}-\Gamma_{\theta\varphi\varphi}\right)+\Gamma_{\theta\theta\varphi}\left(\Gamma_{\varphi\theta\varphi}-\Gamma_{\theta\varphi\varphi}\right)\right].$$

Подставляя сюда отличные от нуля значения символов Кристоффеля согласно (50) и частные дифференциалы из (51), находим:

$$\left(\Delta\mathbf{A}\right)_\theta = \Delta A_\theta + \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_r}{\partial\theta} - \frac{2ctg\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} - \frac{A_\theta}{r^2\sin^2\theta}. \qquad (53)$$

Наконец, проекция на орт $\mathbf{e}_\varphi$ даёт:

$$
\begin{aligned}
&(\Delta\mathbf{A})_\varphi = \Delta A_\varphi + \left(\Gamma_{\varphi sk} - \Gamma_{s\varphi k}\right)\frac{\partial A_s}{\partial x^k} + \\
&+\frac{A_s}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\Gamma_{\varphi sk} - \Gamma_{s\varphi k}\right) + \Gamma_{nkk}\left(\Gamma_{s\varphi n} - \Gamma_{\varphi sn}\right) + \Gamma_{n\varphi k}\left(\Gamma_{snk} - \Gamma_{nsk}\right)\right] = \\
&= \Delta A_\varphi + \left(\Gamma_{\varphi r\varphi} - \Gamma_{r\varphi\varphi}\right)\frac{\partial A_r}{\partial x^\varphi} + \left(\Gamma_{\varphi\theta\theta} - \Gamma_{\theta\varphi\theta}\right)\frac{\partial A_\theta}{\partial x^\theta} + \left(\Gamma_{\varphi\theta\varphi} - \Gamma_{\theta\varphi\varphi}\right)\frac{\partial A_\theta}{\partial x^\varphi} + \\
&+\frac{A_r}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x^\varphi}\left(\Gamma_{\varphi r\varphi} - \Gamma_{r\varphi\varphi}\right) + \Gamma_{\varphi\theta\theta}\left(\Gamma_{r\varphi\varphi} - \Gamma_{\varphi r\varphi}\right) + \Gamma_{\theta\varphi\theta}\left(\Gamma_{r\theta\theta} - \Gamma_{\theta r\theta}\right)\right] + \\
&+\frac{A_\theta}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x^\theta}\left(\Gamma_{\varphi\theta\theta} - \Gamma_{\theta\varphi\theta}\right) + \frac{\partial}{\partial x^\varphi}\left(\Gamma_{\varphi\theta\varphi} - \Gamma_{\theta\varphi\varphi}\right) + \Gamma_{\theta\varphi\varphi}\left(\Gamma_{\theta\varphi\theta} - \Gamma_{\varphi\theta\theta}\right) + \right. \\
&\left. + \Gamma_{\varphi\theta\theta}\left(\Gamma_{\theta\varphi\varphi} - \Gamma_{\varphi\theta\varphi}\right) + \Gamma_{\varphi\varphi\theta}\left(\Gamma_{\theta\varphi\theta} - \Gamma_{\varphi\theta\theta}\right)\right] + \\
&+\frac{A_\varphi}{2}\left[\Gamma_{r\varphi\varphi}\left(\Gamma_{\varphi r\varphi} - \Gamma_{r\varphi\varphi}\right) + \Gamma_{\theta\varphi\theta}\left(\Gamma_{\varphi\theta\theta} - \Gamma_{\theta\varphi\theta}\right) + \Gamma_{\theta\varphi\varphi}\left(\Gamma_{\varphi\theta\varphi} - \Gamma_{\theta\varphi\varphi}\right)\right].
\end{aligned}
$$

Подставляя сюда (50) и (51), будем иметь:

$$(\Delta\mathbf{A})_\varphi = \Delta A_\varphi + \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} + \frac{2ctg\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi} - \frac{A_\varphi}{r^2\sin^2\theta}. \tag{54}$$

Здесь, напомним ещё раз, обычный оператор Лапласа в сферической системе координат есть:

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}. \tag{55}$$

Собирая формулы (52), (53) и (54) воедино, получаем:

$$(\Delta\mathbf{A})_r = \Delta A_r - \frac{2}{r^2}\left(A_r + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\left(\sin\theta A_\theta\right)}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}\right), \tag{56}$$

$$(\Delta\mathbf{A})_\theta = \Delta A_\theta + \frac{2}{r^2}\left(\frac{\partial A_r}{\partial\theta} - \frac{ctg\theta}{\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} - \frac{A_\theta}{2\sin^2\theta}\right), \tag{57}$$

$$(\Delta\mathbf{A})_\varphi = \Delta A_\varphi + \frac{2}{r^2\sin\theta}\left(\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} + ctg\theta\frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi} - \frac{A_\varphi}{2\sin\theta}\right). \tag{58}$$

Сравнивая проекции (54)–(56) с формулами, приведёнными, например, в монографии [8; с. 615], мы видим их полное совпадение.

Рассмотрим теперь ещё один пример. Пусть имеется цилиндрическая система координат, в которой отличные от нуля символы Кристоффеля есть:

$$\Gamma_{r\varphi\varphi} = -\frac{1}{r}, \quad \Gamma_{\varphi r\varphi} = \Gamma_{\varphi\varphi r} = \frac{1}{r}, \tag{59}$$

а частные дифференциалы:

$$\partial x^r = dr,\ \ \partial x^\varphi = r d\varphi,\ \ \partial x^z = dz. \tag{60}$$

Используя формулу (49) для проекций вектора **A** на ортонормированный единичный базис $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_z$ находим для проекции на $\mathbf{e}_r$:

$$\left(\Delta\mathbf{A}\right)_r = \Delta A_r + \left(\Gamma_{rsk} - \Gamma_{srk}\right)\frac{\partial A_s}{\partial x^k} +$$
$$+\frac{A_s}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\Gamma_{rsk} - \Gamma_{srk}\right) + \Gamma_{nkk}\left(\Gamma_{srn} - \Gamma_{rsn}\right) + \Gamma_{nrk}\left(\Gamma_{snk} - \Gamma_{nsk}\right)\right] =$$
$$= \Delta A_r + \left(\Gamma_{r\varphi\varphi} - \Gamma_{\varphi r\varphi}\right)\frac{\partial A_\varphi}{\partial x^\varphi} +$$
$$+\frac{A_r}{2}\left[\Gamma_{\varphi r\varphi}\left(\Gamma_{r\varphi\varphi} - \Gamma_{\varphi r\varphi}\right)\right] + \frac{A_\varphi}{2}\frac{\partial}{\partial x^\varphi}\left(\Gamma_{r\varphi\varphi} - \Gamma_{\varphi r\varphi}\right)$$

Подставляя сюда (59) и (60), получаем:

$$\left(\Delta\mathbf{A}\right)_r = \Delta A_r - \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} - \frac{A_r}{r^2}. \tag{61}$$

Для проекции на орт $\mathbf{e}_\varphi$ находим с помощью (49), оставляя лишь ненулевые символы Кристоффеля:

$$\left(\Delta\mathbf{A}\right)_\varphi = \Delta A_\varphi + \left(\Gamma_{\varphi sk} - \Gamma_{s\varphi k}\right)\frac{\partial A_s}{\partial x^k} +$$
$$+\frac{A_s}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\Gamma_{\varphi sk} - \Gamma_{s\varphi k}\right) + \Gamma_{nkk}\left(\Gamma_{s\varphi n} - \Gamma_{\varphi sn}\right) + \Gamma_{n\varphi k}\left(\Gamma_{snk} - \Gamma_{nsk}\right)\right] =$$
$$= \Delta A_\varphi + \left(\Gamma_{\varphi r\varphi} - \Gamma_{r\varphi\varphi}\right)\frac{\partial A_r}{\partial x^\varphi} + \frac{A_r}{2}\frac{\partial}{\partial x^\varphi}\left(\Gamma_{\varphi r\varphi} - \Gamma_{r\varphi\varphi}\right) +$$
$$+\frac{A_\varphi}{2}\Gamma_{r\varphi\varphi}\left(\Gamma_{\varphi r\varphi} - \Gamma_{r\varphi\varphi}\right)$$

Подставляя сюда (59) и (60), будем иметь окончательно:

$$\left(\Delta\mathbf{A}\right)_\varphi = \Delta A_\varphi + \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{A_\varphi}{r^2} \tag{62}$$

Наконец, для проекции на орт $\mathbf{e}_z$ сразу же находим:

$$\left(\Delta\mathbf{A}\right)_z = \Delta A_z. \tag{63}$$

Собирая теперь (61)–(63) воедино, имеем:

$$\begin{cases} \left(\Delta\mathbf{A}\right)_r = \Delta A_r - \dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} - \dfrac{A_r}{r^2}, \\ \left(\Delta\mathbf{A}\right)_\varphi = \Delta A_\varphi + \dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \dfrac{A_\varphi}{r^2}, \\ \left(\Delta\mathbf{A}\right)_z = \Delta A_z. \end{cases} \tag{64}$$

В заключении к этому разделу ещё раз подчеркнём, что все вычисления будут нами вестись только в ортонормированных базисах.

Двухмерная ортогональная параболическая система координат

В качестве ещё одного весьма полезного приложения формулы (49) рассмотрим такой пример. Пусть имеется двухмерное ортогональное преобразование вида:

$$\begin{cases} x = \mathrm{uv}, \\ y = \dfrac{\mathrm{u}^2 - \mathrm{v}^2}{2}. \end{cases} \tag{65}$$

Тогда метрика в переменных u, v будет:

$$dl^2 = \left(\mathrm{u}^2 + \mathrm{v}^2\right)\left(d\,\mathrm{u}^2 + d\,\mathrm{v}^2\right) = \left(\partial x^{\mathrm{u}}\right)^2 + \left(\partial x^{\mathrm{v}}\right)^2, \tag{66}$$

где частные дифференциалы:

$$\partial x^{\mathrm{u}} = \sqrt{\mathrm{u}^2 + \mathrm{v}^2}\,d\,\mathrm{u}, \;\; \partial x^{\mathrm{v}} = \sqrt{\mathrm{u}^2 + \mathrm{v}^2}\,d\,\mathrm{v}. \tag{67}$$

С помощью алгоритма, изложенного в [5] и немного выше, отличные от нуля символы Кристоффеля первого и второго рода есть:

$$\Gamma_{\mathrm{uuu}} = \Gamma^{\mathrm{u}}_{\mathrm{uu}} = \frac{\mathrm{u}}{\left(\mathrm{u}^2+\mathrm{v}^2\right)^{\frac{3}{2}}}, \;\; \Gamma_{\mathrm{vvv}} = \Gamma^{\mathrm{v}}_{\mathrm{vv}} = \frac{\mathrm{v}}{\left(\mathrm{u}^2+\mathrm{v}^2\right)^{\frac{3}{2}}}, \;\; \Gamma_{\mathrm{uvv}} = \Gamma^{\mathrm{u}}_{\mathrm{vv}} = -\frac{\mathrm{u}}{\left(\mathrm{u}^2+\mathrm{v}^2\right)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\Gamma_{\mathrm{vuu}} = \Gamma^{\mathrm{v}}_{\mathrm{uu}} = -\frac{\mathrm{v}}{\left(\mathrm{u}^2+\mathrm{v}^2\right)^{\frac{3}{2}}}, \;\; \Gamma_{\mathrm{uuv}} = \Gamma_{\mathrm{uvu}} = \Gamma^{\mathrm{u}}_{\mathrm{uv}} = \Gamma^{\mathrm{u}}_{\mathrm{vu}} = \frac{\mathrm{v}}{\left(\mathrm{u}^2+\mathrm{v}^2\right)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\Gamma_{\mathrm{vvu}} = \Gamma_{\mathrm{vuv}} = \Gamma^{\mathrm{v}}_{\mathrm{vu}} = \Gamma^{\mathrm{v}}_{\mathrm{uv}} = \frac{\mathrm{u}}{\left(\mathrm{u}^2+\mathrm{v}^2\right)^{\frac{3}{2}}}. \tag{68}$$

Найдём проекции оператора Лапласа, действующего на некоторую векторную функцию **A** (неважно при этом ковариантный он или контравариантный, поскольку речь идёт об ОНСК), на единичные орты $\mathbf{e}_{\mathrm{u}}$ и $\mathbf{e}_{\mathrm{v}}$ в этом случае. Согласно (49), имеем:

$$\left(\Delta\mathbf{A}\right)_i = \Delta A_i + \left(\Gamma_{isk} - \Gamma_{sik}\right)\frac{\partial A_s}{\partial x^k} +$$

$$+\frac{A_s}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\Gamma_{isk} - \Gamma_{sik}\right) + \Gamma_{nkk}\left(\Gamma_{sin} - \Gamma_{isn}\right) + \Gamma_{nik}\left(\Gamma_{snk} - \Gamma_{nsk}\right)\right].$$

Откуда проекция на орт $\mathbf{e}_{\mathrm{u}}$ будет:

$$\left(\Delta\mathbf{A}\right)_{\mathrm{u}} = \Delta A_{\mathrm{u}} + \left(\Gamma_{\mathrm{u}sk} - \Gamma_{s\mathrm{u}k}\right)\frac{\partial A_s}{\partial x^k} +$$
$$+\frac{A_s}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\Gamma_{\mathrm{u}sk} - \Gamma_{s\mathrm{u}k}\right) + \Gamma_{nkk}\left(\Gamma_{s\mathrm{u}n} - \Gamma_{\mathrm{u}sn}\right) + \Gamma_{n\mathrm{u}k}\left(\Gamma_{snk} - \Gamma_{nsk}\right)\right] =$$
$$= \Delta A_{\mathrm{u}} + \left(\Gamma_{\mathrm{uvu}} - \Gamma_{\mathrm{vuu}}\right)\frac{\partial A_{\mathrm{v}}}{\partial x^{\mathrm{u}}} + \left(\Gamma_{\mathrm{uvv}} - \Gamma_{\mathrm{vuv}}\right)\frac{\partial A_{\mathrm{v}}}{\partial x^{\mathrm{v}}} +$$
$$+\frac{A_{\mathrm{u}}}{2}\left[\Gamma_{\mathrm{vuu}}\left(\Gamma_{\mathrm{uvu}} - \Gamma_{\mathrm{vuu}}\right) + \Gamma_{\mathrm{vuv}}\left(\Gamma_{\mathrm{uvv}} - \Gamma_{\mathrm{vuv}}\right)\right] +$$
$$+\frac{A_{\mathrm{v}}}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\mathrm{u}}}\left(\Gamma_{\mathrm{uvu}} - \Gamma_{\mathrm{vuu}}\right) + \frac{\partial}{\partial x^{\mathrm{v}}}\left(\Gamma_{\mathrm{uvv}} - \Gamma_{\mathrm{vuv}}\right) + \left(\Gamma_{\mathrm{uuu}} + \Gamma_{\mathrm{uvv}}\right)\left(\Gamma_{\mathrm{vuu}} - \Gamma_{\mathrm{uvu}}\right) +\right.$$
$$\left. + \left(\Gamma_{\mathrm{vuu}} + \Gamma_{\mathrm{vvv}}\right)\left(\Gamma_{\mathrm{vuv}} - \Gamma_{\mathrm{uvv}}\right) + \Gamma_{\mathrm{uuu}}\left(\Gamma_{\mathrm{vuu}} - \Gamma_{\mathrm{uvu}}\right) + \Gamma_{\mathrm{uuv}}\left(\Gamma_{\mathrm{vuv}} - \Gamma_{\mathrm{uvv}}\right)\right). \quad (69)$$

