

ISSN 2072-8549



# Вестник

МОСКОВСКОГО  
ГОСУДАРСТВЕННОГО  
ОБЛАСТНОГО  
УНИВЕРСИТЕТА

*Серия*

**Ф**ИЗИКА-  
МАТЕМАТИКА

**2013 / № 3**

**Научный журнал основан в 1998 г.**

«Вестник МГОУ» (все его серии) включён в «Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертации на соискание учёной степени доктора и кандидата наук» Высшей аттестационной комиссии (См.: Список журналов в редакции от 25.05.2012 г. на сайте ВАК) по наукам, соответствующим названию серии.

**Учредитель журнала:**

Московский государственный областной университет

Журнал включён в базу данных Российского индекса научного цитирования (РИНЦ), имеет полнотекстовую сетевую версию в Интернете на платформе Научной электронной библиотеки ([www.elibrary.ru](http://www.elibrary.ru)), а также на сайте Московского государственного областного университета ([www.vestnik-mgou.ru](http://www.vestnik-mgou.ru))

**Адрес Отдела по изданию научного журнала  
«Вестник МГОУ»**

г. Москва, ул. Радио, д.10а, офис 98  
тел. (499) 261-43-41; (495) 723-56-31  
e-mail: [vest\\_mgou@mail.ru](mailto:vest_mgou@mail.ru)  
Сайт: [www.vestnik-mgou.ru](http://www.vestnik-mgou.ru)

При цитировании ссылка на конкретную серию «Вестника МГОУ» обязательна. Воспроизведение материалов в печатных, электронных или иных изданиях без разрешения редакции запрещено. Опубликованные в журнале материалы могут использоваться только в некоммерческих целях. Ответственность за содержание статей несут авторы. Мнение редколлегии серии может не совпадать с точкой зрения автора. Рукописи не возвращаются.

**The academic journal is established in 1998**

«Bulletin of the Moscow State Regional University» (all its series) is included by the Supreme Certifying Commission into the List of the leading reviewed academic journals and periodicals, in which the basic research results of Ph.D. and Doctorate's academic degree thesis should be published (See: the List of journals edited 25.05.2012 at the site of the Supreme Certifying Commission) in corresponding series.

**The founder of journal:**

The Moscow State Regional University

The journal is included into the database of the Russian Science Citation Index, has a full text network version on the Internet on the platform of Scientific Electronic Library ([www.elibrary.ru](http://www.elibrary.ru)), as well as at the site of the Moscow State Regional University ([www.vestnik-mgou.ru](http://www.vestnik-mgou.ru))

**The Editorial Board address:**

Moscow State Regional University  
10a Radio st., office 98  
Moscow, Russia  
Phones: (499) 261-43-41; (495) 723-56-31  
e-mail: [vest\\_mgou@mail.ru](mailto:vest_mgou@mail.ru)  
Site: [www.vestnik-mgou.ru](http://www.vestnik-mgou.ru)

At citing the reference to a particular series of «Bulletin of the Moscow State Regional University» is obligatory. The reproduction of materials in printed, electronic or other editions without the Editorial Board permission, is forbidden. The materials published in the journal are for non-commercial use only. The authors bear all responsibility for the content of their papers. The opinion of the Editorial Board of the series does not necessarily coincide with that of the author Manuscripts are not returned.

---

---

**Редакционно-издательский совет «Вестника МГОУ»**  
**Publishing council «Bulletin of the MSRU»**

---

**Хромеников П.Н.** – к.фил.н., проф., ректор МГОУ (председатель совета)  
**Никитин О.В.** – д.фил.н., проф., проректор по научной работе МГОУ (зам. председателя совета)  
**Абрамов А.В.** – к.пол.н., доц., нач. отдела по изданию журнала «Вестник МГОУ»  
**Асмолов А.Г.** – академик РАО, д.психол.н., проф. МГУ им. М.В. Ломоносова  
**Белозеров В.Е.** – д.ф.м.н., проф. Днепропетровского национального университета (Украина)  
**Боголюбов Л.Н.** – академик РАО, д.пед.н., проф.  
**Клычников В.М.** – к.ю.н., к.и.н., проф., проректор по учебной работе и международному сотрудничеству МГОУ  
**Затулин К.Ф.** – директор Института диаспоры и интеграции (Института стран СНГ)  
**Коницев А.С.** – д.б.н., проф. МГОУ  
**Лекант П.А.** – д.фил.н., проф. МГОУ  
**Марченко М.Н.** – д.ю.н., проф. МГУ им. М.В. Ломоносова  
**Нелюбин Л.Л.** – д.фил.н., проф. МГОУ  
**Ницевич В.Ф.** – д.пол.н., проф., директор Орловского филиала Российской академии народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ  
**Пасечник В.В.** – д.пед.н., проф. МГОУ  
**Поляков Ю.М.** – канд. фил. н., гл. ред. «Литературной газеты»  
**Пусько В.С.** – д.ф.н., проф. МГТУ им. Н.Э. Баумана  
**Ху Гумин** – д.фил.н., проф. Института иностранных языков Уханьского университета (Китай)

**P.N. Khromenkov** – Ph. D. in Philology, Professor, Principal of the MSRU (*Chairman of the Council*)  
**O.V. Nikitin** – Doctor of Philology, Professor, Vice-Principal for scientific work of the MSRU (*Deputy Chairman of the Council*)  
**A.V. Abramov** – Ph.D. in Political Sciences, Associate Professor, the Head of the editorial department of the Bulletin of the Moscow State Regional University  
**A.G. Asmolov** – Member of Russian Academy of Education, Doctor of Psychology, Professor of Moscow State University  
**B.E. Belozеров** – Doctor of Physics and Mathematics, Professor of Dnepropetrovsk National University (Ukraine)  
**L.N. Bogolubov** – Member of Russian Academy of Education, Doctor of Pedagogics, Professor  
**V.M. Klychnikov** – Ph.D. in Law, Ph. D. in History, Professor, Vice-Principal for academic work and international cooperation of the MSRU  
**K.F. Zatulyn** – the Head of Institute for Diaspora and Integration (Institute of the CIS Countries)  
**A.S. Konichev** – Doctor of Biology, Professor of the MSRU  
**P.A. Lekant** – Doctor of Philology, Professor of the MSRU  
**M.N. Marchenko** – Doctor of Law, Professor of Moscow State University  
**L.L. Nelyubin** – Doctor of Philology, Professor of the MSRU  
**V. F. Nitsevich** – Doctor of Politics, Professor, the Head of the Oryol Branch Russian Academy of National Economy and Public Administration  
**V.V. Pasechnik** – Doctor of Pedagogics., Professor of the MSRU  
**Yu. M. Polyakov** – Ph.D. in Philology, editor-in-chief of "Literaturnaya Gazeta"  
**V.S. Pus'ko** – Doctor of Philosophy, Professor of the Bauman Moscow State Technical University  
**Hu Gumin** – Doctor of Philology, Professor, Institute of Foreign Languages of Ukhani University (China)

---

---

**Редакционная коллегия серии «Физика-Математика»**  
**Series editorial board «Physics and Mathematics»**

---

*Ответственный редактор серии:*  
**Бугримов А. Л.**, доктор технических наук, профессор  
*Зам. ответственного редактора:*  
*Заместитель ответственного редактора:*  
**Латьшев А. В.**, доктор физико-математических наук, профессор  
*Ответственный секретарь:*  
**Богданов Д. Л.**, доктор физико-математических наук, профессор  
*Члены редакционной коллегии:*  
**Беляев В. В.**, доктор технических наук, профессор;  
**Дадиванян А. К.**, доктор физико-математических наук, профессор;  
**Бугаев А. С.**, доктор физико-математических наук, профессор (Московский физико-технический институт); **Баланкин А. С.**, доктор физико-математических наук, профессор (Национальный политехнический институт, Мексика); **Чернышенко С.В.**, кандидат физико-математических наук, профессор (Университет Кобленц-Ландау, Германия); **Чигринов В. Г.**, доктор физико-математических наук, профессор (Гонконгский университет науки и технологий, Китай)

**A.L. Bugrimov**, Doctor of Engineering, Professor  
**A.V. Latshev**, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor  
**D. L. Bogdanov**, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor  
**V.V. Belyayev**, Doctor of Engineering, Professor ;  
**A.K. Dadivanyan**, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor ; **A.S. Bugayev**, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor (Moscow Institute of Physics and Technology);  
**A.S. Balankin**, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor (National Polytechnic Institute, Mexico); **S.V. Chernishenko**, Ph.D. in Physics and Mathematics, Doctor of Biology, Professor (University of Koblenz-Landau, Germany) ; **V.G. Chigrinov**, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor Hong Kong University of Science and Technology, China)

**ISSN 2072-8387**

Вестник МГОУ. Серия «Физика-Математика». – 2013. - № 3. - М.: Изд-во МГОУ. – 112 с.

Журнал «Вестник МГОУ» серия «Физика-Математика» зарегистрирован в Федеральной службе по надзору за соблюдением законодательства в сфере массовых коммуникаций и охране культурного наследия. Регистрационное свидетельство **ПИ № ФС77-26136**.

Индекс серии «Физика-Математика» по каталогу  
агентства «Роспечать» **36766**

© МГОУ, 2013  
© Издательство МГОУ, 2013

**ISSN 2072-8387**

Bulletin of the MSRU. Series «Physics and Mathematics». – 2013. – № 3. – М.: MSRU Publishing house. – 112 p.

The series «Physics and Mathematics» of the Bulletin of the Moscow State Regional University is registered in Federal service on supervision of legislation observance in sphere of mass communications and cultural heritage protection. The registration certificate **ПИ № ФС77-26136**.

Index series «Physics and Mathematics» under "Rospechat" agency  
catalog **36766**

© MSRU, 2013  
© MSRU Publishing house, 2013

---

---

МАТЕМАТИКА

УДК 517.5

**РАВНОСХОДИМОСТЬ РАЗЛОЖЕНИЙ  
В КРАТНЫЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЙ РЯД И ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ  
С "J<sub>k</sub>- ЛАКУНАРНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬЮ  
ЧАСТИЧНЫХ СУММ"**

Д.А. Графов

*Московский государственный областной университет  
105005, Москва, ул. Радио 10 а*

*Аннотация.* В работе исследуется вопрос о равносходимости на  $T^N = [-\pi, \pi]^N$  разложений в кратный тригонометрический ряд и интеграл Фурье функций  $f \in L_p(T^N)$  и  $g \in L_1(R^N)$ ,  $p > 1$ ,  $N \geq 2$ ,  $g(x) = f(x)$  на  $T^N = [-\pi, \pi]^N$ .

*Ключевые слова:* кратные ряды Фурье, кратные интегралы Фурье, лакунарная последовательность.

Пусть  $2\pi$ -периодическая (по каждому аргументу) функция  $f \in L_1(T^N)$ ,  $T^N = [-\pi, \pi]^N$ ,  $N \geq 1$ , разложена в кратный тригонометрический ряд Фурье  $f(x) \sim \sum c_k e^{ikx}$ , и  $S_n(x; f)$ ,  $n \in \mathbb{Z}_+^N$ , —прямоугольная частичная сумма этого ряда, и пусть функция  $g \in L_1(R^N)$ , разложена в кратный интеграл Фурье  $g(x) \sim \int g(\xi) e^{ix\xi} d\xi$ , и  $J_\alpha(x; g)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}_+^N$ , — собственный интеграл Фурье.

Предположим, что  $g(x) = f(x)$  при  $x \in T^N$ . Обозначим символом  $R_\alpha(x; f, g)$  разность  $R_\alpha(x; f, g) = S_n(x; f) - J_\alpha(x; g)$ , и символом  $R_\alpha(x; f)$  разность  $R_\alpha(x; f) = S_n(x; f) - J_\alpha(x; 0)$ , если  $g(x) = 0$  вне  $T^N$ . Здесь  $n = ([\alpha_1], \dots, [\alpha_N]) \in \mathbb{Z}_+^N$ ,  $[\alpha_j]$  — целая часть  $\alpha_j \in \mathbb{R}_+^1$ . В работе [1] И.Л. Блошанский доказал, что для  $N=2$  и  $p > 1$ ,  $R_\alpha(x; f, g) \rightarrow 0$  при  $\alpha \rightarrow \infty$  почти всюду (п.в.) на  $T^2$ . В этой же работе была выяснена существенность условий  $N=2$ ,  $p > 1$ .

Пусть  $M = \{1, 2, \dots, N\}$ ,  $J_k = \{j_1, \dots, j_k\} \subset M$ ,  $j_1 < \dots < j_k$ ,  $1 \leq k \leq N - 2$ , и пусть  $\lambda = \lambda(J_k) = (\lambda_{j_1}, \dots, \lambda_{j_k}) \in \mathbb{Z}_+^k$ ,  $j_s \in J_k$ ,  $s = 1, 2, \dots, k$ . Символом  $\alpha^{(\lambda)} = \alpha^{(\lambda)}[J_k] = (\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_k}) \in \mathbb{R}_+^k$  обозначим  $N$ -мерный вектор у которого компоненты  $\alpha_j$ ,  $j \in J_k$ , являются элементами некоторых (однократных) обобщенных вещественных лакунарных последовательностей (данное понятие было введено в работе [2]), т.е. для  $j \in J_k$ ,  $\alpha_j = \alpha_j^{(j)}$ ,  $|\alpha_j^{(j)} - n_j^{(j)}| \leq \rho$ ,  $\frac{n_j^{(j+1)}}{n_j^{(j)}} \geq q > 1$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , где  $\rho$  некоторая постоянная.

Обозначим  $R[J_k] = \{x \in \mathbb{R}^N : x_j = 0 \text{ при } j \in M \setminus J_k\}$ , и  $T[M \setminus J_k] = \{x \in R[M \setminus J_k] : -\pi \leq x_j \leq \pi \text{ при } j \in M \setminus J_k\}$ .

Пусть  $\Omega$ ,  $\Omega \subset T^N$ , – произвольное (непустое) открытое множество, и пусть  $\Omega[J_2] = pr_{(J_2)}\{\Omega\}$  – ортогональная проекция множества  $\Omega$  на плоскость  $R[J_2]$ ,  $J_2 \subset M$ . Положим  $W[J_2] = \Omega[J_2] \times T[M \setminus J_2]$ ,  $J_2 \subset M$ .

Фиксируем произвольную выборку  $J_k$  из  $M$ ,  $1 \leq k \leq N - 2$ , и определим следующие множества

$$W(J_k) = \bigcup_{J_2 \subset M \setminus J_k} W[J_2] \text{ и } W^0(J_k) = \bigcap_{J_2 \subset M \setminus J_k} W[J_2]. \quad (1)$$

В работе [3] И.Л. Блошанским и О.В. Лифанцевой было введено следующее понятие.

**Определение 1.** Пусть  $\mathfrak{R} \subset T^N$ ,  $J_k \subset M$ ,  $1 \leq k \leq N - 2$ ,  $N \geq 3$ .

1. Будем говорить, что множество  $\mathfrak{R}$  обладает свойством  $B_2^{(J_k)}$ , если найдется множество  $W = W(J_k)$  вида (1) такое, что  $\mu(W \setminus \mathfrak{R}) = 0$  ( $\mu = \mu_N$  –  $N$ -мерная мера Лебега), причем свойство  $B_2^{(J_k)}$  есть свойство  $B_2^{(J_k)}(W^0)$ , если  $W = W(W^0, J_k)$ .

2. Свойство  $B_2^{(J_k)}(W^0)$  множества  $\mathfrak{R}$  будем называть максимальным свойством  $B_2^{(J_k)}$  множества  $\mathfrak{R}$ , если для любого множества  $\tilde{W}^0 = \tilde{W}^0(J_k)$  вида (1) такого, что  $\mu(\tilde{W}^0 \setminus W^0) > 0$ , множество  $\mathfrak{R}$  не обладает свойством  $B_2^{(J_k)}(\tilde{W}^0)$ .

Тогда справедлив следующий результат.

**Теорема.** Пусть  $\mathfrak{R}$  – произвольное измеримое множество,  $\mathfrak{R} \subset T^N$ ,  $N \geq 3$ ,  $0 < \mu \mathfrak{R} < (2\pi)^N$ , и пусть  $J_k \subset M$ ,  $1 \leq k \leq N - 2$ . Если существует множество  $W^0 = W^0(J_k)$  вида (1)

такое, что множество  $\mathfrak{R}$  обладает свойством  $B_2^{(J_k)}(W^0)$ , то для любой функции  $f \in L_p(T^N)$ ,  $p > 1$ ,  $f(x) = 0$  на  $\mathfrak{R}$

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} R_{\alpha, (2)_{J_k}}(x; f) = 0 \text{ п.в. на } W^0.$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Блошанский И.Л. О равносходимости разложений в кратный тригонометрический ряд Фурье и интеграл Фурье // Матем. заметки. 1975. Т. 18. №2. С. 153-168.
2. Блошанский И.Л., Графов Д.А. Равносходимость разложений в кратный тригонометрический ряд и интеграл Фурье в случае «лакунарной последовательности частичных сумм» // ДАН России. 2013. Т. 450. № 3. С. 260-263.
3. Блошанский И.Л., Лифанцева О.В. Критерий слабой обобщенной локализации для кратных рядов Фурье, прямоугольные частичные суммы которых рассматриваются по некоторой подпоследовательности // ДАН России. 2008. Т. 423. № 4. С. 439-442.

### EQUICONVERGENCE EXPANSIONS IN MULTIPLE TRIGONOMETRIC SERIES AND FOURIER INTEGRAL FOR " $J_k$ - LACUNARY SEQUENCE OF PARTIAL SUMS"

D. GRAFOV

Moscow State Regional University  
10a, Radio st., Moscow, 105005, Russia

Abstract. In this paper we investigate the question of equiconvergence on  $T^N = [-\pi, \pi]^N$  expansions in multiple trigonometric series and Fourier integral functions  $f \in L_p(T^N)$  and  $g \in L_1(R^N)$ ,  $p > 1$ ,  $N \geq 2$ ,  $g(x) = f(x)$  on  $T^N = [-\pi, \pi]^N$ .

Keywords: multiple Fourier series, multiple Fourier integrals, lacunary sequence.

ФИЗИКА

УДК 533.9.02

**ПРОДОЛЬНАЯ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРОНИЦАЕМОСТЬ  
КВАНТОВОЙ СТОЛКНОВИТЕЛЬНОЙ МАКСВЕЛЛОВСКОЙ ПЛАЗМЫ**

**Ю.Ф. Алабина<sup>1</sup>, А.Л. Бугримов<sup>1</sup>, А.В. Латышев<sup>1,2</sup>, А.А. Юшканов<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>Московский государственный областной университет (МГОУ),  
105005, Москва, ул. Радио 10 а

<sup>2</sup>Московский государственный гуманитарный университет им. М.А. Шолохова  
109444, Москва, ул. Ташкентская д18 к4

*Аннотация.* Проводится исследование диэлектрической функции для столкновительной плазмы с произвольной степенью вырожденности электронного газа. Путем специального предельного перехода получена диэлектрическая функция максвелловской плазмы. Приводится исследование и сравнение продольных диэлектрических функций квантовой и классической максвелловской столкновительной плазмы.

*Ключевые слова:* квантовая плазма, максвелловская плазма, распределение Ферми–Дирака, электрическая проводимость.

**Введение**

Формула для продольной диэлектрической функции квантовой бесстолкновительной плазмы была выведена в [1] с помощью уравнения Власова–Вигнера. Эта формула затем была получена в [2] с помощью уравнения Шредингера.

В работе [3] фактически без вывода было анонсировано общее выражение продольной диэлектрической функции квантовой столкновительной плазмы с постоянной частотой столкновений. При этом использовалось уравнение Шредингера–Больцмана с интегралом столкновений релаксационного типа.

В [4] была выведена формула для продольной диэлектрической функции квантовой столкновительной плазмы с использованием кинетического уравнения Власова–Вигнера–Больцмана. В этой работе, в частности, выявлено размывание и расщепление коновских особенностей.

В работе [5] выведена формула для поперечной электрической проводимости квантовой столкновительной плазмы с использованием кинетического уравнения Власова–Вигнера–Больцмана.

В работе [6] выведена формула для поперечной электрической проводимости квантовой столкновительной плазмы с использованием уравнения Шредингера–Больцмана с интегралом столкновений релаксационного типа с постоянной частотой столкновений частиц плазмы.

В работах [7] было выведено общее выражение продольной диэлектрической функции квантовой столкновительной плазмы с переменной частотой столкновений, зависящей от волнового вектора.

Затем в работе [8] был дан подробный вывод продольной диэлектрической функции квантовой плазмы с постоянной частотой столкновений.

В настоящей работе рассматривается случай квантовой столкновительной плазмы с произвольной степенью вырождения электронного газа (случай произвольной температуры) с постоянной частотой столкновений частиц плазмы. Исследуется общая формула диэлектрической функции из [3] и [8].

Эта формула упрощается и приводится к удобному для вычислений виду и содержит одну квадратуру. Затем из полученной формулы путем специального предельного перехода выводится соответствующая формула для максвелловской плазмы.

Квантовая плазма изучается чрезвычайно интенсивно. Среди большого числа работ отметим лишь некоторые из них [9]–[11]. Продольная диэлектрическая функция необходима, в частности, для изучения колебаний как в квантовой, так и в классической плазме.

### 1. Исследование диэлектрической функции

Возьмем формулу для продольной диэлектрической функции квантовой невырожденной столкновительной плазмы [3], [7], [8]:

$$\varepsilon_l = 1 + \frac{4\pi e^2}{k^2} \frac{(\omega + i\nu)B(\mathbf{k}, \omega + i\nu)B(\mathbf{k}, 0)}{\omega B(\mathbf{k}, 0) + i\nu B(\mathbf{k}, \omega + i\nu)}. \quad (1)$$

В формуле (1) приняты следующие обозначения:

$$B(\mathbf{k}, \omega + i\nu) = \int \frac{d\mathbf{k}'}{4\pi} \frac{f_{\mathbf{k}'+\mathbf{k}/2} - f_{\mathbf{k}'-\mathbf{k}/2}}{E_{\mathbf{k}'-\mathbf{k}/2} - E_{\mathbf{k}'+\mathbf{k}/2} + \hbar(\omega + i\nu)}, \quad (2)$$

$$B(\mathbf{k}, 0) = \int \frac{d\mathbf{k}'}{4\pi} \frac{f_{\mathbf{k}'+\mathbf{k}/2} - f_{\mathbf{k}'-\mathbf{k}/2}}{E_{\mathbf{k}'-\mathbf{k}/2} - E_{\mathbf{k}'+\mathbf{k}/2}},$$

$$f_{\mathbf{k}'\pm\mathbf{k}/2} = \left[ 1 + \exp\left(\frac{E_{\mathbf{k}'\pm\mathbf{k}/2}}{k_B T} - \alpha\right) \right]^{-1},$$

$\mathbf{k}$  – волновой вектор,  $\alpha = \mu / (k_B T)$  – приведенный (безразмерный) химический потенциал,  $k_B$  – постоянная Больцмана,  $T$  – температура плазмы,  $f_{\mathbf{k}'\pm\mathbf{k}/2}$  – функция распределения Ферми–Дирака,  $e$  – заряд электрона,  $\nu$  – эффективная частота столкновений электронов с частицами плазмы,  $\omega$  – частота колебаний электромагнитного поля.

Приведем формулу (1) к виду, удобному для исследования. Введем тепловую скорость электронов  $v_T = 1/\sqrt{\beta}$ ,  $k_T = m/(2k_B T)$ . Ясно, что  $k_B T = mv_T^2/2 = E_T$  – тепловая энергия электронов.

Введем безразмерный вектор  $\mathbf{p} = \mathbf{p}/k_T$ , где  $k_T = p_T/\hbar = m v_T/\hbar$  – тепловое волновое число,  $\mathbf{p}_T$  – тепловой импульс электронов.

Заметим, что

$$E_{\mathbf{k}'-\mathbf{k}/2} - E_{\mathbf{k}'+\mathbf{k}/2} = -2E_T P_x q,$$

где  $\mathbf{q} = \mathbf{k}/k_T$ ,  $\mathbf{q} = q(1,0,0)$ ,  $q$  – безразмерное волновое число.

Знаменатель из выражения (2) равен:

$$E_{\mathbf{k}'-\mathbf{k}/2} - E_{\mathbf{k}'+\mathbf{k}/2} + \hbar(\omega + i\nu) = -\frac{\hbar^2 k_T^2}{m} q \left( P_x - \frac{z}{q} \right) = -2E_T q \left( P_x - \frac{z}{q} \right).$$

Здесь введены безразмерные частоты

$$z = x + iy = \frac{\omega + i\nu}{k_T v_T}, \quad x = \frac{\omega}{k_T v_T}, \quad y = \frac{\nu}{k_T v_T}.$$

Теперь интеграл (2) равен:

$$B(\mathbf{k}, \omega + i\nu) = -\frac{k_T^3}{2E_T q} \int \frac{d^3 P}{4\pi^3} \frac{f_{\mathbf{P}+\mathbf{q}/2} - f_{\mathbf{P}-\mathbf{q}/2}}{P_x - z/q}. \quad (3)$$

Здесь

$$f_{\mathbf{P}\pm\mathbf{q}/2} = \left[ 1 + \exp \left( \left( \mathbf{P} \pm \frac{\mathbf{q}}{2} \right)^2 - \alpha \right) \right]^{-1}.$$

Обозначим

$$B(\mathbf{q}, z) = \int \frac{d^3 P}{4\pi^3} \frac{f_{\mathbf{P}+\mathbf{q}/2} - f_{\mathbf{P}-\mathbf{q}/2}}{P_x - z/q}. \quad (4)$$

Тогда выражение (3) переписется в виде

$$B(\mathbf{k}, \omega + i\nu) = -\frac{k_T^3}{2E_T q} B(\mathbf{q}, z),$$

причем

$$B(\mathbf{q}, 0) = \int \frac{d^3 P}{4\pi^3} \frac{f_{\mathbf{P}+\mathbf{q}/2} - f_{\mathbf{P}-\mathbf{q}/2}}{P_x}.$$

Рассмотрим интеграл (4). Представим этот интеграл в виде разности интегралов. В каждом из интегралов осуществим очевидную линейную замену переменных. В результате получаем:

$$B(\mathbf{q}, z) = \int \frac{d^3 P}{4\pi^3} \frac{f_0(P, \alpha)}{P_x - z/q - q/2} - \int \frac{d^3 P}{4\pi^3} \frac{f_0(P, \alpha)}{P_x - z/q + q/2}, \quad (5)$$

где

$$f_0(P, \alpha) = [1 + e^{P^2 - \alpha}]^{-1}.$$

Согласно (5) получаем:

$$B(\mathbf{k}, \omega + i\nu) = -\frac{k_T^3}{2E_T} b(q, z), \quad (6)$$

где

$$b(q, z) = \int \frac{d^3 P}{4\pi^3} \frac{f_0(P, \alpha)}{(P_x - z)^2 - (q/2)^2},$$

причем

$$b(q, 0) = \int \frac{d^3 P}{4\pi^3} \frac{f_0(P, \alpha)}{(P_x)^2 - (q/2)^2}.$$

Теперь выражение (1) для диэлектрической функции с помощью (6) преобразуется к виду:

$$\varepsilon_l = 1 - \frac{4\pi e^2}{q^2 k_{2T}^2} \frac{k_T^3}{2E_T} \frac{(x + iy)b(q, z)b(q, 0)}{xb(q, 0) + iyb(q, z)}. \quad (7)$$

Нетрудно найти, что числовая плотность частиц плазмы (ее концентрация) в равновесном состоянии равна:

$$N = \int f_0(P, \alpha) \frac{2m^3 d^3 v}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{2m^3 v_T^3}{8\pi^3 \hbar^3} \int f_0(P, \alpha) d^3 P = \frac{k_T^3}{\pi^2} f_2(\alpha), \quad (8)$$

где

$$f_2(\alpha) = \int_0^\infty f_0(P, \alpha) P^2 dP.$$

Вычислим внутренний двойной интеграл в выражении для  $b(q, z)$ , тогда:

$$b(q, z) = \frac{1}{4\pi^2} l(q, z), \quad (9)$$

где

$$l(q, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(1 + e^{\alpha - \mu^2}) d\mu}{(\mu - z/q)^2 - (q/2)^2},$$

или

$$l(q, z) = \frac{1}{q} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \frac{1 + e^{\alpha - (\mu + q/2)^2}}{1 + e^{\alpha - (\mu - q/2)^2}} \frac{d\mu}{\mu - z/q}.$$

Продольная диэлектрическая функция (7) согласно (8) и (9) записывается в виде:

$$\varepsilon_l = 1 - \frac{x_p^2}{4q^2 f_2(\alpha)} \frac{(x + iy)l(q, z)l(q, 0)}{xl(q, 0) + iyl(q, z)}. \quad (10)$$

В (10)  $x_p$  – безразмерная плазменная (ленгмюровская) частота,  $x_p = \omega_p / k_T v_T$ ,  $\omega_p$  – плазменная (ленгмюровская) частота,  $\omega_p = 4\pi e^2 N / m$ .

Для сравнения приведем выражение для электрической проводимости классической невырожденной плазмы:

$$\frac{\sigma_l}{\sigma_0} = -i \frac{xy f_0(\alpha)}{q^2 f_2(\alpha)} \frac{1 + (z/q)b(z/q)}{1 + (iy/q)b(z/q)}. \quad (11)$$

Здесь

$$b(z/q) = \frac{1}{2f_0(\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_0(\mu, \alpha) d\mu}{\mu - z/q}, \quad \sigma_0 = \frac{e^2 N}{m\nu}.$$

На основании (11) получаем выражение для продольной диэлектрической функции классической невырожденной плазмы с произвольной степенью вырождения электронного газа:

$$\varepsilon_l = 1 + \frac{x_p^2}{q^2} \frac{f_0(\alpha)}{f_2(\alpha)} \frac{1 + (z/q)b(z/q)}{1 + (iy/q)b(z/q)}. \quad (12)$$

Подробный вывод формул (11) и (12) см., например, в [8].

Отметим, что при  $\alpha \rightarrow -\infty$  невырожденная плазма переходит в максвелловскую.

Переходя к пределу при  $\alpha \rightarrow -\infty$  в формуле (10), получим выражение для продольной диэлектрической функции квантовой максвелловской столкновительной плазмы:

$$\varepsilon_l(q, x, y) = 1 - \frac{x_p^2}{q^2} \frac{(x + iy)l_0(q, z)l_0(q, 0)}{xl_0(q, 0) + iyl_0(q, z)}, \quad (13)$$

где

$$l_0(q, z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\mu^2} d\mu}{(\mu - z/q)^2 - (q/2)^2}.$$

Отметим, что формулу (13) можно получить из формулы (1), если вместо абсолютного распределения Ферми–Дирака

$$f_k = [1 + \exp(E_k / E_T - \alpha)]^{-1}$$

взять абсолютное распределение Максвелла–Больцмана

$$f_k = 4\pi^{3/2} k_T^{-3} N \exp(-E_k / E_T).$$

Переходя к пределу при  $\alpha \rightarrow -\infty$  в формуле (12), получим выражение для продольной диэлектрической функции классической максвелловской столкновительной плазмы:

$$\varepsilon_l = 1 + \frac{2x_p^2}{q^2} \cdot \frac{1 + (z/q)t(z/q)}{1 + (iy/q)t(z/q)},$$

где

$$t(z/q) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\mu^2} d\mu}{\mu - z/q}.$$

## 2. Свойства диэлектрической функции

Проведем графическое исследование действительной и мнимой частей диэлектрической функции максвелловской квантовой плазмы.

На рисунках 1–8 проведем сравнение действительной и мнимой частей диэлектрической функции максвелловской квантовой и классической плазмы.

Кривые 1 и 2 на рисунках 1–8 отвечают максвелловской соответственно квантовой и классической плазме. Безразмерная частота колебаний электромагнитного поля взята равной плазменной частоте  $\omega = \omega_p$ , т.е.  $x = x_p = 1$ , безразмерная частота столкновений частиц плазмы  $y = 0.01$ , т.е.  $\nu = 0.01\omega_p$ .

На рис. 1–4 представлены соответственно действительная и мнимая части диэлектрической функции как функции волнового числа. Из рисунков 1 и 2 видно, что при  $q \rightarrow 0$  значения как действительной, так и мнимой частей диэлектрической функции и квантовой, и классической плазмы совпадают. Более того, эти рисунки показывают, что уже при  $q \leq 0.5$  значения действительной и мнимой частей диэлектрической функции квантовой плазмы практически неразличимы со значениями действительной и мнимой частей диэлектрической функции классической плазмы.

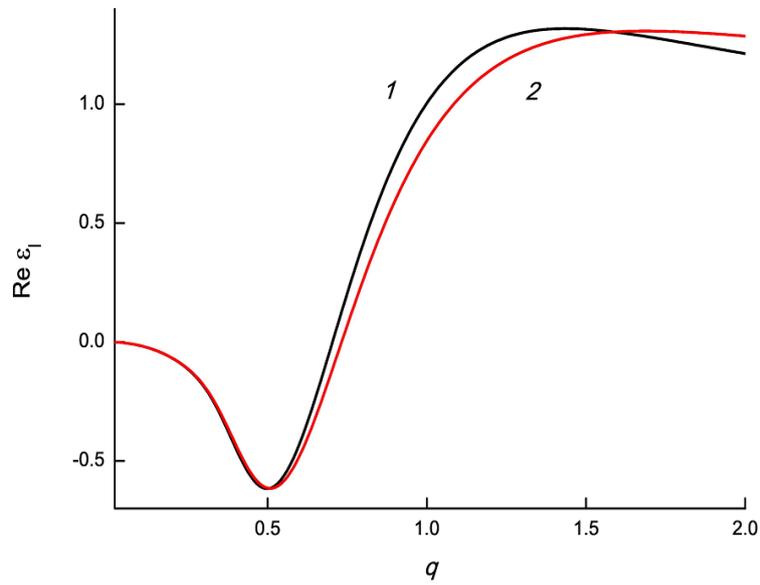


Рис. 1. Действительная часть диэлектрической функции максвелловской плазмы,  $x = x_p = 1$ ,  $y = 0.01$ .

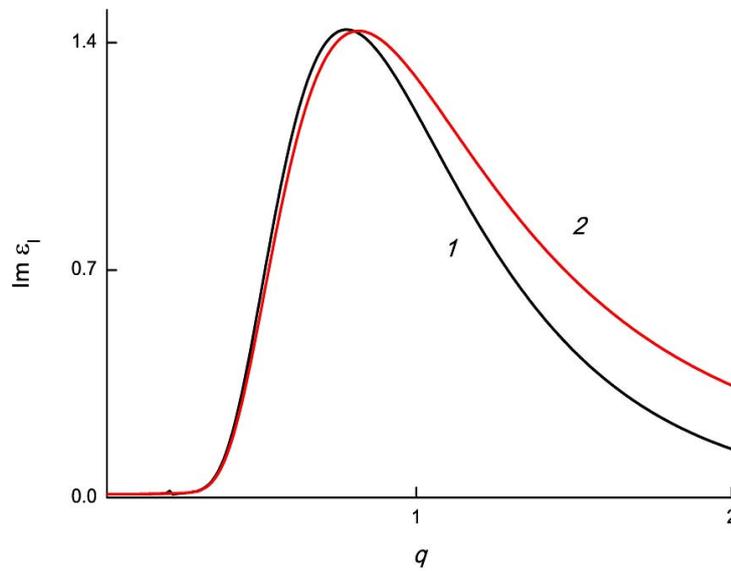


Рис. 2. Мнимая часть диэлектрической функции максвелловской плазмы,  $x = x_p = 1$ ,  $y = 0.01$ .

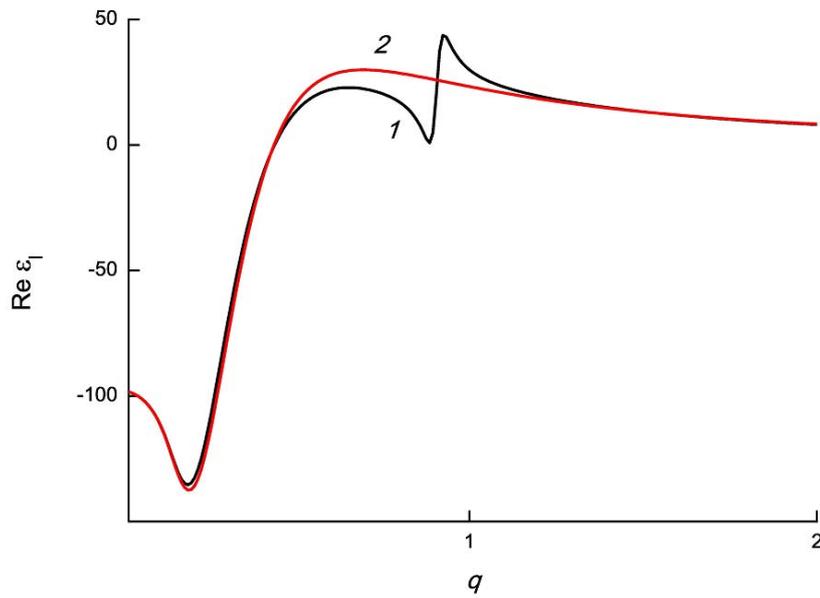


Рис. 3. Действительная часть диэлектрической функции максвелловской плазмы,  $x = 0.1$ ,  $x_p = 1$ ,  $y = 0.01$ .

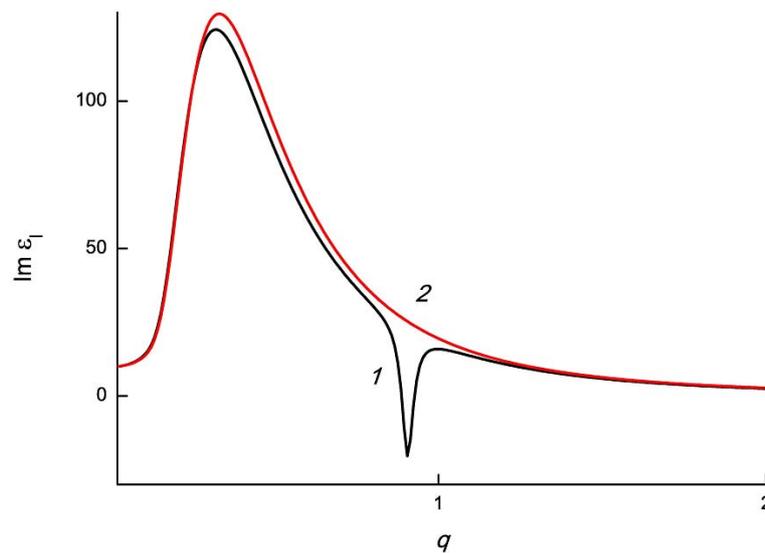


Рис. 4. Мнимая часть диэлектрической функции максвелловской плазмы,  $x = 0.1$ ,  $x_p = 1$ ,  $y = 0.01$ .

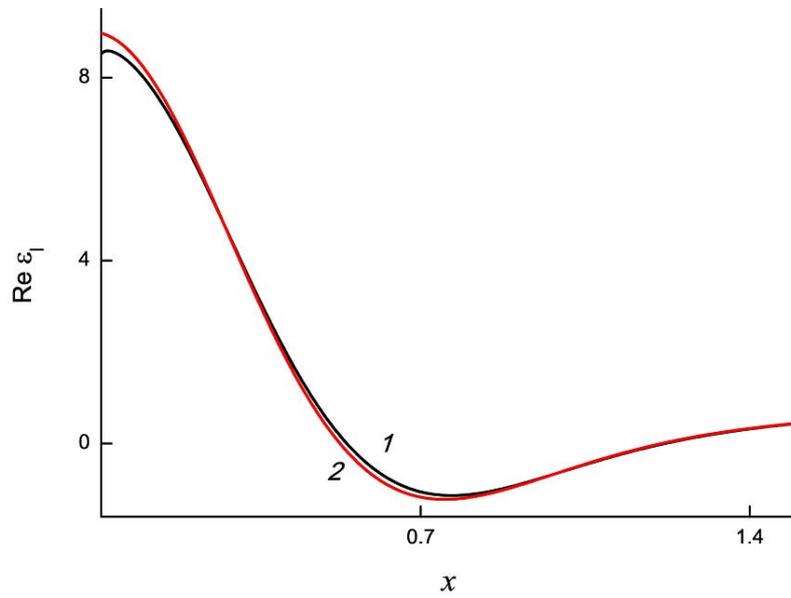


Рис. 5. Действительная часть диэлектрической функции максвелловской плазмы,  $q = 0.5$ ,  $x_p = 1$ ,  $y = 0.01$ .

