

ISSN 2072-8549



Вестник

МОСКОВСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
ОБЛАСТНОГО
УНИВЕРСИТЕТА

Серия

ФИЗИКА-
МАТЕМАТИКА

2011 / № 3

МГОУ – 80 ЛЕТ: ПОЗДРАВЛЕНИЯ С ЮБИЛЕЕМ

**Уважаемые преподаватели, студенты, выпускники
областного университета! Дорогие друзья!**



Сердечно поздравляю Московский государственный областной университет с замечательным юбилеем – 80-летием!

Путь от МОПИ им. Н.К. Крупской до МГОУ – это 80 лет упорной работы, творческого поиска, заслуженного признания. Созданный в 1931 году институт, а теперь университет, был и остаётся флагманом системы подготовки высококвалифицированных специалистов в Московской области.

Сегодня в университете обучается более 12 тысяч студентов, и в вашем вузе к каждому находят индивидуальный подход

Показателен тот факт, что известные ученые, руководители, общественные деятели и, конечно же, педагоги получили образование именно в МОПИ – МПУ – МГОУ. Вклад выпускников вуза трудно переоценить – он поистине колоссальный!

Сегодня университет является крупнейшим вузом Московского региона, дающим современное качественное, востребованное обществом образование. Синтез учебного процесса с научными исследованиями, интенсивное использование инновационных технологий, широкий спектр реализуемых образовательных программ, а также активное участие в общественной жизни страны позволяют вашим выпускникам достигать больших высот в различных сферах и областях деятельности и плодотворно работать на благо национального процветания.

Коллектив университета по праву гордится своей славной биографией, уникальными научными школами, именами преподавателей и выпускников, среди которых – заслуженные деятели науки Российской Федерации, лауреаты Госпремии СССР, России и премии Президента РФ, академики и члены-корреспонденты российских и международных академий, профессора, доктора и кандидаты наук, известные ученые, общественные деятели, руководители, известные педагоги, члены профессиональных союзов, олимпийские чемпионы.

Правительство Московской области высоко ценит вклад Московского государственного областного университета в развитие инновационного, интеллектуального, трудового и экономического потенциала нашего региона.

Деятельность преподавателей и сотрудников университета является ярким примером преданного служения благородному делу образования, высокой компетентности и профессионализма.

Желаю университету долгой истории и крепких традиций, коллективу преподавателей, сотрудников, студентов и аспирантов – доброго здоровья, новых творческих свершений на благо высшей школы и российского образования, удачи и успехов!

Губернатор Московской области

Б.В. Громов

Уважаемые коллеги, дорогие друзья!

Сердечно поздравляю весь коллектив Московского государственного областного университета со знаменательной датой – 80-летним юбилеем! Примите мои поздравления и глубокую благодарность за неоценимый вклад, внесенный вами в дело просвещения и науки! Позвольте пожелать исполнения самых заветных желаний, успехов в реализации самых смелых замыслов, счастья и радости, пытливых, талантливых студентов, аспирантов, докторантов.



Особенно приятно это сделать еще и потому, что старейший вуз Московской области мне очень близок. Я сама окончила МОПИ им. Н.К. Крупской, и некоторое время преподавала здесь, всегда помню прекрасных людей, с которыми мне посчастливилось встретиться в стенах вуза и у которых я удостоилась чести учиться. Их отличал и отличает высокий профессионализм и лучшие человеческие качества. Уверена, что своими научными и практическими успехами я в значительной степени обязана тому прочному профессиональному фундаменту, который был заложен моими Учителями – учеными и педагогами МГОУ (МОПИ).

Сегодня Московский государственный областной университет – крупнейший университет региона. Пройденный его коллективом славный путь от МОПИ – МПУ до МГОУ являет собой поистине яркий пример верности и преданности избранному делу и долгу.

В учительском корпусе Подмоскovie большинство составляют выпускники университета. Это элита работников народного образования. Среди выпускников вуза – заслуженные учителя России, отличники образования, победители профессиональных конкурсов различного уровня.

МГОУ по праву является научно-педагогическим центром Московского региона. Университет обрел и удерживает это право благодаря высокому профессионализму и творческому потенциалу преподавателей, эффективной работе советов по защите докторских и кандидатских диссертаций, активной научно-исследовательской работе по приоритетным направлениям науки, в том числе по нанотехнологиям, широким международным связям в области образования и науки.

Мы гордимся лидерами научных школ МГОУ, продолжающими научный поиск и демонстрирующими новые достижения в области подготовки высококвалифицированных кадров для Подмоскovie, а также высокими результатами нашей совместной деятельности, связанной с реализацией различных проектов, направленных на развитие и углубление образовательных процессов в регионе.

Традиционно много внимания в университете уделяется воспитанию студентов, культурно-массовой, спортивно-оздоровительной работе с молодежью, что, бесспорно, является очень важным с учетом современных тенденций, наблюдающихся в общественной жизни. В настоящее время вузы страны должны вести постоянный поиск новых форм и методов работы, современных образовательных технологий, базирующихся на новейших открытиях, нестандартных подходах к воспитанию студенческой молодежи. МГОУ – одно из тех образовательных учреждений, на которое следует равняться в процессе поиска путей достижения целей, связанных с молодежной политикой.

Как отметил Президент Д.А. Медведев, «модернизация и инновационное развитие – единственный путь, который позволит России стать конкурентным обществом в мире 21-го века, обеспечить достойную жизнь всем нашим гражданам. В условиях решения этих стратегических задач важнейшими качествами личности становятся инициативность, способность творчески мыслить и находить нестандартные решения, умение выбирать профессиональный путь, готовность обучаться в течение всей жизни...». Именно эти качества вы, дорогие коллеги, преподаватели и сотрудники университета, формируете и развиваете у ваших студентов.

Уверена, что решение этих и других важных задач по плечу вашему дружному, работоспособному коллективу.

Сегодняшний юбилей – это праздник всех, кто в разные годы получил путевку в жизнь из МОПИ – МПУ – МГОУ. Сердечно поздравляю преподавателей, сотрудников, аспирантов, студентов, выпускников разных поколений с 80-летием Московского государственного областного университета! Высокая оценка профессиональных, деловых и личностных качеств, ваш богатый опыт, обширные знания снискали вам заслуженный авторитет и уважение у представителей всего образовательного сообщества. Большого вам человеческого счастья, крепкого здоровья, успехов в труде и процветания!

Желаю любимому вузу сохранения и преумножения традиций отечественного образования, новых свершений на общее благо Московского региона и нашей страны!

Министр образования Правительства Московской области,
член-корреспондент РАО, д.п.н., профессор

Л.Н. Антонова



ПРАВИТЕЛЬСТВЕННАЯ ТЕЛЕГРАММА

Уважаемый Павел Николаевич!

Поздравляю Вас, в Вашем лице – ветеранов профессорско-преподавательский состав, студентов, аспирантов и всех сотрудников со знаменательной датой – 80-летием со дня образования Московского государственного областного университета!

Все эти годы вуз пользуется заслуженным авторитетом как крупный образовательный центр, подготовивший тысячи высококвалифицированных педагогических кадров, славится своими богатыми традициями, сильным профессорско-преподавательским коллективом.

Выпускники МГОУ, обладающие глубокими знаниями и практическими навыками, внесли значимый вклад в развитие российской науки и образования.

Среди них также есть известные телеведущие, спортсмены, поэты и писатели, государственные и общественные деятели.

Уверен, что плодотворная научная, образовательная, культурно-воспитательная работа и впредь будет служить визитной карточкой университета.

Желаю всем крепкого здоровья, успехов во всех начинаниях, благодарных студентов, силы духа и веры в Россию!

Депутат Государственной думы
Федерального собрания РФ

В.А. Малашенко

Уважаемый Павел Николаевич!

От имени издательства «Просвещение» искренне поздравляю коллектив Московского государственного областного университета.

Юбилей – это радостный праздник, время подведения итогов, строительства планов на будущее. Вы по праву можете гордиться достигнутыми результатами. Со дня основания Университет – это проводник в мире образования и воспитания для всех педагогов нашей большой страны.

Велика значимость колоссальной работы, которую ведут преподаватели Вашего университета по подготовке молодых учителей, по внедрению в жизнь новых эффективных научных и образовательных концепций и технологий, по повышению престижа профессии педагога.

Примите искренние слова благодарности за преданность, честное и благородное служение делу образования и просвещения.

Желаю Вам дальнейшего процветания и развития!

С уважением,
Управляющий директор
ОАО Издательство «Просвещение»

А.М. Кондаков

Дорогие друзья!

Руководство и профессорско-преподавательский состав Академии Федеральной службы безопасности Российской Федерации сердечно поздравляют Вас со знаменательным событием в жизни вашего учебного заведения — 80-летием!

За время своего существования вы воспитали и подготовили тысячи высококвалифицированных педагогов, преданных делу воспитания и обучения подрастающего поколения, способного к прогрессивному развитию и созиданию.

Среди ваших выпускников — педагоги-практики и педагоги-ученые, известные научно-педагогической общественности России и зарубежных стран, внесшие значительный вклад в развитие методической мысли России. Уже много лет подряд Московский государственный областной университет (первоначально – МОПИ имени Н.К. Крупской) отвечает вызовам времени.

Ваш университет — это более, чем просто вуз подготовки преподавателей школы и вуза, а ныне — и специалистов других профессий, соответствующих требованиям времени, — это институт формирования крепкого нравственного стержня профессионала.

Вы воспитываете у студентов лучшие качества российской интеллигенции: любовь к Родине, высочайший профессионализм, преданность делу, трудолюбие, справедливость и честность.

Труд коллектива университета и вклад в науку его ученых снискали глубочайшее уважение и почтительное отношение к вашему учебному заведению в обществе.

Желаем коллективу университета дальнейших творческих успехов, здоровья, благополучия и процветания!

Руководство Академии ФСБ России

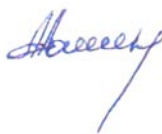
Дорогие друзья!

Коллектив Института микробиологии Национальной академии наук Азербайджана шлёт руководству и всему профессорско-преподавательскому составу Московского государственного областного университета свои самые искренние поздравления с 80-летием образования университета.

Авторитет университета неизменно высок и в России, и далеко за ее пределами, а его диплом – свидетельство фундаментальных и прикладных знаний, широкого кругозора, основательной профессиональной подготовки. Важно, что вы стремитесь следовать лучшим традициям, заложенным несколькими поколениями выдающихся ученых и наставников, и развиваетесь как высшее учебное заведение современного, инновационного типа.

Желаем вашему университету дальнейшего процветания и стабильности, а всем вашим коллегам – доброго здоровья, сил и упорства в работе на благо университета. Пусть реализация ваших планов приносит стабильный доход и новые перспективы!

Директор Института микробиологии
НАН Азербайджана, д.б.н., проф.,
действительный член НАНА



Салманов М.А.

Дорогие друзья!

Ректорат, профессорско-преподавательский состав и студенты Хмельницкого национального университета поздравляют коллектив Московского государственного областного университета со славным 80-летним юбилеем!

Желаем успешно развиваться, уверенно идти по избранному вами пути, крепкого здоровья, благополучия, счастья и новых творческих побед!

Надеемся на плодотворное сотрудничество в сфере образования и науки!

Проректор по международным связям
Хмельницкого национального университета,
к.т.н., профессор



Н.А. Иохна

Уважаемый Павел Николаевич!

Коллектив Пятигорского государственного лингвистического университета рад присоединиться к многочисленным поздравлениям, звучащим в адрес Московского государственного областного университета в связи со знаменательной датой – 80-летием со дня основания!

За долгие годы своего славного существования университет подготовил сотни тысяч выпускников, которые успешно трудятся во всех без исключения регионах России и за рубежом. Университет заслуженно пользуется авторитетом не только на Родине, но и далеко за ее пределами благодаря высокому профессионализму профессорско-преподавательского состава, его опыту и огромному творческому потенциалу, верности богатейшим традициям, заложенным десятилетиями, и умению идти в ногу со временем.

Поздравляя Вас и ваш коллектив с юбилеем, мы от всей души желаем всем, чья жизнь связана с МГОУ, сохранять и приумножать высокий научный потенциал своей Alma Mater, поддерживать славные традиции, заложенные многими поколениями преподавателей и студентов. Крепкого всем здоровья, счастья, мира и благополучия!

Ректор Пятигорского государственного
лингвистического университета, профессор,
академик АПСН, председатель
Общественного Совета г. Пятигорска



А.П. Горбунов

Уважаемые коллеги!

Сердечно поздравляем Вас с замечательным юбилеем!!!

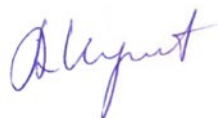
Ваш творческий путь – путь могучей кузницы кадров – широко известен не только в нашей стране, но и далеко за ее пределами!!!

Вы являетесь флагманом для сотен высших учебных заведений и путеводной звездой для тысяч молодых сердец!!!

От души желаем Вам крепкого здоровья, благополучия, новых достижений и успехов в труде на благо нашей Родины!!!

Коллектив Калужского государственного университета

Первый проректор



В.Б. Королев

Уважаемые коллеги!

Коллектив Курского государственного университета сердечно поздравляет преподавателей и студентов Московского государственного областного университета с юбилеем зрелости и мудрости – 80-летием со дня основания!

Научно-педагогические традиции и достижения Московского государственного областного университета, заложенные в далекие тридцатые годы XX века и творчески развиваемые современным поколением сотрудников, позволяют говорить об университете как о современном научном, научно-методическом и научно-организационном центре подготовки кадров специалистов-профессионалов высшей квалификации.

Желаем коллективу Московского государственного областного университета творческих успехов и достижения новых высот в научной деятельности и в деле подготовки новых поколений специалистов на благо России.

Проректор по научной работе
Курского государственного университета,
доктор педагогических наук, профессор



В.А. Кудинов

Уважаемые коллеги!

Ректорат и профессорско-преподавательский состав Поволжской государственной социально-гуманитарной академии шлют руководству и всему коллективу Московского государственного областного университета сердечные поздравления со славным 80-летним юбилеем вуза, глубоко ценя его огромные заслуги в подготовке высококвалифицированных кадров для разных областей народного хозяйства, образования, науки и культуры; среди выпускников факультетов и аспирантуры МГОУ есть и сотрудники нашего вуза.

Неоценимый вклад, внесенный коллективом МГОУ в дело просвещения и науки, делает ваш вуз весомой частью драгоценного культурного достояния страны.

В этот знаменательный день примите самые теплые пожелания дальнейших успехов в вашем благородном труде на ниве возрождения величия нашего Отечества.

Ректор Поволжской государственной социально-гуманитарной академии, доктор филол. наук, проф.



Вершинин И.В.

Дорогие коллеги!

80-летний юбилей вашего учебного заведения – значимое и радостное событие для всего российского образования! Позвольте присоединить к блестящему каскаду поздравлений наши теплые и искренние слова.

От Московского областного педагогического института образца 1931 года до современного университета XXI века пролегли долгие 80 лет. Этот путь – целая эпоха, вместившая в себя массу разномасш-

табных событий, находок, достижений, а иногда – трудностей и потрясений. Многое преодолено, многое достигнуто. И главное достижение – это целое созвездие блистательных выпускников, среди которых известные поэты, писатели, драматурги, редакторы известных изданий, народные артисты, политики, заслуженные учителя Российской Федерации, работники министерств, лауреаты различных премий. 80 лет вашими выпускниками формируется и укрепляется интеллектуальная элита России!

Ваш коллектив – дружное сообщество мастеров своего дела самой высокой пробы, которые всю свою профессиональную жизнь ищут, совершают, стремятся, открывают, познают, и все это – с самым высоким градусом напряжения интеллектуальных, душевных, физических сил, невзирая на уже приобретенный солидный возраст и авторитет.

В истории нашего молодого сибирского вуза и в благодарной памяти его сотрудников навсегда останутся имена заведующего кафедрой педагогики Василия Ивановича Журавлева, декана факультета повышения квалификации Валентина Петровича Симонова, начальника отдела аспирантуры Галины Александровны Белинской. Их помощь в формировании высококвалифицированного профессорско-преподавательского состава нашего учебного заведения неоценима.

За свою насыщенную событиями 80-летнюю историю ваше учебное заведение трижды меняло свое название. Но неизменной оставалась его уникальная академическая атмосфера, сформированная подвижнической деятельностью многих талантливых ученых и педагогов, сумевших объединить лучшее из педагогического и классического университетского образования – Заслуженный деятель науки РФ, профессор, доктор филологических наук Наталья Михайловна Васильева, профессор, доктор филологических наук Людмила Петровна Пицкова, воспитавшие и продолжающие воспитывать вот уже несколько поколений романистов, преподавателей, учителей, исследователей, в духе высокопрофессиональной научной лингвистической школы, созданной в вашем вузе много лет назад под руководством профессора, доктора филологических наук Нины Алексеевны Катагощиной, память о которой останется в наших сердцах, а научных дух её исследований – в трудах всех последователей.

Ваш коллектив всегда достойно преодолевал соблазн искушения «новомодными инновациями». Вы мудро определили для себя курс: модернизация, но с опорой на традицию. Ваш вуз внес неизмеримо значительный вклад в подготовку педагогических кадров нашей большой страны. Вспоминая слова известной песни, можно с полным правом сказать, что ваш адрес – «не дом и не улица», ваш адрес – Советский Союз!

Меняется облик российской высшей школы, все более успешно решаются задачи модернизации отечественной системы образования, и в этом есть огромный вклад коллектива Московского государственного областного университета.

Уверены – мудрость, талант, творческая энергия и повседневный кропотливый труд вашего коллектива всегда позволят вам достигать тех высоких целей, которые вы ставите перед собой.

Примите от нашего молодого Сургутского государственного педагогического университета самые сердечные поздравления с юбилеем! Пусть и впредь авторские находки и профессиональные поиски, преданность делу и вдохновенное творчество будут главными в деятельности вашего учебного заведения. Пусть легко покоряются самые высокие вершины, а любые замыслы находят успешное воплощение. Пусть каждый ваш день будет светлым, каждое начинание – успешным! Крепкого вам здоровья, стабильности, удачи, профессионального и творческого долголетия всему вашему творческому коллективу преподавателей и сотрудников!

Коллектив Сургутского государственного
педагогического университета

Дорогие коллеги!

Сердечно поздравляем Московский государственный областной университет с 80-летием! Вы по праву можете гордиться богатой историей вуза и тем, что в настоящее время он по-прежнему остается одним из ведущих образовательных учреждений страны.

В этом большая заслуга администрации и коллектива Университета, всех его подразделений, журнала «Вестник МГОУ», который издается в стенах Московского государственного областного университета уже более 10 лет!

В эти праздничные дни, пожалуйста, примите пожелания дальнейшего процветания Университета! Желаем Вам новых научных достижений, успехов в образовательной деятельности, а также надеемся на дальнейшее плодотворное сотрудничество!

От имени коллектива Института
Экологических проблем Севера УрО РАН
директор, д.х.н., проф.



К.Г. Боголицын

Уважаемый Павел Николаевич!

Поздравляем Вас и возглавляемый Вами коллектив Московского государственного областного университета, как одного из членов Ассоциации Московских вузов, со знаменательной датой – 80-летием со дня основания.

За прошедшие годы Вашему коллективу удалось достичь заметных успехов в подготовке высококвалифицированных научно-педагогических кадров для российского образования. На сегодняшний день в этой области вы являетесь одним из ведущих вузов.

Желаем Вам успехов в сложной и ответственной работе, реализации всех намеченных планов.

Желаем коллективу здоровья, счастья и новых творческих свершений.

Ректор
Московского физико-технического института

Н.Н. Кудрявцев

МАТЕМАТИКА

УДК 517.55

ОБОБЩЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ОБОБЩЕНИЯ
ИНТЕГРАЛА ТИПА КОШИ, АССОЦИИРОВАННОГО С БИКРУГОМ

А.В. Нелаев

Московский государственный областной университет
105005, Москва, ул. Радио, 10а

Аннотация. Автор продолжает начатое исследование обобщенно-аналитических свойств обобщения интеграла типа Коши, ассоциированного с бикругом.

Ключевые слова: Интеграл Коши, бикруг.

1. Введение. В статье продолжено начатое в работе [1] исследование свойств функций, определяемых обобщением интеграла типа Коши, ассоциированного с бикругом-интегралом:

$$\tilde{F}_1(z_1, z_2) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_0^1 d\tau \int_{T^2} \frac{\varphi(\tau, \zeta_1, \zeta_2) d\zeta_1 d\zeta_2}{(\zeta_1 - u_1)(\zeta_2 - z_2)}. \quad (1)$$

В отличие от работы [1], где изучение обобщенно-аналитических свойств интеграла (1) велось в области $U^{++} = \{(z_1, z_2) \in C^2 : |z_1| > 1, |z_2| < 1\}$, здесь областью исследования является область $U^{--} = \{(z_1, z_2) \in C^2 : |z_1| > 1, |z_2| > 1\}$, т.е. идейной направленностью настоящей статьи является завершение обхода тех областей (частей) пространства C^2 , на которые, в ходе изучения интеграла (1), это пространство было разбито в [1].

Поясним, что в (1) $u_1 = \tau^{\delta_1} z_1 + (1 - \tau^{\delta_1}) z_1^0$, константа δ_1 - вещественная, с условием $\delta_1 > 0$; константа z_1^0 комплексная: $|z_1^0| < 1$; параметр τ - вещественный ($0 \leq \tau \leq 1$), а ζ_1 и ζ_2 - комплексные, определенные на остоле $T^2 = \{(\zeta_1, \zeta_2) \in C^2 : |\zeta_1| = 1, |\zeta_2| = 1\}$; плотность $\varphi(\tau, \zeta_1, \zeta_2)$ - непрерывная по совокупности переменных функции, удовлетворяющая условию Гельдера

$$|\varphi(\tau, \zeta_1, \zeta_2) - \varphi(\tau, \zeta_1^0, \zeta_2^0)| < A_1 \cdot |\zeta_1 - \zeta_1^0|^{\alpha_1} + A_2 \cdot |\zeta_2 - \zeta_2^0|^{\alpha_2}, \quad (2)$$

причем константы A_k ($A_k > 0$) и α_k ($0 < \alpha_k \leq 1$) не зависят от τ .

В работе [1] было установлено, что функции, определяемые интегралом (1), голоморфны в бикруге $U^2 = \{(z_1, z_2) \in C^2 : |z_1| < 1, |z_2| < 1\}$ и в области

$U^{+-} = \{(z_1, z_2) \in C^2 : |z_1| < 1, |z_2| > 1\}$, а в области U^{--} представляют собой непрерывные, неголоморфные, вообще говоря, но любое число раз дифференцируемые (в вещественном смысле) функции, обладающие определенными обобщенно-аналитическими свойствами.

2. Вскрытие обобщенно-аналитических свойств интеграла (1) в области U^{--} предва-
рим выводом для этого интеграла формулы перехода от кратного интегрирования к по-
вторному в этой области.

Пусть (z_1, z_2) - произвольная точка области U^{--} . Тогда, в зависимости от значений параметра τ , величина $|u_1|$ может быть как больше, так и меньше единицы. Так, при $\tau = 0$ получаем $|u_1| = |z_1^0| < 1$, а при $\tau = 1$ имеем $|u_1| = |z_1| > 1$. Отсюда, на основании теоремы Больцано-Коши, заключаем, что в интервале $(0,1)$ существует хотя бы одно такое значение τ , при котором $|u_1| = 1$. Решим этот вопрос конструктивно. Рассматривая равенство $|u_1| = 1$ как уравнение относительно τ (временно считаем значение z_1 фиксированным) и учитывая, что

$$|u_1|^2 \equiv u_1 \bar{u}_1 = (\tau^{\delta_1} z_1 + (1 - \tau^{\delta_1}) z_1^0) \left(\tau^{\delta_1} \bar{z}_1 + (1 - \tau^{\delta_1}) \bar{z}_1^0 \right),$$

получаем:

$$(\tau^{\delta_1} (z_1 - z_1^0) + z_1^0) \left(\tau^{\delta_1} (\bar{z}_1 - \bar{z}_1^0) + \bar{z}_1^0 \right) = 1,$$

или, что то же самое,

$$(z_1 - z_1^0) \left(\bar{z}_1 - \bar{z}_1^0 \right) \tau^{2\delta_1} + \left((z_1 - z_1^0) \bar{z}_1^0 + \left(\bar{z}_1 - \bar{z}_1^0 \right) z_1^0 \right) \tau^{\delta_1} + z_1^0 \bar{z}_1^0 - 1 = 0.$$

Далее,

$$\tau^{2\delta_1} + \left(\frac{z_1^0}{z_1 - z_1^0} + \frac{\bar{z}_1^0}{\bar{z}_1 - \bar{z}_1^0} \right) \tau^{\delta_1} + \frac{|z_1^0|^2 - 1}{|z_1 - z_1^0|^2} = 0,$$

или, что то же,

$$(\tau^{\delta_1})^2 + 2 \left(\operatorname{Re} \frac{z_1^0}{z_1 - z_1^0} \right) \tau^{\delta_1} + \frac{|z_1^0|^2 - 1}{|z_1 - z_1^0|^2} = 0.$$

Решая полученное квадратное уравнение, заключаем, что в интервале $(0,1)$ существует единственное значение параметра τ : $\tau = \tau_0$, где

$$\tau_0 = \left[-\operatorname{Re} \frac{z_1^0}{z_1 - z_1^0} + \sqrt{\left(\operatorname{Re} \frac{z_1^0}{z_1 - z_1^0} \right)^2 + \frac{1 - |z_0|^2}{|z_1 - z_1^0|^2}} \right]^{\frac{1}{\delta_1}}, \quad (3)$$

удовлетворяющее условию $|u_1|_{\tau=\tau_0} = 1$.

Пусть теперь (и далее) значение z_1 произвольное, удовлетворяющее условию $|z_1| > 1$. Конструкция правой части формулы (3) показывает, что в этом случае в области U^{--} функция $\tau_0, \tau_0 = \tau_0(z_1)$, является функцией непрерывной, не голоморфной, но любое число раз дифференцируемой в вещественном смысле.

Введем следующие обозначения:

$$\frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{T^2} \frac{\varphi(\tau, \varsigma_1, \varsigma_2) d\varsigma_1 d\varsigma_2}{(\varsigma_1 - u_1)(\varsigma_2 - z_2)} = \begin{cases} \Psi^{+-}(\tau, u_1, z_2), & \text{при } |u_1| < 1, \\ \Psi^{--}(\tau, u_1, z_2), & \text{при } |u_1| > 1, \end{cases}$$

а при $u_1 = u_1^0 \equiv u_1|_{\tau=\tau_0}$ будем понимать интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\varsigma_1|=1} \frac{\varphi(\tau, \varsigma_1, \varsigma_2)}{\varsigma_1 - u_1^0} d\varsigma_1$$

как особый, в смысле главного значения по Коши (существование особого интеграла нам гарантирует наложенное на плотность $\varphi(\tau, \varsigma_1, \varsigma_2)$ условие Гельдера (2)).

Учитывая ограниченность особого интеграла и то обстоятельство, что (при фиксированном по произволу $z_1, |z_1| > 1$) лебегова мера множества $E = \{\tau \in (0;1): |u_1| = 1\}$ равна нулю, заключаем, что всюду в области U^{--} интеграл (1) выражается формулой:

$$\tilde{F}_1(z_1, z_2) = \int_0^{\tau_0} \Psi^{+-}(\tau, u_1, z_2) d\tau + \int_{\tau_0}^1 \Psi^{--}(\tau, u_1, z_2) d\tau. \quad (4)$$

Сделаем два замечания.

1) Интеграл (1) можно выразить по формуле (4) и в области U^{+-} , если доопределить (по непрерывности) τ_0 так: считать в U^{+-} $\tau_0 \equiv 1$.

2) Конструкция формулы (4) с учетом голоморфности функций $\Psi^{+-}(\tau, u_1, z_2)$ и $\Psi^{--}(\tau, u_1, z_2)$ по u_1 и z_2 показывает, что определяемые формулой (4) функции имеют тот же характер гладкости, что и отмеченный выше у функции $\tau_0(z_1)$.

Последнее обстоятельство означает, что к исследованию функций, определяемых интегралом (1), можно применять метод линейных дифференциальных операторов. Этим мы сейчас и займемся.

3. Обобщенные производные интеграла (1) в области U^{--} .

Установим обобщенную производную по z_1 , т.е. найдем дифференциальный оператор D_{z_1} вида

$$D_{z_1} = \alpha \frac{\partial}{\partial z_1} + \beta \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} + \gamma \frac{\partial}{\partial z_2} + \delta \frac{\partial}{\partial \bar{z}_2},$$

(где α, β, γ и δ – требующие своего определения функции переменных $z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2$), действие которым на интеграл (1) в области U^{--} равносильно дифференцированию ядра этого интеграла по z_1 .

Задача, фактически, сводится к нахождению четырех «коэффициентов» α, β, γ и δ . Два из них (учитывая то обстоятельство, что в формуле (4) пределы интегрирования есть либо константы, либо функция $\tau_0 = \tau_0(z_1, \bar{z}_1)$) определяются сразу: $\gamma \equiv 0$, $\delta \equiv 0$.

Кроме того, принимая во внимание, что при действии на голоморфные выражения оператор D_{z_1} должен вырождаться в обычную производную по z_1 , получаем третий коэффициент: $\alpha \equiv 1$. Итак, будем искать оператор в виде

$$D_{z_1} = \frac{\partial}{\partial z_1} + \beta \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}, \quad (5)$$

т.е. поставленная задача свелась к нахождению одного коэффициента β ($\beta = \beta(z_1, \bar{z}_1)$).

При этом будем руководствоваться следующими, вытекающими из конструкции правой части формулы (4), соображениями.

Во-первых, внутренние интегралы в ней (по ζ_1 и ζ_2) после замены комплексных параметров ζ_1 и ζ_2 на вещественные параметры t_1 и t_2 по формулам $\zeta_1 = e^{it_1}$, $\zeta_2 = e^{it_2}$, обращаются в интегралы с постоянными пределами интегрирования. Следовательно, при действии на них оператором D_{z_1} - согласно обобщению на операторы такого вида правила Лейбница

$$D_{z_1} \left\{ \int_a^b f(z_1, z_2, t) dt \right\} = \int_a^b D_{z_1} [f(z_1, z_2, t)] dt + D_{z_1}(b) f(z_1, z_2, b) - D_{z_1}(a) f(z_1, z_2, a)$$

(где, вообще говоря, a и b – функции: $a = a(z_1, \bar{z}_1)$, $b = b(z_1, \bar{z}_1)$) и с учетом свойства $D_{z_1}(const) \equiv 0$, оператор пройдет за знаки интегралов без образования дополнительных слагаемых. Важно отметить, что голоморфность по z_1 ядра $\frac{1}{(\zeta_1 - u_1)(\zeta_2 - z_2)}$ указывает на

то, что действие оператором D_{z_1} на подынтегральную функцию фактически означает дифференцирование ядра интеграла (1) по z_1 .

Заметим теперь, что если бы наш оператор D_{z_1} проходил в правой части формулы (4) без образования дополнительных слагаемых еще и за знак внешнего интеграла (по τ), то это и был бы искомый оператор. Вновь обращаясь к обобщению правила Лейбница заключаем, что для выполнения последнего условия достаточно потребовать выполнения тождества

$$D_{z_1}(\tau_0) \equiv 0. \quad (6)$$

Перейдем к вычислительной стороне вопроса. Согласно основным свойствам линейных дифференциальных операторов рассматриваемого вида, имеем:

$$\begin{aligned} D_{z_1}(\tau_0) &= D_{z_1} \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{z_1^0}{z_1 - z_1^0} + \frac{\bar{z}_1^0}{\bar{z}_1 - \bar{z}_1^0} \right) + \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{z_1^0}{z_1 - z_1^0} + \frac{\bar{z}_1^0}{\bar{z}_1 - \bar{z}_1^0} \right)^2 + \frac{1 - |z_1^0|^2}{|z_1 - z_1^0|^2}} \right\}^{\frac{1}{\delta_1}} = \\ &= \frac{1}{\delta_1} \{ \dots \}^{\frac{1}{\delta_1} - 1} \cdot \left[\frac{1}{2} \left(\frac{z_1^0}{(z_1 - z_1^0)^2} + \frac{\bar{z}_1^0 \cdot \beta}{(\bar{z}_1 - \bar{z}_1^0)^2} \right) - \frac{1}{2A} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{z_1^0}{z_1 - z_1^0} + \frac{\bar{z}_1^0}{\bar{z}_1 - \bar{z}_1^0} \right) \left(\frac{z_1^0}{(z_1 - z_1^0)^2} + \frac{\bar{z}_1^0 \cdot \beta}{(\bar{z}_1 - \bar{z}_1^0)^2} \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{(1 - |z_1^0|^2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_1^0 + (z_1 - z_1^0)\beta)}{(z_1 - z_1^0)^2 \cdot (\bar{z}_1 - \bar{z}_1^0)^2} \right] \right], \end{aligned}$$

где, для сокращения письма, обозначено

$$A = \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{z_1^0}{z_1 - z_1^0} + \frac{\bar{z}_1^0}{\bar{z}_1 - \bar{z}_1^0} \right)^2 + \frac{1 - |z_1^0|^2}{|z_1 - z_1^0|^2}}.$$

Приравнявая полученное выражение к нулю и рассматривая образуемое равенство как уравнение относительно β , получаем:

$$\begin{aligned} A \cdot \left[z_1^0 \cdot \left(\bar{z}_1 - \bar{z}_1^0 \right)^2 + \bar{z}_1^0 (z_1 - z_1^0)^2 \cdot \beta \right] - \left(\operatorname{Re} \frac{z_1^0}{z_1 - z_1^0} \right) \left[z_1^0 \cdot \left(\bar{z}_1 - \bar{z}_1^0 \right)^2 + \bar{z}_1^0 \cdot (z_1 - z_1^0)^2 \cdot \beta \right] - \\ - (1 - |z_1^0|^2) \cdot \left[\bar{z}_1 - \bar{z}_1^0 + (z_1 - z_1^0) \cdot \beta \right] = 0, \end{aligned}$$

откуда

$$\beta = -\frac{\overline{z_1 - z_1^0}}{z_1 - z_1^0} \cdot \frac{\left\{ A - \operatorname{Re} \frac{z_1^0}{z_1 - z_1^0} \right\} \cdot z_1^0 \left(\overline{z_1 - z_1^0} \right) + |z_1^0|^2 - 1}{\left\{ A - \operatorname{Re} \frac{z_1^0}{z_1 - z_1^0} \right\} \cdot \overline{z_1^0} (z_1 - z_1^0) + |z_1^0|^2 - 1},$$

или, учитывая, что $A - \operatorname{Re} \frac{z_1^0}{z_1 - z_1^0} \equiv \tau_0$,

$$\beta = -\frac{\overline{z_1 - z_1^0}}{z_1 - z_1^0} \cdot \frac{\tau_0 \cdot z_1^0 \left(\overline{z_1 - z_1^0} \right) + |z_1^0|^2 - 1}{\tau_0 \cdot \overline{z_1^0} (z_1 - z_1^0) + |z_1^0|^2 - 1}.$$

Подставляя найденное для β выражение в (5), получаем явный вид обобщенной производной D_{z_1} интеграла (1):

$$D_{z_1} = \frac{\partial}{\partial z_1} - \frac{\overline{z_1 - z_1^0}}{z_1 - z_1^0} \cdot \frac{\tau_0 \cdot z_1^0 \left(\overline{z_1 - z_1^0} \right) + |z_1^0|^2 - 1}{\tau_0 \cdot \overline{z_1^0} (z_1 - z_1^0) + |z_1^0|^2 - 1} \cdot \frac{\partial}{\partial \overline{z_1}}. \quad (7)$$

Таким образом, в области U^{--} имеем:

$$D_{z_1} [\tilde{F}_1(z_1, z_2)] = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_0^{\tau_0} d\tau \int_{\tau^2}^{\tau^{\delta_1}} \frac{\tau^{\delta_1} \cdot \varphi(\tau, \zeta_1, \zeta_2) d\zeta_1 d\zeta_2}{(\zeta_1 - u_1)^2 (\zeta_2 - z_2)} + \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\tau_0}^1 d\tau \int_{\tau^2}^{\tau^{\delta_1}} \frac{\tau^{\delta_1} \cdot \varphi(\tau, \zeta_1, \zeta_2) d\zeta_1 d\zeta_2}{(\zeta_1 - u_1)^2 (\zeta_2 - z_2)}. \quad (8)$$

Далее, учитывая, что в правой части формулы (8) пределы интегрирования остались те же самые, что и в формуле (4), заключаем, что оператор D_{z_1} можно аналогичным образом применять к формуле (8) повторно и, вообще, любое число раз. При этом индукцией по n устанавливается следующая общая формула:

$$D_{z_1}^{(n)} [\tilde{F}_1(z_1, z_2)] = \frac{n!}{(2\pi i)^2} \int_0^{\tau_0} d\tau \int_{\tau^2}^{\tau^{n\delta_1}} \frac{\tau^{n\delta_1} \cdot \varphi(\tau, \zeta_1, \zeta_2) d\zeta_1 d\zeta_2}{(\zeta_1 - u_1)^{n+1} (\zeta_2 - z_2)} + \\ + \frac{n!}{(2\pi i)^2} \int_{\tau_0}^1 d\tau \int_{\tau^2}^{\tau^{n\delta_1}} \frac{\tau^{n\delta_1} \cdot \varphi(\tau, \zeta_1, \zeta_2) d\zeta_1 d\zeta_2}{(\zeta_1 - u_1)^{n+1} (\zeta_2 - z_2)}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (9)$$

(подчеркнем, что в первом слагаемом из правой части формулы (9) $|u_1| < 1$, а во втором $|u_1| > 1$).

Итак, оказывается справедливой следующая теорема.

Теорема. В области U^{--} интеграл (1) можно любое число раз «дифференцировать» обобщенной производной D_{z_1} и эта операция равносильна дифференцированию по z_1 соответствующее число раз ядра интеграла.

Вопрос о дифференцировании в области U^{--} ядра интеграла (1) по z_2 решается просто: Конструкция правой части формулы (4) показывает, что в области U^{--} интеграл (1) является голоморфным по переменному z_2 , т.е. операция обычного дифференцирования интеграла (1) по z_2 равносильна дифференцированию по z_2 ядра интеграла. Этот факт можно сформулировать и следующим образом: в области U^{--} обобщенная производная D_{z_2} интеграла (1) совпадает с формальной производной $\frac{\partial}{\partial z_2}$: $D_{z_2} = \frac{\partial}{\partial z_2}$.

С учетом этого, для области U^{--} получаем общую формулу:

$$D_{z_1}^{(n)} D_{z_2}^{(m)} [\tilde{F}_1(z_1, z_2)] = \frac{n!m!}{(2\pi i)^2} \int_0^{\tau_0} d\tau \int_{\tau^2}^{\tau_0} \frac{\tau^{n\delta_1} \cdot \varphi(\tau, \zeta_1, \zeta_2) d\zeta_1 d\zeta_2}{(\zeta_1 - u_1)^{n+1} (\zeta_2 - z_2)^{m+1}} +$$

$$+ \frac{n!m!}{(2\pi i)^2} \int_{\tau_0}^1 d\tau \int_{\tau^2}^{\tau_0} \frac{\tau^{n\delta_1} \cdot \varphi(\tau, \zeta_1, \zeta_2) d\zeta_1 d\zeta_2}{(\zeta_1 - u_1)^{n+1} (\zeta_2 - z_2)^{m+1}}, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots \quad (10)$$

4. Отметим, что материал п.п. 2 и 3 несложно переносится на интеграл

$$\tilde{F}_2(z_1, z_2) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_0^1 d\tau \int_{\tau^2}^1 \frac{\varphi(\tau, \zeta_1, \zeta_2) d\zeta_1 d\zeta_2}{(\zeta_1 - z_1)(\zeta_2 - u_2)},$$

где $u_2 = \tau^{\delta_2} z_2 + (1 - \tau^{\delta_2}) z_2^0$, $\delta_2 > 0$, $|z_2^0| < 1$.

В области U^{--} этот интеграл выражается по формуле:

$$\tilde{F}_2(z_1, z_2) = \int_0^{\tau_1} \tilde{\Psi}^{+-}(\tau, z_1, u_2) d\tau + \int_{\tau_1}^1 \tilde{\Psi}^{--}(\tau, z_1, u_2) d\tau,$$

где

$$\tau_1 = \left[-\operatorname{Re} \frac{z_2^0}{z_2 - z_2^0} + \sqrt{\left(\operatorname{Re} \frac{z_2^0}{z_2 - z_2^0} \right)^2 + \frac{1 - |z_2^0|^2}{|z_2 - z_2^0|^2}} \right]^{\frac{1}{\delta_2}}, \quad \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\tau^2}^1 \frac{\varphi(\tau, \zeta_1, \zeta_2) d\zeta_1 d\zeta_2}{(\zeta_1 - z_1)(\zeta_2 - u_2)} = \begin{cases} \tilde{\Psi}^{+-}(\tau, z_1, u_2), & \text{при } |u_2| < 1, \\ \tilde{\Psi}^{--}(\tau, z_1, u_2), & \text{при } |u_2| > 1. \end{cases}$$

Обобщенные производные этого интеграла имеют вид

$$D_{z_1} = \frac{\partial}{\partial z_1}, \quad D_{z_2} = \frac{\partial}{\partial z_2} - \frac{\overline{z_2 - z_2^0}}{z_2 - z_2^0} \cdot \frac{\tau_1 \cdot z_2^0 \left(\overline{z_2 - z_2^0} \right) + |z_2^0|^2 - 1}{\tau_1 \cdot \overline{z_2^0} (z_2 - z_2^0) + |z_2^0|^2 - 1} \cdot \frac{\partial}{\partial \overline{z_2}},$$

а аналогом формулы (10) является

$$D_{z_1}^{(n)} D_{z_2}^{(m)} [\tilde{F}_2(z_1, z_2)] = \frac{n!m!}{(2\pi i)^2} \int_0^{\tau_1} d\tau \int_{\tau^2}^{\tau^{m\delta_2}} \frac{\tau^{m\delta_2} \cdot \varphi(\tau, \zeta_1, \zeta_2) d\zeta_1 d\zeta_2}{(\zeta_1 - z_1)^{n+1} (\zeta_2 - u_2)^{m+1}} + \\ + \frac{n!m!}{(2\pi i)^2} \int_{\tau_1}^1 d\tau \int_{\tau^2}^{\tau^{m\delta_2}} \frac{\tau^{m\delta_2} \cdot \varphi(\tau, \zeta_1, \zeta_2) d\zeta_1 d\zeta_2}{(\zeta_1 - z_1)^{n+1} (\zeta_2 - u_2)^{m+1}}, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Нелаев, А.В. Обобщение интеграла типа Коши, ассоциированного с бикругом [Текст] // Вестник МГОУ. – Серия «физика-математика». – М.: изд. МГОУ. – 2010, №1. – С. 3-16.

INVESTIGATION INTE THE GENERALIZED ANALITICAL PROPERTIES OF GENERALIZATION OF THE CAUCHY'S INTEGRAL TYPE ASSOCIATED WITH BICIRCLE

A. Nelayev

Moscow region state university
10a, Radio st., Moscow, 105005, Russia

Abstract. The author continues his investigation of generalized analytical properties of generalization of the Cauchy's integral type associated with bicircle.

Keywords: Cauchy's integral, bicircle.

УДК 512.662.1

АНАЛОГ СИМПЛИЦИАЛЬНЫХ ГРАНЕЙ В A_∞ -СЛУЧАЕ

М.В. Ладоскин

Мордовский государственный педагогический институт имени М.Е. Евсевьева (Саранск)
430007, Республика Мордовия, г Саранск, ул. Студенческая 11 а

Аннотация. В предлагаемой работе рассматривается вопрос построения аналога Δ -множества в A_∞ -случае. Предъявляется конструкция высших граней, доказывается теорема об их существовании на гомологиях, а также рассматривается вопрос о действии дифференциала на таком объекте. При доказательстве теорем используется техника SDR-ситуаций, сами доказательства конструктивны.

Ключевые слова. Симплициальный объект, гомотопическая устойчивость, SDR-ситуация, высшие грани.

В последнее время в алгебраической топологии актуальным является процесс создания аналогов алгебраических структур, которые были бы устойчивы при переходе к гомотопическому случаю. Первые работы в этом направлении относятся к 70-м годам прошлого века (Дж. Мэй, Т. Кадеишвили, В. Смирнов) и касались построения аналога

градуированных и дифференциальных алгебр. [1] Позднее велись работы по созданию подобного рода аналогов для алгебр Ли, дифференциальных модулей, коммутативных алгебр и других. [2]

Результаты, представленные в данной работе, являются продолжением работ, начатых в [3]. Подход, предлагаемый автором, является более алгебраическим, и позволяет построить аналог всей структуры Δ -множества, а не только его предсимплициальной части. Основными результатами является сама конструкция аналога Δ -множества, а также утверждения о его существовании и правиле вычисления дифференциалов от высшей грани. Все основные утверждения, конструкции и доказательства теорем приводятся над полем характеристики 2, то есть над $\mathbf{Z}_2$. Подобный прием является часто используемым в алгебраической топологии, так как позволяет избежать постоянной записи знаков, а также проверки их совпадения. Однако большинство утверждений, верных для случая поля характеристики 2 остаются верными и для произвольного случая.

Изложим основные определения, необходимые для дальнейшего изложения положений работы. Начнем с определения симплициального множества [4].

Определение 1. Симплициальное множество K – упорядоченный набор множеств, индексированный неотрицательными целыми числами, рассматриваемый вместе с отображениями $d_i: K_q \rightarrow K_{q-1}$ и $s_i: K_q \rightarrow K_{q+1}$, $0 < i \leq q$ которые удовлетворяют следующим условиям:

- (i) $d_i d_j = d_{j-1} d_i$ если $i < j$,
- (ii) $s_i s_j = s_{j+1} s_i$ если $i < j$,
- (iii) $d_i s_j = s_{j-1} d_i$, если $i < j$,
- $d_j s_j = id = d_{j+1} s_j$,
- $d_i s_j = s_j d_{i-1}$, если $i > j+1$.

(1)

Элементы K_q будем называть q -симплексом или симплексом размерности q . Отображения d_i и s_j называют соответственно операторами граней и вырождений.

Пример 1. Пусть $\Delta_n = \{(t_0, \dots, t_n), 0 \leq t_i < 1, \sum t_i = 1\} \in R^{n+1}$. Если X - топологическое пространство, то сингулярный n -мерный симплекс f – это непрерывная функция $f: \Delta_n \rightarrow X$. Градуированное множество $S(X)$, где $S_n(X)$ – множество сингулярных n -мерных симплексов X , называется тотальным сингулярным комплексом X . $S(X)$ становится симплициальным множеством, если мы определяем операторы граней и вырождений следующим образом:

$$(d_i f)(t_0, \dots, t_{n-1}) = f(t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{n-1}),$$

и

$$(s_i f)(t_0, \dots, t_{n+1}) = f(t_0, \dots, t_{i-1}, t_i \cdot t_{i+1}, t_{i+2}, \dots, t_{n+1}).$$

Если в формуле (1) ограничиться только рассмотрением соотношений (i), то получим определение Δ -множества. Напомним его, следуя работе [4].

Определение 2. Δ -множеством называется набор градуированных модулей $\{X_i\}$, индексированное неотрицательными индексами, рассматриваемое вместе с набором отображений $\partial_q : X_i \rightarrow X_{i-1}$ $0 \leq q \leq i$ которые удовлетворяют следующим условиям:

$$\partial_i \partial_j = \partial_{j-1} \partial_i, \text{ если } i < j \quad (2)$$

Отображения ∂_i называются гранями. Определение Δ -множества отличается от определения симплициального множества отсутствием вырождений и, соответственно, связей между гранями и вырождениями.

Теперь все готово для формирования изложено построение аналога симплициальных граней в гомотопически устойчивом случае.

Прежде чем сформулировать определение аналога Δ -множества, дадим несколько вспомогательных определений. Для этого рассмотрим сначала упорядоченный набор натуральных чисел $i_1, \dots, i_k$, в котором каждый индекс также принадлежит множеству натуральных чисел.

Определение 3. Будем обозначать $t(i_j)$ для числа i_j , входящего в $i_1, \dots, i_k$, если $i_{r_1} < i_j, \dots, i_{r_t} < i_j$ и $r_1 > j, \dots, r_t > j$. Другими словами, t – количество чисел $i_{r_1} < i_j$ стоящих правее i_j .

Определение 4. Будем обозначать $\tilde{i}_j$ для числа i_j , входящего в $i_1, \dots, i_k$, если $\tilde{i}_j = i_j - t$, где t вычисляется согласно определению 3.

Пример 2. $\tilde{3} = 3 - 2 = 1$, для $(3, 2, 1, 4, 5)$

Рассмотрим цепной комплекс X , то есть модуль $X = \bigoplus C_i$, где каждый C_i – модуль, снабженный последовательностью отображений $d_i : C_i \rightarrow C_{i-1}$, называемых дифференциалами, удовлетворяющих условию:

$$d_i(d_{i+1}) = 0. \quad (3)$$

Определим на этом комплексе структуру Δ_∞ -множества.

Определение 5. Δ_∞ -множеством будем называть цепной комплекс X с дифференциалом d , снабженный набором отображений

$$\partial_{i_1, i_2, \dots, i_n} : X_m \rightarrow X_{m-1},$$

которые удовлетворяют следующим условиям:

$$d\partial_i = \partial_i d, \quad (4)$$

$$\sum \partial_{\tilde{\sigma}(i_1), \tilde{\sigma}(i_2), \dots, \tilde{\sigma}(i_n)} = 0, \quad (5)$$

где σ - подстановка из симметрической группы S_k , а суммирование идет по всем подстановкам, действующим на данный набор $i_1, \dots, i_k$.

Отображения $\partial_{i_1, i_2, \dots, i_n}$ будем называть высшими гранями.

Следует отметить, что соотношения (4) означают, что грани являются отображениями дифференциальных модулей, соотношения (5) соответствуют обычным симплициальным соотношениям для граней в случае симплициального модуля. Как и симплициальные соотношения, соотношения (5) позволяют записать любую грань в виде упорядоченной грани, то есть в виде $\partial_{i_1, i_2, \dots, i_n}$, где $i_1 < i_2 < \dots < i_n$. Заметим, что если грань $\partial_{i_1, i_2, \dots, i_n}$ – упорядоченная, то $\tilde{i}_j > 0$.

Сформулируем теорему о существовании Δ_∞ -множеств.

Теорема 1. Рассмотрим цепной комплекс C с дифференциалом d . Пусть на данном цепном комплексе задана структура Δ -множества, согласованная с дифференциалом d таким образом, что каждая грань является цепным отображением, то есть $d\partial_i = \partial_i d$. Тогда на гомологиях данного цепного комплекса $H(C)$ существует структура Δ_∞ -множества.

Доказательство. Доказательство теоремы будем проводить конструктивно, то есть предъявим алгоритм получения высших граней на гомологиях цепного комплекса и покажем, что полученные грани определяют на $H(C)$ структуру Δ_∞ -модуля.

Рассмотрим стандартную SDR-ситуацию цепных комплексов C и $H(C)$, то есть система отображений $\{\eta: C \rightarrow H(C): \xi, h\}$, если для отображений

$$h: C \rightarrow C, \eta: C \rightarrow H(C), \xi: H(C) \rightarrow C \quad (6)$$

выполняются следующие условия:

$$dh + hd = \xi\eta + id; h\xi = 0; \eta h = 0; hh = 0; \eta\xi = id. \quad (7)$$

Отображение $h: C \rightarrow C$ – гомотопия между отображением $\xi\eta$ и тождественным отображением. Отображение $\eta: C \rightarrow H(C)$ – выбор класса гомологий по представителю, отображение $\xi: H(C) \rightarrow C$ – выбор представителя в классе. Однозначность отображения ξ может быть достигнута путем фиксации разложения C в прямую сумму $C \oplus H(C)$. Поскольку все происходит над полями, то такое разложение всегда существует, и однозначно определяет отображение ξ . Заметим, что отображения η и ξ являются цепными, то есть перестановочны с дифференциалом в соответствующих комплексах.[5]

Теперь рассмотрим получение высшей грани на гомологиях. Для произвольной высшей грани $\partial_{i_1, i_2, \dots, i_k}$ составим упорядоченную последовательность $\partial_{i_1}, \partial_{i_2}, \dots, \partial_{i_k}$. К каждой паре граней $\partial_i, \partial_{i+1}$, из данной последовательности применим симплициальные соотношения. Если возможно, то к полученным последовательностям тоже. Получим для

каждой исходной последовательности $\partial_{i_1}, \partial_{i_2}, \dots, \partial_{i_k}$ набор последовательностей $\{\partial_{t_1}, \partial_{t_2}, \dots, \partial_{t_k}\}$.

Определим высшую грань $\partial_{i_1, i_2, \dots, i_k}$ по следующим формулам:

$$\partial_{t_1} = \eta \partial_{t_1} \xi, \quad (8)$$

$$\partial_{i_1, i_2, \dots, i_k} = \sum \eta (\partial_{i_1} h \partial_{i_2} h \dots h \partial_{i_k}) \xi. \quad (9)$$

Суммирование в формуле (9) будет идти по всем возможным последовательностям $\partial_{i_1}, \partial_{i_2}, \dots, \partial_{i_k}$, полученным в результате процедуры, описанной выше.

Покажем, что определенные приведенным способом грани образуют Δ_∞ -модуль. Для этого сначала покажем, что высшие грани удовлетворяют условиям (4) и (5). Условие (4) выполняется в силу того, что все отображения $\eta, \partial_{t_1}, \xi$ являются цепными, то есть перестановочны с дифференциалом. Рассмотрим условие (5). Заметим, что число $\tilde{i}_j$ из определения 4 будет совпадать с числом упорядоченных инверсий, то есть инверсий, которые переводят последовательность индексов в упорядоченную. Применение каждого симплициального соотношения к паре индексов приводит к уменьшению номера переходящего влево элемента на 1. Таким образом, если мы возьмем некоторую упорядоченную последовательность натуральных индексов и будем попарно применять к каждой возможной паре последовательно симплициальные соотношения, то число, на которое уменьшается номер грани в результате последовательного действия нескольких симплициальных соотношений, есть в точности число упорядоченных инверсий, или число t из определения 3. Таким образом, мы показали, что любая грань, эквивалентная упорядоченной по формуле (6), может быть получена в результате одной из перестановок из симметрической группы S_k с учетом симплициальных соотношений. Верно и обратное, то есть все перебор всех перестановок из группы S_k даст все возможные равные грани. Таким образом, любая равная некоторой упорядоченной грани вида $\partial_{i_1, i_2, \dots, i_k}$, где $i_1 < i_2 < \dots < i_n$ высшая грань будет иметь вид $\partial_{\tilde{\sigma}(i_1), \tilde{\sigma}(i_2), \dots, \tilde{\sigma}(i_n)}$, где $\tilde{\sigma}$ - подстановка из симметрической группы S_k , что и требовалось показать.

Но тогда для двух равных граней $\partial_{i_1, i_2, \dots, i_k, i_{k+1}, \dots, i_n}$ и $\partial_{i_1, i_2, \dots, i_{k+1}-1, i_k, \dots, i_n}$ набор последовательностей $\{\partial_{t_1}, \partial_{t_2}, \dots, \partial_{t_k}\}$, используемых для их построения, окажется одним и тем же. Это следует из того, что последовательность

$$\partial_{i_1}, \partial_{i_2}, \dots, \partial_{i_k}, \partial_{i_{k+1}}, \dots, \partial_{i_n}$$

входит в набор последовательностей для последовательности

$$\partial_{i_1}, \partial_{i_2}, \dots, \partial_{i_{k+1}-1}, \partial_{i_k}, \dots, \partial_{i_n}$$

полученных в результате применения последовательности симплициальных соотношений. Таким образом, мы показали, что высшие грани $\partial_{i_1, i_2, \dots, i_k, i_{k+1}, \dots, i_n}$ и $\partial_{i_1, i_2, \dots, i_{k+1}-1, i_k, \dots, i_n}$ будут состоять из одних и тех же составных слагаемых вида $\eta(\partial_{i_1} h \partial_{i_2} h \dots h \partial_{i_k}) \xi$, то есть на гомологиях рассматриваемого цепного комплекса существует структура Δ_∞ -модуля. Теорема доказана.

Теперь рассмотрим пример, который проиллюстрирует идею доказательства теоремы о свойствах построенных высших граней, а именно, о действии на них дифференциала.

