

ISSN 2072-8549



# Вестник

МОСКОВСКОГО  
ГОСУДАРСТВЕННОГО  
ОБЛАСТНОГО  
УНИВЕРСИТЕТА

*Серия*

**Ф**ИЗИКА-  
МАТЕМАТИКА

**2012 / № 3**

МАТЕМАТИКА

УДК 517.95

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРА ЭВОЛЮЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ  
С ИНТЕГРИРОВАННОЙ ПОЛУГРУППОЙ

Д.Г. Орловский

*Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ» (Москва)  
115409, Москва, Каширское ш., 31*

*Аннотация.* Изучается обратная задача по определению неоднородного члена эволюционного уравнения с оператором, порождающим интегрированную полугруппу. Рассмотрена модельная двухточечная обратная задача, получены формулы, определяющие решение этой задачи.

*Ключевые слова:* банахово пространство, дифференциальное уравнение, интегрированная полугруппа, обратная задача.

В банаховом пространстве  $X$  рассмотрим задачу Коши для абстрактного дифференциального уравнения первого порядка

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + p, & 0 \leq t \leq T, \\ u(0) = x, \\ u(T) = y. \end{cases} \quad (1)$$

Предполагается, что оператор  $A$  является производящим генератором  $n$ -проинтегрированной невырожденной полугруппы  $S(t)$  [1],  $u_0, p \in X$ . В задаче (1) требуется найти  $u(t) \in C^1([0; T], X) \cap C([0, T]; D(A))$ ,  $p \in X$ .

Ранее двухточечная обратная задача (1) рассматривалась для оператора  $A$ , порождающего сильно непрерывную полугруппу [1].

Прежде чем переходить к обратной задаче, рассмотрим свойства прямой задачи

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t), & 0 \leq t \leq T, \\ u(0) = x. \end{cases} \quad (2)$$

**Лемма.** Пусть функция  $f(t) \in C^{n+1}([0; T]; X)$  и существует последовательность

$$x_0, x_1, \dots, x_n$$

для которой

$$x_0 = x, x_{k+1} = Ax_k + f^{(k)}(0) \quad (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

Тогда решение задачи (2) дается формулой

$$u(t) = S(t)x_n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} x_k + \int_0^t S(t-s) f^{(n)}(s) ds. \quad (3)$$

Доказательство. Согласно [1] решение задачи (2) тесно связано с решением интегрального уравнения

$$v(t) = A \int_0^t v(s) ds + \frac{t^n}{n!} x + \int_0^t \frac{(t-s)^n}{n!} f(s) ds. \quad (4)$$

Решением уравнения (4) является функция

$$v(t) = S(t)x + \int_0^t S(t-s) f(s) ds, \quad (5)$$

а решение задачи (2) дается формулой

$$u(t) = v^{(n)}(t).$$

Дифференцируя равенство (5)  $n$  раз с использованием формулы

$$\frac{d}{dt} S(t)x = S(t)Ax + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} x$$

Получаем равенство (3). Лемма доказана.

Перейдем к рассмотрению обратной задачи (1). Полагая  $f(t) = p$  находим последовательность

$$x_0 = x, \quad x_k = A^k x + A^{k-1} p \quad (k = 1, \dots, n).$$

Следовательно, решение прямой задачи

$$u(t) = S(t)A^n x + S(t)A^{n-1} p + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} A^k x + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{t^k}{k!} A^{k-1} p. \quad (6)$$

Здесь предполагается, что элементы  $x \in D(A^{n+1}), p \in D(A^n)$ . Полагая в равенстве (6)  $t = T$ , получаем уравнение для неизвестного элемента  $p$

$$Bp = g,$$

где

$$B = S(T)A^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{T^k}{k!} A^{k-1},$$

$$g = y - S(T)A^n x - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{T^k}{k!} A^k x.$$

**Следствие.** Пусть оператор

$$B(t) = S(t)A^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} A^{k-1}$$

обратим при  $t = T$ , тогда решение обратной задачи (1) единственно и дается формулами:

$$\begin{cases} p = B^{-1}g, \\ u(t) = S(t)A^n x + B(t)B(T)^{-1}g. \end{cases}$$

Отметим частный случай один раз проинтегрированной полугруппы. Решение обратной задачи дается формулами:

$$\begin{cases} p = S(T)^{-1}[y - S(T)Ax - x], \\ u(t) = S(t)Ax + x + S(t)S(T)^{-1}[y - S(T)Ax - x]. \end{cases}$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Arendt W.* Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problem / W. Arendt // Israel J. Math. – 1987. 59(3). – P. 327–352.

### DEFINITION OF PARAMETERS OF THE EVOLUTION EQUATION WITH INTEGRATED SEMIGROUP

**D. Orlovsky**

*National research Nuclear University «MEPhI» (Moscow)  
31, Kashirskoye shosse, Moscow, 115409, Russia*

*Abstract:* Studied the inverse problem on determination of the inhomogeneous member of the evolutionary equation with the operator, generating integrated semigroup. Considered a model point-to-point inverse problem, we obtained the formulas that determine the solution of this problem.

*Keywords:* Banach space, differential equation, integrated semigroup, the inverse problem.

УДК 517.95

**ОБ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ  
С ПЕРЕОПРЕДЕЛЕНИЕМ В ФИКСИРОВАННЫХ ТОЧКАХ**

**В.В. Соловьёв**

*Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ» (Москва)  
115409, Москва, Каширское ш., 31*

*Аннотация.* В статье рассматриваются обратные задачи для параболического уравнения общего вида в случае задачи Коши и первой и второй краевых задач в ограниченной области. В качестве дополнительной информации о решении прямой задачи (переопределении) используются значения решения прямой задачи в фиксированных точках для всех моментов времени. Для случая линейного уравнения сформулированы теоремы существования и единственности решения рассматриваемых обратных задач. Для случая нелинейного уравнения сформулированы теоремы единственности решения рассматриваемых обратных задач.

*Ключевые слова:* обратная задача, параболическое уравнение, переопределение в фиксированной точке.

Пусть

$$E_T = R^n \times (0, T], T > 0, x \in R^n,$$

заданы вектор-функции

$$f : [0, T] \rightarrow R^N, f(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t)), h : E_T \rightarrow R^N, h(x, t) = (h_1(x, t), \dots, h_N(x, t)).$$

Определим функциональные пространства

$$F[0, T] = (C[0, T])^N, U_0(E_T) = \{u \in C(\bar{E}_T) : u \in C_{x,t}^{2,1}(E_T)\},$$

$$U_1(E_T) = \{u \in C(\bar{E}_T) : u \in C_{x,t}^{2,1}(\bar{E}_T)\}.$$

**1. Случай задачи Коши. Единственность.**

Для постановки обратной задачи выберем произвольный набор различных точек  $x^{(k)} \in R^n, k = 1, \dots, N$ . Далее будем обозначать

$$O_r(x^{(k)}) = \{x \in R^n : |x - x^{(k)}| < r\} -$$

не пересекающиеся шары с центрами в точках  $x^{(k)}$  ( $r > 0$  достаточно мало), цилиндр

$$Q_k(r) = O_r(x^{(k)}) \times (0, T].$$

Далее будут использованы следующие функциональные пространства

$$U'_1(E_T) = \{u \in U_0(\bar{E}_T) : u \in C_{x,t}^{2,1}(\bar{Q}_k(r)), k = 1, \dots, N\}.$$

Рассмотрим обратную задачу определения пары функций  $(u, f) \in U_0(E_T) \times F[0, T]$  из условий:

$$u_i(x, t) - (Lu)(x, t) = f_i(x)h_i(x, t) + g(x, t), (x, t) \in E_T,$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), x \in R^n, \quad (1)$$

$$u(x^{(k)}, t) = \psi^{(k)}(t), t \in [0, T], k = 1, \dots, N. \quad (2)$$

В уравнении (1):

$$(Lu)(x, t) = a_{ij}(x, t)u_{x_i x_j}(x, t) + b_i(x, t)u_{x_i}(x, t) + c(x, t)u(x, t),$$

для уравнения выполнены условия равномерной параболичности

$$\lambda_0 |\xi|^2 \leq a_{ij}(x, t)\xi_i \xi_j \leq \lambda_1 |\xi|^2, \lambda_0, \lambda_1 > 0.$$

В приведённой формуле и всюду далее по повторяющимся индексам проводится суммирование в соответствующих пределах изменения индексов  $i, j, l$ . Обратная задача (1)-(2) изучалась в ряде работ, историю вопроса и дальнейшие ссылки см. [1],[2]. Для задачи (1)-(2) справедлива следующая теорема единственности.

**Теорема 1.** Пусть справедливы включения

$$a_{ij}, b_i, c, h_i, g \in C^{\alpha, \alpha/2}(\bar{E}_T), \text{ где } 0 < \alpha < 1,$$

выполнено неравенство

$$|\det(h_i(x^{(k)}, t))| \geq h_0 > 0.$$

Тогда обратная задача (1)-(2) не может иметь двух различных решений.

Аналогичная теорема справедлива для нелинейного уравнения. Пусть

$$a_0, a_{ij}, b_i, c, f_l \in R, (x, t) \in \bar{E}_T -$$

независимые переменные,

$$F(a_0, a_{ij}, b_i, c, f_l, x, t), N(x, c) -$$

вещественнозначные функции определённые на множествах

$$S_1(E_T) = R \times R^{n^2} \times R^n \times R^N \times \bar{E}_T, \quad S_2(E_T) = R^n \times R.$$

Определим пространства функций

$$U_2(E_T) = C^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\bar{E}_T), \quad F_1[0, T] = (C^{\alpha/2}[0, T])^N.$$

Рассмотрим обратную задачу определения пары функций  $(u, f) \in U_2(E_T) \times F_1[0, T]$  из следующих условий:

$$F(u_t(x, t), u_{x_j}(x, t), u_{x_i}(x, t), u(x, t), f_l(t), x, t) = 0, (x, t) \in E_T,$$

$$N(x, u(x, 0)) = 0, x \in R^n, \quad (3)$$

$$u(x^{(k)}, t) = \psi^{(k)}(t), t \in [0, T], k = 1, \dots, N. \quad (4)$$

Для задачи (3)-(4) справедлива следующая теорема единственности.

**Теорема 2.** Пусть выполнены следующие условия:

- 1) Функция  $F$  и её вторые производные по переменным  $a_0, a_{ij}, b_i, c, f_l$  непрерывны на множестве  $S_1(E_T)$ , её первые производные по этим переменным удовлетворяют условию Гёльдера по переменным  $(x, t)$  с показателями  $\alpha, \alpha/2$  соответственно на любом ограниченном множестве лежащем в  $S_1(E_T)$ .
- 2) Функция  $N(x, c)$  и её первые производные по  $c$  непрерывны на множестве  $S_2(E_T)$ .
- 3) На множестве  $S_1(E_T)$  выполнены условия параболичности

$$F_{a_0} \geq \rho_0 > 0, -F_{a_{ij}} \xi_i \xi_j \geq \nu_0 |\xi|^2, \nu_0 > 0,$$

где  $\rho_0 > 0, \nu_0 > 0$  – фиксированные постоянные.

Тогда, если на множествах  $S_1(E_T), S_2(E_T)$  выполнены неравенства

$$|\det(F_{f_l}(a_0, a_{ij}, b_i, c, f_l, x^{(k)}, t))| = |\det H_{kl}(t)| \geq h_0 > 0, |N_c(x, c)| \geq n_0 > 0,$$

где  $h_0, n_0$  – некоторые фиксированные постоянные, то обратная задача (3)-(4) не может иметь двух различных решений.

## 2. Случай первой и второй краевых задач. Единственность.

Пусть  $D \subset R^n, D$  – ограниченная область с границей класса  $C^{1,\alpha}$ ,

$$\Omega_T = D \times (0, T], \Gamma_T = \partial D \times [0, T].$$

Определим пространства функций

$$U_0(\Omega_T) = \{u \in C(\bar{\Omega}_T) : u \in C_{x,t}^{2,1}(\Omega_T)\}.$$

Рассмотрим обратную задачу определения пары функций  $(u, f) \in U_0(\Omega_T) \times F[0, T]$  из следующих условий:

$$u_t(x, t) - (Lu)(x, t) = f_l(t)h_l(x, t) + g(x, t), (x, t) \in \Omega_T,$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), x \in \bar{D}, (Bu)(x, t) = \mu(x, t), (x, t) \in \Gamma_T, \quad (5)$$

$$u(x^{(k)}, t) = \psi^{(k)}(t), t \in [0, T], k = 1, \dots, N. \quad (6)$$

Краевые условия в условиях (5) - либо первого либо второго рода (см. [3]),  $x^{(k)} \in D, k = 1, \dots, N, \bar{O}_r(x^{(k)}) \subset D$ . Для задачи (5)-(6) справедлива следующая теорема единственности.

**Теорема 3.** Пусть справедливы включения:

$$a_{ij}, b_i, c, h_l, g \in C^{\alpha, \alpha/2}(\bar{E}_T), (a_{ij})_{x_k} \in C^{\alpha, \alpha/2}(\bar{Q}_r(r)).$$

Тогда, если выполнено неравенство

$$|\det(h_l(x^{(k)}, t))| \geq h_0 > 0,$$

то задача (5)-(6) не может иметь двух различных решений.

Сформулируем аналогичную теорему для случая нелинейного уравнения. Пусть

$$a_0, a_{ij}, b_i, c, f_l \in R, (x, t) \in \bar{\Omega}_T -$$

независимые переменные,

$$N(x, c), G(x, t, c) (G_1(x, t, c)), F(a_0, a_{ij}, b_i, c, f_l, x, t) -$$

вещественнозначные функции определённые на множествах

$$S_2(D) = \bar{D} \times R, S_3(\Gamma_T) = \Gamma_T \times R, S_1(\Omega_T) = R \times R^{n^2} \times R^n \times R^N \times \bar{\Omega}_T.$$

Рассмотрим обратную задачу определения пары функций  $(u, f) \in U_2(\Omega_T) \times F_1[0, T]$  из условий:

$$F(u_l(x, t), u_{x_j}(x, t), u_{x_i}(x, t), u(x, t), f_l(t), x, t) = 0, (x, t) \in \Omega_T,$$

$$N(x, u(x, 0)) = 0, x \in \bar{D},$$

$$G(x, t, u(x, t)) = 0, (G_1(x, t, u(x, t)) = 0), (x, t) \in \Gamma_T, \quad (7)$$

$$u(x^{(k)}, t) = \psi^{(k)}(t), t \in [0, T], k = 1, \dots, N. \quad (8)$$

В условиях (7) для случая второй краевой задачи  $V$  – внешняя конормаль (см. [3]).

Для задачи (7)-(8) справедлива следующая теорема единственности.

**Теорема 4.** Пусть выполнены следующие условия:

1) Функция  $F$  и её вторые производные по переменным  $a_0, a_{ij}, b_i, c, f_l$

непрерывны на множестве  $S_1(\Omega_T)$ , её первые производные по этим переменным удовлетворяют условию Гёльдера по переменным  $(x, t)$  с показателями  $\alpha, \alpha/2$  соответственно на любом ограниченном множестве лежащем в  $S_1(\Omega_T)$ .

2) Функции  $N(x, c)$ ,  $G(x, t, c)$ ,  $(G_1(x, t, c))$  и их первые производные по  $c$  непрерывны на множествах  $S_2(D)$ ,  $S_3(\Gamma_T)$ .

3) На множестве  $S_1(\Omega_T)$  выполнены условия параболичности

$$F_{a_0} \geq \rho_0 > 0, -F_{a_{ij}} \xi_i \xi_j \geq \nu_0 |\xi|^2, \nu_0 > 0,$$

где  $\rho_0 > 0, \nu_0 > 0$  – фиксированные постоянные.

Тогда, если на множествах  $S_1(\Omega_T)$ ,  $S_2(D)$ ,  $S_3(\Gamma_T)$  выполнены неравенства

$$|\det(F_{f_i}(a_0, a_{ij}, b_i, c, f_l, x^{(k)}, t))| = |\det H_{kl}(t)| \geq h_0 > 0, |N_c(x, c)| \geq n_0 > 0, \\ |G_c(x, t, c)| \geq g_0 > 0, (|(G_1)_c(x, t, c)| \geq g_0 > 0),$$

где  $h_0, n_0, g_0$  – некоторые фиксированные постоянные, то обратная задача (7)-(8) не может иметь двух различных решений.

### 3. Случай задачи Коши. Существование.

Рассмотрим обратную задачу определения пары функций  $(u, f) \in U_1^{r/2}(E_T) \times F[0, T]$  из условий (1)-(2). Для этой задачи верна следующая теорема существования.

**Теорема 5.** Пусть справедливы включения

$$a_{ij}, b_i, c, h_l, g \in C^{\alpha, \alpha/2}(\bar{E}_T), \quad \varphi \in C(R^n) \cap C^{2, \alpha}(O_r(x^{(k)})), \quad \psi_k \in C^1([0, T]),$$

выполнены условия согласования  $\psi_k(0) = \varphi(x^{(k)})$  и неравенство

$$|\det(h_l(x^{(k)}, t))| \geq h_0 > 0.$$

Тогда существует единственное решение задачи (1)-(2) в указанном классе.

### 4. Существование решения обратной задачи в случае первой краевой задачи.

Рассмотрим задачу определения пары функций  $(u, f) \in U_1^{r/2}(\Omega_T) \times F[0, T]$  из условий:

$$u_t(x, t) - (Lu)(x, t) = f_l(t)h_l(x, t) + g(x, t), (x, t) \in \Omega_T,$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), x \in \bar{D}, u(x, t) = \mu(x, t), (x, t) \in \Gamma_T, \quad (9)$$

$$u(x^{(k)}, t) = \psi^{(k)}(t), t \in [0, T], k = 1, \dots, N. \quad (10)$$

Для задачи (9)-(10) справедлива следующая теорема существования.

**Теорема 6.** Пусть справедливы включения

$$a_{ij}, b_i, c, h_l, g, (a_{ij})_{x_k} \in C^{\alpha, \alpha/2}(\bar{E}_T), \\ \varphi \in C(R^n) \cap C^{2, \alpha}(O_r(x^{(k)})), \psi_k \in C^1([0, T]), \mu \in C(\Gamma_T).$$

Тогда, если выполнены условия согласования:

$$\psi_k(0) = \varphi(x^{(k)}), \mu(x, 0) = \varphi(x), x \in \partial D$$

и неравенство:

$$|\det(h_i(x^{(k)}, t))| \geq h_0 > 0$$

то задача (9)-(10) имеет единственное решение.

#### ЛИТЕРАТУРА.

1. Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A. Methods for solving inverse problems in mathematical physics. New York-Basel: Marcel Dekker Inc., 2000.
2. Соловьёв В.В. Определение источника и коэффициентов в параболическом уравнении в многомерном случае. // Дифференциальные уравнения, т.31, №6, 1995. С. 1060-1069.
3. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., Наука, 1987.

### ABOUT INVERSE PROBLEMS FOR PARABOLIC EQUATIONS WITH OVERDETERMINATION IN FIXED POINTS

V. Soloviev

National research Nuclear University «MEPhI» (Moscow)  
31, Kashirskoye shosse, Moscow, 115409, Russia

*Abstract.* In this paper the inverse problems for the parabolic equations for Cauchy problems and for the first and the second bounded problems are considered. Additional information for the direct problems (overdetermination) is given in the fixed points for any specific f time. The existence and uniqueness theorems for linear equations of parabolic type are formulated. For nonlinear equations of parabolic type the uniqueness theorems are formulated.

*Keywords:* inverse problems, parabolic equation, overdetermination.

УДК 517.15, 517.521

## О ПОРЯДКЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ СУММАМИ РИССА

А.В. Баскаков, В.М. Простокишин

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ» (Москва)  
115409, Москва, Каширское ш., 31

*Аннотация.* Найден асимптотически точные константы в оценках порядка приближения непрерывных периодических функций операторами типа свёртки посредством второго модуля непрерывности. Полученный результат применён для построения оценок приближения функций суммами Рисса.

*Ключевые слова:* Асимптотика, операторы типа свёртки, модуль непрерывности, суммы Рисса.

Зададим на отрезке  $[-\pi; \pi]$  последовательность четных положительных функций  $\{K_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$  и последовательность положительных чисел  $r_n \downarrow 0$ . Для операторов вида

$$U_n(f, x) = \frac{1}{\Delta_n} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) K_n(t-x) dt \quad (1)$$

в [1] было показано, что

$$\sup_{\substack{f \in C_{2\pi} \\ f \neq \text{const}}} \frac{\|f(x) - U_n(f, x)\|_C}{\omega(f, r_n)} = 1 + \frac{2}{\Delta_n} \int_0^{\pi} \left[ \frac{t}{r_n} \right] K_n(t) dt, \quad (2)$$

где  $[a]$  – целая часть числа  $a$ ,  $\Delta_n = \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t) dt$ .

В частном случае, для операторов Валле-Пуссена, подобный результат был получен в работе [2].

Покажем, что соотношение, аналогичное (1), имеет место и для второго модуля непрерывности. Справедлива

**Лемма.** Для операторов типа свёртки (1) и произвольной последовательности  $r_n \downarrow 0$  выполняется равенство

$$\sup_{\substack{f \in C_{2\pi} \\ f \neq \text{const}}} \frac{\|f(x) - U_n(f, x)\|_C}{\omega_2(f, r_n)} = 1 + \frac{1}{\Delta_n} \int_0^{\pi} \left( \left[ \frac{t}{r_n} \right]^2 + 2 \left[ \frac{t}{r_n} \right] \right) K_n(t) dt.$$

**Доказательство.** Для любого числа  $x \in [-\pi; \pi]$  справедливо неравенство:

$$\begin{aligned}
 |f(x) - U_n(f, x)| &= \left| \frac{1}{\Delta_n} \int_0^\pi (2f(x) - f(x+t) - f(x-t)) K_n(t) dt \right| \leq \\
 &\leq \frac{1}{\Delta_n} \int_0^\pi \omega_2(f, t) K_n(t) dt \leq \frac{1}{\Delta_n} \omega_2(f, r_n) \int_0^\pi \left( \left[ \frac{t}{r_n} \right] + 1 \right)^2 K_n(t) dt = \\
 &= \omega_2(f, r_n) \left\{ 1 + \frac{1}{\Delta_n} \int_0^\pi \left( \left[ \frac{t}{r_n} \right]^2 + 2 \left[ \frac{t}{r_n} \right] \right) K_n(t) dt \right\}.
 \end{aligned} \tag{3}$$

Теперь фиксируем число  $n$ . Рассмотрим множество четных функций  $f_k(x)$ ,  $k > r_n^{-1}$ , определенных на  $[0; \infty)$  следующим образом:

$$f_k = \begin{cases} kt, & t \in [0; k^{-1}]; \\ 1, & t \in (k^{-1}; r_n]; \\ 1 + 3k(t - r_n), & t \in (r_n; r_n + k^{-1}]; \\ 4, & t \in (r_n + k^{-1}; 2r_n]; \\ \dots & \\ 1 + (m^2 - 1)k(t - r_n(m-1)), & t \in ((m-1)r_n; (m-1)r_n + k^{-1}]; \\ m^2, & t \in ((m-1)r_n + k^{-1}; mr_n]; \\ \dots & \end{cases}$$

Так как второй модуль непрерывности у этих функций  $\omega_2(f_k, r_n) = 2$  и значение предела

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(t) = \left( \left[ \frac{t}{r} \right] + 1 \right)^2$$

почти всюду при  $t \in [-\pi; \pi]$ , то выполняется соотношение

$$\begin{aligned}
 \sup_{\substack{f \in C_{2\pi} \\ f \neq \text{const}}} \frac{\|f(x) - U_n(f, x)\|_C}{\omega_2(f, r_n)} &\geq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta_n} \int_0^\pi f_{k(t)} K_n(t) dt = \\
 &= 1 + \frac{1}{\Delta_n} \int_0^\pi \left( \left[ \frac{t}{r_n} \right]^2 + 2 \left[ \frac{t}{r_n} \right] \right) K_n(t) dt
 \end{aligned} \tag{4}$$

Из соотношений (3), (4) и вытекает справедливость Леммы.

В качестве применения доказанного утверждения рассмотрим приближение непрерывных функций  $f(x)$  средними Рисса:

$$R_n^k(f, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{s=1}^n \left(1 - \frac{s}{n}\right)^k (a_s \cos(sx) + b_s \sin(sx)).$$

Таким образом, для второго модуля непрерывности справедлива следующая

**Теорема.** Для любого положительного числа  $A$  и натурального  $k$  имеет место равенство

$$\sup_{\substack{f \in C_{2\pi} \\ f \neq \text{const}}} \frac{\|f(x) - R_n^k(f, x)\|_C}{\omega_2\left(f, \frac{A}{\sqrt{n}}\right)} = 1 + \frac{k}{A^2} + o(1), \quad k \rightarrow \infty.$$

Для первого модуля непрерывности аналогичный результат был ранее получен А.И.Сюсюкаловым [3].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Баскаков А.В. О некоторых наилучших константах приближения непрерывных функций сингулярными интегралами // Применение функционального анализа в теории приближений. Калинин, 1983. С. 3-12.
2. Schurer F., Steutel F. On the Degree of Approximation by the Operators of de la Vallée – Poussin. –Monatsh.// Math. 1979. 87, №1. P.53-63
3. Сюсюкалов А.И. Аппроксимативные свойства линейных средних рядов Фурье и сопряженных рядов: Автореф. дис. канд. физ.-мат. наук. Алма-Ата, 1991.

#### ON THE ORDER OF APPROXIMATION OF FUNCTIONS USING SUMS OF RIESZ

**A. Baskakov, V. Prostokishin**

*National research Nuclear University «MEPhI» (Moscow)  
31, Kashirskoye shosse, Moscow, 115409, Russia*

*Abstract.* Asymptotically exact constants in the estimates of the order of approximation of continuous periodic functions by operators of convolution type through the second modulus of continuity are found. This result is used to construct estimates of approximation of functions by the sums of Riesz.

*Key words:* Asymptotics, operators of convolution type, modulus of continuity, sums of Riesz.

УДК 517.5

**О ФОРМИРОВАНИИ ОСОБЕННОСТЕЙ  
В ЛИНЕЙНОМ УРАВНЕНИИ АДВЕКЦИИ-ДИФФУЗИИ  
С ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ**

**Д.Е. Пелиновский<sup>1,2</sup>, А.Р. Гиниятуллин<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>Нижегородский Государственный Технический Университет им. Р.Е. Алексеева  
603950, Нижний Новгород, ул. Минина, 24

<sup>2</sup>Университет МакМастера  
Гамильтон, Онтарио, Канада

*Аннотация.* Рассматривается формирование особенностей в линейном уравнении адвекции-диффузии с переменной скоростью на полу-бесконечной линии. Переменная скорость определяется дополнительным условием на границе, которое моделирует динамику линии соприкосновения гидродинамического потока под углом  $180^\circ$ . Используя априорные оценки энергии, выведены условия на переменную скорость, которые гарантируют, что достаточно гладкое решение линейного уравнения адвекции-диффузии взрывается за конечное время. Используя класс самоподобных решений, найдена скорость роста решения вблизи особенности. Эта скорость не совпадает с полученными ранее численными решениями поставленной задачи.

*Ключевые слова:* уравнение адвекции-диффузии, переменная скорость, переопределённые граничные условия, формирование особенностей, априорные оценки энергии, самоподобные решения

**Введение**

Контактные линии определяются пересечением твердой и свободной границ потока. Потоки с контактной линией с углом контакта  $180^\circ$  были рассмотрены в [2,6], где было показано, что соответствующие решения уравнений Навье-Стокса не имеют физического смысла. В последнее время другой подход, основанный на приближении смазки и уравнениях тонких пленок, был разработан в недавней работе [1].

Для очень простого гидродинамического потока, изображенного на рис. 1, авторами [1] получено нелинейное уравнение адвекции-диффузии для свободной границы потока:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{h^3}{3} \left( \alpha^3 \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} + \frac{\partial h}{\partial x} \right) + (1 - V(t))h \right] = 0, \quad x > 0, \quad t > 0 \quad (1)$$

где  $\alpha$  числовая константа. Контактная линия зафиксирована при  $x = 0$  в системе координат, движущейся со скоростью  $-V(t)$  и определена граничными условиями  $h(0,t) = 1$  и  $h_x(0,t) = 0$ . Сохранение потока обеспечивает граничное условие для  $h_{xxx}(0,t) = -3/2\alpha^3$ . Пусть далее  $\alpha^3 = 3$ . Наличие слабого решения уравнения тонких пленок (1) для постоянной скорости  $V(t)$  и граничных условий Неймана на конечном интервале было недавно показано в работах [3,4].

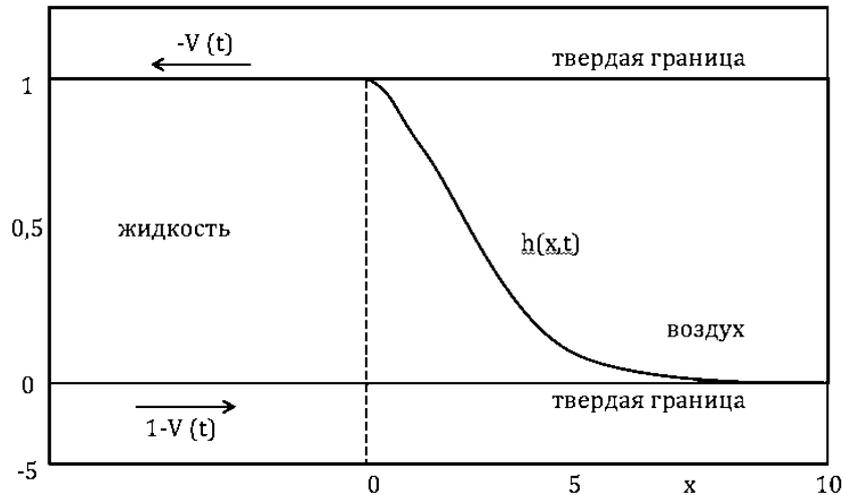


Рис. 1. Схематическая картина потока между твердых границ

Используя асимптотическую редукцию с

$$h-1 = O(|V|^{-1}), \quad x = O(|V|^{-1/3}), \quad t = O(|V|^{-4/3}), \quad \text{при } |V| \rightarrow \infty, \quad (2)$$

авторы [1] свели нелинейное уравнение (1) при  $\alpha^3 = 3$  к линейному уравнению адвекции-диффузии:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial^4 h}{\partial x^4} = V(t) \frac{\partial h}{\partial x}, \quad x > 0, \quad t > 0, \quad (3)$$

с граничными условиями вида

$$h(0,t) = 1, \quad h_x(0,t) = 0, \quad h_{xxx}(0,t) = -1/2, \quad t \geq 0. \quad (4)$$

Мы предполагаем, что  $h, h_x, h_{xx} \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \infty$ : на самом деле, благодаря инвариантности линейного уравнения адвекции-диффузии (3) по отношению к сдвигу и масштабным преобразованиям на бесконечности допускается любое постоянное значение  $h$ . Действительно, если  $h(x,t)$  решает краевую задачу (3)-(4), то функция

$$\tilde{h}(x,t) = H + (1-H)h(\xi, \tau), \quad \xi = \frac{x}{(1-H)^{1/3}}, \quad \tau = \frac{t}{(1-H)^{4/3}} \quad (5)$$

с постоянной  $H < 1$ , решает то же уравнение (3) с теми же граничными условиями (4), переменной скоростью  $\tilde{V}(t) = V(\tau)/(1-H)$ , и асимптотикой  $h \rightarrow H$  при  $x \rightarrow \infty$ .

С тремя граничными условиями при  $x = 0$  и убыванием к нулю на бесконечности, задача Коши для уравнения (3) является переопределённой и третье (переопределяющее) граничное условие при  $x = 0$  используется для нахождения зависимости  $V$  от  $t$ . Локальное существование решений краевой задачи (3)-(4) было доказано в нашей работе [7] с использованием преобразования Лапласа по  $x$  и разложения в дробно-степенной ряд по  $t$ .

Рассмотрим, далее, эволюцию во времени краевой задачи (3)-(4) начиная с исходного значения  $h(x,0) = h_0(x)$  для соответствующей функции  $h_0$ . В частности, будем считать, что профиль  $h_0(x)$  монотонно убывает к нулю при  $x \rightarrow \infty$  и что  $x = 0$  является невырожденным максимумом  $h_0$  таким, что  $h_0(0) = 1$ ,  $h_0'(0) = 0$ , и  $h_0''(0) < 0$ . Если решение  $h(x,t)$  теряет монотонность по  $x$ , например, за счет величины

$$\beta(t) := h_{xx}(0,t) \tag{6}$$

пересекающей ноль с отрицательной стороны, то поток становится нефизическим и модель (4) является недействительной. Одновременно это может означать, что скорость  $V(t)$  растет так, как это определено для достаточно сильных решений уравнения адвекции-диффузии (3) точечным уравнением:

$$h_{xxxxx}(0,t) = V(t)\beta(t), \tag{7}$$

которое получается при дифференцировании (3) по  $x$  и устремлении  $x \rightarrow 0$ .

