

ISSN 2072-8549



Вестник

МОСКОВСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
ОБЛАСТНОГО
УНИВЕРСИТЕТА

Серия

ФИЗИКА-
МАТЕМАТИКА

2011 / № 2

МАТЕМАТИКА

УДК 517.98

**ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ КОНЕЧНОЙ Λ -ВАРИАЦИИ
И ОПЕРАТОРЫ СУПЕРПОЗИЦИИ**

Е.М. Громов, О.М. Солычева, В.В. Тютин

*Национальный исследовательский университет – Высшая школа экономики
в Нижнем Новгороде
603155, Нижний Новгород, 25/12*

Аннотация. Работа посвящена актуальной тематике описания операторов суперпозиции, действующих на функциональных пространствах конечной вариации. В ней представлены результаты, развивающие и обобщающие недавние исследования Я. Матковского, Я. Мища, Д. Уотермана, В. В. Чистякова: введено понятие полной двумерной Λ -вариации функций двух действительных переменных, показано, что класс Уотермана функций двух переменных конечной полной Λ -вариации образует банахово пространство. Также приведено описание генератора оператора суперпозиции типа Немыцкого, действующего на пространстве Уотермана и удовлетворяющего условию Липшица.

Ключевые слова: функции двух переменных, Λ -вариация Уотермана, оператор суперпозиции (Немыцкого), условие Липшица.

Пусть $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ – некоторый прямоугольник (область определения функций), где $a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2) \in R^2$, такие, что $a_1 \leq b_1, a_2 \leq b_2$. Будем писать $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$ для $x, y \in R^2$ и считать, что $x \leq y$, если $x_1 \leq y_1, x_2 \leq y_2$. Обозначим через R^I множество всех функций, действующих из I в R . Далее, пусть $\Lambda = \{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty} \subset (0, \infty)$ – неубывающая последовательность чисел, для которой ряд $\sum_{i=1}^{\infty} 1/\lambda_i^2$ расходится. Такую последовательность назовем **последовательностью Уотермана**.

Определим функцию $f(\cdot, a_2): [a_1, b_1] \rightarrow R$ по правилу: $f(\cdot, a_2)(t) = f(t, a_2), a_1 \leq t \leq b_1$. Для такой функции (**обычная**) Λ -вариация в смысле Уотермана [7, 37] на отрезке $[a_1, b_1]$ определяется правилом:

$$V_{\Lambda}(f(\cdot, a_2)) = \sup \sum_{i=1}^m \frac{|f(\beta_i, a_2) - f(\alpha_i, a_2)|}{\lambda_{\sigma(i)}},$$

где супремум берется по всем $m \in N$, всем наборам отрезков $[\alpha_i, \beta_i] \subset [a_1, b_1]$, $i = 1, \dots, m$, таким, что $a_1 \leq \alpha_1 < \beta_1 \leq \alpha_2 < \beta_2 \leq \dots \leq \alpha_m < \beta_m \leq b_1$ и всем перестановкам $\sigma: \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$. Аналогичным образом определяется Λ -вариация $V_\Lambda(f(a_1, \cdot))$ функции $f(a_1, \cdot)(s) = f(a_1, s)$, $a_2 \leq s \leq b_2$.

Для функции двух переменных $f \in R^I$ **двумерной Λ -вариацией в смысле Уотермана** [4, 399] на I называется выражение

$$V_{2,\Lambda}(f, I) = \sup \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{|f(\alpha_i, \gamma_j) + f(\beta_i, \delta_j) - f(\alpha_i, \delta_j) - f(\beta_i, \gamma_j)|}{\lambda_{\sigma(i)} \lambda_{\nu(j)}},$$

где супремум берется по всем парам $(m, n) \in N^2$, всем наборам отрезков $[\alpha_i, \beta_i] \subset [a_1, b_1]$, $i = 1, \dots, m$, таким, что $a_1 \leq \alpha_1 < \beta_1 \leq \alpha_2 < \beta_2 \leq \dots \leq \alpha_m < \beta_m \leq b_1$, всем наборам отрезков $[\gamma_j, \delta_j] \subset [a_2, b_2]$, $j = 1, \dots, n$, таким, что $a_2 \leq \gamma_1 < \delta_1 \leq \gamma_2 < \delta_2 \leq \dots \leq \gamma_n < \delta_n \leq b_2$ и всем перестановкам $\sigma: \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$ и $\nu: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$.

Введем понятия **полной Λ -вариации Уотермана** для функции $f \in R^I$ ([5, 205], $\lambda_i = 1$, $i \in N$) правилом

$$TV_\Lambda(f, I) = V_\Lambda(f(\cdot, a_2)) + V_\Lambda(f(a_1, \cdot)) + V_{2,\Lambda}(f, I),$$

и пространства Уотермана функций конечной полной Λ -вариации

$$\Lambda BV(I) = \{f: I \rightarrow R \mid TV_\Lambda(f, I) < \infty\}.$$

Известно [2, 104], что в случае, когда $\lambda_i = 1$ для всех $i \in N$, пространство $\Lambda BV(I) = BV(I)$ функций конечной вариации в смысле Харди – Витали – Краузе, является банаховой алгеброй. Для рассматриваемого случая λ_i , являющихся членами последовательности Уотермана, справедлив следующий результат:

Теорема 1. Множество $\Lambda BV(I)$ является банаховым пространством относительно обычных поточечных операций и нормы:

$$\|f\| = |f(a)| + TV_\Lambda(f, I), \quad f \in \Lambda BV(I). \quad (1)$$

Всюду ниже **оператором суперпозиции (типа Немыцкого)**, порожденным **генератором** $h: I \times R \rightarrow R$, называется оператор, определенный для всех $x \in I$ и $f \in R^I$ правилом:

$$(Hf)(x) \equiv H(f)(x) = h(x, f(x)). \quad (2)$$

В [3, 411] и [1, 456] получено представление липшицева оператора суперпозиции, действующего в пространствах $\Lambda BV(I)$ вещественнозначных функций одной переменной и функций одной переменной со значениями в метрических полугруппах и абстрактных выпуклых конусах соответственно. В [2, 108] описан липшицев оператор суперпозиции, действующий в пространстве $BV(I)$ Харди – Витали – Краузе функций двух переменных (случай $\lambda_i = 1$ для всех $i \in N$).

В настоящей работе представлено обобщение результатов [3] и [2] на случай пространства $\Lambda BV(I)$ функций двух вещественных переменных, а именно представлено необходимое условие на генератор оператора суперпозиции, при котором последний является липшицевым.

Для заданной функции $f \in \Lambda BV(I)$ определим ее левую регуляризацию $f^* : I \rightarrow R$ правилом [2, 109]:

$$f^*(x_1, x_2) = \begin{cases} \lim_{(y_1, y_2) \rightarrow (x_1-0, x_2-0)} f(y_1, y_2), & \text{если } a_1 \leq x_1 \leq b_1 \text{ и } a_2 \leq x_2 \leq b_2, \\ \lim_{(y_1, y_2) \rightarrow (x_1-0, a_2+0)} f(y_1, y_2), & \text{если } a_1 \leq x_1 \leq b_1 \text{ и } x_2 = a_2, \\ \lim_{(y_1, y_2) \rightarrow (a_1+0, x_2-0)} f(y_1, y_2), & \text{если } x_1 = a_1 \text{ и } a_2 \leq x_2 \leq b_2, \\ \lim_{(y_1, y_2) \rightarrow (a_1+0, a_2+0)} f(y_1, y_2), & \text{если } x_1 = a_1 \text{ и } x_2 = a_2. \end{cases}$$

Запись $(y_1, y_2) \rightarrow (x_1-0, x_2-0)$ следует понимать так, что $(y_1, y_2) \in I$, $y_1 < x_1$, $y_2 < x_2$ и $(y_1, y_2) \rightarrow (x_1, x_2)$ в R^2 , и аналогично для остальных трех пределов.

Функцию $f : I \rightarrow R$ назовем непрерывной слева, если $\lim_{(y_1, y_2) \rightarrow (x_1-0, x_2-0)} f(y_1, y_2) = f(x_1, x_2)$ для всех $x_1 \in (a_1, b_1]$ и $x_2 \in (a_2, b_2]$, и через $\Lambda BV^*(I)$ обозначим подмножество $\Lambda BV(I)$ всех непрерывных слева на $(a_1, b_1] \times (a_2, b_2]$ функций.

Теорема 2. Если оператор H , определенный согласно (2), действует из $\Lambda BV(I)$ в себя и является липшицевым в смысле нормы (1) этого пространства, то найдутся две функции $h_0, h_1 \in \Lambda BV^*(I)$ такие, что имеет место представление [6, 155]:

$$h^*(x, u) = h_0(x) + h_1(x) \cdot u \text{ для всех } x \in I \text{ и } u \in R,$$

где $h^*(x, u)$ – левая регуляризация функции $h(x, u)$, определенная для каждого фиксированного $u \in R$.

Замечание. В общем случае функция h^* в полученном представлении не может быть заменена функцией h , что показано в [6, 157] для случая функций одной переменной и в [2, 109] для случая пространства Харди функций двух переменных.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сольчева, О.М. Липшицевы операторы суперпозиции на метрических полугруппах и абстрактных выпуклых конусах отображений конечной Λ -вариации // Сиб. матем. журн. 2006. Т. 47. №3. С. 649-664.

2. Chistyakov, V.V. Superposition operators in the algebra of functions of two variables with finite total variation // *Monatsh. Math.* 2002. V. 137. №2. P. 99-114.
3. Chistyakov, V.V., Solycheva O.M. Lipschitzian Operators of Substitution in the Algebra ΛBV // *J. of Diff. Equations and Appl.* 2003. V. 9. №3/4. P. 407-416.
4. Dyachenko, M.I., Waterman D. Convergence of double Fourier series and W -classes // *Trans. Amer. Math. Soc.* 2004. V. 357. №1. P. 397-407.
5. Hildebrandt, T.H. Introduction to the theory of integration. New York and London: Academic press, 1963. 361 p.
6. Matkowski, J., Miś J. On a characterization of Lipschitzian operators of substitution in the $BV[a, b]$ // *Math. Nachr.* 1984. V. 117. P. 155-159.
7. Waterman, D. On Λ -bounded variation // *Studia Math.* 1976. V. 57. №1. P. 33-45.

FUNCTIONS OF TWO VARIABLES OF FINITE Λ -VARIATION AND SUPERPOSITION OPERATORS

E. Gromov, O. Solycheva, V. Tyutin

*National Research University – Higher School of Economics,
Nizhny Novgorod
25/12, Bol. Pecherskaya, Nizhny Novgorod, 603155, Russia*

Abstract. Our paper is devoted to the description of the superposition operators which map on function spaces of finite variation. We present the results which develop and generalize the recent researches by J. Matkowski, J. Mis, D. Waterman and V.V. Chistyakov: we introduce the notion of a total (two-dimensional) Λ -variation for functions of two real variables and show that the Waterman class of these functions with finite total variation is a Banach space. Also, we give the description of the Lipschitzian superposition (Nemytskii) operator mapping the Waterman class into itself.

Keywords: functions of two variables, Waterman Λ -variation, Nemytskii superposition operator, Lipschitz condition.

УДК 517.9

ОЦЕНКИ ФУНКЦИИ ГРИНА, ПОСТРОЕННОЙ ПО ПОЛУГРУППЕ ОПЕРАТОРОВ

М.Ю. Романова

*Воронежский государственный университет
394006, Воронеж, Университетская пл., 1*

Аннотация. В статье рассматривается сильно непрерывная полугруппа операторов, которая является гиперболической (или допускает экспоненциальную дихотомию). Для исследуемой полугруппы операторов строится функция Грина, которая играет важную роль в представлении слабых ограниченных решений дифференциальных

уравнений. Используя частотную характеристику оператора и интегральный критерий качества дихотомии, в статье получены оценки функции Грина, построенной по гиперболической полугруппе операторов. Результаты данной статьи получены с существенным использованием методов гармонического анализа.

Ключевые слова: гиперболическая полугруппа операторов, экспоненциальная дихотомия, функция Грина.

Пусть H - комплексное гильбертово пространство, $EndH$ - банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в H .

Пусть линейный оператор $A: D(A) \subset H \rightarrow H$ является генератором (инфинитезимальным оператором) сильно непрерывной полугруппы операторов, $T: \mathbb{R}_+ = [0, \infty] \rightarrow EndH$, т.е. полугруппы класса C_0 [9].

Обозначим через $R(\cdot, A): \rho(A) \rightarrow EndH$ резольвенту оператора A , т.е. $R(\lambda, A) = (A - \lambda I)^{-1}$, $\lambda \in \rho(A)$, где $\rho(A) = \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$ - его резольвентное множество, символом $\sigma(A)$ обозначается спектр оператора A и I - тождественный оператор в H .

Полугруппа операторов $T: \mathbb{R}_+ \rightarrow EndH$ называется *гиперболической* (или допускающей экспоненциальную дихотомию), если выполнено условие

$$\sigma(T(1)) \cap T = \emptyset \quad (1)$$

где $\sigma(T(1))$ - спектр оператора $T(1)$ и $T = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$.

Необходимые и достаточные условия гиперболичности групп и некоторых классов полугрупп операторов были получены в статье [2].

Далее в статье будем рассматривать гиперболическую полугруппу $T: \mathbb{R}_+ \rightarrow EndH$. Условие гиперболичности (1) полугруппы T гарантирует, что выполнено свойство

$$\sigma(A) \cap (i\mathbb{R}) = \emptyset \quad (2)$$

и величина

$$\gamma(A) = \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \|R(i\xi, A)\| < \infty. \quad (3)$$

Соответствующий результат содержится в статье [3].

Более того, в [3] доказано, что совместное выполнение условий (2), (3) эквивалентно условию (1).

Пусть выполнено условие гиперболичности (1) полугруппы T . Тогда спектр оператора $T(1)$ представим в виде

$$\sigma(T(1)) = \sigma_{int} \cup \sigma_{out}, \quad (4)$$

где

$$\sigma_{int} = \{\lambda \in \sigma(T(1)) : |\lambda| < 1\},$$

$$\sigma_{out} = \{\lambda \in \sigma(T(1)) : |\lambda| > 1\}.$$

Поэтому гильбертово пространство H представимо в виде прямой суммы

$$H = H_{int} \oplus H_{out}$$

замкнутых подпространств $H_{int} = \text{Im}P_{int}$, $H_{out} = \text{Im}P_{out}$, $P_{out} = I - P_{int}$ (образы проекторов), где проектор Рисса P_{int} построен по спектральной компоненте σ_{int} , т.е. определяется формулой

$$P_{int} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} R(\lambda, (T(1))) d\lambda. \quad (5)$$

Лемма 1. Подпространства H_{int} , H_{out} инвариантны относительно операторов $T(\tau)$, $\tau \geq 0$.

Доказательство. Используя формулу (5), получаем равенства

$$\begin{aligned} T(\tau)P_{int} &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} T(\tau)R(\lambda, (T(1))) d\lambda = \\ &= \left(-\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} R(\lambda, (T(1))) d\lambda\right)T(\tau) = P_{int}T(\tau), \tau \geq 0 \end{aligned}$$

означающие перестановочность операторов $T(\tau)$, $\tau \geq 0$ с проектором P_{int} (и, следовательно, с P_{out}). При этом используется факт перестановочности оператора $T(\tau)$ и резольвенты [9, 355]. Поэтому подпространства H_{int} , H_{out} инвариантны относительно операторов $T(\tau)$, $\tau \geq 0$. Лемма доказана.

Доказанная лемма позволяет рассмотреть две полугруппы операторов

$$T_{int} : \mathbb{R}_+ = [0, \infty] \rightarrow \text{End}H_{int}, T_{out} : \mathbb{R}_+ = [0, \infty] \rightarrow \text{End}H_{out},$$

$$T_{int}(t) = T(t)|_{H_{int}}, T_{out}(t) = T(t)|_{H_{out}}, t \geq 0.$$

Следовательно, $T(t) = T_{int}(t) \oplus T_{out}(t)$, $t \geq 0$, относительно разложения $H = H_{int} \oplus H_{out}$.

Поскольку $\sigma(T_{int}(1)) = \sigma_{int}$, $\sigma(T_{out}(1)) = \sigma_{out}$, то $r(T_{int}(1)) < 1$, $T_{out}(1)$ - непрерывно обратимый оператор, и $r(T_{out}(1)^{-1}) < 1$ (здесь и далее через $r(B)$ обозначен спектральный радиус оператора B). Из этих оценок следует (см. [3]) существование постоянных $M_1, M_2 \geq 1, \gamma_1, \gamma_2 > 0$, таких, что

$$\|T_{int}(t)\| \leq M_1 e^{-\gamma_1 t}, \|T_{out}(t)^{-1}\| \leq M_2 e^{-\gamma_2 t}, t \geq 0. \quad (6)$$

При этом полугруппа $T_{out}(t), t \geq 0$, допускает расширение на R до группы операторов, обозначаемой тем же символом T_{out} (полагается $T_{out}(t) = T_{out}(-t)^{-1}, t < 0$ [3]).

Для гиперболической полугруппы операторов $T : R_+ = [0, \infty] \rightarrow EndH$ определим функцию $G = G_A : R \rightarrow EndH$ следующим образом:

$$G_A(\tau) = \begin{cases} -T(\tau)P_{int}, & \tau \geq 0; \\ T_{out}(-\tau)^{-1}P_{out}, & \tau < 0. \end{cases}$$

Непосредственно из определения функции G_A и оценок (6) следует

Лемма 2. *Имеет место оценка*

$$\|G_A(\tau)\| \leq M_0 e^{-\gamma_0|\tau|}, \tau \in R \quad (7)$$

где $M_0 \geq 1, \gamma_0 > 0$ - некоторые постоянные.

Оценка (7) отмечалась, например, в [3], [1], [10].

Построенная (в условиях гиперболичности полугруппы T) функция G_A играет важную роль в представлении слабых ограниченных решений дифференциального уравнения

$$\dot{x} = Ax + f(t), t \in R, \quad (8)$$

где функция f принадлежит банахову пространству $C_b(R, H)$ непрерывных ограниченных функций, определённых на R и со значениями в H с нормой $\|x\| = \sup_{t \in R} \|x(t)\|, x \in C_b(R, H)$.

Под *слабым решением* уравнения (8) понимается непрерывная функция $x : R \rightarrow H$, такая, что для всех $s < t$ из R выполняются равенства:

$$x(t) = T(t-s)x(s) - \int_s^t T(t-\tau)f(\tau)d\tau.$$

В статье [1] установлено, что уравнение (8) имеет единственное (слабое) решение $x \in C_b(R, H)$ для любой функции $f \in C_b(R, H)$, и оно представимо в виде

$$x(t) = \int_R G_A(t-\tau)f(\tau)d\tau, t \in R. \quad (9)$$

По этой причине функцию G_A называют функцией Грина [5] (G_A - ядро интегрального оператора, являющегося обратным к дифференциальному $L = -\frac{d}{dt} + A$, рассматриваемому в пространстве $C_b(R, H)$ [1]).

Из формулы (9) следует оценка:

$$\|x\|_{\infty} \leq \left(\int_R \|G_A(\tau)\| d\tau \right) \|f\|_{\infty}.$$

Из неё следует важная роль оценки величины $\|G_A\|_1 = \int_R \|G_A(\tau)\| d\tau$. Она может быть вычислена через постоянные M_0, γ_0 из (7). Однако в лемме 2 утверждается только существование таких постоянных в оценках (7).

В данной статье для оценки величины $\|G_A\|_1$ используются следующие величины:

$$\gamma(A) = \sup_{\lambda \in R} \|R(i\lambda, A)\|,$$

$$\nu(A) = \sup_{\|x\| \leq 1} \frac{1}{2\pi} \int_R \|R(i\lambda, A)x\|^2 d\lambda,$$

$$k(T) = \sup_{0 \leq t \leq 1} \|T(t)\|.$$

Величина $\gamma(A)$ важна тем, что даёт точное равенство $\|L^{-1}\| = \gamma(A)$ для нормы обратного оператора к дифференциальному оператору $L = -d/dt + A: D(L) \subset L^2(R, H) \rightarrow L^2(R, H)$, рассматриваемому в гильбертовом пространстве $L^2(R, H) = L^2$ измеримых функций $x: R \rightarrow H$, для которых конечна величина $\|x\|_2 = \left(\int_R \|x(t)\|^2 dt \right)^{1/2}$, со скалярным произведением

$$\langle x, y \rangle = \int_R (x(t), y(t))_H dt, x, y \in L^2.$$

Величина $\gamma(A)$ использовалась для оценок норм обратных к дифференциальным операторам в статьях [1],[8]. В работе [8] она называлась *частотной характеристикой оператора A*.

В статье [1] для $A \in \text{End}H$ получена оценка:

$$\|L^{-1}\|_{\infty} \leq 4(\gamma(A) + \|A\|_{\infty} \gamma(A)^2), \quad (10)$$

где $\|L^{-1}\|_{\infty}$ - норма обратного к оператору $L = -d/dt + A: D(L) \subset C_b(R, H) \rightarrow C_b(R, H)$.

В монографии [4] для $A \in \text{End}H$, где H - конечномерное пространство, использовалась величина $\nu(A)$, называемая *интегральным критерием качества дихотомии*, и была получена следующая оценка:

$$\|G_A(t)\| \leq (2\|A\|\nu(A))^{1/2} e^{-\frac{|t|}{2\nu(A)}}. \quad (11)$$

В частности, из (11) следует, что $\|G_A\|_1 \leq 4\sqrt{2}(\|A\|)^{1/2} \nu(A)^{3/2}$.

Существенным недостатком оценок (10), (11) является использование величины $\|A\|$. Условие ограниченности оператора A было снято в статье [3], вместо величины $\|A\|$ в оценках стала использоваться величина $k(T)$, при этом стали применяться отличные от известных методы оценок.

Отметим ещё полученную в [10] оценку

$$\gamma(A) \leq \nu(A).$$

Результаты данной статьи получены с существенным использованием методов гармонического анализа. В частности, используется тождество Планшереля для функций из $L^2(R, H)$ и преобразование Фурье для векторных функций.

При оценках рассматриваемых далее интегралов учитывается, что подинтегральные выражения либо суммируемы, либо принадлежат $L^2(R, H)$.

В статьях [2], [3] получена

Лемма 3. Если выполнено условие (1) (эквивалентные ему условия (2), (3)), то имеют место равенства:

$$\int_R G_A(t) x e^{-i\lambda t} dt = R(i\lambda, A)x, \lambda \in R, \quad (12)$$

$$\int_R \|G_A(t)x\|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_R \|R(i\lambda, A)x\|^2 d\lambda, \lambda \in R, \quad (13)$$

для всех $x \in H$.

Доказательство. Для каждого вектора $x \in H$ рассмотрим функцию $t \mapsto G_A(t)x : R \rightarrow H$.

Непосредственно из определения функции G_A следует, что она непрерывна, исключая точку нуль и суммируема (см. оценку (7)).

В частном случае, если T экспоненциально убывающая полугруппа операторов, то $G_A(t) = -T(t), t \geq 0, G_A(t) = 0, t < 0$. В этом случае равенство (12) хорошо известно, обычно оно приводится в любой монографии по теории полугрупп операторов (см., например, [9, 354]).

Непосредственно из вида функции Грина G_A следует, что она является прямой суммой двух полугрупп операторов (одной из которых является T_{int}) относительно разложения $H = H_{\text{int}} \oplus H_{\text{out}}$.

Имеют место равенства:

$$\begin{aligned} \int_R G_A(t) x e^{-i\lambda t} dt &= \int_{-\infty}^0 T_{\text{out}}(-t)^{-1} P_{\text{out}} x e^{-i\lambda t} dt - \int_0^{\infty} T_{\text{int}}(t) P_{\text{int}} x e^{-i\lambda t} dt = \\ &= R(i\lambda, A) P_{\text{out}} x + R(i\lambda, A) P_{\text{int}} x = R(i\lambda, A)x, x \in R. \end{aligned}$$

При этом учитывалось, что $T_{out} : R \rightarrow End H_{out}$ - группа операторов, причём $T_{out}(t)^{-1} = T_{out}(-t), t \geq 0$.

Из теоремы Планшереля [7, 349] следует принадлежность каждой из функций

$$\lambda \mapsto R(i\lambda, A)x : R \rightarrow H, x \in H$$

гильбертову пространству $L^2(R, H)$ и выполнение равенства:

$$\int_R \|G_A(t)x\|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_R \|R(i\lambda, A)x\|^2 d\lambda.$$

Лемма доказана. Краткий вариант доказательства леммы 3 приведён в [2].

Отметим, что из равенства (13) леммы 3 следует $\nu(A) < \infty$. Действительно, поскольку функция G_A допускает оценку (7), то $\|G_A(\tau)\|^2 \leq M_0^2 e^{-2\gamma_0|\tau|}, \tau \in R$. Тогда в силу равенства (13) получаем:

$$\frac{1}{2\pi} \int_R \|R(i\lambda, A)x\|^2 d\lambda = \int_R \|G_A(\tau)x\| d\tau \leq \frac{M_0^2}{\gamma_0} \|x\|. \text{ Таким образом, } \nu(A) \leq \frac{M_0}{\sqrt{\gamma_0}} < \infty.$$

Аналогичные оценки верны для резольвенты генератора A^* сопряжённой полугруппы T^* . При этом $\|G_A(t)^*\| = \|G_A(t)\|, t \in R$. Следовательно, $\nu(A^*) = \sup_{\|x\| \leq 1} \frac{1}{2\pi} \int_R \|R(i\lambda, A^*)x\|^2 d\lambda < \infty$.

Формулу (12) можно трактовать следующим образом: для каждого вектора $x \in H$ функция $\lambda \mapsto R(i\lambda, A)x$ (принадлежащая гильбертову пространству $L^2(R, H)$ измеримых и суммируемых с квадратом нормы функций, определённых на R со значениями в H) является преобразованием Фурье функции $t \mapsto G_A(t)x : R \rightarrow H$. Формулу (13) можно рассматривать как тождество Планшереля для указанных функций. Следовательно, функция $t \mapsto G_A(t)x$ допускает представление вида (где интеграл понимается в смысле главного значения)

$$G_A(t)x = \frac{1}{2\pi} \int_R R(i\lambda, A)x e^{i\lambda t} d\lambda, t \in R, x \in H, \quad (14)$$

т.е. является обратным преобразованием Фурье от функции $y(\lambda) = R(i\lambda, A)x, \lambda \in R$.

Из (14) для любых $x, y \in H$ получаем:

$$(G_A(t)x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_R (R(i\lambda, A)x, y) e^{i\lambda t} d\lambda, t \in R.$$

Из тождества Гильберта [6] для резольвенты оператора A следует, что подинтегральная функция $\varphi_{x,y}(\lambda) = (R(i\lambda, A)x, y), \lambda \in R$ дифференцируема, и её производная

$\varphi'_{x,y}(\lambda) = (iR(i\lambda, A)^2 x, y), \lambda \in R$. Следовательно, из (14), учитывая суммируемость функции $t \mapsto (G_A(t)x, y) : R \rightarrow C$, получаем равенство:

$$(itG_A(t)x, y) = \frac{i}{2\pi} \int_R (R(i\lambda, A)^2 x, y) e^{i\lambda t} d\lambda, t \in R. \quad (15)$$

Из этого равенства вытекает, что имеет место

Лемма 4. Функция G_A допускает оценку вида:

$$\|G_A(t)\| \leq \frac{\sqrt{\nu(A)\nu(A^*)}}{|t|}, t \neq 0. \quad (16)$$

Доказательство. Используя неравенство Шварца, из отмеченного выше и (14), получаем (благодаря свойствам преобразования Фурье) равенства

$$\begin{aligned} |(itG_A(t)x, y)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_R (R(i\lambda, A)^2 x, y) e^{i\lambda t} d\lambda \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_R |(R(i\lambda, A)^2 x, y)| d\lambda \leq \\ &\frac{1}{2\pi} \int_R |(R(i\lambda, A)x, R(-i\lambda, A^*)y)| d\lambda \leq \frac{1}{2\pi} \int_R \|R(i\lambda, A)x\| \|R(-i\lambda, A^*)y\| d\lambda \leq \\ &\left(\frac{1}{2\pi} \int_R \|R(i\lambda, A)x\|^2 d\lambda \right)^{1/2} \left(\frac{1}{2\pi} \int_R \|R(-i\lambda, A^*)y\|^2 d\lambda \right)^{1/2} \leq \\ &\sqrt{\nu(A)\nu(A^*)}, \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1, x, y \in H. \end{aligned}$$

В силу произвольности выбора $x, y \in H$ положим $y = itG_A(t)x$, тогда

$$\|itG_A(t)x\|^2 \leq \sqrt{\nu(A)\nu(A^*)} \|x\| \|itG_A(t)x\|.$$

Следовательно, $\|G_A(t)\| \leq \frac{\sqrt{\nu(A)\nu(A^*)}}{|t|}, t \neq 0$. Лемма доказана.

Лемма 5. Пусть оператор $B \in \text{End}H$ таков, что

$$\|B\|\gamma(A) < 1.$$

Тогда $A + B$ - генератор гиперболической полугруппы операторов $\tilde{T} : R \rightarrow \text{End}H$ и имеют место оценки

$$\gamma(A + B) \leq \frac{\gamma(A)}{1 - \|B\|\gamma(A)}, \quad (18)$$

$$\nu(A + B) \leq \frac{\nu(A)}{(1 - \|B\|\gamma(A))^2}. \quad (19)$$

Доказательство. Оператор $A + B$ (в силу [9], [6]) является генератором некоторой полугруппы операторов $\tilde{T}$ класса C_0 . Докажем, что условие (17) гарантирует выполнение свойства $\sigma(A + B) \cap (iR) = \emptyset$.

Из представления $A + B - i\lambda I = (I + BR(i\lambda, A))(A - i\lambda I)$, $\lambda \in R$ следует (ввиду выполнения условия (17)), что $\sigma(A + B) \cap (iR) = \emptyset$ и резольвента оператора $A + B$ на мнимой оси iR имеет вид:

$$R(i\lambda, A + B) = R(i\lambda, A) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (BR(i\lambda, A))^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (BR(i\lambda, A))^n R(i\lambda, A), \lambda \in R. \quad (20)$$

Из этого представления получаем оценку:

$$\gamma(A + B) = \sup_{\lambda \in R} \|R(i\lambda, A + B)\| \leq \sup_{\lambda \in R} \|R(i\lambda, A)\| \frac{1}{1 - \|B\|\gamma(A)} = \frac{\gamma(A)}{1 - \|B\|\gamma(A)},$$

т.е. верна оценка (18). Из (20) также получаем, что

$$\begin{aligned} \nu(A + B) &= \frac{1}{2\pi} \sup_{\|x\| \leq 1} \int_R \|R(i\lambda, A + B)x\|^2 d\lambda \leq \\ &\frac{1}{2\pi} \sup_{\|x\| \leq 1} \int_R \left\| \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (R(i\lambda, A)B)^n \right\|^2 \|R(i\lambda, A)x\|^2 d\lambda \leq \frac{1}{(1 - \|B\|\gamma(A))^2} \nu(A), \end{aligned}$$

т.е. доказана оценка (19). Лемма доказана.

Теорема 1. Функция Грина $G_A : R \rightarrow \text{End} H$ допускает оценки вида

$$\|G_A(t)\| \leq \frac{1}{|t|} \frac{\sqrt{\nu(A)\nu(A^*)}}{(1 - \alpha\gamma(A))^2} e^{-\alpha|t|}, t \neq 0 \quad (21)$$

Для любого числа $\alpha > 0$, удовлетворяющего условию $\alpha < \frac{1}{\gamma(A)}$. В частности

$$\|G_A(t)\| \leq \frac{4}{|t|} \sqrt{\nu(A)\nu(A^*)} e^{-\frac{|t|}{2\gamma(A)}}, t \neq 0 \quad (22)$$

Доказательство. Пусть число $\alpha > 0$ удовлетворяет условию $\alpha < \frac{1}{\gamma(A)}$. Тогда в силу леммы 5 оператор $A + \alpha I$ является генератором гиперболической полугруппы операторов $\tilde{T}(t) = T(t)e^{\alpha t}$, где $t \geq 0$ и $\nu(A + \alpha I) \leq \frac{\nu(A)}{(1 - \alpha\gamma(A))^2}$.

Теперь из леммы 4 (оценка (16)) получаем оценку:

$$\|G_{A+\alpha I}(t)\| \leq \frac{\sqrt{\nu(A+\alpha I)\nu(A^*+\alpha I)}}{|t|}, t \neq 0.$$

Заметим, что $\|G_{A+\alpha I}(t)\| = \|\tilde{T}(t)P_{\text{int}}\| = \|T(t)e^{\alpha t}P_{\text{int}}\| = \|e^{\alpha t}G_A(t)\|$ при $t > 0$.

Если $t > 0$, то из выше приведённых оценок и оценки (19) получаем:

$$\|G_A(t)\| = e^{-\alpha t} \|G_{A+\alpha I}(t)\| \leq \frac{1}{t} \frac{\sqrt{\nu(A)\nu(A^*)}}{(1-\alpha\gamma(A))^2} e^{-\alpha t}.$$

Для $t < 0$ рассматривается оператор $A - \alpha I$, и аналогичным образом получается оценка:

$$\|G_{A-\alpha I}(t)\| \leq \frac{\sqrt{\nu(A-\alpha I)\nu(A^*-\alpha I)}}{|t|}, t \neq 0.$$

Следовательно,

$$\|G_A(t)\| \leq \frac{1}{t} \frac{\sqrt{\nu(A)\nu(A^*)}}{(1-\alpha\gamma(A))^2} e^{\alpha t}, t < 0.$$

Таким образом, получена оценка (21). Оценка (22) следует из (21), если положить $\alpha = \frac{1}{2\gamma(A)}$. Теорема доказана.

Из определения величины $k(T)$ и оценок функции G_A из работы [3] получаем, что имеет место

Теорема 2. Функция Грина $G_A : R \rightarrow \text{End}H$ допускает оценки вида

$$\|G_A(t)\| \leq \begin{cases} M_- e^{\gamma_- t}, & t \in [-1, 0); \\ M_+ e^{-\gamma_+ t}, & t \in [0, 1]; \\ \frac{1}{|t|} \frac{\sqrt{\nu(A)\nu(A^*)}}{(1-\alpha\gamma(A))^2} e^{-\alpha|t|}, & |t| \geq 1, \end{cases}$$

где

$$M_+ = 2\mathcal{G}k(T)(1 + \frac{1}{2\mathcal{G}})^2, M_- = 2\mathcal{G}k(T)(1 - \frac{1}{2\mathcal{G}})^2, \\ \gamma_+ = \ln(1 + \frac{1}{2\mathcal{G}}), \gamma_- = -\ln(1 - \frac{1}{2\mathcal{G}}), \mathcal{G} = 1 + \sqrt{2}(k(T) + k^2(T)\gamma^2(A)), 0 < \alpha < \frac{1}{\gamma(A)}.$$

Поскольку в теореме 2 использовались оценки функции Грина на $[-1, 1]$ из статьи [3], то сравнение полученных нами оценок и оценок из [2] проведём на промежутке $R \setminus [-1, 1]$, при этом будем рассматривать пример экспоненциально устойчивой полугруппы T , т.е. $G_A(t) = -T(t), t \geq 0, G_A(t) = 0, t < 0$. В этом случае при $\alpha = \frac{1}{2\gamma(A)}$ из теоремы 2 получаем:

$$\int_{|t| \geq 1} \|G_A(t)\| dt = \int_1^\infty \|T(t)\| dt \leq \int_1^\infty \frac{1}{t} \frac{\sqrt{\nu(A)\nu(A^*)}}{(1 - \frac{1}{2\gamma(A)}\gamma(A))} e^{-\frac{1}{2\gamma(A)}t} dt \leq 8\gamma(A)\sqrt{\nu(A)\nu(A^*)}. \quad (23)$$

Из теоремы 6 статьи [3] следуют оценки:

$$\int_{t \geq 1} \|T(t)\| dt \leq \frac{M_+}{\gamma_+} = \frac{2gk(T)(1 + \frac{1}{2g})^2}{\ln(1 + \frac{1}{2g})}. \quad (24)$$

Сразу отметим, что в оценках (23), (24) используется только одна общая константа $\gamma(A)$. Предположим, что A - самосопряжённый отрицательно определённый оператор со спектром $(-\infty, \delta]$, где $\delta < 0$, причём $\delta \in \sigma(A)$. Тогда, используя нормальность оператора $R(i\lambda, A)$, получаем

$$\|R(i\lambda, A)\| = \frac{1}{\text{dist}(i\lambda, \sigma(A))} = \frac{1}{|i\lambda - \delta|}.$$

Следовательно,

$$\gamma(A) = \frac{1}{\delta}, \nu(A) = \nu(A^*) \leq \int_R \|R(i\lambda, A)\|^2 d\lambda = \int_R \frac{d\lambda}{\lambda^2 + \delta^2} = \frac{\pi}{\delta}, k(T) = 1$$

(полугруппа T в этом случае будет сжимающей), $g = 1 + \sqrt{2}(1 + \frac{1}{\delta^2})$. Если число $(-\delta) \geq 1$, причём достаточно большое, то очевидно, что правая часть оценки (23) может быть сделана сколь угодно малой. С другой стороны, $1 + \sqrt{2} \leq g \leq 1 + 2\sqrt{2}$, и поэтому правая часть из (24) всегда больше величины

$$\frac{2(1 + \sqrt{2})}{\ln(1 + \frac{1}{2(1 + \sqrt{2})})}$$

Отметим, что полученные в теоремах 1-2 оценки не используют условие ограниченности оператора A .

ЛИТЕРАТУРА

1. Баскаков, А.Г. Полугруппы разностных операторов в спектральном анализе линейных дифференциальных операторов - Функциональный анализ и его приложения, 1996 - Т. 30. №3. С. 1-11.
2. Баскаков, А.Г., Воробьев, А.А., Романова М.Ю. Гиперболические полугруппы операторов и уравнение Ляпунова. - Математические заметки, 2011. - Т. 89. №2. С.190-203.
3. Баскаков, А.Г., Синтяев, Ю.Н. Разностные операторы в исследовании дифференциальных операторов; оценки решений.- Дифференциальные уравнения, 2010. - Т. 46. №2. С.1-10.
4. Годунов, С.К. Современные аспекты линейной алгебры.- Новосибирск: Научная книга, 1997. – 390с.
5. Далецкий, Ю.Л., Крейн, М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. - Наука, М., 1970. – 536с.
6. Данфорд, Н., Шварц, Дж. Линейные операторы. Общая теория. Т.1. - Наука, М., 1962. – 896с.
7. Колмогоров, А.Н., Фомин, С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. - Наука, М., 1976. – 544с.
8. Перов, А.И. Частотные признаки существования ограниченных решений - Дифференциальные уравнения, 2007.- Т.43. №7.- С.896-904.
9. Хилле, Э., Филлипс, Р. Функциональный анализ и полугруппы.- Наука, М., 1962. – 892с.
10. Chicone, C., Latushkin, Y. Evolution Semigroups in Dynamical Systems and Differential Equations

ESTIMATION OF GREEN'S FUNCTION BASED ON SEMIGROUP OF OPERATORS

M. Romanova

*Voronezh State University,
Universitetskaya pl.,1, Voronezh, 394006, Russia*

Abstract. In this article the strongly continuous semigroup is considered, this semigroup is hyperbolic (or admits exponential dichotomy). For investigated semigroup the Green's function is built, which plays a great role in presentation of weak bounded solution of differential equations. Using frequency characteristic of operator and integral performance criterion of dichotomy the article provides estimations of Green's function based on hyperbolic semigroup of operators. The results of this article are obtained with use of harmonic analysis's methods.

Key words: hyperbolic semigroup of operators, exponential dichotomy, Green's function.

УДК 517.965.35

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ОДНОГО СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

М.А. Петрова, В.П. Трифоненков

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
115409, Москва, Каширское ш., 31

Аннотация. Исследуются сингулярно возмущенные квазилинейные уравнения гиперболического типа. Доказывается существование у них решений типа бегущих волн, имеющих контрастную структуру. С помощью метода пограничных функций построено асимптотическое разложение по малому параметру решения в случае движения внутреннего слоя (фронта). Получено уравнение для определения скорости распространения фронта волны. Рассматривается важный для приложений частный случай квазидискретной нелинейности.

Ключевые слова: сингулярно возмущенные гиперболические уравнения, асимптотика, контрастные структуры.

В последнее время большое внимание было привлечено к уравнениям в частных производных с дискретными нелинейностями. Они возникают при моделировании широкого круга явлений и процессов в различных областях физики, химии, биологии, медицины (описание динамики волн плотности заряда в кристаллах и нелинейных кристаллических решетках, описание процессов в случае дискретного распределения источников реакции и т.д.) [1, 2]. В настоящей работе рассматривается квазилинейное волновое уравнение, имеющее решение с движущимся внутренним слоем, в общем случае. Исследуется вопрос о влиянии сильной неоднородности в нелинейности на характер движения фронта волны.

Движения фронтов описываются уравнением

$$V_{tt} + \beta V_t = D V_{xx} + \alpha \delta(x) f(V), \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0,$$

где β - коэффициент диссипации, D - коэффициент диффузии, α - амплитуда дискретной нелинейности, а функция $f(V)$ удовлетворяет следующему условию.

Условие 1. $f(V)$ - непрерывно дифференцируемая функция, имеющая положительный максимум и отрицательный минимум, имеющая три нуля

$$V_1 < V_2 < V_3, \text{ такие, что } f(V_i) > 0, \quad i = 1, 3, \quad f(V_i) < 0 \text{ и } \int_{V_1}^{V_3} f(V) dV = 0.$$

(Для простоты и без ограничения общности считаем далее $V_1 = -1$, $V_2 = 0$, $V_3 = 1$)

После введения безразмерных пространственных и временных переменных с учетом порядка входящих в уравнение параметров, получим следующую сингулярно возмущенную задачу, в случае отсутствия диссипации:

$$\varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) = q(x) f(u) \quad (1)$$

в области $G = \{(x, t): -\infty < x < \infty, 0 \leq t \leq T\}$ с граничными условиями:

$$u(-\infty, t) = -1, \quad u(+\infty, t) = 1, \quad (2)$$

где $\varepsilon > 0$ - малый параметр, $f(u)$ – удовлетворяет **Условию 1**.

Условие 2. Функция $q(x) > 0$ и $q(x) \in C^1(-\infty, +\infty)$.

Начальные условия не задаются, так как в настоящей работе нашей задачей являлось исследование динамики контрастных структур, а не вопросы их формирования.

При $q(x) = \text{const}$ в [3] было доказано существование у задачи (1)-(2) решений типа бегущих волн, имеющих контрастную структуру, которые распространяются с постоянной скоростью, равной начальной. Так при $q(x) = 1$ и $f(u) = u^3 - u$ точное решение поставленной задачи имеет вид $u(x, t) = \text{th}\left(\frac{(x - ct)}{\varepsilon \sqrt{2(1 - c^2)}}\right)$.

В настоящей работе рассматривается случай $q(x) \neq \text{const}$. Особое внимание уделяется случаю, когда функция $q(x)$ является непрерывным аналогом дискретной функции $\sum \delta(x - x_k)$, что соответствует дискретным источникам реакции.

Рассмотрение велось при следующем предположении. Пусть существует решение $u(x, t, \varepsilon)$ задачи (1)-(2) для всех $(x, t) \in G$ с внутренним переходным слоем типа «ступенька» и такое, что имеет место следующий предельный переход:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(x, t, \varepsilon) = \begin{cases} -1 & \text{при } -\infty < x < s(t) \\ +1 & \text{при } s(t) < x < +\infty \end{cases},$$

где $s(t)$ – некоторая достаточно гладкая функция.

Значения $s(t)$ при каждом конкретном t соответствуют точке перехода (будем называть ее фронтом волны), а функция $s_t = \frac{ds}{dt}$ будет тогда соответствовать скорости движения фронта.

Асимптотическое разложение решения задачи (1)-(2) по малому параметру будем строить с помощью метода пограничных функций [4]. Для этого в районе переходного слоя введем новую переменную $z = \frac{x - s(t)}{\varepsilon}$. Запишем уравнение (1) в новых переменных для функции $U(z, t, \varepsilon) = u(x, t, \varepsilon)$. Представим функции $U(z, t, \varepsilon)$ и $q(s + \varepsilon z)$ в виде ряда по ε . Приравнявая члены при одинаковых степенях ε , получим задачи для определения членов асимптотики.

