ISSN 2072-8549

Вестник

МОСКОВСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
ОБЛАСТНОГО
УНИВЕРСИТЕТА

Серия

Физика-математика

2012 / № 1

Вестник
Московского государственного областного университета
Серия «ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА»
№ 1 Выходит 3 раза в год 2012

Научный журнал основан в 1998 г.

«Вестник МГОУ» (все его серии) включен в «Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертации на соискание ученой степени доктора и кандидата наук» Высшей аттестационной комиссии (См.: Список журналов в редакции от 27.10. 2010 г. на сайте ВАК) по наукам, соответствующим названию серии.

Учредитель журнала:
Московский государственный областной университет

Журнал включен в базу данных Российского индекса научного цитирования (РИНЦ), имеет полнотекстовую сетевую версию в Интернете на платформе Научной электронной библиотеки (www.elibrary.ru), а также на сайте Московского государственного областного университета (www.vestnik.mgou.ru)

Адрес Отдела по изданию научного журнала «Вестник МГОУ»
г. Москва, ул. Радио, д.10а, офис 98
тел. (499) 261-43-41; (495) 723-56-31
e-mail: vest_mgou@mail.ru
Сайт: www.vestnik-mgou.ru

При цитировании ссылка на конкретную серию «Вестника МГОУ» обязательна. Воспроизведение материалов в печатных, электронных или иных изданиях, без разрешения редакции, запрещено. Опубликованные в журнале материалы могут использоваться только в некоммерческих целях. Ответственность за содержание статей несут авторы. Мнение редколлегии серии может не совпадать с точкой зрения автора. Рукописи не возвращаются.

The academic journal is established in 1998

«Bulletin of the Moscow State Regional University» (all its series) is included by the Supreme Certifying Commission into the List of the leading reviewed academic journals and periodicals, in which the basic research results of Ph.D. and Doctorate's academic degree thesis should be published (See: the List of journals edited 27.10. 2010 at the site of the Supreme Certifying Commission) in corresponding series.

The founder of journal:
The Moscow State Regional University

The journal is included into the database of the Russian Science Citation Index, has a full text network version on the Internet on the platform of Scientific Electronic Library (www.elibrary.ru), as well as at the site of the Moscow State Regional University (www.vestnik.mgou.ru)

The Editorial Board address:
Moscow State Regional University
10a Radio st., office 98
Moscow, Russia
Phones: (499) 261-43-41; (495) 723-56-31
e-mail: vest_mgou@mail.ru
Site: www.vestnik-mgou.ru

At citing the reference to a particular series of «Bulletin of the Moscow State Regional University» is obligatory. The reproduction of materials in printed, electronic or other editions without the Editorial Board permission, is forbidden. The materials published in the journal are for non-commercial use only. The authors bear all responsibility for the content of their papers. The opinion of the Editorial Board of the series does not necessarily coincide with that of the author Manuscripts are not returned.

№ 1 Issued 3 times a year 2012
Series «PHYSICS AND MATHEMATICS»
Bulletin of the
Moscow State Regional University

Редакционно-издательский совет «Вестника МГОУ»
Publishing council «Bulletin of the MSRU»

Хроменков П.Н. – к.фил.н., проф., ректор МГОУ (председатель совета)
Левченко М.Н. – д.фил.н., проф., проректор по научной работе МГОУ (*зам. председателя совета*)
Абрамов А.В. – к.пол.н., доц., нач. отдела по изданию журнала «Вестник МГОУ»
Асмолов А.Г. – академик РАО, д.психол.н., проф. МГУ им. М.В. Ломоносова
Белозеров В.Е. – д.ф-м.н., проф. Днепропетровского национального университета (Украина)
Клычников В.М. – к.ю.н., к.и.н., проф., проректор по учебной работе и международному сотрудничеству МГОУ
Затулин К.Ф. – директор Института диаспоры и интеграции (Института стран СНГ)
Коничев А.С. – д.б.н., проф. МГОУ
Лекант П.А. – д.фил.н., проф. МГОУ
Марченко М.Н. – д.ю.н., проф. МГУ им. М.В. Ломоносова
Нелюбин Л.Л. – д.фил.н., профессор МГОУ
Ницевич В.Ф. – д.пол.н., проф., ректор Орловской региональной академии государственной службы
Пасечник В.В. – д.п.н., проф. МГОУ
Поляков Ю.М. - канд. фил. н., гл.ред. «Литературной газеты»
Пусько В.С. – д.ф.н, проф. МГТУ им. Н.Э. Баумана
Трайтак С.Д. – к.ф-м.н., проф. МГГУ им. М.Л. Шолохова
Троич К. Г. – доктор, проф. Кобленц-Ландау Университета (Германия)
Ху Гумин – д.фил.н., проф., Институт иностранных языков Уханьского университета (Китай)

P.N. Khromenkov – Ph. D. in Philology, Professor, Principal of the MSRU (*Chairman of the Council*)
M.N. Levchenko – Ph. D. in Philology, Professor, Vice-Principal for scientific work of the MSRU (*Deputy Chairman of the Council*)
A.V. Abramov – Ph.D. in Political Sciences, Associate Professor, the Head of the editorial department of the Bulletin of the Moscow State Regional University
A.G. Asmolov – Member of Russian Academy of Education, Doctor of Psychology, Professor of Moscow State University
B.E. Belozerov – Doctor of Physics and Mathematics, Professor of Dnepropetrovsk National University (Ukraine)
V.M. Klychnikov – Ph.D. in Law, Ph. D. in History, Professor, Vice-Principal for academic work and international cooperation of the MSRU
K.F. Zatulin – the Head of Institute for Diaspora and Integration (Institute of the CIS Countries)
A.S. Konichev – Doctor of Biology, Professor of the MSRU
P.A. Lekant – Doctor of Philology, Professor of the MSRU
M.N. Marchenko – Doctor of Law, Professor of Moscow State University
L.L. Nelyubin – Doctor of Philology, Professor of the MSRU
V. F. Nitsevich – Doctor of Politics, Professor, the Principal of the Oryol Regional Academy of Public Service
V.V. Pasechnik – Doctor of Pedagogics., Professor of the MSRU
Yu. M. Polyakov – Ph.D. in Philology, editor-in-chief of "Literaturnaya Gazeta"
V.S. Pus'ko – Doctor of Philosophy, Professor of the Bauman Moscow State Technical University
S.D. Traytak – Ph.D. in Physics and Mathematics, Professor of the Sholokhov Moscow State University for the humanities
Klaus G. Troitzsch – Doctor, Professor of Koblenz-Landau University (Germany)
Hu Gumin – Doctor of Philology, Professor, Institute of Foreign Languages of Ukhan University (China)

Редакционная коллегия серии «Физика-Математика»
Series editorial board «Physics and Mathematics»

Ответственный редактор серии:
Бугримов А.Л. - д.т.н., проф.
Зам. ответственного редактора:
Беляев В.В. д.т.н., проф.
Члены редакционной коллегии:
Богданов Д.Л. – д.ф.-м.н., проф.
Дадиванян А.К. – д.ф.-м.н., проф.
Латышев А.В. – д.ф.-м.н., проф., Заслуженный деятель науки Российской Федерации.
Чернышенко С.В. - д.б.н., проф. Кобленц-Ландау Университета (Германия)
Чигринов В.Г. д.ф.-м.н., проф. Гонконгского университета науки и технологии (Китай)

Editor-in-chief :
A.L. Bugrimov, Doctor of Technical Sciences, Professor
Deputy editor-in-chief:
V.V. Belyaev, Doctor of Technical Sciences, Professor
Members of Editorial Board:
D.L. Bogdanov, Doctor of Physics and Mathematics, Professor
A. Dadivanyan, Doctor of Physics and Mathematics, Professor
A. Latyshev, Doctor of Physics and Mathematics, Professor
S. Chernyshenko, Doctor of Biology, Professor of Koblenz-Landau University (Germany)
V. Chigrinov, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of Gonkong University of Science and Technology (China)

ISSN 2072-8387
Вестник МГОУ. Серия «Физика-Математика». – 2012. - № 1. – М.: Изд-во МГОУ. – 138 с.

Журнал «Вестник МГОУ» серия «Физика-Математика» зарегистрирован в Федеральной службе по надзору за соблюдением законодательства в сфере массовых коммуникаций и охране культурного наследия. Регистрационное свидетельство **ПИ № ФС77-26136.**

Индекс серии «Физика-Математика» по каталогу агентства «Роспечать» **36766**

ISSN 2072-8387
Bulletin of the MSRU. Series «Physics and Mathematics». – 2012. – № 1. – M.: MSRU Publishing house. – 138 p.

The series «Physics and Mathematics» of the Bulletin of the Moscow State Regional University is registered in Federal service on supervision of legislation observance in sphere of mass communications and cultural heritage protection. The registration certificate **ПИ № ФС77-26136.**

Index series «Physics and Mathematics» under "Rospechat"agency catalog **36766**

ВЕСТНИК
Московского государственного областного университета

Научный журнал «Вестник МГОУ» основан в 1998 г. На сегодняшний день выходят десять серий «Вестника»: «История и политические науки», «Экономика», «Юриспруденция», «Философские науки», «Естественные науки», «Русская филология», «Физика-математика», «Лингвистика», «Психологические науки», «Педагогика». Все серии включены в составленный Высшей аттестационной комиссией Перечень ведущих рецензируемых научных журналов , в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертации на соискание ученой степени доктора и кандидата наук по наукам, соответствующим названию серии. Журнал включен в базу данных Российского индекса научного цитирования (РИНЦ).

Печатная версия журнала зарегистрирована в Федеральной службе по надзору за соблюдением законодательства в сфере массовых коммуникаций и охране культурного наследия. Полнотекстовая версия журнала доступна в Интернете на платформе Научной электронной библиотеки (www.elibrary.ru), а также на сайте Московского государственного областного университета (www.vestnik.mgou.ru).

ВЕСТНИК
МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ОБЛАСТНОГО УНИВЕРСИТЕТА

Над номером работали:

менеджер Отдела по изданию журнала «Вестник МГОУ» *И.А. Потапова*
компьютерная верстка *А.Л. Бугримов*

Отдел по изданию научного журнала «Вестник МГОУ»
105005, г. Москва, ул. Радио, д.10а, офис 98
тел. (499) 261-43-41; (495) 723-56-31
e-mail: vest_mgou@mail.ru
Сайт: www.vestnik-mgou.ru

Формат 60x86/8. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Гарнитура «Minion Pro». Тираж 300 экз. Усл. п.л. 17,25.
Подписано в печать 15.03.2012. Заказ № 551.
Отпечатано в типографии МГОУ
105005, г. Москва, ул. Радио, 10а

К сведению авторов «Вестника МГОУ»

Для публикации научных работ в выпусках серий «Вестника МГОУ» принимаются статьи на русском языке. Статья должна соответствовать научным требованиям и общему направлению серии журнала, быть интересной достаточно широкому кругу российской научной общественности.

Материал, предлагаемый для публикации, должен быть оригинальным, неопубликованным ранее в других печатных изданиях, написан в контексте современной научной литературы, и содержать очевидный элемент создания нового знания. Представленные статьи проходят проверку в программе «Антиплагиат».Отдел по изданию научного журнала «Вестника МГОУ» проводит независимое (внутреннее) рецензирование.

За точность воспроизведения имен, цитат, формул, цифр несет ответственность автор. Редакционная коллегия оставляет за собой право на редактирование статей без изменения научного содержания авторского варианта. Статьи, не соответствующие требованиям Отдела по изданию «Вестника МГОУ», решением редакционной коллегии серии не публикуются.

Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается. Статьи аспирантов МГОУ печатаются в первую очередь, статьи аспирантов других вузов по мере возможности, определяемой в каждом конкретном случае ответственным редактором предметной серии. Оплата статей сторонних авторов (не аспирантов) после принятия статьи ответственным редактором предметной серии должна покрыть издательские расходы «Вестника МГОУ» на ее публикацию. В журнале не будут публиковаться статьи авторов, не предоставивших квитанцию почтовой подписки на «Вестник МГОУ».

Для публикации научной статьи в определенной серии «Вестника МГОУ» автору необходимо предоставить в Отдел по изданию научного журнала «Вестник МГОУ»: 1) авторскую анкету; 2) заявление на имя ответственного редактора (оригинал или факсимильную копию); 3) выписку из заседания кафедры (отдела, сектора), где выполнялась работа (оригинал или факсимильную копию); 4) текст статьи в электронном виде; 5) квитанцию о полугодовой подписке (оригинал или факсимильную копию); 6) внешнюю рецензию (отзыв) (оригинал или факсимильную копию).

По вопросам публикации следует обращаться в Отдел по изданию научного журнала «Вестник МГОУ»: статья регистрируется автором в Отделе, после чего проходит внутреннее рецензирование и при положительной рецензии и наличии необходимых документов принимается к публикации.

В случае положительного решения вопроса о публикации, автор, предоставивший свою статью в определенную серию «Вестника МГОУ», выражает согласие на размещение полного текста статьи в сети Интернет на официальных сайтах журнала «Вестник Московского государственного областного университета» (www.vestnik.mgou.ru) и Научной электронной библиотеки (www.elibrary.ru) (См.: ст. 1286 и 1238 Гражданского Кодекса Российской Федерации). Одновременно автор дает согласие на доступ своих персональных данных неограниченному кругу лиц.

Подробная информация об оформлении статей и условиях их публикации размещена
на сайте журнала (http://vestnik.mgou.ru), пункт «Информация для авторов».

По финансовым и организационным вопросам публикации статей
обращаться в Отдел по изданию журнала «Вестник МГОУ» к Потаповой Ирине Александровне
105005, г. Москва, ул. Радио, д.10а, офис 98;
тел. (499) 261-43-41; (495) 723-56-31;
e-mail: vest_mgou@mail.ru

МАТЕМАТИКА

УДК 517.55

ОБОБЩЕННЫЕ УСЛОВИЯ КОШИ-РИМАНА АССОЦИИРОВАННОГО С БИКРУГОМ ИНТЕГРАЛА

А.В. Нелаев

Московский государственный областной университет
105005, Москва, ул. Радио, 10а

Аннотация. Продолжено начатое автором исследование обобщенно-аналитических свойств обобщения интеграла типа Коши, ассоциированного с бикругом.
Ключевые слова: Интеграл Коши, бикруг.

1. Введение. Продолжим начатое в [1]-[2] исследование обобщенно-аналитических свойств интеграла

$$\tilde{F}_1(z_1,z_2)=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_0^1 d\tau\int_{T^2}\frac{\varphi(\tau,\varsigma_1,\varsigma_2)\,d\varsigma_1 d\varsigma_2}{(\varsigma_1-u_1)(\varsigma_2-z_2)}$$

в области $U^{--}=\{(z_1,z_2)\in C^2:|z_1|>1,|z_2|>1\}$.

Говоря точнее, здесь мы будем рассматривать частный случай этого интеграла - интеграл

$$F_1(z_1,z_2)=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_0^1\tau^{\gamma-1}d\tau\int_{T^2}\frac{\varphi(\varsigma_1,\varsigma_2)d\varsigma_1 d\varsigma_2}{(\varsigma_1-u_1)(\varsigma_2-z_2)},\qquad(1)$$

где

$u_1=\tau^{\delta_1}z_1+(1-\tau^{\delta_1})z_1^0$, $\delta_1>0$, $|z_1^0|<1$, γ - любое положительное число с условием $\gamma\ge 1$.

Плотность $\varphi(\varsigma_1,\varsigma_2)$ - произвольная определенная на остове бикруга U^2

$$T^2=\{(\varsigma_1,\varsigma_2)\in C^2:|\varsigma_1|=1,|\varsigma_2|=1\}$$

и удовлетворяющая условию Гельдера

$$\left|\varphi(\varsigma_1,\varsigma_2)-\varphi(\varsigma_1^0,\varsigma_2^0)\right|<A_1\cdot\left|\varsigma_1-\varsigma_1^0\right|^{\alpha_1}+A_2\cdot\left|\varsigma_2-\varsigma_2^0\right|^{\alpha_2}$$

функция, где A_k - некоторые положительные постоянные, показатели α_k - константы с условием $0<\alpha_k\le 1$, $k=1,2$.

Понятно, что интеграл (1) образуется из интеграла $\widetilde{F}_1(z_1, z_2)$ в том случае, когда плотность последнего $\varphi(\tau, \varsigma_1, \varsigma_2)$ имеет вид:

$$\varphi(\tau, \varsigma_1, \varsigma_2) = \tau^{\gamma-1} \cdot \varphi(\varsigma_1, \varsigma_2)$$

В данной статье с помощью метода линейных дифференциальных операторов будут установлены обобщенные уравнения Коши-Римана для интеграла (1) в области

$$U^{--} = \left\{(z_1, z_2) \in C^2 : |z_1| > 1, |z_2| > 1\right\}$$

и указаны некоторые их приложения в теории дифференциальных уравнений с частными производными.

2. Из результатов работы [2] вытекает, что в области U^{--} интеграл (1) выражается по формуле

$$F_1(z_1, z_2) = \int_0^{\tau_0} \tau^{\gamma-1} \Psi^{+-}(u_1, z_2) d\tau + \int_{\tau_0}^{1} \tau^{\gamma-1} \Psi^{--}(u_1, z_2) d\tau, \tag{2}$$

где

$$\tau_0 = \left\{ -\operatorname{Re} \frac{z_1^0}{z_1 - z_1^0} + \sqrt{\left(\operatorname{Re} \frac{z_1^0}{z_1 - z_1^0} \right)^2 + \frac{1 - |z_1^0|^2}{|z_1 - z_1^0|^2}} \right\}^{\frac{1}{\delta_1}}, \tag{3}$$

$$\frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{T^2} \frac{\varphi(\varsigma_1, \varsigma_2) d\varsigma_1 d\varsigma_2}{(\varsigma_1 - u_1)(\varsigma_2 - z_2)} = \begin{cases} \Psi^{+-}(u_1, z_2), \text{при } |u_1| < 1, \\ \Psi^{--}(u_1, z_2), \text{при } |u_1| > 1 \end{cases}$$

(попутно отметим, что интеграл (1) можно определить по формуле (2) и в области голоморфности U^{+-}, если ввести для τ_0 доопределение (по непрерывности): положить в U^{+-} $\tau_0 \equiv 1$).

Рассмотрим вопрос о нахождении дифференциального уравнения в формальных производных, которому функции, определяемые интегралом (1), удовлетворяют в области U^{--}. С этой целью мы сначала установим формулу дифференциальной интеграла (1) с соответствующим двойным интегралом типа Коши

$$\frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{T^2} \frac{\varphi(\varsigma_1, \varsigma_2) d\varsigma_1 d\varsigma_2}{(\varsigma_1 - z_1)(\varsigma_2 - z_2)} = \begin{cases} \Psi^{+-}(z_1, z_2), \text{при } |z_1| < 1, |z_2| > 1, \\ \Psi^{--}(z_1, z_2), \text{при } |z_1| > 1, |z_2| > 1. \end{cases}$$

Теорема 1. В области U^{--} интеграл (1) связан с интегралом типа Коши $\Psi^{--}(z_1, z_2)$ формулой

$$\gamma \cdot F_1(z_1, z_2) + \delta_1 \cdot P[F_1(z_1, z_2)] = \Psi^{--}(z_1, z_2), \tag{4}$$

где дифференциальный оператор

$$P \equiv \left(z_1 - z_1^0\right)\frac{\partial}{\partial z_1} + \left(\overline{z_1} - \overline{z_1^0}\right)\frac{\partial}{\partial \overline{z_1}}. \qquad (5)$$

Доказательство. Во-первых, представим формулу (2) в более удобном для работы с ней виде. С этой целью заменим в ней параметр τ на новый вещественный параметр t по формуле $t = \tau^{\delta_1}$. Имеем: $\tau = t^{\frac{1}{\delta_1}}$, $d\tau = \frac{1}{\delta_1} t^{\frac{1}{\delta_1}-1} dt$, $\tau^{\gamma-1} = \tau^{\delta_1\frac{\gamma-1}{\delta_1}} = t^{\frac{\gamma-1}{\delta_1}}$, при $\tau = 0$ $t = 0$, при $\tau = 1$ $t = 1$ и формула (2) принимает вид:

$$F_1(z_1, z_2) = \int_0^{t_0} t^{\frac{\gamma-1}{\delta_1}} \Psi^{+-}(u_1, z_2) \cdot \frac{1}{\delta_1} \cdot t^{\frac{1}{\delta_1}-1} dt + \int_{t_0}^{1} t^{\frac{\gamma-1}{\delta_1}} \Psi^{--}(u_1, z_2) \cdot \frac{1}{\delta_1} \cdot t^{\frac{1}{\delta_1}-1} dt,$$

или

$$F_1(z_1, z_2) = \frac{1}{\delta_1}\int_0^{t_0} t^{\frac{\gamma}{\delta_1}-1} \Psi^{+-}(u_1, z_2) dt + \frac{1}{\delta_1}\int_{t_0}^{1} t^{\frac{\gamma}{\delta_1}-1} \Psi^{--}(u_1, z_2) dt, \qquad (6)$$

где

$$t_0 = -\operatorname{Re}\frac{z_1^0}{z_1 - z_1^0} + \sqrt{\left(\operatorname{Re}\frac{z_1^0}{z_1 - z_1^0}\right)^2 + \frac{1 - |z_0|^2}{\left|z_1 - z_1^0\right|^2}},\ u_1 = tz_1 + (1-t)z_1^0.$$

Во-вторых, выведем несколько специфических свойств оператора (5). Согласно общим правилам действия операторами такого вида на функции, имеем:

$$1)\ P\left(z_1 - z_1^0\right) = z_1 - z_1^0,\ P\left(\overline{z_1} - \overline{z_1^0}\right) = \overline{z_1} - \overline{z_1^0},$$

$$P\left(\left|z_1 - z_1^0\right|\right) = P\left[\sqrt{\left(z_1 - z_1^0\right)\left(\overline{z_1} - \overline{z_1^0}\right)}\right] = \frac{1}{2\cdot\sqrt{\left(z_1 - z_1^0\right)\left(\overline{z_1} - \overline{z_1^0}\right)}} P\left[\left(z_1 - z_1^0\right)\left(\overline{z_1} - \overline{z_1^0}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2\left|z_1 - z_1^0\right|^2}\left[P\left(z_1 - z_1^0\right)\left(\overline{z_1} - \overline{z_1^0}\right) + \left(z_1 - z_1^0\right)\cdot P\left(\overline{z_1} - \overline{z_1^0}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2\left|z_1 - z_1^0\right|}\left[\left(z_1 - z_1^0\right)\left(\overline{z_1} - \overline{z_1^0}\right) + \left(z_1 - z_1^0\right)\left(\overline{z_1} - \overline{z_1^0}\right)\right] = \frac{2\left|z_1 - z_1^0\right|^2}{2\left|z_1 - z_1^0\right|} = \left|z_1 - z_1^0\right|,$$

т.е.

$$P\left(\left|z_1 - z_1^0\right|\right) = \left|z_1 - z_1^0\right|, \tag{7}$$

$$2) P\left(\frac{z_1 - z_1^0}{\left|z_1 - z_1^0\right|}\right) = \frac{P\left(z_1 - z_1^0\right)\cdot\left|z_1 - z_1^0\right| - \left(z_1 - z_1^0\right)\cdot P\left(\left|z_1 - z_1^0\right|\right)}{\left|z_1 - z_1^0\right|^2} =$$

$$= \frac{\left(z_1 - z_1^0\right)\cdot\left|z_1 - z_1^0\right| - \left(z_1 - z_1^0\right)\cdot\left|z_1 - z_1^0\right|}{\left|z_1 - z_1^0\right|^2} \equiv 0$$

Из тождества

$$P\left(\frac{z_1 - z_1^0}{\left|z_1 - z_1^0\right|}\right) \equiv 0 \tag{8}$$

и правила действия операторами на сложную функцию (цепного правила: если $f = f(g)$, где $g = g\left(z_1, \overline{z_1}\right)$, то $P(f) = f_g' \cdot P(g)$) вытекает, что для любой дифференцируемой функции вида $f = f\left(\frac{z_1 - z_1^0}{\left|z_1 - z_1^0\right|}\right)$

$$P(f) \equiv 0\,. \tag{9}$$

Например, $P\left[\arg\left(z_1 - z_1^0\right)\right] \equiv 0$. Действительно, учитывая, что $z_1 - z_1^0 = \left|z_1 - z_1^0\right| \cdot e^{i\arg\left(z_1 - z_1^0\right)}$, имеем: $\arg\left(z_1 - z_1^0\right) = \frac{1}{i}\ln\frac{z_1 - z_1^0}{\left|z_1 - z_1^0\right|}$, т.е. функцию именно такого вида.

$$3)\, P\left(\frac{z_1\cdot\left|z_1 - z_1^0\right|}{z_1 - z_1^0}\right) = P\left[\frac{\left(\left(z_1 - z_1^0\right) + z_1^0\right)\left|z_1 - z_1^0\right|}{z_1 - z_1^0}\right] = P\left[\frac{\left(z_1 - z_1^0\right)\left|z_1 - z_1^0\right|}{z_1 - z_1^0} + \frac{z_1^0\left|z_1 - z_1^0\right|}{z_1 - z_1^0}\right] =$$

$$= P\left(\left|z_1 - z_1^0\right|\right) + z_1^0 \cdot P\left(\frac{\left|z_1 - z_1^0\right|}{z_1 - z_1^0}\right) \overset{(9)}{=} P\left(\left|z_1 - z_1^0\right|\right) \overset{(7)}{=} \left|z_1 - z_1^0\right|,$$

т.е.

$$P\left(\frac{z_1\cdot\left|z_1 - z_1^0\right|}{z_1 - z_1^0}\right) = \left|z_1 - z_1^0\right|. \tag{10}$$

В-третьих, обратимся к формуле (6) и произведем в ней замену параметра t на w согласно формуле

$$t = \frac{w}{\left|z_1 - z_1^0\right|} - \frac{z_1^0}{z_1 - z_1^0}\,. \tag{11}$$

Учитывая, что

а) при $t = 0$

$$w = w_1 = \frac{z_1^0}{z_1 - z_1^0},$$

б) при $t = t_0$

$$w = w_2 \equiv \left|z_1 - z_1^0\right| \cdot \left(t_0 + \frac{z_1^0}{z_1 - z_1^0}\right) = \left|z_1 - z_1^0\right| \cdot \left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{z_1^0}{z_1 - z_1^0} + \frac{\overline{z_1^0}}{\overline{z_1} - \overline{z_1^0}}\right) + \right.$$

$$\left. + \sqrt{\left(\operatorname{Re}\frac{z_1^0}{z_1 - z_1^0}\right)^2 + \frac{1 - \left|z_1^0\right|^2}{\left|z_1 - z_1^0\right|}} + \frac{z_1^0}{z_1 - z_1^0}\right\} = \left|z_1 - z_1^0\right| \cdot \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{z_1^0}{z_1 - z_1^0} - \frac{\overline{z_1^0}}{\overline{z_1} - \overline{z_1^0}}\right) + \right.$$

$$\left. + \sqrt{\left(\operatorname{Re}\frac{z_1^0}{z_1 - z_1^0}\right)^2 + \frac{1 - \left|z_1^0\right|^2}{\left|z_1 - z_1^0\right|}}\right\} = i \cdot \operatorname{Im}\frac{z_1^0 \cdot \left|z_1 - z_1^0\right|}{z_1 - z_1^0} +$$

$$+ \sqrt{\left(\operatorname{Re}\frac{z_1^0 \cdot \left|z_1 - z_1^0\right|}{z_1 - z_1^0}\right)^2 + 1 - \left|z_1^0\right|^2},$$

в) при $t = 1$

$$w = w_3 \equiv \frac{z_1^0 \cdot \left|z_1 - z_1^0\right|}{z_1 - z_1^0},$$

а также принимая во внимание равенства

$$dt = \frac{dw}{\left|z_1 - z_1^0\right|} \quad \text{и} \quad u_1 = tz_1 + (1-t)z_1^0 = \left(\frac{w}{\left|z_1 - z_1^0\right|} - \frac{z_1^0}{z_1 - z_1^0}\right)z_1 + \left(1 - \frac{w}{\left|z_1 - z_1^0\right|} + \frac{z_1^0}{z_1 - z_1^0}\right)z_1^0 =$$

$$= \frac{1}{\left(z_1 - z_1^0\right)\left|z_1 - z_1^0\right|}\left[\left(w \cdot \left(z_1 - z_1^0\right) - z_1^0 \cdot \left|z_1 - z_1^0\right|\right)z_1 + \left(\left(z_1 - z_1^0\right)\left|z_1 - z_1^0\right| - w \cdot \left(z_1 - z_1^0\right) + z_1^0\left|z_1 - z_1^0\right|\right)z_1^0\right] =$$

$$= w \cdot \frac{z_1 - z_1^0}{\left|z_1 - z_1^0\right|},$$

перепишем (6) в виде

$$F_1(z_1, z_2) = \frac{1}{\delta_1}\int_{w_1}^{w_2}\left(\frac{w}{\left|z_1 - z_1^0\right|} - \frac{z_1^0}{z_1 - z_1^0}\right)^{\frac{\gamma}{\delta_1}-1} \cdot \Psi^{+-}\left(w \cdot \frac{z_1 - z_1^0}{\left|z_1 - z_1^0\right|}, z_2\right)\frac{dw}{\left|z_1 - z_1^0\right|} +$$

$$+ \frac{1}{\delta_1}\int_{w_2}^{w_3}\left(\frac{w}{\left|z_1 - z_1^0\right|} - \frac{z_1^0}{z_1 - z_1^0}\right)^{\frac{\gamma}{\delta_1}-1} \cdot \Psi^{--}\left(w \cdot \frac{z_1 - z_1^0}{\left|z_1 - z_1^0\right|}, z_2\right)\frac{dw}{\left|z_1 - z_1^0\right|},$$

или, что то же,

$$\delta_1 \cdot \left|z_1 - z_1^0\right|^{\frac{\gamma}{\delta_1}} \cdot F_1(z_1, z_2) = \int_{w_1}^{w_2} \left(w - \frac{z_1^0 \cdot \left|z_1 - z_1^0\right|}{z_1 - z_1^0} \right)^{\frac{\gamma}{\delta_1}-1} \cdot \Psi^{+-}\left(w \cdot \frac{z_1 - z_1^0}{\left|z_1 - z_1^0\right|}, z_2 \right) dw + \int_{w_2}^{w_3} \left(w - \frac{z_1^0 \cdot \left|z_1 - z_1^0\right|}{z_1 - z_1^0} \right)^{\frac{\gamma}{\delta_1}-1} \cdot \Psi^{--}\left(w \cdot \frac{z_1 - z_1^0}{\left|z_1 - z_1^0\right|}, z_2 \right) dw, \tag{12}$$

Применяя к обеим частям формулы (12) оператор P, согласно обобщению правила Лейбница будем иметь:

$$\begin{aligned} P\left[\delta_1 \left|z_1 - z_1^0\right|^{\frac{\gamma}{\delta_1}} \cdot F_1(z_1, z_2) \right] = {} & \int_{w_1}^{w_2} P\left\{ \left(w - \frac{z_1^0 \cdot \left|z_1 - z_1^0\right|}{z_1 - z_1^0} \right)^{\frac{\gamma}{\delta_1}-1} \cdot \Psi^{+-}\left(w \cdot \frac{z_1 - z_1^0}{\left|z_1 - z_1^0\right|}, z_2 \right) dw \right\} + \\ & + P(w_2)\left(w_2 - \frac{z_1^0 \cdot \left|z_1 - z_1^0\right|}{z_1 - z_1^0} \right)^{\frac{\gamma}{\delta_1}-1} \cdot \Psi^{+-}\left(w_2 \cdot \frac{z_1 - z_1^0}{\left|z_1 - z_1^0\right|}, z_2 \right) - \\ & - P(w_1)\left(w_1 - \frac{z_1^0 \cdot \left|z_1 - z_1^0\right|}{z_1 - z_1^0} \right)^{\frac{\gamma}{\delta_1}-1} \cdot \Psi^{+-}\left(w_1 \cdot \frac{z_1 - z_1^0}{\left|z_1 - z_1^0\right|}, z_2 \right) + \\ & + \int_{w_2}^{w_3} P\left\{ \left(w - \frac{z_1^0 \cdot \left|z_1 - z_1^0\right|}{z_1 - z_1^0} \right)^{\frac{\gamma}{\delta_1}-1} \cdot \Psi^{--}\left(w \cdot \frac{z_1 - z_1^0}{\left|z_1 - z_1^0\right|}, z_2 \right) dw \right\} + \\ & + P(w_3)\left(w_3 - \frac{z_1^0 \cdot \left|z_1 - z_1^0\right|}{z_1 - z_1^0} \right)^{\frac{\gamma}{\delta_1}-1} \cdot \Psi^{--}\left(w_3 \cdot \frac{z_1 - z_1^0}{\left|z_1 - z_1^0\right|}, z_2 \right) - \\ & - P(w_2)\left(w_2 - \frac{z_1^0 \cdot \left|z_1 - z_1^0\right|}{z_1 - z_1^0} \right)^{\frac{\gamma}{\delta_1}-1} \cdot \Psi^{--}\left(w_2 \cdot \frac{z_1 - z_1^0}{\left|z_1 - z_1^0\right|}, z_2 \right). \end{aligned} \tag{13}$$

Проведем в полученной формуле возможные упрощения. Ее левая часть, с учетом правила действия линейными дифференциальными операторами на произведение и равенства

$$P\left(\left|z_1 - z_1^0\right|^{\frac{\gamma}{\delta_1}} \right) = \frac{\gamma}{\delta_1} \cdot \left|z_1 - z_1^0\right|^{\frac{\gamma}{\delta_1}-1} \cdot P\left(\left|z_1 - z_1^0\right|\right) \overset{(7)}{=} \frac{\gamma}{\delta_1} \cdot \left|z_1 - z_1^0\right|^{\frac{\gamma}{\delta_1}},$$

принимает вид

$$\delta_1 \cdot \frac{\gamma}{\delta_1} \cdot \left|z_1 - z_1^0\right|^{\frac{\gamma}{\delta_1}} \cdot F_1(z_1, z_2) + \delta_1 \cdot \left|z_1 - z_1^0\right|^{\frac{\gamma}{\delta_1}} \cdot P\left[F_1(z_1, z_2)\right].$$

Обратимся к правой части. В силу свойства (9) все слагаемые в ней, кроме пятого, оказываются равными нулю ($P(w_1)\overset{(9)}{\equiv}0$, $P(w_2)\overset{(9)}{\equiv}0$). Пятое слагаемое, с учетом соотношения (10) и равенств

$$w_3 - \frac{z_1^0 \cdot |z_1 - z_1^0|}{z_1 - z_1^0} = |z_1 - z_1^0|, \quad w_3 \cdot \frac{z_1 - z_1^0}{|z_1 - z_1^0|} = z_1,$$

приводится к виду

$$|z_1 - z_1^0| \cdot |z_1 - z_1^0|^{\frac{\gamma}{\delta_1}-1} \cdot \Psi^{--}(z_1, z_2).$$

Таким образом, формула (13) принимает вид

$$\gamma \cdot |z_1 - z_1^0|^{\frac{\gamma}{\delta_1}} \cdot F_1(z_1, z_2) + \delta_1 \cdot |z_1 - z_1^0|^{\frac{\gamma}{\delta_1}} \cdot P[F_1(z_1, z_2)] = |z_1 - z_1^0|^{\frac{\gamma}{\delta_1}} \cdot \Psi^{--}(z_1, z_2)$$

что равносильно формуле (4):

$$\gamma \cdot F_1(z_1, z_2) + \delta_1 \cdot P[F_1(z_1, z_2)] = \Psi^{--}(z_1, z_2).$$

Теорема доказана.

Действуя на обе части формулы (4) формальной производной $\frac{\partial}{\partial \overline{z_1}}$ и учитывая голоморфность интеграла типа Коши $\Psi^{--}(z_1, z_2)$ - т.е. выполнимость для него классических уравнений Коши-Римана

$$\frac{\partial \Psi^{--}(z_1, z_2)}{\partial \overline{z_1}} = 0, \ \frac{\partial \Psi^{--}(z_1, z_2)}{\partial \overline{z_2}} = 0, \tag{14}$$

сразу получаем дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z_1}}\left[\gamma \cdot F_1(z_1, z_2) + \delta_1(z_1 - z_1^0)\frac{\partial F_1(z_1, z_2)}{\partial z_1} + \delta_1\left(\overline{z_1} - \overline{z_1^0}\right)\frac{\partial F_1(z_1, z_2)}{\partial \overline{z_1}}\right] = 0, \tag{15}$$

или, что то же,

$$\delta_1(z_1 - z_1^0)\frac{\partial^2 F_1(z_1, z_2)}{\partial z_1 \partial \overline{z_1}} + \delta_1\left(\overline{z_1} - \overline{z_1^0}\right)\frac{\partial^2 F_1(z_1, z_2)}{\partial \overline{z_1^2}} + (\gamma + \delta_1)\frac{\partial F_1(z_1, z_2)}{\partial \overline{z_1}} = 0.$$

Действуя на формулу (4) оператором $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}_2}$, аналогично получаем:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_2}\left[\gamma \cdot F_1(z_1,z_2)+\delta_1\left(z_1-z_1^0\right)\frac{\partial F_1(z_1,z_2)}{\partial z_1}+\delta_1\left(\bar{z}_1-\bar{z}_1^0\right)\frac{\partial F_1(z_1,z_2)}{\partial \bar{z}_1}\right]=0. \qquad (16)$$

Сейчас, казалось бы, самое время объявить систему (15) – (16) обобщенными условиями Коши-Римана интеграла $F_1(z_1,z_2)$ в области U^{--} и, тем самым, объявленную во «Введении» задачу решенной. Но есть тут одна тонкость. Дело в том, что структура формулы (2) (особенно тот факт, что τ_0 от z_2 вообще не зависит) свидетельствует о голоморфности определяемых этой формулой функций по переменному z_2. Следовательно, справедливо и более простое, чем (16), уравнение:

$$\frac{\partial F_1(z_1,z_2)}{\partial \bar{z}_2}=0. \qquad (17)$$

Систему двух дифференциальных уравнений (15) и (17) назовем обобщенными условиями Коши-Римана для интеграла $F_1(z_1,z_2)$. Таким образом, оказывается справедливой следующая

Теорема 2. Функции двух комплексных переменных, определяемые в области U^{--} интегралом (1), удовлетворяют в этой области обобщенным условиям Коши-Римана:

$$\begin{cases}\delta_1\left(z_1-z_1^0\right)\dfrac{\partial^2 F_1(z_1,z_2)}{\partial z_1\partial \bar{z}_1}+\delta_1\left(\bar{z}_1-\bar{z}_1^0\right)\dfrac{\partial^2 F_1(z_1,z_2)}{\partial \bar{z}_1^2}+\left(\gamma+\delta_1\right)\dfrac{\partial F_1(z_1,z_2)}{\partial \bar{z}_1}=0,\\ \dfrac{\partial F_1(z_1,z_2)}{\partial \bar{z}_2}=0.\end{cases} \qquad (18)$$

3. Установленная формула (4) связи интеграла (1) с интегралом типа Коши $\Psi^{--}(z_1,z_2)$ позволяет рассмотреть, например, следующую задачу.

Задача 1. Требуется найти решение в области U^{--} уравнения

$$\gamma \cdot f_1(z_1,z_2)+\delta_1\left(z_1-z_1^0\right)\frac{\partial f(z_1,z_2)}{\partial z_1}+\delta_1\left(\bar{z}_1-\bar{z}_1^0\right)\frac{\partial f(z_1,z_2)}{\partial \bar{z}_1}=\Psi^{--}(z_1,z_2) \qquad (19)$$

(где константы $\delta_1>0$, $\gamma\geq 1$), если известна его правая часть.

На основании формулы (4) заключаем, что в качестве решения уравнения (19) можно взять функцию, определяемую интегралом (1), имеющим ту же самую плотность $\varphi(\varsigma_1,\varsigma_2)$, что и интеграл типа Коши:

$$\Psi^{--}(z_1,z_2)=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{T^2}\frac{\varphi(\varsigma_1,\varsigma_2)d\varsigma_1 d\varsigma_2}{(\varsigma_1-z_1)(\varsigma_2-z_2)},$$

и те же самые константы δ_1 и γ, которые входят в (19).

Точно так же, система обобщенных условий Коши-Римана (18) дает возможность рассмотреть, например, такую задачу.

Задача 2. Требуется найти решение в области U^{--} системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases}(z_1-z_1^0)\dfrac{\partial^2 g(z_1,z_2)}{\partial z_1\partial\bar{z}_1}+\left(\bar{z}_1-\bar{z}_1^0\right)\dfrac{\partial^2 g(z_1,z_2)}{\partial\bar{z}_1^2}+\left(\dfrac{\gamma}{\delta_1}-1\right)\dfrac{\partial g(z_1,z_2)}{\partial\bar{z}_1}=0,\\ \dfrac{\partial g(z_1,z_2)}{\partial\bar{z}_2}=0.\end{cases} \qquad (20)$$

(Понятно, что постановка этой задачи представляет интерес в том случае, если решение ищется в классе дифференцируемых, но не голоморфных функций – ведь системе уравнений (20) удовлетворяет любая голоморфная функция переменных z_1, z_2).

На основании теоремы 2 заключаем, что в качестве искомого решения $g(z_1,z_2)$ можно взять интеграл (1), имеющий те же самые компоненты γ и δ_1 ($\gamma\geq 1$, $\delta_1>0$), которые входят в систему (18).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нелаев, А.В.* Обобщение интеграла типа Коши, ассоциированного с бикругом [Текст] // Вестник МГОУ. – Серия «физика-математика». – М.: изд. МГОУ. – 2010, №1. – С. 3-16.
2. *Нелаев, А.В.* Обобщенно-аналитические свойства обобщения интеграла типа Коши, ассоциированного с бикругом [Текст] // Вестник МГОУ. – Серия «физика-математика». – М.: изд. МГОУ. – 2011, №3. – С.3 – 10.

THE GENERALIZED CAUCHY-RIEMANN CONDITIONS ASSOCIATED WITH BI-CIRCLE INTEGRAL

A. Nelaev
Moscow region state university
10a Radio st., Moscow, 105005, Russia

Abstract. The author continues his investigation of generalized analitical properties of generalization of the Cauchy's integral type associated with bicircle.
Keywords: Cauchy's integral, bicircle.

УДК 514.7, 512.5

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ПРОЕКТИВНОЙ ПРЯМОЙ

О.А. Матвеев, Р.М. Солдатенков

Московский государственный областной университет,
105005, Москва, ул. Радио, д.10а

Аннотация. Вводится в рассмотрение алгебраическая аксиоматика проективной прямой над полем действительных чисел. Проективная прямая рассматривается как универсальная алгебра с двупараметрическим семейством тернарных операций, связанных определёнными тождествами. В построенной модели проективной прямой выводятся формулы преобразования координат.
Ключевые слова: универсальная алгебра, квазигруппа, проективная геометрия.

Общепризнанны роль и место теории групп и алгебр Ли в геометрии (достаточно упомянуть Эрлангенскую программу Феликса Клейна) математике, теоретической механике, физике, химии, вообще в естествознании. Однако, как нам представляется, верхний слой в этом направлении уже снят, и на передний план выходят обобщения понятия группы, приобретает актуальность теория гладких квазигрупп. В квазигруппе, вообще говоря, нарушается тождество ассоциативности. По определению квазигруппа не обязана иметь нейтрал, однако главный левый изотоп двусторонней квазигруппы уже имеет единичный элемент, то есть является лупой. Аналитическая лупа имеет касательную алгебру, вообще говоря, со счетным числом операций конечной арности, подчиняющихся счетному числу тождеств, обобщающих тождество Якоби алгебры Ли, которое на самом деле, если выполняется, гарантирует ассоциативность групповой бинарной операции.

Проективная геометрия над полем действительных чисел традиционно глубоко изучается в педагогических высших учебных заведениях. Эта тематика подробно отражена в научной и учебной литературе. [1]-[7]. Неконструктивность аксиоматики Германа Вейля проективного пространства вызывает трудность восприятия у вдумчивых студентов. На лекционных и семинарских занятиях приходится долго разбирать модели проективной прямой и проективной плоскости, вводить понятие проективного репера, изучать свойства сложного отношения четырех точек, лежащих на проективной прямой и так далее. Все эти трудности могут быть хотя бы частично обойдены, но для этого необходимо немного освоиться с теорией универсальных алгебр и, в частности, с понятием квазигруппы.

В настоящей работе мы дадим лишь эскиз идеи построения проективной геометрии на примере размерности 1, используя теорию квазигрупп.

Ясно, что конструкция имеет смысл над произвольным полем и легко переносится на случай проективной геометрии над телом.

1. Модель проективной прямой

Определение 1. Пусть S – действительная окружность, на которой рассмотрим семейство частичных тернарных операций $\omega_\tau : S^3 \to S$, «занумерованных» символами $\tau \in \boldsymbol{R}^2 \setminus \{0,0\} = \boldsymbol{R}^2_*$, $\tau = (t,u)$, $t \in \boldsymbol{R}$, $u \in \boldsymbol{R}$,

$$\omega_\tau(a,b,c) = d;\ a,b,c,d \in S,\ a \neq b,\ \omega_\tau(a,b,c) = (\tau;a,b,c) = (t,u;a,b,c) = d,$$

причем операции ω_τ обладают следующими свойствами:

$$(v \cdot t, v \cdot u;\ a,b,c) = (t,u;a,b,c).\ v \neq 0; \tag{1}$$

$$(v,w;\ a,b,(t,u;a,b,c)) = (v \cdot t, w \cdot u;\ a,b,c); \tag{2}$$

$$(t,v;\ a,b,c) = (v - t.v;\ a,b,c); \tag{3}$$

$$(1,1;\ a,b,c) = c; \tag{4}$$

$$(1,0;\ a,b,c) = a; \tag{5}$$

где $a,d,c \in S;\ a \neq b,\ t,u,v,w \in \boldsymbol{R}$.

Частичную алгебру $\boldsymbol{P^1} = \left\langle S, (\omega_\tau)_{\tau \in \boldsymbol{R}^2_*} \right\rangle$ называем действительной проективной прямой.

Замечание. Алгебра $\boldsymbol{P}^1$ является частичной, поскольку операция $(t,u;a,b,c)$ не определена, если $a = b$.