Пример 3. Рассмотрим построение высшей грани $\partial_{2,4,5}$. Применим к каждой паре последовательности $\partial_2 \partial_4 \partial_5$ симплициальные соотношения. Получим набор последовательностей $\partial_2 \partial_4 \partial_5$, $\partial_2 \partial_4 \partial_4$, $\partial_3 \partial_2 \partial_5$, $\partial_3 \partial_4 \partial_2$, $\partial_3 \partial_2 \partial_4$, $\partial_3 \partial_3 \partial_2$. Используя формулу (9), получим следующее выражение

$$\begin{aligned} \partial_{2,4,5} = & \eta \partial_2 h \partial_4 h \partial_5 \xi + \eta \partial_3 h \partial_2 h \partial_4 \xi + \eta \partial_2 h \partial_4 h \partial_4 \xi + \\ & + \eta \partial_3 h \partial_2 h \partial_5 \xi + \eta \partial_3 h \partial_4 h \partial_2 \xi + \eta \partial_3 h \partial_3 h \partial_2 \xi \end{aligned}$$

Теперь покажем, как на определенных нами высших гранях действует дифференциал. Данные действие рассмотрим на примере. Для этого проведем вычисления для высшей грани $\partial_{2,4,5}$, которые послужат иллюстрацией для общих рассуждений.

$$\begin{aligned} d(\partial_{2,4,5}) = & d(\eta \partial_2 h \partial_4 h \partial_5 \xi + \eta \partial_3 h \partial_2 h \partial_4 \xi + \eta \partial_2 h \partial_4 h \partial_4 \xi + \\ & + \eta \partial_3 h \partial_2 h \partial_5 \xi + \eta \partial_3 h \partial_4 h \partial_2 \xi + \eta \partial_3 h \partial_3 h \partial_2 \xi) \end{aligned}$$

На каждом из слагаемых дифференциал действует по правилу Лейбница, то есть, например,

$$d(\eta \partial_2 h \partial_4 h \partial_5 \xi) = d\eta \partial_2 h \partial_4 h \partial_5 \xi + \eta \partial_2 h \partial_4 h \partial_5 \xi d.$$

Учитывая, что отображения η, ∂_i, ξ – цепные, то мы можем переставить их с дифференциалом. Поэтому получаем:

$$\begin{aligned} d(\partial_{2,4,5}) = & \eta \partial_2 d h \partial_4 h \partial_5 \xi + \eta \partial_2 h \partial_4 h d \partial_5 \xi + \eta \partial_3 d h \partial_2 h \partial_4 \xi + \eta \partial_3 h \partial_2 h d \partial_4 \xi + \\ & + \eta \partial_2 d h \partial_4 h \partial_4 \xi + \eta \partial_2 h \partial_4 h d \partial_4 \xi + \eta \partial_3 d h \partial_2 h \partial_5 \xi + \eta \partial_3 h \partial_2 h d \partial_5 \xi + \\ & + \eta \partial_3 d h \partial_4 h \partial_2 \xi + \eta \partial_3 h \partial_4 h d \partial_2 \xi + \eta \partial_3 d h \partial_3 h \partial_2 \xi + \eta \partial_3 h \partial_3 h d \partial_2 \xi \end{aligned}$$

Для каждой нечетного по счету слагаемого применим условие (7) из определения SDR-ситуации, записанное в виде:

$$dh = hd + \xi \eta + id.$$

Получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} d(\partial_{2,4,5}) = & \eta\partial_2 h\partial_4 dh\partial_5 \xi + \eta\partial_2 \xi\eta\partial_4 h\partial_5 \xi + \eta\partial_2 \partial_4 h\partial_5 \xi + \eta\partial_2 h\partial_4 h\partial_5 \xi + \\ & + \eta\partial_3 h\partial_2 dh\partial_4 \xi + \eta\partial_3 \xi\eta\partial_2 h\partial_4 \xi + \eta\partial_3 \partial_2 h\partial_4 \xi + \eta\partial_3 h\partial_2 h\partial_4 \xi + \\ & + \eta\partial_2 h\partial_4 dh\partial_4 \xi + \eta\partial_2 \xi\eta\partial_4 h\partial_4 \xi + \eta\partial_2 \partial_4 h\partial_4 \xi + \eta\partial_2 h\partial_4 h\partial_4 \xi + \\ & + \eta\partial_3 h\partial_2 dh\partial_5 \xi + \eta\partial_3 \xi\eta h\partial_2 h\partial_5 \xi + \eta\partial_3 \partial_2 h\partial_5 \xi + \eta\partial_3 h\partial_2 h\partial_5 \xi + \\ & + \eta\partial_3 h\partial_4 dh\partial_2 \xi + \eta\partial_3 \xi\eta\partial_4 h\partial_2 \xi + \eta\partial_3 \partial_4 h\partial_2 \xi + \eta\partial_3 h\partial_4 h\partial_2 \xi + \\ & + \eta\partial_3 h\partial_3 dh\partial_2 \xi + \eta\partial_3 \xi\eta\partial_3 h\partial_2 \xi + \eta\partial_3 \partial_3 h\partial_2 \xi + \eta\partial_3 h\partial_3 h\partial_2 \xi \end{aligned}$$

Сгруппируем слагаемые вида $\eta\partial_2 \partial_4 h\partial_5 \xi$, содержащие одинаковые грани после гомотопии. Кроме того, сгруппируем слагаемые вида $\eta\partial_2 \xi\eta\partial_4 h\partial_5 \xi$, содержащие одинаковые первые три элемента. Таким образом, получаем для дифференциала от рассматриваемой грани выражение:

$$\begin{aligned} d(\partial_{2,4,5}) = & \eta\partial_2 h\partial_4 (dh + hd)\partial_5 \xi + \eta\partial_2 \xi(\eta\partial_4 h\partial_5 \xi + \eta\partial_4 h\partial_4 \xi) + \\ & + \eta(\partial_2 \partial_4 + \partial_3 \partial_2)h\partial_5 \xi + \eta\partial_2 h\partial_4 (dh + hd)\partial_5 \xi + \eta\partial_3 h\partial_2 (dh + hd)\partial_4 \xi + \\ & + \eta\partial_3 \xi(\eta\partial_2 h\partial_4 \xi + \eta\partial_3 h\partial_2 \xi) + \eta(\partial_3 \partial_2 + \partial_2 \partial_4)h\partial_4 \xi + \eta\partial_2 h\partial_4 dh\partial_4 \xi + \\ & + \eta\partial_3 h\partial_2 (dh + hd)\partial_5 \xi + \eta\partial_3 \xi(\eta h\partial_2 h\partial_5 \xi + \eta\partial_4 h\partial_2 \xi) + \\ & + \eta\partial_3 h\partial_4 (dh + hd)\partial_2 \xi + \eta(\partial_3 \partial_4 + \partial_3 \partial_3)h\partial_2 \xi + \eta\partial_3 h\partial_3 (dh + hd)\partial_2 \xi \end{aligned}$$

Учитывая определения высших граней, а также симплициальные соотношения, получим выражение:

$$\begin{aligned} d(\partial_{2,4,5}) = & \partial_2 \partial_{4,5} + \partial_3 \partial_{2,5} + \partial_3 \partial_{2,4} + \\ & + \eta\partial_2 h\partial_4 (dh + hd)\partial_5 \xi + \eta\partial_2 h\partial_4 (dh + hd)\partial_5 \xi \\ & + \eta\partial_3 h\partial_2 (dh + hd)\partial_4 \xi + \eta\partial_3 h\partial_2 (dh + hd)\partial_5 \xi + \\ & + \eta\partial_3 h\partial_4 (dh + hd)\partial_2 \xi + \eta\partial_3 h\partial_3 (dh + hd)\partial_2 \xi \end{aligned}$$

В последней записи ∂_2 – грань в гомологиях, полученная по вышеприведенному алгоритму. К каждому слагаемому в скобках применим формулу (7), получим

$$\begin{aligned} d(\partial_{2,4,5}) = & \partial_2 \partial_{4,5} + \partial_3 \partial_{2,5} + \partial_3 \partial_{2,4} + \eta\partial_2 h\partial_4 \partial_5 \xi + \eta\partial_2 h\partial_4 \xi\eta\partial_3 \xi \\ & + \eta\partial_2 h\partial_4 \partial_4 \xi + \eta\partial_2 h\partial_4 \xi\eta\partial_4 \xi + \eta\partial_3 h\partial_2 \partial_5 \xi + \\ & + \eta\partial_3 h\partial_2 \xi\eta\partial_5 \xi + \eta\partial_3 h\partial_4 \partial_2 \xi + \eta\partial_3 h\partial_4 \xi\eta\partial_2 \xi + \eta\partial_3 h\partial_2 \partial_4 \xi + \eta\partial_3 h\partial_2 \xi\eta\partial_4 \xi + \\ & + \eta\partial_3 h\partial_3 \partial_2 \xi + \eta\partial_3 h\partial_3 \xi\eta\partial_2 \xi \end{aligned}$$

Группируя слагаемые, содержащие лишь одну гомотопию, и используя определение граней в гомологиях, получим:

$$d(\partial_{2,4,5}) = \partial_2\partial_{4,5} + \partial_3\partial_{2,5} + \partial_3\partial_{2,4} + \eta\partial_2h(\partial_4\partial_5 + \partial_4\partial_4)\xi + \\ + \eta\partial_3h(\partial_2\partial_5 + \partial_4\partial_2)\xi + \eta\partial_3h(\partial_3\partial_2 + \partial_2\partial_4)\xi + (\eta\partial_2h\partial_4\xi + \eta\partial_3h\partial_2\xi)\eta\partial_4\xi + \\ + (\eta\partial_3h\partial_2\xi + \eta\partial_2h\partial_4\xi)\eta\partial_5\xi + (\eta\partial_3h\partial_3\xi + \eta\partial_3h\partial_4\xi)\eta\partial_2\xi.$$

Используя симплициальные соотношения, будем иметь:

$$d(\partial_{2,4,5}) = \partial_2\partial_{4,5} + \partial_3\partial_{2,5} + \partial_3\partial_{2,4} + \partial_{2,4}\partial_5 + \partial_{2,4}\partial_4 + \partial_{3,4}\partial_2$$

Проводя аналогичные рассуждения для произвольной грани, получим доказательство следующей теоремы.

Теорема 2. Дифференциал от упорядоченной грани $\partial_{i_1, i_2, \dots, i_k}$, где $i_1 < i_2 < \dots < i_k$, равен нулю при $k=1$, а при $k>1$ определяется формулой

$$d(\partial_{i_1, i_2, \dots, i_k}) = \sum_{\sigma \in S_k} \sum_{I_\sigma} \partial_{\overline{\sigma(i_1)}, \dots, \overline{\sigma(i_r)}} \partial_{\overline{\sigma(i_{r+1}), \dots, \sigma(i_k)}} \quad (10)$$

Суммирование в формуле (10) идет в первом случае по всем возможным перестановкам из симметрической группы S_k , а во втором - по множеству I_σ всех разбиений набора $(\overline{\sigma(i_1)}, \dots, \overline{\sigma(i_r)})$ на два строго упорядоченных блока $(\overline{\sigma(i_1)}, \dots, \overline{\sigma(i_k)})$ и $(\overline{\sigma(i_{k+1})}, \dots, \overline{\sigma(i_r)})$, то есть блоки, в которых выполняется условие $\overline{\sigma(i_1)} < \overline{\sigma(i_2)} < \dots < \overline{\sigma(i_k)}$ и $\overline{\sigma(i_{k+1})} < \overline{\sigma(i_{k+2})} < \dots < \overline{\sigma(i_r)}$. В данном определении символ $\overline{\sigma(i_k)}$ рассматривается в смысле определения 4.

Замечание. Множество I_σ может быть и пустым для некоторой подстановки σ . Например, для подстановки $\sigma = (2\ 3\ 5\ 4\ 1)$ множество I_σ пусто.

Приведем пример вычисления дифференциала на грани с помощью формулы (10).

$$d(\partial_{1,3,5}) = \partial_1\partial_{3,5} + \partial_{1,3}\partial_5 + \partial_{1,4}\partial_3 + \partial_{2,4}\partial_1 + \partial_2\partial_{1,5} + \partial_3\partial_{1,3}$$

Поясним полученное выражение. Применяя к тройке (1,3,5) все подстановки из S_3 , получим (1,3,5), (1,5,3), (3,5,1), (3,1,5), (5,3,1), (5,1,3). Если на каждый элемент в каждой из полученных подстановок подействовать согласно определению 4, то получим следующие наборы (1,3,5), (1,4,3), (2,4,1), (2,1,5), (3,2,1), (3,1,3). Разбивая каждую из полученных затем троек на два упорядоченных блока, получим следующие разбиения:

- ((1), (3,5)), ((1,3), (5)) – соответствующие тройке (1,3,5);
- ((1,4), (3)) – соответствующие тройке (1,4,3);
- ((2,4), (1)) – соответствующее тройке (2,4,1);
- ((2), (1,5)) – соответствующее тройке (2,1,5);
- ((3), (1,3)) – соответствующее тройке (3,1,3).

Заметим, что тройке (3,2,1) не будет соответствовать ни одного упорядоченного разбиения.

В результате наших исследований построен A_∞ -аналог граней для симплициального случая, а также описан пример существования данной конструкции на гомологиях цепного комплекса. Автор благодарит Лапина С.В. за обсуждение и замечания в ходе подготовки работы. Полученные результаты могут быть использованы для построения общей структуры гомотопически устойчивого аналога симплициального объекта, что является целью дальнейших исследований.

Работа выполнена в рамках проекта «Построение гомотопически устойчивого аналога симплицеального объекта» ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009-2013гг.» Государственный контракт № П1226 от 07 июня 2010.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кадеишвили, Т.В. К теории гомологий расслоенных пространств / Т. В. Кадеишвили // Успехи математических наук. – 1980. – т. 35. Вып 3(213). – С. 183–188.
2. Лапин, С.В. Дифференциальные возмущения и D_∞ -дифференциальные модули / С.В. Лапин // Математический сборник. – 2001. – т.192. №11. – С.55–76
3. Смирнов, В.А. A_∞ -симплицеальные объекты и A_∞ -топологические группы / В. А. Смирнов // Математические заметки. – 1999. – т.66. Вып. 6. – С. 913–919.
4. *Gugenheim, V.K.A.M.* On a chain complex of a fibration / V.K.A.M. Gugenheim // Illinois J. Math. – 1972. – V.3. – P. 398-418.
5. *May, J. P.* Simplicial objects in algebraic topology / J.P. May – Van Nostred, Math.Studies, 11 -1967 – 162 p.

ANALOG SIMPLICIAL FASES IN A_∞ -CASE

M. Ladoshkin

*Mordovian state pedagogical institute by M.E.Evsevev (Saransk)
430007, Respublika Mordovia, Saransk, st. Studencheskaya, 11a,*

Abstract. In this paper, the problem of constructing an analog of Δ -sets in A_∞ -case. Presented to design the higher faces, we prove their existence on the homology, but also addresses the effect of the differential on this site. In proving the theorems we use the technique of SDR-situations themselves prove constructive.

Keywords. Simplicial object, homotopy stable, SDR-situation, high faces.

УДК 519.632.4

О БЫСТРЫХ МЕТОДАХ ПРИ РЕШЕНИИ РАЗНОСТНЫХ ЗАДАЧ ГИДРОДИНАМИКИ ОКЕАНИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ

В.Е. Волков, В.М. Простокишин, Д.Г. Орловский

*Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ» (Москва)
115409, Москва, Каширское ш., 31*

Аннотация. Рассмотрена аппроксимация трёхмерных уравнений несжимаемой жидкости, описывающих океанические течения. Аппроксимация на трёхмерную сетку в фиксированные моменты времени и в приближении «замороженных» коэффициентов обмена сводит описание течений к задаче Дирихле для разностного уравнения Лапласа в кубе. Предложен метод нахождения её решения на множестве узлов трёхмерной сетки в плоских сечениях куба с равномерной по пространству точно-

стью. Показано, что требуемое для решения общее число арифметических действий по порядку величины совпадает с числом действий нахождения коэффициентов Фурье заданных граничных условий. Излагаются приближённые методы решения задачи Дирихле во всём кубе с оптимальным числом действий на узел сетки, приведены явные оценки получающейся при этом погрешности.

Ключевые слова: уравнение Лапласа, задача Дирихле, быстрый численный алгоритм, погрешность.

При описании стационарных океанических течений со слабо изменяющимися турбулентными коэффициентами обмена [9;10] с использованием метода «расщепления» [8] возникает необходимость неоднократного решения двумерных и трёхмерных задач Дирихле для уравнения Лапласа [1;2]. В этой связи актуальным является нахождение быстрых алгоритмов численного решения не одномерных уравнений Пуассона и Лапласа, чему и посвящена данная работа. В работе [5] приведены простые двумерные и трёхмерные алгоритмы с оценкой числа действий в них. Эти методы проще, чем разработанные впервые алгоритмы такого типа в двумерном случае [11]. В [6] был построен более сложный алгоритм в двумерном случае с аналогичной характеристикой по числу действий. а также изложены приближённые В работе описаны методы решения задачи Дирихле в кубе асимптотически за одно или два сложения на узел и приведены явные оценки погрешности.

1. Разностное уравнение Лапласа в кубе.

Построение сетки. Рассмотрим прямоугольную трёхмерную область и, после перенормировки она переводится в единичный куб $R = \{(x_1, x_2, x_3) : 0 < x_i < 1, i = 1, 2, 3\}$. Обозначим его грани без границ через $\Gamma_j, j = 1, \dots, 6$, причём при $j = 1, 2, 3$ Γ_j лежит в плоскости $x_j = 0$, а при $j = 4, 5, 6$ Γ_j лежит в плоскости $x_{j-3} = 1$. Введём кубическую равномерную сетку плоскостями $x_i = 0, h, 2h, \dots, i = 1, 2, 3$, где шаг сетки задаётся $h = 2^{-q}, q \in \mathbb{N}$. Обозначим множество внутренних узлов сетки через R^h и граничных узлов через $\Gamma_j^h, \Gamma^h = \Gamma_1^h \cup \dots \cup \Gamma_6^h$.

Постановка и представление разностной задачи Дирихле. Введём на сетке стандартный трёхмерный семиточечный разностный оператор Лапласа Δ_h и пусть φ_i^h - ограниченная по модулю единицей произвольная функция, заданная на Γ_j^h . Тогда на сетке R^h определена разностная задача Дирихле:

$$\begin{cases} \Delta_h u^h = 0, & x_j^h \in R^h, \\ u^h = \varphi_j^h, & x_j^h \in \Gamma_j^h, j = 1, \dots, 6, \end{cases} \quad (1)$$

а также определена частичная краевая задача:

$$\begin{cases} \Delta_h u_3^h = 0, & x_3^h \in R^h, \\ u_3^h = \varphi_3^h, & x_3^h \in \Gamma_3^h, u_3^h = 0, & \Gamma^h \setminus \Gamma_3^h, \end{cases} \quad (2)$$

где $\varphi_3^h = \varphi_3^h(x_1, x_2)$.

Тогда для представления разностного решения для задачи (2) справедлива обобщающая формулы Вазова [3] на трёхмерный случай

Лемма 1. Решение u_3^h задачи (2) представимо на $R^h \cup \Gamma^h$ в виде:

$$\begin{aligned} u_3^h(x_1, x_2, x_3) &= \sum_{m=1}^{N-1} \sum_{n=1}^{N-1} b_{mn} \omega_{mn}(x_3) \sin(\pi m x_1) \sin(\pi n x_2), \quad N=1/h=2^q, \\ b_{mn} &= 4h^2 \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{l=1}^{N-1} \varphi_3^h(kh, lh) \sin(\pi m kh) \sin(\pi n lh) \\ \omega_{mn}(x_3) &= e^{-\beta_{mn} x_3} (1 - e^{-2\beta_{mn}(1-x_3)}) (1 - e^{-2\beta_{mn}})^{-1}, \\ \beta_{mn} &= \frac{2}{h} \operatorname{arsh} \sqrt{\sin^2 \frac{\pi m h}{2} + \sin^2 \frac{\pi n h}{2}}, \quad (m+n) < \beta_{mn} < \pi \sqrt{m^2 + n^2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Доказательство леммы 1 приведено в [7].

2. Построение решений в трёхмерном кубе и на его сечениях

Обозначим через $L_j^h(a)$ множество узлов сетки R^h , лежащих в плоскости a , тогда $L_1^h(a)$, $L_2^h(b)$ - вертикальные сечения, $L_3^h(c)$ - горизонтальное сечение.

Решение на вертикальном сечении. Применим формулу (3) для нахождения приближённого решения задачи с равномерной точностью $0.25c_0 h^p$ на вертикальном сечении $L_2^h(j_0 h)$, для любого $j_0 \in \{1, 2, \dots, (N-1)\}$, где $c_0 \in (0, 1]$, $p > 0$ - заданные константы.

Находим коэффициенты Фурье b_{mn} с помощью быстрого дискретного преобразования Фурье (БПДФ), при этом потребуется $O(N^2 \ln N)$ арифметических действий [4; 12].

Обозначим $n_0 = \min\{(N-1), \left\lceil \frac{2}{\pi} \ln \frac{8N^{p+2}}{c_0} \right\rceil + 1\}$, $N_k = \min\{(N-1), \left\lceil \frac{2N}{\pi k} \ln \frac{8N^{p+2}}{c_0} \right\rceil + 1\}$,

где выражение в квадратных скобках – целая часть числа, положим

$$\begin{aligned} \omega_{mn}^*(kh) &= \begin{cases} \omega_{mn}(kh), & n_0 \geq \max\{m, n\}, \\ \exp\{-\beta_{mn} kh\}, & n_0 < \max\{m, n\} \leq N_k, \end{cases} \\ b_m^k &= \begin{cases} \sum_{n=1}^{N_k} \omega_{mn}^*(kh) \sin(\pi n j_0 h), & m \leq N_k, \\ 0, & N_k < m \leq (N-1), \end{cases} \end{aligned} \quad (4)$$

$$v_3^h(ih, j_0, kh) = \sum_{m=1}^{N-1} b_m^k \sin(\pi m i h), \quad (5)$$

где $i = 1, \dots, (N-1)$, $k = 1, \dots, (N-1)$, $j_0 \in \{1, 2, \dots, (N-1)\}$.

Значения $v_3^h(ih, j_0, kh)$ в (5) при каждом i находятся одномерным БДПФ для всех значений k . Число арифметических действий в (5) и в (6) составляет $O(N^2 \ln N)$. Для оценки отличия приближенного решения (5) от точного решения задачи на вертикальном сечении докажем следующую лемму.

Лемма 2. Справедливо неравенство:

$$\max_{1 \leq i \leq N-1} \max_{1 \leq k \leq N-1} |u_3^h(ih, j_0, kh) - v_3^h(ih, j_0, kh)| \leq 0.25C_0 h^p. \quad (6)$$

Доказательство. Из Леммы 1 и выражений (4) и (5) следует:

$$\begin{aligned} & \max_{1 \leq i \leq N-1} \max_{1 \leq k \leq N-1} \left| u_3^h(ih, j_0, kh) - v_3^h(ih, j_0, kh) \right| \leq \\ & \leq \max_{1 \leq i \leq N-1} \max_{1 \leq k \leq N-1} \left| \sum_{m=1}^{N-1} \sum_{n=1}^{N-1} b_{mn} \omega_{mn}(kh) \sin(\pi m i h) \sin(\pi n j_0 h) - \right. \\ & \quad \left. - \sum_{m=1}^{N_k} \sum_{n=1}^{N_k} b_{mn} \omega_{mn}(kh) \sin(\pi m i h) \sin(\pi n j_0 h) \right| + \\ & + \max_{1 \leq i \leq N-1} \max_{1 \leq k \leq N-1} \left| \sum_{m=1}^{N_k} \sum_{n=1}^{N_k} b_{mn} \omega_{mn}(kh) \sin(\pi m i h) \sin(\pi n j_0 h) - \right. \\ & \quad \left. - \sum_{m=1}^{N_k} \sum_{n=1}^{N_k} b_{mn} \omega_{mn}^*(kh) \sin(\pi m i h) \sin(\pi n j_0 h) \right| \equiv A + B. \end{aligned} \quad (7)$$

Оценим каждое из слагаемых в правой части (7). Используем неравенство $\sum_{j=1}^{N-1} |\sin(\pi k j h)| \leq 2(\pi h)^{-1}$ [5] выражение для b_{mn} и $|\varphi_3^h| \leq 1$. Тогда $|b_{mn}| \leq 16/\pi^2$. С учетом выражений для $\omega_{mn}(x_3)$, β_{mn} , условия $(m+n) < \beta_{mn}$ из Леммы 1 и выражения для N_k имеем при $k=1, \dots, N-1$ $\max\{m, n\} > N_k$ и получаем оценку:

$$0 < \omega_{mn}(kh) < \exp(-\beta_{mn} kh) < \exp(-\max\{m, n\} kh) \leq (C_0/8)h^{p+2}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} A &= \max_{1 \leq i \leq N-1} \max_{1 \leq k \leq N-1} \left| \sum_{\substack{m, n: \\ N_k < \max\{m, n\} \leq N-1}} b_{mn} \omega_{mn}(kh) \sin(\pi m i h) \sin(\pi n j_0 h) \right| \leq \\ & \leq \frac{16}{\pi^2} \frac{C_0}{8} h^{p+2} \max_{1 \leq i \leq N-1} \sum_{m=1}^{N-1} |\sin(\pi m i h)| \sum_{n=1}^{N-1} |\sin(\pi n j_0 h)| \leq \frac{8C_0}{\pi^4} h^p < 0.125C_0 h^p. \end{aligned}$$

Аналогично, показывается, что и второе слагаемое в правой части (7) не превосходит значения $0.125C_0 h^p$. Лемма 2 доказана.

Решение на горизонтальном сечении. Рассмотрим произвольное горизонтальное сечение $L_3^h(k_0 h)$, $k_0 \in \{1, 2, \dots, (N-1)\}$. Решение задачи (2) на этом сечении можно найти непосредственно по формулам (3) при $x_3 = k_0 h$ с помощью алгоритма БДПФ за $O(N^2 \ln N)$ арифметических операций равномерно по k_0 . При этом мы предполагаем, что все используемые значения тригонометрических функций и экспонент в общем числе $O(N^2)$ вычислены заранее.

Построение решения задачи в кубе. Решение общей задачи (1) в силу её линейности представимо в виде суммы решений шести частичных задач вида (2). При этом любое сечение $L_j^h(a)$ в R^h является вертикальным в четырёх и горизонтальным в двух частичных задачах. Поэтому решение исходной задачи (1) находится на любом сечении $L_j^h(a)$ с равномерной точностью $C_0 h^p$, для её решения требуется $O(N^2 \ln N)$ арифметических действий.

4. Алгоритмы приближенного решения разностной задачи асимптотически за два и одно действие на узел

Обозначим через $\Gamma_0^h(\rho)$ сеточный пограничный слой – множество узлов сетки R^h , удалённых от Γ^h на расстояние, не превышающее ρ .

Решение асимптотически за два сложения на узел сетки.

Выберем $C_0 \in (0;1]$, $p \in (0;3)$. Положим $\rho = A + H\{(0.5 - A)/H\}$, $A = h[1 + h^{\mu-1}C_0^{-1/5}]$, $\mu = (3-p)/8$, $\lambda = (5+p)/8$, $H = h[h^{\lambda-1}/10]$, где $[d]$ и $\{d\}$ – целая и дробная части d , соответственно. Положим, что h мало, т.е. $\rho < 1/2$, $H \geq h$ и зададим опорное множество горизонтальных сечений $\tilde{L}^H = \{L_3^h(\rho + rH)\}_{r=0}^{s_h}$, $s_h = (1-2p)H^{-1} = 2z$, $z \in \mathbb{Z}$.

Воспользуемся описанным выше методом и учтём то, что сеточный пограничный слой $\Gamma_0^h(\rho)$ образуется объединением $6\rho/h$ плоских сечений сетки R^h . Тогда на $\Gamma_0^h(\rho) \cup \tilde{L}^H$ приближённое решение v^h задачи (1) с равномерной точностью $C_0 h^p$ получается с помощью $M_1 = 9(\rho/h + s_h - 1)O(N^2 \ln N) = O(N^{(21+p)/8} \ln N)$ арифметических операций. При этом в узлах на пересечении нескольких указанных сечений в качестве v^h принимается среднее арифметическое значение имеющихся приближённых значений. Далее применяется параболическая интерполяция функции v^h по x_3 с опорного множества горизонтальных сечений $\tilde{L}^H$ в точки множества $R_0^h = R^h \setminus [\Gamma_0^h(\rho) \cup \tilde{L}^H]$. Интерполяция производится в промежутках, образуемых тремя соседними сечениями из $\tilde{L}^H$, в узлах, лежащих на среднем сечении, находятся первые разности по x_3 в обе стороны с шагом h , и вторая разность с шагом h . При вычислении этих разностей выполняется $M_2 = O(N^2/H) = O(N^{(21+p)/8})$ арифметических операций. Так как вторая разность с шагом h для параболы постоянна, в текущей точке находится первая разность сложением предыдущей первой разности со второй разностью. В свою очередь, v^h в следующем узле сетки получается сложением значения v^h и первой разности в предыдущем узле, в результате на каждый узел, в который производится интерполяция, требуется два сложения. Справедлива

Теорема. Для приближенного решения v^h справедлива следующая оценка невязки:

$$\delta^h = \max_{(x_1, x_2, x_3) \in R^h} |v^h - u^h| \leq 2C_0 h^p, \quad C_0 \in (0;1], p \in (0;3),$$

где u^h решение задачи (1), причём в пересчёте на один узел сетки R^h выполняется $M = 2 + \varepsilon_h$ арифметических операций, здесь

$$\varepsilon_h \leq (M_1 + M_2)(N-1)^{-3} = O(N^{(p-3)/8} \ln N) = o(1).$$

Доказательство теоремы приведено в [7].

Решение асимптотически за одно сложение на узел сетки.

Выберем $C_0 \in (0;1]$, $p \in (0;2)$, положим $\rho = A + H\{(0.5 - A)H^{-1}\}$, $A = h[1 + h^{\mu-1}C_0^{-1/4}]$, $\lambda = (4+p)/6$, $\mu = (2-p)/6$, $H = h[h^{\lambda-1}/10]$. Аналогично предыдущему пункту находим на $\Gamma_0^h(\rho) \cup \tilde{L}^H$ приближённое решение с равномерной точностью $C_0 h^p$. Затем решение v^h интерполируем линейно по x_3 между соседними горизонтальными сечениями, принадлежащими $\tilde{L}^H$ в точки множества $R_0^h = R^h \setminus [\Gamma_0^h(\rho) \cup \tilde{L}^H]$ путем прибавления на каж-

дом шаге h постоянной первой разности. Приближённое решение v^h удовлетворяет неравенству вида $\delta^h = \max_{(x_1, x_2, x_3) \in R^h} |v^h - u^h| \leq 2C_0 h^p$, где u^h – решение задачи (1).

При этом в пересчёте на один узел сетки R^h требуется выполнить $(1 + \varepsilon_h)$ арифметических операций, где $\varepsilon_h = O(N^{(p-2)/6} \ln N) = o(1)$.

ЛИТЕРАТУРА.

1. *Batchelor G.K.* An introduction to Fluid Dynamics / Cambridge Univ. Press. 2000. 635 p.
2. *Chorin A.J.* Vorticity and Turbulence / Springer. 1994. 174 p.
3. *Wasow W.* On the truncation error in the solution of Laplace's equation by finite differences // J. Res. Nat. Bur. Standards. 1952. V.48. P. 345-348.
4. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы / Бином. Лаборатория знаний. 2011. 636 с.
5. *Бахвалов Н.С., Орехов М.Ю.* О быстрых способах решения уравнения Пуассона // ЖВМиМФ. 1982. Т. 22. №6. С. 1386-1392.
6. *Волков Е.А.* Асимптотически быстрый приближённый метод нахождения на сеточных отрезках решения разностного уравнения Лапласа // Тр. МИАН СССР. 1986. Т.173. С. 69-89.
7. *Волков В.Е.* Асимптотически быстрые приближённые методы решения разностного уравнения Лапласа в кубе // ЖВМиМФ. 1996. Т. 36. С. 90-97.
8. *Марчук Г.И.* Методы вычислительной математики / М.: Наука. 1989. 456 с.
9. *Монин А.С., Озмидов Р.В.* Океанская турбулентность / Л.: Гидрометеиздат. 1981. 320 с.
10. *Озмидов Р.В.* Диффузия примесей в океане / Л.: Гидрометеиздат. 1986. 278 с.
11. *Романова С.Е.* Приближённые методы решения разностного уравнения Лапласа асимптотически за одно и два сложения на точку // Докл. АН СССР. 1983. Т.273. №1. С. 49-54.
12. *Самарский А.А., Николаев Е.С.* Методы решения сеточных уравнений / М.: Мир. 1983. 590 с.

ABOUT FAST APROXIMATE METHODS OF SOLVING PROBLEMS OF OCEAN FLOWS HYDRODYNAMICS

V. Volkov, V. Prostokishin, D.Orlovskiy

National Research Nuclear University «MEPhI» (Moscow)
31, Kashirskoe shosse, Moscow, 115409, Russia

Abstract. Three dimension equation of liquid in ocean flows is described. Approximation on three dimension numerical grid with “frozen” turbulent exchange coefficients gets to Dirichlet's problem for Laplace's differential equation in a cube, and this problem is investigated. A method of solving it with prescribed uniform accuracy on a set off grid nodes in plane section of the cube is proposed. Asymptotically fast approximate methods for solving Dirichlet's problem in the entire grid cube which use one or two additions per node are described, and explicit error estimate are given.

Key words: Laplace's equation, Dirichlet's problem, fast approximate algorithm, numerical error.

УДК 517.518.84

СИНТЕЗ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ МНОГОМЕРНОГО ОБЪЕКТА ПО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ ДАННЫМ В ВИДЕ РАЦИОНАЛЬНОЙ ДРОБИ

А.Н. Гусев

Московский государственный областной университет
105005, Москва, ул. Радио, 10а

Аннотация. В статье рассматриваются варианты аппроксимации функций рациональными дробями. Показаны преимущества и ограничения аппроксимации Паде для аппроксимации аналитически заданных дифференцируемых функций. Преобразованием универсальной топологической модели, построенной на основе экспериментальных данных о параметрах многомерного объекта, получена рациональная аппроксимация рациональной дробью. Определен порядок полиномов числителя и знаменателя рациональной дроби. Структура рациональной дроби позволяет анализировать устойчивость объекта, определяя нули полинома знаменателя.

Ключевые слова: аппроксимация Паде, рациональная дробь, полином, многомерный объект, топологические инварианты, устойчивость.

Рациональные представления обладают значительными преимуществами в сравнении с полиномиальными. Рациональная дробь содержит два полинома (числителя и знаменателя), которые объединены операцией деления. Такое отличие порождает целый ряд преимуществ, проявляющихся в задачах приближения аналитически заданных функций и аппроксимации неизвестных функций, заданных экспериментальными значениями.

Рассмотрим три простых численных примера. Допустим, имеется рациональная дробь вида

$$\frac{L(x)}{M(x)} = \frac{a_0 + a_1 \cdot x + \dots + a_n \cdot x^n}{b_0 + b_1 \cdot x + \dots + b_m \cdot x^m},$$

1) пусть при определенном значении x она равна $9,42/3 = 3,14$. В этом примере на основе исходных данных в виде двух чисел (с тремя и одним значащими числами) мы получили значение с тремя значащими числами.

2) допустим, переменная x приобрела такое значение, что рациональная дробь стала равной $9,8956/3,15 = 3,1414(603174)$. В этом случае мы имеем результат, в котором число значащих разрядов бесконечно, однако шесть значащих цифр периодически повторяются.

3) наконец, пусть x такое, что рациональная дробь стала равной $9,8955/3,1499 = 3,141628039875547653819290113658$. При этом в пределах 32-х разрядной сетки вычислительного устройства мы не наблюдаем периодичности результирующего значения.

Таким образом, мы обнаружили, что рациональная дробь является источником потенциально «бесконечного» количества информации, которое практически, конечно,

ограничивается длиной разрядной сетки применяемого вычислительного устройства. Такая ситуация невозможна, если функция представляется полиномом.

Самым известным и практически единственным методом получения рационального приближения функции одной переменной является аппроксимация Паде [1]. Этот метод требует знания аналитического представления самой функции и всех её производных.

Пусть задан следующий ряд:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \cdot x^i, \quad (1)$$

представляющий функцию $f(x)$.

Аппроксимация Паде - это рациональная функция, представляющая собой отношение двух полиномов: L порядка n и M порядка m :

$$\varphi(x) = \frac{L(x)}{M(x)} = \frac{a_0 + a_1 \cdot x + \dots + a_n \cdot x^n}{b_0 + b_1 \cdot x + \dots + b_m \cdot x^m} \quad (2)$$

Метод аппроксимации Паде основан на разложении функции $\varphi(x)$ в ряд Тейлора таким образом, чтобы оно совпадало с разложением $f(x)$ (1). Совпадение определяется равенством соответствующих коэффициентов разложений функций $f(x)$ и $\varphi(x)$:

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i \cdot x^i = \frac{a_0 + a_1 \cdot x + \dots + a_n \cdot x^n}{b_0 + b_1 \cdot x + \dots + b_m \cdot x^m} + O(x^{n+m+1}) \quad (3)$$

Для составления уравнений для неизвестных коэффициентов a_i , b_i умножим обе части уравнения (3) на знаменатель дроби:

$$(b_0 + b_1 \cdot x + \dots + b_m \cdot x^m) \cdot (c_0 + c_1 \cdot x + \dots) = a_0 + a_1 \cdot x + \dots + a_n \cdot x^n + O(x^{n+m+1}) \quad (4)$$

Очевидно, что поскольку порядок полинома правой части равен n , все коэффициенты левой части при x со степенями более n , а именно $n+1$, $n+2$, $n+3$, ..., $n+m$ должны быть равны нулю:

$$\begin{aligned} b_m \cdot c_{n-m+1} + b_{m-1} \cdot c_{n-m+2} + \dots + b_1 \cdot c_n + b_0 \cdot c_{n+1} &= 0 \\ b_m \cdot c_{n-m+2} + b_{m-1} \cdot c_{n-m+3} + \dots + b_1 \cdot c_{n+1} + b_0 \cdot c_{n+2} &= 0 \\ \dots \\ b_m \cdot c_n + b_{m-1} \cdot c_{n+1} + \dots + b_1 \cdot c_{n+m-1} + b_0 \cdot c_{n+m} &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Для того, чтобы (5) можно представить в виде системы m линейных уравнений с m неизвестными коэффициентами знаменателя b_i ($i = 1, 2, \dots, m$) обычно принимают $b_0 = 1$. Решение новой системы относительно b_i , если оно существует, позволяет найти затем все коэффициенты числителя a_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) сравнением коэффициентов в равенстве (4) для свободных членов и при всевозможных степенях x не более n , а именно x , x^2 , x^3 , ..., x^n .

$$\begin{aligned}
 a_0 &= c_0 \\
 a_1 &= c_1 + b_1 \cdot c_0 \\
 a_2 &= c_2 + b_1 \cdot c_1 + b_2 \cdot c_0 \\
 &\dots \\
 a_n &= c_n + b_1 c_{n-1} + \dots + b_n c_0
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

Третий численный пример, приведенный выше, подтверждает важнейшее свойство аппроксимации Паде - выражение (2) с известными коэффициентами a_i , b_i , обеспечивающими равенство (3), содержит полную информацию об аппроксимируемой функции $f(x)$, хотя формально полиномы числителя и знаменателя в (2) имеют конечный порядок.

Этим свойством объясняется высокое качество аппроксимаций целого ряда важных для практических применений функций, когда представление в виде рациональной дроби открывает возможности для решения задач синтеза и анализа систем автоматического управления, анализа устойчивости их звеньев и систем в целом, а также в других технических применениях.

Аппроксимация Паде имеет множество реализаций, если система (5) имеет решение, т.к. значение свободного члена b_0 было установлено произвольно, порядки полиномов числителя и знаменателя n и m также можно менять, получая аппроксимацию с наилучшим результатом.

В табл. 1 приведены девять вариантов аппроксимации функции $f(x) = e^x$ в зависимости от принятых порядков n и m [2].

Таблица 1

Варианты аппроксимаций Паде функции $f(x) = e^x$
в зависимости от порядков полиномов рациональной дроби

$n \setminus m$	0	1	2
0	$\frac{1}{1}$	$\frac{1+x}{1}$	$\frac{2+2x+x^2}{1}$
1	$\frac{1}{1-x}$	$\frac{2+x}{2-x}$	$\frac{6+4x+x^2}{6-2x}$
2	$\frac{2}{2+2x+x^2}$	$\frac{6+2x}{6-2x+x^2}$	$\frac{12+6x+x^2}{12-6x+x^2}$

Можно попытаться найти аппроксимацию Паде для функции многих переменных $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Для этого в рамках идеи метода необходимо записать рациональную дробь в виде:

$$\begin{aligned}
 \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \frac{L(x_1, x_2, \dots, x_n)}{M(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \\
 &= \frac{a_0 + a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \dots + a_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 + \dots + a_{123} \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + \dots + a_n \cdot x_1^n + \dots}{b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + \dots + b_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 + \dots + b_{123} \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + \dots + b_m \cdot x_1^m + \dots}
 \end{aligned}$$

и затем искать соответствие коэффициентов этой дроби с её разложением в ряд Тейлора по формуле для функции многих переменных [3].

В такой постановке, в отличие от равенства (4) с одноиндексными коэффициентами a_i , b_i , решение задачи определения аппроксимации Паде, которая характеризуется многоиндексными коэффициентами, требует формирования множества синхронно решаемых

мых систем линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов с одной системой индексов. Очевидно, что отсутствие решения хотя бы одной системы линейных алгебраических уравнений из сформированного множества, исключает наличия полного решения задачи определения аппроксимации Паде в многомерном случае.

Аппроксимации экспериментальных данных основаны на методах максимального правдоподобия [3], минимизирующих разности экспериментальных данных со значениями искомой сглаживающей функции. Впервые этот метод практически применил К. Гаусс для функции одного переменного, который затем назвали методом наименьших квадратов [4].

В современной литературе редко приводятся сведения о применении метода наименьших квадратов для получения сглаживающей функции многих переменных, что связано с тем, что метод не дает рекомендаций по выбору класса или аналитического представления вида аппроксимируемой функции. В частности в работе [5] автор данной статьи смог предложить методику получения сглаживающей функции трех переменных в условиях, когда экспериментальные данные были получены виде поверхностей уровня для одного из параметров. Однако полное решение задачи потребовало применения сочетания метода наименьших квадратов на первом этапе аппроксимации с построением полинома Лагранжа на втором этапе аппроксимации для специально подобранного класса функций.

В общем случае экспериментальные данные не являются поверхностями уровня, поэтому от эксперимента к эксперименту мы можем получить произвольные экспериментальные значения (табл. 2).

Таблица 2

Многомерные экспериментальные данные

№ эксперимента j	x_1	x_2	...	x_{n-1}	$x_n = f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$	$T(j)$
1	x_{11}	x_{21}		$x_{n-1,1}$	f_1	
2	x_{12}	x_{22}		$x_{n-1,2}$	f_2	
3	x_{13}	x_{23}		$x_{n-1,3}$	f_3	
4	x_{14}	x_{24}		$x_{n-1,4}$	f_4	
5	x_{15}	x_{25}		$x_{n-1,5}$	f_5	
6	x_{16}	x_{26}		$x_{n-1,6}$	f_6	
7	x_{17}	x_{27}		$x_{n-1,7}$	f_7	
8	x_{18}	x_{28}		$x_{n-1,8}$	f_8	
9	x_{19}	x_{29}		$x_{n-1,9}$	f_9	
...						
N	x_{1N}	x_{2N}		$x_{n-1,N}$	f_N	

Для построения рациональной модели по имеющимся экспериментальным данным получим сначала универсальную математическую модель многомерного объекта, основанную на групповом преобразовании [6], в котором каждая переменная разложена на две линейные составляющие:

$$x_i = (k_1 \cdot x_i + b_1) + (-k_2 \cdot x_i - b_2), \quad (7)$$

где $k_1 = \frac{b}{b-a}$, $b_1 = -\frac{a \cdot b}{b-a}$, $k_2 = \frac{a}{b-a}$, $b_2 = -\frac{a \cdot b}{b-a}$. $b = \max x_{ij}$ $a = \min x_{ij}$.

При этом все множество экспериментальных значений, приведенных в табл. 1 оказывается внутри ограниченного параллелепипеда с размерами по каждой стороне $(b-a)$, и пространство объекта становится компактным. Параметры k_1, k_2, b_1, b_2 будем называть прямыми топологическими инвариантами. Наши дальнейшие преобразования при построении универсальной математической модели объекта (УММ) осуществляются с использованием нормы в виде мультипликативно-аддитивной нормы $T(j)$, значения которой вычисляются с использованием экспериментальных данных для каждого j -го измерения, т.е. в пространстве размерности n [7]:

$$T(j) = ((k_1 \cdot f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})_j + b_1) + (-k_2 \cdot f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})_j - b_2)) \cdot \left[\prod_{i=1, n-1} ((k_1 \cdot x_{ij} + b_1) + (-k_2 \cdot x_{ij} - b_2)) \right]. \quad (8)$$

Все значения $T(j)$ являются константами и могут быть занесены в табл. 2. Норма позволяет аналитически выразить любую переменную исходного пространства через остальные переменные этого пространства и значения нормы $T(j)$. Значения $T(j)$ от эксперимента к эксперименту остаются практически постоянными, поэтому $T(j)$ будем называть производным топологическим инвариантом.

Значения $f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})_j$ в j -м узле рассчитываются по формуле, прямо вытекающей из формулы (8):

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})_j = \left(\frac{T(j)}{\prod_{i=1, n-1} ((k_1 \cdot x_{ij} + b_1) + (-k_2 \cdot x_{ij} - b_2))} + (b_2 - b_1) \right) \cdot \frac{1}{k_1 - k_2}. \quad (9)$$

Для произвольных значений переменных $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ можно применить следующую формулу, представляющую собой симплекс, натянутый на точки, вычисляемые по формуле (9) [38]:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = \left(\frac{\sum_{j=1, N} \frac{1/\delta(j)}{\Delta} T(j)}{\prod_{i=1, n-1} ((k_1 \cdot x_i + b_1) + (-k_2 \cdot x_i - b_2))} + (b_2 - b_1) \right) \times \frac{1}{k_1 - k_2}, \quad (10)$$

где

$$\delta(j) = \prod_{i=1, n-1} ((k_1 \cdot x_{ij} + b_1) + (-k_2 \cdot x_{ij} - b_2)) - \prod_{i=1, n-1} ((k_1 \cdot x_i + b_1) + (-k_2 \cdot x_i - b_2)), \quad (11)$$

$$\Delta = \sum_{j=1, N} 1/\delta(j). \quad (12)$$

Обозначим:

$$A(j) = \prod_{i=1, n-1} ((k_1 \cdot x_{ij} + b_1) + (-k_2 \cdot x_{ij} - b_2))$$

$$\begin{aligned}
 P(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) &= \prod_{i=1, n-1} ((k_1 \cdot x_i + b_1) + (-k_2 \cdot x_i - b_2)) = \\
 &= \sum_{i, j, \dots, s=0,1} x_1^i \cdot x_2^j \cdot \dots x_{n-1}^s \cdot (k_1 - k_2)^{(i+j+\dots+s)} \cdot (b_2 - b_1)^{(n-1-i-j-\dots-s)}, \quad (13)
 \end{aligned}$$

тогда формулу (10) можно переписать в виде:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = \left(\frac{\sum_{j=1, N} \frac{\frac{1}{A(j) - P(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})}}{1} \cdot T(j)}{\sum_{j=1, N} \frac{1}{A(j) - P(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})}} + (b_2 - b_1) \right) \times \frac{1}{k_1 - k_2}. \quad (14)$$

Если обозначить:

$$\sum_{j=1, N} \frac{1}{A(j) - P(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})} = \frac{\sum_{j=1, N} \prod_{\substack{k=1, N \\ k \neq j}} (A(k) - P(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}))}{T(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})},$$

где $T(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = \prod_{j=1, N} (A(j) - P(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}))$,

то формулу (13) можно переписать иначе, т.к. $P(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ и $T(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ не зависят от j :

$$\begin{aligned}
 f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) &= \left(\frac{T(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \cdot \sum_{j=1, N} \frac{1}{A(j) - P(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})} \cdot T(j)}{P(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \cdot \sum_{j=1, N} \prod_{\substack{k=1, N \\ k \neq j}} (A(k) - P(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}))} + (b_2 - b_1) \right) \cdot \frac{1}{k_1 - k_2} = \\
 &= \frac{T(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \cdot \sum_{j=1, N} \{T(j) \cdot \sum_{j=1, N} \prod_{\substack{k=1, N \\ k \neq j}} (A(k) - P(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}))\} + (b_2 - b_1)}{(k_1 - k_2) \cdot P(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \cdot \sum_{j=1, N} \prod_{\substack{k=1, N \\ k \neq j}} (A(k) - P(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})) \cdot T(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})} = \\
 &= \frac{\sum_{j=1, N} \prod_{\substack{k=1, N \\ k \neq j}} A(k) \cdot [(k_1 \cdot f_k + b_1) + (-k_2 \cdot f_k - b_2)] (A(k) - P(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}))}{(k_1 - k_2) \cdot P(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \cdot \sum_{j=1, N} \prod_{\substack{k=1, N \\ k \neq j}} (A(k) - P(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}))} +
 \end{aligned}$$

$$(b_2 - b_1) \cdot P(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \cdot \sum_{j=1, N} \prod_{\substack{k=1, N \\ k \neq j}} (A(k) - P(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})) + \frac{(k_1 - k_2) \cdot P(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \cdot \sum_{j=1, N} \prod_{\substack{k=1, N \\ k \neq j}} (A(k) - P(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}))}{M(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})} = \frac{L(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})}{M(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})}. \quad (15)$$

Структура полинома $P(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$, определенная формулой (13), определяет его порядок $(n-1)$. Нули полинома $P(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ зависят только от значений прямых инвариантов и количества переменных $(n-1)$.

Второй сомножитель полинома $M(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ имеет следующую структуру слагаемых:

$$\sum_{j=1, N} \prod_{\substack{k=1, N \\ k \neq j}} (A(k) - P(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})) = N \cdot (-1)^{N-1} x_1^{N-1} \cdot x_2^{N-1} \dots x_{n-1}^{N-1} \cdot (k_1 - k_2)^{(n-1)(N-1)} + \dots + \prod_{j=1, N-1} [A(j) - (b_2 - b_1)]. \quad (16)$$

Порядок второго сомножителя как видно из формулы равен $(n-1) \cdot (N-1)$, поэтому порядок знаменателя $M(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ равен $(n-1)^2 \cdot (N-1)$. Второй сомножитель имеет нули, зависящие от прямых и производных топологических инвариантов, а также экспериментальных данных табл. 2.

Порядок полинома числителя $L(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$, как видно из формулы (15) с учетом формулы (16), также равен $(n-1)^2 \cdot (N-1)$.

Анализ всех нулей полинома $M(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ может дать полную информацию о расположении областей устойчивости моделируемого рациональной дробью многомерного объекта с учетом точности получения экспериментальных данных и алгоритма поиска нулей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П. Аппроксимация Паде. Пер. с англ. – М.: Мир, 1986. – 502 с.
2. Громов Ю.Ю., Татаренко С.И. Введение в методы численного анализа. Тамбов, ТГУ – 2001. – 155 с.
3. Корн Т., Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1984. – 832 с.
4. Бронштейн Д.А., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов. М.: Наука, 1980. – 976 с.
5. Гусев А.Н. Расчет выходных характеристик световодного жидкокристаллического индикатора // Электронная техника. Сер. 5. Радиодетали и радиокомпоненты, 1985, № 1, С. 43-47.
6. Гусев А.Н. Генерация и применение линейных пространств в информационной технологии обработки многомерной информации. // Сб. научн. трудов "Информационные технологии и семиотика". М.: ВНИИКИ, 1999, с. 112-122.

7. Гусев А.Н. Информационная технология сопровождения многомерных объектов: идентификация, прогнозирование, оптимизация, управление, обеспечение качества. М.: МГОУ, 2010, 361 с.

**SYNTHESIS OF N-DIMENSIONAL MATHEMATICAL MODEL
FOR EXPERIMENTAL DATA OBJECT AS A RATIONAL FRACTION**

A. Gusev

*Moscow region state university
10a, Radio st., Moscow, 105005, Russia*

Abstract. This article discusses options for approximation of functions of rational fractions. Here are shown the advantages and restrictions of approximation of Pade for approximation of analytically set differentiated functions. Transformation of universal topological model based on experimental data on the characteristics of a n -dimensional object received good approximation of rational fraction. The order of polynoms of numerator and denominator of rational fraction is defined. Structure of rational fraction object allows you to analyze sustainability, defining a zero denominator polynomial.

Keywords: Pade approximation, rational fraction, polynomial, multidimensional object, topological invariants, sustainability.

УДК 514.77 + 512.54 + 517.91

**ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ И АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА
СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

О.А. МАТВЕЕВ*, А.В. ПАНШИНА**

**Московский государственный областной университет,
105005, Москва, ул. Радио, 10а*

***Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
105005, Москва, ул. 2-я Бауманская, 5*

Аннотация. Многообразиям аффинной связности и их обобщениям – многообразиям с траекториями сопоставляются широкие классы систем обыкновенных дифференциальных уравнений, свойства решений которых, в результате предлагаемой конструкции, получают точное дифференциально-геометрическое и алгебраическое описание. Выделяются случаи локально симметрических и плоских (абелевых) систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Полученные результаты используются для исследования Лагранжевых механических систем.

Ключевые слова: системы обыкновенных дифференциальных уравнений, механические системы, аффинная связность, квазигруппа.

1. Введение.

Общепризнанно плодотворное взаимодействие классической дифференциальной геометрии и аналитической механики, в частности очень интересна, на наш взгляд, связь между локально симметрическими пространствами Эли Картана и интегрируемыми гамильтоновыми дифференциальными уравнениями [1]-[3]. Напомним, что дифференцируемое многообразие аффинной связности называется локально симметрическим, если его поле кручения T равно нулю, и первая ковариантная производная тензорного поля кривизны также равна нулю. Симметрические пространства, введенные Эли Картаном, обладают математически красивыми алгебраическими свойствами, геодезические симметрии относительно каждой точки являются локальными изоморфизмами аффинной связности. Симметрические многообразия прочно вошли в современную математику. Ввиду богатства топологической и алгебраической структуры эти пространства являются удобным материалом, на котором проверяется эффективность многих современных математических методов. Самые разнообразные вопросы из дифференциальной геометрии, теории групп, дифференциальных уравнений, аналитической механики, теоретической физики часто сводятся к тем или иным задачам на симметрических пространствах. Известно (О. Лоос. Симметрические пространства.), что симметрическое пространство может рассматриваться, как гладкая идемпотентная леводистрибутивная квазигруппа с «тождеством ключей». Левые сдвиги этой квазигруппы и есть геодезические симметрии. Позднее этот результат был обобщен. Свойства геодезических линий симметрических пространств подробно и глубоко изучены и обобщаются на траектории механических систем широкого класса. Некоторые результаты в этом направлении представлены в работах [4]-[11].

Выявляется роль, которую играют такие алгебраические структуры, как квазигруппы, в исследовании и описании геометрических свойств решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, описывающих Лагранжевы механические системы. В конструкции задействована алгебраическая теория пространств аффинной связности. Используется понятие многообразия с геодезическими - точного алгебраического аналога аффинно-связного многообразия с нулевым тензорным полем кручения. Устанавливается, что решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка представляют собой многообразия с траекториями, обобщающими многообразия с геодезическими.

Произвольному пространству аффинной связности можно сопоставить однопараметрическое семейство локальных идемпотентных эластичных квазигрупп, определяемых каноническим (аффинным) параметром вдоль геодезических линий. Было введено новое понятие - пространство с геодезическими, как алгебра с однопараметрическим семейством бинарных операций, связанных определенными тождествами. Было установлено взаимно однозначное соответствие между гладкими многообразиями с геодезическими и аффинно-связными многообразиями с нулевым тензором кручения. Таким образом, был построен алгебраический эквивалент экспоненциального отображения. Этот результат был достигнут в связи с переводом на алгебраический язык теории геодезических отображений пространств аффинной связности.