В нулевом приближении получим задачу:

$$U_{zz}^0 (1 - s_t^2) = q(s) f(U^0), \quad (3)$$

$$U^0(-\infty, t) = -1, \quad U^0(+\infty, t) = 1.$$

Решение этой задачи существует, единственно и, например, при $f(u) = u^3 - u$ имеет вид:

$$U^0(z, t, \varepsilon) = \operatorname{th} \left(\sqrt{\frac{q(s)}{2(1-s_t^2)}} z \right).$$

Таким образом, главный член асимптотики по ε решения задачи (1)-(2) определен, и в случае, например, кубической нелинейности приобретает вид:

$$u_0(x, t, \varepsilon) = \operatorname{th} \left(\sqrt{\frac{q(s)}{2(1-s_t^2)}} \cdot \frac{x-s(t)}{\varepsilon} \right).$$

Для членов первого и последующих приближений получаем линейные неоднородные уравнения. Из условия разрешимости для первого приближения (ортогональность правой части решению соответствующего однородного уравнения), получим уравнение для движения фронта волны:

$$s_t = \pm \sqrt{1 - cq(s)}, \quad (4)$$

где c – константа интегрирования, определяемая начальными условиями.

Одновременно с построением асимптотики доказывается

Теорема. Пусть выполнены условия 1,2 и пусть функция $s(t)$ удовлетворяет уравнению (4). Тогда функция $u_0(x, t, \varepsilon)$, являющаяся решением задачи (3), удовлетворяет задаче (1)-(2) с невязкой $O(\varepsilon)$.

В случае квазидискретного распределения источников реакции, описываемых функцией $q(x) = \sum \exp(-b(x - x_k)^2)$, $b \gg 1$, получим:

$$s_t = \sqrt{1 - \sum \exp(-b(x - x_k)^2)}.$$

Таким образом, наблюдается существенное отличие в случаях однородной и неоднородной нелинейностях. Особенно ярко это проявляется для случая квазидискретной неоднородности, где функция $q(x)$ играет роль некоего потенциального барьера для движения фронта волны. Скорость фронта невелика в районе максимума $q(x)$, и наоборот, происходит значительное ускорение в области резкого изменения функции $q(x)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Keener, J.P. Homogenization and propogation in the bistable equation. // Physica D, 136: 1-17, 2000.
2. Keizer, J., Smith G.D., Ponce Dawson S., Pearson J.E. Saltatory propagation of Ca^{2+} waves by Ca^{2+} sparks. // Biophys. J., 75: 595-600, 1998.
3. Васильева, А.Б., Петрова М.А. Контрастные структуры в сингулярно возмущенных уравнениях гиперболического типа. // Труды вторых математических чтений МГСУ, 1994, Изд-во «Союз», С. 26-29.
4. Васильева, А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. // М.: Высш. школа, 1990.

ASYMPTOTICS OF THE SOLUTION OF ONE SINGULARLY PERTURBED

HYPERBOLIC EQUATION

M. Petrova, V. Trifonenkov

National Research Nuclear University «MEPhI»
31, Kashirskoe shosse, Moscow, 115409, Russia

Abstract. The singularly perturbed quasilinear hyperbolic equations are considered. The existence of the solutions of moving front type, having contrast structure is proved. The asymptotic expansion of the moving interior layer solution is built based on the boundary layer function method. The equation for moving front velocity was obtained. Important case of quasi-discrete nonlinearities was considered.

Key words: singularly perturbed hyperbolic equations, asymptotics, contrast structures.

УДК 552.578.2.061.43.001.573

ФУНКЦИОНАЛЬНО-ИНВАРИАНТНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПОЛЯ ДАВЛЕНИЯ В ОКРЕСТНОСТИ РАСТУЩЕЙ ТРЕЩИНЫ

Ю.Н. Гордеев, В.М. Простокишин

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
115409, Москва, Каширское ш., 31

Аннотация. Построены точные решения автомодельных задач о поле давления в окрестности распространяющейся трещины гидроразрыва. Считается, что трещина развигается по корневому закону в проницаемой упруго деформируемой пористой среде, с постоянной расклинивающей силой, действующей на берега трещины. Рассматриваемая задача для уравнения пьезопроводности заменой переменных сведена к решению смешанной краевой задачи для уравнения Гельмгольца, решение которой выражается в квадратурах от функции Бесселя. Полученное решение справедливо для произвольного автомодельного распределения давления на берегах трещины.

Ключевые слова: автомодельность, гидроразрыв, проницаемая пористая среда, уравнение Гельмгольца.

При исследовании процесса гидравлического разрыва пласта возникает необходимость расчета нестационарного поля давления жидкости в окрестности движущейся трещины гидроразрыва [1, 2, 5, 7]. В предположении, что пласт и жидкость упруго деформируемые, распределение давления в пласте описывается уравнением теплопроводности («пьезопроводности») [7]. Трещина в данной задаче считается тонкой областью (разрезом), вытянутой вдоль оси Ox и распространяющейся со временем по закону $ct^{1/2}$, на которой задано давление $p_l(xt^{1/2})$, отличное от начального пластового давления p_0 . Задача заключается в нахождении возмущения внутрипластового поля давления, вызванного развитием трещины гидроразрыва.

Следует отметить, что в настоящий момент интерес к данной проблеме вырос в связи с задачами интенсификации процессов нефтедобычи, в частности, повышения нефтеотдачи пласта. Точные решения были получены в работах [5, 1, 2] в частном случае приближения “идеальной” трещины [5], когда давление закачки жидкости в трещину постоянно и однородно вдоль трещины.

1. Постановка задачи о распространении плоской трещины гидроразрыва с заданным расходом жидкости разрыва.

Рассмотрим гидравлический разрыв проницаемого пласта с постоянной расклинивающей силой, действующей на берега трещины. Давление жидкости вне трещины описывается уравнением пьезопроводности:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \kappa \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right), \quad -\infty < x < \infty, \quad y \geq 0, \quad t > 0, \quad (1.1)$$

$$p(x, y, t = 0) = p_0, \quad p(x, y = 0, t) = \frac{1}{\sqrt{t}} p_1 \left(\frac{x}{\sqrt{t}} \right) + p_0, \quad |x| \leq l(t)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y}(x, y = 0, t) = 0, \quad |x| > l(t), \quad l(t) = c\sqrt{t},$$

где $p(x, y, t)$ — функция давления жидкости разрыва, (x, y) — декартовы координаты, t — время, κ — коэффициент пьезопроводности, $l(t)$ — длина трещины, а c — параметр, характеризующий скорость распространения трещины.

Расклинивающая сила, которая действует на берега трещины гидроразрыва, имеет следующий вид

$$F = 2 \int_0^{l(t)} \frac{1}{\sqrt{t}} p \left(\frac{x}{\sqrt{t}} \right) dx = const. \quad (1.2)$$

2. Автомодельное решение. Легко видеть, что решение задачи (1.1)-(1.2) оказывается автомодельным в том случае, когда, например, границы трещины растут по корневому закону. Переходя к новым автомодельным переменным (X, Y) , а также параметру задачи ε по формулам:

$$x = \frac{cX\sqrt{t}}{\varepsilon}, \quad y = \frac{cY\sqrt{t}}{\varepsilon}, \quad \varepsilon = \frac{c}{2\sqrt{\kappa}}, \quad p = \frac{1}{\sqrt{t}} (p_1(0) - p_0) \Phi(X, Y) + p_0,$$

получим для функции $\Phi(X, Y)$, учитывая условия симметрии, следующую задачу:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial Y^2} + 2X \frac{\partial \Phi}{\partial X} + 2Y \frac{\partial \Phi}{\partial Y} + 2\Phi = 0, \quad (2.1)$$

$$\begin{cases} \Phi(X, 0) = \gamma(X), & |X| \leq \varepsilon, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial Y}(X, 0) = 0, & |X| > \varepsilon. \end{cases} \quad (2.2)$$

Представим далее функцию $\Psi(X, Y)$ как произведение

$$\Psi = \exp\left(\frac{1}{2}(X^2 + Y^2)\right) \Phi(X, Y),$$

тогда задача (2.1)-(2.2) может быть преобразована к следующему виду:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} - (X^2 + Y^2) \Psi = 0, \quad (2.3)$$

$$\Psi(X, 0) = \exp\left(\frac{1}{2}X^2\right) \gamma(X), \quad 0 \leq X \leq \varepsilon,$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial Y}(X, Y=0) = 0, \quad X > \varepsilon, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial X}(X=0, Y) = 0, \quad Y > 0. \quad (2.4)$$

Введем комплексные переменные и производные по ним:

$$z = X + iY, \quad \bar{z} = X - iY, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right),$$

тогда уравнение (2.3) приводится к виду:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2 \partial \bar{z}^2} - \frac{1}{4} \Psi = 0$$

Возвращаясь к действительным переменным:

$$\frac{1}{2}z^2 = \xi + i\eta = \frac{X^2 - Y^2}{2} + iXY, \quad \frac{1}{2}\bar{z}^2 = \xi - i\eta = \frac{X^2 - Y^2}{2} - iXY,$$

получим уравнение (2.3) в новых действительных переменных ξ, η в виде

$$\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \eta^2} - \Lambda = 0, \quad \Lambda(\xi, \eta) = \Psi(x, y), \quad (2.5)$$

Описанное преобразование переводит первый квадрант ($X > 0, Y > 0$) в верхнюю полуплоскость ($\eta > 0$). При этом задача (2.3)-(2.4) и, следовательно, и исходная задача (2.1)-

(2.2) перейдет в смешанную краевую задачу для уравнения Гельмгольца со следующими условиями:

$$\begin{aligned}\Lambda(\xi, \eta = 0) &= \exp(\xi)\gamma(\sqrt{2\xi}), \quad 0 \leq \xi \leq 0.5\varepsilon^2; \\ \frac{\partial \Lambda}{\partial \eta}(\xi, 0) &= 0, \quad \xi \in (-\infty, 0] \cup [0.5\varepsilon^2, \infty).\end{aligned}\tag{2.6}$$

Решение задачи (2.5)-(2.6) сводится к решению краевой задачи для уравнения Лапласа [3;4;6] и выражается через функцию Бесселя от мнимого аргумента:

$$\Lambda(u, v) = \varphi(u, v) + \int_0^v \frac{\partial}{\partial v} I_0(\sqrt{v^2 - w^2}) \varphi(u, w) dw,$$

Здесь функция $\varphi(\xi, \eta)$ удовлетворяет уравнению Лапласа, т.е. является гармонической функцией ($\Delta\varphi=0$).

3. Решение краевой задачи (2.5)-(2.6). В [4] показано, что решение задачи (2.5)-(2.6) даётся выражением

$$\Lambda(\xi, \eta) = \varphi(\xi, \eta) + \int_0^\eta \frac{\partial}{\partial \eta} I_0(\sqrt{\eta^2 - w^2}) \varphi(w, \xi) dw,$$

и гармоническая функция $\varphi(\xi, \eta)$ удовлетворяет следующей граничной задаче:

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &= 0 \\ \varphi(\xi, 0) &= \Lambda(\xi, 0), \quad 0 \leq \xi \leq 0.5\xi^2; \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}(\xi, \eta = 0) &= 0, \quad \xi \in (-\infty, 0] \cup [0.5\varepsilon^2, \infty).\end{aligned}\tag{3.1}$$

Для решения задачи (3.1) для гармонической функции $\varphi(\xi, \eta)$, ($\eta > 0$) введем комплексную функцию V такую, что:

$$V' = \frac{dV}{dz} = \frac{d\varphi}{d\xi} - i \frac{d\varphi}{d\eta}, \quad z = \xi + i\eta.$$

Из (3.1) следует, что эта функция удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} V'(\xi, 0) &= \frac{d}{d\xi} (\exp(\xi)\gamma(\sqrt{2\xi})), \quad 0 \leq \xi \leq 0.5\xi^2; \\ \operatorname{Im} V'(\xi, 0) &= 0, \quad \xi \in (-\infty, 0] \cup [0.5\varepsilon^2, \infty).\end{aligned}\tag{3.2}$$

Решение полученной задачи (3.2) определяется формулой Келдыша - Седова [6]:

$$V' = \frac{-i}{\pi\sqrt{z(0.5\varepsilon^2 - z)}} \int_0^{0.5\varepsilon^2} \frac{\sqrt{t(0.5\varepsilon^2 - t)} \operatorname{Re} V'(t, 0)}{t - z} dt + \frac{iA}{\pi\sqrt{z(0.5\varepsilon^2 - z)}}, \quad (3.3)$$

Принимая во внимание тот факт, что давление жидкости на бесконечности ограничено, положим $A=0$. Интегрируя выражение (3.3) по переменной z , получим $\varphi(\xi, 0) = V_1(\xi, \eta=0)$:

$$\phi(\xi) = (\exp(\xi)\gamma(\sqrt{2\xi})), \quad (3.4)$$

$$\varphi(\xi, 0) = \begin{cases} \phi(\xi), & 0 \leq \xi \leq 0.5\xi^2 \\ \frac{1}{\pi} \int_0^{0.5\xi^2} \arcsin\left(\frac{-4t\xi + \varepsilon^2(\xi + t)}{\varepsilon^2(\xi - t)}\right) \phi'(t) dt, & \xi \in (-\infty, 0] \cup [0.5\varepsilon^2, \infty). \end{cases} \quad (3.5)$$

Рассмотрим пределы:

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \arcsin\left(\frac{-4t\xi + \varepsilon^2(\xi + t)}{\varepsilon^2(\xi - t)}\right) &= \arcsin \frac{\varepsilon^2 - 4t}{\varepsilon^2}, \\ \lim_{\xi \rightarrow \frac{\varepsilon}{2} + 0, 0 - 0} \arcsin\left(\frac{-4t\xi + \varepsilon^2(\xi + t)}{\varepsilon^2(\xi - t)}\right) &= \pm \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Из (3.5) и (3.6) и условия непрерывности функции $\varphi(\xi, 0)$ следует, что константа при интегрировании определяется выражением

$$C = 0.5(\phi(0.5\varepsilon^2) + \phi(0)).$$

Для удобства вычисления функции $\varphi(\xi, \eta)$ представим $\varphi(\xi, 0)$ с учетом (3.4), (3.5), в виде

$$\phi(\xi) = \phi_0 + \phi_1(\xi),$$

$$\phi_1(\xi) = \begin{cases} \phi(\xi) - \phi_0, & 0 \leq \xi \leq 0.5\xi^2, \\ \frac{1}{\pi} \int_0^{0.5\xi^2} \arcsin(\Psi(\xi, t)) \phi'(t) dt, & \xi \in (-\infty, 0] \cup [0.5\varepsilon^2, \infty), \end{cases}$$

где

$$\Psi(\xi, t) = \frac{2\sqrt{2t(\varepsilon^2 - 2t)}}{\varepsilon^4(\xi - t)} \left[\xi(\varepsilon^2 - 4t) \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{2\xi}} \right) + \varepsilon^2 t \right],$$

$$\phi_0 = 0.5(\phi(0.5\varepsilon^2) + \phi(0)) + \frac{1}{\pi} \int_0^{0.5\varepsilon^2} \arcsin\left(1 - \frac{4t}{\varepsilon^2}\right) \phi'(t) dt.$$

Используя краевое условие для функции $\phi(\xi, 0)$, по формуле Пуассона получим решение задачи Дирихле

$$\phi(\xi, \eta) = \phi_0 + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta \phi_1(\rho)}{(\rho - \xi)^2 + \eta^2} d\rho.$$

Теперь, возвращаясь к переменным (X, Y) , получим выражение для Φ :

$$\Phi(X, Y) = \exp\left(-\frac{X^2 + Y^2}{2}\right) \Lambda\left(\frac{X^2 - Y^2}{2}, XY\right). \quad (3.7)$$

В направлении распространения трещины $Y=0$, т.е. вдоль оси Ox , решение (3.7) упрощается и может быть выражено в виде одного интеграла:

$$\Phi(X, 0) = \begin{cases} \gamma(X), & 0 \leq X \leq \varepsilon, \\ \frac{e^{\frac{X^2}{2}}}{\pi} \left[\int_0^{\varepsilon^2/2} \arcsin\left(\frac{-4tX^2 + \varepsilon^2(X^2 + 2t)}{\varepsilon^2(X^2 - 2t)}\right) \phi'(t) dt + C \right], & X > \varepsilon. \end{cases}$$

Аналогично, и в направлении, ортогональном распространению трещины, при $X=0$, т.е. вдоль оси Oy :

$$\Phi(0, Y) = \frac{e^{\frac{Y^2}{2}}}{\pi} \left[\int_0^{\varepsilon^2/2} \arcsin\left(\frac{-4tY^2 + \varepsilon^2(Y^2 - 2t)}{\varepsilon^2(Y^2 - 2t)}\right) \phi'(t) dt + C \right], \quad Y > 0.$$

Отметим, что в частном случае, когда

$$\gamma(X) = \frac{\mu}{\pi} \exp\left(-\frac{X^2}{2}\right), \quad |X| \leq \varepsilon,$$

получается решение типа диффузионного расплывания фиксированной массы вещества M , где константа μ может быть определена через массу M :

$$\Phi(X, Y) = \frac{\mu}{\pi} \exp\left(-\frac{X^2 + Y^2}{2}\right).$$

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» 2009-2013 годы ГК П1109

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баренблатт, Г.И.* О некоторых задачах теории упругости, возникающих при исследовании механизма гидравлического разрыва нефтеносного пласта. // ПММ, т. XX, вып. 4, 1956. С. 475-486.
2. *Баренблатт, Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М.* Движение жидкостей и газов в природных пластах. // М.: Недра, 1984. 211 с.
3. *Гордеев, Ю.Н., Ентов В.М.* О распределении давления в окрестности растущей трещины // ПММ, т. 61, вып. 6, 1997. С. 1060-1064.
4. *Гордеев, Ю.Н., Сандаков А.Е.* О распределении давления в окрестности растущей трещины с постоянной расклинивающей силой // Известия РАН, МЖГ. 2006, № 4. С. 121-126.
5. *Желтов, Ю.П., Христианович С.А.* О гидравлическом разрыве нефтеносного пласта // Изв. АН СССР, ОТН, 1955, №5. С.3-41.
6. *Мусхелишвили, Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. // М.: Наука, 1966. 707 с.
7. *Щелкачев, В.Н.* Основные уравнения движения упругой жидкости в упругой пористой среде // Докл. АН СССР, т. 52, №26 1946. С. 103-106.

FUNCTIONALLY INVARIANT PROBLEM SOLUTIONS OF THE NEAR GROWING CRACK PRESSURE FIELD DISTRIBUTION

Yu. Gordeev, V. Prostokishin

*National Research Nuclear University «MEPhI»
31, Kashirskoe shosse, Moscow, 115409, Russia*

Abstract. Exact solution of similar problems on the pressure field in the vicinity of the propagating fracture are demonstrated. It is assumed that the crack develops on square-root law in a permeable elastically deformable porous medium with a constant disjoining forces acting on the crack coasts. The considered problem for the piezo-conductivity equation by changing of variables has been reduced to solving a mixed boundary problem for the Helmholtz equation. Solution is expressed by the integral of Bessel functions. The resulting solution is valid for any self-similar pressure distribution on the crack.

Key words: selfsimilar solution, scaling, hydraulic fracturing, porous medium, permeability, Helmholtz equation.

ФИЗИКА

УДК 620.192

ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЭРОЗИИ-КОРРОЗИИ МЕТАЛЛА СТЕНКИ АБСОРБЕРА УСТАНОВКИ АМИНОВОЙ ОЧИСТКИ ГАЗОВ

Ю.И. Декина, Р.Ф. Гибадуллин

*Астраханский государственный технический университет
414025, Астрахань, ул. Татищева, 16*

Аннотация. Статья посвящена разработке физико-химической модели эрозии-коррозии металлов в двухфазном потоке в нижней зоне абсорбера установки аминной сероочистки газов. Предложенная модель позволяет разработать математическую модель эрозионно-коррозионных процессов металла в двухфазном потоке.

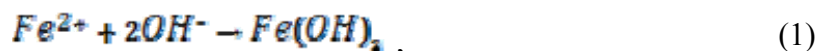
Ключевые слова: физико-химическая модель, эрозия-коррозия, двухфазный поток, абсорбер.

Многолетняя эксплуатация установок аминной сероочистки газов показала, что внутренняя стенка абсорбера подвергается чрезмерному эрозионно-коррозионному износу на участке поверхности в зоне ввода сырья. Данный процесс является результатом комплекса многофакторных процессов с разнообразными проявлениями по характеру и величине разрушений, количественные критерии и параметры которых до настоящего времени не выявлены.

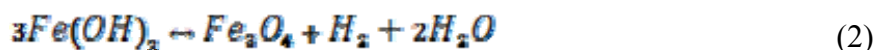
Создание физико-химической модели эрозии-коррозии (ЭК) является важнейшим этапом предшествующим математическому моделированию этого явления. Адекватность и достоверность такой модели зависит от надежности и точности положенных в их основу данных о закономерностях эрозионной и коррозионной составляющих ЭК. В данной статье рассматривается процесс ЭК без учета влияния реакции абсорбата с металлом стенки.

Сложность исследования эрозионно-коррозионных процессов в двухфазных потоках заключается в значительных трудностях, связанных с определением ряда локальных эрозионных и коррозионных параметров и критериев, отражающих гидродинамику и коррозионные свойства жидкой пленки: числа Рейнольдса Re , значение pH и т.д. Существо физико-химической картины протекания процессов ЭК в двухфазном потоке заключается в следующем. Основная доля жидкой фазы движется по обтекаемой поверхности в виде сплошной жидкой пленки (электролит), при контакте которой с металлом (сталь) осуществляются электрохимические коррозионные процессы образования оксидного слоя (см. рис.). Причем, вследствие межфазового распределения (примесей в жидкую фазу, а летучих в газовую) жидкая пленка полностью деаэрирована, т.е. отсут-

ствуется кислород. По этой причине процессы коррозии завершаются образованием магнетита Fe_3O_4 на границе металл – жидкая фаза следующим образом [1]:



и далее преобразованием $Fe(OH)_2$ в магнетит



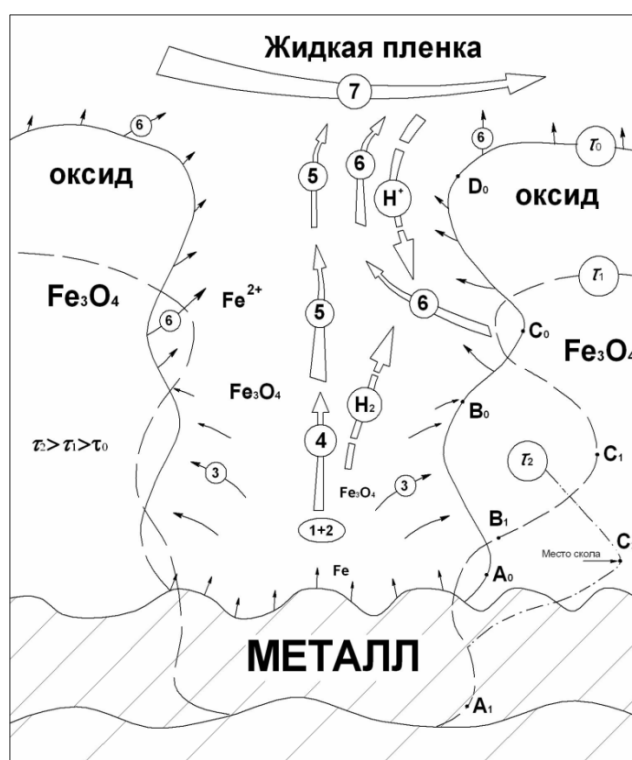
Между металлом и жидкой пленкой формируется оксидный слой определенной толщины, который со стороны металла (вглубь) растет, а со стороны границы раздела оксид – жидкая пленка растворяется. Защитные свойства и, прежде всего, толщина оксидного слоя определяют эрозионно-коррозионную стойкость металлов. Толщина оксидного слоя зависит как от коррозионных факторов (например, равновесной растворимости магнетита), так и от эрозионных процессов переноса растворенных продуктов коррозии в жидкую пленку. Концентрации растворенного железа на границах раздела металл – оксид и оксид – жидкая пленка не столь значительно отличаются. Градиент концентрации растворенного железа в ламинарном подслое и в самой жидкой пленке, а также коэффициент массопереноса в условиях турбулентного течения жидкой пленки определяют интенсивность ЭК. Практически все растворенное железо остается (в соответствии с коэффициентом межфазового распределения) в жидкой пленке. На границе раздела фаз (газ – жидкая пленка) концентрация растворенного железа меняется скачком.

На основе указанных соображений рассматриваемая физико-химическая модель металлов в двухфазном потоке должна отвечать следующим допущениям:

1. Металл – сталь.
2. Электролит – жидкая (пленка) фаза 33% раствора диэтаноламина (ДЭА).
3. На поверхности металла сплошная жидкая пленка 33% раствора ДЭА.
4. В электролите отсутствует кислород.
5. Концентрация растворимых продуктов коррозии в жидкой фазе соответствует равновесному состоянию межфазового перераспределения.
6. Рассматривается стационарный (установившийся) режим ЭК, когда толщина, пористость и другие физико-химические свойства оксидного слоя во времени, режимные параметры двухфазного потока и жидкой пленки, а также другие условия эрозионно-коррозионных процессов остаются неизменными во времени.
7. Отсутствует механизм кавитационной эрозии.
8. Допускается незначительное отделение твердой фазы оксидного слоя (продуктов коррозии) в результате эрозионно-коррозионных процессов.
9. Доля железа, превращающегося в магнетит в порах оксидного слоя равна 0,5.
10. В порах оксидного слоя массоперенос осуществляется только за счет молекулярной диффузии.
11. Шероховатость поверхности оксидного слоя не зависит от исходной обработки металла и определяется особенностями формирования оксидного слоя.

При определенных условиях возможно формирование оксидного слоя достаточно большой толщины, состоящего из внутреннего топотактического слоя и внешнего (наносного) эпитактического. На практике, в процессе эксплуатации оборудования, интен-

Рассмотрим более детально физико-химические эрозионно-коррозионные процессы в оксидном слое и на границах раздела металл – оксид и оксид – жидкая пленка (рис.). Будем считать, что основными механизмами эрозионно-коррозионных процессов внутри оксидного слоя и на границе раздела оксид – жидкая пленка являются: а) образование молекулярного магнетита Fe_3O_4 ; б) формирование твердой фазы Fe_3O_4 из молекулярного магнетита; в) химическое разложение магнетита.



же время концентрация молекулярного водорода в данной области высока из-за его выделения в реакциях образования Fe_3O_4 .

Область точки B_0 характеризуется зоной прекращения процесса осаждения молекулярного магнетита и активизацией процесса химического разложения твердой фазы магнетита (стенок пор оксидного слоя - магнетита). Концентрация молекулярного водорода в данной области несколько снижается из-за разбавления в электролите и удаления от места его образования (раздел металл – электролит). Из области точки A_0 к области точки B_0 происходит диффундирование не осевшей на стенках пор части образовавшегося молекулярного Fe_3O_4 (стадия – 4), который одновременно подвержен химическому разложению. Исследования [2] показывают, что в порах осаждается около 50% от всего образованного молекулярного магнетита. При этом очевидно, что в установившемся режиме ЭК количество осевшего внутри оксидного слоя магнетита должно быть равно его количеству, выносимому в поток электролита, т.е. интенсивности эрозии-коррозии. В области выше точки B_0 за счет поступления из жидкой пленки ионов водорода реализуется также химическое разложение и твердой фазы магнетита (стенок пор оксида).

Область точки C_0 характеризуется максимальной скоростью химического разложения твердой фазы магнетита (стадия – 6), что обусловлено достаточным количеством необходимых компонентов химической реакции разложения, т.е. ионов водорода и молекул водорода. При этом концентрация молекулярного водорода от точки B_0 к точке C_0 уменьшается вследствие двух причин: а) $[\text{H}_2]$ расходуется в реакции химического разложения Fe_3O_4 ; б) $[\text{H}_2]$ уменьшается по мере удаления от источника его возникновения (стадия 1 и 2).

Исследованию вопросов образования и растворения магнетита, с точки зрения влияния этих процессов на ЭК металлов посвящен ряд работ [3,4,5]. Концентрация молекулярного магнетита Fe_3O_4 уменьшается от точки B_0 к точке C_0 вследствие его химического разложения и удаления от места образования (стадия 2). Можно предположить, что весь молекулярный магнетит (стадия 4) в области точки C_0 практически полностью химически разлагается и продукты разложения диффундируют в порах по направлению к потоку (стадия 5). От точки C_0 к точке D_0 происходит замедление процесса химического разложения твердой фазы магнетита – пор оксида (стадия 6), поскольку концентрация молекулярного водорода уменьшается из-за его расхода в реакции химического разложения Fe_3O_4 и еще большего удаления от места его возникновения (граница раздела металл-электролит). В области между точками C_0 и D_0 растет концентрация продуктов химического разложения магнетита $[\text{Fe}^{2+}, \text{Fe}(\text{OH})^+, \text{Fe}(\text{OH})_2, \text{Fe}(\text{OH})_3]$, которые затем выносятся в основной поток – жидкую пленку.

Таким образом, интенсивность химического разложения твердой фазы (оксидного слоя) магнетита в точке D_0 снижается по сравнению с точкой C_0 . По-видимому, далее выше точки D_0 и на всей внешней границе раздела оксид – жидкая пленка, интенсивность химического разложения Fe_3O_4 протекает примерно в одинаковых условиях. Пунктиром показаны границы разделов металл – электролит и оксид – электролит, которые можно ожидать через некоторый период времени τ в условиях установившегося режима. Можно предположить возможность скола верхней части оксида как результат химического разложения оксида в области точки C_2 и механического воздействия со стороны жидкой пленки.

Очевидно, что скорость ЭК определяется скоростью наиболее медленно протекающего этапа, т.е. процессами массопереноса, которые играют основную роль в ЭК металлов в двухфазном потоке. При совместном воздействии на металл каплеударной эрозии и ЭК интенсивность повреждения металла определяется скоростью наиболее быстро протекающего механизма повреждения металла.

Таким образом, построенная физико-химическая картина эрозионно-коррозионных процессов металла в двухфазном потоке учитывает все основные параметры и критерии, отражающие влияние термодинамических условий, газогидродинамики двухфазного потока, химического состава металла и структуру оксидного слоя.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Томаров, Г.В.* Физико-химические процессы и закономерности эрозии-коррозии металла энергетического оборудования в двухфазном потоке // Теплоэнергетика. – 2001. - №9. – С. 59-67.
2. *Ganic, E.N., Rohsenow W.M.* On the Mechanism of Liquid Drop Deposition in Two Phase Dispersed Flow // Transactions of the ASME. – 1979. – V. 110. – P. 288-294.
3. *Bohnsack, Von G.* Das Verhalten des Eisen (II)-hydroxids bei höheren Temperaturen // Mitteilungen der VGB. – 1971. – V. 51, №4. – P. 328-338.
4. *Bohnsack, Von G.* Zum Verstandnis der Schikorr-Reaktion (eine kritischel Literaturstudie) // Mitteilungen der VGB. – 1971. – V. 51, №1. – P. 66-79.
5. *Kunze, Von E., Allgaier W.* Erosionskorrosion in Nabdampf // VGB Kraftwerkstechnik. – 1985. – V. 65. – P. 64-70.

PHYSICO-CHEMICAL MODEL OF EROSION-CORROSION OF THE METAL WALL OF THE ABSORBER OF INSTALLATION AMINE GAS CLEANING

Y. Dekina, R. Gibadullin

*Astrakhan State Technical University
16, Tatischev st., Astrakhan, 414025, Russia*

Abstract. Article is devoted to developing physico-chemical model of erosion-corrosion of metals in the two-phase flow in the lower zone of the absorber of installation amine gas desulfurization. Author proposes a model which allows to develop mathematical model of the erosion-corrosion processes of metal in the two-phase flow.

Key words: physico-chemical model, erosion-corrosion, two-phase flow, absorber.

УДК.533.72.

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ЭВОЛЮЦИИ ГАЗОПОДОБНОГО ОБЛАКА В ПЕРИОДИЧЕСКОМ ПОЛЕ

А.Н. Голов

Московский государственный областной университет
105005, Москва, ул. Радио, 10а

Аннотация. Исходя из уравнения Лиувилля – Гиббса получены статистические функции распределения системы дисперсных частиц в периодическом поле. Дано кинетическое описание эволюции системы для частного случая. Выявлены основные закономерности эволюции системы и их зависимость от параметров задачи.

Ключевые слова: Слова дисперсная система, периодическое поле, кинетика эволюции.

1. Постановка задачи.

Целью данной работы является выяснение и теоретическое описание закономерностей, управляющих эволюцией системы большого числа частиц N в периодическом внешнем поле в вакууме. Этим подход, изложенный, в частности, в [1 – 4], распространяется на случай переменных полей. В исходных положениях предлагаемая теория применима как к частицам атомарного масштаба, так и к дисперсным частицам, достаточно многочисленным и мелким, чтобы имели значение хаотичность их движения и статистические закономерности. Мы называем систему газоподобной, когда частицы предполагаются не взаимодействующими иначе, как через упругие столкновения. Это приближение приемлемо и тогда, когда между частицами действуют короткодействующие силы, но система достаточно разрежена. Мы примем, что объём системы V весьма велик, и геометрические ограничения на движение частиц несущественны. Практически это приемлемо, когда концентрация частиц достаточно быстро убывает к границе системы. Тогда можно пренебречь и собственным объёмом частиц $NV_0 \ll V$ (V_0 – объём одной частицы). Далее, распространяя интегралы по фазовым переменным на неограниченные области, предполагаем, что численная ошибка будет мала, когда подинтегральная функция достаточно быстро убывает к границам области интегрирования. Частицы полагаем нелетучими, бесструктурными, считая, что их внутренние степени свободы не возбуждаются. Примерами подобной модели являются: облако дипольных дисперсных частиц в неоднородном переменном электрическом поле, свободный газ в акустическом поле и др. Пусть на все однородные частицы действуют периодические силы, имеющие вид:

$$\mathbf{f}_i = \mathbf{A} \cdot \sin(\omega t) . \quad (1)$$

Добавление постоянной начальной фазы в (1) не имеет принципиального значения. Далее рассмотрим тот случай, когда амплитуда силы не зависит от координат (например, действующее на дипольные частицы электрическое поле с постоянным градиентом). Мы также будем рассматривать такие пространственные и временные масштабы,

в которых неоднородностью поля можно пренебречь. Диссипацией энергии вследствие излучения частиц также пренебрегаем. Пусть $\mathbf{f}_i = \mathbf{f}$ не зависит от номера частицы i . Выберем лабораторную систему отсчёта с началом в центре масс при $t = 0$. Систему координат выберем, направив OZ вдоль действующей силы $\mathbf{f}$, которая при таком выборе имеет только z -компоненту. Задача, очевидно, существенно нестационарная.

Для отыскания N -частичной функции распределения системы будем исходить из нестационарного уравнения Лиувилля – Гиббса (УЛГ) в форме Пригожина [5]:

$$\partial F_N / \partial t + \hat{L} F_N = 0, \quad (2)$$

где стационарный лиувиллиан в классическом варианте:

$$\hat{L} = \dot{q}_i \frac{\partial}{\partial q_i} + \ddot{q}_i \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} = \frac{p_i}{m} \frac{\partial}{\partial q_i} + \dot{p}_i \frac{\partial}{\partial p_i}$$

(подразумевается сумма по повторяющимся индексам i , как в тензорном анализе) и:

$$\dot{p}_i = f_i \quad (3)$$

для всех z -компонент. По OX и OY силы не действуют, и в плоскости XY имеем свободное расширение, для которого случая функция распределения известна ([5, 6] и др.). Новые закономерности получим для зависимости функции распределения от переменных $\{q_{i3}, p_{i3}\}$ ($q_{i3} = q_{iz}, p_{i3} = p_{iz}$). Предполагая статистическую независимость фазовых переменных, будем искать решение (2) в виде:

$$F_N(\{q_i, p_i\}) = F_{XY}(\{q_{i1}, p_{i1}, q_{i2}, p_{i2}\}) \cdot F_Z(\{q_{i3}, p_{i3}\}), \quad (4)$$

где индексы 1, 2 означают xy -компоненты, 3 – z -компоненты, причём $F_{XY}(\{q_{i1}, p_{i1}, q_{i2}, p_{i2}\})$ известно. Тогда для F_Z имеем уравнение того же вида (2), но с лиувиллианом, содержащим сумму по номерам частиц ($i = 1, \dots, N$).

2. Общий вид функции распределения и её нормировка.

Для решения данного уравнения воспользуемся методом интегралов однородного лиувиллиана (интолов), изложенным в [1]. Для данного случая таковыми интолами являются следующие выражения:

$$I_{1k} = p_k - \frac{A}{\omega} \cdot (1 - \cos(\omega t)); \quad (5)$$

$$I_{2k} = q_k - \frac{p_k t}{m} - \frac{A}{m\omega^2} \cdot [\omega t \cdot \cos(\omega t) - \sin(\omega t)]. \quad (6)$$

Интолы (5) и (6) удовлетворяют нестационарному УЛГ вида (2), как и любой функционал интолов. Учитывая требования инвариантности решения, соответствующие

свойствам исходного уравнения и симметрии задачи, а также соображения простоты, ищем решение (2) в виде функционала квадратичной формы интолов:

$$H_t = a \cdot I_{1k} \cdot I_{1k} + b \cdot I_{2k} \cdot I_{2k} - c \cdot I_{1k} \cdot I_{2k} \equiv \sum_{k=1}^N H_k, \quad (7)$$

где a, b, c – константы задачи, определяемые из дополнительных соображений. Возможно включение в (7) линейных по интолам членов, но это не принципиально, и приводит только к сдвигу нуля отсчёта на константу и переходу в движущуюся ИСО. В классе квазигиббсовых решений нормированной функцией $F_Z(H_t(\{q_{i3}, p_{i3}\}))$ удовлетворяющей уравнению вида (2) является

$$F_Z(H_t(\{q_{i3}, p_{i3}\})) = \frac{1}{Z_3^N} \cdot \exp(-H_t), \quad (8)$$

где статистический интеграл $Z = Z_3^N$ не зависит от фазовых переменных, но в общем случае может зависеть от макропараметров и времени. Из условия нормировки, имеем:

$$Z_3 = \int_{\Omega} \exp(-H_k) \cdot dp_{3k} dq_{3k}, \quad (9)$$

где интеграл берётся по заданной области Ω на фазовой плоскости p_3, q_3 .

Показатель экспоненты в (9) для принятой квадратичной формы (7) приводится к виду:

$$H_k = k_1 p_{k3}^2 + k_2 p_{k3} + k_3 p_{k3} q_{k3} + k_4 q_{k3} + k_5 q_{k3}^2 + k_6. \quad (10)$$

Здесь (и далее):

$$k_1 = a + ct / am + bt^2 / am^2;$$

$$k_2 = \frac{A \cdot \cos(\omega t)}{m^2 \omega} 2bt^2 - \frac{A \cdot \{cm\omega \cdot [1 - 2\cos(\omega t)] + 2b \cdot \sin(\omega t)\}}{m^2 \omega^2} t - \frac{A \cdot \{2am\omega \cdot [1 - \cos(\omega t)] + c \cdot \sin(\omega t)\}}{m\omega^2};$$

$$k_3 = -(c + 2bt / m);$$

$$k_4 = -\frac{A \cdot \cos(\omega t)}{m\omega} 2bt + \frac{A \cdot \{cm\omega \cdot [1 - \cos(\omega t)] + 2b \cdot \sin(\omega t)\}}{m\omega^2};$$

$$k_5 = b;$$

$$k_6 = \frac{A^2 \cdot \cos^2(\omega t)}{m^2 \omega^2} bt^2 - \frac{A^2 \cdot \cos(\omega t) \cdot \{cm\omega \cdot [1 - \cos(\omega t)] + 2b \cdot \sin(\omega t)\}}{m^2 \omega^3} t - \\ - \frac{A^2 \cdot \cos(\omega t) \cdot \{am\omega \cdot [2 - \cos(\omega t)] + c \cdot \sin(\omega t)\}}{m\omega^3} + \frac{A^2 \cdot \sin(\omega t) \cdot (cm\omega + b \cdot \sin(\omega t))}{m^2 \omega^4} + \frac{A^2 a}{\omega^2}$$

Используя (10) и (11) и выполнив интегрирование в (9), находим:

$$Z_3 = \frac{2\pi}{\sqrt{4ab - c^2}}. \quad (12)$$

Эта формула имеет тот же вид, что и для случая свободного расширения, рассмотренного в [6, 7], и даёт то же значение, если мы принимаем константы a , b , c в (7) одними и теми же для всех k . Отметим, что здесь мы, как обычно, интегрировали по фазовым переменным в бесконечных пределах и не рассматривали пространственных ограничений, а также ограничений на значения импульса, вызванных релятивистскими или иными соображениями. В случае наличия таких ограничений выражение Z иное, чем выше, и может зависеть от времени. Различные варианты статистических распределений с ограниченными спектрами значений фазовых переменных приведены в [8]. Таким образом, нормированная функция (8) определена после подстановки выражений (11) и (12); тогда определена и полная функция распределения (4) (подробная формула не приводится ввиду её громоздкости). Заметим, что выполняется предельный переход найденного распределения к функции для случая свободного расширения при $A \rightarrow 0$.

3. Частные распределения, наивероятнейшие и средние значения.

Поскольку эволюция системы в плоскости XU известна ([1, 2] и др.), здесь подробно рассмотрим только её движение и соответствующие распределения по OZ , причём для газоподобной системы достаточно рассмотреть 1-частичные распределения вида (8):

$$F_1(q_3, p_3) = \frac{1}{Z_3} \cdot \exp \left[- \left(k_1 p_3^2 + k_2 p_3 + k_3 p_3 q_3 + k_4 q_3 + k_5 q_3^2 + k_6 \right) \right], \quad (13)$$

(далее индекс 3 опускаем). Частные распределения по импульсам и координатам найдём интегрированием (13) (с найденным Z_3) по сопряжённой фазовой переменной. Для неограниченных значений q получим, произведя подстановки (11), следующее нестационарное распределение по импульсу:

$$F(p) = \sqrt{aw / \pi} \cdot \exp \left[-aw \cdot (p - p_m^2) \right], \quad (14)$$

где обозначено $w = 1 - c^2 / (4ab)$, и наивероятнейший импульс:

$$p_m = (A / \omega) \cdot [1 - \cos(\omega t)]. \quad (15)$$

Итак, имеем распределение максвелловского типа с постоянной дисперсией и периодически движущимся центром, причём $p_m \geq 0$. Очевидно, что среднее значение $\langle p \rangle = p_m$. Среднее значение кинетической энергии на 1 частицу (для движения по OZ):

$$\left\langle \frac{p^2}{2m} \right\rangle = \frac{1}{4amw} + \frac{A^2}{2m\omega^2} \cdot [1 - \cos(\omega t)]^2. \quad (16)$$

Второй член справа в (16) выражается через квадрат среднего импульса (15) и всегда ≥ 0 . При отсутствии внешней силы этот член аннулируется, что позволяет интерпретировать 1-й член, определяющий дисперсию распределения, как среднюю энергию хаотического теплового движения, так что можем приравнять:

$$\frac{1}{2amw} = \theta, \quad (17)$$

что даёт условие для определения константы a . Зависимость распределения (14) от времени для разных p показана на рис.1.

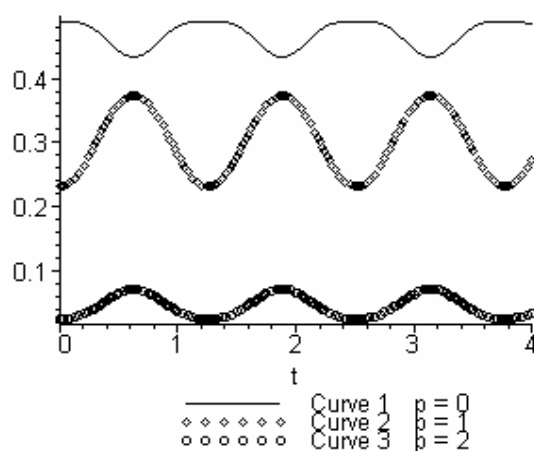


Рис.1. Зависимость нестационарного распределения по импульсу (14) от времени для $p=0, 1, 2$ (При построении принято:
 $A=1, L=3, m=1, \omega=5, a=1, b=1/(3 \cdot L^2), c=1/3 \cdot 3^{1/2}/L, w=3/4$)

Распределение по координатам найдём интегрированием (13) по импульсу.

$$F(q) = \sqrt{\frac{bw}{\pi u}} \cdot \exp \left[-\frac{bw \cdot (q - q_m)^2}{u} \right]. \quad (18)$$

Здесь функция времени

$$u = 1 + ct / am + bt^2 / am^2, \quad (19)$$

и наивероятнейшая координата

$$q_m = \left(A / m\omega^2 \right) \cdot [\omega t - \sin(\omega t)]. \quad (20)$$

Из (20) видно, что максимум распределения движется по сложному закону, описывающему дрейф со скоростью $v_m = A / m\omega$ и периодическое смещение с амплитудой $A / m\omega^2$. Дисперсия распределения зависит от времени пропорционально функции (19):

$$\langle q^2 \rangle - \langle q \rangle^2 = u / (2bw) , \quad (21)$$

То есть, распределение со временем «расплывается», причём это расплывание не зависит от действия поля.