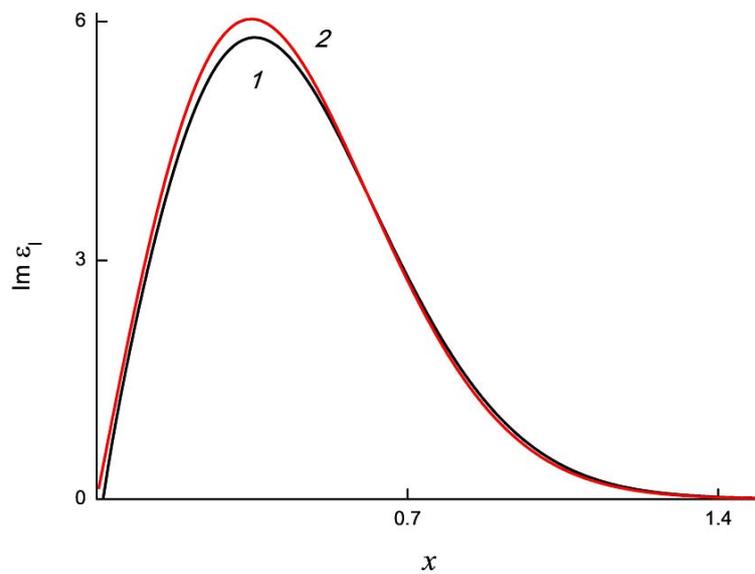


Рис. 6. Мнимая часть диэлектрической функции максвелловской плазмы,  $q = 0.5$ ,  $x_p = 1$ ,  $y = 0.01$ .

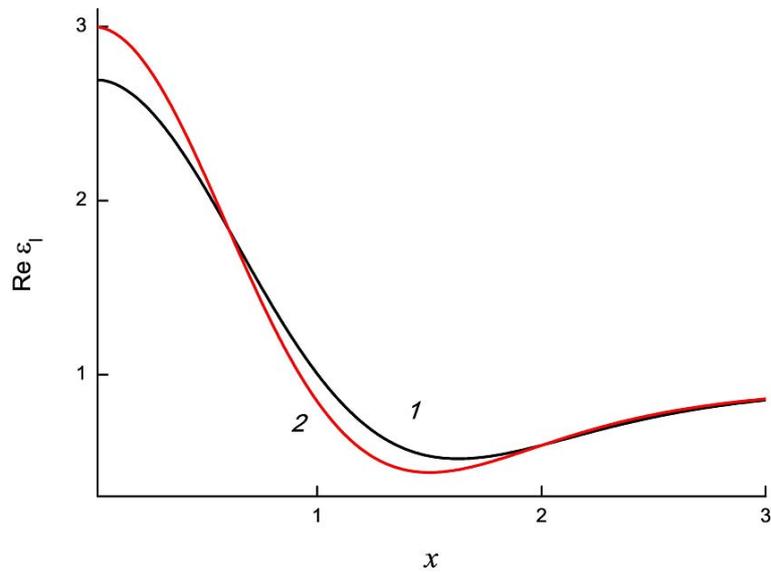


Рис. 7. Действительная часть диэлектрической функции максвелловской плазмы,  $q=1$ ,  $x_p=1$ ,  $y=0.01$ .

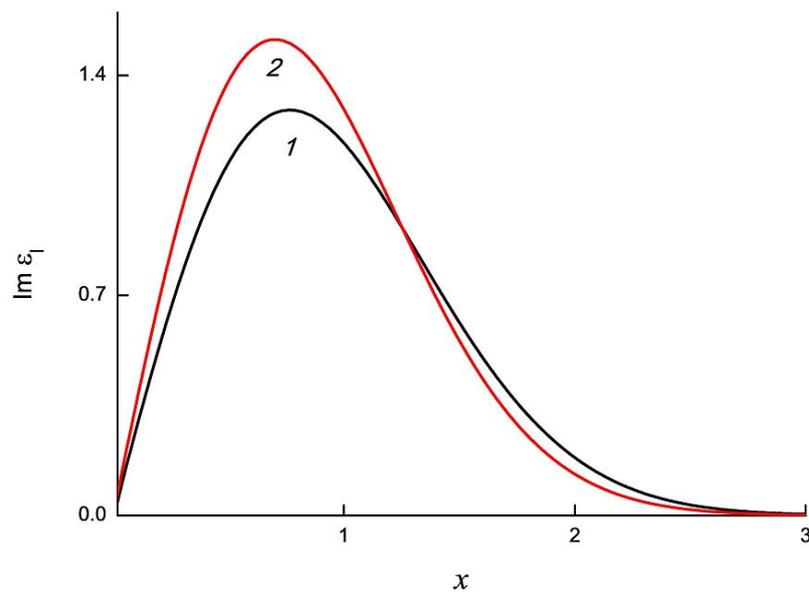


Рис. 8. Мнимая часть диэлектрической функции максвелловской плазмы,  $q=1$ ,  $x_p=1$ ,  $y=0.01$ .

Из рисунков 1 и 2 видно, что действительная часть диэлектрической функции имеет сначала минимум, а затем – максимум. Мнимая часть имеет только один максимум. Кроме того, имеют место предельные соотношения

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \varepsilon_l(q) = 1, \quad \lim_{q \rightarrow \infty} \operatorname{Im} \varepsilon_l(q) = 0,$$

т.е. действительная часть диэлектрической функции и квантовой и классической плазмы с ростом  $q$  стремится к единице, а мнимая часть стремится к нулю. При этом при больших  $q$  для действительных и мнимых частей выполняются неравенства

$$\operatorname{Re} \varepsilon_l^Q(q) < \operatorname{Re} \varepsilon_l^C(q), \quad \operatorname{Im} \varepsilon_l^Q(q) < \operatorname{Im} \varepsilon_l^C(q).$$

Здесь введены обозначения:  $\varepsilon_l^Q(q)$  для диэлектрической функции квантовой плазмы, а  $\varepsilon_l^C(q)$  – для диэлектрической функции классической плазмы.

Перейдем к анализу графиков на рис. 3 и 4, где представлено поведение действительной и мнимой частей диэлектрической функции при  $x = 1$ , т.е. когда частота колебаний электрического поля равна:  $\omega = 0.1\omega_p$ . Поведение действительной и мнимой частей диэлектрической функции классической плазмы остается при этом прежним. Но поведение действительной и мнимой частей диэлектрической функции квантовой плазмы обнаруживает аномальное поведение. Так, теперь действительная часть диэлектрической функции имеет два минимума и два максимума. Мнимая часть теперь имеет два максимума и один минимум.

На рис. 4–8 проведем графическое исследование действительной и мнимой частей диэлектрической функции как функции безразмерной частоты колебаний электрического поля. В этом случае действительная часть диэлектрической функции имеет один минимум, а мнимая часть – один максимум. Заметим, что при возрастании волнового числа различие значений и действительной, и мнимой частей для квантовой и классической плазмы начинает возрастать.

На рис. 9 и 10 проводится изучение действительной (рис. 9) и мнимой (рис. 10) частей диэлектрической функции квантовой плазмы как функции безразмерной частоты колебаний электрического поля.

Из этих рисунков видно, что с ростом величины волнового числа диапазон значений и действительной части, и мнимой части диэлектрической функции начинает уменьшаться. При этом значения максимума и минимума действительной части начинают сближаться и уже при  $q = 1$  действительная часть диэлектрической функции преобразуется в монотонно убывающую функцию. Максимум мнимой части действительной функции начинает сдвигаться вправо, значения максимума начинают уменьшаться и максимум нивелируется.

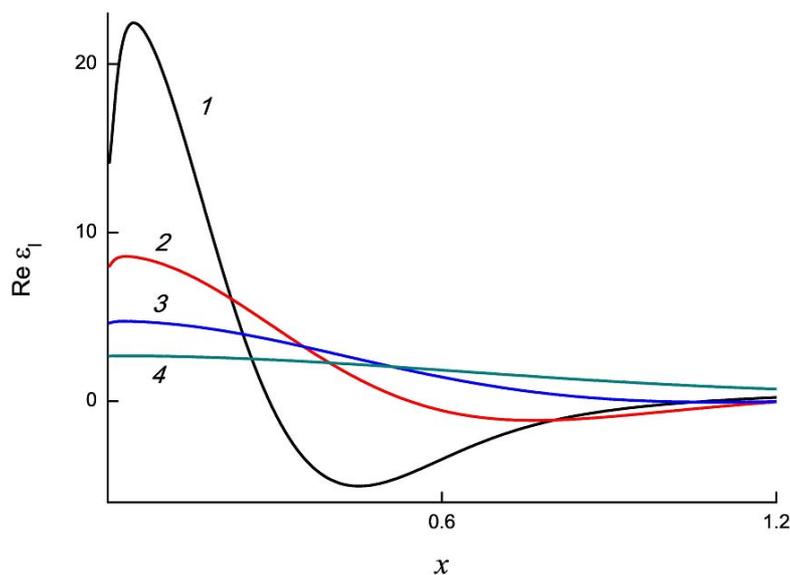


Рис. 9. Действительная часть диэлектрической функции максвелловской плазмы,  $x_p = 1$ ,  $y = 0.01$ . Кривые 1, 2, 3, 4 отвечают соответственно значениям безразмерного волнового числа  $q = 0.3, 0.5, 0.7, 1.0$ .

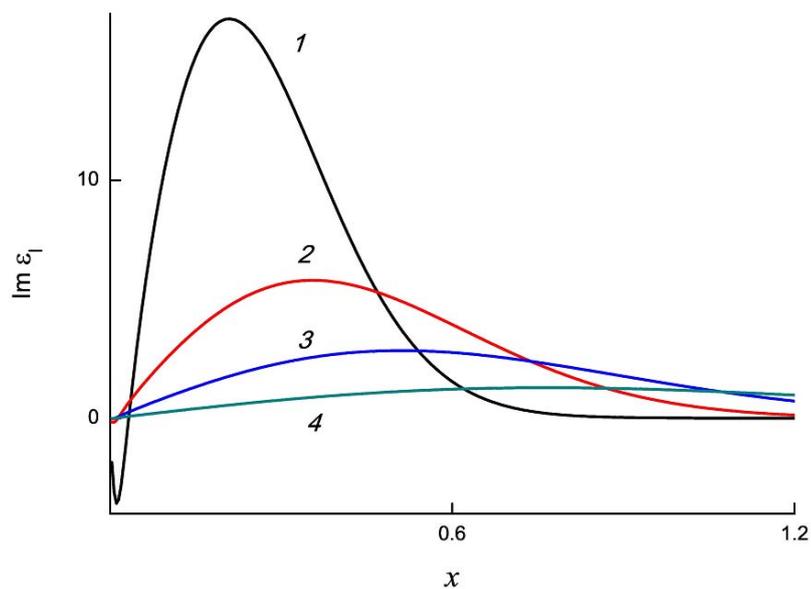


Рис. 10. Мнимая часть диэлектрической функции максвелловской плазмы,  $x_p = 1$ ,  $y = 0.01$ . Кривые 1, 2, 3, 4 отвечают соответственно значениям безразмерного волнового числа  $q = 0.3, 0.5, 0.7, 1.0$ .

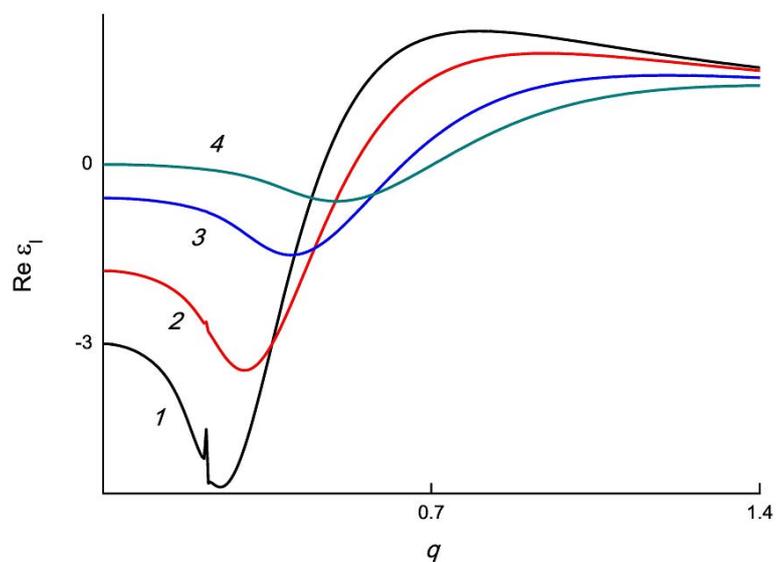


Рис. 11. Действительная часть диэлектрической функции максвелловской плазмы,  $x_p = 1$ ,  $y = 0.01$ . Кривые 1, 2, 3, 4 отвечают соответственно значениям безразмерного волнового числа  $x = 0.5, 0.6, 0.8, 1.0$ .

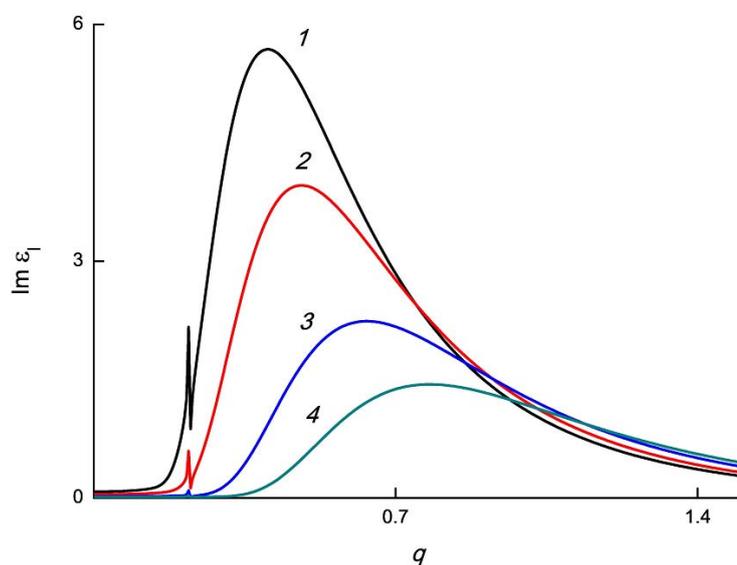


Рис. 12. Мнимая часть диэлектрической функции максвелловской плазмы,  $x_p = 1$ ,  $y = 0.01$ . Кривые 1, 2, 3, 4 отвечают соответственно значениям безразмерного волнового числа  $x = 0.5, 0.6, 0.8, 1.0$ .

### Заключение

В настоящей работе приводится вывод формул для вычисления продольной диэлектрической функции столкновительной плазмы с произвольной степенью вырождения электронного газа. Как частный случай выписывается диэлектрическая функция максвелловской плазмы. Дается графическое сравнение действительной и мнимой частей диэлектрической функции квантовой и классической плазмы.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Климонтович Ю., Силин В.П. О спектрах систем взаимодействующих частиц // Ж. эксп. и теор. физ. 1952. Т. 23. С. 151–286.
2. Lindhard J. On the properties of a gas of charged particles // Danske Vid. Selsk. Mat.-Fys. Medd. 1954. V. 28, №8. P. 1–57.
3. Mermin N.D. Lindhard Dielectric Functions in the Relaxation-Time Approximation // Phys. Rev. B. 1970. V. 1, №5. P. 2362–2363.
4. Латышев А.В., Юшканов А.А. Продольная проницаемость квантовой вырожденной столкновительной плазмы // Теор. и матем. Физика. 2011. Т. 169, №3. С. 431–443.
5. Латышев А.В., Юшканов А.А. Поперечная электрическая проводимость в квантовой столкновительной плазме // Физика плазмы. 2012. Т. 38, №11. С. 977–986.
6. Латышев А.В., Юшканов А.А. Поперечная электрическая проводимость в квантовой столкновительной плазме в подходе Мермина // Теор. и матем. физика. 2013. Т. 175, №1. С. 134–144.
7. Latyshev A.V., Yushkanov A.A. Longitudinal electric conductivity and electric permeability in quantum plasma with variable frequency of collisions in Mermin approach // arXiv: 1212.5659v1 [physics.plasma-ph] 22 Dec 2012, 26 p.
8. Latyshev A.V., Yushkanov A.A. Longitudinal electric conductivity and electric permeability in quantum plasma with constant collision frequency in Mermin approach // arXiv: 1212.6260v1 [physics.plasma-ph] 26 Dec 2012, 27 p.
9. Dressel M. Electrodynamics of Solids. Optical Properties of Electrons in Matter / Dressel M., Grüner G. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003.
10. Shukla P.K., Eliasson B. Nonlinear aspects of quantum plasma physics // Uspekhy Fiz. Nauk, 53(1) 2010; [V. 180. №1, 55–82 (2010) (in Russian)].
11. Wierling A. Interpolation between local field corrections and Drude model by a generalized Mermin approach // arXiv: 0812.3835v1 [physics.plasma-ph] 19 Dec 2008.

### LONGITUDINAL DIELECTRIC PERMEABILITY OF THE QUANTUM MAXWELL COLLISIONAL PLASMA

Y. Alabina<sup>1</sup>, A. Bugrimov<sup>1</sup>, A. Latyshev<sup>1,2</sup>, A. Yushkanov<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Moscow State Regional University  
10a, Radio st., Moscow, 105005, Russia

<sup>2</sup>*Sholokhov Moscow State University for the Humanities  
18, Tashkentskaya st., Moscow, 109444, Russia*

*Abstract.* Research dielectric function for collisional plasmas with any degree of degeneracy of electronic gas is carried out. By special limiting transition the dielectric function of Maxwell plasmas is received. Research and comparison of longitudinal dielectric functions of quantum and classical Maxwell collisional plasmas is resulted.

*Keywords:* quantum plasma, Maxwell plasma, Fermi–Dirac distribution, electric conductivity.

УДК 533.72

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НЕСТАЦИОНАРНОГО ДИФФУЗИОФЕРЕЗА

**В.Е. Ефремов**

*Московский государственный областной университет  
105005, Москва, ул. Радио, 10а*

*Аннотация.* Автор продолжает построение теории нестационарного диффузиофореа крупной твердой нелетучей частицы сферической формы в вязкой газовой среде. Приводится решение диффузионной задачи, которая разбита на стационарную и строго нестационарную части. В результате решения стационарной части этой задачи получена окончательная формула для определения стационарной составляющей диффузиофоретической скорости рассматриваемой частицы. Для определения нестационарной составляющей диффузиофоретической скорости этой частицы найдена соответствующая формула в пространстве лапласовых изображений.

*Ключевые слова:* нестационарный диффузиофореа, крупная сферическая частица, диффузионная задача.

В работе [1] была решена гидродинамическая задача в теории нестационарного диффузиофореа крупной твердой нелетучей частицы сферической формы радиуса  $R$ , взвешенной в неоднородной по концентрации бинарной газовой смеси. В данной работе приведем решение диффузионной задачи.

Дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет распределение концентрации первого компонента бинарной газовой смеси, имеет вид:

$$\frac{\partial C_1}{\partial t} = D_{12} \Delta_{r\theta} C_1 + \frac{\partial [\nabla C_1(t)]_{\infty}}{\partial t} r \cos \theta. \quad (1)$$

При этом справедливы равенства:

$$\begin{aligned}
 C_1(r, \theta, t) &= C_1^{(1)}(r, \theta) + C_1^{(2)}(r, \theta, t), & (2) \\
 C_1^{(1)}(r, \theta) &= C_1(r, \theta, t)|_{t=0}, \\
 C_1^{(2)}(r, \theta, t)|_{t=0} &= 0, \\
 [\nabla C_1(t)]_\infty &= (\nabla C_1^{(1)})_\infty + [\nabla C_1^{(2)}(t)]_\infty, \\
 (\nabla C_1^{(1)})_\infty &= \{[\nabla C_1(t)]_\infty\}_{t=0}, \\
 \{[\nabla C_1^{(2)}(t)]_\infty\}_{t=0} &= 0.
 \end{aligned}$$

Если функции  $C_1^{(1)}(r, \theta)$ ,  $C_1^{(2)}(r, \theta, t)$  являются решениями дифференциальных уравнений:

$$\Delta_{r\theta} C_1^{(1)} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial C_1^{(2)}}{\partial t} = D_{12} \Delta_{r\theta} C_1^{(2)} + \frac{\partial [\nabla C_1^{(2)}(t)]_\infty}{\partial t} r \cos \theta \quad (4)$$

соответственно, то их сумма (2) будет решением дифференциального уравнения (1).

Общее решение уравнения (3) имеет вид [2]

$$C_1^{(1)}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos \theta),$$

где  $P_n(\cos \theta)$  – полином Лежандра порядка  $n$ ;  $A_n$ ,  $B_n$  – произвольные постоянные, которые определяются условиями задачи.

При  $r \rightarrow \infty$  справедливо граничное условие

$$C_1 = C_{01} + \left( |(\nabla C_1^{(1)})_\infty| + |[\nabla C_1^{(2)}(t)]_\infty| \right) \cdot r \cos \theta. \quad (5)$$

Из граничного условия (5) при  $t = 0$  получаем

$$C_1^{(1)} = C_{01} + |(\nabla C_1^{(1)})_\infty| r \cos \theta. \quad (6)$$

С учетом условия (6) для концентрации  $C_1^{(1)}(r, \theta)$  находим:

$$C_1^{(1)} = C_{01} + |(\nabla C_1^{(1)})_\infty| r \cos \theta + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta). \quad (7)$$

Для определения величин  $B_0, B_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) в разложении (7) обратимся к граничному условию:

$$\left. \frac{\partial C_1}{\partial r} \right|_{r=R} = 0, \quad (8)$$

из которого при  $t = 0$  получаем:

$$\left. \frac{\partial C_1^{(1)}}{\partial r} \right|_{r=R} = 0. \quad (9)$$

Учет граничного условия (9) с использованием свойства ортогональности полиномов Лежандра [3], то есть равенства

$$\frac{2n+1}{2} \int_0^\pi P_n(\cos\theta) P_m(\cos\theta) \sin\theta \, d\theta = \delta_{nm} \quad (n, m = 0, 1, 2, \dots), \quad (10)$$

где  $\delta_{nm}$  – символ Кронекера, приводит к бесконечному числу линейных уравнений. Эти уравнения, кроме одного, имеющего вид

$$\frac{2B_1}{R^3} = \left| (\nabla C_1^{(1)})_\infty \right|, \quad (11)$$

дают нулевые решения

$$B_0 = B_n = 0 \quad (n \geq 2). \quad (12)$$

Из уравнения (11) находим

$$B_1 = \frac{R^3}{2} \left| (\nabla C_1^{(1)})_\infty \right|. \quad (13)$$

Подставив найденные значения коэффициентов (12), (13) в разложение (7), получим

$$C_1^{(1)} = C_{01} + \left[ 1 + \frac{R^3}{2r^3} \right] \left| (\nabla C_1^{(1)})_\infty \right| r \cos\theta.$$

Из последнего соотношения находим

$$\left. \frac{\partial C_1^{(1)}}{\partial \theta} \right|_{r=R} = -\frac{3R \sin\theta}{2} \left| (\nabla C_1^{(1)})_\infty \right|. \quad (14)$$

Используя выражение (14), соотношение [1]

$$|\bar{u}_1| = -\frac{2K_{sl}D_{12}}{3R\sin\theta} \frac{\partial C_1^{(1)}}{\partial\theta} \Big|_{r=R}$$

приведем к виду:

$$|\bar{u}_1| = K_{sl}D_{12} \left| \left( \nabla C_1^{(1)} \right)_\infty \right|. \quad (15)$$

Напоминаем, что в последней формуле  $\bar{u}_1$  – скорость центра инерции внешней среды относительно покоящейся частицы при  $t = 0$ .

Стационарная составляющая диффузиофоретической скорости частицы относительно центра инерции внешней среды  $\bar{u}_{1D}$  равна  $-\bar{u}_1$  [1]. Поэтому из формулы (15) получаем

$$\bar{u}_{1D} = -K_{sl}D_{12} \left( \nabla C_1^{(1)} \right)_\infty.$$

Полученная формула совпадает с известной формулой для скорости стационарного диффузиофореза твердой сферической частицы [3].

Рассмотрим уравнение (4). В дальнейшем для краткости будем использовать обозначение

$$\left| \left[ \nabla C_1^{(2)}(t) \right]_\infty \right| = g_\infty(t).$$

Представим уравнение (4) в виде

$$\frac{\partial C_1^{(2)}}{\partial t} = D_{12} \left\{ \frac{\partial^2 C_1^{(2)}}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial C_1^{(2)}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \mu} \left[ (1-\mu^2) \frac{\partial C_1^{(2)}}{\partial \mu} \right] \right\} + \frac{\partial g_\infty(t)}{\partial t} r\mu, \quad (16)$$

где  $\mu = \cos\theta$ .

Применим к уравнению (16) конечное интегральное преобразование Лежандра по переменной  $\mu$  [4]:

$$\tilde{C}_1^{(2)} = \int_{-1}^1 \bar{K}_n(\mu) \cdot C_1^{(2)} d\mu. \quad (17)$$

Ядро преобразования имеет вид:

$$\bar{K}_n(\mu) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \cdot P_n(\mu),$$

где  $P_n(\mu)$  – полином Лежандра порядка  $n$ . Получаем следующее изображающее уравнение:

$$\frac{\partial \tilde{C}_1^{(2)}}{\partial t} = D_{12} \left[ \frac{\partial^2 \tilde{C}_1^{(2)}}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \tilde{C}_1^{(2)}}{\partial r} - \frac{1}{r^2} n(n+1) \cdot \tilde{C}_1^{(2)} \right] + \frac{\partial g_\infty(t)}{\partial t} rk, \quad (18)$$

где  $k = \int_{-1}^1 \mu \cdot K_n(\mu) d\mu$ .

Теперь применим к дифференциальному уравнению (18) интегральное преобразование Лапласа [5]

$$F(p) = L\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt.$$

Дифференциальное уравнение в пространстве лапласовых изображений имеет вид:

$$\frac{d^2 \bar{C}_1^{(2)}}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d \bar{C}_1^{(2)}}{dr} - \left[ \frac{p}{D_{12}} + \frac{n(n+1)}{r^2} \right] \bar{C}_1^{(2)} = -\frac{r}{D_{12}} kp G_\infty(p), \quad (19)$$

где  $\bar{C}_1^{(2)} = L\{\tilde{C}_1^{(2)}\}$ ,  $G_\infty(p) = L\{g_\infty(t)\}$ .

Рассмотрим линейное однородное уравнение:

$$\frac{d^2 \bar{C}_1^{(2)}}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d \bar{C}_1^{(2)}}{dr} - \left[ \frac{p}{D_{12}} + \frac{n(n+1)}{r^2} \right] \bar{C}_1^{(2)} = 0.$$

Общее решение этого уравнения выражается через модифицированные функции Бесселя первого и второго рода

$$I_{n+1/2}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} \left[ e^z \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k (n+k)!}{k!(n-k)!(2z)^k} - (-1)^n e^{-z} \sum_{k=0}^n \frac{(n+k)!}{k!(n-k)!(2z)^k} \right],$$

$$K_{n+1/2}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \sum_{k=0}^n \frac{(n+k)!}{k!(n-k)!(2z)^k}$$

следующим образом

$$\bar{C}_1^{(2)} = \frac{A_n}{\sqrt{r}} I_{n+1/2}(r\sqrt{p/D_{12}}) + \frac{B_n}{\sqrt{r}} K_{n+1/2}(r\sqrt{p/D_{12}}), \quad (20)$$

где  $A_n, B_n$  – произвольные постоянные.

В соответствии с методом вариации постоянных, будем считать постоянные  $A_n, B_n$  функциями от  $r$  и составим систему уравнений

$$\frac{A'_n}{\sqrt{r}} I_{n+1/2} + \frac{B'_n}{\sqrt{r}} K_{n+1/2} = 0,$$

$$A'_n \left( -\frac{1}{2r\sqrt{r}} I_{n+1/2} + \frac{1}{\sqrt{r}} \sqrt{\frac{p}{D_{12}}} \cdot I'_{n+1/2} \right) + B'_n \left( -\frac{1}{2r\sqrt{r}} K_{n+1/2} + \frac{1}{\sqrt{r}} \sqrt{\frac{p}{D_{12}}} \cdot K'_{n+1/2} \right) = -\frac{r}{D_{12}} kp G_\infty(p),$$

из которой находим:

$$A_n = k \sqrt{\frac{p}{D_{12}}} \cdot G_\infty(p) \int \frac{K_{n+1/2}}{I_{n+1/2} K'_{n+1/2} - I'_{n+1/2} K_{n+1/2}} r \sqrt{r} dr + \bar{A}_n, \quad (21)$$

$$B_n = k \sqrt{\frac{p}{D_{12}}} \cdot G_\infty(p) \int \frac{I_{n+1/2}}{I'_{n+1/2} K_{n+1/2} - I_{n+1/2} K'_{n+1/2}} r \sqrt{r} dr + \bar{B}_n. \quad (22)$$

Подставив выражения (21), (22) в формулу (20), получаем решение дифференциального уравнения (19):

$$\begin{aligned} \bar{C}_1^{(2)} = & \frac{I_{n+1/2}}{\sqrt{r}} k \sqrt{\frac{p}{D_{12}}} \cdot G_\infty(p) \int \frac{K_{n+1/2}}{I_{n+1/2} K'_{n+1/2} - I'_{n+1/2} K_{n+1/2}} r \sqrt{r} dr + \\ & + \frac{K_{n+1/2}}{\sqrt{r}} k \sqrt{\frac{p}{D_{12}}} \cdot G_\infty(p) \int \frac{I_{n+1/2}}{I'_{n+1/2} K_{n+1/2} - I_{n+1/2} K'_{n+1/2}} r \sqrt{r} dr + \frac{\bar{A}_n}{\sqrt{r}} I_{n+1/2} + \frac{\bar{B}_n}{\sqrt{r}} K_{n+1/2}, \end{aligned} \quad (23)$$

где  $\bar{A}_n, \bar{B}_n$  – произвольные постоянные, которые определяются условиями задачи. Заметим, что во избежание громоздкости формул, аргументы модифицированных функций Бесселя и их производных, имеющие вид  $r \sqrt{p/D_{12}}$ , мы опускаем.

Формула обращения для интегрального преобразования (17) имеет вид:

$$C_1^{(2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{K}_n(\mu) \cdot \bar{C}_1^{(2)} \quad (24)$$

Применим к формуле (24) интегральное преобразование Лапласа. Принимая во внимание свойство линейности этого преобразования, получаем:

$$S_1^{(2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{K}_n(\mu) \cdot \bar{C}_1^{(2)}, \quad (25)$$

где  $S_1^{(2)} = L\{C_1^{(2)}\}$ . Используя равенство [2]:

$$\int_{-1}^1 P_m(\mu)P_n(\mu)d\mu = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \frac{2}{2n+1}, & m = n, \end{cases}$$

устанавливаем, что

$$k = \begin{cases} 0, & n \neq 1, \\ \sqrt{\frac{2}{3}}, & n = 1. \end{cases} \quad (26)$$

Принимая во внимание (23), (26), запишем формулу (25) в виде

$$S_1^{(2)} = \frac{I_{3/2}}{\sqrt{r}} \sqrt{\frac{p}{D_{12}}} \cdot G_\infty(p) \mu \int \frac{K_{3/2}}{I_{3/2}K'_{3/2} - I'_{3/2}K_{3/2}} r\sqrt{r}dr + \\ + \frac{K_{3/2}}{\sqrt{r}} \sqrt{\frac{p}{D_{12}}} \cdot G_\infty(p) \mu \int \frac{I_{3/2}}{I'_{3/2}K_{3/2} - I_{3/2}K'_{3/2}} r\sqrt{r}dr + \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\bar{A}_n}{\sqrt{r}} I_{n+1/2} + \frac{\bar{B}_n}{\sqrt{r}} K_{n+1/2} \right) \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(\mu).$$

После довольно громоздких вычислений последнюю формулу можем окончательно записать так:

$$S_1^{(2)} = G_\infty(p)r \cos \theta + \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\bar{A}_n}{\sqrt{r}} I_{n+1/2} + \frac{\bar{B}_n}{\sqrt{r}} K_{n+1/2} \right) \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(\cos \theta). \quad (27)$$

Перейдем к определению постоянных  $\bar{A}_n, \bar{B}_n$ . Из соотношений (2), (5), (6) следует равенство

$$C_1^{(2)} = [\nabla C_1^{(2)}(t)]_\infty | r \cos \theta.$$

В пространстве изображений имеем при  $r \rightarrow \infty$  соответствующее ему равенство

$$S_1^{(2)} = G_\infty(p)r \cos \theta. \quad (28)$$

С учетом условия (28) из разложения (27) получаем выражение:

$$S_1^{(2)} = G_\infty(p)r \cos \theta + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{B}_n}{\sqrt{r}} K_{n+1/2} \left( r\sqrt{p/D_{12}} \right) \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(\cos \theta). \quad (29)$$

Для определения величин  $B_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) используем изображение надлежащего граничного условия. Из граничного условия (8) получаем равенство:

$$\frac{\partial C_1^{(2)}}{\partial r} \Big|_{r=R} = 0.$$

В пространстве изображений ему соответствует следующее равенство:

$$\frac{\partial S_1^{(2)}}{\partial r} \Big|_{r=R} = 0. \quad (30)$$

Учет условия (30) для выражения (29) с использованием свойства ортогональности полиномов Лежандра (10) приводит к бесконечному числу линейных уравнений. Эти уравнения, кроме одного, имеющего вид

$$\frac{\bar{B}_1}{R\sqrt{R}} \left[ K_{3/2} - 2R\sqrt{p/D_{12}} K'_{3/2} \right] \sqrt{3/2} = 2G_\infty(p), \quad (31)$$

дают нулевые решения

$$\bar{B}_0 = \bar{B}_n = 0 \quad (n \geq 2). \quad (32)$$

Во избежание громоздкости формул, аргументы модифицированной функции Бесселя  $K_{3/2}$  и ее производной, имеющие вид  $R\sqrt{p/D_{12}}$ , мы опускаем.

Из уравнения (31) находим

$$\bar{B}_1 = \sqrt{2/3} \frac{2R\sqrt{R}G_\infty(p)}{K_{3/2} - 2R\sqrt{p/D_{12}} K'_{3/2}}. \quad (33)$$

Таким образом, учитывая (32), (33), из разложения (29) находим

$$S_1^{(2)} = G_\infty(p)r \cos \theta + \frac{\bar{B}_1}{\sqrt{r}} K_{3/2} \left( r\sqrt{p/D_{12}} \right) \sqrt{3/2} \cos \theta.$$

Из последнего соотношения находим

$$\frac{\partial S_1^{(2)}}{\partial \theta} \Big|_{r=R} = -R \sin \theta \cdot F_S(p) \cdot G_\infty(p), \quad (34)$$

где

$$F_S(p) = 1 + \frac{2K_{3/2}}{K_{3/2} - 2R\sqrt{p/D_{12}} K'_{3/2}}.$$

Используя выражение (34), формулу [1]

$$U_2 = -\frac{K_{sl} D_{12}}{R \sin \theta} F_U(p) \frac{\partial S_1^{(2)}}{\partial \theta} \Big|_{r=R},$$

где  $U_2 = L\{\bar{u}_2\}$ ,

$$F_U(p) = \frac{6\rho_e(v + R\sqrt{v \cdot p})}{2R^2(\rho_e - \rho_i)p + 9\rho_e(v + R\sqrt{v \cdot p})}$$

( $\rho_i$  – плотность вещества сферической частицы,  $v$  – кинематический коэффициент вязкости,  $\rho_e$  – плотность среды), приведем к виду

$$U_2 = K_{sl}D_{12}F_U(p) \cdot F_S(p) \cdot G_\infty(p).$$

Таким образом, в пространстве изображений получена формула для определения нестационарной составляющей диффузиофоретической скорости рассматриваемой частицы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Решение гидродинамической задачи в теории нестационарного диффузиофореза крупной твердой нелетучей сферической частицы / В.Е. Ефремов, М.К. Кузьмин // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2012. №2. С.15-29.
2. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Издательство МГУ, Наука, 2004. – 798 с.
3. Яламов Ю.И., Галоян В.С. Динамика капель в неоднородных вязких средах. – Ереван: Луйс, 1985. – 208 с.
4. Беляев Н.М., Рядно А.А. Методы нестационарной теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1978. – 328 с.
5. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. – М.: Наука, 1971. – 288 с.

#### PROBLEMS SOLUTION IN NONSTATIONARY DIFFUSIOPHORESIS

V. Efremov

*Moscow State Regional University  
10a, Radio st., Moscow, 105005, Russia*

*Abstract.* Author continues construction of the theory of nonstationary diffusiophoresis of large non-volatile solid spherical particle in a viscous gas medium. The solution of diffusion problem is carried out. This problem is divided into stationary and strictly nonstationary parts. Final formula for determining stationary diffusiophoresis velocity component of the particle was obtained. For determining nonstationary diffusiophoresis velocity component of this particle corresponding formula in the space of Laplace images was obtained.

*Key words:* nonstationary diffusiophoresis, large spherical particle, diffusion problem.

УДК 533.15

## СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ОБРАЗОВАНИЯ ДИМЕРОВ ДЛЯ ЗАДАЧ ТЕЧЕНИЯ ГАЗА ПРИ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ

А.А. Титов

Московский физико-технический институт  
141700, г. Долгопрудный, Институтский переулок, 9

*Аннотация:* В пограничной фазе между жидкостью и газом при низких температурах образуются кластеры из частиц. Самые простые из них это димеры. Рассмотрено образование димеров аргона при тройных столкновениях. Приведены графики набранных статистик для случая образования димера. Предложена методика использования результатов в решении задач течения газа при низких температурах методами Монте-Карло.

*Ключевые слова:* пограничная фаза, кластеры, димеры, газ при низких температурах, тройные столкновения, методы Монте-Карло.

### Введение

При низких температурах в пограничной фазе между жидкостью и газом молекулы газа могут образовывать кластеры за счет межмолекулярного взаимодействия. Грубо это можно объяснить на примере частиц с потенциалом Леннарда-Джонса, когда при уменьшении скорости частицами все более начинает сказываться притягивающая ветвь потенциала.

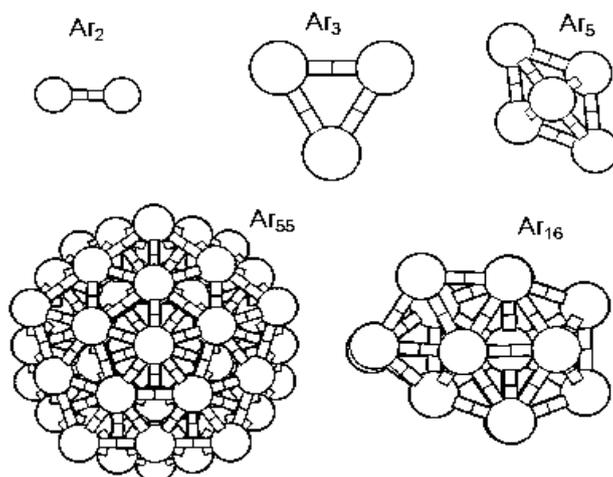


Рис. 1. Пример кластеров аргона различной размерности при минимуме внутренней энергии[1]

Самый простейший кластер это димер. Димер состоит из двух молекул. Например  $(Ar)_2$ ,  $(N_2)_2$ ,  $(CO_2)_2$ ,  $(CH_4)_2$  [1;2]. Димер из классических частиц образуется в результате столкновения трех молекул, так как необходима третья частица, чтобы унести лиш-

нюю энергию[2;3]. В некоторых случаях учет димеров приводит к совпадению экспериментальных данных с теорией при низких температурах[2].