Подставляя сюда (67) и (68), найдём:

$$\left(\Delta\mathbf{A}\right)_{\mathrm{u}} = \Delta A_{\mathrm{u}} + \frac{2\mathrm{v}}{\left(\mathrm{u}^2+\mathrm{v}^2\right)^2}\frac{\partial A_{\mathrm{v}}}{\partial \mathrm{u}} - \frac{2\mathrm{u}}{\left(\mathrm{u}^2+\mathrm{v}^2\right)^2}\frac{\partial A_{\mathrm{v}}}{\partial \mathrm{v}} + \frac{A_{\mathrm{u}}}{2}\left[-\frac{2\mathrm{v}^2}{\left(\mathrm{u}^2+\mathrm{v}^2\right)^3} - \frac{2\mathrm{u}^2}{\left(\mathrm{u}^2+\mathrm{v}^2\right)^3}\right] +$$
$$+\frac{A_{\mathrm{v}}}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\mathrm{u}}}\frac{2\mathrm{v}}{\left(\mathrm{u}^2+\mathrm{v}^2\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\partial}{\partial x^{\mathrm{v}}}\frac{2\mathrm{u}}{\left(\mathrm{u}^2+\mathrm{v}^2\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{2\mathrm{uv}}{\left(\mathrm{u}^2+\mathrm{v}^2\right)^3} + \frac{2\mathrm{vu}}{\left(\mathrm{u}^2+\mathrm{v}^2\right)^3}\right).$$

Или, окончательно:

$$\left(\Delta\mathbf{A}\right)_{\mathrm{u}} = \Delta A_{\mathrm{u}} + \frac{2}{\left(\mathrm{u}^2+\mathrm{v}^2\right)^2}\left(\mathrm{v}\frac{\partial A_{\mathrm{v}}}{\partial \mathrm{u}} - \mathrm{u}\frac{\partial A_{\mathrm{v}}}{\partial \mathrm{v}} - A_{\mathrm{u}}\right). \quad (70)$$

Аналогично, с помощью (49) получаем проекцию и на орт $\mathbf{e}_{\mathrm{v}}$. Её легко найти благодаря простой замене $\mathrm{u} \to \mathrm{v}$, $\mathrm{v} \to \mathrm{u}$ в формуле (70), то есть:

$$\left(\Delta\mathbf{A}\right)_{\mathrm{v}} = \Delta A_{\mathrm{v}} + \frac{2}{\left(\mathrm{u}^2+\mathrm{v}^2\right)^2}\left(\mathrm{u}\frac{\partial A_{\mathrm{u}}}{\partial \mathrm{v}} - \mathrm{v}\frac{\partial A_{\mathrm{u}}}{\partial \mathrm{u}} - A_{\mathrm{v}}\right). \quad (71)$$

В соответствии с определением (4) и частными дифференциалами (67) оператор Лапласа определяется согласно формуле:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\left(\partial x^{\mathrm{u}}\right)^2} + \frac{\partial^2}{\left(\partial x^{\mathrm{v}}\right)^2} = \frac{1}{\left(\mathrm{u}^2+\mathrm{v}^2\right)}\left(\frac{\partial^2}{\partial \mathrm{u}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \mathrm{v}^2}\right). \quad (72)$$

Таким образом, воспользовавшись явным выражением для оператора Лапласа (72), будем иметь из решений (70) и (71):

$$\left(\Delta\mathbf{A}\right)_{\mathrm{u}} = \frac{1}{\left(\mathrm{u}^2+\mathrm{v}^2\right)}\left(\frac{\partial^2 A_{\mathrm{u}}}{\partial \mathrm{u}^2} + \frac{\partial^2 A_{\mathrm{u}}}{\partial \mathrm{v}^2}\right) + \frac{2}{\left(\mathrm{u}^2+\mathrm{v}^2\right)^2}\left(\mathrm{v}\frac{\partial A_{\mathrm{v}}}{\partial \mathrm{u}} - \mathrm{u}\frac{\partial A_{\mathrm{v}}}{\partial \mathrm{v}} - A_{\mathrm{u}}\right), \quad (73)$$

$$\left(\Delta\mathbf{A}\right)_{\mathrm{v}}=\frac{1}{\left(\mathrm{u}^2+\mathrm{v}^2\right)}\left(\frac{\partial^2 A_{\mathrm{v}}}{\partial \mathrm{u}^2}+\frac{\partial^2 A_{\mathrm{v}}}{\partial \mathrm{v}^2}\right)+\frac{2}{\left(\mathrm{u}^2+\mathrm{v}^2\right)^2}\left(\mathrm{u}\frac{\partial A_{\mathrm{u}}}{\partial \mathrm{v}}-\mathrm{v}\frac{\partial A_{\mathrm{u}}}{\partial \mathrm{u}}-A_{\mathrm{v}}\right). \quad (74)$$

Задача о кручении цилиндра в условиях его нагрева

В качестве практического приложения приведённых выше формул вычислим деформацию упруго-деформируемого цилиндра в условиях его бокового кручения, когда крутящий момент направлен строго вдоль его оси z, при дополнительном условии, когда он ещё и нагревается благодаря приложенному в радиальном по отношению к оси цилиндра градиенту температуры. Считаем, что нижний конец цилиндра жёстко закреплён.

Согласно основному уравнению статической теории упругости [3], описывающему пространственное распределение вектора деформаций $\mathbf{u}$ при учёте теплового эффекта, имеем:

$$\Delta\mathbf{u}+\frac{1}{1-2\sigma}graddiv\mathbf{u}=\frac{\rho\mathbf{g}}{\mu}-\frac{K\beta}{\mu}\nabla T+\frac{\mathbf{f}}{\mu}, \quad (75)$$

где σ – коэффициент Пуассона, ρ – плотность материала, $\mu=\frac{E}{2\left(1-\sigma\right)}$ – модуль сдвига, E – модуль Юнга, $\mathbf{g}$ – ускорение силы тяжести, $K=\frac{E}{3\left(1-2\sigma\right)}$ – коэффициент всестороннего сжатия (растяжения), $\beta=\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_S$ – коэффициент теплового расширения, T – температура, V – объём тела, S – энтропия, $\mathbf{f}$ – объёмная сила.

Для того, чтобы найти теперь проекции уравнения (75) на ортонормированный базис $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_z$ цилиндрической системы координат, нам следует воспользоваться общими выражениями для оператора Лапласа в соответствии с формулами (64). Легко заметить, что второе слагаемое в левой части уравнения (75) также представляет собой вторую ковариантную производную, но в отличие от выражения (44), его следует вычислять несколько иначе. Действительно, поскольку операция дифференцирования в этом случае представляет собой нахождение градиента от скаляра, то предварительно запишем общее выражение для ковариантной производной от некоторого произвольного вектора $\mathbf{A}$. Имеем, считая этот вектор ковариантным:

$$A_{i,k}=\frac{\partial A_i}{\partial x^k}-\Gamma^s_{ik}A_s.$$

Сворачивая его по индексам i, k, находим:

$$A_{k,k}=\frac{\partial A_k}{\partial x^k}-\Gamma^s_{kk}A_s.$$

Записав от этого выражения градиент, получаем:

$$\frac{\partial A_{k,k}}{\partial x^i}=\frac{\partial^2 A_k}{\partial x^k \partial x^i}-\frac{\partial A_s}{\partial x^i}\Gamma^s_{kk}-\frac{\partial \Gamma^s_{kk}}{\partial x^i}A_s. \tag{76}$$

С другой стороны, поскольку:

$$A_i=g_{is}A^s,$$

то, взяв ковариантную производную от этого выражения с учётом леммы Риччи, согласно которой $g_{ik,l}$, имеем:

$$A_{i,k}=g_{is}A^s_{,k}=g_{is}\left(\frac{\partial A^s}{\partial x^k}+\Gamma^s_{kl}A^l\right)=g_{is}\frac{\partial A^s}{\partial x^k}+\Gamma_{ikl}A^l.$$

Сворачивая это выражение по i, k, получаем:

$$A_{k,k}=g_{ks}\frac{\partial A^s}{\partial x^k}+\Gamma_{kkl}A^l. \tag{77}$$

Выполнив для него операцию градиента, приходим к формуле:

$$\frac{\partial A_{k,k}}{\partial x^i}=g_{ks}\frac{\partial^2 A^s}{\partial x^k\partial x^i}+\frac{\partial g_{ks}}{\partial x^i}\frac{\partial A^s}{\partial x^k}+\Gamma_{kkl}\frac{\partial A^l}{\partial x^i}+\frac{\partial \Gamma_{kkl}}{\partial x^i}A^l. \tag{78}$$

Поскольку:

$$\frac{\partial g_{ks}}{\partial x^i}=\Gamma_{ksi}+\Gamma_{ski},$$

то из (78) следует, что:

$$\frac{\partial A_{k,k}}{\partial x^i}=g_{ks}\frac{\partial^2 A^s}{\partial x^k\partial x^i}+\left(\Gamma_{ksi}+\Gamma_{ski}\right)\frac{\partial A^s}{\partial x^k}+\Gamma_{kks}\frac{\partial A^s}{\partial x^i}+\frac{\partial \Gamma_{kks}}{\partial x^i}A^s. \tag{79}$$

Но выражения (76) и (79) должны быть равны. Поэтому взяв от них среднее арифметическое, имеем окончательную формулу для операции *graddiv*, справедливую в любой криволинейной системе координат:

$$\begin{aligned}\left(graddivA\right)_i=&\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 A_k}{\partial x^k\partial x^i}+g_{ks}\frac{\partial^2 A^s}{\partial x^k\partial x^i}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Gamma_{kks}}{\partial x^i}A^s-\frac{\partial \Gamma^s_{kk}}{\partial x^i}A_s\right)+\\&+\frac{1}{2}\left[\left(\Gamma_{ksi}+\Gamma_{ski}\right)\frac{\partial A^s}{\partial x^k}+\Gamma_{kks}\frac{\partial A^s}{\partial x^i}-\frac{\partial A_s}{\partial x^i}\Gamma^s_{kk}\right].\end{aligned} \tag{80}$$

В случае ортонормированной СК, благодаря равенствам $\Gamma^i_{kl}=\Gamma_{ikl}$, $A_i=A^i$, $g_{ik}=\delta_{ik}$, получаем из (80):

$$\begin{aligned}\left(graddiv\mathbf{A}\right)_i=&\frac{\partial^2 A_k}{\partial x^k\partial x^i}+\frac{1}{2}\left[\left(\Gamma_{ksi}+\Gamma_{ski}\right)\frac{\partial A_s}{\partial x^k}+\left(\Gamma_{kks}-\Gamma_{skk}\right)\frac{\partial A_s}{\partial x^i}\right]+\\&+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Gamma_{kks}}{\partial x^i}-\frac{\partial \Gamma_{skk}}{\partial x^i}\right)A_s\end{aligned} \tag{81}$$

В случае рассматриваемой нами цилиндрической системы координат из общего выражения (81), если подставить в него символы Кристоффеля согласно (59) и дифференциалы из (60) для проекции на орт $\mathbf{e}_r$, будем иметь:

$$\left(graddiv\mathbf{A}\right)_r = \frac{\partial^2 A_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial r\partial\varphi} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} - \frac{A_r}{r^2} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rA_r\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right) \quad (82)$$

Для проекции на орт $\mathbf{e}_\varphi$ найдём:

$$\left(graddiv\mathbf{A}\right)_\varphi = \frac{\partial^2 A_k}{\partial x^k\partial x^\varphi} + \frac{1}{2}\left(\Gamma_{ksk} - \Gamma_{skk}\right)\frac{\partial A_s}{\partial x^\varphi} + \frac{1}{2}\left(\Gamma_{ks\varphi} - \Gamma_{s\varphi k}\right)\frac{\partial A_s}{\partial x^k} - \Gamma_{s\varphi k}\frac{\partial A_k}{\partial x^s} +$$

$$+ \frac{A_s}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\Gamma_{ks\varphi} + \Gamma_{s\varphi k}\right) - 2\frac{\partial\Gamma_{skk}}{\partial x^\varphi} - \Gamma_{n\varphi k}\left(\Gamma_{ksn} + \Gamma_{nsk} - 2\Gamma_{snk}\right)\right] =$$

$$= \frac{\partial^2 A_k}{\partial x^k\partial x^\varphi} + \frac{1}{2}\left(\Gamma_{\varphi r\varphi} - \Gamma_{r\varphi\varphi}\right)\frac{\partial A_r}{\partial x^\varphi} + \frac{1}{2}\left(\Gamma_{\varphi r\varphi} - \Gamma_{r\varphi\varphi}\right)\frac{\partial A_r}{\partial x^\varphi} +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\Gamma_{r\varphi\varphi} - \Gamma_{\varphi\varphi r}\right)\frac{\partial A_\varphi}{\partial x^r} - \Gamma_{r\varphi\varphi}\frac{\partial A_\varphi}{\partial x^r} - \Gamma_{\varphi\varphi r}\frac{\partial A_r}{\partial x^\varphi} +$$

$$+ \frac{A_r}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x^\varphi}\left(\Gamma_{\varphi r\varphi} + \Gamma_{r\varphi\varphi}\right) - 2\frac{\partial\Gamma_{r\varphi\varphi}}{\partial x^\varphi}\right] +$$

$$+ \frac{A_\varphi}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x^r}\left(\Gamma_{r\varphi\varphi} + \Gamma_{\varphi\varphi r}\right) - \Gamma_{r\varphi\varphi}\left(\Gamma_{r\varphi\varphi} - \Gamma_{\varphi r\varphi}\right) - \Gamma_{\varphi\varphi r}\left(\Gamma_{r\varphi\varphi} - \Gamma_{\varphi\varphi r}\right)\right].$$

Подставляя сюда определения (59) и дифференциалы (60), приходим к искомому результату:

$$\left(graddiv\mathbf{A}\right)_\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 A_r}{\partial r\partial\varphi} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 A_z}{\partial z\partial\varphi} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} =$$

$$= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\left(rA_r\right)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right). \quad (83)$$

Наконец, проекция на орт $\mathbf{e}_z$ даёт:

$$\left(graddiv\mathbf{A}\right)_z = \frac{\partial^2 A_k}{\partial x^k\partial x^z} + \frac{1}{2}\left(\Gamma_{\varphi r\varphi} - \Gamma_{r\varphi\varphi}\right)\frac{\partial A_r}{\partial x^z} =$$

$$= \frac{\partial^2 A_r}{\partial x^r\partial x^z} + \frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial x^\varphi\partial x^z} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^z\partial x^z} + \frac{1}{2}\left(\Gamma_{\varphi r\varphi} - \Gamma_{r\varphi\varphi}\right)\frac{\partial A_r}{\partial x^z}.$$

Подставляя сюда (59) и (60), получим:

$$\left(graddiv\mathbf{A}\right)_z = \frac{\partial^2 A_r}{\partial r\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial\varphi\partial z} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial z} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\left(rA_r\right)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right). \quad (84)$$

То есть, результаты (82)–(84) имеют тот традиционный вид, который и должен у них быть.

С учётом всего сказанного в соответствии с (49) и (79) уравнение (75), записанное в произвольной ортонормированной системе координат, должно иметь следующий вид:

$$\Delta u_i + \left(\Gamma_{isk} - \Gamma_{sik}\right)\frac{\partial u_s}{\partial x^k} + \frac{u_s}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\Gamma_{isk} - \Gamma_{sik}\right) + \Gamma_{nkk}\left(\Gamma_{sin} - \Gamma_{isn}\right) + \right.$$
$$\left. + \Gamma_{nik}\left(\Gamma_{snk} - \Gamma_{nsk}\right)\right] +$$
$$+\frac{1}{1-2\sigma}\left\{\frac{\partial^2 u_k}{\partial x^k \partial x^i} + \frac{1}{2}\left(\Gamma_{ksk} - \Gamma_{skk}\right)\frac{\partial u_s}{\partial x^i} + \frac{1}{2}\left(\Gamma_{ksi} - \Gamma_{sik}\right)\frac{\partial u_s}{\partial x^k} - \Gamma_{sik}\frac{\partial u_k}{\partial x^s} + \right.$$
$$\left. + \frac{u_s}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\Gamma_{ksi} + \Gamma_{sik}\right) - 2\frac{\partial \Gamma_{skk}}{\partial x^i} - \Gamma_{nik}\left(\Gamma_{ksn} + \Gamma_{nsk} - 2\Gamma_{snk}\right)\right]\right\} = \frac{f_i}{\mu}. \qquad (85)$$

где под объёмной силой f_i подразумевается сумма всех объёмных сил, действующих на выделенный элемент объёма.