4. Кинетическое описание. Начальное и текущее состояния.

Зная функцию распределения (13) и используя известную процедуру введения кинетических операторов ([9] и др.) перейдём к описанию системы частиц в представлении квазинепрерывной среды. Найдём эффективную плотность облака дисперсных частиц:

$$\rho = Nm \cdot f(x, y) \cdot \sqrt{\frac{bw}{\pi u}} \cdot \exp \left[-\frac{bw \cdot (z - z_m)^2}{u} \right] . \quad (22)$$

Здесь $f(x, y)$ – известная функция, описывающая свободное расширение в плоскости ХУ, которая может быть получена из выражения, аналогичного (18), с предельным переходом $A \rightarrow 0$, и обозначено $q \rightarrow z$, $q_m \rightarrow z_m$.

$$f(x, y) = \frac{bw}{\pi u} \cdot \exp \left[-\frac{bw \cdot (x^2 + y^2)}{u} \right] . \quad (23)$$

Плотность потока дисперсных частиц:

$$j_z = -N \cdot f(x, y) \cdot \frac{\sqrt{bw} \cdot (k_2 + k_3 z) \cdot \exp \left[-bw \cdot (z - z_m)^2 / u \right]}{2au \cdot \sqrt{\pi u}} . \quad (24)$$

Плотность кинетической энергии движения облака дисперсных частиц по ОZ:

$$\rho_E = \left[1 + \frac{(k_2 + k_3 z)^2}{2au} \right] \cdot \frac{\rho}{4aum^2} . \quad (25)$$

Плотность (22) нормирована на полную массу. Интегральное выражение кинетической энергии движения облака по ОZ, находимое из (25):

$$E = N \left(\frac{1}{4amw} + \frac{p_m^2}{2m} \right) , \quad (26)$$

складывается из энергии хаотического движения и энергии периодического движения.

Ниже рассмотрен пример, когда дисперсные частицы начально распределены в виде плоского широкого облака толщиной $2L$ и достаточно большой ширины S , чтобы можно было пренебречь краевыми эффектами в плоскости XY . Далее система неограниченно расширяется в вакууме, находясь под действием периодического внешнего поля. При этом распределение вида (13) рассматривается как совместное распределение в расширенном фазовом пространстве [10 – 12], где производится замена $dq \rightarrow dq_0 \cdot dq_t$ ($q = q_0 + q_t$), и подлежит дополнительной нормировке, сводимой к делению на $2LS$.

Из выражений (22), (24) и (25) находим выражения соответствующих величин в начальном и текущем состоянии (ниже обозначено $q_3 \equiv z$, $q_m \equiv z_m$, $q_t \equiv z_t$).

$$\langle \rho \rangle = Nm / 2LS ; \quad (27)$$

$$|\rho\rangle = \frac{Nm}{4LS} \cdot \left\{ \operatorname{erf} \left[\frac{bw}{u} \cdot (L + z_t - z_m) \right] + \operatorname{erf} \left[\frac{bw}{u} \cdot (L - z_t + z_m) \right] \right\} \cdot f(x_t, y_t) , \quad (28)$$

где z_m см. (20), $f(x_t, y_t)$ – безразмерная функция, известная из решения задачи о свободном расширении системы, $\operatorname{erf}(x)$ – интеграл вероятностей. Интеграл от (28) по объёму равен полной массе дисперсной фазы. Плотность потока массы в начальном состоянии (при $t=0$) равна нулю. Но существуют ненулевые значения плотности потока в данном направлении, которые могут быть использованы при наложении граничных условий. Плотность потока массы в текущем состоянии приводится к сумме конвективного и неконвективного потоков:

$$|j_z\rangle = |\rho\rangle \cdot v_{mz} + \frac{k_3}{4abwm} \cdot \frac{\partial |\rho\rangle}{\partial z_t} , \quad (29)$$

где z -компонента градиента находится из (28), а массовая скорость конвективного потока дисперсной фазы, представляемой квазинепрерывной средой (см. (15)):

$$v_{mz} = A \cdot [1 - \cos(\omega t)] / (m\omega) . \quad (30)$$

Структура формулы (29) позволяет ввести эффективную массовую скорость, выражаемую сложной функцией координат и времени, которая будет содержать периодическую и дрейфовую составляющие. Начальная плотность кинетической энергии движения дисперсной фазы по OZ :

$$\langle \rho_E \rangle = \langle \rho \rangle / (4am^2w) , \quad (31)$$

то есть, сводится к энергии хаотического движения. Текущая плотность этой энергии:

$$|\rho_E\rangle = \left(\frac{mv_{mz}^2}{2} + \frac{1}{4amw} \right) \cdot \frac{|\rho\rangle}{m} - \frac{k_3 \cdot N}{32a^2mLSu^{3/2}\sqrt{\pi bw}} \cdot f(x_t, y_t) .$$

$$\cdot \left\{ [4ap_{me} + k_3 \cdot (z_m - z_t + L)] \cdot \exp \left[-\frac{bw(L + z_m - z_t)}{u} \right] - [4ap_{me} + k_3 \cdot (z_m - z_t - L)] \cdot \exp \left[-\frac{bw(L - z_m + z_t)}{u} \right] \right\}. \quad (32)$$

Интегральное выражение начальной энергии, связанной с движением по OZ:

$$\langle E \rangle = N / (4amw), \quad (33)$$

где величина $\theta = 1/(2amw)$ играет роль модуля распределения (см. (14) и (17)). Интегральная энергия в текущем состоянии, полученная интегрированием (32) по бесконечному объёму, та же, что была получена выше (см. (26), также (15) и (16)). Но кинетическое рассмотрение позволяет найти распределение плотности энергии в пространстве и её зависимость от времени (32). Среднее за период значение энергии (26):

$$\langle E \rangle_T = N \cdot (1/4amw + 3A^2/4m\omega^2). \quad (34)$$

Отсюда видно, что энергия облака в поле периодических сил в среднем выше. Когда частицы облака и волновое поле составляют замкнутую систему, энергия поля в среднем уменьшается. В пределе отсутствия внешнего переменного поля ($A \rightarrow 0$) все полученные выше формулы переходят в аналогичные, полученные для такого случая в [12].

5. Графическое представление результатов и основные закономерности процесса.

Полученные выше формулы (28), (29) и (32) содержат сложные зависимости величин, описывающих эволюцию системы от z и t . Поведение этих величин также зависит от параметров A , L , S , m , ω . Константы задачи a , b , c (и выражаемая через них w) могут быть найдены из граничных условий и выражения (14). Но отыскание этих констант составляет отдельную объемистую задачу и в данной статье не рассматривается. Для простоты можно принять $a=1$, $b=1$, $c=1$ (тогда $w=3/4$), что означает просто выбор специальной системы единиц. Но такой простой выбор приводит к ограничениям на значение возможной начальной толщины слоя. Чтобы избежать этого, мы сохраним выбор $a=1$, $w=3/4$, а остальные константы доопределим из дополнительных соображений.

Введём безразмерную плотность – функцию, полученную делением (26) на исходную плотность пластины. Зависимость этой функции от x_t , y_t далее игнорируем (она может быть исключена интегрированием по этим переменным). Эта безразмерная плотность:

$$|\tilde{\rho}\rangle = \frac{1}{2} \cdot \left\{ \operatorname{erf} \left[\frac{bw}{u} \cdot (L + z_t - z_m) \right] + \operatorname{erf} \left[\frac{bw}{u} \cdot (L - z_t + z_m) \right] \right\}. \quad (35)$$

Интеграл от (35) по неограниченной области изменения z_t при любом t равен $2L$. Но этот результат физически неудобен, т. к., интегрируя безразмерную функцию, получаем размерную величину. Вводя безразмерную координату $\tilde{z} = (bw)^{1/2} z_t$ и интегрируя (35) по этой переменной, получим (при любом t) безразмерное выражение $2(bw)^{1/2} L$. Потребуем нормировки (35) на единицу. Тогда:

$$b = 1/4L^2w; \quad c = \sqrt{1-w}/L\sqrt{w}. \quad (36)$$

При таком выборе констант площади графиков (35) нормированы при любых L и t . Для лучшей выразительности графика далее мы используем приведённую плотность

$$|\bar{\rho}\rangle = |\tilde{\rho}\rangle / \text{erf}(1/2), \quad (37)$$

которая равна единице в начальный момент при $z_t = 0$. Зависимость приведённой плотности (37) от z и t представлена на рис. 2.

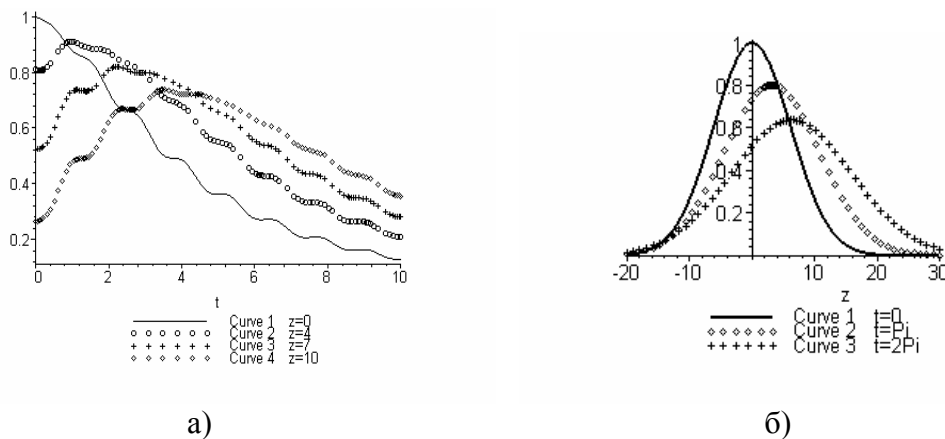


Рис. 2. Зависимость приведённой текущей плотности от времени при $z = 0, 4, 7, 10$ – (а), и профили приведённой текущей плотности в моменты $t = 0, \Pi, 2\Pi$ – (б), ($L=4, m=1, \omega=5, A=5$)

Анализ формулы (28) и соответствующих графиков выявляет следующие закономерности. Изменение плотности со временем в данной точке складывается из монотонного убывания её вследствие расширения системы и из периодического изменения под действием поля; при всех $z_t \geq L$ имеем прохождение максимумов плотности. Колебания плотности растут с амплитудой действующей силы и уменьшаются с увеличением её частоты. Увеличение частоты колебаний замедляет монотонное убывание плотности. Увеличение амплитуды колебаний ускоряет этот процесс. Профиль плотности облака монотонно расплывается со временем; максимум плотности, понижаясь, дрейфует в положительном направлении с периодическими временными замедлениями и остановками. Дисперсия плотности не зависит от периодической силы.

Для удобства анализа плотность потока (29) также поделим на исходную плотность пластины и исключим её зависимость от x_t, y_t . Константы задачи выберем, как выше. Приведение к начальному значению здесь невозможно, т. к.

$$|j_z\rangle(z=0, t=0) = 0.$$

Зависимость функции $|\tilde{j}_z\rangle(z, t)$, полученной из (29) указанным образом, от z и t представлена на рис. 3.

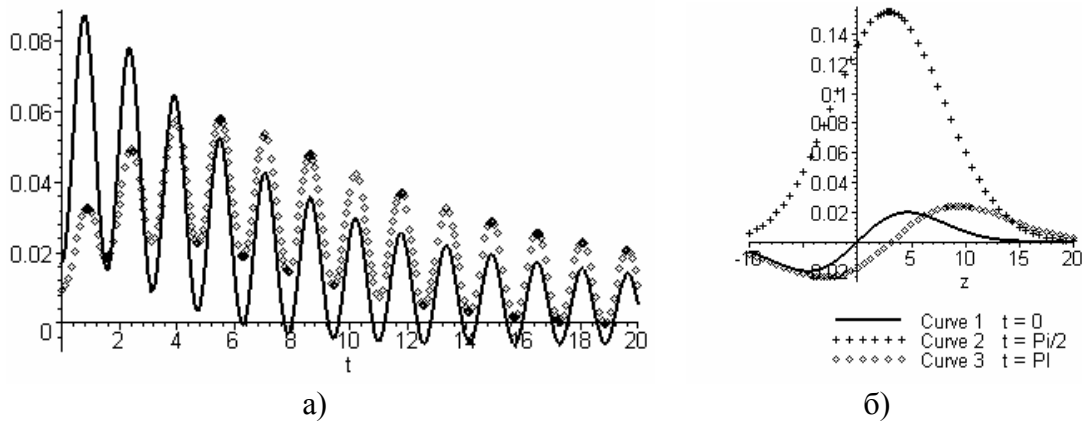


Рис.3. Зависимость текущей плотности потока от времени.

Линия - $z=3$, пунктир - $z=9$ – (а).

Профили текущей плотности потока в моменты $t = 0, \pi/2, \pi$ – (б)

(принято: $A=2, L=3, \omega=4, m=1$)

Эти графики и общая формула (29) обнаруживают следующие закономерности. Изменение плотности потока со временем в данной точке складывается из аperiодического изменения, вследствие дрейфа и «расползания» массы, и из периодического изменения вследствие действия поля. Когда плотность потока знакопеременна, промежутки её положительных значений больше последующих промежутков отрицательных значений. Максимум профиля плотности потока дрейфует в положительном направлении с периодическими временными замедлениями и попятными движениями. Чередуются профили, соответствующие сосредоточенному движению вещества преимущественно в положительном направлении, и профили, показывающие его движение в разных направлениях в разных областях пространства. Увеличение частоты колебаний уменьшает амплитуду максимума плотности потока.

Для графического представления плотности энергии используем формулу (32), также поделив её на плотность пластины, исключив зависимость от x_i, y_i и подставив те же константы. Зависимость этой величины $|\tilde{\rho}_E\rangle(z, t)$ от z и t представлена на рис.4. Из приведённых графиков (и формулы (32)) видим, что плотность энергии – неотрицательная функция, изменение которой со временем также складывается из периодического и аperiодического изменения. Последнее немонотонно при $z > L$, так что функция проходит через абсолютный максимум при $t > 0$. Профиль плотности энергии при $t=0$ симметричен; со временем профили с одним максимумом чередуются с «двугорбыми» профилями, причём максимум «одногогорбого» профиля дрейфует в положительном направлении. Увеличение частоты уменьшает амплитуду максимума плотности энергии.

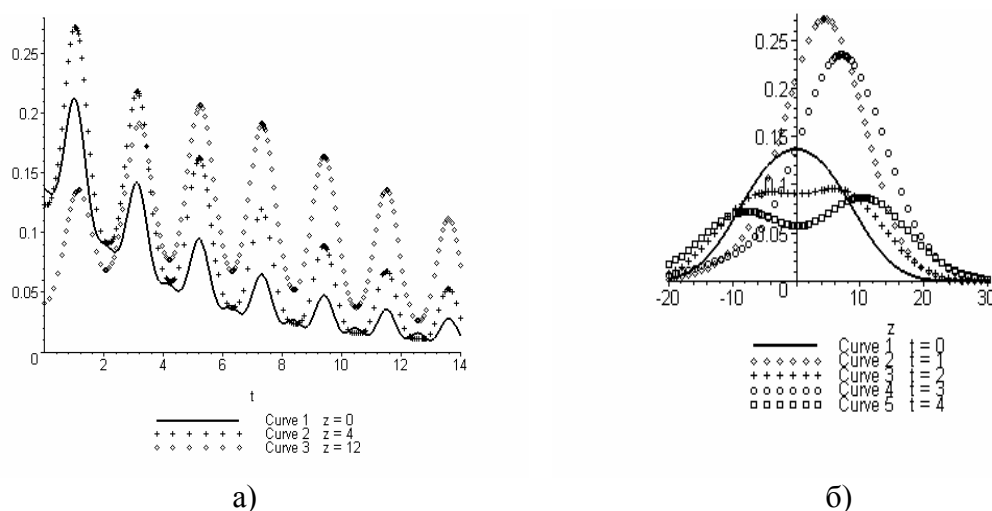


Рис. 4. Зависимость текущей плотности энергии от времени при $z = 0, 4, 12$ - (а)
Профили плотности энергии в текущем состоянии при $t = 0, 1, 2, 3, 4$ - (б)
(принято: $A=1$, $L=4$, $\omega=3$, $m=1$)

Приведённые результаты получены аналитически, и общие формулы являются строгими для данной модели. Их совокупность описывает локально и мгновенно пространственно-временную эволюцию системы. Численные методы могут быть привлечены уже для получения из этих формул практически нужных таблиц и графиков.

ЛИТЕРАТУРА

1. Яламов, Ю.И., Голов А.Н. Статистикомеханические методы в теории неравновесных молекулярных и дисперсных систем. ВИНТИ, №2423-B92, М., МПУ, 280 с. 1992.
2. Голов, А.Н., Харитонов А.П. Эволюция газоподобной системы многих дисперсных частиц в потенциальном поле. //Вестник МГОУ. Серия «Физика-математика», №3-4, с. 12 – 21, 2008.
3. Голов, А.Н., Харитонов А.П. Эволюция плоского газоподобного облака в потенциальном поле. ВИНТИ. № 621 – В2008, 21 с., М., МГОУ, 2008.
4. Голов, А.Н. Эволюция газодисперсного облака с вязкой газовой фазой в поле потенциальных сил. Вестник МГОУ. Серия «Физика-математика», №1, 2010, с. 17 – 27.
5. Пригожин, И. Неравновесная статистическая механика. М.: «Мир», 1964, 314 с.
6. Голов, А. Н., Константиновский А.В. Статистикомеханическое решение задачи о свободном расширении системы невзаимодействующих частиц.//«Современные проблемы физики аэродисперсных систем», с.95-108, ВИНТИ, №4900-B91, М., МПУ, 1991.
7. Голов, А.Н., Константиновский А.В. Статистическая газодинамика и термодинамика свободно расширяющейся неравновесной системы невзаимодействующих частиц, 24 с., ВИНТИ, №2424-B92, М., МПУ, 1992.

8. Яламов, Ю.И., Голов А.Н. Ограниченные распределения в статистической теории газодисперсных систем. ДАН, 2005, Т. 401, № 3, с. 333-336.
9. Гуров, К.П. Основания кинетической теории. М.: «Наука», 1966. 351 с.
10. Прохоров, Ю.В., Розанов Ю.А. // Теория вероятностей. М.: «Наука», 1973. 494 с.
11. Голов, А.Н. Нахождение полей плотности, образуемых диспергированием протяжённых тел в вакууме. ВИНТИ № 121 - В2002, М., МПУ, 7 с., 2002.
12. Яламов Ю.И., Голов А.Н. Эволюция облака, созданного быстрым распылением широкой пластины в вакууме. //Труды Центра фундаментальных научных исследований МГОУ, № 1, с. 15 – 26, М., МГОУ, 2005.

STATISTICAL THEORY OF THE EVOLUTION OF THE GAS-DISPERSED CLOUD IN THE PERIODICAL FIELD

A. Golov

*Moscow region state university
10a, Radio st., Moscow, 105005, Russia*

Abstract. Statistical functions of distribution for the gas-like system of the dispersed particles in the periodical field were found from Liouville – Gibbs equation. The kinetic description of the evolution of the system for a special case was given. The main physical laws of the evolution of the system were revealed and their dependence from the task parameters was explored.

Key words: dispersed system periodical field, kinetic of the evolution

УДК: 539.1

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ОРБИТЫ РЕЛЯТИВИСТСКОГО АНТИПРОТОНА В НЕЛИНЕЙНОМ ЯДЕРНОМ ПОЛЕ

А.С. Рабинович, М.А. Крамской

*Московский государственный университет приборостроения и информатики
107996, Москва, Стрёмка, 20*

Аннотация. В статье исследуются орбитальные движения релятивистского нуклона и антинуклона в нелинейном поле массивного ядра. Данная задача приводится к системе нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка относительно радиальной координаты и полярного угла частицы. Проводятся численные исследования этой системы уравнений. Показывается, что в случае движения вокруг ядер антипротонов могут возникать периодические орбиты. Исследуются условия их существования в релятивистском случае.

Ключевые слова: ядерное поле, потенциал Юкавы, нуклоны, антипротоны, периодические орбиты.

Как известно, в отличие от электромагнитных сил, ядерные силы имеют конечный радиус действия $R_s \sim 10^{-15}$ м, то есть являются короткодействующими. Описание короткодействующего характера ядерных сил и предсказание правильного значения массы переносчика ядерного взаимодействия – пиона стало возможным с появлением первой реалистической теории ядерных сил, предложенной в 1935 г. Х. Юкавой.

Уравнение Юкавы для описания ядерного поля в инерциальной системе отсчета может быть представлено в следующем виде [1,2]:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \left(\frac{m_\pi c}{\hbar} \right)^2 \varphi = -4\pi \left(\frac{G}{m_p} \right)^2 \rho_0(\mathbf{r}, t), \quad (1)$$

где φ – потенциал ядерных сил, отнесенный к массе покоя протона; t – время; $\mathbf{r} = (x, y, z)$ – радиус-вектор, m_π – масса покоя нейтрального пиона, m_p – масса покоя протона, ρ_0 – плотность массы покоя нуклонного источника, G – константа ядерного взаимодействия.

Как следует из экспериментальных данных [1,2], ядерному полю φ соответствует следующая безразмерная величина

$$\frac{G^2}{\hbar c} = 0,080. \quad (2)$$

Теория Юкавы достигла немалых успехов в описании ядерных сил. Однако, как показали экспериментальные исследования, эта теория может быть справедливой только при сравнительно небольших значениях ядерного потенциала [1,2], ввиду линейности уравнения Юкавы. При достаточно больших значениях ядерного потенциала линейная теория Юкавы перестает отвечать экспериментальным данным и должна быть заменена некоторым нелинейным обобщением.

Одно из таких нелинейных обобщений было предложено в работах [3-5]. В них обобщение уравнения Юкавы искалось в виде

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \left(\frac{m_\pi c}{\hbar} \right)^2 \varphi = -4\pi \left(\frac{G}{m_p} \right)^2 \rho_0(\mathbf{r}, t) f(\varphi), \quad (3)$$

где $f(\varphi)$ – некоторая неизвестная функция ядерного потенциала. Ее нахождение было основано на следующем принципе, касающемся физического смысла скалярного потенциала φ . Согласно ему, в нелинейной теории ядерных сил, так же как и в теории Юкавы, величина $m_p \varphi$ должна представлять собой потенциальную энергию протона.

Как было показано в [3-5], этому принципу отвечает только функция $f(\varphi)$ следующего вида:

$$f(\varphi) = \exp(\varphi / c^2). \quad (4)$$

Будем рассматривать движение нуклонов и антинуклонов вокруг массивных ядер в рамках квазиклассического приближения. В этом случае для тензора энергии-импульса вещества и ядерного поля с потенциалом φ в [3-5] было получено следующее выражение:

$$T^{ik} = c^2 \rho_0 e^{\varphi/c^2} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{ds} + \frac{1}{\lambda} \left[\left(g^{in} g^{kl} - \frac{1}{2} g^{ik} g^{nl} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x^n} \frac{\partial \varphi}{\partial x^l} + \frac{g^{ik}}{2} \left(\frac{m_\pi c \varphi}{\hbar} \right)^2 \right], \quad (5)$$

где ρ_0 - плотность массы частицы в состоянии покоя при $\varphi = 0$, $\lambda = 4\pi G^2 / m_p^2$, $ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k$, g_{ik} - метрический тензор, $i, k = 0, 1, 2, 3$, x^i - пространственно-временные координаты, а потенциал φ в инерциальной системе отсчета описывается уравнением

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^n \partial x_n} + \frac{m_\pi^2 c^2}{\hbar^2} \varphi = -4\pi \left(\frac{G}{m_p} \right)^2 \rho_0(\mathbf{r}, t) \exp(\varphi/c^2). \quad (6)$$

Используя уравнение (3) для ядерного потенциала вместе с формулой (4) и соответствующий им тензор энергии-импульса, в работах [3-5] были найдены динамические уравнения для ядерного вещества.

При отсутствии электрического заряда вещества они имеют следующий вид в инерциальной системе отсчета:

$$c^2 \frac{d^2 x^k}{ds^2} + \frac{d\varphi}{ds} \frac{dx^k}{ds} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = 0 \quad k = 0, 1, 2, 3, \quad (7)$$

где $ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$ - пространственно - временной интервал геометрии Минковского с координатами $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$.

Для стационарного поля вне ядра, когда $\rho_0 = 0$, для уравнения (6) имеет место решение Юкавы [1,2]:

$$\varphi = -\frac{A_0}{r} \exp(-\mu r), \quad \mu = \frac{m_\pi c}{\hbar}, \quad (8)$$

где A_0 - некоторая константа и r - радиальная координата.

Рассмотрим теперь движение нуклона или антинуклона при совместном действии ядерного и электромагнитного полей. Как показано в [3-5], это движение можно описать следующими уравнениями:

$$m_0 \exp(\varphi/c^2) \left(c^2 \frac{d^2 x^k}{ds^2} + \frac{d\varphi}{ds} \frac{dx^k}{ds} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right) = q F_n^k \frac{dx^n}{ds}, \quad (9)$$

где F_n^k - тензор напряженности электромагнитного поля, m_0 , q - соответственно масса покоя и заряд нуклона.

Следует отметить, что уравнения (9): 1) ковариантны по отношению к выбору инерциальных систем отсчета; 2) согласованы с формулой (4) и 3) в случае нерелятивистских скоростей и при $|\varphi/c^2| \ll 1$ дают при $k=1,2,3$ классические уравнения движения. Кроме того, уравнения (9) являются непротиворечивыми, так как первое из них ($k=0$) является следствием трех остальных. Это вытекает из тривиального тождества, получаемого умножением (9) на dx_k/ds и суммированием по k [3,5]. Поэтому при их решении достаточно удовлетворить только трем из них при $k=1,2,3$.

Обратимся к движению нуклона или антинуклона в поле покоящегося ядра в плоскости $x^3=0$.

Тогда после выбора полярных координат:

$$x^1 = r \cos \theta, \quad x^2 = r \sin \theta, \quad x^3 = 0$$

и несложных вычислений уравнения движения (9) приобретают вид:

$$m_0 \exp(\varphi/c^2) \left[\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + \frac{A_0}{c^2} \frac{\exp(-\mu r)}{r^2} (1 + \mu r)(\dot{r}^2 + c^2) \right] = \frac{Zqe_0}{r^2} \sqrt{1 + (\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)/c^2}, \quad (10)$$

$$2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} + \frac{A_0}{c^2} \frac{\exp(-\mu r)}{r} \dot{\theta}(1 + \mu r) = 0, \quad (11)$$

где e_0 - элементарный заряд, Z - число протонов в ядре, $\dot{r} \equiv dr/d\tau$, $\dot{\theta} \equiv d\theta/d\tau$ и τ - собственное время для движущейся частицы: $d\tau = ds/c$.

Уравнение (11) имеет первый интеграл:

$$\frac{\ddot{\theta}}{\dot{\theta}} = -\frac{\dot{r}}{r} \left[2 + \frac{A_0}{c^2} \frac{\exp(-\mu r)}{r} (1 + \mu r) \right],$$

$$\int \frac{d\dot{\theta}}{\dot{\theta}} = \ln|\dot{\theta}| = -\int \left[\frac{2}{r} + \frac{A_0(1 + \mu r)}{c^2 r^2} \exp(-\mu r) \right] dr, \quad (12)$$

откуда

$$\dot{\theta} = \frac{D}{r^2} \exp \left[\frac{A_0}{c^2} \int_r^\infty \frac{(1 + \mu r)}{r^2} \exp(-\mu r) dr \right] = \frac{D}{r^2} \exp(\beta/c^2), \quad (13)$$

где $D = \text{const}$ и $\beta = A_0 \int_r^\infty \frac{(1 + \mu r)}{r^2} \exp(-\mu r) dr$.

Переходя к функции $r = r(\theta)$ и полагая

$$\sigma = \frac{1}{r}, \quad (14)$$

получаем, используя (13):

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\theta} \dot{\theta} = -D\sigma'(\theta) \exp(\beta(\theta)/c^2), \quad (15)$$

$$\ddot{r} = -D^2\sigma^2(\theta) \exp(\beta(\theta)/c^2) \frac{d}{d\theta} (\sigma'(\theta) \exp(\beta(\theta)/c^2)). \quad (16)$$

После подстановки (13) – (16) в уравнение (10) оно примет вид:

$$\begin{aligned} \sigma'' + \sigma - \frac{A_0}{D^2} (1 + \mu/\sigma) \exp(-\mu/\sigma - 2\beta/c^2) + \\ + \frac{Zqe_0}{D^2 m_0} \exp(-(\varphi + 2\beta)/c^2) \sqrt{1 + \frac{D^2 \exp(2\beta/c^2)}{c^2} (\sigma'^2 + \sigma^2)} = 0, \end{aligned} \quad (17)$$

где $\sigma = \sigma(\theta)$, $\sigma' \equiv d\sigma/d\theta$, $\sigma'' \equiv d^2\sigma/d\theta^2$ и $\varphi = -A_0\sigma \exp(-\mu/\sigma)$.

Перейдем к безразмерной форме данного уравнения, полагая

$$U = \frac{\sigma}{\mu} = \frac{r_\pi}{r}, \quad r_\pi = \frac{1}{\mu} = \frac{\hbar}{m_\pi c}, \quad a = \frac{A_0}{\mu D^2}, \quad b = \frac{Zqe_0}{\mu m_0 D^2}, \quad d = \frac{\mu A_0}{c^2}, \quad (18)$$

где r_π - комптоновский радиус нейтрального пиона. Тогда получим следующее уравнение относительно функции $U = U(\theta)$:

$$\begin{aligned} U'' + U + b \exp(-d[U \exp(-1/U) + 2H(u)]) \times \\ \times \sqrt{1 + (d/a)(U'^2 + U^2)} \exp(2dH(u)) = \quad, \\ = a(1 + 1/U) \exp(-1/U - 2dH(u)), \end{aligned} \quad (19)$$

где $b > 0$ для протона, $b = 0$ для нейтрона, $b < 0$ для антипротона и

$$H(u) = \int_{1/U}^{\infty} \frac{(1+s)}{s^2} e^{-s} ds. \quad (20)$$

Для уравнения (19) было проведено большое число численных расчетов методом Рунге-Кутты четвертого порядка. Оно показало, что протоны и нейтроны могут двигаться по периодическим орбитам только вокруг очень легких ядер. В то же время су-

существует широкий класс начальных условий для антипротонов, при которых становится возможным их периодическое движение вокруг средних и тяжелых ядер.

Для антипротонов численные расчеты их периодических орбит вокруг средних и тяжелых ядер проводились при различных отвечающих им значениях параметров a, b, d и различных допустимых начальных значениях $U(0) = U_0$. При этом полагалось $U'(0) = 0$, что может быть обеспечено в рассматриваемых периодических орбитах выбором начала отсчета полярного угла. Необходимо отметить, что изучались только те варианты, при которых значения $U = r_\pi / r \leq 0,3$. Тогда антипротон может обращаться на безопасном расстоянии от некоторого среднего или тяжелого ядра, при котором не может произойти его аннигиляция с протоном этого ядра.

Ниже приведены графики периодических орбит антипротонов при трех значениях параметра U_0 из рассматриваемого диапазона $0 < U_0 \leq 0,3$. На них представлена зависимость безразмерного радиуса орбиты $r / r_\pi = 1 / U$ от полярного угла θ .

1) Случай $U_0 = 0,1$.

На рис.1 изображен график, отражающий в данном случае зависимость радиальной координаты антипротона от полярного угла при $a = 0,2$, $b = 0,15$ и $d = 0,3$.

2) Случай $U_0 = 0,2$.

На рис.2 изображен график, отражающий зависимость радиальной координаты антипротона от полярного угла при $a = 1,3$, $b = 0,1$ и $d = 0,6$.

3) Случай $U_0 = 0,3$.

На рис.3 изображен график, отражающий зависимость радиальной координаты антипротона от полярного угла при $a = 0,5$, $b = 0,2$ и $d = 0,3$.

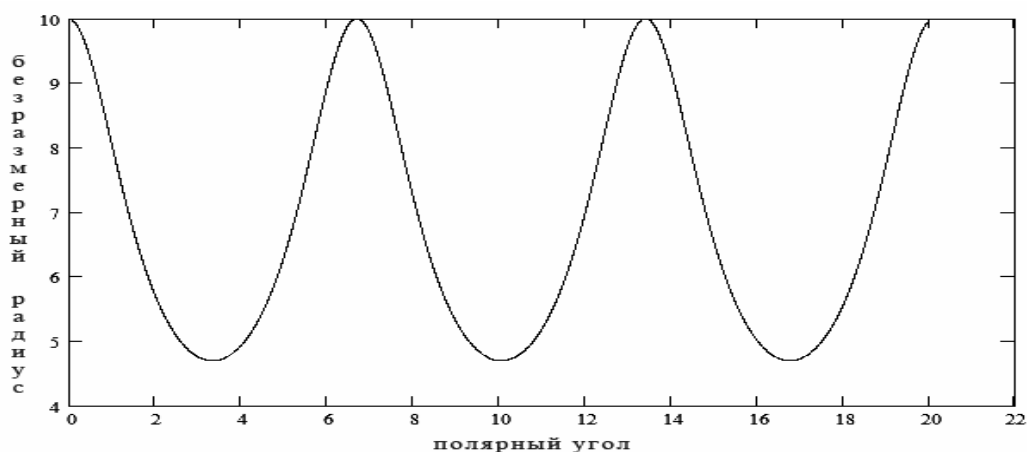


Рис.1. График радиальной координаты антипротона в зависимости от полярного угла для случая 1

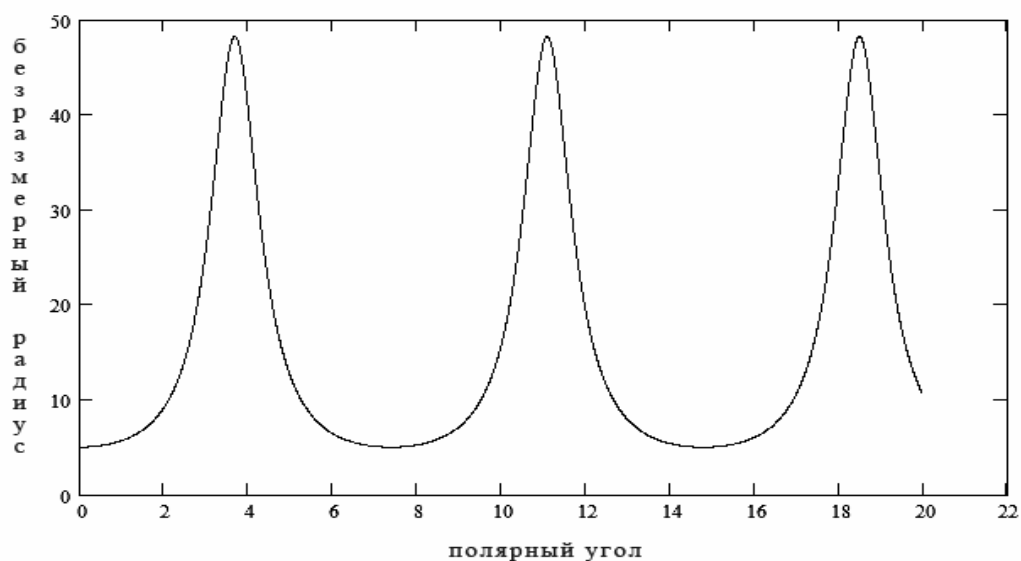


Рис.2. График радиальной координаты антипротона в зависимости от полярного угла для случая 2

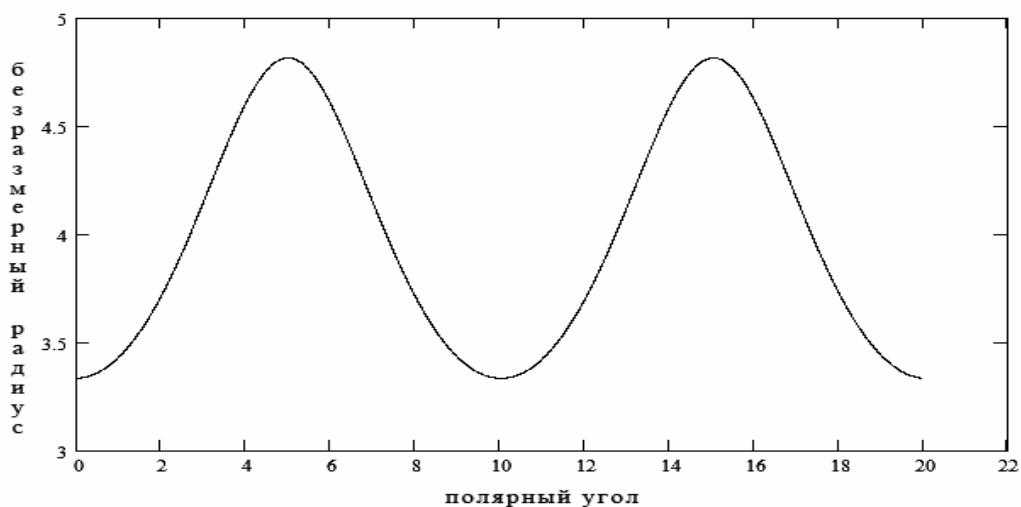


Рис.3. График радиальной координаты антипротона в зависимости от полярного угла для случая 3

В приведенных ниже таблицах указываются диапазоны значений параметра a при различных значениях параметров b и d , при которых возникают периодические орбиты антипротонов для каждого из вышеупомянутых трех случаев.

Диапазоны значений параметра a для случая 1

Таблица 1

b	$d=0,1$	$d=0,3$	$d=0,5$	$d=0,7$	$d=0,9$
0,045	0,0003 - 0,002	0,0007 - 0,006	0,0011 - 0,010	0,0016 - 0,014	0,0020 - 0,018
0,046	0,0003 - 0,002	0,0007 - 0,007	0,0020 - 0,013	0,0020 - 0,018	0,0020 - 0,021
	88,11 - 108,12	88,11 - 108,12	88,11 - 108,12	88,11 - 108,11	88,11 - 108,11
0,047	0,0003 - 0,003	0,0008 - 0,011	0,002 - 0,018	0,0020 - 0,025	0,0020 - 0,029
	66,08 - 106,12	66,08 - 106,12	66,08 - 106,12	66,08 - 106,11	66,08 - 106,11
0,049	0,0003 - 0,012	0,0008 - 0,036	0,002 - 0,060	0,0020 - 0,084	0,003 - 0,096
	22,02 - 102,12	22,02 - 102,12	22,02 - 102,12	22,02 - 102,11	22,02 - 102,11
0,050	0,0003 - 100,1	0,0009 - 100,1	0,0014 - 100,1	0,0019 - 100,1	0,0022 - 100,1
0,060	0,0005 - 80,09	0,0013 - 80,09	0,0021 - 80,09	0,0029 - 80,09	0,0033 - 80,09
0,070	0,0006 - 60,07	0,0018 - 60,07	0,0029 - 60,07	0,0041 - 60,07	0,0047 - 60,07
0,080	0,0008 - 40,04	0,0024 - 40,04	0,0040 - 40,04	0,0056 - 40,04	0,0064 - 40,04
0,090	0,0011 - 20,10	0,0033 - 20,10	0,0054 - 20,10	0,0076 - 20,10	0,0086 - 20,10
0,100	0,0015 - 8,30	0,0043 - 8,30	0,0072 - 8,30	0,010 - 8,30	0,012 - 8,30
0,110	0,0019 - 4,02	0,0057 - 4,02	0,0095 - 3,90	0,014 - 3,90	0,015 - 3,90
0,130	0,0033 - 1,53	0,010 - 1,52	0,017 - 1,50	0,024 - 1,50	0,026 - 1,50
0,150	0,0060 - 0,93	0,018 - 0,92	0,030 - 0,90	0,043 - 0,90	0,049 - 0,90
0,160	0,0085 - 0,74	0,026 - 0,73	0,050 - 0,70	0,063 - 0,70	0,069 - 0,70
0,180	0,022 - 0,35	0,075 - 0,30	0,150 - 0,30	-	-
0,190	0,080 - 0,12	0,120 - 0,122	-	-	-

Таблица 2

Диапазоны значений параметра a для случая 2

b	$d=0,1$	$d=0,3$	$d=0,5$	$d=0,7$	$d=0,9$
0,090	0,001 - 0,008	0,0029 - 0,024	0,0048 - 0,042	0,0066 - 0,06	0,0085 - 0,079
0,091	0,001 - 0,009	0,003 - 0,028	0,0050 - 0,048	0,007 - 0,069	0,009 - 0,09
	1,330 - 2,690	1,33 - 2,69	1,33 - 2,68	1,33 - 2,68	1,33 - 2,67
0,094	0,002 - 0,015	0,004 - 0,047	0,006 - 0,083	0,008 - 0,12	0,01 - 0,17
	0,880 - 2,610	0,88 - 2,61	0,79 - 2,60	0,74 - 2,59	0,74 - 2,58
0,098	0,002 - 0,061	0,004 - 2,51	0,006 - 2,50	0,0090 - 2,49	0,020 - 2,48
	0,240 - 2,52	-	-	-	-
0,100	0,002 - 2,47	0,004 - 2,46	0,006 - 2,46	0,0085 - 2,45	0,011 - 2,45
0,120	0,002 - 1,97	0,006 - 1,96	0,0095 - 1,96	0,0135 - 1,95	0,0173 - 1,94
0,140	0,003 - 1,47	0,009 - 1,46	0,0147 - 1,45	0,021 - 1,44	0,027 - 1,43
0,160	0,005 - 1,00	0,014 - 0,99	0,023 - 0,97	0,032 - 0,96	0,042 - 0,95
0,180	0,007 - 0,74	0,021 - 0,72	0,037 - 0,72	0,052 - 0,70	0,068 - 0,68
0,200	0,012 - 0,50	0,037 - 0,50	0,070 - 0,47	0,099 - 0,43	0,140 - 0,39
0,220	0,025 - 0,30	0,090 - 0,23	-	-	-
0,230	0,040 - 0,15	-	-	-	-

Таблица 3

Диапазоны значений параметра a для случая 3

b	$d=0,1$	$d=0,3$	$d=0,5$	$d=0,7$	$d=0,9$
0,08	0,0007 - 0,001	0,0021 - 0,0041	0,0035 - 0,007	0,005 - 0,0099	0,006 - 0,012
0,10	0,0012 - 0,003	0,0035 - 0,0092	0,0058 - 0,015	0,0081 - 0,022	0,011 - 0,029
0,12	0,0018 - 0,007	0,0053 - 0,022	0,0090 - 0,04	0,013 - 0,058	0,017 - 0,079
0,13	0,0021 - 0,013	0,0064 - 0,043	0,011 - 0,081	0,016 - 0,13	0,020 - 1,00
0,14	0,0026 - 1,03	0,0077 - 1,02	0,013 - 1,01	0,019 - 0,99	0,024 - 0,98
0,16	0,0037 - 0,89	0,012 - 0,88	0,019 - 0,87	0,027 - 0,86	0,035 - 0,84
0,18	0,0052 - 0,76	0,016 - 0,74	0,027 - 0,73	0,039 - 0,71	0,052 - 0,69
0,20	0,0080 - 0,63	0,023 - 0,61	0,040 - 0,59	0,059 - 0,56	0,079 - 0,53
0,22	0,011 - 0,50	0,035 - 0,47	0,063 - 0,43	0,097 - 0,39	0,15 - 0,34
0,24	0,017 - 0,36	0,059 - 0,31	0,150 - 0,23	-	-
0,26	0,032 - 0,22	-	-	-	-

Из полученных результатов вытекает вывод о возможности существования массивных квазиядер, содержащих наряду с протонами и нейтронами также антипротоны. Такие квазиядра могут быть получены путем облучения средних и тяжелых ядер атомов антипротонами, энергия которых соответствует диапазону параметра a .

ЛИТЕРАТУРА

1. *Наумов, А.И.* Физика атомного ядра и элементарных частиц. – М.: Просвещение, 1984
2. *Ericson, T., Weise W.* Pions and Nuclei. – Oxford : Clarendon Press, 1988.
3. *Rabinowitch A.S.* International Journal of Theoretical Physics, Vol. 33, No 10, 1994, p. 2049-2056.
4. *Rabinowitch, A.S.* International Journal of Theoretical Physics, Vol. 36, No 2, 1997, p. 533-544.
5. *Rabinowitch, A.S.* Nonlinear Physical Fields and Anomalous Phenomena, New York, Nova Science Publishers, 2009.