Для классических частиц такие течения моделируются методом молекулярной динамики (МД)[3;4]. Метод молекулярной динамики требует расчета уравнений Ньютона для каждой молекулы, поэтому применим лишь для областей газа порядка сотен атомов. Реальные задачи могут иметь более сложную геометрию. Поэтому можно попробовать использовать метод прямого статистического моделирования Монте-Карло (ПСМ)[5]. Для этого в него необходимо ввести модель образования и распада димеров. В данной статье показаны результаты статистического анализа тройных столкновений, которые могут быть использованы в ПСМ. В качестве примера взят димер  $(Ar)_2$ . Межмолекулярное взаимодействие представлено потенциалом Леннарда-Джонса:

$$\phi(r) = 4k_B T_0 \left( (r_0/r)^{12} - (r_0/r)^6 \right); T_0 = 120K, r_0 = 3.42 \text{ \AA}, m = 39.95 a.e.m.$$

### Учет образования димеров в методе ПСМ

Для частиц с потенциалом взаимодействия Леннарда-Джонса считаем, что частицы образуют димер в результате тройного соударения, если после акта столкновения две любые частицы из трех образуют пару с отрицательной энергией относительно их центра масс. Третья частица является мономером. Тогда

$$H = \frac{m}{2} \sum_{i=1}^3 (v_{i,x}^2 + v_{i,y}^2 + v_{i,z}^2) = \frac{m}{2} (v_{m,x}^2 + v_{m,y}^2 + v_{m,z}^2) + m (v_{d,x}^2 + v_{d,y}^2 + v_{d,z}^2) + E_d;$$

$$E_d = \frac{m}{4} (c_{d,x}^2 + c_{d,y}^2 + c_{d,z}^2) + \phi(r_d) < 0;$$

где  $v_{i,x}, v_{i,y}, v_{i,z}$  - компоненты начальных скоростей  $i$ -ой частицы до столкновения,  $v_{m,x}, v_{m,y}, v_{m,z}$  - компоненты скорости свободного мономера в результате столкновения,  $v_{d,x}, v_{d,y}, v_{d,z}, c_{d,x}, c_{d,y}, c_{d,z}$  - компоненты скорости центра масс димера и относительной скорости частиц, составляющих димер,  $E_d$  - внутренняя энергия димера относительно центра масс,  $r_d$  - радиус димера в текущий момент времени.

Тройные столкновения в ПСМ можно определить как столкновение пары частиц с третьей в момент двойного столкновения, так как время столкновения пары частиц из за притягивающего потенциала при низких температурах может значительно отличаться от нуля[5].

Результаты тройного столкновения модельных частиц в ПСМ можно получить, рассчитывая в реальном времени уравнения Ньютона. Однако для этого необходимо сначала оценить время жизни пары частиц в момент двойного столкновения, а затем вбросить третью частицу с некоторым прицельным расстоянием так, чтобы акт тройного столкновения произошел в течение интервала жизни пары. Такой расчет занимает много времени, поэтому лучше заранее провести статистический анализ результатов решения этих уравнений и в реальном расчете просто проводить розыгрыш параметров по уже определенным вероятностям с учетом законов сохранения импульса и энергии.

Результатом каждого тройного столкновения может стать образование димера и свободного мономера. В этом случае необходимы следующие статистические данные:

- a. Вероятность образования димера  $P_d$ .
- b. Плотность вероятности распределения внутренней энергии димера  $p(E_d)$ .
- c. Плотность вероятности распределения компонент скорости центра масс димера  $p(v_{d,x}), p(v_{d,y}), p(v_{d,z})$ .
- d. Плотность вероятности распределения компоненты скорости свободного мономера  $p(v_{m,x}), p(v_{m,y}), p(v_{m,z})$ .

### Статистика из расчета объема газа по методу МД

Численный эксперимент представляет собой стандартное МД моделирование объема газа в кубическом ящике с периодическими граничными условиями размером  $L$ . Количество молекул 256. Шаг по времени  $2.5e-15$ с[3;4]. Молекулы вбрасываются равномерно по координатам так, чтобы расстояние между двумя любыми молекулами было больше  $3r_0$  - стандартное ограничение потенциала Леннарда-Джонса. Скорости для молекул выбираются по распределению Максвелла с некоторой начальной температурой. Когда система придет в равновесие, собираются статистики в зависимости от установившейся температуры  $T$ . Достоинство данного способа состоит в том, что получены данные для равновесного состояния системы при определенной температуре, поэтому в ПСМ их можно использовать не только в расчете тройных столкновений, но и при расчете столкновения между димером и мономером или между димерами. Недостаток – нет гарантии, что димер образовался именно в результате тройного столкновения и поэтому нахождение  $P_d$  будет рассмотрено в следующем пункте. Результаты на рис.2-4. Общие обозначения показаны на рис.2.

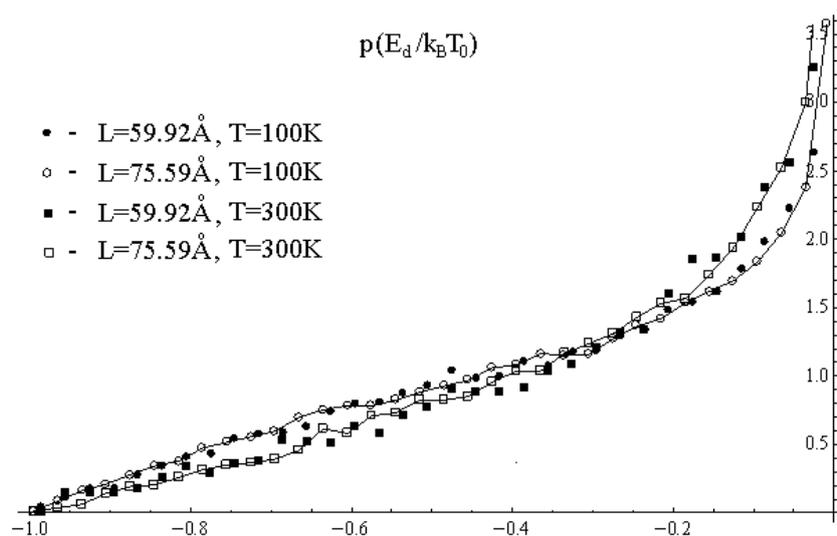


Рис. 2.

На рис.3-4  $v_0 = \sqrt{k_B T/m}$ ,  $v_{d,i}$  - компонента скорости димера,  $v_{m,i}$  - компонента скорости свободного мономера. Распределение компонент скоростей максвелловское. Рас-

пределение внутренней энергии не зависит от объема и достаточно слабо зависит от температуры. При увеличении температуры образованный димер разваливается после первого же столкновения, поэтому функция распределения внутренней энергии стремится к распределению внутренней энергии димера сразу после тройного столкновения (рис.6).

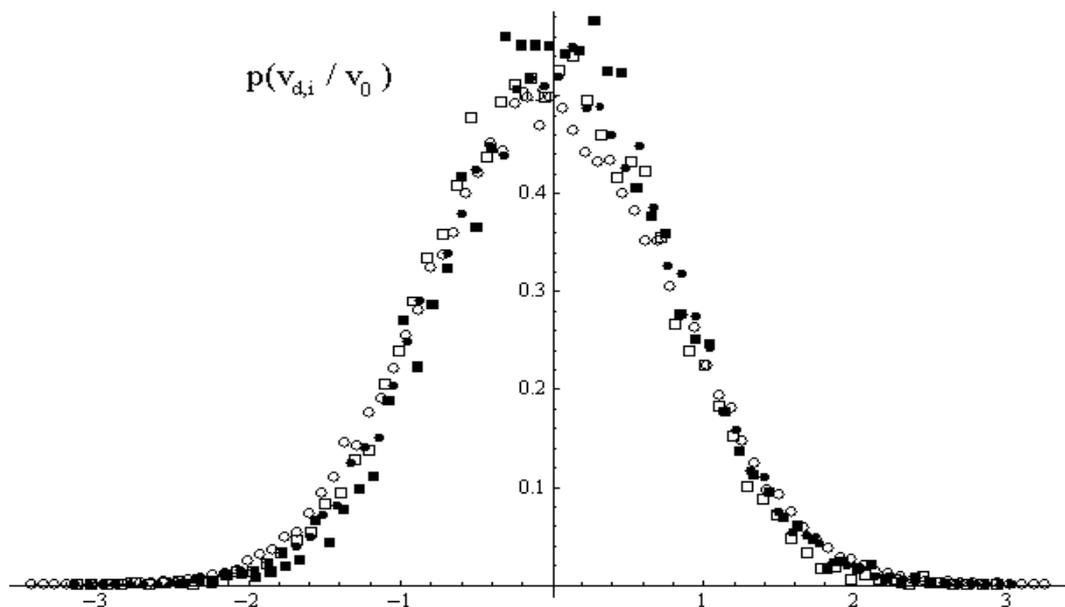


Рис. 3.

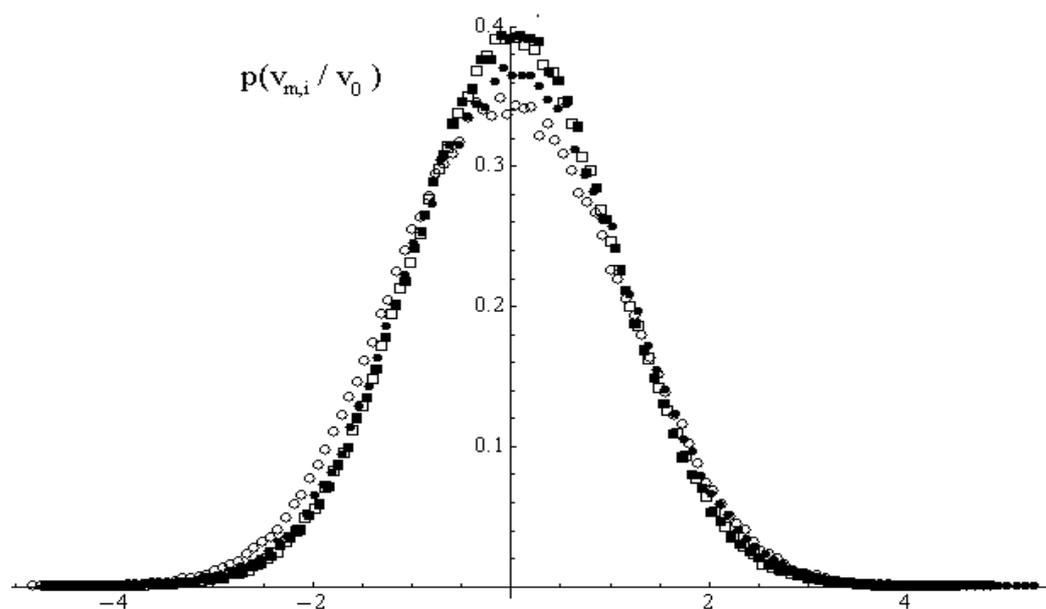


Рис. 4.

#### Статистика из расчета отдельных тройных столкновений

Численный эксперимент представляет собой моделирование 4096 кубических ящиков размера  $12r_0$  с периодическими граничными условиями (расчет проводился с по-

мощью CUDA на видеокарте NVIDIA GEFORCE GT 630). В каждый ящик вбрасывается три молекулы так, что скорости и координаты равномерно разбросаны на поверхности  $H = E_0$  в фазовом пространстве при условии малости потенциальной энергии по сравнению с кинетической. Это достигается путем равномерного вброса по координатам частиц так, чтобы расстояние между любыми двумя было больше  $3r_0$ , а компоненты скоростей равномерно разбрасываются на поверхности девятимерной сферы с радиусом  $\sqrt{2E_0/m}$ . С другой стороны можно вбросить скорости для определенной температуры мономеров  $T_m$  по Максвеллу.

После того, как в ящике происходит тройное столкновение, собирается статистика, а в ящик происходит вброс новой тройки частиц при тех же условиях. Выбор размера ящика обусловлен тем, что если три молекулы выстроить в линию вдоль одного из ребер на расстоянии  $3r_0$  между соседними, то расстояние между двумя крайними молекулами с учетом периодических стенок будет  $6r_0$  в любом направлении, с учетом ограничения потенциала Леннарда-Джонса они не будут взаимодействовать. Условие начала тройного столкновения: максимальное расстояние среди всех расстояний между любыми двумя частицами меньше  $6r_0$ , минимальное – меньше  $3r_0$ .

Условие конца тройного столкновения: максимальное расстояние больше либо равно  $6r_0$ . Достоинством данного метода является возможность рассмотреть «чистое» тройное столкновение без учета влияния других частиц, и результат можно взять в зависимости только от начальной кинетической энергии или от температуры мономеров.

Результаты расчетов на рис. 5-8. Общие обозначения для рис.6-8 показаны на рис.6.

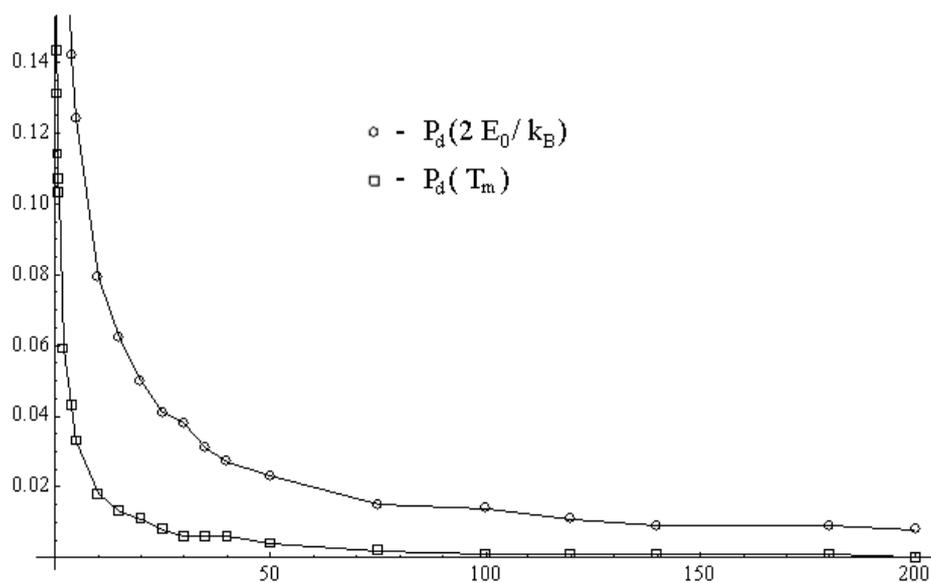


Рис.5.

На рис.6 черная сплошная линия – график функции  $1/\sqrt{E_d/k_B T_0} - 1$ . На рис.7-8  $v_0 = \sqrt{k_B T_0/m}$ . В случае вброса частиц с распределением Максвелла для  $T_m$  графики для

внутренней энергии примерно такие же, как и на рис.6, распределение компонент скоростей по Максвеллу.

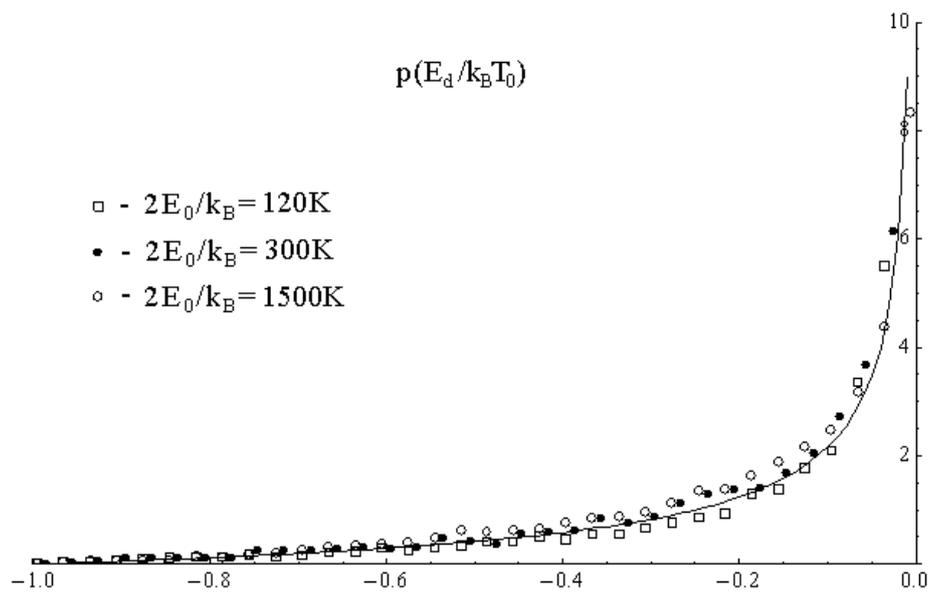


Рис.6.

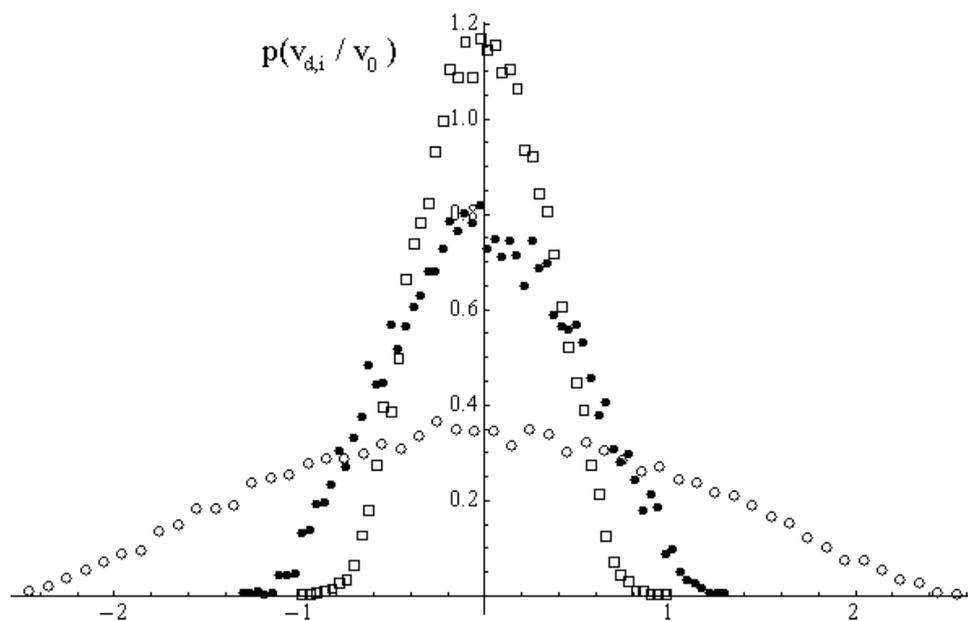


Рис. 7.

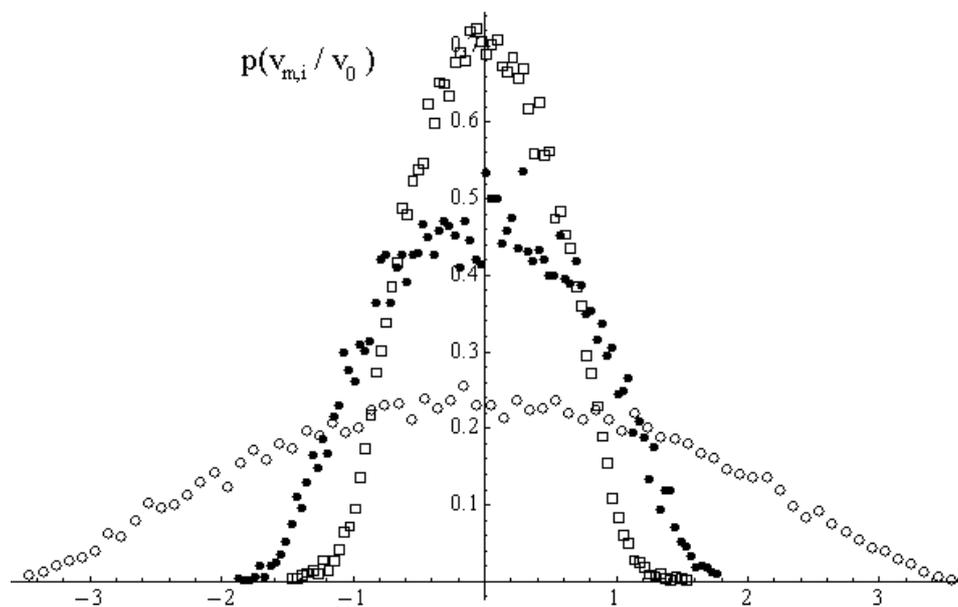


Рис. 8.

### Выводы

Набор статистик неограничен только димерами одноатомного газа, но и может включать в себя расчет столкновений сложных молекул или кластеров, если задать взаимодействие между ними. С помощью МД можно определить сечение тройного столкновения, сечение столкновения между димерами и мономерами. Кроме этого можно рассмотреть взаимодействие кластеров с поверхностью различных веществ и попытаться определить, к примеру, функцию распределения отраженных от поверхности кластеров, вероятность кластера разрушится и т.д. Данную методику планируется применить для расчета течения газа по трубкам и щелям при низкой температуре и учет вклада димеров различных газов.

### ЛИТЕРАТУРА

1. The Cambridge Cluster Database, *D. J. Wales, J. P. K. Doye, A. Dullweber, M. P. Hodges, F. Y. Naumkin F. Calvo, J. Hernández-Rojas and T. F. Middleton*, URL <http://www-wales.ch.cam.ac.uk/CCD.html>.
2. *Гелиев А.В.* Изменение термодинамических свойств газов при образовании в них простейших кластеров//Вестник Московского государственного областного университета. - Серия «Физика - Математика».-2012.-№2.-С.141-152.
3. *Weiss S.* Dimer and Trimer Formation in Dense Gaseous Argon: A MD Study. *J. Phys. Chem. A* 1997, 101, 3367-3370

4. Гривцов А. Г. Методика численных экспериментов и динамика микрогетерогенных систем.// Метод молекулярной динамики в физической химии.-М.:М54 Наука. -1996.-С.16-59
5. Bird G.A. Molecular Gas Dynamics and the Direct Simulation of Gas Flows.// Clarendon Press. Oxford. 1994.

## THE STATISTICAL ANALYSIS OF FORMATION OF DIMER FOR PROBLEMS OF GAS FLOW AT LOW TEMPERATURES

A. Titov

*Moscow Institute of Physics and Technology  
9, Institute by-st., Dolgoprudny, 141700, Russia*

*Abstract:* In the boundary phase between liquid and gas at low temperatures clusters of particles are formed. Dimer is the simplest cluster. Formation of dimer of argon at three-fold collisions is considered. Plots of gathered statisticians for a case of dimer's formation are provided. The technique of use of results in the solution of gas flow problems at low temperatures by Monte-Carlo methods is offered.

*Keywords:* boundary phase, cluster, dimer, gas at low temperatures, threefold collision, Monte-Carlo methods.

УДК 539.2

## АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ СПЕКТРОВ ИЗЛУЧЕНИЯ СТОЯЧИХ ЭКСИТОНОВ БОЛЬШОГО РАДИУСА В КРИСТАЛЛАХ IV ГРУППЫ ЭЛЕМЕНТОВ, ЛЕГИРОВАННЫХ БОРОМ

Ф.И. Высикайло

*ОАО «Московский радиотехнический институт РАН» (г. Москва)  
ФГБНУ Технологический институт сверхтвердых и новых углеродных материалов  
(г. Троицк, г. Москва)*

*Аннотация.* На базе экспериментов сформулированы и верифицированы основы кумулятивной квантовой механики (ККМ). Сравнением аналитических расчётов резонансных спектров с экспериментальными данными доказано, что ККМ описывает: 1) неограниченную кумуляцию к центру резонатора симметричных  $\psi_{n-1/2}$ -функций волн де Бройля электронов (со спектром  $E_{n-1/2} \sim \pm(n-1/2)^{\pm 2}$ ), захваченных поляризационными потенциалами в сферические или цилиндрические полые резонаторы (фуллерены и нанотрубки); 2) поляризационные квантово-размерные эффекты Высикайло; 3) расщепление уровня с главным квантовым числом  $n$  на два (с  $\psi_n$  и с  $\psi_{n-1/2}$ ) с энергией между уровнями  $\Delta E_{n-1/2, n} \sim n^{-1/4}$  в случае барьера и с  $\Delta E_{n-1/2, n} = 13.56 \cdot (n-1/4)/\epsilon^2 (n-1/2)^2 n^2$  [эВ] для ямы с  $U(r) \sim -1/\epsilon r$ ; и 4) спектры переходов между состояниями с различной симметрией  $\psi$ -функций ( $\psi_n \rightarrow \psi_{n-1/2}$ ) в сверхрешётках из стоячих экситонов в кристаллах IV группы, легированных бором.

*Ключевые слова:* кумулятивная квантовая механика, квантовый резонатор, поляя молекула фуллерена, поляризационные квантово-размерные эффекты, симметричные и асимметричные  $\psi$ -функции, расщепление уровня на два.

**Введение.** В лабораториях ведутся работы по исследованию изделий на квантовых точках (КТ) или квантовых линиях (КЛ). КТ и КЛ это ловушки для электронов, т.е. квантовые резонаторы для захвата волн де Бройля электронов. В будущем КТ и КЛ – это огромное перспективное поле деятельности в квантовой электронике и практике. Ловушки для свободных электронов позволяют структурировать и управлять объёмными зарядами и электрическими полями в наномире, тем обуславливая *поляризационные эффекты Высикайло* или физическое легирование нанокристаллитов [1], что приводит к изменению диэлектрической проницаемости, электропроводности, теплопроводности и других физических свойств наноконструкций при таком электрокатализе. Уже можно выделить несколько направлений, где КТ или КЛ имеют большие перспективы применения. Это - *биотехнологии и медицина*. В этой области применение квантовых ловушек из молекул углерода для электронов с резонансной энергией может оказаться наиболее предпочтительным. Следующее направление - это *оптоэлектроника и светодиоды* нового типа - экономичные, миниатюрные, яркие. В перспективе на основе светодиодов считается можно делать дисплеи для мониторов – очень тонкие, гибкие, с высокой контрастностью изображения. Возможно применение КТ (при создании из них мерцающих кристаллов, сверхрешёток или подрешёток) в ювелирной промышленности и для мощных СВЧ транзисторов с частотами до  $10^{11}$  Гц. Четвёртое направление – использование отрицательно заряженных ловушек - КТ или КЛ для кулоновского упрочнения (обжатия при физическом легировании наноматериалов) и улучшения характеристик *солнечных батарей и термоэлектриков* [1, 2].

Полюс сферически симметричные молекулы фуллерена и замкнутые цилиндрически симметричные нанотрубки могут, из-за поляризационных сил, захватывать в свой объём ранее свободные электроны с резонансной кинетической энергией (до 6 шт. на молекулу фуллерена) и образовывать метастабильные сферически симметричные КТ или цилиндрически симметричные КЛ с полной энергией электронов больше нуля [1-3]. Это явление – квантово-размерный поляризационный эффект Высикайло первого типа, описан в [1-3] с помощью модели, восходящей к модели Гамова-Гельмгольца, применённой Г.А. Гаммовым для описания  $\alpha$ -распада атомных ядер, т. е. прохождения  $\alpha$ -частицы через потенциальный барьер ( $U(r)$ ), окружающий атомное ядро.

Волновые свойства частиц давно открыты, обобщены де Бройлем в его гипотезе, и их  $\psi$ -функция волны де Бройля в полном квантовом резонаторе с внешним потенциальным барьером описывается стационарным уравнением Шредингера или уравнением Гельмгольца в случае первой краевой задачи [4], если потенциальный барьер заменяется бесконечной потенциальной стенкой ( $U(r) = 0$  при  $r \leq R+r_{ind}$  и  $U(r) = \infty$  при  $r > R+r_{ind}$ ):

$$\Delta_3 \psi_n + k_n^2 \psi_n = 0. \quad (1)$$

В теории сферически (КТ) и цилиндрически (КЛ) симметричных резонаторов имеется ряд вопросов, на которые необходимо ответить для: 1) развития *математического описания* кумулятивных явлений в квантовой механике, которые, в частности, явно происходят при фокусировке электрона с резонансной энергией в объём  $C_{60}$  [1-3], и

дальнейшего эффективного применения ККМ для правильного описания наблюдаемых в экспериментах, но относимых к «загадочным» спектральным линиям или «загадочным» резонансным сечениям захвата электронов (рис. 1 и 2).

Основным парадоксом, по мнению автора, является следующий факт. При плоскостной симметрии в квантовых резонаторах классической квантовой механикой разрешается полный спектр собственных резонансных энергий и  $\psi$ -функций, как для асимметричных относительно центра резонатора  $\sin$ -волн ( $\psi_n(0)=0$  в центре резонатора), так и для симметричных относительно центра резонатора  $\cos$ -волн (основного тона), у которых  $\psi_{n-1/2}$ -функции, в случае плоскостной симметрии резонаторов, ограничено кумулируют к центру квантового резонатора ( $\psi_{n-1/2}(0) \sim \cos(0) \sim 1$  в центре). Для случаев сферической и цилиндрической симметрии квантовых резонаторов весь энергетический спектр симметричных  $\cos$ -волн (с полной энергией уровней  $E_{n-1/2} \sim \pm(n-1/2)^{\pm 2}$ ) выбрасывается из-за требования ограниченности  $\psi$ -функций [5, с. 209]. Автор утверждает, что во многих экспериментах с полыми поляризуемыми молекулами, типа фуллеренов и нанотрубок, наблюдаются состояния с, ошибочно запрещёнными Дираком, резонансными симметричными ( $\psi_{n-1/2}$ )  $\cos$ -волнами и соответствующие им, запрещённые Дираком, энергетические переходы, расщепление уровней с главным квантовым числом  $n$ , с симметричными  $\psi_{n-1/2}$  и асимметричными  $\psi_n$  относительно центра резонатора  $\psi$ -функциями и соответствующие таким, запрещённым Дираком, переходам спектры электромагнитного излучения (с  $\Delta E_{n,n-1/2}$ ). Эти наблюдения связать со структурами резонаторов с плоскостной симметрией не возможно, так как в этих экспериментах явно участвуют структуры со сферической симметрией. Решение таких парадоксов, обусловленных неограниченной кумуляцией  $\psi_{n-1/2}$  в центре **полого** сферически или цилиндрически симметричного квантового резонатора в квантовой механике проведено автором в [1-3, 6-8], поэтому будем эти парадоксы в квантовой механике называть парадоксами Высикайло (ПВ). Именно *идеальная сферическая форма*  $S_{60}$  позволила решения ПВ обосновать не только аналитически, но и впервые провести сравнения аналитических расчётов [1-3, 6-8] с имеющимися экспериментальными исследованиями формирования отрицательно заряженных метастабильных сферически симметричных КТ на базе молекул фуллеренов  $C_{60}$  и  $C_{70}$  [9]. Согласно [1-3, 6-9] в случае сферически симметричных *полых* резонаторов можно подойти к проблеме формально, - учесть все процессы и спектры, в которых участвуют состояния с симметричными ( $\psi_{n-1/2}$ )  $\cos$ -волнами и разрешить переходы между состояниями с  $\psi_n$  ( $\sin$ -) и  $\psi_{n-1/2}$  ( $\cos$ -) состояниями, которые запретил Дирак, тем более что решения с  $\cos$ -волнами в случае сферической и цилиндрической симметрий для первой краевой задачи Гельмгольца приведены в справочниках линейных уравнений математической физики [4, с. 515]. Применим ККМ для систематизации аналитических расчётов и их сравнения с экспериментальными наблюдениями за резонансным захватом электронов в полые поляризуемые молекулы фуллеренов (рис. 1-4) и для описания спектров комбинационного рассеивания стоячих экситонов по модели Высикайло в опорных кристаллах алмаза, кремния и германия, допированных (химически легированных) бором, внедряющимся в кристаллическую решётку опорного кристалла (таблица). Внедрённый в решётку трёхвалентный атом бора смещается относительно узла решётки опорного кристалла из четырёх валентных атомов и тем появляется возможность формирования состояний с  $\psi_{n-1/2}(r)$ -функциями стоячих экситонов Высикайло с соответствующим спектром  $E_{n-1/2} = -13.56 \cdot Z^2 \cdot ((n-1/2)\epsilon)^{-2}$  эВ.  $Z$  – заряд КТ. Наличием этих состояний и соответ-

ствующих им переходов отличается модель автора от модели Ванье-Мотта-Френкеля-Бора, в которой разрешены только состояния с  $\psi_n(r)$  и, соответственно, с  $E_n = -13.56 \cdot (n\varepsilon)^{-2}$  эВ [10, с. 353]. Здесь  $\varepsilon$  – относительная диэлектрическая проницаемость кристалла.

**1. Фуллерены** представляют ловушку для электронов, обладающих резонансной энергией  $E_n > 0$ . При резонансном захвате во внутреннюю полость формируется эндоэлектрон в фуллеренах и иных полых молекулах. Отрицательный ион фуллерена  $C_N^{-m}$  с эндоэлектроном или их системой в полости можно назвать *эндоионом* и ввести обозначение для него  $e_m @ C_N$  [6-8]. Здесь  $e$  – электрон,  $m$  – число эндоэлектронов в эндоионе,  $N$  – число атомов углерода в молекуле фуллерена.

В случае *полый* молекулы  $C_{60}$  наблюдается следующая картина для резонансного сечения захвата электрона (рис.1) с полной энергией  $E > 0$  [9]. Продуктов распада  $C_{60}$  или  $C_{70}$  после захвата резонансного электрона обнаружено не было. Согласно [9] (рис. 1) эффективный радиус поляризационного взаимодействия  $R_\Sigma$  превышает характерный радиус молекулы  $C_{60}$  ( $R_{C_{60}} \approx 0,36$  нм) и для электронов с энергией порядка 2 эВ достигает  $R_\Sigma \approx 0,62$  нм, что на  $r_{ind} \approx 0,26$  нм превышает радиус молекулы –  $R$ . Это явление связано с поляризационными силами, достигающими своего максимального значения на расстоянии  $r_{ind}$ , между уже внешним (экзо) электроном и поляризованной этим экзо-электроном молекулой  $C_{60}$  (рис. 2).

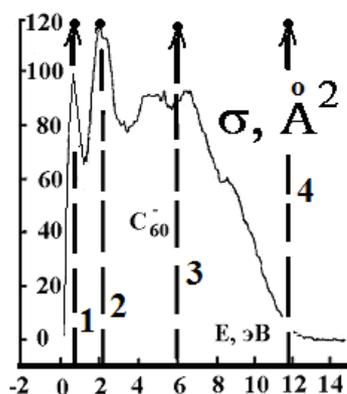


Рис. 1.

Рис. 1. Экспериментально измеренные сечения захвата электрона  $C_{60}$  в зависимости от его энергии [9]. Прямыми жирными пунктирными вертикальными линиями отмечены собственные энергии  $E_{n-1/2}$  (с главными числами  $n = 1, 2, 3, 4$ ), рассчитанные по (1) с учетом действия сил поляризации  $C_{60}$  на стабилизацию эндоиона фуллерена.

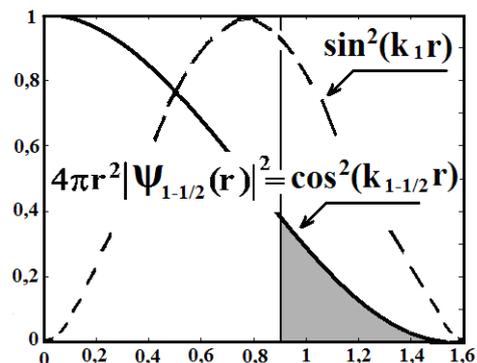


Рис. 2.

Рис. 2. Относительная вероятность  $W = 4\pi r^2 |\psi(r)|^2 dr$  найти электрон в области полый сферически симметричной молекулы [6-8] от расстояния до её центра для косинус-резонанса (с  $E_{1-1/2}$ ) обозначается сплошной линией и для синус-резонанса (с  $E_1$ ) – пунктирная линия. Прямой вертикальной линией разделены внутренние и внешние области полый поляризующейся сферически симметричной молекулы. Затемнена относительная вероятность нахождения электрона при косинус-резонансе вне оболочки полый молекулы (расчеты выполнены для  $C_{60}$ ).

В результате поляризационного взаимодействия происходит формирование в полости молекулы стоячей сферической волны – эндоэлектрона (рис. 2) с симметричной  $\psi_{n-1/2}(r)$  или с асимметричной  $\psi_n(r)$ . Аналитическое исследование поляризационных явлений проводилось в [1-3, 6-8] в рамках модели с резким поляризационным барьером, отражающим электрон в полость молекулы. Барьер расположен за оболочкой  $C_{60}$  на расстоянии 0,26 нм, т.е.  $\psi(r \geq R + r_{ind} = 0,62 \text{ нм}) \equiv 0$ . Вычислены собственные (резонансные) энергии для волн де Бройля эндоэлектрона в фуллерене с симметричной функцией -  $\psi_{n-1/2}(r)$ :

$$E_{n-1/2} = \pi^2(n-1/2)^2 \hbar^2/2m(R+r_{ind})^2 = 0,37 \cdot (n-1/2)^2/(R+r_{ind})^2 [\text{эВ}]; \quad (2)$$

и с асимметричной функцией -  $\psi_n(r)$ :

$$E_n = \pi^2 n^2 \hbar^2/2m(R+r_{ind})^2 = 0,37 \cdot n^2/(R+r_{ind})^2 [\text{эВ}]. \quad (3)$$

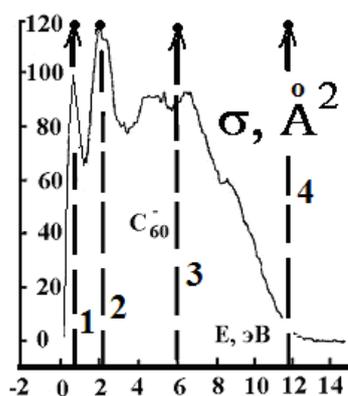


Рис. 1.

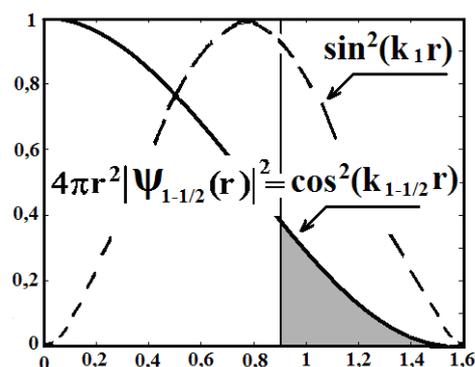


Рис. 2.

Рис. 1. Экспериментально измеренные сечения захвата электрона  $C_{60}$  в зависимости от его энергии [9]. Прямыми жирными пунктирными вертикальными линиями отмечены собственные энергии  $E_{n-1/2}$  (с главными числами  $n = 1, 2, 3, 4$ ), рассчитанные по (1) с учетом действия сил поляризации  $C_{60}$  на стабилизацию эндоиона фуллерена.

Рис. 2. Относительная вероятность  $W = 4\pi r^2 |\psi(r)|^2 dr$  найти электрон в области полой сферически симметричной молекулы [6-8] от расстояния до её центра для косинус-резонанса (с  $E_{1-1/2}$ ) обозначается сплошной линией и для синус-резонанса (с  $E_1$ ) – пунктирная линия. Прямой вертикальной линией разделены внутренние и внешние области полой поляризующейся сферически симметричной молекулы. Затемнена относительная вероятность нахождения электрона при косинус-резонансе вне оболочки полой молекулы (расчеты выполнены для  $C_{60}$ ).

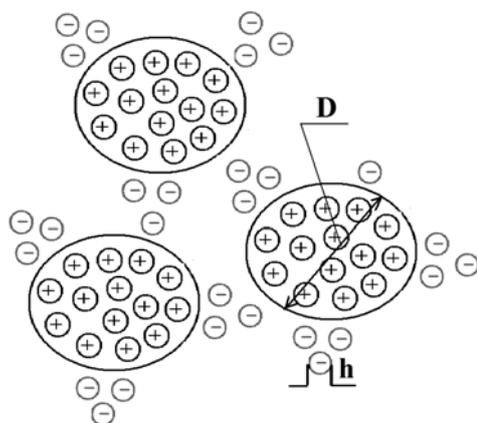


Рис.3.