Таким образом, с учётом (64), (82) и (84), уравнения приводятся к виду:

$$\Delta u_r - \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{u_r}{r^2} + \frac{1}{1-2\sigma}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r u_r\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right) = \frac{f_r}{\mu}, \qquad (86)$$

$$\Delta u_\varphi + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{r^2} + \frac{1}{1-2\sigma}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\left(r u_r\right)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right) = \frac{f_\varphi}{\mu}, \qquad (87)$$

$$\Delta u_z + \frac{1}{1-2\sigma}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r}\right) = \frac{f_z}{\mu}. \qquad (88)$$

С помощью уравнений (86)–(88) можно приступать теперь к решению нашей задачи, в которой на цилиндр действует крутящий момент **M**, приложенный к его боковой поверхности, и действующий по касательной к ней. При этом будем предполагать, что нас интересует распределение деформаций вдали от его нижнего закреплённого торца.

Чтобы найти объёмную силу **f**, возникающую благодаря этому кручению, поступим следующим образом. Поскольку момент сил, приложенных к боковым поверхностям цилиндра, вычисляемый относительно оси цилиндра есть **M** = [**F** × **R**], где R – радиус цилиндра, а **F** – сила, приложенная к его боковой поверхности, то в скалярном виде это равенство можно представить как граничное условие:

$$F_\varphi = \frac{M_z}{R}.$$

Поэтому объёмная сила, отнесённая к единице объёма, будет:

$$f_\varphi = \frac{M_z}{VR} = \frac{M_z}{\pi R^3 h}, \tag{89}$$

где h – длина цилиндра.

Предполагая, что момент M_z может действовать на любую внутреннюю область, которую можно представить в виде некоторого виртуального цилиндра радиуса r, то его зависимость от расстояния r можно записать как:

$$M_z(r) = M_z \frac{r^3}{R^3}. \tag{90}$$

Это означает, что объёмная сила должна меняться по закону:

$$f_\varphi(r) = M_z \frac{r^2}{\pi R^5 h}. \tag{91}$$

С помощью системы уравнений (86)–(88), при условии, что имеется нагрузка только в виде крутящего момента, силы тяжести и градиента температуры, приложенного перпендикулярно к оси цилиндра, легко прийти к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \Delta u_r - \dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} - \dfrac{u_r}{r^2} + \dfrac{1}{1-2\sigma}\left(\dfrac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \varphi \partial r} + \dfrac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial r} - \dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_r}{\partial r} - \dfrac{u_r}{r^2}\right) = \\ = -\dfrac{K\beta}{\mu}\dfrac{\partial T}{\partial r}, \\ \Delta u_\varphi + \dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \dfrac{2}{r}\dfrac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \dfrac{1}{1-2\sigma}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial \varphi} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \varphi^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial \varphi} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial u_r}{\partial \varphi}\right) = \\ = \dfrac{M_z r^2}{\pi \mu R^5 h}, \\ \Delta u_z + \dfrac{1}{1-2\sigma}\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial u_z}{\partial z} + \dfrac{\partial u_r}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \dfrac{u_r}{r}\right) = \dfrac{\rho g}{\mu}. \end{cases} \tag{92}$$

Оператор Лапласа в цилиндрических координатах имеет вид:

$$\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{93}$$

В силу аксиальной симметрии задачи вектор деформаций можно искать в виде:

$$\mathbf{u} = \left(u_r(r), u_\varphi(r), u_z(z)\right). \tag{94}$$

В результате, с учётом только радиальной части оператора Лапласа (93), из (92) следует весьма компактная система уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_r}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_r}{\partial r}-\dfrac{u_r}{r^2}=-\dfrac{K\beta(1-2\sigma)}{2\mu(1-\sigma)}\dfrac{\partial T}{\partial r}, \\ \dfrac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r^2}-\dfrac{2}{r}\dfrac{\partial u_\varphi}{\partial r}=\dfrac{M_z r^2}{\pi\mu R^5 h}, \\ \dfrac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}=\dfrac{\rho g(1-2\sigma)}{2\mu(1-\sigma)}. \end{cases} \tag{95}$$

Из нижнего уравнения прямым интегрированием немедленно находим:

$$u_z=\frac{\rho g(1-2\sigma)z^2}{4\mu(1-\sigma)}, \tag{96}$$

где обе константы интегрирования положены равными нулю.

Из верхнего уравнения в (92) методом вариации постоянных получаем:

$$u_r=C_1 r+\frac{C_2}{r}-\frac{ar}{2}(T-T_0)+\frac{a}{2r}\int r^2\frac{dT}{dr}dr, \tag{97}$$

где параметр $a=\dfrac{K\beta(1-2\sigma)}{2\mu(1-\sigma)}$, а T_0 – температура поверхности цилиндра.

Полагая, согласно [3],

$$\mu=\frac{E}{2(1-\sigma)},\ \ K=\frac{E}{3(1-2\sigma)},$$

найдём, что $a=\dfrac{\beta}{3}$.

В силу конечности решения в нуле, следует считать, что $C_2 = 0$. Интегрируя последнее слагаемое по частям и предполагая, что на границе радиальное смещение отсутствует, то есть:

$$u_r\big|_{r=R}=0,$$

означающее, что $C_1 = 0$, немедленно приходим к искомому решению:

$$u_r=\frac{\beta}{3r}\int_r^R r(T_0-T)dr. \tag{98}$$

Второе уравнение в системе (95) также легко решается методом вариации постоянных, и в результате мы приходим к такому ответу:

$$u_\varphi=C_3+C_4 r^3+\frac{b}{4}r^4, \tag{99}$$

где

$$b = \frac{M_z}{\pi\mu R^5 h}. \tag{100}$$

Из условия $u_\varphi\big|_{r=0} = 0$ следует, что $C_3 = 0$. Задавая второе граничное условие в виде:

$$u_\varphi\big|_{r=R} = u_0, \tag{101}$$

приходим к ответу:

$$u_\varphi = u_0\left(\frac{r}{R}\right)^3 + \frac{br^3(r-R)}{4}. \tag{102}$$

Найденные решения (96), (98) и (102) были иллюстрирующим примером применения метода ковариантного дифференцирования к конкретной физической задаче.

Заключение

В заключение отметим:

1. Благодаря предложенному алгоритму вычислений легко находятся символы Кристоффеля, автоматически обладающие правильной геометрической размерностью. При этом введение коэффициентов Ламе, как это делается во всех учебниках по тензорному исчислению, является абсолютно лишним.
2. Приведены общие выражения для проекций оператора Лапласа, действующего на ковариантную и контравариантную векторные функции.
3. Показано, что проекции векторов $(\Delta\mathbf{A})^i$ и $(\Delta\mathbf{A})_i$ в ортонормированных базисах совпадают. В качестве справки приводится их подробное вычисление в сферических, цилиндрических и в параболических координатах.
4. На примере конкретной задачи теории упругости, решение которой мы не обнаружили в оригинальных источниках, продемонстрирована процедура подобного рода вычислений.

Статья поступила в редакцию 20.05.2019 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мак-Коннел А. Дж. Введение в тензорный анализ с приложением к геометрии, механике и физике. М.: Физматлит, 1963. 411 с.
2. Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1967. 664 с.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости. Т. 7. М.: Наука, 2004. 266 с.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. Т. 2. М.: Наука, 2004. 524 с.
5. Гладков С. О. Об альтернативном вычислении ковариантных производных с приложением к проблемам механики, физики и геометрии // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2019. № 1. С. 16–45.
6. Гладков С. О. К вопросу о линеаризации основного уравнения ОТО // Инженерная физика. 2017. Т. 19. №. 10. С. 19–27.

7. Гладков С. О. К вопросу о взаимодействии полей разной физической природы // Инженерная физика. 2018. Т. 20. №. 3. С. 14–31.
8. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 2003. 560 с.
9. Седов Л. И. Механика сплошной среды: в 2 т. М.: Наука, 1973.
10. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. Т. 6. М.: Наука, 2003. 733 с.
11. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. Т. 3. М.: Наука, 2004. 752 с.

REFERENCES

1. McConnell A. J. *Application of Tensor Analysis*. New York, Dover, 1957. 318 p.
2. Rashevskii P. K. *Rimanova geometriya i tenzornyi analiz* [Riemannian geometry and tensor analysis]. Moscow, Nauka Publ., 1967. 664 p.
3. Landau L. D., Lifshits E. M. *Theory of Elasticity*. Vol. 7. Oxford, Butterworth-Heinemann, 1986.
4. Landau L. D., Lifshits E. M. *The Classical Theory of Fields*. Vol. 2. Oxford, Butterworth-Heinemann, 1975.
5. Gladkov S. O. [Alternative calculation of covariant derivatives with an application to the problems of mechanics, physics and geometry]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-Matematika* [Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], 2019, no. 1, pp. 16–45.
6. Gladkov S. O. [To the question of linearization basic equation of RTG]. In: *Inzhenernaya fizika* [Engineering Physics], 2017, vol. 19, no. 10, pp. 19–27.
7. Gladkov S. O. [To the question of account the interaction between the fields of different physical nature]. In: *Inzhenernaya fizika* [Engineering Physics], 2018, vol. 20, no. 3, pp. 14–31.
8. Landau L. D., Lifshits E. M. *Electrodynamics of Continuous Media*. Vol. 8. Oxford, Butterworth-Heinemann, 1984.
9. Sedov L. I. *Mekhanika sploshnoi sredy: v 2 t.* [Mechanics of continuous media: in 2 volumes]. Moscow, Nauka Publ., 1973. 536 p.
10. Landau L. D., Lifshits E. M. *Fluid Mechanics*. Vol. 6. Oxford, Butterworth-Heinemann, 1987.
11. Landau L. D., Lifshits E. M. *Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory*. Vol. 3. Oxford, Pergamon Press, 1977.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Гладков Сергей Октябринович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математическое моделирование №311 Московского авиационного института (национальный исследовательский университет);
e-mail: sglad51@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Sergey O. Gladkov – Doctor in Physical and Mathematical Sciences, Professor at the Department of Mathematical Modeling no. 311, Moscow Aviation Institute (National Research University);
e-mail: sglad51@mail.ru.

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Гладков С. О. К вопросу приложения второй ковариантной производной от векторной функции к задачам гидродинамики и теории упругости // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2019. № 3. С. 42–67.
DOI: 10.18384-2310-7251-2019-3-42-67

FOR CITATION

Gladkov S. O. Application of the second covariant derivative from the vector function to the problems of hydrodynamics and elasticity theory. In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*, 2019, no. 3, pp. 42–67.
DOI: 10.18384-2310-7251-2019-3-42-67

УДК 6.62.620.66.66-6
DOI: 10.18384-2310-7251-2019-3-68-81

ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕПЛООБМЕНА В ГРАФИТОВОМ ТЕПЛОВОМ УЗЛЕ УСТАНОВКИ ПО ВЫРАЩИВАНИЮ МОНОКРИСТАЛЛОВ МЕТОДОМ ГНК

Саркисов С. Э.[1], Юсим В. А.[1], Рябченков В. В.[1,2], Калимуллин Р. К.[1], Говорун И. В.[1,2], Сакмаров А. В.[1,2]

[1] *Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт»*
123182, г. Москва, пл. Академика Курчатова, д. 1, Российская Федерация

[2] *Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)*
141701, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский переулок, д. 9, Российская Федерация

Аннотация. Впервые для развития возможностей метода горизонтальной направленной кристаллизации (ГНК) по расширению химических классов выращиваемых кристаллов создана высокотемпературная установка синтеза галоидных соединений. Основным элементом установки является графитовый тепловой узел, впервые разработанный для выращивания фторсодержащих монокристаллов методом ГНК. Для оценки работоспособности установки и выявления температурных особенностей проведения кристаллизационного процесса комплекс исследований включал математическое моделирование процессов гидродинамики, тепло- и массопереноса внутри графитового теплового узла, а также между ним и кристаллизационным аппаратом. Для численных расчётов использовались усреднённые по Рейнольдсу уравнения Навье-Стокса и модифицированный закон Стефана-Больцмана для не абсолютно чёрного тела. Экспериментально определены температурные интервалы тепловой инерционности и установления термодинамического равновесия в тепловом узле ростовой установки вплоть до температур выше 1500 °C. Знание величин этих температурных параметров необходимо для предупреждения самопроизвольного перегрева расплава в процессе выращивании кристаллов фторидов.

Ключевые слова: графитовый тепловой узел; теплоперенос; тепловая инерция; термодинамическое равновесие; теплозащитное покрытие, метод конечных элементов

STUDY OF HEAT TRANSFER IN A GRAPHITE THERMAL UNIT OF THE FACILITY FOR GROWING SINGLE CRYSTALS BY THE HDC METHOD

S. Sarkisov[1], V. Yusim[1], V. Ryabchenkov[1,2], R. Kalimullin[1], I. Govorun[1,2], A. Sakmarov[1,2]

[1] *National Research Center "Kurchatov Institute"*
pl. Akad. Kurchatova 1, 123182 Moscow, Russian Federation

[2] *Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University)*
Institutskii per. 9, 141701 Dolgoprudnyi, Moscow region, Russian Federation

Abstract. We report the development of a high-temperature installation for the synthesis of halide compounds to improve the capabilities of the method of horizontal directed crystallization (HDC) that makes it possible to expand the chemical classes of crystals grown. The main element of the facility is a graphite thermal unit, developed for growing fluorine-containing single crystals for the first time by the HDC method. To assess the installation operability and to identify the temperature features of the crystallization process, the research complex included mathematical modeling of the processes of hydrodynamics, heat and mass transfer inside the graphite thermal unit, as well as between it and the crystallization apparatus. Numerical calculations relied on Reynolds-averaged Navier-Stokes equations and a modified Stefan-Boltzmann law used for a not absolutely black body. The temperature ranges of thermal inertia, as well as the establishment of the thermodynamic equilibrium in the thermal unit of the growth facility up to temperatures above 1500 °C, were experimentally determined. Knowledge of the values of these temperature parameters is necessary to prevent spontaneous overheating of the melt during the growth of fluoride crystals.

Keywords: graphite thermal unit, heat transfer, thermal inertia, thermodynamic equilibrium, heat insulation coating, finite element method

Введение

Метод ГНК был разработан исключительно для синтеза оксидных кристаллов, главным образом, лейкосапфира в вольфрам-молибденовых узлах [1; 2]. Данная работа посвящена развитию метода горизонтальной направленной кристаллизации (ГНК) по выращиванию крупногабаритных монокристаллов фторидов в графитовом тепловом узле. На рис. 1 показана разработанная конструкция графитового теплового узла, который вставляется в стальную водоохлаждаемую рубашку (СВР) кристаллизационной установки по выращиванию кристаллов методом ГНК.

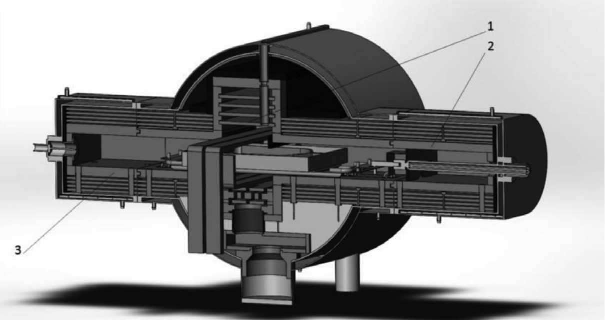

Рис. 1. Модель графитового теплового узла в сборе.