Предложение 1. На проективной прямой $\boldsymbol{P}^1$ выполняются следующие тождества:

$$(t,v;\ a,b,a) = a; \tag{6}$$

$$(0,1;\ a,b,c) = b; \tag{7}$$

$$(t,v;\ a,b,b) = b,\ v \neq 0. \tag{8}$$

Доказательство. Полагая в тождестве (2) $u = 0$, получаем, используя тождества (1) и (5):

$$(v,w;\ a,b,(t,0;\ a,b,c)) = (v \cdot t, 0;\ a,b,c) = a.$$

Далее, воспользовавшись тождеством (5), имеем для любых неравных между собой точек *a* и *b* на *S*

$$(v,w) \in \boldsymbol{R}_*^2,\ (v,w;\ a,b,a) = a.$$

Докажем тождество (7). Последовательно используя тождества (4) и (3), имеем:

$$c = (1,\ 1;\ a,b,c) = (0,1;\ a,c,b).$$

Меняя местами точки *b* и *c*, приходим к тождеству (7). Затем, подставляя в тождество (2) $t = 0,\ u = 1,$ получим:

$$(v,w;\ a,b,(0,\ 1;\ a,b,c)) = (0,w;\ a,b,c).$$

Используя (7) и (1), получаем для $w \neq 0$:

$$(v,w;\ a,b,b) = b.$$

Предложение 2. На проективной прямой $\boldsymbol{P}^1$ зафиксируем произвольную точку α и два действительных числа *t*, *u*, отличных от 0, $\tau = (t,u),\ \tau \neq (1,1)$. На $\boldsymbol{P}^1 \setminus \{a\} \cong \boldsymbol{R}$ рассмотрим бинарную операцию:

$$b \underset{(\tau;a)}{\cdot} c = b \underset{(t,u;a)}{\cdot} c = (t,u;a,b,c) = (\tau;\ a,b,c). \qquad (9)$$

Тогда $\left\langle \boldsymbol{P}^1 \setminus \{a\},\ \underset{(\tau;a)}{\cdot} \right\rangle$ является двусторонней идемпотентной эластичной квазигруппой, изотопной абелевой группе по сложению <$\boldsymbol{R}$, + >.

Определение 2. Отображение $(t,u)\theta_b^a : S \to S,\ a \neq b,\ t \neq 0,\ u \neq 0,$ $(t,u)\theta_b^a c = (t,u;\ a,b,c)$ называется гиперболическим преобразованием с неподвижными точками *a* и *b*.

Определение 3. Если $d = (t,u;\ a,b,c),\ u \neq 0,$ то число $\dfrac{t}{u}$ называется сложным отношением четверки точек *a, b, c, d,* т.е.

$$\frac{t}{u} = (a,b,c,d). \qquad (10)$$

Определение 4. Любые три попарно различные точки *a, b, c* на *S* называются репером, и если *d* = (*t, u; a, b, c*), то точка *d* в репере *R* = (*a, b, c*) имеет две координаты (*t, u*).

Определение 5. Четверка точек *a, b, c, d* = (-1, 1; *a, b, c*) называется гармонической.

Определение 6. Изоморфизм алгебры $\boldsymbol{P}^1$ называется проективным преобразованием проективной прямой.

Немедленно проверяется, что проективное преобразование сохраняет сложное отношение четырех точек, переводит репер в репер, и выполняется правило равенства координат, т.е. прообраз точки в первом репере имеет те же координаты, что и образ во втором репере, если второй репер является образом первого.

На евклидовой плоскости рассмотрим окружность S единичного радиуса, которая в декартовой системе координат задается уравнением $x^2+(y-1)^2=1$. Ясно, что существует биекция $(-\pi,\pi]\to S$, $x=\cos\alpha$, $y=1+\sin\alpha$, α – угловой параметр, $\alpha\in(-\pi,\pi]$. Для $\tau=(t,u)\in \boldsymbol{R}_*^2$ зададим тернарную операцию на S следующими формулами:

$$\alpha_4=2arctg\frac{t\sin\frac{\alpha_1}{2}\sin(\frac{\alpha_3-\alpha_2}{2})+u\sin\frac{\alpha_2}{2}\sin(\frac{\alpha_1-\alpha_3}{2})}{t\cos\frac{\alpha_1}{2}\sin(\frac{\alpha_3-\alpha_2}{2})+u\cos\frac{\alpha_2}{2}\sin(\frac{\alpha_1-\alpha_3}{2})}, \qquad (11)$$

где $a(\alpha_1),b(\alpha_2),c(\alpha_3),d(\alpha_4)\in S,\quad d=(t,u;a,b,c).$

Для введенной операции тождества (1) – (5) определения 1 непосредственно проверяются.

2. Формулы преобразования координат на проективной прямой

Пусть точка x в репере $R_{a,b,c}=\{a,b,c\}$ имеет следующие координаты $x=(t,u;a,b,c)$. Допустим, что мы имеем репер $R_{k,l,m}$, причем $k=(t_1,u_1;a,b,c)$, $l=(t_2,u_2;a,b,c)$, $m=(t_3,u_3;a,b,c)$ и $x=(t_0,u_0;k,l,m)$. Найдем выражение t и u через t_i, u_i.

Для начала получим из аксиом некоторые следствия:

1.1. $(t,u;a,b,(v,w;a,b,c))=(tv,uw;a,b,c)$

1.2. $(t,u;a,(v,w;a,b,c),c)=(tw+uv-tv,uw;a,b,c)$

1.3. $(t,u;(v,w;a,b,c),b,c)=(tv,uv+tw-uw;a,b,c)$

Если $a=(t,u;x,y,z)$, то

2.1. $x=(u-t,u;a,y,z)$

2.2. $y=(t,t-u;x,a,z)$

2.3. $z=(u,t;x,y,a)$

Доказательство этих следствий очевидно.

1 этап. Рассмотрим переход от одного репера к другому: $R_{a,b,c}\to R_{a,b,m}$.

Тогда из равенства 2.3 имеем:

$$c=(u_3,t_3;a,b,m),$$

а из равенства 1.1 получаем:

$$x=(t,u;a,b,(u_3,t_3;a,b,m))=(tu_3,ut_3;a,b,m).$$

Аналогично получаем:

$$k=\left(t_1u_3,u_1t_3;a,b,m\right),\ l=\left(t_2u_3,u_2t_3;a,b,m\right)$$

2 этап. Рассмотрим совместно следующие два репера: $R_{a,b,m}\to R_{a,l,m}$.

Тогда из равенства 2.2 $\Rightarrow\ b=\left(t_2u_3,t_2u_3-u_2t_3;a,l,m\right)$.

Тогда из равенства 1.2 $\Rightarrow$

$$\begin{cases} x=\left(tu_3,ut_3;a,\left(t_2u_3-u_2t_3;a,l,m\right),m\right)= \\ =\left(tu_3\left(t_2u_3-u_2t_3\right)+ut_3t_2u_3-tu_3t_2u_3,ut_3\left(t_2u_3-u_2t_3\right);a,l,m\right)= \\ =\left(ut_3t_2u_3-tu_3u_2t_3,ut_3t_2u_3-ut_3u_2t_3;a,l,m\right)= \\ =\left(ut_2u_3-tu_3u_2,ut_2u_3-uu_2t_3;a,l,m\right) \end{cases}$$

Аналогично получаем:

$$k=\left(u_1t_2u_3-t_1u_3u_2,u_1t_2u_3-u_1u_2t_3;a,l,m\right)\ .$$

3 этап. $R_{a,l,m}\to R_{k,l,m}$

Равенство 2.2 влечет за собой:

$$a=\left(t_1u_3u_2-u_1t_3u_2,u_1t_2u_3-u_1t_3u_2;k,l,m\right)\ .$$

Из равенства 1.3 получаем

$$\begin{cases} x=\left(ut_2u_3-tu_3u_2,ut_2u_3-ut_3u_2;\left(t_1u_3u_2-u_1t_3u_2,u_1t_2u_3-u_1t_3u_2;k,l,m\right),l,m\right)= \\ =\left(\left(ut_2u_3-tu_3u_2\right)\left(t_1u_3u_2-u_1t_3u_2\right),\left(ut_2u_3-ut_3u_2\right)\left(t_1u_3u_2-u_1t_3u_2\right)+\right. \\ \left.+\left(ut_2u_3-tu_3u_2\right)\left(u_1t_2u_3-u_1t_3u_2\right)-\left(ut_2u_3-ut_3u_2\right)\left(u_1t_2u_3-u_1t_3u_2\right);k,l,m\right)= \\ =\left(ut_2u_3t_1u_3u_2-tu_3u_2t_1u_3u_2-ut_2u_3u_1t_3u_2+tu_3u_2u_1t_3u_2,ut_2u_3t_1u_3u_2-ut_2u_3u_1t_3u_2-\right. \\ -ut_3u_2t_1u_3u_2+ut_3u_2u_1t_3u_2+ut_2u_3u_1t_2u_3-ut_2u_3u_1t_3u_2-tu_3u_2u_1t_2u_3+tu_3u_2u_1t_3u_2- \\ \left.-ut_2u_3u_1t_2u_3+ut_2u_3u_1t_3u_2+ut_3u_2u_1t_2u_3-ut_3u_2u_1t_3u_2;k,l,m\right)= \\ =\left(ut_2u_3t_1u_3u_2-tu_3u_2t_1u_3u_2-ut_2u_3u_1t_3u_2+tu_3u_2u_1t_3u_2,ut_2u_3t_1u_3u_2-ut_2u_3u_1t_3u_2-\right. \\ -ut_3u_2t_1u_3u_2-tu_3u_2u_1t_2u_3+tu_3u_2u_1t_3u_2+ut_3u_2u_1t_2u_3;k,l,m\left.\right)= \\ \left.=\left(ut_2u_3t_1-u_3u_2t_1t-ut_2u_1t_3+tu_1t_3u_2,ut_2u_3t_1-ut_3t_1u_2-tu_1t_2u_3+tu_1t_3u_2;k,l,m\right)\right. \end{cases}$$

Далее получаем следующие формулы:

$$\rho t_0=\left(u_1t_3-u_3t_1\right)u_2t+\left(u_3t_1-u_1t_3\right)t_2u\ ,$$
$$\rho u_0=\left(u_2t_3-u_3t_2\right)u_1t+\left(u_3t_2-u_2t_3\right)t_1u\ .$$

Из полученных формул легко получаем требуемое выражение t и u через t_i, u_i, где $i=0,1,2,3$. А именно:

$$\lambda t = (u_3 t_2 - u_2 t_3) t_1 t_0 + (u_1 t_3 - u_3 t_1) t_2 u_0 \ ,$$
$$\lambda u = (u_3 t_2 - u_2 t_3) u_1 t_0 + (u_1 t_3 - u_3 t_1) u_2 u_0 \ .$$

Теорема о преобразовании координат на проективной прямой: Если $x = (t,u;a,b,c)$, $k = (t_1,u_1;a,b,c)$, $l = (t_2,u_2;a,b,c)$, $m = (t_3,u_3;a,b,c)$, $x = (t_0,u_0;k,l,m)$, то
$x = \left((u_3 t_2 - u_2 t_3) t_1 t_0 + (u_1 t_3 - u_3 t_1) t_2 u_0, (u_3 t_2 - u_2 t_3) u_1 t_0 + (u_1 t_3 - u_3 t_1) u_2 u_0; a,b,c\right)$.

В заключении заметим, что конструкция легко переносится на случай проективной плоскости [13] и, вообще, на произвольную конечную размерность.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Артин, Э.* Геометрическая алгебра. М.: Наука, 1969 - 283с.
2. *Гильберт, Д., Конфессен С.* Наглядная геометрия. М.: Наука, 1981 - 344с.
3. *Хартсхорн, Р.* Основы проективной геометрии. М.: Мир, 1970 - 160с.
4. *Буземан, Г., Келли П.* Проективная геометрия и проективные метрики. М.: Издательство иностранной литературы, 1957 - 410с.
5. *Дарбу, Г.* Принципы аналитической геометрии. Главная редакция технико-теоретической литературы. Ленинград, Москва, 1938 -375 с.
6. *Атанасян, Л.С., Базылев В.Т.* Геометрия. Часть II. М.: Просвещение, 1987 -352с.
7. *Погорелов, А.В.* Геометрия. М.: Наука, 1983 - 288с.
8. *Белоусов, В.Д.* Элементы теории квазигрупп. Кишинев, КГУ, 1981 - 116с.
9. *Матвеев, О.А.* О многообразиях с геодезическими.// Ткани и квазигруппы. Калинин, 1986, с.44 - 49.
10. *Sabinin, L.V.* On flat geoodular spaces.// Webs and Quasigroups, Tver, 1992, pp.4-9.
11. *Матвеев, О.А.* Методы теории квазигрупп в проективной геометрии. //Актуальные проблемы математики и методики её преподавания. Межвузовский сборник научных трудов. Пенза, 2001, с. 58-62.
12. *Мартынюк, А.Н., Матвеев О.А., Птицына И.В.* Элементы проективной геометрии. Учебное пособие. Издательство МГОУ, М. 2010, 135 с.
13. *Матвеев, О.А., Солдатенков Р.М.* К теории квазигрупп в проективной геометрии. // Фундаментальные физико-математические проблемы и моделирование технико-технологических систем. Выпуск 8.М.:Станкин 2005 с.27-31.

THE ALGEBRAIC MODEL OF THE REAL PROJECTIVE LINE

O. Matveyev, R. Soldatenkov

Moscow region state university
10a Radio st., Moscow, 105005, Russia

Abstract. The algebraic axiomatics of a projective straight line over a field of real numbers is entered into consideration. A project line is examined as universal algebra with two parameter family of the ternary operations bound by certain identities. The formulas of transformation of coordinates are concluded in the built model of project line.

Keywords: universal algebra, quasigroup, projective geometry.

УДК 517.5

СЛАБАЯ ОБОБЩЕННАЯ ЛОКАЛИЗАЦИЯ ДЛЯ КРАТНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ С ЛАКУНАРНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬЮ ЧАСТИЧНЫХ СУММ В КЛАССАХ ОРЛИЧА

З.Н. Цукарева

Московский государственный областной университет
105005, Москва, ул. Радио, 10а

Аннотация. В настоящей работе рассматривается поведение прямоугольных частичных сумм $S_n(x;f)$, $x\in \mathrm{T}^N=[-\pi,\pi]^N$, $n=(n_1,...,n_N)\in \mathbb{N}^N$, кратного тригонометрического ряда Фурье функций f из классов Орлича $\Phi(L)(\mathrm{T}^N)$ (где неубывающая функция $\Phi:[0,\infty)\to[0,\infty)$, $\Phi(u)=\overline{o}(u\ln^+\ln^+u)$ при $u\to\infty$) в случае, когда некоторые из компонент n_j вектора n являются элементами (однократных) лакунарных последовательностей.
Ключевые слова: кратные ряды Фурье, слабая обобщенная локализация, множества сходимости и расходимости, классы Орлича, лакунарная последовательность.

Рассмотрим N-мерное евклидово пространство $\mathbb{R}^N$, элементы которого будем обозначать $x=(x_1,...,x_N)$, и положим $(yx)=y_1x_1+\cdots+y_Nx_N$. Введем множества: $\mathbb{Z}^N\subset\mathbb{R}^N$ всех векторов с целочисленными координатами и $\mathbb{Z}_1^N=\{(n_1,\ldots,n_N)\in\mathbb{Z}^N: n_j\geq 1,\ j=1,...,N\}$.

Пусть Φ: $[0,\infty)\to[0,\infty)$ − неубывающая функция. Через $\Phi(L)(\mathrm{T}^N)$ обозначим множество суммируемых на $\mathrm{T}^N=[-\pi,\pi]^N$ функций f таких, что

$$\int_{\mathrm{T}^N}\Phi(|f(x)|)dx<\infty.$$

Если $\Phi(u)=u^p$, $p\geq 1$, то обозначим $\Phi(L)=L_p(\mathrm{T}^N)$, если $\Phi(u)=u\log^+u$, где $\log^+u=\log\max\{1,u\}$, то $\Phi(L)=L\log^+L$.

Пусть 2π-периодическая (по каждому аргументу) функция $f\in\Phi(L)(\mathrm{T}^N)$, $N\geq 1$, разложена в кратный тригонометрический ряд Фурье:

$$f(x)\sim\sum_{k\in\mathbb{Z}^N}c_ke^{i(kx)}$$

Для любого вектора $n=(n_1,\ldots,n_N)\in \square_1^N$ рассмотрим прямоугольную частичную сумму этого ряда

$$S_n(x;f)=\sum_{|k_1|\le n_1}\cdots\sum_{|k_N|\le n_N} c_k e^{i(k_1x_1+\cdots+k_Nx_N)}.$$

Пусть A – произвольное измеримое множество, $A\subset \mathrm{T}^N$, $\mu A>0$ ($\mu=\mu_N$ – N-мерная мера Лебега), и пусть $f(x)=0$ на A.

Введем, следуя работе И.Л. Блошанского [1], понятие слабой обобщенной локализации почти всюду для рядов Фурье.

Определение. Пусть A, $A\subset \mathrm{T}^N$, – произвольное множество положительной меры. Будем говорить, что для кратных рядов Фурье функций из класса $\Phi(L)$ справедлива на множестве A слабая обобщенная локализация почти всюду (СОЛ), если для любой функции $f\in\Phi(L)(\mathrm{T}^N)$, $f(x)=0$ на A, существует подмножество положительной меры A_1 множества A такое, что $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x;f)=0$ *почти всюду на* A_1.

Пусть $M=\{1,...,N\}$, $N>2$, $J_k=\{j_1,...,j_k\}\subset M$, $j_1<\ldots<j_k$, при $1\le k\le N-1$ или $J_k=\varnothing$ при $k=0$. Пусть $\lambda=\lambda(J_k)=(\lambda_{j_1},\ldots,\lambda_{j_k})\in \square_+^N$, $j_v\in J_k$, $v=1,...,k$. Символом $n^{(\lambda)}=n^{(\lambda)}[J_k]=(n_1,\ldots,n_N)\in \square_+^N$ будем обозначать такой N-мерный вектор, у которого компоненты n_j с номерами $j\in J_k$ являются элементами некоторых (однократных) лакунарных последовательностей ($n_j=n_j^{(\lambda_j)}$, $n_j^{(\lambda_j)}\to\infty$ при $\lambda_j\to\infty$ и $n_j^{(\lambda_j+1)}/n_j^{(\lambda_j)}\ge q>1$, $\lambda_j=1,2,...$).

Разложим пространство $\square^N$ на сумму двух подпространств $\square[J_k]$ и $\square[M\setminus J_k]$, где $\square[J_k]=\{x=(x_1,...,x_N)\in\square^N: x_j=0$ при $j\in M\setminus J_k\}$, а $\square[M\setminus J_k]=\{x=(x_1,...,x_N)\in\square^N: x_j=0$ при $j\in J_k\}$. Обозначим также $\mathrm{T}[J_k]=\{x\in\square[J_k]: -\pi\le x_j\le\pi$ при $j\in J_k\}$ и $\mathrm{T}[M\setminus J_k]=\{x\in\square[M\setminus J_k]: -\pi\le x_j\le\pi$ при $j\in M\setminus J_k\}$.

Далее, пусть $\Omega\subset\mathrm{T}^N$ – произвольное (непустое) открытое множество. Положим $W[J_s]=\Omega[J_s]\times\mathrm{T}[M\setminus J_s]$, $s=1,2$, где $\Omega[J_s]=pr_{(J_s)}\{\Omega\}$ – ортогональная проекция множества Ω на пространство $\square[J_s]$. (При этом любой вектор $z=(z_1,...,z_{2N})\in\Omega[J_s]\times\mathrm{T}[M\setminus J_s]$ мы отождествляем с вектором $x=(x_1,...,x_N)\in\square^N$ по формуле: $x_m=z_m$ при $m\in J_s$ и $x_m=z_{N+m}$ при $m\in M\setminus J_s$). Следуя терминологии работы И.Л. Блошанского [2] множества $W[J_1]$ будем называть "N-мерными плоскостями", а $W[J_2]$ – "N-мерными брусками". Далее для любого J_k, $0\le k\le N-1$, рассмотрим следующие множества: множество

$$W_s=W_s(J_k)=\bigcup_{J_s\subset M\setminus J_k} W[J_s] \qquad (1)$$

(которое при $s = 1$ будем называть "полным крестом из N-мерных плоскостей", если $J_k = \varnothing$, и "неполным крестом из N-мерных плоскостей", если $J_k \neq \varnothing$, а при $s = 2$ – "полным крестом из N-мерных брусков", если $J_k = \varnothing$, и "неполным крестом из N-мерных брусков", если $J_k \neq \varnothing$) и множество

$$W_s^0 = W_s^0(J_k) = \bigcap_{J_s \subset M \setminus J_k} W[J_s] \ ,$$

(которое будем называть "центром" соответствующего "N-мерного креста") (см. терминологию, используемую в работах И.Л. Блошанского и О.В. Лифанцевой [3, 4]).

Как известно (см. [2]), "самыми простыми" множествами, на которых справедлива СОЛ для суммируемых по прямоугольникам кратных рядов Фурье функций $f \in L_p(\mathrm{T}^N)$, являются "полные N-мерные брусочные кресты" $W_2(J_0)$ при $p > 1$, $N \geq 2$, и "полные N-мерные плоскостные кресты" $W_1(J_0)$ в случае $p = 1$, $N \geq 1$.

В то же время, если частичные суммы $S_n(x; f)$ ряда Фурье имеют "номер" $n = n^{(\lambda)}[J_k]$ ($N \geq 3$, $1 \leq k \leq N-2$), в котором k компонент n_j, $j \in J_k$, являются элементами лакунарных последовательностей, а остальные $N-k$ компонент n_j, $j \in M \setminus J_k$, – "свободны" (такие частичные суммы $S_{n^{(\lambda)}[J_k]}(x; f)$, следуя работам И.Л. Блошанского и О.В. Лифанцевой [3, 4], называются "J_k-лакунарными"), то в классах $L_p(\mathrm{T}^N)$, $p > 1$, заметно меняется геометрия множеств, на которых справедлива СОЛ. А именно, "самыми простыми" множествами, на которых справедлива СОЛ для кратных рядов Фурье с "J_k-лакунарной последовательностью частичных сумм" функций $f \in L_p(\mathrm{T}^N)$ при $p > 1$ и $N \geq 3$ будут уже "неполные N-мерные брусочные кресты" $W_2(J_k)$. Заметим, что в классе $L_1(\mathrm{T}^N)$ аналогичный результат не справедлив (см. [4]).

Что касается классов Орлича, то О.К. Ивановой в [5] было установлено, что "самыми простыми" множествами, на которых справедлива СОЛ для кратных рядов Фурье функций $f \in \Phi(L)(\mathrm{T}^N)$, $N \geq 1$ (где $\Phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ и $\Phi(u) = \overline{o}(u \ln^+ \ln^+ u)$ при $u \to \infty$), остаются "полные N-мерные плоскостные кресты" $W_1(J_0)$. Нами установлено, что "лакунарность" последовательности частичных сумм не позволяет для данного класса изменить геометрию этих крестов, а именно, справедлива следующая теорема (см. также [6]).

Теорема. Пусть $N \geq 2$ и $J_k \subset M$, $1 \leq k \leq N-1$, тогда существуют множество $W_1 = W_1(J_k)$ (вида (1)) и функция $f \in \Phi(L)(\mathrm{T}^N)$ (где $\Phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ и $\Phi(u) = \overline{o}(u \ln^+ \ln^+ u)$ при $u \to \infty$) такие, что $f(x) = 0$ на W_1, но "J_k-лакунарная последовательность частичных сумм" $S_{n^{(\lambda)}[J_k]}(x; f)$ неограниченно расходится почти всюду на T^N при $\lambda_j \to \infty$, $j \in J_k$, $n_j \to \infty$, $j \in M \setminus J_k$.

Доказательство теоремы. Фиксируем произвольное k, $1 \leq k \leq N-1$, $N \geq 2$. Не ограничивая общности будем считать, что $J_k = \{N-k+1, ..., N\}$, соответственно,

$M \setminus J_k = \{1,...,N-k\}$. Пусть $n^{(\lambda)} = n^{(\lambda)}[J_k] = (n_1,\ldots,n_N) \in \square_1^N$ – N-мерный вектор, у которого компоненты n_j с номерами $j \in J_k$ – элементы некоторых (однократных) лакунарных последовательностей $(n_j = n_j^{(\lambda_j)}, n_j^{(\lambda_j)} \to \infty$ при $\lambda_j \to \infty$ и $n_j^{(\lambda_j+1)} / n_j^{(\lambda_j)} \geq q > 1$, $\lambda_j = 1, 2,..., \ j = N-k+1,...,N)$.

Фиксируем произвольные a, b, $-\pi < a < b < \pi$, и в качестве "неполного креста из N-мерных плоскостей" возьмем множество

$$W_1 = \bigcup_{J_1 \subset M \setminus J_k} W[J_1], \tag{2}$$

где $W[J_1] = \Omega[J_1] \times \mathrm{T}[M \setminus J_1] = (a,b) \times [-\pi,\pi]^{N-1}$.

Определим функцию F следующим образом:

$$F(x) = \begin{cases} g(x_1)...g(x_{N-1})f(x_N), & \text{если } k = 1, \\ g(x_1)...g(x_{N-k})\psi(x_{N-k+1},...,x_{N-1})f(x_N), & \text{если } k > 1, \end{cases}$$

где $g(x_l) \in \square(\mathrm{T}^1)$, $l = 1,...,N-k$, причем $g(x_l) = 0$ при $x_l \in (a,b)$ и $g(x_l) \neq 0$ при $x_l \in \mathrm{T}^1 \setminus (a,b)$, $\psi(x_{N-k+1},...,x_{N-1}) \equiv 1$ при $(x_{N-k+1},...,x_{N-1}) \in \mathrm{T}^{k-1}$, и, наконец, $f(x_N)$, $f \in \Phi(L)(\mathrm{T}^1)$, где $\Phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ и $\Phi(u) = \overset{=}{o}(u \ln^+ \ln^+ u)$ при $u \to \infty$, – функция, построенная С.В. Конягиным в [7], для которой подпоследовательность частичных сумм $S_{n_N^{(\lambda_N)}}(x_N; f)$ неограниченно расходится почти всюду (п.в.) на T^1.

Получаем, что, во-первых, так определенная функция $F \in \Phi(L)(\mathrm{T}^N)$ и, во-вторых, $F(x) = 0$ при $x \in W_1$.

Для доказательства последнего достаточно заметить, что для любой "N-мерной плоскости" $W[J_1]$, $J_1 \subset M \setminus J_k$, найдутся непрерывные функции $g(x_l)$, $l = 1,...,N-k$, которые "обнулят" функцию $F(x)$ на этой "N-мерной плоскости", т.е. на множестве $W[J_1]$. А так как функция $F(x) = 0$ на каждой из "N-мерных плоскостей" $W[J_1]$, входящей в состав "N-мерного креста" W_1 – (2), то $F(x) = 0$ на всем множестве W_1.

В то же время, очевидно,

$$S_{n^{(\lambda)}[J_k]}(x; F) = \prod_{l=1}^{N-k} S_{n_l}(x_l; g(x_l)) \cdot S_{n_N^{(\lambda_N)}}(x_N; f)$$

Так как функции $g(x_l) \neq 0$ при $x_l \in \mathrm{T}^1 \setminus (a,b)$, $S_{n_l}(x_l; g(x_l))$, $l = 1,...,N-k$, – тригонометрические полиномы, то $S_{n_l}(x_l; g(x_l)) \neq 0$, начиная с некоторого номера и для п.в. $x_l \in [-\pi,\pi]$, $l = 1,...,N-k$. Получаем, что если $n_N^{(\lambda_N)}$ растет достаточно быстро, то "J_k-лакунарная последовательность частичных сумм" $S_{n^{(\lambda)}}(x; F)$ неограниченно расходится для п.в. $x \in \mathrm{T}^N$ при $\lambda_j \to \infty$, $j \in J_k$, $n_j \to \infty$, $j \in M \setminus J_k$.

Теорема доказана.

В заключение автор выражает глубокую благодарность И.Л. Блошанскому за постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Блошанский, И.Л.* О критериях слабой обобщенной локализации в *N*-мерном пространстве // Докл. АН СССР. 1983. Т. 271. №6. С. 1294-1298.
2. *Блошанский, И.Л. Два критерия слабой обобщенной локализации для кратных тригонометрических рядов Фурье функций из* L_p, $p>1$ // Изв. АН СССР. Серия матем. 1985. Т. 49. № 2. С. 243-282.
3. *Блошанский, И.Л., Лифанцева О.В.* Критерий слабой обобщенной локализации для кратных рядов Фурье, прямоугольный частичные суммы которых рассматриваются по некоторой подпоследовательности // ДАН России. 2008. Т. 423. № 4. С. 439-442.
4. *Блошанский, И.Л., Лифанцева О.В.* О локализации для кратных рядов Фурье с лакунарной последовательностью частичных сумм в классе L_1 // Материалы 15-й зимней математической школы в Саратове. Саратов. 2010. С. 29-30.
5. *Иванова О.К.* Слабая обобщенная локализация в пространствах Орлича // Дисс. ...канд. физ.-матем. наук: М., 1999.
6. *Tsukareva, Z. Bloshanskii I., Lifantseva O.*. On localization for multiple Fourier series with lacunary sequences of partial sums in Orlicz spaces // The 8-th Congress of the International Society for Analysis, its Applications, and Computations. M., PFUR, 2011. P. 399-400.
7. *Конягин, С.В.* О расходимости всюду подпоследовательностей частных сумм тригонометрических рядов Фурье // Труды института математики и механики УрО РАН. 2005. Т. 11. №2. С. 112-119.

WEAK GENERALIZED LOCALIZATION FOR MULTIPLE FOURIER SERIES WITH LACUNARY SEQUENCES OF PARTIAL SUMS IN ORLICZ SPACES

Z.N. Tsukareva

Moscow State Regional University
10a, Radio st., Moscow, 105005 Russia

Abstract. In the present paper we consider behavior of rectangular partial sums $S_n(x;f)$, $x\in \mathrm{T}^N=[-\pi,\pi]^N$, $n=(n_1,...,n_N)\in \square^N$, of multiple trigonometric Fourier series of functions f in Orlicz spaces $\Phi(L)(\mathrm{T}^N)$ (where non-decreasing function $\Phi:[0,\infty)\to[0,\infty)$, $\Phi(u)=\overline{o}(u\ln^+\ln^+u)$ as $u\to\infty$) in the case, when some components n_j of vector n are elements of some (singular) lacunary sequences.

Key words: multiple Fourier series, weak generalized localization, sets of convergence and divergence, Orlicz spaces, lacunary sequence.

УДК 517.95

О РАЗРЕШИМОСТИ ОБРАТНЫХ КОЭФФИЦИЕНТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В.В. Соловьёв

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ» (Москва)
115409, Москва, Каширское ш., 31

Аннотация. Приведена формулировка теоремы единственности для обратной задачи определения правой части параболического уравнения с переопределением на верхней крышке в случае первой краевой задачи. Сформулированы теоремы существования и единственности для обратной задачи определения коэффициента в параболическом уравнении. Приведены примеры функций удовлетворяющих всем условиям теоремы существования и единственности.
Ключевые слова: обратная задача, параболическое уравнение, переопределение на верхней крышке.

Пусть $G \subset R^n$ - ограниченная область с границей класса $C^{2,\alpha}$, $0 < \alpha < 1, T > 0$ - фиксированные числа. В цилиндре $\Omega_T = G \times (0,T]$ рассмотрим обратные задачи для уравнения параболического типа с переопределением на верхней крышке.

1. Задача 1.Определить пару функций $u \in C(\overline{\Omega}_T) \cap C^{2,1}(\Omega_T)$, $f \in C^{\alpha}(\overline{G})$ из условий:

$$\rho(x,t)u_t(x,t) = (Lu)(x,t) + f(x)h(x,t) + g(x,t), (x,t) \in \Omega_T,$$

$$u(x,0) = \varphi(x), x \in \overline{G}, u(x,t) = \mu(x,t), (x,t) \in \Gamma_T = \partial G \times [0,T], \quad (1)$$

$$u(x,T) = \chi(x), x \in \overline{G}. \quad (2)$$

В уравнении (1):

$$(Lu)(x,t) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i x_j}(x,t) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)u_{x_i}(x,t) + c(x,t)u(x,t),$$

$$c(x,t) \le 0 \ , \quad \lambda_0 |\xi|^2 \le \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \le \lambda_1 |\xi|^2, \lambda_0, \lambda_1 > 0.$$

Обратная задача (1)-(2) изучалась в целом ряде работ, историю вопроса и дальнейшие ссылки см. [1]. В данной работе формулируется теорема единственности для задачи (1)-(2) и теорема существования для задачи определения коэффициента обобщающая результат работы [2].

Теорема 1. Пусть справедливы включения:

$$a_{ij}, b_i \in C^{\alpha}(\bar{G}), \rho, c, h, \rho_t, \qquad c_t, h_t \in C^{\alpha,\alpha/2}(\bar{\Omega}_T),$$

выполнены неравенства:

$$\rho(x,t) \geq \rho_0 > 0, c(x,t) \leq 0, \qquad c_t(x,t) \geq 0, h(x,t)h_t(x,t) \geq 0, (x,t) \in \bar{\Omega}_T.$$

Тогда обратная задача (1)-(2) не может иметь двух различных решений тогда и только тогда когда носитель функции $h(x,T)$ совпадает с $\bar{G}$.

Всюду далее под нормой функции понимается обычная *sup*-норма. Кроме того, если задана вещественнозначная функция $g(y)$,то, как обычно,

$$g^{+}(y) = \max\{g(y), 0\}, g^{-}(y) = |g(y)| - g^{+}(y).$$

Определим следующие функциональные пространства

$$U(\Omega_T) = C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\bar{\Omega}_T),$$
$$U_1(\Omega_T) = \{u \in U(\Omega_T) : u_t \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\Omega_T) \cap C\ (\bar{\Omega}_T) = V(\Omega_T)\},$$
$$F(G) = \{f \in C^{\alpha}(\bar{G}) : f(x) \leq 0\}.$$

2. Задача 2. Рассмотрим обратную задачу определения пары функций:

$$(u, f) \in U_1(\Omega_T) \times F(G)$$

из условий:

$$u_t(x,t) = (Lu)(x,t) + f(x)u(x,t) + g(x,t), (x,t) \in \Omega_T,$$

$$u(x,0) = \varphi(x), x \in \bar{G}, u(x,t) = \mu(x,t), (x,t) \in \Gamma_T = \partial G \times [0,T], \tag{3}$$

$$u(x,T) = \chi(x), x \in \bar{G}. \tag{4}$$

Для задачи (3)-(4) справедлива теорема единственности.

Теорема 2. Пусть справедливы включения

$$a_{ij}, b_i \in C^{\alpha}(\bar{G}), \varphi \in C^{2,\alpha}(\bar{G}), \qquad c, g, c_t, g_t \in C^{\alpha,\alpha/2}(\bar{\Omega}_T),$$

выполнены неравенства:

$$c(x,t) \leq 0, c_t(x,t) \geq 0, \qquad g(x,t) \geq 0, g_t(x,t) \geq 0, (x,t) \in \bar{\Omega}_T,$$

$$\varphi(x) \geq 0, x \in G, \mu(x,t) \geq 0, \mu_t(x,t) \geq 0\ , \quad (x,t) \in \Gamma_T.$$

Тогда:
1) Если $\varphi \equiv 0$ и хотя бы одна из функций g, μ отлична от тождественного нуля то обратная задача (3)-(4) не может иметь двух различных решений.
2) Если φ не тождественный нуль, то определим величину

$$R = \left\| ((L\varphi)(x,0) + g(x,0))^- \right\| + \left\| ((L\chi)(x,T) + g(x,T))^+ \right\| / (1 - \left\| \varphi \right\| / \chi_0).$$

В этом случае, если

$$(L\varphi)(x,0) - R\varphi(x) + g(x.0) \geq 0, x \in G,$$

то обратная задача (3)-(4) не может иметь двух различных решений.

При рассмотрении вопроса о существовании решения обратной задачи (3)-(4) будем предполагать, что

$$c(x,t) \equiv c(x), \varphi(x) \equiv 0, \qquad \chi(x) \geq \chi_0 > 0.$$

Для формулировки теоремы существования определим функцию $\overline{v}(x,t), \overline{v} \in V(\Omega_T)$ как решение следующей краевой задачи:

$$\overline{v}_t(x,t) = (L\overline{v})(x,t) + (g_t)^+(x,t), (x,t) \in \Omega_T,$$

$$\overline{v}(x,0) = g^+(x,0), x \in \overline{G}, \overline{v}(x,t) = (\mu_t)^+(x,t), (x,t) \in \Gamma_T = \partial G \times [0,T]. \qquad (5)$$

Кроме того, пусть $t_1 \in (0,T)$, t_1-произвольное число, $\Gamma_1 = \partial G \times [t_1, T]$.

Теорема 3. Пусть справедливы включения

$$a_{ij}, b_i, c \in C^{\alpha}(\overline{G}), \qquad g, g_t \in C^{\alpha, \alpha/2}(\overline{\Omega}_T),$$

$$\mu \in C^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\Gamma_T), \qquad \mu_t \in C^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\Gamma_1),$$

выполнены условия согласования

$$\mu(x,0) = 0, \mu_t(x,0) = g(x,0), x \in \partial G$$

и неравенство $c(x) \leq 0$. Тогда для любой функции $\chi \in C^{2,\alpha}(\overline{G})$ удовлетворяющей условиям согласования:

$$\mu(x,T) = \chi(x), x \in \partial G$$

и неравенствам :

$$\chi(x) \geq \chi_0 > 0, \overline{v}(x,T) - ((L\chi)(x) + g(x,T)) \leq 0, x \in G$$

существует решение задачи (3)-(4).

Из теорем два и три получаем следующее утверждение.

Следствие. Пусть дополнительно к условиям теоремы 3 выполнены условия

$$g(x,t) \geq 0, g_t(x,t) \geq 0, \mu(x.t) \geq 0, \mu_t(x,t) \geq 0.$$

Тогда задача (3)-(4) имеет, и притом, единственное решение в указанном классе функций.

Замечание. Приведённые выше условия существования и единственности решения обратной задачи (3)-(4) содержат довольно много ограничений на заданные функции. Приведём простой пример показывающий, что все эти условия могут быть легко удовлетворены. Пусть

$$\varphi(x) = 0, x \in G, \mu(x,t) = t, g(x,t) = t+1, Lu = \Delta u.$$

Тогда получим обратную задачу определения пары функций $(u, f) \in U_1(\Omega) \times F(G)$ из условий:

$$u_t(x,t) = (\Delta u)(x,t) + f(x)u(x,t) + t + 1, (x,t) \in \Omega_T,$$

$$u(x,0) = 0, x \in \overline{G}, u(x,t) = t, (x,t) \in \Gamma_T, u(x,T) = \chi(x), x \in \overline{G}. \qquad (7)$$

Для функции $\overline{v}(x,t)$ из условий (5) получаем задачу:

$$\overline{v}_t(x,t) = (\Delta\overline{v})(x,t) + 1, (x,t) \in \Omega_T, \quad \overline{v}(x,0) = 1, x \in \overline{G}, \overline{v}(x,t) = 1, (x,t) \in \Gamma_T.$$

Тогда для функции χ из теоремы 2 получаем условия

$$\chi(x) \geq \chi_0 > 0, \overline{v}(x,T) - \Delta\chi(x) - (T+1) \leq 0.$$

В силу очевидной оценки $\overline{v}(x,T) \leq T+1,$ следующей для $\overline{v}(x,t)$ из принципа максимума, из второго неравенства получаем оценку $\Delta\chi(x) \geq 0, x \in G.$ Таким образом получаем, что для существования единственного решения обратной задачи (7) достаточно чтобы функция χ удовлетворяла условиям:

$$\Delta\chi(x) \geq 0, x \in G, \chi(x) = 1, x \in \partial G, \chi(x) \geq \chi_0 > 0, x \in G.$$

Этим условиям удовлетворяет, например, гармоническая в G функция. Из приведённого примера видно, что множество функций удовлетворяющих условиям теорем существования и единственности достаточно велико.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Prilepko, A.I.,Orlovsky D.G.,Vasin I.A.* Methods for solving inverse problems in mathematical physics. New York-Basel: Marcel Dekker Inc.,2000.

2. *Прилепко, А.И.,Соловьёв В.В.* О разрешимости обратных краевых задач определения коэффициента перед младшей производной в параболическом уравнении. // Дифференциальные уравнения, т.23, №1, 1987. С. 136-143.

DESIDABILITY OF INVERSE PROBLEMS FOR PARABOLIC EQUATION

V. Soloviev

National Research Nuclear University «MEPhI» (Moscow)
31, Kashirskoe shosse, Moscow, 115409, Russia

Abstract. In this paper the inverse problems for the parabolic equation in the bounded domain are considered for case of the first bounded problem. Additional information for the direct problems (overdetermination) is given in the fixed moment of time. The existence and uniqueness theorems are formulated. The examples for inverse problems are detailed.
Key words: inverse problems, elliptic equation, overdetermination.

УДК 517.95

РАЗРЕШИМОСТЬ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ЦИЛИНДРЕ

В.В. Соловьёв

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ» (Москва)
115409, Москва, Каширское ш., 31

Аннотация. Приведены формулировки теорем единственности и существования для обратной задачи определения коэффициента эллиптического уравнения в цилиндре с переопределением на многообразии внутри цилиндра в случае первой краевой задачи. Сформулированы теоремы существования и единственности для обратной задачи определения коэффициента и правой части в эллиптическом уравнении в случае переопределения на верхней крышке цилиндра, а также рассмотрена аналогичная задача в области специального вида. Приведены примеры функций удовлетворяющих всем условиям теоремы существования и единственности.
Ключевые слова: обратная задача, эллиптическое уравнение, переопределение.

Пусть $R^n = \{x_1,...,x_n\}, R^{n+1} = \{y,x\} = \{y,x_1,...,x_n\}$, $0<\alpha<1$, $q_1<0<q_2$ - фиксированные числа $G \subset R^n$ - ограниченная область с границей класса $C^{2,\alpha}$. В цилиндре $\Omega = (q_1,q_2)\times G \subset R^{n+1}$ рассмотрим первую краевую задачу для уравнения эллиптического типа следующего вида:

$$-(a(y,x)u_{yy}(y,x)+(Lu)(y,x)) = f(x)u(y,x)+g(y,x),(y,x)\in\Omega, \quad (1)$$

$$u(y,x)=\nu(y,x),(y,x)\in\Gamma=[q_1,q_2]\times\partial G, u(q_1,x)=u(q_2,x)=0, x\in\overline{G}. \quad (2)$$

В уравнении (1):

$$(Lu)(y,x)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)u_{x_ix_j}(y,x)+\sum_{i=1}^{n}b_i(x)u_{x_i}(y,x)+c(x)u(y,x),$$

$$a(y,x)\geq a_0>0, c\leq 0, \qquad \lambda_0|\xi|^2\leq\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\leq\lambda_1|\xi|^2, \lambda_0,\lambda_1>0.$$

Известно (см.[1]) что задача (1)-(2) при некоторых ограничениях на гладкость заданных в условиях (1)-(2) функций, при условии $f(x)\leq 0$ и условиях согласования $\nu(q_i,x)=0, x\in\overline{G}, i=1,2,$ имеет единственное решение в классе функций $U(\Omega)=\{u\in C(\overline{\Omega}):u\in C^{2,\alpha}(\Omega)\}$. Изучение обратной задачи для уравнения (1) проводится в более узком классе функций $U_1(\Omega)=\{u\in U(\Omega):u_{yy}\in U(\Omega)\}$. Приведём формулировку теоремы существования и единственности решения задачи (1)-(2) в классе функций $U_1(\Omega)$. При этом, для сокращения записи, будем использовать следующие обозначения:

$$(Mu)(y,x)=a(y,x)u_{yy}(y,x)+(Lu)(y,x),$$

$$(M_1w)(y,x)=(Mw)(y,x)+2a_y(y,x)w_y(y,x)+a_{yy}(y,x)w(y,x).$$

Теорема 1. Пусть справедливы включения:

$$a_{ij},b_i,c,f\in C^{\alpha}\cap C(\overline{G}), \qquad a,a_{yy},g,g_{yy}\in C^{\alpha}(\Omega)\cap C(\overline{\Omega}), \qquad \nu,\nu_{yy}\in C(\Gamma),$$

выполнены неравенства:

$$f(x)\leq 0, \qquad c(x)+a_{yy}(y,x)\leq 0.$$

Тогда для существования единственного решения задачи (1)-(2) в классе $U_1(\Omega)$ необходимо и достаточно выполнения условий согласования

$$\nu(q_i,x)=0, -a(q_i,x)\nu_{yy}=g(q_i,x), x\in\partial G.$$

При этом функция $w=u_{yy}\in U(\Omega)$ удовлетворяет следующей краевой задаче:

$$-(M_1w)(y,x)=f(x)w(y,x)+g_{yy}(y,x), (y,x)\in\Omega,$$

$$w(y,x)=\nu_{yy}(y,x), (y,x)\in\Gamma, w(q_i,x)=-g(q_i,x)/a(q_i,x), x\in\partial G.$$

Для постановки обратной задачи определения коэффициента определим множество функций:

$$F(G) = \{f \in C(\bar{G}) : f \in C^{\alpha}(G), \quad f(x) \le 0\}.$$

Рассмотрим обратную задачу определения пары функций $(u, f) \in U_1(\Omega) \times F(G)$ из условий:

$$-(Mu)(y,x) = f(x)u(y,x) + g(y,x), (y,x) \in \Omega, \tag{3}$$

$$u(y,x) = \nu(y,x), (y,x) \in \Gamma, u(q_i, x) = 0, u(x,0) = \chi(x), x \in \bar{G}. \tag{4}$$

Обратная задача в постановке (3)-(4) изучалась автором в работе [2] для случая оператора Лапласа, в данной работе рассматривается более общий эллиптический оператор. Для задачи (3)-(4) верна следующая теорема единственности.

Теорема 2.Пусть

$$a, a_{yy}, g, g_{yy} \in C^{\alpha}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}), a_{ij}, b_i, c \in C^{\alpha} \cap C(\bar{G}),$$

выполнены неравенства

$$c(x) + a_{yy}(y,x) \le 0, g(y,x) \ge 0, g_{yy}(y,x) \le 0,$$

$$\nu(y,x) \ge 0, \qquad \nu_{yy}(y,x) \le 0,$$

при этом хотя бы одна из функций ν, g отлична от тождественного нуля. Тогда обратная задача (3)-(4) не может иметь двух различных решений.

Рассмотрим постановки обратных задачи определения коэффициентов и правой части в более узком классе функций:

$$u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}) = U_2(\Omega), f \in F_1(G) = \{f \in C^{\alpha}(\bar{G}) : f(x) \le 0\}.$$

При таком выборе функциональных пространств задачу (3)-(4) можно изучить для более общих эллиптических уравнений.

Пусть

$$(L_1 u)(y,x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i x_j}(y,x) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) u_{x_i}(y,x) + c(y,x)u(y,x),$$

$$(M_2 u)(y,x) = a(y,x)u_{yy}(y,x) + (L_1 u)(y,x).$$

Изучим задачи определения коэффициента и правой части в области Ω симметричной относительно плоскости $y = 0$. Пусть $q > 0$ – фиксированное число,

$$\Omega = (-q,q) \times G, \quad \Omega_{-} = (-q,0) \times G, \quad \Gamma = [-q,q] \times \partial G, \quad \Gamma_{-} = [-q,0] \times \partial G.$$

Рассмотрим сначала обратную задачу определения пары функций $(u, f) \in U_2(\Omega) \times C^\alpha(\bar{G})$ из условий:

$$-(M_2 u)(y,x) = f(x)h(y,x) + g(y,x), \quad (y,x) \in \Omega, \quad u(y,x) = \nu(y,x),$$

$$(y,x) \in \Gamma, \quad u(q,x) = \lambda(x), \quad u(-q,x) = \beta(x), \quad u(0,x) = \chi(x), x \in \bar{G}. \qquad (5)$$

Для формулировки теоремы единственности решения задачи (5) определим функции:

$$h_r(y,x) = (h(y,x) + h(-y,x))/2,\ h_n(y,x) = (h(y,x) - \ -h(-y,x))/2,$$

аналогично определяются функции ν_r, ν_n, g_r, g_n. Для задачи (5) справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Пусть

$$a, c, a_y, c_y, h_y \in C^\alpha(\bar{\Omega}_-), a_{ij}, b_i \in C^\alpha(\bar{G}), h \in C^\alpha(\bar{\Omega}),$$

выполнены условия симметрии

$$a(y,x) = a(-y,x), c(y,x) = c(-y,x).$$

Тогда, если выполнено неравенство

$$h_r(y,x)(h_r)_y(y,x) \geq 0, (y,x) \in \Omega,$$

то задача (5) не может иметь двух различных решений тогда и только тогда когда носитель функции $h(0,x)$ совпадает с $\bar{G}$.