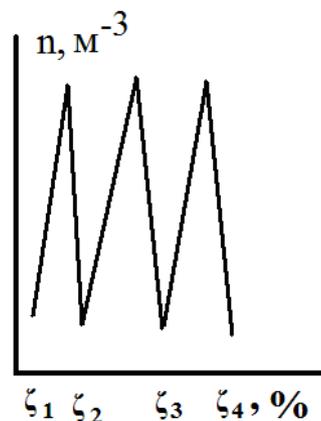


Рис.4.

Рис. 3. Модификация свойств композитных материалов слоями объемного заряда, формируемого ловушками для электронов. Схема физического принципа легирования материалов. Структуризация заряда в объеме нанокompозита, обусловленная захватом свободных электронов ловушками – квантовыми резонаторами для волн де Бройля электронов в нанокompозите [6-8].  $D$  – размер зерна нанокompозита,  $h$  – характерный размер квантового резонатора – ловушки.

Рис. 4. Характерная зависимость параметров нанокompозита, например, концентрации ионов или электронов  $n$  от объемного содержания квантовых резонаторов –  $C_{60}$  в композите.

Согласно (2-3), учитывая разницу в характерных размерах  $C_{60}$  и иных фуллеренов, можно рассчитать резонансные энергии электронов для любых фуллеренов. Так для  $C_{60}$  –  $E_{n-1/2} = 0,23; 2,1; 6,0; 11,8$  эВ; для  $C_{70}$  –  $E_{n-1/2} = 0,21; 1,9; 5,6; 11,1; 17,8$  эВ и т.д. Определены  $\psi_{n-1/2}(r) = A_{n-1/2} \cos(k_{n-1/2}r)/r$ . Построены соответствующие им профили собственных  $\psi$ -функций, определяющих вероятность –  $W_n$  нахождения электрона в области молекулы и действия сил поляризации (рис. 2). В результате аналитически описана неограниченная кумуляция волн де Бройля ( $\psi_{n-1/2}$ -функций, рис. 2) электронов в поляризующихся, сферически симметричных, квантовых резонаторах для волн де Бройля электронов – полых молекулах (на примере  $C_{60}$ ,  $70$  и др.). Эндоелектрон имеет положительную полную энергию, но из-за поляризационных сил, действующих на него, постоянно отражается от поляризационного барьера и кумулирует к центру полый сферически симметричной молекулы ( $C_{60}$ ), в результате формируется отрицательный эндоион (атом наоборот) с электроном запертым внутри полый молекулы (вероятность нахождения электрона с  $\psi_{n-1/2}$ -функцией внутри полый молекулы  $\approx 90\%$ ). Эндоелектрон, с резонансной энергией активации  $E \geq 0,23$  эВ, локализуется (в виде локализованного солитона), не образует с атомами углерода химических связей, при  $r \geq R+r_{ind}$  вероятность его нахождения равна нулю (т.е.  $\psi_n(r \geq R+r_{ind}) \equiv 0$ ). По мнению автора, механизмом «стабилизации» электронов, с энергиями менее 12 эВ, сталкивающихся с молекулой фуллерена, является их отщепление во внутреннюю полость молекулы  $C_{60}$  и последующая локализация электронов к центру поляризующейся молекулы. Совпадение экспе-

риментальных наблюдений с аналитическими расчетами дает основание автору считать полученные аналитически решения правильными. Функция  $\psi_{n-1/2} \sim \cos(k_n r)/r$  кумулирующего к центру электрона растет неограниченно к центру поляризуемой молекулы, однако вероятность нахождения электрона в центре ограничена из-за геометрического мультипликатора  $4\pi r^2$ . Учёт геометрического мультипликатора, строгое выполнение гипотезы де Бройля, т.е. сохранение собственного резонансного энергетического спектра с  $\psi_{n-1/2}$  и является основой кумулятивной квантовой механики, предложенной автором в [1-3, 6-8]. Учётом энергетического спектра  $E_{n-1/2}$  с  $\psi_{n-1/2}$  отличается ККМ от квазиклассической модели атома водорода Бора, учитывающей и в полых резонаторах только спектр с  $E_n$  и  $\psi_n$ . Захват электронов обеспечивает изменение проводимости и иных параметров нанокompозитных материалов с квантовыми резонаторами. Существенно модифицируются свойства полупроводников n- и p-типа (рис. 4), когда концентрация ловушек, порядка концентрации носителей заряда, осуществляющих перенос тока.

**2. Кумулятивно-диссипативные водородоподобные квантовые точки.** В кристаллах, в области захваченных в кристаллическую решётку атомов примеси, в результате применения ККМ автором открыты кумулятивно-диссипативные структуры с профилированной относительной диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ , кумулирующей экситоны к атомам примеси [16].

Таблица

Уровни водородоподобной полый квантовой точки в алмазе, допированном бором, с  $E_{n-1/2} = -13.56 \cdot ((n-1/2)\epsilon)^{-2}$  эВ и  $E_n = -13.56 \cdot (n\epsilon)^{-2}$  эВ

$n$	$E_n$ , мэВ Теория	$E_n$ , мэВ. Эксп. [лит.]	$\epsilon(n)$	$\Delta E$ , мэВ $= E_n - E_{n-1/2}$
1-1/2	Нет	-	6.06	
1	-369	-369 [11; 12]	6.06	
2-1/2	-164	-161 ÷ 165 [11]	6.06	72
3-1/2	-60.27	-?	6.0	17.37
3	-42.9	-42.9 [13]	5.925	17.36 [13]
4-1/2	-30.74	-30.99 [13]	6.0	7.96
4	-22.78	-22.56 [13]	6.1	7.9 [13]
5-1/2	-19.10	?	5.92	3.97
5	-15.13	-15.13 [13]	5.987	3.97 [13]
6-1/2	-13.51	-13.51 [13]	5.76	2.1
6	-11.41	-11.41 [13]	5.745	1.98 [13]
7-1/2	-9.31	-9.3 [13]	5.87	1.38
7	-7.93	-7.93 [13]	5.906	?

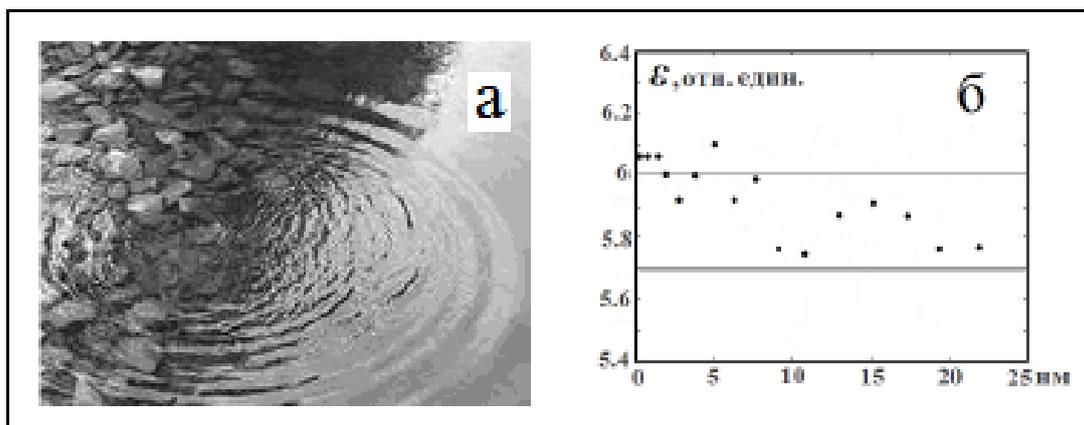


Рис. 2. Волны а) – на воде, согласно гипотезе де Бройля, аналогичны б) – волнам относительной диэлектрической проницаемости -  $\epsilon(r)$  в легированном алмазе в области внедрения в решетку атома бора (см. таблицу).

**Выводы.** Обоснованы и применены методы кумулятивной квантовой механики для описания поляризационного захвата электронов полыми молекулами (рис. 1-4) и расщепления Высикайло спектральных линий мерцающих кристаллов (сверхрешёток) в кристаллах IV группы, допированных В (таблица). Выявлена причина расщепления уровней с главным квантовым числом  $n$ . Установлена зависимость относительной диэлектрической проницаемости –  $\epsilon$  наноразмерных кристаллов от радиуса –  $r_{n-1/2} = a_0 \cdot \epsilon \cdot (n-1/2)^2$  водородоподобной КТ.  $a_0 = 0.529 \text{ \AA}$  - радиус боровской орбиты (табл. 1 и 2). Следует отметить, что в случае легирования кристаллов IV группы As и P данных по спектрам не достаточно для убедительной идентификации спектров. В случае легирования бором, этих данных достаточно для утверждения, что автором открыты стоячие полые экситоны.

Работа проводилась при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации ГК № 16.552.11.7014 и ГК № 16.523.11.3002 (работы по термоэлектрическим материалам).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Vysikaylo Ph.I.* Physical Fundamentals of Hardening of Materials by Space Charge Layers // *Surface Engineering and Applied Electrochemistry*. 2010, V. 46, № 4, pp. 291–298.
2. *Blank V., Vysikaylo Ph. et al.* C60-doping of nanostructured Bi–Sb–Te thermoelectrics // *Phys. Status Solidi A*. 2011, V. 208, № 11, pp. 2783-2789.
3. *Vysikaylo Ph.I.* Cumulation of de Broglie Waves of Electrons, Endoions and Endoelectrons of Fullerenes, and Resonances in the Properties of Nanocomposite Materials with Spatial Charge Layers // *Surface Engineering and Applied Electrochemistry*. 2010, V. 46, № 6, pp. 547–557.
4. *Полянин А.Д.* Справочник по линейным уравнениям математической физики. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. с. 511, 515;

5. П.А.М. Дирак Принципы квантовой механики. –М.: Наука. Гл. Ред. Физ.-мат. Лит. 1979 – 480 с.; P.A.M. Dirac The Principles of Quantum Mechanics. Oxford. 1958.
6. *Vysikaylo Ph.I.* Cumulative Quantum Mechanics (CQM). Part I: Prerequisites and Fundamentals of CQM// Surface Engineering and Applied Electrochemistry 2012. V. 48 N. 4. pp. 293-305.
7. *Vysikaylo Ph.I.* Cumulative Quantum Mechanics (CQM) Part II. Application of Cumulative Quantum Mechanics in Describing the Vysikaylo Polarization Quantum\_Size Effects// Surface Engineering and Applied Electrochemistry, 2012, Vol. 48, No. 5, pp. 395–411.
8. *Высикайло Ф.И.* Поляризация аллотропных полых форм углерода и её применение в конструировании нанокompозитов // Нанотехника. 2011, 1(25), с. 19–36.
9. *Jaffke T., Illenbergen E., Lezius M., Matejczik S., Smith D. and Mark T.D.* Formation of C<sub>60</sub> and C<sub>70</sub> by Free Electron Capture. Activation Energy and Effect of the Internal Energy on Lifetime// Chem. Phys. Lett., 1994, 226, pp. 213-218.
10. *Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.* Теоретическая физика: Учеб. пособ.: Для вузов. Т.9 Статистическая физика Ч. 2. Теория конденсированного состояния. 4е изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 496 с.
11. *Collins A.T., Lightowers E.C. and Dean P.J.* Role of Phonons in the Oscillatory Photoconductivity Spectrum of Semiconducting Diamond// Phys. Review 1969. V. 183, № 3, pp. 725-730.
12. *Collins A.T. and Williams A. W. S.* The nature of the acceptor centre in semiconducting diamond // J. Phys. C: Solid State Phys. (1971) № 4, pp. 1789-1800.
13. *Denisov V.N., Mavrin B.N., Polyakov S.N., Kuznetsov M.S., Terentiev S.A., Blank V.D.* First observation of electronic structure of the even parity boron acceptor states in diamond. // Physics Letters A (2012) V. 376, pp. 2812–2815.
14. *Wright G.B., Mooradian A.* Raman scattering from donor and acceptor impurities in silicon. // Phys. Rev. Lett (1967) V. 18, № 15, pp. 608-610.
15. *Jain K., Lai S., Klein M.V.* Electronic Raman scattering and the metal-insulator transition in doped silicon. // Physical Review B (1976) V. 13, № 12, pp. 5448-5464.
16. *Высикайло Ф.И.* Самоорганизующиеся кумулятивно-диссипативные наноструктуры в легированных кристаллах. Парадоксы в квантовой механике и их решение на базе кумулятивной квантовой механики. // Инженерная физика. 2013, №3, с. 15-48.

**ANALYTICAL DESCRIPTION OF THE EMISSION SPECTRA  
OF STANDING LARGE-RADIUS EXCITONS IN CRYSTALS  
OF GROUP IV ELEMENTS, BORON-DOPED**

**Ph. Vysikaylo**

*Moscow Radio Engineering Institute (Moscow)  
Technological Institute for Superhard and Novel Carbon Materials  
(Troitsk, Moscow)*

*Abstract.* The author formulated the principles of the cumulative quantum mechanics (CQM). CQM describes: 1) unlimited cumulation of symmetric  $\psi_{n-1/2}$ -electron function of the de Broglie waves (with a spectrum  $E_{n-1/2} \sim \pm (n-1/2)^{\pm 2}$ ) captured potentials in spherical and cylindrical hollow cavities, 2) the polarization quantum-dimensional effects, 3) the

Vysikaylo's split of the quantum level with principal quantum number  $n$  into two sublevels (with  $\psi_n$  and with  $\psi_{n-1/2}$ ) with the splitting energy  $\Delta E_{n-1/2,n} \sim n^{-1/4}$  in the case of the barrier, and with  $\Delta E_{n-1/2,n} = 13.56 \cdot (n^{-1/4}) / (\epsilon(n-1/2)n)^2$  [eV] for the potential well with  $U(r) \sim 1/\epsilon r$ ; and 4) spectra of the transitions between states with different symmetry of  $\psi$ -functions ( $\psi_n \rightarrow \psi_{n-1/2}$ ) in the superlattices of standing excitons in IV group crystals, B-doped.

*Keywords:* cumulative quantum mechanics, quantum resonator, hollow fullerene molecule, polarization quantum size effects, symmetric and asymmetric  $\psi$ -function, the level splitting in two.

УДК 537.9+539.6

## МНОГОЧАСТИЧНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В ФИЗИКЕ КОНДЕНСИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ

Э.В. Геворкян

Московский государственный областной университет  
105005, Москва, ул. Радио, 10а

*Аннотация.* Показано, что многочастичные взаимодействия необходимо учитывать при описании физических свойств и фазовых превращений в конденсированных системах. Модель парного взаимодействия пригодна лишь для качественных оценок свойств реальных систем. Обсуждается концепция эффективных парных взаимодействий и методы их вычисления.

*Ключевые слова:* конденсированное состояние, многочастичные взаимодействия, жидкости, кристаллы, жидкие кристаллы, фазовые переходы.

Многочастичные взаимодействия играют важную роль в статистической физике конденсированного состояния. Если в газах они могут считаться малым «возмущением» (поправкой, уточняющей модель парного взаимодействия) которое следует учитывать только в исключительных случаях, например, для объяснения эффектов неаддитивности энергии и третьих вириальных коэффициентов, то в конденсированных системах это уже не так ([1]). Эффекты неаддитивности также важны при описании взаимодействия атомов или молекул с макроскопическими телами или между двумя телами. Многочастичный неаддитивный вклад в энергию вандерваальсова взаимодействия составляет более 20%.

Наиболее дальнедействующие из таких взаимодействий для простых структурных элементов (атомов) трехчастичные дисперсионные диполь-диполь-дипольные взаимодействия Аксильрода-Теллера (третий порядок теории возмущений)

$$\Phi_3^{\text{АЭНТ}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) = C^{(3)} \frac{1 + c_1 c_2 c_3}{r_{12} r_{23} r_{31}}, \quad (1)$$

где  $r_{12} = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$  - расстояние между «частицами» (атомами), а  $c_k = \cos \theta_k$  - косинусы внутренних углов треугольника, образованного этими тремя атомами. Трехчастичная дисперсионная постоянная в формуле (1) определяется интегралом по частоте  $\omega$  от произведения трех динамических дипольных поляризуемостей  $\alpha_k(i\omega)$ , а при использовании потенциала (1) в качестве модельного (полуфеноменологического) калибруется по экспериментальным данным.

В плотных конденсированных системах, пожалуй, более существенными являются короткодействующие многочастичные обменные силы первого порядка. Причем для их расчета на самых близких расстояниях обычно вместо теории возмущений используется вариационный метод. Трехчастичный потенциал таких взаимодействий можно удовлетворительно аппроксимировать модельной формулой

$$\Phi_3^{i\dot{a}i}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) = A(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \exp\{-\{r_{12} + r_{23} + r_{31}\}/a\}, \quad (2)$$

где  $A(\dots)$  - знакопеременный геометрический фактор,  $a$  – характерный размер структурного элемента.

Учет трехчастичных взаимодействий (1) заметно улучшает согласие результатов теории простых жидкостей с экспериментом. С помощью короткодействующих трехчастичных взаимодействий (2) разрешается ряд парадоксов, связанных со статической и динамической сжимаемостью, и с соотношениями Коши между упругими постоянными кристаллов, а также удается объяснить наблюдаемую структуру кристаллов [2]. Многочастичный вклад в энергию связи даже в простых молекулярных и ионных кристаллах составляет около 10%. В кристаллах других типов, а также в кластерах этот вклад существенно больше. Причем, в конкуренции возможных структур важна не столько величина вклада в полную энергию, сколько его чувствительность к изменению структуры. (Разность энергий зачастую составляет доли процента.) А в этом плане многочастичные взаимодействия существенно превосходят парные.

Для сложных молекул мезогенных органических веществ вклад многочастичных взаимодействий в полную энергию и, вообще, в физические свойства также уже не следует рассматривать как малую поправку или уточнение описания, включающего только парное межмолекулярное взаимодействие. Для объяснения структуры и сложной фазовой диаграммы жидких кристаллов, образованных такими молекулами, структурные элементы принимаются в виде анизометричных твердых ядер. При таком выборе учет внутримолекулярной структуры приводит к анизотропным многочастичным взаимодействиям.

Таким образом, наиболее характерными свойствами многочастичных взаимодействий являются их относительное короткодействие и резкая зависимость от расположения и ориентации «соседей». Поэтому они вместе с парным отталкиванием «твердых ядер» ответственны за формирование структуры ближнего порядка. В самом общем случае, многочастичные взаимодействия между структурными элементами являются следствием подвижной внутрен-

ней структуры этих элементов и появляются после исключения соответствующих «внутренних переменных».

При использовании упрощенной модели парного межмолекулярного взаимодействия потенциалы таких взаимодействий следует считать эффективными. То есть полагать, что они косвенным неявным образом включают в себя многочастичные взаимодействия. Однако этот подход трудно реализовать последовательно.

Рассмотрим статистический вариационный принцип для систем с трансляционными  $\mathbf{r}_k$  и внутренними (ориентационными  $\Omega_k$ , конформационными  $\zeta_k$  и т.д.) степенями свободы,

$$F[\Phi_2, \Phi_3, \dots, \Phi_s] \leq F_i[\Phi_2^{y\delta\delta}; \Phi_2, \Phi_3, \dots, \Phi_s] = F[\Phi_2^{y\delta\delta}] + \langle U_N - U_{i\delta\delta}^{y\delta\delta} \rangle_{y\delta\delta}, \quad (3)$$

где  $\mathbf{k}=(\mathbf{r}_k, \Omega_k, \zeta_k)$ , а угловые скобки обозначают усреднение по аппроксимирующему распределению Гиббса  $\rho_N^{\text{эфф}}$  с эффективным парным взаимодействием (4)

$$U_{i\delta\delta}^{y\delta\delta} = \sum_{i < j} \Phi_2^{y\delta\delta}(\mathbf{i}, \mathbf{j}), \quad (4)$$

$$U_N = \sum_{p=2}^s \frac{1}{p!} \sum_{i_1 \neq \dots \neq i_p} \Phi_p(\mathbf{i}_1, \dots, \mathbf{i}_p). \quad (5)$$

Найдем минимум функционала (3) модельной энергии Гельмгольца  $F_M[\dots]$ , приравнявая нулю его вариацию (6),

$$\langle U_N - U_{i\delta\delta}^{y\delta\delta} | \delta \Phi_2^{y\delta\delta}(\mathbf{i}, \mathbf{j}) \rangle_{y\delta\delta} = 0, \quad (6)$$

где  $\langle a|b \rangle = \langle ab \rangle - \langle a \rangle \langle b \rangle$  - второй семиинвариант (кумулянт) распределения.

Отсюда находим уравнения, определяющие эффективные потенциалы парных межмолекулярных взаимодействий  $\Phi_2^{\text{эфф}}(\dots)$ , которые наилучшим образом учитывают истинные многочастичные взаимодействия  $\Phi_p(\dots)$

$$\Phi_2^{y\delta\delta}(\mathbf{i}, \mathbf{j}) = \Phi_2(\mathbf{i}, \mathbf{j}) + \frac{1}{\rho_2^{y\delta\delta}(\mathbf{i}, \mathbf{j})} \sum_{p=3}^s \frac{1}{(p-2)!} \sum_{i \neq j \neq i_3 \neq \dots \neq i_p} \int \Phi_p(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{i}_3, \dots, \mathbf{i}_p) \rho_p^{y\delta\delta}(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{i}_3, \dots, \mathbf{i}_p) d\mathbf{i}_3 \dots d\mathbf{i}_p, \quad (7)$$

В соответствии с выражением (7) эффективные потенциалы парных межмолекулярных взаимодействий, в отличие от истинных, зависят от термодинамических параметров состояния и от условий молекулярного окружения. Возникающие при этом принципиальные трудности очевидны. Даже при использовании модельных парных потенциалов, при их калибровке нам придется допустить их зависимость от температуры и структуры ближнего порядка. Например, они могут скачком изменяться при фазовых переходах!

Все это радикальным образом меняет привычную схему построения молекулярно-статистической теории конденсированного состояния. Поэтому во многих случаях удобнее, да и более последовательно, работать с многочастичными потенциалами (5), вводя их в явном виде, чем с эффективными парными.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Базаров, И.П.* Статистическая физика жидких кристаллов/ И.П. Базаров, Э.В. Геворкян. - М., изд. Моск. ун-та, 1992. - 496 с.
2. *Базаров, И.П.* Статистическая теория твердых и жидких кристаллов/ И.П. Базаров, Э.В. Геворкян. - М., изд. Моск. ун-та, 1983. - 496 с.

### MANY-PARTICLE INTERACTIONS IN CONDENSED STATE PHYSICS

**E.V. Gevorkyan**

*Moscow State Regional University  
10a, Radio st., Moscow, 105005, Russia*

*Abstract.* It is shown that many-particle interactions should be taken into account to describe physical properties and phase transitions in condensed systems. The model of effective pair interactions is suitable only for qualitative estimation of real systems properties. The concept of effective pair interactions and ways to calculate them are discussed.

*Keywords:* condensed state, many-particle interactions, liquids, crystals, liquid crystals, phase transitions.

УДК:530.1:539.12

### ДВУХШАГОВЫЙ МУЛЬТИБОЗОННЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ ДИСКРЕТНОЙ $U(1)$ МОДЕЛИ ФЕРМИОНОВ

**Н.В. Зверев**

*Московский государственный областной университет  
105005, Москва, ул. Радио, 10а*

*Аннотация.* Рассмотрен статистический двухшаговый мультибозонный алгоритм вычислений применительно к  $U(1)$  модели фермионов на четырёхмерной решётке пространства-времени. Показано, что использование второго шага принятия-отвержения полей приводит к увеличению производительности алгоритма.

*Ключевые слова:*  $U(1)$  модели, фермионы, алгоритмы, метод Монте-Карло, решётка пространства-времени.

## 1. Введение

Важной задачей математического моделирования в квантовой теории поля является создание и реализация эффективных алгоритмов для исследования моделей фермионных частиц (фермионов). Для такого исследования Вильсоном [1] предложен мощный математический подход – метод решётки. В этом подходе непрерывное пространство-время аппроксимируют дискретной совокупностью точек – узлов решётки, а полевые и корреляционные функции модели зависят от координат этих узлов.

Практический интерес представляет четырёхмерная решёточная модель фермионов, построенная на группе  $U(1)$  калибровочных преобразований поля переносчика взаимодействия [1,2]. При исследовании модели частиц прежде всего необходимо найти её многочисленные корреляционные функции (функции Грина), которые затем используют для расчётов физических характеристик частиц.

Исследования моделей частиц на решётке прямыми численными методами являются нереальными из-за гигантского времени вычислений. Поэтому для численных расчётов данных моделей используют статистические алгоритмы. Однако изучение фермионов такими алгоритмами испытывает определённую трудность из-за существования принципа Паули для данных частиц. В настоящее время хорошо известен статистический метод гибридного Монте-Карло [3,4] для вычислений с учётом виртуальных фермионных петель. Но данный метод пригоден лишь в случае чётного числа типов (поколений) фермионов.

Алгоритмом, альтернативным методу гибридного Монте-Карло, является двухшаговый мультибозонный алгоритм [5,6,7]. Этот статистический алгоритм также учитывает фермионные петли, но уже пригоден для случая произвольного числа поколений фермионов. В то же время данный алгоритм имеет много сложных процедур и подпрограмм.

В данной работе приведены результаты исследований двухшагового мультибозонного алгоритма применительно к  $U(1)$  модели фермионов на четырёхмерной решётке [8]. Показывается также, что наличие второго шага мультибозонного алгоритма приводит к увеличению производительности данного алгоритма.

## 2. $U(1)$ модель фермионов на решётке

Данная модель построена на группе  $U(1)$  фазовых вращений комплексных чисел, обеспечивающей инвариантность фундаментальной физической величины – действия модели. Действие  $S[U, \psi, \bar{\psi}]$  векторной  $U(1)$  модели фермионов на четырёхмерной решётке пространства-времени является суммой действия  $S_G[U]$  поля переносчика взаимодействия и действия  $S_F[U, \psi, \bar{\psi}]$  фермионных частиц [1,9,10]:

$$S[U, \psi, \bar{\psi}] = S_G[U] + S_F[U, \psi, \bar{\psi}].$$

Здесь

$$S_G[U] = \beta \sum_{\substack{x,\mu,\nu \\ \mu < \nu}} \text{Re}(1 - U_{x,\mu} U_{x+\mu,\nu} U_{x+\nu,\mu}^* U_{x,\nu}^*), \quad (1)$$

$$S_F[U, \psi, \bar{\psi}] = \sum_{f=1}^{N_f} \sum_{x,y} \bar{\psi}_x^f \mathbf{M}[U]_{xy} \psi_y^f;$$

$U_{x,\mu} = \exp(iA_{x,\mu})$  – поле переносчика взаимодействия на решётке с вещественным потенциалом  $A_{x,\mu} \in (-\pi, \pi]$ ;  $\beta = 1/e^2$  – обратный квадрат заряда;  $\psi_x^f$  и  $\bar{\psi}_x^f$  – волновые функции фермионов (фермионные поля);  $\mathbf{M}[U]_{xy}$  – фермионная матрица:

$$\mathbf{M}[U]_{xy} = \delta_{xy} - \kappa \sum_{\mu} \left\{ (1 - \gamma_{\mu}) U_{x,\mu} \delta_{x+\mu,y} + (1 + \gamma_{\mu}) U_{y,\mu}^* \delta_{y+\mu,x} \right\}; \quad (2)$$

$\kappa = 1/(8 + 2am)$  – хоппинг-параметр как функция фермионной массы  $m$ ;  $a$  – шаг решётки, выбранный равным  $a = 1$ ;  $\gamma_{\mu}$  – эрмитовы матрицы Дирака размером  $4 \times 4$ ;  $*$  – операция комплексного сопряжения;  $N_f$  – число поколений фермионов;  $x, y$  – узлы четырёхмерной конечной решётки с координатами  $n_{\mu} = 0, 1, \dots, N_{\mu} - 1$ ;  $\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$  – направления решётки. Полное число узлов  $V$ , называемое объёмом решётки, равно

$$V = N_1 N_2 N_3 N_4.$$

Фермионные поля являются антикоммутирующими величинами при перемножении, поскольку это обеспечивает выполнение принципа Паули. Здесь используется система единиц  $\hbar = c = 1$ .

Для расчётов физических характеристик частиц используют корреляционные функции модели частиц (функции Грина). Каждую корреляционную функцию  $\langle O \rangle$  вычисляют методом континуального (функционального) интегрирования величины  $O[U]$  по полям  $U, \psi, \bar{\psi}$  с множителем (весом)  $\exp(-S[U, \psi, \bar{\psi}])$ . В результате интегрирования по фермионным полям  $\psi, \bar{\psi}$  в силу их антикоммутативности при перемножении возникает определитель  $\det^{N_f} \mathbf{M}[U]$ , и формула для корреляционной функции приобретает вид

$$\langle O \rangle = \frac{1}{Z} \int O[U] \exp(-S_G[U]) \det^{N_f} \mathbf{M}[U] [dU], \quad (3)$$

где  $Z$  – нормировочная постоянная.

Фермионные частицы  $U(1)$  модели на четырехмерной решётке имеют различные свойства в разных областях значений обратного квадрата заряда  $\beta$  и хоппинг-параметра  $\kappa$  [2,9,10]. Такие области называют фазами, из которых практический интерес представляют Кулоновская фаза и фаза конфайнмента [2]. Для правильного описания свойств частиц параметры  $\beta$  и  $\kappa$  следует выбирать вблизи линий раздела фаз [9,10].

### 3. Двухшаговый мультибозонный алгоритм

Двухшаговый мультибозонный алгоритм является статистическим методом приближённых и относительно быстрых вычислений корреляционных функций моделей на решётке при произвольном значении числа поколений фермионов  $N_f$ . В данный алгоритм введены вспомогательные поля – мультибозоны, а также мультибозонное дей-

ствии и аппроксимирующие многочлены. При этом формула (3) преобразуется к виду: [7]

$$\langle O \rangle = \frac{\left\langle O[U] \det^{-1} P_4(\mathbf{M}^+[U] \mathbf{M}[U]) \text{sign det}^{N_f} \mathbf{M}[U] \right\rangle_{12}}{\left\langle \det^{-1} P_4(\mathbf{M}^+[U] \mathbf{M}[U]) \text{sign det}^{N_f} \mathbf{M}[U] \right\rangle_{12}}, \quad (4)$$

где

$$\langle A \rangle_{12} = \frac{1}{Z_{12}} \int A[U] \frac{e^{-S_G[U] - S_B[\Phi, U]}}{\det P_2(\mathbf{M}^+[U] \mathbf{M}[U])} [dU d\Phi]. \quad (5)$$

Здесь  $S_G[U]$  – действие поля  $U$  переносчика взаимодействия по (1);  $\mathbf{M}[U]$  – фермионная матрица, определённая по (2);  $^+$  – операция эрмитова сопряжения матрицы;  $Z_{12}$  – нормировочная постоянная;  $S_B[\Phi, U]$  – мультибозонное действие:

$$S_B[\Phi, U] = \sum_{j=1}^{n_1} \Phi_j^+ (\mathbf{M}[U] - \rho_j)^+ (\mathbf{M}[U] - \rho_j) \Phi_j;$$

$\Phi_j$  – вспомогательные поля мультибозоны с  $4V$  комплексными составляющими;  $\rho_j$  – комплексные корни многочлена  $P_1(x^2)$ ;  $P_1(x)$ ,  $P_2(x)$  и  $P_4(x)$  – положительные многочлены степеней  $n_1$ ,  $n_2$  и  $n_4$ , используемые для грубой, промежуточной и точной аппроксимаций функции  $x^{-N_f/2}$  на отрезке  $x \in [\varepsilon, \lambda]$ :

$$\begin{aligned} P_1(x) &\approx x^{-N_f/2}, & P_1(x)P_2(x) &\approx x^{-N_f/2}, \\ P_1(x)P_2(x)P_4(x) &\cong x^{-N_f/2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Интервал  $[\varepsilon, \lambda]$  содержит средние минимальное  $\langle \lambda_{\min} \rangle$  и максимальное  $\langle \lambda_{\max} \rangle$  собственные значения матрицы  $\mathbf{M}^+[U] \mathbf{M}[U]$ , вычисленные по формуле (3).

Поля  $U$  и  $\Phi$  необходимо генерировать случайным образом с весом  $\frac{e^{-S_G[U] - S_B[\Phi, U]}}{\det P_2(\mathbf{M}^+[U] \mathbf{M}[U])}$ . Тогда формула (5) переходит в следующее соотношение, по которому выполняются численные расчёты:

$$\langle A \rangle_{12} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N A[U^{(\alpha)}]. \quad (7)$$

Здесь  $U^{(\alpha)}$  – конфигурация поля  $U$  с номером  $\alpha$ ,  $N$  – число таких конфигураций.

Каждую конфигурацию с номером  $\alpha$  полей  $U$  и  $\Phi$  с весом распределения в формуле (5) получают путём выполнения двух шагов [5,6,7].

В первом шаге каждую новую  $(\alpha + 1)$ -ю конфигурацию поля  $\Phi$  и промежуточную конфигурацию  $U'$  получают из предыдущих  $\alpha$ -х конфигураций  $U$  и  $\Phi$  путём выполнения чередующихся процедур «тепловой бани» (НВ) и верхней релаксации (ОР) [5]:

$$\text{NB} \begin{cases} \Phi'_{j,x,r} = -V_{j,x,r} / A_{j,x,r} + \xi_{j,x,r}, \\ U'_{x,\mu} = (F_{x,\mu} / |F_{x,\mu}|)^{-1} \exp(i\eta_{x,\mu}); \end{cases}$$

$$\text{OR} \begin{cases} \Phi'_{j,x,r} = -\Phi_{j,x,r} - 2V_{j,x,r} / A_{j,x,r}, \\ U'_{x,\mu} = U^*_{x,\mu} (F_{x,\mu} / |F_{x,\mu}|)^{-2}. \end{cases}$$

Здесь  $r$  – индексы элементов матриц Дирака  $\gamma_\mu$ , величины  $V_{j,x,r}$  не зависят от  $\Phi_{j,x,r}$ ,  $A_{j,x,r}$  не зависят от  $\Phi$  и  $U$ ,  $F_{x,\mu}$  не зависят от  $U_{x,\mu}$ , комплексные случайные числа  $\xi_{j,x,r}$  распределены с весом  $\exp(-A_{j,x,r} |\xi_{j,x,r}|^2)$ , а вещественные случайные числа  $\eta_{x,\mu} \in (-\pi, \pi]$  распределены с весом  $\exp(|F_{x,\mu}| \cos \eta_{x,\mu})$ .

Далее выполняют второй шаг алгоритма – шаг принятия-отвержения полей  $U$  [6,7]. В этом шаге поле  $U'$  принимают за поле  $U$  новой,  $(\alpha+1)$ -й конфигурации с вероятностью  $w_{acc}[U', U]$ :

$$w_{acc}[U', U] = \min\left(1, \left\langle \exp(-\xi^+ P_2(\mathbf{M}^+[U']\mathbf{M}[U])\xi + \eta^+\eta) \right\rangle_\eta\right).$$

Здесь обозначено:

$$\langle B \rangle_\eta = \frac{1}{Z_\eta} \int B[\eta] \exp(-\eta^+\eta) [d\eta]; \quad (8)$$

$Z_\eta$  – нормировочная постоянная;  $\eta$  – вектор с  $4V$  комплексными составляющими;  $\xi = P_3(\mathbf{M}^+[U']\mathbf{M}[U])\eta$ ;  $P_3(x)$  – положительный многочлен степени  $n_3$ , аппроксимирующий с высокой точностью функцию  $P_2^{-1/2}(x)$  на отрезке  $x \in [\varepsilon, \lambda]$ :

$$P_3(x) \cong P_2^{-1/2}(x).$$

При вычислениях величин  $\langle O \rangle$  по (4) и (7) значения  $\det^{-1} P_4(\mathbf{M}^+\mathbf{M})$  находят по формуле [7]

$$\det^{-1} P_4(\mathbf{M}^+\mathbf{M}) = \left\langle \exp(-\eta^+ P_4(\mathbf{M}^+\mathbf{M})\eta + \eta^+\eta) \right\rangle_\eta,$$

где используется соотношение (8).

Коэффициенты аппроксимирующих многочленов  $P_k(x)$  с заданными степенями  $n_k$ , где  $k = 1, 2, 3, 4$ , вычисляют интегральным методом наименьших квадратов [11]. А при расчётах матриц  $P_k(\mathbf{M}^+\mathbf{M})$  используют разложение  $P_k(x)$  по ортогональным многочленам [11].

#### 4. Параметры и производительность мультибозонного алгоритма

Для исследования векторной  $U(1)$  модели фермионов двухшаговым мультибозонным алгоритмом необходимо обоснованно выбрать значения исходных параметров данного алгоритма. В противном случае время вычислений существенно увеличится, а результаты расчётов могут быть неправильными [7]. Ниже приведём соотношения для значений исходных параметров и для производительности данного алгоритма при числе поколений фермионов  $N_f = 2$ .

Для расчётов двухшаговым мультибозонным алгоритмом должны быть заданы следующие его исходные параметры: границы  $\varepsilon$  и  $\lambda$  интервала аппроксимаций функции  $x^{-N_f/2}$  по (6) и степени  $n_1, n_2, n_3$  и  $n_4$  аппроксимирующих многочленов.

Установлены соотношения для исходных параметров двухшагового мультибозонного алгоритма, необходимые для быстрых и точных вычислений этим методом [8]:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 0.5\langle\lambda_{\min}\rangle, & \lambda &= (1.2 \text{—} 1.4)\langle\lambda_{\max}\rangle, \\ n_1 &\sim \zeta^{1/4} \ln V, & n_2 &\sim \zeta^{1/2} \ln V, \\ n_3 &\geq n_2, & n_4 &\geq n_2, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $\zeta$  – число обусловленности матрицы  $\mathbf{M}^+[U]\mathbf{M}[U]$ :

$$\zeta = \frac{\langle\lambda_{\max}\rangle}{\langle\lambda_{\min}\rangle}.$$

Здесь  $\langle\lambda_{\min}\rangle$  и  $\langle\lambda_{\max}\rangle$  – минимальное и максимальное собственные значения матрицы  $\mathbf{M}^+[U]\mathbf{M}[U]$ , усреднённые по формуле (3).

Производительностью алгоритма вычислений конкретной корреляционной функции  $\langle O \rangle$  модели на решётке называем величину  $\mathbf{P}$ , равную [8]:

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\langle\mathbf{N}_{\text{op}}\rangle\langle\tau_{\text{int}}\rangle}, \quad (10)$$

где  $\langle\mathbf{N}_{\text{op}}\rangle$  – среднее число компьютерных операций для перехода от конфигурации полей  $U^{(\alpha)}$  к последующей  $U^{(\alpha+1)}$ ;  $\langle\tau_{\text{int}}\rangle$  – интегральное время автокорреляций, равное среднему расстоянию между ближайшими статистически независимыми выборочными значениями  $O[U^{(\alpha)}]$  этой корреляционной функции [10].

Время вычисления корреляционной функции  $\langle O \rangle$  определяется формулой

$$t = t_c \langle\mathbf{N}_{\text{op}}\rangle N = \frac{t_c N_i}{\mathbf{P}},$$

где  $N$  – число конфигураций полей  $U^{(\alpha)}$ ;  $N_i$  – число статистически независимых значений величин  $O[U^{(\alpha)}]$ :

$$N_i = \frac{N}{\langle\tau_{\text{int}}\rangle};$$

$t_c$  – время выполнения одной компьютерной операции. Поэтому лучшим алгоритмом, т.е. алгоритмом с меньшим временем вычислений  $t$ , является алгоритм с большей производительностью  $\mathbf{P}$  при одинаковых параметрах модели  $N_f, V, \beta, \kappa$ , числе  $N_i$  и точности вычислений.