В данном узле имеется высокотемпературный модуль с градиентным участком кристаллизации (1), из которого растущий кристалл попадает в модуль охлаждения (2) для последующего отжига, что важно для получения оптически совершенных фторидных и других галоидных кристаллов без дополнительного послеростового отжига.

Актуальность использования технологии выращивания фторидов по методу ГНК связана с тем, что монокристаллы этих соединений являются важными оптическими материалами с окном прозрачности в широком спектральном диапазоне [3] и перспективными матрицами для кристаллических лазеров [4–8] и сцинтилляторов [9–12]. Для создания мощных лазерных систем и эффективных электромагнитных калориметров необходимы широкоформатные детекторы и соответственно крупногабаритные объёмные кристаллы с большой площадью [2; 13]. В исследовательскую программу НИЦ «Курчатовский институт» по синтезу кристаллов для эффективных γ-детекторов включены работы по получению объёмных высокоапертурных монокристаллов CeF_3 размером до 250x330x40 мм для экспериментов в области физики высоких энергий. Кристаллы такого размера общепринятым методом выращивания фторидов по Бриджмену получить невозможно. Кристаллы CeF_3 по световому выходу, радиационной стойкости на порядок превосходят кристаллы $PbWO_4$, которые сейчас используются в детекторах Большого адронного коллайдера (БАК), а по своему быстродействию (23 нс) практически не уступают последним.

В целях проведения теоретических исследований, касающихся тепло- и массопереноса в конструкции графитового теплового узла, а также его взаимодействия с СВР кристаллизационной установки, сделана попытка выполнить компьютерное моделирование и анализ теплообмена внутри графитового теплового узла, гидродинамических процессов, протекающих в проточной части СВР, конвективного теплообмена СВР с окружающей атмосферой.

В качестве объектов исследований были выбраны температурные модули теплового узла, отвечающие за получение кристалла [10; 14]. Для моделирования тепловых процессов в указанных объектах использовалась программа SolidWorks Flow Simulation.

С целью изучения реальной динамики развития тепловых процессов внутри графитового теплового узла, которые оказывают влияние на температурные особенности протекания процесса выращивания кристаллов, были проведены высокотемпературные исследования. Экспериментально определены такие важные параметры, оказывающие влияние на процесс кристаллизации, как тепловая инерционность графитового узла и установления термодинамического равновесия в нём вплоть до температур выше 1500 °C, характерных для области плавления практически всех галоидных кристаллов.

Результаты и их обсуждение

Моделирование процессов теплопереноса в тепловом узле

Во внутреннем пространстве кристаллизационного аппарата на поверхностях графитового узла и окружающей его СВР задаются условия, учитывающие два механизма теплообмена поверхностей. К ним относятся: радиационный теплообмен с окружающими поверхностями и молекулярный перенос тепла от более нагретых деталей узла к менее нагретым деталям.

Для расчёта скорости теплообмена за счёт излучения между абсолютно чёрным телом и окружающей средой для реальных поверхностей закон Стефана-

Больцмана должен быть подвергнут изменениям. Для не абсолютно чёрных поверхностей спектральная интенсивность излучения не подчиняется распределению Планка и для испускаемого излучения характерны предпочтительные направления.

Модифицированный закон Стефана-Больцмана для не абсолютно чёрного тела определяется соотношением:

$$Q_{\text{излучение}} = \varepsilon \times \sigma \times A \times \left(T_s^4 - T_a^4\right), \tag{1}$$

где ε является коэффициентом излучения испускающей поверхности, определяемым как отношение к излучению абсолютно чёрного тела, σ – постоянная Стефана-Больцмана, T_s – температура абсолютно чёрного тела, T_a – температура окружения, A – площадь излучающей поверхности.

В ситуациях, когда излучающие тела производят частичный обмен излучением, следует ввести понятие коэффициент видимости излучения (*F*). Коэффициент видимости излучения поверхности *i* в отношении поверхности *j* определяется как отношение энергии, испускаемой с поверхности *i* и непосредственно достигающей поверхности *j*, к общему количеству энергии, покидающей поверхность *i*. Имея в виду такое определение, получаем, что чистый обмен излучением между поверхностью площадью A_I с температурой T_I и некоторой поверхностью A_j с температурой T_j задаётся соотношением:

$$Q_{\text{излучение}} = \varepsilon_i \times \sigma \times A_i \times F_{ij}\left(T_i^4 - T_i^4\right), \tag{2}$$

где F_{ij} есть конфигурационный фактор поверхности *i* относительно поверхности j, ε_i – коэффициент излучения поверхности *i*.

В случаях, когда поверхности имеют разные коэффициенты излучения ε_i и ε_j, остаточный радиационный теплообмен задаётся следующей формулой:

$$Q_{\text{радиация}} = \sigma \times \frac{T_i^4 - T_j^4}{\left(1 - \frac{\varepsilon_i}{\grave{A}_i \varepsilon_i}\right) + \left(\frac{1}{\grave{A}_i F_{ij}}\right) + \left(1 - \frac{\varepsilon_j}{F_j \varepsilon_i}\right)}. \tag{3}$$

Перенос тепла подчиняется закону Фурье:

$$Q_{\text{проводимости}} = -K \times A \times \left(\frac{dT}{dx}\right), \tag{4}$$

где K – коэффициент теплопроводности.

Расчёты были выполнены в линейном приближении по методике [15] в модели, построенной в программном модуле Solid Works Flow Simulation [15–17] для распределения тепловой нагрузки на графитовую часть теплового узла в различных сечениях. В результате выполненных расчётов установлены изотермы температурного распределения в рабочем пространстве теплового узла, которые наглядно отражают существование участков роста и отжига кристаллов в конструкции настоящего теплового узла.

Экспериментальное исследование динамики тепловых процессов в графитовом узле

Кристаллизация методом ГНК предусматривает плавную протяжку тигля с шихтой сквозь нагревательный блок через температурное градиентное поле в холодную зону ростовой установки. Нагревательный блок в конструкции теплового узла состоит из двух плоских ленточных графитовых нагревателей, расположенных друг над другом, между которыми перемещается графитовый тигель (в форме лодочки) с шихтой из фторсодержащего материала (рис. 2).

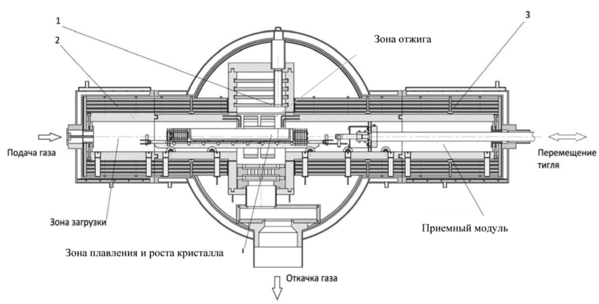

Рис. 2. Тепловой узел в сборе. 1 – центральный модуль; 2 – левое крыло; 3 – правое крыло.

В простейшей математической модели процессов внутреннего теплообмена для графитового теплового узла (далее объекта) при условии, что теплопередача в окружающую среду ничтожно мала благодаря эффективной внутренней теплоизоляции ростовой установки уравнение теплового баланса для системы «нагреватель-тепловой узел-теплоизоляция» записывается в виде:

$$Q_{\text{уз}} = Q_{\text{нагр}} + Q_{\text{изол}}, \tag{5}$$

где $Q_{\text{уз}} = CM\left[T(t) - T(t-\Delta t)\right]Q_{\text{уз}}$ – количество тепла, которое требуется для того, чтобы нагреть на температуру $T(t) - T(t-\Delta t)$ объект (тепловой узел) с массой M и удельной теплоёмкостью C за время Δt;

$Q_{\text{уз}} = \lambda_{\text{ну}}\left[T(t) - T(t)\right]\Delta t$ – количество тепла, которое поступает за время Δt от нагревателя с температурой поверхности $T_н(t)$ и с коэффициентом теплопередачи «нагреватель-объект» $\lambda_{ну}$.

$Q_{\text{изол}} = \lambda_{\text{ну}}\left[T(t) - T_{\text{ср}}(t)\right]\Delta t$ – тепловые потери за время Δt за счёт теплопередачи от объекта к теплоизоляции с температурой $Tcp(t)$ и с коэффициентом теплопередачи «объект-теплоизоляция» $\lambda_{уи}$. Температура в объекте описывается следующим уравнением:

$$\frac{dT}{dt} + \frac{T}{\tau_0} = \left[\left(\frac{T_{\text{ср}}(t)}{1+\mu}\right) + \left(\frac{T_{\text{н}}(t)\mu}{1+\mu}\right)\right], \tag{6}$$

где $\tau_o = C\ M/(\lambda_{уи} + \lambda_{ну})$ – постоянная времени объекта с учётом эффектов теплопередачи с окружающей средой и нагревателем; $\mu = \lambda_{ну}/\lambda_{уи}$ – коэффициент, показывающий насколько эффективней теплопередача «объект-нагреватель» по сравнению с теплопередачей «объект-теплоизоляция».

На рис. 3 показана кривая плавного инерционного нарастания температуры теплового узла при резком скачкообразном изменении температуры нагревателя. Характерное время инерционного нарастания равно постоянной времени τ_o, которая определяется только свойствами объекта (теплоёмкостью $C\ M$) и условиями теплообмена с окружающей средой $\lambda_{уи}$ и $\lambda_{ну}$.

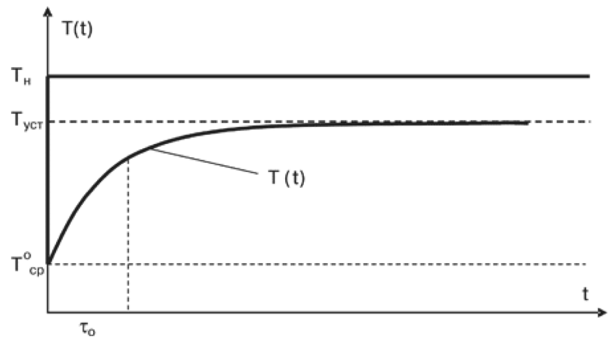

Рис. 3. Графики изменения температуры узла и нагревателя.

Из уравнения (6) и рис. 3 следует, что большие масса и теплоёмкость делают тепловой узел более инерционным. Для стабилизации поддержания необходимой температуры выращивания кристалла теплоёмкость узла должна быть значительно выше теплоёмкости синтезируемого материала.

На рис. 4, 5 показаны зависимости изменения температуры от подаваемой мощности, соответственно для нижнего и верхнего нагревателей, полученные в результате высокотемпературных измерений.

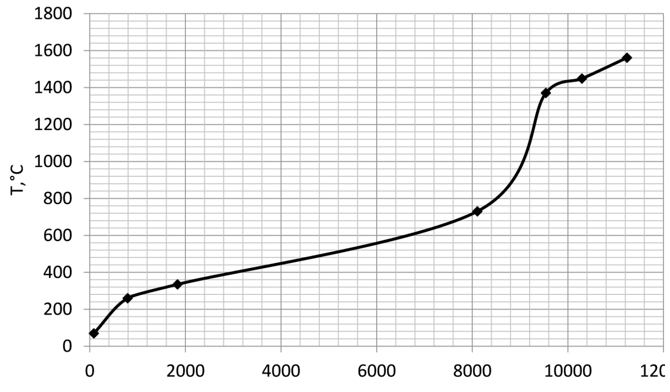

Рис. 4. Кривая тепловой зависимости нижнего нагревателя.

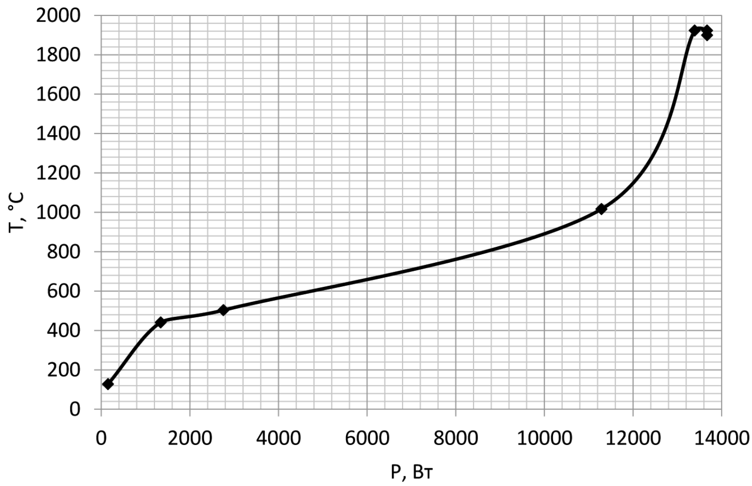

Рис. 5. Кривая тепловой зависимости верхнего нагревателя.

Подъём температурных зависимостей нагревателей (рис. 4; 5), на участке 800–1400 °С в большей степени связан с тепловой инерционностью при прогреве системы «нагреватель-окружение» (см. табл. 1), но также своё влияние оказывает полученная температурная зависимость роста удельного сопротивления ρ при тех же температурах, как показано на рис. 6.

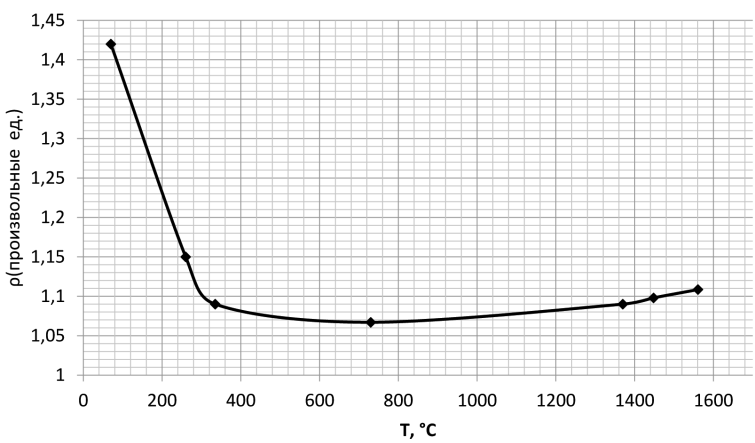

Рис. 6. Температурная зависимость изменения удельного сопротивления графитового нагревателя.

В таблице 1 представлены данные результатов изменения температуры на нижнем нагревателе в интервале 1020–1570 °С при трёх значениях мощностей на нагревателе с общей протяжённостью по времени 240 мин.

Таблица 1.
Изменение температуры нагревателя от времени прогрева

P_1 = 9660 Вт		P_2 = 10464 Вт		P_3 = 11237 Вт	
T, °C	*t*, мин	*T*, °C	*t*, мин	*T*, °C	*t*, мин
1019	0	1425	0	1515	0
1175	30	1448	30	1567	15
1270	60	1448	15	1567	15
1320	10	1448	15	1567	15
1370	10	–	–	1567	15
1370	10	–	–	–	–

Как следует из приведённых в таблице данных, при P_1 в температурном интервале 1019–1370 °C до наступления термодинамического равновесия (*T* не изменяется от времени прогрева) системы «нагреватель-окружение» интервал тепловой инерционности системы $\Delta T_{инерц.}$ = 351 °C, что приблизительно на порядок выше соответствующих значений при P_2 и P_3. Зависимости, построенные по данным таблицы 1, демонстрирует рис. 7.

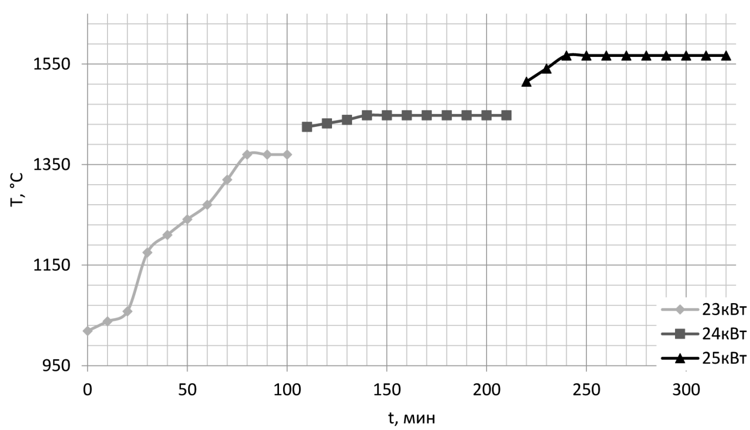

Рис. 7. Кривые изменения тепловой инерционности нагревателя от подаваемой мощности.