С алгебраической точки зрения многообразие с траекториями представляет собой трёхпараметрическое семейство локальных гладких квазигрупп, операции умножения которых связаны определенными тождествами. Некоторые специальные геометрические свойства траекторий механической системы выражаются дополнительными тож-

действиями соответствующей алгебраической системы. Исследование опирается на алгебраическую теорию симметрических и абелевых (плоских) аффинно-связных пространств. Локально симметрическим и локально плоским многообразиям аффинной связности сопоставляются широкие классы Лагранжевых механических систем, которые в результате предлагаемой конструкции получают точное дифференциально-геометрическое и алгебраическое описание. Исследованы примеры, подтверждающие корректность построенной теории. Результаты, полученные в этом направлении, опубликованы в работах [4]–[11].

В связи с локально симметрическими и локально плоскими многообразиями аффинной связности рассматриваются механические системы. Устанавливается, что механические системы широкого класса представляют собой многообразия с траекториями, приводится точное описание класса локально симметрических и абелевых механических систем в дифференциально-геометрических терминах.

2. Многообразия с траекториями.

Определение 2.1. Пусть M - гладкое (дифференцируемое) действительное многообразие и $\varphi: R^3 \times M^2 \rightarrow M$,

$\varphi(t, u, v, x, y) = \psi(t, u, v)(x, y) = (t, u, v)_x y \in M \quad (x, y \in M, t, u, v \in R)$ - частичное гладкое локальное отображение.

Для фиксированных действительных чисел t_o, u_o, v_o ($u_o \neq v_o$) отображение φ определяет частичную гладкую локальную бинарную операцию $\psi_{(t_o, u_o, v_o)}(x, y) = (t_o, u_o, v_o)_x y$, где $x, y \in M$. Частичная гладкая локальная алгебра $\mathcal{M} = \langle M, (\psi_\tau)_{\tau \in R^3} \rangle$ называется многообразием с траекториями, если выполняются следующие условия:

а) для любой точки x из M и для достаточно малого действительного числа $\varepsilon > 0$ существует открытая окрестность U_x , такая что $(t, u, v)_y z$ определено и принадлежит U_x для $y, x \in U_x$, $0 < |u - v| < \varepsilon$, $t \in I$, где I - связный открытый действительный интервал, содержащий $[u, v]$, если $v > u$, или $[v, u] \subset I$ при $v < u$;

б) Локально выполняются следующие тождества:

$$(t, u, v)_x (v, u, w)_x y = (t, u, w)_x y, \quad u \neq v, \quad u \neq w; \quad (2.1)$$

$$(t, u, v)_x y = (t, v, u)_y x, \quad u \neq v; \quad (2.2)$$

$$(t, u, t)_x y = y, \quad u \neq v; \quad (2.3)$$

где $x, y \in M$, $t, u, v \in R$.

При фиксированных u, v ($u \neq v$) множество точек $\{(t, u, v)_x y\}_{t \in I}$ можно рассматривать как траекторию, выходящую из точки x при $t = u$ и входящую в точку y при $t = v$.

Предложение 2.1. Пусть $\mathcal{M} = \langle M, (\psi_\tau)_{\tau \in R^3} \rangle$ частичное гладкое локальное многообразие с траекториями. Тогда локально выполняются следующие тождества:

$$(t, t, u)_x y = x, \quad t \neq u; \quad (2.4)$$

$$(t, \alpha, \beta)_{(\alpha, u, v)_x y} (\beta, u, v)_x y = (t, u, v)_x y, \quad (2.5)$$

$$\alpha \neq \beta, \quad u \neq v; \quad t, u, v, \alpha, \beta \in R; \quad x, y \in M.$$

Доказательство. Докажем (2.4). Используя (2.2) и (2.3) имеем

$$(t, t, u)_x y = (t, u, t)_y x = x.$$

Теперь, положив $a = (\alpha, u, v)_x y$, имеем

$$(v, u, \alpha)_x a = (v, u, \alpha)_x (\alpha, u, v)_x y = (v, u, v)_x y = y.$$

Т.к. $y = (v, u, \alpha)_x a$, то получим:

$$\begin{aligned} (t, \alpha, \beta)_{(\alpha, u, v)_x y} (\beta, u, v)_x y &= (t, a, \beta)_{(\alpha, u, v)_x y} (\beta, u, v)_x (v, u, \alpha)_x a = \\ &= (t, \alpha, \beta)_{(\alpha, u, v)_x y} (\beta, u, \alpha)_x a = (t, \alpha, \beta)_\alpha (\beta, u, \alpha)_x a = \\ &= (t, \alpha, \beta)_\alpha (\beta, \alpha, u)_a x = (t, \alpha, u)_\alpha x = (t, u, \alpha)_x a = \\ &= (t, u, \alpha)_x (\alpha, u, v)_x y = (t, u, v)_x y. \end{aligned}$$

Предложение 2.2. Пусть $\mathcal{M} = \langle M, (\psi_\tau)_{\tau \in R^3} \rangle$ - частичное гладкое локальное многообразие с траекториями. Тогда для некоторого фиксированного $\tau_o = (t_o, u_o, v_o)$, $u_o \neq v_o$, $t_o \neq u_o$, $t_o \neq v_o$ отображение $\psi_{(t_o, u_o, v_o)} : M \times M \rightarrow M$ определяет частичную гладкую локальную бинарную операцию $x \underset{(t_o, u_o, v_o)}{\cdot} y = \psi_{(t_o, u_o, v_o)}(x, y)$, и алгебра $\langle M, \underset{(t_o, u_o, v_o)}{\cdot} \rangle$ есть частично гладкая локальная двусторонняя квазигруппа.

Доказательство. Возьмем действительные числа t_o, u_o, v_o ; $u_o \neq v_o$, $\tau_o = (t_o, u_o, v_o)$, и определим правое ($\backslash_{\tau_o}$) и левое ($/_{\tau_o}$) деления формулами:

$$x \backslash_{\tau_o} z = (v_o, u_o, t_o)_x z, \quad z /_{\tau_o} y = (u_o, v_o, t_o)_y z, \quad x, y, z \in M. \quad (2.6)$$

Теперь необходимо проверить следующие тождества:

$$x \dot{\tau}_o (x \backslash_{\tau_o} z) = z, \quad (z /_{\tau_o} y) \dot{\tau}_o y = z.$$

В соответствии с (2.1)-(2.3) имеем:

$$\begin{aligned} x \dot{\tau}_o (x \backslash_{\tau_o} z) &= (t_o, u_o, v_o)_x (x \backslash_{\tau_o} z) = (t_o, u_o, v_o)_x (v_o, u_o, t_o)_x z = \\ &= (t_o, u_o, t_o)_x z = z, \\ (z /_{\tau_o} y) \dot{\tau}_o y &= [(u_o, v_o, t_o)_y z]_{\dot{\tau}_o} y = (t_o, u_o, v_o)_{(u_o, v_o, t_o)_y x} y = \\ &= (t_o, v_o, u_o)_y (u_o, v_o, t_o)_y z = (t_o, v_o, t_o)_y z = z. \end{aligned}$$

Аналогично проверяются и тождества $x \backslash_{\tau_o} (x \dot{\tau}_o y) = y$ и $(x \dot{\tau}_o y) /_{\tau_o} y = x$.

Пример. Рассмотрим решения системы дифференциальных уравнений второго порядка на многообразии M (в локальной системе координат)

$$\ddot{x}^i = f^i(x, \dot{x}, t), \quad i = \overline{1, n} \quad (\dot{x}^i = \frac{dx^i}{dt}). \quad (2.7)$$

Пусть система (2.7) имеет (локально) единственную траекторию $x(t) = (t, u, v)_y z$, $x(u) = y$, $x(v) = z$, выходящую из точки y при $t = u$, и приходящую в z при $t = v$. Пусть также выполнено условие а) из определения 2.1. Тогда приходим к многообразию с траекториями.

Некоторые свойства дифференциальных уравнений на множестве M можно охарактеризовать алгебраическими тождествами на многообразии с траекториями $\mathcal{M}$. Например, нетрудно показать, что верны предложения 2.3 и 2.4

Предложение 2.3. Пусть многообразие с траекториями $\mathcal{M} = \langle M, (\psi_\tau)_{\tau \in R^3} \rangle$ определено на M дифференциальными уравнениями второго порядка вида (2.7) в локальной системе координат. Тогда для некоторого $\tau_o = (t_o, u_o, v_o)$, $t_o \neq u_o$, $u_o \neq v_o$, $v_o \neq t_o$, квазигруппа $\langle M, \dot{\tau}_o \rangle$ идемпотентна, т.е.

$$x_{\dot{\tau}_o} x = (t_o, u_o, v_o)_x x = x \quad (2.8)$$

если $f^i(x, 0, t) \equiv 0$, $i = \overline{1, n}$ ($n = \dim M$).

Предложение 2.4. Многообразие с траекториями $\mathcal{M}$ определено автономным дифференциальным уравнением второго порядка на M , имеющим в некоторой локальной системе координат следующий вид

$$\ddot{x}^i = g^i(x, \dot{x}), \quad i = \overline{1, n} \quad (n = \dim M), \quad (2.9)$$

если выполнено (локально) на $\mathcal{M}$ тождество:

$$(t, u, v)_x y = (t + w, u + w, v + w)_x y, \quad (2.10)$$

где $u \neq v$; $t, u, v, w \in R$; $x, y \in M$.

Предложение 2.5. Пусть $\mathcal{M} = \langle M, (\psi_\tau)_{\tau \in R^3} \rangle$ является частично гладким локальным многообразием с траекториями. Определим однопараметрическое семейство частично гладких локальных бинарных операций $\omega_r: (M \times R) \times (M \times R) \rightarrow M \times R$ следующей формулой:

$$\omega_r(\bar{x}, \bar{y}) = r_{\bar{x}} \bar{y} = [((\beta - \alpha)r + \alpha, \alpha, \beta)_x y, (\beta - \alpha)r + \alpha], \quad (2.11)$$

где $\bar{x}, \bar{y} \in M \times R$, $\bar{x} = (x, \alpha)$, $\bar{y} = (y, \beta)$, $\alpha \neq \beta$; $r, \alpha, \beta \in R$. (Если $\alpha = \beta$, то операция ω_r не определена.) Тогда $\Omega = \langle M \times R, (\omega_r)_{r \in R} \rangle$ есть частично гладкое локальное многообразие с геодезическими.

Определение 2.2. Частично гладкое локальное многообразие с траекториями $\mathcal{M} = \langle M, (\psi_\tau)_{\tau \in R^3} \rangle$ называется автономным, если тождество (2.10) локально выполнено на $\mathcal{M}$.

Предложение 2.6. Пусть $\mathcal{M} = \langle M, (\psi_\tau)_{\tau \in R^3} \rangle$ является частично гладким локальным автономным многообразием с траекториями. Определим двухпараметрическое семейство бинарных операций формулой:

$$\Theta(\alpha, \beta, x, y) = (\alpha, \beta)_x y = (t - u, 0, v - u)_x y = \varphi(t - u, 0, v - u, x, y), \quad (2.12)$$

где $\alpha = t - u$, $\beta = v - u$, $v \neq u$, $\beta \neq 0$; $\alpha, \beta, t, u, v \in R$, $x, y \in M$.

Тогда следующие тождества локально верны:

$$(\alpha, \beta)_x (\beta, \gamma)_x y = (\alpha, \gamma)_x y, \quad (2.13)$$

$$(\alpha, \beta)_x y = (\alpha - \beta, -\beta)_y x, \quad (2.14)$$

$$(\alpha, \alpha)_x y = y, \quad \alpha \neq 0 \quad (2.15)$$

где $\alpha, \beta, \gamma \in R$, $\beta \neq 0$, $\gamma \neq 0$; $x, y \in M$.

Доказательство. Если тождество (2.10) локально выполнено, то формула (2.12) верна. Непосредственные вычисления показывают, что если использовать формулу (2.12), то тождества (2.13)-(2.15) следуют из (2.1)-(2.3).

Определение 2.3. Пусть M является гладким действительным многообразием и $\Theta: R^2 \times M^2 \rightarrow M$, $\Theta(\alpha, \beta, x, y) = \sigma(\alpha, \beta)(x, y) = (\alpha, \beta)_x y$, $(x, y \in M; \alpha, \beta \in R, \beta \neq 0)$ есть частично гладкое локальное отображение. Θ определяет двухпараметрическое семейство частично гладких локальных бинарных операций:

$$\begin{aligned} \{\sigma_{(\alpha, \beta)}\}_{\alpha, \beta \in R} : \sigma_{(\alpha, \beta)} : M \times M &\rightarrow M, \quad \sigma_{(\alpha, \beta)}(x, y) = \sigma(\alpha, \beta)(x, y) = \\ = \Theta(\alpha, \beta, x, y) = (\alpha, \beta)_x y = x_{(\alpha, \beta)} y &= x \cdot y, \quad v = (\alpha, \beta), \quad \beta \neq 0. \end{aligned}$$

Частично гладкая локальная алгебра $\mathcal{N} = \langle M, (\sigma_v)_{v \in R^2} \rangle$ называется автономным многообразием с траекториями, если выполнены следующие условия:

а) для любой точки x из M и для любого достаточно малого действительного числа $\varepsilon > 0$ существует открытая окрестность U_x , такая, что точка $(\alpha, \beta)_y z$ определена и принадлежит U_x для $y, z \in U_x$, $0 < |\beta| < \varepsilon$, $\alpha \in I$, где I - связный открытый интервал, содержащий $[0, \beta]$, если $\beta > 0$, или $[\beta, 0]$, если $\beta < 0$;

б) Тождества (2.13)-(2.15) локально выполнены.

Если действительное число $\beta \neq 0$ фиксировано, то множество точек $\{(\alpha, \beta)_x y\}_{\alpha \in I}$, называется траекторией, проходящей через точки x ($\alpha = 0$) и y ($\alpha = \beta$).

Замечание. Предложение 2.6 показывает, что определение 2.3 согласовано с определением 2.2.

Следующие предложения 2.7 и 2.8 аналогичны предложениям 2.1 и 2.2.

Предложение 2.7. Пусть $\mathcal{N} = \langle M, (\sigma_v)_{v \in R^2} \rangle$ есть частично гладкое локальное автономное многообразие с траекториями. Тогда следующие тождества локально верны:

$$(0, \beta)_x y = x, \quad (2.16)$$

$$(\delta, \gamma - \alpha)_{(\alpha, \beta)_x y} (\gamma, \beta)_x y = (\delta + \alpha, \beta)_x y, \quad (2.17)$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in R$, $\beta \neq 0$, $\alpha \neq \gamma$; $x, y \in M$.

Предложение 2.8. Пусть $\mathcal{N}=\langle M, (\sigma_v)_{v \in R^2} \rangle$ есть частично гладкое локальное автономное многообразие с траекториями. Тогда для некоторого фиксированного $v_o = (\alpha_o, \beta_o)$, $\beta_o \neq 0$, $\alpha_o \neq \beta_o$, $\alpha_o \neq 0$ отображение

$$\sigma_{v_o} : M \times M \rightarrow M, \quad \sigma_{v_o}(x, y) = \sigma(\alpha_o, \beta_o)(x, y) = (\alpha_o, \beta_o)_x y = x_{\dot{v}_o} y$$

определяет частично гладкую локальную бинарную операцию умножения " $\dot{v}_o$ ", и алгебра $\langle M, \dot{v}_o \rangle$ является частично гладкой локальной двусторонней квазигруппой с правым $(\backslash_{v_o})$ и левым $(/_ {v_o})$ делениями:

$$x \backslash_{v_o} y = (\beta_o, \alpha_o)_x y; \quad x /_{v_o} y = (-\beta_o, \alpha - \beta_o)_y x, \quad x, y \in M. \quad (2.18)$$

Предложение 2.9. Пусть $\mathcal{N}=\langle M, (\sigma_v)_{v \in R^2} \rangle$ есть частично гладкое локальное автономное многообразие с траекториями, определяемое автономным дифференциальным уравнением второго порядка, имеющим в некоторой локальной системе координат вид (2.9). Следующие тождества локально справедливы на $\mathcal{N}$:

$$(\alpha, \beta)_x y = (\beta - \alpha, \beta)_y x, \quad \beta \neq 0, \quad \alpha, \beta \in R, \quad x, y \in M, \quad (2.19)$$

если разрешимы уравнения:

$$g^i(x, \dot{x}) = g^i(x, -\dot{x}), \quad i = \overline{1, n}. \quad (2.20)$$

Замечание. Тождество (2.19) эквивалентно следующему тождеству (см. (2.14)):

$$(\alpha, \beta)_x y = (-\alpha, -\beta)_x y, \quad \beta \neq 0, \quad \alpha, \beta \in R, \quad x, y \in M. \quad (2.21)$$

Предложение 2.10. Пусть тождество

$$(\alpha, \beta)_x y = \left(\frac{\alpha}{\beta}, 1\right)_x y, \quad \beta \neq 0, \quad \alpha, \beta \in R, \quad x, y \in M \quad (2.22)$$

выполняется на частично гладком локальном автономном многообразии с траекториями $\mathcal{N}=\langle M, (\sigma_v)_{v \in R^2} \rangle$. Определим однопараметрическое семейство частично гладких локальных бинарных операций

$$\omega(t, x, y) = \omega_t(x, y) = t_x y = (t, 1)_x y. \quad (2.23)$$

Тогда частично гладкая локальная алгебра $\Omega = \langle M, (\omega_t)_{t \in R} \rangle$ есть многообразие с геодезическими.

Доказательство имеет чисто алгебраический характер.

Определение 3. Многообразие с траекториями называется локально симметрическим, если присоединенное к нему многообразие с геодезическими является локально симметрическим (т.е. соответствует локально симметрической аффинной связности).

Определение 4. Многообразие с траекториями называется локально абелевым, если присоединенное к нему многообразие с геодезическими является локально плоским

(т.е. соответствует локально плоской аффинной связности, у которой тензорные поля кривизны и кручения нулевые).

В локально абелевом многообразии аффинной связности локально выполняются следующие тождества (когда обе части равенства имеют смысл), однозначно характеризующие этот класс пространств

$$u_x(t_x y) = (ut)_x y, \quad (2.24)$$

$$t_x y = (1-t)_y x, \quad (2.25)$$

$$1_x y = y, \quad (2.26)$$

$$t_x(u_y z) = u_{t_x y} t_x z, \quad (2.27)$$

$$v_x \left(\frac{1}{v} \right)_y v_z a = v_z \left(\frac{1}{v} \right)_y v_x a, \quad (2.28)$$

где $1, u, t, v \in R$; $v \neq 0$, $x, y, z, a \in M$.

В локально симметрическом пространстве аффинной связности выполняются характеристические тождества (2.24)-(2.26), а также следующие тождества:

$$(-1)_x (-1)_{t_x y} a = (-1)_{t_x y} (-1)_x a \quad (2.29)$$

$$(-1)_x t_y z = t_{(-1)_x y} (-1)_x z \quad (2.30)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 1979. 408 с.
2. Трофимов В.В., Фоменко А.Т. Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых дифференциальных уравнений. М.: Факториал, 1995. 448 с.
3. Годбийон К. Дифференциальная геометрия и аналитическая механика. М.: Мир, 1973.
4. Matveyev O.A., Panshina A.V. Quasigroups on manifolds with trajectories//Webs and quasigroups. 1995. P. 88–105.
5. Матвеев О.А., Панишина А.В. Геометрия траекторий на многообразиях//Тезисы докладов. Международная научная конференция, Казань. 1992. Ч.1. С. 59–60.
6. Матвеев О.А., Панишина А.В. О приложениях геометрической квазигрупповой теории многообразий с траекториями к аналитической механике//Тезисы докладов. 34-я научная конференция факультета физико-математических и естественных наук. М.: РУДН, 1998. С. 31–32.
7. Матвеев О.А., Панишина А.В. Алгебраические и геометрические свойства траекторий абелевых и симметрических механических систем//Тезисы докладов. 36-я Всероссийская научная конференция, математические секции. М.: РУДН, 2000. С. 21–22.

8. *Матвеев О.А., Панишина А.В.* О локально симметрических и абелевых механических системах//Актуальные проблемы математики и методики ее преподавания. Пенза. 2001. С. 62-68.
9. *Матвеев О.А., Матвеева Н.В., Панишина А.В.* О квазигрупповой теории абелевых и симметрических механических систем//Фундаментальные физико-математические проблемы и моделирование технико-технологических систем. Вып. 9. М.: Янус-К, 2006. С. 22 -24.
10. *Matveyev O.A.* On quasigroup theory of manifolds with trajectories//Webs and quasigroups. Tver, 2000. P. 129-139.
11. *Матвеев О.А.* Квазигрупповые свойства многообразий с траекториями//Вестник Московского педагогического университета. Математика-физика. 3-4, М. 1998. С. 10-15.

THE GEOMETRIC AND ALGEBRAIC PROPERTIES OF THE SYSTEMS OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

O. Matveyev*, A. Panshina**

**Moscow region state university
10a, Radio st., Moscow, 105005, Russia*

***Bauman Moscow State Technical University
5, 2-nd Baumanskaya st., Moscow, 105005, Russia*

Abstract. Affinely connected manifolds and there generalizations are compared with the wild classes of systems of ordinary differential equations and their properties obtain the precise differential geometry and algebraic description. Local symmetric and flat (abelian) classes of systems of ordinary differential equations are discussed. The results are used for investigation of Lagranian mechanical systems.

Keywords: systems of ordinary differential equations, mechanical systems, affine connection, quasigroup.

УДК 517.95

О ГЛАДКОСТИ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА-БОЛЬЦМАНА

Д.Г. Орловский, В.Е. Волков, В.М. Простокишин

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ» (Москва)
115409, Москва, Каширское ш., 31

Аннотация. Доказана дифференцируемость обобщенного решения обратной задачи для уравнения Максвелла-Больцмана, описывающего поведение распределения электронной компоненты разряженной плазмы в ограниченной области трехмерного пространства. Поставленная обратная задача исследуется с точки зрения абстрактных дифференциальных уравнений в банаховых пространствах с точки зрения полугруппового подхода. Задача по определению функции источника редуцируется к интегральному уравнению Вольтера второго рода, которое расширяется до системы, содержащей уравнение с производной. Исследование этой системы позволяет получить условие дифференцируемости решения обратной задачи для исходного уравнения Максвелла-Больцмана.

Ключевые слова: обратная задача, функция источника, уравнение Максвелла-Больцмана, банахово пространство, полугруппа.

В ограниченной области Ω с гладкой границей рассмотрим уравнение Максвелла-Больцмана

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (v, \nabla_x u) + (a, \nabla_v u) = \int_{R^3} K(x, v, v') u(x, v', t) dv' - v(x, v) u + F(x, v, t), \quad (1)$$

$$\text{где } a(x, v) = \frac{e}{m} (E(x) + \frac{1}{c} [v, B(x)]). \quad (2)$$

С точки зрения приложений уравнение описывает поведение распределения электронной компоненты плазмы, занимающей область Ω . Величины e и m имеют соответственно смысл заряда и массы электрона, c – скорость света, а вектор-функции $E(x)$ и $B(x)$ представляют собой напряженность электрического и индукцию магнитного полей, функция $v(x, v)$ носит название частоты столкновений. Помимо уравнения необходимо задать также начальные и граничные данные

$$u(x, v, 0) = u_0(x, v), \quad x \in \Omega, \quad v \in R^3, \quad (3)$$

$$u(x, v, 0) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad (v, n_x) < 0, \quad (4)$$

где n_x – единичная внешняя нормаль к границе области в точке x .

Предположим, что в уравнении функция F неизвестна, но имеет следующую структуру:

$$F(x, v, t) = f(x, v, t) h(t) + g(x, v, t), \quad (5)$$

причем функции f и g известны. Для определения неизвестной функции h рассмотрим дополнительное условие:

$$\int_{\Omega \times R^3} f(x, v, t) \omega(x, v) dx dv = \varphi(t). \quad (6)$$

Таким образом, задача заключается в том, чтобы найти пару функций (u, h) , удовлетворяющих соотношениям (1) – (6). Поставленная задача относится к категории обратных задач и для данного уравнения она была впервые рассмотрена в работе [1], где было доказано существование и единственность слабого решения этой задачи. Здесь мы рассмотрим вопрос о дифференцируемости слабого решения данной обратной задачи.

Теорема. Пусть $E, B \in C^1(\overline{\Omega})$, $u_0 \in C^1(\Omega \times R^3)$, $u_0(x, v) = 0$ при $x \in \partial \Omega$, $(v, n_x) < 0$, функция v непрерывна и ограничена в $\Omega \times R^3$, функция ω непрерывно дифференцируема и финитна в $\Omega \times R^3$, функция $\varphi \in C^2[0; T]$, функции $f, g \in C^1[0; T]; L_p(\Omega \times R^3)$ ($p > 1$), конечны величины:

$$c_1 = \sup_{x, v} \int_{\Omega \times R^3} |K(x, v, v')| dv', \quad (7)$$

$$c_2 = \sup_{x, v'} \int_{\Omega \times R^3} |K(x, v, v')| dv.$$

выполнено условие согласования:

$$\int_{\Omega \times R^3} u_0(x, v) \omega(x, v) dx dv = \varphi(0) \quad (8)$$

и, кроме того, при всех $t \in [0; T]$

$$\int_{\Omega \times R^3} f(x, v, t) \omega(x, v) dx dv \neq 0 \quad (9)$$

Тогда решение обратной задачи существует и единственно в классе $u \in C^1([0; T]; L_p(\Omega \times R^3))$, $h \in C^1[0; T]$.

Приведем схему доказательства. В работе [1] показано, что задача (1) – (6) сводится к абстрактной обратной задаче:

$$\begin{aligned} u'(t) &= Au(t) + \Phi(t)h(t) + g(t), \\ u(0) &= u_0, \\ Lu(t) &= \varphi(t) \end{aligned}$$

с оператором A , являющимся генератором некоторой сильно непрерывной полугруппы $V(t)$ в банаховом пространстве $X = L_p(\Omega \times R^3)$, а функция $h(t)$ удовлетворяет интегральному уравнению Вольтера второго рода с непрерывным неоднородным членом и непрерывным ядром. При сделанных предположениях (7) – (9) это уравнение удастся

расширить до системы интегральных уравнений, содержащих саму неизвестную функцию $h(t)$ и ее производную $H(t)=h'(t)$

$$h(t) = h_0(t) + \int_0^t K(t,s)h(s)ds,$$
$$H(t) = H_0(t) + \int_0^t K_1(t,s)h(s)ds + \int_0^t K(t,s)H(s)ds.$$

Полученная система имеет непрерывные неоднородные члены $h_0(t)$, $H_0(t)$ и непрерывные ядра $K(t,s)$ и $K_1(t,s)$. Отсюда следует существование и единственность решения этой системы. Более того, методом последовательных приближений доказывается, что функция $h(t)$ непрерывно дифференцируема и удовлетворяет равенству $h'(t)=H(t)$. Дифференцируемость функции $u(t)$ следует из дифференцируемости правой части абстрактного дифференциального уравнения, которое, в свою очередь, следует из дифференцируемости функции $h(t)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Орловский Д.Г. Об одной обратной задаче для уравнения Максвелла – Больцмана // Журнал Сибирского федерального университета. Математика и Физика. 2009. 2(3). С. 3428 - 3436.

ABOUT SMOOTHNESS OF THE SOLUTION OF SOME INVERSE PROBLEM FOR MAXWELL-BOLTZMANN EQUATION

D. Orlovsky, V. Volkov, V. Prostokishin

*National Research Nuclear University «MEPhI» (Moscow)
31, Kashirskoe shosse, Moscow, 115409, Russia*

Abstract. Proved differentiability of weak solution of inverse problem for Maxwell-Boltzmann equation which describes the distribution of electronic component discharged plasma in bounded domain of three-dimensional space. This inverse problem is investigated in terms of abstract differential equations in a Banach spaces from the viewpoint of semigroup theory. The task of determining the source function reduces to an integral equation of Volterra of the second kind. This equation is extended to a system of equations with an equation with the derivative. The study of this system allows us to obtain the condition of differentiability of the inverse problem for the original Maxwell-Boltzmann's equation.

Keywords: inverse problem, source function, Maxwell-Boltzmann equation, Banach space, semigroup.

УДК 517.547.2

РАЗЛОЖЕНИЕ ОБРАТНОЙ ВЕЛИЧИНЫ ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ С НУЛЯМИ В ПОЛУПЛОСКОСТИ В РЯД ПРОСТЕЙШИХ ДРОБЕЙ

В.Б. Шерстюков, Е.В. Сумин, М.М. Тищенко

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ» (Москва)
115409, Москва, Каширское ш., 31

Аннотация. В работе изучается вопрос о разложении обратной величины целой функции экспоненциального типа с простыми нулями, расположенными в некоторой полуплоскости, в ряд простейших дробей. Основным результатом статьи служит развитием известной теоремы М. Г. Крейна о свойствах целой функции с простыми вещественными нулями, обратная величина которой допускает разложение на простые дроби. Возможности полученного результата демонстрируются на конкретных примерах. Первый из них есть преобразование Лапласа, взятое на конечном промежутке с убывающим на нем оригиналом. Второй – регулярно встречающийся в анализе и теории вероятности интеграл ошибок.

Ключевые слова: целая функция, простейшая дробь, ряд Крейна, преобразование Лапласа, интеграл ошибок.

История вопроса о представлении мероморфных функций рядами простых дробей подробно освещена в статьях [5] – [7]. Сейчас напомним только, что известная работа М. Г. Крейна [1] породила проблему описания тех целых функций $L(\lambda)$ с простыми нулями λ_n , которые при фиксированном $p \in \mathbb{Z}_+$ допускают представление вида

$$\frac{1}{L(\lambda)} = Q(\lambda) + \lambda^p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L'(\lambda_n) \lambda_n^p (\lambda - \lambda_n)}, \quad (1)$$

где $Q(\lambda)$ – некоторый многочлен и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|L'(\lambda_n)| |\lambda_n|^{p+1}} < \infty. \quad (2)$$

В [7] эта проблема решена одним из авторов для случая, когда $\Lambda = (\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ уместается в некоторой полосе комплексной плоскости. Теперь, привлекая идеи и методы [7], мы дадим новые достаточные условия на функцию $L(\lambda)$, обеспечивающие возможность разложить $1/L(\lambda)$ в ряд Крейна (1). При этом множество Λ всех (простых) нулей функции $L(\lambda)$ может находиться в некоторой полуплоскости, что особенно важно для приложений. Полученный результат служит развитием предшествующих исследований [5] – [7] и обсуждался на научном семинаре кафедры высшей математики НИЯУ «МИФИ».

Будем использовать стандартные определения и факты из теории целых функций, которые можно найти, например, в [2]. Последовательность нулей λ_n , составляющих

Λ , выписывается обычно в порядке возрастания модулей. Символ $h_L(\theta)$ означает индикатор целой функции экспоненциального типа (ЦФЭТ) $L(\lambda)$, а D_L – её индикаторную диаграмму. Рассмотрим сначала функцию $L(\lambda)$, у которой индикаторная диаграмма D_L есть отрезок $[-a; b]$, $a > 0$, $b \geq 0$, или, что эквивалентно, индикатор при всех θ вычисляется по правилу $h_L(\theta) = \frac{a+b}{2} |\cos \theta| - \frac{a-b}{2} \cos \theta$. Относительно нулей функции $L(\lambda)$ предположим выполненными условия:

- (α) множество $\Lambda = (\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ правильно распределено;
- (β) $\exists d > 0: |\lambda_m - \lambda_n| \geq d \quad \forall m, n \in \mathbb{N}, m \neq n$.

Первое из условий равносильно полной регулярности роста ЦФЭТ $L(\lambda)$ и означает одновременное существование угловой плотности последовательности Λ и предела $\lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{|\lambda_n| \leq r} \frac{1}{\lambda_n}$ (подробности см. в [2, 122]). Условие (β) есть стандартное требование отделимости нулей. Таким образом, в соответствии с общим определением из [2, 126] мы имеем дело с регулярным множеством Λ .

Основной результат статьи заключён в следующей теореме.

Теорема 1. Пусть $L(\lambda)$ – ЦФЭТ с множеством простых нулей $\Lambda = (\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$, расположенным в полуплоскости $\{\lambda \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} \lambda \geq c\}$, $c > 0$, и удовлетворяющим условиям (α), (β). Пусть индикаторная диаграмма D_L есть отрезок $[-a; b]$, где $a > 0$, $b \geq 0$. Пусть, наконец, при некотором $p \in \mathbb{Z}_+$ выполняется условие (2). Тогда справедливо сходящееся абсолютно и равномерно на любом компакте в области $\mathbb{C} \setminus \Lambda$ разложение

$$(1), \text{ где } Q(\lambda) \equiv 0, \text{ если } p = 0, \text{ и } Q(\lambda) = \sum_{m=0}^{p-1} \left(\frac{1}{L(\lambda)} \right)^{(m)} (0) \cdot \frac{\lambda^m}{m!}, \text{ если } p \in \mathbb{N}.$$

Приведем схему доказательства для $p = 0$. В условиях теоремы 1 будем доказывать, что свойство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|L'(\lambda_n)| |\lambda_n|} < \infty, \quad (3)$$

влечёт представление:

$$\frac{1}{L(\lambda)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L'(\lambda_n)(\lambda - \lambda_n)}, \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \Lambda. \quad (4)$$

Пусть вначале $b > 0$. Рассмотрим разность:

$$\varphi(\lambda) = \frac{1}{L(\lambda)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L'(\lambda_n)(\lambda - \lambda_n)}.$$

Нетрудно проверить, что $\varphi(\lambda)$ является целой функцией не выше экспоненциального типа. Покажем, что $\varphi(\lambda) \equiv 0$. Для этого оценим сверху $|\varphi(\lambda)|$ на вещественной и мнимой прямых. Так как множество Λ предполагается регулярным, то найдётся ис-

ключительное множество непересекающихся кружков U_n с центрами в точках λ_n , такое, что вне $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ выполнена оценка:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A > 0: \quad |L(\lambda)| > A \exp\{(h_L(\arg \lambda) - \varepsilon) |\lambda|\}.$$

Полагая $S = \mathbb{R} \setminus U$, из этой оценки и того, что $h_L(0) = b > 0$, $h_L(\pi) = a > 0$, находим

$$\frac{1}{L(x)} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad x \rightarrow \pm \infty, \quad x \in S. \quad (5)$$

Учитывая (3) и (5), можно получить оценку:

$$|\varphi(x)| \leq B \cdot |x|, \quad (6)$$

справедливую при некотором $B > 0$ для $x \in S$. Теперь запишем вытекающее из определения $\varphi(\lambda)$ тождество

$$\varphi(\lambda) L(\lambda) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L(\lambda)}{L'(\lambda_n)(\lambda - \lambda_n)}, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (7)$$

Левая часть в (7) имеет индикатор $h_{\varphi}(\theta) + h_L(\theta)$, ибо $L(\lambda)$ обладает полной регулярностью роста [2, 207]. Индикатор же правой части в (7) при $\theta = \pm \pi/2$ не превосходит $\max\{0; h_L(\pm \pi/2)\} = 0$, так как нули λ_n отделены от мнимой оси. Но тогда из (7) получаем

$$h_{\varphi}(\pm \pi/2) \leq 0. \quad (8)$$

Применяя подходящую версию принципа Фрагмена-Линделефа, из (6) и (8) можно вывести, что $\varphi(\lambda)$ – линейная функция. Расположение последовательности Λ дает возможность уточнить оценку (6) при отрицательных значениях x . Действительно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|L'(\lambda_n)| |x - \lambda_n|} \rightarrow 0, \quad x \rightarrow -\infty, \quad (9)$$

поэтому из (5) и (9) заключаем, что $\varphi(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow -\infty$, а это для линейной функции может выполняться, только если она есть тождественный нуль. Итак, при $b > 0$ разложение (4) обосновано. Если же $b = 0$, то ситуация сводится к рассмотренной путем умножения $L(\lambda)$ на функцию $e^{\varepsilon \lambda}$ с фиксированным $\varepsilon \in (0; a)$ и последующим переходом к пределу при $\varepsilon \rightarrow +0$.

Схема доказательства для $p = 0$ приведена. Общее утверждение для $p \geq 1$ получается индукцией по параметру p аналогично тому, как это делается в [7]. Ввиду громоздкости полное рассуждение, учитывающее все случаи, предполагается изложить отдельно.

Замечание. Ограничение $c > 0$ понадобилось при выводе из (7) оценки (8), когда потребовалась отделимость нулей от мнимой оси. С помощью дополнительных усилий от этого ограничения можно освободиться, и теорема 1 останется справедливой при расположении нулей в любой полуплоскости $\{\lambda \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} \lambda \geq c\}$ если при этом $0 \notin \Lambda$. Если же $\lambda = 0$ есть нуль $L(\lambda)$, то вид разложения (1) несколько изменится.

Продemonстрируем возможности теоремы 1 на конкретных примерах. Рассмотрим преобразование Лапласа, взятое на конечном промежутке с убывающим на нем оригиналом. Конкретно

$$L(\lambda) = \int_0^1 e^{\lambda s} \frac{ds}{\sqrt{s}}, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (10)$$

Начиная с классических работ Поля и Титчмарша, функции такого рода активно изучаются в анализе. Интересные применения подобным функциям в теории дифференциальных уравнений найдены в цикле работ И.В.Тихонова, подытоженном в диссертации [4]. Функция (10) является ЦФЭТ с индикатором $h_L(\theta) = \frac{1}{2}(|\cos \theta| + \cos \theta)$ (см., например, [8]). В работе [3] А.М.Седлецкий показал, что нули функции $L(\lambda)$ расположены в полуплоскости $\{\lambda \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} \lambda > 1/2\}$. Все эти нули являются простыми, попарно комплексно сопряженными, и их можно записать в виде $(\mu_k)_{k=1}^\infty \cup (\bar{\mu}_k)_{k=1}^\infty$, где

$$\mu_k = \ln(\pi\sqrt{2k}) + i\left(2\pi k - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{\ln k}{k}\right), \quad k \rightarrow \infty. \quad (11)$$

Из асимптотики (11) находим, что $\arg \mu_k \rightarrow \frac{\pi}{2}$ и $\frac{k}{|\mu_k|} \rightarrow \frac{1}{2\pi}$ при $k \rightarrow \infty$. Кроме того, существует предел:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{|\mu_k| \leq r} \left(\frac{1}{\mu_k} + \frac{1}{\bar{\mu}_k} \right) = \lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{|\mu_k| \leq r} \frac{2 \operatorname{Re} \mu_k}{|\mu_k|^2} = 2 \sum_{k=1}^\infty \frac{\operatorname{Re} \mu_k}{|\mu_k|^2} < \infty.$$

Сочетание последних условий означает правильную распределенность множества нулей функции (10). Отделимость нулей вытекает непосредственно из (11). Располагая нули в порядке возрастания модулей по правилу $\lambda_{2k-1} = \mu_k$, $\lambda_{2k} = \bar{\mu}_k$, $k \in \mathbb{N}$, получим множество $\Lambda = (\lambda_n)_{n=1}^\infty$, удовлетворяющее условиям (а), (б). Из формулы (11) следуют асимптотики:

$$|\lambda_n| \sim \pi n, \quad \operatorname{Re} \lambda_n = \frac{1}{2} \ln |\lambda_n| + O\left(\frac{\ln n}{n}\right), \quad n \rightarrow \infty. \quad (12)$$

Мы собираемся разложить величину, обратную интегралу (10), в ряд простых дробей. Сложность состоит в том, что индикаторная диаграмма D_L представляет собой отрезок $[0; 1]$, т.е. $a = 0$, $b = 1$, и теорема 1 напрямую неприменима. Однако благодаря асимптотике (11) эту трудность удаётся преодолеть, вводя «подправленную» функцию

$L_\varepsilon(\lambda) = L(\lambda)e^{-\varepsilon\lambda}$, $\varepsilon \in (0; 1)$, с тем же нулевым множеством Λ , что у $L(\lambda)$, но с индикаторной диаграммой в виде отрезка $[-\varepsilon; 1 - \varepsilon]$. После несложных вычислений находим

$$L'_\varepsilon(\lambda_n) = L'(\lambda_n)e^{-\varepsilon\lambda_n} = \frac{1}{\lambda_n} e^{(1-\varepsilon)\lambda_n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Отсюда и из (12) получаем:

$$\exists C > 0: \frac{1}{|L'_\varepsilon(\lambda_n)| |\lambda_n|^2} \leq \frac{C}{|\lambda_n|^{\frac{3-\varepsilon}{2}}}, \quad n \rightarrow \infty, \quad (13)$$

где C не зависит от ε . Таким образом, $L_\varepsilon(\lambda)$ удовлетворяет условиям теоремы 1 при $p = 1$. Применяя эту теорему и находя:

$$Q(\lambda) \equiv \frac{1}{L_\varepsilon(0)} = \left(\int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{s}} \right)^{-1} = \frac{1}{2},$$

Запишем:

$$\frac{1}{L_\varepsilon(\lambda)} = \frac{1}{2} + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L'_\varepsilon(\lambda_n) \lambda_n (\lambda - \lambda_n)} = \frac{1}{2} + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-(1-\varepsilon)\lambda_n}}{\lambda - \lambda_n}.$$

Основываясь на (13), можно устремить ε к $+0$ и получить:

$$\frac{1}{L(\lambda)} = \frac{1}{2} + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_n}}{\lambda - \lambda_n} = \frac{1}{2} + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{e^{-\mu_k}}{\lambda - \mu_k} + \frac{e^{-\bar{\mu}_k}}{\lambda - \bar{\mu}_k} \right].$$

Теорема 2. Функция (10) допускает представление:

$$\frac{1}{L(\lambda)} = \frac{1}{2} + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{e^{-\mu_k}}{\lambda - \mu_k} + \frac{e^{-\bar{\mu}_k}}{\lambda - \bar{\mu}_k} \right].$$

Здесь μ_k – нули функции (10), принадлежащие верхней полуплоскости, с асимптотикой (11), а $\bar{\mu}_k$ – комплексно сопряженные нули в нижней полуплоскости. Ряд сходится абсолютно и равномерно на любом компакте, не содержащем точек μ_k и $\bar{\mu}_k$.

Теперь рассмотрим часто возникающий в различных разделах математики интеграл ошибок:

$$\operatorname{erf} \lambda = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\lambda e^{-t^2} dt, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (14)$$

Функция (14) является целой функцией порядка 2 с простыми нулями, так как ее производная $(2/\sqrt{\pi})e^{-\lambda^2}$ нигде не обращается в нуль. Значение $\lambda = 0$ дает единствен-

ный вещественный нуль, остальные нетривиальные нули являются комплексными. Непосредственно к функции (14) теорему 1 применить нельзя, хотя бы потому, что $\operatorname{erf} \lambda$ не является функцией экспоненциального типа. Воспользуемся элементарным соотношением, связывающим интеграл ошибок с функцией (10):

$$\operatorname{erf} \lambda = \frac{\lambda}{\sqrt{\pi}} L(-\lambda^2), \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (15)$$

Отсюда ясно, что все нетривиальные нули функции (14) получаются как решения уравнений $\lambda^2 = -\mu_k$ и $\lambda^2 = -\bar{\mu}_k$, где μ_k и $\bar{\mu}_k$ – нули функции (10). Нетрудно видеть, что нетривиальные нули функции (14) можно организовать в две цепочки λ_m^+ , λ_m^- , $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, симметричные друг другу относительно вещественной оси и расположенные в гиперболических секторах $\{\lambda \in \mathbb{C}: (\operatorname{Im} \lambda)^2 - (\operatorname{Re} \lambda)^2 > 1/2\}$ (см. [3]). Применяя теорему 2, с учетом формулы (15) находим:

$$\frac{1}{\operatorname{erf} \lambda} = \frac{\sqrt{\pi}}{\lambda L(-\lambda^2)} = \frac{\sqrt{\pi}}{\lambda} \left(\frac{1}{2} + \lambda^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{e^{-\mu_k}}{\lambda^2 + \mu_k} + \frac{e^{-\bar{\mu}_k}}{\lambda^2 + \bar{\mu}_k} \right] \right).$$

Сформулируем полученное утверждение.

Теорема 3. *Справедливо разложение в ряд:*

$$\frac{1}{\operatorname{erf} \lambda} = \sqrt{\pi} \left(\frac{1}{2\lambda} + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{e^{-\mu_k}}{\lambda^2 + \mu_k} + \frac{e^{-\bar{\mu}_k}}{\lambda^2 + \bar{\mu}_k} \right] \right),$$

где значения μ_k , $\bar{\mu}_k$ те же, что и в теореме 2. Ряд сходится абсолютно и равномерно на компактах плоскости, не содержащих нулей функции ошибок.

Отметим в заключение, что установленные в статье результаты удобно использовать при нахождении оценок снизу модуля целой функции вне некоторого исключительного множества, содержащего корни данной функции.

Работа выполнена при поддержке АБЦП «Развитие научного потенциала высшей школы (проект 2.1.1/6827), проектов ГК Рособразование П 268, 795, 943 и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России», 2009 – 2013 гг., П 1109.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крейн М.Г. К теории целых функций экспоненциального типа [Текст] // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1947. Т. 11. № 4. С. 309-326.
2. Левин Б.Я. Распределение корней целых функций [Текст]. М.: Гостехиздат, 1956. 632 с.
3. Седлецкий А.М. О нулях функции типа Миттаг-Леффлера [Текст] // Матем. заметки. 2000. Т. 68. Вып. 5. С. 710-724.
4. Тихонов И.В. Обратные, нелокальные и краевые задачи для эволюционных уравнений [Текст]: дис. ... докт. физ.-мат. наук. М., 2008. 283 с.

5. *Шерстюков В.Б.* О разложении мероморфных функций специального вида на простейшие дроби [Текст] // *Analysis Mathematica*. 2007. Т. 33. С. 63-81.
6. *Шерстюков В.Б.* Представление обратной величины целой функции рядом простейших дробей и экспоненциальная аппроксимация [Текст] // Матем. сборник. 2009. Т. 200. № 3. С. 147-160.
7. *Шерстюков В.Б.* Разложение обратной величины целой функции с нулями в полосе в ряд Крейна [Текст] // Матем. сборник. 2011 (принята к печати).
8. *Titchmarsh E.C.* The zeros of certain integral functions [Text] // *Proc. London Math. Soc.* 1926. V. 25. Part 4. P. 283-302.

EXPANSION OF THE RECIPROCAL OF AN ENTIRE FUNCTION WITH ZEROS IN THE HALF-PLANE IN A SERIES OF PARTIAL FRACTIONS

V. Sherstyukov, E. Sumin, M. Tishchenko

*National Research Nuclear University «MEPhI»
31, Kashirskoe shosse, Moscow, 115409, Russia*

Abstract. We study the problem of expanding the reciprocal of an entire function of exponential type with simple zeros located at a half-plane in a series of partial fractions. Our main result is the development of a theorem of M. G. Krein on the properties of an entire function with simple real zeros, the inverse of which can be decomposed into simple fractions. These results demonstrate the possibility of using specific examples. The first of these is the Laplace transform, taken in a finite interval with decreasing its original. Second - regularly encountered in the analysis and probability errors integral.

Keywords: entire function, partial fraction, Krein's series, Laplace transform, errors integral.

УДК 517.5

О КОРНЯХ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ РОСТА ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ

С.Ф. Ягудина

*Московский педагогический государственный университет
119991, Москва, ул. Малая Пироговская, д.1, стр.1*

Аннотация. Для уточнения асимптотического поведения функций в конечной точке или на бесконечности удобно применять правило Бернулли-Лопиталья, в котором поведение отношения функций определяется с помощью отношения их производных. Однако не все функции дифференцируемы, поэтому актуальным является обобщение понятия производной таким образом, чтобы новое более широкое понятие сохранило свойства классической производной, а также было применимо к изучению относительного роста не дифференцируемых функций. Одно из таких обобщений рассматривается в данной работе. В ней также доказываются формулы для корней уравнения, дающих оценки относительного роста выпуклых функций в

тауберовых теоремах, в которых относительный рост обобщенных производных оценивается по относительному росту самих функций.

Ключевые слова: выпуклость, l -выпуклость, l -дифференцируемость, относительный рост, абелевы и тауберовы теоремы.

Одной из важнейших задач математического анализа является исследование относительного роста двух функций. К прямым задачам или задачам абелева типа относятся задачи, в которых относительный рост дифференцируемых функций определяется по относительному росту их производных. При естественных условиях справедлива теорема Бернулли-Лопиталья, которая утверждает справедливость неравенств:

$$\lim_{x \rightarrow b-} \frac{f'(x)}{g'(x)} \leq \lim_{x \rightarrow b-} \frac{f(x)}{g(x)}, \quad (1)$$

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow b-} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow b-} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad (1^*)$$

В обратных задачах или задачах тауберова типа об относительном поведении производных функций судят по относительному росту самих функций. Неравенства противоположного смысла к (1)–(1^{*}) в общем случае неверны, но при дополнительных (тауберовых) условиях такие неравенства можно получить. Одним из таких условий является выпуклость рассматриваемых функций. Как показано Брайчевым Г.Г. в [1, 110], для выпуклых функций справедлив следующий результат:

$$\lim_{x \rightarrow b-} \frac{f'(x)}{g'(x)} \geq a_1 \overline{\lim}_{x \rightarrow b-} \frac{f(x)}{g(x)}, \quad (2)$$

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow b-} \frac{f'(x)}{g'(x)} \leq a_2 \overline{\lim}_{x \rightarrow b-} \frac{f(x)}{g(x)}, \quad (2^*)$$

где a_1, a_2 – корни некоторого уравнения.

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ не дифференцируемы или не выпуклы, то формулы (1)–(2^{*}) теряют смысл, однако эти понятия можно обобщить таким образом, что приведенные выше результаты остаются справедливыми. Для наших целей мы используем следующие определения l -дифференцируемой и l -выпуклой функций.

Для инъективной в окрестности точки x_0 функции $l(x)$ односторонние l -производные функции $f(x)$ определяются формулами $f'_{l\pm}(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_{0\pm}} \frac{f(x) - f(x_0)}{l(x) - l(x_0)}$. В дальнейшем для сокращения записей под $f'_l(x_0)$ будем понимать правостороннюю l -производную.

Пусть $l(x)$ инъективна на промежутке I . Функция $f(x)$ называется l -выпуклой на этом промежутке, если для произвольных x_1, x_2, x_3 из I , $x_1 < x_2 < x_3$, выполняется неравенство: $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{l(x_2) - l(x_1)} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{l(x_3) - l(x_2)}$.

Несколько отличные понятия выпуклости функции рассмотрены ранее в работах [4], [5].

Известно, что l -выпуклая на интервале функция в каждой точке этого интервала имеет односторонние l -производные. Всюду в дальнейшем будем предполагать, что $l(x)$ – строго возрастающая на интервале $(a; b)$, $b \leq \infty$ функция, а $f(x)$ и $g(x)$ определены и l -дифференцируемы на нем.

Для l -дифференцируемых функций справедливо следующее обобщение правила Лопиталя [3, 199]:

$$\delta := \lim_{x \rightarrow b-} \frac{f'_l(x)}{g'_l(x)} \leq \lim_{x \rightarrow b-} \frac{f_l(x)}{g_l(x)} =: t \quad (3)$$

$$\Delta := \overline{\lim}_{x \rightarrow b-} \frac{f'_l(x)}{g'_l(x)} \geq \overline{\lim}_{x \rightarrow b-} \frac{f_l(x)}{g_l(x)} =: T \quad (3^*)$$

Далее предполагается, что функция $g(x)$ является l -выпуклой на интервале $(a; b)$ и удовлетворяет условию:

$$\lim_{x \rightarrow b-} \frac{g(x)}{l(x)} = \infty \quad (4)$$

Обратные к (3)–(3^{*}) неравенства дает следующая теорема тауберова типа.

Теорема 1. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условию (4), $f(x)$ является l -выпуклой на $(a; b)$. Тогда выполняются неравенства

$$\delta \geq \xi_1 T, \quad \Delta \leq \xi_2 T,$$

$$\text{где } \xi_1(\theta) = \lim_{x \rightarrow b-} \frac{1}{g'_l(x)} \sup_{t < x} \frac{g(t) - \theta g(x)}{l(t) - l(x)}, \quad \xi_2(\theta) = \overline{\lim}_{x \rightarrow b-} \frac{1}{g'_l(x)} \inf_{t > x} \frac{g(t) - \theta g(x)}{l(t) - l(x)}.$$

Доказательство. Для l -выпуклой функции выполняются условия $f'_l(x) \leq \frac{f(\tau) - f(x)}{l(\tau) - l(x)}$, $\forall \tau > x$. Для достаточно больших x имеем $t^* g(x) \leq f(x) \leq T^* g(x)$, $t = \max\{0; t - \varepsilon\}$, $T^* = T + \varepsilon$, тогда $f(\tau) - f(x) \leq T^* g(\tau) - t^* g(x)$, или $\frac{f(\tau) - f(x)}{l(\tau) - l(x)} \leq T^* \frac{g(\tau) - \theta g(x)}{l(\tau) - l(x)}$, $\theta = \frac{t^*}{T^*}$.

Откуда получим $f'_l(x) = \inf_{\tau > x} \frac{f(\tau) - f(x)}{l(\tau) - l(x)} \leq T^* \inf_{\tau > x} \frac{g(\tau) - \theta g(x)}{l(\tau) - l(x)}$, и

$$\Delta = \overline{\lim}_{x \rightarrow b-} \frac{f'_l(x)}{g'_l(x)} \leq T^* \overline{\lim}_{x \rightarrow b-} \frac{1}{g'_l(x)} \inf_{\tau > x} \frac{g(\tau) - \theta g(x)}{l(\tau) - l(x)} = \xi_2(\theta)(T + \varepsilon). \text{ Это при } \varepsilon \downarrow 0 \text{ дает } \Delta \leq \xi_2 T.$$

Для ξ_1 доказательство аналогичное.

Введем следующую характеристику функции $g(x)$

$$\varphi_g(\xi) = \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(t_x) + \xi g'_l(x)(l(x) - l(t_x))}{g(x)}, \quad (5)$$

где $t_x = \sup\{t : g'_l(t) \leq \xi g'_l(x)\}$, а если множество в фигурных скобках пусто, то считаем, что $t_x = a$. Известно, что функция $\varphi_g(\xi)$ возрастает при $0 \leq \xi \leq 1$ и убывает при $\xi \geq 1$.

Нетрудно проверить, что когда $g(x) = x^n$, $n \neq 0$, то при $l(x) = \ln x$, $x > 0$, функция $\varphi_g(\xi)$ имеет вид $\varphi_g(\xi) = \xi \ln \frac{e}{\xi}$, $\xi > 0$, а при $l(x) = x^m$, $m > 0$, $n > m$, функция $\varphi_g(\xi)$ имеет вид $\varphi_g(\xi) = (1 - \frac{n}{m})\xi^{\frac{n}{n-m}} + \frac{n}{m}\xi$. Эти случаи являются модельными для широкого класса функций.

Характеристика $\varphi_g(\xi)$ в случае $l(x) = x$ была введена Братищевым А.В. в [2, 101].

Непосредственное вычисление корней по формулам теоремы 1 затруднительно, однако замечательным является тот факт, что величины ξ_1 и ξ_2 являются корнями уравнения $\varphi_g(\xi) = \frac{t}{T}$. При этом под корнями уравнения $\varphi_g(\xi) = \frac{t}{T}$ мы понимаем абсциссы пересечения границы подграфика функции $y = \varphi_g(\xi)$ и графика функции $y = \frac{t}{T}$. Точнее говоря, полагаем $\xi_1 = \inf\{\xi > 0 : \varphi_g(\xi) \geq \frac{t}{T}\}$, $\xi_2 = \sup\{\xi > 0 : \varphi_g(\xi) \geq \frac{t}{T}\}$. Перейдем к основному результату статьи.

Теорема 2. Пусть функция $g(x)$ является l -дифференцируемой и удовлетворяет условию (4), а $\frac{t}{T} = \theta \in (0; 1)$. Числа $\xi_1(\theta)$ и $\xi_2(\theta)$ являются корнями уравнения $\varphi_g(\xi) = \theta$.