Согласно результатам работы [1], основанным на численных расчетах уравнений (1) и (3), для любого подходящего  $h_0$ , существует конечный положительный момент времени  $t_0$  такой, что  $V(t) \rightarrow -\infty$  и  $\beta(t) \rightarrow 0^-$  при  $t \uparrow t_0$ . Более того, в [1] утверждается, что  $V(t)$  ведет себя вблизи  $t_0$  как логарифмическая функция от  $t$ , т.е.

$$V(t) \sim C_1 \log(t_0 - t) + C_2, \text{ при } t \uparrow t_0, \tag{8}$$

где  $C_1, C_2$  положительные константы.

Целью данной работы является проверка возможной скорости роста решения вблизи особенности краевой задачи (3)-(4).

Во-первых, мы будем использовать априорные энергетические оценки для того, чтобы показать, что для гладких решений краевой задачи (3)-(4) функция  $V(t)$  не может оставаться все время положительной. Этот результат одновременно означает две вещи: если  $V(t)$  остается положительной, то гладкое решение разрушается за ограниченное время, и если гладкое решение всегда существует, то  $V(t)$  либо колеблется, либо становится отрицательной. Также, мы покажем, что по той же причине функции  $\beta(t)$  и  $V(t)\beta^2(t)$  не могут оставаться всегда отрицательными: если  $\beta(t)$  и  $V(t)\beta^2(t)$  остаются отрицательными, то гладкое решение разрушается за ограниченное время, и если гладкое решение всегда существует, то  $\beta(t)$  и  $V(t)\beta^2(t)$  либо колеблются, либо становятся положительными. Сочетание обоих результатов показывает, что гладкое решение может всегда существовать, только при условии, что переменная скорость  $V(t)$  колеблется от положительных значений к отрицательным, и обратно.

Во-вторых, мы рассмотрим класс самоподобных решений, основанных на масштабных преобразованиях (2). Класс самоподобных решений определяется линейным

уравнением адвекции-диффузии (3), с убыванием к нулю на бесконечности, и с первыми двумя граничными условиями (4). Третье граничное условие  $h_{xxx}(0,t) = -1/2$  для самоподобных решений не выполняется, и мы заменяем его новым условием вида  $h_{xxx}(0,t) = \gamma_0 V(t)$  при фиксированном  $\gamma_0 < 0$ . Мы покажем, что самоподобное решение взрывается за конечное время при положительном  $V(t)$  и положительном  $\beta(t)$ , что согласуется с масштабным преобразованием (2), но не соответствует физическим требованиям потока на рис. 1.

Наконец, используя точечное уравнение (7) и его производную, мы покажем как в течение конечного времени  $\beta(t)$  может обратиться в ноль, а  $V(t)$  – стать бесконечной. При этом рост решения вблизи особенностей опять отличается от показателя, основанного на масштабном преобразовании (2) и на численно полученных результатах (8). Таким образом, дальнейшие исследования краевой задачи (3)-(4), в том числе более точное численное моделирование требуется для лучшего понимания динамики формирования особенностей в поставленной задаче.

### Априорные оценки энергии

Рассмотрим уравнение адвекции-диффузии (3) с граничными условиями (4) и убыванием  $h$ ,  $h_x$ ,  $h_{xx}$  к нулю на бесконечности. Мы будем предполагать существование гладкого решения краевой задачи и покажем, что функция  $V(t)$  не может оставаться положительной всё время.

**Теорема 1.** Решения краевой задачи (3)-(4) не существует в классе функций  $h \in C(R_+, L^2(R_+)) \cap L^2(R_+, H^2(R_+))$  если  $V(t) \geq V_0 > -1$  для всех  $t \geq t_0 \geq 0$ .

**Доказательство.** Из уравнения адвекции-диффузии (3), получаем баланс энергии:

$$\partial_t \left( \frac{1}{2} h^2 \right) + \partial_x \left( h h_{xxx} - h_x h_{xx} - \frac{1}{2} V(t) h^2 \right) + (h_{xx})^2 = 0.$$

Интегрируя это уравнение по  $x$  на  $(0, \infty)$  и используя граничные условия (4) и убывание к нулю на бесконечности, получаем априорную оценку энергии:

$$\frac{d}{dt} \|h(\cdot, t)\|_{L^2(R_+)}^2 + 2 \|h_{xx}(\cdot, t)\|_{L^2(R_+)}^2 = -(1 + V(t)). \quad (9)$$

Если у нас есть решение в классе  $h \in C(R_+, L^2(R_+)) \cap L^2(R_+, H^2(R_+))$ , то, интегрируя априорную оценку энергии (9), мы получим

$$\|h(\cdot, t)\|_{L^2(R_+)}^2 + 2 \int_0^t \|h_{xx}(\cdot, \tau)\|_{L^2(R_+)}^2 d\tau = \|h_0\|_{L^2(R_+)}^2 - \int_0^t (1 + V(\tau)) d\tau. \quad (10)$$

Поскольку левая часть строго положительная, то Теорема 1 доказана.

Далее, перепишем уравнение адвекции-диффузии (3) для переменной  $u = h_x$  в виде:

$$u_t + u_{xxxx} = V(t)u_x, \quad x > 0, t > 0, \quad (11)$$

с граничными условиями на контактной линии:

$$u(0,t) = 0, \quad u_{xx}(0,t) = -1/2, \quad u_{xxx}(0,t) = 0, \quad t \geq 0 \quad (12)$$

где граничное условие  $u_{xxx}(0,t) = h_{xxxx}(0,t) = 0$  следует из граничных условий  $h(0,t) = 1$  и  $h_x(0,t) = 0$ , а также из уравнения адвекции-диффузии (3) при  $x \rightarrow 0$ . Пусть  $\beta(t)$  задано уравнением (6) и учтем, что изначально  $\beta(0) < 0$ . Опять же, мы будем предполагать существование гладкого решения краевой задачи (11)-(12) и покажем, что функции  $\beta(t)$  и  $V(t) \beta^2(t)$  не могут оставаться отрицательными все время.

**Теорема 2.** Решения краевой задачи (11)-(12) не существует в классе функций  $u \in C(R_+, L^2(R_+)) \cap L^2(R_+, H^2(R_+))$  если  $\beta(t) \leq \beta_0 < 0$  для всех  $t \geq t_0 \geq 0$ .

**Доказательство.** Из уравнения адвекции-диффузии (11), получаем баланс энергии:

$$\partial_t \left( \frac{1}{2} u^2 \right) + \partial_x \left( uu_{xxx} - u_x u_{xx} - \frac{1}{2} V(t) u^2 \right) + (u_{xx})^2 = 0.$$

Интегрируя это уравнение по  $x$  на  $(0, \infty)$  и используя граничные условия (12) и убывание к нулю на бесконечности, получаем априорную оценку энергии:

$$\frac{d}{dt} \|u(\cdot, t)\|_{L^2(R_+)}^2 + 2 \|u_{xx}(\cdot, t)\|_{L^2(R_+)}^2 = \beta(t). \quad (13)$$

Если у нас есть решение в классе  $u \in C(R_+, L^2(R_+)) \cap L^2(R_+, H^2(R_+))$ , то, интегрируя априорную оценку энергии (13), мы получим

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^2(R_+)}^2 + 2 \int_0^t \|u_{xx}(\cdot, \tau)\|_{L^2(R_+)}^2 d\tau = \|u_0\|_{L^2(R_+)}^2 - \int_0^t \beta(\tau) d\tau. \quad (14)$$

Поскольку левая часть строго положительная, то Теорема 2 доказана.

**Теорема 3.** Решение краевой задачи (11)-(12) не существует в классе функций  $u \in C(R_+, H^1(R_+)) \cap L^2(R_+, H^3(R_+))$  если  $V(t) \leq V_0 < 0$  и  $|\beta(t)| \geq \beta_0 > 0$  при всех  $t \geq t_0 \geq 0$ .

**Доказательство.** Умножая уравнение адвекции-диффузии (11) на  $u_{xxx}$ , интегрируя это уравнение по  $x$  на  $(0, \infty)$  и используя граничные условия (12) и убывание к нулю на бесконечности, получаем априорную оценку энергии:

$$\frac{d}{dt} \|u_x(\cdot, t)\|_{L^2(R_+)}^2 + 2 \|u_{xxx}(\cdot, t)\|_{L^2(R_+)}^2 = V(t) \beta^2(t). \quad (15)$$

Если у нас есть решение в классе  $u \in C(R_+, H^1(R_+)) \cap L^2(R_+, H^3(R_+))$ , то, интегрируя априорную оценку энергии (15), получаем

$$\|u_x(\cdot; t)\|_{L^2(R_+)}^2 + 2 \int_0^t \|u_{xxx}(\cdot; \tau)\|_{L^2(R_+)}^2 d\tau = \|u'_0\|_{L^2(R_+)}^2 - \int_0^t V(\tau) \beta^2(\tau) d\tau. \quad (16)$$

Так как левая часть строго положительная, то Теорема 3 доказана.

### Самоподобные решения для формирования особенностей

Рассмотрим класс самоподобных решений уравнения (3):

$$V(t) = \frac{t_0 V_0}{(t_0 - t)^{3/4}}, \quad h(x, t) = f(\xi), \quad \xi = \frac{x}{(t_0 - t)^{1/4}}, \quad (17)$$

где  $t_0$  произвольный положительный параметр для конечного времени разрушения,  $V_0$  произвольный параметр начальной скорости, и  $f(\xi)$  решение дифференциального уравнения:

$$\frac{d^4 f}{d\xi^4} + \frac{1}{4}(\xi - 4t_0 V_0) \frac{df}{d\xi} = 0, \quad \xi > 0. \quad (18)$$

Рассмотрим решение краевой задачи, связанное с первыми двумя граничными условиями на контактной линии:

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 0 \quad (19)$$

и убыванием  $f(\xi), f'(\xi)$  к нулю на бесконечности. Отметим, что третье условие на контактной линии  $h_{xxx}(0, t) = -1/2$  не выполняется для самоподобного решения (17). Новое третье граничное условие задается выражением

$$h_{xxx}(0, t) = \frac{f'''(0)}{(t_0 - t)^{3/4}} = \gamma_0 V(t), \quad (20)$$

где  $\gamma_0$  константа такая, что  $f'''(0) = t_0 V_0 \gamma_0$ . Также отметим, что класс самоподобных решений (17) совместим с асимптотическим масштабированием (2) использованным при выводе линейного уравнения адвекции-диффузии (3).

Пусть

$$g(z) = f'(\xi), \quad z = \xi - 4t_0 V_0,$$

тогда краевая задача (18)-(19) сводится к следующей системе:

$$\begin{cases} 4g'''(z) + zg(z) = 0, & z > z_0 \\ g(z_0) = 0, \\ g(z), g'(z) \rightarrow 0 & \text{при } z \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (21)$$

где  $z_0 = -4t_0 V_0$ . Подходящее решение данной краевой задачи строится в соответствии со следующей теоремой.

**Теорема 4.** Существует единственное (с точностью до скалярного умножения) положительное решение краевой задачи (21) на  $(z_0, \infty)$  при  $z_0 < 0$ .

**Доказательство.** При  $z \rightarrow \infty$ , существуют три фундаментальных решения линейного уравнения

$$4g'''(z) + zg(z) = 0. \quad (22)$$

Одно решение монотонно стремится к нулю при  $z \rightarrow \infty$ , а два других решения колеблются и расходятся при  $z \rightarrow \infty$ . Таким образом, пространство решений краевой задачи (21) образовано частным решением (обозначим его  $G$ ) стремящимся к нулю на бесконечности. Чтобы определить  $G$  однозначно, построим затухающие решения дифференциального уравнения (22) асимптотически, используя анализ ВКБ [5]:

$$G(z) = \exp\left(\frac{-3z^{4/3}}{2^{8/3}}\right) \left[ \frac{1}{z^{1/3}} + O\left(\frac{1}{z^{2/3}}\right) \right] \quad \text{при } z \rightarrow \infty \quad (23)$$

где поправочные слагаемые могут быть определены в слагаемых степенного ряда по обратным степеням  $z^{1/3}$ . Решение  $G$  линейного уравнения (22) может быть глобально расширено для всех  $z \in \mathbb{R}$ . Чтобы удовлетворить граничному условию при  $z_0$ , нужно показать, что существует  $z_0 \in \mathbb{R}$  такое, что  $G(z_0) = 0$ .

Очевидно, что  $z_0 \in \mathbb{R}$  существует. Действительно, если бы  $z_0$  не существовало, то  $G(z)$  оставалось бы положительным для всех  $z \in \mathbb{R}$ , что возможно только в том случае, если бы  $G(z)$  монотонно убывало до 0 при  $z \rightarrow -\infty$  (остальные два решения опять колеблются и расходятся при  $z \rightarrow -\infty$ ). Однако, тогда  $G \in H^2(\mathbb{R})$  являлось бы глобальным решением дифференциального уравнения (22) для всех  $z \in \mathbb{R}$ . Умножая это уравнение на  $G'$  и интегрируя по частям, получаем противоречие

$$4 \int_{\mathbb{R}} (G'')^2 dz + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} G^2 dz = 0, \quad (24)$$

которое доказывает, что  $G \in H^2(\mathbb{R})$  не может существовать. Кроме того,  $z_0 < 0$  потому что  $G(z)$  монотонно убывает для всех  $z > 0$ . Чтобы убедиться в этом, используем тот факт, что дифференциальное уравнение (22) инвариантно относительно преобразования  $z \rightarrow -z$ , так что  $\tilde{G}(z) := G(-z)$  удовлетворяет тому же уравнению (22). Функция  $\tilde{G}(z)$  монотонно возрастает при больших отрицательных  $z$ . Так как  $4\tilde{G}'''(z) = -z\tilde{G}(z) > 0$  для всех  $z < 0$ , то  $\tilde{G}(z)$  остается монотонно возрастающей при всех  $z \leq 0$  и, следовательно,  $G(z)$  монотонно убывает для всех  $z \geq 0$ . Таким образом,  $z_0 < 0$ , то есть,  $V_0 > 0$  (если  $t_0 > 0$ ). Значение  $z_0$  однозначно определяется как наибольший отрицательный ноль положительной функции  $G(z)$ . Теорема 4 доказана.

На рис. 2 показано численное приближение решения  $G(z)$  удовлетворяющее граничным условиям задачи (21). Численная аппроксимация получена с использованием стандартного метода Гойна.

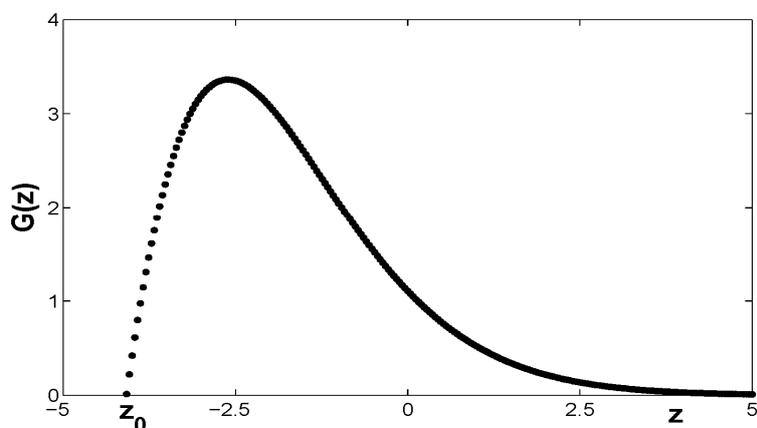


Рис. 2. Численная аппроксимация решения  $G(z)$  краевой задачи (21)

Общее решение краевой задачи (21) имеет вид  $g(z) = CG(z)$ . Для определения константы  $C$ , используем модифицированные граничные условия (20). Если  $h_{xxx}(0,t) < 0$  как следует из третьего граничного условия в (4), то мы имеем  $g''(0) = f'''(0) < 0$  или  $CG''(z_0) < 0$ . Далее мы покажем, что  $G''(z_0) < 0$  и, следовательно,  $C > 0$ . Действительно,  $\tilde{G}(z) := G(-z)$  монотонно возрастает для всех  $z \leq 0$  и  $4\tilde{G}'''(z) = -z\tilde{G}''(z) > 0$ . Если  $z > 0$ ,  $\tilde{G}'''(z) < 0$  при условии, что  $\tilde{G}''(z) > 0$ , то существует  $\tilde{z}_0 \in (0, z_0)$ , такое, что  $\tilde{G}''(z) < 0$  для всех  $z \in (-\tilde{z}_0, -z_0]$ , или, эквивалентно,  $G''(z) < 0$  для всех  $z \in [z_0, \tilde{z}_0)$ . Таким образом,  $G''(z_0) < 0$  как это показано на рис. 2.

По той же причине, существует  $\tilde{\tilde{z}}_0 \in (\tilde{z}_0, z_0]$  такое, что  $\tilde{G}'(z) < 0$  для всех  $z \in (\tilde{\tilde{z}}_0, -z_0]$ , или, эквивалентно,  $G'(z) > 0$  for all  $z \in [z_0, \tilde{\tilde{z}}_0)$ . Таким образом,  $G'(z_0) > 0$ , как это показано на рис. 2, следовательно

$$\beta(t) = \frac{f''(0)}{(t_0 - t)^{1/2}} = \frac{CG'(z_0)}{(t_0 - t)^{1/2}} > 0, \quad t \in [0, t_0).$$

Таким образом, класс самоподобных решений (17) не удовлетворяет физическим требованиям потока (рис. 1), потому что  $\beta(t)$  должно быть отрицательным по крайней мере для начальных значений  $t \geq 0$ .

### Точечные уравнения

Мы приведем здесь дополнительные оценки того, как решение краевой задачи (3)-(4) может неограниченно расти за конечное время, на основе точечного уравнения (7) и его производной. Рассмотрим краевую задачу (11)-(12) и предположим, что существует

достаточно гладкое решение. Переходя к пределу  $x \rightarrow 0$ , мы вернемся к точечному уравнению (7) переписанному в новых переменных в виде:

$$u_{xxxx}(0,t) = V(t) \beta(t), \quad t \geq 0, \quad (25)$$

где  $\beta(t) = u_x(0,t)$ .

Взяв производную от линейного уравнения адвекции-диффузии (11) по  $x$  и предел  $x \rightarrow 0$ , мы получим другое точечное уравнение:

$$\frac{d\beta}{dt} + u_{xxxx}(0,t) = -\frac{1}{2}V(t), \quad t \geq 0. \quad (26)$$

Система уравнений (25) и (26) может быть переписана в частично замкнутом виде:

$$\frac{d\beta}{dt} = -\frac{u_{xxx}(0,t)}{2\beta(t)} - u_{xxxx}(0,t), \quad t \geq 0. \quad (27)$$

Предположим теперь, что существует  $t_0 > 0$  такое, что

$$\beta(t) \rightarrow 0, \quad u_{xxxx}(0,t) \rightarrow a_4, \quad u_{xxxxx}(0,t) \rightarrow a_5, \quad \text{при } t \uparrow t_0, \quad (28)$$

где  $0 < |a_4| < \infty$  и  $|a_5| < \infty$ . Тогда, асимптотический анализ уравнения (27) показывает, что

$$\beta^2(t) = a_4(t_0 - t) + O(t_0 - t)^{3/2}, \quad V(t) = \sqrt{\frac{a_4}{t_0 - t}} + O(1), \quad \text{при } t \uparrow t_0, \quad (29)$$

при условии, что  $a_4 > 0$ . Скорость роста решения вблизи особенности в (29) отличается от скорости роста самоподобного решения (17) и численно полученного результата (8). В рамках численного результата (8), этот точечный анализ может означать, что либо  $a_4 = 0$  либо  $a_5 \rightarrow \infty$  в предположении (28).

Таким образом, три различных скорости роста решения вблизи особенности, утверждаемые в (8) и полученные в (17) и (29) показывают сложность динамики краевой задачи (3)-(4) или же ее эквивалентной версии (11)-(12). Таким образом, необходимы дальнейшие исследования поставленной задачи, в том числе более точное численное моделирование.

**Благодарность:** Авторы выражают благодарность Евгению Бенилову и Роману Таранцу за полезные обсуждения и доступ к их неопубликованным результатам на ранних этапах исследований. Представленные результаты получены в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Benilov E.S. and Vynnycky M.* "Contact lines with a  $180^\circ$  contact angle", submitted to *J. Fluid Mech.* (2012)
2. *Benney D.J. and Timson W.J.* "The rolling motion of a viscous fluid on and off a rigid surface", *Stud. Appl. Math.* **63** (1980), 93-98.
3. *Chugunova, M. Pugh, and R. Taranets,* "Nonnegative solutions for a long-wave unstable thin film equation with convection", *SIAM J. Math. Anal.* **42**, 1826-1853 (2010).
4. *Chugunova M. and Taranets R.* "Qualitative analysis of coating flows on a rotating horizontal cylinder", *Int. J. Diff. Eqs.* **2012** (2012), Article ID 570283, 30 pages.
5. *Murdock J.A.,* *Perturbations: Theory and Methods* (SIAM, Philadelphia, 1987).
6. *Ngan C.G. and Dussan V.E.B.,* "The moving contact line with a  $180^\circ$  advancing contact angle", *Phys. Fluids* **24** (1984), 2785-2787.
7. *Pelinovsky D.E., Giniyatullin A.R., and Panfilova Y.A.* "On solutions of a reduced model for the dynamical evolution of contact lines" // *Труды НГТУ.* 2012. № 4(97).

**ON THE FORMATION OF SINGULARITIES  
IN THE LINEAR ADVECTION-DIFFUSION EQUATION  
WITH A REDEFINITION OF THE BOUNDARY CONDITION**

**D. Pelinovsky<sup>1,2</sup>, A. Giniyatullin<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>*Alexeev Nizhny Novgorod State Technical University  
24, Minin Street, Nizhny Novgorod, 603950, Russia*

<sup>2</sup>*McMaster University  
Hamilton, Ontario, Canada*

*Abstract.* We study finite-time singularities in the linear advection–diffusion equation with a variable speed on a semi-infinite line. The variable speed is determined by an additional condition at the boundary, which models the dynamics of a contact line of a hydrodynamic flow at a  $180^\circ$  contact angle. Using apriori energy estimates, we derive conditions on variable speed that guarantee that a sufficiently smooth solution of the linear advection–diffusion equation blows up in a finite time. Using the class of self-similar solutions to the linear advection–diffusion equation, we find the blow-up rate of singularity formation. This blow-up rate does not agree with previous numerical simulations of the model problem.

*Key words:* advection-diffusion equation, variable speed, determined boundary conditions, the formation of singularities, apriori energy estimates, self-similar solutions.

УДК 517.518.452(456)

## ОБ ОДНОМ ЛИНЕЙНОМ МЕТОДЕ СУММИРОВАНИЯ РЯДОВ ФУРЬЕ

А.В. Баскаков, Н.П. Волков, М.В. Сучков

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ» (Москва)  
115409, Москва, Каширское ш., 31

*Аннотация.* Рассмотрена задача о представлении непрерывных функций операторами суммирования рядов Фурье с помощью треугольных матриц вида

$$L_n(f, \Lambda, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{n,k} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Доказана теорема, обобщающая теорему К.В. Ермакова о равномерной сходимости этих операторов при некоторых ограничивающих условиях на элементы матрицы  $\Lambda$ .

*Ключевые слова:* Ряды Фурье, равномерная сходимость, операторы суммирования, треугольная матрица.

Рассмотрим функцию  $f \in L_{2\pi}$ , её ряд Фурье  $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$ .

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \phi_x(t) &= f(x+t) + f(x-t) - 2f(x), \\ D_k(t) &= \frac{\sin(k + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}}, \quad F_k(t) = \sum_{v=0}^k D_v(t) = \frac{\sin^2(k + \frac{1}{2})t}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} \end{aligned}$$

Для треугольной матрицы  $\Lambda = (\lambda_{n,k})_{n,k=1}^{\infty, n}$  (будем также всегда в дальнейшем полагать  $\lambda_{n,0} = 1$  при  $n = 1, 2, \dots$  и  $\lambda_{n,k} = 0$  при  $k > n$ ) положим

$$\begin{aligned} L_n(f, \Lambda, x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{n,k} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \\ \Delta \lambda_{n,k} &= \lambda_{n,k} - \lambda_{n,k+1}, \quad \Delta^2 \lambda_{n,k} = \Delta \lambda_{n,k} - \Delta \lambda_{n,k+1}, \quad \forall k, n \in \Gamma. \end{aligned}$$

В работе Г.А.Фомина [2] было показано, что если треугольная матрица  $\Lambda$  удовлетворяет условию

$$n \sum_{k=0}^n (\Delta \lambda_{n,k})^2 \leq C \tag{1}$$

при некотором  $C > 0$ , а функция  $f \in C_{2\pi}$ , то последовательность линейных операторов  $\{L_n(f, \Lambda, x)\}$  равномерно сходится к  $f(x)$ . С.Б.Стечкин в своем докладе в МГУ в 1965г. обобщил условие Г.А.Фомина (1) и показал, что последовательность

$\{L_n(f, \Lambda, x)\}$  равномерно сходится к  $f(x)$ , если для матрицы  $\Lambda$  выполнено условие  $n^{p-1} \sum_{k=0}^n |\Delta \lambda_{n,k}|^p \leq C$ ,  $n=1,2,\dots$  для некоторых  $C > 0$  и  $p > 1$ . В.А.Баскаковым [3] был определен точный порядок роста величин  $A_n(\alpha) = \sup_{\Lambda \in \Lambda^*} \sup_{f \in Lip \alpha} \|L_n(f, \Lambda, x) - f(x)\|_C$ ,  $n \rightarrow \infty$ , где  $\Lambda^*$  - класс матриц, удовлетворяющих условию (1) с закрепленной константой  $C$ . В той же работе получены подробные результаты для класса  $H_\omega$ .

П.В.Ермаков [4] доказал, что линейные методы, удовлетворяющие при некоторых постоянных  $C_1, C_2$  условиям

$$n^2 |\Delta \lambda_{n,0}| \leq C_1, \quad n^3 \sum_{k=0}^n |\Delta^2 \lambda_{n,k}| \leq C_2 \quad (2)$$

обладают, вообще говоря, лучшими свойствами аппроксимации по сравнению с методами, соответствующими условию Г.А.Фомина (1).

**Теорема А.** (П.В.Ермаков). Пусть  $\Lambda$  - треугольная матрица, удовлетворяющая условиям (2). Тогда для любой функции  $f(x) \in C_{2\pi}$  последовательность  $\{L_n(f, \Lambda, x)\}$  равномерно сходится к  $f(x)$ .

В настоящей статье приводятся результаты, обобщающие теорему П.В.Ермакова. В дальнейшем нам понадобится

**Лемма 1.** Если матрица  $\Lambda$  удовлетворяет условиям

$$|\Delta \lambda_{n,0}| \leq C_1 \frac{1}{n^{\frac{1}{p}}}, \quad n=1,2,\dots, \quad (4)$$

$$\sum_{k=0}^n |\Delta^2 \lambda_{n,k}|^p \leq C_2 \frac{1}{n^{2p-1}}, \quad n=1,2,\dots \quad (5)$$

для некоторых постоянных  $C_1, C_2$  и  $p > 2$ , то для любого  $p \in (1, 2)$  найдутся постоянные  $C_{1p}, C_{2p}$ , такие, что условия (4) и (5) будут выполняться при  $p \in (1, 2)$  с заменой постоянных  $C_1, C_2$  на  $C_{1p}, C_{2p}$ , соответственно.

Доказательство этой леммы основывается на неравенстве Гельдера.

**Теорема 1.** Пусть матрица  $\Lambda$  удовлетворяет условиям (4) и (5) при некоторых константах  $p > 1$ ,  $C_1, C_2$ , и функция  $f(x) \in C_{2\pi}$ . Тогда последовательность  $\{L_n(f, \Lambda, x)\}$  равномерно сходится к  $f(x)$ .

Доказательство. Пусть  $p \in (1, 2]$ , и операторы

$$L_n(f, \Lambda, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) V_n(t) dt \quad (6)$$

определяются ядрами:

$$V_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^n \lambda_{n,k} \cos kt \quad (7)$$

Применяя дважды преобразование Абеля к равенству (7), получаем

$$V_n(t) = \sum_{k=0}^{n-2} \Delta^2 \lambda_{n,k} \frac{\sin^2(k+1) \frac{t}{2}}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} + \Delta \lambda_{n,n-1} \frac{\sin^2 \frac{nt}{2}}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} + \lambda_{n,n} \frac{\sin \frac{2n+1}{2} t}{2 \sin \frac{t}{2}}$$

Из условий (4) и (5) следует, что для некоторого числа  $C_3$ :

$$n |\Delta \lambda_{n,n-1}| \leq C_3, \quad n = 1, 2, \dots; \quad |\lambda_{n,n}| \ln n = o(1), \quad n \rightarrow \infty. \quad (8)$$

Оценим нормы  $\|L_n\|$ :

$$\begin{aligned} \|L_n\| &\leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} |V_n(t)| dt \leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left| \sum_{k=0}^{n-2} \Delta^2 \lambda_{n,k} \frac{\sin^2 \frac{k+1}{2} t}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} \right| dt + \\ &+ \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left| \Delta \lambda_{n,n-1} \frac{\sin^2 \frac{nt}{2}}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} \right| dt + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left| \lambda_{n,n} \frac{\sin \frac{2n+1}{2} t}{2 \sin \frac{t}{2}} \right| dt. \end{aligned}$$

Применяя условия (8), получаем

$$\begin{aligned} \|L_n\| &\leq C + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left| \sum_{k=0}^{n-2} \Delta^2 \lambda_{n,k} \frac{\sin^2 \frac{k+1}{2} t}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} \right| dt = \\ &= C + \frac{2}{\pi} \left( \int_0^{\frac{\pi}{n}} + \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} \right) \left| \sum_{k=0}^{n-2} \Delta^2 \lambda_{n,k} \frac{\sin^2 \frac{k+1}{2} t}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} \right| dt \stackrel{def}{=} C + J_1 + J_2. \end{aligned} \quad (9)$$

Первый интеграл  $J_1$  в (9) можно оценить:

$$\begin{aligned}
 J_1 &\leq Cn \sum_{k=0}^{n-2} |\Delta^2 \lambda_{n,k}| \leq Cn \left\{ \sum_{k=0}^{n-2} |\Delta^2 \lambda_{n,k}|^p \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \sum_{k=1}^{n-2} 1 \right\}^{\frac{1}{q}} \leq \\
 &\leq C \cdot n \cdot n^{\frac{1-2p}{p}} \cdot n^{\frac{1}{q}} = C \cdot n^{1+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-2} = C, \quad q = \frac{p}{p-1},
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

а интеграл  $J_2$ :

$$J_2 = \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} \frac{1}{2 \sin^2 \frac{t}{n}} \left| \sum_{k=0}^{n-2} \Delta^2 \lambda_{n,k} (1 - \cos(k+1)t) \right| dt \leq J_{2,1} + J_{2,2},
 \tag{11}$$

где

$$J_{2,1} = \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} \frac{1}{2 \sin^2 \frac{t}{n}} \left| \sum_{k=0}^{n-2} \Delta^2 \lambda_{n,k} \right| dt, \quad J_{2,2} = \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} 2 \sin^2 \frac{t}{n} \left| \sum_{k=0}^{n-2} \Delta^2 \lambda_{n,k} \cos(k+1)t \right| dt,$$

Так как сумма  $\sum_{k=0}^{n-2} \Delta^2 \lambda_{n,k} = \Delta \lambda_{n,0} - \Delta \lambda_{n,n-1}$ , то значение  $J_{2,1}$  оценивается:

$$J_{2,1} \leq \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} \left| \sum_{k=0}^{n-2} \Delta^2 \lambda_{n,k} \right| \frac{dt}{t^2} \leq C \cdot n \cdot \left| \sum_{k=0}^{n-2} \Delta^2 \lambda_{n,k} \right| \leq C.
 \tag{12}$$

Применяя теперь к интегралу  $J_{2,2}$  неравенства Гельдера и Хаусдорфа-Юнга (см.[1], с. 211), получим и для него оценку

$$\begin{aligned}
 J_{2,2} &\leq \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} \left| \sum_{k=0}^{n-2} \Delta^2 \lambda_{n,k} \cos(k+1)t \right| \frac{dt}{t^2} \leq \\
 &\leq \frac{2}{\pi} \left( \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} \frac{dt}{t^2} \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{k=0}^{n-2} \Delta^2 \lambda_{n,k} \cos(k+1)t \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \leq \\
 &\leq C \left( \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} \frac{dt}{t^2} \right)^{\frac{1}{p}} \left| \sum_{k=0}^{n-2} \Delta^2 \lambda_{n,k} \right|^{\frac{1}{q}} \leq C
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

Из соотношений (9)-(13) следует, что нормы  $\|L_n\|$  ограничены в совокупности, а из условия (5) - что для любого  $k$  предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{n,k} = 1$ .