В качестве приложения теоремы 3 рассмотрим обратную задачу определения правой части уравнения в случае переопределения на верхней крышке цилиндра (см. [3]). Пусть требуется определить пару функций $(u, f) \in U_2(\Omega) \times C^\alpha(\bar{G})$ из условий:

$$\begin{aligned} -(M_2 u)(y,x) &= f(x)h(y,x) + g, \\ (y,x) \in \Omega_-, &\quad u(y,x) = \nu(y,x), \\ (y,x) \in \Gamma_-, &\quad u(-q,x) = \beta(x), \\ u_y(0,x) = \gamma(x), &\quad u(0,x) = \chi(x), x \in \bar{G}. \end{aligned} \qquad (6)$$

Для задачи (6) справедлива следующая теорема единственности.

Теорема 4. Пусть

$$a, c, a_y, c_y, h, h_y \in C^\alpha(\bar{\Omega}_-), a_{ij}, b_i \in C^\alpha(\bar{G}),$$

справедливо неравенство

$$h(y,x)h_y(y,x) \geq 0, (y,x) \in \Omega_-.$$

Тогда задача (6) не может иметь двух различных решений тогда и только тогда, когда носитель функции $h(0,x)$ совпадает с $\bar{G}$.

Рассмотрим далее задачу определения коэффициента в случае цилиндра симметричного относительно плоскости $y = 0,$ т.е. задачу определения пары функций $(u, f) \in U_2(\Omega) \times F_1(G)$ из условий:

$$\begin{gathered} -(M_2 u)(y,x) = f(x)u(y,x) + g(y,x), \\ (y,x) \in \Omega, \quad u(y,x) = \nu(y,x), \\ (y,x) \in \Gamma, \ u(\pm q, x) = 0, \quad u(0,x) = \chi(x), x \in \bar{G}. \end{gathered} \tag{7}$$

Теорема 5. Пусть

$$a, c, a_y, c_y, g_y \in C^\alpha(\bar{\Omega}_-), a_{ij}, b_i \in C^\alpha(\bar{G}), g \in C^\alpha(\bar{\Omega}), \ \nu \in C^{2+\alpha}(\Gamma),$$

выполнено неравенство:

$$c_y(y,x) \geq 0, (y,x) \in C(\Omega_-),$$

и условия симметрии

$$a(y,x) = a(-y,x), c(y,x) = c(-y,x).$$

Тогда, если

$$\nu_r(y,x) \geq 0, (\nu_r)_y(y,x) \geq 0, (y,x) \in \Gamma_-, \ \ g_r(y,x) \geq 0, (g_r)_y(y,x) \geq 0, \ \ (y,x) \in \Omega_-$$

и хотя бы одна из функций ν_r, g_r не тождественный ноль, то не может существовать двух различных решений задачи (7).

В качестве приложения теоремы 5 рассмотрим обратную задачу определения коэффициента с переопределением на верхней крышке цилиндра. Пусть требуется определить пару функций $(u, f) \in U_2(\Omega_-) \times F_1(G)$ из условий:

$$\begin{gathered} -(M_2 u)(y,x) = f(x)u(y,x) + g(y,x), \\ (y,x) \in \Omega_-, \quad u(y,x) = \nu(y,x), \\ (y,x) \in \Gamma_-, \quad u(-q,x) = 0, u_y(0,x) = 0, \quad u(0,x) = \chi(x), x \in \bar{G}. \end{gathered} \tag{8}$$

Для задачи (8) верна следующая теорема единственности.

Теорема 6. Пусть

$$a, c, g, a_y, c_y, g_y \in C^\alpha(\bar{\Omega}_-), a_{ij}, b_i \in C^\alpha(\bar{G}), \nu \in C^{2+\alpha}(\Gamma_-),$$

выполнены неравенства

$$\nu(y,x) \geq 0, \nu_y(y,x) \geq 0, (y,x) \in \Gamma_-,$$

$$g(y,x) \geq 0, g_y(y,x) \geq 0, (y,x) \in \Omega_-,$$

при этом хотя бы одна из функций ν, g - не тождественный ноль. Тогда не может существовать двух различных решений задачи (8).

Рассмотрим обратные задачи определения коэффициента и правой части в области специального вида с гладкой границей и переопределением внутри области. Будем говорить, что область $\Omega \subset R^{n+1}$ удовлетворяет условию (С), если выполнены следующие требования:

1)существуют такие числа $q, q_1 : 0 < q < q_1,$ что для цилиндров

$$Q(q) = (-q,q) \times G, Q(q_1) = (-q_1, q_1) \times G$$

справедливо включение

$$Q(q) \subset \Omega \subset Q(q_1),$$

2) существует такая функция $\mu \in C(\bar{G}),$ что выполнено тождество

$$\Omega = \{(y,x) : x \in G, |\, y \,| < \mu(x)\},$$

3) граница области Ω является многообразием гладкости $C^{2,\alpha}$.

В области $\Omega \subset R^{n+1}$ удовлетворяющей условию (С) рассмотрим обратную задачу определения пары функций $(u,f) \in U_2(\Omega) \times C^{\alpha}(\bar{G})$ из условий:

$$\begin{gathered} -(M_2 u)(y,x) = f(x)h(y,x) + g(y,x), \\ (y,x) \in \Omega, \quad u(y,x) = \nu(y,x), \\ (y,x) \in \partial\Omega, \quad u(0,x) = \chi(x), x \in \bar{G}. \end{gathered} \tag{9}$$

Пусть

$$\Omega_- = \{(y,x) \in \Omega : y < 0\}, \quad \partial\Omega_- = \{(y,x) \in \partial\Omega, y \leq 0\}.$$

Для задачи (9) справедлива следующая теорема единственности.

Теорема 7. Пусть область Ω удовлетворяет условию (С),

$$a, c, a_y, c_y \in C^{\alpha}(\bar{\Omega}_-), a_{ij}, b_i \in C^{\alpha}(\bar{G}), h, h_y \in C^{\alpha}(\bar{\Omega}),$$

выполнены условия симметрии

$$a(y,x)=a(-y,x),c(y,x)=c(-y,x).$$

Тогда, если выполнено неравенство

$$h_r(y,x)(h_r)_y(y,x)\geq 0,(y,x)\in\Omega,$$

то задача (9) не может иметь двух различных решений тогда и только тогда когда носитель функции $h(0,x)$ совпадает с $\overline{G}$.

Аналогично предыдущим построениям рассмотрим задачу определения коэффициента в области удовлетворяющей условию (С), т.е. задачу определения пары функций $(u,f)\in U_2(\Omega)\times F(\overline{G})$ из условий:

$$\begin{gathered}-(M_2u)(y,x)=f(x)u(y,x)+g(y,x),\\ (y,x)\in\Omega,\quad u(y,x)=\nu(y,x),\\ (y,x)\in\partial\Omega,\quad u(0,x)=\chi(x),x\in\overline{G}.\end{gathered}\tag{10}$$

Теорема 8. Пусть область Ω удовлетворяет условию (С),

$$a,c,a_y,\quad c_y\in C^{\alpha}(\overline{\Omega}_-),a_{ij},b_i\in C^{\alpha}(\overline{G}),g,g_y\in C^{\alpha}(\overline{\Omega}),\nu\in C^{2,\alpha}(\partial\Omega),\quad \nu(y,x)=0,$$
$$(y,x)\in\partial\Omega,|\,y\,|>q,$$

выполнены условия симметрии

$$a(y,x)=a(-y,x),\quad c(y,x)=c(-y,x),$$

выполнены неравенства

$$c(y,x)\leq 0,c_y(y,x)\geq 0,\quad (y,x)\in\Omega_-,$$

Тогда, если справедливы неравенства

$$\nu_r(y,x)\geq 0,\ (\nu_r)_y(y,x)\geq 0,(y,x)\in\partial\Omega,g_r(y,x)\geq 0,(g_r)_y(y,x)\geq 0,(y,x)\in\Omega_-$$

и хотя бы одна из функций ν_r,g_r отлична от тождественного ноля, то не может существовать двух различных решений задача (10).

Рассмотрим аналог обратной задачи (10) с переопределением на границе. Будем говорить, что область $\Omega_-\subset R^{n+1}$ удовлетворяет условию (C_1), если:

1)существуют числа $q,q_1:0<q<q_1,$ такие, что для цилиндров

$$Q_1(q)=(-q,0)\times G,$$

справедливо включение

$$Q_1(q) \subset \Omega_- \subset Q_1(q_1),$$

2)существует функция $\mu \in C(\overline{G})$ такая, что справедливо равенство

$$\Omega_- = \{(y,x) \in R^{n+1} : x \in G, -\mu(x) < y < 0\},$$

3)часть границы области Ω_- при $y \le 0,$ многообразие

$$\Gamma_1 = \partial\Omega_- \setminus \{(y,x) : y = 0, x \in G\}$$

является гладким класса $C^{2,\alpha}$.

В области Ω_- удовлетворяющей $(C_1),$ рассмотрим обратную задачу определения пары функций $(u,f) \in U_2(\Omega_-) \times F(\overline{G})$ из условий:

$$\begin{gathered} -(M_2 u)(y,x) = f(x)u(y,x) + g(y,x), \\ (y,x) \in \Omega_-, \quad u(y,x) = \nu(y,x), \\ (y,x) \in \Gamma_1, \quad u_y(0,x) = 0, u(0,x) = \chi(x), x \in \overline{G}. \end{gathered} \tag{11}$$

Теорема 9. Пусть область Ω_- удовлетворяет условию (C_1),

$$a, c, a_y, c_y \in C^\alpha(\overline{\Omega}_-), a_{ij}, b_i \in C^\alpha(\overline{G}), g, g_y \in C^\alpha(\overline{\Omega}_-), \nu \in C^{2,\alpha}(\Gamma_1),$$

$$\nu(y,x) = 0, (y,x) \in \Gamma_1, |\, y \,| > q,$$

выполнены условия симметрии

$$a(y,x) = a(-y,x), c(y,x) = c(-y,x),$$

выполнены неравенства

$$c(y,x) \le 0, c_y(y,x) \ge 0, (y,x) \in \Omega_-,$$

Тогда, если выполнены неравенства

$$\nu(y,x) \ge 0, \nu_y(y,x) \ge 0, (y,x) \in \partial\Omega, g(y,x) \ge 0, g_y(y,x) \ge 0, (y,x) \in \Omega_-$$

и хотя бы одна из функций ν, g отлична от тождественного ноля, то не может существовать двух различных решений задача (11).

Переходя к вопросу о существовании решения обратной задачи (3)-(4) напомним, что если задана вещественнозначная функция $g(y)$,то, как обычно,

$$g^+(y) = \max\{g(y), 0\}, g^-(y) = |g(y)| - g^+(y).$$

Для формулировки теоремы существования для задачи (3)-(4) определим вспомогательную функцию $\overline{w}(y,x), \overline{w} \in U(\Omega)$, как решение следующей краевой задачи:

$$-(M_1\overline{w})(y,x) = (g_{yy})^-(y,x), (y,x) \in \Omega,$$

$$\overline{w}(y,x) = (\nu_{yy})^-(y,x), (y,x) \in \Gamma, \overline{w}(q_i,x) = g^+(q_i,x)/a(q_i,x), x \in \partial G.$$

Для задачи (3)-(4) в цилиндре

$$\Omega = (q_1, q_2) \times G \subset R^{n+1}$$

справедлива следующая теорема существования.

Теорема 10. Пусть справедливы включения:

$$a_{ij}, b_i, c, f \in C^\alpha \cap C(\overline{G}),\ a, a_{yy}, g, g_{yy} \in C^\alpha(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}),\ \nu, \nu_{yy} \in C(\Gamma),$$

выполнены неравенства

$$c(x) + a_{yy}(y,x) \le 0, (y,x) \in \Omega$$

и условия согласования

$$\nu(q_i,x) = 0, -a(q_i,x)\nu_{yy} = g(q_i,x), x \in \partial G.$$

Тогда для любой функции

$$\chi \in H(G) = \{\chi \in C(\overline{G}) : \chi \in C^{2,\alpha}(G), (L\chi) \in C(\overline{G})\},$$

удовлетворяющей условиям согласования

$$\chi(x) = \nu(0,x), x \in \partial G,$$

условию

$$\chi(x) \ge \chi_0 > 0, x \in G$$

и неравенству

$$a(0,x)\overline{w}(0,x) - ((L\chi)(x) + g(0,x)) \le 0, x \in G,$$

существует решение обратной задачи (3)-(4).

Следствие. Пусть дополнительно к условиям теоремы 10 выполнены условия

$$g(y,x) \ge 0, g_{yy}(y,x) \le 0, \nu(y,x) \ge 0, \nu_{yy}(y,x) \le 0.$$

Тогда задача (3)-(4) имеет и притом единственное решение в указанном классе функций.

В качестве приложения теоремы 10 рассмотрим вопрос о существовании решения обратной задачи определения коэффициента с переопределением на границе. Пусть требуется определить пару функций $(u,f) \in U_1(\Omega_-) \times F(G)$ из условий:

$$\begin{gathered} -(Mu)(y,x) = f(x)u(y,x) + g(y,x), \\ (y,x) \in \Omega_-, \quad u(y,x) = \nu(y,x), \\ (y,x) \in \Gamma_-, \quad u_y(0,x) = 0, u(-q,x) = 0, u(0,x) = \chi(x), x \in \bar{G}. \end{gathered} \tag{12}$$

Для формулировки теоремы существования задачи (12) продолжим чётным образом по y в цилиндр

$$\bar{\Omega}_1 = [-q,q] \times \bar{G}$$

функции a, g, ν и в цилиндре $\bar{\Omega}_1$ рассмотрим краевую задачу определения функции $\bar{w} \in U(\Omega_1)$ из условий:

$$\begin{gathered} -(\tilde{M}_1 \bar{w})(y,x) = (\tilde{g}_{yy})^-(y,x), (y,x) \in \Omega_1, \quad \bar{w}(y,x) = (\tilde{\nu}_{yy})^-(y,x), \\ (y,x) \in \Gamma_1 = [-q,q] \times \partial G, \bar{w}(\pm q,x) = \tilde{g}^+(\pm q,x) / \tilde{a}(\pm q,x), x \in G. \end{gathered} \tag{13}$$

В условиях (13) функции с тильдой суть продолжения по y в цилиндр $\bar{\Omega}_1$ с цилиндра $\bar{\Omega}$ чётным образом соответствующих функций заданных в цилиндре $\bar{\Omega}$, $\tilde{M}_1$ получившийся при таком продолжении оператор . Для задачи (12) справедлива следующая теорема существования.

Теорема 11. Пусть справедливы включения

$$a_{ij}, b_i, c \in C^\alpha \cap C(\bar{G}), \ a, \ a_{yy}, g, g_{yy} \in C^\alpha(\Omega_-) \cap C(\bar{\Omega}_-), \ \nu, \nu_{yy} \in C(\Gamma_-),$$

выполнено неравенство

$$c(x) + a_{yy}(y,x) \le 0, (y,x) \in \Omega$$

условия согласования

$$\nu(q_i,x)=0,\ \ -a(q_i,x)\nu_{yy}(q,x)=g(q_i,x),\nu_y(0,x)=0,x\in\partial G$$

и условия

$$a_y(0,x)=0,\quad a_y(0,x)=0,g_y(0,x)=0,x\in\overline{G}.$$

Тогда для любой функции $\chi\in H(G)$, удовлетворяющей условию согласования:

$$\chi(x)=\nu(0,x),x\in\partial G,$$

и неравенствам

$$a(0,x)\overline{w}(0,x)-((L\chi)(x)+g(0,x))\le 0\quad \chi(x)\ge\chi_0>0,x\in G,$$

существует решение обратной задачи (12).

Следствие. Пусть выполнены условия теоремы 11 и, кроме этого, выполнены неравенства

$$g(y,x)\ge 0,g_{yy}(y,x)\le 0,\nu(y,x)\ge 0,\nu_{yy}(y,x)\le 0.$$

Тогда существует единственное решение задачи (12).

Замечание. Приведённые выше условия существования и единственности решения обратной задачи (3)-(4) содержат довольно много ограничений на заданные функции. Приведём простой пример показывающий, что все эти условия могут быть легко удовлетворены. Пусть

$$\varphi(x)=0,x\in G,\mu(x,t)=t,g(x,t)=t+1,Lu=\Delta u.$$

Тогда получим обратную задачу определения пары функций $(u,f)\in U_1(\Omega)\times F(G)$ из условий:

$$u_t(x,t)=(\Delta u)(x,t)+f(x)u(x,t)+t+1,(x,t)\in\Omega_T,$$

$$u(x,0)=0,x\in\overline{G},u(x,t)=t,(x,t)\in\Gamma_T,u(x,T)=\chi(x),x\in\overline{G}. \qquad (14)$$

Для функции $\overline{v}(x,t)$ из условий (5) получаем задачу:

$$\overline{v}_t(x,t)=(\Delta\overline{v})(x,t)+1,(x,t)\in\Omega_T,\quad \overline{v}(x,0)=1,x\in\overline{G},\overline{v}(x,t)=1,(x,t)\in\Gamma_T.$$

Тогда для функции χ из теоремы 2 получаем условия

$$\chi(x)\ge\chi_0>0,\overline{v}(x,T)-\Delta\chi(x)-(T+1)\le 0.$$

В силу очевидной оценки

$$\overline{v}(x,T)\le T+1,$$

следующей для $\overline{v}(x,t)$ из принципа максимума, из второго неравенства получаем оценку:

$$\Delta\chi(x) \geq 0, x \in G.$$

Таким образом получаем, что для существования единственного решения обратной задачи (14) достаточно чтобы функция χ удовлетворяла условиям:

$$\Delta\chi(x) \geq 0, x \in G, \chi(x) = 1, x \in \partial G, \chi(x) \geq \chi_0 > 0, x \in G.$$

Этим условиям удовлетворяет, например, гармоническая в G функция. Из приведённого примера видно, что множество функций удовлетворяющих условиям теорем существования и единственности достаточно велико.

ЛИТЕРАТУРА.

1. *Гилбарг, Д., Трудингер Н.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М: Наука,1989.
2. *Соловьёв, В.В.* Обратная задача определения коэффициента в уравнении Пуассона в цилиндре //ЖВМ и МФ,2011,т.51.№10,с.1-8.
3. *Прилепко, А.И.* Избранные вопросы в обратных задачах математической физики //Условно-корректные задачи матем. физики и анализа. Новосибирск: Наука.1992.С.151-162.

DESIDABILITY OF INVERSE PROBLEMS FOR THE ELLIPTIC EQUATION IN THE CYLINDER

V. Soloviev

National Research Nuclear University «MEPhI» (Moscow)
31, Kashirskoe shosse, Moscow, 115409, Russia

Abstract. In this paper the inverse problems for the elliptic equation in the bounded domain are considered. Two options for introducing additional information for the direct problems are investigated. In the first case additional information is given inside the definition domain of the solution for the direct problem, in second one – on the boundary of the domain. The existence and uniqueness theorems are formulated for both cases. The examples for inverse problems are detailed.
Key words: inverse problems, elliptic equation, overdetermination.

ФИЗИКА

УДК 533.72.

КИНЕТИКА ВИХРЕВЫХ ДВИЖЕНИЙ ГАЗОПОДОБНОЙ СРЕДЫ В ПОСТОЯННОМ ПОТЕНЦИАЛЬНОМ ПОЛЕ

А.Н. Голов, М.Н. Зудина

Московский государственный областной университет
105005, Москва, ул. Радио, 10а

Аннотация. Рассмотрено выражение плотности потока вещества в нестационарной газоподобной системе многих частиц с учётом непотенциального слагаемого. Получены аналитические выражения компонент вихря плотности потока. Дан анализ и графическое представление полученных формул.
Ключевые слова: кинетика, вихревые движения, газоподобная среда.

1. Постановка задачи.

Целью данной работы является теоретическое исследование и описание закономерностей вихревых движений в нестационарных газоподобных системах большого числа частиц N в потенциальном внешнем поле. Подобные явления широко распространены в природе, а также происходят в ряде технических процессов. Для анализа вихревых движений была выбрана микроскопическая модель однородных бесструктурных слабо взаимодействующих частиц массой m в однородном постоянном поле, рассмотренная в [1, 2, 3]. Система принята неограниченной (т. е., физически достаточно большой, чтобы не рассматривать граничные условия), и свободно расширяется в вакууме. OZ выбрано в направлении действия силы поля f, которая принята одной и той же для всех частиц. В указанных работах показано, что, зная статистическую функцию распределения системы, можем описать её, в рамках кинетической теории [4], квазинепрерывной средой с плотностью:

$$\rho = Nm\left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{3/2} \exp\left\{-\beta\left[r^2 + \left(z - \frac{ft^2}{2m}\right)^2\right]\right\}, \qquad (1)$$

где $\beta = bw/u$, $r^2 = x^2 + y^2$. Здесь и далее обозначено: $w = 1 - c^2/4ab$; $u = 1 + ct/am + bt^2/am^2$, a, b, c – константы задачи. Эти константы определяются из дополнительных (например, граничных) условий, но для получения общих формул их численные значения не обязательны. Компоненты плотности потока вещества в плоскости, ортогональной полю (ниже $\alpha = 1, 2$; $x_1 \equiv x$, $x_2 \equiv y$):

$$j_\alpha = \frac{kx_\alpha}{2aum}\rho\,; \quad (k = c + 2bt/m). \qquad (2)$$

Плотность потока в направлении поля:

$$j_3 = \left[\frac{k\left(z - ft^2/2m\right)}{2au} + ft \right] \frac{\rho}{m}. \qquad (3)$$

Легко усмотреть, что потоки плотности (2) пропорциональны градиенту плотности (1). При $f = 0$ к такому же виду приводится и j_3. Т. о., в отсутствие внешнего поля вектор **j** – потенциальный, и поле течений среды – безвихревое. При наличии внешнего поля выражение (3) содержит дополнительно конвективный член, пропорциональный плотности и не являющийся потенциальным. Вследствие этого следует ожидать появления вихревых течений среды. В слабых полях конвективный член может быть пренебрежимо мал. Но, когда f не мало, в некоторые промежутки времени и в некоторых областях пространства этот дополнительный поток превосходит потенциальный (см. рис. 2). Указанные потоки могут быть коллинеарны или антиколлинеарны.

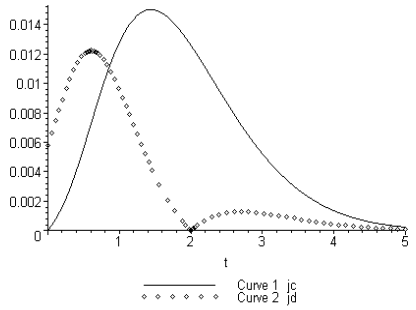

Рис.1. Сравнение конвективного тока j_c (в составе выражения (3)) с модулем диффузионного тока $|j_d|$ (в обоих случаях принято: $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$, $f = 1$, $m = 1$, $N = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 2$, так что значения аргумента и функций даны в условном масштабе)

Заметим, что в начале развития феноменологической теории переноса рассматривались только потоки, пропорциональные градиентам Включение в теорию переноса конвективных потоков произошло уже на следующем этапе [5], и исходило из макроскопического рассмотрения среды в движущейся системе отсчёта. В гидродинамике и газодинамике, напротив, обычно пренебрегают неконвективной (диффузионной) частью потока вещества.

2. Аналитические выражения для вихря плотности потока вещества.

Предварительный анализ выражений (1) – (3) показал, что они удовлетворяют уравнению непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0 \quad , \qquad (4)$$

Заметим, что конвективный и диффузионный потоки по отдельности не удовлетворяют этому уравнению.

Находя частные производные по координатам от (2) и (3), по стандартным формулам получим проекции вихря плотности потока вещества:

$$\mathbf{rot}_x \mathbf{j} = -\frac{2\beta y \cdot ft}{m}\rho; \tag{5}$$

$$\mathbf{rot}_y \mathbf{j} = \frac{2\beta x \cdot ft}{m}\rho; \tag{6}$$

$$\mathbf{rot}_z \mathbf{j} = 0. \tag{7}$$

Из найденных выражений обнаруживаются основные свойства вихря потока. 1) Этот вихрь лежит в плоскости, ортогональной направлению поля. 2) Его проекции – нечётные функции координат *x, y* и равны нулю на *OZ* при любом *t*; выражение (5) аннулируется и меняет знак на плоскости $y = 0$, а выражение (6) – на плоскости $x = 0$. 3) В начальный момент вихревые течения отсутствуют. 4) При $t \to \infty$ вихревые течения асимптотически аннулируются. Совместно с предыдущим это приводит к существованию максимума вихревых движений при некотором конечном $t > 0$. 5) При $x, y \to \pm\infty$ вихревые течения также асимптотически аннулируются. Совместно со свойством 2 это приводит к существованию экстремума вихревых движений при некоторых конечных $x, y > 0$. 6) В отсутствие внешнего поля все проекции **rot j** равны нулю, вихревые течения не возникают. Приведём ещё выражение для модуля вектора вихря:

$$\left|\mathbf{rot}\ \mathbf{j}\right| = \frac{2\beta ftr}{m} \cdot \rho.$$

Таким образом, для данной модели теория описывает возникновение, развитие и затухание вихревых движений среды в ходе её эволюции. Выражения (5) и (6) имеют максимумы при

$$z = \frac{ft^2}{2m}. \tag{8}$$

Выражение (5) имеет максимум при $x = 0$ и экстремумы при

$$y = \pm\frac{1}{\sqrt{2\beta}}. \tag{9}$$

Аналогичные экстремумы имеет и выражение (6). Т. о., максимум вихря плотности потока движется вдоль *OZ* по закону (8) и расположен в плоскости *XY* на окружности с радиусом, растущим со временем пропорционально $u^{1/2}$. Экстремальные значения функций (5) и (6) убывают со временем. Зависимость функций (5) и (6) от времени такова, что они имеют экстремум (максимум) при конечном $t > 0$, причём значения t, со-

ответствующие экстремуму, зависят от координат точки. Следует отметить, что выражения (5) и (6) определены локально. Интегралы от них по объёму, как и средние по неограниченному объёму значения, равны нулю вследствие нечётности подинтегральных функций при симметричных пределах интегрирования.

3. Графическое представление найденных выражений.

На рис. 2 – 5 представлены зависимости проекции вихря (5) от времени и координат (для проекции (6) зависимости аналогичны). Графики построены на ЭВМ для формулы (5) при выборе $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$, $f = 1$, $m = 1$, $N = 1$, что означает лишь выбор масштабов и не влияет на ход кривых.

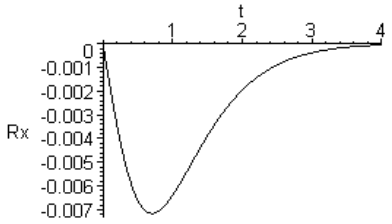

Рис. 2. Зависимость $\mathbf{rot}_x\mathbf{j}$ от времени в т. [x=1, y=1, z=1]

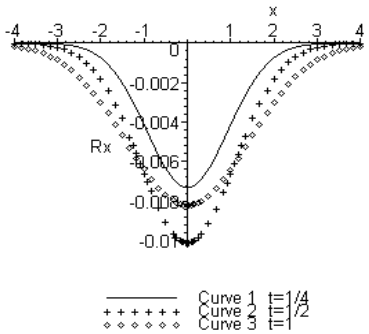

Рис. 3. Профиль $\mathbf{rot}_x\mathbf{j}$ по OX в моменты времени t =1/4, 1/2, 1. [y=1, z=1]

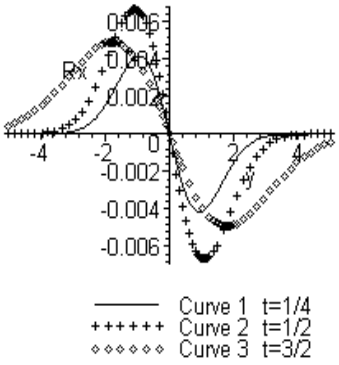

Рис. 4. Профиль $\mathbf{rot}_x\mathbf{j}$ по OY в моменты времени t =1/4, 1/2, 3/2. [x=1, z=1]

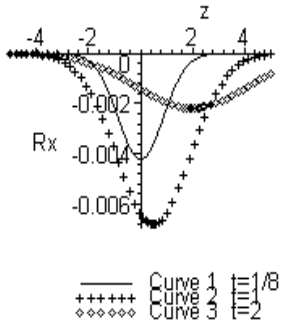

Рис. 5. Профиль $\mathbf{rot}_x\mathbf{j}$ по OZ в моменты времени t =1/8, 1, 2. [y=1, z=1]

Полученные графические представления согласуются с анализом формул, данным в п. 2. Асимптотическое затухание вихревых движений со временем есть результат убывания плотности (1) вследствие расширения системы. Это же расширение является причиной «расплывания» профилей, представленных на рис. 3, 4 и 5. Дрейф профиля, представленного на рис. 5 по OZ вызван действием поля.

4. Обсуждение.

Полученные результаты представляют материал для микроскопического обоснования к описанию вихревых движений, рассматриваемых в феноменологической теории сплошных сред. Физической причиной возникновения вихревых движений, как показано в [1 – 3], является перераспределение энергии частиц, получаемой от поля, хаотическим движением в системе многих частиц, находящейся при конечной температуре. Полями, производящими данный эффект, могут быть однородное гравитационное поле, поле сил Архимеда, неоднородное электрическое поле, действующее на дипольные частицы и другие. Предлагаемое описание вихревых явлений согласуется с опытными данными. Подобные явления часто наблюдаются в природе в восходящих и нисходящих потоках воздуха, где «маркерами» являются снежинки, пылинки, частицы дыма, семена растений и прочее. Возможны приложения полученных результатов к описанию движений в газоподобных облаках, возникающих при выхлопе в вакуум, при быстром испарении капель и др. Возможно также приложение аналогичного подхода к газодисперсным средам, что может быть применено к явлению смерчей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Голов, А.Н., Харитонов А.П.*// Эволюция плоского газоподобного облака в потенциальном поле**.** ВИНИТИ**.** 2008, 21 с. № 621 – В2008.
2. *Голов, А. Н., Харитонов А. П.* Эволюция газоподобной системы многих дисперсных частиц в потенциальном поле. //Вестник МГОУ. Серия «Физика-математика», №3–4, 2008, с. 12 – 21.
3. *Яламов, Ю. И., Голов А. Н.* «Статистическая и кинетическая теория нестационарных газоподобных и газодисперсных систем»/ изд. МГОУ. 2011, 230 с.

4. *Гуров, К. П.* Основания кинетической теории. М.: «Наука», 1966. 351 с.
5. *Де Грот, С. Р. , Мазур П.* Неравновесная термодинамика. М.: «Мир», 1964.

THE KINETICS OF THE VORTEX MOTION OF THE GAS-LIKED MEDIUM IN THE CONSTANT POTENTIAL FIELD

A. Golov, M. Zudina

Moscow Region State University
10a Radio st., Moscow, 105005, Russia

Abstract. The formula of the density of the matter flow in the non-stationary gas-liked system of many particles with regard for the non-potential term is considered. The analytical formulae of the components of the curl of the matter flow are obtained. The analysis and graphical presentation of the obtained formulae are performed.
Key words: kinetics, vortex motion, gas-liked medium.

УДК 533.72

К ТЕОРИИ ФОТООРИЕНТАЦИИ И ФОТОАНИЗОТРОПИИ ПРИ ПОЛЯРИЗАЦИИ И УДАРНОМ СЖАТИИ ДИЭЛЕКТРИКОВ

А.Н. Голов, М.М. Кузнецов, Л.В. Смотрова

Московский государственный областной университет
105005, Москва, ул. Радио, 10а

Аннотация. Предложена модель, описывающая фотоориентацию и фотоанизотропию в поляризуемых конденсированных средах. Для случая нестационарной поляризации среды проведено усреднение по фазе быстро меняющихся микроскопических величин. Зависимость от времени макроскопических характеристик среды предложено объяснить изменением концентрации диполей. Рассмотрено влияние нагрева образца в процессе освещения на рассматриваемые явления. Получены формулы для показателя преломления и характеристики двулучепреломления. В качестве примера рассмотрено также возможное применение теории к исследованию оптических свойств ударно сжатых конденсированных веществ.
Ключевые слова: нестационарная поляризация, фотоанизотропия, ударное сжатие.

В настоящий момент одной из новых и наиболее актуальных технологий производства ЖК-дисплеев является безнатирочная технология (т.н. фотоориентация) основанная на явления фотоиндуцированной анизотропии. Ее широкое распространение влечет за собой необходимость разработки теории данного явления, которая бы отвечала со-

временным требованиям теоретического анализа проблем, возникающих при внедрении новых технологий. Существуют различные модели указанных явлений и механизмы для их объяснения, [1 – 7], но имеющиеся экспериментальные данные не позволяют полностью отбросить какой-либо из этих механизмов или отдать полное предпочтение другому. В отличие от предыдущих работ здесь рассматривается статистическая теория нестационарной поляризации в периодических полях, исходящая из нестационарной модификации распределения Больцмана.

Для объяснения фотоориентации жидких кристаллов в фотополимерах, молекулы азокрасителей и прочие кинетические единицы мы рассматривали как системы невзаимодействующих дипольных частиц с постоянным дипольным моментом в переменном электрическом поле. Задачей работы являлось получение формул для показателя преломления и объяснения фотоанизотропии. Предварительная задача заключалась в отыскании формулы поляризации вещества. Считая, что концентрация диполей, распределённых в неполярной конденсированной среде, не высока, пренебрегаем их взаимодействием, учитывая, что диполи слабо взаимодействуют друг с другом и силы их взаимодействия весьма быстро убывают с расстоянием. Поэтому решаем задачу в 1-частичном приближении. Так же предполагаем, что ориентация диполей происходит достаточно свободно, т. е., ближнее окружение диполя не препятствует существенно его ориентации, что близко к имеющимся представлениям о жидких кристаллах. Примем электрическое поле (направленное по OZ) периодическим:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \sin\left(\omega t\right)$$

и ограничим применимость теории областью $\lambda >> l$ (λ-длина электромагнитной волны, l - плечо диполя). Далее будем использовать основные представления теории Дебая – Ланжевена [8, 9 и др.].

Функцию распределения примем в больцмановском виде

$$f = \frac{1}{Z} e^{\left(\frac{p_0 E_0 \sin(\omega t)\cos(\alpha)}{T}\right)}, \qquad (1)$$

где (и далее) p_0 - дипольный момент частицы; T - температура (в единицах энергии, т. е. $k_B T \to T$), α - угол между напряженностью поля и направлением случайно ориентированного дипольного момента. Обозначим

$$M = \frac{p_0 E_0 \sin(\omega t)}{T}; \qquad (2)$$

Статистический интеграл для этой функции (в сферических координатах):

$$Z = \frac{2}{3}\frac{\pi R^3 (e^M - e^{(-M)})}{M}. \qquad (3)$$

Нормированное распределение:

$$F = \frac{3}{2}\frac{M \cdot e^{(Mx)}}{\pi R^3 (e^M - e^{(-M)})} \quad (x = \cos\alpha). \tag{4}$$

Подставим в (4) выражение *M*, обозначая далее $M=M_0 \sin(\omega t)$; $M_0=p_0E_0/T$.

$$F_t = \frac{3}{2}\frac{e^{(M_0 \sin(\omega t)\cos(\alpha))} M_0 \sin(\omega t)}{\pi R^3 (e^{M_0 \sin(\omega t))} - e^{(-M_0 \sin(\omega t))})} \tag{5}$$

Используя (5), найдем среднее значение проекции $p_z=p_0 \cos(\alpha)$ на OZ . Получим:

$$\langle p_z \rangle = p_0 \left(\frac{e^M + e^{-M}}{e^M - e^{-M}} - \frac{1}{M} \right); \tag{6}$$

Тогда поляризация, обычно определяемая как объёмная плотность средней геометрической суммы дипольных моментов, с учётом (6) есть:

$$P = N\langle p_z \rangle = Np_0 \left(\frac{e^M + e^{-M}}{e^M - e^{-M}} - \frac{1}{M} \right) \tag{7}$$

(по модулю), где N - концентрация дипольных частиц. Из (7), по известной формуле

$$\mathbf{P} = \xi \mathbf{E}, \tag{8}$$

найдём диэлектрическую восприимчивость среды ξ (нестационарную):

$$\xi = \frac{Np_0 \left(\frac{e^{\left(\frac{p_0E_0\sin(\omega t)}{T}\right)} + e^{\left(-\frac{p_0E_0\sin(\omega t)}{T}\right)}}{e^{\left(\frac{p_0E_0\sin(\omega t)}{T}\right)} - e^{\left(-\frac{p_0E_0\sin(\omega t)}{T}\right)}} - \frac{T}{p_0E_0\sin(\omega t)} \right)}{E_0 \sin(\omega t)}. \tag{9}$$

Заметим, что формула (9) не имеет особенностей при $\sin(\omega t)=0$, как может показаться. Тогда нестационарная диэлектрическая проницаемость

$$\varepsilon = 1 + 4\pi\xi \tag{10}$$

и показатель преломления (считая, что магнитная проницаемость среды близка к 1)

$$n = \sqrt{1 + 4\pi\xi}\,. \tag{11}$$

Рассмотрим случай сравнительно слабых полей. Критерий слабости поля (или достаточно высоких температур):

$$\frac{p_0 E_0}{T} << 1 . \tag{12}$$

Тогда в 1-м приближении показатель преломления для изотропной среды:

$$n = \sqrt{1 + 4\pi N p_0^2 / 3T} \cdot \left[1 - \frac{2\pi N p_0^4 E_0^2 \sin^2(\omega t)}{45T^3 \cdot (1 + 4\pi N p_0^2 / 3T)} \right]. \tag{13}$$

Входящая в предыдущие формулы «быстрая» зависимость от времени (с частотой в оптическом диапазоне) практически не может быть измерена в эксперименте. Поэтому предлагается, учитывая периодичность поля, характеризовать вещество средними по времени (или по фазе) за период значениями найденных выше величин. Такое усреднение для выражения (13) даёт:

$$n = \sqrt{1 + \frac{4\pi N p_0^2}{3T}} \cdot \left[1 - \frac{\pi N p_0^4 E_0^2}{45T^3 \left(1 + \frac{4\pi N p_0^2}{3T} \right)} \right]. \tag{14}$$

Выражение (14) явно не зависит от «быстрого» времени. Зависимость показатель преломления от времени при длительном освещении образца проявляется через «медленную» зависимость текущей концентрации *N(t)*. Для этой зависимости примем в приближении линейной теории релаксации уравнение:

$$\frac{dN(t)}{dt} = -k \cdot \left(N(t) - N_\infty \right) \tag{15}$$

т. е., считаем, что скорость изменения концентрации диполей пропорциональна разности мгновенного значения $N(t)$ и значения при насыщении поляризации N_∞ (k – коэффициент, обратный времени релаксации τ). Заметим, что применимость (15) ограничена условием малости величины $\left(N(t) - N_\infty \right) / N_\infty$ Решение (15) при начальном условии

$$N(t = 0) = N_0 \tag{16}$$

есть

$$N(t) = N_\infty + \left(N_0 - N_\infty \right) \cdot \exp(-k \cdot t) . \tag{17}$$

Подстановка (17) в (16) даёт:

$$n = \sqrt{1 + \frac{4}{3} \frac{\pi (N_\infty + e^{(-kt)} (N_0 - N_\infty)) p_0^2}{T}} \cdot \left[1 - \frac{1}{45} \frac{\pi \left(N_\infty + e^{(-kt)} \left(N_0 - N_\infty \right) \right) p_0^4 E_0^2}{T^3 \left(1 + \frac{4}{3} \frac{\pi (N_\infty + e^{(-kt)} (N_0 - N_\infty)) p_0^2}{T} \right)} \right]. \tag{18}$$

Качественная зависимость (18) от времени при разных k показана на рис. 1.

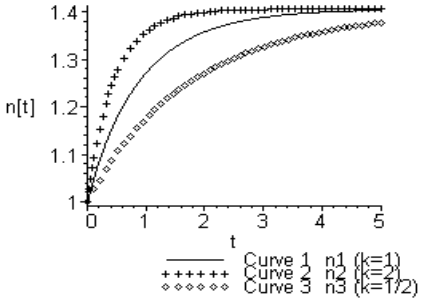

Рис.1. Приведённый показатель преломления (определён отношением (18) к начальному значению). Ординаты здесь и ниже даны в условных единицах ввиду выбора значений параметров, продиктованного возможностями программ и соображениями наглядности.
Принято: $p_0 = 0{,}1$; $E_0 = 0{,}1$; $T = 1$; $N_0 = 1000$, $N_\infty = 2000$.
Время здесь и ниже – безразмерное, в единицах τ.

В среде с двойным лучепреломлением для пары лучей (обыкновенного и необыкновенного) следует принять два значения k_1 и k_2 (при прочих равных параметрах). Тогда имеем две функции вида (18) и показатель двулучепреломления анизотропного образца (разность показателей преломления обыкновенного и необыкновенного лучей) $\Delta n = n_2(k_2) - n_1(k_1)$. Графики зависимости $\Delta n(t)$ представлены на рис.2.

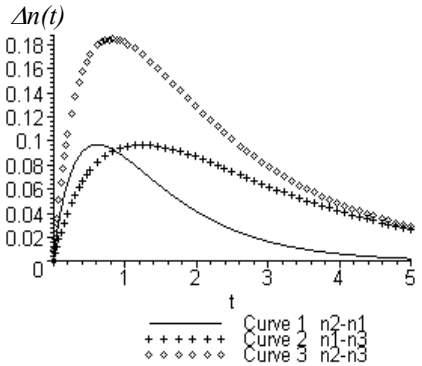

Рис.2**.** Графики показателя двулучепреломления.
Значения параметров и обозначения n_1, n_2, n_3 – те же, что на рис. 1.

Однако, имеющиеся экспериментальные данные [4, 9 и др.], наряду с зависимостями такого типа, показывают большее разнообразие и более широкий спектр поведения показателя дихроизма фотоанизотропных веществ в зависимости от времени облучения. Для объяснения этого материала следует допустить различие других параметров в (18) для обыкновенного и необыкновенного лучей. Значения E_0 и T естественно считать одинаковыми для обоих лучей. Но не исключено, что асимптотическая концентрация

диполей различна для этих лучей. Пусть эти значения её $N_{\infty 1}$ и $N_{\infty 2}$. Тогда ход кривых для показателей дихроизма изображается следующими графиками.

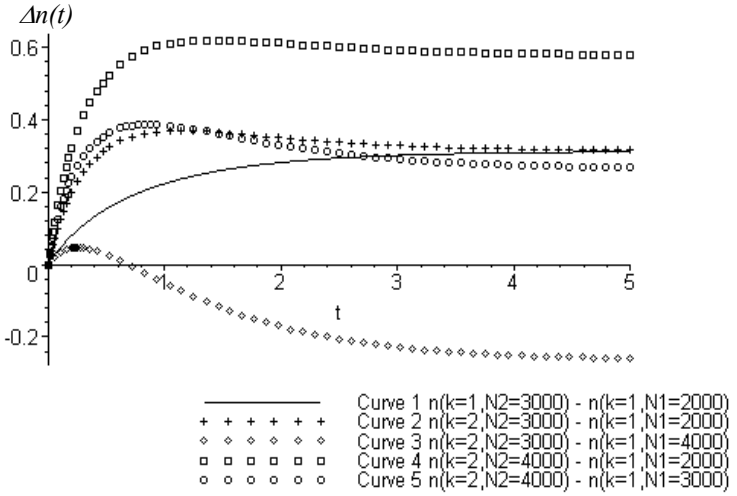

Рис. 3. Показатели дихроизма для лучей с разными k и N_∞
(и прочими равными параметрами
[p_0=0,1; E_0=0,1; T=1; N_0=1000]). ($N_1 \equiv N_{\infty 1}$, $N_2 \equiv N_{\infty 2}$)

Семейство кривых, приведённых на рис. 3, в совокупности с кривыми, приведёнными на рис. 2, качественно описывает почти весь экспериментальный материал по рассматриваемым процессам. В свою очередь, экспериментальные данные позволяют оценить отношение $N_{\infty 1}$ и $N_{\infty 2}$.

Представляют интерес последствия нагревания образца при длительном облучении. Предположим, что при не слишком больших мощностях излучения на некотором интервале времени температура растёт линейно, вследствие поглощения части энергии излучения и её перехода в энергию хаотического микроскопического движения диполей. Закон изменения температуры примем в виде:

$$T(t) = T_0 + ht, \tag{19}$$

где h <<1. Подстановка (19) в (18) влечёт дополнительную зависимость $n(t)$, вследствие чего после этапа начальной поляризации образца идёт прогрессирующая деполяризация его. Причиной этого является усиление теплового хаоса при нагреве. При этом:

$$\lim_{t\to\infty} n(t) = 1,$$

т. е., восстанавливается исходное значение приведённого показателя преломления. Соответствующие графики приведены на рис. 4. Разумеется, в практических приложениях неограниченно «тянуть» приближённую зависимость (19) нельзя, и реально рост температуры ограничен фазовым переходом.

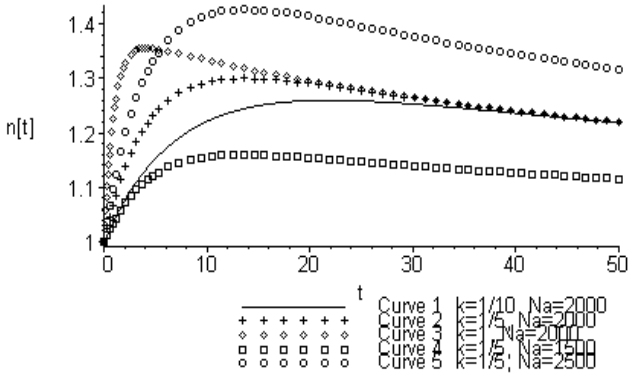

Рис. 4. Зависимость *n(t)* при росте температуры по закону (19).
[p_0=1/20, E_0=1/20, T_0=1, h=1/5, N_0=1000**,** Na≡N_∞**]**

Приведённые на рис. 4 кривые 1, 2 и 3 позволяют сравнить случаи с разным k при равных N_∞. Кривые 2, 4 и 5 позволяют сравнить случаи с разным N_∞ при равных k. Поскольку при малом h деполяризация происходит значительно медленнее поляризации, здесь для наглядности выбраны иные значения параметров, чем на предыдущих рисунках. При этом, соответственно, изменяется поведение показателя двулучепреломления анизотропного образца (см. рис. 5).