Доказательство. Докажем утверждение для ξ_1 , для ξ_2 доказывается аналогично. Обозначим $s = \xi_1(\theta) + \varepsilon$. Для $x = x_i \uparrow b$ и $\forall t < x$ имеем $\frac{g(t) - \theta g(x)}{l(t) - l(x)} \leq \sup_{t < x} \frac{g(t) - \theta g(x)}{l(t) - l(x)} \leq sg'_l(x)$. Умножая левую и правую части этого неравенства, выписанного для $t = t_x$, на $(l(x) - l(t)) > 0$, получим $g(t_x) + sg'_l(x)(l(x) - l(t)) > \theta g(x)$. Разделив обе части на $g(x)$ и взяв верхний предел, получим $\varphi_g(\xi_1(\theta) + \varepsilon) \geq \theta$. С другой стороны, если $\rho = \xi_1(\theta) - \varepsilon > 0$, тогда для $\forall x > x_i$ с некоторым $\eta_x < x$ выполняется $\sup_{t < x} \frac{g(t) - \theta g(x)}{l(t) - l(x)} = \frac{g(\eta_x) - \theta g(x)}{l(\eta_x) - l(x)} > \rho g'_l(x)$, отсюда для $t_x = \sup\{t : g'_l(t) \leq \rho g'_l(x)\}$ получим $g(t_x) + \rho g'_l(x)(l(x) - l(t_x)) \leq g(\eta_x) + \rho g'_l(x)(l(x) - l(\eta_x))$. Поделив это неравенство на $g(x)$ и взяв верхний предел, получим неравенство $\varphi_g(\xi_1(\theta) - \varepsilon) \leq \theta$. Таким образом, имеем:

$$\varphi_g(\xi_1(\theta) - \varepsilon) \leq \theta \leq \varphi_g(\xi_1(\theta) + \varepsilon). \quad (6)$$

Устремляя ε к 0 в (6), получаем:

$$\varphi_g(\xi_1(\theta) - 0) \leq \theta \leq \varphi_g(\xi_1(\theta) + 0). \quad (6^*)$$

Отсюда, учитывая монотонность функции $\varphi_g(\xi)$, приходим к утверждению теоремы. Отметим, что в случае непрерывности $\varphi_g(\xi)$ в точке $\xi = \xi_1(\theta)$ имеем, очевидно, $\varphi_g(\xi_1(\theta)) = \theta$, так что $\xi_1(\theta)$ является обычным (меньшим) корнем уравнения $\varphi_g(\xi) = \theta$.

Замечание. Теоремы 1 и 2 обобщают результаты Братищева А.В. и Брайчева Г.Г. на случай l -выпуклости и l -дифференцируемости функций. Кроме того, даже для обычных понятий выпуклости и дифференцируемости функций, ослаблено одно из условий теоремы 2 соответствующих случаю $l(x) = x$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Брайчев Г.Г. Введение в теорию роста выпуклых и целых функций. – М.: Прометей, 2005. 232 с.
2. Братищев А.В. Базисы Кете, целые функции и их приложения. Докт. дис. – Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 1998, 248 с.
3. Ягудина С.Ф. Об обращении правила Лопиталья для l -выпуклых функций. Наука в вузах: математика, информатика, физика, образование.-М.:МПГУ, 2010, 439 с.
4. Constantin P. Niculescu, Florin Popovici The extension of majorization inequalities within the framework of relative convexity [Электронный ресурс] // Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics. Volume 7, Issue 1, Article 27, 2006. URL: <http://jipam.vu.edu.au>
5. Szymon Wasowicz Support-type properties of convex functions of higher order and hadamard-type inequalities// Journal of Mathematical Analysis and Applications, 332 (2), 2007, p. 1229–1241

THE ROOTS OF AN EQUATION FROM THE THEORY OF GROWTH OF CONVEX FUNCTIONS

S. Yagudina

*The Moscow Pedagogical State University
1, Malaya Pirogovskaya st., Moscow, 119991, Russia*

Abstract. We prove the formula for the roots, which give estimates of the relative growth of convex functions in Tauberian theorems.

Keywords: convexity, l -convex, l -differentiability, relative growth, Abelian and Tauberian theorems.

УДК 517.53

О НУЛЯХ ФУНКЦИЙ ИЗ ПРОСТРАНСТВ СО СМЕШАННОЙ НОРМОЙ

А.А. Долгобородов

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ» (Москва)
115409, Москва, Каширское ш., 31

Аннотация. Изучается поведение нулей z_n (пронумерованных в порядке неубывания модулей) аналитических в круге $|z| < 1$ функций f классов

$$H_{q,\gamma}^p := \left\{ f: \int_0^1 (M_p(f; 1-t)t^\gamma)^\frac{p}{p-1} \frac{dt}{t} < \infty \right\} \quad (p \in (0, \infty], q > 0, \gamma < \infty),$$

где $M_p(f; \cdot)$ – средние Рисса. Случай $H_{p,(1+\alpha)/p}^p$ ($\alpha > -1$) – это классы Бергмана A_{α}^p . Для произведений $\pi_n(f) = (|z_1| \dots |z_n|)^{-1}$ при условии $\pi_n(f) = O(\eta(1/n)n^\gamma)$, где $\eta(t)$ – заданная функция, $\eta(t) \downarrow 0$ при $t \rightarrow +0$, найдены подпоследовательности индексов n_k , при которых $\pi_{n_k}(f) \approx \eta\left(\frac{1}{n_k}\right)n_k^\gamma, k \rightarrow \infty$. Получено следствие: нулевые множества классов $H_{q_1,\gamma}^p$ и $H_{q_2,\gamma}^p$ при $q_1 \neq q_2$ различны.

Ключевые слова: аналитические функции, пространства аналитических функций, нули аналитических функций.

Пусть $A(\mathbb{D})$ – пространство аналитических в круге $\mathbb{D} = \{z: |z| < 1\}$ функций $f(z) = f(re^{i\theta})$,

$$M_p(f; r) = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right)^{1/p}, \quad 0 < p \leq \infty,$$

$$M_0(f; r) = \exp \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta \right), \quad 0 < r < 1.$$

Через $H_{q,\gamma}^p$ ($0 \leq p \leq \infty, 0 < q < \infty, 0 < \gamma < \infty$) обозначим множество функций $f \in A(\mathbb{D})$ таких, что

$$\left(\int_0^1 (M_p(f; 1-t)t^\gamma)^\frac{p}{p-1} \frac{dt}{t} \right)^{1/q} < \infty.$$

При $0 < p < \infty, \gamma = \frac{\alpha+1}{p}, \alpha > -1$ пространство $H_{q,\gamma}^p$ совпадает с пространством $A_{\alpha,\gamma}^p$, называемым в литературе пространством со смешанной нормой; при $q = p, \gamma = \frac{\alpha+1}{p}$ – с пространством Бергмана-Джрбашяна.

При $0 < q_1 < q_2 < \infty, 0 \leq p_1 < p_2 \leq \infty, 0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \infty$ имеют место вложения $H_{q_1,\gamma_1}^{p_1} \subset H_{q_2,\gamma_2}^{p_2}, H_{q_1,\gamma_1}^{p_1} \supset H_{q_2,\gamma_2}^{p_2}, H_{q_1,\gamma_1}^p \subset H_{q_2,\gamma_2}^p$.

Если $f \in A(\mathbb{D})$, то через $\{z_k(f)\}_{k=1}^{\infty}$ обозначим упорядоченную в порядке неубывания модулей последовательность нулей функции f , причем, каждый нуль должен участвовать в последовательности столько раз, какова его кратность.

Положим

$$\pi_n(f) = \prod_{k=1}^n \frac{1}{|z_k(f)|} \quad (f(0) \neq 0).$$

Ниже $\eta(t)$ – положительная непрерывная возрастающая на $(0,1]$ функция, $\eta(+0) = 0$.

Обозначим через $H_{q,\gamma}^{p,\eta(t)}$ множество функций $f \in H_{q,\gamma}^p$, для которых выполняется неравенство

$$\pi_n(f) \leq c(f) \eta\left(\frac{1}{n}\right) n^\gamma, \quad n \in \mathbb{N},$$

где $c(f)$ не зависит от n . Из результатов работы [1] следует, что $H_{q,\gamma}^p = \bigcup H_{q,\gamma}^{p,\eta(t)}$, где объединение берется по всем функциям $\eta(t)$.

Теорема. Пусть $q > 0$ и функция $\eta(t)$ такая, что $\eta(t)^q \log \frac{e}{t}$ убывает на $(0,1]$; пусть также $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ возрастающая последовательность номеров, удовлетворяющая при достаточно больших k условию

$$\frac{n_k}{n_{k-1}} > k^{A(k)} \tag{1}$$

при некоторой функции $A(k), A(k) \uparrow +\infty, A(k) \leq \log \log k$ при $k \rightarrow \infty$. Тогда если

$$\sum_{k=1}^{\infty} \eta\left(\frac{1}{n_k}\right)^q < \infty, \tag{2}$$

то в $H_{q,\gamma}^{\infty,\eta(t)}$ ($0 \leq p \leq \infty, \gamma > 0$) есть функция f такая, что

$$\pi_{n_k}(f) \geq c_1 \eta\left(\frac{1}{n_k}\right) n_k^\gamma \quad (c_1 = \text{const} > 0) \tag{3}$$

при всех достаточно больших k . Если же

$$\sum_{k=1}^{\infty} \eta\left(\frac{1}{n_k}\right)^q = \infty,$$

то для любой функции $f \in H_{q,\gamma}^0$ ($f(0) \neq 0$)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\pi_{n_k}(f) / \left(\eta\left(\frac{1}{n_k}\right) n_k^\gamma \right) \right) = 0.$$

Доказательству теоремы предпошлем лемму.

Лемма 1. (см. [1]) Пусть

$$f(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{z}{r_k}\right)^{n_k - n_{k-1}}\right), \quad (4)$$

где

$$r_k = 1 - t_k, \frac{1}{2} > t_1 > \dots > t_k \rightarrow 0, n_0 = 0, n_k \in \mathbb{N} (k = 1, 2, \dots), n_k - n_{k-1} \uparrow \infty (k \rightarrow \infty).$$

Тогда если $n_k t_{k+1} \leq a = \text{const}$, а

$$\sigma = \sum_{k=1}^{\infty} \exp\{-n_k t_k\} < \infty,$$

то для любых $q > 0$ и $\gamma > 0$ существует такая постоянная $c = c(q, \gamma, \sigma, a)$, что при некотором $m \in \mathbb{N}$ и любом номере $k > m$ выполняется неравенство:

$$\int_{2t_k}^{2t_m} (M_{\infty}(f; 1-t)t^{\gamma})^q \frac{dt}{t} \leq c \int_{2t_k}^{2t_m} (M_0(f; 1-t)t^{\gamma})^q \frac{dt}{t}.$$

Заметим, что поскольку здесь $f(0) = 1$, то в силу формулы Иенсена $M_0(f; r) = \exp N(r; f)$, где

$$N(r; f) = \int_0^r \frac{n(t; f)}{t} dt, \quad 0 < r < 1,$$

$n(t; f)$ – число нулей функции f , попавших в круг $|z| < t$.

Лемма 2. (см. [2]) Пусть даны возрастающие последовательности положительных чисел $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}, r_k \rightarrow 1 -$. Определим на $[0, 1]$ функцию $n(r)$, положив $n(r) = 0$ при $0 \leq r \leq r_1, n(r) = n_k$ при $r_k < r \leq r_{k+1} (k = 1, 2, \dots)$.

Положим

$$N(r) = \int_0^r \frac{n(t)}{t} dt, \quad 0 \leq r < 1.$$

Тогда при каждом $k = 1, 2, \dots$ и любом $r \in (r_k, r_{k+1}]$ имеем:

$$\exp N(r) = r^{n_k} \cdot \prod_{j=1}^k r_j^{-(n_j - n_{j-1})} \quad (n_0 = 0).$$

Лемма 3. Для любых $\delta \in (0, 1/2]$ и $\alpha > -1$

$$\int_0^1 (1-t)^{1/\delta} \cdot t^{\alpha} dt \leq c(\alpha) \delta^{\alpha+1},$$

где $c(\alpha)$ зависит лишь от α .

Доказательство леммы нетрудно получить, используя, например, свойства бета-функции.

Лемма 4. Пусть $\{n_k\}_0^\infty$ - последовательность положительных чисел такая, что $n_k \uparrow \infty, n_0 = 1$,

$$\begin{aligned} Q_k &= \frac{\eta(1/n_k)n_k^Y}{\eta(1/n_{k-1})n_{k-1}^Y}, \quad (k=1,2,\dots) \\ t_k &= \frac{1}{n_k} \log Q_k \downarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty), \quad t_1 < \frac{1}{2}, \\ n(r) &= \begin{cases} 0, & 0 < r \leq 1 - t_1 \\ n_k, & 1 - t_k < r \leq 1 - t_{k+1}, \end{cases} \\ N(r) &= \int_0^r \frac{n(t)}{t} dt, r \in (0,1). \end{aligned} \quad (5)$$

Тогда если

$$\sum \frac{1}{n_k} \log^2 Q_k < \infty, \quad (6)$$

то

$$\prod_{j=1}^k (1 - t_j)^{-(n_j - n_{j-1})} \leq c_1 \eta\left(\frac{1}{n_k}\right) \cdot n_k^Y, \quad (7)$$

$$\int_{t_{k+1}}^{t_k} (\exp N(1 - \tau) \tau^Y)^{\frac{1}{Y}} \frac{d\tau}{\tau} \leq c_2 \eta\left(\frac{1}{n_k}\right)^{\frac{1}{Y}}, \quad (8)$$

если же

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{n_{k-1}}{n_k} \log Q_k < \infty, \quad (9)$$

то

$$\prod_{j=1}^k (1 - t_j)^{-(n_j - n_{j-1})} \geq c_3 \eta\left(\frac{1}{n_k}\right) \cdot n_k^Y, \quad (10)$$

где c_1, c_2, c_3 не зависят от k ($c_3 > 0$).

Доказательство. Поскольку

$$\log \frac{1}{1 - t_j} = t_j + O(t_j^2) = \frac{1}{n_j} \left(\log Q_j + O\left(\frac{\log^2 Q_j}{n_j}\right) \right), j \rightarrow \infty,$$

то

$$\begin{aligned} (n_j - n_{j-1}) \log \frac{1}{1 - t_j} &= \left(1 - \frac{n_{j-1}}{n_j}\right) \left(\log Q_j + O\left(\frac{\log^2 Q_j}{n_j}\right) \right) = \\ &= \log Q_j - \frac{n_{j-1}}{n_j} \log Q_j + O\left(\frac{\log^2 Q_j}{n_j}\right), \quad j \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Поэтому при (9) выполняется левое из неравенств:

$$\sum_{j=1}^k \log Q_j + \log c_4 \leq \sum_{j=1}^k (n_j - n_{j-1}) \log \frac{1}{1 - t_j} \leq \sum_{j=1}^k \log Q_k + \log c_5, \quad (11)$$

а при условии (6) – правое из этих неравенств (c_4 и c_5 положительны и не зависят от k).

Так как

$$\sum_{j=1}^k \log Q_j = \log \prod_{j=1}^k \frac{\eta(1/n_j)n_j^y}{\eta(1/n_{j-1})n_{j-1}^y} = \log \frac{\eta(1/n_k)n_k^y}{\eta(1/n_0)n_0^y},$$

то из (11) следуют (7) и (10).

В силу леммы 2:

$$\exp N(1 - \tau) = (1 - \tau)^{n_k} \cdot \prod_{j=1}^k (1 - t_j)^{-(n_j - n_{j-1})}, \tau \in (t_{k+1}, t_k], \quad (12)$$

а в силу леммы 3 –

$$\int_{t_{k+1}}^{t_k} (1 - \tau)^{n_k} t^{yq-2} dt \leq c(y, q) \left(\frac{1}{n_k} \right)^{yq}. \quad (13)$$

Из (12), (13) и неравенства (7) получим (8). Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Определим Q_k равенством (5). Из убывания функции $\eta(t)(\log t/t)^{1/q}$ на $(0,1]$ следует, что

$$\frac{\eta(1/n_{k-1})}{\eta(1/n_k)} < \left(\frac{\log n_k}{\log n_{k-1}} \right)^{1/q} < \left(\frac{n_k}{n_{k-1}} \right)^\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$

при k достаточно больших. Отсюда, с учетом условия (1), получим при k достаточно больших:

$$Q_k^{-1} \leq \left(\frac{n_{k-1}}{n_k} \right)^{y-\varepsilon} \leq \left(\frac{1}{k} \right)^{(y-\varepsilon)A(k)},$$

так что

$$\sum_{k=2}^{\infty} Q_k^{-1} < \infty. \quad (14)$$

Заметим также, что

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{n_{k-1}}{n_k} \log Q_k < \infty, \quad (15)$$

Поскольку

$$\frac{n_{k-1}}{n_k} \log Q_k \leq \frac{n_{k-1}}{n_k} \gamma \log \frac{n_k}{n_{k-1}} \leq \left(\frac{n_{k-1}}{n_k} \right)^{1-\varepsilon} \leq \left(\frac{1}{k} \right)^{(1-\varepsilon)A(k)} \quad \forall \varepsilon > 0$$

при k достаточно больших.

Определим функцию $n(r)$ равенством:

$$n(1-t) = n_k, \quad t \in [t_{k+1}, t_k], k = 1, 2, \dots$$

где

$$t_k = \frac{1}{n_k} \log Q_k.$$

Не ограничивая общности, считаем, что $\frac{1}{2} > t_1 > t_2 > \dots$. Для функции f , определенной формулой (4), имеем $n(r; f) = n(r)$. Последовательность $\{n_k\}$ при всех достаточно больших k удовлетворяет условиям леммы 1:

$$\begin{aligned} n_k - n_{k-1} &\uparrow \infty, \\ n_{k-1} t_k &\leq a = \text{const}, \\ \sum \exp\{-n_k t_k\} &< \infty \end{aligned}$$

(см., соответственно, (1), (15) и (14)).

В силу леммы 1 при некотором m и любых $k > m$ ($m, k \in \mathbb{N}$) выполняется неравенство

$$\int_{2t_k}^{2t_m} (M_\infty(f; 1-t)t^\gamma)^q \frac{dt}{t} \leq c \int_{2t_k}^{2t_m} (\exp N(1-t; f)t^\gamma)^q \frac{dt}{t}, \quad (16)$$

где

$$N(r; f) = N(r) = \int_0^r \frac{n(t)}{t} dt, \quad 0 < r < 1.$$

Воспользуемся леммой 4. В силу (8) из (16) получим:

$$\int_0^{2t_m} (M_\infty(f; 1-t)t^\gamma)^q \frac{dt}{t} \leq c_6 \sum_{k=m-1}^{\infty} \eta \left(\frac{1}{n_k} \right)^q.$$

Итак, если ряд (2) сходится, то $f \in H_{q, \gamma}^\infty$.

Покажем, что для всех достаточно больших n выполняется неравенство

$$\pi_n(f) \leq c(f; \gamma) \eta \left(\frac{1}{n} \right) n^\gamma, \quad (17)$$

где $c(f; \gamma) > 0$ и зависит лишь от f и γ . В силу леммы 2 и (7) при $t \in (t_{k+1}, t_k]$ имеем:

$$\begin{aligned}\pi_{\left[\frac{1}{t}\right]}(f) &:= \prod_{s=1}^{\left[\frac{1}{t}\right]} \frac{1}{|z_s(f)|} \leq c \prod_{s=1}^{\left[\frac{1}{t}\right]} \frac{1-t}{|z_s(f)|} \leq c \exp N(1-t) = \\ &= c \prod_{j=1}^k r_j^{-(n_j - n_{j-1})} \cdot (1-t)^{n_k} \leq \tilde{c}_1 \eta\left(\frac{1}{n_k}\right) n_k^\gamma (1-t)^{n_k} \leq \\ &\leq \tilde{c}_1 \eta\left(\frac{1}{n_k}\right) n_k^\gamma e^{-n_k t}.\end{aligned}\quad (18)$$

Отсюда, в силу возрастания функции $\eta(t)$, получим при $t \in [1/n_k, t_k]$:

$$\pi_{\left[\frac{1}{t}\right]}(f) \leq \tilde{c}_1 \frac{\eta(t)}{t^\gamma} \max_{u>0} \{u^\gamma e^{-u}\} = c(f; \gamma) \frac{\eta(t)}{t^\gamma}.$$

При $t \in [t_{k+1}, 1/n_k]$ из (18), в силу убывания функции $\eta(t)/t^\gamma$, очевидно, имеем:

$$\pi_{\left[\frac{1}{t}\right]}(f) \leq c(f; \gamma) \eta(t)/t^\gamma.$$

Итак, при всех достаточно малых t :

$$\pi_{\left[\frac{1}{t}\right]}(f) \equiv \prod_{s=1}^{\left[\frac{1}{t}\right]} \frac{1}{|z_s(f)|} \leq c(f; \gamma) \frac{\eta(t)}{t^\gamma}.$$

Положив $t = 1/n$, получим (17), так что $f \in H_{q, \gamma}^{\infty, \eta(t)}$. Неравенство (3) выполняется в силу (10).

С другой стороны, пусть для функции $f \in A(\mathbb{D}), f(0) = 1$, при каком-либо $c > 0$ и всех достаточно больших k выполняется неравенство:

$$\pi_{n_k}(f) \geq c \eta\left(\frac{1}{n_k}\right) n_k^\gamma.$$

Тогда при $t \in [t_{k+1}, 1/n_k]$ имеем:

$$\begin{aligned}\exp N(1-t; f) &\geq \exp N\left(1 - \frac{1}{n_k}; f\right) = \prod_{j=1}^{n\left(1 - \frac{1}{n_k}; f\right)} \frac{1 - \frac{1}{n_k}}{|z_j(f)|} \geq \prod_{j=1}^{n_k} \frac{1 - \frac{1}{n_k}}{|z_j(f)|} \geq \\ &\geq \frac{1}{4} \pi_{n_k}(f) \geq \frac{1}{4} c \eta\left(\frac{1}{n_k}\right) n_k^\gamma.\end{aligned}$$

Отсюда, учитывая, что $t_{k+1} = o(1/n_k)$ при $k \rightarrow \infty$, получим:

$$\begin{aligned}\int_{t_{k+1}}^{1/n_k} (\exp N(1-t; f) t^\gamma)^q \frac{dt}{t} &\geq \left(\frac{1}{4} c \eta\left(\frac{1}{n_k}\right) n_k^\gamma\right)^q \int_{t_{k+1}}^{1/n_k} t^{\gamma q} \frac{dt}{t} \geq \\ &\geq c(\gamma, q) \eta\left(\frac{1}{n_k}\right)^q.\end{aligned}$$

Поэтому из расходимости ряда $\sum \eta(1/n_k)^q$ следует расходимость интеграла

$$\int_0^1 (\exp N(1-t; f) t^r)^q \frac{dt}{t}.$$

Это, в силу формулы Иенсена, означает, что $f \in H_{q,r}^0$. Теорема доказана.

Обозначим через $\{z_k(f)\}_{k=1}^\infty$ упорядоченную в порядке неубывания модулей последовательность нулей функции $f \in A(\mathbb{D})$ с учетом кратности этих нулей. Такую последовательность нулей будем обозначать через $Z(f)$. Через $Z(H)$ обозначим нулевое множество функционального класса $H \subset A(\mathbb{D})$: $Z(H) = \{Z(f): f \in H\}$.

Положим:

$$H_{q,r}^0 = \bigcup_{q' < q} H_{q',r}^0$$

где объединение берётся по всем положительным $q' < q$.

Следствие. Пусть $q > 0$ и функция $\eta(t)$ удовлетворяет условиям теоремы. Тогда

$$Z(H_{q,r}^{\infty, \eta(t)}) \not\subseteq Z(H_{q,r}^0).$$

Отсюда следует, в частности, отрицательный ответ на вопрос, поставленный в работе [3]: допускают ли пространства $A_{\alpha_1}^{p_1}$ и $A_{\alpha_2}^{p_2}$ одинаковые нулевые множества в случае, когда $\frac{\alpha_1+1}{p_1} = \frac{\alpha_2+1}{p_2}$, но $(\alpha_1, p_1) \neq (\alpha_2, p_2)$ ($p_i > 0, \alpha_i > -1$)?

ЛИТЕРАТУРА

1. Долгобородов, А.А. О теореме Ч.Горовица о нулях функций из пространств Бергмана // Analysis Mathematica, 2010, №36, С. 251-273
2. Долгобородов, А.А. О нулях функций из пространств Бергмана и некоторых близких к ним пространств // Математические заметки, 2010, №88(2), С. 201-216.
3. Horowitz, C. Zeros of functions in the Bergman spaces // Duke Math. J., 1974, №41, P. 693-710.

ON THE ZEROS OF THE SPACES WITH MIXED NORM

A. Dolgoborodov

National Research Nuclear University «MEPhI» (Moscow)
31, Kashirskoe shosse, Moscow, 115409, Russia

Abstract. We study the behavior of the zeros z_n (numbered in order of nondecreasing moduli of the zeros) analytic in the disk $|z| < 1$ class of functions f

$$H_{q,r}^p := \left\{ f: \int_0^1 (M_p(f; 1-t) t^r)^q \frac{dt}{t} < \infty \right\} \quad (p \in (0, \infty], 0 < q, r < \infty),$$

where $M_p(f; \cdot)$ – Riesz means. Case $H_{p, (1+\alpha)/p}^p$ ($\alpha > -1$) – a class of Bergman A_α^p . For works $\pi_n(f) = (|z_1| \dots |z_n|)^{-1}$ provided $\pi_n(f) = O(\eta(1/n)n^r)$, where $\eta(t)$ – a specified function, $\eta(t) \downarrow 0$ as $t \rightarrow +0$, find a subsequence of indices n_k , in which

$\pi_{n_k}(f) \asymp \eta\left(\frac{1}{n_k}\right) n_k^r, k \rightarrow \infty$. Obtained result: zero sets of classes $H_{q_1, Y}^p$ and $H_{q_2, Y}^p$ with $q_1 \neq q_2$ are different.

Keywords: analytic functions, spaces of analytic functions, zeros of analytic functions.

УДК 517.929

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

А.Р. Абдуллаев, Э.В. Плехова

Пермский национальный исследовательский политехнический университет

Аннотация. Рассматривается задача Коши для системы квазилинейных дифференциальных уравнений нейтрального типа. Получены достаточные условия существования решения без предположения однозначной разрешимости соответствующей линейной краевой задачи. На нелинейную часть системы уравнений налагается условие типа «подлинейного» роста. Для доказательства основного утверждения применяется доказанная в работе вспомогательная теорема существования для квазилинейного операторного уравнения с сюръективным, но необратимым линейным оператором.

Ключевые слова: существование решения, задача Коши, уравнение нейтрального типа.

Наиболее распространенные классы квазилинейных функционально-дифференциальных уравнений (ФДУ) имеют главную часть линейного оператора [4], представимую в виде $Q: B \rightarrow B$, $Q = I - S - K$, где I - тождественный оператор, S - оператор внутренней суперпозиции и K - вполне непрерывный оператор; B - банахово функциональное пространство. При этом уравнение принято называть уравнением «нейтрального типа», если оператор S ненулевой. Таким образом, уравнениями нейтрального типа называют такие уравнения, в которых отклонение аргумента присутствует в старшей производной.

В известных исследованиях краевых задач для ФДУ предполагаются выполненными условия, обеспечивающие обратимость оператора $(I - S): B \rightarrow B$, т.е. фредгольмовость оператора Q . До настоящего времени не исследованным остается случай, когда оператор $I - S$ не является обратимым. Актуальность изучения уравнений нейтрального типа в случае необратимости упомянутого оператора обусловлена и тем, что при этом соответствующая линейная однородная краевая задача может иметь бесконечное число решений [2]. Эта особенность создает значительные трудности в применении классических методов исследования краевых задач к уравнениям нейтрального типа.

В настоящей работе впервые рассматривается случай уравнения нейтрального типа, для которого оператор $I - S$ не является обратимым.

Введем следующие обозначения. Пусть R^n - n -мерное пространство вектор-столбцов с нормой элемента $x = \text{col}(x_1, x_2, \dots, x_n)$, определяемой равенством

$|x|_{R^n} = \sum_{i=1}^n |x_i|$. Положим $E = [a, b] \subset R^1 = (-\infty, \infty)$ и определим следующие банаховы функциональные пространства: $L_2 = L_2[a, b]$ - пространство скалярных суммируемых по Лебегу с квадратом функций, с нормой $\|\cdot\|_{L_2}$; L_2^n - пространство n -мерных вектор-функций $y: E \rightarrow R^n$, $y(t) = \text{col}(y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t))$, таких что $y_i \in L_2, i = \overline{1, n}$, с нормой $\|y\|_{L_2^n} = \sum_{i=1}^n \|y_i\|_{L_2}$; L_∞ - пространство измеримых и ограниченных в существенном функций $y: E \rightarrow R^1$, с нормой $\|y\|_\infty = \text{vrai sup}_{t \in E} |y(t)|$; D_2^n - пространство таких абсолютно непрерывных вектор-функций $x: E \rightarrow R^n$, что $x' \in L_2^n$, с нормой $\|x\|_{D_2^n} = |x(a)|_{R^n} + \|x'\|_{L_2^n}$. Сопряженное пространство $(L_2^n)^*$ будем отождествлять с пространством n -мерных вектор-строк L_2^n . Согласованная норма на пространстве $(L_2^n)^*$ определена равенством $\|\omega\|_0 = \max_{i=\overline{1, n}} \|\omega_i\|_{L_2}$, $\omega(t) = (\omega_1(t), \omega_2(t), \dots, \omega_n(t))$.

Рассмотрим задачу Коши:

$$A(t)x'(t) + B(t)x_h'(t) = f(t, (Tx)(t)), \quad (1)$$

$$x(a) = \alpha, \quad (2)$$

где $A(\cdot), B(\cdot), C(\cdot)$ - $n \times n$ -матрицы, $h(\cdot): E \rightarrow R^n$ - вектор-функции с измеримыми компонентами, $x_h'(t) = \text{col}(x_1'(h_1(t)), x_2'(h_2(t)), \dots, x_n'(h_n(t)))$ и $x_i'(\xi) = 0$ при $\xi \notin E$; функция $f: E \times R^n \rightarrow R^n$ удовлетворяет условиям Каратеодори, $T: D_2^n \rightarrow L_2^n$ - линейный вполне непрерывный оператор; $\alpha \in R^n$.

Под решением задачи (1), (2) будем понимать такую вектор-функцию $x: E \rightarrow R^n$, $x \in D_2^n$, которая почти всюду удовлетворяет уравнению (1) и начальному условию (2).

1. Оператор внутренней суперпозиции.

Символом $m(e)$ будем обозначать меру Лебега измеримого множества $e \subset R^1$.

Предположим, что $i, j = \overline{1, n}$ произвольно зафиксированы. Рассмотрим оператор внутренней суперпозиции $S_{ij}: L_2 \rightarrow L_2$, определенный на пространстве скалярных функций равенством

$$(S_{ij}y)(t) = b_{ij}(t)y_j(h_j(t)), \quad y_j(\xi) = 0, \text{ при } \xi \notin E. \quad (3)$$

Приведем сведения об операторе S_{ij} , необходимые для доказательства сюръективности главной линейной части уравнения (1). Далее будем предполагать выполненным необходимое условие действия оператора S_{ij} , а именно: для каждого измеримого множества $e \subset E$ из равенства $m(e) = 0$ следует $m(h_j^{-1}(e)) = 0$. В этом случае для функции

множества $\mu_j(e) = m(h_j^{-1}(e))$ существует производная Радона-Никодима $\mu'_j(t)$ [5]. Положим:

$$\beta_{ij}(t) = b_{ij}(t) \left(\mu'_j(t) \right)^{1/2}. \quad (4)$$

Лемма 1. [6] Если $\beta_{ij} \in L_\infty$, то оператор $S_{ij} : L_2 \rightarrow L_2$, $i, j = \overline{1, n}$, определенный равенством (3), ограничен, причем $\|S_{ij}\| = \|\beta_{ij}\|_\infty$.

Повторяя, с незначительными модификациями, доказательство утверждение работ [1, 3], можно доказать следующее утверждение.

Лемма 2. Пусть выполнены условия:

- 1) $m(h_i(E) \setminus E) = 0$ и существует такая измеримая функция h_i^{-1} , что почти всюду выполняются равенства $h_i(h_i^{-1}(\tau)) = \tau$, $\tau \in h(E)$ и $h_i^{-1}(h_i(t)) = t$, $t \in E$;
- 2) $\text{vrai} \inf_{t \in E} |\beta_{ii}(t)| = q_i > 0$.

Тогда оператор $S_{ii} : L_2 \rightarrow L_2$ сюръективен и справедливо неравенство:

$$\|S_{ii}^* \omega\|_{L_2} \geq q_i \|\omega\|_{L_2}, \quad \omega \in L_2.$$

2. Теорема существования.

Положим $y(t) = x'(t)$ и определим оператор $V : L_2^n \rightarrow D_2^n$ равенством: $(Vy)(t) = \int_a^t y(s) ds$.

Представим задачу Коши (1), (2) в виде операторного уравнения. При этом оператор, соответствующий слагаемому $B(t)x'_h(t)$ в уравнении (1), представим в виде суммы двух операторов: «диагонального» S и «внедиагонального» H . Полагая

$$\begin{aligned} M : L_2^n &\rightarrow L_2^n, (My)(t) = A(t)y(t); \\ S : L_2^n &\rightarrow L_2^n, S = \begin{pmatrix} S_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & S_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & S_{nn} \end{pmatrix}; \\ H : L_2^n &\rightarrow L_2^n, H = \begin{pmatrix} 0 & S_{12} & \dots & S_{1n} \\ S_{21} & 0 & \dots & S_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{n1} & S_{n2} & \dots & 0 \end{pmatrix}; \\ N : L_2^n &\rightarrow L_2^n, (Nz)(t) = f(t, z(t)), \end{aligned}$$

получим уравнение:

$$My + Sy + Hy = NT(\alpha + Vy). \quad (5)$$

Если существует решение $y \in L_2^n$ уравнения (5), то функция $x(t) = \alpha + Vy$ является решением задачи (1), (2). Поэтому будем исследовать на разрешимость квазилинейное уравнение (5). Левоу части уравнения (5) соответствует линейный оператор $(M + S + H): L_2^n \rightarrow L_2^n$. Утверждение леммы 2 позволяет получить условия сюръективности оператора S .

Лемма 3. Если для каждой пары функций $b_{ii}(\cdot)$ и $h_i(\cdot)$, $i = \overline{1, n}$ выполнены условия леммы 2, то оператор S сюръективен и справедливо неравенство $\|S^* \omega\|_0 \geq q \|\omega\|_0$, $\omega \in (L_2^n)^*$, где $q = \min_{i=\overline{1, n}} q_i = \min_{i=\overline{1, n}} \inf_{t \in E} |\beta_{ii}|$.

Доказательство. Сопряженный оператор $S^*: (L_2^n)^* \rightarrow (L_2^n)^*$ имеет вид:

$$S^* = \begin{pmatrix} S_{11}^* & 0 & \dots & 0 \\ 0 & S_{22}^* & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & S_{nn}^* \end{pmatrix}.$$

Для оператора S^* , в силу условий леммы 2, справедливы неравенства:

$$\|S^* \omega\|_0 = \max_{i=\overline{1, n}} \|S_{ii}^* \omega_i\|_{L_2} \geq \max_{i=\overline{1, n}} q_i \|\omega_i\|_{L_2} \geq \min_{i=\overline{1, n}} q_i \max_{i=\overline{1, n}} \|\omega_i\|_{L_2} = q \|\omega\|_0.$$

Таким образом, оператор S является сюръективным. Лемма доказана.

Для получения условий сюръективности суммы $M + S + H$ воспользуемся следующим утверждением.

Лемма 4. Пусть X, Y - банаховы пространства и $L_1, L_2: X \rightarrow Y$ - линейные ограниченные операторы. Если для оператора L_1 выполнено неравенство $\|L_1^* \omega\| \geq q \|\omega\|$ и $q > \|L_2\|$, то оператор $L_1 + L_2$ сюръективен и справедливо неравенство $\|(L_1^* + L_2^*) \omega\| \geq (q - \|L_2\|) \|\omega\|$.

Лемма 5. Пусть выполнены условия леммы 3, и

- 1) $a_{ij} \in L_\infty$, $i, j = \overline{1, n}$;
- 2) функции $b_{ij}(\cdot)$ и $h_j(\cdot)$, при всех $i, j = \overline{1, n}$ удовлетворяет условиям леммы 1 и справедливо неравенство:

$$q - \max_{j=\overline{1, n}} \sum_{i=1}^n \|a_{ij}\|_\infty - \max_{j=\overline{1, n}} \sum_{i=1, i \neq j}^n \|\beta_{ij}\|_\infty = q_0 > 0.$$

Тогда оператор $M + S + H$ сюръективен и справедливо неравенство $\|(M + S + H)^* \omega\|_0 \geq q_0 \|\omega\|_0$, $\omega \in (L_2^n)^*$.

Доказательство. Оценим нормы операторов M, H . Справедливы неравенства:

$$\|My\|_{L_2^n} = \sum_{i=1}^n \left\| \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij}(t) y_j(t) \right\|_{L_2} \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \|a_{ij}\|_{\infty} \|y_j\|_{L_2} \leq \max_{j=\overline{1, n}} \sum_{i=1}^n \|a_{ij}\|_{\infty} \|y\|_{L_2^n},$$

$$\|Hy\|_{L_2^n} = \sum_{i=1}^n \left\| \sum_{j=1, j \neq i}^n S_{ij} y_j \right\|_{L_2} \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n \|S_{ij}\| \|y_j\|_{L_2} \leq \left(\max_{j=\overline{1, n}} \sum_{i=1, i \neq j}^n \|S_{ij}\| \right) \|y\|_{L_2^n} = \max_{j=\overline{1, n}} \sum_{i=1, i \neq j}^n \|\beta_{ij}\|_{\infty} \|y\|_{L_2^n}$$

$$\text{Отсюда } \|M\| \leq \max_{j=\overline{1, n}} \sum_{i=1}^n \|a_{ij}\|_{\infty}, \quad \|H\| \leq \max_{j=\overline{1, n}} \sum_{i=1, i \neq j}^n \|\beta_{ij}\|_{\infty}.$$

Применение леммы 4 завершает доказательство.

При доказательстве условий существования решения операторного уравнения (5) применим следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть выполнены условия:

- 1) оператор L имеет дополняемое ядро;
- 2) существует такая константа $q > 0$, что неравенство $q\|\omega\| \leq \|L^* \omega\|$ выполнено для всех $\omega \in Y^*$;
- 3) оператор $F: X \rightarrow Y$ вполне непрерывен и существуют константы $c, d \geq 0$, $0 \leq \delta < 1$ такие, что $\|Fx\| \leq c + d\|x\|^\delta$ для всех $x \in X$.

Тогда уравнение

$$Lx = Fx \tag{6}$$

имеет хотя бы одно решение.

Доказательство. Условия 1), 2) гарантируют существование ограниченного правого обратного к L оператора $K: Y \rightarrow X$ [2, стр.40]. Рассмотрим вспомогательное уравнение:

$$x = KFx. \tag{7}$$

Из существования решения уравнения (7) следует разрешимость уравнения (6). Для вполне непрерывного оператора $F_1: X \rightarrow X$, $F_1 = KF$ в силу условия 3) имеем:

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\|F_1 x\|}{\|x\|} \leq \|K\| \left(\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{c + d\|x\|^\delta}{\|x\|} \right) = 0. \text{ Таким образом, оператор } F_1 \text{ удовлетворяет ус-}$$

ловиям теоремы 4 [7]. Существование неподвижной точки оператора F_1 , обеспечивает, разрешимость уравнения (6). Теорема доказана.

Сформулируем основной результат работы.

Теорема 2. Предположим, что функции h_i , $i = \overline{1, n}$ удовлетворяют условиям леммы 2, и пусть выполнены условия:

1) $a_{ij} \in L_\infty$;

2) $\beta_{ij} \in L_\infty$, где $\beta_{ij}(t) = b_{ij}(t) \left(\mu'_j(t) \right)^{1/2}$;

3) $\max_{j=\overline{1, n}} \sum_{i=1}^n \|a_{ij}\|_\infty + \max_{j=\overline{1, n}} \sum_{i=1, i \neq j}^n \|\beta_{ij}\|_\infty < \min_{i=\overline{1, n}} \inf_{t \in E} |\beta_{ii}|$;

4) существуют такие $c, d \geq 0$, $0 \leq \delta < 1$, что справедливо неравенство $|f(t, u)|_{R^n} \leq c + d |u|_{R^n}^\delta$, $t \in E$ и $u \in R^n$.

Тогда задача (1), (2) имеет хотя бы одно решение.

Доказательство. Сначала напомним, что в гильбертовом пространстве ядро линейного ограниченного оператора, дополняемо, как замкнутое подпространство [7]. Ядро оператора $M + S + H$ дополняемо в L_2^n , так как выбранная норма на этом пространстве эквивалентна норме, порождаемой скалярным произведением гильбертова пространства. Согласно лемме 5, для оператора $M + S + H$ справедливо неравенство $\|(M + S + H)^* \omega\|_0 \geq q_0 \|\omega\|_0$, $\omega \in (L_2^n)^*$, с положительной константой

$$q_0 = \min_{i=\overline{1, n}} \inf_{t \in E} |\beta_{ii}| - \max_{j=\overline{1, n}} \sum_{i=1}^n \|a_{ij}\|_\infty - \max_{j=\overline{1, n}} \sum_{i=1, i \neq j}^n \|\beta_{ij}\|_\infty.$$

Оператор в правой части уравнения (5) является вполне непрерывным, как произведение линейного ограниченного оператора $V: L_2^n \rightarrow D_2^n$, линейного вполне непрерывного оператора $T: D_2^n \rightarrow L_2^n$ и непрерывного оператора Немыцкого $N: L_2^n \rightarrow L_2^n$. Из условия 4), с учетом равенства $\|Vy\|_{D_2^n} = \|y\|_{L_2^n}$, можно получить оценку $\|NT(\alpha + Vy)\| \leq c_1 + d_1 \|y\|^\delta$, где новые константы c_1, d_1 зависят от $c, d, \alpha, \|T\|$, при этом показатель δ не меняется. Применение теоремы 1 завершает доказательство.

В качестве примера применения теоремы 2 рассмотрим следующую задачу для скалярного уравнения ($n = 1$):

$$\begin{cases} a(t)x'(t) + \mu x'(kt) = f(t, x(g(t))), & t \in [0, 1] \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (8)$$

Как отмечено в работе [8], такого вида задачи возникают в моделях квантовой механики.

Будем предполагать, что: $a \in L_\infty$, $\mu \in R^1$, $k \in (0, 1]$, удовлетворяющая условию Каратеодори функция $f: [0, 1] \times R^1 \rightarrow R^1$ такова, что существуют такие $c, d \geq 0$, $0 \leq \delta < 1$, что справедливо неравенство $|f(t, u)| \leq c + d |u|^\delta$, $t \in E$, $u \in R^1$, $g: [0, 1] \rightarrow R^1$ - измеримая и ограниченная в существенном функция почти всюду на $[0, 1]$, удовлетворяющая неравенству $0 \leq g(t) \leq t$.

Непосредственная проверка условий теоремы 2 приводит к следующему утверждению.

Теорема 3. Если выполнено неравенство $\|a\|_\infty < \mu/\sqrt{k}$, существует решение задачи (8) в пространстве D_2 .

ЛИТЕРАТУРА

1. Абдуллаев, А.Р. Оператор внутренней суперпозиции в пространствах суммированных функций // ВИНТИ №981-81, РЖмат №5, 81Б842. - 20 с.
2. Абдуллаев, А.Р., Бурмистрова А.Б. Элементы теории топологичекинетеровых операторов. Челябинск: Челяб. гос. ун-т., 1994. 93 с.
3. Березанский, Л.М. К вопросу об условиях приводимости функционально-дифференциальных уравнений к каноническому виду // Диф. уравнения. 1990. Т.13, N10. С.1749–1756.
4. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений / Н.В. Азбелев, В.П. Максимов, Л.Ф. Рахматуллина. М.: Наука, 1991. 280 с.
5. Данфорд, Н. Дж. Т. Шварц. Линейные операторы. Общая теория. М.: ИЛ, 1972. 895с.
6. Драшлин, М.Е. Оператор внутренней суперпозиции в пространствах суммируемых функций // Известия вузов. Математика. 1986. № 5. С17-24.
7. Треногин, В.А. Функциональный анализ. М.: Физ.-мат.лит, 2007. 488 с.
8. Furi, M., Martelli M., Vignoli A. On the solvability of nonlinear operator equations in normed spaces // Ann. mat. Pura ed Appl. 1980. N 124. P.321-343

CAUCHY PROBLEM FOR NEUTRAL TYPE FUNCTIONAL DIFFERENTIAL EQUATION

A. Abdullaev, E. Plekhova

*Perm State Technical University
29, Komsomolsky Avenue, Perm, Russia*

Abstract. The Cauchy problem for quasilinear differential equations system of neutral type was considered. Without assumption of uniquely solvability of corresponding linear boundary value problem the sufficient conditions of existence of solution was derived. A nonlinear part of the equation system was imposed a condition of «under linear» growth. To prove the main statement an auxiliary solution existing theorem for an operator equation with surjective but non invertible linear operator was applied.

Keywords: existence of solution, Cauchy problem, equation of neutral type.

ФИЗИКА

УДК 532.783:534.6

ВОЗМОЖНОЕ НАРУШЕНИЕ ОБЩЕПРИНЯТОЙ ГИДРОДИНАМИКИ СМЕКТИКОВ И НИЗКОЧАСТОТНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ КОЭФФИЦИЕНТА ПОГЛОЩЕНИЯ УЛЬТРАЗВУКА

Д.Л. Богданов, Э.В. Геворкян, Ю.Н. Обыденков

Московский государственный областной университет (МГОУ)
105005, Москва, ул. Радио, 10а

Аннотация. Показано, что в частотном интервале 95-760 кГц эффект возможного нарушения общепринятой гидродинамики смектических жидких кристаллов, как правило, не наблюдаем. Отклонения от квадратичной частотной зависимости коэффициента поглощения в ультразвуковых экспериментах определяются процессами акустической релаксации. Эта зависимость не является ни универсальной, ни характерной только для смектической А фазы. Кроме того, её характер меняется при изменении ориентации волнового вектора относительно индукции магнитного поля.

Ключевые слова: смектики, динамика, низкочастотный ультразвук, жидкие кристаллы, релаксация.

Жидкие кристаллы, сложные органические соединения, образующие ряд ориентационно упорядоченных промежуточных фаз между обычными твердыми кристаллами (с трехмерной кристаллической решеткой) и изотропными жидкостями. Мезогенные молекулы имеют жесткое анизотричное ядро, которое, в конечном счете, определяет неполное трансляционное упорядочение многочисленных мезофаз и их необычные динамические свойства.

Гидродинамическая теория нематических жидких кристаллов (нематиков или НЖК) кроме обычных для жидкостей переменных, включает две дополнительные гидродинамические переменные, связанные с ориентационным вектором, директором.

Смектические жидкие кристаллы (смектики или СЖК), имеющие слоистую структуру (частичный трансляционный порядок) приобретают гидродинамические переменные смещений и следовательно дополнительные акустические моды «второго звука». При этом вследствие сильно развитых флуктуаций в смектиках А и С в килогерцовом частотном диапазоне возможно нарушение общепринятой гидродинамики смектиков, проявляющееся в переходе (кроссовере) к линейной зависимости $\alpha(\omega) \sim \omega$ коэффициента поглощения ультразвука от частоты. С другой стороны к нарушению классической гидродинамической асимптотики $\alpha(\omega) \sim \omega^2$ приводит также явление акустической релаксации.

Поэтому особую актуальность приобретают низкочастотные (ниже 1 МГц) ультразвуковые эксперименты в жидких кристаллах, имеющих смектические фазы. Интерес представляет сравнение частотных зависимостей коэффициента поглощения различных фаз и веществ. Однако вследствие больших методических трудностей таких экспери-

ментов практически нет. Имеющиеся недостаточно надежны и не позволяют однозначно решить указанные выше проблемы динамики мезофаз [1].

В настоящей работе исследовано поглощение ультразвука в жидком кристалле 4-бутоксипенилиден-4'-октиланилин, имеющем нематическую, смектическую А и смектическую В мезофазы. Вещество помещалось во внешнее магнитное поле индукцией $B=0,24$ Тл.

МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

В качестве метода акустических исследований в области частот от 100 до 650 кГц выбран резонаторный метод [2], позволяющий произвести измерения скорости и коэффициента поглощения ультразвука при постоянной геометрии акустической камеры.

В данной работе использовался акустический резонатор с выпукло-вогнутыми пьезопреобразователями, обладающий рядом преимуществ по сравнению со стандартным резонатором с плоскими пьезопреобразователями. Для достижения целей нашего исследования решающим преимуществом является возможность провести измерения в частотном интервале 100-650 кГц. В сочетании с малым объёмом исследуемого образца (около 5 см^3) это позволило провести измерения, и получить информацию о низкочастотных асимптотиках акустических параметров.

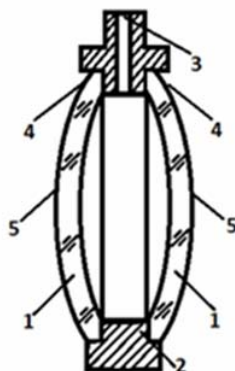


Рис. 1. Акустический резонатор

Конструкция акустического резонатора приведена на рис.1. Основу резонатора составляют два пьезопреобразователя 1, выполненные из ниобата лития среза $y + 36^\circ$. Диаметр обоих преобразователей $d = 30$ мм, а радиусы кривизны каждого преобразователя соответственно $r_1 = +75$ мм и $r_2 = -400$ мм. Поверхности пьезопластин отшлифованы и на них химическим способом нанесены электроды 4 и 5 из серебра. Симметричное расположение пьезопластин, необходимое для получения высоких добротностей, достигается за счёт размещения их в прецизионных проточках в титановом кольце при помощи малого количества эластичного клея, для этих целей применяется однокомпонентный герметик ВГО-1. Внешний диаметр кольца - 32 мм, а внутренний - 29 мм. Заполнение резонатора исследуемой жидкостью осуществляется через отверстие 3 в кольце 2. Для минимизации акустических потерь контакты с электродами осуществляются с помощью тонких упругих посеребрённых проводников. Внутренний объем ре-

зонатора составляет около 4 см^3 . Относительная погрешность определения скорости ультразвука не превышает 0,2%. Результирующая максимальная погрешность определения коэффициента поглощения и его анизотропии составляет около 10% при $f < 0,5 \text{ МГц}$. Максимальная относительная погрешность определения анизотропии скорости ($\Delta c/c$) при её значении около 10-5 менее 10%.

РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТА И ОБСУЖДЕНИЕ

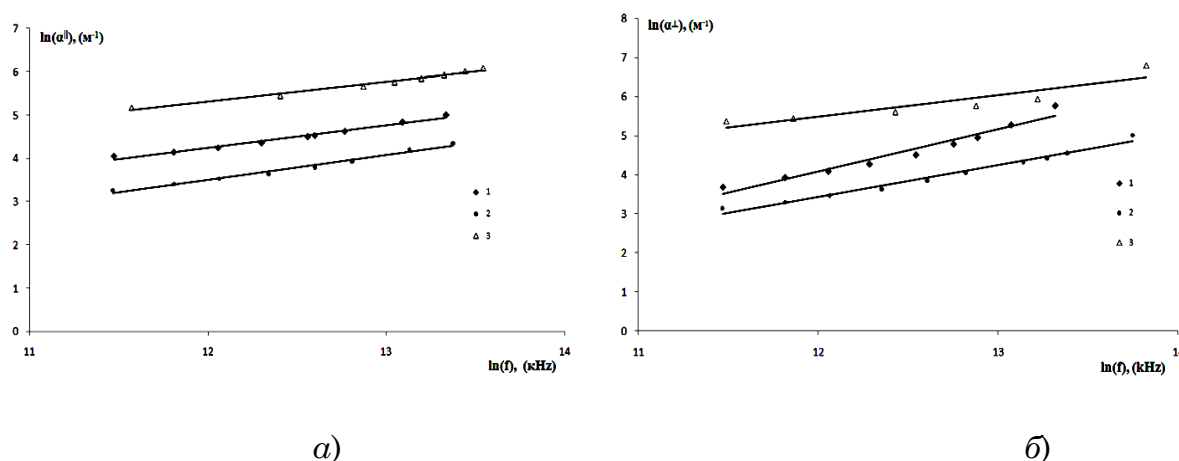


Рис. 2. Частотная зависимость $\alpha(f)$ для параллельной (а) ($\Theta = 0^\circ$) и перпендикулярной (б) ($\Theta = 90^\circ$) ориентации волнового вектора относительно магнитного поля в двойном логарифмическом масштабе, 1-нематик, 2-смектика А, 3-смектика В.

Экспериментальные результаты, приведённые на рис.2 показывают, что эффекты, связанные с флуктуационным нарушением общепринятой гидродинамики смектиков А очевидно экспериментально ненаблюдаемы и их следует отнести к разряду «призрачных» («ghost») эффектов. Имеющиеся значительные отклонения от классической частотной зависимости следует связывать с релаксационными процессами (акустическая релаксация), характерными для всех мезофаз, а не только для смектиков А. Низкочастотное поведение ультразвуковых параметров жидких кристаллов, по-видимому, не является универсальным и качественно различается для разных веществ. Для окончательного решения проблемы нужны дальнейшие эксперименты в килогерцовом частотном диапазоне на широком круге веществ, имеющих различные смектические фазы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Базаров И.П., Геворкян Э.В. Статистическая физика жидких кристаллов. М., изд.Моск.ин-та. 1992.
2. Кононенко В. С. Прецизионный метод для измерения коэффициента поглощения ультразвука в жидкостях на частотах 0,1-20 МГц. Акустич. ж., 1987, т.33, №4.-С. 683-694.

**POSSIBLE INFRINGEMENT OF STANDARD HYDRODYNAMICS
OF SMECTICS AND LOW-FREQUENCY DEPENDENCE
OF FACTOR OF ABSORPTION OF ULTRASOUND**

D. Bogdanov, E. Gevorkian, Y. Obydenkov

*Moscow Region State University
10a, Radio st., Moscow, 105005, Russia*

Abstract. It is shown that in a frequency interval 95-760 kHz the effect of possible infringement of the standard hydrodynamics of smectics liquid crystals, as a rule, isn't observable. Deviations from square-law frequency dependence of factor of absorption in ultrasonic experiments are defined by processes of an acoustic relaxation. This dependence isn't neither universal, nor characteristic only for smectic A phases. Besides, her character changes at change of orientation of a wave vector concerning a magnetic field induction.

Keywords: smectics, dynamics, low-frequency ultrasound, liquid cry

УДК 541.64:539.2:536.7

О ПРИРОДЕ ГИДРОФОБНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

А.К. Дадиванян*, Ю.М. Пашина*, О.В. Ноа, Б.А. Королев****

**Московский государственный областной университет
105005, Москва, ул. Радио, 10а*

***Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова (МГУ),
химический факультет
119991, Ленинские горы, 1, стр.3*

Аннотация. Показано, что учет ближнего ориентационного порядка позволяет объяснить природу гидрофобных взаимодействий в водных растворах бензола и предсказать существование нижней критической температуры растворения вблизи критической температуры воды. Определен вклад ближнего ориентационного порядка в парциальную теплоту растворения углеводородов при растворении в воде. Показано, что полученные результаты находятся в согласии с экспериментальными данными.

Ключевые слова: Гидрофобные взаимодействия – ближний ориентационный порядок – метод атом-атом потенциалов – энтропия смешения – свободная энергия смешения – нижняя критическая температура растворения

Гидрофобные взаимодействия оказывают существенное влияние на свойства растворов низкомолекулярных соединений, синтетических полимеров и биополимеров. Особенно заметно их влияние на термодинамические свойства растворов, так как именно благодаря гидрофобным взаимодействиям возможно существование нижней критической температуры смешения в водных растворах [1].

До последнего времени гидрофобные взаимодействия объясняли существованием кластеров молекул воды [2], однако теория, основанная на определяющей роли класте-

ров, не позволяет объяснить, например, увеличение теплоемкости ароматических соединений при растворении в воде [1]. Природа гидрофобных взаимодействий может быть объяснена на основе концепции ближнего ориентационного порядка в растворах полимеров – корреляции ориентаций полимерных цепей и непосредственно контактирующих с ними молекул растворителя [3].

Ближний ориентационный порядок полимер – растворитель оказывает существенное влияние на оптические, электрические, спектральные, релаксационные, термодинамические свойства макромолекул, молекул растворителя и растворов [3 – 10]. Корреляция ориентаций молекул компонентов раствора была установлена как экспериментально из исследований оптической анизотропии и дипольного момента макромолекул в различных растворителях, поляризованной флуоресценции, линейного инфракрасного дихроизма, эффекта Керра в растворах и набухших полимерах [4 – 9], так и в результате расчетов взаимодействия молекул растворителя с полимерной цепью [10]. При этом значения фактора ориентации молекул растворителя относительно полимерной цепи, полученные из экспериментов и теоретически, оказались в хорошем согласии.

