

ISSN 2072-8549



Вестник

МОСКОВСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
ОБЛАСТНОГО
УНИВЕРСИТЕТА

Серия

ФИЗИКА-
МАТЕМАТИКА

2011 / № 1

МАТЕМАТИКА

УДК 514.76/+512.74

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ
АФФИННО-СВЯЗНЫХ МНОГООБРАЗИЙ,
БЛИЗКИХ К СИММЕТРИЧЕСКИМ

О.А. Матвеев* , Е.Л. Нестеренко**

* Московский государственный областной университет
105005, Москва, ул. Радио, 10а

** Российский университет дружбы народов (РУДН)
117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6

Аннотация. Рассматриваются алгебраические свойства просимметрических, почти симметрических и антисимметрических многообразий аффинной связности, близких к симметрическим пространствам.

Ключевые слова: квазигруппа, геодезическая лупа, аффинная связность, симметрическое пространство.

Развитие геометрии от Эрлангенской программы Феликса Клейна и работ Софуса Ли, трудов Эли Картана ([1]-[3]) по симметрическим пространствам и теории связностей и, наконец, теория связностей в расслоениях выявили фундаментальную роль, которую играет понятие группы в геометрии. Современные исследования показывают, что не меньшее значение в геометрии имеют и неассоциативные алгебраические структуры, такие как квазигруппы, луны ([4] – [8]). Здесь мы имеем в виду теорию гладких неассоциативных универсальных алгебр с их касательными объектами. Так вместо дифференцируемой группы и ее алгебры Ли появляется гладкая квазигруппа с определенными тождествами и ее касательная тройная система Ли. Наиболее ярко это прозвучало в дифференциальной геометрии в связи с алгебраическим описанием пространств аффинной связности (прежде всего симметрических и редуцированных).

В нашей работе мы рассматриваем три алгебраические модели пространства аффинной связности: $M = \langle M, L, (\omega_t)_{t \in R} \rangle$, $M = \langle M, L, (\omega_t)_{t \in R}, L \rangle$, $M = \langle M, (\omega_t)_{t \in R} \rangle$.

1. Геоодулярное многообразие $M = \langle M, L, (\omega_t)_{t \in R} \rangle$ есть дифференцируемое многообразие, где в каждой точке определён одуль, (одуль – это обобщение векторного пространства), определена операция умножения на скаляры. Операции геодезической луны подчиняются определенным алгебраическим тождествам, достаточным для однозначного восстановления аффинной связности. Эти тождества называются тождествами геоодулярности.

(Терминология введена в результате исследований школы профессора Л.В. Сабинаина.)

$$L_{t,y,x}^{u,y,x} L_{u,y,x}^y = L_{t,y,x}^y \text{ - первое тождество геоодулярности,}$$

$$L_x^y t_y = t_x L_x^y \text{ - второе тождество геоодулярности.}$$

2. В некоторых специальных случаях мы пользуемся более сложной алгебраической моделью – геоодулярным многообразием $M = \langle M, L, (\omega_t)_{t \in R}, L \rangle$, где добавляется вторая тернарная операция L и выполняется

$$L_x^y L_z^y = L_{L_x^z}^x L_x^y \text{ - третье тождество геоодулярности.}$$

Второе и третье тождества геоодулярности означают, что параллельный перенос есть изоморфизм касательного пространства в точке y на касательное пространство в точке x .

3. В третьей модели, называемой многообразием с геодезическими, мы изначально не рассматриваем тернарные операции L и L : $M = \langle M, (\omega_t)_{t \in R} \rangle$, то есть имеем дело с геодезическими линиями многообразия аффинной связности.

Параллельный перенос L отрезка геодезической вдоль геодезической линии пространства аффинной связности представляет собой левый сдвиг геодезической лупы, в окрестности каждой точки пространства определена операция умножения точек на скаляры, что связано с каноническим (аффинным) параметром геодезической линии. Кроме того, с каждой точкой пространства можно связать структуру векторного пространства, получаемого из касательного пространства экспоненциальным отображением. Сложение векторов в касательном пространстве в каждой точке многообразия дает возможность определить операцию L .