Получены следующие оценки для среднего числа компьютерных операций и для интегрального времени автокорреляций в случае двухшагового мультибозонного алгоритма (TSMB) при числах обусловленности  $\zeta \gg 1$  [8]:

$$\langle\mathbf{N}_{\text{op}}^{\text{TSMB}}\rangle \sim V n_2, \quad \langle\tau_{\text{int}}^{\text{TSMB}}\rangle \sim n_1 \zeta^{1/4}. \quad (11)$$

При использовании мультибозонного алгоритма без второго шага принятия-отвержения полей (МВ) для достижения одинаковой точности с алгоритмом TSMB согласно [5] необходимо взять первый аппроксимирующий многочлен  $P_1(x)$  степени  $n_1^{\text{MB}}$  порядка

$$n_1^{\text{MB}} \sim \zeta^{1/2} \ln V. \quad (12)$$

Кроме того, имеют место оценки для среднего числа компьютерных операций и интегрального времени автокорреляций в случае алгоритма МВ при  $\zeta \gg 1$  [5]:

$$\langle N_{\text{оп}}^{\text{MB}} \rangle \sim V n_1^{\text{MB}}, \quad \langle \tau_{\text{int}}^{\text{MB}} \rangle \sim n_1^{\text{MB}} \zeta^{1/2}. \quad (13)$$

Из (10) с учётом (9) и (11) – (13) получим оценку для отношения производительностей алгоритмов TSMB и МВ при числах обусловленности  $\zeta \gg 1$ :

$$P_{\text{TSMB}} / P_{\text{МВ}} \sim \zeta^{1/2}.$$

Из этой оценки видно, что использование второго шага принятия-отвержения полей приводит к увеличению производительности мультибозонного алгоритма при больших числах обусловленности  $\zeta$ , которые имеют место для параметров  $\beta$  и  $\kappa$  U(1) модели на четырёхмерной решётке в фазе конфайнмента [6,7].

Аналитические и численные исследования [8] показали, что двухшаговый мультибозонный алгоритм и метод гибридного Монте-Карло при одинаковых параметрах U(1) модели на четырёхмерной решётке с числом поколений фермионов  $N_f = 2$ , а также при выборе исходных параметров алгоритмов для быстрых и точных расчётов типа (9), дают одинаковые результаты расчётов корреляционных функций и имеют примерно одинаковые производительности.

## 5. Заключение

В данной работе рассмотрен двухшаговый мультибозонный алгоритм для U(1) модели фермионов на четырёхмерной решетке пространства-времени. Данный алгоритм является статистическим методом получения полей переносчиков взаимодействия с весом, включающим детерминант фермионной матрицы при произвольном числе поколений фермионов. Такие поля необходимы для вычислений корреляционных функций модели. Двухшаговый мультибозонный алгоритм является сложным алгоритмом, включающим в себя многие процедуры и функции.

Приведены соотношения для параметров двухшагового мультибозонного алгоритма применительно к рассматриваемой U(1) модели. Это соотношения для границ интервала аппроксимации и для степеней четырёх аппроксимирующих многочленов. Данные соотношения необходимы для обеспечения достаточно точных и быстрых вычислений данным алгоритмом. Кроме того, проанализированы производительности двухшагового мультибозонного алгоритма и мультибозонного алгоритма только с первым шагом без второго шага принятия-отвержения полей. Показано, что при больших числах обусловленности двухшаговый мультибозонный алгоритм имеет более высокую

производительность по сравнению с мультибозонным алгоритмом только с первым шагом.

Двухшаговый мультибозонный алгоритм с параметрами по установленным зависимостям целесообразно использовать при исследованиях математических моделей фермионов методом решётки.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Wilson, K.G.* Confinement of quarks // *Phys. Rev. D.* 1974. V. 10. P. 2445–2459.
2. *DeGrand, T., Toussaint, D.* Topological excitations and Monte Carlo simulation of Abelian gauge theory // *Phys. Rev. D.* 1980. V. 22. P. 2478–2489.
3. *Duane, S., Kennedy, A., Pendleton, B., Roweth, D.* Hybrid Monte Carlo // *Phys. Lett. B.* 1987. V. 195. P. 216–222.
4. *Gottlieb, S., Liu, W., Toussaint, D., Renken, R., Sugar, R.* Hybrid molecular dynamics algorithms for the numerical simulation of quantum chromodynamics // *Phys. Rev. D.* 1987. V. 35. P. 2531–2542.
5. *Lüscher, M.* A new approach to the problem of dynamical quarks in numerical simulations of lattice QCD // *Nucl. Phys. B.* 1994. V. 418. P. 637–648.
6. *Borici, A., de Forcrand, Ph.* Systematic errors of Lüscher's fermion method and its extensions // *Nucl. Phys. B.* 1995. V. 454. P. 645–662.
7. *Montvay, I.* An algorithm for gluinos on the lattice // *Nucl. Phys. B.* 1996. V. 466. P. 259–284.
8. *Zverev, N.V.* Two Algorithms and Lattice U(1) Model // *Phys. Scripta.* 2005. V. 72. P. 366–372.
9. *Кройц, М.* Кварки, глюоны и решётки. Пер. с англ. М. Мир. 1987. 192 с.
10. *Montvay, I., Münster, G.* Quantum Fields on a Lattice. Cambridge University Press. 1994. 500 pp.
11. *Montvay, I.* Quadratically optimized polynomials for fermion simulations // *Comput. Phys. Commun.* 1998. V. 109. P. 144–160.

### TWO-STEP MULTIBOSON ALGORITHM FOR A DISCRETE U(1) MODEL OF FERMIONS

**N. Zverev**

*Moscow State Regional University  
10a, Radio st., Moscow, 105005, Russia*

*Abstract.* The statistical two-step multiboson algorithm as applied to a U(1) model of fermions on the four-dimensional space-time lattice is considered. It is shown that introduction of the second field accept-reject step leads to increase of performance of the algorithm.

*Keywords:* U(1) models, fermions, algorithms, Monte Carlo method, space-time lattice.

УДК 535.36

## РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА МАЛОЙ МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ ЧАСТИЦЕ

И.А. Кузнецова<sup>\*</sup>, М.Е. Лебедев<sup>\*</sup>, А.А. Юшканов<sup>\*\*</sup>

<sup>\*</sup>Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова  
150003, г. Ярославль, ул. Советская, д. 14

<sup>\*\*</sup>Московский государственный областной университет  
105005, Москва, ул. Радио, 10а

*Аннотация.* В дипольном приближении вычислено сечение рассеяния малой металлической частицы сферической формы, помещенной в поле плоской электромагнитной волны. Радиус частицы предполагается малым по сравнению с характерной глубиной скин-слоя, что позволяет пренебречь скин-эффектом. Расчеты выполнены в рамках кинетического подхода при произвольном соотношении между длиной свободного пробега электронов и радиусом частицы. Рассмотрен диффузный механизм отражения носителей заряда от поверхности частицы. Показано, что при определенных углах рассеяния доминирующим становится магнитное дипольное рассеяние.

*Ключевые слова:* магнитное дипольное рассеяние, уравнение Больцмана, диффузный характер отражения, малая металлическая частица, кинетический подход.

**Введение.** Электрические и оптические свойства малых проводящих частиц (линейный размер частицы много меньше длины волны электромагнитного излучения) могут значительно отличаться от подобных свойств массивных образцов [1,2]. Если радиус частицы  $a$  становится сравним или меньше длины свободного пробега носителей заряда  $\lambda$ , то их взаимодействие с поверхностью начинает оказывать существенное влияние на большинство явлений, происходящих в частице [3]. Такие оптические характеристики частицы, как сечение поглощения и сечение рассеяния, обнаруживают нетривиальную зависимость от отношения  $a/\lambda$ .

В работе рассматривается малая сферическая частица немагнитного металла радиуса  $a$ , находящаяся в поле плоской линейно поляризованной электромагнитной волны частоты  $\omega$ . Результатом взаимодействия частицы с излучением являются два процесса: поглощение излучения частицей, приводящее к ее нагреванию, и рассеяние излучения, характеризующееся угловым распределением интенсивности вторичной волны.

Если размер частицы мал по сравнению с длиной рассеиваемой волны  $\Lambda \sim c/\omega$  ( $a \ll \Lambda$ ), то электромагнитное поле вблизи частицы можно считать однородным. Частица в однородном поле приобретает электрический и магнитный моменты  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{M}$ . Рассеянная волна – результат излучения этими переменными моментами на больших по сравнению с  $\Lambda$  расстояниях от частицы.

Диапазон рассматриваемых частот определяется условием малости вклада плазменного резонанса в диссипацию энергии волны в частице:  $\omega \ll \omega_p$ , где  $\omega_p$  – частота плазменного резонанса. Практически это означает, что  $\omega$  ограничена сверху частотами ближнего ИК-диапазона. Радиус частицы  $a$  считается меньше характерной глубины

скин-слоя  $\delta$ , что позволяет пренебречь скин-эффектом. На соотношение между длиной свободного пробега электронов  $\lambda$  и радиусом частицы  $a$  ограничений не накладываем.

Подробные оценки, выполненные в работе [1] показывают, что для частиц размером 1-10 нм вследствие экранировки электрического поля в частице в рассматриваемом диапазоне частот вклад токов дипольной электрической поляризации в поглощение мал по сравнению с вкладом вихревых токов, индуцируемых магнитным полем волны. В то же время в полном сечении рассеяния доминирует электрическое дипольное рассеяние. Однако, как показано в настоящей работе, для дифференциального сечения рассеяния при определенных углах рассеяния доминирующим становится магнитное дипольное рассеяние.

**Постановка задачи.** С учетом вышеперечисленных допущений определим сечение рассеяния электромагнитного излучения на малой металлической частице радиуса  $a$ . Первоначально рассмотрим сечение магнитного дипольного рассеяния. Задача о его вычислении сводится к нахождению магнитного момента  $\mathbf{M}$ , приобретаемого сферической частицей в переменном магнитном поле. Однородное периодическое во времени магнитное поле  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \exp(-i\omega t)$  порождает вихревое электрическое поле, которое находится из уравнения индукции Максвелла:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \\ \mathbf{E} &= \frac{1}{2c} \left[ \mathbf{r} \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right] = \frac{\omega}{2ic} [\mathbf{r} \times \mathbf{H}_0] \exp(-i\omega t); \end{aligned} \quad (1)$$

где  $c$  – скорость света,  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор электрона,  $\omega$  – угловая частота поля,  $H_0$  – амплитуда магнитного поля волны.

Если радиус частицы больше длины свободного пробега электронов ( $a > \lambda$ ), то выполняется локальный закон Ома:

$$\mathbf{j} = \Sigma_V \mathbf{E};$$

где  $\Sigma_V = \Sigma_0(1 - i\omega\tau)$  – объемная проводимость Друде, являющаяся функцией только частоты излучения  $\omega$ ,  $\Sigma_0 = e^2 n \tau / m$  – статическая проводимость металла;  $e$ ,  $m$  и  $n$  – соответственно заряд, эффективная масса и концентрация электронов;  $\tau$  – время релаксации.

В случаях, когда радиус частицы меньше или сравним с длиной свободного пробега ( $a \leq \lambda$ ) плотность тока  $\mathbf{j}$  становится нелокальной величиной, а проводимость является функцией не только частоты  $\omega$ , но и координат  $\mathbf{r}$ . В этом случае макроскопическая электродинамика неприменима, и для описания связи между электрическим полем  $\mathbf{E}$  и плотностью тока  $\mathbf{j}$  необходим кинетический подход [1-3].

В приближении времени релаксации  $\tau$  и в линейном (по внешнему полю  $\mathbf{E}$  и малым отклонениям от состояния равновесия  $f_1$ ) приближении уравнение Больцмана имеет следующий вид:

$$-i\omega f_1 + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{r}} + e \mathbf{v} \cdot \mathbf{E} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} = -\frac{f_1}{\tau}. \quad (2)$$

Неравновесная функция распределения электронов  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v})$  есть сумма равновесной функции распределения Ферми-Дирака  $f_0(\varepsilon)$  и малой неравновесной поправки  $f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ :

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = f_0(\varepsilon) + f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}); \quad (3)$$

где  $\mathbf{v}$  – средняя скорость электронов,  $\varepsilon$  – кинетическая энергия электрона (далее предполагается квадратичная зависимость энергии электрона от скорости  $\varepsilon = mv^2/2$ ). Для равновесной функции распределения  $f_0(\varepsilon)$  используем ступенчатую аппроксимацию:

$$f_0(\varepsilon) = \theta(\varepsilon_F - \varepsilon) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_F, \\ 0, & \varepsilon > \varepsilon_F; \end{cases} \quad (4)$$

где  $\varepsilon_F = mv_F^2/2$  – энергия Ферми,  $v_F$  – скорость Ферми.

Отклонение системы от состояния равновесия под действием вихревого поля (1), т.е. наличие неравновесной поправки  $f_1$ , обуславливает возникновение вихревого тока внутри частицы:

$$\mathbf{j} = e \int \mathbf{v} f \frac{2d^3(m\mathbf{v})}{h^3} = 2 \left( \frac{m}{h} \right)^3 e \int \mathbf{v} f_1 d^3\mathbf{v}; \quad (5)$$

где  $h$  – постоянная Планка.

Магнитный момент, созданный током (5) имеет вид [4]:

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2c} \int [\mathbf{r} \times \mathbf{j}] dV. \quad (6)$$

Электрический момент в первом приближении по  $1/\varepsilon$ , где  $\varepsilon = 1 + 4i\pi\Sigma_V(\omega)/\omega$  – комплексная диэлектрическая проницаемость металла на частоте  $\omega$ , можно вычислить как момент проводящего ( $\varepsilon \rightarrow \text{inf}$ ) шара радиуса  $a$  в однородном электрическом поле  $\mathbf{E}$ :

$$\mathbf{P} = a^3 \mathbf{E}. \quad (7)$$

На больших (по сравнению с  $\Lambda$ ) расстояниях  $r$  от частицы поле рассеянной волны дается формулами [4]:

$$\mathbf{H}' = \frac{\omega^2}{c^2 r} \{ [\mathbf{n} \times \mathbf{P}] + [\mathbf{n} \times [\mathbf{M} \times \mathbf{n}]] \}, \quad \mathbf{E}' = [\mathbf{H}' \times \mathbf{n}]; \quad (8)$$

где единичный вектор  $\mathbf{n}$  указывает направление рассеяния, а значения  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{M}$  должны быть взяты в момент времени  $(t-r/c)$ ; поле рассеянной волны обозначено буквами со штрихами, поле падающей волны – буквами без штрихов. Средняя интенсивность излучения, рассеянного в телесный угол  $d\omega$ :

$$dI = \frac{1}{2} \frac{c}{4\pi} |\mathbf{H}'|^2 r^2 d\omega. \quad (9)$$

Плотность потока энергии в падающей волне:

$$\frac{c}{8\pi}|\mathbf{H}|^2 = \frac{c}{8\pi}|\mathbf{E}|^2. \quad (10)$$

Отношение интенсивности излучения (9) к плотности потока энергии (10) дает дифференциальное сечение рассеяния:

$$d\sigma = \frac{|H'|^2}{H^2} r^2 d\Omega. \quad (11)$$

После интегрирования (11) по всем углам получим полное сечение рассеяния  $\sigma$ .

Таким образом, задача о вычислении сечения рассеяния сводится к кинетическому расчету магнитного момента (6), созданного вихревым током (5).

**Метод решения и математические расчеты.** Уравнение Больцмана (2) решается методом характеристик [5]:

$$f_1 = \frac{A(\exp(-vt') - 1)}{v},$$

$$v = \frac{1}{\tau} - i\omega, \quad (12)$$

$$A = e\mathbf{v}\mathbf{E} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} = \frac{e\omega}{2ic} \left( \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \right) [\mathbf{v} \times \mathbf{r}] \mathbf{H}_0 \exp(-i\omega t);$$

здесь  $A$  и  $v$  постоянны вдоль траектории,  $t'$  – время движения от границы частицы до точки  $\mathbf{r}$ .

$$t' = \frac{\left\{ \mathbf{r}\mathbf{v} + \sqrt{((\mathbf{r}\mathbf{v})^2 + (a^2 - r^2)v^2)} \right\}}{v^2}. \quad (13)$$

Перейдем к сферической системе координат: вихревое поле (1), а, следовательно, и ток (5), имеют лишь  $\varphi$  – компоненту

$$\mathbf{E} = E_\varphi \mathbf{e}_\varphi, \quad E_\varphi = \frac{i\omega}{2c} r H_0 \sin\theta \exp(-i\omega t),$$

$$j_\varphi = \frac{2m^3 e^2 E_\varphi}{h^3 v} \int \delta(\varepsilon - \varepsilon_F) (1 - \exp(-vt')) v_\varphi^2 d^3 v =$$

$$= E_\varphi \left( \frac{ne^2 a}{m v_F} \right) \frac{3\pi}{4} \int_0^\pi \frac{1 - \exp(-z_0 \eta)}{z_0} \sin^3 \alpha d\alpha. \quad (14)$$

Здесь введены безразмерные переменные:

$$z_0 = \frac{a}{v_F} v = \frac{a}{v_F} (1/\tau - i\omega) = x_0 - iy_0,$$

$$x_0 = \frac{a}{v_F \tau}, \quad y_0 = \frac{a\omega}{v_F}, \quad \eta = \frac{v_F t'}{a};$$

и учтено, что концентрация электронов в металле

$$n = 2 \frac{4\pi}{3} \left( \frac{m}{h} \right)^3 \frac{v_F^3}{a^3}.$$

Для магнитного момента (6), учитывая, что направление тока  $\mathbf{j}$  всегда перпендикулярно направлению радиус-вектора  $\mathbf{r}$ , получим:

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{2c} \iiint r E_\varphi \left[ \left( \frac{ne^2 a}{m v_F} \right) \frac{3}{4} \int_0^\pi \frac{1 - \exp(-z_0 \eta)}{z_0} \sin^3 \alpha d\alpha \right] dV = \\ &= \frac{1}{2c} \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r \cdot \frac{i\omega}{2c} r H_0 \sin \theta \exp(-i\omega t) \cdot \left[ \left( \frac{ne^2 a}{m v_F} \right) \frac{3}{4} \times \right. \\ &\quad \left. \times \int_0^\pi \frac{1 - \exp(-z_0 \eta)}{z_0} \sin^3 \alpha d\alpha \right] r^2 \sin \theta d\theta d\varphi dr = \\ &= \frac{i3\pi^2 a^5}{16c^2} \left( \frac{ne^2 a}{m v_F} \right) \omega (H_0 \exp(-i\omega t)) \int_0^1 \xi^4 \left[ \int_0^\pi \frac{1 - \exp(-z_0 \eta)}{z_0} \sin^3 \alpha d\alpha \right] d\xi \end{aligned} \quad (15)$$

где  $\xi = r/a$ .

Во внутреннем интеграле от интегрирования по углу  $\alpha$  перейдем к интегрированию по  $\eta$ :

$$\int_0^\pi \frac{1 - \exp(-z_0 \eta)}{z_0} \sin^3 \alpha d\alpha = \int_{1-\xi}^{1+\xi} \frac{1 - \exp(-z_0 \eta)}{z_0} \left[ 1 - \frac{(\eta^2 + \xi^2 - 1)^2}{4\eta^2 \xi^2} \right] \frac{\eta^2 - \xi^2 + 1}{2\eta^2 \xi} d\eta.$$

Изменим порядок интегрирования:

$$\int_0^1 (\dots) d\xi \int_{1-\xi}^{1+\xi} (\dots) d\eta \rightarrow \int_0^2 (\dots) d\eta \int_{|\eta-1|}^1 (\dots) d\xi.$$

В результате интеграл в (15) меняется следующим образом:

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \xi^4 \cdot \left[ \int_0^\pi \frac{1 - \exp(-z_0 \eta)}{z_0} \sin^3 \alpha d\alpha \right] d\xi \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{1}{8} \int_0^2 \frac{1 - \exp(-z_0 \eta)}{z_0} \frac{d\eta}{\eta^4} \int_{|\eta-1|}^1 \xi \left[ 4\eta^2 \xi^2 - (\eta^2 + \xi^2 - 1)^2 \right] (\eta^2 - \xi^2 + 1) d\xi. \end{aligned}$$

Вычисление интеграла по  $\eta$  трудоемкое, но не сложное:

$$\int_{|\eta|=1}^1 [4\eta^2 \xi^2 - (\eta^2 + \xi^2 - 1)^2] (\eta^2 - \xi^2 + 1) d\eta = \frac{\eta^4}{8} (4 - \eta^2)^2.$$

После этого вычисление интеграла по  $\xi$  не представляет затруднений, и для магнитного момента (15) получим:

$$\mathbf{M} = i \frac{3\pi^2 n e^2 y_0}{16 c^2 m} a^5 I(x_0, y_0) \mathbf{H}, \quad (16)$$

$$I(x_0, y_0) = \frac{8}{15p} - \frac{1}{p^2} + \frac{4}{p^4} - \frac{24}{p^6} + 8 \left( \frac{1}{p^4} + \frac{3}{p^5} + \frac{3}{p^6} \right) \exp(-p);$$

где  $p = 2z_0 = 2(x_0 - iy_0)$  - безразмерный параметр, определяемый безразмерной частотой поля  $y_0$  и обратной безразмерной длиной свободного пробега электронов  $x_0$ .

Таким образом, магнитный момент (16) пропорционален напряженности магнитного поля  $\mathbf{H}$  [4]

$$\mathbf{M} = -a^3 \gamma \mathbf{H},$$

коэффициент пропорциональности  $(-a^3 \gamma)$  содержит безразмерную величину  $\gamma$ , которую представим в виде:

$$\gamma(x_0, y_0, d) = \frac{-3i\pi y_0 d^2}{64} I(x_0, y_0), \quad (17)$$

$$d = \frac{a}{\delta_{\text{inf}}} = \frac{a}{c/\omega_p} = \frac{4\pi e^2 a}{cm}.$$

Здесь введен безразмерный параметр  $d$ , как величина, обратная характерной глубине скин-слоя в пределе высоких частот  $\delta_{\text{inf}} = c/\omega_p \sim 30$  нм, где  $c$  - скорость света,  $\omega_p$  - частота плазменного резонанса.

Учитывая взаимную перпендикулярность векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , после соответствующих вычислений с учетом (7-8, 11, 16) для дифференциального сечения рассеяния получим следующее выражение:

$$d\sigma(x_0, y_0, \psi, \phi) = \frac{a^6 \omega^4}{c^4} K(x_0, y_0, \psi, \phi) d\omega, \quad (18)$$

$$K(x_0, y_0, \psi, \phi) = |\gamma|^2 \cos^2 \phi + \sin^2 \phi - (\gamma + \gamma^*) \cos \psi + \cos^2 \psi (\cos^2 \phi + |\gamma|^2 \sin^2 \phi);$$

здесь  $\psi$  и  $\phi$  - соответственно полярный и азимутальный углы системы координат, центр которой - в центре частицы, а полярная ось направлена вдоль направления распространения падающей волны (рис.1).

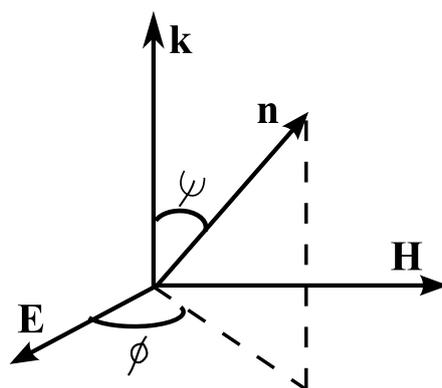


Рис. 1. Система координат, связанная с направлением падающей волны  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{n}$  – направление рассеянной волны.

Коэффициент  $K(x_0, y_0, \psi, \phi)$ , назовем его безразмерным дифференциальным сечением рассеяния, определяет зависимость сечения рассеяния от параметров  $x_0, y_0$  и от углов  $\psi$  и  $\phi$ . Представим его в виде суммы трех компонент

$$\begin{aligned} K(x_0, y_0, \psi, \phi) &= K_E(\psi, \phi) + K_M(x_0, y_0, \psi, \phi) + K_I(x_0, y_0, \psi, \phi), \\ K_E &= \sin^2 \phi + \cos^2 \psi \cos^2 \phi, \\ K_M &= |\gamma|^2 \cos^2 \phi + \cos^2 \psi |\gamma|^2 \sin^2 \phi, \\ K_I &= -(\gamma + \gamma^*) \cos \psi. \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь  $K_E$  и  $K_M$  - составляющие безразмерного дифференциального сечения рассеяния, обусловленные электрическим и магнитным моментом соответственно,  $K_I$  – перекрестная компонента, возникающая вследствие наложения рассеянных волн, излучаемых электрическим и магнитным моментами.

Сумму  $K_M + K_I$  обозначим  $K_M$ , именно эти составляющие содержат величину  $\gamma$  (17), учитывающую вклад кинетических эффектов, обусловленных диффузным отражением электронов от сферической поверхности частицы.

**Обсуждение результатов.** На рис. 2 представлены зависимости отношения  $K_M/K$  от угла  $\phi$  при различных углах  $\psi$  между направлением падения и рассеяния волны при фиксированных значениях параметров  $x_0=0,1, y_0=0,1, d=0,1$ . Для наглядности каждая из зависимостей нормирована на ее максимальное значение, достигаемое при углах  $\phi=0, \phi=\pi$ . Наблюдается симметрия углового рассеяния относительно плоскости  $\phi=0, \phi=\pi$ , характерная для дипольного приближения. Видно, что при стремлении  $\psi$  к  $\pi/2$  угловая зависимость  $K_M/K$  становится резко анизотропной.

На рис. 3 представлены зависимости  $K_M/K(\psi)$ , в пределах  $\pi/2 \pm \delta$ , где  $\delta$  - малая поправка к углу  $\psi$ . Видно, что при относительно малых значениях  $x_0$  (относительно мелкие частицы или большие  $\lambda$ ) в рассматриваемом угловом диапазоне преобладает магнитное дипольное рассеяние. Влияние интерференционного члена  $K_I$  мало и приводит к наблюдаемой асимметрии относительно плоскости  $\phi=0, \psi=\pi/2$ . Из графиков видно, что асимметрия достигает максимального значения на границах рассматриваемого диапазона и составляет до 3% от среднего значения. Следовательно,

вклад инетрференционного члена  $K_I$  в безразмерное сечение рассеяния в десятки раз меньше вклада магнитного члена  $K_M$ .

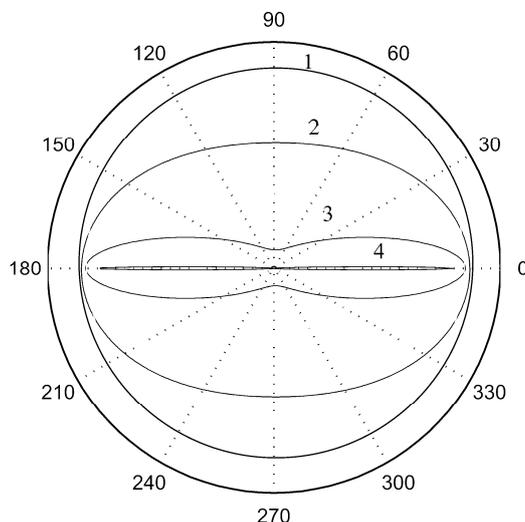


Рис. 2. Зависимость  $K_{M1}/K$  от угла  $\phi$  при  $x_0=0,1$ ,  $y_0=0,1$ ,  $d=0.1$ . Кривые 1, 2, 3, 4 –  $\psi=\pi/100$ ,  $\pi/5$ ,  $2\pi/5$ ,  $(\pi/2-\delta)$ ,  $\delta$  – малый угол.

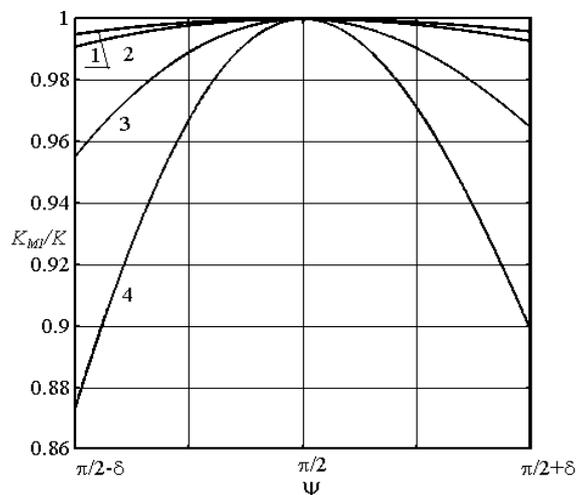


Рис. 3. Зависимость  $K_{M1}/K$  от угла  $\psi$  в пределах  $\pi/2 \pm \delta$  ( $\delta = 10^{-4}$  рад) при  $\phi=0$ ,  $y_0 = 2$ ,  $d=0.2$  и различных значениях  $x_0$ : кривые 1, 2, 3, 4 -  $x_0 = 0.1$ ; 1; 5; 10 соответственно.

На рис. 4 представлены зависимости безразмерного дифференциального сечения рассеяния  $K(\psi)$  при тех же значениях параметров  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $d$ , что и на рис.3. Из графиков следует, что с уменьшением параметра  $x_0$  безразмерное дифференциальное сечение рассеяния возрастает. Отметим, что этот размерный эффект является следствием кинетического расчета и не проявляется в рамках макроскопической теории.

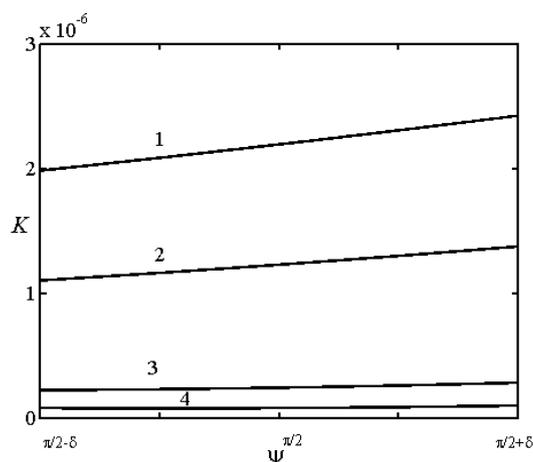


Рис. 4. Зависимость  $K$  от угла  $\psi$  в пределах  $\pi/2 \pm \delta$  ( $\delta = 10^{-4}$  рад) при  $\phi=0$ ,  $y_0=2$ ,  $d=0.2$  и различных значениях  $x_0$ : кривые 1, 2, 3, 4 -  $x_0 = 0.1; 1; 5; 10$  соответственно.

На рис. 5 представлена спектральная зависимость вклада магнитной составляющей в сечение рассеяния.

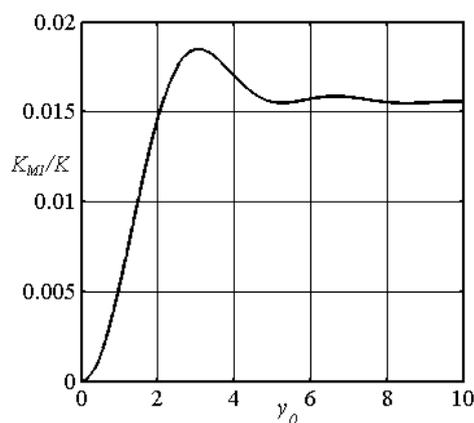


Рис. 5. Зависимость  $K_{M1}/K$  от безразмерной частоты  $y_0$  при  $x_0=0.01$ ,  $d=0.1$ ,  $\psi=\pi/2$ ,  $\phi=\pi/1000$ .

При  $x_0 \ll 1$  (низкие температуры, чистые образцы) в высокочастотной области ( $y_0 > 1$ ) наблюдаются затухающие осцилляции. Поскольку при углах, близких к  $\psi = \pi/2$  и  $\phi = 0$ , доминирующим является магнитное дипольное рассеяние, зависящее от кинетики электронов, то форма его спектра оказывается непосредственно связанной с механизмом поверхностного отражения носителей заряда. Экспериментальное исследование полного сечения рассеяния в этом угловом диапазоне может позволить сделать вывод о поведении магнитной дипольной составляющей рассеяния. Кроме того, изучение характеристик магнитного дипольного рассеяния может дать информацию относительно кинетики электронов в металлической частице. На низкочастотном электрическом рассеянии характер поведения электронов в частице практически не сказывается.

**Заключение.** В работе показано, что в определенном угловом диапазоне в направлении, перпендикулярном к направлению распространения падающей волны (т.е. к волновому вектору  $k$ ), магнитное дипольное рассеяние становится доминирующим. При этом кинетические размерные эффекты оказывают существенное влияние на величину сечения рассеяния: с уменьшением безразмерной обратной длины свободного пробега электронов  $x_0$  безразмерное сечение рассеяния возрастает.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Лескис А.Г., Пастернак В.Е., Юшканов А.А. Поглощение инфракрасного излучения в мелкой металлической частице. // ЖЭТФ. - 1982. - Т.83. - Вып. 1(7). - С. 310-317.
2. Томчук П.М., Томчук Б.П. Оптическое поглощение малых металлических частиц // ЖЭТФ. - 1997. - Т. 112. - Вып. 2(8). - С. 661 – 678.
3. Завитаев Э.В., Юшканов А.А. Зависимость электрической проводимости тонкой цилиндрической проволоки в продольном магнитном поле от характера отражения электронов // ЖЭТФ. - 2006. - Т. 130. - Вып. 5. - С. 887-894.
4. Ландау Л.Д. Лифшиц Е.М. Теоретическая физика, т. 8. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. - 620 с.
5. Р. Курант. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. - 830 с.
6. Хюлт Г. ван де. Рассеяние света малыми частицами. М.: Издательство иностранной литературы, 1961. – 537с.
7. Мусеев И.О., Юшканов А.А., Яламов Ю.И. Распределение плотности тока внутри мелкой металлической частицы в поле электромагнитной волны // Оптика и спектроскопия. – 2008. – том 105. - № 4. - С. 685-690.
8. Завитаев Э.В., Юшканов А.А. Влияние характера отражения электронов на электромагнитные свойства неоднородной сферической частицы // ЖЭТФ. - 2004. - Т. 126. - Вып. 1(17). - С. 203-214.

#### ELECTROMAGNETIC WAVES SCATTERING ON FINE METAL PARTICLE

**I. Kuznetsova<sup>\*</sup>, M. Lebedev<sup>\*</sup>, A. Yuskanov<sup>\*\*</sup>**

*<sup>\*</sup>P.G. Demidov Yaroslavl State University  
150003, 14 Sovetskaya St., Yaroslavl, Russia*

*<sup>\*\*</sup>Moscow State Regional University  
10a, Radio St., Moscow, 105005, Russia*

*Abstract.* Scattering cross section of small metal spherical-shaped particle in the field of a plane electromagnetic wave was calculated under the dipole approximation. The radius of the particle is assumed to be small comparing with the skin depth, the fact allowed us to neglect the skin effect. The calculations are performed in terms of kinetic approach with an arbitrary ratio between the mean free path of electrons and the particle radius. Type of carrier – surface interaction mechanism considered is fully diffuse reflection. It is shown that at certain angles of scattering magnetic dipole scattering is the dominant.

*Keywords:* magnetic dipole scattering, Boltzmann's equation, diffuse reflection mechanism, small metal particle, kinetic approach.

УДК 533.6.011

## **АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЭФФЕКТА ВЫСОКОСКОРОСТНОЙ ПОСТУПАТЕЛЬНОЙ НЕРАВНОВЕСНОСТИ**

**М.М. Кузнецов, Л.В. Смотров**

*Московский государственный областной университет  
105005, Москва, ул. Радио, 10а*

*Аннотация.* Рассмотрен аналитический метод исследования структуры ударной волны с поступательно неравновесными химическими реакциями. Метод основан на эллиптической бимодальной аппроксимации функции распределения молекул, примененной к определению скоростей барьерных химических процессов.

*Ключевые слова:* кинетика, уравнения, неравновесный, химический, реакция, ударная волна, распределение, молекулярный.

Эффект высокоскоростной поступательной неравновесности, заключающийся в значительном превышении количества пар активных молекул внутри фронта ударной волны над соответствующим количеством пар с поступательно равновесным максвелловским распределением за ее фронтом, был установлен ранее в работе [1] на основе численного моделирования методом Монте-Карло.

Чисто аналитическое исследование этого эффекта на основе т.н. эллипсоидального распределения, позволило получить в явном виде функцию распределения пар молекул внутри фронта ударной волны [2].

Наличие такого аналитического выражения позволяет, в принципе, в каждом конкретном случае для рассматриваемого типа физико-химических процессов получить соответствующее аналитическое представление для констант скоростей поступательно неравновесных химических реакций.

Полученная в явном виде зависимость функции распределения пар молекул от определяющих макроскопических параметров, позволила также выделить четыре основных фактора, определяющих явление высокоскоростной поступательной неравновесности и трактовать их как специфические аналитические свойства анизотропного (по «продольной» и «поперечной» кинетическим температурам) эллипсоидального распределения в ударной волне [2].

В настоящей работе обсуждается связь аналитических свойств функции распределения пар молекул с физическими факторами, вызывающими ускоренное протекание кинетических процессов внутри фронта ударной волны и приводится ряд конкретных результатов для принятых в физическом эксперименте модельных сечений кинетических процессов.

Как оказалось, несмотря на все разнообразие систем активированных химических реакций, эффект высокоскоростной поступательной неравновесности в главном асимптотическом приближении (при значительном превышении кинетической энергии молекул над энергией их теплового движения) может быть учтен универсальной формулой, включающей все основные физические факторы, определяющие этот эффект.

Наиболее сложной составляющей в аналитическом выражении функции распределения пар молекул в ударной волне (при использовании бимодальной аппроксимации Тамма-Мотт-Смита) является т.н. «перекрестная» мода  $G_{ij}^{(neq)}$

Для удобства аналитического исследования выражение для функции  $G_{ij}^{(neq)}$  удобно записать в безразмерной форме, перенормировав, полученное ранее в работе [2] выражение для  $G_{ij}^{(neq)}$  на характерную величину тепловой скорости молекул  $V_T$ , связанную с эффективной «поперечной» температурой  $T_{ij}^\perp$  в смеси идеальных газов с компонентами (i, j).

Это выражение, нормированное на единицу, т.е.  $\int_0^\infty G_{ij}^{(neq)} d\zeta = 1$ , имеет следующий вид:

$$G_{ij}^{(neq)} = A_{ij}^{(neq)} (\Delta V_{ij})^{-1/2} \left\{ \exp[-V_{ij}(\zeta - \eta)^2] \cdot \exp(-\zeta_+^2) \cdot \text{Erfi}(\zeta_+) + \exp[-V_{ij}(\zeta + \eta)^2] \exp(-\zeta_-^2) \text{Erfi}(\zeta_-) \right\}. \quad (1)$$

Здесь  $A_{ij}^{(neq)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} V_{ij}$ ,  $V_{ij} = T_{ij}^\perp / T_{ij}^\parallel$ ,  $T_{ij}^\parallel = (T_i^\parallel m_j + T_j^\parallel m_i) / (m_i + m_j)$ ,  $\Delta V_{ij} = 1 - V_{ij}$ ,

$$\zeta = g_{ij} V_T^{-1}, \quad V_T = \sqrt{\frac{2kT_{ij}^\perp}{\mu_{ij}}}, \quad T_{ij}^\perp = (m_i T_j^\perp + m_j T_i^\perp) / (m_i + m_j), \quad \mu_{ij} = m_i m_j / (m_i + m_j),$$

$k$  – постоянная Больцмана,

$g_{ij}$  – скорость относительного движения молекул с массами  $m_i$  и  $m_j$ ,  $\eta_{ij} = U_{ij} V_T^{-1}$ .

$U_{ij}$  – средне-массовая макроскопическая скорость относительного движения континуумов смеси газов сортов i и j,  $U_{ij} = U_i - U_j$ ,  $\zeta_{\pm ij} = \sqrt{\Delta V_{ij}} \zeta \pm \eta_{ij} V_{ij} / \sqrt{\Delta V_{ij}}$ ,  $\text{Erfi}(x)$  – интеграл вероятности мнимого аргумента:

$$\begin{aligned} \text{Erfi}(x) &= -i \text{Erfi}(ix), \quad i^2 = -1 \\ \text{Erfi}(x) &= \int_0^x \exp(t^2) dt. \quad [3] \end{aligned}$$

(В дальнейшем для удобства записи формул индексы i и j, будут опущены)

Важно отметить, что параметр  $V_{ij} \equiv V$ ,  $\Delta V_{ij} \equiv \Delta V$  ударной волны [1, 4, 5] и эксперимент [6] оказываются существенно меньше единицы.