Корреляция ориентаций молекул в растворах как полимеров, так и низкомолекулярных соединений обусловлена зависимостью энергии межмолекулярных взаимодействий от взаимной ориентации молекул компонентов [11]. Для оценки ориентационного порядка в водных растворах нами была рассчитана зависимость энергии взаимодействия молекул компонентов от их взаимной ориентации. Была исследована система вода – бензол, в которой парциальные энтропия и энтальпия смешения отрицательны, что свидетельствует о существенной роли гидрофобных взаимодействий в этой системе [1].

Энергия взаимодействия рассчитывалась методом атом – атом потенциалов по соотношениям:

$$E = \sum E_{ij}$$

где E_{ij} – энергия взаимодействия между атомами растворителя i и растворенного вещества j , равная

$$E_{ij} = Ae^{-\alpha R_{ij}} - \frac{B}{R_{ij}^6}, \quad (1)$$

где R_{ij} – расстояние между атомами i и j .

Величины A , B и α брались равными $0.154 \text{ Дж} \cdot \text{моль}^{-1}$, $0.138 \text{ Дж} \cdot \text{моль}^{-1} \text{ \AA}^{-1}$ и $3.6 \text{ \AA}^{-1}$, соответственно для взаимодействия между атомами $\text{C} \dots \text{C}$ и $0.126 \text{ Дж} \cdot \text{моль}^{-1}$, $0.18 \cdot 10^{-3} \text{ Дж} \cdot \text{моль}^{-1} \text{ \AA}^{-1}$ и $5.0 \text{ \AA}^{-1}$ – между атомами $\text{H} \dots \text{H}$ [12–13]. Потенциалы взаимодействия атомов $\text{O} \dots \text{O}$, принимались равными потенциалам $\text{C} \dots \text{C}$ [14]. Такое допущение не должно приводить к серьезным ошибкам, так как ван-дер-ваальсовы радиусы C ($1.85 \text{ \AA}$) и O ($1.60 \text{ \AA}$) не очень сильно различаются.

При вычислении взаимодействий различных атомов X и Y пользовались соотношениями [15]:

$$A_{X \dots Y} = \sqrt{A_{X \dots X} \cdot A_{Y \dots Y}}; \quad B_{X \dots Y} = \sqrt{B_{X \dots X} \cdot B_{Y \dots Y}}; \quad \alpha_{X \dots Y} = \frac{1}{2}(\alpha_{X \dots X} + \alpha_{Y \dots Y}).$$

Для взаимодействия между атомами С, О и Н мы получили

$$A_{C...H} = 0.14 \text{ Дж/моль}, B_{C...H} = 0.5 \cdot 10^3 \text{ Дж/моль} \cdot \text{\AA}^{-1}; \alpha_{C...H} = 4.3 \text{ \AA}^{-1}.$$

$$A_{O...H} = 0.14 \text{ Дж/моль}, B_{O...H} = 0.5 \cdot 10^3 \text{ Дж/моль} \cdot \text{\AA}^{-1}; \alpha_{O...H} = 4.3 \text{ \AA}^{-1}.$$

Ориентация молекул воды относительно бензола определялась углами θ , φ и ψ (рис.1), которые менялись в интервалах $(0 - 90^\circ)$ с шагом 30° . Начальное значение расстояния между центрами инерции r молекул брали равным $5 \text{ \AA}$ и проводили минимизацию энергии по r . Центры инерции молекул воды относительно молекулы бензола помещали в точки 1 – 5 (рис.2).

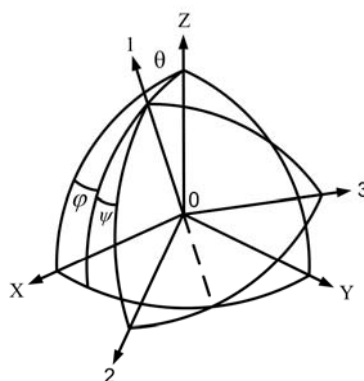


Рис.1. Взаимное расположение неподвижной XYZ и подвижной I23 систем координат.

XYZ – система координат связанная с поверхностью кристалла;

I23 – система координат, связанная с макромолекулой;

θ – полярный угол оси I в неподвижной системе координат;

φ – азимут оси I (угол между плоскостями XZ и IZ);

ψ – азимут подвижной системы (угол между плоскостями IZ и I2).

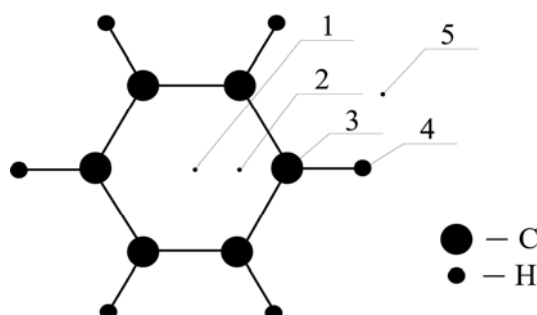


Рис. 2. Взаимное расположение молекул воды и бензола.

На рис. 3 в качестве иллюстрации приведены зависимости энергии взаимодействия от углов, характеризующих взаимную ориентацию молекул при расположении центра инерции молекулы воды в точке 1. Как видно из рисунка, существует сильная зависимость энергии межмолекулярного взаимодействия от углов ориентации.

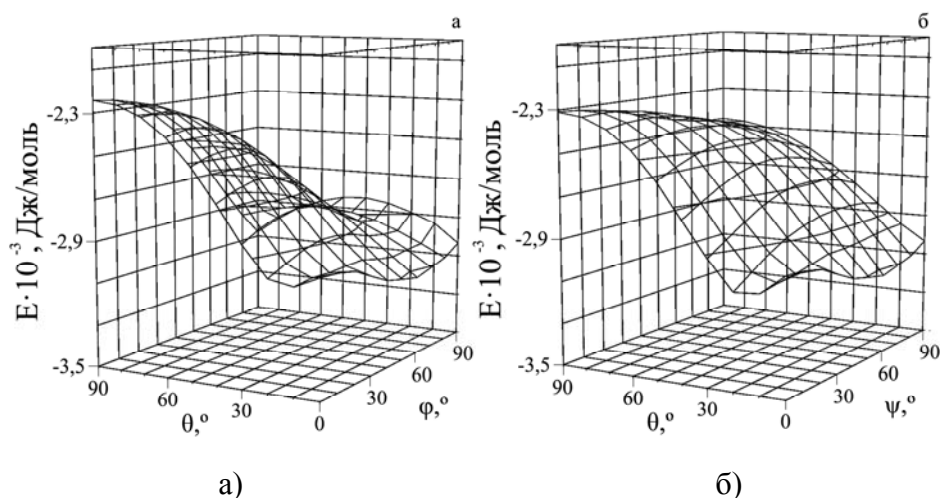


Рис. 3. Зависимость энергии взаимодействия для системы вода – бензол от углов ориентации θ , φ (а) при $\psi = 30^\circ$ и от углов ориентации θ , ψ (б) при $\varphi = 30^\circ$.

Мы нашли вероятности различных ориентационных состояний при разных положениях центров инерции молекул, пользуясь распределением Больцмана

$$W_{ik} = \frac{e^{\frac{E_{ik}}{kT}} \sin \theta_i \Delta \theta \Delta \Phi}{\sum_{i,k} e^{\frac{E_{ik}}{kT}} \sin \theta_i \Delta \theta \Delta \Phi}. \quad (2)$$

Распределение Больцмана может быть использовано в данном случае, потому что, как было показано [16], молекулы растворителя, контактирующие с молекулами растворенного вещества, ориентируются независимо друг от друга.

Зависимости вероятности ориентационных состояний от углов ориентации при температуре 298 К и критической температуре воды 647.3 К, которая существенно выше критической температуры бензола (569.5 К), приведены на рис. 4. Как видно из рисунка, вероятности разных состояний сильно различаются, причем вероятность реализации некоторых состояний более чем в два раза превышает вероятность реализации остальных. Если исключить те ориентации, вероятность которых более чем в два раза меньше максимальной, исключенной оказывается значительная часть состояний.

В чистых компонентах, как известно из эксперимента, при температурах значительно ниже критической температуры компонентов раствора степень ориентационного порядка выше, чем в растворе. С повышением температуры ближний ориентационный порядок разрушается и при температурах, близких к критической, распределение молекул по ориентациям становится хаотическим, т.е. все ориентации становятся равновероятными, и реализуются все ориентационные состояния [17 – 18].

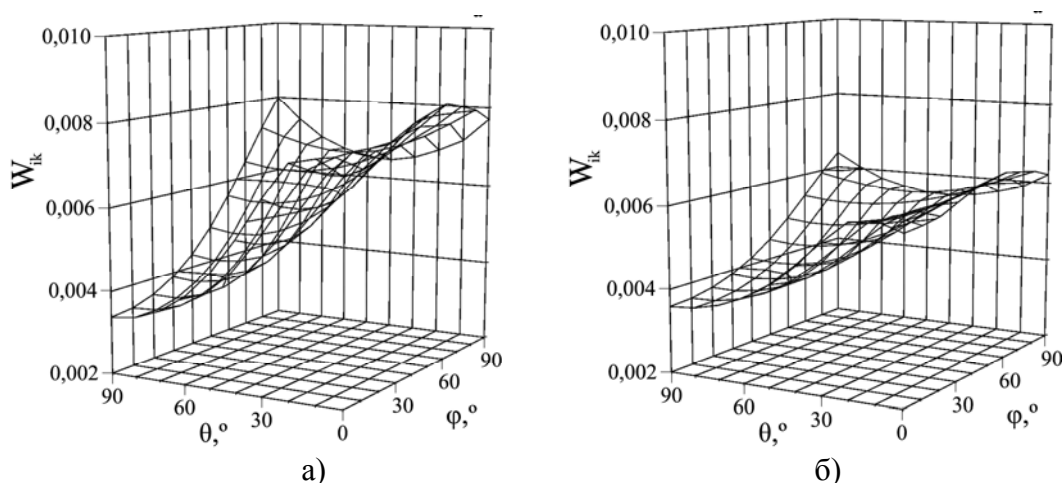


Рис. 4. Зависимость вероятности ориентации для системы вода – бензол от углов ориентации θ, φ при $\psi = 30^\circ$ при $T = 298$ К (а) и $T = 647,3$ К (б).

Таким образом, ориентационный порядок в растворе может быть совершеннее, чем в чистой жидкости, что может объяснить наблюдаемое в эксперименте уменьшение энтропии смешения [1].

Энтропия смешения при образовании растворов низкомолекулярных соединений и полимеров, как было показано в работах [9 -10], определяется уравнениями (3) и (4) соответственно:

$$\Delta S_{CM} = \Delta S_{CM}^{noz} + \Delta S_{CM}^{op} = -k \left[\frac{n_1}{x} \ln N_1 + n_2 \ln N_2 + \frac{n_1 n_2 x}{n_1 + n_2 x} \left(Z_2 \ln \frac{\alpha_1}{\beta_1} + Z_1 \ln \frac{\alpha_2}{\beta_2} \right) \right], \quad (3)$$

$$\Delta S_{CM} = \Delta S_{CM}^{noz} + \Delta S_{CM}^{OP} = -k \left(n_1 \ln \varphi_1 + n_2 \ln \varphi_2 + \frac{x n_1 n_2}{n_1 + x n_2} \left(Z_2 \ln \frac{\alpha_1}{\beta_1} + Z_1 \ln \frac{\alpha_2}{\beta_2} \right) \right), \quad (4)$$

где n_1 – число молекул первого компонента, n_2 – число молекул второго компонента, N_1 и N_2 – мольные доли компонентов, φ_1 и φ_2 – их объемные доли, Z_1 и Z_2 – координационные числа, α_1 и α_2 – числа ориентационных состояний молекул чистых компонентов, β_1 и β_2 – числа ориентационных состояний молекул компонентов 1 и 2 в растворе.

Значения химических потенциалов компонентов определяются как

$$\Delta \mu_i = \frac{\partial \Delta G_{CM}}{\partial n_i} = \frac{\partial \Delta H_{CM}}{\partial n_i} - T \frac{\partial \Delta S_{CM}}{\partial n_i}.$$

С учетом того, что энтальпию можно представить в виде:

$$\Delta H_{CM} = kT \chi_H Z_2 \frac{n_1 n_2 X}{n_1 + n_2 X},$$

изменения химических потенциалов раствора полимера выражаются уравнениями:

$$\Delta\mu_1 = \Delta\bar{H}_1 - T\Delta\bar{S}_1 = RT \left[\ln(1 - \varphi_2) + \left(1 - \frac{1}{x}\right)\varphi_2 + \left\{ \chi_H + \left(Z_2 \ln \frac{\alpha_1}{\beta_1} + Z_1 \ln \frac{\alpha_2}{\beta_2} \right) \right\} \varphi_2^2 \right], \quad (5)$$

$$\Delta\mu_2 = \Delta\bar{H}_2 - T\Delta\bar{S}_2 = RT \left[\ln(1 - \varphi_1) - \left(1 - \frac{1}{x}\right)x\varphi_1 + \left\{ \chi_H + \left(Z_2 \ln \frac{\alpha_1}{\beta_1} + Z_1 \ln \frac{\alpha_2}{\beta_2} \right) \right\} x\varphi_1^2 \right],$$

где $\chi_H = \frac{\Delta\omega_{12}}{kT}$ – параметр взаимодействия, а $\Delta\omega_{12}$ – разность энергий взаимодействия, приходящаяся на один контакт, при замене контактов полимер-полимер, растворитель-растворитель на контакты полимер-растворитель.

Соотношения (5) позволяют получить условия растворения с повышением или понижением температуры.

При $\Delta\bar{H}_i > 0$ и $\Delta\bar{S}_i > 0$ растворение происходит при повышении температуры, и критическая температура смешения является верхней, а при $\Delta\bar{H}_i < 0$ и $\Delta\bar{S}_i < 0$ растворение происходит при понижении температуры, что соответствует нижней критической температуре растворения.

Предложенный нами подход позволяет объяснить и увеличение парциальной молярной теплоемкости углеводов при растворении в воде (табл. 1) [1].

Таблица 1
Термодинамические параметры растворения жидких углеводов в воде при 25°C

Вещество	ΔH° кДж/мол	ΔS° Дж/град мол	ΔC_p Дж/град мол	$N_{ор}$
Пропан	-7.5	-92.0	376.2	15
Бутан	-3.3	-92.0	413.8	16.5
Бензол	-2.5	-54.3	305.1	12
Толуол	-2.5	-66.9	355.3	14

Если считать, что при растворении, благодаря существованию ближнего ориентационного порядка, связывание молекул воды с молекулами углеводов приводит к замене поступательных и вращательных степеней свободы колебательными, теплоемкость каждой молекулы воды увеличится на $3R$ (25.1 Дж/град моль). При этом сравнение с экспериментальными данными показывает, что каждая молекула углеводорода оказывается связанной с 12 – 16 молекулами воды ($N_{св}$), что приблизительно равно числу молекул, заполняющих первый монослой вокруг молекулы углеводорода.

ЛИТЕРАТУРА

1. Моравец Г. Макромолекулы в растворе. М.: «Мир». 1967.
2. Nemethy G., Sheraga H.A. J. Chem. Phys. 1962. V.36. P.3382.
3. Фрисман Э.В., Дадиванян А.К., Дюжнев Г.А. Докл. АН СССР. 1963. Т.153. С.1063.
4. Дадиванян А.К., Грищенко А.Е., Цветков Н.В., Рюмцев Е.И. Высокомолек. соедин. Б. 2008. Т.50. №10. С. 1870.
5. Дадиванян А.К., Ноа О.В., Новикович В.М. Вестн. МПУ. 2002. № 5. С.144.
6. Цветков Н.В., Диденко С.А., Цветков В.Н. Докл. АН. 1993. Т.330. С.725.
7. Дадиванян А.К., Джавришян Дж.М., Агасарян В.Ю., Айрапетян Г.А. Высокомолек. соедин. Б. 1981. Т.23. С.674.
8. Дадиванян А.К., Ноа О.В. Вестник Московского государственного областного университета, Труды Центра фундаментальных научных исследований. 2006. №1. С.51.
9. Дадиванян А.К., Ноа О.В. Высокомолек. соедин. А. 2007. Т. 49. № 2. С.313.
10. Дадиванян А.К., Ноа О.В., Чаусов Д.Н., Игнатов Ю.А. Высокомолек. соедин. А. 2008. Т.50. №2. С.1.
11. Дадиванян А.К., Адонц В.Г., Айрапетян Г.А., Кан П.С., Левинтал С. Высокомолек. соедин. А. 1977. Т.19. С. 392.
12. Китайгородский А.И. // ДАН СССР. 1961. Т.137. С.116.
13. Китайгородский А.И., Мирская К.В. // Кристаллография. 1961. Т.6. С.507.
14. Бириштейн Т.М., Птицын О.Б. Конформации макромолекул. М., 1964. 391 с.
15. Дашевский В.Г. // Ж. структ. хим. 1970. Т.11. С.912.
16. Дадиванян А.К., Агранова С.А. Высокомолек. соедин. А. 1980. Т. 22. С.1499.
17. Вукс М.Ф. Рассеяние света в газах, жидкостях и растворах. Л., 1977. 320 с.
18. Вукс М.Ф. Электрические и оптические свойства молекул и конденсированных сред. Л., 1984. 334 с.

ON THE NATURE OF HYDROPHOBIC INTERACTIONS

A. Dadivanyan*, Yu. Pashinina*, O. Noah**, B.Korolev**

**Moscow Region State University
10a, Radio st., Moscow, 105005, Russia*

***Lomonosov Moscow State University
Department of Chemistry
1 – 3, Lenin Hills, Moscow, 119991, Russia*

Abstract. Existence of the short-range orientation order in aqueous solution of benzene is shown. The contribution of the orientations correlation into thermodynamic characteristics of dissolution is calculated. The nature of hydrophobic interactions is explained from the viewpoint of the short-range orientation order concept.

Keywords: Hydrophobic interactions – short-range orientation order – atom-atom potentials method – entropy of mixing – free energy of mixing – lower critical solution temperature

УДК 666.3-492.2:546.21`621`641:621

**ПОЛУЧЕНИЕ ОКСИДА КРЕМНИЯ,
ЛЕГИРОВАННОГО ИТТЕРБИЕМ И АЛЮМИНИЕМ
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СОЛЕЙ И АЛКОГОЛЯТОВ**

**Е.Е.Гринберг¹⁾, Л.Д.Исхакова²⁾, Г.В.Баранова³⁾,
И.Е.Стрельникова¹⁾, В.В.Беляев⁴⁾, В.С.Михель¹⁾,
Н.Г.Черная¹⁾, Е.Ю.Сударикова¹⁾, В.Б.Жаданов¹⁾**

¹⁾ФГУП «ИРЕА»,

107076, Москва, Богородский вал, 3

²⁾Центр волоконной оптики РАН

1000 Москва, ул. Вавилова, д.38

³⁾Российский химико-технологический университет им. Д.И.Менделеева

125047, Москва, Миусская пл., д.9

⁴⁾Московский государственный областной университет

105005, Москва, ул.Радио, д.10а

Аннотация. Рассмотрено получение порошков оксида кремния, легированного оксидами алюминия и иттербия в системе «тетраэтоксисилан – алкоголяты алюминия – соли иттербия» с помощью гибридного золь-гель процесса. Выявлена возможность получения порошков в равномерном распределении легирующих элементов, что фазообразование проходит согласно диффузионному механизму, аналогично твердофазному синтезу, но на молекулярном уровне.

Ключевые слова: золь-гель метод, гибридный метод, полуалкоксидный метод, иттрий-алюминиевый гранат.

Порошки высокочистого оксида кремния, легированного иттербием и алюминием, находят все более широкое применение в технологии получения волоконно-оптических сред [1-5]. При этом, как правило, шихты для создания исходных слитков, из которых вытягивают оптические волокна, синтезируют путем твердофазного высокотемпературного (до 1000°C) смешения тонкодисперсных порошков индивидуальных оксидов [2] или осаждением из водных растворов солей элементов [3-5]. При этом достаточно трудно добиться однородности химического и фазового составов получаемых твердых смесей, что может отрицательно сказаться на качестве получаемых волокон.

В последнее время широко разрабатывается метод получения сложных оксидных композиций на основе оксидов кремния, иттрия, алюминия и других элементов [6-10], получаемых путем жидкофазного или парового гидролиза алкоголятов этих элементов общей формулы $EI(OR)_x$, где EI – металл, R – углеводородный радикал ($CH_3 - C_4H_9$), n – валентность. Выбор метода гидролиза зависит от физико-химических свойств исходных веществ – давления насыщенных паров соединений, термической или гидролитической прочности связей и т.д.

В данной работе рассмотрено получение порошков диоксида кремния, легированного иттербием.

В качестве исходных соединений использовали: тетраметоксисилан (ТМОС) и тетраэтоксисилан (ТЭОС), полученные переработкой кремнийсодержащих отходов производства фотоэлектрических преобразователей. Содержание основного вещества в них было не менее 99,5% масс, примеси – триизопропилат (ИПА) и вторичный бутилат

алюминия (ВБА). Алкоголяты кремния синтезировали взаимодействием тетрахлорида кремния, полученного из отходов производства кремниевых фотоэлектрических преобразователей (ФЭП) с метиловым или этиловым спиртами. Алкоголяты алюминия получали путем каталитического растворения металла в изопропиловом или втор-бутиловым спиртах. Использование в качестве исходного соединения тетрахлорида кремния, полученного из отходов производств, использующих высокочистый кремний, позволяет решить экологические проблемы предприятий.

Синтезированные продукты очищали химической обработкой и высокоэффективной ректификацией при атмосферном давлении или под вакуумом в зависимости от термической устойчивости соединений. Содержание основного вещества в очищенных продуктах составляло 99(+)% масс. Гидролизующими агентами в использованном «гибридном» варианте являлись водные хлориды и нитраты иттербия. Основными примесями в исходных веществах были соответствующие спирты – метиловый, этиловый, изопропиловый и втор-бутиловый. Содержание примесей металлов (Fe, Cr, Ni и др.) в алкоголятах и солях, определяемая методом ICP на приборе PE ICP Elan DRS-2, составляло $n \cdot (10^{-3} - 10^{-6})\%$ масс. каждой.

Синтез оксида кремния, легированного алюминием и иттербием, проводили в две стадии. На первой стадии получали растворы алкоголятов алюминия и алкоголятов кремния в спиртах в концентрациях, обеспечивающих содержание оксида алюминия в диоксиде кремния в интервале 1 – 3% масс. Растворимость алкоголятов алюминия в системах на основе алкоголятов кремния ограничена, однако она позволяет получить растворы требуемой концентрации.

Следует отметить, что преимуществом применения алкоголята алюминия является тот факт, что основная примесь в нем, как правило, кремний. Концентрация кремния в алюминии составляет $10^{-1} - 10^{-2}\%$ масс. При синтезе и очистке примесь кремния количественно переходит в продукт – алкоголь, и в дальнейшем чрезвычайно трудно отделяется физико-химическими методами. В случае применения алкоголятов алюминия для легирования диоксида кремния требования к содержанию примеси кремния практически снимаются. Содержание примеси кремния в алкоголятах алюминия на уровнях $10^{-1} - 10^{-2}\%$ масс на легировании диоксида кремния, в количествах 1 – 3%, не вносит существенной ошибки в точность концентраций при составлении оксидных смесей.

Гидролиз смесей алкоголятов кремния и алюминия проводили в кварцевом аппарате добавлением к раствору алкоголятов водных растворов хлорида и нитрата иттербия. Процесс требует интенсивного перемешивания смеси, поскольку без него системы «алкоголят кремния – вода» расслаиваются, что приводит к значительному увеличению времени гидролиза и неравномерности состава образующихся осадков.

Перемешивание осуществляли механической лопастной, магнитной и ультразвуковой мешалками.

Гидролиз проводили растворами, имевшими pH в интервале от 3 до 10. Нужный уровень pH обеспечивали добавлением в гидролизующий раствор соляной кислоты или аммиачной воды.

Скорость гидролиза ТЭОС в значительной степени зависит от pH гидролизующего раствора.

Образующуюся твердую фазу отделяли от жидкости вакуумной фильтрацией на фторопластовых фильтрах или центрифугированием со скоростью вращения центрифуги 3000 об/мин.

Необходимо отметить, что эффективность отделения твердой фазы также существенно зависит от pH смеси. При значениях pH гидролизата вблизи 7 фильтрация проходила чрезвычайно медленно. Отделение центрифугированием также требовало значительного времени и было недостаточно эффективным. Кислый гидролиз приводил к образованию устойчивого геля, практически неразделяемого обоими использованными способами. При щелочном гидролизе образующиеся осадки формировались значительно быстрее, и их отделение не представляло сложности, как в случае фильтрации, так и при центрифугировании. Полученные порошки подвергали термообработке в муфельной печи в кислородсодержащей атмосфере при температуре 780 – 800°C в течение 5 часов. В результате были получены мелкокристаллические порошки с размерами частиц в интервале 2-15 мкм.

По объему твердой фазы интегральное распределение иттербия, определенное методом электронной сканирующей микроскопии, достаточно равномерно (рис. 1). Такой характер распределения легирующего элемента дает основание для высокой вероятности образования тройного твердого раствора при плавлении полученных порошков, чему способствует наличие в системе оксида алюминия.

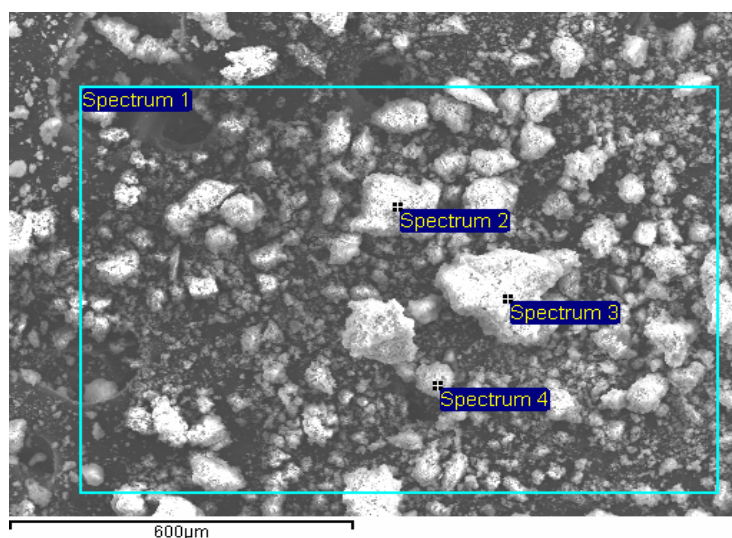


Рис.1. Распределение легирующих элементов в образце диоксида кремния.

Таблица 1

Обработка: кислород по стехиометрии (нормализованный)					
Все результаты в вес. %					
Спектр	Al	Si	Yb	O	Всего
Спектр 1	1,08	44,73	1,99	52,2	100
Спектр 2	1,59	44,64	1,32	52,45	100
Спектр 3	1,46	44,84	1,15	52,55	100
Спектр 4	1,52	36,07	17,54	44,87	100
Средний	1,41	42,57	5,5	50,52	100
Ст. отклонение	0,23	4,34	8,04	3,77	
Макс.	1,59	44,84	17,54	52,55	
Мин.	1,08	36,07	1,15	44,87	

В образцах порошков, полученных с использованием для гидролиза водных растворов хлорида иттербия, обнаружено высокое содержание примеси хлора, вплоть до 0,05% масс.

При использовании растворов нитрата иттербия примеси галогенов в твердой фазе отсутствуют вплоть до концентрации 0,001% масс.

ВЫВОДЫ:

1. Исследован «золь-гель»-синтез диоксида кремния, легированного иттербием и алюминием с использованием алкоголятов и водно-солевых растворов. Показано, что существует зависимость между скоростью гидролиза алкоголятов кремния и pH гидролизующих растворов солей.
2. Образующиеся при гидролизе смеси диоксида кремния, оксидов алюминия и иттербия обладают высокой однородностью состава по объему, однако фазовый состав твердой фазы неоднороден и состоит, как правило, из частиц индивидуальных оксидов.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.С. Курков, В.И. Карпов, АЛЮ. Лаптев и др. Высокоэффективный волоконный лазер с накачкой в оболочку на основе иттербиевого световода и волоконной брэгговской решетки // Квантовая электроника. 1999. - Т. 27, № 3. -С. 239-240.
2. Yb³⁺-doped double-clad fibers and lasers / A.S. Kurkov, A.Yu. Laptev, E.M. Dianov et. al. // Proc. of SPIE. Advances in Fiber Optics. - 2000. - Vol. 4083. -P. 118-126.
3. А.Н.Гурьянов, Д.Д. Гусовский, В.Ф. Хопин Влияние чистоты исходных материалов на оптические потери в волоконных световодах на основе высокочистого кварцевого стекла // Высокочистые вещества. 1987. - № 6. - С. 193-197.
4. Cooperative luminescence in an ytterbium-doped silica fibre / S. Magne, Y. Ouerdane, M. Druetta et. al. // Optics Communications. 1994. - Vol. 111. — P. 310-316.
5. Fabrication and characterization of low-loss optical fibers containing rare-earth ions / S.B. Poole, D.N. Payne, R.J. Mears et. al. // Journal of Lightwave Technology. 1986. - Vol. LT-4, № 7. p. 870-876.
6. А.Я. Нейман, Е.В.Ткаченко, Л.А.Квичко, Л.А.Коток //Журнал неорганической химии, 1980. -Т.25. - №9. - С.2340-2345.
7. Guo X., Sakurai K. //Jpn.J.Apl.Phys., 2000. - V.39. - Pt.1. - №3. -P.1230-1234.
8. Ming Chen, Teng-Chen S.C., Yu Chao Jung. Preparation and characterisation of garnet phosphor nanoparticles derived from oxalate coprecipitation //Journal of Solid State Chemistry, 1999. – V.144. - P.437-441.
9. В.Б. Глушкова, С.Ю.Зиновьев, Синтез алюмогранатов РЗЭ и иттрия при совместном осаждении гидроксидов //Изв. АН СССР. Неорганические материалы, 1986. – Т.22. - №7. - С.1219-1222.
10. Park C.H., Park S.J., Byung-Yong Y. VUV excitation of Y₃Al₅O₁₂ –Tb phosphor prepared by a sol-gel process// J. Mater. Sci. Lett., 2000. - V.19. - №4. - P.335-338.

**FORMATION OF SILICON OXIDE DOPED
WITH YTTERBIUM AND ALUMINIUM
AND USING OF SALTS AND ALCOHOLATES**

**E. Grinberg¹⁾, L. Ischacova²⁾, G. Baranova³⁾
I. Strel'nikova¹⁾, V. Belyaev⁴⁾, V. Mikhel'¹⁾
N. Chernaya¹⁾, E. Sudarikova¹⁾, V. Zhadanov¹⁾**

¹⁾FGUE "IREA", Moscow
3, Bogorodsky val, Moscow, 107076, Russia

²⁾Fiber Optics Reseach Center of Russian Academy of Sciences
38, Vavilova st., Moscow, 119333, Russia

³⁾Mendeleyev University of Chemical Technology of Russia
9, Miusskaya sq., Moscow, 125047, Russia

⁴⁾Moscow Region State University
10a, Radio st., Moscow, 105005, Russia

Abstract. The mechanism of formation of phases in the ytterbium oxide - aluminum oxide during the hybrid sol-gel process. Revealed that the phase formation takes place according to a diffusion mechanism similar to solid-phase synthesis, but at the molecular level. (The conditions for synthesis of crystalline phase of YAG obtained by heat treatment in a hybrid sol-gel synthesis of precipitation at a temperature of ≤ 900 °.)

Keywords: sol-gel method, hybrid method, semialkoxide method, yttrium-aluminum garnet.

УДК 537.311.31

**К ВОПРОСУ О ПРИМЕНЕНИИ МОМЕНТНОГО МЕТОДА
ДЛЯ РАСЧЁТА ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОВОДИМОСТИ
ТОНКОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПРОВОЛОКИ ИЗ МЕТАЛЛА**

Э.В. Завитаев*, О.В. Русаков, А.А. Юшканов***.**

*Московский государственный университет леса (МГУЛ)
141005, Московская обл., г. Мытищи, ул. 1-я Институтская, д. 1

**Московский государственный областной гуманитарный институт (МГОГИ)
164010, Московская обл., г. Орехово-Зуево, ул. Зелёная, д. 22.

***Московский государственный областной университет
105005, г. Москва, ул. Радио, д. 10-А.

Аннотация. Впервые моментным методом рассчитана электрическая проводимость тонкой цилиндрической проволоки из металла. В качестве граничного условия задачи принято условие зеркально-диффузного отражения электронов от внутренней поверхности проволоки. Проведено обсуждение полученных результатов.

Ключевые слова: тонкая проволока, функция распределения, электрическая проводимость.

1. Постановка задачи.

Однородное периодическое по времени электрическое поле напряжённости

$$\mathbf{E} = E_0 \exp(-i\omega t), \quad (1)$$

где E_0 – амплитуда напряжённости, ω – частота, воздействует на электроны внутри проволоки и вызывает появление внутри неё высокочастотного тока плотности $\mathbf{j}$. Принимается, что направление электрического поля совпадает с осью симметрии проволоки. Скин-эффект не учитывается, т. к. радиус проволоки R предполагается малым по сравнению с характерной глубиной скин-слоя δ . Связь между $\mathbf{E}$ и $\mathbf{j}$ в случае, когда радиус проволоки R сравним с длиной свободного пробега электронов в металле L , оказывается существенно нелокальной [1, 2]. Для описания этой связи применим кинетическое уравнение (в приближении времени релаксации) к вырожденному ферми-газу электронов находящемуся внутри проволоки. Для достаточно слабых внешних полей это уравнение можно линеаризовать по внешнему полю $\mathbf{E}$ и по малым отклонениям $f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ от равновесной фермиевской функции распределения f_0 [3-5]:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{r}} + e(\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}) \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} = -\frac{f_1}{\tau}. \quad (2)$$

Здесь e и $\mathbf{v}$ – соответственно, заряд и скорость электронов; τ – электронное время релаксации.

Функция распределения электронов

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = f_0(\varepsilon) + f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}).$$

Отклонение $f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ функции распределения электронов $f(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ от равновесного значения $f_0(\varepsilon)$, возникающее под действием электрического поля (1), приводит к появлению внутри проволоки высокочастотного тока плотности [6]

$$\mathbf{j} = 2 \frac{m^3}{h^3} e \int \mathbf{v} f_1 d^3 \mathbf{v}. \quad (3)$$

Концентрация электронов n в проволоке определяется по стандартной формуле, согласно которой

$$n = 2 \frac{m^3}{h^3} \int f_0 d^3 \mathbf{v} = 2 \frac{m^3}{h^3} \frac{4\pi v_F^3}{3}, \quad (4)$$

где h – постоянная Планка, m – эффективная масса электрона в металле, v_F – скорость Ферми.

Взяв в уравнении (2) поле $\mathbf{E}$ в виде (1), найдем $f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ как решение этого уравнения. Затем, используя выражение (3), определим ток внутри проволоки.

Однозначное решение поставленной задачи возможно при выборе граничного условия для неизвестной функции $f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ на цилиндрической поверхности металлической проволоки. В качестве такого принимаем условия зеркально-диффузного отражения

электронов от поверхности ($r = R$):

$$\int_{v_r < 0} v_z f_1(v_r) d^3 v = q \int_{v_r < 0} v_z f_1(-v_r) d^3 v, \quad (5)$$

где v_r и v_z – соответственно, компоненты скорости в плоскости перпендикулярной к оси симметрии проволоки и скорости электрона вдоль оси симметрии проволоки; q - коэффициент зеркальности (вероятность зеркального отражения): $0 \leq q \leq 1$. При $q = 0$ получаем условие диффузного отражения электронов проводимости от внутренней поверхности металлической проволоки, а при $q = 1$ условие чисто зеркального отражения. При значениях $q \neq 0$ и $q \neq 1$ получаем различные варианты смешанного зеркально-диффузного отражения электронов.

2. Функция распределения.

Преобразуем кинетическое уравнение (2) используя функцию

$$f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = g(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \delta(\varepsilon - \varepsilon_F) \exp(-i \omega t), \quad (6)$$

в результате получим новое уравнение

$$-i \omega g + \mathbf{v} \frac{\partial g}{\partial \mathbf{r}} - e \mathbf{v} \mathbf{E}_0 = -\frac{g}{\tau}$$

Перейдя в последнем уравнении к цилиндрическим координатам [7], выбрав направление полярной оси Z , так, чтобы она совпадала с осью симметрии проволоки, имеем:

$$-i \omega g + v_r \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial g}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial g}{\partial z} + \frac{v_\varphi^2}{r} \frac{\partial g}{\partial v_r} - \frac{v_r v_\varphi}{r} \frac{\partial g}{\partial v_\varphi} - e v_z E_0 = -\frac{g}{\tau}. \quad (7)$$

Решение уравнения (7) проведём с помощью моментного метода [7], согласно которому функция g в приближении двух моментов представляется в виде:

$$g = a_1(r) v_z + a_2(r) v_z v_r. \quad (8)$$

Найдем соответствующие частные производные от выражения (8) и подставим их в уравнение (7), т.е.

$$\begin{aligned} -i \omega (a_1(r) v_z + a_2(r) v_z v_r) + v_r v_z \frac{\partial a_1(r)}{\partial r} + v_r^2 v_z \frac{\partial a_2(r)}{\partial r} + \frac{v_\varphi^2 v_z}{r} a_2(r) - e v_z E_0 = \\ = -\frac{1}{\tau} (a_1(r) v_z + a_2(r) v_z v_r). \end{aligned} \quad (9)$$

Умножая выражение (9) на v_z , с учётом того, что $v = 1/\tau - i \omega$, имеем:

$$v (a_1(r) v_z + a_2(r) v_z v_r) v_z + v_r v_z^2 \frac{\partial a_1(r)}{\partial r} + v_r^2 v_z^2 \frac{\partial a_2(r)}{\partial r} + \frac{v_\varphi^2 v_z^2}{r} a_2(r) - e v_z^2 E_0 = 0.$$

Проинтегрируем полученное равенство:

$$(va_1(r) - eE_0) \int v_z^2 d^3v + (va_2(r) + \frac{\partial a_1(r)}{\partial r}) \int v_z^2 v_r d^3v + \frac{\partial a_2(r)}{\partial r} \int v_r^2 v_z^2 d^3v + \frac{a_2(r)}{r} \int v_\varphi^2 v_z^2 d^3v = 0.$$

Далее вычислив значения всех четырех интегралов (учитывая связи $v_r = v_\perp \cos \varphi$, $v_\varphi = v_\perp \sin \varphi$, $v_\perp^2 + v_z^2 = v_F^2$) и подставив их в последнее равенство, приходим к уравнению

$$va_1(r) - eE_0 + \frac{1}{7} v_F^2 \frac{\partial a_2(r)}{\partial r} + \frac{1}{7} v_F^2 \frac{a_2(r)}{r} = 0. \quad (10)$$

Ещё одно уравнение для нахождения переменных $a_1(r)$ и $a_2(r)$, найдем, умножив (9) на $v_z v_r$, и, интегрируя по пространству скоростей:

$$\frac{\partial a_1(r)}{\partial r} = -va_2(r), \quad (11)$$

Объединим уравнения (10), (11) в систему, разрешив её относительно $a_1(r)$, т.е.

$$\frac{\partial^2 a_1(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial a_1(r)}{\partial r} - \frac{7v^2}{v_F^2} a_1(r) = -\frac{7veE_0}{v_F^2}.$$

Перейдем в полученном уравнении к новой безразмерной переменной $\xi = r/R$, также учтём, что $z = \frac{R}{v_F} v = \frac{R}{v_F} \left(\frac{1}{\tau} - i\omega \right) = x - iy$, тогда

$$\frac{\partial^2 a_1}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial a_1}{\partial \xi} - 7z^2 a_1 = -\frac{7zeE_0 R}{v_F}.$$

В результате мы получили модифицированное уравнение Бесселя [8], общее решение которого с учётом того обстоятельства, что при $\xi = 0$ плотность тока внутри проволоки не должна быть расходящейся функцией, имеет вид:

$$a_1(\xi) = A_0 + AI_0(z\sqrt{7}\xi), \quad (12)$$

где $A_0 = \frac{eE_0 R}{z v_F}$, $I_0(z\sqrt{7}\xi) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \exp(\xi z\sqrt{7} \cos \alpha) d\alpha$.

Из (11) найдем, что

$$a_2(\xi) = -\frac{A\sqrt{7}}{v_F} I_1(z\sqrt{7}\xi), \quad (13)$$

где $I_1(z\sqrt{7}\xi) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \exp(\xi z\sqrt{7} \cos \alpha) \cos \alpha d\alpha$.

Воспользуемся граничным условием (5) для определения коэффициента A . Учтём, что при $(r = R)$ переменная $\xi = \frac{r}{R} = 1$, где [9, 10]

$$\begin{aligned} \delta(\varepsilon - \varepsilon_F) &= \frac{2}{m} \delta(v_z^2 + v_\perp^2 - v_F^2) = \frac{2}{m} \delta(v_z^2 - (v_F^2 - v_\perp^2)) = \frac{2}{m} \delta\left[(v_z - \sqrt{v_F^2 - v_\perp^2})(v_z + \sqrt{v_F^2 - v_\perp^2})\right] = \\ &= \frac{1}{m\sqrt{v_F^2 - v_\perp^2}} \left[\delta(v_z - \sqrt{v_F^2 - v_\perp^2}) + \delta(v_z + \sqrt{v_F^2 - v_\perp^2}) \right]. \end{aligned}$$

Тогда

$$A = \frac{-\frac{2}{3}(1-q)A_0}{\frac{2}{3}(1-q)I_0(z\sqrt{7}) + \frac{\sqrt{7}}{4}(1+q)I_1(z\sqrt{7})}. \quad (14)$$

Таким образом, найдены моментные коэффициенты $a_1(\xi)$ и $a_2(\xi)$ заданные равенствами (12) и (13) и удовлетворяющие функции распределения электронов

$$f_1 = \exp(-i\omega t) \delta(\varepsilon - \varepsilon_F) [a_1(\xi) v_z + a_2(\xi) v_z v_r]. \quad (15)$$

Соотношения (12) - (14) полностью определяют функцию распределения (15) в случае зеркально-диффузного отражения электронов от внутренней поверхности цилиндрической проволоки.

3. Расчёт проводимости.

Найденная функция распределения позволяет определить ток (3) внутри проволоки. При вычислении интеграла (3) удобно перейти к цилиндрическим координатам, как в пространстве координат, так и в пространстве скоростей. Вектор $\mathbf{E}$ параллелен оси Z , ось симметрии проволоки совпадает с осью Z .

Поле (1) в цилиндрических координатах имеет лишь z – компоненту, соответственно, и плотность тока (3) обладает лишь z – компонентой (линии тока являются прямыми параллельными оси Z) и вычисляется по формуле:

$$j_z = 2 \frac{m^3}{h^3} e \int v_z f_1 d^3 \mathbf{v},$$

где f_1 определяется выражением (15).

В силу симметрии задачи интегрирование по всему диапазону скоростей v_z заменяется интегрированием по положительному диапазону, и результат удваивается, поэтому, подставляя пределы интегрирования, приходим к выражению:

$$j_z = \frac{4em^2 \exp(-i\omega t)}{h^3} \int_0^{v_F} \int_0^{2\pi+\infty} \int_0^{\frac{v_z^2}{\sqrt{v_F^2 - v_\perp^2}}} \delta(v_z - \sqrt{v_F^2 - v_\perp^2}) [a_1(\xi) + a_2(\xi) v_\perp \cos \varphi] v_\perp dv_\perp d\varphi dv_z =$$

$$= \frac{8\pi em^2 v_F^3 \exp(-i\omega t)}{3h^3} a_1(\xi).$$

С учётом (4) окончательно получим:

$$j_z = \frac{ne}{m} \exp(-i\omega t) a_1(\xi). \quad (16)$$

Далее, воспользовавшись законом Ома в дифференциальной форме, найдем удельную электрическую проводимость проволоки:

$$\sigma = \sigma_0 \frac{x}{z} \left(1 + \frac{(q-1)I_0(z\sqrt{7}\xi)}{3 \left[\frac{1}{3}(1-q)I_0(z\sqrt{7}) + \frac{\sqrt{7}}{8}(1+q)I_1(z\sqrt{7}) \right]} \right), \quad (17)$$

где $\sigma_0 = ne^2\tau/m$ – объёмная статическая удельная проводимость металла.

Проинтегрировав выражение (16), определяем полный ток через поперечное сечение цилиндрической проволоки:

$$I = \int_0^R j_z dS = 2\pi \int_0^R j_z r dr = \frac{2\pi ne}{m} \exp(-i\omega t) \int_0^R a_1(\xi) r dr = \left| \frac{r = \xi R}{dr = R d\xi} \right| =$$

$$= \frac{2\pi ne}{m} \exp(-i\omega t) R^2 \int_0^1 a_1(\xi) \xi d\xi = \frac{2\pi ne}{m} \exp(-i\omega t) R^2 \left(\frac{A_0}{2} + \frac{A}{z\sqrt{7}} I_1(z\sqrt{7}) \right).$$

Формально применяя закон Ома в виде $I=GU$, где U – напряжение на концах проволоки, получаем формулу для расчета интегральной проводимости проволоки G (электрическое поле внутри проволоки однородное, поэтому $U=EL$):

$$G = G_0 \frac{x}{z} \left(1 + \frac{2}{z\sqrt{7}} \frac{(q-1)I_1(z\sqrt{7})}{3 \left[\frac{1}{3}(1-q)I_0(z\sqrt{7}) + \frac{\sqrt{7}}{8}(1+q)I_1(z\sqrt{7}) \right]} \right), \quad (18)$$

где $G_0 = \pi R^2 \sigma_0 / L$ – объёмная статическая интегральная проводимость металла.

Заметим, что при проведении численных расчётов результаты, полученные после применения формул (17) и (18), совпадают с результатами работы [9], в которой использовался другой математический подход к проблеме.

В заключение следует отметить, что применение моментного метода значительно упрощает расчёт электрической проводимости тонкой цилиндрической проволоки. Кроме того, этот приближенный метод (его погрешность по отношению к точному кинетическому расчёту составляет не более 10 %) позволяет получить аналитические выражения в случае построения теории скин-эффекта в тонкой проволоке, когда точное кинетическое решение невозможно за счёт возникающих математических трудностей.

ЛИТЕРАТУРА.

1. *Петров, Ю. И.* Физика малых частиц. Наука. М. 1984.
2. *Dingle, R.B.* The electrical conductivity of thin wires. // *Proc. Roy. Soc. A.* 1950. V. 201. P. 545-560.
3. *Харрисон, У.* Теория твердого тела. Мир. М. 1972.
4. *Займан, Дж.* Электроны и фононы. ИЛ. М. 1962.
5. *Лифшиц, И.М., Азбель М.Я., Каганов М.И.* Электронная теория металлов. Наука. М. 1971.
6. *Ландау, Л. Д., Лифшиц И. М.* Электродинамика сплошных сред. Наука. М. 1982.
7. *Коган, М. Н.* Динамика разреженного газа. Наука. М. 1967.
8. *Ватсон Г.Н.* Теория бесселевых функций. ИЛ. М. 1949.
9. *Завитаев, Э.В., Юшканов А.А.* Высокочастотная проводимость тонкой цилиндрической проволоки из металла. // *Микроэлектроника.* 2008. Т. 37. С. 429-438.
10. *Завитаев, Э.В., Юшканов А.А.* Зависимость электрической проводимости тонкой цилиндрической проволоки в продольном магнитном поле от характера отражения электронов. // *ЖЭТФ.* 2006. Т. 130. С. 887-894.

ON APPLICATION OF INSTANTANEOUS METHOD FOR RECKONING OF ELECTRICAL CONDUCTION OF A THIN CYLINDRICAL WIRE OF METAL

E. Zavitaev*, O. Rusakov, A. Yushkanov*****

**Moscow State Forest University,
1, 1st Institute st., Mytishi, Moscow Region, 141005, Russia*

***Moscow Regional State Humanitarian Institute
22, Zelenaya st., Orekhovo-Zuyevo, Moscow Region, 164010, Russia*

****Moscow Regional State University
10a, Radio st., Moscow, 105005, Russia*

Abstract. For the first time the electrical conduction of a thin cylindrical wire of metal was reckoning by the instantaneous method. The condition of the specular diffuse reflection of electrons off an internal surface of wire was taken as a boundary condition of the problem. The discussion of the results derived was made.

Keywords: a thin wire, cumulative distribution curve, electrical conduction of smth.

УДК 378.146

МЕТОДЫ ИНЖЕНЕРНОГО РАСЧЕТА И МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ РАБОТЫ ПАРАШЮТОВ

А.Л. Бугримов*, А.Г. Васильченко, С.В. Леонов****

**Московский государственный областной университет (МГОУ)*

105005, Москва, ул. Радио, д. 10а

***НИИ парашютостроения (Москва)*

107497, Москва, ул. Иркутская, 2

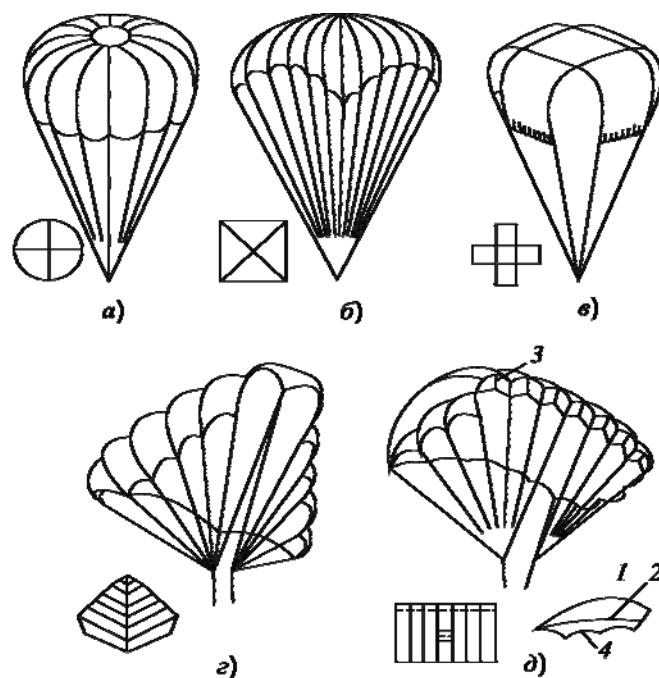
Аннотация. Мягкооболочечные конструкции представляют собой активно развивающийся тип технических изделий, которые находят новое широкое применение в инженерной практике. Такие изделия производятся из тканей, ламинатов, лент и шнуров, которые по прочности приблизились к металлам, но существенно легче традиционных конструкционных материалов. Необходимо создание адекватных методов расчета таких конструкций, опережающее математическое моделирование их функционирования в реальных условиях. Значительный опыт инженерного расчета и математического моделирования мягкооболочечных конструкций накоплен в парашютостроении, где такие разработки проводятся с 50-х годов прошлого века. В статье анализируется современное состояние моделирования в парашютостроении и ставится проблема создания нового поколения расчетных методов на основе уравнений Лагранжа второго рода.

Ключевые слова: Мягкая оболочка, мягкооболочечная инженерная конструкция, парашют, парафойл, математическое моделирование, уравнение Лагранжа второго рода.

Мягкооболочечные конструкции, изготовленные из тканей и строп, находят все большее применение в инженерной практике. В эластичных резервуарах подушечного типа хранится горючее. Тентовые и воздухоопорные конструкции стали существенной частью современной архитектуры. Суда, где двигателем являются парусные конструкции, переживают второе рождение как экологически чистый вид транспорта. Парашютные конструкции, появившиеся в XX веке, стали значительной составляющей современной армии, авиации и спорта. Практика конструирования мягкооболочечных конструкций показала необходимость опережающего математического моделирования их функционирования, что, по сути, отражает особенность современной инженерии: на смену большого количества исследовательских экспериментов пришло математическое моделирование, и лишь интегральные, практически поверочные, испытания, проводятся на реальном изделии. Отличительной особенностью мягкооболочечных конструкций, которые должны описываться математическими моделями, являются большие перемещения, существенная нелинейность и анизотропия. В ряде мягкооболочечных конструкций (парашюты) существенным является динамика аэроупругого взаимодействия инженерного объекта с потоком воздуха. Это связано с особенностями функционирования парашютов, наполнение и раскрытие которых занимает, как правило, от долей секунды до нескольких секунд, проходит в автоматическом режиме и представляет собой своеобразный удар с перегрузкой $5\div 10$ и более единиц. Актуальным является увеличение времени наполнения и раскрытия, как с точки зрения уменьшения влияния пе-

регрузок на спасаемый груз, так и для сохранения прочности конструкционных материалов парашюта.

На рисунке приведены основные типы парашютных конструкций с куполами различных форм [1, 7]:



Основные типы парашютов в раскрытом состоянии в потоке и их раскройная геометрия:

- a* - осесимметричный парашют; *б* - парашют с куполом квадратной формы; *в* - крестообразный парашют; *г* - однооболочковый парашют-крыло; *д* - двухоболочковый парашют-крыло**

Цифрами обозначены составляющие элементы планирующего парашюта-крыла (парафойла) самого современного типа – двухоболочкового крыла (parafoil на английском языке): 1 – верхняя оболочка, 2 – нижняя оболочка, 3 и 4 – соответственно нервюра и концевая шайба крыла.

Традиционным для решения аэроупругих задач в парашютостроении является метод установления. Непрерывный процесс взаимодействия парашюта с потоком воздуха аппроксимируется последовательностью квазистатических форм, в каждой из которых внутренние силы в оболочке уравниваются аэродинамическими силами. Когда в процессе решения ряд последовательных квазистатических форм становится мало отличающимися одна от другой, считается, что достигнута статическая равновесная форма или положение равновесия (в дальнейшем равновесная форма описывается топологическими методами и раскраивается на тканевые детали). Наряду с вычислительными достоинствами такого подхода выявлены системные недостатки, главным из которых является отсутствие учета инерционных сил в квазистатических моделях, что необходимо при расчете динамической прочности конструкции. «Одна из центральных задач

парашютостроения – раскрытие (наполнение) – в теоретическом плане в полном объеме по-прежнему остается нерешенной» [2, 35; 3, 25]. Именно поэтому задачи раскрытия парашютов (а значит и задачи разворачивания других мягкооболочечных конструкций) до сих пор решаются и в российских, и в иностранных парашютных фирмах полуэмпирическими методами. Это показывает анализ расчетных методов, применяющихся в инженерной практике парашютостроения как в России [4, 371], так и США [5, 5-42]. Другие динамические задачи парашютостроения, в частности колебательные режимы, воздействие на мягкооболочечную конструкцию подвижного порыва и взрыва, также представляют значительные сложности в традиционной постановке.

Последовательный временной анализ расчетных методов парашютостроения, применявшихся во второй половине XX века и содержащийся в ряде отечественных монографий [6, 1, 7, 8, 4], являющихся настольными книгами конструктора парашютов, еще ждет своего исследования. Первые теоретические работы Н.А. Лобанова содержали обобщение экспериментов [6, 69], далее появились «ростки» математического моделирования, на которые возлагались большие надежды [1, 3-4]; методология математического моделирования достигла своего апогея в 80-90-е годы и связана с именами О.В. Рысева, И.В. Днепров, А.А. Вишняка и Ю.В. Мосеева [7, 8]. Аэродинамика парашюта описывалась методами крупных частиц О.М. Белоцерковского и дискретных вихрей С.М. Белоцерковского. Однако уже тогда появилось понимание ограниченности чисто теоретического подхода, основанного на методах конечных элементов, конечных разностей и крупных частиц. Наряду с методами математического моделирования продолжали существовать полуэмпирические методики Р.А. Андропова и Ф.Г. Герасимато, которые зачастую и применялись в инженерной практике, так как давали конкретные результаты. Развитие теоретического парашютостроения в конце XX – начале XXI века связано с именами В.И. Морозова и А.Т. Пономарева, которые смогли объединить методики Р.А. Андропова и Ф.Г. Герасимато для осесимметричных парашютов с достижениями математического моделирования [4, 384]. Для решения задач парашютостроения существует современный комплекс прикладных программ [9, 186].