Теорема. (Сабинин Л.В.).([6]) Категория гладких многообразий аффинной связности эквивалентна категории гладких локальных геоодулярных (или геоодулярных) многообразий.

Действительно, если (M, ∇) -гладкое многообразие аффинной связности, то для любой точки $y \in M$ в ее нормальной выпуклой окрестности можно определить гладкие локальные операции формулами:

$$L_x^y z = \text{Exp}_x \tau_x^y \left((\text{Exp}_y)^{-1} z \right), \quad \omega_t(y, z) = t_y z = \text{Exp}_y \left(t (\text{Exp}_y)^{-1} z \right),$$

$$L_x^y z = \text{Exp}_y \left((\text{Exp}_y)^{-1} x + (\text{Exp}_y)^{-1} z \right),$$

где $\tau_x^y : T_y(M) \rightarrow T_x(M)$ - параллельный перенос вдоль единственной геодезической, соединяющей точки x и y . Таким образом, получаем гладкое локальное геоодулярное многообразие $M = \langle M, L, (\omega_t)_{t \in R}, L \rangle$.

Обратно, если $M = \langle M, L, (\omega_t)_{t \in R} \rangle$ - гладкое локальное геоодулярное многообразие, то определяем аффинную связность формулами:

$$(\nabla_x Y)_y = \frac{d}{dt} \left[(L_{x(t)}^y)^{-1} Y_{x(t)} \right]_{t=0}, \quad x(0) = y; \quad \frac{d}{dt} (x(t))_{t=0} = X_y,$$

где X, Y - векторные поля на M , $(L_z^y)_{*,y}$ - касательное отображение к левому сдвигу L_z^y .

Симметрические пространства обладают математически красивыми алгебраическими свойствами - геодезические симметрии относительно каждой точки являются локальными изоморфизмами аффинной связности. Ввиду богатства топологической и алгебраической структуры эти пространства являются удобным материалом, на котором проверяется эффективность многих современных математических методов. Самые разнообразные вопросы из дифференциальной геометрии, теории групп, дифференциальных уравнений, аналитической механики, теоретической физики часто сводятся к тем или иным задачам на симметрических пространствах. В работе О. Лооса «Симметрические пространства» ([9]) доказано, что аналитическое симметрическое пространство может рассматриваться, как одна аналитическая идемпотентная левообратимая и лево-дистрибутивная квазигруппа:

$$\begin{aligned} xx=x & \quad - \text{тождество идемпотентности;} \\ x(xy)=y & \quad - \text{тождество левой обратимости;} \\ x(yz)=(xy)(xz) & \quad - \text{тождество левой дистрибутивности.} \end{aligned}$$

В наших обозначениях О. Лоос рассматривал геодезическую квазигруппу, соответствующую действительному числу, равному «-1». Левые сдвиги этой квазигруппы и есть геодезические симметрии относительно точки. Позднее этот результат был обобщен в школе проф. Сабинина Л.В.. Произвольному пространству аффинной связности можно сопоставить однопараметрическое семейство локальных идемпотентных эластичных квазигрупп (тождество эластичности: $x(yx)=(xy)x$), определяемых каноническим (аффинным) параметром вдоль геодезических линий.

В многообразии с геодезическими $M = \langle M, (\omega_t)_{t \in R} \rangle$ выполняются следующие условия:

а) для любого x из M существует такая открытая окрестность U_x , содержащая x , что для любых y из U_x , для любого вещественного числа $t \in [0,1]$, $t_x y$ определено, и $t_x y \in U_x$.

Замечание. На языке пространств аффинной связности это условие означает существование нормальной выпуклой окрестности в каждой точке многообразия.

б) если $t_x y$ определено, то $u_x(t_x y)$ определено тогда и только тогда, когда определено $(ut)_x y$, и в этом случае

$$u_x(t_x y) = (ut)_x y, \quad u, t \in R, \quad x, y \in M; \quad (1)$$

в) выполняется тождество

$$t_x y = (1-t)_y x, \quad t \in R, x, y \in M; \quad (2)$$

г) если $1_x y$ определено, то

$$1_x y = y. \quad (3)$$

Заметим, что тождества (1), (2), (3) позволяют однозначно восстановить аффинную связность с нулевым тензором кручения.