Теперь сформулированная нами теорема вытекает из известной теоремы Никольского (см. [1], с. 476).

Если  $p > 2$ , то с помощью Леммы 1 сводим доказательство к доказанному случаю  $p \in (1, 2]$ . Теорема доказана.

**Замечание.** Теорема А вытекает из доказанной Теоремы 1 при значении параметра  $p = 2$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Бари Н.К.* Тригонометрические ряды. М., 1961. – 700 с.
2. *Фомин Г.А.* О линейных методах суммирования рядов Фурье. – Математический сборник, 1964, 65, №1, с.144-152.
3. *Баскаков В.А.* О порядке приближения непрерывных функций некоторыми линейными методами суммирования рядов Фурье. – Изв. вузов. Математика, 1969, №7, с.20-27.
4. *Ермаков П.В.* О сходимости некоторых линейных операторов к функциям класса  $Z_\alpha$ . – Математические заметки, 1977, т.22, №4, с.601-607.

#### ABOUT THE LINEAR METHOD OF SUMMATION OF FOURIER SERIES

**A. Baskakov, N. Volkov, M. Suchkov**

*National research Nuclear University «MEPhI» (Moscow)  
31, Kashirskoye shosse, Moscow, 115409, Russia*

*Abstract.* The problem of the representation of continuous functions of Fourier series operators is considered with triangular matrices like

$$L_n(f, \Lambda, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{n,k} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

The theorem, which generalizes Theorem K.V.Ermakov on the uniform convergence of these operators under certain restrictive conditions on the elements of the matrix  $\Lambda$  is proved.

*Key words:* Fourier series, uniform convergence, summing operators, triangular matrices.

ФИЗИКА

УДК 533.72

**РЕШЕНИЕ ДИФФУЗИОННОЙ ЗАДАЧИ  
В ТЕОРИИ НЕСТАЦИОНАРНОГО ДИФФУЗИОФЕРЕЗА  
КРУПНОЙ ТВЕРДОЙ НЕЛЕТУЧЕЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ЧАСТИЦЫ**

**В.Е. Ефремов, М.К. Кузьмин**

*Московский государственный областной университет  
105005, Москва, ул. Радио, 10а*

*Аннотация.* Авторы продолжают построение теории нестационарного диффузиофореа крупной твердой нелетучей частицы сферической формы в вязкой газовой среде. Приводится решение диффузионной задачи, которая разбита на стационарную и строго нестационарную части. В результате решения стационарной части этой задачи получена окончательная формула для определения стационарной составляющей диффузиофоретической скорости рассматриваемой частицы. Для определения нестационарной составляющей диффузиофоретической скорости этой частицы найдена соответствующая формула в пространстве лапласовых изображений. С помощью теорем о предельных значениях из операционного исчисления получена зависимость нестационарной составляющей диффузиофоретической скорости сферической частицы от строго нестационарного градиента концентрации при больших и малых значениях времени.

*Ключевые слова:* нестационарный диффузиофореа, крупная сферическая частица, диффузионная задача, градиент концентрации.

**1. Введение**

В работе [2] была поставлена задача построения теории нестационарного диффузиофоретического движения крупной твердой нелетучей частицы сферической формы с учетом диффузионного скольжения газа вдоль поверхности частицы и решена соответствующая гидродинамическая задача.

В настоящей работе приведем решение диффузионной задачи.

**2. Решение диффузионной задачи**

Дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial C_1}{\partial t} = D_{12} \Delta_{r,\theta} C_1, \quad (2.1)$$

которому удовлетворяет распределение концентрации первого компонента бинарной газовой смеси, является уравнением диффузии. При этом справедливы равенства

$$C_1(r, \theta, t) = C_1^{(1)}(r, \theta) + C_1^{(2)}(r, \theta, t), \quad (2.2)$$

$$C_1^{(1)}(r, \theta) = C_1(r, \theta, t)|_{t=0},$$

$$C_1^{(2)}(r, \theta, t)|_{r=0} = 0, \quad (2.3)$$

Если функции  $C_1^{(1)}(r, \theta)$ ,  $C_1^{(2)}(r, \theta, t)$  являются решениями дифференциальных уравнений

$$\Delta_{r\theta} C_1^{(1)} = 0, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial C_1^{(2)}}{\partial t} = D_{12} \Delta_{r\theta} C_1^{(2)} \quad (2.5)$$

соответственно, то их сумма (2.2) будет решением дифференциального уравнения (2.1).  
Общее решение уравнения (2.4) имеет вид [6]

$$C_1^{(1)}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos \theta),$$

где  $P_n(\cos \theta)$  – полином Лежандра порядка  $n$ ;  $A_n$ ,  $B_n$  – произвольные постоянные, которые определяются условиями задачи. Из условия

$$C_1 = C_{01} + \left| [\nabla C_1(t)]_{\infty} \right| r \cos \theta, \quad (2.6)$$

при  $t = 0$  получаем:

$$C_1^{(1)} = C_{01} + \left| (\nabla C_1^{(1)})_{\infty} \right| r \cos \theta. \quad (2.7)$$

С учетом условия (2.7) для концентрации  $C_1^{(1)}(r, \theta)$  находим:

$$C_1^{(1)} = C_{01} + \left| (\nabla C_1^{(1)})_{\infty} \right| r \cos \theta + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta). \quad (2.8)$$

Для определения величин  $B_0$ ,  $B_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) в разложении (3.4) обратимся к граничному условию

$$\frac{\partial C_1}{\partial r} \Big|_{r=R} = 0, \quad (2.9)$$

из которого при  $t = 0$  получаем:

$$\frac{\partial C_1^{(1)}}{\partial r} \Big|_{r=R} = 0. \quad (2.10)$$

Учет граничного условия (2.10) с использованием свойства ортогональности полиномов Лежандра [6, 7], то есть равенства:

$$\frac{2n+1}{2} \int_0^\pi P_n(\cos \theta) P_m(\cos \theta) \sin \theta \, d\theta = \delta_{nm} \quad (n, m = 0, 1, 2, \dots), \quad (2.11)$$

где  $\delta_{nm}$  – символ Кронекера, приводит к бесконечному числу линейных уравнений. Эти уравнения, кроме одного, имеющего вид:

$$\frac{2B_1}{R^3} = \left| (\nabla C_1^{(1)})_\infty \right|, \quad (2.12)$$

дают нулевые решения:

$$B_0 = B_n = 0 \quad (n \geq 2). \quad (2.13)$$

Из уравнения (2.12) находим:

$$B_1 = \frac{R^3}{2} \left| (\nabla C_1^{(1)})_\infty \right|. \quad (2.14)$$

Подставив найденные значения коэффициентов (2.13), (2.14) в разложение (2.8), получим:

$$C_1^{(1)} = C_{01} + \left[ 1 + \frac{R^3}{2r^3} \right] \left| (\nabla C_1^{(1)})_\infty \right| r \cos \theta.$$

Из последнего соотношения находим:

$$\frac{\partial C_1^{(1)}}{\partial \theta} \Big|_{r=R} = -\frac{3R \sin \theta}{2} \left| (\nabla C_1^{(1)})_\infty \right|. \quad (2.15)$$

Используя выражение (2.15), соотношение

$$\left| \dot{u}_1^p \right| = -\frac{2K_{sl} D_{12}}{3R \sin \theta} \frac{\partial C_1^{(1)}}{\partial \theta} \Big|_{r=R}$$

приведем к виду:

$$\left| \dot{u}_1^p \right| = K_{sl} D_{12} \left| (\nabla C_1^{(1)})_\infty \right|. \quad (2.16)$$

Напоминаем, что в последней формуле  $\dot{u}_1^p$  – скорость центра инерции внешней среды относительно покоящейся частицы при  $t = 0$ .

Согласно равенству

$$\dot{u}_D(t) = -\dot{u}(t)$$

стационарная составляющая диффузиофоретической скорости частицы относительно центра инерции внешней среды  $\dot{u}_{1D}$  равна  $-\dot{u}_1$ . Поэтому из формулы (2.16) получаем

$$\dot{u}_{1D} = -K_{st} D_{12} (\nabla C_1^{(1)})_\infty. \quad (2.17)$$

Полученная формула совпадает с известной формулой для скорости стационарного диффузиофореза твердой сферической частицы [7].

Рассмотрим уравнение (2.5). Его решение будем искать в виде произведения

$$C_1^{(2)}(r, \theta, t) = \Phi(\theta) \cdot h(r, t), \quad (2.18)$$

то есть, используем метод разделения переменных [6]. Подставим это произведение в уравнение (2.5), из которого после некоторого преобразования имеем

$$\frac{1}{\Phi \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{h} \left[ \frac{r^2}{D_{12}} \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial h}{\partial r} \right) \right].$$

Отсюда, введя постоянную разделения  $\lambda$ , получаем дифференциальные уравнения

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Phi}{d\theta} \right) + \lambda \Phi = 0, \quad (2.19)$$

$$\frac{r^2}{D_{12}} \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial h}{\partial r} \right) + \lambda h = 0. \quad (2.20)$$

Решая уравнение (2.19), находим собственные значения  $\lambda = n(n+1)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , которым соответствуют полиномы Лежандра  $P_n(\cos \theta)$  [6].

Рассмотрим уравнение (2.20), где  $\lambda = n(n+1)$ . Из начального условия (2.3) в силу представления (2.18) имеем:

$$h(r, t)|_{t=0} = 0. \quad (2.21)$$

Для того чтобы решить дифференциальное уравнение с частными производными (2.20), применим к нему интегральное преобразование Лапласа  $L\{h(r, t)\} = H(r, p)$ . С учетом начального условия (2.21) получим в пространстве изображений соответствующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2 H}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dH}{dr} - \left[ \frac{p}{D_{12}} + \frac{n(n+1)}{r^2} \right] H = 0. \quad (2.22)$$

Общее решение этого уравнения выражается через модифицированные функции Бесселя первого и второго рода [3, 4]:

$$I_{n+1/2}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} \left[ e^z \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k (n+k)!}{k!(n-k)!(2z)^k} - (-1)^n e^{-z} \sum_{k=0}^n \frac{(n+k)!}{k!(n-k)!(2z)^k} \right],$$

$$K_{n+1/2}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \sum_{k=0}^n \frac{(n+k)!}{k!(n-k)!(2z)^k}$$

следующим образом:

$$H_n = \frac{A_n}{\sqrt{r}} I_{n+1/2}(r\sqrt{p/D_{12}}) + \frac{B_n}{\sqrt{r}} K_{n+1/2}(r\sqrt{p/D_{12}}),$$

где  $A_n, B_n$  – произвольные постоянные, которые определяются условиями задачи.

Рассмотрим лапласово изображение функции  $C_1^{(2)}$ . Оно представляется произведением функций:

$$S_1^{(2)}(r, \theta, p) = L\{C_1^{(2)}(r, \theta, t)\} = \Phi(\theta) \cdot H(r, p).$$

Следовательно, общее решение дифференциального уравнения, являющегося изображением уравнения (2.5), выражается линейной комбинацией произведений частных решений уравнений (2.19) и (2.22), то есть

$$S_1^{(2)}(r, \theta, p) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{A_n}{\sqrt{r}} I_{n+1/2}(r\sqrt{p/D_{12}}) + \frac{B_n}{\sqrt{r}} K_{n+1/2}(r\sqrt{p/D_{12}}) \right] P_n(\cos \theta). \quad (2.23)$$

Так как из соотношений (2.2), (2.6), (2.7) следует равенство

$$C_1^{(2)} = \left[ \nabla C_1^{(2)}(t) \right]_{\infty} r \cos \theta,$$

где

$$\left[ \nabla C_1^{(2)}(t) \right]_{\infty} = \left[ \nabla C_1(t) \right]_{\infty} - (\nabla C_1^{(1)})_{\infty},$$

то в пространстве изображений имеем при  $r \rightarrow \infty$  соответствующее ему равенство

$$S_1^{(2)} = G_{\infty}(p) r \cos \theta, \quad (2.24)$$

где

$$G_{\infty}(p) = L\left\{ \left[ \nabla C_1^{(2)}(t) \right]_{\infty} \right\}.$$

С учетом условия (2.24) из разложения (2.23) получаем выражение  $S_1^{(2)} = S_1^{(2)}(r, \theta, p)$ :

$$S_1^{(2)} = G_\infty(p)r \cos \theta + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{\sqrt{r}} K_{n+1/2} \left( r\sqrt{p/D_{12}} \right) P_n(\cos \theta). \quad (2.25)$$

Для определения величин  $B_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) используем изображение надлежащего граничного условия. Из граничного условия (2.9) получаем равенство:

$$\left. \frac{\partial C_1^{(2)}}{\partial r} \right|_{r=R} = 0.$$

В пространстве изображений ему соответствует следующее равенство:

$$\left. \frac{\partial S_1^{(2)}}{\partial r} \right|_{r=R} = 0. \quad (2.26)$$

Учет условия (2.26) для выражения (2.25) с использованием свойства ортогональности полиномов Лежандра (2.11) приводит к бесконечному числу линейных уравнений. Эти уравнения, кроме одного, имеющего вид:

$$\frac{B_1}{R\sqrt{R}} \left[ K_{3/2} - 2R\sqrt{p/D_{12}} K'_{3/2} \right] = 2G_\infty(p), \quad (2.27)$$

дают нулевые решения:

$$B_0 = B_n = 0 \quad (n \geq 2). \quad (2.28)$$

Заметим, что во избежание громоздкости формул, аргументы модифицированной функции Бесселя  $K_{3/2}$  и ее производной, имеющие вид  $R\sqrt{p/D_{12}}$ , мы опускаем.

Из уравнения (2.27) находим

$$B_1 = \frac{2R\sqrt{R}G_\infty(p)}{K_{3/2} - 2R\sqrt{p/D_{12}} K'_{3/2}}. \quad (2.29)$$

Таким образом, учитывая (2.28), (2.29), из разложения (2.25) находим

$$S_1^{(2)} = G_\infty(p)r \cos \theta + \frac{B_1}{\sqrt{r}} K_{3/2} \left( r\sqrt{p/D_{12}} \right) \cos \theta.$$

Из последнего соотношения находим:

$$\left. \frac{\partial S_1^{(2)}}{\partial \theta} \right|_{r=R} = -R \sin \theta \cdot F_S(p) \cdot G_\infty(p), \quad (2.30)$$

где

$$F_S(p) = 1 + \frac{2K_{3/2}}{K_{3/2} - 2R\sqrt{p/D_{12}^{(e)}} K'_{3/2}}. \quad (2.31)$$

Используя выражение (2.30), формулу

$$U_2 = -\frac{K_{sl}D_{12}}{R \sin \theta} F_U(p) \frac{\partial S_1^{(2)}}{\partial \theta} \Big|_{r=R}$$

приведем к виду:

$$U_2 = K_{sl}D_{12}F_U(p) \cdot F_S(p) \cdot G_\infty(p). \quad (2.32)$$

Таким образом, в пространстве изображений получена формула для определения нестационарной составляющей диффузиофоретической скорости рассматриваемой частицы.

### 3. Анализ полученной в пространстве изображений формулы для определения нестационарной составляющей диффузиофоретической скорости сферической частицы

Проведем анализ зависимости нестационарной составляющей диффузиофоретической скорости частицы  $\overset{p}{u}_{2D}(t)$  от строго нестационарной части градиента концентрации  $[\nabla C_1^{(2)}(t)]_\infty$  для малых и больших значений времени. Для этого используем теоремы о предельных значениях из операционного исчисления [1].

С целью упрощения формы записи в дальнейшем часто будем использовать обозначение неотрицательной функции  $|\nabla C_1^{(2)}(t)|_\infty$  через  $g_\infty(t)$ .

По выражениям:

$$F_U(p) = \frac{6\rho_e(v + R\sqrt{v \cdot p})}{2R^2(\rho_e - \rho_i)p + 9\rho_e(v + R\sqrt{v \cdot p})}, \quad (3.1)$$

(2.31) находим соответственно:

$$\lim_{p \rightarrow 0} F_U(p) = \frac{2}{3}, \quad \lim_{p \rightarrow 0} F_S(p) = \frac{3}{2}. \quad (3.2)$$

Применив к формуле (2.32) теорему о конечном значении с учетом соотношений (3.2), получаем предельное равенство:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\overset{p}{u}_{2D}(t)| = K_{sl}D_{12} \lim_{t \rightarrow \infty} g_\infty(t), \quad (3.3)$$

которое справедливо при любом соотношении между  $\rho_e$  и  $\rho_i$ .

В силу равенства (3.3) имеем:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u_{2D}^p(t) = -K_{sl} D_{12} \lim_{t \rightarrow \infty} [\nabla C_1^{(2)}(t)]_{\infty}. \quad (3.4)$$

Отметим, что формулы (2.17) и (3.4) описывают одинаковую зависимость стационарных и строго нестационарных величин скорости и градиента концентрации.

Рассматривая пределы при  $p \rightarrow \infty$ , будем различать случаи

$$\rho_e - \rho_i \neq 0, \quad \rho_e - \rho_i = 0.$$

Функция (3.1) тождественно равна постоянной величине при  $\rho_e - \rho_i = 0$ :

$$F_U(p)_{\rho_e - \rho_i = 0} \equiv \frac{2}{3},$$

а

$$\lim_{p \rightarrow \infty} F_U(p) = 0 \quad (\rho_e - \rho_i \neq 0).$$

Так как

$$\lim_{p \rightarrow \infty} F_S(p) = 1, \quad (3.5)$$

то, применив к соотношению (2.32) при  $\rho_e - \rho_i = 0$  теорему о начальном значении, получим следующее предельное равенство

$$\lim_{t \rightarrow 0} |u_{2D}^p(t)| = \frac{2}{3} K_{sl} D_{12} \lim_{t \rightarrow 0} g_{\infty}(t). \quad (3.6)$$

Если  $\rho_e - \rho_i \neq 0$ , то рассматриваем преобразованное выражение правой части соотношения (2.32)

$$U_2 = K_{sl} D_{12} [\sqrt{p} F_U(p)] \cdot F_S(p) \cdot \left[ \frac{1}{\sqrt{p}} G_{\infty}(p) \right]. \quad (3.7)$$

Имеем:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} [\sqrt{p} \cdot F_U(p)] = \frac{3\rho_e \sqrt{v}}{R(\rho_e - \rho_i)} \neq 0. \quad (3.8)$$

Находим оригинал:

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{p}} G_{\infty}(p) \right\} = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} * g_{\infty}(t). \quad (3.9)$$

Применив к соотношению (3.7) теорему о начальном значении с учетом равенств (3.5), (3.8), (3.9), получаем

$$\lim_{t \rightarrow 0} |u_{2D}^p(t)| = \frac{3K_{sl}D_{12}\rho_e\sqrt{v}}{R|\rho_e - \rho_i|} \lim_{t \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{\sqrt{\pi t}} * g_\infty(t) \right]. \quad (3.10)$$

Отметим, что в обеих частях соотношения (3.10) рассматриваются пределы неотрицательных величин. Равенство (3.10) возможно только тогда, когда разность плотностей  $\rho_e, \rho_i$  берется по абсолютной величине.

Выясним асимптотические соотношения, существующие между функциями  $|u_{2D}^p(t)|$  и  $g_\infty(t)$ . Из равенства (3.3) имеем, что эти функции при  $t \rightarrow \infty$  асимптотически пропорциональны или, допуская некоторую вольность речи, можно сказать, что нестационарная составляющая диффузиофоретической скорости сферической частицы и строго нестационарный градиент концентрации имеют один и тот же порядок при больших значениях времени (независимо от соотношения между  $\rho_e, \rho_i$ ). Равенство (3.6), справедливое при  $\rho_e - \rho_i = 0$ , позволяет заключить, что функции  $|u_{2D}^p(t)|, g_\infty(t)$  при  $t \rightarrow 0$  имеют один и тот же порядок, если  $\rho_e - \rho_i = 0$ .

При  $\rho_e - \rho_i \neq 0$  имеет место равенство (3.10), следовательно,  $|u_{2D}^p(t)|$  является функцией более высокого порядка малости, чем  $g_\infty(t)$ , т. е.

$$|u_{2D}^p(t)| = o[g_\infty(t)] \quad (t \rightarrow 0).$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. – М.: Наука, 1971. – 288 с.
2. Ефремов В.Е., Кузьмин М.К. Решение гидродинамической задачи в теории нестационарного диффузиофореза крупной твердой нелетучей сферической частицы // Вестник МГОУ. – Серия «физика-математика». – М.: изд. МГОУ. – 2012, №2. – С. 15-29.
3. Корнев Б.Г. Введение в теорию бесселевых функций. – М.: Наука, 1971. – 288 с.
4. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – СПб.: Лань, 2002. – 688 с.
5. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: Издательство ЛКИ, 2008. – 472 с.
6. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Издательство МГУ, Наука, 2004. – 798 с.
7. Яламов Ю.И., Галоян В.С. Динамика капель в неоднородных вязких средах. – Ереван: Луйс, 1985. – 208 с.
8. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. – М.: Наука, 1968. – 344 с.

**THE SOLUTION OF DIFFUSION PROBLEM IN THE THEORY  
OF NONSTATIONARY DIFFUSIOPHORESIS  
OF LARGE NON-VOLATILE SOLID SPHERICAL PARTICLE**

**V. Efremov, M. Kuzmin**

*Moscow State Regional University  
10a, Radio st., Moscow, 105005, Russia*

*Abstract.* The authors continue construction of the theory of nonstationary diffusiophoresis of large non-volatile solid spherical particle in a viscous gas medium. The solution of diffusion problem is carried out. This problem is divided into stationary and strictly nonstationary parts. Final formula for determining stationary diffusiophoresis velocity component of the particle was obtained. For determining nonstationary diffusiophoresis velocity component of this particle corresponding formula in the space of Laplace images was obtained. Dependence of nonstationary diffusiophoresis velocity component of the particle from strictly nonstationary concentration gradient at large and small values of time was obtained using theorems about limiting values from operational calculus.

*Keywords:* nonstationary diffusiophoresis, large spherical particle, diffusion problem, concentration gradient.

УДК 533.72

**ТЕОРИЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО ПРОЦЕССА ИСПАРЕНИЯ  
СФЕРИЧЕСКОЙ АЭРОЗОЛЬНОЙ КАПЛИ  
С УЧЕТОМ ЗАВИСИМОСТИ ДАВЛЕНИЯ НАСЫЩЕННОГО ПАРА  
ОТ КРИВИЗНЫ ЕЕ ПОВЕРХНОСТИ**

**М.К. Кузьмин**

*Московский государственный областной университет  
105005, Москва, ул. Радио, 10а*

*Аннотация.* Строится теория нестационарного процесса испарения неподвижной аэрозольной капли сферической формы, уделяя при этом основное внимание учету коэффициента поверхностного натяжения вещества капли. В работе проведен подробный анализ предельных выражений, полученных из найденной в ней формулы скорости изменения радиуса капли, справедливой для всех значений времени.

*Ключевые слова:* нестационарный процесс испарения, давление насыщенного пара, коэффициент поверхностного натяжения, предельные выражения, скорость изменения радиуса капли.

**ВВЕДЕНИЕ**

При построении общей теории нестационарного процесса испарения и конденсационного роста аэрозольной капли важное значение приобретает учет наиболее существенных факторов, влияющих на рассматриваемый процесс. Для точности получаемых

результатов необходима физически корректная постановка граничных условий на поверхности капли — внешняя среда с тщательным учетом взаимодействия молекул пара с поверхностью жидкой капли.

Неотъемлемой частью этой теории должно быть описание распределения концентрации пара и поля температуры в окружающей каплю среде, а также зависимости концентрации насыщенных паров на поверхности капли от времени.

Характеристикой рассматриваемых процессов может служить скорость нестационарного изменения радиуса капли.

В предлагаемой работе теория нестационарного процесса испарения неподвижной аэрозольной капли сферической формы строится с учетом теплоты фазового перехода вещества капли, а также коэффициентов испарения и поверхностного натяжения.

В статье [1] рассматривалась модель нестационарного процесса испарения аэрозольной капли с учетом первых двух из указанных выше факторов, уделяя при этом основное внимание исследованию влияния коэффициента испарения на скорость изменения радиуса испаряющейся капли. Учет последнего фактора, то есть поверхностного натяжения, приобретает особое значение с уменьшением радиуса (или то же самое с увеличением кривизны поверхности) сферической капли.

#### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим нестационарный процесс испарения неподвижной сферической капли, находящейся в бинарной газовой смеси, первый компонент которой образован молекулами вещества капли, а второй компонент — молекулами несущего газа, не испытывающего фазового перехода в рассматриваемом интервале температур. При этом, следуя Максвеллу [2, 3], концентрация пара у поверхности капли предполагается равной концентрации насыщенного пара при температуре ее поверхности, причем, будем полагать, что эта концентрация значительно меньше плотности вещества капли. Кроме того, полагаем, что радиус рассматриваемой капли  $R$  таков, что невозможно пренебрегать влиянием слоя Кнудсена вокруг капли на рассматриваемый процесс.

Распределение (относительной) концентрации пара  $c_1$  и температура парогазовой смеси  $T$  удовлетворяют следующей системе уравнений с начальными и граничными условиями:

$$\frac{\partial c_1}{\partial t} = D \left( \frac{\partial^2 c_1}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial c_1}{\partial r} \right), \quad (1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right), \quad (2)$$

$$c_1(r, t)|_{t=0} = c_{10}, \quad c_1(r, t)|_{r \rightarrow \infty} = c_{1\infty} = c_{10}, \quad (3)$$

$$T(r, t)|_{t=0} = T_0, \quad T(r, t)|_{r \rightarrow \infty} = T_\infty = T_0, \quad (4)$$

$$Dm_1 n q \frac{\partial c_1}{\partial r} \Big|_{r=R} = -\kappa \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R}, \quad (5)$$

где  $r$  — радиальная координата сферической системы координат с началом в центре капли,  $t$  — время. В уравнения (1), (2) входят:  $D = nm_2D_{12} / \rho_e$ , где  $D_{12}$  — коэффициент взаимной диффузии компонентов бинарной смеси;  $n = n_1 + n_2$ ;  $n_1, m_1$  и  $n_2, m_2$  — концентрация и масса молекул первого и второго компонентов соответственно,  $\rho_e$  — плотность парогазовой смеси;  $a$  — коэффициент температуропроводности бинарной смеси. Далее, в граничное условие (5) входят:  $q$  — удельная теплота фазового перехода вещества капли,  $\kappa$  — коэффициент теплопроводности парогазовой смеси.

Граничное условие, которое дает возможность учета влияния коэффициента испарения  $\alpha$  на рассматриваемый процесс имеет вид

$$-D \frac{\partial c_1}{\partial r} \Big|_{r=R} = \alpha v (c_{1s} - c_1) \Big|_{r=R}, \quad (6)$$

здесь  $v = \sqrt{kT_0 / 2\pi m_1}$  — одна четвертая средней абсолютной тепловой скорости молекул пара, где  $k$  — постоянная Больцмана. Отметим, что условие (6) получено рассмотрением двух радиальных потоков первого компонента, а именно, диффузионного потока и определяемого по формуле Герца — Кнудсена [3, 4] потока, отводимого через слой Кнудсена с поверхности капли.

Следует заметить, что при учете выше указанных факторов в выбранной модели рассматриваемого процесса можно пренебречь влиянием поля температуры внутри капли. Ранее было установлено [5], что это поле по существу не сказывается на величине скорости нестационарного изменения радиуса капли как при очень малых, так и очень больших значениях времени при указанной форме (6) учета влияния коэффициента испарения.

Приемлемую для исследования формулу, определяющую концентрацию насыщенных паров над сферической поверхностью капли, можно получить с использованием приближений уравнений Кельвина (Томсона) [6] и Клапейрона — Клаузиуса [7] соответственно:

$$c_{1s}(t) = \bar{c}_{1s}(t) \left( 1 + \frac{k_\sigma}{R} \right), \quad (7)$$

$$\bar{c}_{1s}(t) = \bar{c}_{1s0} \left\{ 1 + k_q [T_s(t) - T_0] \right\}, \quad (8)$$

где черта над буквой указывает на концентрацию насыщенных паров вещества капли, имеющей достаточно малую кривизну, при температуре ее поверхности  $T_s = T_s(t) = T_e(r, t) \Big|_{r=R}$ :

$$\bar{c}_{1s}(t) = c_1(T_s) = n_1(T_s)/n, \quad \bar{c}_{1s0} = \bar{c}_{1s}(t) \Big|_{t=0};$$

далее в этих формулах введены обозначения:

$$k_{\sigma} = \frac{2m_1\sigma}{kT_0\rho_i}, k_q = \frac{qm_1 - kT_0}{kT_0^2},$$

в которые входят:  $\rho_i$  — плотность вещества капли,  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения.

Исключив из уравнений (7), (8) функцию  $\bar{c}_{1s}(t)$ , получим искомую формулу

$$c_{1s}(t) = c_{1s0} \left\{ 1 + k_q [T_s(t) - T_0] \right\}, \quad (9)$$

где  $c_{1s0} = \bar{c}_{1s0} \left( 1 + \frac{k_{\sigma}}{R} \right)$ .

#### МЕТОД РЕШЕНИЯ

Решение поставленной задачи будем проводить методом интегральных преобразований Лапласа [8]. Как известно, преобразование Лапласа устанавливает связь между оригиналом  $f(t)$  и его изображением  $F(p)$ :

$$F(r, p) = L\{f(r, t)\} = \int_0^{\infty} f(r, t) \exp(-pt) dt, \quad (10)$$

где  $p$  — комплексный параметр.

#### РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Введем обозначения:

$$S(r, p) = L\{c_1(r, t)\}, \theta(r, p) = L\{T(r, t)\}.$$

Учитывая условия (3), (4), по формуле (10) находим соответствующие изображения уравнений (1) и (2)

$$DS'' + \frac{2D}{r}S' - pS + c_{10} = 0, \quad (11)$$

$$a\theta'' + \frac{2a}{r}\theta' - p\theta + T_0 = 0, \quad (12)$$

представляющие собой обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка для неизвестных функций  $S(r, p)$ ,  $\theta(r, p)$ , где  $r$  — независимая переменная, а  $p$  играет роль параметра.