Из приведённых кривых следует, что с увеличением уровня прогрева внутреннего объёма узла тепловая инерционность значительно уменьшается и быстрее наступает термодинамическое равновесие (переход кривых в горизонтальное положение). Эти факторы имеют важное значение, их необходимо учитывать при проведении нагрева и плавления шихты, а также дальнейшего процесса кристаллизации, чтобы предотвратить неконтролируемый (самопроизвольный) инерционный перегрев расплава после начала роста кристалла. Уменьшение инерционности и более быстрое наступление термодинамического равновесия системы «нагреватель-окружение» с увеличением прогрева связано с соответствующим уменьшением тепловых потерь, согласно формуле:

$$Q_{\text{пот}} = \alpha\left(T_{\text{нагр}} - T_{\text{окр}}\right)S, \qquad (7)$$

где α – коэффициент теплового рассеяния, $T_{нагр.}$ – температура нагревателя, $T_{окр.}$ – температура окружающей среды (деталей теплового узла и всего объёма установки), S – площадь излучения нагревателя. Из формулы следует, что при $T_{\text{окр}} \to T_{\text{нагр}}$ тепловые потери $Q_{\text{пот}} \to 0$, то есть, чем будет выше прогрев теплового узла, тем быстрее наступит термодинамическое равновесие тепловой системы. На рис. 8 показана зависимость времени наступления термодинамического равновесия от температуры в объёме теплового узла, рассчитанная по данным таблицы 1.

Конструкция теплового узла создана из комбинации различающихся по теплопроводности графитовых материалов, включающих изостатический и пористый (войлок) графит. Это позволило создать эффективный теплосберегающий узел, в котором при температуре нагревателей ~ 2600 °С, температура на внутренних стенках графитового теплового узла была порядка 500 °С, на внутренней стороне водоохлаждаемой рубашки менее 300 °С, а на внешней стороне ростовой установки не более 35 °С.

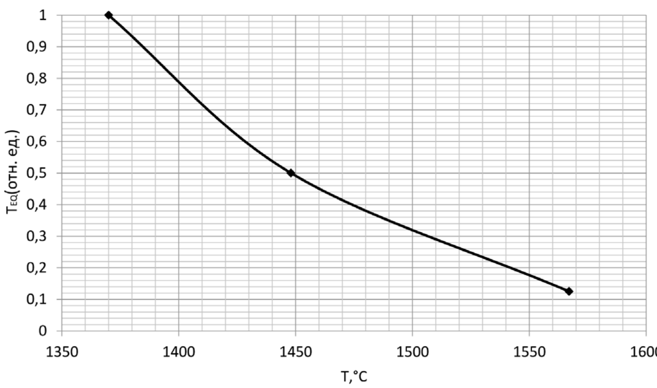

Рис. 8. Временная зависимость уменьшения инерционности тепловой системы графитового теплового узла.

Заключение

В данной работе путём компьютерного моделирования проведены расчёты процессов переноса тепла в графитовом тепловом узле, разработанном для установки по выращиванию кристаллов методом ГНК. Установлены изотермы температурного распределения по всей длине теплового узла, которые в значительной степени точности совпадают с экспериментальными данными соответствующих тепловых измерений.

Экспериментально исследована динамика тепловых процессов, непосредственно влияющих на температурные параметры процесса роста кристалла. Отградуированы температурные режимы нагревателей в зависимости от подаваемой мощности, и определены соответствующие интервалы тепловой инерционности, которые позволяют определить время наступления термодинамического равновесия системы «нагреватель-тепловой узел» для различных температур в диапазоне от 800 до 1600 °C, в который попадают температуры плавления всех известных фторидных соединений. Проведённые тепловые испытания показали, что создан эффективный теплосберегающий графитовый узел, позволяющий при 2600 °C на нагревателях получать температуру на внешней стороне ростовой установки не более 35 °C.

Статья поступила в редакцию 12.07.2019 г.

БЛАГОДАРНОСТИ

Исследование выполнено в рамках грантов РФФИ (19-29-02007, 18-08-00291, 17-08-00963, 17-08-00443, 18-08-00192). Расчёты проведены на основе пакета SolidWorks Educational Edition CAMPUS500 модуль FlowSimulation на кафедре моделирования ядерных процессов физтех-школы фундаментальной и прикладной физики МФТИ. Работа выполнена при поддержке НИЦ «Курчатовский институт», приказ от 14.08.2019, №1808.

ACKNOWLEDGMENTS

The work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (Grant Nos 19-29-02007, 18-08-00291, 17-08-00963, 17-08-00443, and 18-08-00192). The calculations were carried out using the SolidWorks Educational Edition CAMPUS500 package with the Flow Simulation module at the Department of Nuclear Modeling of the Physics and Technology School of Fundamental and Applied Physics at MIPT. This work was supported by the National Research Center "Kurchatov Institute", order of 08/14/2019, No. 1808.

ЛИТЕРАТУРА

1. Багдасаров Х. С. Высокотемпературная кристаллизация из расплава. М.: Физматлит, 2004. 159 с.
2. Багдасаров Х. С., Гориянов Л. А. Тепло- и массоперенос при выращивании монокристаллов направленной кристаллизацией. М.: Физматлит, 2007. 224 с.
3. Юшкин Н. П., Волкова Н. В., Маркова Г. А. Оптический флюорит. М.: Наука, 1983. 146 с.
4. Исследование стимулированного излучения кристаллов Sr2Y5F19 с ионами Nd3+ / Каминский А. А., Саркисов С. Э., Сейранян К. Б., Соболев Б. П. // Квантовая электроника. 1974. Т. 1. №1. С. 187–189.
5. Kaminskii A. A., Sarkisov S. E, Eichler H.-J. Spectroscopic and laser properties of Er3+ doped monoclinic BaY2F8 single crystals // Optical and Quantum Electronics. 1990. Vol. 22. Supplement 1. P. S95–S105.
6. Kaminskii A. A., Sarkisov S. E. Thermodynamical consideration of the peculiarities of activator ion quasicentres in disordered laser crystals // Physica status solidi (a). 1991. Vol. 123. Iss 1. P. 213–219.
7. Kaminskii A. A., Sarkisov S. E, Butashin A. V. Manifestation of structural disordered peculiarities of Ca3Ga2Ge3O12, Ca3(Nb,Ga)2Ge3O12 and BaF2-YF3 crystalline solid solutions in fundamental optical phonon spectra // Physica status solidi (a). 1990. Vol. 119. Iss. 1. P. 285–295.

8. Каминский А. А., Саркисов С. Э. Физика и спектроскопия лазерных кристаллов. М.: Наука, 1986. 282 с.
9. Шендрик Р. Ю., Раджабов Е. А., Непомнящих А. И. Сцинтилляционные свойства кристаллов SrF_2 и SrF_2-Ce^{3+} // Письма в Журнал технической физики. 2013. Т. 39. Вып. 13. С. 9–16.
10. Саркисов С. Э., Рябченков В. В. Сцинтилляционный материал для регистрации ионизирующего излучения (Варианты). Патент РФ №2627573 от 08.08.2017 г.
11. Каминский А. А., Вердун Г. Р. Новые кристаллические лазеры на основе разупорядоченных фторидов с ионами Nd^{3+}, накачиваемых излучением полупроводниковых лазеров // Квантовая электроника. 1992. Т. 19. № 2. С. 109–111.
12. Generation of 103 fs mode-locked pulses by a gain linewidth-variable Nd, Y:CaF2 disordered crystal / Qin Z. P., Xie G. Q., Ma J., Ge W. Y., Yuan P., Qian L. J., Su L. B., Jiang D. P., Ma F. K., Zhang Q., Cao Y. X., Xu J. // Optics Letters. 2014. Vol. 39. Iss. 7. P. 1737–1739.
13. Применение фотодиодов большой площади для улучшения характеристик электромагнитного калориметра на основе кристаллов вольфрамата свинца / Балыгин К. А., Ипполитов М. С., Климов А. И., Лебедев В. А., Манько В. И. и др. // Приборы и техника эксперимента. 2018. № 5. С. 13–18.
14. Тепловой узел установки для выращивания галоидных кристаллов методом горизонтально направленной кристаллизации. Патент РФ №2643980 от 06.02.2018 г. / Юсим В. А., Калиммулин Р. К., Рябченков В. В., Саркисов С. Э.
15. Алямовский А. А. SolidWorks/COSMOSWorks 2006/2007. Инженерный анализ методом конечных элементов. М.: ДМК ПРЕСС, 2007. 786 с.
16. Алямовский А. А. SolidWorks Simulation 2012. Как решать практические задачи. СПб.: БХВ-Петербург, 2012. 445 с.
17. Алямовский А. А. SolidWorks Simulation 2009. Tutorial. Как решать практические задачи. СПб.: «БХВ-Петербург», 2008. 244 с.

REFERENCES

1. Bagdasarov Kh. S. *Vysokotemperaturnaya kristallizatsiya iz rasplava* [High temperature crystallization from melt]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2004. 159 p.
2. Bagdasarov Kh. S., Goriyanov L. A. *Teplo- i massoperenos pri vyrashchivanii monokristallov napravlennoi kristallizatsiei* [Heat and mass transfer in growing single crystals by directed solidification]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2007. 224 p.
3. Yushkin N. P., Volkova N. V., Markova G. A. *Opticheskii flyuorit* [Optical fluorite]. Moscow, Nauka Publ., 1983. 146 p.
4. Kaminskii A. A., Sarkisov S. E., Seiranyan K. B., Sobolev B. P. [Investigation of the stimulated emission from $Sr_2V_5F_{19}$ crystals doped with Nd^{3+} ions]. In: *Kvantovaya elektronika* [Soviet Journal of Quantum Electronics], 1974, vol. 1, no. 1, pp. 187–189.
5. Kaminskii A. A., Sarkisov S. E, Eichler H.-J. Spectroscopic and laser properties of Er^{3+}-doped monoclinic BaY_2F_8 single crystals. In*: Optical and Quantum Electronics*, 1990, vol. 22, Supplement 1, pp. S95–S105.
6. Kaminskii A. A., Sarkisov S. E. Thermodynamical consideration of the peculiarities of activator ion quasicentres in disordered laser crystals. In: *Physica status solidi (a)*, 1991, vol. 123, iss 1, pp. 213–219.
7. Kaminskii A. A., Sarkisov S. E, Butashin A. V. Manifestation of structural disordered peculiarities of $Ca_3Ga_2Ge_3O_{12}$, $Ca_3(Nb,Ga)_2Ge_3O_{12}$ and BaF_2-YF_3 crystalline solid solutions in fundamental optical phonon spectra. In: *Physica status solidi (a)*, 1990, vol. 119, iss. 1, pp. 285–295.

8. Kaminskii A. A., Sarkisov S. E. *Fizika i spektroskopiya lazernykh kristallov* [Physics and spectroscopy of laser crystals]. Moscow, Nauka Publ., 1986. 282 p.
9. Shendrik R. Yu., Radzhabov E. A., Nepomnyashchikh A. I. [Scintillation properties of SrF_2 and SrF_2-Ce^{3+} crystals]. In: *Pis'ma v zhurnal tekhnicheskoi fiziki* [Technical Physics], 2013, vol. 39, no. 13, pp. 9–16.
10. Sarkisov S. E., Ryabchenkov V. V. *Stsintillyatsionnyi material dlya registratsii ioniziruyushchego izlucheniya (Varianty). Patent RF №2627573 ot 08.08.2017 g.* [Scintillation material for detecting ionizing radiation (Options). RF patent No. 2627573 from 08.08.2017].
11. Kaminskii A. A., Verdun G. R. [New crystal lasers utilizing disordered fluoride crystals activated with Nd^{3+} ions pumped by semiconductor laser radiation]. In: *Kvantovaya elektronika* [Soviet Journal of Quantum Electronics], 1992, vol. 19, no. 2, pp. 109–111.
12. Qin Z. P., Xie G. Q., Ma J., Ge W. Y., Yuan P., Qian L. J., Su L. B., Jiang D. P., Ma F. K., Zhang Q., Cao Y. X., Xu J. Generation of 103 fs mode-locked pulses by a gain linewidth-variable Nd, Y:CaF_2 disordered crystal. In: *Optics Letters*, 2014, vol. 39, iss. 7, pp. 1737–1739.
13. Balygin K. A., Ippolitov M. S., Klimov A. I., Lebedev V. A., Manko V. I. et al. [Use of Large-Area Photodiodes for Improving the Characteristics of an Electromagnetic Calorimeter Based on Lead Tungstate Crystal]. In: *Pribory i tekhnika eksperimenta* [Instruments and Experimental Techniques], 2018, no. 5, pp. 13–18.
14. Yusim V. A., Kalimmulin R. K., Ryabchenkov V. V., Sarkisov S. E. *Teplovoi uzel ustanovki dlya vyrashchivaniya galoidnykh kristallov metodom gorizontal'no napravlennoi kristallizatsii. Patent RF №2643980 ot 06.02.2018 g.* [Thermal unit of the plant for growing halide crystals by the method of horizontally directed crystallization. RF patent No. 2643980 dated 02/06/2018].
15. Alyamovskii A. A. *SolidWorks/COSMOSWorks 2006/2007. Inzhenernyi analiz metodom konechnykh elementov* [SolidWorks/COSMOSWorks 2006/2007. Engineering analysis with finite elements]. Moscow, DMK PRESS Publ., 2007. 786 p.
16. Alyamovskii A. A. *SolidWorks Simulation 2012. Kak reshat' prakticheskie zadachi* [SolidWorks Simulation 2012. How to solve practical problems]. St. Petersburg, BKhV-Peterburg Publ., 2012. 445 p.
17. Alyamovskii A. A. *SolidWorks Simulation 2009. Tutorial. Kak reshat' prakticheskie zadachi* [SolidWorks Simulation 2009. Tutorial. How to solve practical problems]. St. Petersburg, BKhV-Peterburg Publ., 2008. 244 p.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Саркисов Степан Эрвандович – кандидат физико-математических наук, заведующий Лабораторией экспериментального моделирования и синтеза тугоплавких материалов Управления по нераспространению и физической защите Курчатовского комплекса реабилитации и нераспространения Национального исследовательского центра «Курчатовский институт»;
e-mail: dr.stevesarkisov@gmail.com;

Юсим Валентин Александрович – старший научный сотрудник Лаборатории экспериментального моделирования и синтеза тугоплавких материалов Управления по нераспространению и физической защите Курчатовского комплекса реабилитации и нераспространения Национального исследовательского центра «Курчатовский институт»;
e-mail: Yusim_VA@nrcki.ru;

Рябченков Владимир Васильевич – кандидат физико-математических наук, заместитель руководителя Управления нераспространения и физической защиты Курчатовского комплекса реабилитации и нераспространения Национального исследовательского центра «Курчатовский институт»; ассистент Московского физико-технического института (национально-исследовательского университета); e-mail: RVV55@yandex.ru;

Калимуллин Раф Каюмович – научный сотрудник Лаборатории экспериментального моделирования и синтеза тугоплавких материалов Управления по нераспространению и физической защите Курчатовского комплекса реабилитации и нераспространения Национального исследовательского центра «Курчатовский институт»;
e-mail: dr.stevesarkisov@gmail.com;

Говорун Игорь Викторович – аспирант, ассистент Московского физико-технического института (национального исследовательского университета); e-mail: dr.stevesarkisov@gmail.com;

Сакмаров Александр Викторович – аспирант, ассистент Московского физико-технического института (национального исследовательского университета);
e-mail: dr.stevesarkisov@gmail.com