Таким образом, был построен алгебраический эквивалент экспоненциального отображения, в частности подробно были изучены локально плоские и симметрические многообразия с геодезическими. Некоторые классы пространств аффинной связности однозначно описываются системой тождеств. Например, симметрические пространства есть пространства с геодезическими, в которых выполняются следующие тождества:

$$(-1)_x (-1)_{t_x y} = (-1)_{t_y x} (-1)_y, \quad (4)$$

$$(-1)_x t_y = t_{(-1)_x y} (-1)_x. \quad (5)$$

Ввиду важности симметрических пространств в научных исследованиях, представляет интерес рассмотрение пространств аффинной связности, близких к симметрическим по алгебраическим свойствам.

Пространство называется просимметрическим, если оно имеет общие геодезические линии с симметрическими пространствами. Проведено последовательное построение теории просимметрических и близких к ним пространств ([10] – [19]). В частности получено

Предложение. Геометрический одуль $\mathcal{M}_e = \langle M, L^e, \{t_e\}_{t \in R}, e \rangle$ просимметричен, если и только если выполняются тождества:

$$\begin{aligned} & \left[L_{L_x^e(-1)_e y}^e \right]^{-1} \circ L_x^e \cdot (-1)_e \circ (L_x^e)^{-1} \circ L_{L_x^e y}^e \circ t_e = \\ & = t_e \circ \left[L_{L_x^e(-1)_e y}^e \right]^1 \circ L_x^e \circ (-1)_e \circ (L_x^e)^{-1} \circ L_{L_x^e y}^e, \\ & L_{L_x^e(t+1)_e y}^e \circ (-1)_e \circ \left[L_{L_x^e t_e(t+1)_e y}^e \right]^1 \circ L_{L_x^e t_e y}^e \circ (-1)_e \circ \left[L_{L_x^e t_e y}^e \right]^1 = \\ & = L_{L_x^e y}^e \circ (-1)_e \circ (L_{L_x^e y}^e)^{-1} \circ L_x^e \circ (-1)_e \circ (L_x^e)^{-1} \end{aligned}$$

Замечание. Эти два тождества являются алгебраической переформулировкой тождеств (4) и (5).

Алгебраическая зависимость двух геодезических одулей просимметрического пространства в двух разных точках в общем случае представляется сложной. Поэтому особый интерес вызывают случаи, когда можно достаточно простым "алгебраическим действием" пересчитать бинарную операцию умножения в произвольной точке по известной операции умножения в заданной точке. В настоящее время, по-видимому, хорошо известно лишь три варианта простой алгебраической связи двух достаточно близких геодезических луп пространств аффинной связности. Это, во-первых, редуцированные пространства, во-вторых, почти симметрические и, в частности, антисимметрические, и в-третьих, пространства нулевой кривизны. В первых двух случаях геодезические лупы связных компонент пространства изоморфны, а в третьем - изотопны.

Почти симметрические пространства аффинной связности в алгебраическом определении впервые, по-видимому, были введены в школе профессора Л.В. Сабина в 1980–х гг. Первоначальные их алгебраические и дифференциально-геометрические свойства были исследованы в работах Л.В. Сабина, П.О. Михеева, О. А. Матвеева.

По алгебраическому определению просимметрическое пространство аффинной связности является почти симметрическим, если композиция двух геодезических симметрий является автоморфизмом геометрической структуры пространства.

Предложение. Одуль $M = \langle M, L^e, \{t_e\}_{t \in R}, e \rangle$ может быть реализован как одуль центрированный около e натуральной геоодулярной структуры многообразия почти симметрической аффинной связности, тогда и только тогда, когда выполняются следующие тождества:

$$\varphi_{(t+u)_e x} = \varphi_{t_e x} \circ \varphi_{u_e x}$$

$$L_{t_e x}^e \circ \phi_x = L_x^e \circ \phi_x \circ L_{(t-1)_e x}^e$$

$$\bar{l}^e(x, y) \circ L_z^e = L_{e^e(x,y)z}^e \circ \bar{l}^e(x, y)$$

$$\bar{l}^e(x, y) \circ t_e = t_e \circ \bar{l}^e(x, y)$$

где

$$\varphi_x = (L_x^e)^{-1} S_x^e; \quad S_x^e = \left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right)_e x \circ (-1)_e \circ \left(L^e \left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right)_e x \right)^{-1} \circ (-1)_e; \quad x, y, z \in M,$$

$$\bar{l}^e(x, y) = (S_{S_x^e y}^e)^{-1} \circ S_x^e \circ S_y^e; \quad u, t \in R.$$