Это обстоятельство позволяет в целях построения максимально упрощенной и наглядной аналитической оценки эффекта высокоскоростной поступательной неравновесности применить асимптотический подход к дальнейшему анализу распределения пар молекул (1) (где  $G_{ij}^{(neq)} \equiv G^{(neq)}$ ). Полагая величину  $\Delta V$  асимптотически малой  $\Delta V \rightarrow 0$ , получим, что аргументы  $\zeta_\pm$  в выражениях для интегралов вероятности мнимого аргумента становятся асимптотически большими по сравнению с единицей  $\zeta_\pm \gg 1$ , т.к. величина  $(\eta V / \sqrt{\Delta V})$  при

$$\Delta V \rightarrow 0, \quad \eta \approx 1, \quad V \approx 1 \quad (2)$$

асимптотически стремится к бесконечности.

Важно отметить, что предельный переход  $(\eta V / \sqrt{\Delta V}) \rightarrow \infty$  возможен не только в случае (2), но и в случае

$$\eta \gg 1, \quad \Delta V \approx 1, \quad V \approx 1, \quad (3)$$

что физически соответствует большим значениям макроскопической скорости «U» относительного движения континуумов газов сортов *i* и *j*, сталкивающихся в ударной волне, по сравнению со скоростью теплового движения  $V_T$

Асимптотическое условие (2) реально выполняется в однокомпонентных или релеевских смесях газов с большим преобладанием концентрации легкой компоненты  $n_l$  над концентрацией  $n_h$  тяжелой, при  $n_l \gg n_h$  и  $m_l \ll m_h$  [1].

Случай (3) наиболее интересен для рассматриваемой теории, т.к. эффект высокоскоростной поступательной неравновесности в ударной волне был обнаружен при наличии высокопороговых процессов электронного возбуждения молекул [8-10] или их высокопороговой диссоциации, лимитирующей времена рождения активных радикалов в реакциях горения [11].

Выполнение асимптотического случая (3) может быть обеспечено при разгоне потока смеси газов до скорости  $U$ , сравнимой с пороговой скоростью  $U_0$ , где  $\frac{\mu U_0^2}{2} \approx E_0$  ( $E_0$ - пороговая энергия активации).

Случай (3) реализуется также в столкновениях молекул двух сравнимых по массе тяжелых компонентов в трехкомпонентных газах, сильно разбавленных третьей, легкой компонентой [7].

В обоих случаях, используя при  $\zeta \gg 1$  связь функций  $Erfi(\zeta)$  с вырожденной гипергеометрической функцией  $\hat{O} = \left( \frac{1}{3}, \frac{3}{2}; \zeta^2 \right)$  [3], т.е.

$$Erfi(\zeta) = \zeta \hat{O} \left( \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \zeta^2 \right) \quad (4)$$

получим

$$Erfi(\zeta) \approx (1/2\zeta) \exp(\zeta^2) \quad (5)$$

Функция распределения пар молекул (1) в силу соотношения (5) преобразуется к виду:

$$G^{(neq)} = A^{(neq)} (\Delta V)^{-1/2} \left\{ \exp[-V(\zeta - \eta)^2] (2\zeta_+)^{-1} + \exp[-V(\zeta + \eta)^2] (2\zeta_-)^{-1} \right\} \quad (6)$$

Наличие выражения (6) позволяет получить, в частности, аналитические представления констант поступательно неравновесных высокопороговых химических реакций  $K^{(neq)}$  для наиболее часто используемых в практических приложениях моделей сечения процессов  $\sigma(\zeta)$ , когда эти сечения зависят только от энергии относительного движения сталкивающихся молекул и не зависят от их внутренних (квантовых) состояний (раздел 9 [12]):

$$K^{(neq)} = \int_{\zeta_0}^{\infty} G^{(neq)} \sigma(\zeta) d\zeta \quad (7)$$

Здесь  $\zeta_0 = \sqrt{\frac{\mu E_0}{2kT^\perp}}$   $E_0$  - энергия активации неупругих соударений частиц компонентов «i» и «j» смеси газов.

Например, для модели твердых сфер радиуса  $R_0$  с активацией радиальной составляющей энергии относительного движения частиц вдоль линии, соединяющей их центры масс (раздел 9 с.43 [12]), сечение  $\sigma(\zeta)$  имеет вид:

$$\sigma(\zeta) = \begin{cases} 0, & \zeta \leq \zeta_0 \\ \pi R_0^2 (1 - \zeta_0^2 / \zeta^2), & \zeta > \zeta_0 \end{cases} \quad (8)$$

Подставляя соотношения (6) и (8) в формулу (7) и применяя при  $\zeta_0 \gg 1$  асимптотический метод Лапласа [13], получим:

$$K^{(neq)} = \left[ (\pi R_0^2) \left( \frac{2}{\sqrt{\pi}} \right) V_T \right] \left\{ \frac{\sqrt{\pi}}{4} (\eta^2 + \frac{1}{2V} - \zeta_0^2) [(V_-)^{-1} \operatorname{erfc}(\sqrt{V}(\zeta_0 + \eta)) + (V_+)^{-1} \operatorname{erfc}(\sqrt{V}(\zeta_0 - \eta))] + \right. \\ \left. + (1/2 V^{1/2}) \exp[-V(\zeta_0^2 + \eta^2)] \left[ \eta \left[ (2V_+)^{-1} \exp(2V\zeta_0\eta) - (2V_-)^{-1} \exp(-2V\zeta_0\eta) \right] + \right. \right. \\ \left. \left. + \zeta_0 \left[ (2V_+)^{-1} \exp(2V\zeta_0\eta) + (2V_-)^{-1} \exp(-2V\zeta_0\eta) \right] \right] \right\} \quad (9)$$

Здесь  $V_+ = \sqrt{\Delta V} \zeta_+$ ,  $V_- = \sqrt{\Delta V} \zeta_-$ .

Выражение (9) при  $\Delta V \rightarrow 0, V = 1$  точно переходит в формулу для константы скорости поступательно неравновесной активированной реакции, полученной ранее в работе [14]. При учете анизотропии поля кинетических температур в ударной волне (т.е. при  $T^{\parallel} = T^\perp$  или  $\Delta V \neq 0, V < 1$ ) наиболее сильное влияние этого фактора математически будет проявляться через аргументы экспонент и интеграла ошибок в формуле (9).

В формуле (9) содержится также и переход к поступательно равновесному газу, когда  $V \rightarrow 0$  и  $\eta \rightarrow 0$ . В этом случае получается чисто аррениусовская зависимость:

$$K^{(eq)} = \left[ \pi R_0^2 \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot V_T \right] \exp(-\zeta_0^2) \quad (10)$$

Как отмечалось ранее в работе [9] влияние анизотропии поля температур в ударной волне может быть значительным:

$$\Delta V = \frac{T'^{\parallel} - T^{\perp}}{T'^{\parallel}} \sim 1,$$

чем и объяснялось возбуждение электронных уровней ряда атомов и молекул ударной волны при кинетических энергиях потока  $\frac{\mu g^2}{2}$  значительно меньших барьера

активации  $E_0$  ( $\frac{\mu g^2}{2} < 0,5 \text{ эВ}$ ,  $E_0 \sim 10 \text{ эВ}$ ). Математическое выражение этого свойства, согласно формулам (1),(2),(9) заключается в том, что параметр  $V$ , входящий в соответствующие экспоненциальные зависимости, представляет собой отношение температур  $\frac{T^{\perp}}{T'^{\parallel}}$ , ограничивающих постоянную кинетическую температуру  $T$  по разные стороны ее изменения:  $T'^{\parallel} > T$  и  $T^{\perp} < T$

Для практических приложений представляется существенным рассмотреть вопрос об аналитической связи констант скоростей поступательно-равновесных  $K^{(eq)}$  и неравновесных  $K^{(neq)}$  реакций с высоким порогом активации  $(E_0/kT) \gg 1$ .

Заметим, что константа  $K^{(eq)}$  зависит от полной кинетической температуры  $T$ , а константа  $K^{(neq)}$  от ее составляющих  $T'^{\parallel}$  и  $T^{\perp}$  причем,

$$T = (1/3)T'^{\parallel} + (2/3)T^{\perp}$$

как это следует из формального определения величин  $T$ ,  $T'^{\parallel}$ ,  $T^{\perp}$  [15].

В связи с этим для сопоставления величин  $K^{(neq)}$  и  $K^{(eq)}$  оказывается удобным выразить функцию распределения  $G^{(neq)}$  через безразмерные скорости относительно-го движения пар молекул,

$$c_r = \sqrt{2kT/\mu} \cdot g$$

Тогда выражения для рассматриваемых констант скоростей  $K^{(eq)}$  и  $K^{(neq)}$  соответственно примут вид

$$K^{(eq)} = \int_{c_0}^{\infty} c_r^3 \sigma(c_r) \exp(-c_r^2) dc_r^2 \quad (11)$$

$$K^{(neq)} = (1/2 c_r \sqrt{\Delta\theta}) \int_{c_0}^{\infty} \exp(-\theta_{\perp} c_r^2) \exp(-\theta_{\parallel} S^2) \exp(-\theta_{\parallel}^2 S^2 / \Delta\theta) \cdot \\ \cdot [Erfi(Z_+) + Erfi(Z_-)] c_r^2 \sigma(c_r) dc_r \quad (12)$$

Здесь  $c_r = V_e^{-1} \cdot g$ ,  $V_e = \sqrt{2kT/\mu}$ ,  $\theta_{\parallel} = T_{\parallel}/T$ ,  $\theta_{\perp} = T_{\perp}/T$ ,  $\Delta\theta = \theta_{\perp} - \theta_{\parallel}$ ,  $S = V_e^{-1} \cdot u$ ,  $Z_{\pm} = \sqrt{\Delta\theta} \cdot c_r \pm \theta_{\parallel} S (\Delta\theta)^{-1/2}$ ,  $c_0 = (\sqrt{2\mu E_0}) V_e^{-1}$ .

Для перехода к размерным константам скоростей  $K^{(eq)}$ ,  $K^{(neq)}$  их надо умножить на частоту соударений  $\frac{4}{\sqrt{\pi}}(n_i n_j)V_e$ , где  $(n_i, n_j)$  - концентрации соответствующих компонентов смеси.

В случае модели твердых сфер при отсутствии энергетического барьера реакции ( $c_0 = 0$ ) константа поступательно равновесных реакций (11) переходит в известное выражение для полного числа упругих столкновений  $N_{ij}$  молекул сорта «i» с молекулами сорта «j» в единицу времени в единице объема смеси газов [4].

$$N_{ij} = \pi d_{ij}^2 \sqrt{8kT/\pi\mu_{ij}} (n_i n_j) \quad (13)$$

Здесь  $d_{ij} = (d_i + d_j)/2$ , где  $(d_i, d_j)$  - диаметры молекул-«шаров» сортов «i» и «j» соответственно.

В случае модели сечения столкновений (8) формула для  $K^{(neq)}$  (12) совпадает с формулой (9).

Покажем, что для высокопороговых бимолекулярных эндотермических реакций при  $c_0 \gg 1$  величина  $K^{(neq)}$  может быть непосредственно выражена через величину  $K^{(eq)}$ , умноженную на коэффициент, содержащий в себе одно влияние всех четырех основных факторов [2], определяющих эффект высокоскоростного «перехлеста» [1].

Обозначим символом  $F(c_r)$  произведение следующих сомножителей:

$$F(c_r) \equiv \exp(c_r^2) \exp(-\theta_{\perp} c_r^2) \exp(-\theta_{\parallel} S^2) \cdot \exp(-\theta_{\parallel}^2 S^2 / \Delta\theta) \cdot (c_r \Delta\theta)^{-1} \cdot \int_{Z_+}^{Z_-} \exp(t^2) dt \quad (14)$$

С учетом соотношения (14) формула для  $K^{(neq)}$  (13) может быть записана так:

$$K^{(neq)} = \int_{c_0}^{\infty} F(c_r) d[-K^{(eq)}(c_r)] \quad (15)$$

Где функция  $K^{(eq)}(c_r)$  равна

$$K_{c_r}^{(eq)} = \int_{c_r}^{\infty} c_r^3 \sigma(c_r) \exp(-c_r^2) dc_r \quad (16)$$

При  $c_r = c_0$  формулы (16) и (11) совпадают. Формула (15), после интегрирования по частям, примет вид:

$$K^{(neq)} = F(c_0) \cdot K^{(eq)}(c_0) + \int_{c_0}^{\infty} K^{(eq)}(c_r) \cdot dF(c_r) \quad (17)$$

При больших значениях величины  $c_0$  по сравнению с единицей ( $c_0 \gg 1$ ), т.е. в случае значительного превосходства по величине барьера энергии  $E_0$  над энергией теп-

лового движения частиц  $\mu V_T^2/2$ , значение интеграла в формуле (17) асимптотически (в главном приближении по параметру  $1/c_0^2$ ) будет определяться изменением подынтегрального выражения в окрестности точки  $c_r = c_0$ . В силу этого значение интеграла в формуле (17) может быть асимптотически оценено следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{\infty} K^{(eq)}(c_0) dF(c_r) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} [\exp(c_r^2) K_{(c_r)}^{(eq)}] \cdot [\exp(-c_r^2) dF(c_r)] \equiv \exp(c_0^2) K_{(c_0)}^{(eq)} \cdot \int_0^{\infty} \exp(-c_r^2) dF(c_r) \quad (18)$$

Применяя вновь интегрирование по частям к выражению (18) и подставляя результат в формулу (17), приведем её к следующему структурному виду:

$$K^{(neq)} = Q(c_0, S, \theta_{//}, \theta_{\perp}) \quad (19)$$

Коэффициент  $Q(c_0, S, \theta_{//}, \theta_{\perp})$  в формуле (19) зависит от четырех параметров, определяющих влияние четырех основных физических факторов [2] на величину высокоскоростной поступательной неравновесности в ударной волне [1].

В более подробной записи коэффициент  $Q(c_0, S, \theta_{//}, \theta_{\perp})$  будет равен:

$$Q(c_0, S, \theta_{//}, \theta_{\perp}) = (\sqrt{\pi}/\sqrt{\theta_{//} \Delta \theta}) \cdot \exp(c_0^2) \cdot \{F(Z_{0,+}) \operatorname{Erfc}[\sqrt{\theta_{//}}(c_0 - S)] + F(Z_{0,-}) \operatorname{Erfc}[\sqrt{\theta_{//}}(c_0 - S)]\} \equiv (\sqrt{\pi}/\sqrt{\theta_{//} \Delta \theta}) F(Z_{0,+}) \cdot \exp[\theta_0 - \theta_{//}(\sqrt{\theta_0} - S)^2] \quad (20)$$

здесь  $F(Z) = \exp(-Z^2) \operatorname{erfi}(Z)$ ,  $\operatorname{Erfc}(Z) = \sqrt{\pi}/2 - \operatorname{Erf}(Z)$ ,  $Z_{0,\pm} = \sqrt{\Delta \theta} c_0 \pm \theta_{//} S / \sqrt{\Delta \theta}$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Генич А.П., Куликов С.В., Манелис Г.Б., Черешнев С.Л. Распределение молекулярных скоростей во фронте ударной волны в газовых смесях. – Изв. АН СССР, Механика жидкостей и газа. -1990. №2, с. 144-150.
2. Кузнецов М.М., Кулешова Ю.Д., Смотрова Л.В. Эффект высокоскоростной поступательной неравновесности в бимодальной ударной волне. Вестник МГОУ. Сер. № «Физика-математика», 2012, №2 с.108-115.
3. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.Н. Интегралы и ряды, Наука, Гл. ред. Физ-мат. лит., 1981 г.
4. Bird G.A., Shock wave structure in Gas Mixtures. Proceed. of the 14-th. Int. Symp. on Rare Gas Dyn., ed. by H.Oguchi, V.1, 1985, pp. 175-182.
5. В.В. Аристов, Черемисин Ф.Г.. Прямое численное решение кинетического уравнения Больцмана. Изд.ВЦ РАН, М., 1992 г.,187 с.

6. *Muntz E.P., Harnett L.N. Molecular Velocity Distribution Function Measurement in a Normal Shock Wave. The Physics of Fluids, V.12, No 10, 1969, pp.2027-2035*
7. *Куликов С.В. Поступательная неравновесность трехкомпонентного газа во фронте ударной волны. Изв. АН. СССР, Мех. жидкости и газа. №4, 1997, 171-178*
8. *Генич А.П., Куликов С.В., Соловьев М.Е., Черешнев С.Л. Влияние поступательной неравновесности в ударной волне на скорость элементарных молекулярных процессов. Фундаментальные проблемы физики ударных волн. Тезисы докладов т.1., Часть 2, 1987 г., с. 240-242.*
9. *Козлов П.В., Лосев С.А., Романенко Ю.В. Поступательная неравновесность во фронте ударной волны в смеси аргона и гелия. Письма в ЖТФ, 2000, т.26, вып. 22, с.69-75*
10. *Великодный В.Ю., Емельянов А.В., Еремин А.В., Неадиабатическое возбуждение молекул йода в зоне поступательной неравновесности ударной волны. ЖТФ, т.69, в.10,1999. с.23-33*
11. *Диваков О.Г., Еремин А.В., Зиборов В.С., академик В.Е. Фортов. Неравновесное воспламенение кислородно-водородных смесей во фронте слабой ударной волны. Доклады РАН ,т.373,№4, 2000,с. 487-490.*
12. *Физико-химические процессы в газовой динамике. Компьютеризованный справочник в 3-х томах. Том 1. Динамика физико-химических процессов в газе и плазме. Под редакцией Черного Г.Г. и Лосева С.А. – М.:Изд. Московского университета, 1995 г. 350 с.*
13. *Олвер Ф. Введение в асимптотические методы и специальные функции – М.: «Наука», Главн. Редакция физ.-мат. лит. 1978 г.*
14. *Великодный В.Ю. Влияние средних парциальных параметров на кинетику химических реакций. Молекулярная газодинамика и механика неоднородных сред – М.: Наука, 1990, -с.41-50.*
15. *Sinclair M. and de Leeuw J.H. A Monte Carlo Solution to a Molecular Diffusion Shock Problem. Advances in Applied Mechanics. Suppl.5, Rar. Gas. Dyn., 1969, v.1, pp. 319-326.*

## **ANALYTICAL QUALITIES OF HIGHVELOCITY TRANSLATIONAL NONEQUILIBRIUM IN SHOCK WAVE**

**M. Kuznetsov, L. Smotrova**

*Moscow State Regional University  
10a, Radio St., Moscow, 105005, Russia*

*Abstract.* The analytical method of investigating the structure of shock wave front with nonequilibrium translational chemical reaction is considered. The method is based on elliptic bimodal approximation of the function of the molecules distribution in connection with the analysis of the barrier chemical processes rates.

*Keywords:* kinetic, equation, nonequilibrium, chemical, reaction shock wave, distribution, molecular.

УДК 681.883.7

**АНАЛИЗ ПРОЦЕССОВ ПРОЕКТИРОВАНИЯ И ТЕХНОЛОГИИ  
НАНОСТРУКТУРИРОВАННЫХ ТОНКОПЛЕНОЧНЫХ  
ЭЛЕКТРОЛЮМИНЕСЦЕНТНЫХ  
ИНДИКАТОРНЫХ УСТРОЙСТВ**

**О.В. Максимова, С.М. Максимов, М.К. Самохвалов**

*Ульяновский государственный технический университет (г. Ульяновск)*

*Аннотация:* Статья посвящена проблемам автоматизации разработки тонкопленочных электролюминесцентных индикаторов, как элементов электронных средств. Представлены предполагаемые основные принципы, аспекты, развития систем автоматизированного проектирования тонкопленочных электролюминесцентных индикаторов и их структур. Результаты исследований позволят улучшить алгоритмы и создать новую программу, позволяющую автоматизировать проектирование и технологию тонкопленочных электролюминесцентных элементов индикатора.

*Ключевые слова:* тонкопленочный индикатор, пороговое напряжение, максимально допустимое рабочее напряжение, электролюминесцентный конденсатор, электролюминесценция.

К одним из наиболее перспективных направлений в области развития средств отображения информации относятся тонкопленочные электролюминесцентные индикаторы (ТПЭЛИ). Электролюминесцентные индикаторы обладают уникальными сочетаниями рабочих характеристик: широкий температурный диапазон работы, малая потребляемая мощность, высокая яркость и светоотдача, пространственная однородность изображения, способность выдерживать ударные нагрузки высоты, радиационная стойкость. Большой угол обзора, легкость получения полутонов, быстроедействие делают тонкопленочные источники излучения более перспективными.

Для разработки системы автоматизированного проектирования ТПЭЛИ необходим анализ свойств электролюминесцентных и диэлектрических материалов и выявление зависимости электротехнических, светотехнических и оптических параметров материалов слоёв ТПЭЛИ от конструктивных [1].

Для того, чтобы проектировщику разработать ТПЭЛ устройство, необходимо учитывать технологические факторы, такие как свойства материала, аспекты тонкопленочной технологии.

Был проведен анализ свойств электролюминесцентных и диэлектрических материалов и выявление зависимости электротехнических и светотехнических характеристик ТПЭЛИ от параметров материалов тонких пленок. В связи с этим были проведены исследования свойств материалов в рамках задач проектирования ТПЭЛИ [2].

В настоящее время определены люминесцентные и диэлектрические материалы для применения в тонкопленочных электролюминесцентных индикаторах. Установлена зависимость электрических и светотехнических характеристик и параметров ТПЭЛИ от свойств материалов и конструктивно-технологических факторов.

Однако, хотя в работах отечественных и зарубежных авторов и приведены примеры использования различного перечня материалов, но отсутствуют необходимые значения их параметров. Поэтому существует проблема создания более полного банка данных для решения задач САПР ТПЭЛИ.

Для создания диэлектрических пленок в электролюминесцентных структурах применяют оксиды кремния, алюминия, иттрия и редкоземельных металлов, нитрида кремния и др., их композиции, сегнетоэлектрические материалы [3].

Наличие двух диэлектрических слоев, отделяющих пленку люминофора от электродов, превращает данное устройство в электролюминесцентный конденсатор, что определяет необходимость использовать переменное напряжение для возбуждения электролюминесценции. Диэлектрические слои отделяют пленку люминофора от электродов. Главная роль диэлектрических слоев заключается в ограничении заряда, проходящего через люминофор в рабочих режимах. В качестве люминесцентных слоев обычно используют сульфид цинка, легированный марганцем. Для получения непрозрачных электродов используют алюминий.

Основываясь на результатах проведенных исследовательских работ в области проектирования тонкопленочных электролюминесцентных индикаторных устройств, были выделены следующие этапы их проектирования [4]:

1. Составление технического задания на ТПЭЛИ;
2. Определение структуры и организации ТПЭЛИ. Говоря об определении структуры и организации ТПЭЛИ, имеется в виду выявление типа конструкции исходя из общего назначения, особенностей отображаемой информации.
3. Определение электрических и конструктивных параметров элементов, составляющих устройство;
4. Коррекция структуры и оценка спроектированного ТПЭЛИ.

Был детально рассмотрен третий этап [5], включающий в себя описание и анализ всех свойств и параметров материалов ТПЭЛИ, их взаимосвязи с конструктивными параметрами. Этот третий этап является основным и наиболее трудоемким при проектировании. Данный этап проектирования можно разделить на следующие процессы: 1. анализ электрических характеристик: 1.1. расчёт максимально допустимого напряжения; 1.2. расчёт порогового напряжения электролюминесцентных конденсаторов; 2. анализ светотехнических характеристик: 2.1. расчёт яркости электролюминесцентных конденсаторов; 2.2. расчёт светоотдачи. 3. анализ конструктивных параметров: 3.1. выбор материалов; 3.2. выбор топологии. Расчёты, представленные в третьем этапе проектирования, являются формализуемыми, поэтому их можно автоматизировать.

Основными процессами проектирования ТПЭЛИ является выбор конструкции, расчет технологических параметров ТПЭЛИ, определение материала. Причем существует сложность определения очередности последовательности этих процессов.

Решение задач анализа при проектировании ТПЭЛИ позволяет оценить электротехнические и светотехнические параметры ТПЭЛИ при различных структурах индикатора.

Задача анализа сводится к тому, что при известных конструктивных параметрах проверить значения функциональных.

При синтезе параметров элементов тонкопленочного электролюминесцентного индикаторного устройства выходным результатом являются толщины слоёв. Светотехнические и электрические параметры определены техническим заданием.

В случае если по результатам анализа проектное решение признается неокончательным, то начинается процесс последовательных приближений к приемлемому варианту проекта ТПЭЛИ. Для улучшения проекта удобнее варьировать значения параметров элементов, использовать параметрический синтез на базе многовариантного анализа. При этом задача параметрического синтеза может быть сформулирована как задача определения значений параметров элементов, наилучших с позиций удовлетворения требований технического задания при неизменной структуре ТПЭЛИ.

В целях автоматизации процессов проектирования ТПЭЛ элементов в индикаторных устройствах были разработаны алгоритмы анализа и синтеза и программа, позволяющие производить автоматизированный расчет.

Для оценки реализованного программного обеспечения была произведена его апробация. В ходе проведения измерения экспериментальных пятислойных образцов тонкопленочного электролюминесцентного индикаторного устройства с установленной площадью непрозрачного электрода, определены толщины их слоёв. Полученные данные позволили решить задачу анализа функциональных характеристик и параметров при проектировании тонкопленочных электролюминесцентных индикаторов с помощью теоретических расчётов и в автоматизированном режиме с использованием разработанной программы. При автоматизированном проектировании тонкопленочного электролюминесцентного индикаторного устройства, с помощью программного обеспечения были определены следующие достоинства программы: единая программа (наличие одного единственного модуля); простота использования; низкие требования к ресурсам; отсутствие необходимости разработки специализированной базы данных.

В настоящее время проводятся исследования методов и технологических процессов изготовления ТПЭЛ элементов в индикаторных устройствах для создания модуля, позволяющего определить маршрутные пути технологического изготовления ТПЭЛИ.

В тонкопленочной технологии к настоящему времени разработано большое число различных методов получения диэлектрических пленок. Однако, для получения слоев, удовлетворяющих требованиям к диэлектрикам в электролюминесцентных конденсаторах, применяется ограниченное количество способов:

1. Термическое испарение в вакууме с резистивным электронно-лучевым и лазерным нагревом;
2. Ионно-плазменное распыление: катодное, магнетронное, реактивное;
3. Химическое осаждение из газовой фазы: пиролиз, реакции восстановления и замещения.

Вакуумные методы являются наиболее распространенными из-за чистоты пленок, простоты управления и контроля процесса. Однако они не всегда целесообразны для нанесения тугоплавких и разлагающихся при высоких температурах материалов. Использование взрывного испарения, а также электроннолучевого и лазерного испарения для некоторых материалов приводит к нестабильности пленок. Со временем может происходить изменение их свойств. Хорошие результаты были получены при электроннолучевом испарении твердых растворов оксидов циркония и иттрия, оксинитридов кремния и ряда других композиционных материалов. Для улучшения свойств оксидных пленок используют напыление в среде кислорода при пониженном давлении.

Разрабатываемый технологический программный модуль позволит не только подготавливать нормативную документацию на изготовление ТПЭЛ устройства, но и даст рекомендации по использованию того или иного способа нанесения пленки.

Полученные результаты окажут положительное влияние на развитие новых, перспективных, высокотехнологичных индикаторных устройств тонкопленочной электролюминесцентной технологии. Дальнейшие научно исследовательские работы в этой области связаны с разработкой тонкопленочных электролюминесцентных матриц с улучшенными характеристиками.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Максимова О.В., Самохвалов М.К.* Разработка алгоритмов проектирования тонкопленочных электролюминесцентных индикаторных устройств // Вестник Самарского государственного технического университета. - серия «Технические науки». - 2008. - 1(21). - С. 99-106.
2. *Максимова О.В., Самохвалов М.К.* Исследование процессов проектирования тонкопленочных электролюминесцентных индикаторов для автоматизации расчетов их функциональных характеристик // Известия Санкт-Петербургского государственного технологического института (технического университета). – 2011. - №10 (36). - С. 99-104.
3. *Максимова О.В., Самохвалов М.К.* Исследование влияния конструктивных параметров тонкопленочных электролюминесцентных индикаторов на режимы их работы для формирования математического обеспечения САПР // Вестник Московского государственного областного университета. - серия «Физика - Математика». – 2012. - №1. - С. 85-92.
4. *Максимова О.В., Самохвалов М.К.* Математическое обеспечение САПР тонкопленочных электролюминесцентных индикаторов при решении задач синтеза конструкций // Вестник Московского государственного областного университета. - серия «Физика - Математика». - 2012. - №1. - С. 77-85.
5. *Максимова О.В., Евсевичев Д.А.* САПР тонкопленочных электролюминесцентных индикаторов // Вестник Московского государственного областного университета. - серия «Физика - Математика». - 2012. - №2. - С. 131-135.

#### **THE ANALYSIS OF PROCESSES OF DESIGN AND TECHNOLOGY OF NANOSTRUCTURED THIN FILM ELECTROLUMINESCENT DISPLAY DEVICES**

**O. Maksimova, S. Maksimov, M. Samokhvalov**

*Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk*

*Abstract:* The article is devoted to the problems of automating the drafting of thin film electroluminescent indicators, as elements of electronic means. Envisaged are the principles, aspects, means, of developing CAD systems of thin film electroluminescent indicators and their structures. The results of executing the research will improve the algorithms, and create a new program allowing to automate the design and technology of thin-film electroluminescent indicator elements.

*Keywords:* thin film electroluminescence indicator, threshold voltage, maximum allowable voltage, electroluminescent capacitor, electroluminescence.

УДК 533.9(075.8)

## СПЕКТРЫ КОЛЕБАНИЙ СЛАБОИОНИЗОВАННОЙ СТОЛКНОВИТЕЛЬНОЙ ПЛАЗМЫ

Б.М. Маркеев

Московский государственный областной университет  
105005, Москва, ул. Радио, 10а

*Аннотация.* В работе рассматривается влияние столкновений на потенциальные колебания слабоионизованной однородной плазмы в областях  $\omega > v_{en}$  и  $v_{in} > \omega > v_{en}$ . Столкновения учитываются посредством интеграла столкновений Больцмана. В условиях  $(k_z V_{te})^2 / \omega v_{en} > 1$  показано существование в промежуточной области частот ( $v_{in} < \omega < v_{en}$ ) ионно-звуковых колебаний, аналогичных ионно-звуковым колебаниям слабостолкновительной плазмы.

*Ключевые слова:* потенциальные колебания, интеграл столкновений Больцмана, ионно-звуковые колебания.

Рассмотрим колебания неизотермической плазмы в области частот [1]  $k_z V_{ti} < \omega < k_z V_{te}$ ;  $\Omega_i < \omega < \Omega_e$ . Хорошо известно, что в такой системе могут распространяться слабозатухающие продольные волны, фазовая скорость которых определяется выражением

$$V_{\phi} = \frac{\omega}{k} = \frac{V_s}{\sqrt{1 + (Kr_{De})^2}}$$

где  $V_s = (T_e/m_i)^{1/2}$  – ионно-звуковая скорость.

$Kr_{De} = (T_e/4\pi n_e e^2)^{1/2}$  – дебаевский радиус электронов.

Декремент затухания этих волн в слабостолкновительной плазме определяется формулой

$$\gamma = \frac{\nu_{in}}{2} + \frac{\sqrt{\pi}[\omega^2(\omega^2 - \Omega_i^2)]^2}{(KV_{ti})^2(K_z V_{te})[(\omega^2 - \Omega_i^2)^2 \cos^2 \theta + \omega^4 \sin^2 \theta]} \left[ \exp\left\{-\left(\frac{\omega}{K_z V_{te}}\right)^2\right\} + \frac{\omega_{ie}^2 V_{te}^3}{\omega_{ie}^2 V_{te}^3} \right]$$

В слабостолкновительной плазме в области частот  $k_z V_{ti} < \omega < k_z V_{te}$ ;  $\omega < \Omega_i$  существуют две ветви собственных колебаний с частотами [2]

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{1}{2}[\Omega_e^2 + \omega_{ie}^2 \pm \sqrt{(\omega_{ie}^2 + \Omega_e^2)^2 - 4\omega_{ie}^2 \Omega_e^2 \cos^2 \theta}]$$

Из (2.16) легко получить декременты затухания этих колебаний

$$\gamma_{\pm} = \frac{(\omega^2 - \Omega_i^2)^2 \cos^2 \theta + (\omega^2 + \Omega_i^2) \omega^2 \sin^2 \theta}{(\omega^2 - \Omega_i^2)^2 \cos^2 \theta + \omega^4 \sin^2 \theta} \frac{v_{in}}{2} +$$

$$+ \frac{\sqrt{\pi} [\omega^2 (\omega^2 - \Omega_i^2)]^2}{(KV_{te})^2 (K_z V_{te}) [(\omega^2 - \Omega_i^2)^2 \cos^2 \theta + \omega^4 \sin^2 \theta]} \left[ \exp\left\{-\left(\frac{\omega}{K_z V_{te}}\right)^2\right\} + \frac{\omega_{ie}^2 V_{te}^3}{\omega_{ii}^2 V_{te}^3} \right]$$

Столкновительная часть декремента затухания этих колебаний, как и в случае немагнитных ионов, определяется потерей импульса ионами при столкновении с нейтралами

$$v_{in} = \frac{8}{3\sqrt{\pi} V_{te}^3} \left(\frac{m_e}{m_n}\right)^{3/2} n_n \int_0^{\infty} dU U^3 \exp\left\{-\frac{mU^2}{2T_e}\right\} \sigma_{tr}(U)$$

Выясним, как влияют столкновения между заряженными частицами и нейтралами на продольные колебания в слабостолкновительной плазме в области частот  $\omega > kV_{te}$ . В этой области высокочастотный плазменный резонанс ( $\omega > \sqrt{\Omega_i \Omega_e}$ ), как это следует из [1], состоит из двух ветвей колебаний с частотами

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \{ \Omega_e^2 + \omega_{ie}^2 \pm \sqrt{(\omega_{ie}^2 + \Omega_e^2)^2 - 4\omega_{ie}^2 \Omega_e^2 \cos^2 \theta} \}$$

Декременты затухания этих колебаний, как нетрудно видеть, выражаются формулой

$$\gamma_{1,2} = \frac{v_{in}}{2} \frac{(\omega^2 - \Omega_e^2)^2 \cos^2 \theta + \omega^2 (\omega^2 + \Omega_e^2) \sin^2 \theta}{(\omega^2 - \Omega_e^2)^2 \cos^2 \theta + \omega^4 \sin^2 \theta} +$$

$$+ \frac{\omega^4 (\omega^2 - \Omega_e^2)^2}{(\omega^2 - \Omega_e^2)^2 \cos^2 \theta + \omega^4 \sin^2 \theta} \frac{\sqrt{\pi} \exp\left\{-\left(\frac{\omega}{KV_{te}}\right)^2\right\}}{(KV_{te})^2 (K_z V_{te})}$$

причем его столкновительная часть обусловлена только столкновениями электронов с нейтралами.

Перейдем теперь к рассмотрению продольных колебаний в промежуточной ( $v_{in} < \omega < v_{en}$ ) области частот. Как уже отмечалось выше, в слабостолкновительной ( $\omega > v_{en}$ ) неизотермической ( $T_e \gg T_i$ ) плазме для ( $kV_{te} < \omega < kV_{te}$ ) возможно распространение слабозатухающих ионно-звуковых колебаний. Декремент их затухания обуславливается столкновениями ионов с нейтралами и черенковским поглощением волн на ионах. Представляет интерес исследовать возможность распространения ионно-звуковых колебаний в промежуточной области ( $v_{in} < \omega < v_{en}$ ) частот, когда их затухание на электронах полностью определяется только столкновениями (т.е.  $kV_{te} < v_{en}$ ). Прежде отметим, что в сильностолкновитель-

ной плазме в области больших коэффициентов диффузии ( $((kV_{te})^2 > \omega v_{en})$ ) выполняются все условия, например, для изотропной плазмы можно записать в виде двухстороннего неравенства

$$\sqrt{\frac{m_i v_{in}}{m_e \omega_{ie}}}; \sqrt{\frac{m_e v_{en}}{m_i \omega_{ie}}} < k\Gamma_{De} < \sqrt{\frac{m_i v_{en}}{m_e \omega_{ie}}}$$

Правая часть неравенства означает, что частота ионно-звуковых колебаний не превосходит частоту столкновений электронов с нейтралами. Левая часть этого неравенства необходима для того, чтобы коэффициент электронной диффузии был велик, а также, чтобы частота колебаний превосходила частоту столкновений ионов с нейтралами. Как легко видеть, эти неравенства не противоречивы. Используя его при решении дисперсионного соотношений, получим собственные частоты, которые, например, для плазмы с намагниченными ионами и электронами ( $\omega > \Omega_e$ ), определяются посредством формулы

$$\begin{cases} \omega = KV_s \\ \gamma = \frac{\sqrt{\pi}}{(KV_{th})^2} \exp\left\{-\left(\frac{\omega}{KV_{th}}\right)^2\right\} + \frac{v_{in}}{2} + \frac{v_0}{2} \frac{m_e}{m_i} \end{cases}$$

$$\frac{1}{v_{en}} = \frac{1}{v_0} = \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{1}{v(V)} \left(\frac{V}{V_{te}}\right)^2 \exp\left\{-\frac{V^2}{V_{te}^2}\right\} d\frac{V}{V_{te}}$$

$$v_{oi} = \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} v(V) \left(\frac{V}{V_{te}}\right)^4 \exp\left\{-\frac{V^2}{V_{te}^2}\right\} d\frac{V}{V_{te}}$$

Для плазмы с намагниченными электронами ( $\Omega_i < \omega < \Omega_e$ ) затухание ионно-звуковых колебаний выражаются следующим соотношением

$$\begin{cases} \omega = KV_s \\ \gamma = \frac{\sqrt{\pi}}{(KV_{th})^2} \exp\left\{-\left(\frac{\omega}{KV_{th}}\right)^2\right\} + \frac{v_{in}}{2} + \frac{v_0}{2\cos^2\theta} \frac{m_e}{m_i} \end{cases}$$

И, наконец, затухание ионно-звуковых колебаний в намагниченной плазме ( $\omega \approx \Omega_i$ ) определяется по формуле

$$\omega^2 = \frac{1}{2} \{ \omega_s^2 + \Omega_i^2 \pm \sqrt{(\omega_s^2 + \Omega_i^2)^2 - 4\omega_s^2 \Omega_i^2 \cos^2\theta} \}$$

$$\gamma = \frac{v_{in}}{2} \frac{(\omega^2 - \Omega_i^2)^2 \cos^2\theta + \omega^2 (\omega^2 + \Omega_i^2) \sin^2\theta}{(\omega^2 - \Omega_i^2)^2 \cos^2\theta + \omega^4 \sin^2\theta} +$$

$$+ \frac{\sqrt{\pi}}{(KV_{th})^2 (K_z V_{th})} \frac{\omega^4 (\omega^2 - \Omega_i^2)^2}{(\omega^2 - \Omega_i^2)^2 \cos^2 \theta + \omega^4 \sin^2 \theta} \exp\left\{-\left(\frac{\omega}{KV_{th}}\right)^2\right\} +$$

$$+ \frac{v_0}{2|\cos \theta|^2} \frac{\omega^4}{(KV_{te})^2 \omega_p^2} \frac{(\omega^2 - \Omega_i^2)^2}{(\omega^2 - \Omega_i^2)^2 \cos^2 \theta + \omega^4 \sin^2 \theta}$$

Как видно из приведенных выражений, свойства ионно-звуковых колебаний в промежуточной области ( $v_{in} < \omega < v_{un}$ ) во многом аналогичны свойствам хорошо известных ионно-звуковых колебаний в слабостолкновительной области ( $\omega > v_{en}$ ). Так затухание на ионах в сильностолкновительном случае по-прежнему определяется потерей импульса при столкновении ионов с нейтрами, а также черенковской диссипацией. Но затухание на электронах в этом случае определяется уже диффузией электронов, в то время, как в слабостолкновительном пределе ( $\omega > v_{en}$ ) диссипация на электронах определялась только черенковским затуханием.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Франк-Каменецкий Д.А. Лекции по физике плазмы. – Издательский Дом “Интеллект”, 2008. –280 с.
2. Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Физическая кинетика. –М.: Физматлит, 2002. – 536с.