Общее решение каждого из уравнений (11), (12) соответственно имеет вид:

$$S(r, p) - \frac{c_{10}}{p} = \frac{A}{r} \exp\left(-\sqrt{\frac{p}{D}} r\right) + \frac{A'}{r} \exp\left(\sqrt{\frac{p}{D}} r\right), \quad (13)$$

$$\theta(r, p) - \frac{T_0}{p} = \frac{B}{r} \exp\left(-\sqrt{\frac{p}{a}} r\right) + \frac{B'}{r} \exp\left(\sqrt{\frac{p}{a}} r\right), \quad (14)$$

где  $A, A', B, B'$  — произвольные «постоянные», определяемые условиями задачи. Прежде всего, с учетом граничных условий (3), (4) находим:

$$A' = B' = 0. \quad (15)$$

Теперь, введя обозначение

$$S_s(p) = L\{c_{1s}(t)\},$$

запишем граничные условия (5), (6), (9) в пространстве изображений

$$\left. \begin{aligned} \gamma p_1 q_1 A + \kappa p_2 q_2 B &= 0, \\ (Dp_1 + \alpha\nu)q_1 A - \alpha\nu R S_s &= -\frac{\alpha\nu c_{10} R}{p}, \\ c_{1s0} k_q q_2 B - R S_s &= -\frac{c_{1s0} R}{p}, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

где

$$\gamma = Dm_1 nq, \quad p_1 = \sqrt{\frac{p}{D}} + \frac{1}{R}, \quad p_2 = \sqrt{\frac{p}{a}} + \frac{1}{R},$$

$$q_1 = \exp\left(-R\sqrt{\frac{p}{D}}\right), \quad q_2 = \exp\left(-R\sqrt{\frac{p}{a}}\right).$$

Решая алгебраическую систему уравнений (16), находим:

$$A = -\frac{\varepsilon \kappa R p_2}{p\delta q_1}, \quad B = \frac{\varepsilon \gamma R p_1}{p\delta q_2}, \quad (17)$$

$$S_s = \frac{c_{1s0}}{p} + \frac{\varepsilon \kappa_{q\sigma} p_1}{p\delta}, \quad (18)$$

где

$$\varepsilon = \alpha\nu(c_{10} - c_{1s0}), \quad \kappa_{q\sigma} = c_{1s0} k_q \gamma,$$

$$\begin{aligned} \delta &= g_0 p + g_1 \sqrt{p} + g_2, \quad g_0 = \kappa \sqrt{D/a}, \\ g_1 &= \alpha v (\kappa \sqrt{D} + \kappa_{q\sigma} \sqrt{a}) / \sqrt{Da} + g_0 (\sqrt{D} + \sqrt{a}) / R, \\ g_2 &= [D\kappa + \alpha v R (\kappa + \kappa_{q\sigma})] / R^2. \end{aligned}$$

Обозначив  $\sqrt{p}$  через  $z$ , рассмотрим квадратный трехчлен  $\delta = g_0 z^2 + g_1 z + g_2$ . Корни его  $z_1, z_2$  действительны и различны, ибо

$$D_\delta = g_1^2 - 4g_0 g_2 = \left[ g_0 (\sqrt{D} - \sqrt{a}) / R + \alpha v (\kappa \sqrt{D} - \kappa_{q\sigma} \sqrt{a}) / \sqrt{Da} \right]^2 + 4(\alpha v)^2 \kappa \kappa_{q\sigma} / \sqrt{Da} > 0.$$

Обозначив  $\beta_1 = -z_1 = (g_1 - \sqrt{D_\delta}) / 2g_0$ ,  $\beta_2 = -z_2 = (g_1 + \sqrt{D_\delta}) / 2g_0$  — положительные величины, имеем

$$\delta = g_0 (\sqrt{p} + \beta_1) (\sqrt{p} + \beta_2).$$

В силу соотношений (15), (17) находим следующие выражения для функций (13), (14):

$$S(r, p) = \frac{c_{10}}{p} - \frac{\varepsilon \kappa R}{r} \cdot \frac{p_2}{p\delta} \exp(-r_c \sqrt{p}), \quad (19)$$

$$\theta(r, p) = \frac{T_0}{p} + \frac{\varepsilon \gamma R}{r} \cdot \frac{p_1}{p\delta} \exp(-r_T \sqrt{p}), \quad (20)$$

где  $r_c = (r - R) / \sqrt{D}$ ,  $r_T = (r - R) / \sqrt{a}$ .

Введем следующие обозначения используемых в пространстве оригиналов функций:

$$\Phi(x, \beta, t) = \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2\sqrt{t}} \right) - \exp(\beta^2 t + x\beta) \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2\sqrt{t}} + \beta\sqrt{t} \right),$$

$$\varphi(\beta, t) = 1 - \Phi(0, \beta, t) = \exp(\beta^2 t) \operatorname{erfc}(\beta\sqrt{t}),$$

где

$$\operatorname{erfc}(z) = 1 - \operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^\infty \exp(-u^2) du \text{ —}$$

дополнительный интеграл вероятности.

Переходя в пространство оригиналов, по выражениям (19), (20) и (18) находим соответственно распределение концентрации пара и поле температуры в окружающей

каплю среде, а также зависимость концентрации насыщенных паров на поверхности капли от времени:

$$c_1(r, t) = c_{10} - \frac{\varepsilon \kappa}{r\sqrt{a}} \sum_{j=1}^2 A(\beta_j) \Phi(r_c, \beta_j, t), \quad (21)$$

$$T(r, t) = T_0 + \frac{\varepsilon \gamma}{r\sqrt{D}} \sum_{j=1}^2 B(\beta_j) \Phi(r_T, \beta_j, t), \quad (22)$$

$$c_{1s}(t) = c_{1s0} + \frac{\varepsilon \kappa_{q\sigma}}{R\sqrt{D}} \left[ \frac{\sqrt{D}}{g_2} - \sum_{j=1}^2 B(\beta_j) \varphi(\beta_j, t) \right], \quad (23)$$

где

$$A(\beta_j) = \frac{R\beta_j - \sqrt{a}}{g_0\beta_j^2 - g_2}, \quad B(\beta_j) = \frac{R\beta_j - \sqrt{D}}{g_0\beta_j^2 - g_2}.$$

До сих пор радиус капли  $R$  полагался постоянной величиной, что допустимо только в случае, когда масса капли значительно больше массы вещества, испарившегося с поверхности капли за время рассматриваемого процесса [7].

Как известно [3], скорость нестационарного изменения радиуса капли определяется формулой

$$\frac{dR}{dt} = \frac{Dnm_1}{\rho_i} \cdot \frac{\partial c_1}{\partial r} \Big|_{r=R}. \quad (24)$$

Определив выражение для  $(\partial c_1 / \partial r)_{r=R}$ , исходя из соотношения (21), по формуле (24) получаем следующее выражение для скорости изменения радиуса капли

$$\left( \frac{dR}{dt} \right)^{(\sigma)} = \frac{\varepsilon Dnm_1 \kappa}{\rho_i R^2} \left[ \frac{1}{g_2} + \frac{1}{\sqrt{Da}} \sum_{j=1}^2 C(\beta_j) \varphi(\beta_j, t) \right], \quad (25)$$

где

$$C(\beta_j) = \frac{R^2 \beta_j^2 - R(\sqrt{D} + \sqrt{a}) \beta_j + \sqrt{Da}}{g_0 \beta_j^2 - g_2}.$$

Отметим, что символом  $(\sigma)$  в формуле (25) отмечен факт учета поверхностного натяжения поверхности капли.

Заметим, что правая часть соотношения (25) прямо пропорциональна величине  $\varepsilon$ , знак которой при отрицательности или положительности соответственно определяет процесс испарения или конденсационного роста капли. Для определенности речи мы будем говорить о первом из этих процессов.

Важно подчеркнуть, что в этой формуле (25) переменная  $t$  может принимать значения от 0 до  $+\infty$ , то есть эта формула справедлива для всех значений времени. Недостатком этой формулы является ее громоздкость для проведения численных расчетов. Поэтому представляет интерес рассмотрение асимптотических приближений выражения (25) при больших и малых значениях времени  $t$ , которые намного проще этого выражения.

### АНАЛИЗ ПРЕДЕЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ ДЛЯ СКОРОСТИ ИЗМЕНЕНИЯ РАДИУСА КАПЛИ

Преобразуем правую часть выражения (25) к виду

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^{(\sigma)} = \frac{\varepsilon n m_1}{\rho_i} \left[ \frac{D\kappa}{D\kappa + \alpha \nu R(\kappa + \kappa_{q\sigma})} - \frac{g_0}{\sqrt{D_\delta}} \left( \beta_j - \frac{\sqrt{D} + \sqrt{a}}{R} + \frac{\sqrt{Da}}{R^2 \beta_j} \right) \varphi(\beta_j, t) \right]. \quad (26)$$

Так как  $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi(\beta_j, t) = 1$ ,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(\beta_j, t) = 0$ , то по формуле (26) находим предельные выражения

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)_0^{(\sigma)} = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{dR}{dt}\right)^{(\sigma)} = \frac{\varepsilon n m_1}{\rho_i}, \quad (27)$$

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)_\infty^{(\sigma)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{dR}{dt}\right)^{(\sigma)} = \frac{\varepsilon n m_1}{\rho_i} \cdot \frac{D\kappa}{D\kappa + \alpha \nu R(\kappa + \kappa_{q\sigma})}, \quad (28)$$

которые соответственно определяют начальное и конечное (предельные) значения скорости изменения радиуса аэрозольной капли.

Полученные выражения (27) и (28) показывают, какие из учитываемых факторов являются существенными при очень малых и достаточно больших значениях времени соответственно. Например, коэффициент диффузии не входит в выражение (27).

Правые части соотношений (27) и (28) являются функциями от  $R$  — радиуса капли, окончательный вид которых определяется также выражениями  $\varepsilon$ ,  $\kappa_{q\sigma}$ , зависящими от  $R$ .

Рассматривая правую часть соотношения (27) как функцию от  $R$ , можно сказать, что чем больше кривизна сферической поверхности испаряющейся капли, тем выше абсолютная величина начальной скорости изменения ее радиуса.

Если рассматривать отношение  $(dR/dt)_\infty^{(\sigma)} / (dR/dt)_0^{(\sigma)}$  как функцию от  $R$ , то можно сделать вывод о том, что это отношение с увеличением кривизны поверхности сферической капли возрастает до некоторой постоянной величины, причем

$$(dR/dt)_\infty^{(\sigma)} < |(dR/dt)_0^{(\sigma)}|. \quad (29)$$

Если же не учитывать силы поверхностного натяжения сферической капли, то вместо формул (27) и (28) получим более простые формулы

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)_0^{(0)} = \frac{\bar{\varepsilon} n m_1}{\rho_i}, \quad (30)$$

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)_\infty^{(0)} = \frac{\bar{\varepsilon} n m_1}{\rho_i} \cdot \frac{D\kappa}{D\kappa + \alpha\nu R(\kappa + \bar{\kappa}_{q\sigma})}, \quad (31)$$

в которых  $\bar{\varepsilon} = \alpha\nu(c_{10} - \bar{c}_{1s0})$ ,  $\bar{\kappa}_{q\sigma} = \bar{c}_{1s0}k_q\gamma$ .

Отметим, что правые части формул (27), (28), (31) зависят от радиуса капли  $R$ , только в формуле (30) правая часть не зависит от  $R$ .

Для пар выражений (30) и (31) очевидно, имеет место соотношение аналогичное (29), кроме того справедливо равенство

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left(\frac{dR}{dt}\right)_\infty^{(0)} = \left(\frac{dR}{dt}\right)_0^{(0)},$$

которому нет аналога для пар выражений (27), (28).

Проведем численный анализ выражений для скорости изменения радиуса капли (27), (28), (30) и (31). С этой целью будем рассматривать процесс нестационарного испарения ( $\varepsilon < 0$ ,  $\bar{\varepsilon} < 0$ ) одиночных капель воды в воздушную среду 50% влажности при двух значениях температуры 293 K, 323 K, когда давление среды  $P = 0,1$  МПа. При этом, основываясь на данных, приведенных в книге [9] для коэффициента испарения воды, полагаем, что  $\alpha = 0,034$  при  $T = 293$  K и  $\alpha = 0,026$  при  $T = 323$  K. Заметим, что указанные значения  $\alpha$  согласуются с результатами исследований зависимости коэффициента конденсации (испарения) некоторых веществ от температуры, проведенных методом молекулярной динамики [10]. Для всех других физических величин используем значения, приведенные в справочнике [11].

Рассмотрим полученные таким образом таблицы 1 и 2 численных значений.

Прежде всего, следует обратить внимание на существенную зависимость скорости изменения радиуса испаряющейся капли от температуры, при которой происходит ее испарение, как при расчете по формулам, учитывающим, так и не учитывающим силы поверхностного натяжения капли. Абсолютные величины как начальной, так и конечной скоростей изменения радиуса испаряющейся капли выше для более высоких температур. Причем, для выбранных нами значениях температуры имеем превосходство начальных скоростей в 3,8 — 3,9 раза, а конечных скоростей — превосходство в 2,0 — 3,9 раза (меньшее превосходство имеет место для более крупных капель).

Можно заметить, что численные значения первых двух строк табл. 1 мало отличаются от соответствующих значений табл. 2. Следовательно, для водяных капель достаточно больших размеров нет необходимости учета сил поверхностного натяжения.

Таблица 1.

$T, K$	293	323
--------	-----	-----

$R, м$	$10^4 \left( \frac{dR}{dt} \right)_0^{(\sigma)}$	$10^4 \left( \frac{dR}{dt} \right)_\infty^{(\sigma)}$	$10^4 \left( \frac{dR}{dt} \right)_0^{(\sigma)}$	$10^4 \left( \frac{dR}{dt} \right)_\infty^{(\sigma)}$
$10^{-5}$	-0,4326	-0,05538	-1,6802	-0,1104
$10^{-6}$	-0,4336	-0,2578	-1,6829	-0,6944
$10^{-7}$	-0,4419	-0,4135	-1,7108	-1,4963
$10^{-8}$	-0,5260	-0,5222	-1,9891	-1,9589

Таблица 2.

$T, K$	293		323	
$R, м$	$10^4 \left( \frac{dR}{dt} \right)_0^{(0)}$	$10^4 \left( \frac{dR}{dt} \right)_\infty^{(0)}$	$10^4 \left( \frac{dR}{dt} \right)_0^{(0)}$	$10^4 \left( \frac{dR}{dt} \right)_\infty^{(0)}$
$10^{-5}$	-0,4325	-0,05537	-1,6795	-0,1103
$10^{-6}$	-0,4325	-0,2573	-1,6795	-0,6933
$10^{-7}$	-0,4325	-0,4049	-1,6795	-1,4704
$10^{-8}$	-0,4325	-0,4296	-1,6795	-1,6560

Численные значения в табл. 1 и 2, полученные по выражениям (27), (28) и (31), показывают, что абсолютные величины скоростей изменения радиуса капли имеют большие значения для капель с большей кривизной сферической поверхности. Следовательно, при вычислении времени полного испарения достаточно крупных капель можно пренебречь временем испарения более мелких капель.

Представляет интерес анализ таблицы 3 численных значений, полученной рассмотрением отношений  $(dR/dt)_0^{(\sigma)} / (dR/dt)_\infty^{(\sigma)}$ ,  $(dR/dt)_0^{(0)} / (dR/dt)_\infty^{(0)}$  при указанных значениях температуры для испаряющихся капель различных радиусов.

Таблица 3.

$T, K$	293		323	
$R, м$	$\frac{(dR/dt)_0^{(\sigma)}}{(dR/dt)_\infty^{(\sigma)}}$	$\frac{(dR/dt)_0^{(0)}}{(dR/dt)_\infty^{(0)}}$	$\frac{(dR/dt)_0^{(\sigma)}}{(dR/dt)_\infty^{(\sigma)}}$	$\frac{(dR/dt)_0^{(0)}}{(dR/dt)_\infty^{(0)}}$
$10^{-5}$	7,811	7,811	15,219	15,227
$10^{-6}$	1,682	1,681	2,424	2,422
$10^{-7}$	1,069	1,068	1,143	1,142
$10^{-8}$	1,007	1,007	1,015	1,014

Численные значения первых двух строк табл.3 показывают, что имеют место большие расхождения между начальной и конечной скоростями изменения радиуса капли, а из последних двух строк таблицы видим незначительные расхождения между этими скоростями. Следовательно, для вычисления времени полного испарения достаточно мелких капель воды, радиусы которых находятся в пределах от  $10^{-7}$  до  $10^{-8}$ ,

можно использовать формулу (27), являющуюся довольно простой, содержащую при этом коэффициент поверхностного натяжения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Яламов Ю.И., Кузьмин М.К. Влияние коэффициента испарения на нестационарный процесс изменения размера аэрозольной капли // Докл. АН. 2005. — Т. 402, № 41. — С. 484 – 487.
2. Maxwell J.C. Collected Scientific Papers. — Cambridge: 1890, 11, 625.
3. Фукс Н.А. Испарение и рост капель в газообразной среде. — М.: Изд-во АН СССР, 1958. — 91 с.
4. Хирс Д., Паунд Г. Испарение и конденсация. — М.: Металлургия, 1966. — 196 с.
5. Яламов Ю.И., Кузьмин М.К. Об учете изменения температуры внутри аэрозольной капли при ее нестационарном испарении // Вестник МГОУ. Труды Центра фундаментальных научных иссл. Физика, 2007. — № 1. — С. 5 — 18.
6. Сивухин Д.В. Термодинамика и молекулярная физика. — М.: ФИЗМАТЛИТ; Изд-во МФТИ, 2003. — 276 с.
7. Nix N., Fukuta N. Nonsteady-state theory of droplet growth // J. Chem. Phys., 1972. — V. 58, N 4. — P.p. 1735—1740.
8. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования — М.: Наука, 1971. — 288 с.
9. Амелин А.Г. Теоретические основы образования тумана при конденсации пара. — М.: Химия, 1972. — 304 с.
10. Zunjing W., Min C., Zengyuan G. // Xi'an jiaotong daxue xuebao / J. Xi'an Jiaotong Univ., 2001, 35, N 11, 1126—1130.
11. Варгафтик Н.Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. — М.: Наука, 1972. — 720 с.

### THE THEORY OF NONSTATIONARY EVAPORATION OF SPHERICAL AEROSOL DROP IN VIEW OF DEPENDENCE OF SATURATED STEAM PRESSURE FROM CURVATURE OF ITS SURFACE

**M. Kuzmin**

*Moscow State Regional University  
10a, Radio st., Moscow, 105005, Russia*

*Abstract.* The theory of nonstationary evaporation of spherical aerosol fixed drop is constructed paying attention to accounting of the surface tension coefficient of drop agent. Detailed analysis of limiting formulas obtained from the formula of rate of drop radius change, which is valid for all values of time, was carried out.

*Keywords:* nonstationary evaporation, saturated steam pressure, surface tension coefficient, limiting formulas, rate of drop radius change.

УДК.533.72.

## ВИХРЕВЫЕ ДВИЖЕНИЯ ГАЗОПОДОБНОГО ОБЛАКА С НАЧАЛЬНОЙ СКОРОСТЬЮ В ОДНОРОДНОМ ПОСТОЯННОМ ПОЛЕ

А.Н. Голов, М.Н. Зудина

Московский государственный областной университет  
105005, Москва, ул. Радио, 10а

*Аннотация.* Рассмотрено выражение плотности потока вещества в нестационарной газоподобной системе многих частиц с учётом непотенциального слагаемого. Получены аналитические выражения компонент вихря плотности потока вещества. Дан анализ и графическое представление полученных формул.

*Ключевые слова:* кинетика, вихревые движения, газоподобная среда.

1. Целью данной работы является теоретическое исследование закономерностей вихревых движений в нестационарных газоподобных системах большого числа частиц  $N$  во внешнем поле. Подобные явления широко распространены в природе, а также происходят в ряде технических процессов. Ранее эти явления преимущественно рассматривались в феноменологической теории сплошных сред [1, 3, 7], преимущественно для несжимаемых (а иногда и невязких) жидкостей. Теоретическое рассмотрение вихревых течений в газах также, обычно, исходит из уравнений динамики сплошной среды, не углубляясь в её молекулярную структуру ([2] и др.). Поэтому остаётся актуальным исследование таких движений на основе микроскопической теории. Предлагаемая ниже модель применима, как к облакам атомарно-молекулярного состава, так и к системам более крупных дисперсных частиц. Эта модель распространяется на нестационарные системы с переменной плотностью.

Для анализа вихревых движений была выбрана микроскопическая модель однородных бесструктурных слабо взаимодействующих частиц массой  $m$  в однородном постоянном поле, рассмотренная в [4, 5, 6]. Система принята неограниченной (т. е., физически достаточно большой, чтобы не рассматривать граничные условия), и свободно расширяется в вакууме.  $OZ$  выбрано в направлении действия силы поля  $f$ , которая принята одной и той же для всех частиц. Здесь мы рассмотрим более общий случай, чем в работе [6], а именно, допускаем начальное движение сгустка частиц, образующих данную систему с постоянной скоростью  $v_0$ , направленной по той же оси  $Z$ . Понятно, что такой же эффект будет иметь место при наблюдении облака в движущейся СО.

2. Известно ([8, 10] и др.), что, зная статистическую функцию распределения системы, можем описать её, в рамках кинетической теории, квазинепрерывной средой с некоторой эффективной плотностью. Для случая, когда частицы находятся в вакууме и выполняются принятые условия, функция распределения имеет вид:

$$F = A \cdot \exp \left\{ -k_1 \cdot p_{1\alpha} p_{1\alpha} + k_3 \cdot p_{1\alpha} q_{1\alpha} - b \cdot q_{1\alpha} q_{1\alpha} - k_1 \cdot p_{13} p_{13} - k_2 \cdot p_{13} + k_3 \cdot p_{13} q_{13} - k_4 \cdot q_{13} - b \cdot q_{13} q_{13} - k_6 \right\} \quad (1)$$

где:

$$\begin{aligned}
 k_1 &= au; \\
 k_2 &= (2am + ct)v_0 - 2aft - \frac{3cft^2}{2m} - \frac{bft^3}{m^2}; \\
 k_3 &= c + \frac{2bt}{m}; \\
 k_4 &= c(ft - mv_0) = \frac{bft^2}{m}; \\
 k_6 &= amv_0(mv_0 - 2ft) + ft^2\left(af - \frac{cv_0}{2}\right) + \frac{f^2t^3}{2m}\left(c + \frac{bt}{2m}\right); \\
 u &= 1 + \frac{ct}{am} + \frac{bt^2}{am^2}; \\
 w &= 1 - \frac{c^2}{4ab}; \\
 A &= \left(\sqrt{abw} / \pi\right)^{3N}.
 \end{aligned} \tag{2}$$

$a, b, c$  – константы задачи (вводимые из соображений размерности), прочие обозначения – стандартные. В (1) и далее приняты условные обозначения тензорного анализа: повторяющиеся значки означают сумму по всем их значениям, причём латинские значки нумеруют частицы, а греческие – координаты одной частицы. В (1)  $\alpha = 1, 2$ , а третья координата (и импульс) выделена особо.

Формула (1) получена строго из решения уравнения Лиувилля – Гиббса методом интегралов однородного лиувиллиана [4]. Она является обобщением формул, приведённых в [4] и [5] на случай с начальным движением системы. Используя (1), найдём эффективную плотность среды, которая зависит от времени и имеет вид:

$$\rho = Nm \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{3/2} \cdot \exp\left\{-\beta \cdot \left[x^2 + y^2 + \left(z + v_0t - \frac{ft^2}{2m}\right)^2\right]\right\}, \tag{3}$$

где  $x, y, z$  – координаты в физическом пространстве,  $t$  – время, и обозначено:  $\beta = bw/u$ .

Векторы  $\mathbf{f}$  и  $\mathbf{v}_0$  направлены вдоль  $\mathbf{OZ}$ , но могут иметь разный знак. Формула (3) есть обобщение соответствующей формулы, использованной в [7].

Используя выражение (3), найдём компоненты вектора плотности потока вещества:

$$j_x = \frac{k_3x}{2amu} \rho; \tag{4}$$

$$j_y = \frac{k_3y}{2amu} \rho; \tag{5}$$

$$j_z = \frac{(k_3 z - k_2)}{2amu} \rho. \quad (6)$$

Выражения  $k_2$ ,  $k_3$  и  $u$  – см. в (2). Отличие (4) – (6) от соответствующих формул, использованных в [6] и [5] в выражениях плотности  $\rho$  и величины  $k_2$ . Легко усмотреть, что выражения (4) и (5) пропорциональны градиенту плотности (3) (с зависящим от времени коэффициентом). При  $f = 0$  и  $v_0 = 0$  к такому же виду приводится и  $j_z$ . Т. о., в отсутствие внешнего поля и начального движения системы вектор  $\mathbf{j}$  – потенциальный, и поле течений среды – безвихревое. При наличии внешнего поля и начальной скорости выражение (6) содержит дополнительно конвективный член, пропорциональный плотности и не являющийся потенциальным. Вследствие этого и возникают вихревые течения среды. Заметим, однако, что в сходных задачах наличия поля или начального движения недостаточно для образования вихрей. Например, в модели с одномерным движением, когда плотность не зависит от координат, ортогональных оси движения, вихри не возникают. Т. о., для образования вихрей необходимо: 1) наличие конвективного члена в векторе  $\mathbf{j}$ , и 2) неоднородность плотности с зависимостью от не менее, чем двух координат. Из анализа выражений  $k_2$  и  $k_3$  видим, что, когда  $f$  и  $v_0$  не малы, в некоторые промежутки времени и в некоторых областях пространства конвективный поток может превосходить потенциальный. Указанные потоки могут быть коллинеарны или антиколлинеарны. Заметим, что в гидродинамике и газодинамике обычно пренебрегают неконвективной (диффузионной) частью потока вещества. В начале же развития феноменологической теории переноса рассматривались только потоки, пропорциональные градиентам. Включение в теорию переноса конвективных потоков произошло уже на следующем этапе [9], и исходило из макроскопического рассмотрения среды в движущейся системе отсчёта.

3. Находя частные производные по координатам от (4) – (6), по стандартным формулам получим проекции вихря плотности потока вещества:

$$\mathbf{rot}_x \mathbf{j} = \frac{\beta y \cdot \left[ -k_3 (v_0 t - ft^2 / 2m) - k_2 \right]}{amu} \rho; \quad (7)$$

$$\mathbf{rot}_y \mathbf{j} = -\frac{\beta x \cdot \left[ -k_3 (v_0 t - ft^2 / 2m) - k_2 \right]}{amu} \rho; \quad (8)$$

$$\mathbf{rot}_z \mathbf{j} = 0. \quad (9)$$

В частном случае, при  $v_0 = 0$ , формулы (7) и (8) переходят в соответствующие формулы, приведённые в [6] (плотность также приводится к выражению, использованному в [6]). При  $f = 0$  имеем (при соответствующем выражении плотности):

$$\mathbf{rot}_x \mathbf{j} = -2\beta y \cdot \rho v_0; \quad (10)$$

$$\text{rot}_y \mathbf{j} = 2\beta x \cdot \rho v_0; \quad (11)$$

Отсюда видно, что вихревое движение в системе может возникать и в отсутствии поля вследствие ненулевой скорости  $v_0$ . В общем случае вихри создаются как внешним полем, так и начальным движением системы. В зависимости от направления векторов  $\mathbf{f}$  и  $\mathbf{v}_0$  вихреобразование либо усиливается, либо частично компенсируется. Т. о., для данной модели теория описывает возникновение, развитие и затухание вихревых движений среды в ходе её эволюции.

Из найденных выражений следует: 1) вихрь плотности потока. лежит в плоскости, ортогональной направлению поля и начальной скорости; 2) его проекции – нечётные функции координат  $x$ ,  $y$  и равны нулю на  $OZ$  при любом  $t$ ; 3) в момент включения поля ( $t = 0$ ) вихревые течения создаются только начальным движением; 4) при  $t \rightarrow \infty$  вихревые течения асимптотически аннулируются (совместно с предыдущим это приводит к существованию максимума вихревых движений при конечном  $t > 0$ ); 5) При  $x, y \rightarrow \pm \infty$  вихревые течения также асимптотически аннулируются (совместно со свойством 2 это означает наличие экстремума вихря при конечных  $x, y > 0$ ); 6) в отсутствие внешнего поля и начального движения все проекции  $\text{rot } \mathbf{j}$  равны нулю, вихри не возникают; 7) экстремум вихря смещается по  $OZ$ , причём при разнонаправленных векторах  $\mathbf{f}$  и  $\mathbf{v}_0$  направление смещения изменяется. Асимптотическое затухание вихревых движений со временем есть результат убывания плотности (3) вследствие расширения системы.

4. На рис. 1 и 2 дано графическое представление пространственно-временных зависимостей вихревого движения системы. При построении графиков из соображений наилучшей наглядности были приняты следующие значения констант и параметров задачи, входящих в формулы (7) и (8): ( $a=1, b=1, c=1, m=1, f=2, N=1, v_0=1/2, w=3/4$ ). Такой выбор не изменяет основных закономерностей хода кривых, определяя лишь выбор масштабов и способ обезразмеривания аргументов. Направление  $v_0$  принято противоположно  $f$ . Для примера приведены графики компоненты (8), для компоненты (7) они имеют сходный вид. В приводимых графиках фиксированы значения ( $x=1, y=1$ ) (в безразмерных переменных), т. к. зависимость от этих переменных достаточно прозрачна из вида функции. Представлены профиль компоненты вихря по выделенной оси  $Z$  в разные моменты времени и зависимость её от времени в точках с разными значениями координаты  $z$ .

Из рис. 1 видно, что вихрь, «расплываясь» в пространстве вследствие расширения системы, одновременно дрейфует вследствие начальной скорости и действующей силы.

5. Более наглядное представление о пространственно-временных зависимостях вихревого движения системы даёт модуль вихря. Для графического представления удобно взять квадрат модуля, образуемый из выражений (7) и (8).

$$R^2 = \frac{\beta^2 (x^2 + y^2) \cdot \left[ -k_3 (v_0 t - ft^2 / 2m) - k_2 \right]^2}{(atu)^2} \rho^2. \quad (12)$$

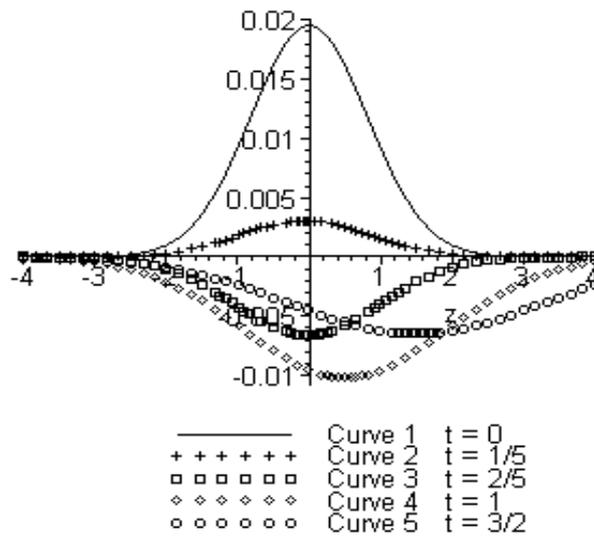


Рис. 1. Профиль  $\text{rot}_{y,j}$  по  $OZ$  в указанные моменты безразмерного времени.

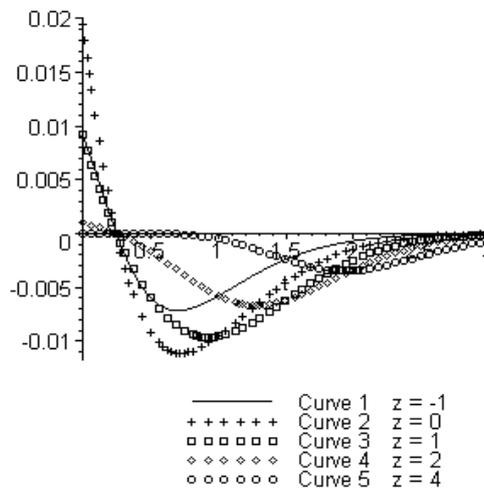
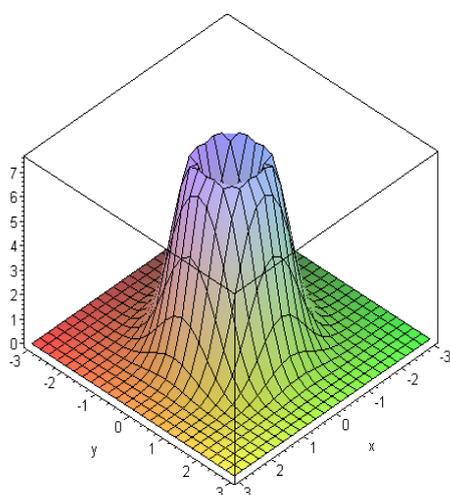
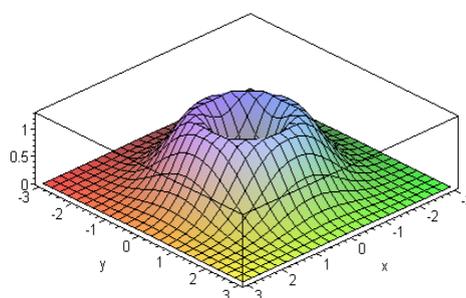


Рис. 2. Зависимость  $Y$ -проекции вихря от времени при различном  $z$ .

На рис. 3 приведены 3-мерные графики этой функции, симметричной относительно  $OZ$ . Значения констант и параметров приняты, как и выше (кроме  $f=1$  и  $v_0=1$ ). Изображён профиль функции в плоскости  $XY$  при фиксированном  $z = 0$  в два момента: 3а) –  $t = 0$ , 3б) –  $t = 1/2$ . Значения функции для удобства изображения умножены на 1000. Из сравнения 3а) и 3б) видно, что вихрь имеет осесимметричную структуру с нулевым минимумом на  $OZ$  и, с течением времени, расплывается при понижении максимума. При противоположно направленных векторах  $\mathbf{v}_0$  и  $\mathbf{f}$  амплитуда максимума может изменяться со временем немонотонно (см. рис. 1).



а)  $t=0$ .