Антисимметрические пространства образуют подкласс почти симметрических пространств. Это немедленно следует из алгебраического определения антисимметрического пространства: геодезическая симметрия S есть антиизоморфизм геометрической структуры этого пространства, то есть $\forall a, x, y, z \in M \quad S_a \left(\begin{array}{c} y \cdot z \\ x \end{array} \right) = S_a z \circ_{S_a x} S_a y$.

Предложение. Геодезическая лупа гладкого антисимметрического многообразия бинарно-лиева, то есть в частности справедливы следующие тождества:

$$x \cdot (x \cdot y) = x^2 \cdot y \quad \text{левая альтернативность,} \quad (6)$$

$$x \cdot (y \cdot x) = (x \cdot y) \cdot x \quad \text{эластичность,} \quad (7)$$

$$(x \cdot y) \cdot y = x \cdot y^2 \quad \text{правая альтернативность,} \quad (8)$$

и выполняется следующее тождество:

$$(x \cdot y)^{-1} = y^{-1} \cdot x^{-1} \quad (9)$$

Недавно было установлено, что в геодезической лупе антисимметрического многообразия выполняются тождества

$$b[(b^{-1}a^2b^{-2}a^2b^{-1})b^{-1}[a[(a^{-1}b^2a^{-1}) \cdot (a^{-1}za^{-1})]a]b^{-1}]b = a[(ab^2a) \cdot (a^{-1}za^{-1})]a, \quad (10)$$

$$a[(a^{-1}b^2a^{-1})(az^{-1}a)]a = b^2[a^{-1}[(az^{-1}a)(ab^{-2}a)]a^{-1}]b^2, \quad (11)$$

$$x(y(xzx)y)x = (xyx)z(xyx), \quad (12)$$

$$\begin{aligned} & (xy^2x)^{-\frac{1}{2}}(x(y(zw)y)x)(xy^2x)^{-\frac{1}{2}} = \\ & = \left[(xy^2x)^{-\frac{1}{2}}(x(yzy)x)(xy^2x)^{-\frac{1}{2}} \right] \cdot \left[(xy^2x)^{-\frac{1}{2}}(x(ywy)x)(xy^2x)^{-\frac{1}{2}} \right]. \quad (13) \end{aligned}$$

Суммируя полученные результаты, приходим к следующему предложению.

Предложение: Для того чтобы лупа являлась геодезической в некоторой точке антисимметрического пространства необходимо выполнение тождеств (6) - (13).

Взаимное расположение обсуждаемых классов пространств указано на следующем рисунке.