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Stepan E. Sarkisov – PhD in Physical and Mathematical Sciences, Head of the Laboratory for Experimental Modeling and Refractory Materials Synthesis at the Office for Non-Proliferation and Physical Protection of the Kurchatov Rehabilitation and Non-Proliferation Complex, National Research Center "Kurchatov Institute"; e-mail: dr.stevesarkisov@gmail.com;

Valentin A. Yusim – Senior Researcher of the Laboratory of Experimental Modeling and Refractory Materials Synthesis at the Office for Non-Proliferation and Physical Protection of the Kurchatov Rehabilitation and Non-Proliferation Complex, National Research Center "Kurchatov Institute"; e-mail: Yusim_VA@nrcki.ru;

Vladimir V. Ryabchenkov – PhD in Physical and Mathematical Sciences, Deputy Head of the Department on Non-Proliferation and Physical Protection of the Kurchatov Rehabilitation and Non-Proliferation Complex, National Research Center "Kurchatov Institute"; assistant lecturer, Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University);
e-mail: RVV55@yandex.ru;

Raf K. Kalimullin – researcher of the Laboratory of Experimental Modeling and Refractory Materials Synthesis at the Office for Non-Proliferation and Physical Protection of the Kurchatov Rehabilitation and Non-Proliferation Complex, National Research Center "Kurchatov Institute";
e-mail: dr.stevesarkisov@gmail.com;

Igor V. Govorun – postgraduate student, assistant lecturer, Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University);
e-mail: dr.stevesarkisov@gmail.com;

Aleksandr V. Sakmarov – postgraduate student, assistant lecturer, Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University).
e-mail: dr.stevesarkisov@gmail.com

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Исследование теплообмена в графитовом тепловом узле установки по выращиванию монокристаллов методом ГНК / Саркисов С. Э., Юсим В. А., Рябченков В. В., Калимуллин Р. К., Говорун И. В., Сакмаров А. В. // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика–математика. 2019. № 3. С. 68–81.
DOI: 10.18384-2310-7251-2019-3-68-81

FOR CITATION

Sarkisov S. E., Yusim V. A., Ryabchenkov V. V., Kalimullin R. K., Govorun I. V., Sakmarov A. V. Study of heat transfer in a graphite thermal unit of the facility for growing single crystals by the HDC method. In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*, 2019, no. 3, pp. 68–81.
DOI: 10.18384-2310-7251-2019-3-68-81

УДК 530.145
DOI: 10.18384-2310-7251-2018-3-82-89

ВЫНУЖДЕННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ И ПОГЛОЩЕНИЕ СВЕТА ЭЛЕКТРОНОМ НА ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Эминов П. А.
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
101000, г. Москва, ул. Мясницкая, д. 20, Российская Федерация

Аннотация. В дипольном приближении исследованы процессы вынужденного излучения и поглощения света электроном на цилиндрической поверхности во внешнем поле, образованном суперпозицией магнитного и электростатического полей одинакового направления. Найдены правила отбора и соответствующие частоты излучения. Вычислена суммарная энергия вынужденного излучения и поглощения.

Ключевые слова: индуцированное излучение и поглощение, правила отбора

STIMULATED EMISSION AND ABSORPTION OF LIGHT BY AN ELECTRON ON A CYLINDRICAL SURFACE

P. Eminov
National Research University 'Higher School of Economics'
ul. Myasnitskaya 20, 101000 Moscow, Russian Federation

Abstract. The processes of stimulated emission and absorption of light by an electron on a cylindrical surface in an external field formed by a superposition of magnetic and electrostatic fields of the same direction are studied in the dipole approximation. The selection rules and the corresponding radiation frequencies are found. The total energy of stimulated emission and absorption is calculated.

Keywords: stimulated emission and absorption, selection rules

Введение

В наноструктурах теория предсказывает целый ряд физических эффектов, обусловленных внешними полями, а также размерами и топологическими особенностями области, где движутся частицы.

Многообразие физических эффектов, предсказываемых в наноструктурах, связано как с наноразмерами и топологическими свойствами области, в которой движутся частицы, так и с учётом влияния внешнего поля. В магнитном поле неодносвязность области движения частиц приводит к эффектам [1–3], аналогичным эффекту Ааронова-Бома.

Закон дисперсии [1–3] получается в предположении о достаточно большой глубине и малой ширине цилиндрической ямы, удерживающей электрон на поверхности цилиндра. Благодаря этому расстояния между соседними уровнями энергии движения электрона в направлении нормали к поверхности цилиндра относительно большие и практически все электроны по радиальному квантовому числу находятся в нижнем энергетическом состоянии при достаточно низких температурах.

В последние годы большое внимание уделяется изучению различных методов генерации излучения на основе низкоразмерных структур и анализу работы лазеров на свободных электронах [4–7].

В настоящей работе строится теория индуцированного излучения электрона на цилиндрической поверхности в параллельных электрическом и магнитном полях, направленных вдоль оси Oz цилиндра. Магнитное поле задаётся векторным потенциалом:

$$\vec{A} = \left\{ -\frac{1}{2} HR\sin(\varphi),\ \ \frac{1}{2} HR\cos(\varphi),\ 0 \right\}, \tag{1}$$

где H – напряжённость магнитного поля, R – радиус цилиндра, φ – полярный угол цилиндрической системы координат. Потенциальная энергия электрона равна:

$$U = -\frac{e^2 a}{2}\left(R^2 - 2z^2\right), \tag{2}$$

где $e < 0$ – заряд электрона, a – положительная постоянная. Потенциальная энергия электрона (2) в электростатическом поле используется, например, и при анализе работы магнетрона. Заметим, что в трёхмерном случае при свободном движении электрона в суперпозиции полей (1) и (2) электростатическое поле можно подобрать так, что индуцированное излучение будет превалировать над поглощением в нерелятивистском приближении [8].

Вынужденные переходы электрона на цилиндрической поверхности

Найдём сначала волновые функции стационарных состояний электрона на цилиндрической поверхности в рассматриваемом электромагнитном поле. Нестационарное уравнение Шредингера:

$$i\hbar \frac{\partial \psi(r,t)}{\partial t} = \left(\frac{\vec{P}^2}{2m} + U \right) \psi(r,t), \tag{3}$$

где $\vec{P} = -i\hbar \dfrac{\partial}{\partial \vec{r}} - \dfrac{e}{c}\vec{A}$ – оператор кинетического импульса.

После перехода к цилиндрическим координатам для координатной части волновой функции стационарного состояния получаем следующее уравнение:

$$\left[\frac{p_z^2}{2m} - \frac{e^2 a}{2}\left(R^2 - 2z^2\right) + \frac{1}{2m}\left(p_\varphi - \frac{e}{c} A_\varphi \right)^2 \right] \psi(z,\varphi) = E\psi(z,\varphi). \tag{4}$$

Здесь E – энергия стационарного состояния и приняты следующие обозначения: $p_z=-i\hbar\dfrac{\partial}{\partial z}, p_\varphi-\dfrac{e}{c}A_\varphi=\dfrac{\hbar}{R}[-i\dfrac{d}{d\varphi}+\dfrac{\Phi}{\Phi_0}]$, $\dfrac{\Phi}{\Phi_0}$ – параметр Ааронова-Бома.

Учитывая, что потенциальная энергия не зависит от координаты φ, решение уравнения (4) будем искать в виде:

$$\psi(z,\varphi)=u(\varphi)\upsilon(z). \tag{5}$$

Для определения функции $u(\varphi)$ получаем следующую задачу:

$$\left(i\frac{d}{d\varphi}-\frac{\Phi}{\Phi_0}\right)^2 u(\varphi)=E_1\frac{2mR^2}{\hbar^2}u(\varphi),$$
$$u(\varphi)=u(\varphi+2\pi). \tag{6}$$

Ортонормированные собственные функции и собственные значения задачи Штурма-Лиувилля (6):

$$u_n(\varphi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(in\varphi),\ \ 0\le\varphi<2\pi \tag{7}$$

$$E_1(n)=\varepsilon\left(n+\frac{\Phi}{\Phi_0}\right)^2,\ \ n=0,\ \ \pm1,\ \ \pm2,.. \tag{8}$$

где $\varepsilon=\dfrac{\hbar^2}{2mR^2}$ – энергия размерного конфайнмента, n – орбитальное главное число, $E_1(n)$ – энергия поперечного движения.

Продольная часть волновой функции $\upsilon(z)$ является решением уравнения

$$\upsilon''+\left[\frac{2m}{\hbar^2}\left(E_2+\frac{e^2R^2a}{2}\right)-\lambda^2z^2\right]\upsilon(z)=0, \tag{9}$$

где принято обозначение:

$$\lambda=\frac{|e|}{\hbar}\sqrt{2am}, \tag{10}$$

а E_2 – энергия продольного движения электрона. Уравнение (9) представляет собой стационарное уравнение Шредингера для гармонического осциллятора с энергией:

$$E_2(l)=\hbar\omega_2\left(l+\frac{1}{2}\right)-\frac{e^2R^2a}{2},\ \ l=0,1,2,.. \tag{11}$$

и с частотой $\omega_2=\sqrt{\dfrac{2e^2a}{m}}$. Ортонормированные собственные функции продольного движения, отвечающие собственным значениям (11), выражаются через функции Эрмита:

$$\upsilon_l(z) = \sqrt[4]{\frac{\lambda}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{2^l l!}} H_l(\sqrt{\lambda} z) \exp(-\frac{\lambda z^2}{2}), \tag{12}$$

$$H_l(\delta) = (-1)^l \exp(\delta^2) \frac{d^l (e^{-\delta^2})}{d\delta^l},\ \delta = \sqrt{\lambda} z. \tag{13}$$

Таким образом, энергия и ортонормированные собственные функции стационарных состояний электрона на цилиндрической поверхности в электромагнитном поле, образованном суперпозицией полей (1) и (2), определяются двумя квантовыми числами $(l, n) \equiv \alpha$:

$$E(n,l) = \varepsilon \left(n + \frac{\Phi}{\Phi_0} \right)^2 + \hbar\omega_2 \left(l + \frac{1}{2} \right) - \frac{e^2 R^2 a}{2}, \tag{14}$$

$$\psi_{nl}(z,\varphi) = u_n(\varphi) \upsilon_l(z) \frac{1}{\sqrt{R}}, \tag{15}$$

где функции $u_n(\varphi)$ и $\upsilon_l(z)$ определяются формулами (7) и (12).

Как известно [8], взаимодействие электронов с полем виртуальных фотонов приводит к спонтанным переходам электрона из одного энергетического состояния в другое с меньшей энергией, то есть спонтанные переходы всегда переходят сверху вниз. При наличии внешних фотонов наряду со спонтанными переходами должны существовать и вынужденные переходы под действием внешних фотонов. Вероятность $W(n, l \to n', l')$ вынужденного перехода электрона под действием внешней электромагнитной волны с частотой ω определяется формулой [8]:

$$W(n, l \to n', l') = \frac{2\pi c e^2 N(\kappa)}{\hbar \kappa L^3} \left\{ \dot{A} \left(\vec{\beta}^* \vec{\beta} \right) - \left(\vec{\beta}^* \vec{\kappa}^0 \right) \left(\vec{\beta} \vec{\kappa}^0 \right) \right\} \frac{\partial}{\partial t} \left| \int_0^t e^{-ict(\kappa_{\alpha\alpha'} \mp \kappa)} dt \right|^2, \tag{16}$$

где $N(\kappa)$ – число падающих квантов внешней электромагнитной волны с импульсом $\hbar\vec{\kappa} = \hbar\kappa\vec{\kappa}^0$ ($\vec{\kappa}^0$ – единичный вектор вдоль импульса фотона с частотой ω), $\beta_{x,y,z}$ – матричные элементы процесса, причём знак минус перед волновым числом κ в показателе экспоненты отвечает индуцированному излучению, а плюс – поглощению. Частота излучения:

$$\omega_{\alpha\alpha'} = c\kappa_{\alpha\alpha'} = \frac{E(n,l) - E(n',l')}{\hbar}. \tag{17}$$

В наиболее интересном случае, когда электрон в начальном состоянии обладает конечным временем жизни τ, в формуле (16) интеграл по времени следует заменить согласно формуле [8]:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left|\int_0^t e^{-ict(\kappa_{\alpha\alpha'}\mp\kappa)}dt\right|^2 \to \frac{\left|\int_0^t e^{-ict(\kappa_{\alpha\alpha'}\mp\kappa)-\frac{t}{2\tau}}dt\right|^2}{\tau} = \frac{4\tau}{4c^2\tau^2(\left|\kappa_{\alpha\alpha'}\right|-\kappa)^2+1}. \qquad (18)$$

Интеграл (18) вычислен в предположении, что $t \gg \tau$, причём в предельном случае больших значений τ правая часть равенства (18) обращается в дельта-функцию Дирака.

Число фотонов $N(\vec{\kappa})$ в объёме L^3 связано с вектором напряжённости поля $\vec{E}$ внешней электромагнитной волны формулой:

$$\frac{\vec{E}^2}{4\pi} = \hbar c\kappa N(\kappa)/L^3,$$

левая и правая части которой определяют энергию поля в единице объема. В результате находим, что при квантовом переходе $(n, l \to n', l')$ соответствующая частота излучения находится из равенства:

$$\omega_{\alpha\alpha'} = \omega_2(l-l') + \frac{\varepsilon}{\hbar}(n-n')\left(n+n'+2\frac{\Phi}{\Phi_0}\right). \qquad (19)$$

Для вероятности (16) вынужденного перехода под действием внешней электромагнитной волны с волновым вектором $\vec{\kappa}$, составляющим угол θ с осью Oz, получаем формулу:

$$W(n,l\to n',l') = \frac{e^2E^2}{{}^2\kappa^2}\left[\left|\beta_x\right|^2+\cos^2\theta\left|\beta_y\right| \ +\sin^2\theta\left|\beta_z\right|^2\right]\frac{}{4\tau^2(\left|\omega_{\alpha\alpha'}\right|-\omega)^2+1}. \qquad (20)$$

Для матричных элементов процесса, описывающих переход $(n, l \to n', l')$, в полярных координатах получаем следующее выражение:

$$\vec{\beta} = \frac{1}{mc}\int \psi_{n'l'}(z,\varphi)e^{-i\vec{\kappa}\vec{r}}(-i\frac{\partial}{\partial\vec{r}}-\frac{e}{c}\vec{A})\psi_{nl}(z,\varphi)Rdzd\varphi. \qquad (21)$$

Используя далее рекуррентные соотношения для функций Эрмита и формулы:

$$P_x\psi_{nl}(z,\varphi) = -\frac{\hbar}{R}\sin\varphi(n+\frac{\Phi}{\Phi_0})\psi_{nl}(z,\varphi),$$
$$P_y\psi_{nl}(z,\varphi) = \frac{\hbar}{R}\cos\varphi(n+\frac{\Phi}{\Phi_0})\psi_{nl}(z,\varphi), \qquad (22)$$

в дипольном приближении $(e^{-i\vec{\kappa}\vec{r}} \ll 1)$ получаем:

$$\beta_x = -i\frac{\pi\hbar}{2mc}[n+\frac{\Phi}{\Phi_0}]\delta_{l,l'}\delta_{n,n'+1},$$
$$\beta_y = i\frac{\pi\hbar}{2mc}[n+\frac{\Phi}{\Phi_0}]\delta_{l,l'}\delta_{n,n'+1},$$
$$\beta_z = -i\hbar\sqrt{\frac{\lambda}{2}}R\delta_{n,n'}[\sqrt{l}\delta_{l',l-1} - \sqrt{l+1}\delta_{l',l+1}]. \qquad (23)$$

В результате, квадраты модулей матричных элементов процесса можно представить в следующем виде:

$$\left|\beta_x\right|^2 = \left|\beta_y\right|^2 = \frac{\pi^2\hbar^2}{4m^2c^2}[n+\frac{\Phi}{\Phi_0}]^2\delta_{l',l}\delta_{n',n-1}, \qquad (24)$$

$$\left|\beta_z\right|^2 = \frac{\lambda\hbar^2R^2}{2m^2c^2}\delta_{n,n'}[l\delta_{l',l-1} + (l+1)\delta_{l',l+1}]. \qquad (25)$$

Из формул (24) и (25) находим правила отбора и соответствующие им частоты излучения и поглощения:

$$1)\ \Delta l = l - l' = 0,\ \Delta n = n - n' = 1,\ \omega_1 = \omega(n,\ l \to n-1,\ l) = \frac{\varepsilon}{\hbar}[2n-1+\frac{\Phi}{\Phi_0}], \qquad (26)$$

$$2)\ \Delta n = 0,\ \Delta l = \pm 1,\ \omega_{3,2} = \mp\omega_2. \qquad (27)$$

Заключение

Полученные в работе формулы (2), (24)–(27) описывают в дипольном приближении процесс вынужденного излучения электрона на цилиндрической поверхности в электромагнитном поле, образованном суперпозицией полей (1) и (2).