PERIODIC ORBITS OF THE RELATIVISTIC ANTIPROTON IN A NONLINEAR NUCLEAR FIELD

A.S. Rabinowitch, M.A. Kramskoy

*Moscow State University of Instrument Engineering and Computer Science
20, Stromynka, Moscow, 107966, Russia*

Abstract. In the paper orbital movements of a relativistic nucleon and antinucleon in the nonlinear field of a massive nucleus are studied. The problem is reduced to a system of nonlinear differential equations of the second order with respect to the radial coordinate and polar angle of the particle. Numerical computations for this system of equations are carried out. It is shown that periodic orbits can occur in the case of movements of antiprotons about nuclei. Conditions of their existence in the relativistic case are investigated.

Key words: nuclear field, Yukawa's potential, nucleons, antiprotons, periodic orbits.

УДК 537.533.9:537.226.4

ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯ

ПОЛЯРИЗАЦИИ СЕГНЕТОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ КРИСТАЛЛОВ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ИНЖЕКТИРОВАННЫХ ЗАРЯДОВ

А.Г. Масловская, Т.К. Барабаш

*Амурский государственный университет (АмГУ)
675027, Благовещенск, Игнатьевское шоссе, 21*

Аннотация: Представлен анализ процесса переключения поляризации сегнетоэлектрических кристаллов в режиме инъекции электронных пучков под поверхностный слой образца. Предложена имитационная модель, отражающая динамику переполаризации сегнетоэлектрического кристалла в рамках двумерного геометрического представления. Проведен расчет поляризационного тока модельных сегнетоэлектриков в инжекционном режиме.

Ключевые слова: сегнетоэлектрик, переключение поляризации, инъекция электронов, облучение, имитационная модель

Введение

Сегнетоэлектрические кристаллы и пленки широко используются в качестве ячеек памяти в интегральных устройствах и другой технике. Важнейшим свойством сегнетоэлектрических материалов является способность менять направление поляризации, в результате чего возникает ток переключения. Первые количественные эксперименты по определению временных и полевых зависимостей переполаризации были выполнены Мерцем на титанате бария. Основанный Мерцем метод наблюдения тока переполаризации при переключении в импульсных полях, является наиболее прямым методом изучения переключения в кристаллах с малой проводимостью [1]. В настоящее время известно большое количество направлений по теоретическим и экспериментальным исследованиям процессов переключения поляризации и динамики доменов сегнетоэлектрических кристаллов. Экспериментальные данные включают как результаты прямых микроскопических наблюдений доменов при переключении, так и электрические измерения объемных кристаллов [1], при этом динамические характеристики определяют либо в плавно меняющихся синусоидальных полях, либо в импульсных полях различной формы. В то же время, среди исследований в этой области существуют направления, опирающиеся на использовании нестандартных методов переполаризации сегнетоэлектриков [2-4].

Исследование процессов переключения сегнетоэлектриков возможно с использованием методик растровой электронной микроскопии. В частности, известна аналитическая методика электронного зондирования сегнетоэлектриков – режим электронно-стимулированных поляризационных токов [4], использующий специфический сигнал токов образца. Данная методика позволяет одновременно наблюдать и регистрировать поляризационные процессы, инициируемые инъекцией пучка электронов под поверхность образца [5].

Целью данной работы является построение имитационной модели процесса переключения поляризации сегнетоэлектрических кристаллов в режиме инъекции электронов под поверхностный слой, реализация разработанной модели с помощью компьютерных средств, а также качественный анализ результатов моделирования.

Описание физической модели процесса переключения поляризации сегнетоэлектрических кристаллов в инжекционном режиме

В практике математического моделирования динамики доменной структуры и при теоретическом анализе кинетики токов реполяризации наибольшее распространение получили: модели, развивающие кинетическую теорию фазовых переходов I рода, модели, основанные на статистической теории кристаллизации Колмогорова-Аврами, модели, использующие апостериорные оценки, а также модели, базирующиеся на фрактальном подходе и теории клеточных автоматов [6-10]. Во многих случаях авторы используют следующее выражение для расчета тока переключения:

$$I(t) = 2P_s \cdot S \cdot \frac{dQ(t/t_0)}{dt},$$

где P_s – спонтанная поляризация, Кл/м²; S – площадь электрода образца, м²; $Q(t/t_0)$ – доля переключаемого объема кристалла; t_0 – время переключения, с; $I(t)$ – ток переключения, А.

Выражение для тока переключения, определяемого долей переключаемого объема, в моделях различных размерностей преобразуется к одной из следующих формул:

$$I(t) = \frac{2P_s}{L} \cdot \frac{dV}{dt} = \frac{2P_s}{L} \cdot d \cdot \frac{dS}{dt} = \frac{2P_s}{L} \cdot S \cdot \frac{dx}{dt},$$

где dx/dt – скорость движения стенки, м/с; L – толщина кристалла, м; d – линейный размер грани кристалла, м; V – объем кристалла, м³.

В [11] представлена методика одновременного наблюдения доменной структуры и регистрации процесса реполяризации сегнетоэлектрического кристалла ТГС при повышенных ускоряющих напряжениях, а также предложена математическая модель, позволяющая на качественном уровне описать наблюдаемые явления. Применение высоких ускоряющих напряжений (>10кВ) и инжекция электронного пучка под поверхность сегнетоэлектрического кристалла вызывают накопление заряда в облученном слое образца, и инициируют процесс переключения поляризации необлученной части образца (схема распределения зарядов приведена на рис.1). Накопление зарядов на верхнем и нижнем электродах вызывает появление полей E_1 и E_2 в соответствующих слоях кристалла. Поле E_2 , возникающее в необлученной части кристалла, способно вызвать реполяризацию основного объема образца.

При построении модели использована следующая зависимость скорости движения доменной границы v от поля E , которая во многих случаях подтверждается экспериментальными данными [2, 10]:

$$v = v_{\infty} \exp\left(-\frac{\delta}{E}\right),$$

где v_{∞} – максимальная скорость движения стенки при $E \rightarrow \infty$, м/с; δ – поле активации, В/м.

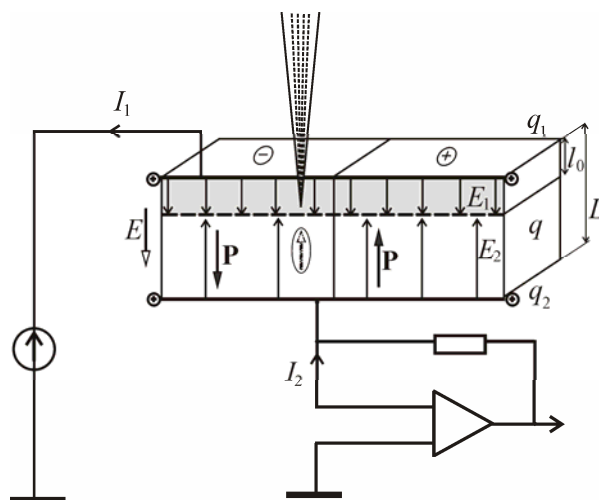


Рис.1. Схема переключения поляризации в кристалле сегнетоэлектрика под действием инжектированных зарядов;
 q – накапливаемый заряд в облученном слое;
 q_1, q_2 – наведенные в электродах заряды;
 I_1, I_2 – токи во внешних цепях;
 E_1, E_2 – поля в приповерхностном слое и толще образца;
 $\mathbf{P}$ – вектор спонтанной поляризации;
 L – толщина кристалла; l_0 – толщина слоя инжекции.

В модельных представлениях динамики доменных границ предполагают, что процесс переполаризации осуществляется путем бокового прорастания зародышей доменов, либо посредством сквозного прорастания клинообразных доменов. Экспериментальные исследования переполаризации сегнетоэлектрического кристалла ТГС в режиме инжекционного контакта [4] показывают, что форма доменов значительного размера в процессе переполаризации не изменяется, а наблюдается лишь ее эрозия, что свидетельствует об отсутствии заметного бокового движения доменных стенок, которое наблюдается во многих других случаях.

Математическое моделирование формирования тока переполаризации

Теоретический анализ кинетики переключения поляризации сегнетоэлектрических доменов в инжекционном режиме позволяет рассмотреть различные модельные представления этого процесса. Модельный расчет проводился по отношению к кристаллам с 180° доменами. Предполагалось, что доменная граница прорастает клиньями с неизменной величиной ширины основания $2u$, при этом угол θ доменной стенки изменяется. Процесс переполаризации заканчивается, когда середина клина $x(t)$ переходит границу $L-l_0$.

Математическая постановка задачи описывается системой соотношений [11]:

$$I(t) = \begin{cases} 2P_s \cdot L \cdot y(dx/dt), & \text{при } 0 \leq x \leq L - l_0 \\ 2P_s \cdot L \cdot y \cdot (L^2/x^2)(dx/dt), & \text{при } L - l_0 < x \leq 2(L - l_0) \end{cases}$$

$$E_z = E \cos \theta = 2P_s \frac{z(t)}{\varepsilon \varepsilon_0 L} \cos^2 \theta, \quad \cos^2 \theta = \frac{y^2}{x(t)^2 + y^2},$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{L}{\tau_1} \exp \left(- \frac{\tau_2}{t - \tau_3 + \tau_3 \cos^2 \theta (1 + x(t)/(2l_0))} \right), \quad (1)$$

где $\tau_1 = L/v_\infty$ – характерный параметр – «время» прорастания границы сквозь кристалл; $\tau_2 = \varepsilon \varepsilon_0 L/(jl_0)$ – характерный параметр – «время» накопления заряда, создающего поле $E_2 = \delta$ при данной плотности тока j ; $\tau_3 = 2P_s/j$ – характерный параметр – «время», в течение которого данный ток создаст плотность заряда $\sigma = 2P_s$; $z(t)$ – текущее расстояние до середины клина; $0 \leq x(t) \leq 2(L - l_0)$, $x(t=0) = 0$.

Расчет тока переключения и имитационное моделирование проводились в ППП Matlab. Применение неявной схемы метода Адамса III-го порядка точности к решению задачи Коши для нелинейного дифференциального уравнения (1):

$$x_{i+1} = x_i + \frac{h}{12} [5f_{i+1} + 8f_i - f_{i-1}],$$

$$f(t, x) = \frac{L}{\tau_1} \exp \left(- \frac{\tau_2}{t - \tau_3 + \tau_3 \cos^2 \theta (1 + x(t)/(2l_0))} \right)$$

обеспечивает строгую устойчивость решения. При реализации численного алгоритма многошагового метода стартовые значения определялись с помощью неявного метода Эйлера. Полученная система нелинейных уравнений решалась методом простых итераций.

Моделирование проводилось в нормированных величинах. Переменные и параметры модели нормировались в соответствии с данными физического эксперимента: $L = 1$ усл.ед. – толщина кристалла (остальные характерные параметры расстояния определены по отношению к L); $l_0 \approx 0.002$ усл.ед. – толщина слоя инжекции; $d = 5$ усл.ед., $y = 2.5$ усл.ед., $S = 25$ кв.усл.ед. – линейные размеры и площадь облучаемой грани кристалла; $\tau_1 = 1$ усл.ед. – характерное время пробега всей толщины кристалла; $\tau_2 = 0.5$ усл.ед. – характерное время инжекции заряда при данной плотности тока в единицу времени; $\tau_3 = 2$ усл.ед. – характерное время, за которое ток создает плотность заряда $2P_s$.

Реализация имитационной модели и анализ результатов моделирования

Геометрический принцип, лежащий в основе изложенной математической модели процесса переключения, можно реализовать наглядно, используя графические возможности математических пакетов. Для обобщенной модели переключения в рассматриваемом режиме можно ввести в рассмотрение следующий модифицированный подход. Если объем кристалла разделить на несколько областей, в которых процесс переполаризации начинается не одновременно, а с некоторым временным интервалом, то суммарный отклик определится всем на данный момент переполаризованным объемом. Этот процесс эквивалентен процессу «зародышеобразования» – образованию новых областей переполаризации, вследствие чего ток переполаризации будет иметь характерные «всплески», отвечающие за появление все новых и новых «зародышей» в кристалле. Подобные процессы в кристалле многие авторы связывают с появлением импульсов Баркгаузена на кривой тока.

В соответствии с указанным подходом, в алгоритмической реализации модели было учтено, что «прорастание» областей противоположной полярности начинается с различной скоростью и в различные моменты времени, что в некотором смысле согласуется с принципом, лежащим в основе α -модели Колмогорова-Аврами. Кроме того, выбор области, начала момента переключения и скорости прорастания домена проводился в соответствии со схемой случайного выбора метода Монте-Карло. Критерий останова вычислительного процесса можно связать с условием завершения процесса переполаризации: «прорисовка» области переключения заканчивается при достижении высоты клина $x(t)$ значения $2(L - l_0)$. Предложенную модель нетрудно обобщить и на случай трехмерной модели, в которой клинообразный рост доменов реализуется геометрически в виде последовательного изменения объема конусов. Схема подобного «прорастания» доменов показана на рис.2.

Разработанное программное приложение позволяет в режиме анимации наблюдать последовательные стадии переключения доменов. Конфигурация модельного прорастания доменов конусообразной формы в фиксированные моменты времени показана на рис.3.

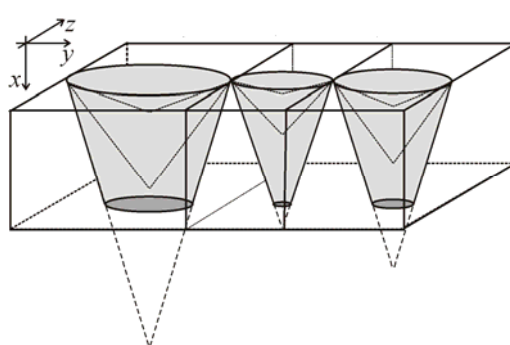


Рис.2. Геометрия модельного образца

При реализации имитационной модели проводилась также и визуализация прорастания доменов конусообразной формы сквозь нижнюю грань кристалла. На рис.4 показано последовательное расширение доменов конусообразной формы в те же моменты времени.

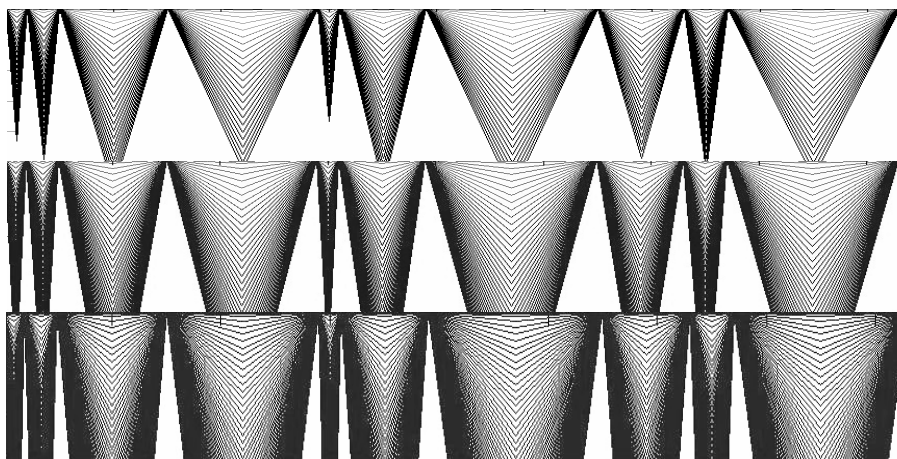


Рис. 3. – Фрагменты прорастания доменов конусообразной формы (сечение по толщине кристалла – проекция на плоскость Oxy).

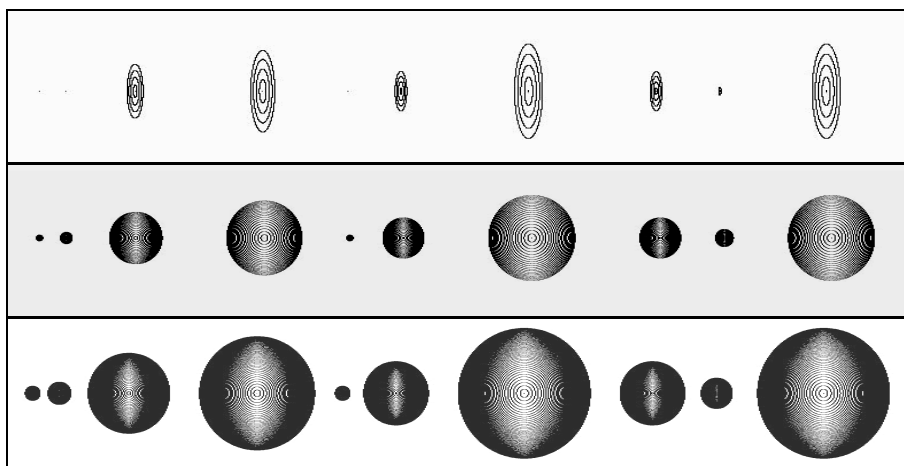


Рис. 4. – Фрагменты прорастания доменов конусообразной формы сквозь нижнюю грань кристалла (в проекции на плоскость Oyz при $x=L$).

В процессе реализации модели проводился также расчет тока переключения для всей области путем частичного суммирования тока от каждой подобласти:

$$I = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot I_i ,$$

где n – число подобластей; α_i – весовой коэффициент, определяемый относительной шириной клина подобласти.

На рис.5 представлен результат моделирования кривой импульса тока переключения (кривая сглажена по соседним расчетным точкам).

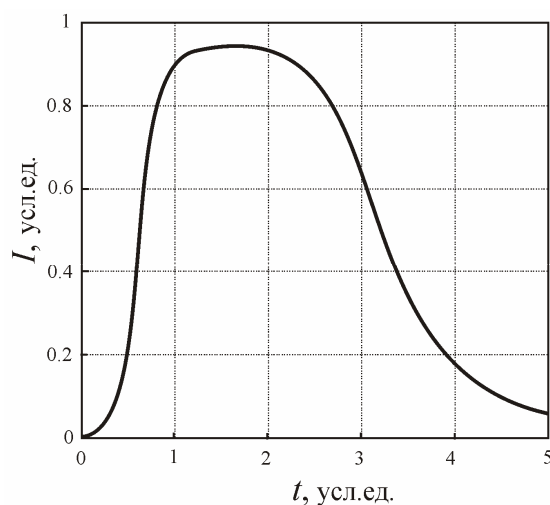


Рис.5. Форма импульса тока переключения поляризации

Форма поляризационного тока воспроизводит основные особенности экспериментальных данных, наблюдаемых в инжекционном режиме [4]. Как видно из рисунка, кривая поляризационного тока отличается характерным нарастанием в начальные моменты времени и дальнейшим спаданием на нулевой уровень. Наблюдаемый начальный выброс связан с усилением поля, вызванным дрейфом границы, а также резким увеличением скорости движения доменной стенки. Уменьшение поля за счет наклона стенки является причиной замедления движения границы, спадание отклика соответствует этапу завершения поляризации, что происходит после прорастания вершины клина сквозь образец. В общем случае характер завершения поляризации и спадание тока зависят от способа движения доменной границы. При прорастании клинообразных доменов особенностью является существование остаточных клиньев – частей неполяризованного объема. При боковом движении границ ток спадает при слиянии доменных стенок.

Таким образом, рассмотренная модель имитирует процесс переключения поляризации сегнетоэлектрических кристаллов, дает возможность математически описать физические процессы, наблюдаемые при переключении доменов в режиме инжекции, а также рассчитать основную динамическую характеристику процесса переключения – ток переключения.

Заключение

В работе представлены результаты математического моделирования процесса переключения поляризации сегнетоэлектрических кристаллов под действием инжектированного пучка электронов. Представленная имитационная модель динамики доменной структуры модельного сегнетоэлектрического кристалла ТГС реализуется с помощью численных алгоритмов решения начальных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и графических возможностей математического пакета прикладных программ Matlab. Моделирование поляризационных процессов проведено с учетом выбора параметров, отвечающих условиям экспериментального наблюдения (по данным литературных источников). Предложенное программное приложение позволяет рассчитывать ток переключения, а также наблюдать анимацию последовательных стадий переключения исследуемых образцов.

Работа выполнена при поддержке АБЦП «Развитие научного потенциала высшей школы», грант №2.1.2/707.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лайнс, М. Сегнетоэлектрики и родственные им материалы. М.: Мир, 1981. 725 с.
2. Донцова, Л.И., Тихомирова Н.А., Гинзберг А.В. Кинетика процесса переключения локально облученных образцов триглицинсульфата // ФТТ. 1988. Т. 30. № 9. С. 2692-2697.
3. Розенман, Г.И., Охапкин В.А., Чепелев Ю.Л., Шур В.Я. Эмиссия электронов при переключении сегнетоэлектрика германата свинца // Письма в ЖТФ. 1984. Т. 39. С. 397-399.
4. Согр, А.А., Копылова И.Б. Исследование кинетики накопления и релаксации инжектированных зарядов в кристаллах ТГС // Изв. РАН. Сер. физич. 2000. Т. 64. № 6. С. 1199-1202.
5. Sogr, A.A., Maslovskaya A.G., Kopylova I.B. Advanced modes of imaging of ferroelectric domains in the SEM // Ferroelectrics. 2006. V. 341. P. 29-37.
6. Мейланов, Р.П., Садыков С.А. Фрактальная модель кинетики переключения поляризации в сегнетоэлектриках // Журнал технической физики. 1999. Т. 69. № 5. С. 128-129.
7. Захаров, М.А., Кукушкин С.А., Осипов А.В. Теория переключения сегнетоэлектриков (основные стадии) // ФТТ. 2005. Т. 47. Вып. 4. С. 673-678.
8. Шур, В.Я., Николаева Е.В., Шишкин Е.И., Кожевников В.Л., Черных А.П. Кинетика доменной структуры и токи переключения в монокристаллах конгруэнтного и стехиометрического танталата лития // ФТТ. 2002. Т. 44. Вып. 11. С. 2055-2060.
9. Li, D.B., Ferris J.H., Strachan Douglas R., Bonnell Dawn A. Polarization reorientation in ferroelectric lead zirconate titanate thin films with electron beams // J.Mater.Res. 2006. V. 21. No 4. P. 935-940.
10. Sekhar, K.C., Nautiyal A., Nath R. Polarization Switching in Ferroelectric Sodium Nitrite Thick Film // Applied Physics Express. 2008. V. 1. P. 091601-1-091601-3.
11. Масловская, А.Г., Копылова И.Б. Исследование процесса переполаризации сегнетоэлектрических кристаллов в инжекционном режиме // ЖЭТФ. 2009. Т. 136. №7. С. 105-109.

SIMULATION OF POLARIZATION REVERSAL PROCESSES IN FERROELECTRIC CRYSTALS UNDER INJECTED CHARGES

A. Maslovskaya, T. Barabash

Amur State University

21, Ignatyevskoe Shosse, Blagoveshchensk, 675027, Amur region, Russia

Abstract. The article is devoted to the analysis of polarization reversal processes in ferroelectric crystals in the mode of injection of the electron bunches under the sample surface. The simulation model of ferroelectric repolarization dynamics for 2-D domain configuration geometry is supposed. The calculation of polarization switching current in the injection mode is also presented.

Key words: ferroelectric crystals, polarization reversal, electron injection, irradiation, simulation

УДК 551.466.8

ИССЛЕДОВАНИЕ СТРУКТУРЫ УЕДИНЕННЫХ ВНУТРЕННИХ ВОЛН БОЛЬШОЙ АМПЛИТУДЫ В ТРЕХСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ

Е.А. Рувинская¹, О.Е. Куркина^{1,2}, А.А. Куркин¹

¹Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева
603950, ГСП-41, Нижний Новгород, ул. Минина, 24

²Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики" (г. Нижний Новгород)
603155, г. Нижний Новгород, Б. Печерская, 25/12.

Аннотация. Исследована структура физических полей (избыточной плотности, горизонтальной и вертикальной скорости) локализованных стационарных полнотелых возмущений в трехслойной симметричной жидкости. Проанализированы соотношения «ширина-амплитуда», «скорость-амплитуда» для таких волн и их зависимость от вертикальной координаты. Проводится сопоставление со слаботелной теорией.

Ключевые слова. Солитон, вертикальная мода, нелинейность, модифицированное уравнение Кортевега – де Вриза

Внутренние волны (ВВ) возникают в стратифицированных по плотности водоемах и распространены повсеместно: в озерах, бесприливных морях, реках, водохранилищах. Множество природных механизмов является источником образования возмущений внутри вод Мирового океана. Это и «деформации» (искажения) поля плотности в местах впадения рек или вблизи тающих ледников, и внезапная смена атмосферного давления, и возникновение колебаний при обтекании неровностей дна баротропным приливом. Существует большое количество исследований, доказывающих важнейшую роль внутренних волн во всех динамических процессах Мирового Океана [1,2,3]. При этом особого внимания заслуживают интенсивные внутренние волны (ИВВ) – волны больших амплитуд с явными признаками нелинейности, в частности, солитоны ВВ, о которых пойдет речь в настоящей статье. Такие интенсивные внутренние волны (ИВВ) необходимо наиболее детально исследовать, так как они являются важным источником сильных течений, вертикального перемешивания и эрозии дна, чему посвящено немало работ. В частности, в [4] утверждается, что прохождение внутренних солибонов может приводить к стократному увеличению диффузии и перемешивания через термоклин. В [5] обсуждается роль ИВВ в создании сдвигов скорости и неустойчивости в придонном слое моря, а также их важная роль в транспорте наносов. Немаловажно и то, что внутренние уединенные волны могут участвовать в распространении загрязнений и примесей на большие расстояния (подобно течениям). Причем наиболее интересны в этом смысле предельные формы солитонов ВВ, представляющие собой волны с широкой плоской вершиной, имеющие максимум в распределении поля горизонтальных скоростей на поверхности и дне жидкости. Моделирование динамики таких волн проводилось многими исследователями для разных гидрологических условий, например в [6] для экспоненциальной стратификации, в [7,8] для двухслойной жидкости, а также в ряде других работ [9,10,11].

В настоящей работе нами будет рассмотрена пространственная структура УВВ в бассейне с трехслойной симметричной стратификацией.

Такая стратификация не типична для открытого океана, но неплохо аппроксимирует профиль плотности воды для ряда морских акваторий. В частности, трехслойная стратификация довольно часто встречается в Балтийском море [12,13]. Изучение волновых

процессов здесь представляет огромный практический интерес в настоящее время ввиду возросшей антропогенной нагрузки на эту акваторию (по дну прокладывается газопровод, ведется разработка месторождений нефти и других полезных ископаемых). Очевидно, одна из основных задач экологического мониторинга – прогноз дрейфа нефтяных пятен, как и инженерная задача оценки волнового воздействия на гидротехнические сооружения, не может быть решена без учета влияния ИВВ.

При этом существует ограниченное количество работ, где рассматривались бы ИВВ в симметричном трехслойной среде. Так, предельные формы солитонов внутренних волн в трехслойном океане были получены еще в [14,15]. Однако в этих работах особенности пространственной структуры УВВ не рассматривались, тогда как без этого невозможен анализ воздействия ИВВ на окружающую среду.

Существует два подхода к моделированию ВВ вообще. Во-первых, использование слабонелинейных моделей, таких как уравнение Кортевега – де Вриза для волн малой амплитуды и модифицированное уравнение Кортевега – де Вриза (МКДВ) для волн конечной амплитуды [16,17], которые несмотря на все достоинства, связанные с разработанным математическим аппаратом и глубокой, детальной изученностью, дают нам весьма идеализированное представление о процессе и результатах эволюции волновых возмущений, неприменимое для описания волн умеренной и большой амплитуды, максимально интересных в прикладных исследованиях [15]. Во-вторых, прямое численное интегрирование полной системы уравнений движения жидкости (Эйлера или Навье – Стокса) для волн большой амплитуды (существенно нелинейных (интенсивных)). Наиболее известные численные модели описаны в [18, 19, 20, 21, 22]. Одна из первых и известных таких моделей – модель, разработанная профессором университета Ватерлоо (Канада) К.Г. Лэмбом, позволяет численно решать полнонелинейную систему уравнений гидродинамики невязкой несжимаемой стратифицированной жидкости в приближении Буссинеска. Модель Лэмба (IGW) активно используется исследователями, как в России, так и за рубежом, является востребованным и надежным вычислительным инструментом. Авторы выражают свою признательность профессору Лэмбу за предоставленную им возможность пользоваться этим программным пакетом.

Программный комплекс численно решает систему уравнений, описывающих движение невязкой несжимаемой стратифицированной жидкости в вертикальной плоскости в приближении Буссинеска:

$$\begin{aligned}\vec{U}_t + \vec{U} \cdot \vec{\nabla} \vec{U} - f\vec{v}\vec{i} &= -\vec{\nabla} p - \rho g \vec{k}, \\ v_t + \vec{U} \cdot \vec{\nabla} v + fu &= 0, \\ \rho_t + \vec{U} \cdot \vec{\nabla} \rho &= 0, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{U} &= 0,\end{aligned}\tag{1}$$

$$\rho = \frac{\rho_f - \rho_0}{\rho_0}.\tag{2}$$

Эти уравнения решаются в пространстве размерности 2+1, т.е. все физические величины являются функциями x , z и t . Здесь $\vec{U} = (u, w)$ – вектор скорости в вертикальной плоскости (x, z) , u – скорость вдоль горизонтальной оси x , w – скорость вдоль верти-

кальной оси z , v – компонента скорости в поперечном направлении y , $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ – оператор градиента, t – время, ρ_f – плотность морской воды, ρ_0 – постоянная характеристическая плотность (возникает в силу предположения, что плотность воды в исследуемом бассейне меняется незначительно, т. е. в силу приближения Буссинеска: $\rho_f = \rho_0(1 + \rho)$), ρ – безразмерная величина (аномалия плотности), g – гравитационное ускорение, f – параметр Кориолиса, $\vec{i}$ и $\vec{k}$ – единичные орты по осям x и z .

Модель Лэмба численно решает систему уравнений (1)-(2). Пространственная расчетная область имеет горизонтальный размер L , вертикальный – H . Задача решается в области $\{-L/2 \leq x \leq L/2, -H \leq z \leq 0\}$. На поверхности океана используется приближение «твердой крышки» $w = 0$ при $z = 0$. Граничное условие на дне ставится как условие непротекания $w = 0$ при $z = -H$. Правая и левая границы являются открытыми.

Процедура численного решения системы основана на неявной предиктор-корректорной двухшаговой конечно-разностной схеме.

Верификация модели была проведена ранее в работах [20, 23, 24]

Центральное место при постановке настоящей задачи занимает вопрос задания начальных условий.

Для инициализации модели необходимо задать горизонтально-однородное невозмущенное поле плотности морской воды $\rho_{mean}(z)$, а так же начальное возмущение поля плотности в форме $\rho(x, z, t = 0) = \rho_{mean}(z - \eta(x))$ и начальное распределение скоростей, которое выбирается исходя из линейной теории длинных волн в соответствии с возмущением плотности.

В настоящей работе инициализация поля плотности в начальный момент времени проводилась следующим образом:

$$\rho_{mean}(z) = -0.005 \tanh\left(\frac{z+30}{4}\right) - 0.005 \tanh\left(\frac{z+70}{4}\right), \quad (3)$$

$$\eta(x, z, t = 0) = F(x)\Phi(z), \quad (4)$$

где $\Phi(z)$ – решение краевой задачи для вертикальной структуры моды:

$$\begin{cases} \Phi'' + \frac{N^2(z)}{c^2} \Phi = 0, \\ \Phi(0) = \Phi(H) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Здесь c – фазовая скорость среды, $N(z)$ – частота Вайсяля-Брента.

Для сокращения времени адаптации и формирования УВВ $F(x)$ – горизонтальная структура поля смещений в (5) задавалась как солитон уравнения МКДВ первой моды с известными параметрами:

$$F(x) = a \operatorname{sech} h \left(\sqrt{\frac{\alpha_1 a^2}{6\beta}} x \right). \quad (6)$$

Поскольку солитоны МКДВ являются точными аналитическими решениями уравнений (1) в приближении слабой нелинейности, то при малых амплитудах превращение в полнонелинейный солитон проходит с незначительным изменением параметров волны. Однако при возрастании амплитуды перестройка солитона МКДВ в численную уединенную волну происходит более интенсивно, что, в конечном итоге, делает невозможным образование предельных форм численных уединенных волн из солитонов МКДВ большой амплитуды (у солитонов мкдв нет предельной амплитуды, она возрастает неограниченно, при этом масса остается постоянной). Поэтому для получения предельных форм численных солитонов в рассматриваемой среде нами использовалось возмущение в виде прямоугольного импульса (с достаточной энергией) вида:

$$F(x) = \frac{a}{2} \left(1 + \operatorname{th} \left(\frac{(x-x_0)}{d} \right) \right) - \frac{a}{2} \left(1 + \operatorname{th} \left(\frac{(x-x_2)}{d} \right) \right). \quad (7)$$

Горизонтальная и вертикальная составляющие скорости задавались в линейном приближении:

$$u(x, z, t = 0) = cF(x) \frac{d\Phi}{dz}, \quad (8)$$

$$w(x, z, t = 0) = -c\Phi(z) \frac{dF}{dx}. \quad (9)$$

Шаг по пространству между узлами сетки, а также шаг по времени выбирались исходя из критерия устойчивости Куранта — Фридрихса — Леви.

Численные эксперименты проводились как для волн понижения, так и для волн повышения уровня. В процессе нелинейной эволюции начальная волна трансформировалась в распространяющийся волновой пакет, причем со временем происходило разделение головной УВВ и осциллирующего следа. Стоит отметить, что критерием формирования УВВ служили оценки изменения параметров, описанные в работе [8].

Рассмотрим качественные особенности пространственной структуры интенсивных внутренних уединенных волн для симметричной трехслойной стратификации и сравним результаты численного моделирования с предсказаниями слабонелинейной теории. Здесь стоит отметить, что, вообще говоря, эволюционные уравнения одномерны по пространству, и для того, чтобы анализировать пространственную структуру решения, необходимо учитывать вертикальную структуру моды. Мы будем рассматривать решение в двумерном пространстве с учетом линейной вертикальной моды и первой нелинейной поправки к ней (рис.1):

$$\eta(x, z) = A(x)\Phi(z) + A^2(x)T_n(z) \quad (10)$$

На рис. 2 слева изображено поле избыточной условной плотности (изопикны) для солитона амплитуды 12.05 м. Для сравнения в поле плотности пунктирными линиями показано также поле солитона мкдв, имеющего такую же амплитуду. Из рис. 2 (слева) очевидно, что полнонелинейная уединенная волна значительно шире солитона мкдв,

то есть имеет предельную амплитуду, по достижении которой начинает расти в ширину. Кроме того, разница между смещениями изопикн в поле солитона ПН и МКДВ выше верхнего интерфейса больше, чем для изопикн, расположенных ниже этого же интерфейса. Тогда как для изолиний аномалии плотности вблизи нижнего интерфейса наблюдается противоположная картина. Асимметрия наблюдается и относительно среднего уровня: если вертикальное смещение ПН на верхнем интерфейсе превосходит смещение МКДВ, то на нижнем интерфейсе наблюдается обратная картина.

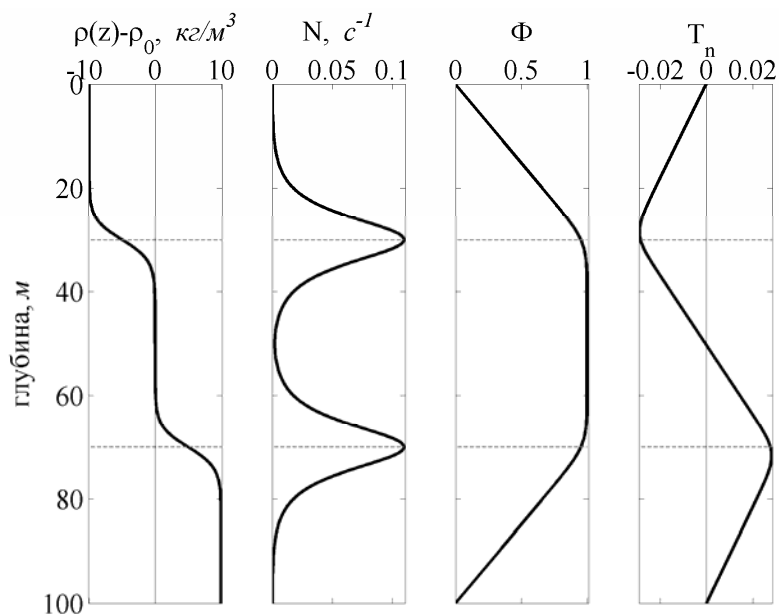


Рис.1. Вид профиля плотности, частоты Вайсяля-Брента, вертикальной структуры моды и нелинейной поправки для сглаженной трехслойной симметричной стратификации плотности.

Для сравнения на рис.2 справа изображено поле избыточной плотности солитона МКДВ с учетом и без учета первой нелинейной поправки T_n . Из рис.2 (справа) видно, что T_n вносит значительную асимметрию в вертикальную структуру волнового поля.

На рис.3 изображены аналогичные рис.2 вертикальные структуры полей избыточной плотности для солитона с амплитудой 10.03 м. Асимметрия в этом случае менее ярко выражена.

При малых же амплитудах структура решений ПН, МКДВ с учетом и без учета T_n почти одинакова (нелинейность не играет важной роли)

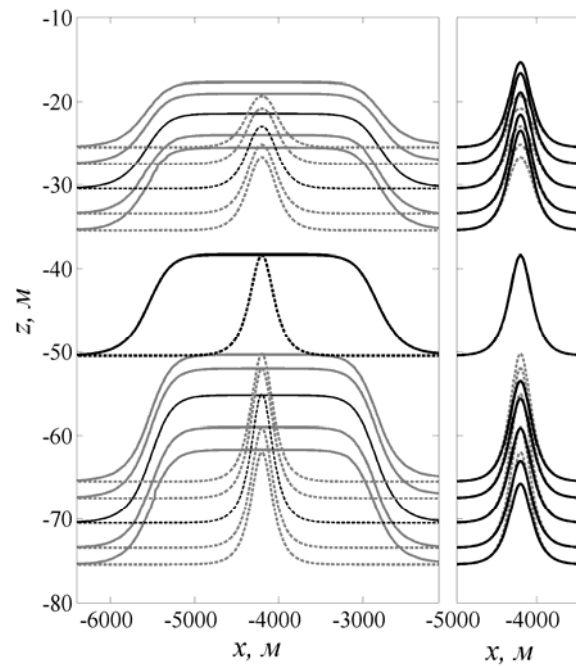


Рис.2. Вертикальная структура поля избыточной плотности для солитона с $a_m = 12.05$.

Слева: пунктиром показано поле мКдВ солитона;
справа: сплошной линией показано решение без учета первой нелинейной поправки.

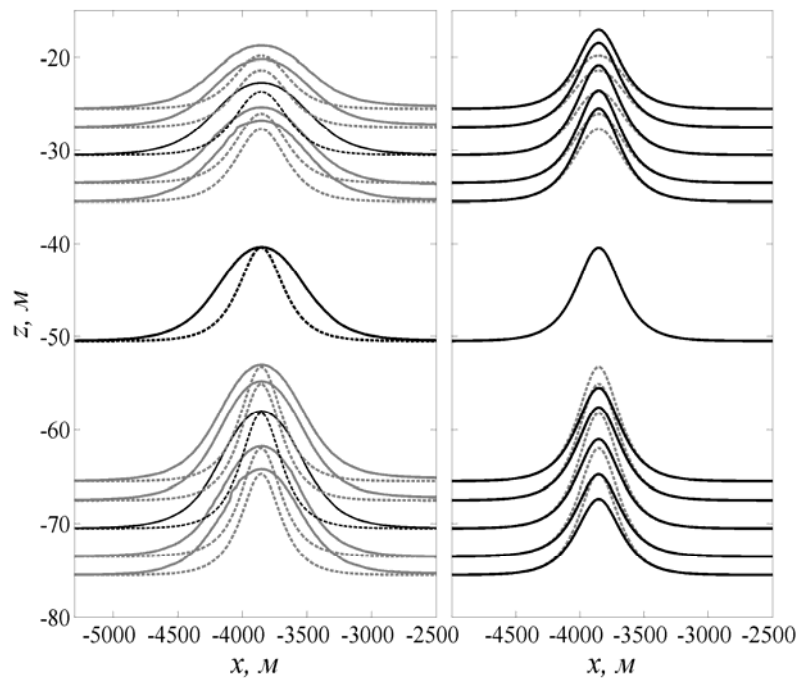


Рис.3. Вертикальная структура поля избыточной плотности для солитона с $a_m = 10.032$.

Слева: пунктиром показано поле мКдВ солитона;
справа: сплошной линией показано решение без учета Tn

Пространственная структура поля горизонтальной скорости характеризуется наличием локальных максимумов на поверхности и дне жидкости, причем разница их значений тем больше, чем больше амплитуда солитона (рис. 4 а, б, в: для случая (в) скорость на поверхности 72.8 см/с (0.4с), на дне -61.2 см/с (0.37с), для случая (б) 32.5 (0.2с) и -31.6 см/с(0.19с) соответственно, для (а) обе равны по 5.46 см/с(0.03с), но имеют разное направление). Также из рис. 4 видно, что в средней части солитона в верхнем и нижнем слое располагаются достаточно обширные области, внутри которых скорости близки к поверхностному и придонному максимуму соответственно, при этом толщина (вдоль оси z) верхней области в центре солитона тем меньше толщины нижней, чем больше амплитуда. В среднем слое преобладает более узкая (вдоль оси x) область скоростей, сонаправленных со скоростями в верхнем слое, ниже которой располагается более широкая область, охватывающая почти весь диапазон скоростей в нижнем слое. Разница между толщинами (вдоль оси z) этих двух областей в среднем слое тем больше, чем меньше амплитуда. Для солитонов отрицательной полярности наблюдается обратная картина.

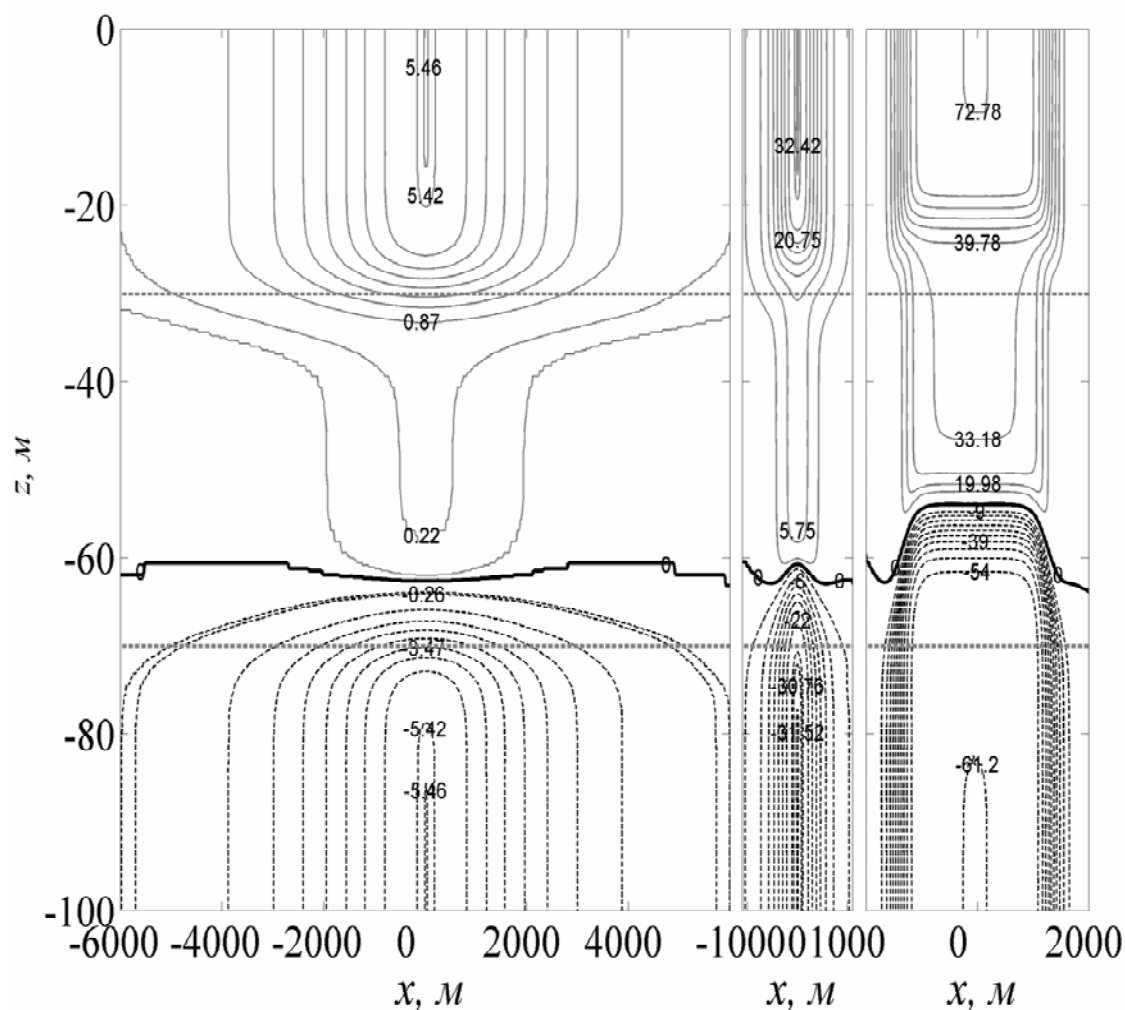


Рис. 4 – Поле горизонтальной скорости в см/с для ПН солитона с амплитудой (а) 0.923 м (б) 5.57 м (в) 12.05 м, распространяющегося в бассейне с глубиной 100 м.