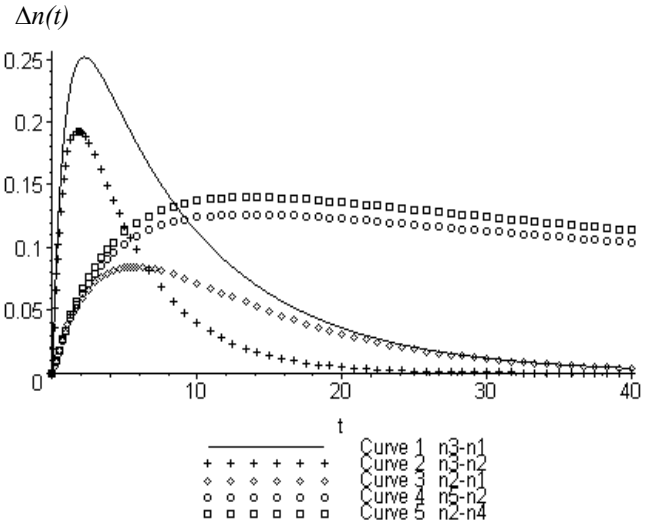

Рис. 5. Зависимость показателя двулучепреломления от времени
для лучей с разными k и N_∞ при росте температуры по закону (19)**.**
Обозначения n1…n5 соответствуют кривым на рис. 4

Из рисунка видно, что рост температуры приводит к медленному уменьшению фотоанизотропии (асимптотически – до нуля), с той же оговоркой об ограничении применимости формул и графиков принятой моделью и сделанными приближениями. Следует иметь в виду, что мы предполагаем линейный рост температуры в 1-м приближении, не учитывая как передачу тепла от диполей неполярным частицам среды, так и теплоотдачу образца в целом, что может замедлить и вообще остановить рост температуры. При чрезмерном же нагревании может разрушиться жидкокристаллическая структура образца и сам образец.

В связи с вопросом применимости данной модели и полученных результатов приведём некоторые численные оценки. Условие приближения малой концентрации есть:

$$V_0 << V_1 .$$

где V_0 – условный собственный объём дипольной частицы, определяемый силами отталкивания электронной оболочки и, приближённо, пропорциональный кубу её линейных размеров; $V_1 = V/N_D$ – средний объём вещества, приходящийся на 1 дипольную частицу, определяемый свойствами и состоянием среды (V – объём образца, N_D – полное число диполей в данном объёме). Отсюда для концентрации находим:

$$N = N_D/V << 1/V_0 .$$

Была рассчитана величина

$$b = \frac{4\pi N p_0^2}{3T},$$

являющаяся, в сущности, комбинированным параметром, от которого зависит показатель преломлении. Значение величины b при обычных значениях N, T и p_0 по порядку величины находится в интервале от 1 до 10^{-11}. При этом значения показателя преломления находятся в интервале от 1 до 1,5.

Описываемое предложенными формулами поведение показателя преломления и характеристики двулучепреломления находится в качественном согласии с экспериментом [4, 9 и др.]. Эти формулы позволяют получить, в области применимости теории, удовлетворительные численные значения показателя преломления и показателя двулучепреломления, имеющие разумный порядок. Данная модель устанавливает связь двулучепреломления с параметрами поляризации вещества. Предсказывается «стирание» оптической анизотропии при длительном нагреве образца в процессе облучения. Разработанная теория может применяться также для объяснения особенностей эффекта Яноши [10] .

Формулы (5), (9), (13) параметрически зависят от термодинамических характеристик среды (N, T, p_0) и периодически – от времени. Эти зависимости могут оказаться полезными при исследовании оптических свойств ударно сжатых конденсированных диэлектриков. В обзорной работе [11] приведены (стр.681) качественные закономерности изменения температуры и концентрации свободных электронов по времени за фронтом ударной волны. При подстановке их в формулы (5), (9), (13) получим качест-

венную закономерность в изменении оптической плотности твёрдотельных диэлектриков (типа Cs Br) в процессе релаксации электронной температуры к равновесной фононной за фронтом ударной волны.

Работа была выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №10-07-00385-а и 10-03-90028-Бел_а) и Министерства образования и науки РФ (Государственный контракт №02.740.11.5218). Авторы выражают благодарность проф. Беляеву В. В. и проф. Чигринову В. Г. за весьма полезное и плодотворное обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Neporent, B.S. and Stolbova O. V.*, Opt. Spektrosk. 14, 624_1963_.
2. *Макушенко, А.М., Столбова О.В.*. Нелинейность обратимого ориентационного фотодихроизма. Доклады Академии Наук СССР 1963. том 149.№1
3. *Непорент, Б.С., Столбова О.В., Макушенко А.М.*. О механизме обратимой ориентации молекул в растворах. Доклады Академии наук СССР 1967, т. 175, №4
4. *Джанг, Я. С., Козенков В.М., Магницкий С.А., Нагорский Н. М.* Фотохромные и фотоанизотропные свойства азокрасителя AD-1 в различных агрегатных состояниях. МГУ, препринт №12/2006, М., 2006.
5. *Chigrinov, V., Pikin S., Verevochnikov A., Kozenkov V., Khazimullin M., Ho J., Dan Ding Huang, Hoi-Sing Kwok.* Diffusion model of photoaligning in azo-dye layers. Phys. Rev., E 69, 2004
6. *Kiselev A.D., Chigrinov V.G., Huang D.D.*, Phys. Rev. E 72, 061703 _2005.
7. *Kiselev A.D., Vovk R.G., Egorov R.I., Chigrinov V.G.*, Phys. Rev. A 78, 015815 _2008.
8. *Дебай П.* Полярные молекулы. М. – Л. 1931.
9. *Блинов, Л. М.* Электро- и магнитооптика жидких кристаллов. М. «Наука» 1978
10. *Janossy, I. and Kosa T.* Influence of anthraquinone dyes on optical reorientation of nematic liquid crystals, Optics Lett. 17, 1183-1185]. 1992)
11. *Кормер, С.Б.* Оптические исследования свойств ударно сжатых конденсированных диэлектриков // Успехи физических наук, т. 94, вып. 4, с. 641-685.1968

ON THE THEORY OF THE PHOTO-ORIENTATION AND PHOTO-ANISOTROPY UNDER POLARIZATION AND SHOCK COMPRESSION OF THE DIELECTRICS

A. Golov, M. Kuznetsov, L. Smotrova

Moscow Region State University
10a Radio st., Moscow, 105005, Russia

Abstract. A model describing photo-orientation and photo-anisotropy in polarized condensed medium is proposed. The averaging of the phase of rapidly varying of microscopic quantities has been carried out for the case of non-stationary polarization of the medium. Temporal variation of the macroscopic characteristics of the medium is proposed to explain the change in concentration of dipoles. The influence of sample heating

during illumination on the phenomenon has been considered. Formulae for the refraction index and birefringence characteristics are obtained. As an example, the possible application of the theory to the investigation of the optical properties of shock compressed condensed matter was also considered.
Key words: non-stationary polarization, photo-anisotropy, shock compression.

УДК 533.6.011

ТЕОРЕМЫ О МАКСИМУМЕ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ВЫСОКОСКОРОСТНОГО «ПЕРЕХЛЁСТА» В БИМОДАЛЬНОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЕ

М.М. Кузнецов, Ю.Д. Кулешова, Л.В. Смотрова

Московский государственный областной университет
105005, Москва, ул. Радио, 10а

Аннотация. Доказаны две теоремы о максимуме относительной величины высокоскоростного «перехлёста» в гиперзвуковой ударной волне. Рассмотрен однокомпонентный газ с внутренними степенями свободы, описываемый бимодальным распределением Тамма-Мотт-Смита. Максимум достигается как по координате вдоль потока в ударной волне, так и по величине относительной скорости молекул.
Ключевые слова: кинетика, уравнение, неравновесный, энергия активации, ударная волна, распределение, молекулярный.

Работа посвящена аналитическому исследованию эффекта высокоскоростной поступательной неравновесности в сильных ударных волнах, когда относительная скорость молекул, сталкивающихся внутри фронта ударной волны, значительно превосходит по величине скорость звука в газовом потоке перед волной. Несмотря на протекшие три десятилетия с начала исследования этого эффекта (в основном численных), в его понимании остается все еще много невыясненных вопросов, в разрешении которых свою полезную роль может сыграть аналитическая бимодальная модель ударной волны. С точки зрения практических приложений наибольший интерес представляет исследование т.н. высокопороговой, высокоскоростной поступательной неравновесности, возникающей при протекании неравновесных химических реакций с высокими энергиями активации в сильно сжатых газовых смесях. Однако и при рассмотрении структуры сильных ударных волн в однокомпонентных, многоатомных газах с неупругими столкновениями можно, как оказалось, установить существенное, четко определенное свойство высокоскоростной поступательной неравновесности, с необходимостью следующее из аналитической бимодальной модели ударной волны. Это свойство, по-видимому, незамеченное в численных исследованиях, сводится к тому, что в высокоскоростном «хвосте» бимодальной Тамм-Мотт-Смитовской функции распределения пар молекул, известный ранее [1] эффект «перехлеста», т.е. преобладания числа N_{neq} высокоскоростных пар внутри фронта волны над числом N_{eq} в поступательно равновес-

ной зоне за фронтом, имеет строгий максимум по величине N_{neq} / N_{eq}, зависящий от степени сжатия в сильной ударной волне.

Воспользуемся аппроксимацией Тамма-Мотт-Смита для одночастичной функции распределения *F(b,c)* и функции распределения пар молекул $\widetilde{G}(\bar{g},b)$, следуя работе [2].

$$F(b,\tilde{n}) = \{(1-b)n_0F_0(c) + bn_1F_1(c)\}\left[(1-b)n_0 + bn_1\right]^{-1}. \qquad (1)$$

Здесь F_0, F_1 - «холодное» и «горячее» распределения перед и за волной;

$$F_i(c) = \left(\frac{m}{2\pi kT_i}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{m(c-u_i)^2}{2kT_i}\right], \qquad (2)$$

m – масса молекулы; u_i, T_i, n_i – скорости, температуры и концентрации газового потока перед (i = 0) и за (i = 1) волной, k - постоянная Больцмана, (c-u_i) - собственная скорость молекулы, коэффициент b задавался параметрически в интервале 0 ≤ b ≤ 0 при прохождении газа через фронт ударной волны [2].

Величина относительной функции распределения $\widetilde{G}(\bar{g},b)$ пар молекул имеет вид:

$$\widetilde{G} = \left[(1-b)^2\varepsilon_0^2\widetilde{G}_0 + b^2 + 2b(1-b)\varepsilon_0\widetilde{G}_{01}\right]\cdot\left[\varepsilon_0 + (1-\varepsilon_0)b\right]^{-2}, \qquad (3)$$

где $\widetilde{G} = \frac{G}{G_1}$, $\widetilde{G}_0 = \frac{G_0}{G_1}$, $\widetilde{G}_1 = 1$, $\widetilde{G}_{01} = \frac{G_{01}}{G_1}$, G_0, G_1, G_{01} - соответственно «холодная» (перед волной), «горячая» (за волной) и «перекрестная» моды распределений.

Распределения G_0 и G_1 являются максвелловскими функциями по относительным скоростям g :

$$G_i(g) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left(\frac{m}{kT_i}\right)^{3/2} g^2 \exp\left[-\frac{mg^2}{4kT_i}\right].$$

Перекрестная мода имеет вид [2]:

$$G_{01}(g) = \left[\frac{m}{2\pi k(T_0+T_1)}\right]^{3/2} \frac{g}{u}\left\{\exp\left[-\frac{m(g-u)^2}{2k(T_0+T_1)}\right] - \exp\left[-\frac{m(g+u)^2}{(T_0+T_1)}\right]\right\}.$$

Макроскопические параметры, входящие в соотношения (1) - (3), связаны законами сохранения потоков массы, импульса и энергии в сечениях i = 0 (перед волной) и i = 1 (за волной):

$$\frac{T_1}{T_0} = 1 + m_0(1-\varepsilon_0^2),$$

$$\frac{n_0}{n_1} = \frac{u_1}{u_0} = \varepsilon_0 = \varepsilon(1 + m_0^{-1}),$$

$$u = u_0 - u_1 = u_0(1 - \varepsilon_0).$$

Здесь $m_0 = \varepsilon(1-\varepsilon)^{-1} M_0^2$, $\varepsilon = \dfrac{\gamma - 1}{\gamma + 1}$, γ - отношение удельных теплоемкостей при постоянном давлении c_p и объеме c_v, $\gamma = \dfrac{c_p}{c_v} = (1+\varepsilon)(1-\varepsilon)^{-1}$, M_0 - число Маха перед волной, $M_0 = \dfrac{u_0}{a_0}$, a_0 - скорость звука перед волной, $a_0 = \sqrt{\dfrac{\gamma k T_0}{m}}$.

Выражение (3) позволяет сформулировать следующие теоремы о «перехлесте» сверхскоростной поступательной неравновесности в бимодальной ударной волне.

Теорема 1. Для сверхскоростного превышения («перехлеста», $\widetilde{G} > 1$) величины поступательно неравновесной функции распределения пар молекул внутри фронта ударной волны над соответствующей равновесной величиной за волной необходимо и достаточно, чтобы величина перекрестной моды $\widetilde{G}_{01}$ удовлетворяла соотношению

$$2\widetilde{G}_{01} > 1 + \widetilde{G}_0. \qquad (4)$$

Теорема 2. Величина сверхскоростного превышения ($\widetilde{G} > 1$) в бимодальном однокомпонентном газе при выполнении соотношения (4) достигает своего максимального значения

$$\widetilde{G} = \widetilde{G}_{\max} = (\widetilde{G}_{01}^2 - \widetilde{G}_0) \Big/ \left(2\widetilde{G}_{01} - 1 - \widetilde{G}_0\right).$$

Справедливость утверждений обеих теорем непосредственно следует из выражения (3), рассматриваемого как квадратное уравнение относительно параметра *b* и анализа его дискриминанта на положительную определенность. Для представления о том, как выполняется неравенство (4), рассмотрим асимптотический гиперзвуковой предельный переход в параметрах функции распределения пар молекул (3).

$$M_0 \gg 1, \ (M_0 \to \infty)$$

$$m_0 \equiv \frac{\gamma - 1}{2} M_0^2 = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} M_0^2 \gg 1, \ (m_0 \to \infty)$$

Физически этот предельный переход соответствует случаю бесконечно сильной гиперзвуковой ударной волны, когда $M_0 \to \infty$, $\dfrac{T_0}{T_1} \to 0$.

В результате для выражений, входящих в формулы (2-3) получим:

$$\frac{n_0}{n_1} = \frac{u_1}{u_0} \to \varepsilon ,$$

$$u \to u_0(1-\varepsilon),$$

$$\bar{G}_0 \to m_0^{3/2} \exp\left(-\frac{\gamma M_0^2}{4} g^{-2} \right),$$

$$\bar{G}_{01} \to \sqrt{2}\varepsilon(1-\varepsilon)\bar{g}^{-1} \left\{ 1 - \exp\left[\frac{-2g}{\varepsilon(1-\varepsilon)} \right] \right\} \exp\left[\frac{2-(\bar{g}-2)^2}{4\varepsilon(1-\varepsilon)} \right].$$

Применение асимптотического гиперзвукового предельного перехода позволяет получить простое аналитическое выражение для величины высокоскоростного «перехлеста» функции пар молекул:

$$\bar{G}_{*,\max} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} e^{\frac{1}{2\varepsilon}},$$

где $\varepsilon = \frac{\rho_0}{\rho_1}$, ε^{-1} - степень сжатия в волне.

Значения этой функции приведены в таблице.

Газ	A	(A_2) лин.	(A_2) нелин.	(A_3) нелин.	Равновесный диссоциирующий воздух	C_8H_{16}
γ	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{9}{7}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{11}{10}$	$\frac{22}{21}$
ε	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{1}{43}$
$\bar{G}_{*,\max}$	1,31	2,37	4,84	36,28	1226	$3,6 \cdot 10^8$

В этой таблице величина ε задавалась в качестве параметра для случаев молекул газов с различным количеством атомов: одноатомных (A), двухатомных (A_2) , трехатомных (A_3) , многоатомных (типа C_8H_{16}). В ней также учтен случай равновесного диссоциирующего воздуха с эффективным значением параметра $\varepsilon = \varepsilon_{\hat{a}} = \frac{1}{21}$

$\left(\gamma = \gamma_{\hat{a}} = \frac{h}{\hat{a}} = 1{,}1\right)$ за скачком уплотнения [3] и, кроме того, рассмотрены отдельно случаи $\varepsilon = \frac{1}{6}$ (γ=1,4) и $\varepsilon = \frac{1}{8}$ $\left(\gamma = \frac{9}{7}\right)$, соответствующие отсутствию или наличию возбужденных колебательных степеней свободы у двухатомных газов (A_2) . Где γ - отношение удельных теплоемкостей при постоянном давлении c_p и постоянном объеме c_V, $\gamma = \frac{c_p}{c_V}$.

Таким образом, в данной работе показано, что в бимодальной ударной волне в однокомпонентном многоатомном газе эффект поступательной неравновесности (сверхскоростной «перехлест») ограничен сверху величиной $\widetilde{G} = \widetilde{G}_{\max}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Генич, А.П., Куликов С.В., Манелис Г.Б., Черешнев С.Л.* Поступательная релаксация в ударных волнах // Черноголовка, Препринт ОИХФ АН СССР. 1991. 68 с.
2. *Куликов, С.В., Терновая О.Н., Черешнев С.Л.* Специфика поступательной неравновесности во фронте ударной волны в однокомпонентном газе // Химическая физика. – 1993. – Т. 12, № 3. – С. 340-342.
3. *Агафонов, В.П., Вертушкин В.К., Гладков А.А., Полянский О.Ю.* Неравновесные физико-химические процессы в газодинамике. – М.: Машиностроение, 1972, 344с.

THEOREMS ON MAXIMUM OF RELATIVE HIGH VELOCITY “OVERSHOOT” IN BIMODAL SHOCK WAVE

M. Kuznetsov, Ju. Kuleshova, L. Smotrova

Moscow Region State University
10a Radio st., Moscow, 105005, Russia

Abstract. Two theorems on maximum of the relative high velocity “overshoot” in bimodel Hypersonic shock wave are proved. The one-component gas with internal degrees of freedom and Tamm-Mott-Smith distribution is considered. The maximum is achieved as the coordinate along the flow in the shock wave, and the largest relative speed of molecules.
Key words: kinetic, equation, nonequilibrium, activation energy, shock wave, distribution, molecular.

УДК 533.72

К ТЕОРИИ ПОВЕДЕНИЯ РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА НАД КОЛЕБЛЮЩЕЙСЯ ПОВЕРХНОСТЬЮ

В.А. Акимова, А.В. Латышев, А.А. Юшканов

Московский государственный областной университет
105005, Москва, ул. Радио, 10а

Аннотация. Пусть разреженный газ занимает полупространство $x > 0$ над твердой плоской пластиной. Предполагается, что эта пластина совершает в своей плоскости гармонические колебания вдоль оси y. Вторая задача Стокса состоит в решении кинетического уравнения Больцмана, описывающего поведение разреженного газа. В работе строится аналитическое решение модельного кинетического уравнения в предположении диффузного отражения молекул от пластины. Находится функция распределения газовых молекул и строится массовая скорость газа в полупространстве. Находится значение массовой скорости непосредственно у стенки.
Ключевые слова: постановка задачи Стокса, разделение переменных, собственные решения, непрерывный и дискретный спектр, точное решение, скорость газа.

Задача о поведении газа над стенкой, колеблющейся в своей плоскости, была рассмотрена Дж. Г. Стоксом [24]. Задача решалась гидродинамическим методом без учета эффекта скольжения. Обычно такую задачу называют второй задачей Стокса [1], [11], [12], [15], [19]. В последние годы на тему этой задачи появился ряд публикаций. В работе [25] задача рассматривается для любых частот колебания поверхности. Из кинетического БГК получено уравнение типа гидродинамического. Рассматриваются гидродинамические граничные условия. Вводится коэффициент, связывающий скорость газа на поверхности со скоростью поверхности. Показано, что в случае высокочастотных колебаний сила трения, действующая на поверхность, не зависит от частоты.

В работе [22] получены коэффициенты вязкостного и теплового скольжения с использованием различных модельных уравнений. Использованы как максвелловские граничные условия, так и граничные условия Черчиньяни — Лэмпис.

В статье [18] рассматривается газовый поток над бесконечной пластиной, совершающей гармонические колебания в собственной плоскости. Найдена скорость газа над поверхностью и сила, действующая на поверхность со стороны газа. Для случая низких частот задача решена на основе уравнения Навье — Стокса. Для произвольных скоростей колебаний поверхности задача решена численными методами на основе кинетического уравнения Больцмана с интегралом столкновений в форме БГК (Бхатнагар, Гросс, Крук).

Работа [16] является экспериментальным исследованием. Изучается поток газа, создаваемый механическим резонатором при различных частотах колебания резонатора. Эксперименты показывают, что при низких частотах колебаний резонатора, действующая на него со стороны газа сила трения прямо пропорциональна частоте колебания резонатора. При высоких частотах колебания резонатора (10^8 Гц) действующая на него сила трения от частоты колебаний не зависит.

В последнее время задача о колебаниях плоской поверхности в собственной плоскости изучается и для случая неньютоновских жидкостей [12] и [15].

В статье [23] рассматривается пример практического применения колебательной системы, подобной рассматриваемой во второй задаче Стокса, в области нанотехнологий.

В диссертации [5] были предложены два решения второй задачи Стокса, учитывающие весь возможный диапазон коэффициента аккомодации тангенциального импульса. Эти решения отвечают соответственно гидродинамическому и кинетическому описанию поведения газа над колеблющейся поверхностью в режиме со скольжением.

В наших работах [13] и [14] для второй задачи Стокса отыскиваются собственные функции и соответствующие собственные значения, отвечающие как дискретному, так и непрерывному спектрам. Исследована структура дискретного и непрерывного спектров. Развивается математический аппарат, необходимый для аналитического решения задачи и приложений.

1.Линеаризованное кинетическое уравнение для задачи о колебаниях газа. Задача о колебаниях газа решается в линеаризованной постановке. Линеаризация задачи проведена при условии, что скорость газа много меньше тепловой: $\left|u_y(t_1,x_1)\right| \langle\langle\, \upsilon_T$, где $\upsilon_T = 1/\sqrt{\beta}$ - тепловая скорость молекул $\left(\beta = m/(2kT)\right)$, имеющая порядок скорости звука. Пусть разреженный одноатомный газ занимает полупространство $x > 0$ над плоской твердой поверхностью, лежащей в плоскости $x = 0$. Поверхность (y,z) совершает гармонические колебания вдоль оси y по закону $u_S(t) = u_0 e^{-i\omega t}$. Требуется построить функцию распределения газовых молекул $f(t,x,\mathbf{v})$ и найти скорость газа $u_y(t,x)$. Функция распределения ищется в виде $f = f_0(1+\varphi)$, где f_0 - абсолютный максвеллиан, $f_0 = n(\beta/\pi)^{3/2}\exp\left(-\beta\upsilon^2\right)$.

Рассмотрим линеаризованное кинетическое уравнение

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \upsilon_x\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \nu\varphi(t,x,\mathbf{v}) = \frac{\nu m}{kT}\upsilon_y u_y(t,x), \qquad (1.1)$$

где $u_y(t,x)$ - скорость газа,

$$u_y(t,x) = \frac{1}{n}\int \upsilon_y f(t,x,\mathbf{v})d^3\upsilon .$$

Здесь $\nu = 1/\tau$ - частота столкновений газовых молекул, τ - время между двумя последовательными столкновениями молекул, m - масса молекулы, k - постоянная Больцмана, T – температура газа, n – числовая плотность (концентрация) газа. Концентрация газа и его температура считаются постоянными в линеаризованной постановке задачи.

Введем безразмерные скорости и параметры: безразмерную скорость молекул: $\mathbf{C} = \sqrt{\beta}\mathbf{v}$, безразмерную массовую скорость $U_y(t,x) = \sqrt{\beta}u_y(t,x)$, безразмерное время $t_1 = \nu t$ и безразмерную скорость колебаний пластины $U_s(t) = U_0 e^{-i\omega t}$, где $U_0 = \sqrt{\beta}u_0$ -

безразмерная амплитуда скорости колебаний границы полупространства. Тогда уравнение (1.1) может быть записано в виде:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t_1} + C_x \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \varphi(t_1, x_1, \mathbf{C}) = 2C_y U_y(t_1, x_1), \tag{1.2}$$

где

$$U_y(t_1, x_1) = \frac{1}{\pi^{3/2}} \int \exp(-C^2) C_y \varphi(t_1, x_1, \mathbf{C}) d^3 C. \tag{1.3}$$

Заметим, что для безразмерного времени $U_s(t_1) = U_0 e^{-i\omega_1 t_1}$.

С помощью (1.3) кинетическое линеаризованное уравнение (1.2) записывается в виде:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t_1} + C_x \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \varphi(t_1, x_1, \mathbf{C}) = \frac{2C_y}{\pi^{3/2}} \int \exp\left(-C'^2\right) C'_y \varphi(t_1, x_1, \mathbf{C}') d^3 C'. \tag{1.4}$$

Сформулируем диффузные граничные условия, записанные относительно $\varphi(x_1, t_1, \mathbf{C})$:

$$\varphi(0, t_1, \mathbf{C}) = 2C_y U_s(t_1), \qquad C_x > 0, \tag{1.5}$$

и

$$\varphi(x_1 \to +\infty, t_1, \mathbf{C}) = 0. \tag{1.6}$$

Итак, граничная задача о колебаниях газа сформулирована полностью и состоит в решении уравнения (1.4) с граничными условиями (1.5) и (1.6).

2. Собственные решения. Учитывая, что колебания пластины рассматриваются вдоль оси *y*, будем искать, следуя Черчиньяни [10], функцию $\varphi(x_1, t_1, \mathbf{C})$ в виде

$$\varphi(x_1, t_1, \mathbf{C}) = C_y H(x_1, t_1, C_x), \tag{2.1}$$

а затем выделим временную переменную, положив далее:

$$H(x_1, t_1, C_x) = e^{-i\omega_1 t_1} h(x_1, C_x). \tag{2.2}$$

Теперь мы получаем уравнение граничную задачу:

$$\mu \frac{\partial h}{\partial x_1} + z_0 h(x_1, \mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\mu'^2\right) h(x_1, \mu') d\mu', \tag{2.3}$$

где $z_0 = 1 - i\omega_1$, и

$$h(0, \mu) = 2U_0, \qquad \mu > 0, \tag{2.4}$$

$$h(+\infty, \mu) = 0. \tag{2.5}$$

Разделение переменных в уравнении (2.3) осуществляется следующей подстановкой

$$h_\eta(x_1,\mu)=\exp\left(-\frac{x_1 z_0}{\eta}\right)\Phi(\eta,\mu), \tag{2.6}$$

где η - параметр разделения, или спектральный параметр.

Подставляя (2.6) в уравнение (2.3) получим характеристическое уравнение

$$(\eta-\mu)\,\Phi(\eta,\mu)=\frac{\eta}{\sqrt{\pi}z_0}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\mu'^2\right)\Phi(\eta,\mu')d\mu'. \tag{2.7}$$

Если принять нормировку

$$\frac{1}{z_0}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\mu'^2\right)\Phi(\eta,\mu')\,d\mu'\equiv 1, \tag{2.8}$$

то уравнение (2.7) имеет решение

$$\Phi(\eta,\mu)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\eta P\frac{1}{\eta-\mu}+e^{\eta^2}\lambda(\eta)\delta(\eta-\mu), \tag{2.9}$$

где $-\infty<\eta,\mu<+\infty$.

Здесь $\delta(x)$ - дельта-функция Дирака, символ Px^{-1} означает главное значение интеграла при интегрировании x^{-1}, $\lambda(z)$ - дисперсионная функция, введенная равенством

$$\lambda(z)=1-i\omega_1+\frac{z}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(-\tau^2)d\tau}{\tau-z}.$$

Эту функцию можно преобразовать к виду: $\lambda(z)=-i\omega_1+\lambda_0(z)$, где $\lambda_0(z)$ - известная функция по теории плазмы,

$$\lambda_0(z)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\tau^2}\tau d\tau}{\tau-z}.$$

Собственные функции (2.9) называются собственными функциями непрерывного спектра, ибо спектральный параметр η непрерывным образом заполняет всю действительную прямую.

Таким образом, собственные решения уравнения (2.3) имеют вид

$$h_{\eta,\mu}=\exp\left(-\frac{x_1}{\eta}z_0\right)\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}}\eta P\frac{1}{\eta-\mu}+\exp\left(\eta^2\right)\lambda(\eta)\,\delta(\eta-\mu)\right]. \tag{2.10}$$

Собственные решения (2.10) отвечают непрерывному спектру характеристического уравнения, ибо спектральный параметр непрерывным образом пробегает всю числовую прямую. По условию задачи мы ищем решение, невозрастающее вдали от стенки. В связи с этим, спектром граничной задачи будем называть положительную действительную полуось параметра $\eta:\ \sigma_c = (0,+\infty)$.

Приведем формулы Сохоцкого для дисперсионной функции:

$$\lambda^{\pm}(\mu) = \pm i\sqrt{\pi}\,\mu\, e^{-\mu^2} - i\omega_1 + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{e^{-\tau^2}\tau d\tau}{\tau-\mu}.$$

Разность граничных значений дисперсионной функции отсюда равна:

$$\lambda^{+}(\mu) - \lambda^{-}(\mu) = 2\sqrt{\pi}\,\mu\, e^{-\mu^2} i,$$

полусумма граничных значений равна:

$$\frac{\lambda^{+}(\mu)+\lambda^{-}(\mu)}{2} = -i\omega_1 + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{e^{-\tau^2}\tau d\tau}{\tau-\mu}.$$

Разложим дисперсионную функцию в ряд Лорана по отрицательным степеням переменного *z* в окрестности бесконечно удаленной точки:

$$\lambda(z) = -i\omega_1 - \frac{1}{2z^2} - \frac{3}{4z^4} - \frac{15}{8z^6} - ...,\ z\to\infty. \qquad (2.11)$$

Из разложения (2.11) видно, что при малых значениях ω_1 дисперсионная функция имеет два отличающихся лишь знаками комплекснозначных нуля:

$$\pm\eta_0^{(0)}(\omega_1) = \frac{1+i}{2\sqrt{\omega_1}}.$$

Отсюда видно, что при $\omega_1\to 0$ оба нуля дисперсионной функции имеют пределом одну бесконечно удаленную точку $\eta_i = \infty$ кратности (порядка) два.

Введем выделенную частоту колебаний пластины, ограничивающей газ:

$$\omega_1^{*} = \max_{0<\mu<+\infty}\sqrt{-\lambda_0^2(\mu)+s^2(\mu)} \approx 0.733.$$

Эту частоту колебаний будем называть критической.

В [14] показано, что в случае, когда частота колебаний пластины меньше критической, т.е. при $0\le\omega<\omega_1^{*}$, индекс функции *G(t)* равен 1. Это означает, что число комплексных нулей дисперсионной функции в плоскости с разрезом вдоль действительной оси, равно двум.

В случае, когда частота колебаний пластины превышает критическую ($\omega > \omega_1^*$) индекс функции *G(t)* равен нулю: $\chi(G) = 0$. Это означает, что дисперсионная функция не имеет нулей в верхней и нижней полуплоскостях. В этом случае дискретных (частных) решений исходное уравнение (2.3) не имеет.

Таким образом, дискретный спектр характеристического уравнения, состоящий из нулей дисперсионной функции, в случае $0 \le \omega_1 < \omega_1^*$ есть множество точек $\sigma_d = \{\eta_0, -\eta_0\}$. При $\omega_1 < \omega_1^*$ дискретный спектр – это пустое множество. При $0 \le \omega_1 < \omega_1^*$ собственными функциями характеристического уравнения являются следующие два решения характеристического уравнения:

$$\Phi(\pm\eta_0, \mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\pm\eta_0}{\pm\eta_0 - \mu}.$$

Под η_0 будем понимать тот из нулей дисперсионной функции, который обладает свойством: $\mathrm{Re}\left[(1 - i\omega_1)/\eta_0\right] > 0$. Для этого нуля убывающее собственное решение уравнения (2.3) имеет вид

$$h_{\eta_0}(x_1, \mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{x_1 z_0}{\eta_0}\right) \frac{\eta_0}{\eta_0 - \mu}.$$

Это означает, что дискретный спектр рассматриваемой граничной задачи состоит из одной точки $\sigma_d = \{\eta_0\}$ в случае $0 \le \omega_1 < \omega_1^*$. При $\omega_1 \to 0$ оба нуля, как уже указывалось ниже, перемещаются в одну и ту же бесконечно удаленную точку. Это означает, что в этом случае дискретный спектр характеристического уравнения состоит из одной бесконечно удаленной точки кратности два: $\sigma_d(0) = \eta_i = \infty$ и является присоединенным к непрерывному спектру. Этот спектр является также и спектром рассматриваемой граничной задачи. Однако, в этом случае дискретных (частных) решения ровно два: $h_1(x_1, \mu) = 1$ и $h_2(x_1, \mu) = x_1 - \mu$.

3. Аналитическое решение граничной задачи. Составим общее решение уравнения (2.3) в виде суммы частного (дискретного) решения, убывающего вдали от стенки, и интеграла по непрерывному спектру от собственных решений, отвечающих непрерывному спектру:

$$h(x_1, \mu) = \frac{\eta_0 a_0}{\sqrt{\pi}(\eta_0 - \mu)} \exp\left(-\frac{x_1 z_0}{\eta_0}\right) + \int_0^\infty \exp\left(-\frac{x_1 z_0}{\eta}\right) \Phi(\eta, \mu)\, a(\eta)\, d\eta. \qquad (3.1)$$

Здесь a_0 - неизвестный постоянный коэффициент, называемый коэффициентом дискретного спектра, причем при $\chi = 0$ этот коэффициент равен нулю: $a_0 = 0$, a_η - неизвестная функция, называемая коэффициентом непрерывного спектра, $\Phi(\eta, \mu)$ - собственные функции характеристического уравнения, отвечающие непрерывному спектру и нормировке (2.8).

Разложение (3.1) можно представить в явном виде:

$$h(x_1,\mu)=\frac{\eta_0 a_0}{\sqrt{\pi}(\eta_0-\mu)}\exp\left(-\frac{x_1 z_0}{\eta_0}\right)+$$
$$+\int_0^\infty \exp\left(-\frac{x_1}{\eta}z_0\right)\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}}\eta P\frac{1}{\eta-\mu}+\exp\left(\eta^2\right)\lambda(\eta)\,\delta(\eta-\mu)\right]a(\eta)\,d\eta. \qquad (3.2)$$

Функция $a(\eta)$ подлежит нахождению из граничных условий (2.4) и (2.5).

Разложение (3.2) можно представить в классическом виде:

$$h(x_1,\mu)=\frac{\eta_0 a_0}{\sqrt{\pi}(\eta_0-\mu)}\exp\left(-\frac{x_1 z_0}{\eta_0}\right)+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{x_1 z_0}{\eta}\right)\frac{\eta\, a(\eta)d\eta}{\eta-\mu}+\exp\left(-\frac{x_1 z_0}{\mu}+\mu^2\right)\lambda(\mu)a\,(\mu)\,\theta_+(\mu), \quad (3.3)$$

где $\theta_+(\mu)$ - функция Хэвисайда,

$$\theta_+(\mu)=\begin{cases}1, & \mu>0,\\ 0, & \mu<0.\end{cases}$$

Очевидно, что разложение (3.3) автоматически удовлетворяет граничному условию (2.5) вдали от стенки. Подставим разложение (3.3) в граничное условие (2.4). Получаем одностороннее сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши

$$\frac{\eta_0 a_0}{\sqrt{\pi}(\eta_0-\mu)}+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\frac{\eta a(\eta)d\eta}{\eta-\mu}+\exp\left(\mu^2\right)\lambda(\mu)a\,(\mu)\theta_+(\mu)=2U_0, \quad \mu>0. \qquad (3.4)$$

Введем вспомогательную функцию

$$N(z)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\frac{\eta\, a(\eta)\,d\eta}{\eta-z}. \qquad (3.5)$$

$$\lambda^+(\mu)\left[N^+(\mu)-2U_0+\frac{\eta_0 a_0}{\sqrt{\pi}(\eta_0-\mu)}\right]=\lambda^-(\mu)\left[N^-(\mu)-2U_0+\frac{\eta_0 a_0}{\sqrt{\pi}(\eta_0-\mu)}\right]=0,\ \mu>0. \qquad (3.6)$$

Рассмотрим соответствующую однородную краевую задачу Римана:

$$X^+(\mu)=G(\mu)X^-(\mu), \qquad G(\mu)=\frac{\lambda^+(\mu)}{\lambda^-(\mu)}, \quad \mu>0.$$

Решение задачи Римана было рассмотрено в [14] и дается интегралом типа Коши:

$$X(z)=\frac{1}{z^\chi}\exp V(z), \qquad (3.7)$$

где *V(z)* понимается как интеграл типа Коши

$$V(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{\infty}\frac{\left[\ln G(\tau)-2\pi i\chi\right]d\tau}{\tau-z}. \qquad (3.8)$$

Вернемся к решению неоднородной задачи (3.6), предварительно преобразовав с помощью (3.7) и (3.8) ее к виду:

$$X^+(\mu)\left[N^+(\mu)-2U_0+\frac{\eta_0 a_0}{\sqrt{\pi}(\eta_0-\mu)}\right]-X^-(\mu)\left[N^-(\mu)-2U_0+\frac{\eta_0 a_0}{\sqrt{\pi}(\eta_0-\mu)}\right]=0,\ \mu>0. \qquad (3.9)$$

Учитывая поведение всех входящих в краевое условие (3.9) функций в комплексной плоскости и в бесконечно удаленной точке получаем общее решение, из которого находим

$$N(z)=2U_0+\frac{\eta_0 a_0}{\sqrt{\pi}(z-\eta_0)}+\frac{1}{X(z)}\left[C_0+\frac{C_1}{z-\eta_0}\right], \qquad (3.10)$$

где C_0, C_1 – произвольные постоянные, причем при $\chi=0$ $C_1=0$, а при $\chi=1$ $C_0=0$.

Потребуем, чтобы общее решение (3.10) имело те же аналитические свойства, что и вспомогательная функция (3.5). На этом пути получаем, что в случае $\chi=0$

$$N(z)=2U_0\left[1-\frac{1}{X(z)}\right], \qquad (3.11)$$

а в случае $\chi=1$ $a_0=2U_0\sqrt{\pi}/\left(\eta_0 X(\eta_0)\right)$ и, следовательно,

$$N(z)=2U_0+\frac{2U_0}{X(\eta_0)(z-\eta_0)}-\frac{2U_0}{X(z)(z-\eta_0)}. \qquad (3.12)$$

Искомый неизвестный коэффициент непрерывного спектра с помощью (3.11) и (3.12) находится из формулы Сохоцкого для вспомогательной функции (3.5). В случае $\chi=0$ получаем:

$$a_\eta=\frac{2U_0\sin q(\eta)}{\sqrt{\pi}\eta X(\eta)}, \qquad (3.13)$$

где

$$q(\eta)=-i\left(\ln G(\eta)-2\pi i\right)/2.$$

На этом этапе доказательство разложения (3.1) (или (3.2)) закончено.

4. Функция распределения. Рассмотрим функцию $h(x_1,\mu)$ для летящих к стенке молекул непосредственно у стенки, т.е. при $x_1=0$, $\mu<0$.

С помощью формул (3.13) и (3.14) представим разложение (3.1) в явном виде. При

$\chi = 0$

$$\frac{h(0,\mu)}{2U_0} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin q(\eta)\, d\eta}{X(\eta)(\eta-\mu)}, \tag{4.1}$$

а при $\chi = 1$:

$$\frac{h(0,\mu)}{2U_0} = \frac{1}{X(\eta_0)(\eta_0-\mu)} + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin q(\eta) d\eta}{X(\eta)(\eta-\eta_0)(\eta-\mu)}. \tag{4.2}$$

Интегралы из (4.1) и (4.2) вычисляются аналитически с помощью интегральных представлений из [14]. В результате получаем, что при $\chi = 0$:

$$\frac{h(0,\mu)}{2U_0} = 1 - \frac{1}{X(\mu)}, \qquad \mu < 0, \tag{4.3}$$

а при $\chi = 1$:

$$\frac{h(0,\mu)}{2U_0} = 1 - \frac{1}{(\mu-\eta_0)X(\mu)}, \qquad \mu < 0. \tag{4.4}$$

Равенства (4.3) и (4.4) означают, что функция распределения на границе полупространства построена в явном виде полностью.

5. Скорость разреженного газа в полупространстве и непосредственно у колеблющейся плоскости. Согласно (2.1) и (2.2) выражение для скорости упрощается:

$$U_y(x_1,t_1) = \frac{e^{-i\omega_1 t_1}}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{-\mu'^2} h(x_1,\mu')d\mu'. \tag{5.1}$$

Начнем со случая, когда индекс задачи равен нулю. В этом случае частота колебаний пластины $\omega_1 \in (\omega_1^*;+\infty)$.

Воспользуемся разложением (3.1). Подставим (3.1) в (5.1) и поменяем порядок интегрирования. Затем, используя нормировочное соотношение (2.8), приходим к равенству:

$$U_y(x_1,t_1) = \frac{e^{-i\omega_1 t_1}}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^\infty \exp\left(-\frac{x_1}{\eta} z_0\right) a(\eta) d\eta. \tag{5.2}$$

Теперь воспользуемся формулой (3.13) для коэффициента непрерывного спектра. С учетом (5.2) получим, что массовая скорость газа в полупространстве равна:

$$U_y(x_1,t_1) = U_0 e^{-i\omega_1 t_1} \frac{z_0}{\pi} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{x_1}{\eta} z_0\right) \frac{\sin q(\eta)}{\eta X(\eta)} d\eta. \tag{5.3}$$

Вычислим значение массовой скорости непосредственно вблизи у стенки. Из фор-

мулы (5.3) получаем, что

$$U_y(0,t_1) = U_0 e^{-i\omega_1 t_1}\,\frac{z_0}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin q(\eta)}{\eta X(\eta)}d\eta. \qquad (5.4)$$

Для вычисления интеграла из (5.4) воспользуемся интегральным представлением из [14]. С использованием (3.8) получаем, что массовая скорость в полупространстве вычисляется по формуле

$$U_y(0,t_1) = U_0 e^{-i\omega_1 t_1} z_0\left(1-\frac{1}{X(0)}\right). \qquad (5.5)$$

Для нахождения величины факторизующей функции в нуле воспользуемся теперь формулой факторизации дисперсионной функции [14]: $\lambda(z) = \lambda_\infty X(z)X(-z)$, где $\lambda_\infty = \lambda(\infty) = -i\omega_1$.

Замечая, что $\lambda(0) = 1 - i\omega_1$, находим: $X^2(0) = \lambda(0)/\lambda_\infty = 1 + i\nu/\omega$. Согласно (5.5) значение амплитуды скорости газа у стенки равно:

$$U_y(0,t_1) = U_0 e^{-i\omega_1 t_1} W,$$

где

$$W = (1 - i\omega_1)\frac{\sqrt{\omega_1 + i} - \sqrt{\omega_1}}{\sqrt{\omega_1 + i}}.$$

Значение размерной скорости непосредственно у стенки дается выражением:

$$u_y(0,t) = \upsilon_T U_0 e^{-i\omega t} W.$$

Полагая, что $W = |W|e^{i\varphi}$, запишем

$$U_y(0,t_1) = U_0|W|e^{-i(\omega_1 t_1 - \varphi)},$$

где $|W|$ - безразмерная амплитуда скорости газа (см. рис.1), а $\varphi = \arg W$ - сдвиг фазы скорости (см. рис.2).

Теперь рассмотрим случай, когда индекс задачи равен единице, т.е. когда параметр $\omega_1 \in \left[0;\omega_1^*\right)$. Опуская длительные вычисления, приведем выражение скорости газа в полупространстве:

$$U_y(x_1,t_1) = U_0 e^{-i\omega_1 t_1} z_0\left[\frac{e^{-x_1 z_0/\eta_0}}{\eta_0 X(\eta_0)} + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{e^{-x_1 z_0/\eta}\sin q(\eta)d\eta}{\eta X(\eta)(\eta-\eta_0)}\right], \qquad (5.6)$$

и непосредственно у стенки:

$$U_y(0,t_1) = U_0 e^{i\omega_1 t_1} z_0 \left(1 + \frac{1}{\eta_0 X(0)}\right). \qquad (5.7)$$

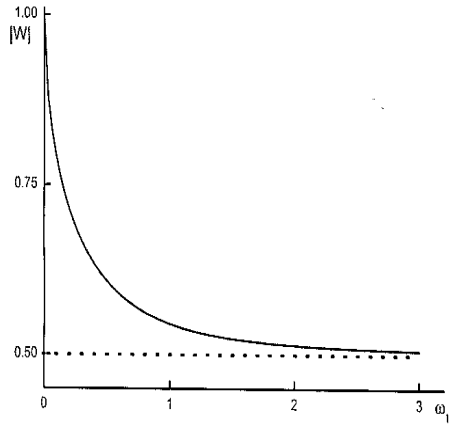

Рис.1. Зависимость величины амплитуды скорости газа непосредственно у стенки от частоты колебаний ограничивающей газ плоскости

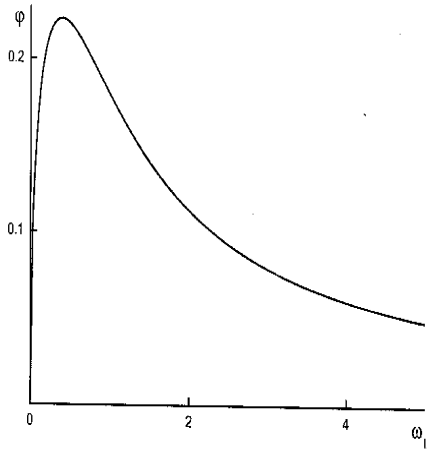

Рис.2. Зависимость величины сдвига фазы скорости газа непосредственно у стенки от частоты колебаний ограничивающей газ плоскости

Для вычисления величины $X(0)$ из (5.7) воспользуемся формулой факторизации: $\lambda(z) = i\omega_1\left(z^2 - \eta_0{}^2\right)X(z)X(-z)$, которая доказана в [14]. Из этой формулы при $z = 0$ находим, что $\lambda(0) = -i\omega_1\eta_0^2 X^2(0)$, откуда, учитывая, что $\lambda(0) = z_0$, получаем: $X(0) = \sqrt{iz_0 / \omega_1\eta_0^2}$. Следовательно, согласно (5.7) для безразмерной скорости газа получаем

$$U_y(0,t_1) = U_0|W|e^{-i(\omega_1 t_1 - \varphi)}, \text{ где } W = z_0 + (1-i)\sqrt{\frac{\omega_1 z_0}{2}}, \qquad (5.8)$$

$|W|$ - амплитуда скорости, а $\varphi = \arg W$ - сдвиг фазы скорости.