При описании функционирования мягкой оболочки в среде важным является явление (эффект) «перемешивания» слоев жидкости, что в уравнениях Навье-Стокса представлено членами, содержащими вязкость жидкости. Использование потенциальных течений для объяснения и исследования процесса разворачивания представляется новым. При этом не возникает противоречия с парадоксом Даламбера – так в случае стационарного потенциального обтекания купола, хотя общая сила и момент реакции жидкости равны нулю, но ненулевые силы и моменты, действующие на отдельные части купола, приводят к нарушению условий равновесия, и, следовательно, появлению нестационарного течения и движениям в процессе разворачивания мягкой оболочки.

В общей постановке задача разворачивания мягкой оболочки описывается уравнениями в частных производных [10, 30; 11, 469]:

$$\frac{d}{dt} \bar{v} = \left[\frac{\partial}{\partial \alpha^1} \left(T_{11} \sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}} \frac{\partial \bar{r}}{\partial \alpha^1} + T_{12} \frac{\partial \bar{r}}{\partial \alpha^2} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha^2} \left(T_{21} \frac{\partial \bar{r}}{\partial \alpha^1} + T_{22} \sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}} \frac{\partial \bar{r}}{\partial \alpha^2} \right) + \bar{P} \sqrt{g} - \varepsilon \bar{v} \right] / \left(\gamma_0 \sqrt{g} \right)$$

$$\frac{d}{dt} \bar{r} = \bar{v}$$

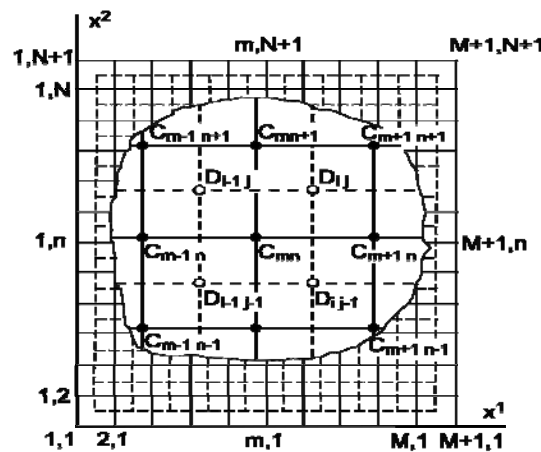
где $\vec{r} = (x^1, x^2, x^3)$ - радиус-вектор; $\vec{v} = \left(\frac{d}{dt}x^1, \frac{d}{dt}x^2, \frac{d}{dt}x^3 \right)$ - скорость перемещения;

$g = g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}$ - дискриминант метрического тензора деформированной, и

$\overset{\circ}{g} = \overset{\circ}{g}_{11}\overset{\circ}{g}_{22} - \overset{\circ}{g}_{12}\overset{\circ}{g}_{21}$ - исходной недеформированной поверхности; γ_0 - поверхностная плотность материала; $T_{11}, T_{12}, T_{21}, T_{22}$ - натяжения в мягкой оболочке; $g_{11}, g_{12}, g_{21}, g_{22}$ - компоненты метрического тензора; ε - коэффициент конструкционного демпфирования; t - время.

Вектор аэродинамических сил $\vec{P}$ определяется как 0 при $t < 0$ и $\Delta p \vec{n}$ при $t \geq 0$, где $\vec{n}$ - нормаль к поверхности ячейки; величина перепада давления Δp соответствует максимальной местной аэродинамической нагрузке при раскрытии парашюта.

Вычислительная задача по методу установления решается на конечно-разностной сетке:



Конечно-разностная сетка

что автоматически подразумевает математическую модель мягкой оболочки с большим (тысячи и десятки тысяч) числом степеней свободы. Гораздо более эффективным представляется снижение степеней свободы (большинство которых в вычислительной практике оказываются нереализованными и паразитными) и нахождение аналитических решений. В [1, 131] описана аналитическая модель «волана» (не нашедшая достойного продолжения), из нескольких воланов составляется купол парашюта. В методе дискретных вихрей С.М. Белоцерковского используется аналитическое решение уравнения Навье-Стокса для отдельно взятого вихря; в дальнейшем это решение применяется для всех вихрей в потоке. И.К. Лифанову удалось распространить такую аналитическую методологию на физические задачи, далекие от аэродинамики [12, 405].

Известен метод аналитической гидродинамики, берущий свое начало от классических трудов механиков, при котором производится параметризация – вводится конечное число степеней свободы, после чего задача сводится к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений Лагранжа второго рода. Технически не составляет труда описать форму купола парашюта конечным числом параметров – например первая обобщенная координата q_1 – путь, пройденный вершиной купола, и вторая - q_2 - пространственный угол раскрытия купола. Эффективным параметром оказы-

вается объем воздуха под куполом парашюта (вследствие несжимаемости при малых дозвуковых скоростях движения), который втекает по нижней кромке и вытекает через полюсное отверстие и пронизываемую ткань. Далее с использованием обобщенных координат записывается полная энергия системы:

$$\Pi + T_c - U = \text{const},$$

где U - силовая функция, Π – потенциальная энергия системы, T_c - кинетическая энергия системы, которая состоит из кинетических энергий точечного груза, собственных масс купола и строп, а также кинетической энергии жидкости T , выражаемой в виде квадратичной формы:

$$2T = \lambda_{11} \dot{q}_1^2 + 2\lambda_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \lambda_{22} \dot{q}_2^2$$

Величины λ_{ij} , $i=1,2$, $j=1,2$ называют коэффициентами присоединенных масс – моментов инерции деформируемой мягкой оболочки. Проблема определения величины присоединенных масс является одной из краугольных нерешенных (и в российских, и в иностранных публикациях) задач парашютостроения. Вычисление коэффициентов присоединенных масс – моментов инерции для деформируемого тела, необходимых для вычисления кинетической энергии жидкости, как и применение процедуры уравнений Лагранжа второго рода к задаче разворачивания мягкой оболочки, представляется новым [13, 220].

Ожидается, что модель с тремя степенями свободы позволит вычислять не только пиковые усилия растяжения в стропах, но и в куполе, и тем самым проверить гипотезу критического сечения о том, что максимальные усилия в куполе должны реализовываться не при полном разворачивании мягкой оболочки, а лишь при разворачивании до критического радиуса.

В предлагаемом подходе за основу рассмотрения взято потенциальное обтекание мягкой оболочки, что объясняется быстротечностью фазы разворачивания. Другой отличительной особенностью подхода является параметризация – бесконечное число степеней свободы заменяется конечным. Так модель с двумя степенями свободы может перемещаться вертикально как жесткое целое и менять угол разворачивания купола (типа «зонтик» – мягкая оболочка). Эти две степени свободы описывают положение и форму парашюта также эффективно, как и конечно-элементная модель с практически бесконечным числом степеней свободы. В модели с тремя степенями свободы «зонтик» может дополнительно складываться посередине, что описывает процесс «перехлеста» купола стропами, либо в качестве третьей степени свободы берется объем воздуха под куполом парашюта, что позволяет перейти к рассмотрению планирующего парашюта (парафойла) самых современных форм. Для вычисления кинетической энергии жидкости предлагается расширить классические методы определения коэффициентов присоединенных масс – моментов инерций на случай деформируемого тела. Проблема определения коэффициентов присоединенных масс – моментов инерции купола, зависящих от обобщенных координат, решается численно несколькими методами: с использованием конформных отображений (только для плоских моделей), дискретных особенностей (присоединенных дискретных вихрей) и граничных элементов. В дальней-

шем на фоне потенциального обтекания формулируются модели, описывающие местный отрыв потока.

Связь напряженного и деформированного состояния текстильных конструкционных материалов парашюта описывается аналитически [14, 145]. Постановка задач по разработке нового подхода проводится в соответствии с общей методологией математических исследований и их программной реализацией [15, 5-6].

Алгоритм решения проблемы создания нового поколения методов расчета функционирования парашютов на основе уравнения Лагранжа второго рода можно представить последовательностью действий:

- Разработка основных механических моделей для исследования процесса разворачивания и комплекса прикладных программ определения коэффициентов присоединенных масс – моментов инерции купола следующими численными методами:
 - использующими методологию конформных отображений,
 - по методу дискретных особенностей,
 - по методу граничных элементов;
- Создание комплекса прикладных программ по описанию топологии мягких оболочек с последующим выходом на автоматическое построение чертежей деталей;
- Анализ результатов моделирование с последующей разработкой практических рекомендаций по расчету присоединенных масс.

Использование математических аналитических методов в сочетании с методами вычислительной математики, позволяет предполагать дальнейшее развитие теоретического парашютостроения и эффективное применение результатов в инженерной и конструкторской практике.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белоцерковский, С.М., Нишиг М.И., Пономарев А.Т., Рысев О.В. Исследование парашютов и дельтапланов на ЭВМ /под ред. С.М. Белоцерковского. – М.: Издательство «Машиностроение», 1987. – 240 с.
2. Морозов, В.И., Пономарев А.Т., Герасимато Ф.Г., Андросенков В.А. Моделирование нагружения и формообразования осесимметричного парашюта при раскрытии // «Полет». – М.: Издательство «Машиностроение», 2007. – № 12. – С. 35-43.
3. Морозов, В.И., Пономарев А.Т., Герасимато Ф.Г., Андросенков В.А. Моделирование напряженно-деформированного состояния осесимметричного парашюта при раскрытии // «Полет». – М.: Издательство «Машиностроение», 2009. – № 7. – С. 25-31.
4. Лялин, В.В., Морозов В.И., Пономарев А.Т. Парашютные системы. Проблемы и методы их решения. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 576 с.
5. Knacke, T.W. Parachute Recovery Systems. Design Manual. – Santa Barbara: Para Publishing, 1992. – 470 p.
6. Лобанов, Н.А. Основы расчета и конструирования парашютов. – М.: Издательство «Машиностроение», 1965. – 363 с.
7. Рысев, О.В., Вишняк А.А., Чуркин В.М., Юрцев Ю.Н. Динамика связанных тел в задачах движения парашютных систем. – М.: Издательство «Машиностроение», 1992. – 288 с.

8. Рысев, О.В., Пономарев А.Т., Васильев М.И., Вишняк А.А., Днепров И.В., Мосеев Ю.В. Парашютные системы. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 1996. – 288 с.
9. Леонов, С.В., Морозов В.И., Пономарев А.Т. Моделирование формообразования и прочностных характеристик парашютов // Механика твердого тела. – 2011. – №2. – С. 183-198.
10. Гулин, Б.В., Ридель В.В. К динамике мягких анизотропных оболочек // В кн.: Нелинейные проблемы аэроупругости. – Казань, 1979. – Вып. 11. – С. 24-42
11. Васильченко, А.Г., Пономарев А.Т. Динамика панели парашюта при раскрытии // Механика композитных материалов. – Рига: Издательство «Зинатне», 1985. – № 3. – С. 468-474.
12. Лифанов, И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. – М.: ТОО «Янус», 1995. – 520 с.
13. Пономарев, А.П., Бакулин В.Н. Модель раскрытия парашюта с двумя степенями свободы при осесимметричном потенциальном обтекании // Вестник МАИ. – М.: Издательство МАИ, 2011. – т.18. № 2. – С. 219-222.
14. Васильченко, А.Г., Свириденко А.Н. Феноменологическая модель стропы из синтетического материала // Научный Вестник МГТУ Гражданской авиации, серия «Аэромеханика и прочность». – М., 2010. – № 151(1). – С. 143-149.
15. Бугримов, А.Л. Моделирование. Проблема выбора и реализации. – М.: Издательство МГОУ, 2008. – 74 с.

METHODS OF ENGINEERING CALCULATION AND MATHEMATICAL MODELLING OF WORK OF PARACHUTES

A.Bugrimov*, A.Wasilchenko, S.Leonov****

**Moscow Region State University
10a, Radio st., Moscow, 105005, Russia*

***Scientific Research Institute of Parachute Construction (Moscow)
2, Irkutskaya st., Moscow, 107497, Russia*

Abstract. Soft cover engineering constructions represent actively developing type of technical products which find new wide application in engineering practice. Such constructions are made from fabrics, laminates, tapes and cords which on durability have come nearer to metals, but essentially it is easier than traditional constructional materials. Creation of adequate methods of calculation of such designs, advancing mathematical modeling of their functioning in actual practice is necessary. Considerable experience of engineering calculation and mathematical modeling Soft cover engineering constructions is saved up in Parachute design Industry where such workings out are spent since 50th years of the last century. In article the modeling current state in Parachute design Industry is analyzed and the problem of creation of new generation settlement methods on the basis of the equations of Lagrange of the second sort is put.

Keywords: Soft cover, soft cover engineering construction, parachute, parafoil, mathematical modeling, equation of Lagrange of the second sort.

УДК 539.61:539.196.3:539.1.072

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕРХНОСТИ УГЛЕРОДНОЙ НАНОТРУБКИ

Д.Н. Чаусов, Н.Н. Смирнов

Московский государственный областной университет (МГОУ)
105005, Москва, ул. Радио, д. 10а

Аннотация: Проводится моделирование углеродной нанотрубки типа «кресла» поверхностью «идеального многогранника», и предложен метод расчета координат атомов с возможностью варьирования диаметра. Показано, что молекуле дифенила, инкапсулированной в углеродную нанотрубку, энергетически выгодно плотно прилегать к ее стенкам.

Ключевые слова: углеродная нанотрубка, энергия взаимодействия, дифенил, инкапсулированная молекула.

Введение

Для создания материалов с заранее заданными свойствами широко применяется математическое моделирование, особенно это актуально для прогнозирования свойств материалов, в состав которых входят углеродные нанотрубки (УНТ).

Проведение математических экспериментов с УНТ методами молекулярной динамики [1-3] и квантовой химии [4-5] требует учета их структуры и потенциалов взаимодействия между ними и другими компонентами. В некоторых работах [6-9] поверхность УНТ моделируется цилиндром, при этом обычно не учитывается реальное расположение атомов. В последнее время появились работы [10-11], в которых учитывается реальное расположение атомов.

Как правило, УНТ моделируются сворачиванием плоскости графита [12], при этом валентные связи между атомами изгибаются по поверхности идеального цилиндра, что не совсем корректно. Радиус такой углеродной нанотрубки определяется набором символов (m, n) , указывающих номера шестиугольников, а величина вычисляется согласно выражению:

$$R_0 = \sqrt{m^2 + n^2 + n \cdot m} \cdot \frac{2,461}{2\pi} \quad (\text{\AA}). \quad (1)$$

Цель настоящей работы заключается в разработке модели УНТ без искривления валентных углов и расчета координат атомов углеродной нанотрубки типа «кресла», с возможностью варьирования диаметра.

Математическая модель

Для описания УНТ нами была выбрана модель «идеального многогранника» (рис. 1), что позволило не искривлять валентные углы. Каждая грань представляет собой хорду к описанной окружности, на которых расположены правильные шестиугольники с атомами углерода в вершинах. Модель УНТ строилась в декартовой системе координат XYZ , где плоскость XY является поперечным сечением УНТ, а ось Z направлена вдоль продольной оси нанотрубки (рис. 1б). В качестве радиуса УНТ был выбран перпенди-

куляр, опущенный от центра грани в начало координат. Величина радиуса зависит от целого числа граней m (рис. 1а) и определяется выражением:

$$R_m = \frac{b}{2} \cdot \operatorname{tg} \beta. \quad (2)$$

Величина $b = 3 \cdot 1,42 \text{ \AA}$ равна длине хорды, а $\beta = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{2}{m} \right)$ угол между радиусом описанной окружности и хордой. Грани УНТ находятся под углом $\alpha_k = \frac{2\pi}{m}(k-1)$ относительно начальной, а расположенный на k -й грани i -й атом УНТ имеет координату A_{ik} . В центре каждой грани лежат атомы A_{3k} (рис. 1.а), полярная координата которых имеет вид $\left\{ R_m, \frac{3}{2}\pi + \alpha_k \right\} \oplus$.

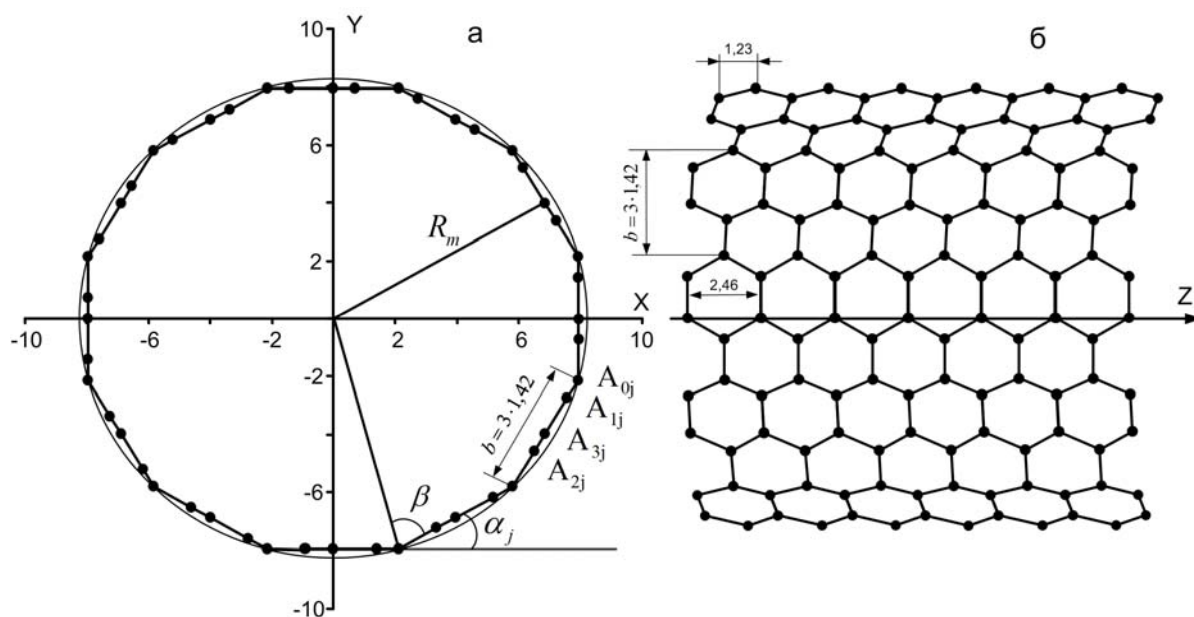


Рис. 1. Модель углеродной нанотрубки (на примере $m=12$)
а) - в плоскости XY , б) – вдоль оси Z

Координат атома A_{0k} определяется добавлением поправки к координате атома A_{3k} в виде $\left\{ \frac{3}{2}a, \alpha_k + \pi \right\}$. Поправки для атомов A_{1k} и A_{2k} имеют вид $\{a, \alpha_k\}$, $\left\{ \frac{1}{2}a, \alpha_k + \pi \right\}$ соответственно, где a – длина связи между атомами углерода равная $1,42 \text{ \AA}$.

Расчеты показывают, что для УНТ с параметрами (10,10) отклонение радиуса R_m от R_0 составляет 1,3%, с параметрами (50,50) всего 0,2%, а для случаев, когда многогранник вырождается в цилиндр, отклонение радиусов стремится к нулю.

Из физических соображений понятно, что диаметр УНТ не может меняться непрерывно [13], и зависит от целого числа звеньев в поперечном сечении (плоскости XY) углеродной нанотрубки. Поэтому варьировать диаметр УНТ можно изменяя значение m .

Алгоритм расчета координат атомов углеродной нанотрубки разрабатывался на языке Pascal, который является одним из классических языков программирования. Выбор в качестве языка программирования Pascal обусловлен легкостью преобразования исходного кода в код более современных языков программирования Visual Studio, C++.

Результаты математического эксперимента

В качестве примера, приводится расчет энергии межмолекулярного взаимодействия методом атом-атом потенциалов [14, 15] молекулы дифенила с углеродной нанотрубкой, в которую она инкапсулирована, при различных диаметрах УНТ. Модель молекулы дифенила была построена по координатам атомов. При этом в расчетах группы СН были заменены модельными атомами, энергия взаимодействия которых достаточно хорошо описывает взаимодействие указанной группы [16].

Энергия взаимодействия представляется в виде суммы величин энергии взаимодействия между атомами молекулы дифенила и атомами УНТ, которая определяется потенциалом Леннард-Джонса:

$$E_{ij} = \frac{A}{R_{ij}^{12}} + \frac{B}{R_{ij}^6}, \quad (1)$$

где A, B – эмпирические параметры; R_{ij} – расстояние между атомом углеродной нанотрубки i и атомом молекулы дифенила j .

Особенности межмолекулярного взаимодействия различных молекулярных фрагментов с различными средами рассмотрен в [17, 18].

Стоит заметить, что метод атом-атом потенциалов, как правило, применяют для описания структурных особенностей, как многослойных УНТ [11], так и для описания инкапсулированных в УНТ веществ.

На рис. 2 представлены зависимости энергии взаимодействия для систем дифенил – поверхность углеродной нанотрубки типа (m, m) при различных диаметрах УНТ, начиная с (10,10) до (50,50) с шагом одно звено. Молекула дифенила расположена вдоль оси Z как в первом, так и во втором случае. При этом, когда молекула дифенила находится в центре УНТ, с ростом диаметра УНТ энергия убывает по абсолютной величине до нуля. В случае, молекулы дифенила плотно прилегающей к внутренней поверхности УНТ, энергия взаимодействия по абсолютной величине начинает убывать и достигает минимума при диаметрах трубки во много раз больших размеров дифенила.

Как видно из рисунка 2, молекуле дифенила энергетически выгодно при больших диаметрах УНТ плотно прилегать к стенкам, чем находиться в центре.

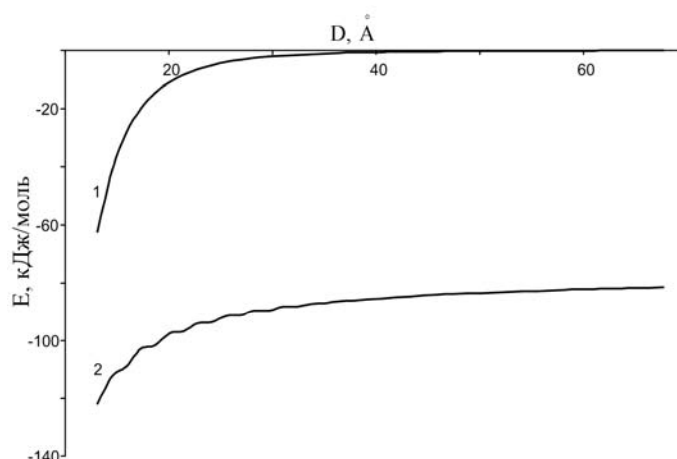


Рис. 2. Зависимость энергии взаимодействия молекулы дифенила от диаметра УНТ:

- 1 - дифенил инкапсулирован в центр УНТ,
- 2 - дифенил плотно прилегает к внутренней поверхности УНТ.

Данные результаты хорошо согласуются с ранее проведенными математическими экспериментами [15, 19-20] по определению энергии взаимодействия молекул алифатических углеводородов и мезогенов с поверхностью кристалла графита. В предельном случае, когда диаметр УНТ во много раз больше размеров плотно прилегающего дифенила, энергия взаимодействия стремится к энергии взаимодействия дифенила [15] с поверхностью кристалла однослойного графита (графена).

Выводы

1. Разработан алгоритм расчета координат атомов углеродной нанотрубки типа «кресла», с возможностью варьирования диаметра.
2. Показано, что молекуле дифенила, инкапсулированной в углеродную нанотрубку, энергетически выгодно плотно прилегать к стенкам нанотрубки при диаметрах углеродных нанотрубок значительно больших размеров дифенила.

Благодарность

Авторы выражают благодарность Виктору Васильевичу Беляеву за полезное обсуждение.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты ##10-07-00385-а, 10-03-90028-Bel_a и Министерства образования и науки Российской Федерации, государственные контракты ##02.740.11.5218, 14.740.11.0977.

ЛИТЕРАТУРА

1. Natsuki, T., Tantrakarn, K., Endo, M. [Text] // Appl. Phys. 2004, №79, P.117-124.
2. Zho, L.G., Shi, S.Q. [Text] // Computational Materials Science, 2002, №23, P.166-174.
3. Глухова, О.В. [Текст] // Физика волновых процессов и радиотехнические системы, 2009, Т.12, №1, с.69-75.
4. Гольдштейн, Р.В. [Текст] // Изв. РАН. МТТ, 2005, №4, с.57-74.

5. Аннин, Б.Д. [Текст] // Сибирский журнал индустриальной математики, 2008, Т.11, №33, с.3-22.
6. Федоров, А.С., Сорокин, П.Б. [Текст] // Физика твердого тела, 2005, Т.47, вып. 11, с.2106-2111.
7. Эминов, П.А., Ульдин, А.А., Сезонов, Ю.И. [Текст] // Физика твердого тела, 2011, Т.53, вып. 8, с.1621-1627.
8. Завитаев, Э.В., Юшканов, А.А. [Текст] // Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики, 2006, Т.130, вып. 5, с.887 - 894.
9. Кузнецов, М.М., Кулешова, Ю.Д. [Текст] // Вестник МГОУ, 2010, №1, с.48-52.
10. Проценко, Е.Б., Емельяненко, В.В., Карпеченко, А.Д. [Текст] // Складні системи і процеси, 2010, №1, с.6-12.
11. Беленков, Е.А. [Текст] // Известия Челябинского научного центра, 2001, вып. 1, с.25-30.
12. Iijima, S, Ichihashi, T. [Text] // Nature, 1993, V.363, P.603-605.
13. Гольдштейн, Р.В., Гордцов, В.А., Лисовенко, Д.С. [Текст] // Физическая мезомеханика, 2009, Т.12, №5, с.5-14.
14. Дадиванян, А.К., Ноа, О.В., Чаусов, Д.Н. [Текст] // Вестник МГОУ, 2007, №1, с.96.
15. Dadivanyan, A.K., Ryabova, Y.M., Chausov, D.N., Belyaev, V.V. and Solomatin, A.S. [Text] // Mol. Cryst. Liq. Cryst., 2011, V.545, P.159-167.
16. Глушко, Н.К., Губина, Л.Н., Дубровицкий, В.И., Смехов, Ф.М., Кабанов, Н.М., Дадиванян, А.К. [Текст] // Высокомолек. соед. А, 1989, Т.31, с.2224.
17. Беляев, В.В. [Текст] // Известия РАН, сер. Физическая, 1996, Т.61, в.4, с.12.
18. Belyaev, V.V. [Text] // Physical Properties of Liquid Crystals: Nematics. Eds. D.A. Dunmur, A. Fukuda, G.R. Luckhurst. London, IEE. 2000, P.414.
19. Дадиванян, А.К., Чаусов, Д.Н., Пашина, Ю.М., Беляев, В.В., [Текст] // Жидкие кристаллы и их практическое использование, 2010, Вып. 4(34), с.61-69.
20. Пашина, Ю.М., Чаусов, Д.Н., Дадиванян, А.К., [Текст] // Вестник МГОУ. Физика-Математика, 2010, №3, с.48-57.

SIMULATION OF CARBON NANOTUBE SURFACE

D. Chausov, N. Smirnov

*Moscow Region State Universite
10a, Radio st., Moscow, 105005, Russia*

Abstract: Carbon nanotube of the «armchair» type is simulated by the ideal polyhedron surface. The technique of atoms coordinates calculation is proposed permitting to vary the tube diameter. For the diphenyl molecule incapsulated into the carbon nanotube the energetic advantage of the tight contact with tube wall is shown.

Keywords: carbon nanotube, energy of interaction, diphenyl, incapsulated molecule.

УДК 549:53

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МАГНИТООПТИЧЕСКОГО ЭФФЕКТА В КРИСТАЛЛАХ ТИПА ВИСМУТА В УЛЬТРАКВАНТОВОМ ПРЕДЕЛЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

О.В. Кондаков*, Е.Г. Киселёв**

**Национальный университет Руанды (Бутар)*

***Елецкий государственный университет им. Бунина
399770, Липецкая обл., г. Елец, ул. Коммунаров, д. 28*

Аннотация. В статье моделируется квантовомеханическая система, состоящая из висмута и сплавов висмут-сурьма и помещённая в магнитное поле до 25 Тл. Электронный энергетический спектр кристаллов расквантован, а ультраквантовый предел достигается при магнитном поле 2 Тл. Прохождение инфракрасного излучения с энергией кванта 119 мЭв приводит к межзонным и внутризонным переходам электронов на уровни Ландау зоны проводимости. Численные результаты показали хорошее согласие с экспериментальными.

Ключевые слова: анизотропный монокристалл, плоский волновод, уровни Ландау, магнитооптические осцилляции.

Целью настоящего исследования являлось создание математической модели магнитооптического эксперимента в ультраквантовом пределе магнитного поля, пригодной для анализа данных, полученных при исследовании кристаллов висмут-сурьма в широком диапазоне концентраций сурьмы. Проведение численного эксперимента по моделированию магнитооптических спектров для проверки эффективности, изучения свойств и особенностей модифицированной модели Бараффа и получения научно значимых достоверных выводов о применимости этой модели для сплавов висмут-сурьма.

Рассматриваемая задача представляет собой решение уравнений Максвелла для особого вида волн – поверхностных волн. Наличие анизотропии резко увеличивает громоздкость вычислений. Таким образом, взаимодействие электромагнитной волны со стенками волновода учитывается средствами макроскопической электродинамики, т.е. классически. Решение задачи описания свойств среды требует существенно квантового рассмотрения. Поэтому в целом моделирование состоит из классической и квантовой части, и, в целом, модель можно рассматривать либо как полуклассическую, либо как полуквантовую.

Так как экспериментально измеряется энергия излучения, прошедшего планарный волновод (рис. 1), то необходимо тем или иным образом рассчитать интенсивность электромагнитной волны на выходе этого волновода.

Рассчитывая энергию волны, прошедшую через планарный волновод, как среднее значение y – компоненты вектора Умова – Пойтинга (рис. 1) проинтегрированное по поперечному сечению волновода и определяя коэффициент пропускания планарного волновода как отношение энергии $W(B)$, переносимой волной при некотором значении магнитного поля B , и энергии $W(0)$, переносимой волной при $B = 0$, получаем выражение для $T(B)$ [1-3]:

$$T(B) = 1,07 \times \exp\{2L[q_y''(B) - q_y''(0)]\}, \quad (1)$$

где q_y – y компонента волнового вектора.

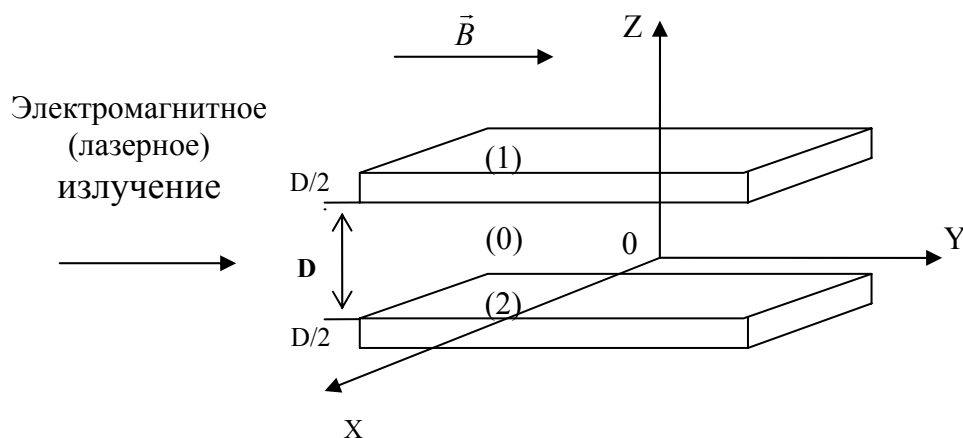


Рис. 1. Взаимное расположение вектора индукции магнитного поля, волнового вектора электромагнитного излучения и исследуемого монокристалла относительно выбранной системы координат.

Моделирование диэлектрической проницаемости использует методы квантовой механики. Свойства среды учитывались компонентами тензора диэлектрической проницаемости $\hat{\epsilon}$:

$$\hat{\epsilon} = \hat{\epsilon}_l + \frac{\hat{\sigma}}{i \cdot \omega \cdot \epsilon_0}, \quad (2)$$

где ω – циклическая частота, падающего электромагнитного излучения, ϵ_l – диэлектрическая проницаемость, обусловленная всеми процессами, за исключением межзонных и внутризонных переходов на уровнях Ландау в точке L зоны Бриллюэна, ϵ_0 – электрическая постоянная, σ – тензор комплексной удельной электропроводности.

$$\hat{\sigma}_{\alpha\beta} = -e^2 \cdot \sum_{l,l'} \frac{(f_l - f_{l'}) \cdot \langle l | V_\alpha | l' \rangle \cdot \langle l' | V_\beta | l \rangle}{(E_l - E_{l'}) \cdot \left(\left(\frac{i}{\hbar} \right) \cdot (E_l - E_{l'}) - i \cdot \omega + \frac{1}{\tau} \right)}, \quad (3)$$

где α, β – индексы, означающие оси координат; $\alpha, \beta = 1, 2, 3$; e – заряд электрона; l, l' – полные наборы квантовых чисел, характеризующие начальные l' и конечные l состояния; V_α и V_β – оператор скорости; τ – время релаксации; $f_l, f_{l'}$ – это распределения Ферми для электронов, находящихся на уровнях Ландау с наборами квантовых чисел l, l' :

$$f_l = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E_l - E_f}{k_0 \cdot T}\right)}, \quad (4)$$

где E_f – энергия Ферми, k_0 – постоянная Больцмана, T – абсолютная температура, при которой находится исследуемый кристалл.

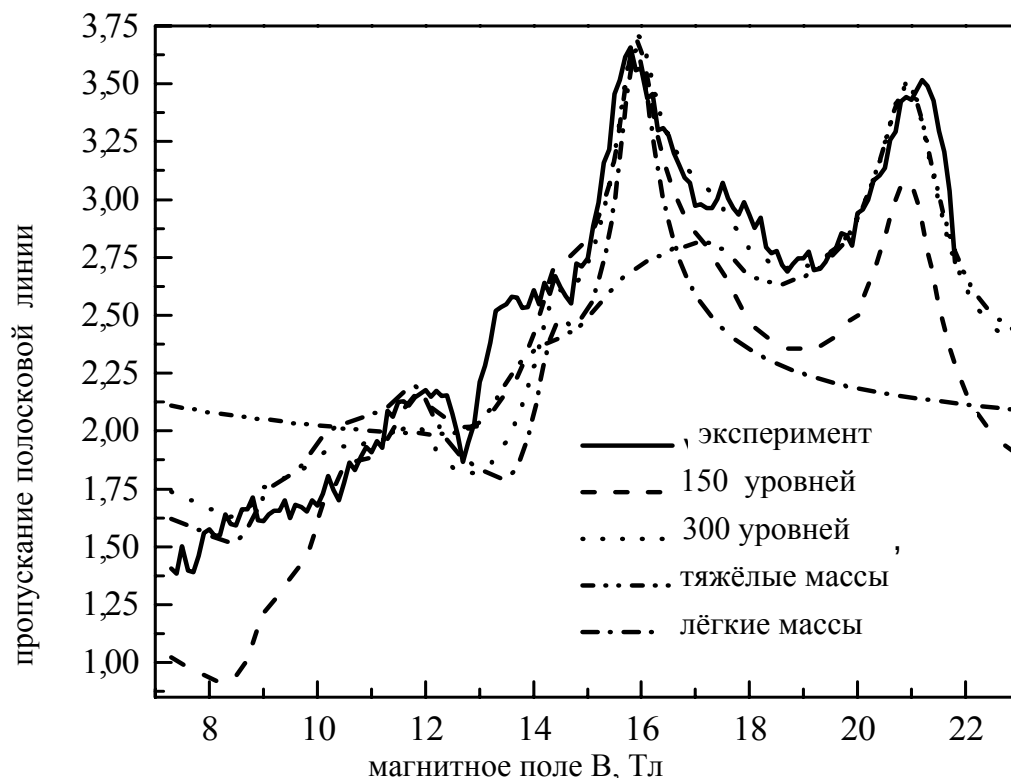


Рис. 2. Результаты моделирования для висмута (B/C_2).

Экспериментальные результаты демонстрируют такое разнообразие структур в ультраквантовом пределе магнитного поля, что для объяснения этого приходится рассматривать модель взаимодействующих между собой уровней Ландау валентной зоны и зоны проводимости с квантовыми числами $j=0$. Это даёт возможность ввести дополнительные степени свободы для осуществления возможности подгонки модельных спектров к экспериментальным. В нашем рассмотрении мы ограничились рассмотрением второго порядка теории возмущений. В результате величины матричных элементов оператора скорости имеют сложную и ярко выраженную зависимость от магнитного поля. Учет в математической модели смешанного характера волновых функций при малых значениях квантовых чисел позволяет в деталях описать форму зависимости интенсивности излучения прошедшего через планарный волновод от величины магнитного поля для полуметалла висмута и сплавов висмут-сурьма (рис. 2) [4]. Так, например, легко разделяются в модельном эксперименте вклады электронов с большей (штрихпунктирная линия с двумя точками) и меньшей (штрихпунктирная линия) эффективной массой.

Анализ структуры магнитооптических особенностей на рис. 2 представляет определённую трудность из-за обилия осцилляций и чувствительности формы линии к различным параметрам. Например, увеличение количества уровней Ландау, по которым производился расчёт, от 150 до 300 приводит к качественно лучшему соответствию

расчётной и экспериментальной формы линии. Особенность при $B=21$ Тл приобретает соответствующую эксперименту интенсивность.

Численный расчёт зависимости коэффициента пропускания планарного волновода от величины магнитного поля в ультраквантовом пределе магнитного поля для трёх взаимно перпендикулярных ориентаций магнитного поля относительно кристаллической решётки висмута установил адекватность математической модели при сравнении с ранее полученными результатами для параметров энергетического спектра носителей заряда.

ЛИТЕРАТУРА

1. Киселёв, Е.Г., Кондаков О.В., Гладких О.Б. Условия моделирования формы экспериментальной линии магнитооптического эксперимента. Материалы всероссийского научного семинара "Неравновесные явления в узкозонных полупроводниках и полуметаллах". – Елец. –2004г. - 212с.
2. Киселёв, Е.Г., Кондаков О.В., Токарев В.В. Моделирование магнитопротекания планарного волновода. Материалы IV международной дистанционной научно-практической конференции «Моделирование. Теория, методы и средства». – Новочеркасск. –2004г.-314с.
3. Киселёв, Е.Г., Кондаков О.В., Нишимюмана Ж.Д. Моделирование магнитооптического эффекта в сплавах висмут-сурьма в ультраквантовом пределе магнитного поля. Материалы Международной междисциплинарной научной конференции «Синергетика в естественных науках». – Тверь. 2007г. – 252с.
4. Киселёв, Е.Г., Кондаков О.В., Гладких О.Б., Хабимана Ж.В. Возможности моделирования магнитооптического отклика кристаллов висмута. Материалы IX межгосударственного семинара "Термоэлектрики и их применения". – Россия, Санкт-Петербург, ФТИ им. А.Ф. Иоффе РАН. - 2006 г. – 454 с.

MATHEMATICAL MODEL OF A MAGNETOOPTICAL EFFECT IN CRYSTALS OF A KIND OF BISMUTH IN THE ULTRAQUANTUM LIMIT OF THE MAGNETIC FIELD

O. Kondakov*, E. Kiselev**

**National University of Rwanda*

***Yelets State University*

Abstract. The paper aims to model the behavior of a quantum mechanical system consisting of a planar wave guide made of bismuth and bismuth - antimony alloys and located in a magnetic field up to 25 T. The electronic energy spectrum in crystals is quantized, and the ultra quantum limit is reached for magnetic field of about 2 T. The passage through the planar waveguide of a monochromatic infrared radiation with quantum energy of 119 meV results in electrons jumping to Landau levels located in the conduction band. The numerical results showed a good coincidence between modeling and experimental results.
Keywords: anisotropic monocrystal, planar waveguide, Landau level, magneto-optical oscillations.

КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ

УДК 004.925.84

СПОСОБЫ ПОВЫШЕНИЯ КАЧЕСТВА ОЦЕНКИ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ МАТРИЦЫ

В.А. Аленин*, О.Л. Куляс**

**Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики (г. Самара)
443010, Самара, ул. Л. Толстого, 23*

**Димитровградский институт технологии управления и дизайна
(филиал Ульяновского государственного технического университета)
443511, Ульяновская обл., г. Димитровград, ул. Куйбышева, 294*

***Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики (г. Самара)
443010, Самара, ул. Л. Толстого, 23*

Аннотация. Фундаментальная матрица (ФМ) одна из обязательных составляющих алгоритмов реконструкции трехмерной сцены по набору изображений. Точность оценки ФМ отражается на точности вычислений многих других компонентов алгоритмов реконструкции, получаемых с помощью ФМ, таких как матрицы проекций, внешние параметры камеры (выражаемые матрицей вращения R и вектором переноса t) и т.д. В итоге, точность расчетов всех этих компонент влияет на точность реконструкции модели. В статье будет представлен набор методов, которые в совокупности, позволяют повысить точность расчета ФМ, в условиях присутствия в исходных данных ошибок измерений.

Ключевые слова: реконструкция, особые точки, фундаментальная матрица, устойчивые методы оценки.

Постановка задачи

Основная задача трехмерной реконструкции – это восстановление формы трехмерного объекта по наборам изображений, снятых в общем случае с разных ракурсов. Практически все методы трехмерной реконструкции базируются на алгоритмах проективной реконструкции [7]. В свою очередь, проективная реконструкция использует элементы эпиполярной геометрии для установления соответствия между точками. Эпиполярная геометрия выражается в терминах ФМ, в которой содержится вся необходимая геометрическая информация об изображениях. Таким образом, алгоритмы проективной реконструкции нуждаются в методах точной оценки ФМ. Для оценки ФМ используются точечные соответствия между изображениями. Сложность оценки ФМ состоит в том, что среди корректных соответствий есть и ложные, так называемые выбросы. Поэтому важно, чтобы метод оценки был устойчивым к различным ошибкам измерений. Рассмотрим применение ФМ в алгоритмах реконструкции более подробно, что позволит выявить те компоненты алгоритмов, которые зависят от точности ее оценки.

Алгоритмы реконструкции

Для качественной реконструкции различных твердотельных объектов применяют программно-аппаратные комплексы, представляющие собой полностью управляемую среду. Поворот стола, на котором находится объект реконструкции, происходит программно (рис. 1). При таких условиях остается минимум неизвестных данных, что гарантирует высокую точность реконструкции. Но в некоторых случаях, например, при получении последовательности изображений без информации об угле поворота объекта относительно камеры (внешние параметры), угол поворота необходимо оценить. В этом случае внешние параметры камеры извлекаются из ФМ.



Рис. 1. Аппаратная часть комплекса для реконструкции

Для решения задач реконструкции разработано несколько подходов [1], принадлежащих к семейству методов, называемых «Структура из движения» (Structure from motion, SfM). Основными методами, применяемыми для последовательности изображений, полученных с помощью поворотных столов, являются: факторизация матриц [15] и алгебраический подход [8].

Существующие методы оценки фундаментальной матрицы

Определим некоторые термины, употребляемые при описании алгоритмов оценки ФМ:

- Точка – особая точка на изображении, найденные специальным алгоритмом (SURF [3], SIFT [9] и т.д.).
- Deskриптор – численное представление (обычно в виде вектора) некоторой области вокруг точки [12, 222]. Используются для сравнения точек друг с другом.
- Расстояние между точками – величина, позволяющая оценить корректность найденных соответствий между точками на разных изображениях. Чем данная величина меньше, тем больше вероятность правильно найденного соответствия [12, 230].

Для вычисления матрицы необходимо использовать только те точки, которые имеют строгие соответствия. Но, как правило, исходные данные «загрязнены», то есть содержат так называемые «выбросы» или ложные соответствия. Поэтому для вычисления ФМ необходимо использовать методы, которые дают устойчивый

результат при наличии ложных соответствий. Существует несколько методов, позволяющих отделить «выбросы» от истинных соответствий, и провести робастную (устойчивую) оценку ФМ [10]. Например, с помощью метода, основанного на случайном переборе исходных выборок из доступных данных – RANSAC [5] или метода наименьших квадратов (Least-Median-of-Squares – LMedS [7, 282]).

ФМ вычисляется на наборе точек, состоящих из координат (x, y) , для которых найдены предварительные соответствия [7, 279]:

$$S = \{x_i, x'_i \mid i = 1 \dots n\},$$

где $x = (x, y, 1)$ – однородные координаты особенной точки на первом изображении; $x' = (x', y', 1)$ – однородные координаты соответствующей особенной точки на втором изображении; n – количество предварительно установленных соответствий.

Рассмотрим общую схему работы робастных методов [5]:

1. Рассчитывается количество итераций N . Для набора данных с заданным соотношением корректных соответствий количество итераций алгоритма должно быть таким, чтобы с достаточной долей вероятности выбрать подмножество данных без пересечения, состоящее из заданного количества точек в наборе (ниже приведена одна из возможных формул):

$$N = \log(1-p) / \log(1-\gamma^r),$$

где p – заданная вероятность выбора корректных соответствий; γ – соотношение корректных соответствий к выбросам; r – количество точек в наборе.

а) В соответствии с выбранной стратегией выбирается минимальный набор данных $\tilde{S}$. Это выбор гипотезы. Стратегия выбора зависит от модификации алгоритма. Например, если это алгоритм RANSAC, то набор данных выбирается случайно. Набор $\tilde{S}$ должен состоять как минимум из 8-ми (7-ми) элементов.

б) При помощи алгоритма 8-ми (7-ми) точек (seven-point algorithm, eight-point algorithm) вычисляется фундаментальная матрица – $F_k, k = 1 \dots N$.

в) Проверка гипотезы на состоятельность. В данном случае проверка всех точек (набора S) на соответствие фундаментальной матрице:

$$x'_i F x_i = 0, i = 1 \dots n.$$

г) Вычисляется средне-квадратичное отклонение для каждой точки из набора S с помощью $\tilde{F}_k$.

д) Определяется процент выбросов и правильных соответствий.

2. Из всех наборов решений $\tilde{F}_k$ выбирается самое лучшее, по критерию наилучшего отбора выбросов и правильных соответствий.

3. Дополнительный шаг, который может использоваться для улучшения результатов предыдущего шага.

Практически все робастные методы придерживаются данной схемы (RANSAC, MLESAC, AMELSAC и др). Отличия могут быть в одном или нескольких шагах. В результате с помощью подобных методов производится одновременно оценка

фундаментальной матрицы и фильтрация предварительных соответствий, из которых остаются только строгие соот-ветствия.

Исследование методов робастной оценки

Метод RANSAC и другие подобные ему методы позволяют оценить фундаментальную матрицу при наличии в данных до 80% выбросов [5].

Рассмотрим подробнее шаги а) и в) описанной схемы. Выбор гипотезы осуществляется (в зависимости от модификации) либо случайно, либо, подчиняясь каким-либо законам. В любом случае содержание в гипотезе как корректных соответствий так и выбросов равновероятно – это условие работы алгоритма (в алгоритме NAPSAC случайно выбирается только первый элемент, все остальные берутся из его окрестности) [5]. Распределение особенных точек на изображениях не подчиняется ни-какому закону распределения – значит фундаментальная матрица для разных частей изображения может существенно различаться. Можно сделать предположение, что при уточнении предварительных соответствий будут отброшены многие корректные соответствия, а многие выбросы останутся. Особенно это будет заметно для изображений объектов, полученных с помощью поворотного стола или с близкого расстояния, так как в этом случае влияние эффекта параллакса заметнее.

Выполним эксперимент №1, взяв в качестве исходных данных два изображения объекта, полученных спомощью поворотного стола. Цель эксперимента – подтвердить или опровергнуть предположение о том, что многие корректные соответствия будут отброшены, так как при проверке соответствий на корректность будет использоваться одна фундаментальная матрица. Отметим вручную несколько особенных точек и найдем между ними соответствия (рис. 2).



Рис. 2. Исходные изображения

Эти особенности назовем маркерными и по ним будем отслеживать корректность нахождения выбросов. Если какие-то из маркерных соответствий будут отброшены, то,

основываясь на методе дедукции, можно сделать предположение, что многие из корректных соответствий могут быть так же отброшены.

Все остальные точки и соответствия найдем в автоматическом режиме – особенные точки с помощью детектора SURF, а соответствия с помощью алгоритма полного перебора. Количество выделенных особенностей на первом изображении 360, на втором 329, количество предварительно установленных соответствий – 151. Для большей наглядности маркерные соответствия в верхней части изображений отметим черными линиями, в нижней белыми.

Оценим фундаментальную матрицу с помощью двух алгоритмов – RANSAC и LMedS. Качество и точность вычисленной матрицы позволяют оценить построенные с помощью нее эпиполярные линии, показанные на рис. 3.

Строгими соответствиями считаются только те соответствия, чьи точки находятся ближе всего к эпиполярным линиям. Для этого в робастных алгоритмах задается порог в пикселях. Количество выбросов, выявленных с помощью фундаментальной матрицы, вычисленной с помощью алгоритма RANSAC – 44, с помощью LMedS – 11. Количество маркеров, принятых за выбросы в обоих случаях – 3. Для наглядности сведем все данные в таблицу 1.

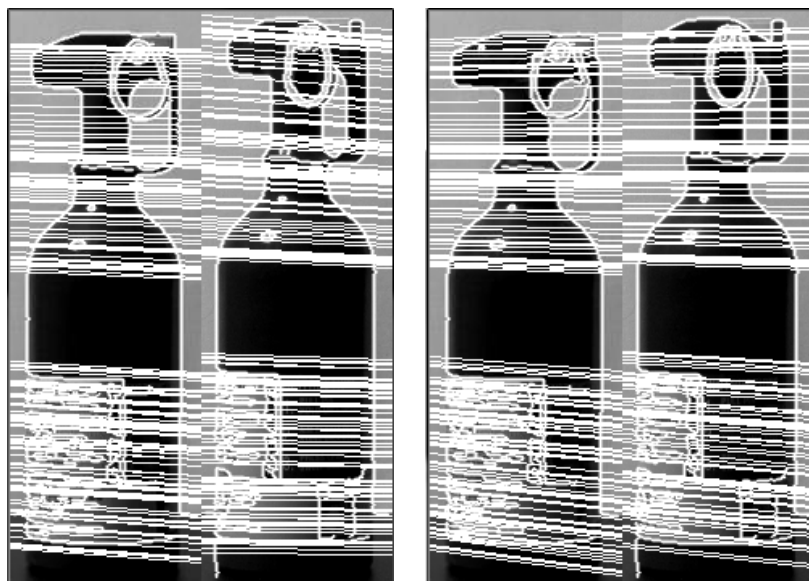


Рис. 3. Эпиполярные линии (слева RANSAC, справа LMedS)

Проведенный эксперимент сделанное предположение подтверждает – корректные соответствия (маркерные) были отброшены, так как не соответствуют общей математической модели, выражаемой фундаментальной матрицей. Требуется разработать другой способ проверки исходных данных, основанный на методе оценки ФМ.

Робастные методы разработаны как универсальные, для работы с разными наборами исходных данных. Для получения более качественного результата их необходимо адаптировать под каждую конкретную задачу. Это можно сделать с помощью описанного ниже способа.

Таблица 1

Сводная таблица эксперимента 1

Параметр	Фундаментальная матрица 1 (RANSAC)	Фундаментальная матрица 2 (LMedS)
Количество выделенных особенностей (левое-правое изображение)	360 – 329	360 – 329
Количество предварительных соответствий	151	151
Количество установленных выбросов	44	11
Количество забракованных маркеров	3	3

Предлагаемый метод оценки ФМ

Основным способом повышения надежности оценки фундаментальной матрицы является удаление выбросов из исходных данных перед выборкой гипотезы. Для этого необходимо разработать критерий оценки исходных данных, который позволит с высокой точностью определить корректность найденных соответствий. Такой критерий широко используется в алгоритмах сравнения особенностей изображений – это расстояние между дескрипторами. Чем меньше расстояние, тем с большей вероятностью можно предположить, что особенности на обоих изображениях принадлежат одной точке объекта, и соответствие между ними корректное. В общем случае, корректными соответствиями признаются те соответствия, расстояние между которыми меньше определенного порога, например равного 0.9. Это справедливо для тех пар точек, которые обладают одинаковой яркостью, контрастностью и т. д., но если одна из точек подвергнется существенному изменению этих параметров, то расстояние между корректными соответствиями может быть больше 1 [12, 225]. Это обусловлено тем, что дескриптор точки строится на основе градиента изображения в ее окрестности. При больших перепадах значений яркости и контрастности дескрипторы точки будут существенно различаться у совпадающих пар особенностей [12, 232]. Для нивелирования негативного воздействия перепадов контраста и яркости необходимо выровнять градиенты на обоих изображениях.

Авторами предлагается следующий метод сглаживания градиента:

1. Изображение объекта конвертируется из RGB-представления в полутоновое. Обозначим числовое матричное представление изображения как D .

2. Формируется весовая матрица S . Значения матрицы должны иметь четко выраженное направление изменения значений по горизонтали или вертикали (зависит от задачи). Для этого можно воспользоваться градиентной заливкой, с переходом черного цвета в белый. На рис. 4 представлены два возможных представления матрицы (изображения увеличены в 6 раз).

3. Значения весовой матрицы S добавляются к значениям матрицы изображения D в соответствии с выражением:

$$D'(i) = D(i) * \alpha + S(i) * \beta,$$

где α и β – весовые коэффициенты (подбираются экспериментально), D' – результирующая матрица.

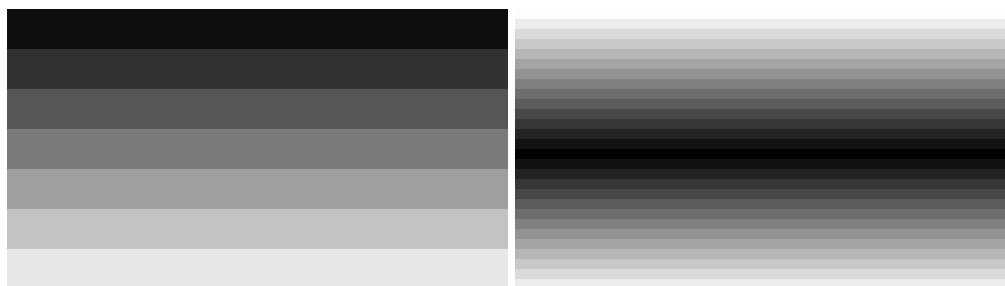


Рис. 4. Графическое представление весовых матриц

На рис. 5 представлено графическое представление матрицы D' после применения весовой матрицы ($\alpha = 0.2$, $\beta = 0.8$). Выделенные прямоугольные области будут рассмотрены ниже.

В качестве дополнительного шага, выполняемого перед третьим шагом, может быть расчёт центральных точек. Например, на рис. 5 видно, что изображения смещены друг относительно друга по вертикали, это смещение необходимо компенсировать. Для этого на каждом изображении с помощью алгоритма MSER [6] выделяются наиболее стабильные с точки зрения градиента области. Затем в каждой области производится поиск особых точек. Устанавливается между ними соответствие. Особые точки, имеющие минимальное расстояние признаются стабильными, на основе их положения рассчитывается смещение. На рис. 5 стабильные точки отмечены белыми окружностями.

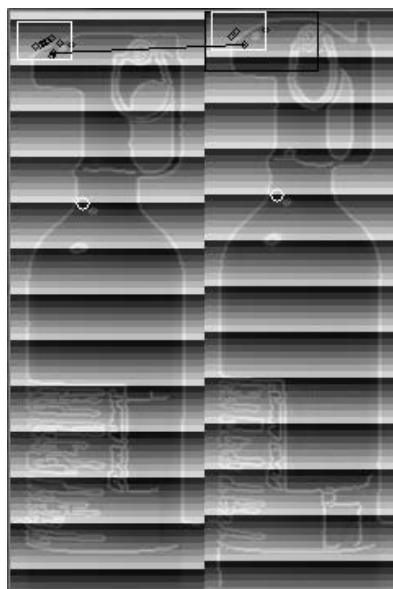


Рис. 5. Графическое представление матрицы D'

Авторами также был разработан метод поиска соответствующих точек с помощью выделения подобных областей на обоих изображениях (рис. 6).



Рис. 6. Выделение подобных областей на изображении

Сравнение дескрипторов особых точек происходит только в рамках областей, ограниченных белыми прямоугольниками. Черным цветом выделен регион поиска. Обнаружение подобных областей происходит автоматически с помощью алгоритма Template Matching [4, 214]. Но поиск и сравнение дескрипторов даже в ограниченной области могут давать неудовлетворительные результаты, вследствие описанной выше проблемы с перепадами яркости и контрастности. На рис. 6 показано найденное соответствие двух особых точек уже после нанесения весовой матрицы на основное изображение. Корректность найденного соответствия гарантируется одинаковым направлением градиента на обоих изображениях. Расстояние для корректных соответствий (максимальное значение) рассчитывается в каждом случае экспериментально, но обычно не превышает 0.8-0.9.