Стоит отметить, что для широкого солитона орбитальная скорость жидких частиц на свободной поверхности в два с небольшим раза меньше фазовой скорости (166.2 см/с), при этом по своей структуре поле горизонтальной скорости внутри такого солитона напоминает плоскопараллельный поток, распространяющийся со скоростью солитона.

Следующая характерная особенность – положение нулевой изолинии горизонтальной скорости в пространстве. Нулевая изотаха в центре солитона расположена на глубине (в) 54.5 м (б) 61.5 м (а) 63.1 м. При удалении от центра она сначала заглубляется до уровня (а,б) 63.5 м/ поднимается до уровня (а) 60.5 м, а затем поднимается до (в) 58.5 м (б) 60.5 м. Таким образом, общее изменение глубины залегания составляет (в) 9 м (0.75а) (б) 2 м (0.36а) (а) 2.5 м (2.7а).

На рис.5 представлено поле вертикальной скорости для солитонов с амплитудами 0.92 м, 5.57 м, 12.05 м. Для предельного солитона линия нулевой скорости имеет загибы вблизи верхнего и нижнего интерфейса, максимумы отстоят друг от друга на большую величину, чем для случая $a_m = 0.92$ (хотя ширина рассматриваемого солитона с $a_m = 12.05$ меньше, чем у солитона с $a_m = 0.92$), и поскольку ширина предельного солитона может возрастать неограниченно, области с максимальными вертикальными скоростями могут отодвигаться друг от друга также неограниченно.

Еще один вывод, который может быть сделан из качественного анализа рис.2,3 состоит в том, что ширина интенсивного солитона зависит от глубины. Этот вывод подтверждается количественными оценками. На рис. 6 представлена зависимость λ от z , определяемая в соответствии с работой [25] как

$$\lambda(z) = \frac{1}{2a(z)} \int_{-\infty}^{+\infty} \eta(x, z) dx \quad (11)$$

для пяти УВВ, имеющих амплитуды 0.923 м; 3.82 м; 5.57 м; 10.066 м и 12. 0529 м. Здесь $\eta(x, z)$ – профиль изопикны. Аналогичная зависимость для солитонов МКДВ этих же амплитуд представлена сплошной линией (черным цветом изображено решение МКДВ без учета T_n). Все кривые пронормированы на значение ширины волны на глубине 50 м. Если все кривые солитонов МКДВ монотонны (убывание ширины волны с глубиной), причем, чем больше амплитуда, тем больше убывает ширина волны, то для численных солитонов наблюдается качественно другая зависимость. Наиболее нелинейный характер зависимости длины волны от глубины наблюдается для солитона с амплитудой 0.923 м. Его ширина выше верхнего интерфейса превосходит значение на глубине 50м, на верхнем интерфейсе достигает его, а затем опять становится меньше. Для второй половины бассейна наблюдается обратная картина. Для солитонов больших амплитуд зависимость почти монотонна, причем при увеличении амплитуды ширина волны больше меняется с глубиной. Исключение составляет ИУВВ предельной амплитуды, для которой характер зависимости ширины волны от глубины наиболее близок к линейному.

Зависимость вертикальной структуры численных солитонов от амплитуды представлена на рис.7,8. Вертикальные профили пронормированы на величину, соответствующую максимуму солитона МКДВ, имеющему такую же амплитуду. Профили $a(z)$ и $u(z)$ построены для центрального сечения солитона, а кривые $w(z)$ показывают распределение вертикальной скорости на некотором удалении от центра, где вертикальная

скорость достигает своего максимума. Таким образом, рис. 7, 8 демонстрируют различия между вертикальными структурами ИУВВ и солитонов МКДВ.

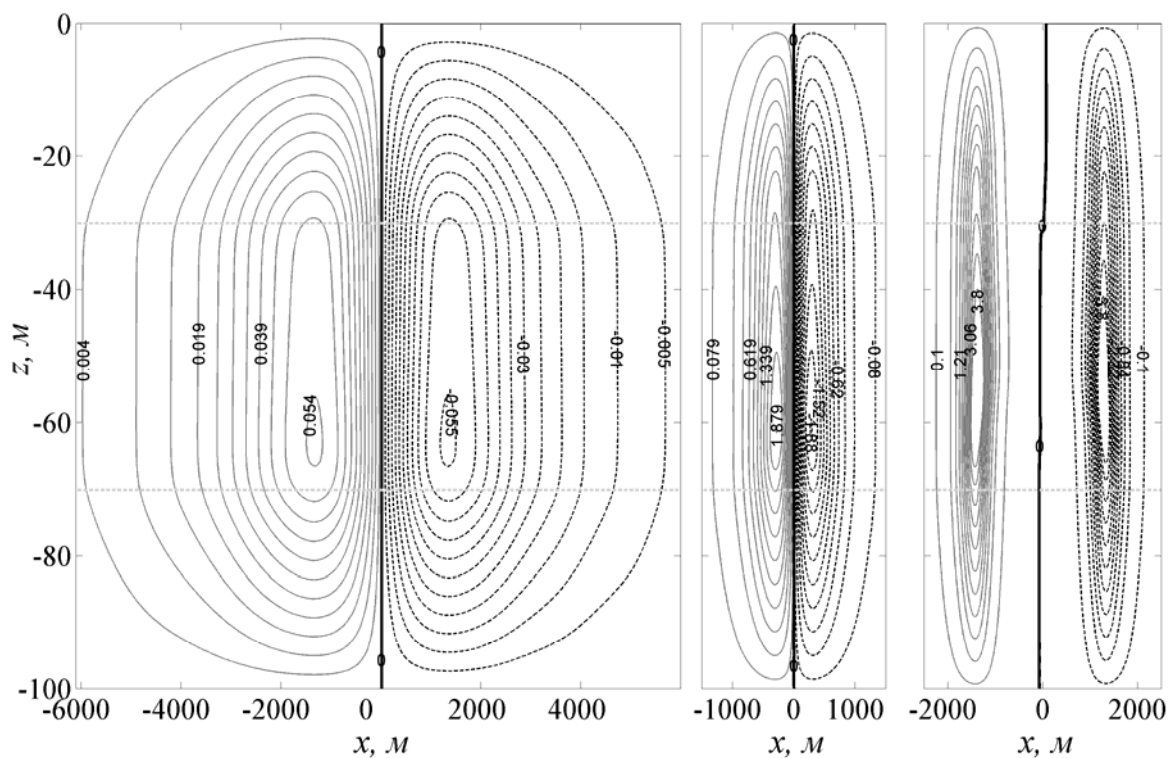


Рис. 5 – Поле вертикальной скорости в см/с для ПН солитона с амплитудой (а) - 0.923 м, (б) - 5.57 м, (в) - 12.05 м, распространяющегося в бассейне с глубиной 100 м.

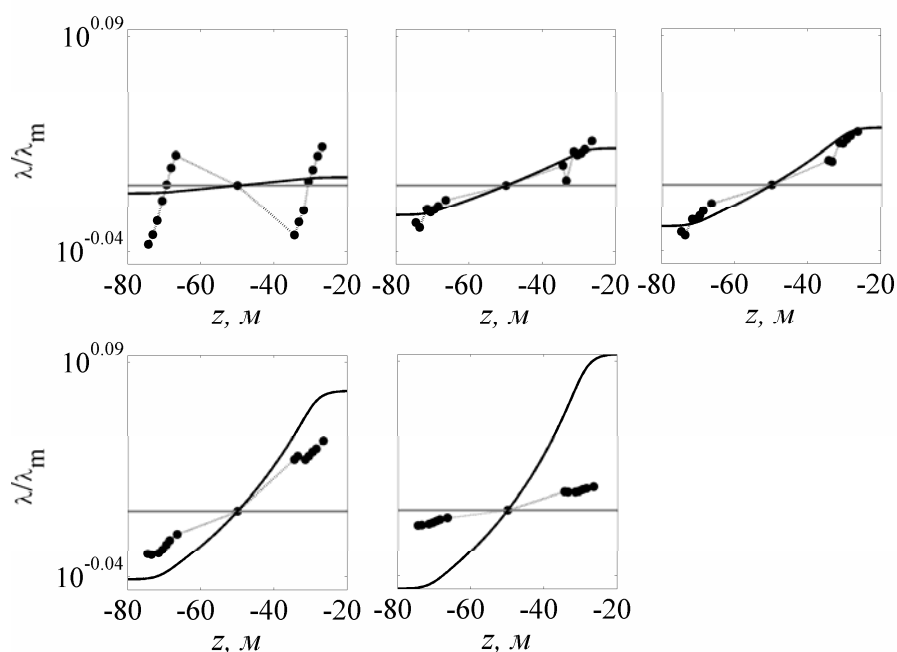


Рис. 6 – Зависимость ширины солитона от глубины, рассчитанная по формуле (11),

для амплитуд: 0.923 м; 3.82 м; 5.57 м; 10.066 м и 12.0529 м
(нормировка проводилась на значение ширины солитона
на полуглубине бассейна; пунктир – ПН модель, сплошная – МКДВ)

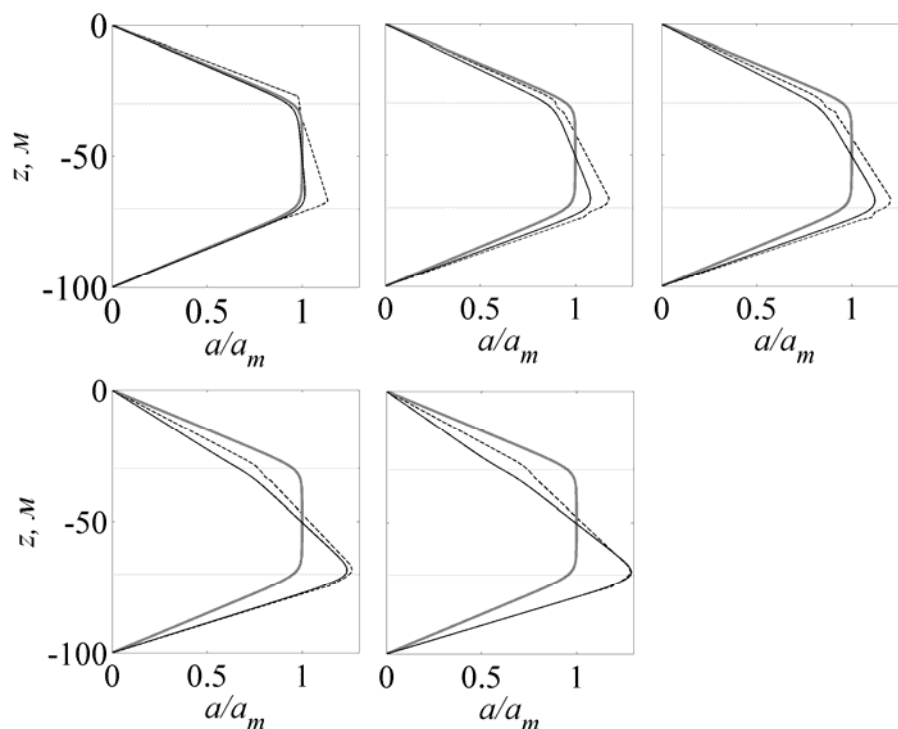


Рис.7. Нормированные вертикальные профили волновых отклонений
(курсив – ПН модель, сплошная – МКДВ,
симметричная кривая – вертикальная структура моды)
для амплитуд: 0.923 м; 3.82 м; 5.57 м; 10.066 м и 12.0529 м
(нормировка проводилась на значение отклонения
солитона МКДВ на полуглубине)

Из рис.7 видно, что максимум амплитуды вертикального смещения в центре солитона достигается вблизи нижнего интерфейса, причем это значение для всех ИУВВ, кроме волн предельной амплитуды, больше аналогичных значений солитонов МКДВ.

Отличие профилей горизонтальной скорости численной уединенной внутренней волны возрастает с увеличением амплитуды: УВВ поднимает точку смены знака горизонтальной скорости по сравнению с солитоном МКДВ на тем большую величину, чем больше амплитуда волны, в то же время величина горизонтальной скорости УВВ на свободной поверхности тем больше аналогичного значения для солитона МКДВ, чем больше амплитуда. Поэтому если для волн с $a_m=0.92$ м есть участки, где профили U для солитона и УВВ почти совпадают или находятся близко, то оценки скоростей для волн с $a_m=12.05$ существенно различны. Поведение придонных и поверхностных горизонтальных скоростей будет проанализировано отдельно.

Для вертикальных скоростей разница между профилями вертикальных скоростей солитонов МКДВ и УВВ одной амплитуды также существенно возрастает с увеличением амплитуды. Причем, отличаются не только количественные характеристики (величины скоростей), но и качественная картина волнового профиля. Поэтому из рис. 7, 8

можно сделать вывод о значительном влиянии нелинейности на распределение скоростей внутри солитона.

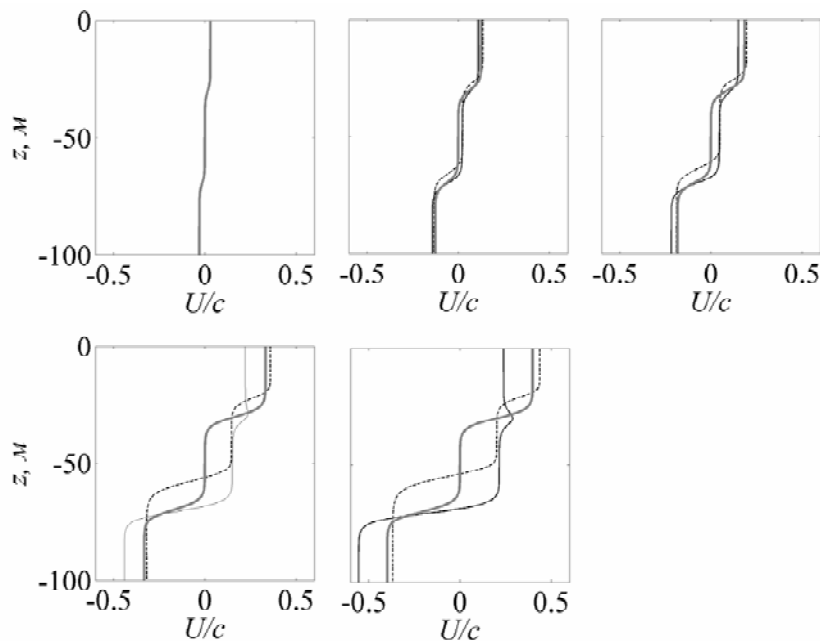


Рис.8. Нормированные вертикальные профили горизонтальных скоростей (курсив – ПН модель, сплошная – МКДВ, симметричная кривая – линейная скорость) для амплитуд: 0.923 м; 3.82 м; 5.57 м; 10.066 м и 12. 0529 м (нормировка проводилась на c)

В завершение рассмотрим графики придонной и приповерхностной скоростей для солитонов МКДВ и УВВ (рис. 9).

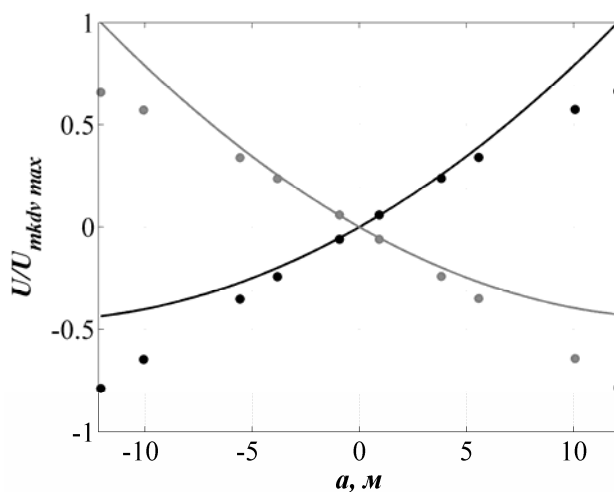


Рис.9 – Нормированные значения придонных (серый) и приповерхностных (черный) скоростей для солитонов МКДВ (сплошная) и УВВ(точки)

Так, для солитонов повышения слабонелинейная теория переоценивает придонные скорости и недооценивает поверхностные, для солитонов понижения наблюдается обратная картина.

Таким образом, в настоящей работе было проведено исследование пространственной структуры УВВ, полученных путем численного интегрирования начальной задачи для полной системы уравнений гидродинамики невязкой несжимаемой стратифицированной жидкости в приближении Буссинеска, и сравнение со слабонелинейными солитонами для трехслойной среды. Доказано, что даже для волн сравнительно небольших амплитуд слабонелинейная теория дает очень неточные оценки волновых характеристик и не может быть применима для волн предельных амплитуд. Выявлена качественно разная структура профиля горизонтальной и вертикальной скорости для УВВ и солитонов МКДВ больших амплитуд, что может быть интересно для разного рода практических задач.

Представленные результаты поисковой научно-исследовательской работы получены в рамках реализации мероприятия 1.2.1 «Проведение научных исследований научными группами под руководством докторов наук» ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 – 2013 годы, а также при поддержке грантов Президента РФ для молодых российских ученых – докторов наук (МД-99.2010.5), и РФФИ 10-05-00199а.

ЛИТЕРАТУРА

1. Краусс, В. Внутренние волны. Л.: Гидрометеиздат, 1968. 272 с.
2. Морозов, Е.Г. Океанские внутренние волны. М.: Наука, 1985. 151 с.
3. Сабинин, К.Д., Коняев К.В. Волны внутри океана. С-П.: Гидрометеиздат, 1992. 272с.
4. Mak Kinnan, J.A., Gregg M.C. Mixing on the late-summer new England shelf-solibores, shear and stratification. Preprint. AGU, 1999. – 4. p.19
5. Bogucki, D., Dikky T., Redekopp L.G. Sediment resuspension and mixing by resonantly generated solitary waves // J. Phys. Oceanogr, 1997.– 7. p.1181 – 1196
6. Maltseva, J.L. Limiting forms of internal solitary waves //J. Offshore Mech. 2003. – 125 № 1. p.76
7. Maltseva, J.L. On asymptotic properties of internal solitary waves in two-layer fluids // Computational technologies. 2000. – 5 № 1. p. 85-92
8. Власенко, В.И., Брандт П., Рубино А. Исследование структуры уединенных внутренних волн большой амплитуды // Морской гидрофиз. журнал, 2000. – 5. с. 15– 31
9. Makarenko, N.I., J. L. Maltseva, and A. Yu. Kazakov Conjugate flows and amplitude bounds for internal solitary waves // Nonlin. Processes Geophys. , 2009. – 16. p. 169–178
10. Duda, T.F., Lynch, J.F., Irish, J.D., Beardsley, J.D., Ramp, S.R., et al. Internal tide and nonlinear wave behavior in the continental slope in the northern South China Sea // IEEE J. Ocean Eng., 2004.– 29. p.1105–1131
11. Helfrich, K.R. and W.K. Melville Long Nonlinear InternalWaves // Annu. Rev. Fluid. Mech., 2006. –38. p. 395–425.
12. Aitsam, A., Hansen H.P., Elken J., Kahru M., Laanemets J., Pa juste M., Pavelson J., Talpsepp L. Physical and chemical variability of the Baltic Sea: a joint experiment in the Gotland Basin // Cont. Shelf Res., 1984. –3. p. 291–310

13. *Soomere, T.* Coupling coefficients and kinetic equation for Rossby waves in multi-layer ocean // *Nonlinear Processes in Geophysics*, 2003. – 10. p. 385–396
14. *Rus˚as, P.-O. and Grue J.* Solitary waves and conjugate flows in a three-layer fluid // *Eur. J. Mech. B/Fluids*, 2002. – 21. p. 185–206
15. *Lamb, K.G.* Extreme internal solitary waves in the ocean: Theoretical considerations // *Preprint University of Waterloo*. – 2006. p. 109–117.
16. *Gear, J.A., Grimshaw R.* A second order theory for solitary waves in shallow fluids. // *Phys. Fluids*, 1983. – 26. p. 14 – 29.
17. *Grimshaw, R., Pelinovsky E., Talipova T.* The modified Korteweg - de Vries equation in the theory of large-amplitude internal waves. // *Nonlinear Processes in Geophysics*, 1997. – 4, No. 4. p. 237 - 350.
18. *Канарская, Ю.В.* Негидростатическая модель стратифицированных течений со свободной поверхностью. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, 01.02.05 - механика жидкости, газа и плазмы. Киев, Украина, 2004. 126с.
19. *Grue, J., Friis A., Palm E., Rusas P.-O.* A method for computing unsteady fully nonlinear interfacial waves // *J. Fluid Mech.*, 1997. – 351. p. 223.
20. *Lamb, K.* Numerical experiments of internal wave generation by strong tidal flow across a finite amplitude bank edge // *J. Geoph. Res.*, 1994. – 99, C1. p. 843-864.
21. *Vlasenko, V., Stashchuk N., Hutter K., Sabinin K.* Nonlinear internal waves forced by tides near the critical latitude. // *Deep-Sea Research I*, 2003. – 50. p. 317–338
22. *Brown, D.J., Christie D.R.* Fully Nonlinear Solitary Waves in Continuously Stratified Incompressible Boussinesq Fluids // *Phys. Fluids*, 1998. – 10. p. 2569–2586
23. *Lamb, K.* Numerical simulations of stratified inviscid flow over a smooth obstacle // *J. Fluid Mech*, 1994. – 260. p. 1–22.
24. *Lamb, K., Yan L.* The evolution of internal wave undular bores: comparisons of a fully nonlinear numerical model with weakly nonlinear theory. // *J. Phys. Oceanography*. – 1996. – 26. p. 2712–2734.
25. *Koop, C.G., Butler G.* An investigation of internal solitary waves in a two-fluid system // *J. Fluid Mech.* – 1981. – 112 .p. 225–251

INVESTIGATION OF THE STRUCTURE OF LARGE AMPLITUDE INTERNAL SOLITARY WAVES IN A THREE-LAYER FLUID

E. Rouvinskaya, O. Kurkina, A. Kurkin

*Nizhny Novgorod state technical university
25/12, St. Minina, Nizhny Novgorod, 603950, Russia*

Abstract. The structure of physical fields (density anomaly, horizontal and vertical velocity) of localized stationary full-nonlinear disturbances in the symmetric three-layer fluid is examined. Wavelength–amplitude and phase speed–amplitude relationship depending on vertical coordinate are analyzed for these waves. The comparison with weakly-nonlinear theory is also carried out.

Key words. Soliton, vertical mode, nonlinearity, the modified Korteweg - de Vries equation

УДК 535.31

ПРИМЕНЕНИЕ ЖИДКИХ КРИСТАЛЛОВ ДЛЯ РЕАЛИЗАЦИИ УПРАВЛЯЕМОГО ФАЗОВОГО ТРАНСПАРАНТА

Е.В. Бурый, Д.А. Семеренко

*Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
105005, Москва, 2-я Бауманская, 5*

Аннотация. Обоснована целесообразность применения фазового транспаранта для формирования псевдослучайных реализаций отсчетов поля интенсивностей излучения при изучении свойств корреляционной функции 6-го порядка этого поля. Предложен способ построения фазового транспаранта, основанный на применении ячеек, заполненных нематическим жидким кристаллом, в которых реализована переменная величина зазора между стеклами с прозрачными электродами. Показано, что технологичная в изготовлении ячейка с клиновидным зазором обеспечивает реализацию требуемых величин фазового сдвига, а система таких последовательно расположенных ячеек позволит увеличить число формируемых статистически независимых реализаций отсчетов поля интенсивностей излучения.

Ключевые слова: жидкий кристалл, корреляционная функция, фазовый транспарант

Введение

В задачах исследования характеристик корреляционных функций (КФ) высших порядков поля излучения возникает необходимость формирования независимых реализаций поля когерентного излучения и получаемых реализаций отсчетов интенсивностей, используемых для построения КФ [1 – 4].

Широко применяемый способ формирования таких реализаций поля когерентного излучения, основанный на прохождении когерентного излучения лазера через стеклянный диск с односторонним матированием [2], не позволяет сформировать реализации отсчетов поля интенсивностей, полностью удовлетворяющих требованиям их статистической независимости при одновременном выполнении условия сохранения фазовых соотношений КФ 6-го порядка. Имеющее место частичное нарушение фазовых соотношений для КФ 6-го порядка обусловлено особенностями взаимодействия когерентного излучения с микронеровностями шероховатой поверхности стеклянного диска.

Альтернативным решением является применение фазового транспаранта, обеспечивающего псевдослучайное изменение фазы излучения в различных областях сечения луча, проходящего через этот транспарант. Такой транспарант можно реализовать, используя жидкокристаллические ячейки.

Оптические свойства жидких кристаллов, обеспечивающие возможность построения фазового транспаранта

Жидкие кристаллы (ЖК) находят широкое применение в различных приложениях оптоэлектроники. Наиболее широко используются термотропные ЖК, физические свойства которых зависят от температуры. Разновидностью термотропных ЖК является

нематический ЖК (НЖК), который характеризуется дальним ориентационным порядком и представляет собой оптически одноосный кристалл [8].

Принцип работы активных оптических ЖК элементов основан на изменении величины двулучепреломления Δn ЖК за счёт переориентации его молекул под действием внешних полей – электрического, магнитного или теплового [9]. Для обеспечения максимального диапазона изменения величины Δn в ячейке, содержащей НЖК с положительной диэлектрической анизотропией $\Delta\epsilon$, создают планарную ориентацию молекул ЖК. Если $\Delta\epsilon < 0$, то в ячейке создают гомеотропную ориентацию молекул. Однако, в этом случае диапазон изменения величины Δn оказывается в несколько раз меньшим по отношению к случаю использования НЖК с $\Delta\epsilon > 0$ [8].

Экспериментально установлена зависимость уменьшения величин Δn и вязкости НЖК при увеличении температуры. Для НЖК существует температура T_c , которую часто называют температурой просветления, при превышении которой ЖК приобретает свойства обычной изотропной жидкости [7, 8].

При положительных температурах, меньших T_c , зависимость Δn от температуры T определяется эмпирическим выражением [5]:

$$\Delta n \cong g_0 \frac{\lambda^2 \lambda^{*2}}{\lambda^2 - \lambda^{*2}} \exp\left[-(T - T_0)/T_c \left(1 - \frac{0,98T}{T_c}\right)^{0,22}\right],$$

где λ – длина волны излучения, λ^* – резонансная длина волны ЖК, $T_0 \approx 293\text{K}$, g_0 – нормировочная константа, зависящая от типа НЖК.

Изменение величины Δn НЖК также достигается за счёт создания переменного во времени электрического поля, наличие которого приводит к возникновению ориентационного эффекта в ячейке с НЖК. Ориентирующее действие электрического поля связано с анизотропией диэлектрической проницаемости ЖК [8]. Обычно это поле создают, прикладывая к прозрачным электродам ячейки переменное напряжение. В результате переориентации молекул НЖК изменяется величина Δn :

$$\Delta n = \frac{1}{d} \int_0^d [n_e(z) - n_o] dz, \quad (1)$$

где $n_e(z)$ – функция значений показателя преломления n_e необыкновенного луча, вид которой зависит от величины напряженности электрического поля в ячейке, z – координата в направлении, перпендикулярном плоскости ячейки, n_o – показатель преломления обыкновенного луча, d – зазор ячейки, заполненная ЖК [5]. Изменение Δn приводит к изменению величины фазовой задержки излучения $\Delta\varphi$, проходящего через ячейку:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi d}{\lambda} (n_e(\theta) - n_o). \quad (2)$$

Таким образом, управляемый фазовый транспарант на основе ячейки с НЖК может

быть создан, если удастся обеспечить управляемое изменение функции $n_e(z)$ для различных областей поперечного сечения ячейки.

Очевидно, что изменять вид $n_e(z)$ НЖК в различных областях ячейки путем формирования пространственно-случайного поля температур технически сложно. Кроме того, инерционность тепловых процессов существенно ограничивает достижимую скорость формирования реализаций профиля $\Delta\varphi$ (экспериментально установлено, что постоянная времени может составлять 5...10 с вследствие низкой теплопроводности стекол ячейки). Формирование планарной многоэлектродной структуры для реализации пространственных неоднородного электрического поля требует значительных аппаратных затрат для реализации управления транспарантом.

Управляемый фазовый транспарант на основе жидкого кристалла

Из (1) следует, что изменение фазы в различных областях сечения луча, проходящего через ячейку, заполненную ЖК, возможно, если в пределах плоскости ячейки реализована пространственная неоднородность толщины слоя ЖК – рис.1.

Основной проблемой создания такой ячейки является изготовление оптически прозрачного стекла, одна поверхность которого представима случайной двумерной функцией, характеризующей средней высотой профиля сечения h и средним периодом положения локальных максимумов r . Кроме проблем технологического характера, при реализации такой ячейки возникает проблема обеспечения необходимой электрической прочности при малой величине H .

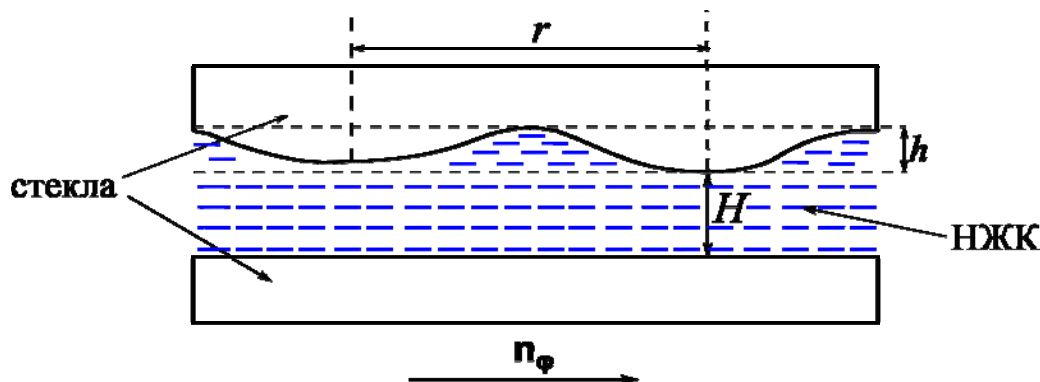


Рис.1. Ячейка с одним стеклом переменного профиля, заполненная НЖК

Оценку величины $\Delta\varphi$, реализуемой в пределах рабочей области ячейки с НЖК можно получить, используя уравнение (2). Угол θ отклонения директора НЖК найдем из выражения:

$$\frac{U}{U_{tr}} = 1 + \frac{1}{4} \left(1 + k + \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon_{\perp}} \right) \theta^2,$$

где $U_{tr} = \pi\sqrt{4\pi k / \Delta\varepsilon}$ – пороговое напряжение, k – эффективная константа упругости Франка, $\Delta\varepsilon$ – диэлектрическая анизотропия, $\varepsilon_{\perp}$ – диэлектрическая проницаемость НЖК в направлении, перпендикулярном направлению преимущественной ориентации молекул. Величина k определяется формулой:

$$k = \frac{K_{33} - K_{11}}{K_{11}},$$

где K_{11} – коэффициент поперечной деформации ЖК, K_{33} – коэффициент продольной деформации ЖК.

Напряжение $U > U_{tr}$, приложенное к ячейке, вызывает изменение ориентации θ директора НЖК, и, следовательно, приводит к изменению показателя преломления необыкновенного луча:

$$n_e(\theta) = \frac{n_e \cdot n_o}{\sqrt{n_e^2 \cdot \cos^2(\theta) + n_o^2 \cdot \sin^2(\theta)}}.$$

Анализ показывает, что для смеси НЖК Е7 с параметрами $n_e = 1,727$, $n_o = 1,518$, $\varepsilon_{\perp} = 5,2$, $\Delta\varepsilon = 13,8$ значение $\Delta\varphi$ может изменяться в пределах от 0 до π рад при $h = 1,5 \cdot 10^{-6}$ м и изменении управляющего напряжения U от 2 до 8 В. Заметим, что величина H , которая должна существенно превышать h для обеспечения необходимой электрической прочности ячейки (опыт создания ЖК ячеек показывает [6], что целесообразно обеспечить $H = 5 \dots 10 \cdot 10^{-6}$ м), не оказывает существенного влияния на реализуемую величину $\Delta\varphi$.

Величина r будет определять характерный размер области сечения луча, в пределах которой изменение фазы будет значимым. Отметим, что формирование поверхности с величиной r , меньшей $1 \cdot 10^{-4}$ м, представляется трудно разрешимой задачей. Использование поверхностей с большими значениями r приводит к уменьшению числа пространственных степеней свободы поля формируемого излучения. Кроме того, практическая реализация ячейки с ЖК такой конструкции осложняется невозможностью обеспечения взаимного положения стекол при сборке ячейки по традиционной технологии, основанной на использовании спейсеров [6].

Альтернативным решением является применение клиновидной ячейки с ЖК – рис.2. Основным недостатком использования такой ячейки в качестве фазового транспаранта является выраженное линейное изменение фазы излучения в одном направлении, которое будем характеризовать вектором $\mathbf{n}_{\varphi}$. Этот недостаток можно компенсировать, расположив несколько клиновидных ячеек последовательно таким образом, чтобы векторы $\mathbf{n}_{\varphi}$ каждой ячейки были не коллинеарны.

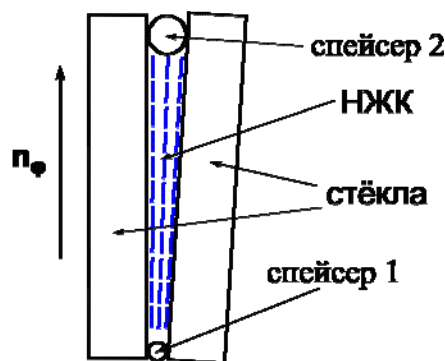


Рис.2. Ячейка клиновидной формы с НЖК

Как показали эксперименты, проведенные с заполненной смесью НЖК Е7 клиновидной ячейкой (толщины спейсеров 1 и 2 – $10 \cdot 10^{-6}$ и $15 \cdot 10^{-6}$ м соответственно), даже такой простейший фазовый транспарант пригоден для проведения экспериментальных исследований корреляционных функций высших порядков поля излучения. При изменении напряжения U в пределах от 2,2 до 10,0 В удалось сформировать более 30 реализаций отсчетов интенсивностей (по 600 отсчетов в каждой реализации) поля излучения He-Ne лазера с $\lambda = 0,633 \cdot 10^{-6}$ м, прошедшего через фазовый транспарант. Эти реализации удовлетворяют условиям формирования независимых реализаций отсчетов КФ 6-го порядка.

Заключение

Показано, что управляемый фазовый транспарант, обеспечивающий псевдослучайное изменение величины фазового сдвига $\Delta\varphi$ в пределах его рабочей области, может быть создан на основе ячейки с переменной величиной зазора, заполненной НЖК. Система ячеек с клиновидными зазорами обеспечивает величину фазового сдвига в пределах $0 \dots \pi$ рад и более. Для обеспечения такого фазового сдвига величина угла при вершине клина каждой ячейки должна составлять не менее $2 \cdot 10^{-3}$ рад. Целесообразно независимо изменять величины управляющих напряжений каждой ячейки, что обеспечит формирование псевдослучайных реализаций фазовых сдвигов в пределах рабочей области транспаранта.

Работа поддержана грантом ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» НК-530П/3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бурый, Е.В., Митрофанов А.Л. Оценка функции когерентности 4-го порядка методом пространственной свертки и перспективы ее применения в лазерных информационных системах // Квантовая электроника, 1996. – Т. 23, № 5. – с. 460 - 464.
2. Бурый, Е.В., Митрофанов А.Л. Точность измерения углового радиуса объекта по оценкам функции когерентности четвертого порядка в оптически однородных и турбулентных средах // Квантовая электроника. – 1997. – Т. 24, № 1. – с. 82 – 84.
3. Бурый, Е.В., Косыгин А.А. Оценка габаритных угловых размеров объектов в условиях регистрации поля излучения малой интенсивности // Квантовая электроника, 2008. – Т. 38, № 2. – С. 194 – 198.
4. Brown, H.R, Twiss R.Q. “A test of a new type of stellar interferometer on Sirius” // Nature. – 1956. – V. 178. – p. 1046 – 1048.
5. De Bougrenet, J.L., De La Tournaye. Engineering liquid crystals for optimal uses in optical communication systems. // Liq. Cryst. – 2004. - Vol. 31, N. 2. – p. 241-269
6. Deng-Ke Yang, Shin-Tson Wu. Fundamentals of Liquid Crystal Devices. – London: “Wiley”, 2006
7. Dunmur, D. Fukuda A., Luckhurst G. Physical properties of Liquid crystals: Nematics. – London: “INSPEC”, 2001
8. De Gennes, P.G. and Prost J. The Physics of Liquid Crystals. – New York: “Oxford University press”, 1993
9. Iam-Choon Khoo. Liquid Crystals. – London: “Wiley”, 2007

USAGE OF LIQUID CRYSTAL FOR IMPLEMENTATION SPATIAL LIGHT PHASE MODULATOR

E. Buryi, D. Semerenko

*N.E. Bauman Moscow State Technical University
5, 2-nd Baumanskaya, Moscow, 105005, Russia*

Abstract. Expediency of spatial light phase modulator for forming quasi-random realization sampling of irradiation field for study behavior of correlation function of sixth order was explained. The way of creation the spatial light phase modulator based on usage of liquid crystal cell with variable cell-gap was suggested. Variation of the cell-gap in necessary range is easy to produce by usage of vee-type gap. This type of cell provides required amount realizations of magnitude phase shift. System of sequentially liquid crystals cells can provide enlarge number of statistically independent realization of sample of field irradiation intensity.

Key words: liquid crystals, correlation function, phase transparent

УДК 538.956

ОРИЕНТАЦИОННАЯ СТРУКТУРА НЕМАТИЧЕСКОГО ЖИДКОГО КРИСТАЛЛА ОГРАНИЧЕННОГО В ПОРАХ ПОРИСТОЙ ПОЛИМЕРНОЙ ПЛЁНКИ

С.В. Пасечник, Д.А. Семеренко, Д.В. Шмелёва, А.П. Чопик

*Московский государственный университет приборостроения и информатики
107996, Москва, Стромынка, 20*

Аннотация. В статье описывается метод определения ориентационной структуры жидкого кристалла в порах пористой плёнки. Данный метод основан на измерении зависимости электрической ёмкости композиционного образца (пористая плёнка, заполненная жидким кристаллом) от температуры. В качестве пористой структуры была выбрана пористая полиэтилентерефталатная плёнка из-за возможности создания пор заданной ориентацией и заданными радиусами. В измерениях использовались образцы пористой плёнки с радиусами пор 75, 170, 210, 300 и 425 нм. В экспериментах была использована оригинальная конструкция ячейки, в которой поверхности пористой плёнки были покрыты токопроводящим слоем. Теоретические расчёты, выполненные на основе экспериментальных данных, показали, что ориентационная структура жидкого кристалла внутри пор характеризуется выходом директора из плоскости нормальной к оси поры.

Ключевые слова: Пористые полимерные плёнки, жидкие кристаллы, ориентационная структура ЖК, диэлектрические измерения

ВВЕДЕНИЕ

Среди композиционных жидко – кристаллических систем различных типов (аэросилы, полимер диспергированный жидкий кристалл и др.) пористые плёнки, заполненные нематическим жидким кристаллом (НЖК), привлекают большой интерес исследователей. Это в первую очередь связано с возможностью создания строгой периодичности

пор с заданным средним радиусом пор, что увеличивает их эффективность в управлении оптическим излучением. На основе пористых плёнок, заполненных ЖК, в настоящее время реализуют различные оптические элементы, такие как, фильтры, модуляторы, затворы и др. [7,8]. Однако эффективность работы таких элементов зависит от начальной ориентации молекул НЖК в порах плёнки и от её параметров. Известно, что в зависимости от радиусов пор, энергии сцепления, температуры и др. возможно появления различных ориентационных структур НЖК в поре: планарно – радиальная, осевая, а также структуры с точечными и линейными дефектами [2,5]. Для определения ориентации директора НЖК в порах используют широко известные методы, такие как калориметрия, ЯМР, динамическая корреляционная спектроскопия [2-4]. В данной работе предложен простой метод определения ориентационной структуры НЖК в поре на основе диэлектрических измерений.

ОПИСАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА

Метод определения типа ориентационной структуры НЖК в поре основан на измерении электрической ёмкости образцов пористых плёнок, заполненных НЖК. В качестве пористого материала была выбрана плёнка пористого полиэтилентерефталата (ПЭТФ) из-за простоты изготовления, включающая две стадии: первая – бомбардирование тяжёлыми ионами, вторая – травление [1]. Преимущество этого материала перед хорошо исследованными пористыми плёнками оксида алюминия является возможность создания пор в широком диапазоне значений радиусов. При этом характер распределения пор по поверхности случайный.

Характеристики исследованных образцов представленные в таблице 1. Пористость P образцов пористых плёнок определялось как соотношение суммарной площади пор поперечного сечения к площади образца.

Таблица 1

Характеристики исследованных образцов

Радиус $r, 10^{-9}\text{м}$	Плотность $\rho, \text{м}^{-2}$	$P, \%$
75	$1 \cdot 10^{12}$	5
170	$2,2 \cdot 10^{12}$	20
210	$2,5 \cdot 10^{12}$	34,6
300	$3 \cdot 10^{11}$	8,5
425	$6 \cdot 10^{11}$	34

В случае стандартной ячейки «сэндвичного» типа, когда плёнку зажимают между двумя стёклами, образуются паразитные слои ЖК, находящиеся между стеклом и плёнкой, что искажает результат измерения. Для предотвращения формирования паразитного слоя ЖК, поверхности образцов пористых ПЭТФ плёнок были нанесены прозрачные электроды. Конструкция ячейки показана на рисунке 1. Ячейка собрана таким образом, что поверхности пористой плёнки не касаются поверхностей стёкол. Распределение электрического поля внутри пор ПЭТФ плёнки достаточно однородно и имеет малые искажения только у краёв пор, что не существенно с точки зрения измерения электрической ёмкости образцов.

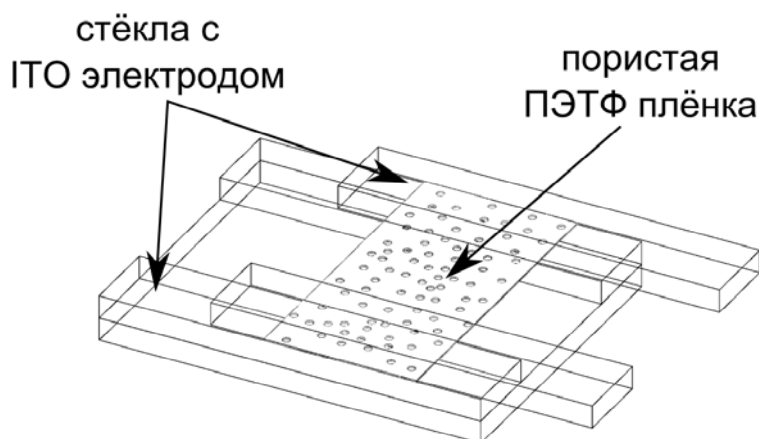


Рис.1. Конструкция экспериментальной ЖК ячейки

В качестве НЖК был выбран стандартный и хорошо изученный нематик 5СБ. Имеющаяся информация о параметрах данного НЖК позволяет выполнить оценочный расчет среднеквадратичного угла между директором НЖК и осью поры. Пористые ПЭТФ плёнки заполнялись НЖК в вакууме под действием капиллярных сил, что позволило исключить образование воздушных пузырей внутри пор пористой ПЭТФ плёнки.