Согласно (5.8) выражение для размерной скорости при малых частотах непосредственно у стенки таково:

$$u_y(0,t_1) = \upsilon_T U_0 \,\mathrm{Re}\left[e^{-i\omega_1 t_1}\left(z_0 + \sqrt{z_0\omega_1}\cdot e^{-i\pi/4}\right)\right],$$

или

$$u_y(0,t_1) = \upsilon_T U_0 \,\mathrm{Re}\left[e^{-i\omega_1 t_1}\left(z_0 + (1-i)\sqrt{\frac{\omega_1 z_0}{2}}\right)\right].$$

Заключение. В настоящей работе сформулирована и решена аналитически вторая

задача Стокса — задача о поведении разреженного газа, занимающего полупространство над стенкой, совершающей гармонические колебания. Рассматриваются диффузные граничные условия. Используется уравнение, полученное в результате линеаризации модельного кинетического уравнения Больцмана. На основе аналитического решения найдена скорость разреженного газа в полупространстве и непосредственно у стенки.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абрашкин, А.А., Якубович Е.И*. Вихревая динамика в лагранжевом описании. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2006. 175 с.
2. *Гахов, Ф.Д*. Краевые задачи. М.: Наука. 1987. 677 с.
3. *Дудко В.В., Юшканов А.А., Яламов Ю.И*. Влияние свойств поверхности на характеристики сдвиговых волн// ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып.4. С. 134-135.
4. *Дудко, В.В., Юшканов А.А., Яламов Ю.И*. Генерация колеблющейся поверхностью сдвиговых волн в газе// ТВТ. 2009. Т. 47. No. 2. P. 262-268.
5. *Дудко, В.В*. Скольжение разреженного газа вдоль неподвижных и колеблющихся поверхностей: Дисс... канд. физ-матем. наук. М. 2010. 108 с.
6. *Жаринов, В.В., Владимиров В.С*. Уравнения математической физики. М.: Физмалит. 1999. 399 с.
7. *Ландау, Л.Д., Лифшиц Е.М*. Электродинамика сплошных сред. Теоретическая физика. Т. VIII. М. Физматлит (2003). 656 с.
8. *Ландау, Л.Д., Лифшиц Е.М*. Гидродинамика. Теоретическая физика. Т. VI. М. Физматлит (1987). 735 с.
9. *Латышев, А.В., Юшканов А.А*. Аналитические методы в кинетической теории. Монография. Изд-во МГОУ. М. 2008. 280 с.
10. *Черчиньяни, К*. Теория и приложения уравнения Больцмана. М.: Мир. 1978. 495 с.
11. *Шлихтинг, Г*. Теория пограничного слоя. М.: Наука. 1974. 712 с.
12. *Ai L., Vafai K*. An Investigation of Stokes' Second Problem for Non Newtonian Fluids //Numerical Heat Transfer, Part A: Applications, V. 47. 2005. P. 955 - 980.
13. *Akimova, V.A., Latyshev A.V., Yushkanov A.A*. Analytical solution of the second Stokes problem on behaviour of gas over oscillation surface. Part I: eigenvalues and eigensolutions//ArXiv: 1111.3429v1 [math-ph] 15 Nov 2011. 27 pp.
14. *Akimova, V.A., Latyshev A.V., Yushkanov A.A*. Analytical solution of the second Stokes problem on behaviour of gas over oscillation surface. Part II: mathematical apparatus of solving of problem//ArXiv: 1111.5182v1 [math-ph] 22 Nov 2011. 26 pp.
15. *Asghar, S., Nadeem S., Hanif K., Hayat T*. Analytic solution of Stokes second problem for second grade fluid, Math. Probl. Eng. V. 2006, Article ID 72468. 8 p.
16. *Cleland, A.N., Roukes M.L*. Ananometre–scale mechanical electrometer // Nature. Vol. 392. 1998. P. 160-162.
17. *Graebel, W.P*. Engineering Fluid Mechanics. New York. Taylor & Francis. 2001. 752 p.
18. *Karabacak, D.M., Yakhot V., and Ekinci K.L*. High–Frequency Nanofluidics: An Experimental Study using Nanomechanical Resonators, Phys. Rev. Lett. 98. 2007. PP 254505.
19. *Khan M., Anjum Asia, Fetecau C*. On exact solutions of Stokes second problem for a Burgers' fluid, I. The case $\gamma < \lambda^2/4$. // J.Appl. Math. and Phys. (ZAMP). Published online: 26 August 2009.

20. *Latyshev A.V., Yushkanov A.A*. Skin effect with arbitrary specularity in Maxwellian Plasma// J. of Math. Phys. 2010. V. 51. P. 113505-1-113505-10
21. *Latyshev, A.V., Yushkanov A.A.* Temperature jump in degenerate quantum gases with the Bogoliubov excitation energy and in the presence of the Bose - Einstein condensate // Theor. and Mathem. Physics, 165(1): 1359 - 1371 (2010).
22. *Sharipov, F. and Kalempa D*. Gas flow around a longitudinally oscillating plate at arbitrary ratio of collision frequency to oscillation frequency// Rarefied Gas Dynamics: 25-th International Symposium, edited by M.S.Ivanov and A.K.Rebrov. Novosibirsk, 2007. P. 1140-1145.
23. *Steinhell, E., Scherber W., Seide M., Rieger H*. Investigation on the interaction of gases and well defined solid surfaces with respect to possibilities for reduction of aerodynamic friction and aerothermal heating // Rarefied gas dynamics. Ed. J.L. Potter. N.Y.: Acad. press. 1977. P. 589-602.
24. *Stokes, G.G*. On the effect of internal friction of fluids on the motion of pendulums. Trans. Cambr. Phil. IX, 8 A851. Math. and Phys. Papers III. Cambridge. 1901. P. 1–141.
25. *Yakhot, V., Colosqui C*. Viscoelastic–Elastic Transition in the "Stokes' Second Problem"in a High Frequency Limit. // arXiv:nlin.CD/0609061.

TO THE THEORY OF BEHAVIOUR RAREFIED GAS VER THE FLUCTUATING SURFACE

V. Akimova, A. Latyshev, A. Yushkanov

Moscow Region State University
10a Radio st., Moscow, 105005, Russia

Abstract. Let the rarefied gas occupies half-space $x > 0$ over a firm flat plate. It is supposed, that this plate makes in the plane harmonious fluctuations along an axis y. Second problem Стокса consists in the decision of the kinetic Boltzmann equation describing behavior of rarefied gas. In work the analytical decision of the modeling kinetic equation in the assumption diffusive reflexions of molecules from a plate is under construction. There is a function of distribution of gas molecules and mass speed of gas in half-space is under construction. There is a value of mass speed directly at a wall.
Keywords: statement of second Stokes problem, separation of variables, eigen solutions, continuous and discrete spectrum, exact decision, velocity of gas.

УДК 535.21

СТОЛКНОВИТЕЛЬНОЕ ЭХО ПРИ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ПОЛЯРИЗАЦИИ ВОЗБУЖДАЮЩИХ ИМПУЛЬСОВ

В.А. Решетов*, Е.Н. Попов*, В.Н. Цикунов, И.В. Евсеев****

**Тольяттинский государственный университет (Тольятти)*

***Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ» (Москва)*
115409, Москва, Каширское ш., 31

Аннотация. В работе получены выражения для амплитуды и поляризации сигнала столкновительного фотонного эха на переходе 0 ↔ 1 в парах иттербия при его формировании двумя лазерными импульсами со взаимно ортогональными эллиптическими поляризациями. Показано, что интенсивность сигнала столкновительного эха обращается в ноль при круговых ортогональных поляризациях возбуждающих лазерных импульсов и достигает максимального значения при их линейных взаимно перпендикулярных поляризациях. Все поляризационные и временные свойства сигнала столкновительного эха получены в рамках модели упругих деполяризующих столкновений между атомами газа.
Ключевые слова: фотонное эхо, столкновительное эхо, поляризационные свойства фотонного эха.

Явление фотонного эха, впервые наблюдавшееся в рубине [5], широко используется в настоящее время, как в фундаментальных, так и в прикладных исследованиях. Так, например, фотонное эхо применяется для изучения структуры и динамики макромолекул [4], в спектроскопии высокого разрешения [3], для записи, хранения и обработки квантовой информации [6], для исследования процессов релаксации [7].

В настоящей работе исследуются поляризационные свойства столкновительного фотонного эха, сформированного двумя лазерными импульсами со взаимно ортогональными эллиптическими поляризациями на переходе с изменением углового момента 0 ↔ 1 в парах иттербия. В этом случае сигнал фотонного эха возникает исключительно за счёт анизотропии релаксационных процессов, обусловленных деполяризующими столкновениями между атомами. Данная анизотропия проявляется в зависимости элементов матрицы релаксации от величины и направления скорости атома. Изучение характеристик этого сигнала позволяет получить информацию о потенциале межатомного взаимодействия.

1. Поляризационные свойства «обычного» фотонного эха на переходе 0 ↔ 1 в парах иттербия

Поляризационные свойства фотонного эха, создаваемого в газе на переходе 0 ↔ 1, были изучены теоретически в работе [1]. Поляризация фотонного эха, генерируемого двумя резонансными лазерными импульсами с линейной поляризацией, будет также линейной, причём вектор поляризации сигнала эха параллелен вектору поляризации второго лазерного импульса. Отметим, что амплитуда сигнала эха пропорциональна величине $\cos(\psi)$, где ψ – это угол между векторами поляризации первого и второго ла-

зерных импульсов. Следовательно, при угле $\psi = 90°$ обычное фотонное эхо должно исчезать. Для возбуждающих импульсов с круговой поляризацией «обычное» фотонное эхо появляется только в случае, когда оба импульса имеют одинаковую круговую поляризацию – оба правую или оба левую.

Итак, фотонное эхо на переходе $0 \leftrightarrow 1$ в чистом газе не возникает при взаимно ортогональных поляризациях лазерных импульсов, причём как для линейных, так и для круговых поляризаций. Исчезновение сигнала «обычного» эха при ортогональных поляризациях возбуждающих импульсов позволяет изучать процессы столкновительной релаксации посредством столкновительного эха без «шума», создаваемого сигналом «обычного» эха.

2. Теория столкновительного фотонного эха на переходе $0 \leftrightarrow 1$

Рассмотрим формирование фотонного эха на переходе с изменением полного углового момента $J_a = 0 \rightarrow J_b = 1$ двумя резонансными лазерными импульсами с продолжительностями T_1 и T_2. Временной интервал между возбуждающими импульсами обозначим τ. Векторы напряженности электрического поля импульсов, распространяющихся вдоль оси Z с несущей частотой ω, могут быть представлены в виде:

$$E_n = e_n l_n \exp\{-i(\omega t - kz)\} + к.с., \quad n = 1,2, \tag{1}$$

где e_n и l_n - амплитуды и единичные векторы поляризации. Без ограничения общности круговые компоненты взаимно ортогональных

$$(l_n l_m^* = \delta_{n,m}, \quad n,m = 1,2,)$$

векторов поляризации можно записать следующим образом:

$$l_{1,q} = \cos(\alpha)\delta_{q,-1} - \sin(\alpha)\delta_{q,1}, \quad l_{1,q} = \sin(\alpha)\delta_{q,-1} - \cos(\alpha)\delta_{q,1}$$

Значение $\alpha = 0$ соответствует круговым ортогональным поляризациям импульсов – первый право-циркулярно поляризован, второй – лево, а значение $\alpha = \pi/4$ соответствует линейным ортогональным поляризациям – первый импульс линейно поляризован вдоль оси X, второй – вдоль оси Y. Будем считать импульсы достаточно короткими, так что их длительность много меньше, чем времена однородной релаксации. Динамика атома в поле лазерного импульса определяется уравнением для медленноменяющейся матрицы плотности $\hat{\rho}$:

$$\dot{\hat{\rho}} = i[\hat{V}, \hat{\rho}], \quad \hat{V} = \frac{\Delta}{2}(\hat{P}_a - \hat{P}_b) + \chi_n(\hat{g}_n - \hat{g}_n^+) \tag{2}$$

Здесь $\Delta = kv_z - \omega + \omega_0$ – отстройка от резонансной частоты, $\hat{P}_{a,b}$ – операторы проектирования на подпространства состояний нижнего a и верхнего b уровней, $\chi_n = \frac{|d|e_n}{\hbar}$ – частота Раби, $d = d(J_a, J_b)$ – приведённый матричный элемент оператора электрического дипольного момента для перехода $J_a \rightarrow J_b$, в то время как $\hat{g}_n = (\hat{g} l_n^-)$, где $\hat{g}$ –

оператор электрического дипольного момента для перехода $J_a \to J_b$, матричные элементы которого для круговых компонент выражаются через 3J-символы Вигнера:

$$(\hat{g}_q)^{ab}_{\mu m} = (-1)^{J_a-\mu}\frac{\dot{a}}{|\dot{a}|}\begin{pmatrix} J_a & 1 & J_b \\ -\mu & q & m \end{pmatrix} \tag{3}$$

Решение уравнения (2) можно записать с помощью оператора эволюции $\hat{S}_n = \exp\{i\hat{V}_n T_n\}$. Динамика атома во временном интервале между двумя лазерными импульсами определяется процессами релаксации. Свойства сигнала эха зависят от недиагональной компоненты матрицы плотности атома $\rho^{ab}_{\mu m}$. Однако, более удобно описать процессы релаксации в виде неприводимых компонент матрицы плотности $\psi^{(k)}_q$. Для перехода $J_a = 0 \to J_b = 1$

$$\psi_q = \psi^{(k)}_q \delta_{k,1}, \quad \psi_q = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1)^{1+q}\rho^{ab}_{0q} \tag{4}$$

Уравнения, описывающие изменение этих компонент матрицы плотности со временем записываются следующим образом [2]:

$$(\frac{\partial}{\partial t} + \gamma^{(1)} - i\Delta)\psi_q = -\sum_q{}' Y_{qq'}(v)\psi_{q^t}. \tag{5}$$

Здесь константа $\gamma^{(1)}$ описывает релаксацию за счет спонтанного излучения и неупругих столкновений, матрица $Y_{qq'}(v)$ зависит от скоростей атомов и описывает релаксацию, обусловленную деполяризующими столкновениями атомов. В системе отсчета, где ось Z направлена вдоль вектора скорости атома, матрица столкновительной релаксации

$$Y_{qq'}(v) = \delta_{qq'}(\Gamma_q(v) + i\Delta_q(v)), \;\; \Gamma_1(v) = \Gamma_{-1}(v), \;\; \Delta_1(v) = \Delta_{-1}(v), \tag{6}$$

зависит только от модуля скорости, в то время как угловую зависимость можно задать, используя матрицы поворота. Тогда уравнение (5) преобразуется к виду:

$$(\frac{\partial}{\partial t} + \gamma - i\delta - \frac{\lambda}{2})\psi_q = -\lambda\sum_q{}' \Lambda_{qq'} e^{t(q^t - q)\varphi}\psi_{q'}. \tag{7}$$

$$\gamma = \gamma^{(1)} + \frac{\Gamma_1(v) + \Gamma_0(v)}{2},$$
$$\lambda = \Gamma_0(v) - \Gamma_1(v) + i[\Delta_0(v) - \Delta_1(v)],$$
$$\delta = kv\cos(\theta) + \omega_0 - \omega + \frac{\Delta_0(v) - \Delta_1(v)}{2}.$$

Заметим, что матрица $\Lambda_{qq'}$ зависит только от угла θ между скоростью атома и осью Z:

$$\hat{\Lambda} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sin^2(\theta) & -\frac{1}{2\sqrt{2}}\sin(2\theta) & -\frac{1}{2}\sin^2(\theta) \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}}\sin(2\theta) & \cos^2(\theta) & \frac{1}{2\sqrt{2}}\sin(2\theta) \\ -\frac{1}{2}\sin^2(\theta) & \frac{1}{2\sqrt{2}}\sin(2\theta) & \frac{1}{2}\sin^2(\theta) \end{pmatrix}.$$

Решение системы линейных уравнений (7) можно записать, с помощью резольвенты $R_{qq'}(t)$:

$$\psi_q(t) = e^{-\gamma t + i\delta t}\sum_q R_{qq'}(t)e^{t(q'-q)\varphi}\psi_{q'}(0), \quad \hat{R}(t) = \exp(\frac{\lambda t}{2} - \lambda\hat{\Lambda}t). \tag{8}$$

После диагонализации матрицы $\hat{\Lambda}$ резольвента может быть приведена к виду:

$$\hat{R}(t) = \exp(\frac{\lambda t}{2})\hat{l} - 2\sinh(\frac{\lambda t}{2})\hat{\Lambda}. \tag{9}$$

Отметим, что резольвента (9) зависит только от одного угла θ, а второй угол φ фигурирует в решении уравнений релаксации (8) только в виде экспоненциального множителя. Такое разделение переменных упрощает процедуру интегрирования по полному углу для нахождения сигнала эха.

Напряженность электрического поля столкновительного фотонного эха определяется с помощью уравнений Максвелла:

$$e^e(t') = 2\pi i\omega\frac{L}{c}n_0|d|\int f(\mathrm{v})d\mathrm{v}Tr\{\hat{\rho}(t')\hat{g}\}, \tag{10}$$

где L – это протяжённость газообразной среды, n_0 – концентрация атомов, $f(\mathbf{v})$ – функция распределения Максвелла атомов газа по скоростям. Матрица плотности $\hat{\rho}(t')$ в момент времени t' может быть получена последовательным применением операторов эволюции и матриц релаксации. Вектор $\mathrm{e}^e(t')$ можно разложить по ортогональному базису векторов l_n поляризации двух возбуждающих импульсов (1):

$$\mathrm{e}^e(t') = \mathrm{e}_1^e(t')\mathrm{l}_1 + \mathrm{e}_2^e(t')\mathrm{l}_2, \tag{11}$$

запишем явный вид выражения сигнала столкновительного фотонного эха для компонент $\mathrm{e}_n^e(t') = \mathrm{e}^e(t')\mathrm{l}_n$ в случае узкой спектральной линии:

$$\mathrm{e}_n^e(t') = \mathrm{e}_0 e^{-2\gamma\tau}\int f(\mathrm{v})d\mathrm{v}e^{-i\delta(t'-\tau)}D_{2,1}(\mathrm{v},\tau)D_{n,2}^*(\mathrm{v},\tau) \tag{12}$$

$$\mathrm{e}_0 = \frac{\pi\omega L n_0|d|}{c\sqrt{3}}\sin(\theta_1)\sin(\frac{\theta_2}{2}), \quad \theta_n = \frac{2|d|\mathrm{e}_n T_n}{n\sqrt{3}}, \tag{13}$$

$$D_{n,m}(\mathrm{v},\tau) = \sum_{q,q'} R_{qq'}(\tau)e^{t(q'-q)\varphi}\,\mathrm{l}_{n,-q}\,l_{m,-q}^* \tag{14}$$

где $R_{qq'}(\tau)$ - элементы резольвенты (9). В случае точного резонанса после интегрирования выражения (12) – (14) по всем углам получим:

$$\mathrm{e}_n^e(t') = \mathrm{e}_0 e^{-2\gamma\tau} \int_{-1}^{1} dz\ G(z,t'-\tau) H_n(z,\tau), \tag{15}$$

где $z = \cos(\theta)$,

$$G(z,t'-\tau) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^n x^2 e^{-x^2 - iku(t'-\tau)xz} dx, \tag{16}$$

где u – средняя тепловая скорость атомов, а функция $H_n(z,\tau)$, определяющая поляризационные свойства столкновительного фотонного эха, имеет вид:

$$H_n(z,\tau) = \sum_{q,\sigma,k} R^*_{q,q-k}(\tau) R_{\sigma,\sigma-k}(\tau) (l_{n,-q})^* (l_{2,k-q})(l_{2,-\sigma})(l_{1,k-\sigma})^*, \tag{17}$$

Используя явные выражения для круговых компонент векторов поляризации возбуждающих импульсов, можно выразить функции $H_n(z,\tau)$ через параметр их эллиптичности α:

$$H_1(z,\tau) = -\frac{1}{2}\sin^2(2\alpha)\left|R_{1,-1}(\tau)\right|^2, \quad H_2(z,\tau) = \frac{1}{4}\sin(4\alpha)\left|R_{1,-1}(\tau)\right|^2. \tag{18}$$

После подстановки элементы резольвенты (9) в (15) – (18), получим следующее выражение для амплитуды столкновительного фотонного эха:

$$e^{\mathrm{e}(t')} = 1/2 e_0 e^{-2\gamma\tau} \left|\mathrm{sh}(\lambda\tau/2)\right|^2 \sin[(2\alpha) g_0(t'-\tau) \boldsymbol{l}^0], \tag{19}$$

где функция

$$g_0(t'-\tau) = \int_{-1}^{1} dz\ G(z,t'-\tau)(1-z^2)^2, \tag{20}$$

описывает временную форму импульса столкновительного эха, а единичный вектор $\boldsymbol{l}^0$ с компонентами

$$\boldsymbol{l}_1^0 = -\sin(2\alpha), \quad \boldsymbol{l}_2^0 = -\cos(2\alpha), \tag{21}$$

характеризует поляризационные свойства сигнала эха. Как следует из формулы (19), интенсивность сигнала столкновительного фотонного эха существенно зависит от параметра эллиптичности α лазерных импульсов – она максимальна при линейной поляризации (α = π/4) импульсов, и обращается в ноль при их круговой поляризации (α = 0). Этот результат объясняется тем, что при круговой поляризации импульсов имеется симметрия относительно вращений вокруг направления распространения импульсов (оси *Z*), так что после интегрирования по всем углам φ скорости атома амплитуда эха обращается в ноль, а при линейной поляризации импульсов такая симметрия отсутствует, и после интегрирования по всем углам φ остаются ненулевые слагаемые. Из формулы (19) также видно, что сигнал столкновительного эха целиком обусловлен асим-

метрией упругих деполяризующих столкновений, т.е. разностью двух констант релаксации $\lambda = \Gamma_0(v) - \Gamma_1(v) + i[\Delta_0(v) - \Delta_1(v)]$ – при $\lambda = 0$ сигнал эха обращается в ноль. Зависимость интенсивности сигнала столкновительного эха от промежутка времени τ между возбуждающими импульсами качественно отличается от подобной зависисмости для «обычного» фотонного эха: интенсивность «обычного» эха экспоненциально убывает с ростом τ, тогда как интенсивность столкновительного эха, как следует из (19), сначала возрастает от нуля с ростом τ, достигает максимума, и затем экспоненциально убывает при дальнейшем увеличении τ. Подобная зависимость может быть использована для измерения констант столкновительной релаксации.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 11-02-00141-а.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Алексеев, А.И., Евсеев И.В*. Поляризация фотон-эха в газовой среде// ЖЭТФ, т.56, №6, 1969, С. 2118-2128.
2. *Мацкевич, В.К., Евсеев И.В., Ермаченко В.М.* Влияние на спектральные характеристики зависимости релаксационных процессов от скорости движения атомов// Оптика и спектроскопия, т.45, №1, 1978, С.17-22.
3. *Christensson, N., Polivka T., Yartsev A., Pullerits T.* Photon echo spectroscopy reveals structure-dynamics relationships in carotenoids// Phys. Rev. B, v.79, 2009, p.245118-245118-14.
4. *Guillot-Noël, O., Goldner Ph., Beaudoux F., Le Du Y., Lejay J., Amari A., Walther A., Rippe L., Kröll S.* Hyperfine structure and hyperfine coherent properties of praseodymium in single-crystalline $La_2(WO_4)_3$ by hole-burning and photon-echo techniques// Phys. Rev. B, v.79, 2009, 155119.
5. *Kurnit, N.A., Abella I.D., Hartmann S.R.* Observation of a Photon Echo// Phys. Rev. Lett., v.13, №19, 1964, P. 567-568.
6. *Moiseev, S.A., Tittel W.* Temporal compression of quantum-information-carrying photons using a photon-echo quantum memory approach// Phys. Rev. A, v.82, 2010, p.012309-012309-13.
7. *Yevseyev, I.V., Ishchenko V.N., Khvorostov E.B., Kochubei S.A., Rubtsova N.N.* Relaxation characteristics of (6s6p) $^3P_1$ ^{174}Yb level// Laser Phys. Lett., v4, №7, 2007, P. 524-528.

COLLISION-INDUCED ECHO AT THE ELLIPTICAL POLARIZATION OF EXCITATION PULSES

V. Reshetov*, E. Popov*, V. Tsikunov, I. Yevseyev****

**Togliatti state university (Togliatti)*

***National Research Nuclear University «MEPhI» (Moscow)*
31, Kashirskoe shosse, Moscow, 115409, Russia

Abstract. In this article the expressions for the amplitude and polarization of the collision-induced photon echo formed on the transition with the angular momentum change 0↔1 in ytterbium vapor by the two excitation pulses with mutually orthogonal elliptical polarizations are obtained. It is shown that the intensity of the collision-induced photon

echo signal becomes zero in case of mutually orthogonal circular polarizations of laser excitation pulses and it obtains its maximum value in case of their mutually perpendicular linear polarizations.
All the temporal and polarization properties of collision-induced photon echo are obtained in the framework of the model of the atomic elastic depolarizing collisions.
Key words: photon echo, collision-induced echo, polarization properties of photon echo.

УДК 621.382

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САПР ТОНКОЛЕНТОЧНЫХ ЭЛЕКТРОЛЮМИНИСЦЕНТНЫХ ИНДИКАТОРОВ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ СИНТЕЗА КОНСТРУКЦИЙ

О.В. Максимова, М.К. Самохвалов

Ульяновский государственный технический университет (УлГТУ)
432027, г. Ульяновск, ул. Северный Венец, д. 32

Аннотация: Проведены исследования и расчеты светотехнических характеристик тонкопленочных электролюминесцентных конденсаторов. Основные характеристики индикаторных приборов определяются ударным возбуждением активаторных центров с последующей излучательной релаксацией. Приведенные соотношения были адаптированы для разработки системы автоматизированного проектирования тонкопленочных электролюминесцентных индикаторов. Произведена оценка влияния на светотехнические характеристики конструктивных параметров. Физические процессы, определяющие работу тонкопленочных электролюминесцентных излучателей, изучены достаточно, что позволяет разрабатывать и производить различные индикаторы и дисплеи.
Ключевые слова: тонкопленочный индикатор, яркость, светоотдача, люминофор, активаторные центры, электролюминесценция.

Введение

Для создания системы автоматизации проектирования (САПР) тонкопленочных электролюминесцентных (ТПЭЛ) индикаторных устройств необходимо оценить влияние конструктивных параметров на светотехнические характеристики. Данная потребность вызвана тем, что при разработке ТПЭЛ индикатора параметры яркость, цвет свечения индикатора и контрастность являются критериями технического задания на проектирование, т.е. к этим параметрам предъявляют высокие требования при разработке конструкций ТПЭЛ средств отображения информации. Для формирования математического обеспечения САПР ТПЭЛ устройств необходимо получить аналитические уравнения зависимости светотехнических характеристик от конструктивно- технологических факторов.

Влияние конструктивных параметров на яркость ТПЭЛ устройств

Цвет свечения тонкопленочных электролюминесцентных источников излучения, так же как у порошковых излучателей зависит от материала основы люминофора, природы и концентрации активаторов, условий возбуждения электролюминесценции. При выборе активаторной примеси желательно, чтобы она образовывала центры свечения,

излучающие в видимом диапазоне, обладающие высокой эффективностью свечения, хорошо растворяющиеся в материале основы и изовалентные или нейтральные по отношению к основному веществу. Лучшими спектральными характеристиками обладают излучатели, в которых в качестве люминофора использован сульфид цинка, легированный марганцем или фторидами редкоземельных элементов, где люминесценция носит внутрицентровой характер. Для получения излучения желтого цвета применяют легирование марганцем, зеленого цвета - фторидом самария, голубого - фторидом тулия или церия, белого - фторидом празеодима и др. [1-3]. Яркость излучения марганцевых центров выше, но спектральные характеристики примесей редкоземельных металлов более узкие. Большая ширина полосы излучения марганца в спектре связана с тем, что взаимодействие его ионов с решеткой сульфида цинка сильнее, чем у ионов редкоземельных металлов.

В сильном электрическом поле в пленке люминофора возникают свободные носители заряда, которые, ускоряясь в электрическое поле, приобретают энергию, рассеиваемую в слоях люминофора и диэлектрика. Часть энергии ускоренных электронов передается активаторным центрам, переводя их в возбужденное состояние. При возвращении активаторных центров из возбужденного в основное состояние происходит выделение энергии в виде излучения света. И одной из основных задач исследований и разработок тонкопленочных электролюминесцентных индикаторов (ТПЭЛИ) является задача повышение эффективности преобразования электрической энергии в световое излучение. Одним из путей решения этой задачи является изучение влияния конструктивных параметров ТПЭЛИ на их светотехнические характеристики.

В установившихся режимах возбуждения ТПЭЛИ переменным напряжением поляризационный заряд, напряженность электрического поля, ток, рассеиваемая мощность изменяются одинаковый образом в течение каждого периода, поэтому рад характеристик являются взаимосвязанными друг с другое и могут быть выражены с помощью усредненных за период значений параметров.

Кинетические характеристики для яркости излучения определяются скоростями возбуждения и спада люминесценции. Время нарастания свечения обуславливается скоростью возбуждения активаторов, которая зависит от интенсивности вынуждающего сигнала - плотности тока и напряженности поля и составляет от 1-2 до 10-20 мкс. Длительность спада излучения определяется временем релаксации активаторов из возбужденного состояния, излучательных и безызлучательных, которое зависит от типа активатора, его концентрации, наличия других примесей и структурных дефектов. При относительно малых концентрациях примеси спад носит экспоненциальный характер, постоянная времени для разных активаторов имеет значение от 50 мкс до 1,3 мс.

Основным механизмом возбуждения активаторных центров является ударная ионизация, поэтому в качестве исходного рассмотрим уравнение кинетики изменение концентрации возбужденных активаторных центров свечения, связывающее скорость изменения плотности возбужденных активаторов со скоростью возбуждения и скоростью излучательных переходов активаторных центров в основное состояние [4]:

$$\frac{dN^*}{dt} = \frac{\sigma}{e} j_{ал} (N - N^*) - \frac{N^*}{\tau_г} \qquad (1)$$

где N — концентрация центров свечения; N* – концентрация возбужденных центров; $\tau_г$ – постоянная времени для излучательных переходов, соответствующая основной (рабо-

чей длине) волны; σ – сечение столкновения; $j_{ал}$ – ток проводимости в слое люминофора.

При возбуждении ТПЭЛИ переменным напряжением в установившемся режиме число центров, переходящих за период в возбужденное состояние, равно числу центров, возвращающихся в основное состояние. Число центров свечения, возбуждаемых за период, определяется числом взаимодействий ускоренных носителей заряда с центрами, которые находятся в основном состоянии:

$$\int_0^{T_0}\frac{\sigma}{e}j_{ал}(t)(N-N^*)dt=\frac{\sigma}{e}\left(N\int_0^{T_0}j_{ал}(t)dt-\int_0^{T_0}j_{ал}(t)dtN^*(t)dt\right)= \\ =\frac{\sigma}{e}NQ_{лT_0}\left(1-\frac{1}{Q_{лT_0}}\int_0^{T_0}j_{ал}\frac{N^*(t)}{N}dt\right) \qquad (2)$$

где $Q_{пT0}$ – заряд, проходящий через слой люминофора за период изменения возбуждающего напряжения.

Следовательно, увеличение плотности возбужденных центров свечения ведет к уменьшению скорости возбуждения.

Число центров свечения, перешедших за период из возбужденного в основное состояние, определяется скоростью излучательных переходов:

$$\int_0^{T_0}\frac{N^*(t)}{\tau_г}dt=\frac{1}{\eta_e d_л}\int_0^{T_0}B(t)dt=\frac{B_{ср}T_0}{\eta_e d_л} \qquad (3)$$

где $B_{ср}$ – средняя яркость свечения ТПЭЛИ за период возбуждения; B(t) – мгновенная яркость свечения ТПЭЛИ; $\eta_e = \eta_{onm}\cdot K_\lambda$ h c/λ, η_{onm} - оптический выход, зависящий от показателя преломления люминофора; h – постоянная Планка; c – скорость света; K_λ – коэффициент видности, зависящий от спектра излучения люминофора; λ – максимум спектра излучения люминофора.

При введении в рассмотрение величины средней яркости использован закон Тальбота [5], согласно которому при любой частоте, обеспечивающей слияние мельканий, т.е. при f=20-30 Гц, эффективная (кажущаяся) яркость мерцающего источника света с периодическим изменением интенсивности равна его средней яркости за период изменения:

$$B_{ср}=\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}B(t)dt \qquad (4)$$

Объединяя выражения (1) и (2), можно получить уравнение для средней яркости, показывающее ее зависимость от условий возбуждения и свойств тонкопленочной структуры:

$$B_{ср}=\frac{\eta_e d_л}{T_0}\frac{\sigma}{e}NQ_{лT_0}\left(1-\frac{1}{Q_{лT_0}}\int_0^{T_0}j_{ал}(t)\frac{N^*(t)}{N}dt\right) \qquad (5)$$

Таким образом, яркость излучения ТПЭЛИ зависит от таких его параметров, как $d_л$, η_e, σ, N и ее значения можно задавать с помощью подбора материала и выбора конструкции ТПЭЛИ.

Влияние конструктивных параметров на светоотдачу ТПЭЛ устройств

Эффективность процессов преобразования электрической энергии в световое излучение характеризуется коэффициентом светоотдачи тонкопленочного электролюминесцентного излучателя, определяемого как отношение излучаемого светового потока к потребляемой активной мощности [6-9]:

$$\eta = L / P \qquad (6)$$

Для электролюминесцентных конденсаторов на основе сульфида цинка, легированного марганцем, этот параметр может достигать значений 10-12 лм/Вт, однако в силу ряда причин, обсуждаемых ниже, его величина для большинства тонкопленочных излучателей с различными люминофорами не превосходит 1-5 лм/Вт [10]. Величина светоотдачи зависит от состава и толщины пленки люминофора, параметров диэлектрических слоев, амплитуды, частоты и формы возбуждающего напряжения. Основной задачей при разработке тонкопленочных электролюминесцентных излучателей является повышение светоотдачи, что требует детального изучения физических процессов, лежащих в основе преобразования энергии в тонкопленочных структурах.

Светоотдача тонкопленочных электролюминесцентных излучателей в основном определяется тремя процессами: возбуждением центров свечения ускоренными электронами; излучательными переходами в активаторах; выходом света во внешнюю среду. В связи с этим коэффициент светоотдачи может быть представлен в виде произведения трех соответствующих сомножителей [11]:

$$\eta = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3. \qquad (7)$$

В этой формуле эффективность возбуждения η_1 определяется как отношение плотности возбужденных активаторов к величине рассеиваемой мощности (или к величине заряда, прошедшего через слой люминофора). Эффективность люминесценции η_2 определяется как отношение числа фотонов, возникающих в единице объема люминофора, к плотности возбужденных центров свечения. Оптическая эффективность η_3 определяется как отношение числа фотонов, выходящих во внешнюю среду, к числу фотонов, излучаемых внутри люминофора. Значение этих параметров обуславливается различными эффектами, но являются взаимосвязанными и определяют результирующую величину светоотдачи тонкопленочных электролюминесцентных приборов.

Выход люминесценции определяется соотношением между вероятностями излучательных и безызлучательных переходов возбужденных центров свечения [9,11,12].

Выход излучения во внешнее пространство определяется оптическими потерями на границах раздела пленок в многослойной структуре. Оптические потери включают в себя частичное отражение света на границах раздела сред (Френелевские потери) и ограничение выхода излучения, обусловленное критическим углом полного внутреннего отражения. Френелевские потери на отражение определяются значениями оптических постоянных граничащих сред. Коэффициент выхода с учетом отражения света на границах люминофор-диэлектрик, диэлектрик-электрод, электрод-стекло и стекло-воздух, составляет 0,9 для тонкопленочных структур на основе сульфида цинка. Рассчитанное значение критического угла полного внутреннего отражения для электролюминесцентных конденсаторов на основе сульфида цинка составило $24{,}5^{o}$. Величина коэффициента

выхода, ограниченного полным внутренним отражением, равняется 0,09. С учетом возможного отражения света от зеркальной поверхности металлического электрода результирующее значение может достигать 0,17. Таким образом, менее 17% возникающего в пленке люминофора светового излучения выходит наружу через стеклянную подложку, тогда как более 83 % светового потока поглощается в подложке и пленках и выходит через торцевые грани подложки [5-9].

Светоотдача ТПЭЛИ определяется как отношение светового потока к рассеиваемой мощности. В работе [4] показано, что электронные процессы в ТПЭЛИ при возбуждении переменным напряжением протекают в квазистационарном режиме, поэтому средняя рассеиваемая мощность определяется как произведение заряда, протекающего через пленку люминофора за период изменения напряжения в люминофоре на величину падения напряжения в слое люминофора. Выражение для светоотдачи ТПЭЛИ можно представить в следующем виде:

$$\eta = \frac{\pi\eta_e d_л}{U_{пл}}\frac{\sigma}{e}N\left(1-\frac{1}{Q_{лT_0}}\int_0^{T_0} j_{ал}(t)\frac{N^*(t)}{N}dt\right) = \\ = \frac{\pi\eta_e d_л \sigma N}{eU_{пл}}\left(1-\frac{1}{Q_{лT_0}}\int_0^{T_0} j_{ал}(t)N^*(t)dt\right) \qquad (8)$$

Обозначим η_0 — максимально достижимую величину светоотдачи:

$$\eta_0 = \pi\eta_e d_л \sigma N/(eU_{пл}) = \pi\eta_e \sigma N/(eE_{пл}) \qquad (9)$$

Физический смысл этой величины соответствует значению светоотдачи в ситуации, когда в результате протекания тока проводимости в пленке люминофора производится возбуждение всех активаторных центров свечения и отсутствует взаимосвязь ускоренных электронов с уже возбужденными центрами.

Обозначим B_0 — максимальную среднюю яркость излучения

$$B_0 = \eta_e d_л N/(F\tau_г), \qquad (10)$$

где

$$F = \frac{1}{B_{ср}Q_{лT_0}}\int_0^{T_0}\eta_e d_л \frac{N^*}{\tau_г} j_{ал}dt = \frac{1}{B_{ср}Q_{лT_0}}\int_0^{T_0} B(t)j_{ал}(t)dt$$

Физический смысл величины B_0 соответствует значению средней яркости излучения в ситуации, когда за период изменения напряжения возникает излучение, обусловленное переходом в основное состояние всех активаторных центров в пленке люминофора.

С учетом введенных обозначений уравнение (8) принимает вид:

$$\eta = \eta_0(1 - B_{ср}/B_0) \qquad (11)$$

При использовании этого уравнения для анализа зависимости светоотдачи от яркости излучения необходимо учитывать, что ситуации, при которых возможно достижение значений η_0 и B_0 являются практически недостижимыми. Уравнение (8) может применяться лишь для оценки значений этих величин с помощью экстраполяции экс-

периментальных зависимостей [4]. На основе экспериментально определенных значений параметров σ, N, τ_r и др. С другой стороны с помощью подбора материалов с соответствующими значениями параметров и выбора конструкции можно проектировать прибор с заранее известными характеристиками.

Из определения эффективности возбуждения и выражения (11) можно получить следующее соотношение для средней яркости:

$$B_{ср} = \left(\frac{1}{B_0} + \frac{\pi}{\eta_0 P_{ср}} \right)^{-1} = \frac{\eta_0 P_{ср} B_0}{\eta_0 P_{ср} + \pi B_0} \qquad (12)$$

Следовательно, состояние максимальной яркости излучения $B_{ср}=B_0$ возможно лишь для бесконечной большой мощности, рассеиваемой в ТПЭЛИ, т.е. является практически недостижимым.

Величина максимальной яркости тонкопленочных электролюминесцентных излучателей зависит как от свойств люминофора и конструктивных параметров светоизлучающей структуры, так и от условий возбуждения. С увеличением приложенного напряжения для вольт - яркостных характеристик наблюдается насыщение яркости. С ростом частоты возбуждающего напряжения, насыщение происходит при меньших его значениях и величина максимальной яркости возрастает. Значение максимальной яркости излучения для тонкопленочных конденсаторов на основе сульфида цинка, легированного марганцем, достигает $3{,}4 \cdot 10^4$ кд/м^2. [13]

Рассмотрим влияние толщины слоя люминофора на светотехнические характеристики ТПЭЛИ. Толщина пленки люминофора на основе сульфида цинка изменялась в пределах от 0,2 до 1,5 мкм, параметры диэлектрических пленок составляли – $\varepsilon_д$ =18, $d_д$=0,5 мкм. Как следует из выражений (9) и (10) максимально достижимые значения яркости B_0 прямо пропорциональны толщине люминесцентного слоя, а η_0 принимая пороговую напряженность электрического поля в люминофоре постоянной для различных значений $d_л$, не зависит от толщины пленки люминофора.

Проведенный анализ влияния толщины тонкопленочного диэлектрического слоя на величины яркости и светоотдачи позволяет определить значения $d_д$, необходимые для проектирования надежно работающего ТПЭЛИ с известными значениями светотехнических характеристик, потребляемой мощности, область безопасных для работы прибора напряжений. В данном случае для исследованного ТПЭЛИ можно рекомендовать значения суммарной толщины диэлектрика в пределах 0,4÷0,7 мкм, т.е. толщина каждого из двух диэлектрических слоев будет составлять 0,2÷0,35 мкм.

Также можно добиваться более высоких значений яркости излучения либо, используя диэлектрики с большими значениями диэлектрической проницаемости ($\varepsilon_д$>18), либо с малыми ($\varepsilon_д$<12÷13), но первый путь более предпочтителен, т.к. при этом значительно снижаются пороговые и рабочие напряжения, уменьшается нагрузка на диэлектрические слои, что повышает вероятность надежной и устойчивой работы ТПЭЛИ. Поэтому для ТПЭЛИ с люминесцентным слоем на основе сульфида цинка с параметрами структуры $\varepsilon_л$=8,5, $d_л$=0,6 мкм, $d_д$=0,5 мкм и $\rho_{од}=10^{12}$ Ом·м с целью повышения яркости свечения следует использовать диэлектрики со значениями $\varepsilon_д$>18, что хорошо соотносится с рекомендацией использования соотношения $\varepsilon_д=(2\div3)\cdot\varepsilon_л$, предложенной в [14, 15].

С другой стороны в ряде случаев очень важным является использование индикаторов с наибольшими значениями светоотдачи. Для данной структуры значения диэлектрической проницаемости, при которых светоотдача максимальна, в зависимости от условий возбуждения находятся в пределах 12÷20.

Рассмотрим влияние толщины пленки люминофора на светотехнические характеристики ТПЭЛИ при значениях питающего напряжения $U=1,5U_п$ и $U=2U_п$. При анализе зависимости яркости $B(d_л)$ для $U=1,5U_п$ и $U=2U_п$ сделан вывод, что с увеличением толщины пленки люминофора происходит рост значений яркости. Напротив, с увеличением $d_л$ для случаев $U=1,5U_п$ и $U=2U_п$ уменьшение светоотдачи, причем скорость уменьшения светоотдачи с увеличением $d_л$, замедляется. Следует отметить очень низкие значения яркости при толщинах люминофора менее 0,2 мкм.

При $U=1,5U_п$ мощности, рассеиваемые в пленках диэлектрика очень малы и практически не влияют на значения светотехнических характеристик в исследуемом диапазоне толщин люминофора. Для напряжений $U=2U_п$ зависимости яркости и светоотдачи, рассчитанные с учетом потерь в диэлектрике, показывают, что при толщинах слоя люминофора свыше 0,6 мкм происходят рост яркости и снижение светоотдачи по сравнению со значениями, определенными без учета мощности, рассеиваемой в пленке диэлектрика. Оценка значений светотехнических характеристик ТПЭЛИ при толщинах $d_л$ 1,3 мкм затруднена, т.к. мощность, рассеиваемая в диэлектрических слоях превышает мощность, рассеиваемую в пленке люминофора.

Выводы

1. Проведен теоретический анализ и расчет зависимости светотехнических характеристик тонкопленочных электролюминесцентных конденсаторов от конструктивно-технологических параметров многослойных структур.
2. Полученные аналитические уравнения для яркости и светоотдачи являются математическим обеспечением САПР ТПЭЛИ при решении задачи синтеза конструктивных параметров ТПЭЛ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бараненков, И.В.* Перспективы создания плоских панелей дисплеев с полной цветовой гаммой на основе тонкопленочных электролюминесцентных устройств [Текст] / И.В. Бараненков // Зарубежная радиоэлектроника. – 1988. – С. 60 – 67.
2. *Kobayashi, H.* Multicolor electroluminescent ZnS thin films doped with rare earth fluorides [Текст] / H. Kobayashi, S. Tanaka, V. Shanker et al. // Phys. stat. Sol. (a). – 1985. – v.88. – №2. – P.713 – 720.
3. *Suyama, T.* Multi-coloring of thin-film electroluminescent device [Текст] / T. Suyama, N. Sawada, K. Okamoto, Y. Hamakawa // Jap. J. Appl. Phys. – 1982. – v.21. – Suppl. 21-1. – P. 383 – 387.
4. *Самохвалов М.К.* Электролюминесцентные процессы в тонкопленочных электролюминесцентных структурах [Текст] / М.К. Самохвалов Дис. докт.физ.-мат. наук.- Ульяновск, 1994.- 315 с.
5. *Деркач, В.П.* Электролюминесцентные устройства [Текст] / В.П. Деркач , В.М. Корсунский – Киев: Наукова думка, 1968. – 302 с.
6. *Самохвалов, М.К.* тонкопленочные электролюминесцентные источники излучения [Текст] / М.К. Самохвалов – Ульяновск: УлГТУ, 1999. – 117 с.

7. *Самохвалов, М.К.* Конструкции и технология тонкопленочных электролюминесцентных индикаторов [Текст] / М.К. Самохвалов – Ульяновск: УлГТУ, 1997. – 56 с.
8. *Казанкин, О. И.* Прикладная электролюминесценция [Текст] / О.И. Казанкин, И.Я. *Лямичев, Ф.В. Соркин*; под общ. ред. М.В. Фока. – М.: Советское Радио, 1974. – 414 с.
9. Верещагин, И.К. Электролюминесцентные источники света [Текст] / И.К. Верещагин, Б.А. Ковалев, Л.А. Косяченко, С.М. Кокин – М.: Энергоатомидат, 1990. – 168 с.
10. *Мозжухин, Д.Д.* Тонкопленочные электролюминесцентные индикаторные устройства [Текст] / Д.Д. Мозжухин, И.В. Бараненков // Зарубежная радиоэлектроника. – 1985. – №7. – С. 81 – 94.
11. *Muller, G.O.* Basics of electron impact-excited luminescence devices [Текст] / G.O. Muller // Phys. stat. Sol. (a). – 1984. – v.81. – P. 597 – 608.
12. *Георгобиани, А.Н.* Туннельные явления в люминесценции полупроводников [Текст] / А.Н. Георбиани, П.А. Пипинис – М.: Мир, 1994. – 224 с.
13. *Мишин, А.И.* Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук, Мишин Александр Иванович, Математическое моделирование процессов рассеяния энергии в тонкопленочных электролюминесцентных конденсаторах. Специальность 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ [Текст] / А.И. Мишин. - Ульяновск, 2007. – С.16.
14. *Гурин, Н.Т.* Взаимосвязь параметров диэлектрических слоев и порогового напряжения ТП ЭЛК [Текст] / Н.Т. Гурин //Электронная техника. Сер.3, Микроэлектроника.- 1990.- В.1 (I35).- с.88-90.
15. Проведение теоретических и экспериментальных исследований физических процессов, протекающих в самосканирующих устройствах и микроэлектронных средствах отображения информации. Теоретические и экспериментальные исследования физических процессов в самосканирующих оптоэлектронных устройствах: Отчет о НИР (промежут.) [Текст] /Ульяновский политехн. ин-т; Руководитель Н.Т.Гурин.- №90-02; №ГР 0188.0040947; Инв.02890010701 Ульяновск, 1988. – С.85.