б)  $t=1/2$

Рис. 3. Типичные 3-мерные графики квадрата модуля вихря ( $R^2 \cdot 10^3$ ).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Алексеевко, С.В., Куйбин, П.А., Окулов, В.Л.* Введение в теорию концентрированных вихрей/С.В. Алексеевко, П.А. Куйбин, В.Л. Окулов. – Новосибирск: Институт теплофизики СО РАН, 2003 г. - 504 с.
2. *Белоцерковский, О.М., Андрущенко, В.А., Шевелев, Ю.Д.* Динамика пространственных вихревых течений в неоднородной атмосфере/О.М.Белоцерковский, В.А. Андрущенко, Ю.Д. Шевелев. РФФИ. 2000 г.
3. *Вилля, Г.* Теория вихрей/Г. Вилля. - Л. – М.: ОНТИ, 1936 г. - 266 с.
4. *Голов, А.Н., Яламов, Ю.И.* Статистическая и кинетическая теория нестационарных газоподобных и газодисперсных систем/ А.Н. Голов, Ю.И. Яламов. - М.: изд. МГОУ. 2011, - 230 с.
5. *Голов, А.Н., Харитонов, А.П.* Эволюция газоподобной системы многих дисперсных частиц в потенциальном поле/А. Н. Голов, А. П. Харитонов//Вестник МГОУ. Серия «Физика-математика», - 2008, - №3–4, - с. 12 – 21.
6. *Голов, А.Н., Зудина, М.Н.* Кинетика вихревых движений газоподобной среды в постоянном потенциальном поле/ А.Н. Голов, М.Н. Зудина.//Вестник МГОУ. Серия «Физика-Математика», - 2012. - № 1, - с. 39 – 43.
7. *Гольдштик, М.А./М.А. Гольдштик.* Вихревые потоки. – Новосибирск: Наука, 1981, - 366 с.
8. *Гуров, К.П.* Основания кинетической теории/К.П. Гуров. - М.: «Наука», 1966.- 351 с.
9. *Де Грот, С.Р. и Мазур, П.* Неравновесная термодинамика/ С. Р. Де Грот, П. Мазур. - М.: «Мир», 1964. - 510 с.
10. *Куни, Ф.М.* Статистическая физика и термодинамика/Ф. М. Куни. - М.:«Наука», 1981- 351с.

THE VORTEX MOTION OF THE GAS-LIKED CLOUDS  
WITH A INITIAL VELOCITY IN THE CONSTANT HOMOGENEOUS FIELD

A. Golov, M. Zudina

Moscow State Regional University  
10a, Radio st., Moscow, 105005, Russia

*Abstract.* The formula of the density of the matter flow in the non-stationary gas-liked system of many particles with regard for the non-potential term is considered. The analytical formulae of the components of the curl of the density of the matter flow are obtained. The analysis and graphical presentation of the obtained formulae are performed.

*Key words:* kinetics, vortex motion, gas-liked medium.

УДК 533.9.01

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ ВЕРХНЕЙ ИОНОСФЕРЫ ЗЕМЛИ  
С УЧЕТОМ ДАННЫХ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ

А.С. Рабинович, С.Ю. Абакумов

Московский государственный университет приборостроения и информатики  
107996, Москва, ул. Стромынка, 20

*Аннотация.* В статье проводится исследование областей E и F ионосферы Земли. Ввиду того, что хорошо известная модель стандартной атмосферы становится неудовлетворительной на высотах, превышающих 150 км от поверхности Земли, предлагается новая модель верхней ионосферы. В ней учитываются сильные электрические поля в ионосфере Земли, которые описываются в рамках нелинейного обобщения уравнений Максвелла на основе теории Янга-Миллса с  $SU(2)$  симметрией. Показывается, что предложенная нелинейная модель находится в хорошем согласии с экспериментальными данными для областей E и F ионосферы.

*Ключевые слова:* области E и F ионосферы Земли, равновесное состояние ионосферы, нелинейная модель верхней ионосферы, сильные электрические поля, распределение плотности в верхней ионосфере.

Целью данной работы является описание распределения плотности в слоях E и F ионосферы. Нижняя граница слоя E располагается на высоте 90 – 100 км, а верхняя на высоте 130 – 140 км. Выше этого слоя располагается слой F, простирающийся до высот более 1000 км [1]. Для исследования рассматриваемых слоев применим математическую модель, описывающую их равновесное состояние под действием давления и гравитационных и электрических сил [2]:

$$\frac{dp}{dr} + g \left( \frac{r_0}{r} \right)^2 \rho - \Theta E = 0, \quad (1)$$

где  $p = p(r)$  - давление в атмосфере на расстоянии  $r$  от центра Земли,  $r_0$  - радиус Земли,  $\rho = \rho(r)$  - плотность атмосферы в зависимости от радиуса  $r$  при заданной широте и долготе,  $g$  - ускорение свободного падения около поверхности Земли,  $E = E(r)$  - напряженность электрического поля на расстоянии  $r$  от центра Земли и  $\Theta = \Theta(r)$  - плотность заряда, которая может быть определена по формуле:

$$\Theta = \chi\rho, \quad (2)$$

где  $\chi$  - коэффициент пропорциональности между плотностью заряда и плотностью массы. Отметим, что упомянутый коэффициент имеет собственное значение для каждого слоя.

Давление определяется из уравнения Клапейрона:

$$p = \frac{R_0 T}{\mu} \rho, \quad (3)$$

где  $R_0$  - универсальная газовая постоянная,  $T$  - температура в градусах Кельвина и  $\mu$  - молярная масса.

Следует отметить, что уравнение (1) без последнего слагаемого, учитывающего действие электрической силы, представляет собой широко распространенную модель стандартной атмосферы, которая описывает ее равновесное состояние под действием давления и гравитационной силы.

Численные расчеты, проведенные на основании модели стандартной атмосферы, показали, что она достаточно хорошо описывает атмосферу Земли только до высот около 150 км. На больших высотах наблюдаются существенные отличия от эмпирических данных.

Ионосфера характеризуется высокой степенью ионизации. Как показали ее исследования, она представляет собой квазинейтральную плазму, в которой число отрицательно заряженных частиц лишь примерно равно числу частиц положительно [3]. Поэтому электрические поля в сильно ионизированной ионосфере должны играть существенную роль. На это также указывают проводившиеся ракетные исследования атмосферы, которые выявили существование в ней сильных электрических полей [4]. Ниже приведем еще ряд как косвенных, так и прямых свидетельств, подтверждающих существование в ионосфере Земли больших объемных зарядов и значительных электрических полей.

1) Измерения напряженности электростатических полей вблизи поверхности Земли показывают, что как значения этой напряженности, усредненной за значительные интервалы времени, так и мгновенные ее значения могут испытывать заметные изменения во время полярных сияний. Данный факт подтверждает предположение, что в высоких слоях атмосферы существуют большие разности потенциалов и большие объемные заряды. Кроме того, все основные теории полярных сияний (Биркеланда и Штермера, Чепмэна, Ферраро и Мартина, Альфвена) либо постулируют, либо предполагают существование сильных электрических полей в ионосфере [5].

2) Согласно результатам бортовых измерений, космические аппараты, движущиеся как на низких, так и на высоких околоземных орбитах, могут заряжаться до потенциа-

лов порядка 1 – 10 кВ [6]. При размере космического аппарата порядка нескольких метров, находим, что внутри него напряженность электрического поля может достигать величин порядка нескольких кВ/м.

С другой стороны, космический аппарат должен заряжаться до тех пор, пока его собственное электрическое поле не станет равным по величине и противоположным по направлению внешнему электрическому полю около него. Поэтому из результатов бортовых измерений в космических аппаратах следует, что электрическое поле в атмосфере может достигать величин порядка нескольких кВ/м.

3) Об этом же говорят и исследования, проведенные на орбитальной станции «Мир», располагавшейся в области F ионосферы на высоте около 390 км. Они показывали, что на данной высоте напряженность электрического поля может достигать значений до 10 кВ/м [7].

Согласно классической формуле электростатики, напряженность электрического поля  $E = E(r)$ , создаваемого сферической областью радиуса  $r$  с зарядом  $q(r)$ , распределенного с плотностью  $\Theta(r)$ , равна:

$$E = \frac{q(r)}{r^2}, \quad q(r) = 4\pi \int_0^r r^2 \Theta(r) dr. \quad (4)$$

Расчеты, проведенные для верхней ионосферы с применением формулы (4), показали существенное расхождение с эмпирическими данными. Причиной этого расхождения может являться линейность классического уравнения электрического поля, которая может нарушаться при достаточно больших зарядах.

Принимая во внимание, что в ионосфере скапливаются большие электрические заряды, мы будем применять более сложную, нелинейную модель электрического поля. Модель такого типа была предложена в работе [8] на основе точного стационарного сферически-симметричного решения уравнений Янга-Миллса с  $SU(2)$  симметрией, которое затем было обобщено в работе [9] на нестационарный случай и подробно исследовано в монографии [10]. Как известно, уравнения Янга-Миллса с  $SU(2)$  симметрией играют важную роль в описании электрослабых взаимодействий и представляют собой нелинейное обобщение уравнений электромагнитной теории Максвелла [11]. В найденном решении уравнений Янга-Миллса электрическое поле  $E$  на расстоянии  $r$  от центра заряженного сферического источника описывается формулой:

$$E = \frac{q_{\text{эфф}}(r)}{r^2}, \quad (5)$$

где  $q_{\text{эфф}}(r)$  - эффективный заряд сферической области радиуса  $r$ , включающий не только заряды источника, но и заряженные кванты поля Янга-Миллса. Он определяется по формуле

$$q_{\text{эфф}}(r) = K \sin\left(\frac{q(r)}{K}\right), \quad (6)$$

где  $q(r)$  - заряд источника поля внутри сферической области радиуса  $r$ , вычисляемый по формуле (4), и  $K$  - некоторая константа. В статье [8] и монографии [10] рассмотрено

применение формул (5) и (6) к объяснению явления шаровой молнии и получена связь между константой  $K$  и максимальным диаметром шаровой молнии. Выбор для него известного из наблюдений значения  $\sim 100$  см приводит к следующей оценке константы  $K$ :

$$K \sim 10^7 \text{ Кл} = 3 \cdot 10^{16} \text{ ед. СГСЭ}. \quad (7)$$

Как видно из (6), при  $|q/K| \ll 1$  величины  $q_{\text{эфф}}$  и  $q$  будут практически совпадающими. Поэтому находим из оценки (7), что формула (6) может отклоняться от классического выражения для электрического поля только при весьма больших значениях заряда  $q$ . Отметим также, что, как следует из формул (5)-(7), напряженность электрического поля в ионосфере может достигать величин порядка нескольких кВ/м. Этот вывод как раз находится в согласии с экспериментальными данными, приведенными в работах [6, 7], о которых говорилось выше.

Принимая во внимание выражения (4), (5) и (6), запишем уравнение (1) при  $r_1 \leq r \leq r_2$ , где  $r_1$  и  $r_2$  определяют границы одного из рассматриваемых слоев E или F ионосферы, в виде

$$\frac{dp(r)}{dr} + g \left( \frac{r_0}{r} \right)^2 \rho(r) - \frac{\chi \rho(r) K}{r^2} \sin \left( \frac{4\pi\chi}{K} \int_{r_1}^r \rho(r) r^2 dr \right) = 0. \quad (8)$$

Нижняя и верхняя границы  $r_1$  и  $r_2$  каждого из слоев E и F ионосферы должны отвечать следующим условиям:

$$\delta(r_1) = 0, \quad \delta(r_2) = 2\pi, \quad (9)$$

где  $\delta(r)$  - аргумент синуса в уравнении (8). Тогда над поверхностью  $r = r_1$  электрическая сила, действующая на ионы, будет направлена вверх, а под ней – вниз, что разделяет слой E или F и располагающийся ниже него слой. Аналогично, при выполнении (9) под поверхностью  $r = r_2$  на ионы будут действовать электрическая сила, направленная вниз, а над ней – вверх, что разделяет слой E или F и располагающийся выше него слой.

Введем функцию:

$$u(r) = \int_{r_1}^r \rho(r) r^2 dr, \quad (10)$$

и параметр:

$$a = \frac{R_0 T}{\mu}, \quad (11)$$

и выполним переход от переменной  $r$  к безразмерной переменной  $x$ :

$$x = r / r_0 \quad (12)$$

Ввиду формул (10), (11) и (12), уравнение (8) принимает вид:

$$u''(x) - \frac{u'(x)}{x} \left[ 2 - \frac{x^2 a'(x) + gr_0}{xa(x)} + \frac{\chi K}{r_0 xa(x)} \sin\left(\frac{4\pi\chi}{K} u(x)\right) \right] = 0. \quad (13)$$

Используя формулы (10) и (12), запишем для функции  $u(x)$  условия на нижней границе рассматриваемого сферического слоя  $r = r_1$ :

$$\begin{aligned} u(x_1) &= 0, \quad x_1 = r_1 / r_0, \\ u'(x_1) &= r_0^3 \rho(r_1) x_1^2. \end{aligned} \quad (14)$$

Для решения нелинейного дифференциального уравнения второго порядка (13) с условиями (14) и описания распределения плотности в областях E и F ионосферы был разработан комплекс компьютерных программ. В его состав вошли метод Рунге-Кутты четвертого порядка и блок нелинейного программирования для определения параметров модели  $K$ ,  $\chi$ ,  $r_1$ , обеспечивающих наилучшее согласие с эмпирическими данными.

Следует отметить, что значения функции  $a(x)$ , входящей в уравнение (13), определялись по эмпирическим значениям температуры и молярной массы внутри ионосферы. Данные по молярной массе были получены из эмпирической модели MSIS-E-90, а данные по температуре – из эмпирической модели IRI-2007, созданных на основе многолетних исследований атмосферы космическими аппаратами в рамках программ НАСА [12]

При помощи разработанного комплекса программ была проведена большая серия расчетов для 1 июня 2000 г., 12.0 час. (UTC), географической широты  $55^\circ$  и географической долготы  $45^\circ$ . Они позволили определить значение параметра  $\chi$  для области E, равное 17.8 ед. СГСЭ, и для области F, равное 750 ед. СГСЭ. Полученное значение параметра  $K$  равно  $2.8 \cdot 10^{16}$  ед. СГСЭ. Следует заметить, что вычисленное значение параметра  $K$  соответствует его оценке (7). Было также установлено, что для рассмотренного случая нижняя граница области E находится на высоте 90 км, а верхняя граница на высоте 124 км. Область F для рассмотренного случая имеет нижнюю границу на высоте 124 км.

В табл. 1 и на рис. 1 приведено распределение плотности массы ионосферы по высоте над поверхностью Земли по предложенной нелинейной модели, модели стандартной атмосферы и эмпирической модели MSIS-E-90 [12].

Необходимо отметить, что значения, полученные по предложенной нелинейной модели, находятся в хорошем согласии с экспериментальными данными, что может служить важным аргументом в ее пользу.

Таблица 1

Распределение плотности ( $\text{г/см}^3$ ) в верхней ионосфере по различным моделям

Высота, км	Плотность по экспериментальным данным	Плотность по предложенной нелинейной модели	Плотность по модели стандартной атмосферы
90	$3.293 \cdot 10^{-9}$	$3.211 \cdot 10^{-9}$	$3.346 \cdot 10^{-9}$
100	$3.735 \cdot 10^{-10}$	$3.566 \cdot 10^{-10}$	$3.719 \cdot 10^{-10}$
120	$1.798 \cdot 10^{-11}$	$1.756 \cdot 10^{-11}$	$1.828 \cdot 10^{-11}$
140	$3.299 \cdot 10^{-12}$	$3.290 \cdot 10^{-12}$	$3.332 \cdot 10^{-12}$
160	$1.220 \cdot 10^{-12}$	$1.225 \cdot 10^{-12}$	$1.194 \cdot 10^{-12}$
180	$5.869 \cdot 10^{-13}$	$5.897 \cdot 10^{-13}$	$5.600 \cdot 10^{-13}$
200	$3.232 \cdot 10^{-13}$	$3.241 \cdot 10^{-13}$	$3.018 \cdot 10^{-13}$
220	$1.929 \cdot 10^{-13}$	$1.931 \cdot 10^{-13}$	$1.769 \cdot 10^{-13}$
240	$1.215 \cdot 10^{-13}$	$1.213 \cdot 10^{-13}$	$1.096 \cdot 10^{-13}$
260	$7.941 \cdot 10^{-14}$	$7.925 \cdot 10^{-14}$	$7.074 \cdot 10^{-14}$
280	$5.343 \cdot 10^{-14}$	$5.330 \cdot 10^{-14}$	$4.703 \cdot 10^{-14}$
300	$3.683 \cdot 10^{-14}$	$3.668 \cdot 10^{-14}$	$3.203 \cdot 10^{-14}$
320	$2.583 \cdot 10^{-14}$	$2.573 \cdot 10^{-14}$	$2.225 \cdot 10^{-14}$
340	$1.840 \cdot 10^{-14}$	$1.835 \cdot 10^{-14}$	$1.571 \cdot 10^{-14}$
360	$1.330 \cdot 10^{-14}$	$1.326 \cdot 10^{-14}$	$1.125 \cdot 10^{-14}$
380	$9.721 \cdot 10^{-15}$	$9.700 \cdot 10^{-15}$	$8.160 \cdot 10^{-15}$
400	$7.177 \cdot 10^{-15}$	$7.170 \cdot 10^{-15}$	$5.981 \cdot 10^{-15}$
450	$3.497 \cdot 10^{-15}$	$3.495 \cdot 10^{-15}$	$2.857 \cdot 10^{-15}$
500	$1.776 \cdot 10^{-15}$	$1.777 \cdot 10^{-15}$	$1.424 \cdot 10^{-15}$
550	$9.304 \cdot 10^{-16}$	$9.312 \cdot 10^{-16}$	$7.330 \cdot 10^{-16}$
600	$4.990 \cdot 10^{-16}$	$4.999 \cdot 10^{-16}$	$3.865 \cdot 10^{-16}$
650	$2.730 \cdot 10^{-16}$	$2.736 \cdot 10^{-16}$	$2.080 \cdot 10^{-16}$
700	$1.520 \cdot 10^{-16}$	$1.524 \cdot 10^{-16}$	$1.140 \cdot 10^{-16}$
750	$8.608 \cdot 10^{-17}$	$8.641 \cdot 10^{-17}$	$6.364 \cdot 10^{-17}$
800	$4.965 \cdot 10^{-17}$	$4.988 \cdot 10^{-17}$	$3.621 \cdot 10^{-17}$
850	$2.924 \cdot 10^{-17}$	$2.939 \cdot 10^{-17}$	$2.105 \cdot 10^{-17}$
900	$1.764 \cdot 10^{-17}$	$1.774 \cdot 10^{-17}$	$1.256 \cdot 10^{-17}$
950	$1.095 \cdot 10^{-17}$	$1.102 \cdot 10^{-17}$	$7.720 \cdot 10^{-18}$
1000	$7.032 \cdot 10^{-18}$	$7.079 \cdot 10^{-18}$	$4.914 \cdot 10^{-18}$

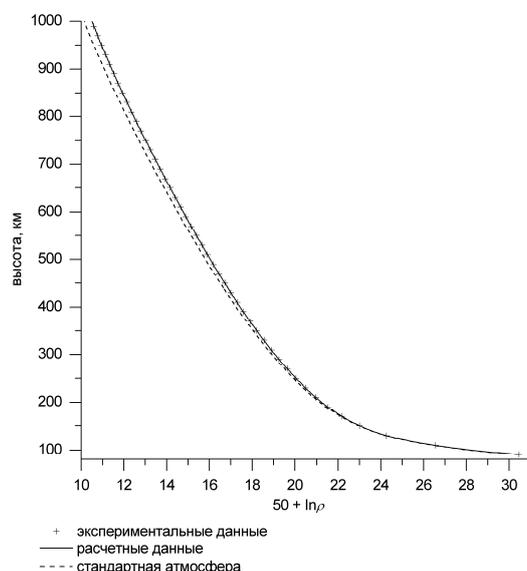


Рис. 1. Распределение плотности ( $\text{г/см}^3$ ) в верхней ионосфере по различным моделям

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Брюнелли, Б.Е., Намгаладзе, А.А. Физика ионосферы. – М.: Наука, 1988.
2. Седов, Л.И. Механика сплошной среды, т. 1. – СПб.: Лань, 2004.
3. Ерухимов, Л.М. Ионосфера Земли как космическая плазменная лаборатория // Соросовский образовательный журнал. – 1998. - № 4. - С. 71-77.
4. Rakov, V.A., Uman, M.A. Lightning: Physics and Effects // Cambridge: Cambridge University Press, 2003.
5. Имянитов, И.М. Измерение электростатических полей в верхних слоях земной атмосферы // Успехи физических наук. – 1957. - Т. 63. - С. 267-282.
6. Вавилов, С.А., Колесников, Е.К. Некоторые вопросы динамики сильно заряженных тел в космическом пространстве // Динамические процессы в газах и твердых телах и газах. Физическая механика, вып. 4, под ред. Б.В. Филиппова. – Ленинград: ЛГУ, 1980, С. 168-180.
7. Пушкин, Н.М., Медников, Б.А., Машков, А.С., Лапишинова, О.В. Измерение фоновых электростатических и переменных электрических полей на внешней поверхности модуля «Квант» орбитальной станции «Мир» // Космические исследования. – 1994. - Т. 32. - № 3. - С. 140-142.
8. Рабинович, А.С. О нелинейной электродинамике с уравнениями Янга-Миллса // Вестник РУДН, сер. Физика. – 2005. - № 13. - С. 68-77.
9. Rabinowitch, A.S. Yang-Mills Fields of Nonstationary Spherical Objects with Big Charges // Russian Journal of Mathematical Physics. – 2008. - Vol. 15. - No. 3. - P. 389-394.
10. Rabinowitch, A.S. Nonlinear Physical Fields and Anomalous Phenomena. – New York: Nova Science Publishers, 2009.

11. Райдер, Л. Квантовая теория поля. – М.: Мир, 1987.
12. <http://omniweb.gsfc.nasa.gov/vitmo/>.

## INVESTIGATION OF A NONLINEAR MODEL OF THE EARTH UPPER IONOSPHERE WITH REGARD TO DATA DERIVED FROM ARTIFICIAL SATELLITES

**A. Rabinowitch, S. Abakumov**

*Moscow State University of Instrument Engineering and Computer Science  
20, Stromynka, Moscow, 107996, Russia*

*Abstract.* In the paper an investigation of the regions E and F of the Earth ionosphere is carried out. Since the well-known model of the standard atmosphere becomes unsatisfactory when altitudes are higher than 150 km, a new model of the upper ionosphere is proposed. In it strong electric fields in the Earth atmosphere are taken into account and described by means of the Yang-Mills nonlinear generalization with  $SU(2)$  symmetry of the Maxwell equations. It is shown that the proposed nonlinear model is in good agreement with experimental data for the ionospheric regions E and F.

*Key words:* regions E and F of the Earth ionosphere, equilibrium state of the ionosphere, nonlinear model of the upper ionosphere, strong electric fields, density distribution in the upper ionosphere.

УДК 533.9.01

## НЕЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ АТМОСФЕРЫ ЗЕМЛИ НА ВЫСОТАХ ОТ 1000 ДО 2000 КМ

**С.Ю. Абакумов**

*Московский государственный университет приборостроения и информатики  
107996, Москва, ул. Стромынка, 20*

*Аннотация.* В статье проводится моделирование атмосферы Земли в области высот от 1000 до 2000 км, учитывающее влияние сильного электрического поля в рамках нелинейной теории Янга-Миллса с  $SU(2)$  симметрией. Применение такого подхода для слоев E и F ионосферы в области высот от 90 до 1000 км показало хорошее согласие с эмпирическими данными. В то же время модель стандартной атмосферы на высотах свыше 150 км дает существенные отклонения от эмпирических данных, увеличивающиеся с высотой.

*Ключевые слова:* сильные электрические поля, плотность атмосферы, нелинейная модель атмосферы Земли, теория Янга-Миллса.

В работе [5] на основании нелинейной математической модели, представляющей собой обобщение модели стандартной атмосферы [6], проведено исследование ионосферы Земли до высоты 1000 км.

Результаты, полученные по этой модели, находятся в согласии с эмпирическими данными, в то время как данные, полученные по стандартной модели, на высотах свыше 150 км становятся неудовлетворительными. Будем применять предложенную в [5]

модель для моделирования рассматриваемой области атмосферы на высотах от 1000 до 2000 км, описывающую ее равновесное состояние под действием внутреннего давления, силы тяжести и электрической силы. Она описывается уравнением:

$$\frac{dp}{dr} + g \left( \frac{r_0}{r} \right)^2 \rho - \Theta E = 0, \quad (1)$$

где  $p = p(r)$  - давление в атмосфере на расстоянии  $r$  от центра Земли,  $r_0$  - радиус Земли,  $\rho = \rho(r)$  - плотность атмосферы в зависимости от радиуса  $r$  при заданной широте и долготе,  $g$  - ускорение свободного падения около поверхности Земли,  $E = E(r)$  - напряженность электрического поля на расстоянии  $r$  от центра Земли и  $\Theta = \Theta(r)$  - плотность заряда, которая может быть определена по формуле:

$$\Theta = \chi \rho, \quad (2)$$

где  $\chi$  - коэффициент пропорциональности между плотностью заряда и плотностью массы.

Давление определяется из уравнения Клапейрона:

$$p = \frac{R_0 T}{\mu} \rho, \quad (3)$$

где  $R_0$  - универсальная газовая постоянная,  $T$  - температура в градусах Кельвина и  $\mu$  - молярная масса.

Исследования ионосферы показали, что она представляет собой квазинейтральную плазму, в которой число частиц заряженных отрицательно лишь примерно равно числу частиц заряженных положительно [2]. Благодаря действию проникающих космических лучей, ультрафиолетового и рентгеновского излучения Солнца, атмосферные газы ионизируются. Это приводит к тому, что на высоте порядка 1000 км концентрация заряженных частиц достигает значительной величины и с ростом высоты продолжает увеличиваться. Поэтому электрические поля в сильно ионизированных областях атмосферы Земли должны играть существенную роль.

Существуют как косвенные, так и прямые свидетельства, подтверждающие существование в атмосфере Земли значительных объемных зарядов и электрических полей. Ряд фактов, подтверждающих сказанное, приведен в статье выдающегося исследователя атмосферного электричества И.М. Имянитова [3].

Важно также отметить, что согласно результатам бортовых измерений, космические аппараты, движущиеся как на низких, так и на высоких околоземных орбитах, могут заряжаться до потенциалов порядка 1 – 10 кВ [1]. При размере космического аппарата порядка нескольких метров, отсюда находим, что внутри него напряженность электрического поля может достигать величин порядка нескольких кВ/м.

С другой стороны, космический аппарат должен заряжаться до тех пор, пока его собственное электрическое поле не станет равным по величине и противоположным по направлению внешнему электрическому полю около него. Поэтому, как отмечалось в работе [5], из результатов бортовых измерений в космических аппаратах следует, что электрическое поле в атмосфере может достигать величин порядка нескольких кВ/м.

Учитывая, что в рассматриваемой области скапливаются большие электрические заряды, будем применять, нелинейную модель электрического поля. Модель такого типа была предложена в работе [4] на основе точного стационарного сферически-симметричного решения уравнений Янга-Миллса с  $SU(2)$  симметрией, которое затем было обобщено в работе [7] на нестационарный случай и подробно исследовано в монографии [8]. В найденном решении уравнений Янга-Миллса электрическое поле  $E$  на расстоянии  $r$  от центра заряженного сферического источника описывается формулой:

$$E = \frac{q_{\text{эфф}}(r)}{r^2}, \quad (4)$$

где  $q_{\text{эфф}}(r)$  - эффективный заряд сферической области радиуса  $r$ , включающий не только заряды источника, но и заряженные кванты поля Янга-Миллса. Он определяется по формуле:

$$q_{\text{эфф}}(r) = K \sin\left(\frac{q(r)}{K}\right), \quad (5)$$

где  $q(r)$  - заряд источника поля внутри сферической области радиуса  $r$ , и  $K$  - некоторая константа.

Принимая во внимание выражения (2), (3), (4) и (5), запишем уравнение (1) при  $r_1 \leq r \leq r_2$ , где  $r_1$  и  $r_2$  - нижняя и верхняя граница рассматриваемой области, в виде:

$$\frac{dp(r)}{dr} + g\left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \rho(r) - \frac{\chi \rho(r) K}{r^2} \sin\left(\frac{4\pi\chi}{K} \int_{r_1}^r \rho(r) r^2 dr\right) = 0. \quad (6)$$

Полученное нелинейное интегро-дифференциальное уравнение (6) содержит два неизвестных параметра: константу  $K$  и коэффициент  $\chi$ . Также для его решения необходимы эмпирические данные о температуре и молярной массе газов в рассматриваемой области.

Неизвестные параметры модели и эмпирические данные, необходимые для проведения расчетов, зависят от географических координат, даты и времени суток. Поэтому выберем конкретный случай, соответствующий 1 июня 2000 г., 12.0 час. (UTC), географической широте  $55^\circ$  и географической долготе  $45^\circ$ .

В работе [5] для рассматриваемого случая проведено исследование областей E и F ионосферы до высоты 1000 км. Принимая во внимание, что константа  $K$  не зависит от высоты, будем использовать для моделирования рассматриваемой области от 1000 до 2000 км найденное в этой работе значение  $2.8 \cdot 10^{16}$  ед. СГСЭ. Результаты, полученные в ней, говорят о том, что область F ионосферы не заканчивается на высоте 1000 км. Следовательно, параметр  $\chi$  будет также равен полученному в [5] значению 750 ед. СГСЭ, так как мы не покидаем данную область ионосферы.

Необходимые для расчетов значения температуры могут быть получены из эмпирической модели ионосферы IRI-2007 [9], позволяющей определить ее значения до высоты 2000 км. По данным этой модели температура, начиная с 500 км, не меняется с ростом высоты, вплоть до 2000 км.

Молярная масса смеси газов определялась как средневзвешенная сумма молярных масс ее компонент. Для вычисления молярной массы необходимо получить концентрации химических элементов, содержащихся в рассматриваемой области. В связи с тем, что надежных экспериментальных сведений о концентрациях химических элементов на высотах выше 1000 км нет, проведем их экстраполяцию. Учитывая, что температура в рассматриваемой области постоянна, предполагаем, что для концентраций химических элементов выполняются классические барометрические формулы. Это означает, что концентрации химических элементов изменяются с высотой по экспоненциальному закону.

На высоте 1000 км основными нейтральными компонентами являются атомы кислорода, водорода и гелия. С увеличением высоты быстро растет относительная концентрация легких газов. Поэтому экстраполяция осуществлялась только для этих трех газов.

При помощи разработанного комплекса программ было осуществлено численное решение нелинейного интегро-дифференциального уравнения (6). Оно, как показано в [5], приводится к нелинейному дифференциальному уравнению второго порядка, и для него был применен метод Рунге-Кутты четвертого порядка. Проведенные расчеты позволили определить зависимость распределения плотности массы от высоты в рассматриваемой области атмосферы Земли по предложенной нелинейной модели. Полученные результаты представлены на рис 1.

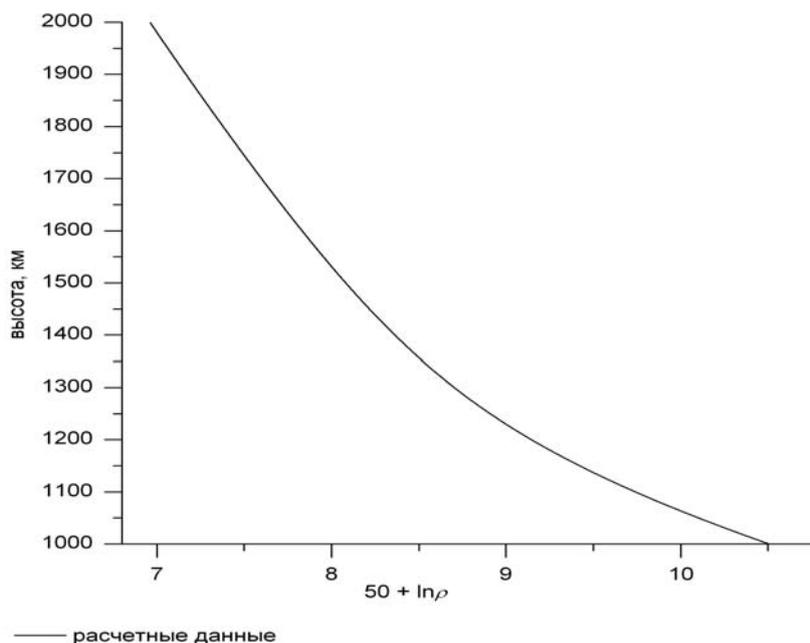


Рис. 1. Распределение плотности ( $\text{г/см}^3$ ) в области высот от 1000 до 2000 км

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Вавилов, С.А., Колесников, Е.К. Некоторые вопросы динамики сильно заряженных

- тел в космическом пространстве // *Динамические процессы в газах и твердых телах и газах. Физическая механика*, вып. 4, под ред. Б.В. Филиппова. – Ленинград: ЛГУ, 1980, С. 168-180.
2. *Ерухимов, Л.М.* Ионосфера Земли как космическая плазменная лаборатория // *Соровский образовательный журнал*. – 1998. - № 4. - С. 71-77.
  3. *Имянитов, И.М.* Измерение электростатических полей в верхних слоях земной атмосферы // *Успехи физических наук*. – 1957. - Т. 63. - С. 267-282.
  4. *Рабинович, А.С.* О нелинейной электродинамике с уравнениями Янга-Миллса // *Вестник РУДН, сер. Физика*. – 2005. - № 13. - С. 68-77.
  5. *Рабинович А.С., Абакумов С.Ю.* Исследование нелинейной модели верхней ионосферы Земли с учетом данных космических аппаратов // *Вестник МГОУ. Сер. «Физика - Математика»*. – 2012. – № 2, С.
  6. *Седов, Л.И.* Механика сплошной среды, т. 1. – СПб.: Лань, 2004.
  7. *Rabinowitch, A.S.* Yang-Mills Fields of Nonstationary Spherical Objects with Big Charges // *Russian Journal of Mathematical Physics*. – 2008. - Vol. 15. - No. 3. - P. 389-394.
  8. *Rabinowitch, A.S.* Nonlinear Physical Fields and Anomalous Phenomena. – New York: Nova Science Publishers, 2009.
  9. Virtual Ionosphere, Thermosphere, Mesosphere Observatory (VITMO) Models and Related Algorithms [Электронный ресурс]. –URL: <http://omniweb.gsfc.nasa.gov/vitmo/> (дата обращения: 25.08.2012).