Для измерения электрической ёмкости образцов в зависимости от температуры был использован LCR метр HP 4284A. Измерение зависимости ёмкости от температуры пористых плёнок с различными радиусами пор были получены при охлаждении образцов от температуры T , которая больше температуры просветления НЖК T_c на несколько градусов, до $T = 293\text{K}$.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Полученные экспериментальные зависимости ёмкости от температуры $C(T)$ показывают резкие изменения в температурном коэффициенте $k_T = \partial C / \partial T$ ёмкости, которые могут быть связаны с фазовым переходом первого рода нематик – изотропная жидкость (N-I). Следует отметить, что при уменьшении радиуса пор температура фазового перехода НЖК в порах уменьшается, что может быть связано с влияниями поверхности. Рассмотрение сдвига температуры фазового перехода в зависимости от радиуса пор выходит за рамки статьи.

Уменьшение величины ёмкости при увеличении температуры соответствует случаю параллельной ориентации поля директора ЖК в объёмном образце [6]. Сравнение зависимостей $C(T)$ полученных для ЖК в порах и в объёмном образце можно исключить из рассмотрения планарно – полярную или планарно – радиальную ориентационную структуру НЖК в поре, т.к. в последнем случае температурный коэффициент ёмкости должен был бы менять знак с положительного на отрицательный, что противоречит поведению ёмкости исследованных образцов. Поэтому, можно предположить, что ориентация ЖК в поре близка к осевой (директор параллелен оси поры). Однако однородная осевая структура не соответствует данным электрооптическим измерениям, при которых наблюдался электрооптический отклик для ЖК с положительной диэлектрической анизотропией. Таким образом можно сделать вывод о том, что в порах реализуется

промежуточный тип ориентации характеризуемый зависящим от радиуса средним полярным углом θ отклонения директора от оси поры, который возможно оценить используя следующее соотношение:

$$\varepsilon_{LC}^N = \varepsilon_{||} - \Delta\varepsilon \langle \sin^2 \theta \rangle, \quad (1)$$

где ε_{LC}^N – диэлектрическая проницаемость НЖК в поре в нематической фазе, $\varepsilon_{||}$ – диэлектрическая проницаемость в параллельном направлении молекулы НЖК, $\Delta\varepsilon$ – диэлектрическая анизотропия НЖК, θ – полярный угол между осью поры и директором ЖК. Соотношение (1) получено по аналогии с объёмным образцом

Для вычисления ε_{LC}^N и принимая во внимание, что электрическое поле близко к однородному, рассмотрим пористую плёнку, заполненную НЖК, как две параллельно соединённые ёмкости: C_{pol} – плёнки и C_{LC} – ЖК соответственно. В этом случае ёмкость пористой плёнки, заполненной НЖК, определяется:

$$C = C_{pol} + C_{LC} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{pol} S_{pol}}{h} + \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{LC} S_{LC}}{h}, \quad (2)$$

где S_{pol} , S_{LC} – площадь плёнки и пор, заполненных НЖК, соответственно. Принимая во внимание, пористость плёнки $P = \frac{S_{LC}}{S_{LC} + S_{pol}}$ запишем уравнение (2) с учётом пористости:

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{LC} S_{\Sigma} P}{h} \left[1 + \frac{1-P}{P} \frac{\varepsilon_{pol}}{\varepsilon_{LC}} \right], \quad (3)$$

где h – толщина плёнки.

Уравнение (3) может быть записано как отношение емкостей ЖК в нематической и изотропной фазах:

$$\frac{C^{nem}}{C^{iso}} = \frac{\varepsilon_{LC}^N}{\varepsilon_{LC}^{iso}} \frac{1 + \frac{1-P}{P} \frac{\varepsilon_{pol}}{\varepsilon_{LC}^N}}{1 + \frac{1-P}{P} \frac{\varepsilon_{pol}}{\varepsilon_{LC}^{iso}}} = r_c, \quad (4)$$

где ε_{LC}^{iso} – диэлектрическая проницаемость ЖК в изотропной фазе, r_c – коэффициент отношения емкости в нематической к ёмкости в изотропной фазе, которое вычисляется экспериментальным путём.

Выражая из уравнения (4) ε_{LC}^N , получим следующее выражение для диэлектрической проницаемости НЖК в поре:

$$\varepsilon_{LC}^N = r_c \varepsilon_{LC}^{iso} + \frac{1-P}{P} (r_c - 1) \varepsilon_{pol} \quad (5)$$

Подставляя уравнение (5) в (1), получим выражение для расчёта вычисления средне-квадратичного синуса угла между осью поры и ориентацией директора ЖК в поре.

На рис.2 показана рассчитанная зависимость $\langle \sin^2 \theta \rangle$ от радиуса пор по экспериментальным данным (точки), что подтверждает формирование ER конфигурации НЖК в поре, соответствующей выходу директора НЖК из плоскости, перпендикулярной оси поры. Выражение для $\langle \sin^2 \theta \rangle$ может быть получено в аналитическом виде в одноконстантном приближении:

$$\langle \sin^2 \theta \rangle = 2 \frac{1+\sigma}{\sigma-1} \left(\ln \left(\frac{2\sigma}{\sigma+1} \right) - \frac{\sigma-1}{2\sigma} \right),$$

где $\sigma = \frac{rW}{K} + \frac{K_{24}}{K} - 1$ – безразмерный поверхностный параметр, K – эффективное значение коэффициента упругости Франка, K_{24} – модуль упругости связанный с поверхностным вкладом в свободную энергию образца, W – сила поверхностного сцепления. На рис.1 (сплошная линия) показан результат аналитического расчёта среднеквадратичного синуса угла ориентации директора НЖК при $W = 10^{-4}$ Дж/м², $K = 6.5 \cdot 10$ пН и $K_{24} = 18 \cdot 10$ пН в зависимости от r .

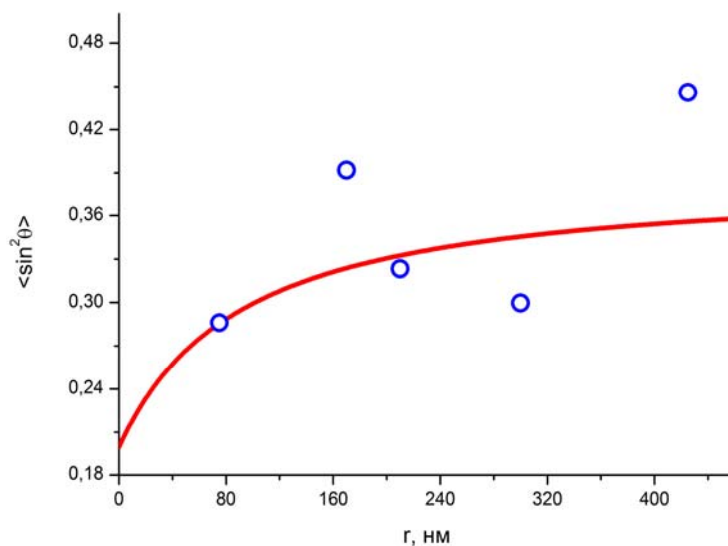


Рис.2. Зависимость среднеквадратичного синуса угла:
точки – экспериментальные данные,
сплошная линия – аналитический расчёт

Наблюдается соответствие экспериментальных данных и теоретических расчётов, что подтверждает образование в порах ER конфигурации. Разброс экспериментальных данных может быть связан с погрешностями измерений ёмкости в образцах малой пористости, а также с вероятностью образования точечных дефектов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Применённый тип конструкции ячейки позволил исключить из рассмотрения паразитные слои ЖК, что позволило с большей точностью определить зависимость электрической ёмкости образцов пористых плёнок, заполненных НЖК, от температуры. Предложенный метод определения среднего угла ориентации директора ЖК может быть применён и для других типов пористых плёнок с цилиндрической формой пор. Точность метода зависит от скорости охлаждения образца и для повышения точности измерения необходимо, чтобы скорость охлаждения была минимальной. Измерения $C(T)$ проводились при скорости охлаждения 0,1К/мин, что позволило установить экспериментальную зависимость, согласующуюся с аналитическим выражением. Из экспериментальных данных и аналитического решения установлено, что при увеличении радиуса пор среднеквадратичный синус угла между директором ЖК и осью поры увеличивается. Данные эксперимента соответствуют теоретическим расчётам для ER конфигурации.

Работа поддержана грантами Российского агентства по образованию АВЦП "Развитие научного потенциала высшей школы (2009-2010)" 2.1.1/5873, ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» НК-410П/77 и стипендией Президента РФ для обучения за рубежом.

Авторы статьи благодарны проф. Сочугову Н.С. из Института сильноточной электроники за оказанную помощь в создании прозрачных токопроводящих покрытий на поверхностях пористых плёнок.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Apel, P.* Track etching technique in membrane technology // *Radiation Measurements*. - 2001. - Vol. 34. - p. 559–566
2. *Bradac, Z., Kralj S., and Zumer S.* Molecular dynamics study of nematic structures confined to a cylindrical cavity // *Phys. Rev. E*. - 1998. - Vol. 58, N.6. - p. 7447–7454
3. *George Cordoyiannis, Lynn K. Kurihara, Luz J. Martinez-Miranda, Christ Glorieux, and Jan Thoen.* Effects of magnetic nanoparticles with different surface coating on the phase transitions of octylecyanobiphenyl liquid crystal // *Phys. Rev. E*. - 2009. - Vol/ 79, N.1. - p. 011702-011706
4. *Crawford, G.P. and Zumer S.* Liquid Crystals in Complex Geometries. - London: "Taylor & Francis", 1996
5. *Renata-Maria Marroum, Germano S. Iannacchione, Daniele Finotello and Michael A. Lee.* Numerical study of cylindrically confined nematic liquid crystals // *Phys. Rev. E*. - 1995. - Vol. 51, N. 4. - p. R2743-2746
6. *Pasechnik, S.V., Chigrinov V.G. and Shmeliova D.V.* Liquid Crystals. Viscous and Elastic Properties.- Berlin: "Wiley – VCH", 2009
7. *Semerenco, D., Shmeliova D., Pasechnik S., Murauskii A., Tsvetkov V. and Chigrinov V.* Optically controlled transmission of porous polyethylene terephthalate films filled with nematic liquid crystal // *OPTICS LETTERS*. - 2010. - V. 35, N 13. - p. 2155 – 2157
8. *Weiss, S., Ouyang H., Zhang J. and Fauchet Ph.* Electrical and thermal modulation of silicon photonic bandgap microcavities containing liquid crystals // *Optics Express*. - 2005. - Vol. 13, N. 4. - p. 1090-1097

ORIENTATIONAL STRUCTURE OF NEMATIC LIQUID CRYSTAL

CONFINED BY PORES OF POLYMER FILMS

S. Pasechnik, D. Semerenko, D. Shmeliova, A. Chopik

*Moscow State University of Instrument Engineering and Computer Science
20, Stromynka st., Moscow, 107966, Russia*

Abstract. The paper describes a method of detection orientational structure of liquid crystals inside a pore of porous film. Measurement of electric capacity of composite material (porous film is filled with liquid crystals) in dependence on temperature is main principle of this method. Porous polyethylene terephthalate films (track membranes) were used in experiments because of fabrication of different pores radius and orientation is easy. The porous films with different pores radius 75, 170, 210, 300 and 425nm were investigated. New type of liquid crystal cell was used in experiments. Surfaces of the porous films were covered by conducting electrodes. Results of a theoretical calculation based on the experimental data shown that escaped radial structure of liquid crystal formed in pores of polyethylene terephthalate films.

Key words: polymer porous films, liquid crystals, orientational LC structure, dielectric measurements

УДК 519.677.2

О ПОСТАНОВКЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДИАГНОСТИКИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НАПРЯЖЕННОСТИ ДВУМЕРНЫХ МИКРОПОЛЕЙ

В.П. Трифоненков, М.А. Петрова

*Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
115409, Москва, Каширское ш., 31*

Аннотация. Рассматривается математическая модель схемы исследования двумерного микрополя пучком электронов. Получены соотношения, учитывающие интегральную зависимость параметров пучка от распределения напряженности поля вдоль его траектории. На их основе рассматривается постановка обратной задачи нахождения гармонической функции, описывающей распределение магнитного (или электрического) поля.

Ключевые слова: обратная задача, микрополе, гармоническая функция.

Для исследования магнитных и электрических микрополей широко применяются электронно-оптические методы [1]. Естественным развитием традиционных аналоговых методов является разработка методов вычислительной диагностики, учитывающих интегральную зависимость регистрируемых параметров электронного пучка от распределения напряженности поля вдоль его траектории [2].

1. Схема исследования двумерного поля и соответствующая ей математическая модель.

Схема исследования микрополя электронным зондом микроскопа приведена на рис.1, где изображены: электронная пушка – 1, сфокусированный пучок электронов (зонд) – 2, источник исследуемого поля (магнитная головка) – 3, детектор отклонений пучка электронов – 4.

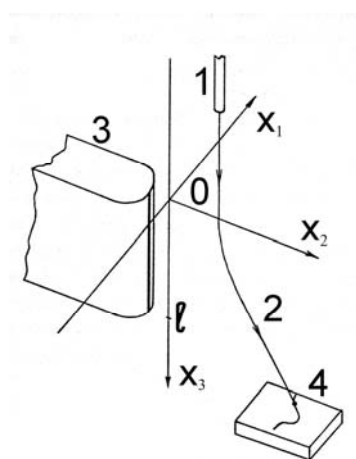


Рис.1. Схема исследования микрополя

Преобразуем систему уравнений движения электрона к виду, удобному для постановки и исследования обратной задачи. На электрон, движущийся в магнитном поле, действует сила Лоренца $\vec{F} = \frac{e}{c} [\vec{v}, \vec{H}]$ [3]. В случае, когда магнитное поле двумерно и, следовательно, может быть описано векторным потенциалом следующего вида: $\vec{H} = \text{rot } \vec{A}$, где $\vec{A} = \{0, 0, \psi(x_1, x_2)\}$, система уравнений движения электрона принимает следующий вид ($\lambda = \frac{e}{mc}$):

$$\begin{cases} \frac{dv_i}{dt} = \lambda v_3 \frac{\partial \psi}{\partial x_i}, & (i=1, 2); \\ \frac{dv_3}{dt} = -\lambda (v_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial \psi}{\partial x_2}); \\ \frac{dx_i}{dt} = v_i, & (i=1, 2, 3). \end{cases} \quad (1.1)$$

Очевидными следствиями этой системы являются соотношения:

$$\frac{d}{dt}(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) = 0, \quad (1.2)$$

$$\frac{d}{dt}(v_3 + \lambda \psi) = 0. \quad (1.3)$$

Интеграл системы уравнений движения, следующий из (1.2), соответствует сохранению энергии электрона, а (1.3) – сохранению проекции обобщенного импульса на ось Ox_3 . Характерной особенностью движения электрона в рамках рассматриваемой схемы исследования полей является выполнение условия $v_3 > 0$. В этом случае $x_3(t)$ – монотонная функция, и можно рассматривать координаты и компоненты скорости электрона как функции от координаты x_3 (а не от времени t). Переходя от производных по t к производным по x_3 в системе (1.1) и заменяя третье уравнение системы на (1.3), получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dv_i}{dx_3} = \lambda \frac{\partial \psi}{\partial x_i}, & (i=1, 2); \\ \frac{d}{dx_3}(v_3 + \lambda \psi) = 0; \\ \frac{dx_i}{dx_3} = \frac{v_i}{v_3}, & (i=1, 2). \end{cases} \quad (1.4)$$

Учитывая, что абсолютная величина скорости электрона неизменна (1.2) и равна некоторому значению v_0 , можно получить для v_3 выражение $v_3 = \sqrt{v_0^2 - v_1^2 - v_2^2}$ и исключить v_3 из системы (1.4). Окончательно, система уравнений, описывающая движение проекции электрона вдоль проекции его траектории на плоскость x_1Ox_2 в зависимости от координаты x_3 имеет вид

$$\begin{cases} \frac{dv_i}{dx_3} = \lambda \frac{\partial \psi}{\partial x_i}; \\ \frac{dx_i}{dx_3} = \frac{v_i}{\sqrt{v_0^2 - v_1^2 - v_2^2}}, \end{cases} \quad (i=1, 2). \quad (1.5)$$

Соотношение

$$\frac{d}{dx_3}(\sqrt{v_0^2 - v_1^2 - v_2^2} + \lambda \psi) = 0 \quad (1.6)$$

является следствием системы (1.5). Движение электрона рассматривается при $x_3 \in [0, l]$. Начальные условия для системы (1.5):

$$v_1(0) = 0; \quad v_2(0) = 0; \quad x_1(0) = x_1^{(0)}; \quad x_2(0) = x_2^{(0)}. \quad (1.7)$$

Пусть $\{v_1(x_3), v_2(x_3), x_1(x_3), x_2(x_3)\}$ – решение системы (1.5) с начальными условиями (1.7). Введем в рассмотрение следующие три функции от переменных $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}$ – координат начальной точки траектории электрона:

$$\begin{aligned}\sigma_i(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) &= x_i(l), \quad (i=1, 2); \\ \sigma_3(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) &= \frac{1}{\lambda}(\sqrt{v_0^2 - v_1^2(l) - v_2^2(l)} - v_0).\end{aligned}\quad (1.8)$$

Из (1.6) следует соотношение, связывающее значения ψ в начальной и конечной точках траектории, которое с учетом введенных обозначений принимает вид

$$\psi(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) - \psi(\sigma_1(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}), \sigma_2(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})) = \sigma_3(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}). \quad (1.9)$$

Функции $\sigma_i(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$ ($i=1, 2, 3$) считаются известными (их значения вычисляются по регистрируемым при исследовании поля величинам).

В рассматриваемой задаче источники магнитного поля находятся вне области двумерного поля, исследуемой с помощью электронного зонда. Тогда в исследуемой области выполняется соотношение $\text{rot } \vec{H} = \vec{0}$, из которого следует гармоничность функции $\psi(x_1, x_2)$ в этой области. Пусть проекция исследуемой области на плоскость $x_1 O x_2$ имеет вид $G = \{(x_1, x_2) \in R^2 : -\infty < x_1 < \infty, x_2 > 0\}$, $\bar{G}$ – объединение G и ее границы (рис. 2). Таким образом, в рамках рассматриваемой постановки задачи $\Delta \psi(\vec{R}) = 0$ в G , где $\vec{R} = (x_1, x_2)$.

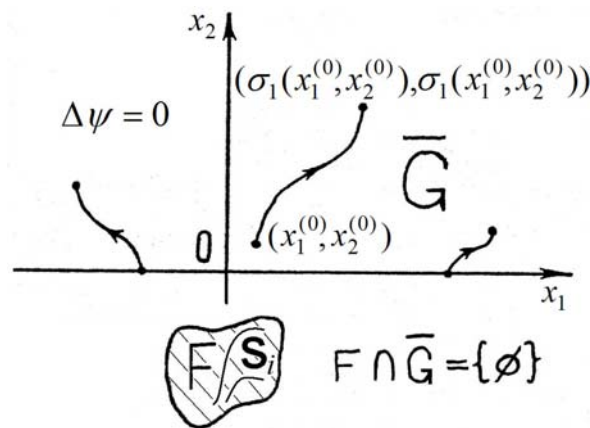


Рис.2. Проекция области G

Предположим, что $\psi(\vec{R})$ является суммой потенциалов

$$\psi(\vec{R}) = \psi_0(\vec{R}) + \psi_2(\vec{R}) + \psi_3(\vec{R}), \quad (1.10)$$

которые представляют собой различные частные случаи логарифмического потенциала [4]: потенциал площади -

$$\psi_0(\vec{R}) = \int_F \rho(\vec{R}') \ln \frac{1}{|\vec{R} - \vec{R}'|} d\vec{R}' \quad (1.11)$$

потенциал простого слоя -

$$\psi_1(\vec{R}) = \int_{S_1} \mu(\vec{R}') \ln \frac{1}{|\vec{R} - \vec{R}'|} dS_{\vec{R}'} \quad (1.12)$$

и потенциал двойного слоя -

$$\psi_2(\vec{R}) = \int_{S_2} \eta(\vec{R}') \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \ln \frac{1}{|\vec{R} - \vec{R}'|} dS_{\vec{R}'}, \quad (1.13)$$

где $\rho(\vec{R})$ – финитная функция, носитель которой лежит в некоторой ограниченной области F , такой, что $\vec{F}$ содержится в полуплоскости $x_2 < 0$; $\mu(\vec{R})$, $\eta(\vec{R})$ – функции, определенные на некоторых линиях S_1 , S_2 в области F . Функции $\psi_k(\vec{R})$ ($k = 0, 1, 2$) являются гармоническими вне области $\vec{F}$, и, следовательно, в области G .

2. Постановка обратной задачи диагностики двумерного поля.

Можно предложить такую постановку задачи определения компоненты $\psi(\vec{R})$ векторного потенциала (а следовательно, и двумерного поля $\vec{H} = \text{rot } \vec{A}$) в области G .

Пусть выполнены следующие условия.

- 1) Функция $\psi(\vec{R})$ в системе (1.5) удовлетворяет условиям (1.10 – 1.13).
- 2) На $\vec{G}$ заданы функции $\sigma_i(\vec{R})$ ($i = 1, 2, 3$), которые определяются соотношениями (1.8) с помощью решений системы (1.5) с начальными условиями (1.7).
- 3) $\sigma_2(\vec{R}) > 0$ на $\vec{G}$.

Требуется найти неизвестную функцию $\psi(\vec{R})$, $\vec{R} \in G$.

Также получена подобная рассмотренной выше постановка задачи определения скалярного потенциала $\varphi(\vec{R})$ (и, следовательно, двумерного поля $\vec{E} = -\nabla \varphi$) в области G .

Для обратной задачи диагностики двумерного поля в данной постановке доказана единственность ее решения, а также построены алгоритмы вычисления распределения напряженности поля с использованием метода регуляризации [5; 6].

ЛИТЕРАТУРА

5. Rau, E.I., Spivak G.V. Scanning electron microscopy of two-dimensional magnetic stray fields. // Scanning, v. 3, 1980. P. 27-34.

6. Антонюк, В.А., Рау Э.И., Савин Д.О., Трифоненков В.П., Ягола А.Г. Восстановление пространственного распределения двумерных микрополей методами реконструктивной вычислительной томографии. // Изв. АН СССР, сер. физ., 1987, т.51, №3. С. 475-479.
7. Ландау, Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Том 2. Теория поля. // М.: Физматлит, 2006. 534 с.
8. Владимиров, В.С. Уравнения математической физики. // М.: Наука, 1981. 512 с.
9. Тихонов, А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. Численные методы решения некорректных задач. // М.: Наука, 1990. 232 с.
10. Леонов, А.С. Решение некорректно поставленных обратных задач. // М.: Книжный дом «Либроком», 2010. 336 с.

ABOUT DEFINITION OF INVERSE PROBLEM OF TWO-DIMENSIONAL MICROFIELD DISTRIBUTION DIAGNOSIS

V. Trifonenkov, M. Petrova

*National Research Nuclear University «MEPhI»
31, Kashirskoe shosse, Moscow, 115409, Russia*

Abstract. The mathematical model of probing of a two-dimensional micro-field by electron beam is investigated. Some relations for electron beam parameters that depend on the distribution of the field along its trajectory are obtained. The definition of inverse problem of evaluation of harmonic function describing distribution of magnetic (or electrical) field is considered.

Key words: inverse problem, microfield, harmonic function.

КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ

АДАПТАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ НЕЙРОННОЙ СЕТИ ДЛЯ СИСТЕМЫ РАСПОЗНАВАНИЯ СЛИТНОГО РУКОПИСНОГО ТЕКСТА

Е.В. Долгова, Д.С. Курушин

*Пермский государственный технический университет
614990, Пермь, Комсомольский пр., 29*

Аннотация. В статье предлагается подход к адаптации нейросетевых моделей для создания OCR-систем, рассчитанных на работу со слитным неограниченным рукописным текстом. Подход основан на отказе от распознавания слитных символов и переходу к распознаванию отдельных штрихов, из которых затем собираются символы и/или слова текста. Рассматриваемый подход позволяет существенно понизить размерность нейронных сетей, используемых в OCR-системах, что приведет к повышению их производительности и качества распознавания.

Ключевые слова: нейронная сеть, математическая модель, python, распознавание, вектор, граф, языковая модель.

Технологии распознавания рукописного текста развиваются уже в течение более чем 15 лет и рукописный текст используется в различных сферах, включая образование, здравоохранение, банковское дело, страхование, в правительственных и других структурах. Существует два глобальных подхода к проблеме распознавания рукописного текста — распознавания «на лету» (т.н. on-line распознавание) и распознавание написанного ранее текста, представленного в виде растрового изображения (т.н. off-line распознавание).

Хотя эти подходы имеют много общего (что обусловлено однотипными объектами анализа), задача распознавания текста, непосредственно вводимого оператором решается достаточно успешно, и эта технология применяется в различных устройствах. С другой стороны, распознавание оцифрованных рукописей до сих пор представляет собой трудно разрешимую задачу.

В настоящее время многие исследователи, (напр. см. [4]) полагают, что распознавание рукописного текста может выполняться по следующему алгоритму:

1. Выделение слов или словосочетаний (основываясь на промежутках между словами);
2. Сегментация текста на элементы (символы, штрихи...);
3. Распознавание элементов;
4. Генерация выходного текста.

В данной работе мы рассмотрим один из возможных подходов к распознаванию штрихов, составляющих рукописный текст.

Распознавание штрихов, представленных наборами точек (в растровом формате) может выполняться любым традиционным способом, например могут использоваться нейронные сети различных конфигураций (см. напр. [2]). Однако, использование нейронных сетей в таком контексте приводит или к необходимости нормализовывать размеры изображения. При нормализации изображения к размерности входного вектора сети неизбежно возникают нелинейные искажения, что ухудшает качество распознавания, или требует увеличения размерности сети. Второй вариант хоть и не приводит к

искажениям входного сигнала, тоже не лишен недостатков. Любая нейронная сеть большой размерности требует пропорционально большого количества элементов в обучающей выборке [1]. Подготовка таких массивов данных сложна технически и может порождать ошибки, обусловленные человеческим фактором.

Слитный рукописный текст характеризуется относительно большим различием в начертаниях одинаковых символов. В зависимости от ближайшего окружения один и тот же символ может писаться по-разному. Отличия в начертании возникают и при изменении скорости письма, геометрической формы бумажного носителя.

Другой сложностью, возникающей при распознавании слитного текста является необходимость сегментации слова на символы перед распознаванием. Задача сегментации слитного рукописного текста может не иметь единственного формального решения. Таким образом, ошибочная сегментация слова на символы может приводить к падению качества распознавания отдельных символов. Действительно, попытка распознавания частей символов, случайным образом объединенных друг с другом при ошибочной сегментации, будет приводить к фактически случайным результатам распознавания.

Решением проблемы сегментации символов может быть увеличение размерности входного вектора нейронной сети таким образом, чтобы подавать на ее вход не отдельные символы, а слова целиком. Таким образом, возникает необходимость повышения размерности выходного вектора до, как минимум, количества слов в словаре системы. Однако, вариативность написания слов значительно выше вариативности написания символов. Действительно, пусть A среднестатистическое количество вариативных начертаний отдельного символа некоторого алфавита a ; пусть N среднестатистическая длина слова, тогда количество вариантов написания слова с использованием алфавита a можно грубо оценить как $M = N^{L_a} \cdot A$. На самом деле вариантов написания слова еще больше, т.к. могут видоизменяться не только символы, но и соединительные линии между ними. Для русского языка это число составит [3]:

$$M = 5.28^{33.5} \approx 1.7 \cdot 10^{119}, \quad (1)$$

при условии существования 5 вариантов написания каждого символа.

Конечно, в реальности число вариантов написания может быть меньшим, так, в этой-же работе, дается оценка, показывающая что для понимания 80% текстов достаточно знания 5000 слов, что, с учетом вариантов написания, даст оценку $M \approx 4.5 \cdot 10^{97}$.

Дополнительная сложность растрового распознавания слов заключается в необходимости нормализации исходных данных перед их подачей на вход нейронных сетей. Очевидно, что размерность входного вектора сети должна быть выше, чем в случае с распознаванием отдельных символов. Поскольку длина слова в языке колеблется от 1 до 10 – 20 символов, размерность входного вектора должна быть достаточной для помещения в него самых длинных слов без существенных потерь данных при нормализации. Для распознавания рукопечатных символов достаточно области 16·16 пикселей, что соответствует 256 элементам входного вектора.

Для распознавания целых слов имеет смысл использовать область пропорционально большего размера (по горизонтали), например 160·16 или 320·16 пикселей. Это соответствует от 2560 до 5120 элементов входного вектора. При этом число элементов вы-

ходного вектора сети должно соответствовать количеству слов в словаре системы (т.е. 5 – 50 тыс, в зависимости от задач системы).

Таким образом, число нейронов входного слоя оказывается порядка 5 тыс, выходного слоя – десятки тысяч. Такая конфигурация сети требует соответственного количества нейронов на внутренних слоях. И, хотя, размерность сети может быть существенно сокращена с использованием соответствующих методов (например двоичного кодирования выходного сигнала), очевидно, что такой подход требует значительных трудозатрат при подготовке сети к работе и существенных вычислительных ресурсов для обучения сети.

Для устранения этой проблемы можно использовать в качестве входного сигнала нейронной сети не растровое изображение, а его векторное представление. Под векторным представлением растрового изображения будем понимать такой нагруженный граф, у которого нагрузка вершин — пары координат (x, y) соответствующих узловых точек изображения. За узловые точки будем принимать точки соединения изображения линий в растровом изображении. В зависимости от выбираемой стратегии изображение может рассматриваться как состоящее из отрезков прямых, или дуг. Изображения, состоящие из дуг могут более точно соответствовать растровому оригиналу, но сложнее для последующего анализа.

В настоящей работе используется алгоритм *potrace*, представляющий растр набором замкнутых многоугольников или т.н. *безъугольников* — замкнутых фигур стороны которых заданы кривыми Безье. Как было отмечено выше, для дальнейшего анализа с нашей точки зрения многоугольники представляют больший интерес.

Традиционно, нейронные сети принимают в качестве входного вектора такие вектора $\vec{x}_i$, элементы которых принадлежат интервалам $[0,1]$ или $[-1,1]$. Следовательно, для решения задачи распознавания элементов рукописи нам необходимо описать функцию преобразования векторных представлений элементов рукописи в форму, пригодную для использования нейронной сетью. Сам факт возможности классификации элементов рукописи нейронной сетью мы будем считать доказанным.

Из документации на *potrace* [5] нам известно следующее: *potrace* конструирует направленный граф следующим образом: пусть p — точка с целочисленными координатами (соответствует 4-м пикселям изображения), такую точку *potrace* считает вершиной (*vertex*) и обозначать как v (или w), если эти четыре пикселя имеют различия по цвету. *Potrace* полагает, что между вершинами v и w существует грань (*edge*, e), если

$$E(v, w) = 1, \quad (2)$$

где E — Евклидово расстояние и если отрезок VW отделяет пиксель черного цвета от пикселя белого цвета, таким образом, что черный пиксель остается слева от условного направления движения. Продолжая двигаться таким образом от вершины к вершине мы получаем направленный граф G . Граф представляет собой путь (*path*, P) $\{v, K, v_n\}$, такой что:

$$\exists P, \exists e_{i \dots n}(v_i, v_{i+1}) = 1, \wedge e_i \neq e_j, \forall i, j \leq n \quad (3)$$

Путь P называется замкнутым, если $v_n = v_0$. Используя ряд методик, описанных в документации на potrace [5], potrace преобразует растровое изображение в набор замкнутых путей P_i . Замкнутый путь P_i соответствует некоторому элементу, обозначим его W_j . Индексы отличаются, т.к. некоторые пути могут соответствовать незначимым элементам, или оставшемуся после фильтрации шуму.

Таким образом, задача классификации путей P_i в элементы W_j может быть сформулирована следующим образом: найти такую классифицирующую функцию, что:

$$F(P_i) = \begin{cases} W_j, P_i \in W \\ \emptyset, P_i \notin W \end{cases}, \quad (4)$$

где W — множество известных рукописных элементов (задача определения такого множества является задачей лингвистического исследования и не включена в настоящую работу, хотя и выполнена автором). Будем считать, что F — многослойная нейронная сеть, тогда нам необходимо дополнительно преобразовать замкнутый путь P таким образом, чтобы каждый его элемент v_i принадлежал диапазону $[-1, 1]$.

Элементы пути P представляют собой вершины, т.е. вектора координат $\{x, y\}$. Эта форма представления информации удобна для отображения на экране, но нерациональна с точки зрения распознавания формы пути. Форму пути можно описать, разбив его на известное количество незамкнутых путей P' равной длины и рассмотрев угол поворота α_i при переходе $P'_i \rightarrow P'_{i+1}$. Чтобы отфильтровать возможные дефекты формы штриха, вызванные толщиной линии и (это главное) существенно упростить путь, перейдем от замкнутого пути P к незамкнутому P^m , представляющему собой среднюю линию. Для этого, для каждого пути P_i выполняем:

$$P_i^m = f^m(P_i), \quad (5)$$

где f^m — функция скелетизации контура. Определим ее:

$$\begin{aligned} f^m(P) &= f^m(v_0, \dots, v_n) = \{v_0^m, \dots, v_s^m\} \\ v_k^m &= V^m(v_i, v_{i+1}), \forall i, i < n, k = i/2, \end{aligned} \quad (6)$$

где $V^m(v_1, v_2)$ — вычисление координат по формуле определения координат середины отрезка (мы полагаем, что вершины в пути отсортированы удобным для нас способом, иначе нужно применить очевидное правило сортировки вершин). Очевидно, что в зависимости от сложности исходных путей и их геометрических размеров количество вершин в них может отличаться. Соответственно оно будет отличаться и в путях P^m .

Известно, что размерность входного вектора (обычно x) нейронной сети постоянна для всей выборки, поэтому к входным данным применяют процедуру нормализации. В нашем случае нормализация по размерности также включает в себя нормализацию по значению, действительно, угол поворота α_i пути P^m в каждой точке лежит в диапазоне $(-\pi, \pi)$. Приведение диапазона $(-\pi, \pi)$ к $(-1, 1)$ может быть выполнено или σ -

функцией, принятой в теории нейронных сетей или обычным линейным преобразованием. Использование σ -функции предпочтительнее, т.к. она «растягивает» небольшие углы поворота и «сжимает» предельные, что соответствует физике процесса письма. Таким образом, мы будем использовать:

$$\sigma(\alpha_i) = \frac{1}{1 + e^{\frac{10}{\pi} \alpha_i}}. \quad (7)$$

Осталось рассчитать значения α_i .

Как сказано выше, путь P^m необходимо разбить на конечное постоянное число сегментов. Для этого определяем суммарную длину пути P^m как:

$$L = |P^m| = \sum_{i=0}^{n-1} |v_i v_{i+1}| \quad (8)$$

определяем длину сегмента как: $l = L/N$, где N — необходимое число сегментов и, одновременно, размерность входного вектора нейронной сети.

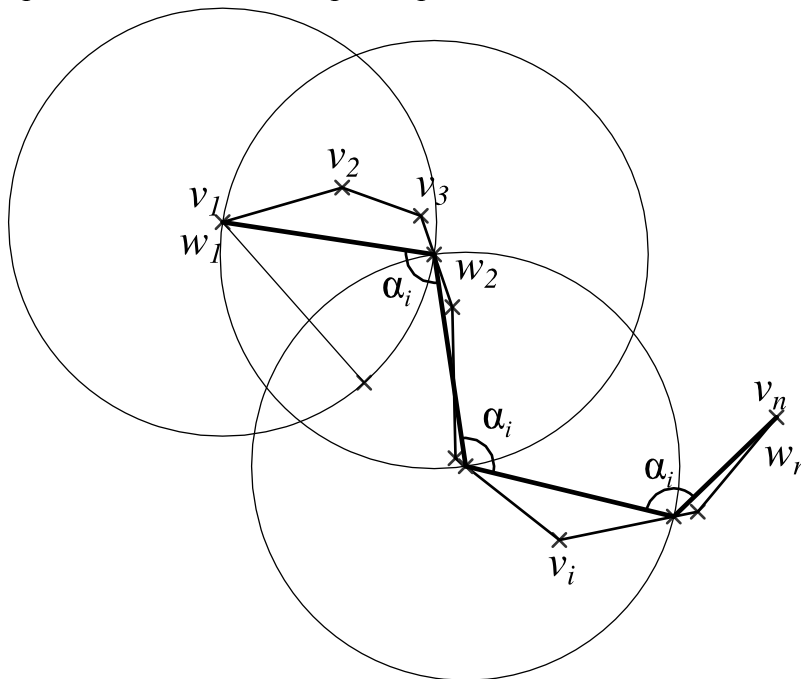


Рис.1. Геометрическая интерпретация разбиения штриха на сегменты

Для разбиения пути P^m на сегменты воспользуемся следующим способом (см. рис.1). Начиная с произвольно выбранного конца пути P^m , строится ряд окружностей радиуса l , так что центром первой является вершина v_1 , далее w_1 . Точка w_2 определяется методом поиска точки пересечения окружности и отрезка, с центром в этой точке строится новая окружность того же радиуса, определяющая вершину v_3 , и так далее, пока не будет достигнуто такое состояние, что все необработанные вершины лежат внутри очередной окружности. Тогда угол α_i есть угол между отрезками $w_i w_{i+1}$.

Таким образом, входной вектор нейронной сети $\vec{x}$ рассчитывается следующим образом:

$$\begin{aligned}\vec{x} &= f^n(P^m) = f^n(\{v_1, \dots, v_n\}) = \{x_1, \dots, x_N\}, \\ x_j &= \sigma(\alpha_j), \\ \alpha_j &= f^a(w_{j-1}, w_j, w_{j+1}), j \in [2, N-1].\end{aligned}\tag{9}$$

Вопросы подбора конфигурации и обучения нейронной сети лежат за рамками настоящего исследования, т.к. доказана принципиальная возможность решения любой задачи классификации [1]. Прделанные выше преобразования позволили выполнить процедуру нормализации изображения без потери содержательно-значимой информации, а также существенно сократить размерность сети, абстрагировавшись, одновременно, от начального угла поворота изображения (обычно представляющего сложность для сетей, распознающих растровое изображение).

Рассмотренная выше модель реализована на АЯП Python 2.6 и представлена в виде адаптации сети Кохонена (для предварительной автоматической классификации примитивов) и 3-х слойного персептрона. С использованием адаптированной сети Кохонена удалось выделить (на тестовых данных) 5 классов примитивов, использованных в дальнейшем как обучающая выборка для многослойного персептрона.

В результате было установлено что:

1. Использование векторного представления позволяет сократить размерность сети в десятки раз по сравнению с традиционным (растровым) методом анализа рукописи.
2. Адаптированная нейросетевая модель успешно распознает от 5 до 10 классов примитивов (на тестовых данных).

В дальнейшем предполагается переход к контекстно-зависимым нейронным сетям (напр. модифицированной сети Джордана), что позволит реализовать вариант РРМ-модели языка на дографемном уровне.

ЛИТЕРАТУРА

1. Долгова, Е.В., Курушин Д.С. Компьютерные нейросетевые технологии, Пермь, ПГТУ, 2008.
2. Мисюрёв, А.В. Использование искусственных нейронных сетей для распознавания рукопечатных символов, [Электронный документ] (<http://ocrai.narod.ru/hp.html>). Проверено 2010.12.20.
3. Шаров, С.А. Статистика слов в русском языке. [Электронный документ] (http://www.lingvisto.org/artikoloj/ru_stat.html). Проверено 12.02.2011.
4. Jaehwa, Park, Venu Govindaraju, and Sargur N. Srihari. Efficient word segmentation driven by unconstrained handwritten phrase recognition. In Proceedings of International Conference on Document Analysis and Recognition, pages 605-608, 1999.
5. Selinger, P. Potrace: a polygon-based tracing algorithm языке. [Электронный документ] (<http://potrace.sourceforge.net/potrace.pdf>). Проверено 12.02.2011.

A NEURAL NETWORK MODEL ADAPTATION FOR USE WITH

UNCONSTRAINED HANDWRITTEN TEXT RECOGNITION SYSTEM

E. Dolgova, D. Kurushin

*Perm State Technical University
29, Komsomolsky Avenue, Perm, Russia*

Abstract. The paper proposes an approach to adaptation of neural network models for creating OCR-systems, designed to work with unconstrained handwriting. The approach is based on the rejection of recognition of continuous characters and the transition to the recognition of individual strokes, which are then going to the characters and / or words of text. This approach can significantly reduce the dimension of neural networks used in the OCR-systems that will enhance their productivity and quality of recognition.

Key words: neural network, mathematical model, python, recognition, vector, count, language model.

004.932.1

ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ШТРИХОВ РУКОПИСНОГО ТЕКСТА

Е.В. Долгова, Д.С. Курушин

*Пермский государственный технический университет
614990, Пермь, Комсомольский пр., 29*

Аннотация: В статье предлагается и исследуется модель штрихов рукописного текста. Рассматриваемая модель представляет рукописный текст как совокупность штрихов нескольких известных классов. Модель позволяет абстрагироваться от начальных условий письма, таких как угол наклона, скорость, плотность и т.п. Благодаря процедуре векторизации для модели не имеет значения зашумленность исходного изображения и способ его получения. В работе проведен эксперимент, подтверждающий применимость модели для использования в задачах распознавания образов.

Ключевые слова: нейронная сеть, математическая модель, python, распознавание, вектор, граф, языковая модель, распознавание, штрих.

Широкое распространение и увеличение доступности технологий сканирования и цифрового фотографирования привело к быстрому росту цифровых коллекций документов. В таких коллекциях документы хранятся в виде растровых графических файлов. Оцифровка решает множество проблем, связанных с сохранением и организацией доступа к документам. Однако для реализации полнотекстового поиска, изучения содержания, подготовки публикаций требуется перевод из графического формата в текстовый, то есть распознавание текста.

Алгоритмы и программы автоматического распознавания текста разрабатываются уже несколько десятилетий. Можно сказать, что задача распознавания текстов на европейских языках, напечатанных на принтерах, решена.

Сложности многократно увеличиваются при попытке решения задачи распознавания рукописного текста. Введение в электронное использование рукописных исторических документов, хранящихся в архивах и библиотеках России, имеет огромное научное и культурное значение, так как каждая рукопись уникальна.

Поэтому весьма актуальной выглядит задача создания достаточно универсальной программной системы для автоматизированного распознавания рукописного текста.

В настоящее время многие исследователи, (напр. см. [4]) полагают, что распознавание рукописного текста может выполняться по следующему алгоритму:

1. Выделение слов или словосочетаний (основываясь на промежутках между словами);
2. Сегментация текста на элементы (символы, штрихи...);
3. Распознавание элементов;
4. Генерация выходного текста.

В данной работе мы рассмотрим один из возможных подходов к распознаванию штрихов, составляющих рукописный текст.

Распознавание штрихов, представленных наборами точек (в растровом формате) может выполняться любым традиционным способом, например могут использоваться нейронные сети различных конфигураций (см. напр. [2]). Однако, использование нейронных сетей в таком контексте приводит или к необходимости нормализовывать размеры изображения. При нормализации изображения к размерности входного вектора сети неизбежно возникают нелинейные искажения, что ухудшает качество распознавания, или требует увеличения размерности сети.

Слитный рукописный текст характеризуется относительно большим различием в начертаниях одинаковых символов. В зависимости от ближайшего окружения один и тот же символ может писаться по-разному. Отличия в начертании возникают и при изменении скорости письма, геометрической формы бумажного носителя.

Другой сложностью, возникающей при распознавании слитного текста является необходимость сегментации слова на символы перед распознаванием. Задача сегментации слитного рукописного текста может не иметь единственного формального решения. Таким образом, ошибочная сегментация слова на символы может приводить к падению качества распознавания отдельных символов, а при ошибочной сегментации — к фактически случайным результатам распознавания.

В настоящем исследовании мы поставили задачу изучить структуру штриха рукописного текста и создать математическую модель, описывающую произвольный штрих текста таким образом, чтобы визуально сходные штрихи имели близкое математическое описание, а непохожие — различное.

Сформулируем требования к модели штриха:

1) независимость от геометрических размеров. Действительно, в зависимости от условий письма штрихи, составляющие символы могут иметь произвольный размер, однако это не влияет (в разумных пределах) на восприятие текста человеком;

2) независимость от наклона и поворота. Во многих случаях (в частности в случае неограниченного рукописного текста) наклон письма нелинейно меняется в рамках одного документа. Подстройка модели под разные участки рукописи вручную сложна и, потому, нежелательна;

3) нечувствительность к носителю. Распознавать приходится как «бумажные» документы, так и слова, написанные от руки, или на досках, стенах и т.п. Способ оцифровки различных носителей также различается кардинально;

4) постоянное число характерных признаков штриха. Дальнейшее использование модели предполагает нормализацию данных под конкретный распознающий алгоритм (обычно нейронную сеть). Нормализация штриха не должна вносить дополнительных искажений после оцифровки.