Для дальнейшего анализа полученных результатов найдём суммарную энергию вынужденного излучения и поглощения электрона. В случае (26), когда изменяется только квантовое число n, определяющее энергию поперечного движения, имеем:

$$W_1 = \hbar\omega_1 W(l,\ n \to l,\ n-1) = \varepsilon\left[2n-1+\frac{\Phi}{\Phi_0}\right](1+\cos^2\theta)$$
$$\frac{e^2E^2\pi^2}{2(\kappa mc)^2}\left(n+\frac{\Phi}{\Phi_0}\right)^2\frac{\tau}{4\tau^2(\omega_1-\omega)^2+1}. \qquad (28)$$

Мы видим, что электромагнитные волны, частоты которых лежат вблизи частоты ω_1, будут вынужденно излучаться ($W_1 > 0$), причём значение W_1 зависит не только от орбитального квантового числа n, но и от параметра Ааронова-Бома. Во втором случае, когда изменяется только квантовое число l, определяющее энергию продольного движения электрона, находим:

$$W_2 = \hbar\omega_2[W(l,\ n \to l-1,\ n) - W(l,\ n \to l+1,\ n)] = -\hbar\omega_2 \sin^2\theta \frac{e^2E^2\lambda R^2}{(2mc\kappa)^2}\cdot$$
$$\frac{\tau}{4\tau^2(\omega_2-\omega)^2+1} < 0. \quad (29)$$

Итак, электромагнитные волны, частоты которых лежат вблизи частоты ω_2, наоборот, должны поглощаться системой, а зависимость W_2 от магнитного поля содержится только в среднем времени пребывания электрона в начальном состоянии. Обобщение полученных результатов на случай электронного газа нанотрубки будет проведено отдельно.

Статья поступила в редакцию 30.07.2019 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Обменное взаимодействие и осцилляции намагниченности электронного газа в нанотрубках / Эминов П. А., Сезонов Ю. И., Альперн А. В., Сальников Н. В. // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 2006. Т. 130. № 4. С. 724–728.
2. Эминов П. А. Экранирование кулоновского поля в намагниченном электронном газе квантового цилиндра // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 2009. Т. 135. № 5. С. 1029–1036.
3. Эминов П. А., Гордеева С. В., Соколов В. В. Флуктуации термодинамических свойств намагниченного квантового цилиндра в окрестности критической температуры // Доклады Академии наук. 2013. Т. 450. № 6. С. 659.
4. Садыков Н. П., Скоркин Н. А. Метод генерации электромагнитного излучения на основе нанотрубок при наличии постоянного электрического поля и поля электромагнитной волны // Физика и техника полупроводников. 2012. Т. 46. № 2. С. 168–174.
5. Yokomizo N. Radiation from electrons in graphene in strong electric field // Annals of Physics. 2014. Vol. 351. P. 166–199.
6. Pellegrini C., Marinelli A., Reiche S. The physics of X-ray free-electron lasers // Reviews of Modern Physics. 2016. Vol. 88. Iss. 1. P. 015006.
7. Жуковский К. В. Ондуляторы и генерация рентгеновских импульсов в лазерах на свободных электронах с самоусилением спонтанного излучения // Вестник Московского университета. Серия 3. Физика. Астрономия. 2017. № 2. С. 29–44.
8. Соколов А. А., Тернов И. М. Релятивистский электрон. М.: Наука, 1974. 392 с.

REFERENCES

1. Eminov P. A., Sezonov Yu. I., Al'pern A. V., Sal'nikov N. V. [Exchange interaction and oscillations of the magnetization of the electron gas in a quantum cylinder]. In: *Zhurnal eksperimental'noi i teoreticheskoi fiziki* [Journal of Experimental and Theoretical Physics], 2006, vol. 130, no. 4, pp. 724–728.
2. Eminov P. A. [Screening of the Coulomb field in a magnetized electron gas of a quantum cylinder]. In: *Zhurnal eksperimental'noi i teoreticheskoi fiziki* [Journal of Experimental and Theoretical Physics], 2009, vol. 135, no. 5, pp. 1029–1036.
3. Eminov P. A., Gordeeva S. V., Sokolov V. V. [Fluctuations in the thermodynamic properties of a magnetized quantum cylinder in the vicinity of the critical temperature]. In: *Doklady Akademii nauk* [Doklady Mathematics], 2013, vol. 450, no. 6, pp. 659.

4. Sadykov N. P., Skorkin N. A. [Generation of electromagnetic radiation based on nanotubes under a constant electric field and an electromagnetic wave field]. In: *Fizika i tekhnika poluprovodnikov* [Semiconductors], 2012, vol. 46, no. 2, pp. 168–174.
5. Yokomizo N. Radiation from electrons in graphene in strong electric field. In: Annals of Physics, 2014, vol. 351, pp. 166–199.
6. Pellegrini C., Marinelli A., Reiche S. The physics of X-ray free-electron lasers. In: *Reviews of Modern Physics*, 2016, vol. 88, iss. 1, P. 015006.
7. Zhukovskii K. V. [Undulators and generation of X-ray pulses in free-electron lasers with self-amplified spontaneous emission]. In: *Vestnik Moskovskogo universiteta. Seriya 3. Fizika. Astronomiya* [Moscow University Physics Bulletin], 2017, no. 2, pp. 29–44.
8. Sokolov A. A., Ternov I. M. *Relyativistskii elektron* [Relativistic electron]. Moscow, Nauka Publ., 1974. 392 p.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Эминов Павел Алексеевич – доктор физико-математических наук, профессор, профессор департамента прикладной математики Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики»;
e-mail: peminov@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Pavel A. Eminov – Doctor in Physical and Mathematical Sciences, Professor at the Department of Applied Mathematics, National Research University ‘Higher School of Economics’;
e-mail: peminov@mail.ru;

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Эминов П. А. Вынужденное излучение и поглощение света электроном на цилиндрической поверхности // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика–математика. 2019. № 3. С. 82–89.
DOI: 10.18384-2310-7251-2019-3-82-89

FOR CITATION

Eminov P. A. Stimulated emission and absorption of light by an electron on a cylindrical surface. In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics.* 2019, no. 3, pp. 82–89.
DOI: 10.18384-2310-7251-2019-3-82-89

УДК 533 6.011
DOI: 10.18384-2310-7251-2019-3-90-97

ЭФФЕКТ ВЫСОКОСКОРОСТНОГО ПЕРЕХЛЁСТА В УДАРНОЙ ВОЛНЕ С ПРЕДЕЛЬНЫМ СЖАТИЕМ

Кузнецов М. М.[1,2], Кулешова Ю. Д.[1], Перов А. А.[1], Смотрова Л. В.[1]

[1] *Московский государственный областной университет*
141014, Московская область, г. Мытищи, ул. Веры Волошиной, д. 24, Российская Федерация

[2] *Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)*
141701, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский пер., д. 9, Российская Федерация

Аннотация. Представлены некоторые результаты аналитического исследования поступательной неравновесности в ударной волне. Они были сформулированы ранее в систематических исследованиях авторов. Проанализированы аналитические модели высокоскоростной поступательной неравновесности в бинарных газовых смесях. Рассмотрен эффект высокоскоростного перехлёста в ударной волне с предельным сжатием. Показано, что максимум этого эффекта удовлетворяет принципу независимости от числа Маха.

Ключевые слова: кинетический, уравнение, неравновесный, смесь газов, ударная волна

EFFECT OF HIGH-SPEED OVERSHOOT IN A SHOCK WAVE WITH MAXIMUM COMPRESSION

M. Kuznetsov[1,2], Ju. Kuleshova[1], A. Perov[1], L. Smotrova[1]

[1] *Moscow Region State University*
ul. Very Voloshinoi 24, 141014 Mytishchi, Moscow region, Russian Federation

[2] *Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University)*
Institutskii per. 9, 141701 Dolgoprudny, Moscow region, Russian Federation

Abstract. We report some results of the analytical study of translational nonequilibrium in the shock wave that have been previously formulated in our systematic studies. Analytical models of high-speed translational nonequilibrium in binary gas mixtures are analyzed. The effect of high-speed overshoot in the shock wave with maximum compression is considered. It is shown that the maximum of this effect satisfies the principle of independence of the Mach number.

Keywords: kinetic, equation, nonequilibrium, gas mixture, shock wave

Введение

В настоящее время не существует однозначных конкретных рекомендаций по проектированию эксперимента с ударными волнами, которые давали бы возможность провести оптимально этот эксперимент с учётом сильного влияния высокоскоростной поступательной неравновесности во фронте ударной волны. Такие рекомендации могут быть даны с использованием аналитического подхода к исследованию структуры ударных волн. Этот подход может полезно дополнить численные и полуаналитические методы, применение которых так или иначе ограничено их точностью. Трудности в применении численных методов [1–3], как правило, обусловлены очень малым количеством частиц тяжёлого компонента и высоким порогом активации химических молекулярных и кластерных реакций. Ориентация молекул при соприкосновении была рассмотрена в работах [4–6]. Применение же аналитических методов свободно от этих трудностей.

В работах авторов данной статьи [7–10] ранее был получен ряд существенных результатов:

1) необходимое и достаточное условие эффекта высокоскоростной поступательной неравновесности внутри фронта ударной волны;

2) универсальное аналитическое представление коэффициентов скоростей высокопороговых поступательно неравновесных химических реакций, учитывающее анизотропию кинетических температур в ударных волнах.

В данной статье эффект действия первых двух факторов исследуется более детально.

Кроме того, в представленной работе показано, что при числе Маха перед фронтом ударной волны, стремящемся к бесконечности, действие одного из основных законов подобия гиперзвуковых течений – принципа независимости значений макропараметров потока за ударными волнами от числа Маха [11] может быть распространено на максимальную величину эффекта высокоскоростного перехлёста.

Следует подчеркнуть два существенных отличия этого результата от известной теории:

– принцип независимости от числа Маха выполняется внутри фронта ударной волны, а не за ним;

– действие принципа оказывается справедливым и для молекулярной характеристики потока, которой является максимальная величина отношения функции распределения пар молекул внутри волны к такой же величине за волной, а не только для макрохарактеристик потока, как в известной теории.

Справедливости ради, следует отметить, что в известной классической монографии, посвящённой теории гиперзвуковых течений [11], допускалась возможность выполнения принципа независимости от числа Маха внутри структуры ударной волны (см. [11, с. 45]). Однако конкретных примеров не было приведено.

Независимость от числа Маха свободного потока максимальной относительной величины функции распределения пар молекул в однокомпонентном ударно сжатом газе

В ударных волнах с бинарными смесями газов различают три различные функции: $G^{(ll)}$, $G^{(lh)}$, $G^{(hh)}$. Ими являются функции распределения пар молекул по модулю относительной скорости. Функция $G^{(ll)}$ – относится к распределению пар молекул внутри лёгкого компонента. Функция $G^{(lh)}$ – относится к паре молекул из лёгкого и тяжёлого компонента, а функция $G^{(hh)}$ – к парам молекул тяжёлого компонента [12].

Эволюция распределения пар молекул $G^{(ll)}$ практически не отличается от соответствующей функции пар молекул в однокомпонентном газе. Она имеет максимум $G^{(ll)}_{\max}$ внутри фронта ударной волны. Этот максимум $G^{(ll)}_{\max}$ равен:

$$G^{(ll)}_{\max} \cong \varepsilon \exp\left(\frac{1}{2\varepsilon}\right). \qquad (1)$$

Здесь ε^{-1} – степень сжатия в ударной волне, причём $\varepsilon = \rho_\infty/\rho_s$, где ρ_∞ – величина плотности газа перед скачком, а ρ_s – величина плотности газа за ним, $\tilde{G}^{(ll)}_{\max} = G^{(ll)}_{\max} / G^{(ll)}_s$.

Формула (1) получена асимптотически при $\varepsilon = \rho_\infty/\rho_s \to 0$.

Важно отметить, что эффект перехлёста, то есть отношение $\tilde{G}^{(ll)}_{\max} = G^{(ll)}_{\max} / G^{(ll)}_s$, (где $G^{(ll)}_s$– равновесная функция распределения пар молекул за скачком), зависит только от степени сжатия в скачке ε^{-1}.

Этот факт не был отмечен в численных исследованиях и демонстрирует полезность аналитических методов исследования при определении величины $G^{(ll)}_{\max}$. Таким образом, мы видим, что закону гиперзвуковой стабилизации, то есть зависимости макропараметров течения за скачком уплотнения лишь от степени сжатия ε^{-1}, подчиняются не только газодинамические макропараметры (температура, скорость, плотность потока газа), но и параметры молекулярной кинетики, в частности отношение $G^{(ll)}_{\max}/G^{(ll)}_s$ (микропараметр течения). Значения функции $G^{(ll)}_{\max}$, задаваемые формулой (1), приведены в табл. 1 для различных значений параметров γ или ε, причём $\varepsilon = \dfrac{\gamma-1}{\gamma+1}$.

Таблица 1.

Максимум «перехлёста» $\tilde{G}^{(ll)}_{\max}$ в сверхзвуковом потоке

Газ	(A)	(A_2), без учёта колебательных степеней свободы молекулы	(A_2), с учётом колебательных степеней свободы молекулы	(A_3), с учётом вращательных и колебательных степеней свободы молекул	C_8H_{16}
γ	5/3	7/5	9/7	7/6	22/21
ε	1/4	1/6	1/8	1/13	1/43
$G^{(ll)}_{\max}$	1,31	2.37	4,84	36/28	$3{,}6\times10^8$

Здесь символом А обозначен сорт молекул газов с различным количеством атомов. Так, символами (А), (A_2), (A_3) обозначены молекулы, соответственно, одноатомных, двухатомных и трёхатомных газов. В последнем столбце таблицы приведены величины параметров γ и ε многоатомной молекулы C_8H_{16}.

Численные значения функции $\tilde{G}^{(ll)}_{\max}$, приведённые в табл. 1, свидетельствуют о том, что она очень быстро (экспоненциально) возрастает с относительно небольшим изменением параметра ε. Для практического использования эффекта перехлёста данной функции, а также его наблюдения, необходимо, как показывает эксперимент, чтобы его величина была порядка 10^4 и больше. Мы видим, что такому требованию соответствуют только данные последнего столбца табл. 1. В связи с этим возникает вопрос о возможности возбуждения необходимого числа степеней свободы многоатомной молекулы на толщине скачка уплотнения. Отметим те возможные случаи, когда такое возбуждение успевает произойти. К первому случаю относится предварительное возбуждение необходимого числа колебательных степеней свободы перед фронтом ударной волны. Ко второму случаю относится реализация эффекта высокоскоростного перехлёста в рэлеевской смеси газа, соответствующим образом подобранными компонентами этой смеси. Необходимо, чтобы на длинах выравнивания (длинах релаксации) температуры и скоростей тяжёлого и лёгкого компонентов в лёгком многоатомном компоненте (типа NH_3) успевало возбудиться необходимое число колебаний. К такой смеси можно отнести, например, 99% NH_3 – 1% C_{70} или рэлеевскую смесь в кластерном термояде.