THE MATHEMATICAL TOOLS FOR SOLVING THE SYNTHESIS PROBLEM OF CAD THIN FILM ELECTROLUMINESCENCE INDICATOR

O. Maksimova, M. Samokhvalov

Ulyanovsk State Technical University
32, Sev. Venec st., Ulyanovsk, 432027, Russia

Abstract: Investigations and calculations of the lighting characteristics of thin-film electroluminescent indicators are presented. The main characteristics of indicator devices are explained by means impact excitation activator centers with the following light relaxation. These equations have been adapted for the development of CAD system of thin-film electroluminescent indicators. The presented of conspicuous lighting parameters dependence on the structural factors. Physical processes determined the thin-film light emitters work are sufficiently studied, that permits elaboration and production of different indicators and displays.

Keywords: thin film electroluminescence indicator, brightness, luminous efficiency, phosphor, activator centers, electroluminescence.

УДК 621.382

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ КОНСТРУКТИВНЫХ ПАРАМЕТРОВ ТОНКОПЛЕНОЧНЫХ ЭЛЕКТРОЛЮМИНИСЦЕНТНЫХ ИНДИКАТОРОВ НА РЕЖИМЫ ИХ РАБОТЫ ДЛЯ ФОРМИРОВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ САПР

О.В. Максимова, М.К. Самохвалов

Ульяновский государственный технический университет (УлГТУ)
432027, г. Ульяновск, ул. Северный Венец, д. 32

Аннотация: Тонкопленочные электролюминесцентные структуры, возбуждаемые переменным током, являются перспективными активными плоскими индикаторными приборами, которые имеют ряд достоинств: высокую яркость, малую потребляемую мощность, высокие эффективность и срок службы и т.д. Имеется много публикаций с экспериментальными данными для электролюминесцентных светоизлучающих конденсаторов на основе сульфида цинка с марганцем или фторидами редкоземельных металлов и некоторыми другими люминофорами с различными диэлектрическими пленками. Изучены эффекты генерации носителей заряда и рассеяния энергии в тонкопленочных структурах. Основные характеристики индикаторных приборов определяются поляризационными эффектами, связанными с туннельной перезарядкой ловушек границы раздела люминофор-диэлектрик. Приведенные соотношения были адаптированы для разработки системы автоматизированного проектирования тонкопленочных электролюминесцент-ных индикаторов. Произведена оценка влияния на электрические характеристики конструктивных параметров.
Ключевые слова: тонкопленочный индикатор, пороговое напряжение, максимально допустимое рабочее напряжение, электролюминесцентный конденсатор, электролюминесценция.

Введение

Тонкопленочные электролюминесцентные индикаторы (ТПЭЛИ) относятся к современным индикаторным устройствам и имеют высокий потенциал применения в качестве средств операторского интерфейса, особенно в специальной технике. Они представляют собой полностью твердотельную конструкцию и имеют высокие эксплуатационные показатели, такие как яркость, надежность, температурная стабильность, быстродействие, большой угол обзора, радиационная стойкость.

Для создания средств автоматизации проектирования тонкопленочных электролюминесцентных индикаторов была выбрана конструкция, которая является наиболее оптимальной для обеспечения высоких эксплуатационных показателей.

К настоящему времени достигнуты успехи в разработке и производстве индикаторов на основе тонкопленочных электролюминесцентных конденсаторов: определены физические основы работы этих приборов, материалы с требуемыми свойствами, разработан ряд конструкций.

Вместе с тем остаются недостаточно исследованными вопросы расчета основных функциональных характеристик приборов и проблемы автоматизации проектирования индикаторных элементов и устройств.

Исследование зависимости электрических характеристик тонкопленочных электролюминесцентных индикаторов от конструктивно - технологических факторов необходимо для определения математического аппарата и расчета функциональных параметров.

Анализ зависимости электрических характеристик от конструктивных параметров тонкопленочных электролюминесцентных индикаторов.

Для проектирования ТПЭЛИ и расчета режимов работы устройств на их основе необходимо изучение влияния конструктивных параметров индикаторного элемента, который представляет собой тонкопленочный электролюминесцентный конденсатор (ТПЭЛК), на такие его характеристики как яркость, светоотдачу, пороговое напряжение, область безопасных для работы устройств напряжений (задача анализа) и решение обратной задачи, т.е. определение зависимости конструктивно – технологических факторов от электрических и светотехнических характеристик.

Рассмотрим ТПЭЛК (рис. 1.) со структурой МДЛДМ (прозрачный диэлектрик — люминофор — диэлектрик — металл). Диэлектрические слои структуры обладают высокими изолирующими свойствами и токами утечки можно пренебречь. Учитывая, что пленка люминофора является высокоомным полупроводником (для сульфида цинка удельное сопротивление составляет (10^9 - 10^{10}) Ом·см [1]), можно считать, что в предпороговом режиме активный ток через него не протекает и слой люминофора также является диэлектриком.

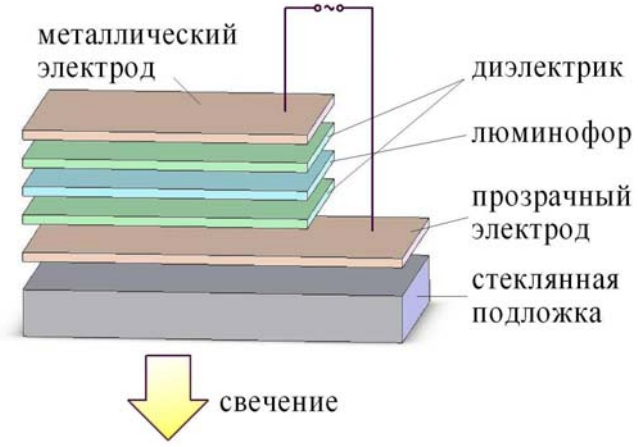

Рис. 1. Конструкция тонкоплёночного электролюминесцентного источника излучения

Для своей работы ТПЭЛИ требуют знакопеременного напряжения, следовательно, в предпороговом режиме тонкопленочная структура представляет электролюминесцентный конденсатор, содержащий между обкладками (верхний и нижний электроды) последовательно три диэлектрических слоя.

При последовательном соединении соотношение суммарной емкости С и емкостей слоев ЭЛК определяется как

$$C^{-1} = C_{д1}^{-1} + C_{л}^{-1} + C_{д2}^{-1}$$

Заряд на обкладках каждой из последовательно включенной емкости равен заряду емкости всей структуры Q:

$$Q = Q_{д1} = Q_{д2} = Q_{л} \qquad (1)$$

Здесь $C_{д1}$ и $Q_{д1}$, $C_{д2}$ и $Q_{д2}$, $C_{л}$ и $Q_{л}$ — емкости и заряд на обкладках конденсатора, образуемые первым, вторым диэлектрическим и люминесцентным сдоями, соответственно.

Заряд на обкладках конденсатора определяется как $Q=C\cdot U$, где $U_{д1}$, $U_{д2}$, $U_{л}$ — падение напряжения на конденсаторе. Выражение (1) записываем в виде:

$$C\cdot U = C_{д1}\cdot U_{д1} = C_{д2}\cdot U_{д2} = C_{л}\cdot U_{л,} \qquad (2)$$

где $U_{д1,}$ $U_{д2}$, $U_{л}$ — падение напряжений, приходящиеся на первый, второй диэлектрические и люминесцентны слои, соответственно. Следовательно, в допороговом режиме падения напряжений на отдельных слоях конденсаторной структуры распределяются обратно пропорционально емкости каждого слоя.

При достижении порога включения ТПЭЛИ заряд всей структуры и заряд слоя люминофора будут равны:

$$Q = C\cdot U_{п} = Q_{л} = C_{пл}\cdot U_{пл} \qquad (3)$$

где $U_{п}$ — пороговое напряжение включения полной структуры, $U_{пл}$ — падение напряжения, приходящееся на слой люминофора при достижении порога включения ТПЭЛИ.

Отсюда пороговое напряжение ТПЭЛИ связано с пороговым напряжением слоя люминофора как:

$$U_{п} = U_{пл}\frac{C_{л}}{C} \qquad (4)$$

С учетом того, что емкости слоев ТПЭЛИ соединены между собой последовательно, выражение (4) принимает вид:

$$U_{п} = U_{пл}C_{л}\left(\frac{1}{C_{л}} + \frac{1}{C_{д1}} + \frac{1}{C_{д2}}\right) = U_{пл}\left(1 + \frac{(C_{д1} + C_{д2})C_{л}}{C_{д1}\cdot C_{д2}}\right) \qquad (5)$$

Для того чтобы более наглядно показать зависимость порогового напряжения от конструктивных параметров конденсаторных слоев, необходимо детализировать формулу (5). Размеры электродов ТПЭЛИ много больше толщин слоев структуры, поэтому считаем ТПЭЛИ плоским. Поле можно считать однородным и пренебречь краевыми

эффектами. Тогда в формуле (5) выражаем емкости отдельных слоев C_i как емкости плоских конденсаторов

$$C_i = \varepsilon_i \cdot \varepsilon_0 \cdot S / d_i,$$

где ε_i, d_i — соответственно, относительная диэлектрическая проницаемость и толщина отдельного слоя; S – площадь перекрытия обкладок конденсатора:

$$U_п = U_{пл}\left(1+\frac{\left(\frac{\varepsilon_{д1}\varepsilon_0 S}{d_{д1}}+\frac{\varepsilon_{д2}\varepsilon_0 S}{d_{д2}}+\frac{\varepsilon_л\varepsilon_0 S}{d_л}\right)}{\frac{\varepsilon_{д1}\varepsilon_0 S}{d_{д1}}\cdot\frac{\varepsilon_{д2}\varepsilon_0 S}{d_{д2}}}\right)= \tag{6}$$

$$= U_{пл}\left(1+\frac{\frac{\varepsilon_{д1}\varepsilon_л}{d_{д1}d_л}+\frac{\varepsilon_{д2}\varepsilon_л}{d_{д2}d_л}}{\frac{\varepsilon_{д1}\varepsilon_{д2}}{d_{д1}d_{д2}}}\right)= U_{пл}\left(1+\frac{\varepsilon_л d_{д2}}{\varepsilon_{д2}d_л}+\frac{\varepsilon_л d_{д1}}{\varepsilon_{д1}d_л}\right)$$

В случае, когда оба диэлектрических слоя выполнены из одного и того же материала, т.е. $\varepsilon_{д1}=\varepsilon_{д2}=\varepsilon_д$, выражение (6) принимает более простой вид:

$$U_п = U_{пл}C\left(1+\frac{(d_{д1}+d_{д2})\varepsilon_л}{\varepsilon_л d_л}\right)= U_{пл}\left(\frac{\varepsilon_д d_л+\varepsilon_л d_д}{\varepsilon_д d_л}\right), \tag{7}$$

где $d_д = d_{д1} + d_{д2}$ — суммарная толщина диэлектрических слоев.

Значение порогового напряжения слоя люминофора определяется величиной напряженности электрического поля в люминофоре $E_{пл}$, необходимой для возникновения свободных носителей заряда, участвующих в возбуждении центров свечения в соответствии с соотношением $U_{пл}= E_{пл}\cdot d_{пл}$.

Отсюда, выражение (7) принимает вид:

$$U_п = E_{пл}\cdot\frac{\varepsilon_д d_л+\varepsilon_л d_д}{\varepsilon_д} \tag{8}$$

Выражения (7), (8) ранее встречались в работах [2,3-7], но вывод их был менее подробным. В работах [3,4,7] выражение (7) преобразовано к виду:

$$U_п = U_{пл}\left(1+\frac{d_д/d_л}{\varepsilon_д/\varepsilon_л}\right) \tag{9}$$

Падение напряжения на всей структуре ТП ЭЛК равно:

$$U = U_л + U_{д1} + U_{д2} = E_л \cdot d_л + E_{д1} d_{д1} + E_{д2} d_{д2}, \quad (10)$$

где $U_л$ и $E_л$, $U_{д1}$ и $E_{д1}$, $U_{д2}$ и $E_{д2}$ —падения напряжений и напряженности электрического поля, приходящиеся на слой люминофора, первый и второй диэлектрические слои, соответственно. В идеальном случае при превышении порога включения ТПЭЛИ падение напряжения и напряженность электрического поля в слое люминофора остается практически постоянной и равна пороговым значениям [8].

Максимально допустимое напряжение, прикладываемое к структуре, ограничивается выражением:

$$U_{max} < E_{пл} d_л + E_{пр.д1} \cdot d_{д1} + E_{пр.д2} \cdot d_{д2}, \quad (11)$$

где $E_{пр.д1}$, $E_{пр.д2}$ — пробивные напряженности первого и второго диэлектрических слоев, соответственно.

В случае, когда оба диэлектрических слоя выполнены из одного и того же материала, выражение (11) принимает вид:

$$U_{max} < E_{пл} d_л + E_{пр.д} \cdot d_д \quad (12)$$

Следовательно, повышения максимально допустимых напряжений, прикладываемых к ТПЭЛИ можно добиться за счет увеличения толщин диэлектрических и люминесцентного слоев, а также при использовании материалов с большими значениями электрических прочностей материалов люминофора и диэлектрика. Учитывая, что с увеличением $E_{пл}$, $d_л$ и $d_д$ одновременно будет происходить увеличение порогового напряжения, предпочтительным вариантом является увеличение U_{max} за счет использование диэлектриков с большими значениями $E_{пр.д}$.

Исследование зависимости рассеиваемой мощности от конструктивных параметров необходимо для оценки области безопасных для работы ТПЭЛИ напряжений и определения взаимосвязи мощности рассеяния с электрическими параметрами слоев структуры, расчета их энергетических характеристик. Рассеяние энергии в пленке люминофора происходит, когда напряженность электрического поля в нем E превышает пороговое значение $E_п$ и начинает протекать ток проводимости. В идеальном случае в диэлектрических слоях ток проводимости отсутствует и протекает только ток смещения, поэтому рассеяния энергии в диэлектрике не происходит, и энергия рассеивается только в электролюминесцентном слое.

Выражение для средней рассеиваемой мощности, выделяющейся в пленке люминофора за период, изменение напряжения синусоидальной формы может быть записано в виде [8]:

$$P_{ср.л} = \frac{4f \cdot C_д^2}{C_д + C_л} \cdot U_п (U - U_п) \quad (13)$$

где f — частота возбуждающего напряжения U. Выражение (13) справедливо также и для процессов рассеяния энергии в тонкопленочных электролюминесцентных конденсаторах при возбуждении знакопеременным импульсным и симметричным пилообразным напряжением.[9].

Учитывая выражение (4), запишем уравнение (13) в виде:

$$P_{ср.л} = \frac{4f \cdot C_д^2}{C_д + C_л} \cdot U_{пл} \frac{C_л}{C}(U - U_л) = \\ = 4f \cdot C_д \frac{C_д \cdot C_л}{C_д + C_л} \cdot \frac{1}{C} U_{пл}(U - U_л) \qquad (14)$$

Полученные выражения дают возможность оценить рассеиваемую в ТП ЭЛИ мощность в зависимости от конструктивных параметров — свойств материалов, используемых для создания индикаторов — диэлектрических проницаемостей, геометрических размеров — толщин слоев и площади перекрытия обкладок электродов для различных амплитуд и частот возбуждающего напряжения. Данные выражения можно использовать для разработки оптимальных конструкций ТПЭЛИ и выбора материалов диэлектрических слоев, обеспечения надежности их работы.

Снижение толщины диэлектрического слоя ведет к уменьшению порогового напряжения ТПЭЛИ, и одновременному увеличению значений рассеиваемой в пленке люминофора мощности. Можно заключить, что, несмотря на высокие напряжения, рассеиваемая в слое люминофора мощность много меньше той, которая рассеивается в микросхемах [10]. Это говорит о том, что при работе ТПЭЛИ не будет происходить перегрева индикатора, следовательно, не требуется специальных мер по теплоотводу, что подтверждено экспериментально [8,11].

Таким образом, приведенные выражения позволяют определить влияние конструктивных параметров тонкопленочного излучателя на пороговое и максимально допустимое напряжение, прикладываемое к структуре, т.е. оценить область рабочих напряжений ТПЭЛИ.

Для того чтобы поставить и решить задачи анализа в целях построения системы автоматизированного проектирования тонкопленочных электролюминесцентных элементов в индикаторных устройствах необходимо определить зависимость электрических характеристик от конструктивных параметров ТПЭЛИ. Проведенные теоретические исследования зависимости электрических характеристик тонкопленочных электролюминесцентных индикаторов от свойств пленок позволяют определить конструктивные требования к материалам и толщинам диэлектрических и люминесцентных слоев, исходя из требований к электрическим свойствам электролюминесцентных конденсаторов.

Результаты выполненных исследований позволяют дать рекомендации по методике расчета электрических параметров. Уточненные аналитические выражения для расчета электрических параметров ТПЭЛИ представляют собой математический аппарат для создания системы автоматизированного проектирования.

Приведенные исследования были финансированы за счет средств Фонда содействия развитию малых форм предприятий в научно-технической сфере по программе

«Участник молодежного научно-инновационного конкурса» («У.М.Н.И.К.») – государственный контракт №7462Р/10267 от 30.01.2010 г.

Выводы

1. Проведено исследование зависимости электрических характеристик тонкопленочных электролюминесцентных индикаторов от свойств пленок.
2. Проведено исследование зависимости порогового и максимально допустимого рабочего напряжения от конструктивных параметров конденсаторных слоев.
3. Установлена аналитическая зависимость основных электрических характеристик: порогового и максимально допустимого напряжения от электрических параметров и толщины пленок люминесцентных и диэлектрических материалов в тонкопленочных электролюминесцентных индикаторах.
4. Показана зависимость электрической мощности, рассеиваемой в пленке люминофора тонкопленочных электролюминесцентных индикаторов, от свойств люминесцентных и диэлектрических пленок и условий возбуждения люминесценции (амплитуды и частоты переменного напряжения).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Верещагин, И.К.* Электролюминесцентные источники света [Текст] / И.К. Верещагин, Б.А. Ковалев, Л.А. Косяченко, С.М. Кокин – М.: Энергоатомидат, 1990. – 168 с.
2. *Muller, G.O.* Basics of electron impact-excited luminescence devices [Текст] / G.O. Muller // Phys. stat. Sol. (a). – 1984. – v.81. – P. 597 – 608.
3. *Гурин, Н.Т.* Взаимосвязь параметров диэлектрических слоев и порогового напряжения ТП ЭЛК [Текст] / Н.Т. Гурин //Электронная техника. Сер.3, Микроэлектроника.- 1990.- В.1 (I35).- с.88-90.
4. *Гурин, Н.Т.* Анализ параметров ТП ЭЛК с разными диэлектрическими слоями. [Текст] / Гурин Н.Т. //Лазерная техника и оптоэлектроника.- 1992.-№ 3-4 (64-65).- С.74-77.
5. *Pratt, G.W.* Long-term charge Storage in interface states of ZnS MOS capacitora. [Текст] / G.W. Pratt L.G. Walker, // J.Appl.Phys/- 1975.- v.46.-№7.- p.2992-2997.
6. *Howard, W.E.* The importance of insulator properties in a thin-film electroluminescent device. [Текст] / W.E. Howard // IEEE Trans.Electron Dev.-1977. - v.ED-24. №7- p.903-906.
7. Проведение теоретических и экспериментальных исследований физических процессов, протекающих в самосканирующих устройствах и микроэлектронных средствах отображения информации. Теоретические и экспериментальные исследования физических процессов в самосканирующих оптоэлектронных устройствах: Отчет о НИР (промежут.) [Текст] /Ульяновский политехн. ин-т;Руководитель Н.Т.Гурин.- №90-02; №ГР 0188.0040947 ;Инв.02890010701 Ульяновск, 1988. – С.85.
8. *Самохвалов, М.К.* Электролюминесцентные процессы в тонкопленочных электролюминесцентных структурах [Текст] / М.К. Самохвалов Дис. докт.физ.-мат. наук.- Ульяновск, 1994.- 315 с.

9. *Мишин, А.И.* Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук, Мишин Александр Иванович, Математическое моделирование процессов рассеяния энергии в тонкопленочных электролюминесцентных конденсаторах. Специальность 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ [Текст] / А.И. Мишин. - Ульяновск, 2007. – С.16.
10. *Кулешова, В.И.* Цифровые и аналоговые интегральные микросхемы: Справочник [Текст] / С.В.Якубовский, Л.И.Ниссельсон, В.И.Кулешова и др.; Под ред. С.В.Якубовского.- М.: Радио и связь, 1989.- С.496.
11. *Самохвалов, М.К., Пугачев С.Ф., Бригаднов И.Ю.* Спектральные характеристики тонкопленочных электролюминесцентных структур на основе ZnS. [Текст] / М.К.Самохвалов, С.Ф. Пугачев, И.Ю. Бригаднов // Тез.докл. 28-й науч.-техн.конф.УлПИ, ч.1. – Ульяновск. - 1994.- С.27-28.

THE INVESTIGATION OF THE EFFECT OF DESIGN PARAMETERS OF THIN-FILM ELECTROLUMINESCENT INDICATORS OF MODES OF OPERATION FOR THE DEVELOPMENT OF SOFTWARE OF THE CAD SYSTEM

O. Maksimova, M. Samokhvalov

Ulyanovsk State Technical University
32, Sev. Venec st., Ulyanovsk, 432027, Russia

Abstract: Thin-film electroluminescent alternating current driven structures are the perspective active flat indicator devices, which have a number of advantages: high brightness, small consumed power, high efficiency, long working life et.al. There are many publications about the experimental datas for electroluminescent light emitted capacitors on the bases of zinc sulphide with manganese or rare-earth metal fluorides and some other phosphors with various insulator films. Effects of charge currier generation and energy dissipation are studied for thin-film structures. The main characteristics of indicator devices are explained by means of polarization effects connected with tunnel recharge of luminophore-insulator interface traps. These equations have been adapted for the development of CAD system of thin-film electroluminescent indicators. The presented of conspicuous electrical parameters dependence on the structural factors.
Keywords: thin film electroluminescence indicator, threshold voltage, maximum allowable voltage, electroluminescent capacitor, electroluminescence.

УДК 66.0992.002.237

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ГРАНУЛИРОВАНИЯ КОМПЛЕКСНЫХ УДОБРЕНИЙ С УЧЕТОМ ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКИХ И РЕОЛОГИЧЕСКИХ СВОЙСТВ КОМПОНЕНТОВ

Д.А. Макаренков*, В.И. Назаров**

**ФГУП «ИРЕА»,*
107076, Москва, Богородский вал, 3
***Московский государственный университет инженерной экологии*
105066, г. Москва, улица Старая Басманная, дом 21/4

Аннотация. Разработаны процессы гранулирования комплексных удобрений, с учетом физико-химических и реологических свойств исходных компонентов. Даны рекомендации по выбору процессов гранулирования методами прессования и формования.
Ключевые слова: Удобрения, свойства, прочность, плотность, дисперсный состав, оборудование.

В Российском агрокомплексе в последние годы используются удобрения, включающие в себя азотные, фосфорные, калийные и смешанные с микроэлементами. Рост цен на энергоносители, энергоресурсы и горюче-смазочные материалы (ГСМ) привлёк к поиску новых видов удобрений с использованием местных природных ресурсов. К ним относятся органоминеральные удобрения (ОМУ), содержащие торф, сапропели, цеолиты, маточные растворы и твердые отходы химических производств, содержащие микроэлементы. Приведем некоторые характеристики этих компонентов.

Торф содержит широкий класс органических соединений (битумов, углеводов, гуминовые вещества). В гидролизатах торфа обнаружен широкий спектр аминокислот: карбоновых, уроновых кислот, гуминовых веществ и других соединений. Они способны активировать или ингибировать биологические процессы в почвах и растениях.

Сапропель является органоминеральным озерным отложением из остатков планктонных и бентосных организмов при большой роли бактериальных процессов. Последние протекают в поверхностных слоях отложений при малом доступе кислорода. Отложения сапропеля содержат белки, жиры. Витамины, стимуляторы роста, ферменты, гормоны, антибиотики и большой набор макро- и микроэлементов. Сапропели могут быть органические, кремнистые, силикатные, карбонатные, железистые и органосиликатные.

Содержание органического вещества в сапропелях различных типов варьируется от 15 до 95% на сухое вещество. Гуминовые кислоты сапропелей являются соединениями алифатической структуры с повышенным содержанием водорода и азота. При этом в сапропелях содержание легкогидролизуемых веществ – гуминовых кислот изменяется от 6 до 70 % на органическое вещество. Они включают водно-белковый комплекс и гемилцеллюлозу. Особенностью сапропеля является высокое содержание азота до 6 %, который входит в состав аминокислот. Микроэлементы в сапропелях входят в состав карбонатов, органоминеральных соединений, а также находятся в сорбированном гелями кремнезема, глинозема и гидрооксидами железа. В настоящее время идентифицировано более 30 микроэлементов.

Известняковая мука получается после дробления, помола, последующей сушки карбонатных минералов. Она нейтрализует вредную для большинства растений кислотность почв и повышает эффективность использования вносимых органических и минеральных удобрений.

В производстве ОМУ используется ряд традиционных минеральных удобрений, таких как: суперфосфат-смесь $Ca(H_2PO_4)_2 \cdot H_2O$ и $CaSO_4$, гранулированное фосфорное удобрение, содержащее 26% фосфора, из которого 88-98% усваиваемый растениями; аммиачная селитра (NH_4NO_3) – минеральное удобрение, содержащее не менее 34,4% азота; карбамид является высококонцентрированным гранулированным азотным удобрением и содержит 46,65% азота в амидной форме; аммофос – смесь гранул беложелтого цвета с содержанием азота до 11%; калимагнезия ($K_2SO_4 \cdot MgSO_4$) – калийно-магниевое удобрение, содержащее (24÷26)% K_2O и (11÷18)%MgO; так побочные продукты переработки древесины - лигносульфонаты – смесь солей лигносульфоновых кислот,

В ряде марок ОМУ могут использоваться золы, шлаки, шламы и осадки сточных вод после анаэробного сбраживания в метантенках.

ОМУ являются многокомпонентными полидисперсными шихтами, и перевод их в гранулированное состояние является одним из факторов, влияющих на их физико-механические и агрохимические свойства. Такие удобрения лучше сохраняют сыпучесть, не пылят, легко вносятся в почву и не вымываются почвенными водами [2]. Гранулированные удобрения – удобрения пролонгированного действия.

В работе были исследованы способы получения ОМУ методом компактирования на валковом прессе и в роторном грануляторе с плоской матрицей и окатывания - в тарельчатых и скоростных грануляторах.

Одним из способов утилизации зол ТЭЦ является их использование в виде компонента ОМУ. Было проведено исследование гранулируемости золоторфяного удобрения при соотношении золы и торфа 1:3 и 1:2. Обычно низинный торф имеет влажность W=(40÷50)%, зола поступает при влажности W=(0,1÷0,2)%. При оптимальном смешении этих компонентов можно добиться влажности, обеспечивающей максимальную плотность и прочность.

При прессовании в закрытой матрице построены компрессионные кривые и определены плотность ρ (кг/м^3) и предел прочности на раскалывание $\sigma_р$(МПа) золоторфяных удобрений в диапазоне влажностей от 5% до 50% при удельных давлениях прессования от (17÷130) МПа.

Установлено, что при исходной насыпной плотности смеси $\rho_{см}$ =350 кг/м^3 в диапазоне давлений от 30 до 70 МПа получается плотно-прочные прессовки ($\rho_{пр}$=900-1100 кг/м^3, $\sigma_{рас}$=0,04-0,06 МПа). Влажность смеси при этом составляет 28-38%.

На основе этих исследований разработана технологическая схема получения гранулированных золоторфяных удобрений методом компактирования на валках с гладкой поверхностью. Установка состоит из бункера с исходными продуктами, смесителя, транспортеров, валкового пресса, сушильного барабана и узла очистки отходящих дымовых газов.

Переход на экологически чистые, бесхлорные удобрения, связанные с использованием местных ресурсов требует применения новых технологических решений и оборудования, которое позволяет за счет грануляции минимизировать вредные выбросы газовой и жидкой фазы в атмосферу [1].

Был проведен комплекс исследований по получению гранулированного удобрения калимагнезии различными методами гранулирования. Исследовали особенности гранулирования шихты, состоящей из сульфата калия и шлама, содержащего соли Ca и Mg. В качестве связующего применялись маточники сульфата магния, сульфата калия, а также Лигнопан Б-1(пластифицирующая добавка, на основе лигносульфонатов). Грануляцию проводили методом окатывания в скоростном грануляторе и на тарели [4].

Так как исходное сырье для производства ОМУ и КМ является полидисперсным материалом, содержащим в своем составе частицы разного вида формы, то для получения гранулированного продукта использовали метод скоростного гранулирование (СГ). При этом обеспечивается возможность скоростного интенсивного воздействия на исходные зернистые и порошковые материалы в присутствии жидкой фазы (связующего). Воздействие осуществляется активными элементами (лопатками) при времени пребывания продукта от 3 до 5 с до нескольких мин с получением гранул диаметром (0,2÷4,0) мм. При СГ протекают процессы агломерирования, окатывания, упрочнения и измельчения. Если проводить предварительную механоактивацию исходной смеси, то можно при снижении энергозатрат на саму грануляцию повысить качество готовых гранул. Использование механоактивации позволяет повысить содержание лимонно-растворимого P_2O_5 в ОМУ [3]. Уменьшение исходной влажности смеси позволяет уменьшить расход тепла на сушку гранул.

Была разработана опытная установка для исследования скоростного гранулирования порошков (рис.1).

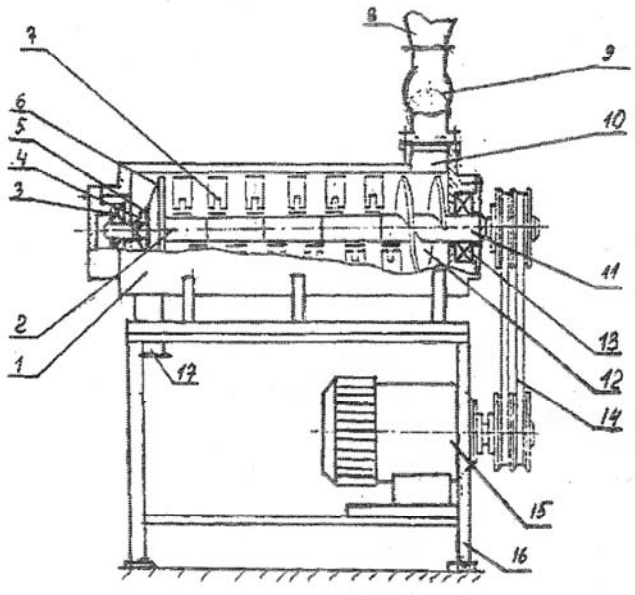

Рис.1 Конструкция скоростного гранулятора:
1- корпус; 2- втулка; 3- подшипник; 4- гайка; 5- стопорная шайба;
6- отбойный диск; 7- плоская лопатка; 8- загрузочный бункер; 9- секторный питатель;
10- загрузочный патрубок; 11- рабочий вал; 12- транспортирующий шнек; 13- подшипник;
14 – клиноременная передача; 15 – электродвигатель; 16 – рама; 17 – патрубок выгрузки.

Установка включала горизонтальный турболопастной гранулятор, дозатор с приводом, раму и загрузочный бункер. Гранулятор содержит горизонтальный цилиндрический корпус, изготовленный из толстостенной трубы. Внутри корпуса установлен ра-

бочий вал с закрепленными на нем плоскими лопатками. Лопатки гранулятора имели прямоугольную форму с размерами 20х40 мм. Угол наклона лопастей к поперечному сечению корпуса смесителя можно изменять от (0÷90)°. Лопасти в количестве 36 шт. закреплялись на валу по винтовой линии. Частота вращения лопастного вала регулировалась в пределах (150÷1500) об/мин. при номинальной мощности 2,2 кВт и постоянном значении крутящего момента.

Исходная шихта для производства ОМУ содержала карбамид, аммофос, поташ, сернокислый магний, набор микроэлементов и низинный торф, при соотношении между органической и минеральной частью 1:2. Было установлено влияние влажности исходной смеси, частоты вращения вала, степень заполнения гранулятора и дисперсности исходного порошка.

Кинетику гранулообразования исследовали в лабораторном грануляторе роторного типа с $d_{вн}$=90 мм. Зависимость выхода товарной фракции ОМУ от скорости вращения вала и производительности гранулятора представлена на рис.2 и 3.

Из рис.2 видно, что при загрузке $G_{загр}$ =200 г с увеличением частоты вращения лопаток происходит укрупнение фракционного состава.

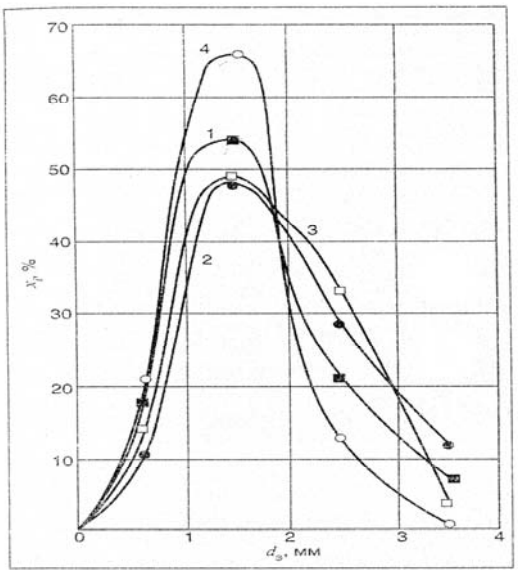

Рис.2. Зависимость выхода товарной фракции ОМУ в роторном грануляторе от скорости вращения вала ($G_{загр}$ = 200 гр, $W_{исх}$ = 37%):
1- n = 410 мин$^{-1}$; 2- n = 560 мин$^{-1}$;
3- n = 1000 мин$^{-1}$; 4- грансостав ретура

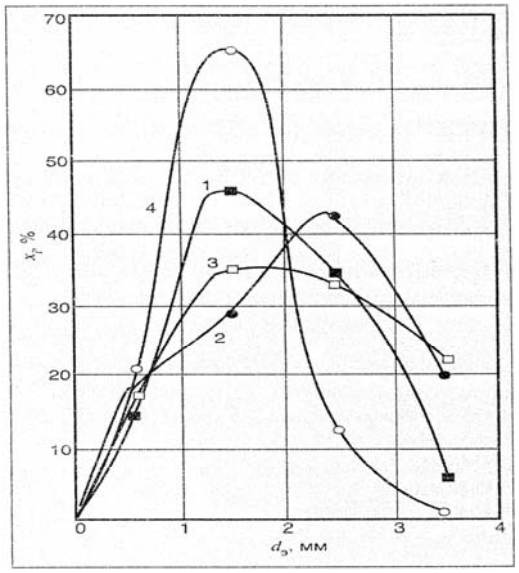

Рис. 3. Зависимость выхода товарной фракции ОМУ в роторном грануляторе от производительности ($W_{исх}$=37%):
1-$G_{загр}$ =200 гр; n = 570 мин$^{-1}$;
2-$G_{загр}$ =500 гр; n= 410 мин$^{-1}$;
3-$G_{загр}$ =1800 гр; n = (600-750) мин$^{-1}$;
4- грансостав ретура

Количество мелких частиц ($d_э$ = 0,63 мм) уменьшается с 18 до 11%. При скорости вращения вала 1000 мин$^{-1}$ увеличивается количество фракций с размером частиц

$d_э$ = 1,5-2,5 мм, в то время как при увеличении скорости более 1000 мин$^{-1}$ происходит дезинтеграция крупных частиц.

Важным параметром, влияющим на эффективность гранулирования, является производительность гранулятора. При увеличении расхода и при постоянстве остальных параметров (n, $W_{исх}$) в диапазоне скоростей вращения (400÷700) мин$^{-1}$ увеличивается толщина динамического слоя частиц, перемещаемого лопастями. При $G_{загр}$= 1800 г (рис.3, кривая 3) количество фракций с диаметром частиц $d_э$ = 3,5 мм возросло с 5,5 до 22,6%. При более толстом динамическом слое крупные частицы к выгрузке измельчаются меньше.

Для данного типа скоростных грануляторов при $W_{исх}$ =37% в диапазоне пластической прочности $P_м$=(10÷14) кПа грануляция осуществляется следующим образом. В процессе предварительной подготовки шихты, заключающейся в совмещении процессов смешения и механоактивации, происходит предварительное распределение частиц торфа по всему объему, что ведет к увеличению пластической прочности смеси. При грануляции в движущемся динамическом слое на увлажненный торфом ретур агломерируются мелкодисперсные порошки и частицы других компонентов.

При движении слоя к выгрузке и при высоких динамических нагрузках происходит упрочнение агломерированных гранул. В процессе сушки осуществляется дальнейшее упрочнение гранул.

На лабораторном рамочном грануляторе также была исследована кинетика гранулообразования в зависимости от влажности исходной смеси, частоты вращения вала с мешалками и времени гранулирования. Как и на пилотной установке, при исследовании использовали заводской ретур, состав которого приведен на рис. 2. Ретур после барабанной сушилки содержит в основном фракции с $d_э$=1,5 мм и $d_э$=0,63 мм при исходной влажности $W_{исх}$=(7÷8)%. Остальные компоненты после измельчения и механоактивации в барабане с шарами имели размер частиц порядка $d_э$=0,6 мм. Производительность пилотного гранулятора составила около 170 кг/ч.

При проектировании скоростного гранулятора, при заданных граничных условиях, определено изменение во времени координаты и скорости движущегося пакета частиц и установлена траектория его движения в каждый момент времени. Для определения этих параметром была реализована программа для численного решения дифференциальных уравнений методом Рунге-Кутта [4].

Было проведено исследование процесса получения бесхлорных калимагниевых удобрений проводили также в тарельчатом грануляторе с $d_{тар}$= 400 мм. При исследовании использовали связующие вещества со следующими характеристиками. Маточник раствора сульфата магния (pH раствора=9,3), маточник раствора сульфата калия (pH=5,8) и Лигнопан Б-1 (пластификатор).

При добавлении жидкого K_2SO_4 окатывания на тарели не происходило, так как не наблюдалось адгезионного взаимодействия между частицами из-за того, что добавки отличаются структурными характеристиками. Кроме того, в рабочих условиях сульфат калия содержит гигроскопическую и свободную влагу. За счет поверхностной влаги частиц сульфата калия ускоряется процесс агломерирования только порошкового сульфата калия. Установлено, что распыл должен быть мелкодисперсным и проводиться пневматической форсункой. Используемый в качестве связующего сульфат калия подогревали до (30÷40)°С. При такой температуре маточник сульфата калия приобретает дополнительные пластически-вязкие свойства, что способствует образованию крупных

агломератов шихты. Последующее уплотнение структуры гранул происходит при их дальнейшем взаимодействии друг с другом, со стенкой аппарата и при перекатывании через слой.

Затем при сушке удаляется влага и происходит кристаллизация твердой фазы или полимеризация. В результате гранулы приобретают необходимую прочность.

Также в качестве связующего была опробована добавка Лигнопан Б-1, в виде раствора 30%-концентрации, обладающая термостойкостью при сохранении её активности при её нагревании. В процессе окатывания на тарели получались крупные гранулы, которые при последующей сушке набирали необходимую прочность.

В следующей серии опытов в качестве связующего применяли раствор $MgSO_4$ (pH=9,3). Предварительное смешение проводили в смесителе рамочного типа с активными органами. Шихту увлажняли до прекращения пыления, после чего перегружали в тарельчатый аппарат. Гранулообразование шихты проходило в две стадии: на первой стадии происходило образование мелких гранул, затем гранулы росли в размере без набора прочности. Такой механизм гранулообразования связан с высокой поглотительной способностью шихты. Увеличение количества связующего придает шихте пластические свойства, что затем приводит к образованию крупных агломератов, без набора прочности.

Было установлено, что в качестве связующего оптимально использовать маточник K_2SO_4 с температурой раствора 30-40^{0}С или Лигнопан Б-1. Показано, что грануляцию бесхлорной калимагнезии лучше проводить в скоростных роторных грануляторах горизонтального типа с лопатками. Изменение угла наклона лопаток позволяет регулировать качество дополнительного измельчения и смешения компонентов шихты.

Определено, что угол атаки плоскости лопаток в средней части гранулятора равен 5-10° , а угол наклона лопастей к поперечному сечению корпуса гранулятора может изменяться от 45° до 5°.

Была определена возможность получения гранулированного ОМУ методом прессования на роторном грануляторе [5]. Общая влажность смеси 7% масс. Установлено, что при исходной влажности $W_{исх}$=7% и насыпной плотности $\rho_{нас}$=400 кг/м^3 при изменении удельных давлений прессования $P_{уд}$ от 30 до 120 МПа получаются прессовки с плотностью $\rho_п$=(1300÷1500) кг/м^3. При этом предел прочности на раскалывание составил (0,4÷0,8) МПа.

На основе этих исследований разработан алгоритм расчета основных параметров процесса гранулирования на роторном грануляторе с плоской матрицей.

Анализ различных способов получения гранулированных ОМУ показал, что, в зависимости от типа исходного состава, их физико-химических и реологических свойств выбирается способ гранулирования (методом компактирования, окатывания или прессования).

В соответствии с этим рекомендуется энергосберегающее оборудование, обеспечивающее максимальный выход товарной фракции.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Петербургский, А.В., Смирнов А.П.* Минеральные удобрения. – М.: Росагропромиздат, 1989, 95 с.
2. *Классен, П.В., Гришаев И.Г., Шомин И.П.* Гранулирование. – М.: Химия, 1991, 240 с.
3. *Скоробогатов, В.А.* Минеральные удобрения. Перегрузка на портовых терминалах. Справочное пособие. Эстония - Таллин, 2003, 530 с.
4. *Назаров, В.И., Макаренков Д.А., Баринский Е.А.* Вопросы грануляции органоминеральных удобрений на основе низинного торфа // Материалы V Международной научной конференции «Экология и безопасность жизнедеятельности». – Сумгаит, 2004.
5. *В.И. Назаров, Д.А. Макаренков, И.А. Булатов* Исследование процесса гранулирования дисперсных отходов на роторных прессах с плоской матрицей// Вестник МИТХТ. – 2010. – Т.5, №6. – С.13-16.

COMPLEX FERTILIZERS PELLETISING INVESTIGATION *VS* COMPONENTS PHYSICAL AND RHEOLOGICAL PROPERTIES

D. Makarenkov*, V. Nazarov**

**FGUE "IREA", Moscow*
3, Bogorodsky val, Moscow, 107076, Russia
***Moscow state university of engineering ecology*
21/4, Staraya Basmannaya st., Moscow, 105066, Russia

Abstract. Processes of complex fertilizers granulation (pelletising), taking into account physical and chemical and rheological properties of initial components are developed. Recommendations for choice processes of a granulation by pressing and formation methods are made.
Key words: Fertilizers, properties, durability, density, disperse structure, the equipment.

УДК: 541.14-4(043), 535.012

ОПТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ФОТОХРОМНЫХ МАТЕРИАЛОВ НА ОСНОВЕ 6-ФЕНОКСИ 5,12-НАФТАЦЕНХИНОНОВ

В.М. Козенков, Н.Т. Соколюк, В.В. Беляев, А.А. Спахов, Г.Д. Тумовский

Московский государственный областной университет
105005, Москва, ул.Радио, д.10а

Аннотация. Исследованы сенситометрические и фотоанизотропные свойства фоточувствительных соединений из класса ФНХ – незамещенного 6- фенокси-5,12-нафтаценхинона (6-Ф-5,12-НХ) в различных полимерных матрицах в режиме однофотонного поглощения активирующего излучения от непрерывных источников света. Описаны условия получения максимальной величины фазовой задержки и двулучепреломления исследованных веществ. Это позволило зарегистрировать

поляризационные голограммы и обеспечить неразрушающее считывание изображений, восстановленных с голограмм.
Ключевые слова: фотохромные материалы, фенокси нафтаценхиноны, однофотонное поглощение света, фазовой задержка, двулучепреломление, запись считывание голограмм.

Введение

В последнее время вновь возрос интерес к органическим фотохромным материалам (ФХМ) как средствам реверсивной оптической памяти [1-6]. Особый интерес вызывает их использование в сочетании с применением нелинейной оптики при создании систем трехмерного хранения информации [7-9]. Нелинейные одно- и двухфотонные режимы записи и стирания, в сочетании с люминесцентным режимом считывания, дают возможность создавать устройства трехмерной оптической памяти с высокой плотностью и объемом хранения информации, в которых последняя может быть локально записана и стерта в объеме ФХМ [10,11]. Люминесцентный режим считывания обеспечивает высокое отношение «сигнал/шум» [12].

Одним из перспективных классов ФХМ для трехмерных носителей информации являются феноксинафтаценхиноны (ФНХ) [13-15], в том числе с оптимизацией двухчастотной записи на основе поляризационной зависимости двухфотонного поглощения [16]. Материалы на основе ФНХ выгодно отличаются от большинства органических ФХМ, например спиропиранов [17,18], длительным временем хранения записанной информации в темноте (многие годы) и высокой цикличностью процесса «запись-считывание-стирание-перезапись» (более 500 циклов) [19]. Синтез и свойства таких веществ описаны в [20].

ФХМ этого типа окрашиваются под действием УФ- и коротковолнового видимого света ($\lambda \approx 420$ нм), а обесцвечиваются излучением в полосе поглощения фотоиндуцированной формы ($\lambda \approx$ 420 -520 нм). При этом светочувствительность к излучению с λ=441,6 нм составляет около 1 см²/Дж.

Кроме того, они обеспечивают неразрушающее считывание информации при использовании эффекта фотоиндуцированного изменения показателя преломления в области прозрачности фотоиндуцированной формы ФНХ, в частности при регистрации голограмм с максимальной ДЭ до 1% излучением He-Ne лазера [21] и в качестве оптически управляемых транспарантов в когерентно-оптических устройствах обработки изображений [22].

Спектроскопические и фотохромные свойства ФНХ в растворах хорошо изучены [13, 23-32]. В [31] методом сканирующей электронной микроскопии исследованы фотоиндуцированные конформационные преобразования молекул ФНХ в пленках Ленгмюра-Блоджетт, которые могут быть использованы для разработки реверсивной оптической памяти [32].

Синтез и спектральные свойства фотохромных полимеров на основе ФНХ описаны в [20, 33].

В настоящей работе представлены некоторые дополнительные результаты по исследованию сенситометрических и фотоанизотропных свойств одного из наиболее фоточувствительных соединений из класса ФНХ – незамещенного 6- фенокси-5,12-нафтаценхинона (6-Ф-5,12-НХ) в различных полимерных матрицах в режиме однофотонного поглощения активирующего излучения от непрерывных источников света.

1. Эксперимент.