Векторное представление штриха в той или иной степени отвечает требованиям, предъявляемым к модели, однако требуется некоторая доработка методики представления штрихов. Рассмотрим ее.

Для получения данных, пригодных для анализа исходное отсканированное изображение необходимо нормализовать по яркости и цвету (см. [7]) и сегментировать (см. [6]). Алгоритмов нормализации яркости и сегментации существует достаточно много, в настоящей работе рассматривается более удобный для исследовательских нужд алгоритм, основанный на работах Wang и Suen (см. [9]). Результат работы алгоритма, показан на рис.1.

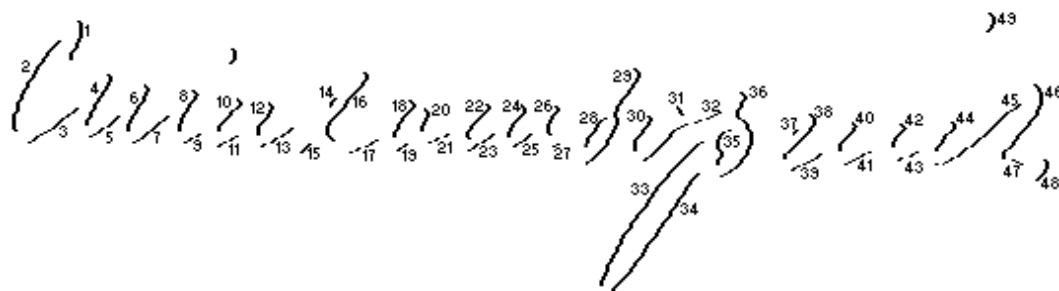


Рис.1. Результат сегментации растрового изображения

Для векторизации растра авторами используется алгоритм *potrace*, представляющий растр набором замкнутых многоугольников или т.н. *безъугольников* — замкнутых фигур стороны которых заданы кривыми Безье.

Используя ряд методик, описанных в документации на *potrace* [5], *potrace* преобразует растровое изображение в набор замкнутых путей P_i . Замкнутый путь P_i соответствует некоторому элементу, обозначим его W_j . Индексы отличаются, т.к. некоторые пути могут соответствовать незначимым элементам, или оставшемуся после фильтрации шуму.

Таким образом, задача классификации путей P_i в элементы W_j может быть сформулирована следующим образом: найти такую классифицирующую функцию, что:

$$F(P_i) = \begin{cases} W_j, P_i \in W \\ \emptyset, P_i \notin W \end{cases}, \quad (4)$$

где W — множество известных рукописных элементов.

Рассмотрим векторное представление некоторого штриха:

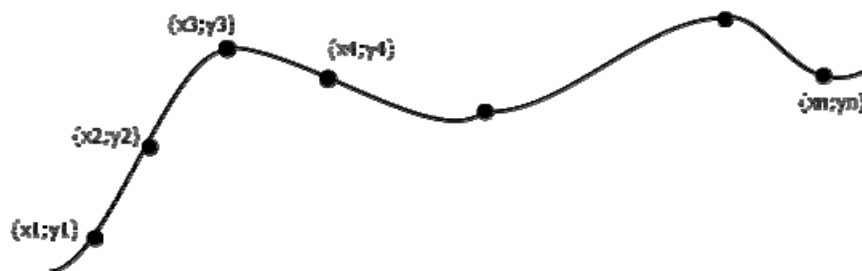


Рис.2. Векторное представление штриха

Кривая (штрих) представлена множеством координат точек $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)\}$. Нейронные сети в силу особенностей их архитектуры используют входные вектора (традиционно обозначаемые $\vec{x}$) некоторой размерности, определяемой разработчиком при проектировании сети.

Результат векторизации раstra, представленный на рис. 2. имеет произвольное количество узловых точек, характеризуемых координатами и (опционально) радиусом кривизны в данной точке. Данные такого рода плохо подходят для представления входных векторов нейронных сетей потому что зависят от начала координат системы штрихов, поворота ее относительно (обычно) верхнего левого угла при оцифровке и масштаба изображения.

Таким образом, нам необходимо построить такую модель векторного представления штриха, которая была бы инварианта относительно указанных выше переменных.

Каждую кривую (штрих) необходимо разбить на постоянное число сегментов. Для этого находим длину каждого вектора, из которых состоит кривая по формуле:

$$|\vec{p}_n| = \sqrt{(x_n - x_{n-1})^2 + (y_n - y_{n-1})^2}, \quad (1)$$

находим суммарную длину пути L как:

$$L = \sum_{i=1}^n |\vec{a}_i|. \quad (2)$$

Находим длину сегмента как:

$$l = \frac{L}{N}, \quad (3)$$

где N необходимое число сегментов или размерность входного вектора нейронной сети.

Для разбиения пути L на сегменты, строятся ряд окружностей радиуса l , так что центром первой является вершина v_1 (w_1). Точка w_2 определяется методом поиска точки пересечения окружности и отрезка, с центром в этой точке строится новая окружность того же радиуса, определяющая вершину w_3 , и так далее, пока не будет достигнуто такое состояние, что все узлы лежат внутри очередной окружности (рис 3).

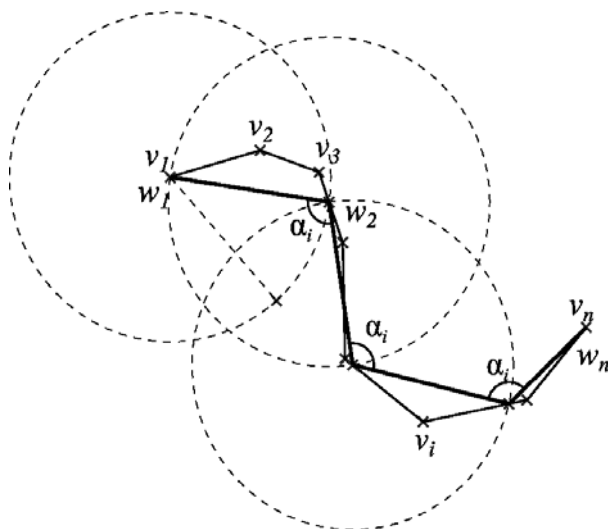


Рис.3. Выделение сегментов и определение углов поворота

Находим координаты точек пересечения прямой и окружности:

$$\begin{cases} \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} \\ (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = l^2 \end{cases}, \quad (4)$$

где, $(x_0; y_0)$ – центр окружности, $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ – координаты начала и конца прямой, l – радиус окружности.

Из системы уравнений (4) выражаем значения x и y .

Из первого уравнения выражаем значение x :

$$(x_2 - x_1)(y - y_1) = (x - x_1)(y_2 - y_1),$$

$$x_2 - x_1 = a,$$

$$y_2 - y_1 = b,$$

$$a(y - y_1) = b(x - x_1),$$

$$ay - ay_1 = bx - bx_1,$$

$$ay - ay_1 - bx + bx_1,$$

$$bx_1 - ay_1 = c,$$

$$ay - bx + c = 0,$$

$$x = \frac{ay + c}{b},$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = l^2,$$

$$x^2 - 2xx_0 + x_0^2 + y^2 - 2yy_0 + y_0^2 = l^2,$$

$$2x_0 = d,$$

$$\begin{aligned} 2y_0 &= e, \\ x_0^2 + y_0^2 &= g, \\ x^2 + y^2 - ex - ey + g &= l^2, \end{aligned}$$

Подставляем значение x , выраженное из первого уравнения:

$$\left(\frac{ay+c}{b}\right)^2 + y^2 - d\left(\frac{ay+c}{b}\right) - ey + g = l^2$$

Приводим уравнение к общему знаменателю:

$$\begin{aligned} \frac{(ay+c)^2 + y^2b^2 - db(ay+c) - eyb^2 + gb^2 - l^2b^2}{b^2} &= 0, \\ (ay+c)^2 + y^2b^2 - db(ay+c) - eyb^2 + gb^2 - l^2b^2 &= 0, \\ a^2y^2 + 2acy + c^2 + y^2b^2 - abdy - bdc - eyb^2 + gb^2 - l^2b^2 &= 0, \\ y^2(a^2 + b^2) + y(2ac - abd - e b^2) + c^2 + gb^2 - abc - l^2b^2 &= 0, \\ (a^2 + b^2) &= m, \\ 2ac - abd - e b^2 &= n, \\ c^2 + gb^2 - abc - l^2b^2 &= s, \\ my^2 + ny + s &= 0. \end{aligned}$$

Находим дискриминант уравнения:

$$D = n^2 - 4ms \quad (5)$$

если $D > 0$, то получаем две точки пересечения прямой и окружности;
если $D = 0$, то получаем одну точку пересечения прямой и окружности;
если $D < 0$, то точек пересечения прямой и окружностью нет, следовательно мы достигли конца штриха.

Получаем координаты точек пересечения прямой и окружности:

$$y = \frac{-n \pm \sqrt{D}}{2m} \quad x = \frac{ay+c}{b}.$$

Находим координаты векторов по найденным точкам пересечения как:

$$\vec{p} = \{x_n - x_{n-1}; y_n - y_{n-1}\}. \quad (6)$$

Получаем восемь векторов равной длины и определяем угол между ними по формуле:

$$\varphi = \arccos\left(\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} * \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}\right). \quad (7)$$

Угол φ рассчитывается до тех пор, пока D (см. 5) не окажется меньше 0.

Для исследования описанной выше модели была создана программа на АЯП Python - (объектно-ориентированном высокоуровневом языке программирования с динамической семантикой).

Для примера используем выделенные штрихи рукописного слова на рис. 1. Программа измеряет длину каждого штриха, вычисляет радиус окружности, строит вектора и вычисляет угол между ними по формуле (7). Пример расчета для штриха № 36 показан на рис.4. Результаты вычисления значений для каждого штриха представлены в табл.1, отрицательные значения углов соответствуют повороту против часовой стрелки (см. рис. 4).

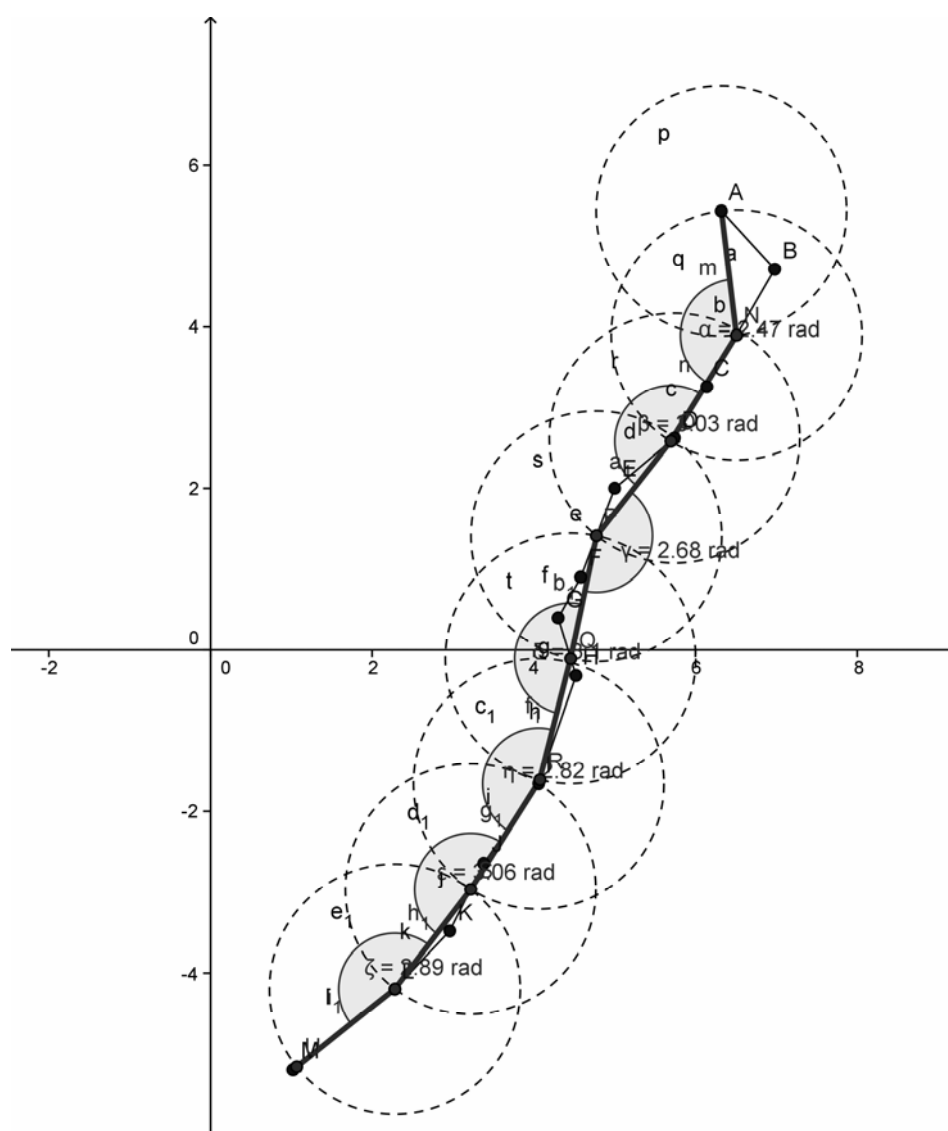


Рис.4. Нормализация штриха

Таблица 1

Результаты определения углов поворота

№	L	R	φ
1	4,5	0,4	-0,92; -0,96; -0,97; -0,92; -0,91; 0,87; 0,85

№	L	R	φ
2	8,0	1,0	0,93; 0,99; 0,96; 1; 0,97; 0,97; 0,93
3	5,0	0,6	-0,87; 0,95; -0,99; -0,98; 0,93; -0,95; 0,93
4	4,5	0,56	-0,87; 0,95; -0,99; -0,98; 0,93; -0,95; 0,93
5	2,8	0,35	-1; -0,97; -0,96; -0,96; 0,96; -0,95; 1
6	4,2	0,52	-0,66; -0,95; -0,95; 0,98; 1; 0,91; -0,98
7	3,8	0,47	-0,9; 1; 0,98; -0,94; 0,97; -0,94; -0,98
8	4,0	0,5	-0,6; -0,96; 0,97; 0,99; 0,95; 0,92; 0,9
9	2,0	0,25	-0,93; -0,99; 0,98; 0,99; -0,95; 0,95; -0,96
10	3,5	0,4	-0,62; 0,96; 0,96; -0,94; 0,98; 1; 0,75
11	2,0	0,25	-0,99; -0,94; -0,99; -0,98; 0,97; -0,97; -0,98
12	3,5	0,4	-0,81; -0,82; -0,97; -0,98; 0,98; 0,81; 0,91
13	3,5	0,4	-0,93; -0,94; 0,98; 0,96; -0,93; 0,99; -0,97
14	1,0	0,1	1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1
15	1,0	0,1	1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1
16	7,0	0,87	-0,66; -0,98; 0,89; -0,92; 0,92; 0,68; 0,79
17	2,8	0,35	-0,92; 0,99; -0,95; 1; 0,96; -0,95; 0,99
18	4,0	0,5	-0,57; -0,74; 0,8; -0,9; 0,9; -0,98; 0,87
19	1,2	0,15	1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1
20	2,5	0,3	-0,96; -0,66; -0,94; 0,95; 0,99; 0,79; 0,83
21	2,5	0,3	0,92; -0,95; -0,97; 0,94; 0,97; -0,89; 0,9
22	3,8	0,47	-0,52; 0,97; -0,95; 0,98; 0,93; 0,93; 0,66
23	2,0	0,25	-0,96; 0,97; -0,93; 0,96; 0,99; 0,95; -0,91
24	3,0	0,37	-0,95; -0,68; -0,96; 1; 0,96; 0,93; 0,93
25	2,0	0,25	-0,99; 0,95; -0,95; -0,99; -0,99; 0,97; 0,96
26	3,0	0,37	-0,53; 0,97; -0,9; 0,9; 0,85; 0,89; 0,82
27	1,0	0,1	1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1
28	2,0	0,25	0,95; 0,84; -0,9; 0,84; -0,84; 0,88; 0,83
29	5,6	0,7	-0,75; -0,96; 0,85; -0,95; 0,99; -0,87; 0,99
30	2,0	0,25	-0,74; -0,84; 0,89; -0,9; 0,94; 0,89; 0,91
31	1,0	0,1	1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1
32	4,5	0,56	-0,93; 0,96; 0,98; 0,9; -0,98; 0,95; -0,94
33	9,0	1,12	0,95; -0,99; 0,96; 0,98; -0,99; 0,97; 0,99
34	7,5	0,9	0,98; 0,99; 0,99; -0,96; 0,97; -0,98; -0,92
35	2,5	0,26	0,97; 0,94; 0,86; 0,85; 0,84; 0,86; -0,87
36	5,0	0,6	-0,9; 0,68; -0,88; -0,82; -0,9; -0,9; -0,9
37	0,8	0,1	1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1
38	4,0	0,5	-0,7; -0,79; -0,98; -0,95; 0,98; 0,94; -0,93
39	2,5	0,3	-0,99; -0,97; 1; -0,98; 0,99; 0,96; 0,99
40	2,5	0,3	-0,79; -0,76; -0,93; 0,93; 0,93; -0,94; 0,96
41	2,5	0,3	0,99; 0,91; 0,99; -0,99; -0,93; 0,89; -0,99
42	2,0	0,25	-0,86; -0,59; -0,93; 0,91; 0,99; 1; 0,78
43	1,6	0,2	0,98; 0,96; -0,94; -0,93; 0,93; -0,98; 0,96
44	2,5	0,3	-0,79; -0,72; -0,94; 0,87; 0,9; -0,85; 0,93
45	7,5	0,9	0,97; 0,98; 1; -0,97; -0,99; -0,96; -0,95
46	6,5	0,8	-0,78; -0,94; -0,88; 0,99; -0,98; -0,97; 0,8
47	1,0	0,1	1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1
48	1,6	0,2	-0,97; -0,86; -0,93; -0,92; -0,98; -0,88; 0,98
49	1,6	0,2	-0,96; -0,8; -0,83; -0,88; -0,94; 0,96; -0,99

Исследование представленной модели сетью Кохонена показало что:

1. Данное представление применимо для использования совместно с нейросетевыми моделями.

2. Сеть устойчиво выделяет 4 категории штрихов, в настоящее время ведется работа по созданию обратного визуализатора внутреннего представления сети Кохонена в штрихи для удобного анализа результатов классификации.

3. Данная модель может быть использована для уточнения алгоритмов сегментации исходного рукописного текста и для создания обучающих выборок для обучения нейросетевых моделей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Долгова, Е.В., Курушин Д.С. Компьютерные нейросетевые технологии, Пермь, ПГТУ, 2008.
2. Мисюрёв, А.В. Использование искусственных нейронных сетей для распознавания рукопечатных символов, [Электронный документ] (<http://ocrai.narod.ru/hp.html>). Проверено 2010.12.20.
3. Шаров, С.А. Статистика слов в русском языке. [Электронный документ] (http://www.lingvisto.org/artikoloj/ru_stat.html). Проверено 12.02.2011.
4. Jaehwa, Park, Venu Govindaraju, and Sargur N. Srihari. Efficient word segmentation driven by unconstrained handwritten phrase recognition. In Proceedings of International Conference on Document Analysis and Recognition, pages 605-608, 1999.
5. Selinger, P. Potrace: a polygon-based tracing algorithm языке. [Электронный документ] (<http://potrace.sourceforge.net/potrace.pdf>). Проверено 12.02.2011.
6. Райер, И.А. Сегментация штрихов и их соединений при распознавании рукописного текста / Материалы Международной конференции по компьютерной графике и машинному зрению. Ч.III: С.151-155, Москва, 1999.
7. Абраменко, А. Компьютер читает [Электронный ресурс]. — Электрон. текстовые дан. — 2000. — Режим доступа: <http://www.ocrai.narod.ru>.
8. Кузнецов, А.В. Распознавание рукописного текста [Электронный ресурс]. — Электрон. текстовые дан. — 2001. — Режим доступа: http://www.masters.donntu.edu.ua/2001/fvti/kuznetsov/diss/lib/aiconcep/rec_text.htm
9. Suen, H.M., Wang, J.F. «Segmentation of Uniform Colored Text from Color Graphics Background», VISP-144, 1997, P. 317-322.

THE INVESTIGATION OF THE HANDWRITING STROKES MODEL

E. Dolgova, D. Kurushin

*Perm State Technical University
29, Komsomolsky Avenue, Perm, Russia*

Abstract. In this paper we propose and study a model of handwriting strokes. The model consider handwritten text as a collection of strokes of several known classes. Model allows us to abstract from the initial conditions of the writing, such as angle, velocity, density, etc. Thanks to the procedure of tracing the model is irrelevant to noise of the original image and the way it was received. We conducted an experiment, confirming the applicability of the model for use in pattern recognition problems.

Key words: neural network, mathematical model, python, recognition, vector, count, language model, recognition, stroke.

УДК 004.67 : 519.688

О МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ФОРМИРОВАНИЯ СОСТАВА ЭКСПЕРТНОЙ КОМИССИИ, ПОЛУЧЕНИЯ ИТОГОВОЙ ЭКСПЕРТНОЙ ОЦЕНКИ КОМИССИИ И ОЦЕНКЕ ТОЧНОСТИ ПОЛУЧЕННОГО РЕШЕНИЯ

Смирнов Д.А.

*Московский Физико-Технический Институт (Государственный университет)
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский переулок, 9*

Аннотация. В статье рассматривается вопрос разработки методики формирования состава экспертной комиссии, с получением итоговой экспертной оценки и оценке точности полученного решения. Решение поставленной задачи рассматривалось в контексте применения разрабатываемой методики к дистанционному анонимному индивидуальному экспертному оцениванию с варьируемым числом экспертов. Автором предложены модели формирования состава экспертной комиссии; методика определения итоговой экспертной оценки для таких типов вопросов как: выбор ответа из вариантов, упорядочивание списка, численная оценка; методика оценки точности полученного решения. В качестве критерия точности полученного решения взят коэффициент конкордации Кендалла.

Ключевые слова: формирование экспертной комиссии, экспертные оценки, экспертиза, получение итоговой экспертной оценки, оценка точности решения комиссии.

Введение

Задача создания информационных технологий, направленных на решение стратегических задач становится одной из наиболее приоритетных задач по модернизации и технологическому развитию Российской Федерации [14]. Ядром любой задачи, в том числе и стратегической, является принятие решения, которое базируется на сборе, анализе и обработке информации, относящейся к данному вопросу, одним человеком или некоторым коллективом. Известно, что в информационных обществах информация является предметом массового потребления [15] и, в связи с лавинообразным ростом ее объема, задачи поиска, обработки и оценки становятся ключевыми. Качественное выполнение этих задач на данный момент становится невозможным без привлечения специальных технических средств.

Постановка задачи

На сегодняшний день достигнуты существенные успехи в решении задач поиска и обработки информации доступные даже рядовому потребителю [13]. Для задач обработки информации также разработано множество приложений и систем. Задачи оценки же, напротив, чаще всего решаются не техническими средствами. Это связано с нечисловой природой большинства информации, что не позволяет автоматизировать этот процесс [8, 9]. Таким образом, при решении задачи оценки возникает роль эксперта или же экспертной комиссии, которые проводят экспертизу оцениваемой информации. Точность комиссии постулируется в силу проведения отбора экспертов по неким объективным показателям. Описываемый в данной работе подход основан на предварительном оценивании, как экспертов, так и экспертиз в рамках заранее заданной системы компетенций. При этом очевидным образом принимается решение об отборе экспертов в комиссию, а программная реализация разработанных в данной работе методик по по-

лучению и оценке точности решения комиссии позволяет не только автоматизировать и упростить процесс проведения экспертизы, но и оценить достоверность полученных результатов.

Таким образом, для автоматизации процесса принятия решения экспертной комиссией и оценки точности принятого решения необходимы:

- аналитическая методика формирования состава экспертной комиссии;
- методика получения итоговой экспертной оценки комиссии по имеющимся экспертным оценкам каждого из экспертов;
- алгоритм получения оценки точности полученного решения.

Экспертиза, экспертные оценки

Экспертиза - исследование экспертами каких-либо вопросов, решение которых требует специальных познаний в области науки, техники, искусства и т. д. [2]

Экспертная оценка – суждения высококвалифицированных специалистов, высказанные в виде содержательной, качественной или количественной оценки объекта исследования, которые предназначены для использования при принятии решений [4]. Они применяются для получения оценок, предполагая, что при решении проблем в условиях неопределенности мнение группы экспертов надежнее, чем мнение одного эксперта. Основным отличием экспертизы от экспертной оценки является существенная нехватка информации по исследуемому объекту.

Задача проведения экспертизы или экспертной оценки разбивается на следующие этапы:

- определение предметной области экспертизы;
- выбор методики проведения и оценки результатов экспертизы;
- выбор регламента проведения экспертизы;
- формирование списка интересующих вопросов;
- формирование состава экспертной комиссии;
- проведение экспертизы;
- анализ результатов экспертизы.

Подобный список этапов приводится в [9].

Стоит заметить, что многообразие областей применения и отсутствие формальных критериев правильности полученной оценки привело к огромному разнообразию методик, поэтому рассмотрим лишь основные классы.

Методы экспертных оценок

Методы экспертных оценок - методы организации работы с экспертами и обработки их мнений [9]. Существует множество методов получения экспертных оценок. В некоторых экспертные оценки получают индивидуально от каждого из экспертов. В других экспертам позволяют очно или заочно взаимодействовать друг с другом, для всестороннего обсуждения вопроса и выработки итогового решения коллективно. В третьих получение экспертных оценок полностью анонимизировано, что позволяет исключить, как возможность влияния авторитетности одного из экспертов на мнения других, так и непредвзятость к мнению высказанному кем-то менее авторитетным. Есть методы с фиксированным числом экспертов, в некоторых из них число экспертов подбирается таким образом, чтобы стало возможным применить статистические методы проверки согласованности мнений. Есть, где число экспертов растет в процессе проведения экспертизы. У каждого из описанных классов есть свои плюсы и минусы, так для

индивидуальных оценок плюсом является простота получения итогового решения, а минусом – узкая применимость, в силу ограниченности компетентности эксперта. Для коллективных оценок ситуация прямо противоположная.

Решение поставленной задачи рассматривалось в контексте применения разрабатываемой методики к заочному анонимному индивидуально удаленному экспертному оцениванию с варьируемым числом экспертов. Теперь перейдем непосредственно к разработанной методике.

Математическая модель формирования состава экспертной комиссии

Основа данной модели заключается в том, что для получения численных оценок точности полученных решений и формирования формального критерия принятия единого решения нужно произвести оценивание знаний экспертов и сложность экспертиз по заранее разработанному ряду шкал (областей знаний). Стоит заметить, что в данном методе подразумевается не оценка уровня (класса) эксперта, а оценка компетентности, характеризующая вероятность правильного ответа на вопрос. Это ограничение введено с целью упрощения внедрения и использования системы, т.к. разработка тестов для определения уровня эксперта является более сложной задачей. На основании полученных таким образом данных можно, как выбирать экспертов для той или иной экспертизы, так и оценивать точность созданной комиссии.

Рассмотрим несколько алгоритмов производящих отбор экспертов и оценивающих точность комиссии, для этого обозначим V^{Exp} - оценка сложности экспертизы, а $V^i, 1 < i < N$ - оценки знаний экспертов, где N – общее количество экспертов, таким образом:

– полное превышение – в комиссию допускаются те, и только те эксперты, чьи показатели по всем параметрам превосходят характеристики экспертизы, т.е. $\forall i: V_i^n > V_i^{Exp}$, где n – номер допускаемого эксперта. Это достаточно сильное требование и к сожалению оно не всегда выполнимо на практике. Точность комиссии максимальна, но методика оценки точности не ясна;

– частичное превышение – эксперт допускается в комиссию, если хотя бы один их параметров превосходит характеристику экспертизы, т.е. $\exists i: V_i^n > V_i^{Exp}$, более того, чтобы комиссия была создана необходимо, чтобы по всем характеристикам экспертизы в комиссии были эксперты с показателями их превышающими, т.е. $\forall i \exists n: V_i^n > V_i^{Exp}$. В качестве параметра для оценки точности резонно

выбрать $\Delta = \sum_{i=1}^N \sum_j (V_j^i - V_j^{Exp})$. Данная величина характеризует итоговую компетентность комиссии над экспертизой, т.е. при $\Delta < 0$ большинство экспертов более некомпетентно по большинству показателей, и наоборот при $\Delta > 0$ большинство экспертов более компетентны по большинству показателей. В данном случае открытым остается лишь вопрос нормировки указанного параметра для преобразования его в оценку точности экспертной комиссии;

– подобие – выбор экспертов, чье распределение показателей подобно распределению характеристик экспертизы, т.е. $cor(V^n, V^{Exp}) \rightarrow \max$. Такой алгоритм выбора имеет смысл при оценке уровня (класса) эксперта.

В данной работе за основу взят второй подход.

Методика определения итоговой экспертной оценки комиссии

Очевидно, что для разработки методики определения итоговой экспертной оценки комиссии необходимо классифицировать и ограничить список (типы) рассматриваемых вопросов. В данной работе рассматриваются следующие типы вопросов:

- выбор ответа из предложенных вариантов;
- упорядочивание списка;
- численная оценка.

Эти типы вопросов покрывают практически весь спектр возможных вариантов, за исключением ответов в свободной или текстовой форме. Это несомненно является недостатком данной методики, но введение в рассмотрение таких типов вопросов делает невозможным их автоматизированную обработку.

Методика определения итогового ответа различна, так для выбора ответа итоговое решение определяется как ответ с максимальной модой [7]; при численной оценке, несмотря на очевидность выбора в качестве итогового решения среднего арифметического ответа, итоговое решение определяется как медиана ответов каждого из членов экспертной комиссии [7]; в случае упорядочивания итоговое решение комиссии определяется как медиана Кемени ответов экспертов выраженных в виде бинарных отношений. В силу очевидности методики в случае вопросов выбора и оценки не будем приводить соответствующие выкладки, методику получения итогового решения в случае вопроса упорядочивания, напротив, рассмотрим подробнее. Рассмотрим упорядочивание списка вариантов, как операцию введения некоего бинарного отношения или другими словами ранжировки.

Медиана Кемени

Бинарное отношение A на конечном множестве $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_k\}$ - подмножество декартова квадрата $Q^2 = \{(q_m, q_n) \mid m, n = 1..k\}$. При этом пара (q_m, q_n) входит в A тогда и только тогда, когда между q_m и q_n имеется рассматриваемое отношение. Каждую ранжировку, как и любое бинарное отношение, можно задать матрицей $\|a(q_m, q_n)\|_{m,n=1..k}$ из 0 и 1. Причем $a(q_m, q_n) = 1 \Leftrightarrow (q_m < q_n) \vee (q_m \square q_n)$.

Расстоянием Кемени между бинарными отношениями A и B , описываемыми матрицами $\|a(q_m, q_n)\|_{m,n=1..k}$ и $\|b(q_m, q_n)\|_{m,n=1..k}$ соответственно, называется число

$$D(A, B) = D(a, b) = \sum_{m,n=1}^k |a(q_m, q_n) - b(q_m, q_n)|, \text{ т.е. расстояние Кемени между бинарными}$$

отношениями по сути – число не совпадающих элементов стоящих на одних и тех же местах в матрицах бинарных отношений.

Расстояние Кемени основано на системе аксиом, приведенной в книге [5], равно как и вывод формулы для расстояния Кемени между упорядочениями.

Рассмотрим бинарные отношения $A_1, \dots, A_N$. Медианой Кемени A называется

$$\underset{A}{\operatorname{Argmin}} \sum_{i=1}^N D(A_i, A). \text{ Медиана Кемени - частный случай определения эмпирического}$$

среднего в пространствах нечисловой природы. Для нее справедлив закон больших чисел, т.е. эмпирическое среднее приближается при росте числа составляющих, к теоретическому среднему:

$$\underset{A}{\operatorname{Argmin}} \sum_{i=1}^n D(A_i, A) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \underset{A}{\operatorname{Argmin}} M D(A_{\text{Exp}}, A).$$

Рассматривая ранжирование N экспертами конечного множества $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_k\}$, условившись что $\forall m, n \rightarrow (q_m \prec q_n \vee q_n \prec q_m)$, очевидно, что в матрицах бинарных отношений $A_1, \dots, A_N$ значимой является лишь верхняя половина, т.е. только значения выше главной диагонали. Т.о. введем модифицированное расстояние Кемени между ранжированиями A и B , описываемыми матрицами $\|a(q_m, q_n)\|_{m,n=1..k}$ и

$\|b(q_m, q_n)\|_{m,n=1..k}$ соответственно, как $D_{Exp} = \sum_{m=1}^k \sum_{n>m}^k |a(q_m, q_n) - b(q_m, q_n)|$. Помня о том,

что расстояние Кемени между бинарными отношениями по сути – число не совпадающих элементов понятно, что $0 \leq D_{Exp} \leq \frac{k \cdot (k-1)}{2}$, причем достижимость минимума оче-

видна, а достижимость максимума легко проверяется рассмотрев ранжирования $A = q_1 \prec q_2 \prec \dots \prec q_k$ и $B = q_k \prec q_{k-1} \prec \dots \prec q_1$, для первого из них полуматрица состоит из одних 0, а для второго из 1, т.о. модифицированное расстояние Кемени для A и B равно количеству 1 в полуматрице B и равно количеству элементов полуматрицы, что составляет $(n \cdot n - n) \cdot \frac{1}{2} = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$, обозначим его за P_n . Тогда мерой точности принятого

комиссией решения является $\sum_{i=1}^N D_{Exp}(A_i, A)$, где A - медиана Кемени для $A_1, \dots, A_N$.

Мера корреляции ответа конкретного эксперта с итоговым решением экспертной комиссии является очевидной. Наиболее близкий ответ к итоговому решению находится как $\underset{A_i}{\operatorname{Argmin}} D(A_i, A)$.

Рассмотрим алгоритм получения ответа экспертной комиссии из N экспертов, пусть ответы экспертов по ранжированию $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_k\}$ задаются полуматрицами $V^i = \|v^i(q_m, q_n)\|_{m=1..k, n>m}^1$, при ограничениях описанных выше, тогда:

- обозначим ответ комиссии за $V^O = \|v^O(q_m, q_n)\|_{m=1..k, n>m}$;
- рассмотрим $V = \sum_{m=1}^k \sum_{n>m}^k v^i(q_m, q_n)$;
- если $v(q_m, q_n) > \frac{N}{2}$, то $v^O(q_m, q_n) = 1$;
- если $v(q_m, q_n) < \frac{N}{2}$, то $v^O(q_m, q_n) = 0$;
- если $v(q_m, q_n) = \frac{N}{2}$, то комиссия не пришла к единому ответу по этому сравнению и q_m равнозначно q_n ;

¹ Здесь и далее, если в отношении рассматриваемых матриц не оговорено обратное, условимся считать A_1 - матрицей, а A^1 - полуматрицей.

– рассмотрим $D_{Exp}(V^O, V)$ очевидно, что при таком выборе V^O

$$V^O = \underset{V}{\operatorname{Argmin}} \sum_{i=1}^N D_{Exp}(V^i, V).$$

Несмотря на кажущуюся простоту данный метод позволяет получить итоговое решение оптимизационной задачи поиска $\underset{V}{\operatorname{Argmin}} \sum_{i=1}^N D_{Exp}(V^i, V)$ с минимальными затратами ресурсов в достаточно большом количестве случаев, однако данный подход применим не всегда. Для иллюстрации этого рассмотрим следующий пример. Возьмем $N=3$, $k=3$, т.е. $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$, пусть эксперты проранжировали Q следующим образом:

- 1-й эксперт - $q_1 \prec q_0 \prec q_2$;
- 2-й эксперт - $q_0 \prec q_2 \prec q_1$;
- 3-й эксперт - $q_2 \prec q_1 \prec q_0$.

Тогда полуматрицы имеют следующий вид:

$$\text{– 1-й эксперт - } V^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{– 2-й эксперт - } V^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{– 3-й эксперт - } V^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Условимся для краткости $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ записывать как $\|1 \ 0 \ 0\|$, т.е. пре-

образовывать полуматрицы к вектору по следующему правилу обхода

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{k-1} \\ & a_k & \dots & a_{2k-3} \\ & & \dots & \dots \\ & & & a_{P_k} \end{pmatrix} \rightarrow \|a_1 \ a_2 \ \dots \ a_{P_k}\|, \text{ т.о. обозначив за } i - \text{ номер столбца, а}$$

за j - номер строки и условившись, что выбранная ячейка принадлежит полуматрице, получаем, что элемент a_{ij} находится на $n \cdot j - P_{j+1} + (i - j)$ позиции.

Возвращаясь к рассматриваемому нами примеру, получаем, что $V^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, т.е. расширявая матрицу поэлементно, имеем $q_1 \prec q_0$, $q_0 \prec q_2$, $q_2 \prec q_1$. Т.е. имеем противоречие, т.к. $q_1 \prec q_0, q_0 \prec q_2 \rightarrow q_1 \prec q_2$. Т.о. несмотря на то, что каждый из экспертов проранжировал Q приемлемым образом и получено решение оптимизационной задачи поиска $\text{Argmin}_V \sum_{i=1}^N D_{Exp}(V^i, V)$, т.е. найдена Медиана Кемени, полученное решение нельзя взять за итоговое.

В подобном случае поиск решения оптимизационной задачи $\text{Argmin}_V \sum_{i=1}^N D_{Exp}(V^i, V)$ производится методом полного перебора возможных вариантов. Естественно, что при его реализации произведены не только возможные оптимизации программного кода для ускорения работы алгоритма, но и сам алгоритм перебора оптимизирован и доработан в таких аспектах, как:

- хранится предполагаемое минимальное значение $\sum_{i=1}^N D_{Exp}(V^i, V)$, что позволяет пропускать вычисление $D_{Exp}(V^i, V)$, при превышении части $\sum_i D_{Exp}(V^i, V)$ предполагаемого минимума;
- в качестве начального элемента перебора взята V^0 , получаемая согласно описанному выше алгоритму;
- начальными направлениями перебора являются изменения тех элементов V^0 , которые наиболее близки к $\frac{N}{2}$.

Подобные оптимизации позволяют значительно ускорить поиск $\text{Argmin}_V \sum_{i=1}^N D_{Exp}(V^i, V)$, но их результативность существенно зависит от количества ранжируемых элементов и ответов экспертов, так на множестве из 3-х элементов скорости поиска решения алгоритмов практически совпадают, а на множестве из 20-ти элементов использование оптимизированного алгоритма может давать ускорение до 10 раз по сравнению с обычным алгоритмом.

Возвращаясь к нашему примеру, получаем что $V^0 = \{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\}$, что означает, что комиссия не пришла к единому решению.

Методика оценки точности полученного решения

Методика оценки точности полученного решения, так же как и методика определения итогового решения для разных типов вопросов различна. Так для вопросов выбора и оценивания целесообразно оценивать точность в соответствии с дисперсией ответов относительно итогового решения экспертной комиссии. В случае вопросов упорядочивания естественно взять в качестве оценки точности полученного решения коэффициент конкордации Кендалла. Рассмотрим это подробнее, используя выкладки [1, 3, 6, 11].

Конкордация Кендалла

Рассмотрим ранжирование множества $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_k\}$ группой из N экспертов. Обозначим за r_{ij} - ранг присвоенный i -м экспертом элементу q_j . Это можно проиллюстрировать таблицей 1, в которой снизу дописана строка с суммой рангов для каждого элемента Q .

Таблица 1. Иллюстрация матрицы ранжирования множества Q группой из N экспертов.

	q_1	q_2	$\dots$	q_k
1	r_{11}	r_{12}	$\dots$	r_{1k}
2	r_{21}	r_{22}	$\dots$	r_{2k}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
N	r_{N1}	r_{N2}	$\dots$	r_{Nk}
Σ	$\sum_{i=1}^N r_{i1}$	$\sum_{i=1}^N r_{i2}$	$\dots$	$\sum_{i=1}^N r_{ik}$

Тогда очевидно средние $a_i = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k r_{ij}$ равны для всех i и равны $\frac{k+1}{2}$, а общее среднее $a = \sum_i a_i = \sum_i \frac{1}{k} \sum_j r_{ij} = \frac{1}{k} \sum_i k \frac{k+1}{2} = \frac{N \cdot (k+1)}{2}$. Вариация имеет вид

$$S = \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^k r_{ij} - a \right)^2.$$

Заметим, что в случае несвязанных рангов $r_{ij} \in N$. В случае если i -й эксперт не может предпочесть ни q_j -е q_k -му, ни q_k -е q_j -му $r_{ij} = r_{ik}$, при этом r_{ij} выбирается таким образом, чтобы $\sum_{j=1}^k r_{ij} = k \frac{k+1}{2}$.

Понятно, что при полной несогласованности экспертов $\sum_{j=1}^k r_{ij} \rightarrow a$ и $S \rightarrow 0$, а при полной несогласованности $S \rightarrow \max$. Доказано [10], что при полной согласованности экспертов $S_{\max} = \frac{N^2 \cdot (k^3 - k)}{12}$, в случае отсутствия связанных рангов. Коэффициент конкордации определяется как отношение реальной вариации в матрице рангов к ее максимальному значению, т.е. $W = \frac{S}{S_{\max}}$. Для случая несвязанных рангов коэффициент конкордации находится по формуле $W = \frac{12 \cdot S}{N^2 (k^3 - k)}$.

Рассмотрим случай связанных рангов [1, 6]: $S_{\max} = \frac{N^2 \cdot (k^3 - k)}{12} - N \sum_{i=1}^e T_i$, где e - количество экспертов, присвоивших дробные ранги, а $T_i = \frac{1}{12} \sum_{v=1}^g (t_v^3 - t_v)$, где g - число

групп связанных рангов, а t_v - количество связанных рангов в группе. Тогда

$$W = \frac{12 \cdot S}{N^2(k^3 - k) - N \sum_{i=1}^e \left[\sum_{v=1}^g (t_v^3 - t_v) \right]}.$$

Для оценки точности полученного решения производится проверка гипотезы H_0 : ранжирования r_i независимы.

Установлено [1, 3, 6, 12], что при $k > 7$ величина $N(k-1)W$ имеет χ^2 распределение с числом степеней свободы $k-1$. Т.о. при выполнении $N(k-1)W > \chi^2(k-1, \alpha)$ гипотеза H_0 об отсутствии ранговой связи должна быть отвергнута, т.е. мнения экспертов считаются согласованными при заданном уровне значимости α .

Выводы

Таким образом были разработаны:

- математическая модель формирования состава экспертной комиссии;
- аналитическая методика получения итоговой экспертной оценки комиссии для вопросов выбора, численной оценки и упорядочивания;
- методы оценки точности полученных итоговых решений для рассматриваемых типов вопросов.

Описанные выше результаты в комплексе формируют методику, которая позволяет произвести автоматизацию процесса проведения экспертной оценки в применение к дистанционному анонимному индивидуальному экспертному оцениванию с варьируемым числом экспертов.

Литература

1. Айвазян С. А. и Мхитарян В. С. Прикладная статистика и основы эконометрики. М.: Изд. об-ние "ЮНИТИ". 1998. 1022 с.
2. Большая Советская Энциклопедия.- 3 е изд. ред. Т. 30. М.: Советская энциклопедия. 1978. 632 с.
3. Бондарь А. Г., Статюха Г. А., и Потяженко И. А. Планирование эксперимента при оптимизации процессов химической технологии Алгоритмы и прим. Киев: Вища школа. 1980. 263 с.
4. Гохман О. Г. Экспертное оценивание Учеб. пособие. Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-та. 1991. 150 с.
5. Кемени Д. и Снелл Д. Кибернетическое моделирование: Некоторые приложения. М.: Советское радио. 1972. 192 с.
6. Кремер Н. Ш. Теория вероятностей и математическая статистика (Probability theory and mathematical statistics). М.: ЮНИТИ : ЮНИТИ-Дана. 2003. 573 с.

7. Орлов А. И. Менеджмент. М.: Издательство "Изумруд". 2003. 298 с.
8. Орлов А. И. Эконометрика. Учебник. М.: Экзамен. 2002. 576 с.
9. Орлов А. И. Экспертные оценки. Учебное пособие. 2002. 31 с.
10. Рузинов Л. П. Статистические методы оптимизации химических процессов. М.: Химия. 1972. 200 с.
11. Шмойлова Р. А. Теория статистики : Учеб. для студентов экон. спец. вузов. М.: Финансы и статистика. 1999. 557 с.
12. Legendre P. Species Associations: The Kendall Coefficient of Concordance Revisited. *Journal of Agricultural, Biological and Environmental Statistics*, 2005. №10 (2): с. 226–245.
13. Самохвалов А. История Яндекса. Яндекс - 2008 // [www.yandex.ru - Яндекс](http://company.yandex.ru/about/history/archive/2008.xml). 2008. URL: <http://company.yandex.ru/about/history/archive/2008.xml>.
14. Вступительное слово президента Российской Федерации Д.А. Медведева на заседании Комиссии по модернизации и технологическому развитию экономики России, 18 июня 2009 года. Москва.
15. Заседание президиума Государственного совета «О реализации Стратегии развития информационного общества в Российской Федерации». 17 июля 2008 года. Петрозаводск.