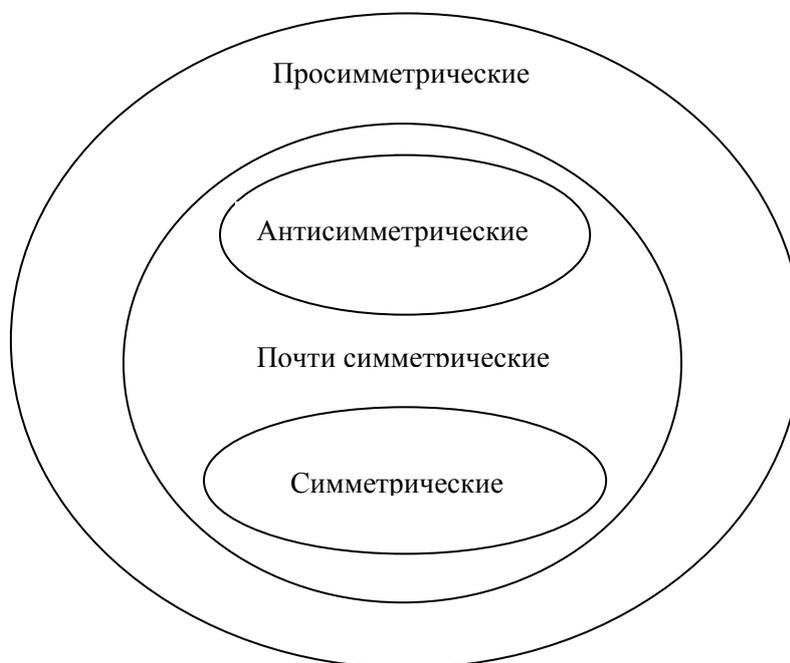


Рис.1 Взаимное расположение классов

ЛИТЕРАТУРА

1. *Картан, Эли.* Геометрия групп Ли и симметрические пространства. [Текст] //Сборник работ. – М.: ИЛ. - 1949. - 384 с.
2. *Картан, Эли.* Геометрия римановых пространств. [Текст] – М.-Л. ОНТИ. - 1936. - 244 с.
3. *Картан, Эли.* Теория конечных непрерывных групп и дифференциальная геометрия, изложенная методом подвижного репера. – М.: Из-во Моск. Ун-та. - 1963. - 367 с.
4. *Akivis, M.A., Goldberg V.V.* Local algebras of a differential quasigroupx [Text]. //Bulletin of the American mathematical society. – V. 43, 2, 2006, p.p. 207-226.
5. *Figula, Agota.* Geodesic loops [Text]. //Journal of Lie theory. - V. 10. - 2000. – p.p.455-461.
6. *Sabinin, L.V.* Non-Associative Algebra and its applications [Text]. //A Series of Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics. - V. - chapter 19. - Champan &Hall /CRC . - 2006 . - USA/.
7. *Sabinin, L.V., Matveyev O.A.* Geodesic loops and some classes of affinely connected manifolds. (Survey on odular geometry) [Text]. //Вестник РУДН. - 2(1). - 1995. - С. 135-243.
8. *Matveyev, O.A.* On quasigroup theory of manifolds with trajectories. Webs and quasigroups [Text]. Tver. 2000 p.p. 129-139.
9. *Лоос, О.* Симметрические пространства. [Текст] – М.: Наука. - 1985. - 208 с.
10. *Matveyev, O., Nesterenko E.L.* On the quasigroup properties of prosymmetric spaces with zero curvature. Webs and Quasigroups. Tver, 2002, pp. 78-85.
11. *Matveyev, O., Nesterenko E.L* The real prosymmetric spaces [Text]. Non – associative algebra and its applications. 2006, V.246, Ch. 19, pp.253-260.
12. *Матвеев, О.А.* О пространствах аффинной связности, близких к симметричным [Текст]. // Геометрия обобщенных пространств. Межвузовский сб-к. - Пенза. - 1992.
13. *Матвеев, О.А, Нестеренко Е.Л.* О двусторонних пространствах аффинной связности [Текст]. //Материалы международной научно-практической конференции «Л.Эйлер и Российское образование, наука и культура». - г. Тула. - 2-5 мая 2007г. - С. 207.
14. *Матвеев, О.А, Нестеренко Е.Л.* Алгебраические и геометрические свойства просимметрических пространств [Текст]. //XXXVI всероссийская научная конференция по проблемам математики, информатики, физики, химии и методики преподавания естественнонаучных дисциплин. - Тезисы докладов. - Математические секции. – М.: Изд-во РУДН. - 2000. - С.6.
15. *Матвеев, О.А, Нестеренко Е.Л.* О теории редутивных проабелевых пространств [Текст]. //Труды кафедры геометрии Московского Государственного областного университета №2. - Сборник научно-методических работ. – Москва: Издательство МГОУ. - 2005. - С.32-36.
16. *Матвеев, О.А., Нестеренко Е.Л.* Просимметрические пространства [Текст]. //Вестник РУДН. - серия математика. - 7(1). - 2000. - С. 114-126.
17. *Нестеренко, Е.Л.* Алгебраические свойства аффинной связности на касательном расслоении [Текст]. //Фундаментальные проблемы Физики и математики. – Москва. - 2004. - Государственный Технологический Университет «СТАНКИН». - Институт математического моделирования РАН. - С. 31-45.