## **NONLINEAR MODEL OF THE EARTH ATMOSPHERE AT THE ALTITUDES RANGED FROM 1000 TO 2000 KM**

**S. Abakumov**

*Moscow State University of Instrument Engineering and Computer Science  
20, Stromynka, Moscow, 107996, Russia*

*Abstract.* In the paper modeling of the Earth atmosphere at the altitudes ranged from 1000 to 2000 km is carried out, in which strong electric fields are taken into account and considered within the framework of the Yang-Mills theory with  $SU(2)$  symmetry. The application of this method to the ionospheric layers E and F in the region of altitudes ranged from 90 to 1000 km showed good agreement with empirical data. At the same time the standard model of the Earth atmosphere at the altitudes higher than 150 km gives substantial deviations from empirical data, increasing with height.

*Key words:* strong electric fields, atmospheric density, nonlinear model of the Earth atmosphere, Yang-Mills theory.

## КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ

УДК 519.6

### РАЗРАБОТКА ЭФФЕКТИВНЫХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ АЛГОРИТМОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Д.Ю. Тюгин, А.А. Куркин

*Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева  
603950, Нижний Новгород, ул. Минина, 24*

*Аннотация:* В статье рассматривается комплексный подход к задаче повышения производительности вычислений с применением параллельных технологий. Показано применение современных инструментов для распараллеливания, поиска ошибок и «узких» мест в алгоритмах на примере задачи моделирования внутренних гравитационных волн в замкнутых бассейнах. Разработан и реализован параллельный алгоритм расчета коэффициента захвата внутренних волн. Проведена оценка его эффективности.

*Ключевые слова:* параллельные вычисления, численные методы, внутренние волны в океане.

При исследовании таких крупномасштабных явлений как генерация и распространение внутренних волн в океане большую роль играет численное моделирование. Использование данных натурных измерений и математических моделей в совокупности с мощными вычислительными системами позволило исследовать подобные гидрофизические процессы. Тем не менее, масштабность таких процессов требует высокопроизводительных вычислений. Особенно это важно при реализации программно-аналитических комплексов для получения экспресс-оценок тех или иных параметров исследуемых процессов. Для подобных оценок необходимо иметь возможность быстро получить результаты моделирования по заданным параметрам. Одним из методов решения подобных задач является применение параллельных технологий.

Авторами был разработан многоцелевой программный комплекс IGWResearch [1 – 3] для исследования распространения и трансформации внутренних гравитационных волн, позволяющий также рассчитывать локализацию энергии данного типа волн в замкнутых бассейнах. Такие расчеты позволяют делать экспресс-оценки акваторий и выделять безопасные, с точки зрения волнового воздействия, области. Тем не менее, производительность комплекса была недостаточной и время вычислений на сетках данных с высоким разрешением доходило до нескольких недель.

Современные средства автоматического распараллеливания ещё не вышли на достаточный уровень, при котором не требуется участие человека в разработке параллельного алгоритма. С другой стороны уже существуют средства поддержки цикла распараллеливания исходного кода, например, Intel Parallel Studio XE 2013. Данный набор программ позволяет провести полный анализ от поиска места в коде для распараллеливания до анализа полученной производительности, что существенно сокращает время и затраты на разработку.

**Математическая модель.** Рассмотрим одну из математических моделей лежащую в основе программного комплекса [1]. Рефракционная модель позволяет описать распространения волн в слабо неоднородном океане в рамках лучевой теории [4 – 7]. Уравнения, описывающие распространение монохроматической волны с произвольной частотой, имеют вид [7 – 9]:

$$\frac{d\mathbf{R}}{ds} = \frac{c^2}{\omega} \mathbf{k}, \quad \frac{d\mathbf{k}}{ds} = -(\nabla c) |\mathbf{k}|, \quad (1)$$

где  $\mathbf{R} = \{x, y\}$  координаты радиус вектора точки на луче;  $c = c(x, y)$  – фазовая скорость внутренних волн;  $\omega = ck$  – частота длинных волн;  $\mathbf{k} = \{k_x, k_y\}$  – волновой вектор,  $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$  – модуль волнового вектора;  $s$  – время на луче;  $\nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\}$  – дифференциальный оператор.

Решение системы дифференциальных уравнений (1) выполнено методом Рунге-Кутты 5-го порядка с модификацией Мерсона. Внешние условия задаются матрицей распределения фазовой скорости, рассчитанной в рамках слабонелинейной теории на основе международных атласов гидрологических параметров WOA [10], GDEM [11] и модельных данных RCO [12]. Результатом расчета являются траектории лучей.

На основе данных траекторий выполняется построение карты распределения энергии внутренних гравитационных волн. Для этого вводится понятие локального коэффициента захвата. Из каждого узла сетки данных фазовой скорости выпускается 200 лучей (дальнейшее увеличение числа лучей не вносит значительного влияния на конечный результат), при достижении лучами областей с малыми значениями фазовой скорости расчет прекращается. По координатам конечных точек на лучах определяется ближайший узел сетки. Число конечных точек в каждом узле сетки суммируется в результирующую матрицу. Коэффициент захвата определяется формулой (2)

$$K_{ij} = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M C_{ij} n_{ij}}{R \cdot N} \cdot 100\%, \quad (2)$$

где  $K_{ij}$  – величина коэффициента захвата для точки  $(i, j)$  исходной сетки,  $C_{ij}$  – значение фазовой скорости в точке,  $n_{ij}$  – число конечных точек лучей в ячейке сетки точки  $(i, j)$ ,  $R$  – общее число лучей,  $N$  – общее число точек сетки

**Последовательный алгоритм.** Последовательный алгоритм расчета коэффициента захвата (2) представлен на рис. 1.

Загружаются исходные данные в виде матрицы фазовой скорости с шагом в 1/15 и 1/30 градуса по широте и долготе соответственно. Она представляет собой сетку данных. Для каждой узловой точки этой сетки моделируется распространение волны. Выбирается число лучей для представления волны (в данном случае 200), задаются координаты исходной точки (`Refraction2::setPoint(x,y)`) и матрица значений фазовой скорости  $c(x,y)$ , задается направление луча, выполняется решение системы уравнений (1) методом Рунге-Кутты для первого луча (`RefRaySolver::init(1)`), затем для второго и т.д. Данные траекторий для текущей точки сохраняются в результирующий контейнер.

Проводится шаг алгоритма для следующей точки. После расчета всех точек коэффициент захвата вычисляется на основе полученных траекторий по формуле (2).

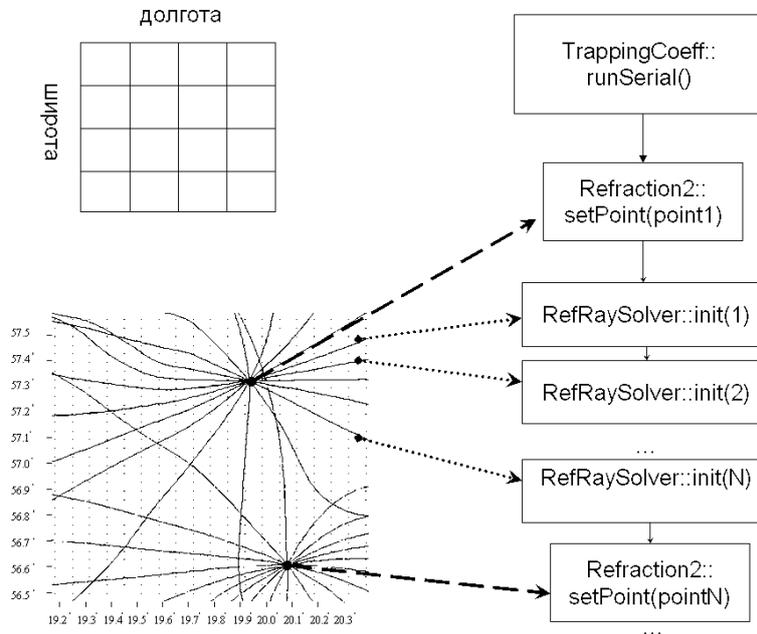


Рис. 1. Схема последовательного расчета коэффициента захвата (2)

Как видно из алгоритма, расчет каждого луча в каждой точке независим и может быть проведен отдельно. Большое число точек и лучей требует длительного времени расчета, и данная схема имеет большой потенциал для распараллеливания. Стоит отметить, что вычисление одного луча не является слишком длительной операцией, поэтому параллелизация по точкам предполагается более эффективной.

Для поддержки процесса параллелизации кода в Intel® Parallel Studio XE 2013 имеются все необходимые инструменты, которые позволяют существенно снизить временные и человеческие ресурсы на поиск мест распараллеливания, оценки эффективности, а также поиск и анализ узких, с точки зрения производительности, мест в коде.

**Поиск области кода для параллелизации.** Для поиска места распараллеливания использовался программный продукт Intel® Advisor XE. Данный профилировщик позволяет построить распределение времени, затраченного на выполнение отдельных участков кода, а также подсказать, на что стоит обратить внимание при поиске мест параллелизации.

На рис. 2 представлен результат профилировки программного комплекса IGWResearch при выполнении расчета коэффициента захвата.

Древовидное представление позволяет наглядно проанализировать время выполнения различных участков кода. По результатам профилировки Intel® Advisor XE предоставляет подсказку: место кода, где параллелизация даст наиболее эффективный результат. В данном случае это место соответствует функции TrappingCoeff::runSerial(), реализующей расчет волны для каждой географической точки.

Function Call Sites and Loops	Total Time %	Total Time	Self Time	Source Location
[-] Total	100.0%	116.7622s	0s	
[-] _RtlUserThreadStart	100.0%	116.7622s	0s	
[-] _RtlUserThreadStart	100.0%	116.7622s	0s	
[-] BaseThreadInitThunk	100.0%	116.7622s	0s	
[-] _endthreadex	97.8%	114.1726s	0s	threadex.c:292
[-] _endthreadex	97.8%	114.1726s	0s	threadex.c:314
[-] QThread::setPriority	97.8%	114.1726s	0s	
[-] TrappingCoeff::run	97.8%	114.1726s	0s	trappingcoeff.cpp:180
[-] TrappingCoeff::runSerial [loop]	97.8%	114.1417s	0s	trappingcoeff.cpp:119
[-] TrappingCoeff::runSerial	97.4%	113.6890s	0s	trappingcoeff.cpp:127
[-] Refraction2::run	97.4%	113.6890s	0s	refraction2.cpp:177
[-] Refraction2::calcRays [loop]	97.4%	113.6890s	0s	refraction2.cpp:100
[-] Refraction2::calcRays [loop]	97.4%	113.6890s	0s	refraction2.cpp:105
[-] Refraction2::calcRays	96.8%	112.9876s	0s	refraction2.cpp:107
[-] RefRaySolver::makeStep	85.5%	99.7751s	0s	refraysolver.cpp:286
[-] RungeKutt5::process [loop]	84.9%	99.1198s	0s	rungekutt5.cpp:61
[-] RungeKutt5::process	77.2%	90.1676s	0s	rungekutt5.cpp:97
[-] RefRaySolver::f	26.5%	30.8879s	0s	refraysolver.cpp:176
[-] RefRaySolver::f	26.3%	30.7309s	0s	refraysolver.cpp:177
[-] RefRaySolver::f	17.2%	20.1230s	0s	refraysolver.cpp:170

Рис. 2. Результаты профилировки программой Intel® Advisor XE

**Параллельный алгоритм.** На основе области кода для параллелизации была составлена схема параллельного алгоритма. Данная схема предполагает, что расчеты точек будут проводиться параллельно, (рис. 3).

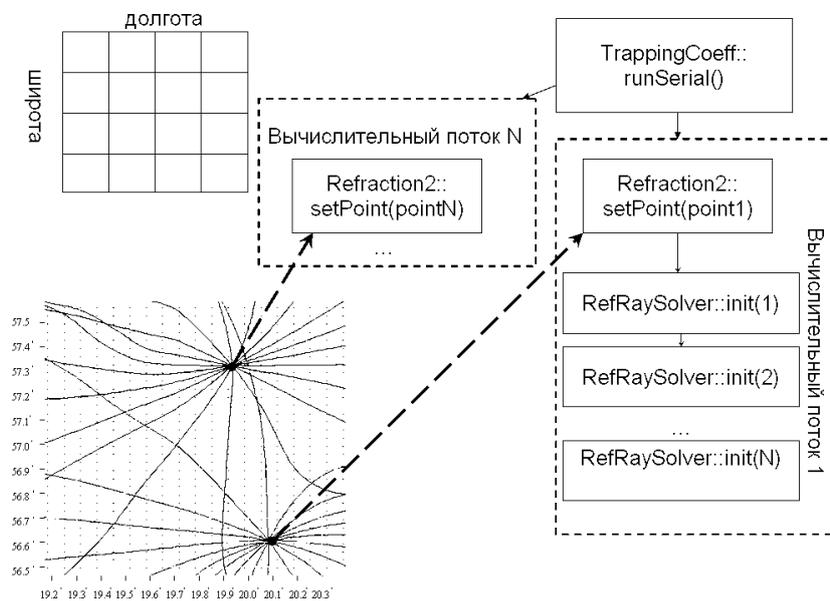


Рис. 3. Схема параллельного алгоритма

Следующий этап – вставка псевдоинструкций (аннотаций) параллелизации (см. приложение), этот этап позволил посмотреть, как поведет себя программа с точки зрения производительности если её распараллелить в обозначенных местах. Таким образом, не затрачивая время на значительную модификацию кода, можно оценить

какой прирост производительности будет получен, и при необходимости изменить место распараллеливания.

Для данной оценки Intel® Advisor XE имеет модель предсказания. При профилировке разработанного алгоритма она показала ускорение в восемь раз на восьми ядрах, что является фактически близким к идеальному, рис. 4

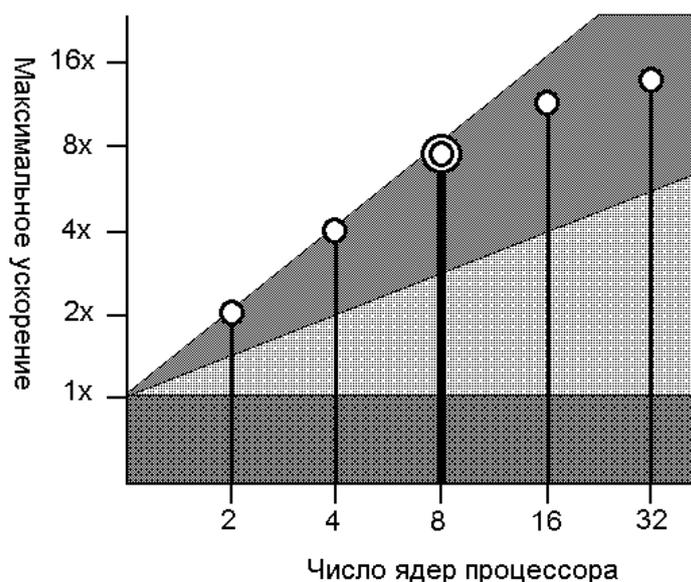


Рис. 4. Модель предсказания эффективности параллельного алгоритма

Также модель предсказания позволяет ответить на вопрос: что будет если использовать разные библиотеки для параллелизации (Intel® TBB, Intel® Cilk, Intel® OpenMP) или различное число ядер. Необходимо учитывать, что результаты модели носят приближенный характер, тем не менее, ошибочную схему можно сразу обнаружить на данном этапе.

Поиск ошибок памяти и потоков. После внесения параллельных мест, в программе могут появиться неочевидные ошибки, такие как гонки данных. Такие ошибки сложно обнаружить без соответствующих инструментов, и следствием таких ошибок могут стать неверные результаты расчетов. Для поиска ошибок в Intel® Advisor XE есть тип анализа проверка на корректность.

Проверка показала наличие ошибок при сборе данных. В данном случае при сохранении результатов траектории каждого луча происходит подсчет количества конечных точек лучей, общее количество сохраняется в матрице предварительных результатов, на основе которых происходит построение коэффициента захвата. Для устранения ошибки был введен объект мьютекс для синхронизации потоков (см. приложение). На данном этапе он также может быть создан с помощью аннотаций. Для реализации параллельной версии (см. приложение) был выбран набор библиотек Intel® Threading Building Block (ТВВ [13]). Данный инструмент также входит в Intel® Parallel Studio XE 2013.

Для проверки правильности работы параллельных алгоритмов и поиска возможных ошибок был применен продукт Intel® Inspector XE. Проверка на корректность Intel®

Advisor XE работает только с аннотациями, таким образом, после перевода исходного кода с псевдоинструкций на использование конкретной библиотеки для распараллеливания, требуется дополнительная проверка. Можно сразу воспользоваться Intel® Inspector XE, но с другой стороны Intel® Advisor XE позволяет проверить корректность ещё на этапе проектирования параллельного кода.

Помимо ошибок работы с потоками Intel® Inspector XE позволяет также обнаружить ошибки работы с памятью. Например, утечки памяти или выход за границы массива и т.д. В случае, когда расчет выполняется очень долго, утечка памяти может проявить себя спустя значительное время, в системе закончится свободная память и расчет не сможет быть продолжен. Если рассматривать большие задачи, когда вычисления могут длиться несколько дней, время фактически будет потеряно, в случае с арендой кластера это уже не только временные, но и финансовые потери.

На рис. 5 показан результат профилировки программой Intel® Inspector XE (анализ памяти).

Problems							Filters	Sort
ID		Problem	Sources	Modules	Object Size	State		
P3	⊗	Memory leak	tools.cpp	IGWResearch.exe	34832	New	<b>Severity</b>	
P4	⊗	Memory leak	tools.cpp	IGWResearch.exe	3117464	New	Error	20 item(s)
P5	⊗	Memory leak	tools.cpp	IGWResearch.exe	34832	New	<b>Problem</b>	
P6	⊗	Memory leak	tools.cpp	IGWResearch.exe	24939712	New	Memory leak	20 item(s)
P11	⊗	Memory leak	rungekutt5.cpp	IGWResearch.exe	320	New	<b>Source</b>	
P12	⊗	Memory leak	rungekutt5.cpp	IGWResearch.exe	320	New	rungekutt5.cpp	16 item(s)
P13	⊗	Memory leak	rungekutt5.cpp	IGWResearch.exe	320	New	tools.cpp	4 item(s)
P14	⊗	Memory leak	rungekutt5.cpp	IGWResearch.exe	320	New	<b>Module</b>	
P15	⊗	Memory leak	rungekutt5.cpp	IGWResearch.exe	320	New	IGWResearch.exe	20 item(s)
P16	⊗	Memory leak	rungekutt5.cpp	IGWResearch.exe	320	New	<b>State</b>	
P17	⊗	Memory leak	rungekutt5.cpp	IGWResearch.exe	320	New	New	20 item(s)
P18	⊗	Memory leak	rungekutt5.cpp	IGWResearch.exe	320	New	<b>Suppressed</b>	
P19	⊗	Memory leak	rungekutt5.cpp	IGWResearch.exe	320	New	Not suppressed	20 item(s)
P20	⊗	Memory leak	rungekutt5.cpp	IGWResearch.exe	320	New	<b>Investigated</b>	
P21	⊗	Memory leak	rungekutt5.cpp	IGWResearch.exe	320	New	Not investigated	20 item(s)
P22	⊗	Memory leak	rungekutt5.cpp	IGWResearch.exe	320	New		
P23	⊗	Memory leak	rungekutt5.cpp	IGWResearch.exe	320	New		
P24	⊗	Memory leak	rungekutt5.cpp	IGWResearch.exe	320	New		
P25	⊗	Memory leak	rungekutt5.cpp	IGWResearch.exe	320	New		
P26	⊗	Memory leak	rungekutt5.cpp	IGWResearch.exe	320	New		

Рис. 5. Результаты анализа на ошибки памяти

Всего было обнаружено 20 диагностик с типом утечка памяти. Для того чтобы не разбирать ошибки в прикладных модулях (в данном случае часть ошибок была обнаружена в библиотеке Qt), можно отфильтровать список по названию модуля программы. Все ошибки были исправлены, повторный запуск анализа подтвердил их отсутствие.

Также была найдена гонка данных связанная с отрисовкой результатов и их расчетом. В данном случае ошибка не критична, так как визуализация результатов в процессе расчета носит ознакомительный характер, вследствие того, что коэффициент захвата считается только целиком. Иными словами, точная карта коэффициента захвата может быть получена только после окончания расчета всех точек и нормализации матрицы результатов.

**Анализ достигнутой производительности.** Для анализа результатов были проведены замеры времени выполнения параллельного и последовательного алгоритмов. Замеры проводились на двухпроцессорной машине с процессорами Intel® Xeon® 5570 2.93 ГГц, 16 Гб оперативной памяти, ОС Windows 7.

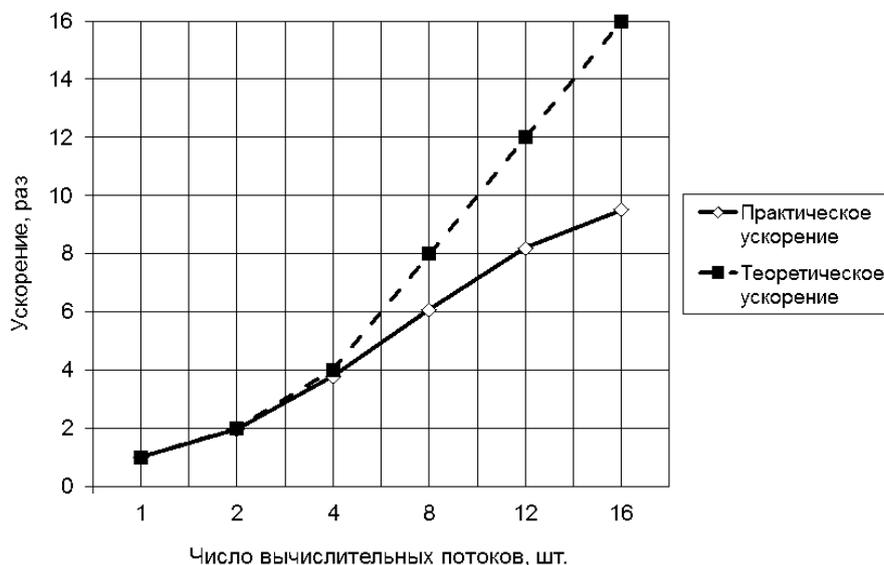


Рис. 6. Зависимость ускорения от числа потоков

На основании замеров был построен график ускорения (отношения времени выполнения последовательного алгоритма к времени выполнения параллельного), (рис.6).

Как видно из рис. 6, реальное ускорение становится меньше предсказанного (в идеальном случае – ускорение прямо пропорционально числу потоков). Причиной тому могут быть дополнительные синхронизации, которые добавляются в параллельную версию, накладные расходы библиотек Intel® TBV и т.п.

Замеры времени работы параллельной и последовательной версий могут показать ускорение, но в случае если оно не совпадает с ожидаемым, без соответствующих инструментов профилировки разобраться практически невозможно. Для того чтобы оценить результаты, распределение нагрузки по потокам и время их синхронизации, а также дальнейшие пути оптимизации служит инструмент Intel® VTune™ Amplifier XE.

Как видно на рис. 7, большую часть времени на 16 ядерной машине работало одновременно 16 потоков.

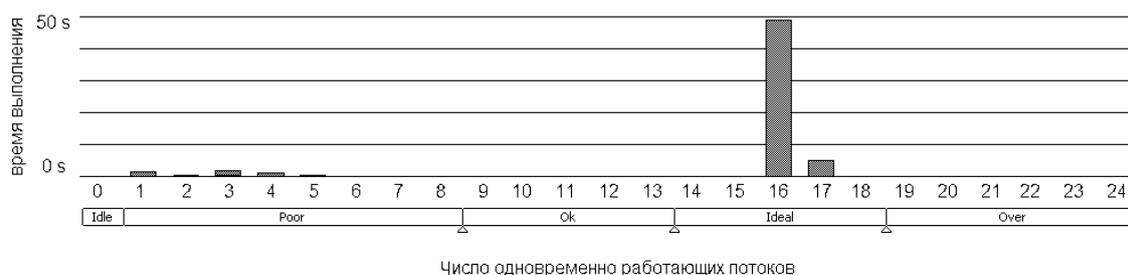


Рис. 7. Распределение по времени числа одновременно работающих потоков

Это хороший результат, показывающий, что почти всегда все потоки заняты работой. Для проверки времени синхронизации была запущена профилировка по анализу синхронизации между потоками, рис. 8.

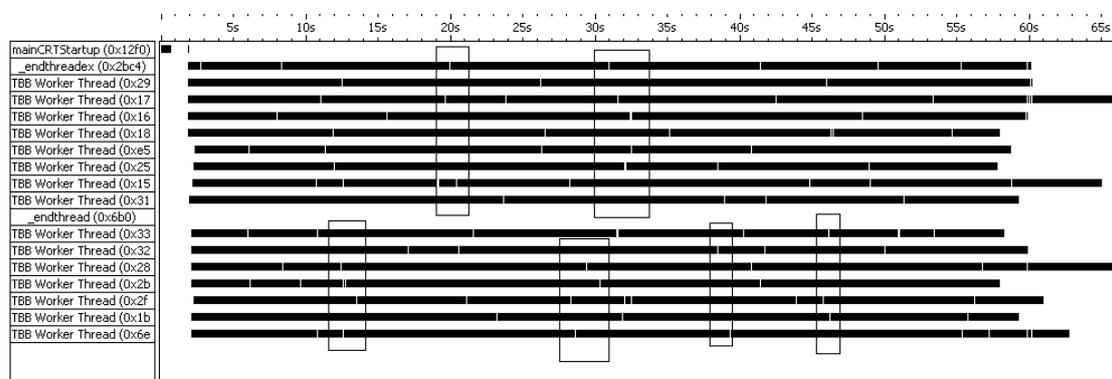


Рис. 8. Анализ времени выполнения и синхронизаций потоков

Как видно из диаграммы, синхронизации встречаются часто, но каждый раз задействованы не все потоки, и время синхронизации минимально. Зато время работы потоков оказалось различным. Таким образом, в самом конце работы часть потоков может закончить расчет раньше других. Такое ограничение вызвано неоднородностью задачи. Расчет каждой волны зависит от распределения фазовой скорости, которое в разных точках может быть различно.

Данный инструмент также полезен при более детальной и низкоуровневой оптимизации кода.

Применение Intel® Parallel Studio XE 2013 показало высокую эффективность при разработке параллельных алгоритмов. Инструменты Intel® Parallel Studio XE 2013 позволяют существенно облегчить и ускорить процесс параллелизации кода. Моделирование параллельной версии алгоритма без значительной модификации кода позволяет оценить ускорение на этапе проектирования параллельного алгоритма. Анализ ошибок позволяет найти неочевидные ошибки и предотвратить получение неверных результатов или нестабильной работы приложения. Без инструментов анализа производительности практически невозможно определить степень корректности параллельной реализации с точки зрения производительности.

### Заключение

Разработанная реализация параллельного алгоритма позволила сократить время расчетов в 10 раз на 16 ядерной машине, что позволит в дальнейшем проводить расчеты на более точных сетках с большим числом данных.

Представленные результаты поисковой научно-исследовательской работы получены в рамках реализации:

1. Гранта «Применение Intel® Parallel Studio 2013 XE Beta в разработке эффективных параллельных алгоритмов ДОГОВОР № NN/R&D/56/2012 от 30/03/2012»
2. ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009 - 2013 годы»

## Приложение

### Вставки псевдоинструкции (аннотации) параллелизации

```
void TrappingCoeff::runSerial()
{
    ...
    //Главный цикл по точкам, trgetSet – массив точек
ANNOTATE_SITE_BEGIN( start_sources );
    for(int i=0;i<targetSet.size();i++)
    {
        ANNOTATE_TASK_BEGIN( wave_propagation );
        double lon=targetSet.at(i).x;           //географическая широта
        double lat=targetSet.at(i).y;          //географическая долгота
        this->startPoint(lon,lat);              //визуализация начальной точки

        Refraction2 ref;                       //Создание объекта для решения системы (1)

        this->initRefObject(ref,lon,lat);        //задание начальных параметров
        ref.run();                              //Расчет

        ...

        this->pointEnd(lon,lat);                //визуализация конечной точки
        ANNOTATE_TASK_END();
        if(exit)
        {
            break;
        }
    }
ANNOTATE_SITE_END();
}
```

### Вставка объекта мьютекс в исходный код

```
void Refraction2::collectEndPoints(double lon, double lat)
{
    if(endPointMap!=NULL)
    {
        ANNOTATE_LOCK_ACQUIRE(endPointMap);
        double v=endPointMap->getNearest(lon,lat);
        v=v+1;
        endPointMap->setNearest(lon,lat,v,true);
        ANNOTATE_LOCK_RELEASE( endPointMap);
    }
}
```

### Реализация параллельной версии алгоритма

```
task_scheduler_init init;
parallel_for(blocked_range<int>(0,targetSet.size()),
ParallelTrappingCoeff(this,targetSet),auto_partitioner());

void ParallelTrappingCoeff::operator()(const blocked_range<int> & r)const
{
    Refraction2 ref;
    for( int i=r.begin(); i!=r.end(); ++i)//часть главного цикла
    {
        double lon=targetSet.at(i).x;
        double lat=targetSet.at(i).y;
        tc->pointStart(lon,lat);
        tc->initRefObject(ref,lon,lat); //задание начальных параметров
        ref.run(); //расчет распространения волны
        ...
        tc->pointEnd(lon,lat);
    }
}

//Сбор траекторий
void Refraction2::collectEndPoints(double lon, double lat)
{
    if(endPointMap!=NULL)
    {
        collectMutex.lock();
        double v=endPointMap->getNearest(lon,lat);
        v=v+1;
        endPointMap->setNearest(lon,lat,v,true);
        collectMutex.unlock();
    }
}
```

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Тюгин Д.Ю., Куркина О.Е., Куркин А.А. Программный комплекс для численного моделирования внутренних гравитационных волн в мировом океане. // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. 2011. № 4(2). С. 32 – 44.
2. Тюгин Д.Ю., Куркина О.Е., Куркин А.А., Гиниятуллин А.Р. Программа для ЭВМ «Моделирование внутренних гравитационных волн в рамках рефракционной модели», Россия, А.С. 2010615884 // Роспатент, 2010.
3. Тюгин Д.Ю., Куркина О.Е., Куркин А.А., Гиниятуллин А.Р. Программа для ЭВМ «Программный комплекс для исследования внутренних гравитационных волн», Россия, А.С. 2011612327 // Роспатент, 2011.