Таким образом, при известном максимальном значении порога можно разработать адаптивные критерии – например, если расстояние между особенностями $[0.1, 0.8)$, то соответствия считать строгими, а при расстоянии $[0.8, 0.9)$ соответствия считать нуждающимися в проверке и уточнении, так как возможно, это выбросы.

Предлагаемый ниже метод оценки фундаментальной матрицы, будет базироваться на описанных выше адаптивных критериях: расстоянии между особыми точками и алгоритме поиска соответствий с помощью подобных регионов.

Рассмотрим этапы алгоритма оценки ФМ.

1. Необходимо из исходных данных удалить выбросы. При использовании адаптивного порога выбросами будем считать все пары особых точек, расстояние между которыми больше 0.9.

2. Локализуем на изображениях регионы, на которых расстояния между особыми точками являются строгими. Их будем считать опорными (рис. 7). Итеративно увеличиваем/смещаем каждый опорный регион до тех пор, пока не будет соблюдаться два условия: отсутствуют пары особенностей, не входящие не в один регион, и в каждом регионе имеется более 8-ми точек. Дополнительно рекомендуется объединить регионы, которые пересекаются более чем наполовину. В итоге, каждый регион должен состоять из строгих соответствий, которые не нуждаются в дополнительной проверке и обязательно должны участвовать в оценке ФМ и из соответствий, которые нуждаются в проверке. Такие соответствия так же могут участвовать в оценке ФМ, при недостаточном количестве строгих соответствий.

3. Для каждого выделенного опорного региона выполняется оценка локальной ФМ. Внутри каждого региона с помощью ФМ проверяются пары особых точек, входящих в

регион, расстояние между которыми не является строгим. Не прошедшие проверку пары точек отбрасываются.

4. На последнем этапе остаются только те пары особых точек, которые признаются корректными. С помощью этих точек можно рассчитать глобальную фундаментальную матрицу, из которой можно извлечь параметры R и t .



Рис. 7. Опорные регионы

Такая декомпозиция исходных данных на строгие и не строгие соответствия позволяет точнее проводить процесс оценки фундаментальной матрицы, так как в этом случае доминирующими будут корректные данные, на которых и строится оценка. Проверим предлагаемый алгоритм экспериментально. Для этого повторим эксперимент №1, но вместо робастных алгоритмов RANSAC и LMedS воспользуемся разработанным комбинированным методом. Полученные результаты сведем в таблицу 2.

Таблица 2

Сводная таблица эксперимента 2

Параметр	Фундаментальная матрица (предложенный метод)
Количество выделенных особенностей (левое-правое изображение)	360 – 329
Количество предварительных соответствий	151
Количество установленных выбросов	15
Количество забракованных маркеров	0

Результаты эксперимента №2 показывают состоятельность предложенного метода. Ни один контрольный маркер не признан выбросом. Определить, насколько верно ус-

тановленное количество выбросов возможно только визуально, построив соответствующую модель.

Выводы

Разработанный метод позволяет произвести более устойчивую оценку фундаментальной матрицы. Кроме того, исходные данные более качественно проверяются на предмет корректности. Данный метод был опробован на различных наборах тестовых изображений, полученных с помощью поворотного стола и показал стабильные результаты (в статье рассмотрен один из многих экспериментов). Тестовые изображения получены из открытого источника [2]. Сам метод реализован на языке C++, с использованием библиотек OpenCV [11] и PCL [14], в среде разработки Eclipse [13].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Юрин, Д.В.* Современные концепции восстановления трехмерных сцен по набору цифровых изображений: наполнение систем виртуальной реальности // Труды Первой международной конференции «Трехмерная визуализация научной, технической и социальной реальности. Кластерные технологии моделирования». 2009. №1. С. 96-100.
2. 3D Objects on Turntable [Электронный ресурс] // URL: <http://www.vision.caltech.edu/pmorieels/Datasets/TurntableObjects> (дата обращения 01.08.2011).
3. *Bay, H* и др. Speeded-Up Robust Features (SURF) // Computer Vision and Image Understanding (CVIU). 2008. Vol. 110, No. 3. P. 346-359.
4. *Bradski, G., Kaehler A.* Learning OpenCV. – Sebastopol: O'Reilly Media, 2008. 577 p.
5. *Fischler, F.M., Bolles R.C.* Random sample consensus: a paradigm for model fitting with applications to image analysis and automated cartography // Magazine Communications of the ACM. 1981. Vol. 24 No. 6. P. 381-395.
6. *Forssén, P.-E., Lowe D.G.* Shape Descriptors for Maximally Stable Extremal Regions // International Conference on Computer Vision – ICCV. 2007. Vol. CFP07198-CDR. P. 1-8.
7. *Hartley, R., Zisserman A.* Multiple View Geometry in Computer Vision (SE). Cambridge: Cambridge University Press, 2003. 672 p.
8. *Heyden, A., Astrom K.A* Canonical Framework for Sequences of Images // Proceedings of the IEEE Workshop on Representation of Visual Scenes. 1995. P. 45-53.
9. *Lowe, D.G.* Distinctive Image Features from Scale-Invariant Keypoints // International Journal of Computer Vision. 2004. Vol. 60, No. 2. P. 91-110.
10. *Luorig, Q.-T, Faugeras O.D.* The Fundamental matrix: theory, algorithms, and stability analysis // International Journal of Computer Vision. 1996. Vol. 17. No. 1. P. 43-75.
11. OpenCV library [Электронный ресурс] // URL: <http://sourceforge.net/projects/opencvlibrary> (дата обращения 01.08.2011).
12. *Szeliski, R.* Computer Vision: algorithms and Applications. Electronic draft. 2010. 957 p.
13. The Eclipse Foundation [Электронный ресурс] // URL: <http://eclipse.org> (дата обращения 01.08.2011).
14. The Point Cloud Library (or PCL) [Электронный ресурс] // URL: <http://pointclouds.org> (дата обращения 01.08.2011).

15. *Tomasi, C., Kanade T. Shape and Motion from Image Streams: a Factorization // International Journal of Computer Vision. 1992. Vol. 9. No. 2. P. 137-154.*

METHODS OF IMPROVE THE QUALITY ESTIMATES OF FUNDAMENTAL MATRIX

V. Alenin*, O. Kulyas**

**Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics (Samara)*

23, L. Tolstogo st., Samara, 443010, Russia

Dimitrovgrad Institute of Technology Management and Design

(branch Ulyanovsk State Technical University)

294, Kuibyshev st., Dimitrovgrad, Ul'yanskovsk Region, 443511, Russia

***Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics (Samara)*

23, L. Tolstogo st., Samara, 443010, Russia

Abstract. The fundamental matrix (FM) is one of the essential components of reconstruction algorithms on a set of three-dimensional scene images. Accuracy assessment of FM affects the accuracy of the calculations of many other components of the reconstruction algorithms, derived from the FM, such as the matrix of projections, the external camera parameters (expressed by the rotation matrix R and the transfer vector t), etc. As a result, the accuracy of calculations of all these components affects the accuracy of the reconstruction model. The paper will be presented a set of methods, all of which allow more accurate calculation of the FM, in the presence of input data measurement errors.

Key words: reconstruction, key points, fundamental matrix, robust estimation methods.

УДК 37.016:51

ОБЪЕДИНЕНИЕ МНЕНИЙ НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ ПРАВДОПОДОБИЯ ДЕМПСТЕРА-ШАФЕРА

К.М. Дякин, Л.И. Федоров

Государственный университет управления

109542, Москва, Рязанский пр., 99

Аннотация. На основе теории правдоподобия Демпстера-Шафера предложен алгоритм классификации в задаче обработки несовершенных данных с плохо разделяемыми классами, решается задача согласования мнений в различных ситуациях.

Ключевые слова: Интеллектуальный анализ данных, теории правдоподобия Демпстера-Шафера, оценка суждений.

Задача согласования мнений возникает в самых различных ситуациях. Принятие решения на основе суждений различных экспертов, выработка консенсуса в спорных вопросах, обработка данных, полученных из разных источников - вот краткий перечень подобного рода ситуаций. В настоящей работе авторы стремились представить тео-

рию правдоподобия Демпстера-Шафера [1], разработанную для объединения суждений и на основании теории предложить алгоритм классификации данных.

Пусть для примера рассматривается ситуация выставления оценки при защите выпускной работы перед комиссией, состоящей из n преподавателей. Допустим, мнения преподавателей выражены качественно следующим образом:

- 1- оценка не ниже четверки, скорее отлично.
- 2- оценка не выше четверки, скорее удовлетворительно.
- 3- оценка положительная, без предпочтений.

На основании указанных суждений комиссия должна выставить одну из оценок – отлично, хорошо, удовлетворительно. В терминах теории правдоподобия Демпстера-Шафера шкала оценок образует контекст рассуждения $\Omega = \{\theta_1, \theta_2, \dots\}$ - множество, элементы которого названы гипотезами (концептами). В нашем примере контекст состоит из трех отмеченных выше оценок. То, что они до поры до времени, то есть пока суждения членов комиссии не объединены, остаются неопределёнными, оправдывает их название «гипотезы». Суждения членов комиссии выражаются выбором некоторого подмножества из контекста рассуждения. Количество различных суждений равно $2^{|\Omega|}$ - число всех возможных подмножеств Ω . В нашем примере, суждения можно оформить таким образом:

- 1- «Хорошо» или «Отлично»;
«Отлично»
- 2- «Хорошо» или «Удовлетворительно»;
«Удовлетворительно»
- 3- «Удовлетворительно», «Хорошо» или «Отлично»

Поскольку каждый член комиссии может иметь $2^{|\Omega|}$ суждений, то, естественно, ожидать, что потребуется каждое из них взвесить количественно. Таким образом, основу теории правдоподобия Демпстера-Шафера составляет функция отображения

$$m(A) : 2^{\Omega} \Rightarrow [0;1], \quad (1)$$

определяющая как бы «весомость» суждения A среди остальных суждений. В первых работах [2] авторы теории правдоподобия называли это «массой» суждения, после чего закрепилось обозначение этой функции $m(A)$. В настоящее время общепринятым является название «базисная вероятностная оценка» (basis probabilistic assignment–bpa), при этом, однако, связь данной оценки с теорией вероятностей не предполагается. Теория правдоподобия Демпстера развивалась в некотором смысле как альтернатива теории вероятности. Оценки (массы, bpa) суждений должны быть нормированы так, что сумма оценок суждений каждого источника оценки станет равной единице.

Для примера с выставлением оценки суждения членов комиссии, уточненные количественно, пусть получают в следующем виде:

- | | |
|---|------|
| 1- «Хорошо» или «Отлично»- | 0.4; |
| «Отлично» - | 0.6 |
| 2- «Хорошо» или «Удовлетворительно»- | 0.7; |
| «Удовлетворительно»- | 0.3 |
| 3- «Удовлетворительно», «Хорошо» или «Отлично»- | 1.0 |

На базе функции (1) в теории Демпстера-Шафера строится еще несколько функций, применяемых для вычислений, но, в принципе, содержащие ту же информацию, что и базисные вероятностные оценки.

1. Функция доверия

$$Bel(A) = \sum_{X \subseteq A} m(X) \quad \forall X \in 2^{\Omega}. \quad (2)$$

Функция доверия как бы собирает все элементы суждений, которые входят в суждение А.

Очевидно, что для элементарных суждений (гипотез)

$$Bel(\theta) = m(\theta),$$

причем принимается также, что

$$Bel(\emptyset) = m(\emptyset) = 0.$$

В примере с оценками $Bel_1(\text{«Хорошо» или «Отлично»}) = 0.6 + 0.4 = 1.$

2. Функция общности (commonality fuction):

$$Com(A) = \sum_{A \subseteq X} m(X) \quad \forall X \in 2^{\Omega}. \quad (3)$$

3. Функция сомнения(doubt fuction):

$$Dou(A) = 1 - Bel(\neg A). \quad (4)$$

4. Функция правдоподобия (plausibility function, в первоначальном варианте она назвалась- upper probability fuction):

$$Pl(A) = 1 - Dou(A) = \sum_{X \mid X \cap A \neq \emptyset} m(X). \quad (5)$$

В функции доверия суммирование осуществляется только по подмножествам множества А, в то время как в функции правдоподобия суммирование по подмножествам, имеющим с А, хотя бы пересечение. Поэтому выполняется очевидное соотношение

$$Bel(A) \leq Pl(A)$$

Интервал между функцией доверия и функцией правдоподобия определяет размер неопределённости суждения А.

Суждения из двух различных источников объединяются в теории Демпстера-Шафера по следующим формуле:

$$m_{1,2}(A) = k \sum_{X \cap Y = A} m_1(X) * m_2(Y) \quad \forall X, Y \in 2^{\Omega}. \quad (6)$$

В формуле (6) k – множитель, используемый для нормировки. В последующих работах различных авторов предлагались иные формулировки для объединения суждений [3]. Принципиальная сторона объединяющей формулы (6) состоит в выборе правила консенсуса, которое в данном варианте теории использует конъюнкцию. В других работах в качестве объединяющего принципа использовалась конъюнктивная форма составляющих подмножеств суждения A . Предлагались также варианты с отказом от нормирующего множителя.

Имеется программная реализация расчётной стороны теории Демпстера-Шафера, представленной в [4] под названием Dempster-Shafer Engine(dne.exe). В программе можно задать источники суждений (в нашем примере- это преподаватели, члены комиссии), набор гипотез, образующих контекст рассуждений, для каждого источника – набор суждений (evidences) и в результате, получить объединяющие суждения, с рассчитанными функциями доверия, общности, сомнения и правдоподобия. По рассчитанным количественным мерам объединенного суждения можно выбрать гипотезу с максимальной массой.

Как и следовало ожидать, в нашем примере победителем оказывается оценка – «хорошо». Однако не все так тривиально просто получается в случае, если суждения находятся в существенном противоречии. В этих случаях теория Демпстера-Шафера может давать результаты, противоречащие интуитивно ожидаемым. Правило объединения Демпстера-Шафера (5) сглаживает различия в оценках экспертов и выпячивает любые даже незначительные совпадения. Если бы в комиссии из двух преподавателей мнения выражались бы так, что один предлагает четверку с массой 0.99 и тройку с массой 0.01, а второй преподаватель пятерку с массой 0.99 и тройку с массой 0.01, то в соответствии с правилом объединения получается результат:

$$m_{1,2}(5) = 0 \quad m_{1,2}(4) = 0 \quad m_{1,2}(3) = 1,$$

что явно несправедливо.

«Ахилесовой пятой» правила (5) является коэффициент нормирования

$$k = \frac{1}{1 - \sum_{X \cap Y = \emptyset} m_1(X)m_2(Y)}, \quad (6)$$

который при наличии противоречивых оценок дает деление на нуль. Например, если один предлагает четверку с массой 1, а второй преподаватель пятерку с массой 1, то правило объединения не применимо.

В работе [5] теория была предложена, так называемая, модифицированная теория Демпстера-Шафера (DSmT), в которой слабости DST преодолены.

DSmT, включает Байесовский подход и DST как частные случаи. Так в случае, когда контекст рассуждения состоит из двух концептов (θ_1, θ_2) , тогда

• согласно вероятностной интерпретации базисных утверждений требует предположения полноты и несовместности гипотез, и в этом случае, имеет место условие:

$$m(\theta_1) + m(\theta_2) = 1$$

- согласно DST $\theta_1 \cap \theta_2 = \emptyset$ и

$$m(\emptyset) + m(\theta_1) + m(\theta_2) + m(\theta_1 \cup \theta_2) = 1$$

- DSmT предполагает только полноту контекста рассуждений, и для базисных утверждений должно выполняться соотношение:

$$m(\emptyset) + m(\theta_1) + m(\theta_2) + m(\theta_1 \cup \theta_2) + m(\theta_1 \cap \theta_2) = 1$$

Таким образом, вместо показательного множества 2^Ω предполагается множество подмножеств $D^\Omega = \{\Omega, \cup, \cap\}$, замкнутое относительно операций объединения $\cup$ и пересечения $\cap$, что связано с отказом от логического принципа исключенного третьего. В теории DSmT правило объединения не включает нормирующего множителя.

$$m_{1,2}(A) = \sum_{\substack{X \cap Y = A \\ \forall X, Y \in D^\Omega}} m_1(X)m_2(Y). \quad (7)$$

В свою очередь мера конфликтности суждений, выраженная

$$\sum_{X \cap Y = \emptyset} m_1(X)m_2(Y), \quad (8)$$

добавляется к слагаемому $m(\theta_1 \cap \theta_2)$ так, что в итоге нормировка не требуется, она получается автоматически.

Возьмем рассмотренный ранее пример с полностью противоречивыми суждениями:

$$\begin{aligned} m_1(\theta_1) &= 1 & m_1(\theta_2) &= 0, \\ m_2(\theta_1) &= 0 & m_2(\theta_2) &= 1. \end{aligned}$$

При соединении суждений по формуле (6) получим:

$$\begin{aligned} m(\theta_1 \cap \theta_2) &= m_1(\theta_1 \cap \theta_2)m_2(\theta_1 \cap \theta_2) + m_1(\theta_1 \cap \theta_2)m_2(\theta_1 \cup \theta_2) + \\ &+ m_2(\theta_1 \cap \theta_2)m_1(\theta_1 \cup \theta_2) + m_1(\theta_2)m_2(\theta_1) + m_2(\theta_2)m_1(\theta_1) = \\ &= 0*0 + 0*0 + 0*0 + 0*0 + 1*1 = 1 \end{aligned}$$

Аналогичные вычисления по формуле (6) дают

$$m(\theta_1) = 0 \quad m(\theta_2) = 0 \quad m(\theta_1 \cup \theta_2) = 0$$

Ситуация напоминает хасидскую историю о том как два ученика спорили по поводу положения в Талмуде, и пришли к мудрецу, чтобы тот сказал кто из них прав. Мудрец,

выслушав первого сказал, что тот прав, затем, выслушав второго сказал, что и тот прав, а на замечание третьего, что так не может быть, сказал тому, что и он прав тоже.

На следующей фазе развития теории DSmT, учитываются особенности контекста рассуждений, задаваемые условиями несовместности некоторых подмножеств, или обнаруживаемыми на стадии слияния суждений условиями отсутствия (исключения) некоторых концептов. Например, если становится известно, что $\theta_1 \cap \mathcal{G}_2 = \emptyset$, то масса этого суждения передается суждению $\theta_1 \cup \mathcal{G}_2$. Эти дальнейшие модификации теории правдоподобия составляет содержание гибридных моделей DSmT[6].

Теория правдоподобия применялась с успехом в тех областях, где наталкивалась на трудности теория байесовских сетей, теория нечетких множеств и подход теории вероятности. На основе теории правдоподобия DSmT авторами настоящей статьи предложен алгоритм классификации в задаче обработки несовершенных данных с плохо разделяемыми классами. Дадим краткое описание этого алгоритма. Пусть имеется обучающая выборка, состоящая из записей с бинарным классифицирующим признаком. Требуется отнести новую запись к одному из классов выборки.

Шаг 1. Для новой записи вычисляются расстояния до объектов обучающей выборки.

Шаг 2. Отбираются $n \ll N$ (где N - число объектов в выборке) объектов с наименьшими расстояниями.

Шаг 3. Для $k \in \overline{1, n}$ определяется доля объектов с заданным классифицирующим признаком. Отсутствие сведений о данном признаке трактуется как суждение типа

$$m(\theta_1 \cup \mathcal{G}_2) = p_k,$$

а ошибка кодирования (заполнения) - как суждение типа:

$$m(\theta_1 \cap \mathcal{G}_2) = q_k$$

Для различных значений k суждения могут оказаться противоречивыми.

Шаг 4. По формуле объединения суждений (7) формируется оценки, по которым выбирается класс классифицируемого объекта.

Поскольку происходит объединение n «суждений», то формула объединения должна быть взята в виде:

$$m(A) = \sum_{\substack{k \\ \forall X_k \in D^\Omega}} \prod_k m_k(X_k). \quad (8)$$

Эта формула применима, если не рассматриваются ограничения контекста рассуждения. В этих случаях для правила объединения суждений справедливы переместительное и ассоциативное правила. Из этого следует возможность последовательного применения $k \in \overline{1, n}$ суждений.

Шаг 5. Выбор класса возможен как на основании массы объединяющего суждения, так и на основе функций (2, 3, 4, 5), которые в теории DSmT рассчитываются так же, как и в классической теории Демпстера-Шафера - DST.

Исследование алгоритма дают основания считать, что его можно использовать не только для классов со сложной структурой, но и для слабо разделимых классов с ошибками в исходных данных. Последнее обстоятельство играет особую роль в реальных системах хранения экспертных данных и базах знаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Shafer, G.* (1976). *A Mathematical Theory of Evidence*. Princeton: Princeton University Press
2. *Dempster, A.P.* (1967). Upper and lower probabilities induced by a multivalued mapping. *Ann.Math. Statistics*, 38, 325–339.
3. *Smets, Ph.* Belief functions: the disjunctive rule of combination and the generalized Bayesian theorem, *International Journal of Approximate reasoning*, Vol. 9, pp. 1-35, 1993.
4. *Adrian, O' Neill.* , <http://www.quiver.freemove.co.uk>
5. *Dezert, J.* Foundations for a new theory of plausible and paradoxical reasoning, *Inform. & Secur. J.*, Semerdjiev Ed., Bulg. Acad. of Sci., Vol. 9, 2002.
6. *Smarandache, F. & Dezert J.* *Advances and Applications of DSmT for Information Fusion*, American Research Press Rehoboth, 2004

OPINIONS ASSOCIATION BASED ON THE DEMPSTER–SHAFFER THEORY

K. Dyakin, L. Fedorov

*State University of Management
99, Ryzanskiy Prospekt, Moscow, 109542, Russia*

Abstract. On the basis of the theory of plausibility of the Dempster–Shafer theory the algorithm of classification in a task of processing of the imperfect data with poorly divided classes is offered, the task of the coordination of opinions in various situations is decided

Keywords: Data-mining, Dempster–Shafer theory, estimation of OPINIONS.

ТЕХНОЛОГИИ И МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ

УДК 004:378

О ФОРМИРОВАНИИ ИНФОРМАЦИОННОЙ КУЛЬТУРЫ У СТУДЕНТОВ МЛАДШИХ КУРСОВ ВУЗОВ В ПРОЦЕССЕ РАЗВИТИЯ ИНФОРМАТИЗАЦИИ ОБРАЗОВАНИЯ

Н.Н. Голикова*, О.Н. Зенкина**

*Московский государственный областной университет
105005, Москва, ул. Радио, 10а

**Московский государственный гуманитарный университет им. М.А. Шолохова
109240, Москва, ул. Верхняя Радищевская, 16/18

Аннотация. Основой развития современного информационного общества являются информационные процессы, в которых широкое применение находят информационно-коммуникационные технологии. Внедрение и использование информационно-коммуникационных технологий практически во всех сферах деятельности человека привело к возникновению и развитию глобального процесса информатизации, что в свою очередь привело к развитию информатизации образования. Информатизация образования является важнейшим условием реформирования и модернизации системы образования. Средняя и высшая школы обучают и воспитывают полноценных членов общества, которые не только формируют информационную среду, но и им самим предстоит жить и работать в этой новой среде. Поэтому, как никогда остро проблема формирования информационной культуры у подрастающего поколения.

Ключевые слова: информатизация общества, информатизация образования, информационная культура, информационно-коммуникационные технологии в образовании.

Под *информатизацией общества* понимается широкомасштабное применение методов и средств сбора, хранения и распространения информации, обеспечивающее систематизацию имеющихся и формирование новых знаний и их использование обществом для дальнейшего совершенствования и развития.

Информатизация образования представляет собой область научно-практической деятельности человека, направленную на применение технологий средств сбора, хранения, обработки и распространения информации, обеспечивающую систематизацию имеющихся и формирование новых знаний в сфере образования для достижения психолого-педагогических целей обучения и воспитания.

В настоящее время проблема информатизации образования является глобальной проблемой человечества в силу следующих причин:

стремительное развитие процесса информатизации общества, охватывающее практически все страны мира, в том числе и Россию, является закономерным следствием развития цивилизации;

стоимость технических и аппаратных средств информатики снижается, в то же время неуклонно растут их технические возможности, следовательно, низкая стоимость технических средств информатики делает их более доступными для населения.

Следует отметить, что возможности информационной техники сегодня опережают общий уровень подготовленности массового пользователя, а это в свою очередь приводит к появлению проблемы информационной культуры, которая тесно связана с проблемой образования.

Процесс информатизации образования в России начался в 1985 году и в нем можно выделить несколько этапов:

- 1985 – 1993 гг. – компьютеризация образования;
- 1993 – 1998 гг. – разработаны первые концепции информатизации образования РФ;
- 1998 – 2001 гг. – в результате кризиса 1998 г. началось развитие региональных и даже локальных (на базе отдельного учебного заведения) программ информатизации;
- 2002 – н.в. – в связи с присоединением к Болонскому соглашению наметились четыре основных направления:

1) оснащение образовательных учреждений современными средствами информатизации и использование их для обучения учащихся;

2) использование современных средств телекоммуникации и баз данных для информационной поддержки преподавателей и учащихся;

3) развитие и распространение средств дистанционного образования;

4) пересмотр содержания образования на всех его уровнях, связанных со стремительным ростом ИКТ. Эти изменения связаны с подготовкой молодых людей к жизни в условиях информационного общества.

На сегодняшний день в области информатизации образования разрабатываются и реализуются направления и концепции на разных уровнях – от федерального до уровня образовательного учреждения.

Одним из основных направлений информатизации общества является формирование информационной культуры, что особенно важно для молодых людей.

В большинстве концепций информационная культура понимается в узком профессиональном смысле – как профессиональная характеристика современного специалиста, способного применять информационные технологии в своей профессиональной деятельности. Однако в современном информационном обществе информационную культуру следует рассматривать как степень сформированности человека для органичного вхождения в информационное общество, в пространство культуры этого общества.

Передовые страны мира, к числу которых относятся Япония, США, Англия, Германия, Франция уделяют большое внимание развитию информационной культуры в сфере подготовки специалистов самого разного профиля.

Объективная потребность развития общества требует от человека подготовки к быстрому восприятию и обработке больших объемов информации, овладению современными методами и технологиями работы. Кроме того новые условия работы порождают зависимость информированности человека от информации, созданной другими людьми. Поэтому для молодого человека уже недостаточно уметь самостоятельно осваивать и накапливать информацию, а надо научиться таким технологиям работы с информацией, которые позволяют принимать решение на основе коллективного знания. Следова-

тельно, человек должен иметь определенный уровень культуры по обращению с информацией. Для этой цели был введен термин «информационная культура».

Под *информационной культурой* понимается умение целенаправленно работать с информацией и использовать ее для получения, обработки и передачи компьютерную информационную технологию, современные технические средства и методы.

Информационная культура является одной из составляющих общей культуры человека, а также представляет собой неотъемлемую часть его профессионального мастерства, являясь инструментом для приобретения новых знаний в рамках выбранной специальности.

Информационная культура связана с различными творческими способностями человека и может проявляться следующим образом:

- в конкретных навыках по использованию технических устройств (от телефона, компьютера, принтера до компьютерных сетей);
- в способности использовать в своей деятельности различные компьютерные программы, являющиеся базовой составляющей компьютерных информационных технологий;
- во владении основами аналитической переработки информации;
- в умении работать с различной информацией и информационными потоками в своей области деятельности.

Неотъемлемой частью информационной культуры является знание таких новых информационных технологий, которые позволяют автоматизировать часто повторяющиеся рутинные операции и также позволяют применять полученные знания в нестандартных ситуациях, требующих творческого подхода.

Особенно важно развивать информационную культуру среди молодых людей, т.к. уровень культуры человека, сформированный в студенческие годы, определяет его будущее благополучие в профессиональной деятельности.

Молодое поколение наиболее восприимчиво к новинкам, появляющимся в сфере ИКТ. Овладение новыми возможностями технических средств информатики помогает молодежи по-новому воспринимать окружающее пространство, обрести новое стремление к знаниям, к учебе, творчеству. В последнее время в нашей стране есть устойчивый спрос на IT-специалистов, связанных с различными творческими направлениями компьютерного дизайна: от Web-дизайна до ювелирного дела и моделирования одежды.

В то же время, в процессе обучения студентов вузов выясняется, что не все студенты первого курса обладают элементарными навыками самостоятельной работы с информацией, за исключением просмотра первоисточников, рекомендованных преподавателем. У многих возникают трудности с самостоятельным оформлением студенческих научных работ. Данное замечание в значительной степени относится к числу студентов, учащихся на вечернем и заочном отделениях, и представляющих более старшую возрастную категорию. Хотя следует отметить, что в последние годы ситуация значительно изменилась в лучшую сторону. Благодаря тем навыкам работы с информационными технологиями, которые были приобретены ранее, студенты всех форм обучения показывают достаточно высокую готовность к овладению новыми или малоизвестными программными продуктами.

Следует отметить, что для современного молодого человека, студента или школьника, наличие дома персонального компьютера с выходом в сеть Internet является необходимой жизненной потребностью, удовлетворяющей его общению и развитию. Многие молодые

люди воспринимают компьютер, подключенный к глобальной сети в первую очередь как средство развлечения, в то же время, это как раз мешает основному занятию учащегося – учению. Назначение Internet как раз заключается в том, что глобальная сеть является огромным источником разнообразных сведений по всем областям деятельности человека, и многие молодые люди не до конца осознают его практическую ценность.

Перед человеком, имеющим дома компьютер с выходом в сеть Internet, открываются новые перспективы в сфере образования:

- возрастает доступность использования различных источников знаний для каждого пользователя;
- обеспечивается устойчивое стремление личности к обмену знаниями, к общению;
- появляется возможность получения заочного домашнего образования посредством дистанционного обучения;
- появляется возможность получения дополнительного образования, поскольку информатизация как среда изучения является наиболее популярным направлением дополнительного образования, которое представляет собой огромный источник технологической и информационной поддержки. При этом в среде дополнительного образования могут принимать участие всевозможные заинтересованные участники разных возрастных категорий: от школьников до профессоров.

Интересно, что по данным аналитического исследования «*IT кадры в российской экономике*» выполненного по заказу Минсвязи и массовых коммуникаций выпуск IT-специалистов в России составляет 69 тыс. в год, в 2012 году он возрастет до 85 тысяч. Ежегодные потребности рынка труда составляют 188 тысяч, к 2012 году вырастут до 233 – при ориентации экономики России на сырьевой путь развития, и до 550 тысяч – при переходе на инновационный путь. При этом в 2009 году ЕГЭ по информатике сдавали лишь 67 тысяч выпускников школ. Отсюда следует, что специалистов по информационным технологиям крайне недостаточно и спрос на них будет постоянно расти.

Чтобы решить эту проблему надо повысить мотивацию к изучению информатики в школах и вузах, а это требует как постоянного повышения профессиональных знаний школьных учителей информатики, так и повышения общего уровня компьютерной грамотности всех преподавателей в школах. Кроме того, следует обязательно в массовом порядке вести переподготовку по IT-специальностям многих других профессий.

В связи с этим возрастает роль российских вузов в области дополнительного образования, разработки и внедрения новых информационных технологий в нашей стране. К счастью для нашей страны уровень развития информационных технологий в вузах, наиболее передовых в этой среде, пока еще выше, чем в среднем на предприятиях экономики. Поэтому внедрение новейших информационных технологий в программы подготовки специалистов разных профессий способствует прогрессивному росту экономики нашей страны.

Для того чтобы научить молодежь жить в новом информационном мире преподавателям необходимо:

- а) постоянно обновлять свои профессиональные знания, ориентируясь на процессы, происходящие в образовании;
- б) уметь использовать и осваивать новые технологии;

в) тесно сотрудничать с другими участниками образовательного процесса: администрацией образовательного учреждения, студентами, коллегами по работе;

г) обладать широкой эрудицией и уметь объективно оценивать результаты своей деятельности.

Всё вышесказанное говорит о том, что формирование информационной культуры у молодого поколения в рамках продолжающейся информатизации образования – сложный процесс, имеющий свои положительные и отрицательные стороны. В свою очередь работники сферы образования должны разумно использовать свои информационные возможности, прикладывая все усилия для решения стратегических проблем отрасли.

ЛИТЕРАТУРА

1. Платонова, Е.Т. Информатизация системы образования // VIII Международная научно-практическая конференция «Инфокоммуникационные технологии глобального информационного общества» - Труды конференции. – Казань: Изд-во Международной академии связи. – 2009.- С.118.
2. Концепция информатизации образования. //«Информатика и образование». – 1990. -№1.
3. Севрунова, Н.В. Формирование информационной культуры будущего учителя: из опыта работы научной библиотеки Красноярского государственного педагогического университета / Севрунова Н.В. // Библиотечное дело. – 2009. –№22. – С. 6-7.
4. Иванченко, С.Н. Российские ВУЗы должны играть ведущую роль в информатизации общества //«Экономика и образование сегодня». - 2010. - №19.
5. Васильев, В.Н., Воронов В.В. Развитие информационной культуры и система непрерывного образования // Компьютерная революция и информатизация общества. - М., 1990. - С. 124 - 237.
6. Бутырин, Г.Н., Ефимов Н.Н., Нечаев В.Я. Дистанционное образование по оценкам экспертов. //Проблемы информатизации высшей школы.- 1997. - № 3-4. - с. 45-48.
7. Ваграменко, Я.А. О направлениях информатизации российского образования.// Системы и средства информатики.-1996.- Вып. 8.- С. 27-38.
8. Ваграменко, Я.А., Каракозов С.Д. Материалы к Концепции информатизации образования (общее и педагогическое образование).//Педагогическая информатика.-1997.- № 3. -С. 67-84.
9. Концепция информатизации сферы образования Российской Федерации. //Проблемы информатизации высшей школы.-1998.- № 3- 4. - 322 с.

ON THE FORMATION OF INFORMATION CULTURE AMONG THE STUDENTS OF SENIOR COURSES OF THE UNIVERSITIES IN THE DEVELOPMENT PROCESS OF INFORMATIZATION OF EDUCATION

N. Golikova*, O. Zenkina**

**Moscow Regional State University
10a, Radio st., Moscow, 105005, Russia*

***Moscow State University for Humanities named after M.A. Sholokhov
16/18, Verhnaja Radishevskaja st., Moscow, 109004, Russia*

Abstract. The basis of development of modern information society is information processes, which are widely used information and communication technologies. The introduction and use of information and communication technologies in almost all spheres of hu-

man activity has led to the emergence and development of the global information process, which in turn led to the development of informatization of education. Informatization of education is the most important condition for the reform and modernization of the education system. Secondary and higher schools teach and bring up full-fledged members of the society, which not only shape the information environment, but they themselves will live and work in this new environment. Therefore, as never before, is especially acute problem of the formation of information culture among the younger generation.

Keywords: informatization of the society, informatization of education, information culture, information and communication technologies in education.

УДК 681.3.07

**FLASH ПРОЕКТ «РУССКИЙ СТИЛЬ»:
ЭФФЕКТИВНОЕ ОБУЧЕНИЕ ПРОГРАММИРОВАНИЮ
И ПАТРИОТИЧЕСКОЕ ВОСПИТАНИЕ**

В.А. Птицын

*Московский государственный областной университет
105005, Москва, ул. Радио, 10а*

Аннотация. Рассматриваются этапы развития проекта, реализующего целостный подход к обучению программированию и патриотическому воспитанию. На всех этапах осуществлялось обучение программированию интерактивной графики на языке Action Script A. Flash. Однако итоговые задания, носящие историко-культурный характер, были различными. Показывается взаимосвязь между характером итоговых заданий и эффективностью обучения программированию.

Ключевые слова: программирование, обучение, патриотизм, воспитание, Action Script A. Flash.

В период перехода в информационную эпоху современные информационные технологии не просто пассивно влияют на личность, а предоставляют возможности целенаправленно управлять внутренним миром человека. Как следствие, границы национальных мультимедийных пространств не совпадают с географическими границами государств. Поэтому «многие традиционные национальные и этнические культуры претерпевают существенные изменения, а некоторые из них могут оказаться не только деформированными, но и полностью разрушенными» [2, с. 145]. Последствия воздействия глобализации на личность исследователями формулируются следующим образом: «для многих пользователей Интернета виртуальная география вступает в противоречие с реальной, ... и географическое (связанное с национальным) самоопределение утрачивает значимость для идентичности человека: не место проживания, а адрес или имя в Сети становятся компонентом идентичности» [3, с. 12].

Учитывая вышесказанное, представляется необходимым разрабатывать подходы (применимые в школах, системе дополнительного образования, ВУЗах) к преподаванию компьютерных наук, ориентирующих молодёжь в русло отечественных духовных и историко-культурных традиций.

В [5] автором было рассмотрено место обучения программированию в среде Adobe FlashIDE в системе обучения программированию учащихся общеобразовательных

школ и студентов физ.-мат. факультета педагогического ВУЗа. Были показаны преимущества и недостатки языка программирования ActionScript среды А. FlashIDE с точки зрения обучения школьников и студентов программированию на уровне, диктуемом современными информационными технологиями. Кроме того, были показаны большие возможности среды А. FlashIDE для реализации целостного подхода к обучению программированию и духовному, патриотическому воспитанию детей и молодежи. В данной статье эти мысли конкретизируются на примере проекта «Русский стиль».

Суть проекта следующая. В курсе обучения программированию в среде А. FlashIDE основной акцент делается на программирование интерактивной графики. При этом обучение производится на чисто учебных, содержательно нейтральных примерах. Однако итоговое задание дается историко-культурного содержания. При этом никаких разговоров о воспитательном аспекте этого итогового задания не ведется. Однако, погружение обучаемых в историко-культурную среду (даже частичное и поверхностное) несет в себе патриотический воспитательный потенциал. Такое задание внесет свой малый вклад в формирование позитивной составляющей среды обитания молодого человека. Рассмотрим этапы реализации проекта «Русский стиль» с точки зрения взаимовлияния эффективности обучению программированию и воспитательного воздействия.

Первый опыт постановки заданий по программированию графики в среде А. FlashIDE на историко-культурную тему был сделан автором в 2005 году при преподавании ученикам Свято-Владимирской православной общеобразовательной школы информатики. В качестве итогового задания предлагалось в среде А. FlashIDE запрограммировать рисунки, воспроизводящие образы архитектурных сооружений, взятых с древне-русских книжных миниатюр. При этом предполагалось, что при выполнении данных заданий удастся наилучшим образом проиллюстрировать на практике принципы объектно-ориентированного программирования. Действительно, архитектурные объекты, имея много общих черт и в тоже время значительную вариативность, являются прекрасным материалом для практической иллюстрации понятий класса, объекта, наследования.



Кроме того, необходимость построения математической модели графического образа развивает у обучаемых навыки декомпозиции сложного объекта на составные час-

ти, выбора характерных параметров каждой из частей объекта, взаимной увязки параметров объекта функциональными соотношениями. При построении таких моделей важны и навыки подготовки готовых модулей, моделирующих тот или иной элемент объекта, и умение встраивать в свою модель внешние модули, подготовленные другими разработчиками. Реализация данных идей в школьной практике показала, что в полной мере их осуществить не удалось. Основными сдерживающими факторами стали лимит учебного времени, недостаточная математическая подготовка учащихся и полное отсутствие навыков построения математических моделей, моделирующих реальные объекты.

Лучшая из работ по данному этапу проекта представлена здесь. Необходимо отметить, что параметры отдельных частей данной модели взаимно не согласованы. Поэтому она не может быть подвергнута даже масштабированию. Этот недостаток обусловлен вышеперечисленными факторами.

Если в среднем образовании при изучении информатики и компьютерных технологий подобные задания можно формировать при изучении большинства тем, то в системе высшего образования такие возможности на первый взгляд более ограничены, вследствие необходимости углублённого профессионального изучения той или иной темы в рамках государственного стандарта. Однако формирование подобных заданий в высшей школе тоже возможно, а в педагогических ВУЗах представляется даже необходимым. Необходимость такого подхода становится особенно очевидной с учетом того, что в новых государственных стандартах в рамках той или иной, казалось бы, чисто компьютерной темы часто возникают воспитанные разделы. Так в государственном стандарте по чисто компьютерному курсу «Практикум по решению программно ориентированных задач» один из трех пунктов звучит следующим образом: «Решение задач информатики и проблемы воспитания». Можно отметить и то, что с 2009-2010 учебного года появился и новый вид курсов по выбору КПВ (ДН): курс по выбору с национально-региональным компонентом.

Исходя из вышесказанного, автор провел эксперименты по реализации проекта «Русский стиль» при преподавании курсов по выбору студентам отделения информатики физико-математического факультета МГОУ. На первом этапе итоговое задание было сформулировано аналогично вышеизложенному: моделирование графических образов архитектурных сооружений – храмов, изб, мельниц, башен и крепостных стен. Поскольку здание это достаточно сложный объект, но в тоже время он имеет повторяющиеся элементы и наследует свойства объектов вышестоящего уровня, на этой задаче перед студентами встала задача глубокой проработки математической модели до начала программирования. Оказалось, что такую проработку большинство студентов делать не умеют и не любят, стремясь ничего не продумывать заранее, надеясь на получение результата методом проб и ошибок за компьютером, что является признаком непрофессионализма [4]. Составление математических моделей зданий убеждает студентов, что первоначальная тщательная проработка модели позволяет сэкономить трудозатраты при компьютерной реализации модели и ее последующей модернизации. Кроме того, компьютерное моделирование зданий позволяет студентам овладеть и такой важной компьютерной компетенцией, как умение работать в команде, использовать в своей работе готовые модули, созданные другими разработчиками, а также умение создавать свои программные модули, удовлетворяющие принципу инкапсуляции — пригодные для использования другими разработчиками. Выполнение этих заданий по-

звolyет студентам овладеть и некоторыми навыками моделирования: выделять существенные для данной задачи параметры моделируемого объекта, разбираться с входными и выходными данными.

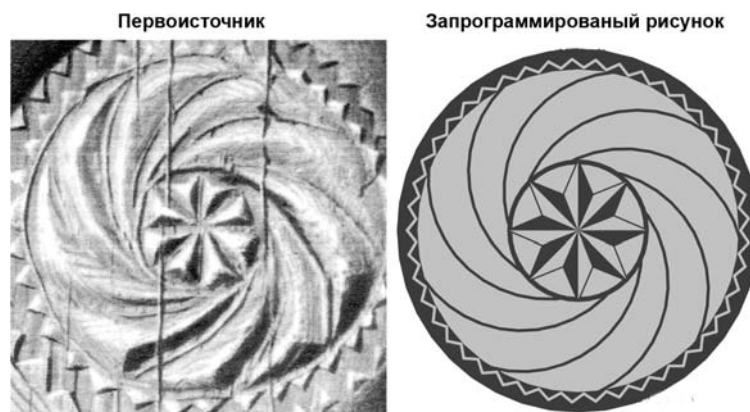
Необходимость совершенствовать реализацию проекта навели автора на мысль, что архитектурные образы являются не самыми лучшими объектами для обучения программированию интерактивной графики. Действительно, возможности варьирования таких объектов достаточно ограничены: допустимо варьировать цвет в ограниченном диапазоне и масштабировать объекты. Все другие вариации были бы не естественными. Поэтому внимание было обращено на народные узоры и орнаменты, которые предоставляют большую свободу варьирования параметров в процессе построения интерактивности на воздействия пользователя. При этом позитивность воспитательного воздействия сохраняется. Кроме того, узоры и орнаменты имеют большое количество повторяющихся элементов и различных вариаций элементов, требующих для своей реализации в модели использования основных алгоритмических структур. К сожалению, узоры и орнаменты по своей сути не столь объектно-ориентированы, как архитектурные объекты. Но с этим обстоятельством приходится смириться, тем более, что вследствие вышеуказанных факторов до построения объектно-ориентированных моделей архитектурных объектов все равно не удавалось добираться.

Студентам предлагалось самим подобрать орнамент для программирования. Оказалось, очень немногие студенты способны самостоятельно подобрать образцы узоров для программирования. Поэтому тем студентам, которые не предоставляли своих предложений по образцам для программирования, давались возможные варианты узоров, но предлагается самостоятельно придумать реакции на действия пользователей.



Первый опыт по программированию орнаментов был предпринят весной 2009 г. со студентами 2 курса отделения информатики. Оказалось, что узоры, построенные на основе кривых линий, были трудны для программирования студентам второго курса. Лучшая работа из этой серии представлена на рисунке. Запрограммированный рисунок визуально весьма далек от первоисточника. Рисунок обладает интерактивностью, но его параметры плохо согласованы: при попытке масштабирования модель распадается. Учитывая не вполне удачный первый опыт по созданию узоров, автор статьи при формулировке задания студентам пятого курса осенью 2009 г. отступил от принципа целостного подхода обучения программированию и воспитания и поставил математическое задание по программированию простейших схем, иллюстрирующих типовые схемы по-

строения бордюров [7]. Значительная часть студентов справилась с заданием, но работы получились не интересными, не творческими.



Миронов Иван, 3 курс, ФМФ МГОУ, осень 2010 г.

Учтя итоги предыдущих этапов реализации проекта, автор осенью 2010 г. студентам 3 курса отделения информатики предложил запрограммировать интерактивные розетки из русского народного деревянного зодчества [1].

Данные объекты оказались очень удачными для программирования. Они имеют много повторяющихся достаточно простых базовых элементов, математическими преобразованиями этих элементов строится узор.

В тоже время надо суметь провести декомпозицию исходного объекта: рационально выделить в нем базовые элементы, согласовать параметры базовых элементов. При организации интерактивности запрограммированных рисунков некоторым из студентов удалось выйти на вопросы оптимизации математических моделей с учетом необходимости организации интерактивности. Действительно, если, например, на приведенном рисунке надо организовать интерактивность только спирали, то нет смысла на каждом шаге интерактивности пересчитывать всю модель, следовательно, нужно строить два объекта: спирали, которая будет подвергаться интерактивному воздействию и всего остального рисунка. В тоже время, если надо организовать много интерактивностей, то трудоемко создавать для каждой из интерактивностей свою комбинацию объектов. Здесь нужен разумный компромисс. По данному заданию значительному количеству студентов удалось построить интерактивные взаимоувязанные модели розеток деревянного зодчества, что позволило использовать их при оформлении сайта Открытой заочной олимпиады по компьютерной графике [6].

Опыт показал, что задания по созданию узоров можно рационализировать по трудоемкости, что позволяет студентам в приемлемые сроки создать математическую модель образца и уделить большее внимание программированию интерактивностей. Придание графическому образу интерактивности является хорошей проверкой качества математической модели. При программном построении узоров не требуется большой объем рутинных трудозатрат, но необходима определенная предварительная алгоритмическая проработка и построение рациональной математической модели.

Интересно отметить, что при обучении программированию по проекту «Русский стиль» удалось выявить взаимосвязь качества обучения компьютерным наукам и успе-

ха воспитания. Студенты с большим интересом работали над заданиями, построенными на основе историко-культурных первоисточников, чем над формально математическими построениями.

На основании вышеизложенного можно сделать вывод, что описанный подход показал свою эффективность как в плане обучения программированию, так и воспитания. В тоже время данный подход может быть развит по ряду направлений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зайцев, Б, Пинчуков, П.* Солнечные узоры. [Текст] – М. Московский рабочий. 1978 – с. 142.
2. *Колин, К.К.* Философские проблемы информатики. [Текст] – М.: Бином, 2010 – с. 264.
3. *Кузнецова Ю.М., Чудова Н.В.* Психология жителей Интернета. [Текст] – М. URSS. 2007 – с. 221.
4. *Макконелл, С.* Совершенный код. Практическое руководство по разработке программного обеспечения. [Текст] – М. Питер. 2007 – с. 867.
5. *Птицын, В.А.* Программирование интерактивной графики в среде А. Flash: повышение эффективности обучения программированию и позитивное воспитательное воздействие. [Текст]/ В.А. Птицын// Вестник МГОУ, физика-математика, №1. — МГОУ, 2010 — .с. 99.
6. *Птицын, В.А.* Сайт «Заочная открытая олимпиада по компьютерной графике» [Электронный ресурс]/ В.А. Птицын Режим доступа <http://mgou.ru/computer/index.html> . — 06.04.2011.
7. *Шубников, А.В., Копчик, В.А.* Симметрия в науке и искусстве. [Текст] – М., Ижевск. ИКИ. 2004 – с. 560.

THE « RUSSIAN STYLE » FLASH PROJECT: EFFECTIVE TRAINING TO PROGRAMMING AND PATRIOTIC EDUCATION

V. Ptitsyn

*Moscow Regional State University
10a, Radio st., Moscow, 105005, Russia*

Abstract. Stages of the project development realizing the complete approach to programming training and patriotic education are considered. At all stages programming training interactive schedules in language Action Script A. Flash was carried out. However the final tasks carrying historical and cultural character, were various. The interrelation between character of final tasks and a programming learning efficiency is shown.

Keywords: programming, training, patriotism, education, Action Script A. Flash.

УДК 681.3.07

ПРОБЛЕМЫ ОБУЧЕНИЯ РЕФЛЕКСИВНОМУ ИССЛЕДОВАНИЮ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Н.В. Ефимова

Московский государственный областной университет
105005, Москва, ул. Радио, 10а

Аннотация. В статье рассматривается одна из проблем теории и практики обучения решению математических задач, связанная с заключительным этапом решения – с её исследованием, развитием, преобразованием. Отмечается необходимость перехода от математической задачи к учебной, а также рассматривается исследование задачи как средство этого перехода.

Ключевые слова. Рефлексивное исследование, поисковый этап исследования, обучающий характер задачи, развитие задачи, обобщение и аналогия

В теории обучения решению задач важное место отводится определению их роли в обучении математике. Л.М. Фридман справедливо считает, что общее умение, *общий подход к решению математических задач* должен сохраниться у каждого выпускника школы надолго, так как он является, по сути, «моделью разумного подхода к решению любых – бытовых, практических, технических и иных задач, которые будут повседневно встречаться человеку на протяжении всей его жизни. Ведь жить – это значит решать задачи!» [1, с.59]. Таким образом, формирование у учащихся общего подхода к решению задач, общего умения решать математические задачи, усвоение обобщенного способа решения задач в современной дидактической системе рассматривается как одна из целей обучения математике. Этому принципиально важному положению возражает Н.М. Бескин. По его мнению, «обучение решению задач» – это ложная цель [2, с.3]. Фактически, Н.М. Бескин полемизирует и с выдающимся математиком и педагогом Дж. Пойа, который считает, что «владение математикой – это есть умение решать задачи, причем не только стандартные, но и требующие известной независимости мышления, здравого смысла, оригинальности, изобретательности. Поэтому первая и самая главная обязанность курса математики дней школы состоит в подчеркивании методической стороны процесса решения задач» [3, с.16].

Умение ребенка проводить *рефлексивное исследование задачи* (РИЗ) играет существенную роль в обучении их решению. *Под рефлексивным исследованием задачи понимается исследование учащимся собственной деятельности по решению задачи: последовательности действий, их правильного выполнения, приобретенного в ходе решения опыта* [4, с.60]. Рефлексивное исследование придает математической задаче характер учебной задачи, дополняя ее целым рядом учебных заданий.

Вообще, исследование задачи надо рассматривать как *центральный этап рефлексивного исследования задачи*. Первый этап связан с *поиском решения (поисковый этап)*, а третий – собственно *с рефлексивным исследованием*. Центральный этап, связанный с исследованием и развитием задачи – *исследовательский этап*. Исследовательский этап, несомненно, является подготовительным перед собственно рефлексивным исследованием задачи, а в некоторых случаях, даже и началом рефлексивного исследования. Обоснование необходимости этого этапа можно найти во многих работах, по-

свящённых обучению решения задач. Вот лишь некоторые примеры. Вначале из наставлений учащимся.

«Решив задачу, *оглянись назад* и изучи задачу и найденное решение в целом, установи, что полезно запомнить, а что можно забыть...» [5, с. 15]; «Заглянув в ответ, вы считаете свою работу над задачей законченной. Вы даже не отдаёте себе отчёта в том, как получено ваше решение, что вам нужно было знать, чтобы найти это решение» [6, с.21]. «Стремясь извлечь из своих целей максимальную пользу, старайтесь подметить в задаче, которую вы решаете, то, что сможет пригодиться и в будущем при решении других задач» [3, с.13]. Авторы этих рекомендаций (Л.М. Фридман, Ю.М. Колягин, В.А. Оганесян, Д. Пойа) отмечают необходимость перехода от *математической задачи к учебной* и фактически рассматривают исследование задачи как *средство этого перехода*.

Возникает вопрос о *дидактическом смысле исследовательского этапа в работе над задачей*. Очень важным и поучительным моментом работы над задачей является *возвращение* к уже решенной задаче. При вторичном изучении решения можно найти дополнительные подтверждения правильности полученного результата, а обобщение полученных результатов является ценным материалом при решении других задач.

Известные педагоги предлагают вводить в этап исследования не только составление задачи по некоторым элементам, общим с исходной задачей, но и составление обратной и её решения, составление аналогичной задачи, решение или составление задачи, обобщающей по тем или иным параметрам исходную. Легко заметить, что здесь указаны уже не только *результаты исследовательского этапа* – новые задачи, новые решения, но и *средства этого исследования* – *обобщение, аналогия*. Сюда естественно было бы отнести и *конкретизацию*.

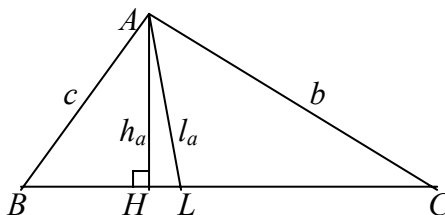
Наиболее распространенной формой обучения рефлексивному исследованию задач (РИЗ) является урок-практикум, или занятие-практикум. На уроках этого типа организуется работа по закреплению учебного материала, изложенного ранее. Специальной организационной формой обучения рефлексивному исследованию являются занятия-семинары по развитию задач. Основное отличие этих занятий состоит в том, что если на других занятиях развитие задачи выступает частью, элементом обучения, то на семинаре по развитию задач всё учебное время посвящается главным образом исследовательскому этапу рефлексивного исследования.

Приведём пример задач, которые могут быть использованы при различных формах занятий (урок-практикум, семинар по развитию задачи, самостоятельная работа).

Задача 1. Доказать, что в любом треугольнике ABC
$$h_a = \frac{2p \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}}{\cos \frac{A}{2}},$$

где h_a – высота, опущенная из вершины A, $2p$ – периметр треугольника.

Приведем решение этой задачи. Из рисунка видно:



$$a = h_a(ctgC + ctgB) = h_a \frac{\sin(C+B)}{\sin C \sin B} = h_a \frac{\sin A}{\sin C \sin B}.$$

$$b = \frac{h_a}{\sin C}; \quad c = \frac{h_a}{\sin B}.$$

$$\begin{aligned} 2p &= h_a \left(\frac{\sin A}{\sin B \sin C} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} \right) = h_a \frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\sin C \sin B} = \\ &= h_a \frac{2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} + 2 \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2}}{\sin C \sin B} = h_a \frac{2 \cos \frac{A}{2} (\cos \frac{C+B}{2} + \cos \frac{B-C}{2})}{\sin C \sin B} = \\ &= h_a \frac{4 \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}{4 \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}} = h_a \frac{\cos \frac{A}{2}}{\sin \frac{C}{2} \sin \frac{B}{2}}. \end{aligned}$$

$$\text{Следовательно, } h_a = \frac{2p \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}}{\cos \frac{A}{2}}.$$

Учитель просит исследовать решение задачи и выделить существенные факты. Ожидается, что результатом исследования будут:

а) формула

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}, \text{ где } \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ \quad (1)$$

б) заметив, что $\angle BLA = \angle C + \angle \frac{A}{2}$ из треугольника АНL выразим биссектрису l_a

также через периметр треугольника и его углы:

$$l_a = \frac{h_a}{\sin \angle BLA} = \frac{2p \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2} \sin(C + \frac{A}{2})} = \frac{4p \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}{\sin C + \sin(C + A)} = \frac{4p \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}{\sin C + \sin B}.$$

$$\text{Таким образом, } l_a = \frac{4p \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}{\sin C + \sin B}$$

Эффективным может быть рефлексивный этап исследования этой задачи. Очевидно, что из трех формул особого внимания заслуживает (1). Может быть, её полезно и запомнить.