Синтез 6-Ф-5,12-НХ описан в [23]. В качестве полимерной матрицы использовались полиметилметакрилат, сополимеры бутилметакрилата с другими акриловыми мономерами типа метакриламида и акрилонитрила, полистирол, сополимеры стирола с мономерами типа метилстирола, метилметакрилата и акрилонитрила и ряд других полимеров. Пленки толщиной от 5 до15 мкм получались методом полива из раствора с последующим испарением растворителя. Концентрация 6Ф-5,12-НХ в различных образцах пленок составляла от 2 до 7 вес. %. Установлено, что ФХМ с использованием всех указанных полимеров обладают высокой термоустойчивостью фотоиндуцированной формы и цикличностью. Однако пленки на основе бутилметакрилата с метакриламидом обеспечивали наибольшую фоточувствительность, поэтому в дальнейшем использовались образцы с этой полимерной матрицей. Для сравнения использовались также растворы указанных соединений в толуоле.

Спектры поглощения измерялись на спектрофотометре Specord UV-VIS или модернизированном СФ-14.

Схема экспериментальной установки по исследованию кинетики окрашивания и обесцвечивания пленок ФХМ, а также процессов наведения и темновой релаксации двулучепреломления (ДЛП), формируемого в них под действием поляризованного активирующего излучения приведена в [34-36]. В качестве последнего использовались ртутная или ксеноновая лампы с электрической мощностью 250 и 500 Ватт, соответственно. В качестве зондирующего источника использовалась лампа накаливания с интерференционными фильтрами.

2. Результаты и их обсуждение.

Известно [14, 23, 26, 28], что фотохромизм ФНХ связан с обратимой молекулярной перегруппировкой (фотоизомеризацией) с переходом фенильного ядра к перикислороду, инициированной УФ- или коротковолновым видимым излучением (в обоих направлениях) из возбужденного S1 или (и) T1 или термически (в обратном направлении при температуре плавления ФНХ) (смотри схему на Рис. 1). Прямой и обратный переходы происходят через образование короткоживущего σ-комплекса (2).

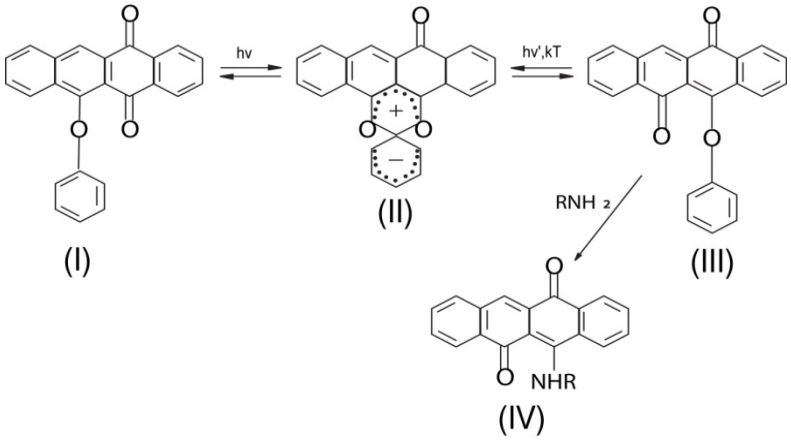

Рис.1. Схематическое представление фотохромного процесса в пленках на основе 6- фенокси-5,12-нафтаценхинона.

Подобные фотоперегруппировки сопровождаются значительными спектральными изменениями и представляют практический интерес. Электронный спектр поглощения исходной формы (1) ФНХ в полимерной матрице состоит из нескольких интенсивных, частично перекрывающихся полос (Рис. 2, кр.0) с λмакс ≈ 400 нм, практически совпа-

дающим с λмакс поглощения раствора ФНХ в толуоле [23]. Значения молярных коэффициентов поглощения ФНХ (1) в полимерной пленке и в толуольном растворе также близки.

При облучении исходной формы (1) УФ- и (или) коротковолновым видимым излучением появляется полоса поглощения в видимой области спектра, обусловленная фотоиндуцированной формой (3) с ярко выраженной колебательной структурой и с максимумами при 425, 450 и 480 нм. Наличие изобестических точек при длинах волн 408, 364 и 343 (Рис. 2, кр. 1-6) свидетельствует об отсутствии каких-либо побочных деструктивных фотохимических процессов, кроме обратимой фотоизомеризации.

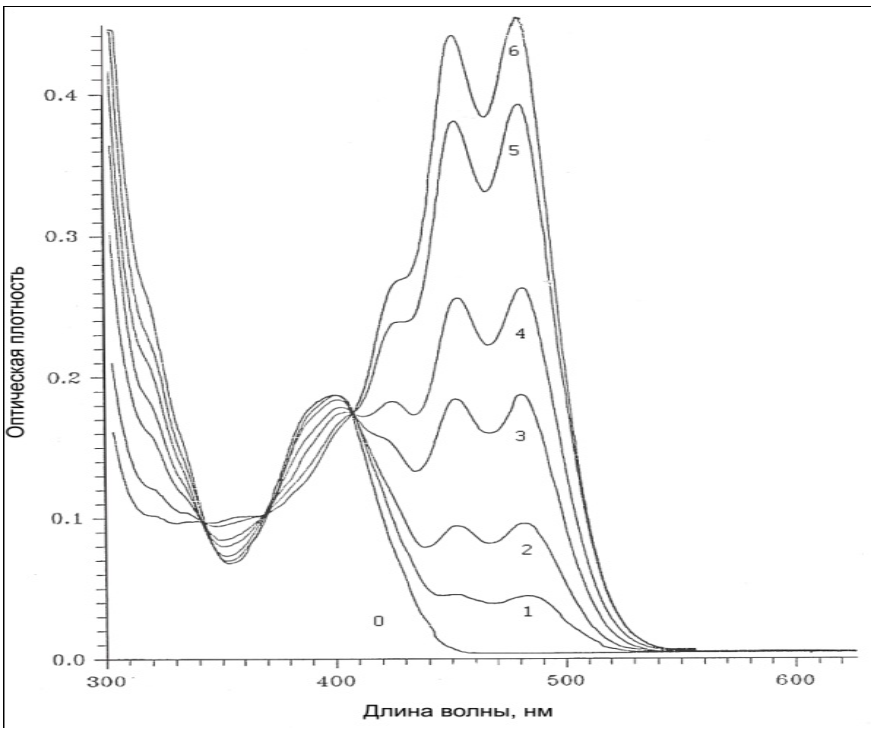

Рис.2. Спектры поглощения 6-Ф-5,12-НХ в толуоле:
0-исходный раствор с преобладанием *пара* – хиноидной структуры (1);
1-6- после облучения через интерференционный светофильтр
с максимумом пропускания 400 нм (Робл =0,33 мВт/см^2).
Времена облучения: 15; 45; 105; 240; 480; и 980 с, соответственно.

В области менее 450 нм полосы поглощения формы (1) и (3) перекрываются и под действием излучения такого спектрального состава одновременно протекают прямая и обратная фотохимические реакции [19]. Это приводит к зависимости степени окрашивания ФХМ от длины волны активации. На Рис. 3 приведены типичные кривые окрашивания (кр. 1 и 3) и обесцвечивания (кр. 2 и 4) пленки ФНХ в зависимости от длины волны активирующего излучения, измеренные при λ = 441 нм.

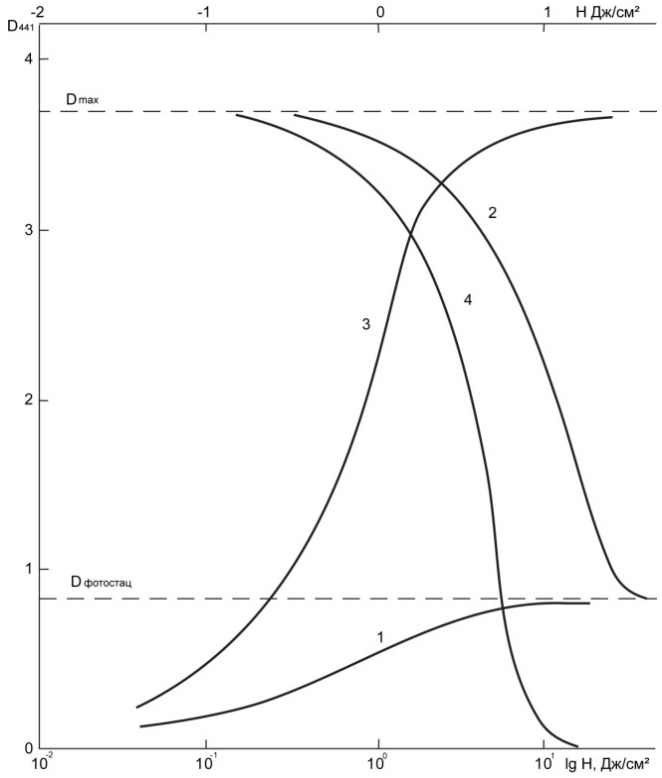

Рис.3. Характерные кривые окрашивания (1,3) и обесцвечивания (2,4)
6-Ф-5,12-НХ на длинах волн облучения:
1- λобл =441,2 нм (Робл =1.5 мВт/см^2),
2- λобл =441,2 нм (Робл =1,5 мВт/см^2),
3- λобл =320-410 нм (лампа ДРШ-250+светофильтр ФС-7;
Робл =10 мВт/см^2), λобл =441,2 нм (Робл =1.5 мВт/см^2),
4-λобл =480 нм (Робл =1,0 мВт/см^2).

Видно, что независимо от начального состояния ФХМ при длительном облучении материал достигает фотостационарного состояния, определяемого только спектральным составом активирующего излучения. Это состояние не зависит от температуры. Так, например, при фотоактивации ФХМ излучением с длиной волны 365 нм наряду с превращением исходной формы (1) в фотоиндуцированную форму (3) осуществляется и обратный процесс, в результате которого устанавливается некоторое фотостационарное состояние. Дополнительное облучение ФХМ излучением с длиной волны 313 нм переводит к установлению нового фотостационарного состояния с более высокой оптической плотностью, а последующее облучение тем же излучением с длиной волны 365 нм возвращает фотоиндуцированную оптическую плотность до предыдущего уровня.

Таким образом, полную схему фотохромных превращений ФНХ в полимерной матрице и в растворе толуола при использовании активирующего излучения с λ=365 нм и дезактивирующего видимого света можно записать в следующем виде:

$$h\nu 1(\varphi 1)$$

пара-хиноидная структура (1) ←----------→ *ана*-хиноидная структура (3)

$h\nu 1(\varphi 3)$, $h\nu 1(\varphi 1)$

Используя ранее найденные в [25] значения коэффициентов экстинкции ФНХ в толуоле ($\varepsilon 1(400)=6*10^3$; $\varepsilon 1(365)= 3,4*10^3$ и $\varepsilon 3(480)=1,7*10^4$ л/моль*см) и учитывая, что длина волны активирующего излучения с λ=365 нм совпадает с изобестической точкой, определили по известной методике [37] определены квантовые выходы прямой ($\varphi 1$) и обратной ($\varphi 1`$) фотореакций на длине волны 365 нм. Они оказались равными 0,3 и 0,05 соответственно. Согласно оценкам, квантовые выходы формы (1) под действием как УФ-, так и видимого излучения являются сравнимыми. Отсюда следует, что эффективность окрашивания ФНХ под действием света с λ=365 нм несколько ниже, чем для λ=313 нм, но она на порядок выше эффективности фотообесцвечивания.

При переходе от раствора в толуоле к твердым полимерным растворам, как оказалось, величины квантовых выходов практически не меняются. Следовательно, можно полагать, что вязкость использованных полимерных связующих не оказывает существенного влияния на эффективность фотохромных превращений ФНХ. Независимо от природы полимерной матрицы светочувствительность ФХМ на основе ФНХ к излучению с λ=365 нм составляла не менее 10 см²/Дж, а к видимому свету ~1 см²/Дж. Эти значения приведены для фотоиндуцированного изменения оптической плотности при λ=400 нм $\triangle D$=1,0 [19]

Константа скорости реакции темнового обесцвечивания кт 6-Ф-5-12-НХ как в растворе, так и в полимерной матрице равна порядка 10^{-8} $с^{-1}$, а энергия активации этого процесса составляет 30±3 ккал/моль [19]. Это означает, что время жизни фотоиндуцированной формы в темновых условиях составляет многие годы. Вместе с тем, записанная информация подвержена деструктивному считыванию в полосе поглощения формы (3). Этот недостаток устраняется либо путем использования эффекта фотоиндуцированного ДЛП в области прозрачности ФНХ [20], либо путем необратимой фиксации информации, записанной в слое на основе ФНХ.

В [23] показано, что форма (3) ФНХ легко вступает с аминами в реакцию нуклеофильного замещения феноксольной группы на аминогруппу уже при комнатной температуре с образованием фотохимически устойчивого амино-*ана*-хинона (4) (Рис.2). Форма (1) в этих условиях с аминами не взаимодействует.

Аналогичные реакции имеют место и в твердых полимерных пленках с ФНХ [38]. При этом фиксация информации основана на взаимодействии аминов с фотоиндуцированной формой ФНХ и способности непрореагировавших молекул амина улетучиваться из пленки при ее прогреве до температуры 70-110°С в течение 5-20 мин. В качестве аминов могут быть использованы ароматические амины типа *п*-броманилин, *о*-фенилендиамин, *п*-анизидин и другие. Введение в пленку аминов можно избежать, если использовать в качестве полимерной матрицы сополимер бутилметакрилата с метакриламидом. Прогрев пленки продолжается при этом несколько часов [37].

Такая обработка способствует повышению цветового контраста записанной информации и ее сохраняемости при считывании в лучах видимого света, а также обеспечения цветового разделения записанной и вновь записываемой информации.

Для ФХМ этого типа обнаружено также, что облучение их поляризованным излучением приводит к обратимой ФИА (ДХ и ДЛП), которая, как нам представляется, обусловлена эффектом Вейгерта и ориентационным фотодихроизмом.

В качестве примера на Рис.4 приведена кинетика наведения ДЛП поляризованным излучением с λакт =365 нм в образце ФПП-132 (пленка сополимера бутилметакрилата с метакриламидом, толщиной 15 ± 1 мкм, содержащей 4 вес. % 6-Ф-5,12-НХ). Измерения проводились в скрещенных поляризаторах на λзонд =632.8 нм при различных ориентациях активирующего излучения относительно поляризаторов.

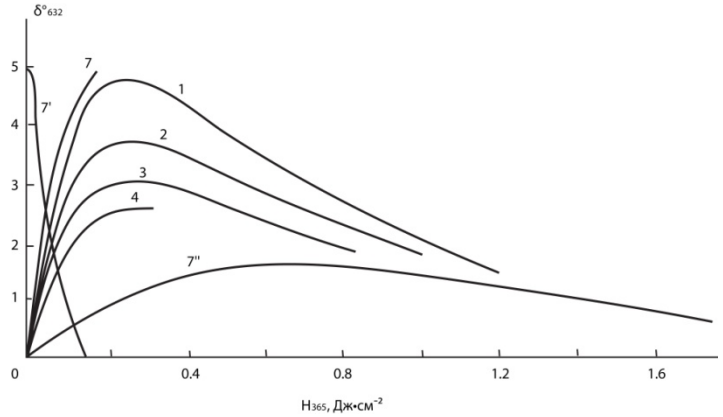

Рис. 4. Кинетика наведения (кр.1-7) и стирания (кр.7`) ДЛП в образце ФПП-132 УФ излучением с λ=365 нм при ориентации скрещенных поляризаторов относительно поляризации активирующего излучения под углами θº: 1-+45º; 2 -+22,5º; 3- -67,5º; 4- -22,5º; 5- 0º; 6- 90º; 7- +45º; 7`- +45º (в той же точке); 7``- +45º (второй цикл).

Наблюдалась типичная для ФХМ кинетическая зависимость, причем максимальная величина фазовой задержки δ632 достигала значения около 5°, что соответствует величине ДЛП $\Delta n632 \sim 6 * 10^{-4}$. Это свойство ФХМ на основе ФНХ позволило зарегистрировать поляризационные голограммы и обеспечить неразрушающее считывание изображений, восстановленных с голограмм [21].

ЛИТЕРАТУРА

1. Photo-reactive materials for ultrahigh density optical memory, ed. M. Irie. Amsterdam: Elsevier, 1994.
2. *Tsujioka T., Irie M., Jpn. J.* Appl. Phys. // 1999. V.38. P.4100.
3. *Sekkat Z., Knoll W.* Photoreactive organic thin films. – Amsterdam. Boston: Academic Press, 2002.
4. *Crano J.C., Guglielmetti R.J.* Organic Photochromic and Thermochromic Compounds: Physicochemical studies, biological applications, and thermochromism. – Springer, 1999. 473 p.
5. *Bouas-Laurent H.* Photochromism: molecules and systems. – Gulf Professional Publishing, 2003. 1044 p.

6. *Feringa B.L., Browne W.R.* Molecular Switches. – John Wiley & Sons, 2011. 824 p.
7. *Hunter S., Kiamilev F., Esener S., Parthenopoulos D. A., Rentzepis P. M.* // Appl. Opt. 1990. V.29. P. 2058.
8. *Akimov D. A., Fedotov A. B., Koroteev N. I., Magnitskii S. A., Naumov A. N., Sidorov-Biryukov D. A., Zheltikov A. M.* // Jpn. J. Appl. Phys. 1997. V.36. P.426.
9. *A. Toriumi, J. M. Herrmann, S. Kawata*, Opt. Lett., 22, 555 (1997).
10. *H. E. Pudavar, M. P. Joshi, P. N. Prasad, B. A. Reinhardt,* Appl. Phys. Lett., 74, 1338 (1999).
11. *T. Takahashi, T. Taniguchi, K. Umetani, H. Yokouchi, M. Hashimoto, T. Kano* // Jpn. J. Appl. Phys., 24, 173 (1998).
12. *N. Tsujioka, M. Irie,* Appl. Opt., 37, 4419 (1998).
13. *N.I. Koroteev, S. A. Magnitskii, V. V. Schubin, N. T. Sokolyuk,* Photochemical and spectroscopic properties of naphthacenequinones as candidates for 3D optical data storage, Jpn. J. Appl. Phys., 36, 424 (1997).
14. *A. El`tsov. A. Ponyaev, E. Zakhs, D. Klemm, E. Klemm,* Photochromic peri-aryloxy-p-quinone // in: Organic photochromes, Consultants Bureau: New York (1990), p. 210.
15. *V. A. Barachevsky,* Photochromic quinines // in Organic photochromic and thermochromic compounds, vol. 1, edited by J. C. Crano and R. Gulielmetti, Plenum Press, New York, 1999, p. 267-314.
16. *Д. А. Акимов, А. М. Желтиков, Н. И. Коротеев, С. А. Магницкий, А. Н. Наумов, Д. А. Сидоров-Бирюков, А. Б. Федотов,* Оптимизация двухчастотной оптической записи информации в фотохромных материалах на основе поляризационной зависимости сечения двухфотонного поглощения, КЭ, 23, 871 (1996).
17. *R. C. Bertelson,* Spiropyrans, // in Organic photochromic and thermochromic compounds, vol. 1, edited by J. C. Crano and R. Gulielmetti, Plenum Press, New York, 1999, p. 11-84.
18. *S. Maeda,* Spirooxazines, ibid, p. 85-111.
19. *А.А.Паршуткин, П. П. Кисилица, Ю. Е. Герасименко, Н. Т. Потелещенко, В. В. Романов, В. М. Козенков, В. В. Белов, Н. И. Болондаева, В. А. Барачевский,* «Фотохромные материалы на основе 6-фенокси-5,12-нафтаценхинона и его производных», // III Всесоюзная конференция по бессеребряным и необычным фотографическим процессам, Вильнюс, тезисы докладов, 163 (1980).
20. *Громов С. П.* Фотохромные свойства органических молекул. Учебное пособие. Московская государственная академия тонкой химической технологии им. М. В. Ломоносова. 2008. 50 с.
21. *В. В. Белов, В. А. Барачевский, Н. И. Болондаева, В. М. Козенков, Н. Т. Потелещенко, А. А. Ястребов, П. П. Кисилица,* // В сб.: II Всес. Конфер. по голографии, тез. докл., ч. 1, с. 50 (1975).
22. *Н. Н. Машталир, В. М. Козенков, В. А. Барачевский, , А. А. Паршуткин, Е. Г. Катышев, П. П. Кисилица, Н. Т. Соколюк,* Исследование фотографических свойств фотохромных материалов на основе 6-фенокси-5,12-нафтаценхинона, Тезисы докладов IV Всесоюзной конференции «Бессеребряные и необычные фотографические процессы» том II. Фотохимические процессы регистрации информации. Полупроводниковая фотография. Черноголовка, 139 (1984).
23. *Ю. Е. Герасименко, Н. Т. Потелещенко,* Фотоизомеризация 6-фенокси-5,12-нафтаценхинона, ЖОХ, 7, 2413 (1971).

24. *В. Н. Костылев, Б. Е. Зайцев, В. А. Барачевский, Н. Т. Потелещенко, Ю. Е. Герасименко, Н. Т. Потелещенко,* Опт. и Спектр., 30, 86 (1977).
25. *Ю. Е. Герасименко, А. А. Паршуткин, Н. Т. Потелещенко, В. П. Потелещенко, В. В. Романов,* Фотохромизм пери-арилокси-n-хинонов. Определение молярных коэффициентов поглощения 6-феноксi-5,11-нафтаценхинонов, ЖПС, 30, 954 (1979).
26. *Ю. П. Строкач, В. А. Барачевский, Н. Т. Соколюк, Ю. Е. Герасименко,* Механизм фотоизомеризации феноксинафтаценхинонов в растворах при лазерном фотовозбуждении, ХФ, 6, 320 (1987).
27. *Р. Н. Нурмухаметов, Г. Н. Родионова, В. В. Романов, Н. Т. Потелещенко, Ю. Е. Герасименко,* Электронные спектры и строение изомерных 5,12- и 5,11- нафтаценхинонов. ЖПС, XXX, 856 (1979).
28. *Y. Yokoyama, S.-Y. Fukui, Y. Yokoyama,* Photochromic properties of thermally irreversible 6-aryloxy-5,12-naphthacenequinones, Chem. Lett., 355 (1996).
29. *И. Л. Белайц, Н. Т. Соколюк, А. А. Паршуткин, Л. П. Самсонова, Ю. Е. Герасименко,* Спектрально-люминесцентные свойства и относительное расположение низших ππ* и nπ*- уровней молекул фотоизомерных форм фотохромных нафтаценхинонов, ЖФХ, LX, 640 (1986).
30. *В. Т. Грачев, В. Ф. Игнатов, В. П. Зволинский, Н. Т. Соколюк,* Электронная структура и фотохромизм 6-феноксi-5,12- и 5-феноксi-6-12-нафтаценхинонов // 1 Конференция научно-учебного центра физико-химических методов исследования, Москва, 12-14 января, 1988, с. 48
31. *A. I. Oreshkin, V. I. Panov, S. I. Vasil`ev,* Direct STM observation of electronic structure modification of naphthacenequinone molecules due to photoiisomerization, JETP Lett., 68, 521 (1998).
32. *Г. К. Чудинова, Е. А. Денисова, В. А. Барачевский, Н. Т. Соколюк, Е. В. Белогородцева, Л. П. Писулина,* Фотохромные полимолекулярные пленки на основе феноксинафтаценхинонов, ЖНИПФиК, 39, 33 (1994)
33. *F. Buchholtz, A. Zelichenor, V. Krongauz,* Syntesis of new photochromic polymers based on phenoxynaphthacenequinone, Macromolecules, 26, 906 (1993).
34. *Я. С. Джанг, В. М. Козенков, С. А. Магницкий, Н. М. Нагорский,* Фотохромные и фотоанизотропные свойства азокрасителя AD-1 в различных агрегатных состояниях // Квантовая электроника, т.36, №11, с.1056-1057 (2006).
35. *Джанг Я.С., Козенков В.М., Магницкий С.А., Нагорский Н.М.* Фотохромные и фотоанизотропные свойства азокрасителя AD-1 в различных агрегатных состояниях. Препринт №12, Физический факультет МГУ, с.1-43 (2006).
36. *Dubrovkin A.M., Jung Y., Kozenkov V.M., Magnitskiy S.A., Nagorskiy N.M.* Nonlinear induced polarization dependent scattering in solid state azo-dye films. Laser Phys. Letters., 1–4/DOI10.1002/ lapl. 200610114 (2006).
37. *А.А.Паршуткин, В. П. Базов, и др.,* ХВЭ, 4, 169 (1970)
38. SU 1 668 963 В. М. Козенков, Н. Т. Соколюк. Т. П. Голубцова, Е. Г. Катышев, П. П. Кисилица, Г. Д. Козенкова, Н. Е. Минченко, Способ фотографической записи информации, (07. 08. 1991).

OPTICAL PROPERTIES OF 6-PHENOXY 5,12-NAPHTACENEQUINONE PHOTOCHROMIC MATERIALS

V. Kozenkov, N. Sokolyuk, V. Belyaev, A. Spakhov, G. Tumovskii

Moscow Region State University
10a, Radio st., Moscow, 105005, Russia

Abstract. Both sensitometric and photoanisotropic properties of photosensitive 6-phenoxy 5,12-naphtacenequinone (6-Ph-5,12-NQ or PNQ) substances in different polymeric matrices have been investigated in a single-photon mode of light sources continuous activating radiation. Maximum phase retard and birefringence value realization conditions are described. The effect allows polarization holograms recording as well as non-destructive reading-out of reconstructed images.
Key words: photochromic substances, phenoxy naphtacenequinone derivatives, single-photon mode, phase retard, birefringence, holographic recording and reading-out.

УДК: 530.145:530.12;537.8:530.145

ЛОКАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ КИРАЛЬНЫХ ФЕРМИОНОВ СО ВСПОМОГАТЕЛЬНОЙ ЧАСТИЦЕЙ В ДИСКРЕТНОМ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ

Н.В. Зверев

Московский государственный областной университет
105005, Москва, ул.Радио, д.10а

Аннотация. Рассмотрена локальная модель киральных фермионов со вспомогательной частицей в дискретном пространстве-времени в двух внешних полях: однородном и неоднородном. Показано, что при определённом соотношении для массы вспомогательной частицы данная модель согласуется с непрерывной теорией.
Ключевые слова: киральные фермионы, решётка пространства-времени, локальные модели.

1. Введение

Модели киральных фермионов, характеристики которых не инвариантны относительно операции изменения знака всех пространственных координат, используют для изучения элементарных частиц нейтрино [1]. Для расчётов физических характеристик этих частиц во всей области их параметров рассматривают модели фермионов в дискретном пространстве-времени (на решётке) [2].

Но прямая замена непрерывных производных на локальные дискретные приводит к несогласию дискретной и непрерывной моделей киральных фермионов в случае бесконечного дискретного пространства-времени [3]. Для устранения этого несогласия в таком пространстве-времени предложено добавить вспомогательные нефизические частицы [4]. Однако исследования моделей в конечном дискретном пространстве-времени (на конечной решётке) выполнены не были.

В данной работе приведены результаты исследований [5] локальной модели киральных фермионов со вспомогательной частицей на двумерной конечной решётке на согласие с непрерывной теорией.

2. Модель киральных фермионов на решётке без вспомогательной частицы в однородном внешнем поле

В данной работе рассматриваем модель киральных фермионов 11112, т.е. модель, описывающую четыре положительно-киральных фермиона с безразмерным зарядом 1 и один отрицательно-киральный фермион с безразмерным зарядом 2 [6]. Фундаментальная величина данной модели – действие – имеет вид [6]:

$$S_{CW} = \sum_{k=1}^{4} S_{+}[\psi_{+k}, U] + S_{-}[\psi_{-}, U^2].$$

Здесь

$$S_{\pm}[\Psi, U] = \sum_{x,y} \overline{\Psi}_x \mathbf{M}^{(\pm)}_{xy}[U] \Psi_y = \sum_{x,\mu} \left\{ \overline{\Psi}_x \gamma_\mu (P_{\pm} \nabla_\mu [U] + P_{\mp} \partial_\mu) \Psi_x + \partial_\mu \overline{\Psi}_x \partial_\mu \Psi_x \right\};$$

$\mathbf{M}^{(\pm)}_{x,y}[U]$ – матрица положительно- или отрицательно-кирального фермиона, ∂_μ и $\nabla_\mu [U]$ – обычная и ковариантная локальные дискретные фермионные производные:

$$\partial_\mu \Psi_x = \Psi_{x+\hat{\mu}} - \Psi_x, \qquad \nabla_\mu [U] = U_{x,\mu} \Psi_{x+\hat{\mu}} - \Psi_x;$$

x, y – узлы двумерной решётки пространства-времени с координатами $x_\mu, y_\mu = -N/2+1, -N/2+2, \ldots, N/2-1, N$; N – чётное число узлов решетки по одному направлению; направление пространства-времени $\mu = 1, 2$; шаг решётки $a = 1$ и кроме того, здесь используется система единиц $\hbar = c = 1$; γ_1, γ_2 – матрицы Дирака в двумерном пространстве-времени:

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix};$$

P_+ и P_- – положительно- и отрицательно-киральные проекторы:

$$P_+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$U_{x,\mu} = \exp(\mathrm{i}\, A_{x,\mu})$ – внешнее поле с вещественным потенциалом $A_{x,\mu}$, $\psi_{+k,x}$ – волновые функции четырёх положительно-киральных фермионов; $k = 1, 2, 3, 4$; $\psi_{-,x}$ – волновая функция отрицательно-кирального фермиона. Волновые функции фермионов обладают свойством антиперестановочности при перемножении, поскольку только в этом случае обеспечивается выполнение принципа Паули. Граничные условия для $U_{x,\mu}$ и ψ_x имеют вид:

$$U_{x \pm N\hat{\nu},\mu} = U_{x,\mu}, \qquad \psi_{x \pm N\hat{\nu}} = -\psi_x, \qquad \mu, \nu = 1, 2.$$

Интегрирование $\exp(-S_{VS})$ по волновым функциям ψ_{+k}, $k = 1, 2, 3, 4,$ и ψ_{-} в силу свойства антиперестановочности при перемножении этих функций приводит к детерминанту фермионных матриц:

$$\int \exp(-S_{CW})\,[\mathrm{d}\overline{\psi}\,\mathrm{d}\psi] = \det\left(\mathbf{M}^{(+)}[U]^4\,\mathbf{M}^{(-)}[U^2]\right) = D_{CW},$$

Этот детерминант является производящей функцией всех фермионных корреляционных функций.

В однородном внешнем поле с потенциалом [6]

$$A_{x,\mu} = \frac{2\pi}{N} h_\mu,$$

где вещественные числа h_μ не зависят от x, данный детерминант имеет вид [6]:

$$D_{CW}[h] = D_{+W}[h]^4\, D_{+W}[2h]^*,$$

где

$$D_{+W}[h] = \prod_{p_1,p_2=-N/2+1}^{N/2} \frac{B_+(p,h)B_-(p,0) + W^2(p)}{|B_+(p,0)|^2 + W^2(p)},$$

* – операция комплексного сопряжения. Здесь обозначено:

$$B_\pm(p,h) = B_1(p,h) + \mathrm{i}B_2(p,h),$$

$$B_\mu(p,h) = \sin\frac{2\pi}{N}(p_\mu - h_\mu - 1/2), \quad W(p) = \sum_{\mu=1}^{2} 2\sin^2\frac{\pi(p_\mu - 1/2)}{N}.$$

Аналитические исследования и численные расчёты показали [5], что в пределе $N \to \infty$ $D_{CW}[h]$ не согласуется с детерминантом непрерывной двумерной 11112 модели киральных фермионов, равным в однородном внешнем поле [6]

$$D_{CC}[h] = D_{+C}[h]^4\, D_{+C}[2h]^*,$$

где обозначено:

$$D_{+C}[h] = \exp(\mathrm{i}\pi h_2(h_1 + \mathrm{i}h_2)) \prod_{n=1}^{\infty} F[n,h]F[n,-h],$$

$$F[n,h] = \frac{1 + \exp\left(-2\pi(n-1/2) + 2\mathrm{i}\pi(h_1 + \mathrm{i}h_2)\right)}{1 + \exp\left(-2\pi(n-1/2)\right)}.$$

Поэтому 11112 модель киральных фермионов на двумерной решётке требует усовершенствования – введения вспомогательных частиц.

3. Модель киральных фермионов на решётке со вспомогательной частицей в однородном внешнем поле

Действие модели имеет вид [5]:

$$S_{CR} = S_{CW} + \sum_{x,\mu} \left\{ \bar{\phi}_x (\gamma_\mu \nabla_\mu [U^2] + M) \phi_x + \partial_\mu \bar{\phi}_x \partial_\mu \phi_x \right\}.$$

Здесь ϕ_x – волновая функция нефизической некиральной бозонной частицы с зарядовым числом 2 и массой M, удовлетворяющая тем же граничным условиям, что и волновые функции ψ_x киральных фермионов.

Интегрирование $\exp(-S_{CR})$ по волновым функциям ψ_{+k}, $k = 1, 2, 3, 4$, ψ_- и ϕ приводит к детерминанту, равному в однородном внешнем поле:

$$D_{CR}[h] = D_{CW}[h] \prod_{p_1, p_2 = -N/2+1}^{N/2} \frac{|B_+(p,0)|^2 + W^2(p) + M^2}{|B_+(p,2h)|^2 + W^2(p) + M^2} .$$

Детерминанты D_{CR} и D_{CC} являются комплексными величинами: $D = |D| \, e^{iArgD}$. Введение вспомогательной частицы изменяет только модуль детерминанта D_{CR}, не затрагивая его аргумент, т.е. $\mathrm{Arg}\, D_{CR} = \mathrm{Arg}\, D_{CW}$.

Аналитические исследования и численные расчёты показали [5], что в однородном внешнем поле имеют место следующие оценки:

$$\frac{\partial^3}{\partial_\mu \partial_\nu \partial_\lambda} \ln(|D_{CR}[h]| / |D_{CC}[h]|) = O(1/MN) + O(1/N), \qquad \mu, \nu, \lambda = 1, 2;$$

$$\mathrm{Arg}\, D_{CR}[h] = \mathrm{Arg}\, D_{CC}[h] + O(1/N),$$

$$\Pi_{CR}(0) = \Pi_{CC}(0) + O(M^2 N) + O(1/MN),$$

где

$$\Pi_{CR}(0) = -\frac{\partial^2}{\partial h_1^2} \ln |D_{CR}[h]| \Big|_{h_1 = h_2 = 0}, \quad \Pi_{CC}(0) = -\frac{\partial^2}{\partial h_1^2} \ln |D_{CC}[h]| \Big|_{h_1 = h_2 = 0},$$

и, кроме того,

$$\Pi_{CR}(0) / \Pi_{CC}(0) = \max$$

при массе M вспомогательной частицы, равной $M = M_0(N) \sim N^{-0.75}$. Поэтому в пределе $N \to \infty$ в однородном внешнем поле детерминант киральной 11112 модели на решётке $D_{CR}[h]$ при массе вспомогательной частицы $M = M_0(N)$ согласуется с детерминантом непрерывной киральной 11112 модели $D_{CC}[h]$ (рис.1).

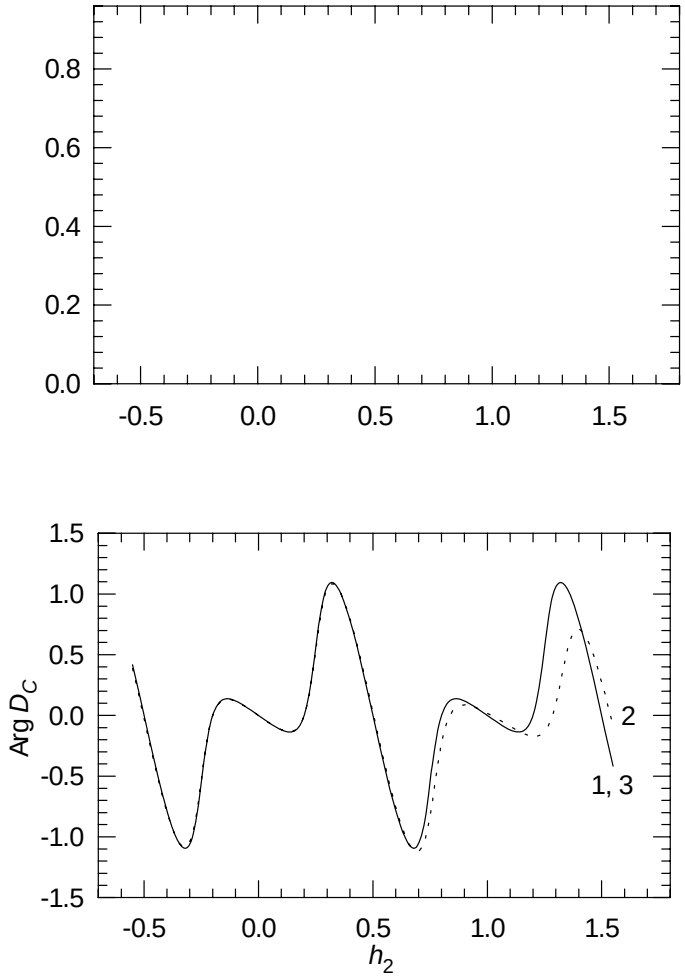

Рис.1. Модули $|D_C|$ и аргументы Arg D_C киральных 11112 моделей в зависимости от h_2 однородного внешнего поля при $h_1 = 0.2$ [5]:
1 – $|D_{CC}|$ и Arg D_{CC} непрерывной модели;
2, 3 – $|D_{CR}|$ и Arg D_{CR} модели на решётке при массе $M = M_0(N)$:
2 – $N = 32$;
3 – $N = 160$.

4. Модель киральных фермионов на решетке со вспомогательной частицей в неоднородном внешнем поле

В результате интегрирования $\exp(-S_{CR})$ по волновым функциям ψ_{+k}, $k = 1, 2, 3, 4$, ψ_- и ϕ возникает детерминант, имеющий следующее выражение во внешнем поле U общего вида [5]:

$$D_{CR} = D_{+W}[U]^4 \, D_{+W}[U^2]^* \det \frac{\mathbf{B}[1]\mathbf{B}^+[1] + \mathbf{W}^2 + M^2}{\mathbf{B}[U^2]\mathbf{B}^+[U^2] + \mathbf{W}^2 + M^2} \ ,$$

где

$$D_{+W}[U] = \det \frac{\mathbf{B}[U]\mathbf{W}^{-1}\mathbf{B}^{+}[1]\mathbf{W} + \mathbf{W}^2}{\mathbf{B}[1]\mathbf{B}^{+}[1] + \mathbf{W}^2}.$$

Здесь матрицы $\mathbf{B}[U]$ и $\mathbf{W}$ имеют вид:

$$\mathbf{B}_{xy}[U] = \frac{1}{2}(U_{x,1}\delta_{x+\hat{1},y} - U^{*}_{y,1}\delta_{x,y+\hat{1}}) + \frac{\mathrm{i}}{2}(U_{x,2}\delta_{x+\hat{2},y} - U^{*}_{y,2}\delta_{x,y+\hat{2}}),$$

$$\mathbf{W}_{xy} = \frac{1}{2}(4\delta_{xy} - \delta_{x+\hat{1},y} - \delta_{x+\hat{2},y} - \delta_{x,y+\hat{1}} - \delta_{x,y+\hat{2}}),$$

$\mathbf{B}[1]$ – матрица $\mathbf{B}[U]$ во внешнем поле с $A_{x,\mu} = 0$, $^{+}$ – операция эрмитова сопряжения по координатам x, δ_{xy} – символ Кронекера для координат x и y.

Потенциал неоднородного внешнего поля имеет вид [6]:

$$A_{x,\mu} = \frac{2\pi}{N} h_\mu \cos\frac{2\pi}{N}(k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_\mu / 2),$$

где вещественные величины h_μ не зависят от x_1 и x_2 ; x_μ, $k_\mu = -N/2 + 1, \ldots, N/2$; $\mu = 1, 2$; $k_1^2 + k_2^2 \neq 0$. В данном неоднородном внешнем поле детерминант модели $D_{CR} = D_{CR}[h, k]$.

Детерминант непрерывной киральной 11112 модели в неоднородном внешнем поле имеет вид [6]:

$$D_{CC}[h, k] = \exp\left\{-4\pi \frac{(k_1 h_2 - k_2 h_1)^2}{k_1^2 + k_2^2}\right\},$$

где k_1 и k_2 – целые числа, причём $k_1^2 + k_2^2 \neq 0$.

Аналитические исследования и численные расчёты показали [5], что в неоднородном внешнем поле в пределе $N \to \infty$ при указанной выше массе вспомогательной частицы $M = M_0(N)$ детерминант $D_{CR}[h, k]$ модели на решётке согласуется с непрерывным детерминантом $D_{CC}[h, k]$ (рис. 2).

6. Заключение

В данной работе приведены результаты аналитических и численных исследований локальной киральной модели фермионов со вспомогательной частицей на двумерной конечной решётке. Показано, что как в однородном, так и в неоднородном внешних полях киральная модель на решётке при определённой зависимости массы вспомогательной частицы от числа узлов решётки согласуется с непрерывной теорией.

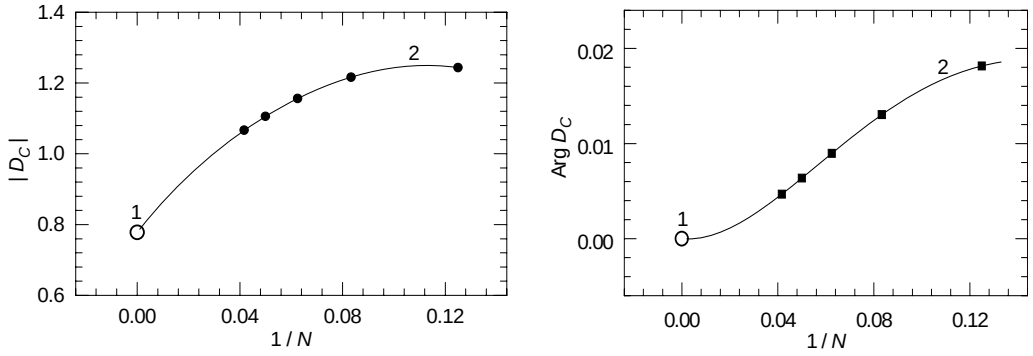

Рис. 2. Модули $| D_C |$ и аргументы Arg D_C киральных 11112 моделей в зависимости от $1 / N$ в неоднородном внешнем поле при $h_1 = 0.2$, $h_2 = 0.4$ и $k_1 = k_2 = 1$ [5]: 1 – $| D_{CC} |$ и Arg D_{CC} непрерывной модели; 2 – $| D_{CR} |$ и Arg D_{CR} модели на решётке при массе $M = M_0(N)$.

Полученные результаты целесообразно использовать при исследованиях моделей фермионов методом решётки.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Славнов, А.А., Фаддеев Л.Д.* Введение в квантовую теорию калибровочных полей. М. Наука. 1988. 272 с.
2. *Wilson, K.G.* Confinement of quarks // Phys. Rev. D. 1974. V. 10. P. 2445–2459.
3. *Borelli, A., Maiani L., Rossi G., Sisto R., Testa M.* Neutrions on the lattice. The regularization of a chiral gauge theory // Nucl. Phys. B. 1990. V. 333. P. 335–356.
4. *Frolov, S.A., Slavnov A.A.* Removing fermion doublers in chiral gauge theories on the lattice // Nucl. Phys. B. 1994. V. 411. P. 647–664.
5. *Зверев, Н.В.* Регуляризованные U(1) модели фермионов на решётке. М. «Прометей» МПГУ. 2004. 126 с.
6. *Narayanan, R., Neuberger H.* Anomaly free U(1) chiral gauge theories on a two dimensional torus // Nucl. Phys. B. 1996. V. 477. P. 521–548.

LOCAL MODEL OF CHIRAL FERMIONS WITH AUXILIARY PARTICLE IN THE DISCRETE SPACE-TIME

N. Zverev

Moscow Region State University
10a, Radio st., Moscow, 105005, Russia

Abstract. A local model of chiral fermions with auxiliary particle in the discrete space-time in two external fields (uniform and non-uniform) is considered. It is shown that at certain relation for the mass of the auxiliary particle, the model agrees with a continuum theory.
Keywords: chiral fermions, space-time lattice, local models.

ТЕХНОЛОГИИ И МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ

УДК 373.167

ТРЕБОВАНИЯ К ДОСТИЖЕНИЯМ УЧАЩИХСЯ ПРИ ИЗУЧЕНИИ МЕХАНИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ В КУРСЕ ФИЗИКИ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

С.А. Холина

Московский государственный областной университет
105005, Москва, ул. Радио, 10а

Аннотация. Рассмотрены результаты изучения механического движения в курсе физики основной школы. Значительное внимание уделено организации учебной деятельности учащихся при выполнении заданий: наблюдение и описание различных видов механического движения; измерение времени и расстояния; проведение опытов и экспериментальных исследований равномерного и равноускоренного движений.
Ключевые слова: механическое движение, курс физики основной школы, учебная деятельность, результаты обучения.

Образовательным стандартом предусмотрены основные виды деятельности на уровне учебных действий при изучении темы «Механическое движение: перемещение, скорость, ускорение»: наблюдение и описание различных видов механического движения; измерение времени и расстояния; проведение опытов и экспериментальных исследований по выполнению закономерностей пути от времени при равномерном и равноускоренном движении. Основное внимание при изучении главных понятий кинематики необходимо обратить на личностные, метапредметные и предметные результаты обучения.

К личностным результатам относится формирование ценностного отношения к физике. Данный результат при изучении механического движения достигается через развитие познавательных интересов к физическим методам познания явлений природы (эксперименту и моделированию) и математическим методам описания механического движения; формирование ценностного отношения к физике и результатам обучения.

Пример задания. *Наблюдая восход и заход Солнца, ученик записал: «Восход – 4ч 52 мин, заход – 22 ч и 04 мин». Относительно, какого тела отсчета рассматривается движение Солнца в данном случае?*

Понимание различия между телом и материальной точкой, телом отсчета и системой отсчета относится к метапредметным результатам обучения темы «Механическое движение: перемещение, скорость, ускорение». Важно познакомить учащихся со способами действий при определении положения тела в выбранной системе отсчёта. Это предполагает формирование у учащихся умений связать начало оси с телом отсчёта, выбрать положительное направление оси, изобразить положение тела, указать направ-

ление векторов скорости, ускорения, перемещения, анализировать движение тела (материальной точки).

Пример задания. *Автомобиль движется из состояния покоя прямолинейно с постоянным ускорением, модуль которого равен 3 м/с^2, в течение 5 с. Найдите модуль перемещения автомобиля. Выберите систему отсчета, изобразите её на рисунке и укажите направления векторов перемещения и ускорения.*

Достижение предметных результатов обучения темы предполагает знание учащимися объектов изучения механики – механическое движение, относительность механического движения, физическое тело, путь, перемещение, скорость, ускорение. Кроме этого, учащиеся овладевают экспериментальным методом исследования равномерного и равноускоренного движения из состояния покоя; применяют скорость, ускорение, перемещение при решении простейших задач. Решение основной задачи механики для простейших случаев равномерного прямолинейного движения и прямолинейного равноускоренного движения из состояния покоя, также относится к предметным результатам обучения, но более высокого уровня [2].