### THE OSCILLATION SPECTRUM OF A WEAKLY IONIZED COLLISIONAL PLASMA

**B. Markeev**

*Moscow State Regional University  
10a, Radio St., Moscow, 105005, Russia*

Abstract. For strongly collision range of frequencies ( $\omega < v_{in}$ ) heterogeneous weakly ionized plasma in the limiting cases of large  $((K_z V_{te})^2 > \omega v_{en})$  and small  $((K_z V_{te})^2 < \omega v_{en})$  electronic diffusion coefficients of drift oscillation spectra on the basis of the solution of the kinetic equation by Grad.

Keywords: potential fluctuations, the boltzmann collision integral, ion-acoustic oscillations.

УДК 533.9(075.8)

## КОЛЕБАНИЯ НЕОДНОРОДНОЙ СЛАБОИЗОЛИРОВАННОЙ ПЛАЗМЫ

Б.М. Маркеев\*, К.А. Панасюк\*\*

\*Московский государственный областной университет  
105005, Москва, ул. Радио, 10а

\*\*Российский государственный технологический университет имени К.Э. Циолковского (МАТИ)  
121552, Москва, ул. Оршанская, д. 3

*Аннотация.* Для сильностолкновительной области частот ( $\omega < v_{in}$ ) неоднородной слабоионизованной плазмы в предельных случаях большого ( $(K_z V_{te})^2 \gg \omega v_{en}$ ) и малого ( $(K_z V_{te})^2 < \omega v_{en}$ ) электронных коэффициентов диффузии получены спектры дрейфовых колебаний на основе решения кинетического уравнения методом Грэда.

*Ключевые слова:* неоднородная слабоионизованная плазма, спектры дрейфовых колебаний.

При исследовании устойчивости неоднородной слабоионизованной плазмы в области ( $\omega < v_{in}$ ) удобно исходить из линеаризованной системы уравнений Грэда[1]. Используя выражение для возмущения плотности, окончательно из уравнения Пуассона находим дисперсионное соотношение для определения спектра колебаний слабоионизованной неоднородной плазмы[2]

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left( \frac{K_z V_{ti}}{\omega} \right)^2 \frac{\beta_e^{-1}}{\Delta_e} \{ b_{te} a_{ze} (1 - \frac{\omega_{ne}}{\omega}) - b_{ze} a_{te} \} - \frac{1}{4} \left( \frac{K_z^2 V_{te} V_{ti}}{\omega^2} \right)^2 \frac{\beta_e^{-1} \beta_i^{-1}}{\Delta_e \Delta_i} \{ b_{te} a_{ze} - b_{ze} a_{te} \} - \\ & - \frac{1}{4} \left( \frac{K_z^2 V_{te} V_{ti}}{\omega} \right) \frac{\beta_e^{-1} \beta_i^{-1}}{\Delta_e \Delta_i} \{ (b_{te} a_{ze} - b_{ze} a_{te}) b_{ti} a_{ni} (b_{ti} a_{zi} - \\ & - b_{zi} a_{ti}) Z \} - i \frac{v_i}{\omega} (K_y \rho_i)^2 \left[ \frac{\omega_{ne}}{\omega} (Z) \right] = 0 \end{aligned}$$

где  $Z = -\frac{v_i T_e}{v_e T_i}$ ,

$$\Delta_e = b_{te} + \beta_e^{-1} b_{Ue} a_{te} \left( \frac{K_z V_{te}}{\omega} \right); \omega_{Ae} = \frac{K_y T_e}{m_e \Omega_e} \frac{\partial}{\partial x} \ln A; A = n_e T_e, n_e T_e.$$

Кроме того, использовали следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \beta_e &= \left[ 1 + i \frac{4}{3} \frac{K_z \eta_e}{\omega n_e m_e} + i \frac{v_{e1}}{\omega} \right]; \beta_i = \left[ 1 + i \frac{4}{3} \frac{K_z \eta_i}{\omega n_i m_i} + i \frac{v_{i1}}{\omega} \right] \\ a_{ti} &= (1 + S_i); a_{te} = (1 + S_e); a_{\Phi e} = a_{\Phi i} = 1; b_{\Phi e} = \frac{3 \omega_{te}}{2 \omega}; \\ b_{\Phi i} &= \frac{3 \omega_{ti}}{2 \omega}; b_{Ue} = -\frac{K_z V_{te}}{\omega}; b_{Ui} = -\frac{K_z V_{ti}}{\omega} \end{aligned}$$

$$b_{te} = \frac{3}{2} \left[ 1 + t \frac{2K_z^2 \chi_e^u}{3 \omega n_e} + 2t \frac{\delta v_e}{\omega} \right],$$

$$b_{ti} = \frac{3}{2} \left[ 1 + t \frac{2K_z^2 \chi_e^u}{3 \omega n_i} + 2t \frac{\delta v_i}{\omega} \right]$$

Исследуем сначала наиболее интересный случай малой электронной теплопроводности  $((K_z V_{te})^2 / \omega v_{e1} \ll 1)$ .

$$\begin{aligned} \omega = & \frac{\omega_{ne}}{1+q} \left\{ 1 + \frac{\omega_{te}}{\omega_{ne}} (1+S_e) + q \frac{\omega_{ni}}{\omega_{ne}} \right\} \left[ 1 - t \frac{\omega_{te}}{\omega_{ne}} \frac{(1+S_e) \left( \frac{2K_z^2 \chi_e^u}{3 \omega n_e} + 2 \frac{\delta v_e}{\omega} \right)}{1 + (1+S_e) \frac{\omega_{te}}{\omega_{ne}} + q \frac{\omega_{ni}}{\omega}} \right] + \\ & + \left\{ q \left[ \frac{(K_z V_{te})^2}{\omega v_{e1}} \left( \frac{2}{3} (1+S_e) - 1 \right) \left( 1 - \frac{\omega_{ni}}{\omega} \right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\omega}{v_i} \left( \frac{\omega_{ni}}{\omega} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{\omega_{ti}}{\omega} \right) - \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{1}{v_i} \frac{3 \omega_{te}}{\omega} \right) \right) \right] \right\} \frac{t}{1+q} \end{aligned}$$

где  $q = \left( \frac{r_{De}}{r_{Di}} \right)^2 \frac{v_i v_{e1}}{(K_z V_{te})^2} (K_y \rho_i)^2$ . Это решение соответствует периодическим колебаниям плазмы ( $\omega > \gamma$ ). В условиях, когда можно пренебречь градиентом концентрации и ларморовским радиусом ионов, спектр

$$\omega - i\gamma = \omega_{te} \left\{ (1+S_e) \left( \frac{2K_z^2 \chi_e^u}{3 \omega n_e} + 2 \frac{\delta v_e}{\omega} \right) \right\}$$

описывает дрейфовые колебания, обусловленные градиентом температуры. Декремент затухания этих колебаний в этом случае определяется теплопроводностью и передачей энергии электронов нейтралам.

В системе с однородной температурой ( $\nabla_x T_e = 0$ ) как следует из (1), существуют дрейфовые колебания, обусловленные градиентом концентрации. В пренебрежении ларморовским радиусом ионов спектр этих колебаний имеет вид

$$\omega = \omega_{ne}$$

а декремент затухания равен нулю.

Исследуем предельный случай большой электронной, но малой ионной теплопроводности  $((K_z V_{te})^2 / \omega v_{e1} \gg 1 \gg (K_z V_{ti})^2 / \omega v_{i1})$ . Дисперсионное уравнение имеет в этом пределе следующее решение

$$\omega = \omega_{ne} \left( 1 - t \frac{\tau_{1e}^{-1}}{(K_z V_{te})^2} \frac{3}{2} \omega_{te} (1+S_e) - i v_i (K_y \rho_i)^2 \left( 1 - \frac{\omega_{ni}}{\omega_{ne}} \right) \right)$$

Из этого выражения видно, что в данной области существуют периодические дрейфовые колебания с декрементом

$$\gamma = \frac{\omega_{ne} \tau_{1e}^{-1}}{(K_z V_{te})^2} \frac{3}{2} \omega_{te} (1+S_e) + i v_i (K_y \rho_i)^2 \left( 1 - \frac{\omega_{ni}}{\omega_{ne}} \right)$$

Здесь предполагается, что градиенты температуры и концентрации имеют одно направление. Учет конечности ларморовского радиуса приводит к дополнительному затуханию дрейфовых колебаний.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Франк-Каменецкий Д.А. Лекции по физике плазмы. – Издательский Дом “Интеллект”, 2008. –280 с.
2. Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Физическая кинетика. –М.: Физматлит, 2002. – 536с.

#### OSCILLATIONS OF AN INHOMOGENEOUS WEAKLY IONIZED PLASMA

**В. Markeev\*, К. Panasyuk\*\***

*\*Moscow State Regional University  
10a, Radio St., Moscow, 105005, Russia*

*\*\*Russian State Technological University  
3, Orshanskaya St., Moscow, 121552, Russia*

*Abstract.* For a strongly non-uniform frequency region of weakly ionized plasma in the limiting cases of large and small electronic diffusion coefficients obtained spectra of drift oscillations on the basis of the solution of the kinetic equation by Grad.

*Keywords:* inhomogeneous weakly ionized plasma, the spectra of the drift oscillations.

УДК 532.529:532.6

#### ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ И ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ ОБЛЕДЕНЕНИЯ НАНОМОДИФИЦИРОВАННЫХ СУПЕРГИДРОФОБНЫХ И ОБЫЧНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

**Э.С. Гринац<sup>1,2</sup>, А.Б. Миллер<sup>1,2</sup>, Ю.Ф. Потапов<sup>1</sup>, А.Л. Стасенко<sup>1,2</sup>**

<sup>1</sup>ФГУП «Центральный аэрогидродинамический институт им. Н.Е. Жуковского»  
140180, Московская область, г. Жуковский, ул. Жуковского, д. 1

<sup>2</sup>Московский физико-технический институт  
141700, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский пер., д. 9

*Аннотация.* Обобщены результаты исследований супергидрофобных, гидрофобных и обычных поверхностей в условиях обледенения на стенде. Показана перспективность использования супергидрофобных покрытий для противообледенительных систем. Рассмотрен эффект периодического самоочищения супергидрофобной поверхности ото льда в потоке. Развита простая математическая модель, иллюстрирующая тенденции зависимости гид-

ротермодинамических параметров различных образований на твердой поверхности (пленки, ручейка, капли) от скорости обдува и угла смачивания.

*Ключевые слова:* обледенение, летательный аппарат (ЛА), барьерный лед, адгезия, наномодификация поверхностей материалов, супергидрофобность, аэрофизический эксперимент.

В настоящее время во всех развитых странах экспериментаторы и теоретики проявляют большой интерес к исследованию проблем, связанных с льдообразованием на деталях конструкций и устройств, эксплуатируемых в атмосферных условиях. Для авиации борьба с обледенением представляет собой особенно актуальную задачу. С обледенением воздушного судна, встречающимся в среднем в одном полете из десяти и обусловленным метеорологическими причинами, связано около 7% авиационных происшествий. Поэтому предсказание аккреции льда и вызываемых ею эффектов, разработка противообледенительных систем (ПОС) являются важной частью проектирования и эксплуатации современных летательных аппаратов, а ряд ведущих мировых исследовательских центров в области авиации (NASA, ONERA) реализуют широкомащтабные проекты, включающие комплексные научные подходы к изучению обледенения.

В целях защиты ЛА от обледенения применяются различные противообледенительные системы, для работы которых необходимы достаточно большие энергозатраты, которые можно обеспечить не на всех ЛА. Эта проблема наиболее выражена для авиации общего назначения и особенно для беспилотных летательных аппаратов. В связи с этим для обеспечения необходимого уровня безопасности на некоторые ЛА накладываются ограничения по полетам в условиях обледенения, что нарушает регулярность полетов и снижает их конкурентоспособность.

Разработанные и внедренные в практику методы борьбы с обледенением ЛА не только приводят к необходимости «возить на всякий случай» лишние 1–1.5% веса самолета, но и способны создавать новые проблемы. Например, при использовании теплового воздействия на слой льда, возникающий на передней кромке крыла, образуются капли и ручейки, мигрирующие вниз по потоку и создающие новую наледь (барьерный лед).

При рассмотрении вопросов обледенения уже давно высказывались мысли, что можно найти материал, который будет противостоять обледенению, материал, к которому не будет прилипать лед. Очевидно, эта мысль возникла в результате наличия водоотталкивающих свойств фтороуглеродистых материалов, таких как тефлон. Действительно, работы [1, 2], посвященные вопросам адгезии льда, указывают на уменьшение силы сцепления льда с этими гидрофобными материалами в условиях без потока. Однако указанное уменьшение силы адгезии оказалось в противоречии с наблюдениями, полученными в аэродинамической трубе [3]. Они показали, что адгезия тефлона по отношению к капельному льду (т.е. образованному движущимися по поверхности каплями) слабо отличается от адгезии других материалов. Физические условия образования льда в потоке и без него различны, поэтому целью исследователей стало найти материал с малой адгезией ко льду, образующемуся при обтекании летательного аппарата двухфазным потоком.

В последнее время возникла идея для борьбы с обледенением изменить свойства поверхности летательного аппарата методами нанотехнологий. Нанотехнологии

открывают принципиально новые возможности управления поверхностными свойствами материалов. В частности, поверхность может приобрести свойства супергидрофобности, обладать малыми коэффициентами теплопроводности и трения, а также хорошей проводимостью и малой силой адгезии к образуемому льду. Обычные материалы с такими свойствами, присутствующими одновременно, отсутствуют. Супергидрофобность позволяет существенно уменьшить площадь контакта капли с поверхностью, малый коэффициент теплопроводности замедляет замерзание капли, которая не может передать тепло фазового перехода поверхности, а малый коэффициент трения благоприятствует сдуву капель с нее. При помощи нанотехнологий может быть достигнуто свойство супергидрофобности поверхностей конструкционных материалов, используемых в авиации – сталей, алюминиевых и титановых сплавов.

При значительном снижении адгезии льда на поверхности, возможна комбинация такой поверхности с тепловыми системами, от которых используется только «тепловой нож», расположенный в районе нахождения линии полного торможения. При постоянном включении «теплого ножа» после попадания в условия обледенения, образующийся лед формируется из двух разделенных частей, которые после достижения определенной толщины будут отрываться от поверхности под воздействием воздушного скоростного напора. Такая комбинированная система позволит в 4...5 раз понизить потребляемую энергию и в несколько раз снизить массу противообледенительных систем. Здесь необходимо иметь в виду тот факт, что на многих самолетах просто не хватает горячего воздуха или электроэнергии, чтобы обеспечить защиту от обледенения требуемых участков поверхности.

В настоящее время на некоторых самолетах (например, RRJ (крыло и воздухозаборник), Ту-334 (крыло), Ту-204 (воздухозаборник), МС-21 (крыло)), из-за недостатка тепловой энергии или ограниченной зоны обогрева допускается образование барьерного льда (лед за зоной обогрева) на нижней поверхности предкрылка или на внутренней поверхности воздухозаборника. Барьерный лед на нижней поверхности предкрылка приводит к увеличению аэродинамического сопротивления самолета и, соответственно, увеличению расхода топлива. Барьерный лед на внутренней поверхности воздухозаборника приводит к увеличению затрат на ремонт двигателя. Применение в области образования барьерного льда поверхностей с покрытиями, снижающими адгезию льда, и (или) устройств, обеспечивающих удаление текущей пленки воды, позволит значительно сократить массу и размеры барьерного льда.

Исследования по применению супергидрофобных противообледенительных нанопокровов только начинаются во всем мире, например, в США [4, 5], Канаде [6], Италии [7] и др. В настоящей работе излагаются методики и результаты исследований в этом направлении, проведенные в ЦАГИ.

Комплексные аэрофизические испытания включают в себя важнейшую структурную часть – проверку эффективности исследуемого типа противообледенительной системы на стенде искусственного обледенения ЦАГИ.

Стенд искусственного обледенения ЦАГИ – это аэродинамическая труба эжекторного типа, создающая водовоздушный поток холодного воздуха, которая оснащена водораспыливающей системой, средствами измерений технологических параметров установки, физических характеристик параметров потока и исследуемых моделей. Принципиальная схема установки показана на рисунке 1.

Аэродинамическая труба представляет собой двадцати пяти сопловой эжектор, использующий в качестве эжектирующего газа сжатый воздух с давлением 1.5 – 5 ати. Эжектируемый воздух с температурой  $-5^{\circ}\text{C} \div -25^{\circ}\text{C}$  забирается из атмосферы в холодное время года. Размеры поперечного сечения  $200 \times 200$  мм. Скорость потока в канале трубы регулируется в диапазоне 10 – 100 м/с за счет изменения давления эжектирующего воздуха.

Образование водовоздушного потока в канале трубы осуществляется за счет впрыска воды в воздушный поток под давлением  $5 \div 7$  ати через вихревую форсунку, установленную на расстоянии 2325 мм от выходного сечения трубы. Расчеты показывают, что за время полета капли воды в канале трубы такой длины она успевает принять температуру потока. Вода к форсунке подается за счет ее вытеснения из бака азотом. Изменение влажности потока достигается за счет установки форсунок с различными геометрическими параметрами, а также варьированием скорости потока в тракте.

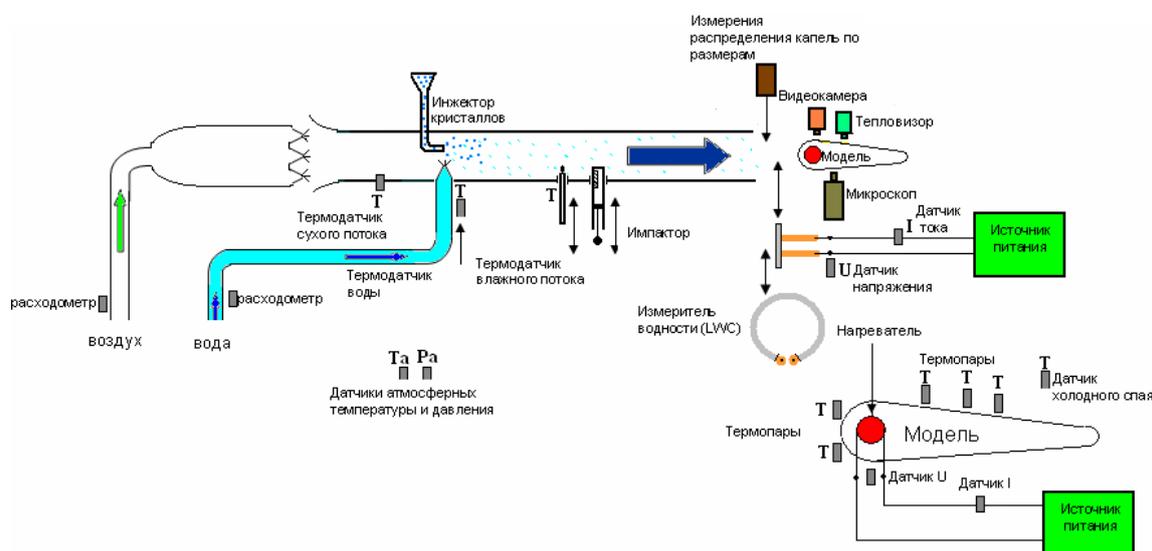


Рис.1. Принципиальная схема установки

Измерения, выполняемые на стенде искусственного обледенения в ходе выполнения экспериментов, разделяются на четыре группы, рисунок 1:

1. Визуальный контроль параметров потока в темпе эксперимента (скорости и температуры потока, значений тока и напряжения системы электрообогрева модели, температуры поверхности модели). Съемка процесса обледенения видеокамерой и тепловизором с последующей обработкой на компьютере.

2. Измерения спектра размеров капель:

- забор проб импактором с последующей обработкой на цифровом микроскопе с целью определения спектра размеров капель;
- измерения ореольной части индикатрисы рассеяния с последующей обработкой на компьютере с целью определения спектра размеров капель.

3. Измерения физических и технологических параметров (температурного поля модели, скорости, температуры, влажности водовоздушного потока) с регистрацией на компьютере. Запись электронного протокола эксперимента.

4. Измерения силы сцепления льда с покрытием

Экспериментальная модель, представляющая собой профиль крыла, предназначена для исследования образования барьерного льда. Сверху профиля устанавливается исследуемый наномодифицированный образец, снизу для сравнения находится обычная пластина из необработанного дюралюминия. Передняя кромка крыла подогревается омическим нагревателем. На рисунке 2 показан характерный вид образующегося барьерного льда.



Рис. 2. Барьерный лед на модели через 10 мин после начала намораживания.

При испытаниях наномодифицированных супергидрофобных образцов были получены следующие результаты. На алюминиевой пластине непосредственно после подачи воды в поток начинал расти барьерный лед. Динамика его образования определяется замерзанием бегущих по образцу отдельных водяных капель или ручейков. В условиях эксперимента визуально наблюдалось движение капель по поверхности алюминиевого образца, их замерзание на некотором расстоянии от передней кромки профиля, формирование и рост вверх по потоку нитевидных ледяных образований. Промежутки между нитевидными образованиями постепенно заполняются льдом, в результате чего формируется непрерывный ледяной барьер. В случае алюминиевого образца барьер непрерывно рос в ходе эксперимента.

В случае наномодифицированных пластин движения капель по поверхности визуально обнаружить не удалось. Центры образования льда появились со значительным запаздыванием относительно алюминиевой пластины. Появляющееся ледяное образование фиксировалась визуально, т.е. при достижении размера порядка 0.1 мм. Количество центров льдообразования на единицу площади было значительно меньше, чем в случае обычного алюминия. Это позволяет сделать предположение о том, что замерзшие участки появлялись в тех местах поверхности, где ее свойства

супергидрофобности были нарушены. На рисунке 3 показан вид двух наномодифицированных образцов, отличающихся способом обработки (образцы А и Б) и тестовой дюралюминиевой пластины в ходе образования барьерного льда. Придание супергидрофобных свойств алюминиевым подложкам образцов производилось в ИФХЭ РАН научным коллективом, возглавляемым член-корр. РАН Л.Б. Бойнович.

Образцы были установлены на модели рисунка 2 и испытаны в идентичных условиях. Скорость потока в экспериментах составляла 80 м/с, температуры – минус 20 °С, водность (массовое содержание воды в единице объема) – 0.57 г/м<sup>3</sup>. Воздух с каплями на кадрах рисунка 3 движется сверху вниз. В момент  $t = 2$  мин (первая сверху тройка горизонтально расположенных кадров) образец В свободен ото льда, на образце А появились центры роста льда, а на алюминиевой пластине уже сформирован ледяной барьер. На второй сверху полоске кадров ( $t = 4$  мин.) ледяные наросты на образце А уже достигли значительных размеров, а на образце В они появились только в правой части пластины. На полоске кадров, соответствующей  $t = 6$  мин, ледяной барьер практически сформирован на всех трех пластинах. На следующей строке кадров ( $t = 8$  мин) произошел срыв куска льда на образце В (ср. с предыдущим кадром при  $t = 6$  мин). Место срыва сразу после него представляло собой визуально чистую поверхность, а затем на ней быстро появились многочисленные центры образования льда. Новое ледяное образование росло, при этом на других участках происходили отрывы льда. Можно видеть места отрывов на полоске кадров ( $t = 10$  мин) в левой части образца А и правой части образца В. В течение всего эксперимента описанное явление (накопление небольшого количества льда с последующим его срывом) повторялось многократно.

Необходимо отметить принципиальную важность полученного результата, обусловленную длительными (и безуспешными до получения результатов настоящей работы) поисками материала, способного к самоочищению ото льда в воздушнокапельном потоке, обтекающем летательный аппарат.

Способность исследуемых материалов самоочищаться ото льда связана, безусловно, с малым значением силы адгезии к барьерному льду. Следует отметить, что сила адгезии в случае образования льда на поверхности катящимися по ней каплями существенно выше, чем в случае намораживания на нее покоящейся воды. Адгезия льда на двух наномодифицированных образцах была измерена при температуре  $-20^{\circ}\text{C}$  и составила менее 10 Н/см<sup>2</sup>. Для обычных материалов, включая гидрофобные краски и лаки, сила адгезии при этой температуре находится в диапазоне 12–20 Н/см<sup>2</sup>.

Экспериментальные исследования дополняются теоретическими. Развита простая математическая модель, иллюстрирующая тенденции зависимости гидротермодинамических параметров различных образований на твердой поверхности (пленки, ручейка, капли) от скорости обдува и угла смачивания.

Построена качественная теория гидротермодинамики первоначально «теплой» капли, движущейся по поверхности профиля и остывающей за счет отвода тепла в воздух и крыло. В частности, эта теория использует закон Юнга–Дюпре для плотности энергии взаимодействия капли с поверхностью тела  $w = \sigma(1 + \cos\theta)$ , где  $\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения,  $\theta$  – угол смачивания.

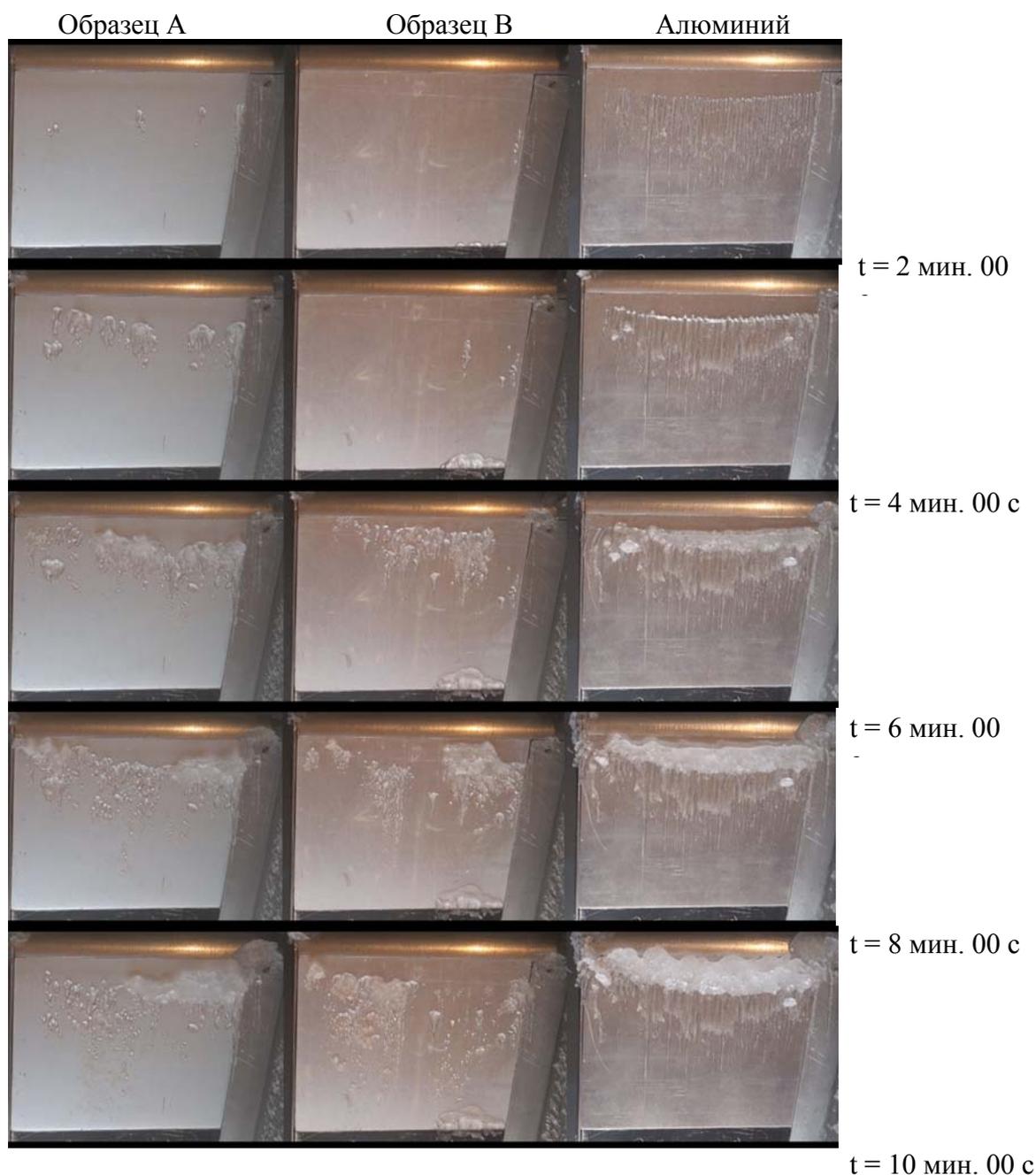


Рис. 3. Кадры видеосъемки эксперимента. Вид наномодифицированных образцов и тестового образца при образовании барьерного льда.

На рисунке 4 приведены результаты расчетов на основе развитой теории. Показаны изменения скорости (слева) и температуры (справа) эквивалентной по объему сферической капли при ее движении вдоль профиля. Кривые соответствуют различному радиусу капли (0.1–0.5 мм) при скорости обтекания 40 м/с и угле смачивания  $120^\circ$ . Темпера-

тура и давление окружающей среды составляет  $-10^{\circ}\text{C}$  и 760 Торр, соответственно. Кружки отмечают значения величин, при которых температура капли достигает значения  $0^{\circ}\text{C}$  и она может примерзнуть к поверхности.

Показано, что увеличение угла смачивания существенно увеличивает скорость движения капель по поверхности и препятствует их примерзанию. В дальнейшем предполагается тщательное сопоставление экспериментальных и расчетно-теоретических результатов с целью уточнения подгоночных параметров предложенной простой теории.

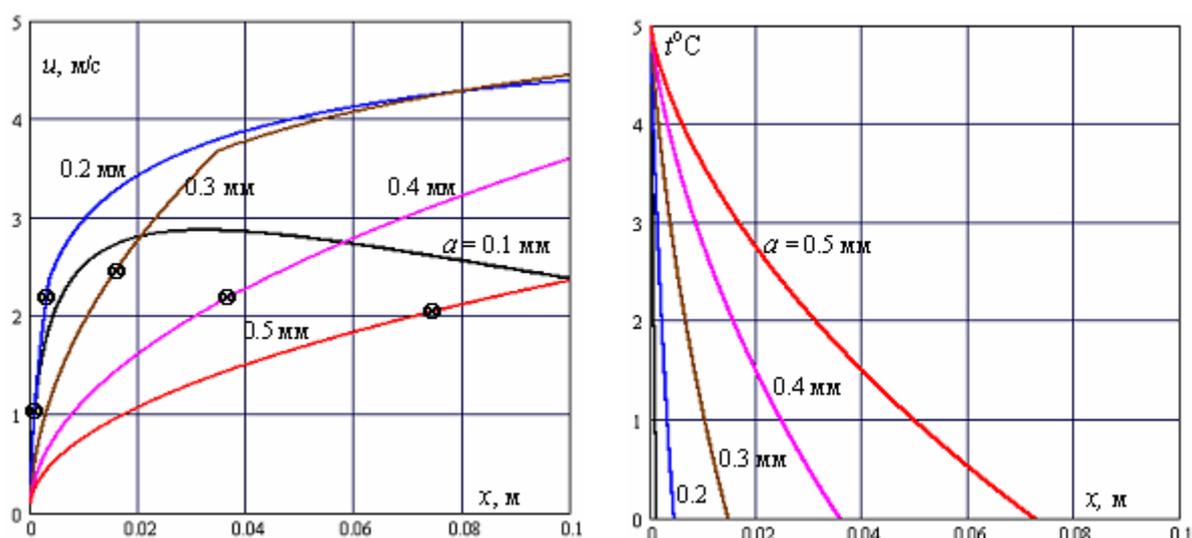


Рис. 4. Изменения скорости (слева) и температуры (справа) эквивалентной по объему сферической капли при ее движении вдоль профиля.

Работа выполнена в рамках Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 гг. (Гос. контракт №14.740.11.1072).

### Выводы

1. В условиях обледенения на стенде получен эффект периодического самоочищения супергидрофобных поверхностей ото льда, при этом на поверхностях обычных материалов при этих же условиях растет ледяной барьер. Краевой угол смачивания супергидрофобных поверхностей при этом был более  $160^{\circ}$ . Полученный результат, а также непосредственные измерения силы адгезии свидетельствуют о ее существенном уменьшении в случае наномодифицированного супергидрофобного материала. Показано, что гидрофобные поверхности в диапазоне краевых углов  $\theta = 90-120^{\circ}$  не обеспечивают защиты ото льда.
2. Для самоочищения поверхности от барьерного льда скоростным напором набегающего потока значение силы адгезии льда к поверхности, измеренное в соответствии с разработанной методикой испытаний при температуре поверхности менее  $10^{\circ}\text{C}$ , должно составлять менее  $10\text{ Н/см}^2$ .

3. Развита простая математическая модель, иллюстрирующая тенденции зависимости гидротермодинамических параметров различных образований на твердой поверхности (пленки, ручейка, капли) от скорости обдува и угла смачивания. Показано, что увеличение угла смачивания существенно увеличивает скорость движения капель по поверхности и препятствует их примерзанию.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Raraty I. F., Tabor D.* The adhesion and stress properties of ice // Proc. Roy. Soc. 1958. Vol. 245A. No. 1241. PP. 184–201.
2. *Eskin S.G., Fontaine W.E., Witzell O.W.* Strength characteristic of ice – in contact with various kinds of surfaces // Refr. Eng. 1957. Vol. 65. No. 12. PP. 33–38, 52.
3. *Stallabrass J.R., Price R.D.* On the adhesion of ice to various materials // Can. Aeronaut. Space J. 1963. Vol. 9. No. 7. PP. 199–202.
4. *Cao L., Jones K. A., Sikk K. V. et al.* Anti-icing superhydrophobic coatings // Langmuir. 2009. Vol. 25. No. 21. P. 12444–12448.
5. *Xiao J., Mackie K.E., Osborn J.H. et al.* In-silico environment for designing anti-icing surfaces. SAE 2011 Int. Conf. on Aircraft and Engine Icing and Ground Deicing. June 2011, Chicago, USA. SAE Paper 2011-38-001, 2011.
6. *Farhadi S., Farzaneh M., Kulinich S.A.* Anti-icing performance of superhydrophobic surfaces // Appl. Surface Sci. 2011. Vol. 257. No. 14. P. 6264–6269.
7. *Antonini C., Innocenti M., Horn T. et al.* Understanding the effect of superhydrophobic coatings on energy reduction in anti-icing systems // Cold Regions Sci. Tech. 2011. Vol. 67. No. 1–2. P. 58–67.

### EXPERIMENTAL AND THEORETICAL INVESTIGATIONS OF THE ORDINARY AND NANO MODIFIED SUPERHYDROPHOBIC SURFACES ICING PROCESSES

E. Grinats<sup>1,2</sup>, A. Miller<sup>1,2</sup>, Y. Potapov<sup>1</sup>, A. Stasenko<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>*Federal State Unitary Enterprise "Zhukovsky Central Aero-Hydrodynamic Institute "*

*1, Zhukovsky Str., Zhukovsky, 140180*

<sup>2</sup>*Moscow Institute of Physics and Technology*

*9, Institutskii lane, Dolgoprudny, 141700*

*Abstract.* The results of investigations of superhydrophobic, hydrophobic and ordinary surfaces in the artificial icing conditions are generalized. The availability of the superhydrophobic coatings for anti-icing systems is demonstrated. The effect of the superhydrophobic surface self-cleaning from ice in the flow conditions is considered. The simple mathematical model was developed illustrating dependences tendencies of hydrothermodynamic parameters of different formations on solid surface (film, rivulet, droplet) from the flow velocity and contact angle.

*Keywords:* icing, aircraft, runback ice, adhesion, materials surfaces nano modification, superhydrophobicity, aerophysical experiment.

## ТЕХНОЛОГИИ И МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ

УДК 37.012

### ПРИНЦИПЫ МОДУЛЬНО-РЕЙТИНГОВОЙ СИСТЕМЫ ПРЕПОДАВАНИЯ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

**Е.А. Власова\*, А.Ф. Грибов\*, В.С. Попов, А.В. Латышев\*\***

*\*Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана  
105005, Москва, ул. 2-я Бауманская, 5*

*\*\*Московский государственный областной университет  
105005, Москва, ул. Радио, д. 10а*

*Аннотация.* В статье сформулированы основные принципы модульно-рейтинговой системы образования в вузе, цели и задачи, которые преследует эта система. Проводится разработка учебного курса «Аналитическая геометрия» на основе блочно-модульной системы.

*Ключевые слова:* модульно-рейтинговая система, блочно-модульная система, рейтинг, система контроля качества образования, модель образования.

Введение модульно-рейтинговой системы обучения продиктовано присоединением России в 2003 году к Болонской Конвенции по высшему образованию. В 1998 году Франция, Германия, Великобритания и Италия подписали «Сорбонскую декларацию», в которой были сформулированы общие положения по стандартизации высшего образования в рамках Европейского союза (ЕС). Цели Сорбонской декларации были подтверждены в 1999 году при подписании Болонской декларации, в которой уже 29 стран брали на себя обязательство повысить конкурентоспособность европейского пространства высшего образования. Декларация содержит семь основных положений.

1. Система сопоставимых степеней, что обеспечит возможность трудоустройства европейских граждан и повысит конкурентоспособность европейской системы высшего образования.
2. Двухцикловое обучение – предварительное (pregraduate) и выпускное (graduate). Длительность первого – не менее трех лет, второй должен вести к получению степени магистра или степени доктора.
3. Европейская система перезачета зачетных единиц трудоемкости для поддержки крупномасштабной студенческой мобильности (система кредитов), которая, в частности, обеспечивает право выбора студентом изучаемых дисциплин.
4. Расширить мобильность учащихся и преподавательского состава, установить стандарты транснационального образования.
5. Содействие европейскому сотрудничеству в обеспечении качества образования, разработка сопоставимых критериев и методологий.
6. Внедрение внутривузовских систем контроля качества образования, привлечение к внешней оценке деятельности вуза студентов и работодателей.

7. Развитие межинституционального сотрудничества, создание совместных программ обучения и научных исследований.

Болонская декларация предполагает привлечение к этому процессу и стран, которые не являются членами ЕС, что позволит привлекать для работы в ЕС высококвалифицированные кадры из этих стран, в том числе, и из России. Присоединение к Болонскому процессу России дает дополнительные возможности для участия российских вузов в проектах, финансируемых ЕС, позволит расширить совместные научные исследования, академический обмен студентами и преподавателями.

В то же время, интеграция в такой процесс предполагает необходимость перевода российской системы образования на западную модель образования.

Модульно-рейтинговая (или блочно-модульная) системы обучения предполагает непрерывность контроля работы и успеваемости студентов в течение всего срока обучения. Такая система призвана активизировать и систематизировать учебную работу студентов, повысить мотивацию студентов к получению знаний и поднять их уровень, способствовать повышению качества образования. Проведение промежуточных рейтинговых аттестационных оценок полученных знаний должно способствовать равномерному освоению дисциплин, снизить перегрузки и напряженность в работе студентов, упорядочить самостоятельную учебную работу обучающихся.

Блочно-модульная система преподавания позволяет осуществлять проверку полученных студентами теоретических и практических знаний более одного раза в течение семестра, и тем самым неоднократно в семестр объективно оценить уровень таких знаний и принять меры по корректировке учебного материала индивидуально для каждого студента.