4. *Бреховских Л.М., Годин О.А.* Акустика слоистых сред. – М.: Наука, 1989. 416 с..
5. *Воронович А.Г.* Распространение внутренних и поверхностных гравитационных волн в приближении геометрической оптики // Известия АН СССР. ФАО. 1976. Т. 12. С. 519–523.
6. *Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И.* Геометрическая оптика неоднородных сред. – М.: Наука, 1980. 303 с.
7. *Пелиновский Е.Н.* Нелинейная динамика волн цунами. – Горький: ИПФ АН СССР, 1982.
8. *Ле Блон П., Майсек Л.* Волны в океане. Т. 1, 2. – М.: Мир, 1981.
9. *Broutman D., Rottman J.W., Eckermann D.* Ray methods for internal waves in the atmosphere and ocean // Annual Review of Fluid Mech. 2004. V. 36. P. 233–253.
10. *T.P. Boyer, J.I. Antonov, H.E. Garcia, D.R. Johnson, R.A. Locarnini, A.V. Mishonov, M.T. Pitcher, O.K. Baranova, I.V. Smolyar,* 2006. World Ocean Database 2005. S. Levitus, Ed., NOAA Atlas NESDIS 60, U.S. Government Printing Office, Washington, D.C., 190 pp., DVDs.
11. *Teague W.J., Carron M.J., Hogan P.J.* A Comparison between the Generalized Digital Environmental Model and Levitus Climatologies // J. Geophys. Res. 1990. V. 95. C5. P. 7167 – 7183.
12. *Soomere T., Delpeche T. et. al.* Patterns of current-induced transport in the surface layer of the Gulf of Finland // Boreal Environment Research. 2001. V. 16. P. 49 – 63.
13. Intel(R) Threading Building Blocks Reference Manual // URL: <http://threadingbuildingblocks.org/uploads/81/91/Latest%20Open%20Source%20Documentation/Reference.pdf> (дата обращения 01.07.2012)

## **DEVELOPMENT OF EFFECTIVE PARALLEL ALGORITHMS FOR SOLVING OF PROBLEMS OF NUMERICAL MODELING**

**D. Tyugin, A. Kurkin**

*Alexeev Nizhny Novgorod State Technical University  
24, Minin Street, Nizhny Novgorod, 603950, Russia*

*Abstract:* In this paper complex approach for solving performance problem in computing based on parallel technologies is considered. Demonstrated applying modern tools for parallelization, errors and “bottlenecks” catching in the problem of modeling internal gravity waves in closed basins. Parallel algorithm of trapping coefficient computing is designed and implemented. The algorithm performance is estimated.

*Key words:* parallel computing, numerical methods, internal waves in the ocean.

## ТЕХНОЛОГИИ И МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ

УДК 378.147

### МОБИЛЬНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ В СИСТЕМЕ ПРОФИЛЬНОЙ ПОДГОТОВКИ ШКОЛЬНИКОВ

**А.Э. Кузьмичёв**

*Московский государственный областной университет  
105005, Москва, ул. Радио, 10а*

*Аннотация.* В данной статье рассматриваются тенденции развития обучения мобильному программированию. Описывается курс “Программирование для Windows Phone для школьников”, на примере которого рассмотрены основные аспекты и особенности преподавания мобильного программирования. Озвучены основные темы и краткое содержание курса, целью которого является обучение разработки приложений на мобильной платформе Windows Phone 7, с помощью таких технологий, как Microsoft Silverlight и игровая платформа XNA. Данный курс был разработан автором статьи по гранту корпорации Microsoft. Отдельное внимание уделено перспективам использования данного курса в системе профильного обучения школьников.

*Ключевые слова:* Мобильное программирование, информационно-коммуникационные технологии, Windows Phone 7, Microsoft Silverlight, Microsoft XNA.

Мобильное программирование начало существовать с появлением в нашей жизни программируемых мобильных устройств, ведь многим хотелось расширить возможности своего телефона теми или иными функциями. В виду того, что телефоны стали нашими постоянными спутниками, пользователи хотели бы совместить в них множество возможностей, начиная от использования игр, заканчивая обычным фонариком. Развитие современных технологий и пожелания пользователей подталкивают разработчиков на создание множества приложений для мобильных устройств.

Если говорить о термине “Мобильное программирование”, то однозначное определение слегка размыто, ведь это не просто программирование для мобильных устройств. Программисты, пишущие программы для различных смартфонов, обязаны учитывать особенности этих устройств, а также обладать должными знаниями об операционных системах для мобильных устройств и их тонкостей.

Возможности смартфонов действительно расширяют рамки преподавания программирования. Так, вместо решения стандартных задач, можно использовать множество встроенных в смартфон устройств, таких как акселерометр, видеочамера, фотокамера, GPS-приёмник и многое другое. Всё это намного увеличивает наглядность и эффективность обучения.

Для мобильных устройств было разработано большое количество операционных систем. Эти системы используют для разработки различные языки программирования,

что позволяет выбрать программисту наиболее близкий и удобный ему. Примеры некоторых из них:

- Java для Android и BlackBerry;
- Visual Basic и Visual C++ для Windows CE;
- C/C++ и OPL для Symbian;
- Objective-C для устройств компании Apple;
- C# для Windows Phone 7.

Вопросам использования этих языков посвящено множество исследований и публикаций, среди них [1-4,6,7].

Это лишь несколько из множества учебных пособий по мобильному программированию.

Одной из самых быстроразвивающихся мобильных операционных систем является Windows Phone 7. Она была разработана корпорацией Microsoft в 2010 году. Для неё можно создавать приложения, используя языки программирования C# и Visual Basic. Данная операционная система является полностью новой, с полностью новым интерфейсом «Metro» и — впервые — с интеграцией сервисов Microsoft Xbox Live. Интерфейс «Metro» полностью пересмотрен и визуально похож на интерфейс Zune HD. Microsoft переработала начальный экран, используются «плитки», которые прокручиваются по вертикали и могут служить как обычным ярлыком для приложения, так и ярлыком для контакта, заметки и прочего.

Автором настоящей статьи разработан курс «Программирование для Windows Phone для школьников», в рамках которого изучается новая мобильная операционная система от Microsoft: Windows Phone 7. Данный курс включает в себя следующие темы:

1. «Введение в мобильное программирование». Введение в мобильное программирование, основные аспекты и особенности программирования для мобильных устройств, обзор различных платформ для разработки мобильных приложений, знакомство с C#.
2. «Знакомство с Windows Phone 7». Обзор данной операционной системы, история развития. Инструкция по установке Microsoft Visual Studio 2010 Express for Windows Phone. Написание первой программы для Windows Phone 7.
3. «Аппаратные средства устройств, поддерживающих Windows Phone 7». Рассмотрение аппаратных средств смартфонов на основе данной платформы, разбор применения всех возможностей данных устройств. Более подробное изучение работы кнопки «Назад» и переходов между страницами приложения.
4. «Обзор Microsoft XNA» Обзор пакета Microsoft XNA, перспективы его применения в данной системе. Разработка первой программы на базе этой технологии.
5. «Программная платформа Microsoft Silverlight». История появления и развития Microsoft Silverlight, его архитектура и основные возможности. Ознакомление со всеми файлами написанной на ней программы.
6. «Основы работы с сенсорным вводом». Обработка касаний, жестов, событий, написание кода. Написание программы для обработки касаний и событий в XNA и Silverlight. Ознакомление с теорией обработки нескольких касаний.
7. «Работа с изображениями в Windows Phone 7». Работа с изображениями, создание текстур, использование изображений из интернета, захват изображений с камеры.

8. «Датчики и службы». Данная лекция посвящена двум возможностям сбора сведений об окружающем мире в Windows Phone 7. С согласия пользователя служба определения местоположения предоставляет приложению данные о местоположении телефона в традиционных географических координатах, долгота и широта, тогда как акселерометр сообщает приложению направление вниз.  
Акселерометр и служба определения местоположения, довольно просты, поэтому в данной лекции также рассматриваются вопросы, касающиеся вторичных потоков выполнения, которые обрабатывают асинхронные операции и выполняют доступ к веб-сервисам.
9. «Пивот и панорама. Разработка простейших приложений для Windows Phone 7». Ознакомление с элементами управления пивот и панорама. Рассмотрение регистрации на специальном сервисе Marketplace и загрузки туда своих приложений. Ввод всех данных о своём приложении. Написание первых самостоятельных приложений на Windows Phone.
10. «Роль дизайнера при разработке приложений». Данная лекция рассказывает о принципах интерфейса системы и приложений «Metro». Она содержит множество рекомендаций, которым стоит следовать при разработке и создании приложений для Windows Phone 7, в том числе: грамотное расположение элементов в приложении, навигация и иерархия, акценты и типографика.

Остановимся подробно на некоторых вопросах содержания и использования данного курса.

При разработке приложений для Windows Phone 7 может использоваться Microsoft XNA— набор инструментов с управляемой средой времени выполнения (.NET), созданный Microsoft, облегчающий разработку и управление компьютерными играми. Разработка простых, но интересных игр в процессе обучения, позволит больше заинтересовать обучающихся.

Для обеспечения наглядности обучения при разработке приложений, используется или мобильное устройство с Windows Phone 7 или эмулятор этого устройства (рис. 1). Эмулятор входит в базовый пакет разработки Windows Phone SDK (Software Development Kit).

Данная программа позволяет протестировать все разработанные приложения на экране компьютера.

Также в процессе обучения, учащиеся получают представление о грамотном дизайне приложений и о Metro-дизайне. При разработке мобильных приложений важно обращать внимание на его интерфейс (анимацию, шрифт, удобство чтения и пр.). Необходимо своевременно и грамотно использовать различные элементы управления. Поэтому кроме придания функциональности, стоит научить обеспечивать приложение правильным и привлекательным дизайном. Только тогда оно сможет произвести целостно-положительное впечатление на конечного пользователя.

Данный аспект очень важен при обучении мобильному программированию, и ему обязательно стоит уделять внимание.



Рис. 1. Эмулятор Windows Phone 7

Интернет стал неотъемлемой частью современных смартфонов, поэтому обязательно необходимо использовать его в процессе преподавания. Примерами могут служить приложения, отправляющие и загружающие данные с глобальной сети. Этими данными могут быть как изображения, так и любые текстовые данные. Возможным вариантом разрабатываемого приложения будет написание браузера для работы с интернет-контентом.

Использование всех возможностей мобильного устройства в процессе обучения также необходимо. Как пример, работа с фото и видео камерой. Обработка полученной от неё информации и взаимодействие с пользователем. Определение местоположения при помощи GPS модуля, работа с акселерометром, обработка касаний – всё это делает обучение более наглядным и интересным.

Задачи такого характера были разработаны и использованы в курсе.

Одной из главных мотиваций обучения мобильному программированию может стать монетизация разработанных приложений. Обучаемые должны понять, что полученные знания могут быть эффективно применены на практике. Для поощрения разработчиков и распространения приложений, Microsoft организовала специальный сервис - Windows Phone Marketplace. Он представляет собой службу Microsoft для платформы Windows Phone 7, которая позволяет пользователям просматривать и загружать приложения, разработанные третьими сторонами. Для студентов и школьников старше 12 лет предоставляется возможность распространять свои приложения в Windows Phone Marketplace без регистрационного взноса.

Курс предназначен для учащихся старшей профильной школы и является элективным в изучении образовательной области «Информатика».

Цель курса:

- познакомиться с основами объектно-ориентированного программирования;

- рассмотреть и изучить все основные возможности системы Windows Phone 7, а так же все аппаратные средства мобильных устройств на которых она может быть установлена в настоящее время;
- научиться создавать самостоятельные приложения для решения конкретных задач.

Полученные школьниками знания смогут быть далее использованы для обучения любому высокоуровневому языку программирования, а так же для создания любых программ для мобильных платформ.

Курс рассчитан на одно полугодие. Занятия проводятся по два часа в неделю. Общий объем курса – 35 часов в урочной форме и 15 часов во внеурочной форме. Всего 50 учебных часов.

Основной тип занятий — практикум. Большинство практических заданий курса выполняется с помощью персонального компьютера и необходимых программных средств (SDK for Windows Phone 7).

Курс состоит из десяти разделов. Каждый из разделов посвящён отдельной теме мобильного программирования. В конце каждой темы учащимся предлагаются задачи для самостоятельного решения во внеурочной форме.

Для контроля полученных знаний применяется тестирование. Всего разработано пять тестов. Каждый тест включает в себя три варианта вопросов одинаковой сложности. Общее количество вопросов в одном варианте от семи до десяти. Кроме вопросов, включающих в себя выбор правильного варианта, имеются вопросы со свободным вводом ответа.

В конце курса учащиеся вместе с педагогом выполняют практикум.

Практикум рассчитан на четыре учебных часа. В нем учащиеся разработают два самостоятельных приложения для Windows Phone 7. Первым является приложение, которое будет предоставлять выбор между двумя элементами управления: пивотом и панорамой, выводя информацию в соответствующем виде. Второе приложение посвящено взаимодействию XNA и Silverlight.

В заключение статьи, хотелось бы отметить, что данный курс был разработан по гранту компании Microsoft.

Курс доступен для скачивания по адресу: [5].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Голощанов А.Л.* Google Android: программирование для мобильных устройств. – СПб.: БХВ-Петербург, 2011. – 438 с.
2. *Горнаков С.Г.* Программирование мобильных телефонов на Java 2 Micro Edition. – М.: ДМК Пресс, 2008. – 512 с.
3. *Дэвид Чиснолл Objective-C.* Карманный справочник. – М.: Вильямс, 2012. – 352 с.
4. *Климов А. П.* Программирование КПК и смартфонов на .NET Compact Framework . – СПб.: Питер, 2007. – 320 с.
5. *Кузьмичёв А.Э.* Программирование для Windows Phone для школьников [Электронный ресурс]. - URL: <https://www.facultyresourcecenter.com/curriculum/8966-Programming-for-Windows-Phone.aspx> (дата обращения: 28.05.2012).

6. *Марк Далримпл, Скотт Кнастер* - Objective-C 2.0 и программирование для Mac. Учебник и примеры. – М.: Вильямс, 2009. – 320 с.
7. *Труфанов А.Н.* Symbian C++. Программирование для мобильных телефонов. – М.: Вильямс, 2010. – 463 с.

## **THE MOBILE PROGRAMMING IN SYSTEM OF PROFILE EDUCATION OF SCHOOL STUDENTS**

**A. Kuzmichev**

*Moscow State Regional University  
10a, Radio st., Moscow, 105005, Russia*

*Abstract.* This article examines trends in mobile learning programming. Also it describes a course "Programming for Windows Phone for students". On the example of this course author examine the main aspects and features of the teaching of mobile programming. Announced major themes and brief content of the course, the aim of which is the training of the development of applications on the mobile platform Windows Phone 7, using technologies such as Microsoft Silverlight and XNA game platform. This course was developed by the author of the article on the grant of Microsoft Corporation. Special attention is paid to the perspectives of this course in system of profile education of school students.  
*Key words:* mobile programming, information and communication technologies, Windows Phone 7, Microsoft Silverlight, Microsoft XNA.

УДК 004.9

## **ОБУЧЕНИЕ РАБОТЕ С ОФИСНЫМИ ПАКЕТАМИ СРЕДСТВАМИ ОБЛАЧНЫХ ПРИЛОЖЕНИЙ**

**В.Г. Шевченко, М.В. Шевчук**

*Московский государственный областной университет  
105005, Москва, ул. Радио, 10а*

*Аннотация.* В статье разбираются вопросы выбора и использования альтернативных офисных пакетов при обучении работе с офисными приложениями на уроках информатики и ИКТ. Наибольшее внимание уделено проблеме использования на уроках информатики и ИКТ офисных приложений, основанных на технологии облачных вычислений, на примере облачного сервиса Zoho. Содержится обзор функциональных возможностей приложений, входящих в состав офисного пакета Zoho Office Suite и предназначенных для работы с документами. Рассматриваются вопросы использования данных приложений в различных разделах школьного курса информатики и ИКТ, а также затрагиваются методические особенности их использования.

*Ключевые слова:* Технология облачных вычислений, облачные сервисы, офисные пакеты, Zoho Office Suite, Zoho Writer, Zoho Sheet, Zoho Show.

Большая часть учебной и учебно-методической литературы в разделах, ориентированных на обучение работе с интегрированными пакетами офисных приложений, содержит методические указания по использованию офисных пакетов Microsoft Office и OpenOffice.org. При этом, содержательная часть данной литературы часто не учитывает возможные обновления интерфейсной части офисных приложений по сравнению с предыдущими версиями, что, как правило, ограничивает использование на уроках информатики и ИКТ существующего учебно-методического материала по соответствующим разделам. Кроме того, содержание школьной учебной литературы не учитывает возможности использования таких облачных офисных систем, как Google Docs, Microsoft Office Web Apps и Zoho Office Suite, базовые функциональные возможности которых отвечают основным требованиям к офисным пакетам, изучаемым в школе. Также необходимо учитывать, что традиционно изучаемый в школьном курсе офисный пакет Microsoft Office, распространяется на коммерческой основе и в качестве доступной альтернативы остается свободно распространяемый офисный пакет OpenOffice.org. или многочисленные бесплатные или условно бесплатные офисные приложения на основе технологии облачных вычислений.

К наиболее популярным и функциональным офисным пакетам для создания и редактирования документов с использованием облачных сервисов относят: Google Docs (Google Writely, Google Spreadsheets, Google Presentations), Microsoft Office Web Apps (Microsoft Office Word Web App, Microsoft Office Excel Web App, Microsoft Office PowerPoint Web App), Zoho Office Suite (Zoho Writer, Zoho Sheet, Zoho Show).

Рассмотрим некоторые возможности использования облачного сервиса для работы с документами Zoho Office Suite в процессе обучения школьников работе с офисными приложениями. Для создания и редактирования текстовых документов в облачном сервисе для работы с офисными документами Zoho Office Suite содержится текстовый редактор Zoho Writer [7].

Прежде чем перейти к рассмотрению методических особенностей использования текстового редактора Zoho Writer при обучении работе с текстовыми документами, рассмотрим функциональные особенности самого текстового редактора. При работе с текстовыми документами в облачном текстовом редакторе Zoho Writer для форматирования текста предлагается использовать несколько гарнитур различного размера и цвета, средства выравнивания текста, средства для работы с верхними и нижними индексами, инструменты для оформления отступов и межстрочных интервалов, средства создания нумерованных и маркированных списков. Для оформления документов предлагается использовать готовые изображения, формулы, таблицы, специальные символы, номера страниц и колонтитулы, разрывы между страницами. Перечисленные возможности облачного приложения представляют собой базовый набор функций, работе с которыми обучают в школьном курсе информатики и ИКТ в 5 классе в разделах «Информация вокруг нас» [1, 35] и «Компьютерный практикум» [1, 151], в 6-7 классах в разделе «Компьютерный практикум» [2, 122; 3, 152], в 8-9 классах в разделах «Текстовая информация и компьютер» [5, 67] и «Освоение среды текстового процессора» [4, 83], в 9 классе в разделе «Кодирование и обработка текстовой информации» [8, 54].

Чтобы воспользоваться всеми возможностями облачного текстового редактора, необходимо иметь минимальные представления о работе с браузерами, а также обла-

дать простейшими навыками поиска необходимой информации в сети Интернет. Как известно, основным приемам работы с глобальной сетью Интернет школьников обучают, начиная с 8 класса, а работе с текстовыми редакторами (например, Microsoft Word или OpenOffice.org Writer) в школах обучают, начиная с 5 класса, при изучении тем «Информация вокруг нас» [1, 35] и «Компьютерный практикум» [1, 151]. В этой связи возникает вопрос возможности использования облачного текстового редактора Zoho Writer в 5 классе.

Решение данного противоречия видится в грамотной организации учебного процесса. С учетом того, что при обучении учащихся работе на компьютере в 5 классе доминирует репродуктивная деятельность, то школьники согласно четким указаниям учителя могут сами открывать необходимые окна программ или, в противном случае, учащиеся начнут работать с документами только после того, как учитель сам откроет каждому ученику необходимый документ.

Облачный текстовый редактор Zoho Writer обладает некоторыми дополнительными функциями, рассмотрение которых не предусмотрено в школьной программе в разделах, связанных с изучением текстовых редакторов. Среди таких функций можно выделить встроенный сервис уведомлений, службу Active Chats, функцию Group и целый ряд других. Доступ к перечисленным функциям, расширяющим возможности редактора, легко осуществляется через главное окно программы, что может привести к частичной дезорганизации рабочего процесса в связи с отвлечением школьников на эти неиспользуемые при выполнении заданий функции. Поэтому при обучении школьников 5-7 классов рекомендуется использовать текстовый редактор Writely (Document) из облачного офисного пакета Google Docs от компании Google. Текстовый редактор Zoho Writer рекомендуется использовать при изучении текстовых редакторов, начиная с 8 класса.

Облачный табличный редактор Zoho Sheet [7] можно использовать при обучении школьников в 8-9 классах при изучении раздела «Освоение среды текстового процессора» [4, 83] или в 9 классе при изучении раздела «Кодирование и обработка числовой информации» [8, 84] наряду с табличными редакторами Microsoft Excel и OpenOffice.org Calc. Облачный редактор Zoho Sheet обладает необходимым набором базовых команд и инструментов для полноценного обучения школьников работе с табличным редактором. Приложение Zoho Sheet позволяет создавать электронные таблицы с использованием различных функций. Для изменения внешнего вида таблиц присутствуют гарнитуры различного размера и цвета, средства выравнивания текста в ячейках, возможность изменения границ электронной таблицы. Для ячеек таблицы можно использовать объединение и перенос по словам, присваивать им различные форматы (процентный, денежный, дата/время и т.д.), округлять данные в ячейках, записывать формулы для расчета значений (суммы, среднего, минимального, максимального и т.д.), сортировать данные с применением различных фильтров, создавать диаграммы.

В 6 классе при изучении раздела «Компьютерный практикум» [2, 164] школьники учатся создавать мультимедийные презентации средствами программы Microsoft PowerPoint. Для создания мультимедийных презентаций можно использовать приложение Zoho Show облачного сервиса Zoho Office Suite. Данный редактор презентаций обладает тем необходимым набором функций, использование которых позволяет создавать эффектные анимированные презентации. Интерфейс и функции редактора достаточно просты в использовании и интуитивно понятны, однако, данное приложение представлено в сервисе только на английском языке, что несколько осложняет использование

данного редактора при обучении созданию мультимедийных презентаций в 6 классе. Поэтому рекомендуется использовать данный редактор как дополнение к традиционно изучаемым редакторам презентаций Microsoft PowerPoint и OpenOffice.org Impress, начиная с 9 класса, например, при изучении раздела «Основы технологий» [6, 7] или на факультативном занятии.

Все рассмотренные выше облачные приложения из офисного пакета Zoho Office Suite для работы с документами обладают функцией организации совместного доступа (одновременная работа нескольких пользователей с одним и тем же документом) для просмотра и редактирования документов с использованием функции группового чата. Работе с данными функциями можно обучать школьников в 9-10 классах при изучении разделов «Кодирование и обработка текстовой информации» [8, 54], «Кодирование и обработка табличной информации» [8, 84] и «Основы технологий» [6, 7] в процессе повторения изученного ранее материала по текстовым редакторам, а также на факультативных занятиях. Данные функции офисного пакета Zoho Office Suite могут быть полезны для учащихся при создании коллективных проектов, когда требуется обсудить и внести нужные изменения в проект, не прибегая к личным встречам.

Рассмотренные облачные приложения сервиса Zoho Office Suite обладают достаточным набором функций, необходимым при обучении базовым умениям и навыкам для работы с офисными документами. Данные приложения можно рассматривать как достойную альтернативу или дополнение офисным приложениям, работе с которыми обычно обучают школьников в курсе информатики и ИКТ. Кроме того, офисные приложения облачного сервиса Zoho Office Suite обладают дополнительными возможностями, обучение которым позволит сформировать у школьников представления о востребованных функциях современных коммуникационных технологий.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Босова Л.Л.* Информатика и ИКТ: учебник для 5 класса. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009. - 192 с.
2. *Босова Л.Л.* Информатика: учебник для 6 класса. 3-е изд., испр, и доп. - М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009, - 208 с.
3. *Босова Л.Л.* Информатика: учебник для 7 класса. 3-е изд., испр, и доп. - М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011, - 208 с.
4. Информатика и ИКТ. Практикум. 8-9 класс / Под ред. проф. Н.В. Макаровой. – СПб.: Питер, 2012. – 384 с.
5. *Семакин И.Г.* Информатика и ИКТ: учебник для 8 класса / И.Г. Семакин, Л.А. Залогова, С.В. Русакова, Л.В. Шестакова. – 4-е изд. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010. – 165 с.
6. *Семакин И.Г.* Информатика и ИКТ. Базовый уровень: практикум для 10-11 класса / И.Г. Семакин, Е.К. Хеннер, Т.Ю. Шеина. – 3-е изд. испр. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010. – 295 с.
7. Страница сети Интернет для работы с документами Zoho Office Suite. URL: <https://www.zoho.com/> (дата обращения: 20.03.2012)
8. *Угринович Н.Д.* Информатика и ИКТ: учебник для 9 класса / Н.Д. Угринович. – 3-е изд. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. – 120 с.

**EDUCATION WORK  
WITH THE OFFICE SUITES MEANS CLOUD APPLICATIONS**

**V. Shevchenko, M. Shevchuk**

*Moscow State Regional University  
10a, Radio st., Moscow, 105005, Russia*

*Abstract.* The article dealt with the issues of choice and use of alternative office suites for training in office applications on a computer and IT lessons. The greatest attention is paid to use the lessons of informatics and IT business applications based on cloud computing, cloud service on an example of Zoho. Provides an overview of the functionality of the applications included in the Zoho Office Suite and designed to work with documents. The problems of using these applications in different sections of the school year of computer science and IT, as well as addresses of their methodological features used.

*Keywords:* The technology of cloud computing, cloud services, office suites, Zoho Office Suite, Zoho Writer, Zoho Sheet, Zoho Show.

**УДК 53.373.1.02:372.8**

**УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКТ ПО ФИЗИКЕ  
ДЛЯ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ**

**С.А. Холина**

*Московский государственный областной университет  
105005, Москва, ул. Радио, 10а*

*Аннотация.* Рассмотрена концепция учебно-методического комплекта по физике для основной школы с учётом требований стандарта образования. Особое внимание уделено реализации системно-деятельностного подхода к обучению физике: проведение простых экспериментальных исследований; применение основных форм выражения научного знания, методов познания, характерных для механики, термодинамики и молекулярной физики, электродинамики, квантовой физики, физики атома и атомного ядра.

*Ключевые слова:* курс физики основной школы, учебно-методический комплект по физике, требования стандарта к результатам обучения.

Авторский учебно-методический комплект по физике разработан на основе фундаментального ядра содержания общего образования и Требований к результатам освоения образовательной программы основного общего образования, представленных в федеральном государственном образовательном стандарте основного общего образования второго поколения [1]. В авторском учебно-методическом комплекте реализуются требования к личностным, метапредметным и предметным результатам освоения учащимися курса физики основной школы. В рабочей программе конкретизируется содержание обязательной части учебного курса, соответствующей требованиям образовательного стандарта по физике [3]. Наряду с этим представлена авторская концепция, кото-

рая учитывает взаимосвязь системы научных знаний и методов познания природы, основными из которых являются эксперимент и моделирование. Программа даёт распределение учебных часов по разделам курса, определяет минимальный набор демонстрационных опытов, обязательных и дополнительных фронтальных лабораторных работ, средств компьютерной поддержки учебного процесса.

Согласно стандарту, изучение предметной области «Естественнонаучные предметы» должно обеспечить: формирование целостной научной картины мира. Предметные результаты должны отражать формирование научного мировоззрения как результата изучения основ строения материи и фундаментальных законов физики [4]. Это станет возможным только при реализации системно-деятельностного подхода к обучению физике. В результате у учащихся будет сформировано умение применять научные методы познания на практике, т. е. умения проводить простые экспериментальные исследования, выполнять прямые и косвенные измерения с использованием аналоговых и цифровых измерительных приборов с учетом погрешностей измерений. Таким образом, цель обучения физики в 7–9 классах — формирование целостного непротиворечивого представления о структурных областях исследования окружающего мира: макро-, мега- и микромире. Систематизирующим факторами курса физики являются общенаучные понятия, например материя, движение, взаимодействие и др. Учащиеся знакомятся с основными формами научного знания и методами научного познания, характерными для механики, термодинамики и молекулярной физики, электродинамики, квантовой физики, физики атома и атомного ядра.

Эффективность обучения физике зависит от использования авторского учебно-методического комплекта, включающего в себя учебники, рабочие тетради, тетради для лабораторных работ, методику и технологии обучения, рабочие программы учителя основного общего образования (7-9 классы) и среднего (полного) общего образования (10-11 классы). Авторская программа представляет собой концепцию преподавания физики в средней школе на базе элементов современной физической картины мира.

В учебнике значительное внимание уделено организации учебной деятельности на уроке, самостоятельной работе учащихся. Каждая глава начинается с введения, где ставится учебная проблема и мотивируется важность изучения учебного материала. Вопросы после параграфа используются для его закрепления и обобщения. Задания и упражнения позволяют сформировать у учащихся умения применять полученные знания в разных ситуациях. Творческие задания предназначены для учащихся, проявляющих интерес к физике. В них использованы хрестоматийный материал, результаты наблюдений физических явлений, рисунки технических объектов и школьных экспериментальных установок. В заключении каждой главы учебника приводится обобщение основных понятий и законов в рубрике «Самое важное в главе».

Систему заданий учебника дополняют задания из рабочих тетрадей, выполнение которых позволяет учащимся осуществлять учебную деятельность разного уровня сложности. Например, учащиеся учатся самостоятельно работать с текстом учебника, решать физические задачи, анализировать фрагменты из работ классиков физики, изучать устройство и действие физических приборов, снимать показания по шкале измерительных приборов, рассчитывать погрешности измерений физических величин. В рабочей тетради после изучения главы учебника приведены самостоятельные работы для подготовки учащихся к итоговым контрольным работам. Задания самостоятельных работ представлены в виде тестов, вопросов по теории, расчётных задач разного уровня

сложности.

Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования включает в себя программу развития универсальных учебных действий, направленную на реализацию личностных и метапредметных результатов обучения. Важнейшей задачей современной системы образования становится формирование и дальнейшее развитие совокупности «универсальных учебных действий», обеспечивающих компетенцию «научить учиться», а не только освоение учащимися конкретных предметных знаний и навыков в рамках отдельных дисциплин. Таким образом, ФГОС ориентирован на становление личностных характеристик выпускника, что успешно реализуется в авторском учебно-методическом комплекте по физике для основной школы. Убежденность в возможности познания природы, уважение к творцам науки и техники формируется при выполнении творческих заданий «Из истории развития физики». Так, при изучении темы «Электрический заряд. Электрическое поле» учащимся предлагается отрывок из сочинения «Новые эксперименты» немецкого физика Отто Герике, в котором он описал опыты с первой электрической машиной. Выполняя экспериментальные исследования, учащиеся самостоятельно приобретают новые знания и практические умения. Например, рассматривая характеристики счётчика электрической энергии. Зная напряжение и максимальную силу тока, на которые рассчитан счетчик, учащиеся рассчитывают максимальное сопротивление электрического прибора и снимают показания счётчика электрической энергии в своём доме. Использование авторского учебно-методического комплекта предполагает развитие универсальных учебных действий, которые неотделимы от формирования способов учебных действий, характерных для физики; реализацию уровневой дифференциации учебного материала; расширение познавательных возможностей учащихся, определяемые их субъективным опытом.

Физический эксперимент — один из основных методов исследования природы, позволяющий применять теоретические знания на практике. Для того чтобы им овладеть, нужно знать не только содержание учебного материала, а еще и уметь пользоваться учебными физическими приборами и экспериментальными установками. Основные способы деятельности при эмпирическом методе познания природы: формулировка цели исследования, определение объекта исследования, выдвижение гипотезы, планирование и проведение самого эксперимента, наблюдение, измерение физических величин, анализ полученных данных, подтверждение или опровержение гипотезы. В учебно-методическом комплекте представлены следующие виды физического эксперимента: демонстрационный эксперимент, фронтальные лабораторные работы, дополнительные и домашние лабораторные работы, задания экспериментального характера, творческие экспериментальные задания.

Демонстрационный эксперимент на уроках физики отражает содержательное ядро курса физики, основные идеи механики, атомно-молекулярного учения о строении ве-

щества, элементы электродинамики, квантовой физики. Демонстрационный эксперимент используется при объяснении физических явлений, введении понятий, иллюстрации законов, практических приложений, интерпретации идей физической картины мира. При проведении демонстрационного эксперимента может быть использована компьютерная поддержка: цифровая лаборатория, например L-микро; интерактивные курсы по физике; видео- и анимационные сборники демонстрационных опытов из дидак-

тического набора кабинета физики.

Фронтальные лабораторные работы представлены в учебнике и в тетрадях для лабораторных работ. В рабочие тетради вошли фронтальные лабораторные работы из учебника, дополнительные лабораторные работы, домашние лабораторные работы, предназначенные для юных исследователей и конструкторов.