Независимость от числа Маха свободного потока максимальной относительной величины функции распределения пар молекул в сильно диспергированных по концентрации ударно сжатых газовых смесях

Функции распределения пар компонент $\tilde{G}^{(ll)}$ (лёгкого компонента) и $\tilde{G}^{(lh)}$ (лёгко-тяжёлого компонента) обнаруживают при своей эволюции внутри фронта ударной волны эффект высокоскоростного «перехлёста», количественно близкий к соответствующему эффекту в однокомпонентном газе. Наиболее сильный эффект наблюдается для функции $\tilde{G}^{(hh)}$ (тяжёлого компонента).

Можно показать, что усиление эффекта «перехлёста» у тяжёлого компонента связано с тем, что мода $\tilde{G}^{(hh)}_{01}$ содержит в показателе экспоненты отношение массы тяжёлого компонента к равновесной температуре газа за ударной волной, определяемой преобладанием лёгкого компонента в смеси газов [12].

Для рэлеевской смеси при значительном преобладании концентрации n_l лёгкого компонента над концентрацией n_h тяжёлого компонента, например, в случае неравенства $10 < n_l/n_l < 10^4$, нетрудно рассчитать максимум эффекта высокоскоростного перехлёста по аналогии с расчётом, сделанным ранее для простого газа [7; 13]. Для максимального значения функции распределения пар тяжёлого компонента смеси $\tilde{G}^{(hh)}$, когда отношение массы молекулы тяжёлого компонента m_h к массе молекулы лёгкого компонента m_l равно двум и четырём, можно составить следующую таблицу (см. табл. 2).

Таблица 2.
Максимум «перехлёста» G_{max} в сверхзвуковом потоке

$m_h/m_l = 2$				$m_h/m_l = 4$		
Gas	A	(A2) линейная молекула без учёта колеб. степ. свободы	(A2) Линейная молекула с учётом колеб. степ. свободы	A	(A2) линейная молекула без учёта колеб. степ. свободы	(A2) Линейная молекула с учётом колеб. степ. свободы
γ	5/3	7/5	9/7	5/3	7/5	9/7
ε	1/4	1/6	1/8	1/4	1/6	1/8
$\tilde{G}_{*\max} = \varepsilon(h,h)$	1.86	2.8	11.7	3,1	3,9	119

Из табл. 2 наглядно следует, что как увеличение числа возбужденных внутренних степеней свободы преобладающего лёгкого носителя (приводящего к уменьшению параметра ε), так и уменьшение его молекулярной массы (приводящее к возрастанию величины отношения m_h/m_l), ведут к возрастанию величины высокоскоростного перехлёста $\tilde{G}_{*\max}$.

Заметим, что возможность данного аналитического рассмотрения эффекта перехлёста в тяжёлом компоненте рэлеевского газа, сильно разбавленного лёгким многоатомным компонентом с внутренними степенями свободы, была ранее обоснована результатами численных расчётов в работе [14].

Заключение

Представленные в данной работе результаты аналитического исследования высокоскоростной поступательной неравновесности в ударной волне могут оказаться полезными для проведения газодинамического эксперимента. Такие эксперименты могут включать начальную стадию процессов поступательно-неравновесного пиролиза, в которых число Маха свободного потока часто достигает значения M = 3 и более. Как раз со значения M = 3 течение газа принято считать гиперзвуковым [11], что позволяет воспользоваться аналитическими преимуществами гиперзвуковой теории для оптимального планирования эксперимента в ударных трубах.

Статья поступила в редакцию 09.08.2019 г.

БЛАГОДАРНОСТИ

Исследование выполнено в рамках гранта РФФИ №17-07-00-945А.

Исследование выполнено в рамках гранта Президента РФ для молодых учёных – кандидатов наук МК-3120.2018.9.

ACKNOWLEDGMENTS

The work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (Grant No. 17-07-00-945A) and the RF President's Grant Council (State Support of Young Russian Scientists (Candidates of Sciences) Program, Grant No. MK-3120.2018.9).

ЛИТЕРАТУРА

1. Chausov D. N. Interaction of dyes CD–1 and SD–1 with the surface of oligodimethysiloxane // Journal of Physics: Conference Series. 2018. Vol. 996. Iss. 1. P. 012019.
2. Dependence of Mesogen Molecules Interaction Energy on their Mutual Orientation / Chausov D. N., Dadivanyan A. K., Noah O. V., Belyaev V. V. // Molecular Crystals & Liquid Crystals. 2015. Vol. 611. Iss. 1. P. 21–26.
3. Structure and physicochemical properties of thin film photosemiconductor cells based on porphine derivatives / Kazak A. V., Usol'tseva N. V., Smirnova A. I., Bodnarchuk V. V., Sul'yanov S. N., Yablonskii S. V. // Crystallography Reports. 2016. Vol. 61. Iss 3. P. 493–498.
4. Спектральная фотосенсибилизация оптической анизотропии в твердотельных пленках поли (винилциннамата) / Козенков В. М., Спахов А. А., Беляев В. В., Чаусов Д. Н., Чигринов В. Г. // Журнал технической физики. 2018. Т. 88. № 4. С. 592–596.
5. Spectral photosensitization of optical anisotropy in poly(vinyl cinnamate) solid films / Kozenkov V.M., Spakhov A.A., Belyaev V.V., Chausov D.N., Chausova O.V., Chigrinov V.G. // Journal of Physics: Conference Series. 2017. Vol. 867. P. 012039.
6. Самоорганизация азокрасителя КД-2 в плавающих слоях и пленках Ленгмюра-Шеффера / Казак А. В., Жукова Л. Н., Ковалева М. И., Чаусов Д. Н., Кузнецов М. М., Габдулсадыкова Г. Ф. // Жидкие кристаллы и их практическое использование. 2018. Т. 18. № 3. С. 74–81.
7. Кузнецов М. М., Кулешова Ю. Д., Смотрова Л. В. Эффект высокоскоростной поступательной неравновесности в бимодальной ударной волне // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2012. № 2. С. 108–115.
8. Kuznetsov M. M., Kuleshova Yu. D. Increase in rates of Kinetic Processes inside the Bimodal Hypersonic Shock Wave // Heat Transfer Research. 2012. Vol. 43. Iss. 3. P. 228–236.
9. Кузнецов М. М., Смотрова Л. В. Аналитические свойства эффекта высокоскоростной поступательной неравновесности // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2013. № 3. С. 66–73.
10. Analytical properties of nonequilibrium threshold in shock waves / Kuznetsov M. M., Kuleshova Ju. D., Reshetnikova Yu. G., Smotrova L. V. // Journal of Physics: Conference Series. 2018. Vol. 996. P. 012006 [Электронный ресурс]. URL: https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/996/1/012006/pdf (дата обращения: 27.07.2019).
11. Хейз У. Д., Пробстин Р. Ф. Теория гиперзвуковых течений. М.: Издательство Иностранной литературы, 1962. 607 с.
12. Высокоскоростная поступательная неравновесность смеси газов в аналитической модели ударной волны / Кузнецов М. М., Матвеев С. В., Молоствин Е. В., Решетникова Ю. Г., Смотрова Л. В. // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2016. Т. 17. Вып. 1 [Электронный ресурс]. URL: http://chemphys.edu.ru/issues/2016-17-1/articles/613/ (дата обращения: 27.07.2019).
13. О максимуме эффекта высокоскоростной поступательной неравновесности в ударной волне / Кузнецов М. М., Кулешова Ю. Д., Решетникова Ю. Г., Смотрова Л. В. // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика 2016. № 3. С. 84–95.

14. Shock waves in Gas Mixtures with Internal Energy Relaxation / Ching Shen, Zhenhua Hu, Wanquan Wu, Xiaoyan Xu // Rarefied gas dynamics: Proceedings of the 17th International Symposium (Aachen, Germany, July 8–14, 1990) / ed. by A. E. Beylich. Weinheim, Germany and New York: VCH Verlagsgesellschaft mbH, 1991. P. 247–254.

REFERENCES

1. Chausov D. N. Interaction of dyes CD–1 and SD–1 with the surface of oligodimethysiloxane. In: *Journal of Physics: Conference Series*, 2018, vol. 996, iss. 1, pp. 012019.
2. Chausov D. N., Dadivanyan A. K., Noah O. V., Belyaev V. V. Dependence of mesogen molecules interaction energy on their mutual orientation. In: *Molecular Crystals & Liquid Crystals*, 2015, vol. 611, iss. 1, pp. 21–26.
3. Kazak A. V., Usol'tseva N. V., Smirnova A. I., Bodnarchuk V. V., Sul'yanov S. N., Yablonskii S. V. Structure and physicochemical properties of thin film photosemiconductor cells based on porphine derivatives. In: *Crystallography Reports*, 2016, vol. 61, iss 3, pp. 493–498.
4. Kozenkov V. M., Spakhov A. A., Belyaev V. V., Chausov D. N., Chigrinov V. G. [Spectral photosensitization of optical anisotropy in solid poly(vinyl cinnamate) films]. In: *Zhurnal tekhnicheskoi fiziki* [Technical Physics], 2018, vol. 88, no. 4, pp. 592–596.
5. Kozenkov V.M., Spakhov A.A., Belyaev V.V., Chausov D.N., Chausova O.V., Chigrinov V.G. Spectral photosensitization of optical anisotropy in poly(vinyl cinnamate) solid films. In: *Journal of Physics: Conference Series*, 2017, vol. 867, pp. 012039.
6. Kazak A. V., Zhukova L. N., Kovaleva M. I., Chausov D. N., Kuznetsov M. M., Gabdulsadykova G. F. [Self-organization of azo dye kd-2 in floating layers and Langmuir-Schaefer films]. In: *Zhidkie kristally i ikh prakticheskoe ispol'zovanie* [Liquid Crystals and their Application. Russian Journal], 2018, vol. 18, no. 3, pp. 74–81.
7. Kuznetsov M. M., Kuleshova Yu. D., Smotrova L. V. [On the increase in the kinetic processes rates in the Tamm-Mott-Smith shock wave model]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika* [Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], 2012, no. 2, pp. 108–115.
8. Kuznetsov M. M., Kuleshova Yu. D. Increase in rates of kinetic processes inside the bimodal hypersonic shock wave. In: *Heat Transfer Research*, 2012, vol. 43, iss. 3, pp. 228–236.
9. Kuznetsov M. M., Smotrova L. V. [Analytical qualities of high velocity translational nonequilibrium in the shock wave]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika* [Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], 2013, no. 3, pp. 66–73.
10. Kuznetsov M. M., Kuleshova Ju. D., Reshetnikova Yu. G., Smotrova L. V. Analytical properties of nonequilibrium threshold in shock waves. In: *Journal of Physics: Conference Series*, 2018, vol. 996, pp. 012006. Available at: https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/996/1/012006/pdf (accessed: 27.07.2019).
11. Hayes W. D., *Probstein R. F. Hypersonic Flow Theory*. New York, London, Avad. Press, 1959.
12. Kuznetsov M. M., Kuleshova Yu. D., Reshetnikova Yu. G., Smotrova L. V. [On the maximum effect of high translational nonequilibrium in the shock wave]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika* [Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], 2016, no. 3, pp. 84–95.
13. Ching Shen, Zhenhua Hu, Wanquan Wu, Xiaoyan Xu. Shock waves in gas mixtures with internal energy relaxation. In: Beylich A. E., ed. *Rarefied gas dynamics: Proceedings of the 17th International Symposium (Aachen, Germany, July 8–14, 1990)*. Weinheim, Germany and New York, VCH Verlagsgesellschaft mbH Publ., 1991. pp. 247–254.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Кузнецов Михаил Михайлович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической физики Московского государственного областного университета; доцент кафедры общей физики Московского физико-технического института (национального исследовательского университета); e-mail: kuznets-omn@yandex.ru;

Кулешова Юлия Дмитриевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей алгебры, элементарной математики и методики преподавания математики Московского государственного областного университета; e-mail: juliaybogdanova@mail.ru;

Перов Александр Алексеевич – аспирант кафедры теоретической физики Московского государственного областного университета; e-mail: xok91.91@mail.ru;

Смотрова Лилия Владимировна – аспирант кафедры теоретической физики Московского государственного областного университета; e-mail: lilysmotrova@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Mihail M. Kuznetsov – Doctor in Physical and Mathematical Sciences, Professor at the Department of Theoretical Physics, Moscow Region State University; Associate Professor at the Department of General Physics, Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University); e-mail: kuznets-omn@yandex.ru;

Julia D. Kuleshova – PhD in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor at the Department of Higher Algebra, Elementary Mathematics and Methods of Teaching Mathematics, Moscow Region State University; e-mail: juliaybogdanova@mail.ru;

Aleksandr A. Perov – postgraduate student at the Department of Theoretical Physics, Moscow Region State University; e-mail: xok91.91@mail.ru;

Liliya V. Smotrova – postgraduate student at the Department of Theoretical Physics, Moscow Region State University; e-mail: lilysmotrova@mail.ru.

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Кузнецов М. М., Кулешова Ю. Д., Перов А. А., Смотрова Л. В. Эффект высокоскоростного перехлёста в ударной волне с предельным сжатием // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика–математика. 2019. № 3. С. 90–97.
DOI: 10.18384-2310-7251-2019-3-90-97

FOR CITATION

Kuznetsov M. M., Kuleshova Ju. D., Perov A. A., Smotrova L. V. Effect of high-speed overshoot in a shock wave with maximum compression. In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics.* 2019, no. 3, pp. 90–97.
DOI: 10.18384-2310-7251-2019-3-90-97

ВЕСТНИК
МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
ОБЛАСТНОГО УНИВЕРСИТЕТА

Научный журнал «Вестник Московского государственного областного университета» основан в 1998 г. Сегодня выпускается десять журналов (предметных серий) "Вестника Московского государственного областного университета": «История и политические науки», «Экономика», «Юриспруденция», «Философские науки», «Естественные науки», «Русская филология», «Физика-математика», «Лингвистика», «Психологические науки», «Педагогика». Журналы включены в составленный Высшей аттестационной комиссией Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание учёной степени кандидата наук, на соискание учёной степени доктора наук по наукам, соответствующим названию серии. Журнал включён в базу данных Российского индекса научного цитирования (РИНЦ).

Печатная версия журнала зарегистрирована в Федеральной службе по надзору за соблюдением законодательства в сфере массовых коммуникаций и охране культурного наследия. Полнотекстовая версия журнала доступна в Интернете на платформах Научных электронных библиотек (www.elibrary.ru, cyberleninka.ru), а также на сайте журнала (www.vestnik-mgou.ru).

ВЕСТНИК
МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ОБЛАСТНОГО УНИВЕРСИТЕТА

СЕРИЯ: ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА
2019. № 3

Над номером работали:

Литературный редактор М.С. Тарасова
Переводчик И.А. Улиткин
Корректор М.С. Тарасова
Компьютерная верстка Н.Н. Жильцов

Отдел по изданию научного журнала
«Вестник Московского государственного областного университета»
Информационно-издательского управления МГОУ
105005, г. Москва, ул. Радио, д. 10А, офис 98
тел. (495) 723-56-31; (495) 780-09-42 (доб. 6101)
e-mail: vest_mgou@mail.ru
сайт: www.vestnik-mgou.ru

Формат 70х108/$_{16}$. Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура «Minion Pro».
Тираж 500 экз. Усл. п. л. 6,25, уч.-изд. л. 5,75.
Подписано в печать: 31.10.2019. Дата выхода в свет: 12.11.2019. Заказ № 2019/10-15.
Отпечатано в ИИУ МГОУ
105005, г. Москва, ул. Радио, 10А