18. *Нестеренко, Е.Л.* Редуктивные проабелевы пространства [Текст]. //Актуальные проблемы математики и методики преподавания. - Пензенский университет. - 2001. - С. 76-78.
19. *Нестеренко, Е.Л.* Свойства просимметрических пространств [Текст]. //Тезисы научных докладов Международной научно-практической конференции «Народное образование в XXI веке», посвященной 70-летию МПУ. - М.: Изд-во МПУ «Народный учитель». - 2001. - С. 43.

ALGEBRAIC PROPERTIES OF SOME CLASSES OF THE AFFINELY CONNECTED MANIFOLDS, CLOSE TO THE SYMMETRIC

O. Matveyev*, H. Nesterenko**

**Moscow region state university
10a, Radio st., Moscow, 105005, Russia*

***Peoples' Friendship University of Russia (PFUR)
6, Miklucho-Maklaya str., 117198, Moscow*

Abstract. We consider algebraic properties of prosymmetric, almost symmetric and antisymmetric of affinely connected manifolds, close to symmetric spaces.

Key words: quasigroup, geodesic loop, affine connection, the symmetric space.

УДК 514.7

СИММЕТРИИ ПОЛИПОЛЯРНОЙ КООРДИНАЦИИ

Т.А. Ракчеева

*Институт машиноведения РАН (Москва)
117334, Москва, ул. Бардина, 4*

Аннотация. Вводится полиполярная система координат, формируемая семейством многофокусных лемнискат, полный набор фокусов которой образует ее структурное начало. Произвольная точка плоскости имеет, как и в классической полярной системе координат, полиполярные координаты: метрическую ρ , и угловую φ , являющиеся функциями полярных координат относительно каждого из фокусов. Фокусное представление формы кривой многофокусными лемнисками позволяет настроить полиполярную систему координат таким образом, чтобы метрическая компонента соответствовала форме заданной кривой. Лемниската и ее фокусная структура имеют одну и ту же группу симметрий. Рассмотрены симметрии полиполярной координации, а также криволинейные симметрии на многофокусных лемнискатах.

Ключевые слова: криволинейная система координат, симметрии, кривые, фокусы, лемнискаты, степени свободы, аппроксимация.

Введение. Наиболее простая из криволинейных СК – классическая полярная - характеризует точку относительно единого центра двумя координатами: полярным радиусом ρ и полярным углом φ , где ρ - евклидово расстояние от точки до полюса, а φ - угловая мера относительно полярной оси. В работе [3, 251] автором предложена новая криволинейная СК - полиполярная лемнискатическая система координат (ППЛ), которая так же, как и классическая полярная СК, характеризует точку плоскости двумя координатами: полиполярным радиусом ρ и полиполярным углом φ , но имеет не один центр-полюс, а несколько (конечное число) полюсов. Такое координирование обеспечивается семействами *многофокусных лемнискат*.

В данной работе обсуждаются вопросы полиполярной координации плоскости и ее симметричных свойств.

Часть I. Полиполярная координация

Многофокусные лемнискаты. Многофокусные лемнискаты (овалы Кассини) на плоскости - гладкие замкнутые фокусные кривые (рис. 1а) без самопересечений, возможно многосвязные, содержащие внутри себя конечное число фокусов [1, 2, 3, 7].

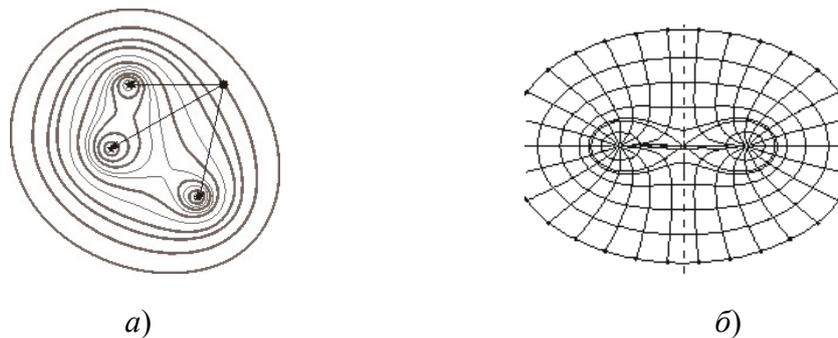


Рис. 1. ЛСК: а) семейство 3f-лемнискат; б) 2f-ППЛ.