Для подготовки к контрольным работам в тетрадь включены задания экспериментального характера. При их выполнении у учащихся формируются умения измерять физические величины, оценивать погрешности измерений, составлять план экспериментальной деятельности. Лабораторные работы проводятся по единой схеме, которая содержит следующие этапы учебной деятельности: анализ объекта исследования, определение цели и выбор соответствующих средств измерения и материалов, выдвижение гипотезы исследования, проведение экспериментального исследования, анализ результатов и оформление выводов. Некоторые лабораторные работы имеют два варианта выполнения. В первом из них необходимо провести оценку результатов измерений. Второй вариант выполнения работы требует определить интервал, в пределах которого находится истинное значение измеряемой величины. Этот вариант не является обязательным и предназначен для углублённого изучения предмета.

Домашние лабораторные работы предназначены для учащихся проявляющих интерес к физике и способствуют развитию исследовательских и конструкторских умений. Структура домашних лабораторных работ соответствует структуре фронтальных лабораторных работ. Например, объектом исследования изменения положения тела, помещённого в раствор поваренной соли является условие плавления тел. Гипотеза исследования формулируется следующим образом: «Положение тела, помещённого в жидкость, зависит от его плотности. Шарик из сырого картофеля будет плавать внутри жидкости, если их плотности одинаковы».

Педагогический эффект обучения во многом зависит от интенсивности учебной деятельности на уроке, самостоятельной работы учащихся. Создание проблемной ситуации активизирует механизм творчества. Этому способствует выполнение творческих экспериментальных заданий, приведенных в учебниках и рабочих тетрадях. При изучении темы «Центр масс. Центр тяжести тела» (курс физики 7 класса) учащимся предлагается творческое задание «Экспериментальное исследование», в котором необходимо вырезать фигурку животного или растения из картона, найти у них центр масс (центр тяжести) и определить равнодействующую сил, действующих на тело. В опыте учащиеся подвешивают исследуемое тело с помощью нити, продевая её поочередно через заранее размеченные и проделанные отверстия. Экспериментальные задания знакомят учащихся с устройством и действием физических приборов, например конденсаторов (курс физики 8 класса).

При проведении государственной итоговой аттестации (ГИА) по физике оцениваются знания учащихся о методах научного познания и экспериментальные умения. За-

дания 22, 24 и 25 третьей части ГИА являются заданиями высокого уровня сложности и проверяют умение использовать законы физики в измененной или новой ситуации при решении задач, а также проводить экспериментальные исследования. Так, задание 22 может формулироваться следующим образом «Используя источник тока (4,5 В), вольтметр, ключ, соединительные провода, резисторы, обозначенные  $R_1$  и  $R_2$ , проверьте экс-

периментально правило для электрического напряжения при последовательном соединении двух проводников». При выполнении этого задания учащимся необходимо начертить электрическую схему экспериментальной установки, измерить электрическое напряжение на концах каждого из резисторов и общее напряжение на концах цепи из двух резисторов при их последовательном соединении. Затем учащиеся сравнивают общее напряжение с суммой напряжений на каждом из резисторов. При выполнении прямых измерений напряжения с помощью вольтметра учитывается его инструментальная погрешность. В результате эксперимента учащиеся делают вывод о справедливости проверяемого правила. Так, при выполнении лабораторной работы «Исследование с помощью вольтметра электрической цепи с последовательным соединением проводников» проверяются умения формулировать (различать) цель исследования, гипотезу исследования и его результаты [2]. *Цель работы* — 1) измерить напряжение на каждом из двух проводников и на участке цепи, состоящем из этих проводников; 2) определить абсолютную погрешность прямого измерения напряжения. *Гипотеза исследования* формулируется следующим образом: «Если проводники в электрической цепи соединены последовательно, то общее напряжение на участке цепи, состоящем из этих проводников, равно сумме напряжений на каждом из них. Конкретизируйте гипотезу, учитывая, что: а) две спирали соединены последовательно; б) в цепи установился стационарный режим (не изменяющийся во времени электрический ток)». Кроме того, проверяется умение конструировать экспериментальную установку, выбирать порядок проведения опыта в соответствии с предложенной гипотезой; использовать физические приборы и измерительные инструменты для прямых и косвенных измерений физических величин. Умение проводить анализ результатов экспериментальных исследований, выраженных в виде таблицы или графика. При проведении исследования результаты измерений заносятся в таблицу. Умение делать выводы на основании полученных экспериментальных данных о подтверждении или опровержении гипотезы исследования. В заключении определяется интервал, в пределах которого находится истинное значение измеряемого напряжения.

Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования определяет требования к исследовательской и проектной деятельности учащихся, что предполагает формирование навыков разработки, реализации и презентации результатов исследования, предметного или межпредметного учебного проекта, направленного на решение научной, лично значимой проблемы. Доклады, с которыми учащиеся выступают на внеклассных мероприятиях или конкурсах по физике могут представлять собой реферат, творческую работу исследовательского и конструкторского характера, компьютерную презентацию или проект. План проекта на тему «Выращивание кристаллов» может быть следующим. 1. Объект исследования — экспериментальный метод выращивания кристаллов. 2. Гипотеза исследования: если следовать приведённой технологии, можно вырастить монокристалл поваренной соли кубической

формы. 3. Цель исследования — вырастить монокристалл. 4. Средства измерения и материалы: насыщенный раствор медного купороса или поваренной соли, нить. 5. Выводы. Основой проекта является экспериментальное исследование, приведенное в учебнике 8 класса при изучении темы «Агрегатные состояния вещества» [5]. Компьютерная презентация была представлена на школьной конференции. В презентации демонстри-

руется модель пространственной решётки на примере поваренной соли. Она представляет собой кубическую решётку, в вершинах которой располагаются шарики двух цветов, изображающие ионы натрия и хлора. При этом размеры ионов в кристаллической решётке неодинаковы: радиус иона натрия приблизительно в два раза больше радиуса иона хлора. Изучение особенностей строения монокристаллов и поликристаллов проводится с помощью набора минералов. В исследовании проведено наблюдение за ростом кристаллов с помощью микроскопа. Для получения монокристаллов необходима тщательная подготовка и строгое выполнение указанных ниже действий. Подготовьте к эксперименту два стакана и воронку. В один из них налейте горячую, дважды прокипячённую воду. Помешивая воду, добавляйте в неё поваренную соль до тех пор, пока она перестанет растворяться. Полученный раствор слейте через фильтр (ватный или бумажный) в воронку в другой стакан. Затем настройте учебный микроскоп с цифровой видеокамерой, подключив его к компьютеру. С помощью пипетки поместите одну каплю раствора на стекло, расположенное на предметном столике микроскопа. Вращая ручку регулировки предметного столика, добейтесь чёткого изображения на экране компьютера. Наблюдайте рост кристаллов поваренной соли на крае капли раствора. При этом вещество переходит из жидкого состояния в твердое при постоянной температуре. Для большей наглядности изображение с компьютера можно проецировать на экран. В результате исследования были получены изображения роста кристаллов поваренной соли и медного купороса [6].

Авторский учебно-методический комплект проходит апробацию в различных регионах Российской Федерации, в том числе и школах Московской области. Результаты апробации обсуждаются на семинарах, проводимых кафедрой методики преподавания физики Московского государственного областного университета. Ниже приведены некоторые результаты изучения курса физики седьмого класса. Так, при выполнении самостоятельной работы по теме: «Физические методы исследования природы» более 80% учащихся различают объекты изучения физики: физические явления, физическое тело, вещество, поле; понимают различие между физическим экспериментом и моделированием; знают формы выражения научного знания, основные положения молекулярно-кинетической теории. Результаты контрольной работы по теме: «Механическое движение: перемещение, скорость, ускорение» показали, что более 70% учащихся показали знания единиц скорости, перемещения в СИ; формулы определения физической величины (ускорения и перемещения при равноускоренном прямолинейном движении без начальной скорости); способов действий при определении положения тела в выбранной системе отсчета и модуля перемещения тела при равноускоренном прямолинейном движении. Более 80% учащихся – знание объектов изучения физики – физические величины (путь и перемещение); связи между физическими величинами при прямолинейном равноускоренном движении; анализа функциональных зависимостей между физическими величинами по графику (определение проекции скорости движения тела); физических методов для определения характеристик механического движения (проекция начальной скорости и проекция ускорения).

Данные результаты дают уверенность в том, что авторский учебно-методический комплект найдёт широкое применение в практике преподавания физики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Стандарты второго поколения. Формирование универсальных учебных действий в основной школе: от действия к мысли/Под ред. А.Г. Асмолова, -М.: «Просвещение», 2011. - 159с.
2. Физика: 8 класс: тетрадь для лабораторных работ для учащихся общеобразовательных учреждений/[Хижнякова Л.С., Синявина А.А., Холина С.А. и др.] –М.: Вентана-Граф, 2012. -80с.
3. Физика. Рабочие программы учителя/Л.С. Хижнякова, А.А. Синявина, С.А. Холина. – М.: Вентана- Граф, 2010. – 112 с
4. Фундаментальное ядро содержания общего образования/Под ред. В.В. Козлова, А.М. Кондакова, -М.: «Просвещение», 2011 -71с.
5. *Хижнякова, Л.С., Синявина А.А.* Физика: 8 класс: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений. – М.: Вентана-Граф, 2011. -224 с.
6. *Хижнякова Л.С.* Физика: 8 класс: методика и технологии обучения: методическое пособие/[Хижнякова Л.С., Синявина А.А., Холина С.А. и др.] –М.: Вентана-Граф, 2012. -232с.

**TEACHING KIT IN PHYSICS FOR SCHOOLS**

**S. Kholina**

*Moscow Region State University,  
10a, Radio str., Moscow, 105005, Russia*

*Abstract.* The concept of a training set of physics to elementary school with the requirements of education. Special attention is paid to the introduction of the activity approach to teaching physics, experimental studies, the application of the basic forms of expression of scientific knowledge and methods of knowledge specific to mechanics, thermodynamics and molecular physics, electrodynamics, quantum physics, atomic physics and nuclear physics.

*Key words:* physics course for school, training kit for physics, the physics requirements of the standard.

### НАШИ АВТОРЫ

Абакумов С.Ю., аспирант Московского государственного университета приборостроения и информатики, 107996, Москва, ул. Стромынка, д.20; e-mail: ab\_sergeri@mail.ru

Баскаков А.В., кандидат физико-математических наук, доцент Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ», 115409, Москва, Каширское ш., д. 31; e-mail: AVBaskakov@mephi.ru

Волков Н.П., кандидат физико-математических наук, доцент Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ», 115409, Москва, Каширское ш., д. 31; e-mail: Volkov\_np@zmail.com

Гиниятуллин А.Р., аспирант Нижегородского государственного технического университета им. Р.Е. Алексеева, 603950, Нижний Новгород, ул. Минина, д.24; e-mail: aginiyatullin@eias.ru

Голов А.Н., кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической физики Московского государственного областного университета, 105005, Москва, ул. Радио, д. 10 а; e-mail: kaf-tfiz@mgou.ru

Ефремов В.Е., аспирант, ассистент кафедры математического анализа и геометрии Московского государственного областного университета, 105005, Москва, ул. Радио, д. 10 а; e-mail: efremovam51@mail.ru

Зудина М.Н., Московский государственный областной университет, 105005, Москва, ул. Радио, д. 10 а; e-mail: kaf-tfiz@mgou.ru

Кузьмин М.К., доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа и геометрии Московского государственного областного университета, 105005, Москва, ул. Радио, д. 10-а; e-mail: lesir179@infoline.su

Кузьмичев А.Э., аспирант Московского государственного областного университета, 105005, Москва, ул. Радио, д. 10-а; e-mail: Kuzm.anton@gmail.com

Куркин А.А., доктор физико-математических наук, профессор, заместитель заведующего кафедрой прикладной математики Нижегородского государственного технического университета им. Р.Е. Алексеева, 603950, Нижний Новгород, ул. Минина, д.24; e-mail: aakurkin@gmail.com

Орловский Д.Г., доктор физико-математических наук, профессор Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ», 115409, Москва, Каширское ш., д. 31; e-mail: odg@bk.ru

Пелиновский Д.Е., аспирант Нижегородского государственного технического университета им. Р.Е. Алексеева, 603950, Нижний Новгород, ул. Минина, д.24; e-mail: dmpeli@math.mcmaster.ca

Простокишин В.М., кандидат физико-математических наук, доцент Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ», 115409, Москва, Каширское ш., д. 31; e-mail: VMProstokishin@mephi.ru

Рабинович А.С., кандидат физико-математических наук, доцент Московского государственного университета приборостроения и информатики, 107996, Москва, ул. Стромынка, д.20; e-mail: rabial@mail.ru

Соловьев В.В., кандидат физико-математических наук, доцент Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ», 115409, Москва, Каширское ш., д. 31; e-mail: soloviev.vyacheslav@gmail.com.

Сучков М.В., кандидат физико-математических наук, доцент Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ», 115409, Москва, Каширское ш., д. 31; e-mail: mv\_suchkov@mail.ru

Тюгин Д.Ю., аспирант Нижегородского государственного технического университета им. Р.Е. Алексеева, 603950, Нижний Новгород, ул. Минина, д.24; e-mail: dtuguin@gmail.com

Холина С.А. Московский государственный областной университет, кандидат педагогических наук, доцент, 105005, Москва, ул. Радио, д. 10 а; e-mail: svetaholina@mail.ru

Шевченко В.Г., Московский государственный областной университет, 105005, Москва, ул. Радио, д. 10 а; e-mail: al.bugrimov@mgou.ru

Шевчук М.В., профессор кафедры вычислительной математики и методики преподавания информатики Московского государственного областного университета, 105005, Москва, ул. Радио, д. 10-а; e-mail: kaf-vmmpi@mgou.ru

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>МАТЕМАТИКА</b>	3
<i>Орловский Д.Г.</i> Определение параметра эволюционного уравнения с интегрированной полугруппой.....	3
<i>Соловьев В.В.</i> Об обратных задачах для параболического уравнения с переопределением в фиксированных точках.....	6
<i>Баскаков А.В., Простокишин В.М.</i> О порядке приближения функций суммами Рисса.....	12
<i>Пелиновский Д.Е., Гиниятуллин А.Р.</i> О формировании особенностей в линейном уравнении адвекции-диффузии с переопределенным граничным условием.....	15
<i>Баскаков А.В., Волков Н.П., Сучков М.В.</i> Об одном линейном методе суммирования рядов Фурье.....	25
<b>ФИЗИКА</b>	30
<i>Ефремов В.Е., Кузьмин М.К.</i> Решение диффузионной задачи в теории нестационарного диффузиофореза крупной твердой нелетучей сферической частицы.....	30
<i>Кузьмин М.К.</i> Теория нестационарного процесса испарения сферической аэрозольной капли с учетом зависимости давления насыщенного пара от кривизны ее поверхности.....	39
<i>Голов А.Н., Зудина М.Н.</i> Вихревые движения газоподобного облака с начальной скоростью в однородном постоянном поле.....	50
<i>Рабинович А.С., Абакумов С.Ю.</i> Исследование нелинейной модели верхней ионосферы Земли с учетом данных космических аппаратов.....	56
<i>Абакумов С.Ю.</i> Нелинейная модель атмосферы Земли на высотах от 1000 до 2000 км .....	63
<b>КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ</b>	68
<i>Тюгин Д.Ю., Куркин А.А.</i> Разработка эффективных параллельных алгоритмов для решения задач численного моделирования.....	68
<b>ТЕХНОЛОГИИ И МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ</b>	79
<i>Кузьмичев А.Э.</i> Мобильное программирование в системе профильной подготовки школьников.....	79
<i>Шевченко В.Г., Шевчук М.В.</i> Обучение работе с офисными пакетами средствами облачных приложений.....	84
<i>Холина С.А.</i> Учебно-методический комплекс по физике для основной школы .....	88
<b>НАШИ АВТОРЫ</b> .....	95

CONTENTS

<b>MATHEMATICS</b>	3
<i>Orlovsky D.</i> Definition of parameters of the evolution equation with integrated semigroup	3
<i>Soloviev V.</i> About inverse problems for parabolic equations with overdetermination in fixed points	6
<i>Baskakov A., Prostokishin V.</i> On the order of approximation of functions using sums of Riesz	12
<i>Pelinovsky D., Giniyatullin A.</i> On the formation of singularities in the linear advection-diffusion equation with a redefinition of the boundary condition	15
<i>Baskakov A., Volkov N., Suchkov M.</i> About the linear method of summation of Fourier series	25
<b>PHYSICS</b>	30
<i>Efremov V., Kuzmin M.</i> The solution of diffusion problem in the theory of nonstationary diffusiophoresis of large non-volatile solid spherical particle	33
<i>Kuzmin M.</i> The theory of nonstationary evaporation of spherical aerosol drop in view of dependence of saturated steam pressure from curvature of its surface	39
<i>Golov A., Zudina M.</i> The vortex motion of the gas-liked clouds with a initial velocity in the constant homogeneous field	50
<i>Rabinowitch A.S., Abakumov S. Yu.</i> Investigation of a nonlinear model of the Earth upper ionosphere with regard to data derived from artificial satellites	56
<i>Abakumov S.</i> Nonlinear model of the Earth atmosphere at the altitudes ranged from 1000 to 2000 km	63
<b>COMPUTER SCIENCES</b>	68
<i>Tyugin D., Kurkin A.</i> Development of effective parallel algorithms for solving of problems of numerical modeling	68
<b>TECHNOLOGIES AND TECHNIQUES OF TRAINING</b>	79
<i>Kuzmichev A.</i> The mobile programming in system of profile education of school students	79
<i>Shevchenko V., Shevchuk M.</i> Education work with the office suites means cloud applications	84
<i>Kholina S.</i> Teaching kit in physics for schools	88
<b>OUR AUTHORS</b>	95

УДК 517.95

Определение параметра эволюционного уравнения с интегрированной полугруппой / Д.Г. Орловский // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2012. №3. С.3-5.

Изучается обратная задача по определению неоднородного члена эволюционного уравнения с оператором, порождающим интегрированную полугруппу. Рассмотрена модельная двухточечная обратная задача, получены формулы, определяющие решение этой задачи.

Библиогр.1.

УДК 517.95

Об обратных задачах для параболического уравнения с переопределением в фиксированных точках / В.В. Соловьев // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2012. №3. С.6-11.

В статье рассматриваются обратные задачи для параболического уравнения общего вида в случае задачи Коши и первой и второй краевых задач в ограниченной области. В качестве дополнительной информации о решении прямой задачи (переопределении) используются значения решения прямой задачи в фиксированных точках для всех моментов времени. Для случая линейного уравнения сформулированы теоремы существования и единственности решения рассматриваемых обратных задач. Для случая нелинейного уравнения сформулированы теоремы единственности решения рассматриваемых обратных задач.

Библиогр.3.

УДК 517.15, 517.521

О порядке приближения функций суммами Рисса / А.В. Баскаков, В.М. Простокишин // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2012. №3. С.12-14.

Найдены асимптотически точные константы в оценках порядка приближения непрерывных периодических функций операторами типа свёртки посредством второго модуля непрерывности. Полученный результат применён для построения оценок приближения функций суммами Рисса.

Библиогр.3.

УДК 517.5

О формировании особенностей в линейном уравнении адвекции-диффузии с переопределенным граничным условием / Д.Е. Пелиновский, А.Р. Гиниятуллин // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2012. №3. С.15-24.

Рассматривается формирование особенностей в линейном уравнении адвекции-диффузии с переменной скоростью на полу-бесконечной линии. Переменная скорость определяется дополнительным условием на границе, которое моделирует динамику линии соприкосновения гидродинамического потока под углом  $180^\circ$ . Используя априорные оценки энергии, выведены условия на переменную скорость, которые гарантируют, что достаточно гладкое решение линейного уравнения адвекции-диффузии взрывается за конечное время. Используя класс самоподобных решений, найдена скорость роста решения вблизи особенности. Эта скорость не совпадает с полученными ранее численными решениями поставленной задачи.

Ил.2. Библиогр.7.

УДК 517.518.452(456)

Об одном линейном методе суммирования рядов Фурье / А.В. Баскаков, Н.П. Волков, М.В. Сучков // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2012. №3. С.25-29.

Рассмотрена задача о представлении непрерывных функций операторами суммирования рядов Фурье с помощью треугольных матриц вида

$$L_n(f, \Lambda, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{n,k} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Доказана теорема, обобщающая теорему К.В. Ермакова о равномерной сходимости этих операторов при некоторых ограничивающих условиях на элементы матрицы  $\Lambda$ .

Библиогр.4.

УДК 533.72

Решение диффузионной задачи в теории нестационарного диффузиофореза крупной твердой нелетучей сферической частицы / В.Е. Ефремов, М.К. Кузьмин // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2012. №3. С.30-39.

Авторы продолжают построение теории нестационарного диффузиофореза крупной твердой нелетучей частицы сферической формы в вязкой газовой среде. Приводится решение диффузионной задачи, которая разбита на стационарную и строго нестационарную части. В результате решения стационарной части этой задачи получена окончательная формула для определения стационарной составляющей диффузиофоретической скорости рассматриваемой частицы. Для определения нестационарной составляющей диффузиофоретической скорости этой частицы найдена соответствующая фор-

мула в пространстве лапласовых изображений. С помощью теорем о предельных значениях из операционного исчисления получена зависимость нестационарной составляющей диффузиофоретической скорости сферической частицы от строго нестационарного градиента концентрации при больших и малых значениях времени.

Библиогр.8.

УДК 533.72

Теория нестационарного процесса испарения сферической аэрозольной капли с учетом зависимости давления насыщенного пара от кривизны ее поверхности / М.К. Кузьмин // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2012. №3. С.39-49.

Строится теория нестационарного процесса испарения неподвижной аэрозольной капли сферической формы, уделяя при этом основное внимание учету коэффициента поверхностного натяжения вещества капли. В работе проведен подробный анализ предельных выражений, полученных из найденной в ней формулы скорости изменения радиуса капли, справедливой для всех значений времени.

Табл.3. Библиогр.11.

УДК 533.72

Вихревые движения газоподобного облака с начальной скоростью в однородном постоянном поле / А.Н. Голов, М.Н. Зудина // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2012. №3. С.50-56.

Рассмотрено выражение плотности потока вещества в нестационарной газоподобной системе многих частиц с учётом непотенциального слагаемого. Получены аналитические выражения компонент вихря плотности потока вещества. Дан анализ и графическое представление полученных формул.

Ил.3. Библиогр.10.

УДК 533.9.01

Исследование нелинейной модели верхней ионосферы Земли с учетом данных космических аппаратов / А.С. Рабинович, С.Ю. Абакумов // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2012. №3. С.56-63.

В статье проводится исследование областей E и F ионосферы Земли. Ввиду того, что хорошо известная модель стандартной атмосферы становится неудовлетворительной на высотах, превышающих 150 км от поверхности Земли, предлагается новая модель верхней ионосферы. В ней учитываются сильные электрические поля в ионосфере Зем-

ли, которые описываются в рамках нелинейного обобщения уравнений Максвелла на основе теории Янга-Миллса с  $SU(2)$  симметрией. Показывается, что предложенная нелинейная модель находится в хорошем согласии с экспериментальными данными для областей E и F ионосферы.

Ил.1. Табл.1. Библиогр.12.

УДК 533.9.01

Нелинейная модель атмосферы Земли на высотах от 1000 до 2000 км / С.Ю. Абакумов // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2012. №3. С.63-67.

В статье проводится моделирование атмосферы Земли в области высот от 1000 до 2000 км, учитывающее влияние сильного электрического поля в рамках нелинейной теории Янга-Миллса с  $SU(2)$  симметрией. Применение такого подхода для слоев E и F ионосферы в области высот от 90 до 1000 км показало хорошее согласие с эмпирическими данными. В то же время модель стандартной атмосферы на высотах свыше 150 км дает существенные отклонения от эмпирических данных, увеличивающиеся с высотой.

Ил.1. Библиогр.9.

УДК 519.6

Разработка эффективных параллельных алгоритмов для решения задач численного моделирования / Д.Ю. Тюгин, А.А. Куркин // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2012. №3. С.68-78.

В статье рассматривается комплексный подход к задаче повышения производительности вычислений с применением параллельных технологий. Показано применение современных инструментов для распараллеливания, поиска ошибок и «узких» мест в алгоритмах на примере задачи моделирования внутренних гравитационных волн в замкнутых бассейнах. Разработан и реализован параллельный алгоритм расчета коэффициента захвата внутренних волн. Проведена оценка его эффективности.

Ил.8. Библиогр.13.

УДК 378.147

Мобильное программирование в системе профильной подготовки школьников / А.Э. Кузьмичев // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2012. №3. С.79-84.

В данной статье рассматриваются тенденции развития обучения мобильному программированию. Описывается курс “Программирование для Windows Phone для школьников”, на примере которого рассмотрены основные аспекты и особенности преподавания мобильного программирования. Озвучены основные темы и краткое содержание курса, целью которого является обучение разработки приложений на мобильной платформе Windows Phone 7, с помощью таких технологий, как Microsoft Silverlight и игровая платформа XNA. Данный курс был разработан автором статьи по гранту корпорации Microsoft. Отдельное внимание уделено перспективам использования данного курса в системе профильного обучения школьников.

Ил.1. Библиогр.7.

УДК 004.9

Обучение работе с офисными пакетами средствами облачных приложений / В.Г. Шевченко, М.В. Шевчук // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2012. №3. С.85-88.

В статье разбираются вопросы выбора и использования альтернативных офисных пакетов при обучении работе с офисными приложениями на уроках информатики и ИКТ. Наибольшее внимание уделено проблеме использования на уроках информатики и ИКТ офисных приложений, основанных на технологии облачных вычислений, на примере облачного сервиса Zoho. Содержится обзор функциональных возможностей приложений, входящих в состав офисного пакета Zoho Office Suite и предназначенных для работы с документами. Рассматриваются вопросы использования данных приложений в различных разделах школьного курса информатики и ИКТ, а также затрагиваются методические особенности их использования.

Библиогр.8.

УДК 53.373.1.02:372.8

Учебно-методический комплекс по физике для основной школы // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2012. №3. С.88-94.

Рассмотрена концепция учебно-методического комплекта по физике для основной школы с учётом требований стандарта образования. Особое внимание уделено реализации системно-деятельностного подхода к обучению физике: проведение простых экспериментальных исследований; применение основных форм выражения научного знания, методов познания, характерных для механики, термодинамики и молекулярной физики, электродинамики, квантовой физики, физики атома и атомного ядра.

Библиогр.6.

## ПРАВИЛА

подготовки рукописей, представленных для опубликования в журнале  
«Вестник Московского государственного областного университета.  
Сер. Физика - математика»

Для публикации научных работ в выпусках серии «Вестник МГОУ» принимаются статьи на русском языке. Публикуются научные материалы преимущественно докторантов, аспирантов, соискателей, преподавателей ВУЗов, докторов и кандидатов наук.

**Требования к оформлению статей.** Статья должна быть представлена:

- в текстовом варианте (текст статьи должен быть подписан всеми авторами);
- в виде документа MS Word (с расширением doc);
- в виде файла в формате rtf;

**Файл должен содержать построчно:**

На русском языке	УДК (в верхнем левом углу первого листа рукописи) НАЗВАНИЕ СТАТЬИ – прописными буквами Фамилия, имя, отчество Полное наименование организации (в скобках – сокращенное), почтовый адрес Должность (другие сведения, например, E-mail, телефон) Аннотация (1 абзац до 400 символов) под заголовком «АННОТАЦИЯ» Ключевые слова
На английском языке	НАЗВАНИЕ СТАТЬИ – прописными буквами Фамилия, инициалы Полное наименование организации, почтовый адрес Аннотация (1 абзац до 400 символов) под заголовком «Abstract» Ключевые слова (Key words)
На русском языке	Объем статьи ограничен темя уровнями: а) 12 страниц с числом иллюстраций до пяти (к этим статьям предъявляются повышенные требования); б) 6 страниц с числом иллюстраций до трех (содержатся основные результаты без излишних деталей выводов и доказательств); в) 4 страницы с числом иллюстраций до двух (выходят в разделе краткие сообщения вне очереди). Список использованной литературы под заголовком «ЛИТЕРАТУРА»

Формат страницы – А4, книжная ориентация. Поля – 2,5 см. Шрифт Times New Roman Cyrillic, цвет шрифта черный, размер 12 пикселей, межстрочный интервал – полуторный.

**Запрещены** специфические действия над текстом и встраиваемые коды: уплотнение интервалов, использование цветowych заливок, «красные строки», центрирование, табуляция, отступы, переносы в словах (делаемые автором), ссылки, гиперссылки, сноски (лучше их оформлять в виде примечаний, замечаний и т.п.). Не допускаются сокращения слов, имен, названий, за исключением общепринятых (и оговоренных).

Формулы нумеруются (справа) только те, на которые в тексте имеются ссылки.

Рисунки и таблицы допускаются в том случае, если описать процесс в текстовой форме невозможно. В этом случае каждый из объектов не должен превышать указанные размеры страницы, а шрифт в нем – 12 пикселей. Возможно использование только вертикальных таблиц и рисунков. Запрещены цветowe заливки, применение «фонов».

Рисунки, схемы, графики выполняются на отдельных листах в формате, обеспечивающем ясность передачи деталей. Места расположения иллюстраций в тексте должны быть указаны простым карандашом на полях. На обороте иллюстрации должны быть написаны фамилия автора и название статьи. Текст к иллюстрациям, а также таблицы следует поместить на отдельных страницах. Все рисунки, схемы, графики, таблицы должны иметь названия.

Все формулы должны быть созданы с использованием компонента Microsoft Equation, (MathType 4.0). Размер шрифта также 12 пикселей. Формула создается однократным запуском компонента Microsoft Equation (MathType 4.0). Запрещается создавать составные формулы! Небольшие строчные фрагменты типа  $\Delta U_{ij}$  или  $C^{(m)} = (c_{1m}, c_{1m}, \dots)^T$  следует набирать обычным способом в латинице, используя средства панели инструментов: изменение шрифта на курсив, написание верхних и нижних индексов, а также вставку символов. При этом следует обратить внимание на написание цифр, скобок, операторов и наименований функций ( $\Delta$ ,  $\sin$ ,  $\cos$ , ...) прямым шрифтом. Хорошее представление об оформлении математических текстов дает чтение научных журналов Российской академии наук физико-математического направления, классических учебников по физике и математике для высших учебных заведений.

Абзацы должны быть отделены друг от друга пустой строкой (дополнительным «Enter»).

Список литературы должен содержать библиографические сведения о всех публикациях, упоминаемых в статье, и не должен содержать указаний на работы, на которые в тексте нет ссылок. Располагать публикации в списке следует по алфавиту, вначале следует приводить отечественные публикации, затем – иностранные. Список литературы приводится на отдельном листе с обязательным указанием следующих данных: для книг (монография, сборник и т.д.) – фамилия (после фамилии ставится запятая), инициалы автора, название книги, место издания (город), издательство, год издания; для журнальных статей – фамилия и инициалы автора, название статьи, название журнала, год издания, том, номер, выпуск, страницы (первая и последняя). **Обращаем Ваше внимание!** С 01.07.2004 введен новый стандарт ГОСТ 7.1-2003 «Библиографическая запись. Библиографическое описание. Общие требования и правила составления». Наиболее распространенные примеры:

1. Иванов, И.И. Название книги / И.И. Иванов. - М.: Наука, 2009. – 205 с.
2. Иванов, И.И. Название книги / И.И. Иванов, П.М. Петров, К.Л. Данилов. - М.: Наука, 2009. – 205 с.
3. Иванов, И.И. Название книги / И.И. Иванов [и др. (если 4 автора и более)]. - М.: Наука, 2009. – 205 с.
4. Название книги / И.И. Иванов [и др.], под ред. И.И. Иванова. - М.: Наука, 2009. – 205 с.
5. Иванов, И.И. Название статьи / И.И. Иванов, П.М. Петров, К.Л. Данилов // Название сборника. - М.: Механика, 2009. – С.51-59.
6. Иванов, И.И. Название статьи / И.И. Иванов, П.М. Петров, К.Л. Данилов // Название журнала. – 2009. - №2. - С.51-59.

Ссылки на неопубликованные работы не допускаются.

Редакционная коллегия оставляет за собой право на редактирование статей, хотя с точки зрения научного содержания авторский вариант сохраняется. Статьи, не соответствующие указанным требованиям, решением редакционной коллегии серии не публикуются и не возвращаются (почтовой пересылкой).

В случае принятия статьи, условия опубликования оговариваются с ответственным редактором.

Ответственный редактор серии «Физика-математика» декан физико-математического факультета, доктор технических наук, профессор Бугримов Анатолий Львович.

Адрес редколлегии серии «Физика-математика» «Вестника МГОУ»: 105005, Москва, ул. Радио, д.10-а, комн. 36. Тел. (495) 261-09-48