Большое значение в обучении решению задач, как и в обучении РИЗ, имеют задачи на построение. Приведем пример такой задачи.

Задача 2. Дана вершина A треугольника ABC и две прямые m, l , которым принадлежат биссектрисы этого треугольника, не содержащие данной вершины. Постройте этот треугольник.

Эту несложную задачу можно разобрать устно. На исследовательском этапе ученики могут задать вопросы: «Как построить треугольник, если m, l -прямые, которым при-

надлежат а) высоты; б) серединные перпендикуляры; в) медианы?» (развитие задачи по линии аналогии). Небольшие затруднения, как правило, вызывает случай в).

Рассмотрение задачи 2 показывает, как значительно экономится учебное время. Действительно, если задачу оставить без рефлексивного исследования, то ученик повторяет только свойство биссектрисы и осевой симметрии, а при исследовании учебный материал значительно расширяется. Это является ещё одним мотивом для учеников в проведении РИЗ.

Задача 3. Решить уравнение:

$$\sin z \sin(60^\circ - z) \sin(60^\circ + z) = \frac{1}{8} \quad (2)$$

Решение:

$$(2) \Leftrightarrow \frac{1}{2} \sin z (\cos 2z - \cos 120^\circ) = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \sin z \cos 2z - \frac{1}{2} \sin z \cos 120^\circ = \frac{1}{8} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} (\sin(-z) + \frac{1}{4} \sin 3z + \frac{1}{4} \sin z) = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{1}{4} \sin 3z = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \sin 3z = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = (-1)^k \cdot 10^\circ + 60^\circ k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $z = (-1)^k \cdot 10^\circ + 60^\circ k, \quad k \in \mathbb{Z}.$

(Другой вариант преобразования левой части уравнения может привести к формуле синуса тройного аргумента, которую ученик должен знать до решения задачи).

Анализ решения приведет к формуле

$$4 \sin \alpha \sin(60^\circ - \alpha) \sin(60^\circ + \alpha) = \sin 3\alpha.$$

По аналогии имеет смысл проверить следующую формулу:

$$4 \cos \alpha \cos(60^\circ - \alpha) \cos(60^\circ + \alpha) = \cos 3\alpha.$$

Теперь очевидно, что справедливы следующие формулы:

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg}(60^\circ - \alpha) \cdot \operatorname{tg}(60^\circ + \alpha) = \operatorname{tg} 3\alpha \quad \text{и} \quad \operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg}(60^\circ - \alpha) \cdot \operatorname{ctg}(60^\circ + \alpha) = \operatorname{ctg} 3\alpha.$$

Используя в развитии задачи *обобщение* и *аналогию*, можно перейти к *конкретизации* и получить ряд тождеств.

$$\text{Если } \alpha = 6^\circ, \text{ то } 4 \sin 6^\circ \cdot \sin 54^\circ \cdot \sin 66^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \text{ здесь учтено, что } \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

$$\text{Если } \alpha = 10^\circ, \text{ то } \operatorname{tg} 10^\circ \cdot \operatorname{tg} 50^\circ \cdot \operatorname{tg} 70^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Если } \alpha = 5^\circ, \text{ то } 4 \cos 5^\circ \cdot \cos 55^\circ \cdot \cos 65^\circ = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{3}.$$

$$\text{Если } \alpha = 7,5^\circ, \text{ то } \operatorname{ctg} 7,5^\circ \cdot \operatorname{ctg} 52,5^\circ \cdot \operatorname{ctg} 67,5^\circ = \operatorname{ctg} 22,5^\circ = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}}.$$

Всё вышеизложенное обобщают следующие положения:

– в обучении решению задач в соответствии с сущностью РИЗ выделяются три направления: обучение поисковым, исследовательским и рефлексивным возвращением.

– в обучении поисковым возвращением важно на различном учебном материале сформировать у учащихся представление о решении и поиске решения задачи, научить

использовать пробные возвращения в качестве средства исследования математического текста, постановке вопросов, подзадач в процессе решения данной задачи.

– в обучении исследовательским возвращениям необходимо практиковать такие задания, как: составьте дополнительные задачи; самостоятельно составьте задачу, соответствующую данному способу решения; составьте задачу, где данный способ использовать можно, но решение не будет рациональным; найдите ошибку в решении. На конкретных примерах важно показать учащимся взаимосвязь поисковых и исследовательских возвращений, в частности, то, что к основной идее решения можно прийти путем обобщения, или конкретизации, или аналогии.

– в обучении рефлексивным возвращениям целесообразно использовать рефлексивные вопросы и задачи, приём самонаставления, который относится не только к работе над конкретной задачей, но и к наиболее важным актам учебной деятельности.

– в обучении РИЗ используются разнообразные методы обучения, при этом доминирующими выступают эвристический и исследовательский методы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фридман, Л.М. Методика обучения решению математических задач. //Математика в школе. – 1991. – №5. – С.59-63
2. Бескин, Н.М. Роль задач в преподавании математики. // Математика в школе. – 1992. №4-5. – С.3-4 Давыдов В.В. Теория развивающего обучения. – М., ИНТОР. – 1996.– 544 с.
3. Пойа, Д. Математическое открытие. – М., Наука, 1972. – 448 с.
4. Ольбинский, И.Б. О рефлексивном исследовании математической задачи // Народное образование в XXI веке. Тезисы научных докладов Международной юбилейной научно-практической конференции, посвященной 70-летию МПУ, 2001. – С.60-61
5. Фридман, Л.М., Турецкий Е.Н. Как научиться решать задачи. Книга для учащихся. – М., Просвещение, 1984. – 175 с.
6. Колягин, Ю.М., Оганесян В.А. Учись решать задачи. Пособие для учащихся VII-VIII классов. – М., Просвещение, 1980. – 96 с.

THE INSTRUCTION PROBLEMS OF THE REFLEX STUDYING MATHEMATICS SUMS

N. Efimova

*Moscow Regional State University
10a, Radio st., Moscow, 105005, Russia*

Abstract. One of the problem's solving mathematics sums instruction practice and theory is considered in this article (the final stage – studying, development, transformation). It draws attention to need to proceed from the mathematics sum to the teaching and studying sum as the mean of this proceed.

Keywords. Mathematics sum, reflex studying, searching stage of studying, instruction, character of the sum, essence of the sum solve, development of the sum

УДК 681.3.07

ПРИМЕНЕНИЕ МОДУЛЬНОГО ПОДХОДА В ОБУЧЕНИИ

А.Л. Бугримов, А.И. Волкова

*Московский государственный областной университет
105005, Москва, ул. Радио, 10а*

Аннотация. Анализируются достоинства и недостатки модульного подхода в обучении, место и роль в образовательных стандартах нового поколения.

Ключевые слова: модуль, модульная технология.

На сегодняшний день система обучения претерпевает значительную модернизацию, направленную на интеграцию предметов в новое качество. Идёт поиск новых педагогических технологий, чтобы отойти от традиционного обучения и воспитания и перейти к модульной системе обучения. Возникает идея целостности педагогического процесса как системы, опирающейся на теории общечеловеческих ценностей, гуманизации, личностно-ориентированного подхода, приоритета субъект-субъектных отношений.

Принципы и основы модульного обучения были сформированы в 40-50-е гг. XX в. Модульное обучение было впервые применено в сфере профессионального обучения, а также в системах повышения квалификации в университетах США, ФРГ, Англии и других развитых странах. В России с 90-х годов технологию модульного обучения начали рассматривать как реальную альтернативу традиционной системе общего среднего и высшего образования.

В основе модульного обучения лежит деятельность учащихся, позволяющая им логически правильно организовать свое обучение для освоения какой-либо раздела в модуле, распределяя время изучения той или иной темы, контролируя себя.

Важное преимущество модульного обучения - взаимосвязанность теоретических знаний и практических умений и навыков. Учащийся после изучения теоретического материала модуля закрепляет его на практике до тех пор, пока то или иное действие не будет усвоено хорошо. В процессе такого обучения проявляется взаимосвязь теории и практики.

Зарубежный и отечественный опыт указывает на перспективность принципиально другого по технологии и организации модульного обучения, характеризующегося изучением теоретического материала укрупненными блоками-модулями, алгоритмизацией учебной деятельности, завершенностью и согласованностью циклов познания и других циклов деятельности. Модульное обучение позволяет дифференцировать и индивидуализировать учебный процесс, что даёт учащимся возможность успешного саморазвития и самообразования.

В виде «технологической цепочки» можно представить систему деятельности педагога как алгоритм последовательных действий при подготовке и проведении занятия: это изучение учащихся и состояния учебно-воспитательного процесса, постановка диагностических целей и задач, определение перспективы, предвидение результатов, планирование деятельности, решение задач, организаторская деятельность, коррекция на основе диагностики, разработка программы последующих действий [1].

Впервые система модульного обучения на производстве была разработана Международной организацией труда как обобщение опыта для подготовки рабочих кадров в экономически развитых странах мира.

По сути, распространение этой системы по всему миру и стало стандартом профессионального обучения, что позволяет создать мобильность трудовых кадров и переобучение в условиях научно-технического прогресса.

Модульная система основывалась на популярной тогда индивидуализированной системе обучения, отсюда следует несколько положительных моментов: формирование промежуточных и конечных целей обучения; распределение учебного материала на отдельные разделы; индивидуальные темпы обучения учащихся; переход к изучению нового раздела, если полностью усвоен предыдущий материал; регулярный тестовый контроль знаний.

С появлением модульной системы обучения стали видны недочёты существующих методов обучения:

- направленность профессиональной подготовки на получение профессии в общем, а не на выполнение конкретной работы, что мешало устраиваться на работу выпускникам учебных заведений;
- негибкость подготовки относительно требований отдельных производств и технологических процессов;
- несоответствие подготовки довольно сильно дифференцированному общеобразовательному уровню разных групп населения;
- отсутствие учета индивидуальных особенностей учеников [5].

В отличие от традиционных форм обучения модульное обучение:

- обеспечивает обязательную проработку каждого компонента дидактической системы и наглядное их представление в модульной программе и модулях;
- предполагает четкую структуризацию содержания обучения, последовательное изложение теоретического материала, обеспечение учебного процесса методическим материалом и системой оценки и контроля усвоения знаний, позволяющей корректировать процесс обучения;
- предусматривает вариативность обучения, адаптацию учебного процесса к индивидуальным возможностям и запросам обучающихся, создает им условия для индивидуального темпа продвижения по различным вариантам модульной программы: полному, сокращенному или углубленному [4, 5].

Главным понятием в системе модульного обучения является понятие «модуль». Но оно практически не сформулировано в государственных стандартах высшего профессионального образования нового поколения. Вот почему необходимо подробно остановиться на значениях этого понятия. Согласно определению ЮНЕСКО, модуль – «изолированный обучающий пакет, предназначенный для индивидуального или группового изучения с целью приобрести одно умение или группу умений путем внимательного знакомства и последовательного изучения упражнений с собственной скоростью» [1].

Есть и другие определения данного понятия. Государственные требования к содержанию профессиональных образовательных программ содержат следующее определение: «обучающий модуль – это комплекс теоретических и практических, коллективных и индивидуальных занятий унифицированного назначения, объема и структуры, поддерживаемый рациональным учебно-методическим и информационно-техническим обеспечением».

Некоторые авторы определяют модуль как «целевой функциональный узел, в котором учебное содержание и технология овладения им объединены в систему высокого уровня целостности» [3].

Карпов В.В., и Катханов М.Н [2] под модулем понимают «организационно-методическую междисциплинарную структуру учебного материала, предусматривающую выделение семантических понятий в соответствии со структурой научного знания, структурирование информации с позиции логики познавательной деятельности будущего инженера». Они отмечают, что «в модуль могут входить подмодули по признаку его методического формирования». При междисциплинарном подходе учебные дисциплины и даже отдельные разделы и темы в них рассматриваются как части определенных ступеней иерархии профессиональной подготовки.

Перечисленные определения модуля можно систематизировать по трём аспектам:

1. Модуль как единица государственного учебного плана по специальности, представляющая набор учебных дисциплин, отвечающий требованиям квалификационной характеристики;

2. Модуль как организационно-методическая междисциплинарная структура, которая представляет набор разделов из разных учебных дисциплин, необходимых для освоения одной специальности, и обеспечивает междисциплинарные связи учебного процесса;

3. Модуль как организационно-методическая структурная единица в рамках одной учебной дисциплины, включающая в себя дидактические цели, логически завершённую учебную единицу материала, составленную с учётом внутрипредметных и междисциплинарных связей, методическое руководство и систему контроля [3].

В модульном обучении выделяются познавательные и операционные цели.

Теоретическое содержание учебного материала обеспечивает реализацию познавательных целей. Материал модулей формируется вокруг базовых понятий и методов учебной дисциплины. Модульные программы познавательного типа разрабатываются, чтобы сформировать системы фундаментальных знаний учащихся.

Операционные цели реализуются практической частью учебного содержания и предполагают формирование умений и навыков обучающихся. Содержание модуля формируется по функциональному признаку, т.е. вокруг функций, способов, приемов познавательной и профессиональной деятельности [4]. Модульные программы операционного типа чаще всего разрабатываются для профессиональной подготовки специалистов.

Главное в модульном обучении – индивидуализация обучения. По мнению Дж. Рассела, наличие выборочных модулей и их свободный выбор позволяет каждому ученику усвоить учебный материал в индивидуальном темпе. Важно, чтобы задания для учеников были настолько сложны, чтобы они работали с напряжением своих умственных способностей, но, вместе с тем, настолько сложными, чтобы не было навязчивого педагогического руководства. В потребности вольного выбора модуля из альтернативного набора скрывается одна из возможностей формирования готовности к выбору как черты личности, важной также и для формирования самостоятельности в образовании [5]. В то же время при индивидуализированной системе обучения от учащегося требуется полное усвоение учебного материала с обязательным контролем результатов после изучения каждого модуля.

Практическая и научная актуальность модульной технологии заключается в следующем:

- В данной технологии сочетаются новые подходы к обучению и традиции, накопленные с момента возникновения обычного комбинированного урока.
- Применение этой технологии помогает учителю своей постепенностью, это облегчает деятельность учащихся на этапе её освоения. Модульная технология позволяет избежать шока у учащихся, потому что постоянная рефлексия даёт информацию учителю о состоянии учебного процесса.
- Технологии предполагает такую организацию учебной деятельности ученика, при которой он сам оперирует учебным содержанием, что, конечно, ведёт к осознанному и более прочному усвоению материала.
- Технология интегрировала многое из того, что накоплено в педагогической теории и практике. Так, идея активности ученика в процессе его чётких действий в определённой логике, постоянное подкрепление своих действий на основе самоконтроля, индивидуализированный темп учебно-познавательной деятельности – всё это влияние теории программированного обучения. С теорией развивающего обучения модульную технологию связывает идея ориентировочной основы деятельности – поэтапного формирования умственных действий. Из психологии заимствован метод рефлексии.
- Модульная технология предполагает широкий диапазон внутреннего саморазвития, так как, в ней есть потенциал постоянно развивающейся системы обучения. Опыт применения такой технологии обязательно приведёт к росту компетентности и учителей, и учащихся.

ЛИТЕРАТУРА

1. Байденко В.И., Оскарссон Б. Базовые навыки (ключевые компетенции) как интегрирующий фактор образовательного процесса. //Профессиональное образование и формирование личности специалистов: Научно-методический сборник. М., 2002.
2. Карпов В.В., Катханов М.Н. Инвариантная модель интенсивной технологии обучения при многоступенчатой подготовке в вузе. М., СПб., 1992 – с.70.
3. Кукосян О.Г., Князева Г.Н. Концепция модульной технологии обучения в системе дополнительного профессионального образования: Метод. пособие. Краснодар, 2001.
4. Кускова И.Б. Принципы модульного обучения. //Компетентность - 2009 - №6.
5. Третьяков П.И., Сенновский И.Б. Технология модульного обучения. Практико – ориентированная монография. М., Новая школа, 2–е изд. 2001.
6. Модульная технология <http://mtn-module.ru/> (дата посещения: 28.11.10)

APPLICATION OF THE MODULAR APPROACH IN TRAINING

A. Bugrimov, A. Volkova

*Moscow Regional State University
10a, Radio st., Moscow, 105005, Russia*

Abstract. The advantages and lacks of the modular approach of training, place and role in the educational standards of new generation are analyzed.

Keywords: the module, modular technology.

НАУЧНАЯ ЖИЗНЬ

АНТИПОВ ИГОРЬ НИКОЛАЕВИЧ 50 ЛЕТ НАУЧНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ



Антипов Игорь Николаевич родился 4 апреля 1937 г.

После окончания московской школы № 22 стал работать в своей же школе сначала лаборантом (1954-1957 гг.), затем киномехаником (1958-1959 гг.)

В 1960 г. закончил физико-математический факультет Московского педагогического института (носящего в то время имя В.П. Потемкина) по специальности математика.

В 1961 году поступил в Вычислительный центр АН СССР: инженер-программист; младший научный сотрудник; аспирант лаборатории автоматизации программирования системный программист. Основная деятельность - разработка библиотеки стандартных программ, трансляторов с алгоритмических языков

С 1963 г. начал работать в подшефной ВЦ АН СССР школе № 52 г. Москвы преподавателем программирования, в которой проработал 20 лет.

С 1971 по 1983 г.г. работал в НИИ содержания и методов обучения АПН СССР старшим научным сотрудником в лаборатории прикладной математики; основное направление: разработка учебно-методических материалов по обучению информатике учащихся средних учебных заведений.

В работе использовал новейшие достижения в области программирования на тот период: программирование на алгоритмических языках (Фортран, Алгол-60, Амбир, АПЛ и др.), при этом программирование на АЛГОЛе в 1964/65 учебном году ученики 52 школы начали изучать раньше студентов вузов и многих вычислительных центров.

В 1971 г. защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата педагогических наук, а в 1984 г. – доктора педагогических наук.

В 1984 г. переведен в НИИ школ на должность заведующего лабораторией обучения информатике.

В течение 1984 - 1985 учебного года руководил экспериментом в двух школах г. Зеленограда по введению предмета ОИВТ и методическим центром для учителей информатики Пролетарского района г.Москвы, созданным на базе НИИ школ.

И.Н. Антипов являлся организатором и основной движущей силой Пионерского вычислительного центра, который был создан с целью популяризации основ информатики и привлечения (массового) школьников к работе с компьютерами, для чего в газете «Пионерская правда» была открыта рубрика «Пионерский вычислительный центр». На первый выпуск ПВЦ в редакцию пришло более 20 тыс. писем от школьников с выполненными заданиями. Для работы с учащимися начальных классов была осуществлена серия выпусков «Электроник в гостях у «Звездочки»», проводились выездные «открытые уроки» с учащимися 5-7 классов в школах Москвы, Калуги, Ставрополя, а также в пионерлагере «Артек». Многие школьники этим определили свой жизненный путь.

Член экспертного совета по сертификации учебных компьютерных программ при ИНИНФО (институт информатизации образования)

С 1990г. по 1993 г. - член экспертного совета по педагогике и психологии ВАК СССР.

В целом по вопросам обучения информатике опубликовано свыше 200 работ. Представление о научных интересах дают следующие труды:

Упрощенный АЛГОЛ. Под ред. А.А. Абрамова – М.: Наука, 1976

Алгоритмический язык АЛГОЛ-60. Для 9-10 кл. математических школ. Под ред. А.А. Абрамова. – М.: Просвещение, 1975.

Изучение основ информатики и вычислительной техники в средней школе (опыт и перспективы). – М.: Просвещение, 1987.

Основы программирования на АЛГОЛЕ. Под ред. А.А. Абрамова. – М.: Наука, 1980 / - М.: Наука, 1982.

Основы информатики и вычислительной техники. – М.: Высшая школа, 1991.

В апреле 1995 года в МГОУ при непосредственном участии И.Н. Антипова создана новая кафедра «Вычислительной математики и методики преподавания информатики» (ВМиМПИ), которую он и возглавил.

Многолетний труд И.Н.Антипова отмечен следующими наградами: Почетная грамота ЦК ВЛКСМ в 1985 г., Значок «Отличник народного просвещения» в 1986 г., Медаль «Ветеран труда» в 1986 г., Бронзовая медаль ВДНХ СССР в 1987 г., «Заслуженный работник высшей школы» в 2006 г.

Редакционно-издательский совет «Вестника МГОУ»
Редакционная коллегия серии «Физика-математика»
Физико-математический факультет МГОУ

НАШИ АВТОРЫ

Абдуллаев А.Р., доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики Пермского национального исследовательского политехнического университета; e-mail: h.m@pstu.ac.ru

Аленин В. А., старший преподаватель кафедры информационных технологий Димитровградского института технологии управления и дизайна (филиал Ульяновского государственного технологического института), 433513, Ульяновская область, г. Димитровград, ул. Льва Толстого, д. 83; e-mail: divo2005@inbox.ru

Баранова Г.В., Российский химико-технологический университет им. Д.И.Менделеева, 125047, Москва, Миусская пл., д.9, тел. +7 (499) 978-86-60

Беляев В.В., доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической физики Московского государственного областного университета, 105005, Москва, ул. Радио, д. 10 а; e-mail: vic_belyaev@mail.ru

Богданов Д.Л., доктор физико-математических, профессор, заведующий кафедрой общей физики Московского государственного областного университета, 105005, Москва, ул. Радио, д. 10 а; e-mail: kaf-obfiz@mgou.ru

Бугримов А.Л., доктор технических наук, профессор, декан физико-математического факультета Московского государственного областного университета, 105005, Москва, ул. Радио, 10а; e-mail: fakul-fm@mgou.ru.

Васильченко А.Г., кандидат технических наук, начальник отдела НИИ парашютостроения (г. Москва); e-mail: wag55@ma-il.ru

Волков В.Е., кандидат физико-математических наук, доцент Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ»; e-mail: vv1720@mail.ru

Волкова И.И., магистрант кафедры вычислительной математики и методики преподавания информатики Московского государственного областного университета, 105005, Москва, ул. Радио, 10 а; e-mail: fakul-fm@mgou.ru

Геворкян Э.В., доктор физико-математических, профессор кафедры общей физики Московского государственного областного университета, 105005, Москва, ул. Радио, д. 10 а; e-mail: kaf-obfiz@mgou.ru

Голикова Н.Н., доцент кафедры вычислительной математики и методики преподавания информатики Московского государственного областного университета, 105005, Москва, ул. Радио, 10 а; e-mail: nina.golikova@mail.ru

Гринберг Е.Е., доктор химических наук, профессор, заместитель директора, главный химик ФГУП «ИРЕА», 107076, Москва, Богородский вал, д.3; e-mail: ireon@mail.ru

Гусев А.Н., доктор технических наук, профессор кафедры прикладной математики и информатики Московского государственного областного университета; e-mail: angst51@rambler.ru

Дадиванян А.К., доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической физики Московского государственного областного университета, 105005, Москва, ул. Радио, д. 10а; e-mail: kaf-tfiz@mgou.ru

Долгобородов А.А., аспирант кафедры высшей математики Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ» (г. Москва); e-mail: zander@mail.ru

Дякин К.М., аспирант кафедры информационных систем Государственного университета управления (г. Москва); e-mail: dyakin@gmail.com

Жаданов В. Б., соискатель ФГУП «ИРЕА», 107076, Москва, Богородский вал; e-mail: ireon@mail.ru

Завитаев Э.В., Московский государственный университет леса, 141005, Московская обл., г. Мытищи, ул. 1-я Институтская; e-mail: d.1 asp@mgul.ac.ru

Зенкина О.Н., доцент кафедры информатики и математики Московского государственного гуманитарного университета им. М.А. Шолохова, 109240, Москва, ул. Верхняя Радищевская, 16/18; e-mail: grian7@yandex.ru

Исхакова Л.Д., Центр волоконной оптики РАН, 119333, Москва, ул. Вавилова, д.38; e-mail: idisk@yandex.ru

Киселёв Е. Г., ассистент кафедры физики Елецкого государственного университета им. И.А. Бунина; e-mail: mindliny@mail.ru

Кондаков О. В., доктор физико-математических наук, профессор Национального университета Руанды (Бутар); e-mail: mindliny@mail.ru

Королев Б.А., химический факультет Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова; e-mail: chemeduc.336@gmail.com

Куляс О. Л., доцент кафедры информационных систем и технологий Поволжского государственного университета телекоммуникаций и информатики, (г. Самара); e-mail: kulyas@psati.ru

Ладошкин М.В., кандидат физико-математических наук Мордовского государственного педагогического института им. М.Е. Евсевьева (г. Саранск), 430007, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Студенческая 11а; e-mail: michldosh@gmail.com

Леонов С.В., старший научный сотрудник ФГУП НИИ парашютостроения (г. Москва); e-mail: sertak@orc.ru

Матвеев О.А., кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа и геометрии Московского государственного областного университета, 105005, г. Москва, ул. Радио, д.10 а, e-mail: veyevtam@mail.ru

Михель В.С., ФГУП «ИРЕА», 107076, Москва, Богородский вал; 3; e-mail: ireon@mail.ru

Нелаев А.В., доцент кафедры математического анализа и геометрии Московского государственного областного университета, 105005, Москва, ул. Радио, 10а; e-mail: fakul-fm@mgou.ru.

Ноа О.В., химический факультет Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова; e-mail: chemeduc.336@gmail.com

Обыденков Ю.Н., аспирант, ассистент кафедры вычислительной математики и методики преподавания информатики Московского государственного областного университета, 105005, Москва, ул. Радио, д. 10 а; e-mail: fakul-fm@mgou.ru

Орловский Д.Г., доктор физико-математических наук, профессор Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ»; e-mail: DGOorlovskij@me-phi.ru

Паншина А.В., кандидат физико-математических наук, доцент Московского государственного технического университета им.Н.Э. Баумана; e-mail: panalv@mail.ru

Пашинина Ю.М., кафедра теоретической физики Московского государственного областного университета, 105005, Москва, ул. Радио, д. 10а; e-mail: kaf-tfiz@mgou.ru

Петрова М.А., кандидат физико-математических наук, доцент Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ», 115409, Москва, Каширское ш., 31; e-mail: MAPetrova@mephi.ru.

Плехова Э.В., доцент кафедры высшей математики, кандидат физико-математических наук Пермского национального исследовательского политехнического университета; e-mail: mc@pstu.ru

Простокишин В.М., кандидат физико-математических наук, доцент Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ»; e-mail: VMProstokishin@mephi.ru

Русаков О.В., Московский государственный областной гуманитарный институт, 164010, Московская обл., г. Орехово-Зуево, ул. Зелёная, д.22; e-mail: fakultetestmat@mail.ru

Смирнов Н.Н., аспирант кафедры теоретической физики Московского государственного областного университета, 105005, Москва, ул. Радио, д. 10 а; e-mail: kaf-tfiz@mgou.ru

Стрельникова И.Е., ФГУП «ИРЕА», 107076, Москва, Богородский вал, 3; e-mail: ireon@mail.ru

Сударикова Е.Ю., ФГУП «ИРЕА», 107076, Москва, Богородский вал, 3; e-mail: ireon@mail.ru

Сумин Е.В., кандидат физико-математических наук, доцент Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ»; e-mail: mtisch@mail.ru

Тищенко М.М., кандидат физико-математических наук, доцент Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ»; e-mail: mtisch@mail.ru

Федоров Л.И., кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информационных систем Государственного университета управления (г. Москва); e-mail: lfedorov1@yandex.ru

Чаусов Д.Н., кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической физики Московского государственного областного университета, 105005, Москва, ул. Радио, д. 10а; e-mail: d.chausov@yandex.ru

Черная Н.Г., ФГУП «ИРЕА», 107076, Москва, Богородский вал, 3; e-mail: ireon@mail.ru

Шерстюков В.Б., кандидат физико-математических наук, член-корреспондент МАНПО, доцент кафедры высшей математики Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ»; e-mail: shervb73@gmail.com

Юшканов А.А., доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической физики Московского государственного областного университета, 105005, Москва, ул. Радио, д. 10а; e-mail: kaf-tfiz@mgou.ru

Ягудина С.Ф., аспирант кафедры математического анализа Московского педагогического государственного университета; e-mail: Svetlanayagudina@yandex.ru

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

<i>Нелаев А.В.</i> Обобщенно-аналитические свойства обобщения интеграла типа Коши, ассоциированного с бикругом	3
<i>Ладошкин М.В.</i> Аналог симплицальных граней в a_∞ -случае	10
<i>Волков В.Е. Простокишин В.М., Орловский Д.Г.</i> О быстрых методах при решении разностных задач гидродинамики океанических течений	18
<i>Гусев А.Н.</i> Синтез математической модели многомерного объекта по экспериментальным данным в виде рациональной дроби	24
<i>Матвеев О.А., Панишина А.В.</i> Геометрические и алгебраические свойства систем обыкновенных дифференциальных уравнений	31
<i>Орловский Д.Г., Волков В.Е., Простокишин В.М.</i> О гладкости решения одной обратной задачи для уравнения максвелла-больцмана	40
<i>Шерстюков В.Б., Сумин Е.В., Тищенко М.М.</i> Разложение обратной величины целой функции с нулями в полуплоскости в ряд простейших дробей	43
<i>Ягудина С.Ф.</i> О корнях одного уравнения из теории роста выпуклых функций ...	49
<i>Долгобородов А.А.</i> О нулях функций из пространств со смешанной нормой	54
<i>Абдуллаев А.Р., Плехова Э.В.</i> Задача Коши для функционально-дифференциального уравнения нейтрального типа	62

ФИЗИКА

<i>Богданов Д.Л., Геворкян Э.В., Обыденков Ю.Н.</i> Возможное нарушение общепринятой гидродинамики смектиков и низкочастотная зависимость коэффициента поглощения ультразвука	69
<i>Дадиванян А.К., Пашинина Ю.М., Ноа О.В., Королев Б.А.</i> О природе гидрофобных взаимодействий	72
<i>Гринберг Е.Е., Исхакова Л.Д., Баранова Г.В., Стрельникова И.Е., Беляев В.В., Михель В.С., Черная Н.Г., Сударикова Е.Ю., Жаданов В.Б.</i> Получение оксида кремния, легированного иттербием и алюминием с использованием солей и алкоголятов ..	79
<i>Завитаев Э.В., Русаков О.В., Юшканов А.А.</i> К вопросу о применении моментного метода для расчёта электрической проводимости тонкой цилиндрической проволоки из металла	83
<i>Бугримов А.Л., Васильченко А.Г., Леонов С.В.</i> Методы инженерного расчета и математического моделирования работы парашютов	90
<i>Чаусов Д.Н., Смирнов Н.Н.</i> Моделирование поверхности углеродной нанотрубки	97
<i>Кондаков О.В., Киселёв Е.Г.</i> Математическая модель магнитооптического эффекта в кристаллах типа висмута в ультраквантовом пределе магнитного поля	102
	149

КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ

<i>Аленин В.А., Куляс О.Л.</i> Способы повышения качества оценки фундаментальной матрицы	106
<i>Дякин К.М., Федоров Л.И.</i> Объединение мнений на основе теории правдоподобия Демпстера-Шафера	116

ТЕХНОЛОГИИ И МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ

<i>Голикова Н.Н., Зенкина О.Н.</i> О формировании информационной культуры у студентов младших курсов вузов в процессе развития информатизации образования	123
<i>Птицын В.А.</i> Flash проект «русский стиль»: эффективное обучение программированию и патриотическое воспитание	128
<i>Ефимова Н.В.</i> Проблемы обучения рефлексивному исследованию математических задач	134
<i>Бугримов А.Л., Волкова А.И.</i> Применение модульного подхода в обучении	139
Антипов Игорь Николаевич. 50 лет научно-педагогической деятельности	143

НАШИ АВТОРЫ	145
--------------------------	-----

CONTENTS

MATHEMATICS

<i>Nelayev A.</i> Investigation into the generalized analitical properties of generalization of the Cauchy's integral type associated with bicircle	3
<i>Ladoshkin M.</i> Analog simplicial fases in a ∞ -case	10
<i>Volkov V., Prostokishin V., Orlovskiy D.</i> About fast aproximate methods of solving problems of ocean flows hydrodynamics	18
<i>Gusev A.</i> Synthesis of n-dimensional mathematical model for experimental data object as a rational fraction	24
<i>Matveyev O, Panshina A.</i> The geometric and algebraic properties of the systems of ordinary differetial equations	31
<i>Orlovsky D, Volkov V, Prostokishin V.</i> About smoothness of the solution of some inverse problem for maxwell-boltzmann equation	40
<i>Sherstyukov V., Sumin E., Tishchenko M.</i> Expansion of the reciprocal of an entire function with zeros in the half-plane in a series of partial fractions	43
<i>Yagudina S.</i> The roots of an equation from the theory of growth of convex functions ..	49
<i>Dolgoborodov A.</i> On the zeros of the spaces with mixed norm	54
<i>Abdullaev A., Plekhova E.</i> Cauchy problem for neutral type functional differential	150

equation	62
----------------	----

PHYSICS

<i>Bogdanov D., Gevorkian E., Obydenkov Y.</i> Possible infringement of standard hydrodynamics of smectics and low-frequency dependence of factor of absorption of ultrasound	69
<i>Dadivanyan A., Pashinina Yu., Noah O., Korolev B.</i> On the nature of hydrophobic interactions	72
<i>Grinberg E., Ischacova L., Baranova G., Strel'nikova I., Belyaev V., Mikhel' V. Chernaya N., Ssudarikova E., Zhadanov V.</i> Formation of silicon oxide doped with yttrium and aluminium and using of salts and alcoholates	79
<i>Zavitaev E., Rusakov O., Yushkanov A.</i> On application of instantaneous method for reckoning of electrical conduction of a thin cylindrical wire of metal	83
<i>Bugrimov A., Wasilchenko A., Leonov S.</i> Methods of engineering calculation and mathematical modelling of work of parachutes	90
<i>Chausov D., Smirnov N.</i> Simulation of carbon nanotube surface	97
<i>Kondakov O., Kiselev E.</i> Mathematical model of a magneto-optical effect in crystals of a kind of bismuth in the ultraquantum limit of the magnetic field	102

COMPUTER SCIENCES

<i>Alenin V., Kulyas O.</i> Methods of improve the quality estimates of fundamental matrix	106
<i>Dyakin K., Fedorov L.</i> Opinions association based on the Dempster-Shafer theory ...	116

TECHNOLOGIES AND TECHNIQUES OF TRAINING

<i>Golikova N., Zenkina O.</i> On the formation of information culture among the students of senior courses of the universities in the development process of informatization of education	123
<i>Ptitsyn V.</i> The «Russian Style» Flash project: Effective training to programming and patriotic education	128
<i>Efimova N.</i> The instruction problems of the reflex studying mathematics sums	134
<i>Bugrimov A., Volkova A.</i> Application of the modular approach in training	139
<i>Antipov I. N.</i> 50 years of scientific and pedagogical activity	143

OUR AUTHORS	145
-------------------	-----

УДК 517.55

Обобщенно-аналитические свойства обобщения интеграла типа Коши, ассоциированного с бикругом / А.В. Нелаев // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2011. №3. С.3-10.

Автор продолжает начатое исследование обобщенно-аналитических свойств обобщения интеграла типа Коши, ассоциированного с бикругом.

Библиогр.1.

УДК 512.662.1

Аналог симплицальных граней в ∞ -случае / М.В. Ладешкин // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2011. №3. С.10-18.

В предлагаемой работе рассматривается вопрос построения аналога Δ -множества в ∞ -случае. Предъявляется конструкция высших граней, доказывается теорема об их существовании на гомологиях, а также рассматривается вопрос о действии дифференциала на таком объекте. При доказательстве теорем используется техника SDR-ситуаций, сами доказательства конструктивны.

Библиогр.5.

УДК 519.632.4

О быстрых методах при решении разностных задач гидродинамики океанических течений / В.Е. Волков, В.М. Простокишин, Д.Г. Орловский // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2011. №3. С.18-23.

Рассмотрена аппроксимация трёхмерных уравнений несжимаемой жидкости, описывающих океанические течения. Аппроксимация на трёхмерную сетку в фиксированные моменты времени и в приближении «замороженных» коэффициентов обмена сводит описание течений к задаче Дирихле для разностного уравнения Лапласа в кубе. Предложен метод нахождения её решения на множестве узлов трёхмерной сетки в плоских сечениях куба с равномерной по пространству точностью. Показано, что требуемое для решения общее число арифметических действий по порядку величины совпадает с числом действий нахождения коэффициентов Фурье заданных граничных условий. Излагаются приближённые методы решения задачи Дирихле во всём кубе с оптимальным числом действий на узел сетки, приведены явные оценки получающейся при этом погрешности.

Библиогр.12.

УДК 517.518.84

Синтез математической модели многомерного объекта по экспериментальным данным в виде рациональной дроби / А.Н. Гусев // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2011. №3. С.24-31.

В статье рассматриваются варианты аппроксимации функций рациональными дробями. Показаны преимущества и ограничения аппроксимации Паде для аппроксимации аналитически заданных дифференцируемых функций. Преобразованием универсальной топологической модели, построенной на основе экспериментальных данных о параметрах многомерного объекта, получена рациональная аппроксимация рациональной дроби. Определен порядок полиномов числителя и знаменателя рациональной дроби. Структура рациональной дроби позволяет анализировать устойчивость объекта, определяя нули полинома знаменателя.

Библиогр.7.

УДК 514.77 + 512.54 + 517.91

Геометрические и алгебраические свойства систем обыкновенных дифференциальных уравнений / О.А. Матвеев, А.В. Паншина // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2011. №3. С.31-39.

Многообразиям аффинной связности и их обобщениям – многообразиям с траекториями сопоставляются широкие классы систем обыкновенных дифференциальных уравнений, свойства решений которых, в результате предлагаемой конструкции, получают точное дифференциально-геометрическое и алгебраическое описание. Выделяются случаи локально симметрических и плоских (абелевых) систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Полученные результаты используются для исследования Лагранжевых механических систем.

Библиогр.11.

УДК 517.95

О гладкости решения одной обратной задачи для уравнения максвелла-больцмана / Д.Г. Орловский, В.Е. Волков, В.М. Простокишин // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2011. №3. С.40-42.

Доказана дифференцируемость обобщенного решения обратной задачи для уравнения Максвелла-Больцмана, описывающего поведение распределения электронной компоненты разряженной плазмы в ограниченной области трехмерного пространства. Поставленная обратная задача исследуется с точки зрения абстрактных дифференциальных уравнений в банаховых пространствах с точки зрения полугруппового подхода. Задача по определению функции источника редуцируется к интегральному уравнению Вольтера второго рода, которое расширяется до системы, содержащей уравнение с производной. Исследование этой системы позволяет получить условие дифференцируемости решения обратной задачи для исходного уравнения Максвелла-Больцмана.

Библиогр.1.

УДК 517.547.2

Разложение обратной величины целой функции с нулями в полуплоскости в ряд простейших дробей / В.Б. Шерстюков, Е.В. Сумин, М.М. Тищенко // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2011. №3. С.43-49.

В работе изучается вопрос о разложении обратной величины целой функции экспоненциального типа с простыми нулями, расположенными в некоторой полуплоскости, в ряд простейших дробей. Основной результат статьи служит развитием известной теоремы М. Г. Крейна о свойствах целой функции с простыми вещественными нулями, обратная величина которой допускает разложение на простые дроби. Возможности полученного результата демонстрируются на конкретных примерах. Первый из них есть преобразование Лапласа, взятое на конечном промежутке с убывающим на нем оригиналом. Второй – регулярно встречающийся в анализе и теории вероятности интеграл ошибок.

Библиогр.8.

УДК 517.5

О корнях одного уравнения из теории роста выпуклых функций / С.Ф. Ягудина // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2011. №3. С.49-53.

Для уточнения асимптотического поведения функций в конечной точке или на бесконечности удобно применять правило Бернулли-Лопиталья, в котором поведение отношения функций определяется с помощью отношения их производных. Однако не все функции дифференцируемы, поэтому актуальным является обобщение понятия производной таким образом, чтобы новое более широкое понятие сохранило свойства классической производной, а также было применимо к изучению относительного роста не дифференцируемых функций. Одно из таких обобщений рассматривается в данной работе. В ней также доказываются формулы для корней уравнения, дающих оценки относительного роста выпуклых функций в тауберовых теоремах, в которых относительный рост обобщенных производных оценивается по относительному росту самих функций.

Библиогр.5.

УДК 517.53

О нулях функций из пространств со смешанной нормой / А.А. Долгобородов // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2011. №3. С.54-62.

Изучается поведение нулей Z_n (пронумерованных в порядке неубывания модулей) аналитических в круге $|z| < 1$ функций f классов

$$H_{p,q}^p := \left\{ f: \int_0^1 (M_p(f; 1-t)t^q) \frac{dt}{t} < \infty \right\} \quad (p \in (0, \infty], q > 0, \gamma < \infty),$$

где $M_p(f; \cdot)$ – средние Рисса. Случай $H_{p, (1+\alpha)/p}^p$ ($\alpha > -1$) – это классы Бергмана A_α^p . Для произведений $\pi_n(f) = (|z_1| \dots |z_n|)^{-1}$ при условии $\pi_n(f) = O(\eta(1/n)n^\gamma)$, где $\eta(t)$ – заданная функция, $\eta(t) \downarrow 0$ при $t \rightarrow +0$, найдены подпоследовательности индексов n_k , при которых $\pi_{n_k}(f) \approx \eta\left(\frac{1}{n_k}\right)n_k^\gamma, k \rightarrow \infty$. Получено следствие: нулевые множества классов $H_{q_1, \gamma}^p$ и $H_{q_2, \gamma}^p$ при $q_1 \neq q_2$ различны.

Библиогр.3.

УДК 517.929

Задача Коши для функционально-дифференциального уравнения нейтрального типа / А.Р. Абдуллаев, Э.В. Плехова // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2011. №3. С.62-68.

Рассматривается задача Коши для системы квазилинейных дифференциальных уравнений нейтрального типа. Получены достаточные условия существования решения без предположения однозначной разрешимости соответствующей линейной краевой задачи. На нелинейную часть системы уравнений налагается условие типа «подлинейного» роста. Для доказательства основного утверждения применяется доказанная в работе вспомогательная теорема существования для квазилинейного операторного уравнения с сюръективным, но необратимым линейным оператором.

Библиогр.8.

УДК 532.783:534.6

Возможное нарушение общепринятой гидродинамики смектиков и низкочастотная зависимость коэффициента поглощения ультразвука / Д.Л. Богданов, Э.В. Геворкян, Ю.Н. Обыденков // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2011. №3. С.62-72.

Показано, что в частотном интервале 95-760 кГц эффект возможного нарушения общепринятой гидродинамики смектических жидких кристаллов, как правило, не наблюдаем. Отклонения от квадратичной частотной зависимости коэффициента поглощения в ультразвуковых экспериментах определяются процессами акустической релаксации. Эта зависимость не является ни универсальной, ни характерной только для смектической А фазы. Кроме того, её характер меняется при изменении ориентации волнового вектора относительно индукции магнитного поля.

Ил.2. Библиогр.2.

УДК 541.64:539.2:536.7

О природе гидрофобных взаимодействий / А.К. Дадиванян, Ю.М. Пашина, О.В. Ноа, Б.А. Королев // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2011. №3. С.72-78.

Показано, что учет ближнего ориентационного порядка позволяет объяснить природу гидрофобных взаимодействий в водных растворах бензола и предсказать существование нижней критической температуры растворения вблизи критической температуры воды. Определен вклад ближнего ориентационного порядка в парциальную теплоемкость углеводородов при растворении в воде. Показано, что полученные результаты находятся в согласии с экспериментальными данными.

Ил.4. Табл.1. Библиогр.18.

УДК 666.3-492.2:546.21`621`641:621

Получение оксида кремния, легированного иттербием и алюминием с использованием солей и алкоголятов / Е.Е.Гринберг, Л.Д.Исхакова, Г.В.Баранова, И.Е.Стрельникова, В.В.Беляев, В.С.Михель, Н.Г.Черная, Е.Ю.Сударикова, В.Б.Жаданов // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2011. №3. С.79-83.

Рассмотрено получение порошков оксида кремния, легированного оксидами алюминия и иттербия в системе «тетраэтоксисилан – алкогольаты алюминия – соли иттербия» с помощью гибридного золь-гель процесса. Выявлена возможность получения порошков в равномерном распределении легирующих элементов, что фазообразование проходит согласно диффузионному механизму, аналогично твердофазному синтезу, но на молекулярном уровне.

Ил.1. Табл.1. Библиогр.10.

УДК 537.311.31

К вопросу о применении моментного метода для расчёта электрической проводимости тонкой цилиндрической проволоки из металла / Э.В. Завитаев, О.В. Русаков, А.А. Юшканов // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2011. №3. С.83-89.

Впервые моментным методом рассчитана электрическая проводимость тонкой цилиндрической проволоки из металла. В качестве граничного условия задачи принято условие зеркально-диффузного отражения электронов от внутренней поверхности проволоки. Проведено обсуждение полученных результатов.

Библиогр.10.

УДК 378.146

Методы инженерного расчета и математического моделирования работы парашютов / А.Л. Бугримов, А.Г. Васильченко, С.В. Леонов // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2011. №3. С.90-96.

Мягкооболочечные конструкции представляют собой активно развивающийся тип технических изделий, которые находят новое широкое применение в инженерной практике. Такие изделия производятся из тканей, ламинатов, лент и шнуров, которые по прочности приблизились к металлам, но существенно легче традиционных конструкционных материалов. Необходимо создание адекватных методов расчета таких конструкций, опережающее математическое моделирование их функционирования в реальных условиях. Значительный опыт инженерного расчета и математического моделирования мягкооболочечных конструкций накоплен в парашютостроении, где такие разработки проводятся с 50-х годов прошлого века. В статье анализируется современное состояние моделирования в парашютостроении и ставится проблема создания нового поколения расчетных методов на основе уравнений Лагранжа второго рода.

Ил.2. Библиогр.15.

УДК 539.61:539.196.3:539.1.072

Моделирование поверхности углеродной нанотрубки / Д.Н. Чаусов, Н.Н. Смирнов // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2011. №3. С.97-101.

Проводится моделирование углеродной нанотрубки типа «кресла» поверхностью «идеального многогранника», и предложен метод расчета координат атомов с возможностью варьирования диаметра. Показано, что молекуле дифенила, инкапсулированной в углеродную нанотрубку, энергетически выгодно плотно прилегать к ее стенкам.

Ил.2. Библиогр.20.

УДК 549:53

Математическая модель магнитооптического эффекта в кристаллах типа висмута в ультраквантовом пределе магнитного поля / О.В. Кондаков, Е.Г. Киселёв // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2011. №3. С.102-105.

В статье моделируется квантовомеханическая система, состоящая из висмута и сплавов висмут-сурьма и помещённая в магнитное поле до 25 Тл. Электронный энергетический спектр кристаллов расквантован, а ультраквантовый предел достигается при магнитном поле 2 Тл. Прохождение инфракрасного излучения с энергией кванта 119 мЭв приводит к межзонным и внутризонным переходам электронов на уровни Ландау зоны проводимости. Численные результаты показали хорошее согласие с экспериментальными.

Ил.2. Библиогр.4.
УДК 004.925.84

Способы повышения качества оценки фундаментальной матрицы / В.А. Аленин, О.Л. Куляс // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2011. №3. С.106-116.

Фундаментальная матрица (ФМ) одна из обязательных составляющих алгоритмов реконструкции трехмерной сцены по набору изображений. Точность оценки ФМ отражается на точности вычислений многих других компонентов алгоритмов реконструкции, получаемых с помощью ФМ, таких как матрицы проекций, внешние параметры камеры (выражаемые матрицей вращения R и вектором переноса t) и т.д. В итоге, точность расчетов всех этих компонент влияет на точность реконструкции модели. В статье будет представлен набор методов, которые в совокупности, позволяют повысить точность расчета ФМ, в условиях присутствия в исходных данных ошибок измерений.

Ил.7. Табл.2. Библиогр.15.

УДК 37.016:51

Объединение мнений на основе теории правдоподобия демпстера-шафера / К.М. Дякин, Л.И. Федоров // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2011. №3. С.116-122.

На основе теории правдоподобия Демпстера-Шафера предложен алгоритм классификации в задаче обработки несовершенных данных с плохо разделяемыми классами, решается задача согласования мнений в различных ситуациях.

Библиогр.6.

УДК 004:378

О формировании информационной культуры у студентов младших курсов вузов в процессе развития информатизации образования / Н.Н. Голикова, О.Н. Зенкина // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2011. №3. С.125-130.

Основой развития современного информационного общества являются информационные процессы, в которых широкое применение находят информационно-коммуникационные технологии. Внедрение и использование информационно-коммуникационных технологий практически во всех сферах деятельности человека привело к возникновению и развитию глобального процесса информатизации, что в свою очередь привело к развитию информатизации образования. Информатизация образования является важнейшим условием реформирования и модернизации системы образования. Средняя и высшая школы обучают и воспитывают полноценных членов общества, которые не только формируют информационную среду, но и им самим предстоит жить и работать в этой новой среде. Поэтому, как никогда остро проблема формирования информационной культуры у подрастающего поколения.

Библиогр.9.

УДК 681.3.07

Flash проект «Русский стиль»: эффективное обучение программированию и патриотическое воспитание / В.А. Птицын // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2011. №3. С.135-140.

Рассматриваются этапы развития проекта, реализующего целостный подход к обучению программированию и патриотическому воспитанию. На всех этапах осуществлялось обучение программированию интерактивной графики на языке Action Script A. Flash. Однако итоговые задания, носящие историко-культурный характер, были различными. Показывается взаимосвязь между характером итоговых заданий и эффективностью обучения программированию.

Ил.3. Библиогр.7.

УДК 681.3.07

Проблемы обучения рефлексивному исследованию математических задач / Н.В. Ефимова // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2011. №3. С.136-140.

В статье рассматривается одна из проблем теории и практики обучения решению математических задач, связанная с заключительным этапом решения – с её исследованием, развитием, преобразованием. Отмечается необходимость перехода от математической задачи к учебной, а также рассматривается исследование задачи как средство этого перехода.

Ил.1. Библиогр.6.

УДК 681.3.07

Применение модульного подхода в обучении / А.Л. Бугримов, А.И. Волкова // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2011. №3. С.141-144.

Анализируются достоинства и недостатки модульного подхода в обучении, место и роль в образовательных стандартах нового поколения.

Библиогр.6.

ПРАВИЛА

подготовки рукописей, представленных для опубликования в журнале
«Вестник Московского государственного областного университета.

Сер. Физика - математика»

Для публикации научных работ в выпусках серии «Вестник МГОУ» принимаются статьи на русском языке. Публикуются научные материалы преимущественно докторантов, аспирантов, соискателей, преподавателей ВУЗов, докторов и кандидатов наук.

Требования к оформлению статей. Статья должна быть представлена:

в текстовом варианте (текст статьи должен быть подписан всеми авторами);

в виде документа MS Word 2003 (с расширением doc);

в виде файла в формате ttf;

Файл должен содержать построчно:

На русском языке	УДК (в верхнем левом углу первого листа рукописи) НАЗВАНИЕ СТАТЬИ – прописными буквами Фамилия, имя, отчество Полное наименование организации (в скобках – сокращенное), почтовый адрес Должность (другие сведения, например, E-mail, телефон) Аннотация (1 абзац до 400 символов) под заголовком «АННОТАЦИЯ» Ключевые слова
На английском языке	НАЗВАНИЕ СТАТЬИ – прописными буквами Фамилия, инициалы Полное наименование организации, почтовый адрес Аннотация (1 абзац до 400 символов) под заголовком «Abstract» Ключевые слова (Key words)
На русском языке	Объем статьи ограничен темя уровнями: а) 12 страниц с числом иллюстраций до пяти (к этим статьям предъявляются повышенные требования); б) 6 страниц с числом иллюстраций до трех (содержатся основные результаты без излишних деталей выводов и доказательств); в) 4 страницы с числом иллюстраций до двух (выходят в разделе краткие сообщения вне очереди). Список использованной литературы под заголовком «ЛИТЕРАТУРА»

Формат страницы – А4, книжная ориентация. Поля – 2,5 см. Шрифт Times New Roman Cyrillic, цвет шрифта черный, размер 12 пикселей, междустрочный интервал – полуторный.

Запрещены специфические действия над текстом и встраиваемые коды: уплотнение интервалов, использование цветowych заливок, «красные строки», центрирование, табуляция, отступы, переносы в словах (делаемые автором), ссылки, гиперссылки, сноски (лучше их оформлять в виде примечаний, замечаний и т.п.). Не допускаются сокращения слов, имен, названий, за исключением общепринятых (и оговоренных).

Формулы нумеруются (справа) только те, на которые в тексте имеются ссылки.

Рисунки и таблицы допускаются в том случае, если описать процесс в текстовой форме невозможно. В этом случае каждый из объектов не должен превышать указанные размеры страницы, а шрифт в нем – 12 пикселей. Возможно использование только вертикальных таблиц и рисунков. Запрещены цветowe заливки, применение «фонов».

Рисунки, схемы, графики выполняются на отдельных листах в формате, обеспечивающем ясность передачи деталей. Места расположения иллюстраций в тексте должны быть указаны простым карандашом на полях. На обороте иллюстрации должны быть написаны фамилия ав-

тора и название статьи. Текст к иллюстрациям, а также таблицы следует поместить на отдельных страницах. Все рисунки, схемы, графики, таблицы должны иметь названия.

Все формулы должны быть созданы с использованием компонента Microsoft Equation, (MathType 4.0). Размер шрифта также 12 пикселей. Формула создается однократным запуском компонента Microsoft Equation (MathType 4.0). Запрещается создавать составные формулы! Небольшие строчные фрагменты типа ΔU_{ij} или $C^{(m)} = (c_{1m}, c_{1m}, \dots)^T$ следует набирать обычным способом в латинице, используя средства панели инструментов: изменение шрифта на курсив, написание верхних и нижних индексов, а также вставку символов. При этом следует обратить внимание на написание цифр, скобок, операторов и наименований функций (Δ , $\sin$, $\cos$, ...) прямым шрифтом. Хорошее представление об оформлении математических текстов дает чтение научных журналов Российской академии наук физико-математического направления, классических учебников по физике и математике для высших учебных заведений.

Абзацы должны быть отделены друг от друга пустой строкой (дополнительным «Enter»).

Список литературы должен содержать библиографические сведения о всех публикациях, упоминаемых в статье, и не должен содержать указаний на работы, на которые в тексте нет ссылок. Располагать публикации в списке следует по алфавиту, вначале следует приводить отечественные публикации, затем – иностранные. Список литературы приводится на отдельном листе с обязательным указанием следующих данных: для книг (монография, сборник и т.д.) – фамилия (после фамилии ставится запятая), инициалы автора, название книги, место издания (город), издательство, год издания; для журнальных статей – фамилия и инициалы автора, название статьи, название журнала, год издания, том, номер, выпуск, страницы (первая и последняя). **Обращаем Ваше внимание!** С 01.07.2004 введен новый стандарт ГОСТ 7.1-2003 «Библиографическая запись. Библиографическое описание. Общие требования и правила составления». Наиболее распространенные примеры:

1. Иванов, И.И. Название книги / И.И. Иванов. - М.: Наука, 2009. – 205 с.
2. Иванов, И.И. Название книги / И.И. Иванов, П.М. Петров, К.Л. Данилов. - М.: Наука, 2009. – 205 с.
3. Иванов, И.И. Название книги / И.И. Иванов [и др. (если 4 автора и более)]. - М.: Наука, 2009. – 205 с.
4. Название книги / И.И. Иванов [и др.], под ред. И.И. Иванова. - М.: Наука, 2009. – 205 с.
5. Иванов, И.И. Название статьи / И.И. Иванов, П.М. Петров, К.Л. Данилов // Название сборника. - М.: Механика, 2009. – С.51-59.
6. Иванов, И.И. Название статьи / И.И. Иванов, П.М. Петров, К.Л. Данилов // Название журнала. – 2009. - №2. - С.51-59.

Ссылки на неопубликованные работы не допускаются.

Редакционная коллегия оставляет за собой право на редактирование статей, хотя с точки зрения научного содержания авторский вариант сохраняется. Статьи, не соответствующие указанным требованиям, решением редакционной коллегии серии не публикуются и не возвращаются (почтовой пересылкой).

В случае принятия статьи, условия опубликования оговариваются с ответственным редактором.

Ответственный редактор серии «Физика-математика» декан физико-математического факультета, доктор технических наук, профессор Бугримов Анатолий Львович.

Адрес редколлегии серии «Физика-математика» «Вестника МГОУ»: 105005, Москва, ул. Радио, д.10-а, комн. 36. Тел. (495) 261-09-48