Лемниската определяется своим инвариантом через k точек-фокусов и числовой параметр R как геометрическое место точек, для которого сохраняется постоянным, равным R^k , произведение расстояний r_j до всех k фокусов:

$$\prod_{j=1}^k r_j = R^k . \quad (1)$$

Для фиксированного набора k фокусов лемнискаты с разными радиусами образуют семейство вложенных кривых (R -форм) от k -связных, для малых значений радиуса R , до односвязных, для больших значений, причем кривые с большим радиусом охватывают кривые с меньшим радиусом без пересечений (рис. 1а).

Полиполярная система координат. Семейство многофокусных лемнискат позволяет построить обобщение классического полярного представления в виде полиполярной плоскости.

Набор k фокусов координируется в абсолютной декартовой системе отсчета (АСО): $f_j = \{a_j, b_j\}$, $j = 1, \dots, k$, образуя фокусную структуру $\{f_1, f_2, \dots, f_k\}$, которую будем в дальнейшем называть kf -структурой, а соответствующие лемнискаты – kf -

лемнисками.

Kf-структура является структурным (полиполярным) началом координат ППЛ.

Произвольная точка плоскости с АСО-координатами (x, y) в полиполярной лемни-
скатической системе координат (ЛСК) имеет полиполярные координаты (ρ, φ) , где ρ -
метрическая, а φ - угловая координата, которые являются, соответственно, функциями
фокусных ρ_j и φ_j полярных координат относительно каждого из фокусов f_j .

Метрическая координата ρ . Метрическая координата полиполярной СК определе-
на как среднегеометрическое:

$$\rho = \sqrt[k]{r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_k},$$

фокусных полярных радиусов $\rho_j \equiv r_j$, равных в евклидовой метрике:

$$\rho_j \equiv r_j = \sqrt{(x - a_j)^2 + (y - b_j)^2}.$$

*Метрическая координата ρ , существуя для любой точки (x, y) , может рассматри-
ваться как определение ее расстояния до kf-структуры: для любой kf-структуры коор-
дината ρ положительна всюду, кроме структурного начала координат, где она обраща-
ется в ноль, непрерывно, монотонно и неограниченно растет с удалением от фокусной
структуры (вдоль любого $\varphi = \text{const}$) - диапазон значений ρ от 0 до ∞ [3].*

*Kf-лемниската $\rho = \text{const} \equiv R^k$, удовлетворяя условию постоянства расстояния до kf-
структуры, может рассматриваться на плоскости как полиполярная окружность -
многофокусный аналог полярной координатной окружности. В отличие от классиче-
ской окружности, которая является монополярной, kf-лемнискату будем называть поли-
полярной окружностью, имея в виду, в качестве дополнительного обоснования, тот
факт, что любая лемниската «окружает» все свои фокусы.*

Угловая координата φ . Угловая координата полиполярной лемнискатической СК
введена как среднее арифметическое фокусных полярных углов φ_j , каждый из которых
есть классический полярный угол относительно j -го полюса-фокуса:

$$\varphi_j = \text{arctg} \frac{y - b_j}{x + a_j}.$$

*Ориентационная координата φ для произвольной точки плоскости может рас-
сматриваться как определение ее направления на kf-структуру: для любой kf- струк-
туры координата φ существует всюду, кроме структурного начала координат, где она
не определена, положительна и монотонно возрастает при обходе фокусной структуры
в положительном направлении по изометрической кривой $\rho = \text{const}$ с периодической
замкнутостью в диапазоне значений от 0 до 2π [3].*

Семейства изопараметрических кривых. Доказано, что *семейство изопараметри-
ческих кривых угловой координаты $\varphi = \text{const}$ есть семейство градиентных кривых к
семейству лемнискат $\rho = \text{const}$, и, как следствия: на градиентных к лемнискатам кри-
вых неизменной сохраняется сумма полярных углов: $\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_k$, а сопряженные
семейства изопараметрических кривых $\rho = \text{const}$ и $\varphi = \text{const}$ являются взаимно ортого-*

нальными в каждой точке. На рис. 1б и рис. 2а, б приведены координатные сетки сопряженных изометрических семейств кривых: $\rho = \text{const}$ (замкнутые кривые, охватывающие фокусы) и $\varphi = \text{const}$ (разомкнутые кривые, идущие от фокусов) для полиполярных систем координат с разным числом полюсов и конфигураций.