D. Smirnov

Moscow Institute of Physics and Technology (SU)

ABOUT MATHEMATICAL MODEL OF EXPERTS COMMITTEE FORMING, FINAL EXPERTS ESTIMATION OBTAINING AND ESTIMATING ACCURACY OF OBTAINED SOLUTION

Abstract. The article discusses the development of methods how the expert committee should be formed, and the final experts estimation and evaluation of the accuracy of the solution should be obtained. Solution of the problem was considered in the context of the developing method for the remote, individual, and anonymous expert evaluation with a variable number of experts. The author suggested a model of formation of the expert committee; method of determining final experts evaluation for the following issues: choice of options, order of the options within the list, the numerical score; method of

estimating the solution accuracy. The proposed method is based on Kendall coefficient of concordance as a criteria for the accuracy of the obtained solution.

Key words: forming of expert committee, experts estimations, expertise, obtaining of final experts estimation, estimation of the accuracy of obtained solution.

ТЕХНОЛОГИИ И МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ

УДК 37.016:53

СОВМЕСТНОЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СОВРЕМЕННОГО КОМПЬЮТЕРНОГО ДЕМОНСТРАЦИОННОГО И МУЛЬТИМЕДИЙНОГО ОБОРУДОВАНИЯ НОВОГО ПОКОЛЕНИЯ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ФИЗИКИ В СОВРЕМЕННОЙ ШКОЛЕ

Д. В. Голиков, Н. Н. Голикова

*Московский государственный областной университет
105005, Москва, ул. Радио, 10а*

Аннотация. Совместное использование современного демонстрационного компьютерного и мультимедийного оборудования открывает большие возможности перед преподавателем при изучении физики, как в школе, так и ВУЗе. Применяя данные

средства, преподаватель получает возможность по-новому продемонстрировать, казалось бы, давно известные явления. А это, несомненно, повышает интерес учащихся к изучению темы в целом.

Ключевые слова: наблюдение, физика, демонстрационный эксперимент, наглядность демонстрационного опыта, компьютерные измерительные системы, цифровые измерительные приборы, современные мультимедийные технологии, L-микро, электронный осциллограф.

Всеобщая информатизация общества не могла не затронуть современную школу, в том числе и школьный кабинет физики. Использование персонального компьютера в учебном процессе не только необходимо, но и открывает новые возможности при изучении некоторых тем.

Данный процесс должен в полной мере охватывать и учебный демонстрационный эксперимент, так как преподавание дисциплин естественнонаучного цикла, в том числе и физики, невозможно без проведения эксперимента, как демонстрационного, так и выполняемого самими учащимися. И в этом плане компьютер предоставляет действительно уникальные возможности, поскольку легко превращается в универсальный измерительный прибор.

В новых условиях работы школы, в условиях возрастающего потока учебной информации и большой плотности учебного материала наряду со словесными и другими методами обучения соответствующее место должен занимать физический эксперимент и информационно-коммуникационные технологии.

Восприятие внешнего мира начинается с живого созерцания, связанного с чувственными воздействиями на человека. Эти воздействия могут проявляться при наблюдении явлений в окружающем нас мире. Явления можно наблюдать и в специально созданных условиях, например, в физическом кабинете. В этом случае имеют дело с физическим экспериментом. Окружающие нас физические объекты претерпевают различные изменения, т.е. происходят физические процессы или явления.

Главная задача физики - объяснить происходящее явление, причину его возникновения, но для этого нужно обнаружить явление среди многообразных проявлений природы, установить научный факт. Поэтому первым этапом изучения явления в науке является наблюдение. Но и ограничиться простым наблюдением нельзя. Явление нужно изучать глубоко и обстоятельно. Необходимо создать определенные условия протекания явлений и менять их в соответствии с планом исследования, то есть проводить физический эксперимент.

При проведении эксперимента воспроизводится не только физическое явление, но и выясняется взаимосвязь и зависимость протекания явления от изменения условий в данном эксперименте.

Физический эксперимент, как метод обучения, обладает большими учебными возможностями в развитии познавательной деятельности школьников.

Использование же компьютеризированного оборудования позволяет сделать возможными демонстрации физических величин и явлений, которые не могут быть продемонстрированы традиционным оборудованием, а также обрабатывать входящие данные и в реальном времени демонстрировать физическую величину, являющуюся производной от одного или более измеренных параметров.

Современный учитель физики выступает в роли проводника передовых технологий эксперимента, и несомненно, в его распоряжении должна быть современная система

оборудования, требующая минимального времени на подготовку опыта, гарантирующая необходимую точность и получение результата с первой попытки, обеспечивающая зрелищность и динамичность эксперимента, выразительность результатов и доступность их интерпретации для учащихся.

Выполнение сформулированных выше требований возможно только в рамках использования компьютерных технологий и цифровых приборов в качестве основных средств для проведения измерений и представления результатов, а также специальных комплектов оборудования для совместной работы с ними.

Большие возможности, закладываемые в современные в цифровые измерительные комплексы, позволяют не только повторить традиционные эксперименты на новом уровне, но и поставить опыты, проведение которых на школьном оборудовании ранее было невозможно.

Качество демонстрационных опытов в конечном итоге определяется тем, как учащиеся наблюдают демонстрируемое явление. Наглядность демонстрационного опыта достигается, прежде всего, специальной конструкцией демонстрационных приборов. Приборы, используемые для постановки демонстрационных опытов, должны иметь такие размеры, чтобы все учащиеся хорошо видели все необходимые детали. В тех случаях, когда это требование нарушено, мы имеем дело с «низкокачественным» демонстрационным прибором.

Использование компьютерной измерительной системы и цифровых измерительных приборов для обеспечения образовательного эксперимента внесло ряд новых моментов в подготовку и проведение демонстрационного эксперимента на уроках физики, изменило не только организацию эксперимента, но и существенно расширило его возможности в рамках урока.

Эксперимент проводится на основе сценария, заранее введенного в компьютерную программу и подробно описанного в методическом руководстве, с применением оборудования, специально сконструированного с учетом использования датчиков или цифровых измерительных приборов.

Результаты немедленно выводятся на экран компьютера или подключенный к нему видео проектор в виде цифр, диаграмм, графиков и таблиц.

Изменение содержания эксперимента связано с отсутствием ограничений на точность проводимых измерений, возможностями одновременной регистрации нескольких параметров физической системы и измерения нескольких интервалов времени в рамках одного запуска движения механической системы, регистрации однократных импульсных процессов в электродинамике, наличием элементов управления демонстрационной установкой от компьютера и проведением совместной обработки данных, полученных в серии последовательных опытов.

Примером такого комплекса вполне может стать комплект оборудования *L*-микро, разработанный специально для использования в учебном процессе, как общеобразовательной школы, так и в ВУЗе.

Использование в учебном процессе оборудования *L*-микро, дает практически неограниченные возможности обработки данных с использованием персонального компьютера, а так же позволяют быстро провести эксперимент (что особенно важно в случае демонстрационного эксперимента), обработать полученные данные и сделать выводы, а использование современных мультимедийных технологий позволит наглядно продемонстрировать ход всего эксперимента в реальном времени.

В качестве устройства, на которое может выводиться информация, получаемая во время проведения опытов, могут служить разнообразные мультимедийные устройства. Например, современный ЖК или плазменный телевизор, монитор персонального компьютера, различное проекционное оборудование. Так же немаловажно, что данное демонстрационное оборудование легко подключается к устройствам вывода информации, по крайней мере, этот процесс не труднее подключения видеоплеера к телевизору.

Так же совместно с оборудованием L-микро можно использовать различные интерактивные доски. Такое совместное использование оборудования позволяет учителю проводить демонстрацию в «интерактивном» режиме, т.е. контролировать проведение эксперимента непосредственно с интерактивной доски, что в свою очередь является хорошим средством при проведении демонстрационных экспериментов и вносит существенный вклад в повышение интереса учащихся к проводимой демонстрации, а значит, и к изучению темы в целом.

Великий теоретик физики А. Эйнштейн писал: «На первой ступени обучения физике надо вообще исключить все, кроме экспериментальной стороны, представляющей наглядный интерес. Красивый эксперимент сам по себе гораздо ценнее, чем 30 формул, добытых в реторте отвлеченных мыслей».

Применение новой системы оборудования кабинета физики обеспечивает зрелищность и динамичность эксперимента, выразительность результатов и доступность их интерпретации для учащихся, одним словом, выводит учебный процесс на уровень требований сегодняшнего дня.

Хорошим примером такого комплексного использования оборудования может служить демонстрация, проводимая при изучении электрического резонанса.

Как правило, изучение данной темы, как в школе, так и в ВУЗе немислимо без проведения демонстрационного эксперимента с использованием электронного осциллографа.

Уже многие годы осциллограф является одним из незаменимых приборов, используемых в научных исследованиях не только в области физики, но и тесно связанных с ней технических наук, в биологии, химии, медицине и др. Очень малая инерционность, возможность получения и визуального наблюдения на его экране кривых (графиков), выражающих функциональную связь между двумя переменными величинами в сочетании с высокой чувствительностью и большим входным сопротивлением определяют весьма большую ценность применения осциллографа в лекционном демонстрационном эксперименте и как прибора для качественной оценки исследуемых явлений, а также в качестве универсального измерительного устройства.

У обычного демонстрационного электронного осциллографа, например ОЭШ-61, являющегося до сих пор одним из самых массовых приборов, как в общеобразовательной школе, так и ВУЗах, есть недостаток. Диаметр экрана всего 130 мм, что не обеспечивает удовлетворительной видимости осциллограмм всем учащимся. Особенно это становится заметно при постановке демонстрации в обширной аудитории с большим числом присутствующих.

Выйти из данной ситуации можно очень легко, если при проведении демонстрации использовать компьютерный осциллограф L-микро совместно с интерактивной доской.

Оборудование, необходимое для проведения эксперимента, следующее: функциональный генератор ФГ-100, компьютерный осциллограф L-микро, интерактивная доска, лампа накаливания автомобильная 12В на подставке, трансформатор универсаль-

ный, батарея конденсаторов, провода соединительные с наконечниками, два ключа, магнитная доска.

Собирают электрическую цепь, соединяя последовательно генератор ФГ-100, катушку «12 В» от универсального трансформатора, батарею конденсаторов, лампочку на 12 В и два ключа (рис. 1). Установив частоту генератора 50 — 60 Гц, замыкают цепь и, меняя емкость батареи, устанавливают такой ток, при котором лампочка будет едва светиться.

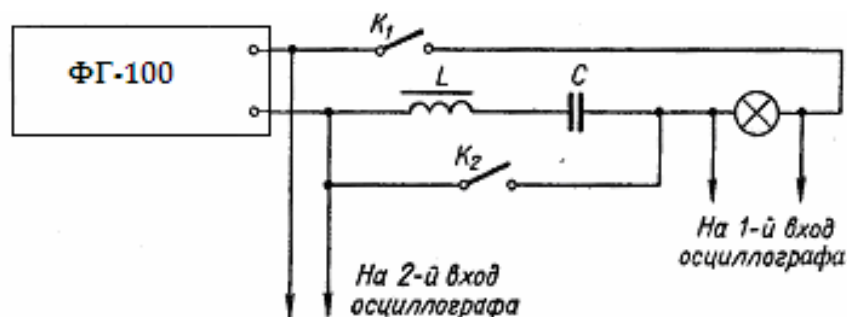


Рис.1. Схема установки для демонстрации резонанса в последовательном контуре

Изменяя частоту вынужденных колебаний, наблюдают, как постепенно увеличивается яркость свечения лампочки, достигая при некоторой частоте максимальной величины. Перейдя эту частоту, наблюдают постепенное уменьшение яркости свечения. Объясняя данный опыт (рис. 2), обращают внимание учащихся на то, что при изменении частоты ёмкостное сопротивление уменьшается, а индуктивное - увеличивается; разность же между ними уменьшается, становясь равной нулю в момент резонанса. В этот момент контур обладает только активным сопротивлением, что можно показать на опыте. Для этого замыкают ключ K_2 и наблюдают, что никаких изменений в свечении лампочки не происходит. В момент резонанса величина тока достигает максимального значения.

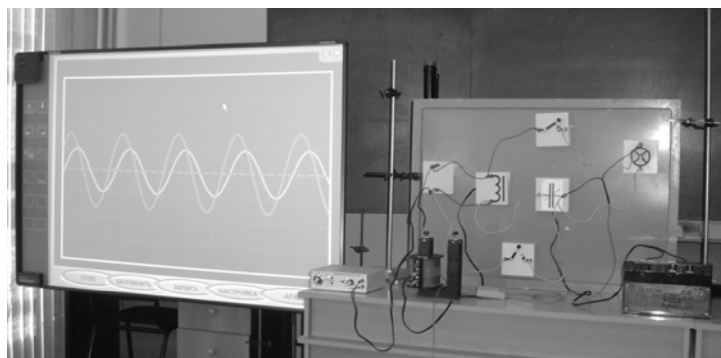


Рис. 2. Установка для изучения фазовых соотношений в последовательной цепи со смешанной нагрузкой с использованием интерактивной доски

Для демонстрации фазовых соотношений в период, предшествующий резонансу, в момент резонанса и в период, последующий за резонансом, подключают к цепи электронный осциллограф и, меняя частоту вынуждающих колебаний, наблюдают изменение сдвига фаз при переходе через резонанс. Вначале сдвиг фаз был емкостным (рис.3,а). При этом емкостное сопротивление больше индуктивного. После перехода через резонансную частоту он становится индуктивным (рис. 3, б), и индуктивное сопротивление становится больше ёмкостного. В момент резонанса фаза колебаний тока совпадает с фазой колебаний напряжения, и цепь ведет себя как активное сопротивление (рис.3,в).

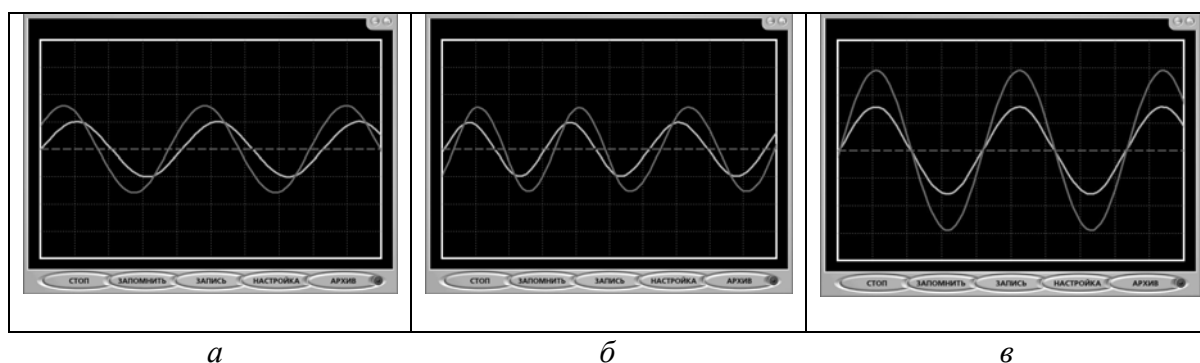


Рис. 3. Осциллограммы вынужденных колебаний и резонанса

В приведенном примере наглядно отражено преимущество использования компьютерного демонстрационного оборудования при проведении демонстрационного эксперимента. Ведь кроме увеличившихся в несколько раз размеров экрана осциллографа, мы получаем еще и цветное изображение. Благодаря тому, что сигнал с каждого канала выделяется своим цветом, преподаватель может более наглядно и подробно объяснить процессы, протекающие в электрической цепи.

Благодаря этим особенностям компьютерного оборудования, давно известная демонстрация приобретает новые свойства и становится более наглядной и доступной для восприятия учащимися. А это, несомненно, облегчает дальнейшее усвоение материала учащимися.

ЛИТЕРАТУРА

1. Голиков, Д.В. Использование демонстрационного оборудования нового поколения при изучении электромагнитных колебаний в курсе физики основной школы – М.: МГОУ, 2011. - 42 с., - ил.
2. Демонстрационный эксперимент по физике в средней школе: Пособие для учителей /В. А. Буров, Б. С. Зворыкин, А. П. Кузьмин и др.; Под ред. А. А. Покровского.— 3-е изд., перераб.— М.: Просвещение, 1979.— (Б-ка учителя физики).— Ч. 2. Колебания и волны. Оптика. Физика атома.— 287 с, ил.
3. Касьянов, В.А. Физика. 11 кл.: Учебн.для общеобразоват. учеб. заведений. – 2-е изд., - М.: Дрофа, 2002. – 416 с.
4. Румбешта, Е.А. Моделирование системы физического эксперимента как средства подготовки учащихся по физике в основной школе : монография/ Е. А. Румбешта; Гос. образоват. учреждение высш. проф. образования "Том. гос. пед. ун-т". -Томск: Изд-во Том. гос. пед. ун-та, 2005.-247 с. : -табл. -Библиогр.: с. 238-247
5. Синявина А.А. Формирование теоретических обобщений при изучении физики в

- общеобразовательных учреждениях. – М.: МГОУ, 2005. – 108с.
6. Справочник школьника. 5-11 классы. Точные науки: Математика. Физика. – М.: АСТ-ПРЕСС КНИГА, 2010, - 680 с.
 7. Стандарт второго поколения. Примерные программы среднего (полного) общего образования (Проект). //Физика в школе, №3, 2010 г.
 8. Учебное оборудование для кабинетов физики общеобразовательных учреждений / Ю. И. Дик, Ю. С. Песоцкий, Г. Г. Никифоров и др.; под ред. Г. Г. Никифорова. — М.: Дрофа, 2005. — 396, [4] с.: ил.
 9. Хижнякова, Л.С., Синявина А.А. Физика: Основы электродинамики. Элементы квантовой физики: Учеб. для 9 кл. общеобразоват. учрежд. -М.: Вита-Пресс, 2000 – 288 с.
 10. Шахмаев, Н.М., Каменецкий С.Е. Демонстрационные опыты по электродинамике. Изд. 2-е, перераб. Пособие для учителей. М., «Просвещение», 1973.
 11. <http://www.l-micro.ru/>
 12. <http://nic-ruo.ru/>

JOINT USE OF MODERN COMPUTER DEMONSTRATION AND MULTIMEDIA EQUIPMENT OF THE NEW GENERATION IN THE STUDY OF PHYSICS IN THE MODERN SCHOOL

D. Golikov, N. Golikova

*Moscow Regional State University
10a, Radio st., Moscow, 105005, Russia*

Abstract. Sharing demonstration of modern computer and multimedia equipment opens up great opportunities for the teacher to learn physics, both in school and University. Using these funds, the teacher has an opportunity for a new show, it would seem, the long-known phenomenon. And it, undoubtedly, increases the interest of students to study the topic in general.

Key words: monitoring, physics, demonstration experiment, visibility demonstration, computer measuring systems, digital measuring instruments, modern multimedia technology, L-micro, electronic oscilloscope.

НАШИ АВТОРЫ

Барабаш Татьяна Константиновна - Амурский государственный университет (АмГУ) 675027, Благовещенск, Игнатьевское шоссе, 21, ассистент кафедры «Математический анализ и моделирование». Магистрант по направлению 010600.68 «Прикладные математика и физика» Тел.: 89246816447, E-mail: barabash-tatyana@mail.ru.

Бурый Евгений Владленович - Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана 105005, Москва, 2-я Бауманская, 5, доктор технических наук, руководитель лаборатории лазерных информационных систем, buriy@bmstu.ru.

Гибадуллин Р.Ф. Астраханский государственный технический университет 414025, Астрахань, ул. Татищева, 16, fakul-fm@mgou.ru.

Голиков Д.В. Московский государственный областной университет 105005, Москва, ул. Радио, 10а, аспирант кафедры методики преподавания физики, fakul-fm@mgou.ru.

Голикова Нина Николаевна - Московский государственный областной университет 105005, Москва, ул. Радио, 10а доцент кафедры вычислительной математики и методики преподавания информатики, fakul-fm@mgou.ru.

Голов Александр Николаевич - Московский государственный областной университет 105005, Москва, ул. Радио, 10а, доцент кафедры теоретической физики, fakul-fm@mgou.ru.

Гордеев Ю.Н. - Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ» 15409, Москва, Каширское ш., 31, fakul-fm@mgou.ru.

Громов Евгений Михайлович - Национальный исследовательский университет – Высшая школа экономики в Нижнем Новгороде 603155, Нижний Новгород, 25/12, доктор физико-математических наук, профессор, профессор, зав. кафедрой математики Национального исследовательского университета - Высшая школа экономики – Нижний Новгород», (831) 416-95-40, egromov@hse.ru (e-mail)

Декина Ю.И. Астраханский государственный технический университет 414025, Астрахань, ул. Татищева, 16, fakul-fm@mgou.ru.

Долгова Елена Владимировна - Пермский государственный технический университет 614990, Пермь, Комсомольский пр., 29, elena.dolgova@gmail.com.

Крамской Михаил Александрович - Московский государственный университет приборостроения и информатики 107996, Москва, Стромынка, 20, аспирант, k.m.a@rambler.ru.

Куркин Андрей Александрович - Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева 603950, ГСП-41, Нижний Новгород, ул. Минина, 24, доктор физико-математических наук, профессор, aakurkin@gmail.com.

Куркина Оксана Евгеньевна - Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева 603950, ГСП-41, Нижний Новгород, ул. Минина, 24; Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» 603155, Нижний Новгород, ул. Б. Печерская, 25/12, кандидат физико-математических наук, доцент, roloukhin@mail.ru.

Курушин Даниил Сергеевич - Пермский государственный технический университет 614990, Пермь, Комсомольский пр., 29, старший преподаватель, daniel.kurushin@gmail.com.

Масловская Анна Геннадьевна - Амурский государственный университет (АмГУ) 675027, Благовещенск, Игнатьевское шоссе, 21, кандидат физико-математических наук, доцент, докторант кафедры «Теоретическая и экспериментальная физика» E-mail: maslovskayaag@mail.ru.

Пасечник Сергей Вениаминович - Московский государственный университет приборостроения и информатики 107996, Москва, Стромынка, 20, профессор кафедры медицинских приборов и компьютерных технологий, доктор физико-математических наук, профессор, s-p-a-s-m@mail.ru.

Петрова Марина Алексеевна - Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ» 115409, Москва, Каширское ш., 31, кандидат физико-математических наук, доцент, MAPetrova@mephi.ru.

Простокишин В.М. Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ» 15409, Москва, Каширское ш., 31, fakul-fm@mgou.ru.

Рабинович Александр Соломонович - Московский государственный университет приборостроения и информатики 107996, Москва, Стромынка, 20, Кандидат физико-математических наук, доцент, rabial@mail.ru.

Романова Мария Юрьевна - Воронежский государственный университет 394006, Воронеж, Университетская пл., 1, masynugom@yandex.ru.

Рувинская Екатерина Александровна - Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева 603950, ГСП-41, Нижний Новгород, ул. Минина, 24, e.vladykina@gmail.com.

Семеренко Д.А. Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана 105005, Москва, 2-я Бауманская, 5, fakul-fm@mgou.ru.

Семеренко Д.А. Московский государственный университет приборостроения и информатики 107996, Москва, Стромынка, 20, fakul-fm@mgou.ru.

Солычева Ольга Михайловна - Национальный исследовательский университет – Высшая школа экономики в Нижнем Новгороде 603155, Нижний Новгород, 25/12, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математики, (831) 416-95-40 (сл.) Solycheva@list.ru, osolycheva@hse.ru

Трифоненков В.П. - Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ» 115409, Москва, Каширское ш., 31, fakul-fm@mgou.ru.

Тютин Виктор Владимирович - Национальный исследовательский университет – Высшая школа экономики в Нижнем Новгороде 603155, Нижний Новгород, 25/12, доцент кафедры математики, кандидат физико-математических наук, доцент, (831) 416-95-40 (сл.), vtutyutin@hse.ru (e-mail).

Чопик А.П. Московский государственный университет приборостроения и информатики 107996, Москва, Стромынка, 20, fakul-fm@mgou.ru.

Шмелёва Д.В. Московский государственный университет приборостроения и информатики 107996, Москва, Стромынка, 20, fakul-fm@mgou.ru.

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

<i>Громов Е.М., Солычева О.М., Тютин В.В.</i> Функции двух переменных конечной Λ -вариации и операторы суперпозиции	3
<i>Романова М.Ю.</i> Оценки функции грин, построенной по полугруппе операторов	6
<i>Петрова М.А., Трифоненков В.П.</i> Асимптотика решения одного сингулярно возмущенного уравнения гиперболического типа	18
<i>Гордеев Ю.Н., Простокишин В.М.</i> Функционально-инвариантное решение задачи о распределении поля давления в окрестности растущей трещины	21

ФИЗИКА

Декина Ю.И., Гибадуллин Р.Ф. Физико-химическая модель эрозии-коррозии ме-

талла стенки абсорбера установки аминовой очистки газов	28
Голов А.Н. Статистическая теория эволюции газоподобного облака в периодическом поле	33
Рабинович А.С., Крамской М.А. Периодические орбиты релятивистского антипротона в нелинейном ядерном поле	44
Масловская А.Г., Барабаш Т.К. Имитационное моделирование процесса переключения поляризации сегнетоэлектрических кристаллов под действием инжектированных зарядов	53
Рувинская Е.А., Куркина О.Е., Куркин А.А. Исследование структуры уединенных внутренних волн большой амплитуды в трехслойной жидкости	61
Бурый Е.В., Семеренко Д.А. Применение жидких кристаллов для реализации управляемого фазового транспаранта	74
Пасечник С.В., Семеренко Д.А., Шмелёва Д.В., Чопик А.П. Ориентационная структура нематического жидкого кристалла ограниченного в порах пористой полимерной плёнки	79
Трифоненков В.П., Петрова М.А. О постановке обратной задачи диагностики распределения напряженности двумерных микрополей	85

КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ

Долгова Е.В., Курушин Д.С. Адаптация математической модели нейронной сети для системы распознавания слитного рукописного текста	91
Долгова Е.В., Курушин Д.С. Исследование математической модели штрихов рукописного текста	97

ТЕХНОЛОГИИ И МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ

Голиков Д.В., Голикова Н. Н. Совместное использование современного компьютерного демонстрационного и мультимедийного оборудования нового поколения при изучении физики в современной школе	106
--	-----

НАШИ АВТОРЫ	112
-------------------	-----

CONTENTS

MATHEMATICS

Gromov E., Solycheva O., Tyutin V. Functions of two variables of finite Λ -variation and superposition operators	3
Romanova M. Estimation of green's function based on semigroup of operators	6
Petrova M., Trifonenkov V. Asymptotics of the solution of one singularly perturbed hyperbolic equation	18
Gordeev Yu., Prostokishin V. Functionally invariant problem solutions of the near growing crack pressure field distribution	21

PHYSICS

<i>Dekina Y., Gibadullin R.</i> Physico-chemical model of erosion-corrosion of the metal wall of the absorber of installation amine gas cleaning	28
<i>Golov A.</i> Statistical theory of the evolution of the gas-dispersed cloud in the periodical field	33
<i>Rabinowitch A.S., Kramskoy M.A.</i> Periodic orbits of the relativistic antiproton in a nonlinear nuclear field	44
<i>Maslovskaya A., Barabash T.</i> Simulation of polarization reversal processes in ferro-electric crystals under injected charges	53
<i>Rouvinskaya E., Kurkina O., Kurkin A.</i> Investigation of the structure of large amplitude internal solitary waves in a three-layer fluid	61
<i>Buryi E., Semerenko D.</i> Usage of liquid crystal for implementation spatial light phase modulator	74
<i>Pasechnik S., Semerenko D., Shmeliova D., Chopik A.</i> Orientational structure of nematic liquid crystal confined by pores of polymer films	79
<i>Trifonenkov V., Petrova M.</i> About definition of inverse problem of two-dimensional microfield distribution diagnosis	85

COMPUTER SCIENCES

<i>Dolgova E. Kurushin D.</i> A neural network model adaptation for use with unconstrained handwritten text recognition system	91
<i>Dolgova E. Kurushin D.</i> The investigation of the handwriting strokes model	97

TECHNOLOGIES AND TECHNIQUES OF TRAINING

<i>Golikov D. Golikova N.</i> Joint use of modern computer demonstration and multimedia equipment of the new generation in the study of physics in the modern school	106
--	-----

OUR AUTHORS	112
--------------------------	-----

УДК 517.98

Функции двух переменных конечной Λ -вариации и операторы суперпозиции / Громов Е.М., Сольчева О.М., Тютин В.В. // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2011. №2. С.3-6.

Работа посвящена актуальной тематике описания операторов суперпозиции, действующих на функциональных пространствах конечной вариации. В ней представлены результаты, развивающие и обобщающие недавние исследования Я. Матковского, Я. Мища, Д. Уотермана, В. В. Чистякова: введено понятие полной двумерной Λ -вариации функций двух действительных переменных, показано, что класс Уотермана функций двух переменных конечной полной Λ -вариации образует банахово пространство. Также приведено описание генератора оператора суперпозиции типа Немыцкого, действующего на пространстве Уотермана и удовлетворяющего условию Липшица.

Библиогр.7.

УДК 517.9

Оценки функции Грина, построенной по полугруппе операторов / Романова М.Ю. // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2011. №2. С.6-17.

В статье рассматривается сильно непрерывная полугруппа операторов, которая является гиперболической (или допускает экспоненциальную дихотомию). Для исследуемой полугруппы операторов строится функция Грина, которая играет важную роль в представлении слабых ограниченных решений дифференциальных уравнений. Используя частотную характеристику оператора и интегральный критерий качества дихотомии, в статье получены оценки функции Грина, построенной по гиперболической полугруппе операторов. Результаты данной статьи получены с существенным использованием методов гармонического анализа.

Библиогр.10.

УДК 517.965.35

Асимптотика решения одного сингулярно возмущенного уравнения гиперболического типа / Петрова М.А., Трифоненков В.П. // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2011. №2. С.18-20.

Исследуются сингулярно возмущенные квазилинейные уравнения гиперболического типа. Доказывается существование у них решений типа бегущих волн, имеющих контрастную структуру. С помощью метода пограничных функций построено асимптотическое разложение по малому параметру решения в случае движения внутреннего слоя (фронта). Получены уравнения для определения скорости распространения фронта волны. Рассматривается важный для приложений частный случай квазидискретной нелинейности.

Библиогр.4.

УДК 552.578.2.061.43.001.573

Функционально-инвариантное решение задачи о распределении поля давления в окрестности растущей трещины / Гордеев Ю.Н., Простокишин В.М. // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2011. №2. С.21-27.

Построены точные решения автомодельных задач о поле давления в окрестности распространяющейся трещины гидроразрыва. Считается, что трещина развивается по корневому закону в проницаемой упруго деформируемой пористой среде, с постоянной расклинивающей силой, действующей на берега трещины. Рассматриваемая задача для уравнения пьезопроводности заменой переменных сведена к решению смешанной краевой задачи для уравнения Гельмгольца, решение которой выражается в квадратурах от функции Бесселя. Полученное решение справедливо для произвольного автомодельного распределения давления на берегах трещины.

Библиогр.7.

УДК 620.192

Физико-химическая модель эрозии-коррозии металла стенки абсорбера установки аминовой очистки газов / Декина Ю.И., Гибадуллин Р.Ф. // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2011. №2. С.28-32.

Статья посвящена разработке физико-химической модели эрозии-коррозии металлов в двухфазном потоке в нижней зоне абсорбера установки аминовой сероочистки газов. Предложенная модель позволяет разработать математическую модель эрозионно-коррозионных процессов металла в двухфазном потоке.

Ил.1. Библиогр.5.

УДК.533.72.

Статистическая теория эволюции газоподобного облака в периодическом поле / Голов А.Н. // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2011. №2. С.33-44.

Исходя из уравнения Лиувилля – Гиббса получены статистические функции распределения системы дисперсных частиц в периодическом поле. Дано кинетическое описание эволюции системы для частного случая. Выявлены основные закономерности эволюции системы и их зависимость от параметров задачи.

Ил.4. Библиогр.12.

УДК: 539.1

Периодические орбиты релятивистского антипротона в нелинейном ядерном поле / Рабинович А.С., Крамской М.А. // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2011. №2. С.44-52.

В статье исследуются орбитальные движения релятивистского нуклона и антинуклона в нелинейном поле массивного ядра. Данная задача приводится к системе нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка относительно радиальной координаты и полярного угла частицы. Проводятся численные исследования этой системы уравнений. Показывается, что в случае движения вокруг ядер антипротонов могут возникать периодические орбиты. Исследуются условия их существования в релятивистском случае.

Ил.3. Табл.3. Библиогр.5.

УДК 537.533.9:537.226.4

Имитационное моделирование процесса переключения поляризации сегнетоэлектрических кристаллов под действием инжектированных зарядов / Масловская А.Г., Барабаш Т.К. // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2011. №2. С.53-60.

Представлен анализ процесса переключения поляризации сегнетоэлектрических кристаллов в режиме инжекции электронных пучков под поверхностный слой образца. Предложена имитационная модель, отражающая динамику переполаризации сегнетоэлектрического кристалла в рамках двумерного геометрического представления. Проведен расчет поляризационного тока модельных сегнетоэлектриков в инжекционном режиме.

Ил.5. Библиогр.11.

УДК 551.466.8

Исследование структуры уединенных внутренних волн большой амплитуды в трехслойной жидкости / Рувинская Е.А., Куркина О.Е., Куркин А.А. // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2011. №2. С.61-73.

Исследована структура физических полей (избыточной плотности, горизонтальной и вертикальной скорости) локализованных стационарных полнонелинейных возмущений в трехслойной симметричной жидкости. Проанализированы соотношения «ширина-амплитуда», «скорость-амплитуда» для таких волн и их зависимость от вертикальной координаты. Проводится сопоставление со слабонелинейной теорией.

Ил.9. Библиогр.25.

УДК 535.31

Применение жидких кристаллов для реализации управляемого фазового транспаранта / Бурый Е.В., Семеренко Д.А. // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2011. №2. С.74-79.

Обоснована целесообразность применения фазового транспаранта для формирования псевдослучайных реализаций отсчетов поля интенсивностей излучения при изучении свойств корреляционной функции 6-го порядка этого поля. Предложен способ построения фазового транспаранта, основанный на применении ячеек, заполненных нематическим жидким кристаллом, в которых реализована переменная величина зазора между стеклами с прозрачными электродами. Показано, что технологичная в изготовлении ячейка с клиновидным зазором обеспечивает реализацию требуемых величин фазового сдвига, а система таких последовательно расположенных ячеек позволит увеличить число формируемых статистически независимых реализаций отсчетов поля интенсивностей излучения.

Ил.2. Библиогр.9.

УДК 538.956

Ориентационная структура нематического жидкого кристалла ограниченного в порах пористой полимерной плёнки / Пасечник С.В., Семеренко Д.А., Шмелёва Д.В., Чопик А.П. // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2011. №2. С.79-85.

В статье описывается метод определения ориентационной структуры жидкого кристалла в порах пористой плёнки. Данный метод основан на измерении зависимости электрической ёмкости композиционного образца (пористая плёнка, заполненная жидким кристаллом) от температуры. В качестве пористой структуры была выбрана пористая полиэтилентерефталатная плёнка из-за возможности создания пор заданной ориентацией и заданными радиусами. В измерениях использовались образцы пористой плёнки с радиусами пор 75, 170, 210, 300 и 425 нм. В экспериментах была использована оригинальная конструкция ячейки, в которой поверхности пористой плёнки были покрыты токопроводящим слоем. Теоретические расчёты, выполненные на основе экспериментальных данных, показали, что ориентационная структура жидкого кристалла внутри пор характеризуется выходом директора из плоскости нормальной к оси поры.

Ил.2. Табл.1. Библиогр.8.

УДК 519.677.2

О постановке обратной задачи диагностики распределения напряженности двумерных микрополей / Трифоненков В.П., Петрова М.А. // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2011. №2. С.85-90.

Рассматривается математическая модель схемы исследования двумерного микрополя пучком электронов. Получены соотношения, учитывающие интегральную зависимость параметров пучка от распределения напряженности поля вдоль его траектории. На их основе рассматривается постановка обратной задачи нахождения гармонической функции, описывающей распределение магнитного (или электрического) поля.

Ил.2. Библиогр.6.

УДК 004.932.1

Адаптация математической модели нейронной сети для системы распознавания слитного рукописного текста / Долгова Е.В., Курушин Д.С. // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2011. №2. С.91-97.

В статье предлагается подход к адаптации нейросетевых моделей для создания OCR-систем, рассчитанных на работу со слитным неограниченным рукописным текстом. Подход основан на отказе от распознавания слитных символов и переходу к распознаванию отдельных штрихов, из которых затем собираются символы и/или слова текста. Рассматриваемый подход позволяет существенно понизить размерность нейронных сетей, используемых в OCR-системах, что приведет к повышению их производительности и качества распознавания.

Ил.1. Библиогр.5.

УДК 004.932.1

Исследование математической модели штрихов рукописного текста / Долгова Е.В., Курушин Д.С. // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2011. №2. С.97-105.

В статье предлагается и исследуется модель штрихов рукописного текста. Рассматриваемая модель представляет рукописный текст как совокупность штрихов нескольких известных классов. Модель позволяет абстрагироваться от начальных условий письма, таких как угол наклона, скорость, плотность и т.п. Благодаря процедуре векторизации для модели не имеет значения зашумленность исходного изображения и способ его получения. В работе проведен эксперимент, подтверждающий применимость модели для использования в задачах распознавания образов.

Ил.3. Табл.1. Библиогр.9.

УДК 37.016:53

Совместное использование современного компьютерного демонстрационного и мультимедийного оборудования нового поколения при изучении физики в современной школе / Голиков Д.В., Голикова Н.Н. // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2011. №2. С.106-111.

Совместное использование современного демонстрационного компьютерного и мультимедийного оборудования открывает большие возможности перед преподавателем при изучении физики, как в школе, так и ВУЗе. Применяя данные средства, преподаватель получает возможность по-новому продемонстрировать, казалось бы, давно известные явления. А это, несомненно, повышает интерес учащихся к изучению темы в целом.

Ил.3. Библиогр.12.

ПРАВИЛА

подготовки рукописей, представленных для опубликования в журнале
«Вестник Московского государственного областного университета.
Сер. Физика - математика»

Для публикации научных работ в выпусках серии «Вестник МГОУ» принимаются статьи на русском языке. Публикуются научные материалы преимущественно докторантов, аспирантов, соискателей, преподавателей ВУЗов, докторов и кандидатов наук.

Требования к оформлению статей. Статья должна быть представлена:

- в текстовом варианте (текст статьи должен быть подписан всеми авторами);
- в виде документа MS Word 2003 (с расширением doc);
- в виде файла в формате rtf;

Файл должен содержать построчно:

На русском языке	УДК (в верхнем левом углу первого листа рукописи) НАЗВАНИЕ СТАТЬИ – прописными буквами Фамилия, имя, отчество Полное наименование организации (в скобках – сокращенное), почтовый адрес Должность (другие сведения, например, E-mail, телефон)
------------------	---

	Аннотация (1 абзац до 400 символов) под заголовком «АННОТАЦИЯ» Ключевые слова
На английском языке	НАЗВАНИЕ СТАТЬИ – прописными буквами Фамилия, инициалы Полное наименование организации, почтовый адрес Аннотация (1 абзац до 400 символов) под заголовком «Abstract» Ключевые слова (Key words)
На русском языке	Объем статьи ограничен темя уровнями: а) 12 страниц с числом иллюстраций до пяти (к этим статьям предъявляются повышенные требования); б) 6 страниц с числом иллюстраций до трех (содержатся основные результаты без излишних деталей выводов и доказательств); в) 4 страницы с числом иллюстраций до двух (выходят в разделе краткие сообщения вне очереди). Список использованной литературы под заголовком «ЛИТЕРАТУРА»

Формат страницы – А4, книжная ориентация. Поля – 2,5 см. Шрифт Times New Roman Cyrillic, цвет шрифта черный, размер 12 пикселей, междустрочный интервал – полуторный.

Запрещены специфические действия над текстом и встраиваемые коды: уплотнение интервалов, использование цветowych заливок, «красные строки», центрирование, табуляция, отступы, переносы в словах (делаемые автором), ссылки, гиперссылки, сноски (лучше их оформлять в виде примечаний, замечаний и т.п.). Не допускаются сокращения слов, имен, названий, за исключением общепринятых (и оговоренных).

Формулы нумеруются (справа) только те, на которые в тексте имеются ссылки.

Рисунки и таблицы допускаются в том случае, если описать процесс в текстовой форме невозможно. В этом случае каждый из объектов не должен превышать указанные размеры страницы, а шрифт в нем – 12 пикселей. Возможно использование только вертикальных таблиц и рисунков. Запрещены цветowych заливки, применение «фонов».

Рисунки, схемы, графики выполняются на отдельных листах в формате, обеспечивающем ясность передачи деталей. Места расположения иллюстраций в тексте должны быть указаны простым карандашом на полях. На обороте иллюстрации должны быть написаны фамилия автора и название статьи. Текст к иллюстрациям, а также таблицы следует поместить на отдельных страницах. Все рисунки, схемы, графики, таблицы должны иметь названия.

Все формулы должны быть созданы с использованием компонента Microsoft Equation, (MathType 4.0). Размер шрифта также 12 пикселей. Формула создается однократным запуском компонента Microsoft Equation (MathType 4.0). Запрещается создавать составные формулы! Небольшие строчные фрагменты типа ΔU_{ij} или $C^{(m)} = (c_{1m}, c_{1m}, \dots)^T$ следует набирать обычным способом в латинице, используя средства панели инструментов: изменение шрифта на курсив, написание верхних и нижних индексов, а также вставку символов. При этом следует обратить внимание на написание цифр, скобок, операторов и наименований функций (Δ , $\sin$, $\cos$, ...) прямым шрифтом. Хорошее представление об оформлении математических текстов дает чтение научных журналов Российской академии наук физико-математического направления, классических учебников по физике и математике для высших учебных заведений.

Абзацы должны быть отделены друг от друга пустой строкой (дополнительным «Enter»).

Список литературы должен содержать библиографические сведения о всех публикациях, упоминаемых в статье, и не должен содержать указаний на работы, на которые в тексте нет ссылок. Располагать публикации в списке следует по алфавиту, вначале следует приводить отечественные публикации, затем – иностранные. Список литературы приводится на отдельном листе с обязательным указанием следующих данных: для книг (монография, сборник и т.д.) – фамилия (после фамилии ставится запятая), инициалы автора, название книги, место издания (город), издательство, год издания; для журнальных статей – фамилия и инициалы автора, название статьи, название журнала, год издания, том, номер, выпуск, страницы (первая и последняя). **Обращаем Ваше внимание!** С 01.07.2004 введен новый стандарт ГОСТ 7.1-2003 «Библиографическое описание документа».

лиографическая запись. Библиографическое описание. Общие требования и правила составления». Наиболее распространенные примеры:

1. Иванов, И.И. Название книги / И.И. Иванов. - М.: Наука, 2009. – 205 с.
2. Иванов, И.И. Название книги / И.И. Иванов, П.М. Петров, К.Л. Данилов. - М.: Наука, 2009. – 205 с.
3. Иванов, И.И. Название книги / И.И. Иванов [и др. (если 4 автора и более)]. - М.: Наука, 2009. – 205 с.
4. Название книги / И.И. Иванов [и др.], под ред. И.И. Иванова. - М.: Наука, 2009. – 205 с.
5. Иванов, И.И. Название статьи / И.И. Иванов, П.М. Петров, К.Л. Данилов // Название сборника. - М.: Механика, 2009. – С.51-59.
6. Иванов, И.И. Название статьи / И.И. Иванов, П.М. Петров, К.Л. Данилов // Название журнала. – 2009. - №2. - С.51-59.

Ссылки на неопубликованные работы не допускаются.

Редакционная коллегия оставляет за собой право на редактирование статей, хотя с точки зрения научного содержания авторский вариант сохраняется. Статьи, не соответствующие указанным требованиям, решением редакционной коллегии серии не публикуются и не возвращаются (почтовой пересылкой).

В случае принятия статьи, условия опубликования оговариваются с ответственным редактором.

Ответственный редактор серии «Физика-математика» декан физико-математического факультета, доктор технических наук, профессор Бугримов Анатолий Львович.

Адрес редколлегии серии «Физика-математика» «Вестника МГОУ»: 105005, Москва, ул. Радио, д.10-а, комн. 36. Тел. (495) 261-09-48