Пример задания. *Уравнение для координаты тела при прямолинейном равноускоренном движении имеет вид:* $x = 10 + 3t^2$, *где все величины выражены в единицах СИ. Найдите координату тела в начальный момент времени.*

При формировании понятий о механическом движении и системе отсчета, траектории движения, пути учащиеся осваивают определенные способы действий. С помощью экспериментальной установки, состоящей из игрушечного автомобиля, указателей и «пассажиров» учащиеся наблюдают относительность механического движения. Демонстрируя криволинейное движение металлического шарика по наклонной плоскости, с помощью копировальной бумаги фиксируют форму траектории. На опытах показывают относительность траектории движения кусочка мела относительно классной доски. Используя метод моделирования при анализе примеров одномерного движения материальной точки вдоль координатной оси, фиксируется изменение положения тела (например, мяча) и формируются способы действий по изображению системы координат, выбору тела отсчёта и связи его с системой координат. Кроме этого, при решении задач используют координатный метод для изучения одномерного движения.

Пример задания. *В произведении Марка Твена «Приключения Гекльберри Финна» описывается случай, происшедший с Геком на реке Миссисипи ночью во время тумана: «Меня, разумеется. Уносило вниз по течению со скоростью четыре-пять миль в час, но этого, обыкновенно, не замечаешь, напротив, кажется, будто лодка стоит в воде неподвижно; а если мелькнет мимо коряга, то даже дух захватывает, думаешь: вот здорово летит коряга! А что сам летишь, это в голову не приходит». Назовите тело отсчета, относительно которого рассматривается движение лодки и коряги в этом отрывке.*

Изучение новой физической величины перемещения важно начать с рассмотрения основной задачи механики. Определить положения тела в любой момент времени можно, зная перемещение и начальное положение тела. Перемещение векторная величина. На примере одномерного движения материальной точки вводится понятие проекции физической величины, которая может быть как положительной, так и отрицательной.

Пример задания. *Изменение координаты тела при прямолинейном движении равно:* $\Delta x = 10 м$. *Найдите проекцию вектора перемещения на данную ось.*

Используя пример из учебника [3] вводится понятие равномерного прямолинейного движения как движения, при котором тело за любые равные промежутки времени тело (материальная точка) совершает одинаковые перемещения. Учащиеся при выполнении заданий осваивают способы действий при вычислении модуля скорости, перемещения, путь при равномерном прямолинейном движении тела и учатся выражать единицы этих величин в СИ. Также важно сформировать умение представлять результаты измерений и вычислений в виде таблиц и графиков.

Пример задания. *По прямолинейному участку шоссе равномерно движется автомобиль со скоростью, модуль которой равен 36 км/ч. Выразите эту скорость в единицах СИ. Найдите модуль перемещения автомобиля за 10 с.*

Нахождение положения тела в любой момент времени при равномерном прямолинейном движении по заданной начальной координате и проекции скорости имеет большое практическое значение. На примере решения задачи вводится уравнение для координаты тела при равномерном прямолинейном движении. В ней рассматривается изменение положения легкового автомобиля ($x - x_0$), которое равно проекции перемещения s_x. По заданному перемещению тела и промежутку времени, в течении которого он движется, находят выражение для проекции скорости υ_x на ось *OX* автомобиля за 1 с. Анализ графиков зависимости модуля перемещения тела от времени, модуля скорости движения тела от времени при равномерном прямолинейном движении показывает, что проекция скорости равномерного прямолинейного движения υ_x может иметь как положительные так и отрицательные значения.

Пример задания. *Уравнения для координат тел имеют вид:* $x = 1 + 2t$ *и* $x = 1 - 3t$, *где x выражено в м, t – в с. Найдите значения проекций скорости движения тел на ось X. Движение тел считать прямолинейным и равномерным.*

На примере неравномерного движения автобуса по прямолинейному участку шоссе раскрывается физический смысл средней скорости. В случае неравномерного движения говорить о какой-либо определенной скорости не имеет смысла. Из анализа движения тела по криволинейной траектории можно записать выражение для модуля средней скорости. Внимание учащихся обращается на то, что в технике чаще всего используется средняя путевая скорость, которая является скалярной величиной. В физике средняя скорость – векторная величина. Модуль средней скорости равен отношению модуля перемещения к промежутку времени, за которое оно произошло. Из опыта с вращающимся точильным камнем делают вывод о направлении средней скорости. Учащиеся узнают, что при криволинейном движении скорость в любой точке траектории направлена по касательной к кривой в этой точке.

Пример задания. *Мальчик идет по прямолинейному участку шоссе. За 1 ч он прошел 5 км, за последующие 0,2 ч – 2 км. Определите среднюю скорость движения мальчика.*

При рассмотрении движения тела за «малый промежуток» времени, в пределах которого изменение скорости перестает фиксировать прибор, например, спидометр, вводится понятие мгновенной скорости. При этом движение будет мало отличаться от рав-

номерного прямолинейного. Отмечается, что мгновенная скорость векторная величина и при прямолинейном движении вектор мгновенной скорости в любой точке траектории направлен по касательной к кривой в этой точке.

Пример задания. *Спутник при движении вокруг Земли описывает окружность. Как при этом направлена мгновенная скорость движения спутника в любой точке ее траектории?*

В основу изложения учебного материала по теме «Свободное падение. Равноускоренное движение» естественнонаучный метод - метод Галилея. Учащиеся знакомятся с его основными этапами: факты → эмпирическая модель → выводы → эксперимент. Используя данный метод, учащиеся наблюдают свободное падение тела и анализируют стробоскопическую запись его движения. Для проведения опыта используется толстостенная трубка Ньютона. Внутри трубки находятся несколько разных тел. Если с помощью насоса удалить воздух из трубки, то все тела, находящиеся в трубке, падают одновременно. Такое движение называют свободным падением. На примере свободного падения вводится определение равноускоренного движения, которое затем распространяется на движение шарика по наклонной плоскости, а также на движения других тел. Анализируя стробоскопическую запись свободного падения шарика, учащиеся делают вывод, что за каждый последующий промежуток времени скорость движения шарика увеличивается. При решении задач формируются способы действий учащихся, необходимые для чтения и построения графиков зависимости модуля скорости от времени при равноускоренном прямолинейном движении тела.

Пример задания. *В таблице приведены значения проекций скорости движения тела на ось X через равные промежутки времени при прямолинейном равноускоренном движении. Запишите в таблицу недостающие данные.*

$\upsilon_x, м/с$	0	2		6		10
t, c	0	1	2	3	4	

По данным таблицы постройте график зависимости проекции скорости движения тела от времени.

Понятие ускорения вводится по определенной схеме, отражающей следующие способы действий учащихся: наблюдение и описание механических явлений, интерпретация и преобразование информации о физической величине, вывод. Ускорение - векторная физическая величина $\bar{a}$, характеризующая быстроту изменения скорости. Из формулы определения ускорения – величины, равной отношению изменения скорости к промежутку времени, в течение которого это изменение произошло, учащиеся формулируют ее физический смысл и единицу измерения в СИ.

Пример задания. *Велосипедист проезжает по прямолинейному участку шоссе со скоростью, модуль которой равен 3 км/ч. Далее он движется равноускоренно и через 30 с приобретает скорость, модуль которой равен 12 км/ч. Найдите модуль ускорения велосипедиста.*

Далее на примерах равноускоренных прямолинейных движений автомобиля, скорость которого с течением времени увеличивается или уменьшается, показывается, что

изменение скорости является положительной или отрицательной величиной соответственно, а значит и ускорение также может быть как положительная величина, так и отрицательная. Полученные результаты являются проекцией ускорения:

$$a_x = \frac{\upsilon_x - \upsilon_{0x}}{t}.$$

В первом случае проекция ускорения – положительная величина, значит, вектор ускорения совпадает с направлением оси *OX*, во втором - направлен в сторону, противоположную направлению оси *OX*.

Из формулы проекции ускорения учащиеся определяют проекцию скорости равноускоренного движения в любой момент времени:

$$\upsilon_x = \upsilon_{0x} + a_x t.$$

Закрепление изученного материала осуществляется при выполнении заданий и упражнений, при выполнении которых учащиеся отрабатывают следующие способы действий:

- находить модуль ускорения тела по изменению скорости его движения за данный промежуток времени, проекцию ускорения тела при равноускоренном прямолинейном движении, проекцию скорости равноускоренного прямолинейного движения тела по известной проекции его начальной скорости и проекции ускорения;
- указывать направление вектора ускорения при равноускоренном прямолинейном движении тела.

Пример задания. *Тело при прямолинейном равноускоренном движении имеет начальную скорость* $\upsilon_{0x} = 15 м/с$ *и ускорение* $a_x = -2 м/с^2$. *Запишите уравнение для проекции скорости движения тела.*

Одним из сложных способов действий является нахождение проекции перемещения тела по уравнению равноускоренного прямолинейного движения. Выражение для проекции перемещения при равноускоренном прямолинейном движении тела из состояния покоя можно получить на основе формулы определения проекции средней скорости

$$(\upsilon_{ср})_x = \frac{s_x}{t},$$

т.е.

$$s_x = (\upsilon_{ср})_x t.$$

Необходимо при этом учитывать, что при равноускоренном движении средняя скорость равна среднему арифметическому значению модулей начальной и конечной скоростей

$$\upsilon_{ср} = \frac{\upsilon_0 + \upsilon}{2}.$$

Такой вывод следует из анализа примера равноускоренного движения шарика из состояния покоя по наклонной плоскости. Среднюю скорость движения шарика можно выразить выражают двумя формулами:

$$1)\ \upsilon_{ср} = \frac{\upsilon_0 + \upsilon}{2};\ 2)\ \upsilon_{ср} = \frac{s}{t}.$$

Сравнивая обе формулы показывают учащимся, что значения средней скорости в обоих случаях равны.

Выражение для определения проекции перемещения тела для случая, когда $\upsilon_{0x} = 0$ имеет вид:

$$s_x = \frac{\upsilon_x t}{2} = \frac{a_x t^2}{2}.$$

С учётом начальной координаты тела и начальной скорости равноускоренного прямолинейного движения данное выражение можно преобразовать:

$$x = x_0 + \upsilon_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}.$$

Последняя формула представляет собой уравнение зависимости координаты тела от времени при равноускоренном движении. Учащиеся узнают, что с его помощью можно решить основную задачу механики.

Пример задания. *Грузовой автомобиль начал движение по прямолинейному участку шоссе с ускорением 2 м/с^2. Время равноускоренного движения автомобиля составляет 30 с. На какое расстояние переместится автомобиль за это время?*

Уровень усвоения учащимися учебного материала и способов действий при изучении механического движения можно фиксировать с помощью результатов выполнения контрольной работы [1]. Задания контрольной работы проверяют учебные достижения учащихся на четырех уровнях. В контрольной работе представлены задания разного уровня. Задания первого уровня проверяют умение запомнить и воспроизвести изученный материал (1 балл); второго уровня - понимать, преобразовывать, сравнивать изученное (2 балла); третьего уровня - применять знания в знакомой ситуации (3 балла); четвертого - применять знания в измененной ситуации (4 балла).

Учитывая результаты исследований по психологии, а также опыт работы ряда учителей для данной работы можно предложить следующую шкалу оценки результатов выполнения. Максимальное число баллов за выполненную работу составляет 30. При этом необходимо учитывать, что задание со «звездочкой» является не обязательной для выполнения. Если ученик выполнил не менее 60% (19 - 22 баллов) заданий, то он получает оценку «3». Оценка «4» ставится за выполнение не менее 75% (23 - 26 баллов) заданий, оценка «5» - за 90% (27-30 баллов) заданий.

Контрольная работа состоит из трех частей. Первая часть содержит задания с выбором ответа, вторая – вопросы, третья – задачи. Ниже приведено содержание учебных достижений учащихся, отражающих освоение определенных способов действий уча-

щихся при изучении темы «Механическое движение: перемещение, скорость, ускорение»:

- знание объектов изучения механики – механическое движение, физическое тело;
- знание и понимание смысла физических величин: путь, перемещение, скорость, ускорение;
- умение изображать систему координат, выбирать тело отсчёта и связывать его с системой координат, представлять результаты измерений и вычислений в виде таблиц и графиков;
- использование физических методов, анализа функциональных связей между физическими величинами, характеризующими механическое движение тел, обобщения сведений о механическом движении тел на основе идеи относительности;
- умение пользоваться экспериментальным методом исследования равномерного и равноускоренного движения тела из состояния покоя.

Экспериментальная работа по учебному комплекту [1-3] проводится кафедрой методики преподавания физики Московского государственного областного университета совместно с учителями физики школ Московской, Оренбургской, Астраханской, Нижегородской областей и др.

ЛИТЕРАТУРА

1. Физика: 7 класс: рабочая тетрадь № 1 для учащихся общеобразовательных учреждений/[Хижнякова Л.С., Синявина А.А., Холина С.А. и др.] –М.: Вентана-Граф, 2010. -80с.
2. Физика. Рабочие программы учителя/Л.С. Хижнякова, А.А. Синявина, С.А. Холина. – М.: Вентана- Граф, 2010. – 112 с
3. *Хижнякова, Л.С., Синявина А.А.* Физика: 7 класс: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений. – М.: Вентана-Граф, 2010. -208 с.

THE REQUIREMENTS TO ACHIEVEMENT OF THE PUPILS AT STUDY OF MECHANICAL MOVEMENT IN A RATE OF PHYSICS OF THE BASIC SCHOOL

S. Kholina

Moscow Region State University
10a, Radio st., Moscow, 105005, Russia

Abstract. Results of studying of mechanical movement at the basic school are considered. The significant attention is given organizations of educational activity of the pupils at performance of the tasks: supervision and description of various kinds of mechanical movement; measurement of time and distance; realization of experiences and experimental researches uniform and равноускоренного of movements.

Key words: mechanical movement, rate of physics of the basic school, educational activity, results of training.

УДК 681.3.07

ПРИМЕНЕНИЕ РЕФЛЕКСИВНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Н.В. Ефимова

Московский государственный областной университет
105005, Москва, ул.Радио, д.10а

Аннотация. В статье рассматривается одна из проблем теории и практики обучения решению математических задач, связанная с заключительным этапом решения – с её исследованием, развитием, преобразованием. Отмечается необходимость перехода от математической задачи к учебной, а также рассматривается исследование задачи как средство этого перехода.
Ключевые слова: Рефлексивное исследование, математическая задача, сущность решения задачи, развитие задачи.

Одним из средств, позволяющим достигнуть высокого уровня математической подготовки учащихся, является деятельность по решению математических задач, как по алгебре, так и по геометрии. В современной теории обучения решению задач недостаточно выделено и актуализировано рефлексивное исследование неопределенных задач (РИНЗ), обучение которому, несомненно, могло бы повысить интерес к предмету и уровень математической подготовки учащихся. Обучение РИНЗ предполагает деятельностное понимание процесса обучения. Деятельностный подход в обучении РИНЗ означает, прежде всего, обучение школьников *самостоятельно* осмысливать свою учебную деятельность, свой субъектный опыт в процессе работы над математическими задачами.

В низкой эффективности сложившейся системы обучения решению задач можно выделить две основные причины. Первая причина является чисто психической. Массовые исследования показали, что основными мотивами решения задач учащимися являются внешние мотивы избегания неудачи (чтобы не ругали родители и учителя), оценки, благополучия или престижа. Исследователи и педагоги-практики [1], [2], [3], [4], отмечают, что у подавляющего большинства учащихся решение задач не вызывает большого интереса, они пассивно относятся тому процессу и многие из них предпочитают списывать с доски или у товарища. Во многом характер учебной мотивации зависит от организации процесса обучения решению задач, существующая организация не способствует формованию глубокого внутреннего интереса к процессу решения задач у большинства учащихся.

Вторая причина неудач в обучении решению задач заключается в том, что решение задач есть сложная умственная деятельность. Для того, чтобы сознательно овладеть ею, надо, во-первых, иметь ясное представление о ее объектах и сущности, во-вторых, предварительно овладеть теми элементарными действиями и операциями, из которых состоит эта деятельность, и, наконец, в-третьих, знать основные методы ее выполнения и уметь ими пользоваться.

А как же научить учащихся сознательно подходить к поиску решения задачи, осмысливать свои действия по решению, знать методы решения типовых задач? Покажем это на примере рефлексивного исследования известной задачи:

ЗАДАЧА. Что больше $\log_4 3$ *или* $\log_3 4$?

Ученик, отвечающий за разбор задачи, мог подготовить следующий презентационный слайд:

1) $81 > 64 \;\rightarrow\; \log_4 84 > \log_4 64 \;\rightarrow\; 4\log_4 3 > 3 \;\rightarrow\; \log_4 3 > \frac{3}{4}$,

2) $16 > 27 \;\rightarrow\; \log_3 16 > \log_3 27 \;\rightarrow\; 4\log_3 2 < 3 \;\rightarrow\; \log_3 2 < \frac{3}{4}$,

$$\begin{cases} \log_4 3 > \frac{3}{4} \\ \log_3 2 < \frac{3}{4} \end{cases} \rightarrow \log_4 3 > \log_3 2 \ .$$

Вообще, с математической точки зрения это решение безупречно, но если не продолжить исследование задачи, то обучающий эффект проверки будет крайне низок, т.к. запись не отражает сам поиск решения. Здесь будут уместны следующие рефлексивные вопросы ученику и классу:

1) Какова основная идея решения?

– Чтобы сравнить два числа, можно сравнить их с третьим числом и показать, что одно из них больше этого третьего числа, а второе – меньше.

2) Как догадаться, что сравнивать логарифмы надо с числом $\frac{3}{4}$, и как прийти к числам 81 и 64, 16 и 27?

– Можно увидеть, что оба логарифма принадлежат отрезку [0; 1], а затем взять середину этого отрезка и сравнивать логарифмы с числом $\frac{1}{2}$. Окажется, что оба логарифма больше $\frac{1}{2}$, значит, они принадлежат отрезку $[\frac{1}{2}; 1]$. (Здесь уместен вопрос классу):

3) Что дальше?

– Надо сравнить логарифмы с числом $\frac{3}{4}$, т.к. это середина отрезка $[\frac{1}{2}; 1]$.

4) Как это сделать?

– Ученик делает следующие записи на доске, группируя эти записи и объясняя их:

$\log_4 3$ и $\frac{3}{4}$	$\log_3 2$ и $\frac{3}{4}$
$4\log_4 3$ и 3	$4\log_3 2$ и 3
$\log_4 81$ и $\log_4 64$	$\log_3 16$ и $\log_3 27$
$81>64$	$16<27$
$\log_4 3 > \frac{3}{4}$	$\log_3 2 < \frac{3}{4}$

Сравнивать логарифмы с числом $\frac{1}{2}$ нужно аналогичным образом. Во время обсуждения этой задачи еще раз сопоставляется ее решение с самим поиском решения. На

этом поисковый этап работы над задачей может быть завершен. Учитель переходит к исследовательскому этапу, в ходе которого ученикам могут быть заданы следующие вопросы:

5) Как ты решал задачу? Сразу ли догадался сравнивать логарифмы с третьим числом?

– Нет. Сначала я пользовался формулой перехода $\log_3 2 = \dfrac{\log_4 2}{\log_4 3} = \dfrac{1}{2\log_4 3}$ и пришел к задаче: сравнить $2\log_4 3$ и 1.

6) Теперь можно решить эту задачу?

– Да, конечно, $2\log_4 3 > 1$.

7) Как с развитием задачи?

– я пытался обобщить задачу, доказать неравенство

$$\log_{n+1} n > \log_n (n-1) \qquad (1)$$

Далее, если никто из учеников не доказал неравенство (1), учитель продолжает *эвристическую беседу*, при этом методика задавания вопросов соответствует стратегии «от сложного к простому».

Как было сказано выше, рефлексивное исследование неопределенной задачи рассматривается нами в качестве некоторого механизма или нормы учебной деятельности, переводящей конкретную задачу, решаемую учеником, в задачу для него учебную. В этой связи вначале важно *сопоставить понятия конкретной (частной) задачи и учебной.* По мнению В.В. Давыдова и Д.Б. Эльконина, решение учебной задачи направлено на усвоение школьниками обобщённых способов предметных действий. Усвоение именно таких способов служит *основой изменения самого субъекта* учебной деятельности, т.е. приобретение школьником новых способностей, что благоприятствует их психическому развитию.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Розов Н.Х.* Академик А.Н. Колмогоров и проблема изучения индивидуальных особенностей психологии творчества. //Математика в школе. – 1991. №2. –С.9-10
2. *Рубинштейн С.Л.* Учение. Теории учения. /Хрестоматия. Ч.1. Отечественные теории учения. – 1996. –С. 21-27
3. *Столяр А.А.* Педагогика математики. – Высшая школа. – 1986. – 415 с.
4. *Стратилатов П.В.* О системе работы учителя математики с методическими рекомендациями по организации учебного процесса. – М., просвещение. – 1984. – 96 с.

THE USE OF THE REFLEX STUDYING IN THE PROCESS OF SOLVING MATHEMATICS SUMS INSTRUCTIONS

N. Efimova

Moscow Region State University
10a, Radio st., Moscow, 105005, Russia

Abstract. One of the problem's solving mathematics sums instruction practice and theory is considered in this article (the final stage – studying, development, transformation). It drawns attention to need to proceed from the mathematics sum to the teaching and studying sum as the mean of this proceed.
Key words. Reflex studying, mathematics sum, essence of the sum solve, development of the sum.

НАШИ АВТОРЫ

Акимова В.А., Московский государственный областной университет,105005, Москва, ул. Радио, д. 10 а; e-mail: kaf-matan@mgou.ru

Беляев В.В., доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической физики Московского государственного областного университета,105005, Москва, ул. Радио, д. 10 а; e-mail: vic_belyaev@mail.ru

Голов А.Н., кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической физики Московского государственного областного университета,105005, Москва, ул. Радио, д. 10 а; e-mail: kaf-tfiz@mgou.ru

Евсеев И.В., Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»,115409, Москва, Каширское ш., д. 31

Ефимова Н.В., Московский государственный областной университет,105005, Москва, ул. Радио, д. 10 а

Зверев Н.В., кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретичекой физики Московского государственного областного университета,105005, Москва, ул. Радио, д. 10 а; e-mail: kaf-tfiz@mgou.ru

Зудина М.Н., Московский государственный областной университет,105005, Москва, ул. Радио, д. 10 а; e-mail: kaf-tfiz@mgou.ru

Козенков В.М., Московский государственный областной университет, 105005, Москва, ул. Радио, д. 10 а; e-mail: kaf-tfiz@mgou.ru

Кузнецов М.М., доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической физики Московского государственного областного университета,105005, Москва, ул. Радио, д. 10 а; e-mail: kaf-tfiz@mgou.ru

Кулешова Ю.Д., Московский государственный областной университет, 105005, Москва, ул. Радио, д. 10 а; e-mail: kaf-tfiz@mgou.ru

Латышев А.В., доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа и геометрии, 105005, Москва, ул. Радио, д. 10 а; e-mail: kaf-matan@mgou.ru, avlatyshev@mail.ru

Макаренков Д.А., кандидат технических наук, ФГУП «ИРЕА», 107076, Москва, Богородский вал, 3; e-mail: irealp@rambler.ru

Максимова О.В., кандидат технических наук, доцент кафедры проектирования и технологии электронных средств Ульяновского государственного технического университета,432027, Ульяновск, ул. Северный Венец, д. 32; e-mail: first32007@yandex.ru,

Матвеев О.А., кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа и геометрии Московского государственного областного университета, 105005, Москва, ул. Радио, д. 10 а; e-mail: veyevtam@mail.ru

Назаров В.И., кандидат технических наук, доцент Московкого государственного университета инженерной экологии, 105066, Москва, ул. Старая Басманная, д. 21/4; тел. 8(495) 953-83-35, 8-916-136-12-55

Нелаев А.В., кандидат физико-математических наук, Московский государственный областной университет, 105005, Москва, ул. Радио, д. 10 а; e-mail: fakul-fm@mgou.ru

Попов Е.Н., Тольяттинский государственный университет, 445667, Тольятти, ул. Белорусская, д. 14

Решетов В.А., Тольяттинский государственный университет, 445667, Тольятти, ул. Белорусская, д. 14

Самохвалов М.К., доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой проектирования и технологии электронных средств Ульяновского государственного технического университета, e-mail: sam@ulstu.ru.

Смотрова Л.В., аспирант кафедры теоретической физики Московского государственного областного университета, 105005, Москва, ул. Радио, д. 10 а; e-mail: kaf-tfiz@mgou.ru

Соколюк Н. Т., Московский государственный областной университет, 105005, Москва, ул. Радио, д. 10 а; e-mail: kaf-tfiz@mgou.ru

Солдатенков Р.М., кандидат педагогических наук, доцент кафедры высшей алгебры, элементарной математики и методики преподавания математики Московского государственного областного университета, 105005, Москва, ул. Радио, д. 10 а

Соловьев В.В., кандидат физико-математических наук, доцент Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ», 115409, Москва, Каширское ш., д. 31; e-mail: soloviev.vyacheslav@gmail.com.

Спахов А.А., Московский государственный областной университет, 105005, Москва, ул. Радио, д. 10 а; e-mail: kaf-tfiz@mgou.ru

Тумовский Г.Д., Московский государственный областной университет, 105005, Москва, ул. Радио, д. 10 а; e-mail: kaf-tfiz@mgou.ru

Холина С.А., кандидат педагогических наук, доцент кафедры методики преподавания физики Московского государственного областного университета, 105005, Москва, ул. Радио, д. 10 а

Цикунов В.Н., Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»,115409, Москва, Каширское ш., д. 31

Цукарева З.Н., аспирант кафедры математического анализа и геометрии Московского государственного областного университета, 105005, Москва, ул. Радио, д. 10 а; e-mail: zoyatsukareva@gmail.com

Юшканов А.А., доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической физики, 105005, Москва, ул. Радио, д. 10 а; e-mail: kaf-tfiz@mgou.ru

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Нелаев А.В. Обобщенные условия Коши-Римана ассоциированного с бикругом интеграла ….……. 3
Матвеев О.А., Солдатенков Р.М. Алгебраическая модель вещественной проективной прямой ..……..... 12
Цукарева З.Н. Слабая обобщенная локализация для кратных рядов Фурье с лакунарной последовательностью частичных сумм в классах Орлича ..……. 18
Соловьев В.В. О разрешимости обратных коэффициентных задач для параболического уравнения ..……..…….. 23
Соловьев В.В. Разрешимость обратных задач для эллиптического уравнения в цилиндре ..……..... 27

ФИЗИКА

Голов А.Н., Зудина М.Н. Кинетика вихревых движений газоподобной среды в постоянном потенциальном поле ……..... 39
Голов А.Н., Кузнецов М.М., Смотрова Л.В. К теории фотоориетации и фотоанизотропии при поляризации и ударном сжатии диэлектриков …..…… 44
Кузнецов М.М., Кулешова Ю.Д., Смотрова Л.В. Теоремы о максимуме относительного высокоскоростного «перехлеста» в бимодальной ударной волне ..…… 53
Акимова В.А., Латышев А.В., Юшканов А.А. К теории поведения разреженного газа над колеблющейся поверхностью ……. 58
Решетов В.А., Попов Е.Н., Цикунов В.Н., Евсеев И.В. Столкновительное эхо при эллиптической поляризации возбуждающих импульсов ..…….. 71
Максимова О.В., Самохвалов М.К. Математическое обеспечение САПР тонколенточных электролюминисцентных индикаторов при решении задач синтеза конструкций . 77
Максимова О.В., Самохвалов М.К. Исследование влияния конструктивных параметров тонколенточных электролюминисцентных индикаторов на режимы их работы для формирования математического обеспечения САПР ……..……... 85
Макаренков Д.А., Назаров В.И. Исследование процессов гранулирования комплексных удобрений с учетом физико-химических и реологических свойств компонентов …… 93
Козенков В.М., Соколюк Н.Т., Беляев В.В., Спахов А.А., Тумовский Г.Д. Оптические свойства фотохромных материалов на основе 6-фенокси 5,12-нафтаценхинонов …… 99
Зверев Н.В. Локальная модель киральных фермионов со вспомогательной частицей в дискретном пространстве-времени ….…… 108

ТЕХНОЛОГИИ И МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ

Холина С.А. Требования к достижениям учащихся при изучении механического движения в курсе физики основной школы ……..……. 115
Ефимова Н.В. Применение рефлексивного исследования в процессе обучения решению математических задач …..…….. 122

НАШИ АВТОРЫ ……..…….. 126

CONTENTS

MATHEMATICS

Nelayev A. The generalized Cauchy-Riemann conditions associated with bicircle integral ……..... 3
Matveyev O., Soldatenkov R. The algebraic model of the real projective line …… 12
Tsukareva Z. Weak generalized localization for multiple Fourier series with lacunary sequences of partial sums in Orlicz spaces ……..…… 18
Soloviev V. Desidability of inverse problems for parabolic equation …….. 23
Soloviev V. Desidability of inverse problems for the elliptic equation in the cylinder .. 27

PHYSICS

Golov A., Zudina M. The kinetics of the vortex motion of the gas-liked medium in the constant potential field ..…… 39
Golov A., Kuznetsov M., Smotrova L. On the theory of the photo-orientation and photo-anisotropy under polarization and shock compression of the dielectrics …..…… 44
Kuznetsov M., Kuleshova Ju., Smotrova L. Theorems on maximum of relative high velocity "overshoot" in bimodal shock wave …… 53
Akimova V., Latyshev A., Yushkanov A. To the theory of behaviour rarefied gas ver the fluctuating surface ……..……. 58
Reshetov V., Popov E., Tsikunov V., Yevseyev I. Collision-induced echo at the elliptical polarization of excitation pulses …… 71
Maksimova O., Samokhvalov M. The mathematical tools for solving the synthesis problem of CAD thin film electroluminescence indicator 77
……
Maksimova O., Samokhvalov M. The investigation of the effect of design parameters of thin film electroluminescent indicators of modes of operation for the development of software of the CAD system ……. 85
Makarenkov D., Nazarov V. Complex fertilizers pelletising investigation *VS* components physical and rheological properties ……. 93
Kozenkov V., Sokolyuk N., Belyaev V., Spakhov A., Tumovskii G. Optical properties of 6-phenoxy 5,12-naphtacenequinone photochromic materials …… 99
Zverev N. Local model of chiral fermions with auxiliary particle in the discrete space-time ……... 108

TECHNOLOGIES AND TECHNIQUES OF TRAINING

Kholina S. The requirements to achievement of the pupils at study of mechanical movement in a rate of physics of the basic school …… 115
Efimova N. The use of the reflex studying in the process of solving mathematics sums instructions …… 122

OUR AUTHORS ……..…… 126

УДК 517.55

Обобщенные условия Коши-Римана ассоциированного с бикругом интеграла / А.В. Нелаев // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2012. №1. С.3-11.

Продолжено начатое автором исследование обобщенно-аналитических свойств обобщения интеграла типа Коши, ассоциированного с бикругом.

Библиогр.2.

УДК 514.7, 512.5

Алгебраическая модель вещественной проективной прямой / О.А. Матвеев, Р.М. Солдатенков // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2012. №1. С.12-17.

Вводится в рассмотрение алгебраическая аксиоматика проективной прямой над полем действительных чисел. Проективная прямая рассматривается как универсальная алгебра с двупараметрическим семейством тернарных операций, связанных определёнными тождествами. В построенной модели проективной прямой выводятся формулы преобразования координат.

Библиогр.13.

УДК 517.5

Слабая обобщенная локализация для кратных рядов Фурье с лакунарной последовательностью частичных сумм в классах Орлича / З.Н. Цукарева // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2012. №1. С.18-22.

В настоящей работе рассматривается поведение прямоугольных частичных сумм $S_n(x;f)$, $x \in \mathrm{T}^N = [-\pi,\pi]^N$, $n = (n_1,...,n_N) \in \mathbb{N}^N$, кратного тригонометрического ряда Фурье функций f из классов Орлича $\Phi(L)(\mathrm{T}^N)$ (где неубывающая функция $\Phi:[0,\infty)\to[0,\infty)$, $\Phi(u) = \overline{o}(u\ln^+\ln^+ u)$ при $u\to\infty$) в случае, когда некоторые из компонент n_j вектора n являются элементами (однократных) лакунарных последовательностей.

Библиогр.7.

УДК 517.95

О разрешимости обратных коэффициентных задач для параболического уравнения / В.В. Соловьев // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2012. №1. С.23-27.

Приведена формулировка теоремы единственности для обратной задачи определения правой части параболического уравнения с переопределением на верхней крышке

в случае первой краевой задачи. Сформулированы теоремы существования и единственности для обратной задачи определения коэффициента в параболическом уравнении. Приведены примеры функций удовлетворяющих всем условиям теоремы существования и единственности.

Библиогр.2.

УДК 517.95

Разрешимость обратных задач для эллиптического уравнения в цилиндре / В.В. Соловьев // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2012. №1. С.27-38.

Приведены формулировки теорем единственности и существования для обратной задачи определения коэффициента эллиптического уравнения в цилиндре с переопределением на многообразии внутри цилиндра в случае первой краевой задачи. Сформулированы теоремы существования и единственности для обратной задачи определения коэффициента и правой части в эллиптическом уравнении в случае переопределения на верхней крышке цилиндра, а также рассмотрена аналогичная задача в области специального вида. Приведены примеры функций удовлетворяющих всем условиям теоремы существования и единственности.

Библиогр.3.

УДК.533.72.

Кинетика вихревых движений газоподобной среды в постоянном потенциальном поле / А.Н. Голов, М.Н. Зудина // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2012. №1. С.39-44.

Рассмотрено выражение плотности потока вещества в нестационарной газоподобной системе многих частиц с учётом непотенциального слагаемого. Получены аналитические выражения компонент вихря плотности потока. Дан анализ и графическое представление полученных формул.

Ил.5. Библиогр.5.

УДК.533.72

К теории фотоориетации и фотоанизотропии при поляризации и ударном сжатии диэлектриков / А.Н. Голов, М.М. Кузнецов, Л.В. Смотрова // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2012. №1. С.44-53.

Предложена модель, описывающая фотоориентацию и фотоанизотропию в поляризуемых конденсированных средах. Для случая нестационарной поляризации среды проведено усреднение по фазе быстро меняющихся микроскопических величин. Зависимость от времени макроскопических характеристик среды предложено объяснить изменением концентрации диполей. Рассмотрено влияние нагрева образца в процессе

освещения на рассматриваемые явления. Получены формулы для показателя преломления и характеристики двулучепреломления. В качестве примера рассмотрено также возможное применение теории к исследованию оптических свойств ударно сжатых конденсированных веществ.

Ил.5. Библиогр.11.

УДК 533.6.011

Теоремы о максимуме относительного высокоскоростного «перехлеста» в бимодальной ударной волне / М.М. Кузнецов, Ю.Д. Кулешова, Л.В. Смотрова // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2012. №1. С.53-57.

Доказаны две теоремы о максимуме относительной величины высокоскоростного «перехлёста» в гиперзвуковой ударной волне. Рассмотрен однокомпонентный газ с внутренними степенями свободы, описываемый бимодальным распределением Тамма-Мотт-Смита. Максимум достигается как по координате вдоль потока в ударной волне, так и по величине относительной скорости молекул.

Табл.1. Библиогр.3.

УДК 533.72

К теории поведения разреженного газа над колеблющейся поверхностью / В.А. Акимова, А.В. Латышев, А.А. Юшканов // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2012. №1. С.58-70.

Пусть разреженный газ занимает полупространство $x > 0$ над твердой плоской пластиной. Предполагается, что эта пластина совершает в своей плоскости гармонические колебания вдоль оси y. Вторая задача Стокса состоит в решении кинетического уравнения Больцмана, описывающего поведение разреженного газа. В работе строится аналитическое решение модельного кинетического уравнения в предположении диффузного отражения молекул от пластины. Находится функция распределения газовых молекул и строится массовая скорость газа в полупространстве. Находится значение массовой скорости непосредственно у стенки.

Библиогр.25.

УДК 535.21

Столкновительное эхо при эллиптической поляризации возбуждающих импульсов / В. А. Решетов, Е. Н. Попов, В. Н. Цикунов, И. В. Евсеев // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2012. №1. С.71-77.

В работе получены выражения для амплитуды и поляризации сигнала столкновительного фотонного эха на переходе $0 \leftrightarrow 1$ в парах иттербия при его формировании двумя лазерными импульсами со взаимно ортогональными эллиптическими поляриза-

циями. Показано, что интенсивность сигнала столкновительного эха обращается в ноль при круговых ортогональных поляризациях возбуждающих лазерных импульсов и достигает максимального значения при их линейных взаимно перпендикулярных поляризациях.

Все поляризационные и временные свойства сигнала столкновительного эха получены в рамках модели упругих деполяризующих столкновений между атомами газа.

Библиогр.7.

УДК 621.382

Математическое обеспечение САПР тонколенточных электролюминисцентных индикаторов при решении задач синтеза конструкций / О.В. Максимова, М.К. Самохвалов // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2012. №1. С.77-85.

Проведены исследования и расчеты светотехнических характеристик тонкопленочных электролюминесцентных конденсаторов. Основные характеристики индикаторных приборов определяются ударным возбуждением активаторных центров с последующей излучательной релаксацией. Приведенные соотношения были адаптированы для разработки системы автоматизированного проектирования тонкопленочных электролюминесцентных индикаторов. Произведена оценка влияния на светотехнические характеристики конструктивных параметров. Физические процессы, определяющие работу тонкопленочных электролюминесцентных излучателей, изучены достаточно, что позволяет разрабатывать и производить различные индикаторы и дисплеи.

Библиогр.15.

УДК 621.382

Исследование влияния конструктивных параметров тонколенточных электролюминисцентных индикаторов на режимы их работы для формирования математического обеспечения САПР / О.В. Максимова, М.К. Самохвалов // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2012. №1. С.85-92.

Тонкопленочные электролюминесцентные структуры, возбуждаемые переменным током, являются перспективными активными плоскими индикаторными приборами, которые имеют ряд достоинств: высокую яркость, малую потребляемую мощность, высокие эффективность и срок службы и т.д. Имеется много публикаций с экспериментальными данными для электролюминесцентных светоизлучающих конденсаторов на основе сульфида цинка с марганцем или фторидами редкоземельных металлов и некоторыми другими люминофорами с различными диэлектрическими пленками. Изучены эффекты генерации носителей заряда и рассеяния энергии в тонкопленочных структурах. Основные характеристики индикаторных приборов определяются поляризационными эффектами, связанными с туннельной перезарядкой ловушек границы раздела люминофор-диэлектрик. Приведенные соотношения были адаптированы для разработки системы автоматизированного проектирования тонкопленочных электролюминес-

центных индикаторов. Произведена оценка влияния на электрические характеристики конструктивных параметров.

Ил.1. Библиогр.11.

УДК 66.0992.002.237

Исследование процессов гранулирования комплексных удобрений с учетом физико-химических и реологических свойств компонентов / Д.А. Макаренков, В.И. Назаров // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2012. №1. С. 93-99.

Разработаны процессы гранулирования комплексных удобрений, с учетом физико-химических и реологических свойств исходных компонентов. Даны рекомендации по выбору процессов гранулирования методами прессования и формования.

Ил.3. Библиогр.5.

УДК: 541.14-4(043), 535.012

Оптические свойства фотохромных материалов на основе 6-фенокси 5,12-нафтаценхинонов / В.М. Козенков, Н.Т. Соколюк, В.В. Беляев, А.А. Спахов, Г.Д. Тумовский // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2012. №1. С.99-108.

Исследованы сенситометрические и фотоанизотропные свойства фоточувствительных соединений из класса ФНХ – незамещенного 6- фенокси-5,12-нафтаценхинона (6-Ф-5,12-НХ) в различных полимерных матрицах в режиме однофотонного поглощения активирующего излучения от непрерывных источников света. Описаны условия получения максимальной величины фазовой задержки и двулучепреломления исследованных веществ. Это позволило зарегистрировать поляризационные голограммы и обеспечить неразрушающее считывание изображений, восстановленных с голограмм.

Ил.4. Библиогр.38.

УДК: 530.145:530.12;537.8:530.145

Локальная модель киральных фермионов со вспомогательной частицей в дискретном пространстве-времени / Н.В. Зверев // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2012. №1. С.108-114.

Рассмотрена локальная модель киральных фермионов со вспомогательной частицей в дискретном пространстве-времени в двух внешних полях: однородном и неоднородном. Показано, что при определённом соотношении для массы вспомогательной частицы данная модель согласуется с непрерывной теорией.

Ил.2. Библиогр.6.

УДК 373.167

Требования к достижениям учащихся при изучении механического движения в курсе физики основной школы / С.А. Холина // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2012. №1. С.1115-121.

Рассмотрены результаты изучения механического движения в курсе физики основной школы. Значительное внимание уделено организации учебной деятельности учащихся при выполнении заданий: наблюдение и описание различных видов механического движения; измерение времени и расстояния; проведение опытов и экспериментальных исследований равномерного и равноускоренного движений.

Табл.1. Библиогр.3.

УДК 681.3.07

Применение рефлексивного исследования в процессе обучения решению математических задач / Н.В. Ефимова // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2012. №1. С.122-125.

В статье рассматривается одна из проблем теории и практики обучения решению математических задач, связанная с заключительным этапом решения – с её исследованием, развитием, преобразованием. Отмечается необходимость перехода от математической задачи к учебной, а также рассматривается исследование задачи как средство этого перехода.

Библиогр.4.

ПРАВИЛА

подготовки рукописей, представленных для опубликования в журнале
«Вестник Московского государственного областного университета.
Сер. Физика - математика»

Для публикации научных работ в выпусках серии «Вестник МГОУ» принимаются статьи на русском языке. Публикуются научные материалы преимущественно докторантов, аспирантов, соискателей, преподавателей ВУЗов, докторов и кандидатов наук.

Требования к оформлению статей. Статья должна быть представлена:

в текстовом варианте (текст статьи должен быть подписан всеми авторами);

в виде документа MS Word 2003 (с расширением doc);

в виде файла в формате rtf;

Файл должен содержать построчно:

На русском языке	УДК (в верхнем левом углу первого листа рукописи) НАЗВАНИЕ СТАТЬИ – прописными буквами Фамилия, имя, отчество Полное наименование организации (в скобках – сокращенное), почтовый адрес Должность (другие сведения, например, E-mail, телефон) Аннотация (1 абзац до 400 символов) под заголовком «АННОТАЦИЯ» Ключевые слова
На английском языке	НАЗВАНИЕ СТАТЬИ – прописными буквами Фамилия, инициалы Полное наименование организации, почтовый адрес Аннотация (1 абзац до 400 символов) под заголовком «Abstract» Ключевые слова (Key words)
На русском языке	Объем статьи ограничен темя уровнями: а) 12 страниц с числом иллюстраций до пяти (к этим статьям предъявляются повышенные требования); б) 6 страниц с числом иллюстраций до трех (содержатся основные результаты без излишних деталей выводов и доказательств); в) 4 страницы с числом иллюстраций до двух (выходят в разделе краткие сообщения вне очереди). Список использованной литературы под заголовком «ЛИТЕРАТУРА»

Формат страницы – А4, книжная ориентация. Поля – 2,5 см. Шрифт Times New Roman Cyrillic, цвет шрифта черный, размер 12 пикселей, междустрочный интервал – полуторный.

Запрещены специфические действия над текстом и встраиваемые коды: уплотнение интервалов, использование цветовых заливок, «красные строки», центрирование, табуляция, отступы, переносы в словах (делаемые автором), ссылки, гиперссылки, сноски (лучше их оформлять в виде примечаний, замечаний и т.п.). Не допускаются сокращения слов, имен, названий, за исключением общепринятых (и оговоренных).

Формулы нумеруются (справа) только те, на которые в тексте имеются ссылки.

Рисунки и таблицы допускаются в том случае, если описать процесс в текстовой форме невозможно. В этом случае каждый из объектов не должен превышать указанные размеры страницы, а шрифт в нем – 12 пикселей. Возможно использование только вертикальных таблиц и рисунков. Запрещены цветовые заливки, применение «фонов».

Рисунки, схемы, графики выполняются на отдельных листах в формате, обеспечивающем ясность передачи деталей. Места расположения иллюстраций в тексте должны быть указаны простым карандашом на полях. На обороте иллюстрации должны быть написаны фамилия ав-

тора и название статьи. Текст к иллюстрациям, а также таблицы следует поместить на отдельных страницах. Все рисунки, схемы, графики, таблицы должны иметь названия.

Все формулы должны быть созданы с использованием компонента Microsoft Equation, (MathType 4.0). Размер шрифта также 12 пикселей. Формула создается однократным запуском компонента Microsoft Equation (MathType 4.0). Запрещается создавать составные формулы! Небольшие строчные фрагменты типа ΔU_{ij} или $C^{(m)} = (c_{1m}, c_{1m}, \ldots)^T$ следует набирать обычным способом в латинице, используя средства панели инструментов: изменение шрифта на курсив, написание верхних и нижних индексов, а также вставку символов. При этом следует обратить внимание на написание цифр, скобок, операторов и наименований функций (Δ, sin, cos,…) прямым шрифтом. Хорошее представление об оформлении математических текстов дает чтение научных журналов Российской академии наук физико-математического направления, классических учебников по физике и математике для высших учебных заведений.

Абзацы должны быть отделены друг от друга пустой строкой (дополнительным «Enter»).

Список литературы должен содержать библиографические сведения о всех публикациях, упоминаемых в статье, и не должен содержать указаний на работы, на которые в тексте нет ссылок. Располагать публикации в списке следует по алфавиту, вначале следует приводить отечественные публикации, затем – иностранные. Список литературы приводится на отдельном листе с обязательным указанием следующих данных: для книг (монография, сборник и т.д.) – фамилия (после фамилии ставится запятая), инициалы автора, название книги, место издания (город), издательство, год издания; для журнальных статей – фамилия и инициалы автора, название статьи, название журнала, год издания, том, номер, выпуск, страницы (первая и последняя). **Обращаем Ваше внимание!** С 01.07.2004 введен новый стандарт ГОСТ 7.1-2003 «Библиографическая запись. Библиографическое описание. Общие требования и правила составления». Наиболее распространенные примеры:

1. Иванов, И.И. Название книги / И.И. Иванов. - М.: Наука, 2009. – 205 с.
2. Иванов, И.И. Название книги / И.И. Иванов, П.М. Петров, К.Л. Данилов. - М.: Наука, 2009. – 205 с.
3. Иванов, И.И. Название книги / И.И. Иванов [и др. (е*сли 4 автора и более)*]. - М.: Наука, 2009. – 205 с.
4. Название книги / И.И. Иванов [и др.], под ред. И.И. Иванова. - М.: Наука, 2009. – 205 с.
5. Иванов, И.И. Название статьи / И.И. Иванов, П.М. Петров, К.Л. Данилов // Название сборника. - М.: Механика, 2009. – С.51-59.
6. Иванов, И.И. Название статьи / И.И. Иванов, П.М. Петров, К.Л. Данилов // Название журнала. – 2009. - №2. - С.51-59.

Ссылки на неопубликованные работы не допускаются.

Редакционная коллегия оставляет за собой право на редактирование статей, хотя с точки зрения научного содержания авторский вариант сохраняется. Статьи, не соответствующие указанным требованиям, решением редакционной коллегии серии не публикуются и не возвращаются (почтовой пересылкой).

В случае принятия статьи, условия опубликования оговариваются с ответственным редактором.

Ответственный редактор серии «Физика-математика» декан физико-математического факультета, доктор технических наук, профессор Бугримов Анатолий Львович.

Адрес редколлегии серии «Физика-математика» «Вестника МГОУ»: 105005, Москва, ул. Радио, д.10-а, комн. 36. Тел. (495) 261-09-48