Основными принципами модульно-рейтинговой системы являются:

1. Учебная дисциплина (курс) делится на модули, каждый из которых состоит из набора разделов курса и имеет логически завершенную часть этого курса. Таких модулей может быть несколько в зависимости от конкретной учебной дисциплины, ее объема, специфики.
2. Как правило, модульный блок содержит домашнее задание, выполнение которого в установленные сроки является обязательным условием получения зачета по модулю. Каждый блок завершается аттестацией по входящим в эти модули разделам курса. Эти аттестации проводятся в течение недельной минисессии с выставлением оценки.
3. Модуль (блок) содержит набор контрольных мероприятий, каждое из которых оценивается некоторым числом баллов, называемое рейтингом. Рейтинги по всем отдельным модулям, входящим в состав учебного курса, а так же «премиальные» баллы (активность работы на семинарах, посещаемость занятий, качественное и в установленный срок выполнение домашних и текущих заданий), складываются, и таким образом определяется рейтинг студента за работу в течение семестра (промежуточный рейтинг). Итоговый рейтинг за изучение дисциплины складывается из промежуточных рейтингов и рубежного рейтинга – баллов, набранных студентом за сдачу экзамена (зачета). В дальнейшем итоговый рейтинг переводится (согласно принятой таблицы) в пятибалльную оценку. В случае, если программой по дисциплине не предусмотрен итоговый контроль (экзамен или зачет), то итоговый рейтинг совпадает с промежуточным рейтингом. Очевидно, что такой принцип стиму-

лирует студента к непрерывной работе в семестре, своевременной сдаче домашних заданий, серьезной подготовке к контрольным мероприятиям.

Рассмотрим в качестве иллюстрации применяемой системы курс «Аналитическая геометрия» (первый семестр).

Блок «Аналитическая геометрия»

1 курс, 1 семестр

Деление на модули

№ мод	Название модуля
	1 семестр
1	Векторная алгебра и аналитическая геометрия
2	Кривые и поверхности второго порядка, матрицы и системы линейных алгебраических уравнений

Рейтинговая система контроля освоения дисциплины

	Неделя проведения контроля модуля	Оценка за модуль в баллах	
		Максимальная	Минимальная
<b>Семестр 1</b>			
ДЗ №1, часть 1	7	7	5
ДЗ №1, часть 2	9	7	5
Контроль по модулю №1	10	26	16
Премиальные баллы	-	3	0
<b>Модуль 1</b>	<b>11</b>	<b>43</b>	<b>26</b>
ДЗ №2	13	9	5
КР	14	17	10
Контроль по модулю №2	16	28	19
Премиальные баллы	-	3	0
<b>Модуль 2</b>	<b>17</b>	<b>57</b>	<b>34</b>
<b>Итоговый рейтинг</b>		<b>100</b>	<b>60</b>

Контрольные мероприятия и сроки их проведения

Модуль 1

- ДЗ №1 часть 1 «Векторная алгебра»  
Срок выдачи 2 неделя, срок сдачи - 7 неделя
- ДЗ №1 часть 2 «Прямые и плоскости»  
Срок выдачи 1 неделя, срок сдачи - 9 неделя
- Контроль по модулю №1 (РК №1) «Векторная алгебра, прямые и плоскости».  
Срок проведения – 10 неделя

Модуль 2

- ДЗ №2 «Кривые и поверхности 2-го порядка»  
Срок выдачи 6 неделя, срок сдачи - 13 неделя

5. Контрольная работа «Кривые и поверхности 2-го порядка».

Срок проведения – 14 неделя

6. Контроль по модулю №2 (РК №2) «Матрицы и системы линейных алгебраических уравнений»

Срок проведения – 16 неделя

### Рейтинговые оценки

за выполнение отдельных позиций заданий контрольного мероприятия

#### Модуль 1

Контрольное мероприятие	Количество заданий	Баллы за задание
<b>ДЗ №1, часть 1</b>	9 задач	0; 1; 2

Шкала перевода в рейтинговую оценку:

Набранные баллы	Рейтинг
0-15	0
16	5
17	6
18	7

Контрольное мероприятие	Количество заданий	Баллы за задание
<b>ДЗ №1, часть 2</b>	5 задач	0; 1; 2

Шкала перевода в рейтинговую оценку:

Набранные баллы	Рейтинг
0-7	0
8	5
9	6
10	7

Контрольное мероприятие	Количество заданий	Баллы за задание
<b>Контроль по модулю №1</b>	1 теория и 3 задачи	теория – 0; 3; 6 задачи - 0; 1; 2

Шкала перевода в рейтинговую оценку:

	Набранные баллы	Рейтинг
Теория	0	0
	3	3
	6	6
Задачи	0-3	0
	4	13
	5	17
	6	20

Модуль 2

Контрольное мероприятие	Количество заданий	Баллы за задание
<b>ДЗ №2</b>	4 задачи	0; 1; 2

Шкала перевода в рейтинговую оценку:

Набранные баллы	Рейтинг
0-5	0
6	5
7	6
8	9

Контрольное мероприятие	Количество заданий	Баллы за задание
<b>КР</b>	1 теория и 3 задачи	теория – 0; 3; 6 задачи - 0; 1; 2

Шкала перевода в рейтинговую оценку:

	Набранные баллы	Рейтинг
Теория	0	0
	3	3
	6	6
Задачи	0-3	0
	4	7
	5	9
	6	11

Контрольное мероприятие	Количество заданий	Баллы за задание
<b>Контроль по модулю №2</b>	1 теория и 3 задачи	теория – 0; 3; 6 задачи - 0; 1; 2

Шкала перевода в рейтинговую оценку:

	Набранные баллы	Рейтинг
Теория	0	0
	3	3
	6	6
Задачи	0-3	0
	4	16
	5	19
	6	22

### Правила выставления баллов в журнале

1. **Баллы за ДЗ.** Баллы за ДЗ выставляются на следующей неделе после установленного срока сдачи, согласно соответствующей таблице. Студент имеет право сдавать на проверку отдельные задания ранее установленного срока и исправлять отмеченные преподавателем ошибки, получая при этом необходимую консультацию. Если к окончательному сроку сдачи ДЗ студент доводит решение задачи до правильного варианта, то ему за это задание выставляется максимальный балл. После срока сдачи ДЗ студент, не набравший минимального балла за ДЗ, может продолжить работу над заданием. При этом в случае успешной работы студенту начисляется минимальный балл за ДЗ.

2. **Баллы за КР.** Если студент в срок не набирает минимального балла за КР, то в течение семестра он может два раза переписать эту работу. При положительном результате (наборе баллов не менее установленного минимального) студенту выставляется минимальный балл за КР.

3. **Баллы за «контроль по модулю».** В качестве «контроля по модулю» предлагается письменная работа, состоящая из теоретической и практической частей. Каждая часть контроля по модулю оценивается отдельно. Студент, получивший оценку не ниже минимальной по одной из частей контроля, считается сдавшим эту часть и освобождается от ее выполнения в дальнейшем. По усмотрению преподавателя по теоретической части задания может проводиться собеседование. Если студент не набирает установленного минимума за каждую часть работы, то в течение семестра он имеет две попытки по каждой части исправить ситуацию. При положительном результате (наборе баллов не менее установленного минимального) студенту выставляется минимальный балл за «контроль по модулю».

4. **Оценка за модуль.** Если студент выполнил все текущие контрольные мероприятия модуля (набрал не менее установленного минимального балла), то оценкой за модуль считается сумма баллов за все контрольные мероприятия модуля (при этом студент автоматически набирает не ниже минимального порога). Окончательные баллы за модуль проставляются в журнале после закрытия всех контрольных мероприятий.

5. **Суммарный балл.** Сумма баллов за два модуля.

6. **Оценка.** Итоговая аттестация (экзамен, дифференцированный зачет, зачет) проводится по результатам работы в семестре после выполнения студентом запланированного объема учебных работ и получения по каждому модулю оценки, не ниже минимально установленной. Максимальная сумма баллов по всем модулям, включая баллы за прилежание, равна 100, минимальная – 60. Сумма баллов по всем модулям образует рейтинговую оценку по дисциплине за семестр. Студент, сдавший все контрольные мероприятия, получает итоговую оценку по дисциплине за семестр в соответствии со шкалой:

Рейтинг	Экзаменационная оценка	Зачет
85 – 100	отлично	Зачет
71 – 84	хорошо	
60 – 70	удовлетворительно	
0 – 59	неудовлетворительно	Незачет

Повысить свой рейтинг, и, следовательно, экзаменационную оценку можно на итоговом экзамене (письменная работа по материалу дисциплины в целом, проводится в экзаменационную сессию), максимальный балл – 30, минимальный - 16. Эти баллы суммируются с баллами, полученными за все модули по дисциплине. При этом для повышения оценки до «хорошо» за экзамен студент должен набрать не менее 21 балла, до «отлично» — не менее 26 баллов. Для специальностей, где предусмотрен зачет по дисциплине, повышение рейтинга не проводится. Студенты, имеющие к началу экзаменационной сессии рейтинг в диапазоне 0-59, набирают необходимый минимум для получения положительной оценки по дисциплине, передавая контрольные мероприятия, не зачтенные ранее, по отдельным модулям. При этом студенты, не имеющие уважительной причины, могут в итоге (к моменту окончания экзаменационной сессии) получить оценку не выше «удовлетворительно».

По работе на основе блочно-модульной системы преподавания можно сделать следующие выводы:

1. введение этой системы улучшает объективность контроля и оценки знаний студентов;
2. позволяет своевременно осуществлять диагностику уровня знаний студентов на всех этапах обучения;
3. повышает качество обучения;
4. к недостаткам такого подхода можно отнести сложности, возникающие при создании логически завершенного по содержанию модуля, который должен уместиться в жесткие временные рамки; это, в свою очередь, приводит к увеличению числа модулей и изменению сроков проведения промежуточных аттестаций;
5. для эффективности функционирования такой системы обучения при большом количестве студентов необходимо использование ИКТ.

## **PRINCIPLES OF MODULE RATING SYSTEM OF TEACHING MATHEMATICS**

**A. Vlasova\*, A. Gribov\*, V. Popov\*, A. Latyshev\*\***

*Bauman Moscow State Technical University  
5, 2-nd Baumanskaya st., Moscow, 105005, Russia  
Moscow State Regional University  
10a, Radio st., Moscow, 105005, Russia*

*Abstract.* The paper formulates the basic principles of module-rating system of education in the University goals and objectives pursued by this system. Provides development of the training course "Analytic geometry" based on a modular system.

*Keywords:* modular-rating system, a modular system, the rating monitoring system of quality of education, education model.

## НАШИ АВТОРЫ

**Алабина Ю.Ф.** – Московский государственный областной университет, 105005, Москва, ул. Радио, д. 10 а; e-mail: kaf-matan@mgou.ru

**Бугримов А. Л.** – Московский государственный областной университет, 105005, Москва, ул. Радио, д. 10 а, декан физико-математического факультета, заведующий кафедрой вычислительной математики и методики преподавания информатики, доктор технических наук, профессор; e-mail: al.bugrimov@mgou.ru

**Власова Е.А.** – Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, 105005, Москва, ул. 2-я Бауманская, 5; e-mail: bauman@bmstu.ru

**Высикайло Ф.И.** – ОАО «Московский радиотехнический институт РАН» (г. Москва), ФГБНУ Технологический институт сверхтвердых и новых углеродных материалов (г. Троицк, Москва); e-mail: mrti@mrtiran.ru

**Геворкян Э.В.** – Московский государственный областной университет, 105005, Москва, ул. Радио, д. 10 а, профессор кафедры общей физики, доктор физико-математических наук, профессор; e-mail: kaf-obfiz@mgou.ru

**Графов Д. А.** – Московский государственный областной университет, 105005, г. Москва, ул. Радио, д. 10 а, кафедра математического анализа и геометрии, аспирант; e-mail: gr\_fov@mail.ru

**Грибов А.Ф.** – Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана. 105005, Москва, ул. 2-я Бауманская, 5; e-mail: kaf-matan@mgou.ru

**Гринац Э.С.** – ФГУП «Центральный аэрогидродинамический институт им. Н.Е. Жуковского», 140180, Московская область, г. Жуковский, ул. Жуковского, д. 1, инженер первой категории, Московский физико-технический институт 141700, г. Долгопрудный, Институтский пер., д. 9; e-mail: info@mipt.ru

**Ефремов В.Е.** – Московский государственный областной университет, 105005, Москва, ул. Радио, д.10 а, кафедра математического анализа и геометрии, старший преподаватель; e-mail: efremovam51@mail.ru

**Зверев Н.В.** – Московский государственный областной университет, 105005, Москва, ул. Радио, 10а, доцент кафедры теоретической физики; e-mail: kaf-tfiz@mgou.ru

**Кузнецова И.А.** – Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, 150003, г. Ярославль, ул. Советская, д. 14, декан физического факультета, профессор кафедры микроэлектроники; e-mail: kuz@uniyar.ac.ru

**Кузнецов М.М.** – Московский государственный областной университет, 105005, Москва, ул. Радио, д. 10 а, профессор кафедры теоретической физики, доктор физико-математических наук, доцент; e-mail: kaf-tfiz@mgou.ru

**Латышев А.В.** – Московский государственный областной университет, 105005, Москва, ул. Радио, д. 10 а, заведующий кафедрой математического анализа и геометрии, доктор физико-математических наук, профессор; e-mail: kaf-matan@mgou.ru

**Лебедев М.Е.** – Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,

150003, г. Ярославль, ул. Советская, д. 14, аспирант; e-mail: mihaleb@ya.ru

**Максимова О.В.** – Ульяновский государственный технический университет, доцент кафедры «Проектирование и технология электронных средств»; e-mail: pites@ulstu.ru

**Максимов С.М.** – Ульяновский государственный технический университет, аспирант кафедры «Проектирование и технология электронных средств»; e-mail: pites@ulstu.ru

**Маркеев Б.М.** – Московский государственный областной университет, 105005, Москва, ул. Радио, д. 10 а, профессор кафедры вычислительной математики и методики преподавания информатики, доктор физико-математических наук, профессор; e-mail: kaf-vmmpi@mgou.ru

**Миллер А.Б.** – ФГУП «Центральный аэрогидродинамический институт им. Н.Е. Жуковского», 140180, Московская область, г. Жуковский, ул. Жуковского, д. 1, начальник отдела, Московский физико-технический институт, 141700, г. Долгопрудный, Институтский пер., д. 9; e-mail: info@mipt.ru

**Панасюк К.А.** – Российский государственный технологический университет имени К.Э. Циолковского (МАТИ), 121552, Москва, ул. Оршанская, д. 3; ; e-mail: kaf-vmmpi@mgou.ru

**Потапов Ю.Ф.** – ФГУП «Центральный аэрогидродинамический институт им. Н.Е. Жуковского», 140180, Московская область, г. Жуковский, ул. Жуковского, д. 1, начальник лаборатории; e-mail: info@mipt.ru

**Самохвалов М.К.** – Ульяновский государственный технический университет, заведующий кафедрой «Проектирование и технология электронных средств», профессор, академик РАЕН; e-mail: pites@ulstu.ru

**Смотрова Л. В.** – Московский государственный областной университет, 105005, Москва, ул. Радио, д. 10 а, кафедра теоретической физики, аспирант; e-mail: kaf-tfiz@mgou.ru

**Стасенко А.Л.** – ФГУП «Центральный аэрогидродинамический институт им. Н.Е. Жуковского», 140180, Московская область, г. Жуковский, ул. Жуковского, д. 1, г.н.с., Московский физико-технический институт 141700, г. Долгопрудный, Институтский пер., д. 9; e-mail: info@mipt.ru

**Титов А.А.** – Московский физико-технический институт, 141700, г. Долгопрудный, Институтский переулок, 9; e-mail: info@mipt.ru

**Юшканов А. А.** – Московский государственный областной университет, 105005, Москва, ул. Радио, д. 10 а, кафедра теоретической физики, доктор физико-математических наук, профессор; e-mail: kaf-tfiz@mgou.ru

СОДЕРЖАНИЕ

<b>МАТЕМАТИКА</b> .....	3
<i>Д.А. Графов.</i> Равносходимость разложений в кратный тригонометрический ряд и интеграл Фурье с " $I_k$ - лакунарной последовательностью частичных сумм" .....	3
<b>ФИЗИКА</b> .....	6
<i>Алабина Ю.Ф., Бугримов А.Л., Латышев А.В., Юшканов А.А.</i> Продольная диэлектрическая проницаемость квантовой столкновительной максвелловской плазмы ...	6
<i>Ефремов В.Е.</i> Решение задач нестационарного диффузиофореза .....	20
<i>Титов А.А.</i> Статистический анализ образования димеров для задач течения газа при низких температурах .....	29
<i>Высикайло Ф.И.</i> Аналитическое описание спектров излучения стоячих экситонов большого радиуса в кристаллах IV группы элементов легированных бором .....	36
<i>Геворкян Э.В.</i> Многочастичные взаимодействия в физике конденсированного состояния .....	45
<i>Зверев Н.В.</i> Двухшаговый мультибозонный алгоритм для дискретной U(1) модели фермионов .....	48
<i>Кузнецова И.А., Лебедев М.Е., Юшканов А.А.</i> Рассеяние электромагнитных волн на малой металлической частице .....	56
<i>Кузнецов М.М., Смотрова Л.В.</i> Аналитические свойства эффекта высокоскоростной поступательной неравновесности .....	66
<i>Максимова О.В., Максимов С.М., Самохвалов М.К.</i> Анализ процессов проектирования и технологии наноструктурированных тонкопленочных электролюминесцентных индикаторных устройств .....	74
<i>Маркеев Б.М.</i> Спектры колебаний слабоионизованной столкновительной плазмы .....	78
<i>Маркеев Б.М., Панасюк К.А.</i> Колебания неоднородной слабоизолированной плазмы .....	82
<i>Гринац Э.С., Миллер А. Б., Потапов Ю. Ф., Стасенко А. Л.</i> Экспериментальные и теоретические исследования процессов обледенения наномодифицированных супергидрофобных и обычных поверхностей .....	84
<b>ТЕХНОЛОГИИ И МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ</b> .....	93
<i>Власова Е.А., Грибов А.Ф., Попов В.С., Латышев А.В.</i> Принципы модульно-рейтинговой системы преподавания высшей математики .....	93
<b>НАШИ АВТОРЫ</b> .....	100

CONTENTS

<b>MATHEMATICS</b> .....	3
<i>Grafov D.</i> Equiconvergence expansions in multiple trigonometric series and Fourier integral for " $I_k$ -lacunary sequence of partial sums" .....	3
<b>PHYSICS</b> .....	6
<i>Alabina Y., Bugrimov A., Latyshev A., Yushkanov A.</i> Longitudinal dielectric permeability of the quantum maxwell collisional plasma .....	6
<i>Efremov V.</i> Problems solution in nonstationary diffusiophoresis .....	20
<i>Titov A.</i> The statistical analysis of formation of dimer for problems of gas flow at low temperatures .....	29
<i>Vysikaylo Ph.I.</i> Analytical description of the emission spectra of standing large-radius excitons in crystals of group iv elements, boron-doped .....	36
<i>Gevorkyan E.</i> Many-particle interactions in condensed state physics .....	45
<i>Zverev N.</i> Two-step multibozon algorithm for a discrete U(1) model of fermions .....	48
<i>Kuznetsova I., Lebedev M., Yuskanov A.</i> Electromagnetic waves scattering on fine metal particle .....	56
<i>Kuznetsov M., Smotrova L.</i> Analytical qualities of highvelocity translational nonequilibrium in shock wave .....	66
<i>Maksimova O., Maksimov S., Samokhvalov M.</i> The analysis of processes of design and technology of nanostructured thin film electroluminescent display devises .....	74
<i>Markeev B.</i> The oscillation spectrum of a weakly ionized collisional plasma .....	78
<i>Markeev B., Panasyuk K.</i> Oscillations of an inhomogeneous weakly ionized plasma .....	82
<i>Grinats E., Miller A., Potapov Y., Stasenko A.</i> Experimental and theoretical investigations of the ordinary and nano modified superhydrophobic surfaces icing processes .....	84
<b>TECHNOLOGIES AND TECHNIQUES OF TRAINING</b> .....	93
<i>Vlasova A., Gribov A., Popov V., Latyshev A.</i> Principles of module rating system of teaching mathematics .....	93
<b>OUR AUTHORS</b> .....	100

УДК 517.5

Равносходимость разложений в кратный тригонометрический ряд и интеграл Фурье с " $I_k$ - лакунарной последовательностью частичных сумм" / Графов Д.А. // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2013. №3. С.3-5.

В работе исследуется вопрос о равносходимости на  $T^N = [-\pi, \pi]^N$  разложений в кратный тригонометрический ряд и интеграл Фурье функций  $f \in L_p(T^N)$  и  $g \in L_1(R^N)$ ,  $p > 1, N \geq 2, g(x) = f(x)$  на  $T^N = [-\pi, \pi]^N$ .

Библиогр. 3.

УДК 533.9.02

Продольная диэлектрическая проницаемость квантовой столкновительной максвелловской плазмы / Алабина Ю.Ф., Бугримов А.Л., Латышев А.В., Юшканов А.А. // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2013. №3. С.11-24.

Проводится исследование диэлектрической функции для столкновительной плазмы с произвольной степенью вырожденности электронного газа. Путем специального предельного перехода получена диэлектрическая функция максвелловской плазмы. Приводится исследование и сравнение продольных диэлектрических функций квантовой и классической максвелловской столкновительной плазмы.

Ил.12. Библиогр.11.

УДК 533.72

Решение задач нестационарного диффузиофореза / Ефремов В.Е. // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2013. №3. С.25-31.

Автор продолжает построение теории нестационарного диффузиофореза крупной твердой нелетучей частицы сферической формы в вязкой газовой среде. Приводится решение диффузионной задачи, которая разбита на стационарную и строго нестационарную части. В результате решения стационарной части этой задачи получена окончательная формула для определения стационарной составляющей диффузиофоретической скорости рассматриваемой частицы. Для определения нестационарной составляющей диффузиофоретической скорости этой частицы найдена соответствующая формула в пространстве лапласовых изображений.

Библиогр.5.

УДК 533.15

Статистический анализ образования димеров для задач течения газа при низких температурах / Титов А.А. // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2013. №3. С.32-39.

В пограничной фазе между жидкостью и газом при низких температурах образуются кластеры из частиц. Самые простые из них это димеры. Рассмотрено образование димеров аргона при тройных столкновениях. Приведены графики набранных статистик для случая образования димера. Предложена методика использования результатов в решении задач течения газа при низких температурах методами Монте-Карло.

Ил.8. Библиогр.5.

УДК 539.2

Аналитическое описание спектров излучения стоячих экситонов большого радиуса в кристаллах IV группы элементов легированных бором / Высикайло Ф.И. // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2013. №3. С.40-48.

На базе экспериментов сформулированы и верифицированы основы кумулятивной квантовой механики (ККМ). Сравнением аналитических расчётов резонансных спектров с экспериментальными данными доказано, что ККМ описывает: 1) неограниченную кумуляцию к центру резонатора симметричных  $\psi_{n-1/2}$ -функций волн де Бройля электронов (со спектром  $E_{n-1/2} \sim \pm(n-1/2)^{\pm 2}$ ), захваченных поляризационными потенциалами в сферические или цилиндрические полые резонаторы (фуллерены и нанотрубки); 2) поляризационные квантово-размерные эффекты Высикайло; 3) расщепление уровня с главным квантовым числом  $n$  на два (с  $\psi_n$  и с  $\psi_{n-1/2}$ ) с энергией между уровнями  $\Delta E_{n-1/2,n} \sim n^{-1/4}$  в случае барьера и с  $\Delta E_{n-1/2,n} = 13.56 \cdot (n-1/4)/\varepsilon^2 (n-1/2)^2 n^2$  [эВ] для ямы с  $U(r) \sim -1/\varepsilon r$ ; и 4) спектры переходов между состояниями с различной симметрией  $\psi$ -функций ( $\psi_n \rightarrow \psi_{n-1/2}$ ) в сверхрешётках из стоячих экситонов в кристаллах IV группы, легированных бором.

Ил.5. Табл.1. Библиогр.16.

УДК 537.9+539.6

Многочастичные взаимодействия в физике конденсированного состояния / Геворкян Э.В. // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2013. №3. С.48-51.

Показано, что многочастичные взаимодействия необходимо учитывать при описании физических свойств и фазовых превращений в конденсированных системах. Модель парного взаимодействия пригодна лишь для качественных оценок свойств реальных систем. Обсуждается концепция эффективных парных взаимодействий и методы их вычисления.

Библиогр.2.

УДК:530.1:539.12

Двухшаговый мультибозонный алгоритм для дискретной  $U(1)$  модели фермионов / Зверев Н.В. // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2013. №3. С.51-58.

Рассмотрен статистический двухшаговый мультибозонный алгоритм вычислений применительно к  $U(1)$  модели фермионов на четырёхмерной решётке пространства-времени. Показано, что использование второго шага принятия-отвержения полей приводит к увеличению производительности алгоритма.

Библиогр.11.

УДК 535.36

Рассеяние электромагнитных волн на малой металлической частице / Кузнецова И.А., Лебедев М.Е., Юшканов А.А. // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2013. №3. С.58-67.

В дипольном приближении вычислено сечение рассеяния малой металлической частицы сферической формы, помещенной в поле плоской электромагнитной волны. Радиус частицы предполагается малым по сравнению с характерной глубиной скин-слоя, что позволяет пренебречь скин-эффектом. Расчеты выполнены в рамках кинетического подхода при произвольном соотношении между длиной свободного пробега электронов и радиусом частицы. Рассмотрен диффузный механизм отражения носителей заряда от поверхности частицы. Показано, что при определенных углах рассеяния доминирующим становится магнитное дипольное рассеяние.

Ил.5. Библиогр.8.

УДК 533.6.011

Аналитические свойства эффекта высокоскоростной поступательной неравновесности / Кузнецов М.М., Смотров Л.В. // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2013. №3. С.68-75.

Рассмотрен аналитический метод исследования структуры ударной волны с поступательно неравновесными химическими реакциями. Метод основан на эллиптической бимодальной аппроксимации функции распределения молекул, примененной к определению скоростей барьерных химических процессов.

Библиогр.15.

УДК 681.883.7

Анализ процессов проектирования и технологии наноструктурированных тонкопленочных электролюминесцентных индикаторных устройств / Максимова О.В., Максимов С.М., Самохвалов М.К. // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2013. №3. С.76-81.

Статья посвящена проблемам автоматизации разработки тонкопленочных электролюминесцентных индикаторов, как элементов электронных средств. Представлены предполагаемые основные принципы, аспекты, развития систем автоматизированного проектирования тонкопленочных электролюминесцентных индикаторов и их структур. Результаты исследований позволят улучшить алгоритмы и создать новую программу, позволяющую автоматизировать проектирование и технологию тонкопленочных электролюминесцентных элементов индикатора.

Библиогр.5.

УДК 533.9(075.8)

Спектры колебаний слабоионизованной столкновительной плазмы / Маркеев Б.М. // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2013. №3. С.81-85.

В работе рассматривается влияние столкновений на потенциальные колебания слабоионизованной однородной плазмы в областях  $\omega > \nu_{en}$  и  $\nu_{in} > \omega > \nu_{en}$ . Столкновения учитываются посредством интеграла столкновений Больцмана. В условиях  $(k_z V_{te})^2 / \omega \nu_{en} \gg 1$  показано существование в промежуточной области частот  $(\nu_{in} < \omega < \nu_{en})$  ионно-звуковых колебаний, аналогичных ионно-звуковым колебаниям слабостолкновительной плазмы.

Библиогр.2.

УДК 533.9(075.8)

Колебания неоднородной слабоизолированной плазмы / Маркеев Б.М., Панасюк К.А. // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2013. №3. С.85-87.

Для сильностолкновительной области частот  $(\omega < \nu_{in})$  неоднородной слабоионизованной плазмы в предельных случаях большого  $((k_z V_{te})^2 \gg m \nu_{en})$  и малого  $((k_z V_{te})^2 < \omega \nu_{en})$  электронных коэффициентов диффузии получены спектры дрейфовых колебаний на основе решения кинетического уравнения методом Греда.

Библиогр.2.

УДК 532.529:532.6

Экспериментальные и теоретические исследования процессов обледенения наномодифицированных супергидрофобных и обычных поверхностей / Гринац Э.С., Миллер А. Б., Потапов Ю. Ф., Стасенко А. Л. // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2013. №3. С.88-96.

Обобщены результаты исследований супергидрофобных, гидрофобных и обычных поверхностей в условиях обледенения на стенде. Показана перспективность использования супергидрофобных покрытий для противообледенительных систем. Рассмотрен эффект периодического самоочищения супергидрофобной поверхности ото льда в потоке. Развита простая математическая модель, иллюстрирующая тенденции зависимости гидротермодинамических параметров различных образований на твердой поверхности (пленки, ручейка, капли) от скорости обдува и угла смачивания.

Ил.4. Библиогр.7.

УДК 37.012

Принципы модульно-рейтинговой системы преподавания высшей математики / Власова Е.А., Грибов А.Ф., Попов В.С., Латышев А.В.// Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2013. №3. С.96-104.

В статье сформулированы основные принципы модульно-рейтинговой системы образования в вузе, цели и задачи, которые преследует эта система. Приводится разработка учебного курса «Аналитическая геометрия» на основе блочно-модульной системы.

Табл.15.

## ПРАВИЛА

подготовки рукописей, представленных для опубликования в журнале  
«Вестник Московского государственного областного университета.  
Сер. Физика - математика»

Для публикации научных работ в выпусках серии «Вестник МГОУ» принимаются статьи на русском языке. Публикуются научные материалы преимущественно докторантов, аспирантов, соискателей, преподавателей ВУЗов, докторов и кандидатов наук.

**Требования к оформлению статей.** Статья должна быть представлена:

- в текстовом варианте (текст статьи должен быть подписан всеми авторами);
- в виде документа MS Word (с расширением doc);
- в виде файла в формате rtf;

**Файл должен содержать построчно:**

На русском языке	УДК (в верхнем левом углу первого листа рукописи) НАЗВАНИЕ СТАТЬИ – прописными буквами Фамилия, имя, отчество Полное наименование организации (в скобках – сокращенное), почтовый адрес Должность (другие сведения, например, E-mail, телефон) Аннотация (1 абзац до 400 символов) под заголовком «АННОТАЦИЯ» Ключевые слова
На английском языке	НАЗВАНИЕ СТАТЬИ – прописными буквами Фамилия, инициалы Полное наименование организации, почтовый адрес Аннотация (1 абзац до 400 символов) под заголовком «Abstract» Ключевые слова (Key words)
На русском языке	Объем статьи ограничен темя уровнями: а) 12 страниц с числом иллюстраций до пяти (к этим статьям предъявляются повышенные требования); б) 6 страниц с числом иллюстраций до трех (содержатся основные результаты без излишних деталей выводов и доказательств); в) 4 страницы с числом иллюстраций до двух (выходят в разделе краткие сообщения вне очереди). Список использованной литературы под заголовком «ЛИТЕРАТУРА»

Формат страницы – А4, книжная ориентация. Поля – 2,5 см. Шрифт Times New Roman Cyrillic, цвет шрифта черный, размер 12 пикселей, междустрочный интервал – полуторный.

**Запрещены** специфические действия над текстом и встраиваемые коды: уплотнение интервалов, использование цветowych заливок, «красные строки», центрирование, табуляция, отступы, переносы в словах (делаемые автором), ссылки, гиперссылки, сноски (лучше их оформлять в виде примечаний, замечаний и т.п.). Не допускаются сокращения слов, имен, названий, за исключением общепринятых (и оговоренных).

Формулы нумеруются (справа) только те, на которые в тексте имеются ссылки.

Рисунки и таблицы допускаются в том случае, если описать процесс в текстовой форме невозможно. В этом случае каждый из объектов не должен превышать указанные размеры страницы, а шрифт в нем – 12 пикселей. Возможно использование только вертикальных таблиц и рисунков. Запрещены цветowe заливки, применение «фонов».

Рисунки, схемы, графики выполняются на отдельных листах в формате, обеспечивающем ясность передачи деталей. Места расположения иллюстраций в тексте должны быть указаны простым карандашом на полях. На обороте иллюстрации должны быть написаны фамилия автора и название статьи. Текст к иллюстрациям, а также таблицы следует поместить на отдельных страницах. Все рисунки, схемы, графики, таблицы должны иметь названия.

Все формулы должны быть созданы с использованием компонента Microsoft Equation, (MathType 4.0). Размер шрифта также 12 пикселей. Формула создается однократным запуском компонента Microsoft Equation (MathType 4.0). Запрещается создавать составные формулы! Небольшие строчные фрагменты типа  $\Delta U_{ij}$  или  $C^{(m)} = (c_{1m}, c_{1m}, \dots)^T$  следует набирать обычным способом в латинице, используя средства панели инструментов: изменение шрифта на курсив, написание верхних и нижних индексов, а также вставку символов. При этом следует обратить внимание на написание цифр, скобок, операторов и наименований функций ( $\Delta$ ,  $\sin$ ,  $\cos$ , ...) прямым шрифтом. Хорошее представление об оформлении математических текстов дает чтение научных журналов Российской академии наук физико-математического направления, классических учебников по физике и математике для высших учебных заведений.

Абзацы должны быть отделены друг от друга пустой строкой (дополнительным «Enter»).

Список литературы должен содержать библиографические сведения о всех публикациях, упоминаемых в статье, и не должен содержать указаний на работы, на которые в тексте нет ссылок. Располагать публикации в списке следует по алфавиту, вначале следует приводить отечественные публикации, затем – иностранные. Список литературы приводится на отдельном листе с обязательным указанием следующих данных: для книг (монография, сборник и т.д.) – фамилия (после фамилии ставится запятая), инициалы автора, название книги, место издания (город), издательство, год издания; для журнальных статей – фамилия и инициалы автора, название статьи, название журнала, год издания, том, номер, выпуск, страницы (первая и последняя). **Обращаем Ваше внимание!** С 01.07.2004 введен новый стандарт ГОСТ 7.1-2003 «Библиографическая запись. Библиографическое описание. Общие требования и правила составления». Наиболее распространенные примеры:

1. Иванов, И.И. Название книги / И.И. Иванов. - М.: Наука, 2009. – 205 с.
2. Иванов, И.И. Название книги / И.И. Иванов, П.М. Петров, К.Л. Данилов. - М.: Наука, 2009. – 205 с.
3. Иванов, И.И. Название книги / И.И. Иванов [и др. (если 4 автора и более)]. - М.: Наука, 2009. – 205 с.
4. Название книги / И.И. Иванов [и др.], под ред. И.И. Иванова. - М.: Наука, 2009. – 205 с.
5. Иванов, И.И. Название статьи / И.И. Иванов, П.М. Петров, К.Л. Данилов // Название сборника. - М.: Механика, 2009. – С.51-59.
6. Иванов, И.И. Название статьи / И.И. Иванов, П.М. Петров, К.Л. Данилов // Название журнала. – 2009. - №2. - С.51-59.

Ссылки на неопубликованные работы не допускаются.

Редакционная коллегия оставляет за собой право на редактирование статей, хотя с точки зрения научного содержания авторский вариант сохраняется. Статьи, не соответствующие указанным требованиям, решением редакционной коллегии серии не публикуются и не возвращаются (почтовой пересылкой).

В случае принятия статьи, условия опубликования оговариваются с ответственным редактором.

Ответственный редактор серии «Физика-математика» декан физико-математического факультета, доктор технических наук, профессор Бугримов Анатолий Львович.

Адрес редколлегии серии «Физика-математика» «Вестника МГОУ»: 105005, Москва, ул. Радио, д.10-а, комн. 36. Тел. (495) 261-09-48



# **ВЕСТНИК Московского государственного областного университета**

Научный журнал «Вестник МГОУ» основан в 1998 г. На сегодняшний день выходят десять серий «Вестника»: «История и политические науки», «Экономика», «Юриспруденция», «Философские науки», «Естественные науки», «Русская филология», «Физика-математика», «Лингвистика», «Психологические науки», «Педагогика». Все серии включены в составленный Высшей аттестационной комиссией Перечень ведущих рецензируемых научных журналов, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертации на соискание ученой степени доктора и кандидата наук по наукам, соответствующим названию серии. Журнал включен в базу данных Российского индекса научного цитирования (РИНЦ).

Печатная версия журнала зарегистрирована в Федеральной службе по надзору за соблюдением законодательства в сфере массовых коммуникаций и охране культурного наследия. Полнотекстовая версия журнала доступна в Интернете на платформе Научной электронной библиотеки ([www.elibrary.ru](http://www.elibrary.ru)), а также на сайте Московского государственного областного университета ([www.vestnik.mgou.ru](http://www.vestnik.mgou.ru)).

---

## **ВЕСТНИК МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ОБЛАСТНОГО УНИВЕРСИТЕТА**

**Серия «Физика-Математика»  
2013. № 3**

**Над номером работали:**

менеджер Отдела по изданию журнала «Вестник МГОУ» *И.А. Потапова*  
компьютерная верстка *А.Л. Бугримов*

**Отдел по изданию научного журнала «Вестник МГОУ»**  
105005, г. Москва, ул. Радио, д.10а, офис 98  
тел. (499) 261-43-41; (495) 723-56-31  
e-mail: [vest\\_mgou@mail.ru](mailto:vest_mgou@mail.ru)  
Сайт: [www.vestnik-mgou.ru](http://www.vestnik-mgou.ru)

Формат 60x86/8. Бумага офсетная. Печать офсетная.  
Гарнитура «Minion Pro». Тираж 200 экз. Усл. п.л. 13,25.  
Подписано в печать 11.11.2013. Заказ № 187.  
Отпечатано в типографии МГОУ  
105005, г. Москва, ул. Радио, 10а

## **К сведению авторов «Вестника МГОУ»**

Для публикации научных работ в выпусках серий «Вестника МГОУ» принимаются статьи на русском языке. Статья должна соответствовать научным требованиям и общему направлению серии журнала, быть интересной достаточно широкому кругу российской научной общественности.

Материал, предлагаемый для публикации, должен быть оригинальным, неопубликованным ранее в других печатных изданиях, написан в контексте современной научной литературы, и содержать очевидный элемент создания нового знания. Представленные статьи проходят проверку в программе «Антиплагиат». Отдел по изданию научного журнала «Вестника МГОУ» проводит независимое (внутреннее) рецензирование.

За точность воспроизведения имен, цитат, формул, цифр несет ответственность автор. Редакционная коллегия оставляет за собой право на редактирование статей без изменения научного содержания авторского варианта. Статьи, не соответствующие требованиям Отдела по изданию «Вестника МГОУ», решением редакционной коллегии серии не публикуются.

Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается. Статьи аспирантов МГОУ печатаются в первую очередь, статьи аспирантов других вузов по мере возможности, определяемой в каждом конкретном случае ответственным редактором предметной серии. Оплата статей сторонних авторов (не аспирантов) после принятия статьи ответственным редактором предметной серии должна покрыть издательские расходы «Вестника МГОУ» на ее публикацию. В журнале не будут публиковаться статьи авторов, не предоставивших квитанцию почтовой подписки на «Вестник МГОУ».

Для публикации научной статьи в определенной серии «Вестника МГОУ» автору необходимо предоставить в Отдел по изданию научного журнала «Вестник МГОУ»: 1) авторскую анкету; 2) заявление на имя ответственного редактора (оригинал или факсимильную копию); 3) выписку из заседания кафедры (отдела, сектора), где выполнялась работа (оригинал или факсимильную копию); 4) текст статьи в электронном виде; 5) квитанцию о полугодовой подписке (оригинал или факсимильную копию); 6) внешнюю рецензию (отзыв) (оригинал или факсимильную копию).

По вопросам публикации следует обращаться в Отдел по изданию научного журнала «Вестник МГОУ»: статья регистрируется автором в Отделе, после чего проходит внутреннее рецензирование и при положительной рецензии и наличии необходимых документов принимается к публикации.

В случае положительного решения вопроса о публикации, автор, предоставивший свою статью в определенную серию «Вестника МГОУ», выражает согласие на размещение полного текста статьи в сети Интернет на официальных сайтах журнала «Вестник Московского государственного областного университета» ([www.vestnik.mgou.ru](http://www.vestnik.mgou.ru)) и Научной электронной библиотеки ([www.elibrary.ru](http://www.elibrary.ru)) (См.: ст. 1286 и 1238 Гражданского Кодекса Российской Федерации).

**Подробная информация об оформлении статей и условиях их публикации размещена на сайте журнала (<http://vestnik.mgou.ru>), пункт «Авторам».**

**По финансовым и организационным вопросам публикации статей**  
обращаться в Отдел по изданию журнала «Вестник МГОУ» к Потаповой Ирине Александровне  
105005, г. Москва, ул. Радио, д. 10а, офис 98;  
тел. (499) 261-43-41; (495) 723-56-31;  
e-mail: [vest\\_mgou@mail.ru](mailto:vest_mgou@mail.ru)