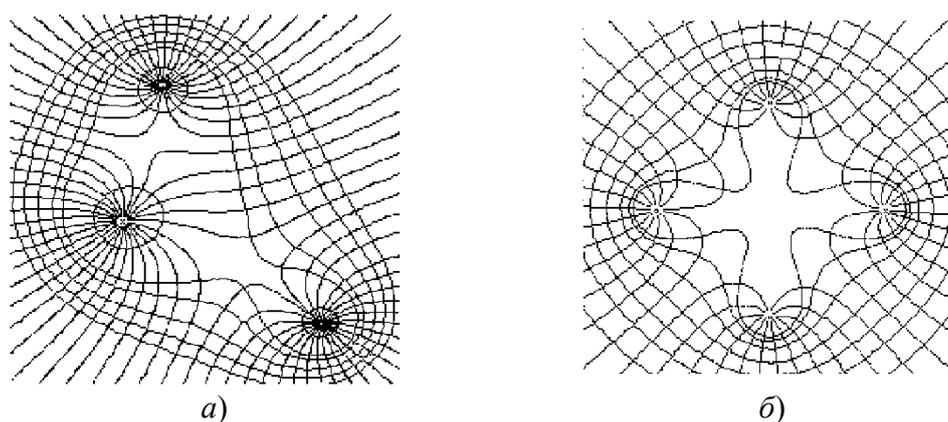


Рис. 2. Полиполярные ППЛ СК: а) 3f-асимметричная, б) 4f-симметричная

Приведенные рисунки иллюстрируют форму и характер взаиморасположения сопряженных семейств лемнискат и градиентных к ним кривых, в частности, их взаимную ортогональность и форму сепаратрис как для симметричной, так и для не симметричной kf -структуры. Рис. 1б представляет симметричную $2f$ -СК - простейшую из полиполярных (среди ее лемнискат есть кривая в виде «восьмерки», называемая лемниской Бернулли). Несимметричный случай произвольной трехфокусной системы представляет рис. 2а, а рис. 2б – случай четырехфокусной системы с полной симметрией.

Предельный переход к классической СК. Объектами полиполярной СК, таким образом, являются: kf -структура в качестве начала и сопряженные семейства лемнискат $\rho = \text{const}$ и градиентных кривых $\varphi = \text{const}$.

При неограниченном и непрерывном сближении всех k фокусов в одну точку kf -структура в пределе переходит в единый центр-фокус, семейство kf -лемнискат – в семейство окружностей с этим центром, а семейство градиентных кривых – в семейство градиентных к окружностям радиальных прямых, проходящих через фокусный центр. Таким образом, при вырождении полиполярной kf -структуры в монополярную объекты полиполярной СК непрерывно трансформируются в объекты классической полярной СК.

Иллюстрацией предельного перехода может частично служить $2f$ -ППЛ на рис. 1в для удаленных от фокусной структуры лемнискат.

Асимптотические переходы полиполярной координации в монополярную имеют место также в периферийных областях плоскости, достаточно удаленных от kf -структуры, что соответствует большим значениям ρ (радиуса софокусных координатных лемнискат).

Градиентные кривые $\varphi = \text{const}$ произвольной kf -структуры, исходящие каждая из своего фокуса, при $\rho \rightarrow \infty$ асимптотически приближаются к прямым $y = Cx$ $1f$ -структуры, проходящим через общий предельный центр kf -структуры.

Анализ полиполярной координации. Полиполярная ЛСК имеет особенности координации. Главная особенность заключена в самой фокусной структуре. В классической полярной СК особой точкой является единственный полюс, где $\rho = 0$, а угловая координата φ не определена. В предлагаемой полиполярной СК - это k полюсов фокусной структуры, где обращается в ноль полиполярный радиус $\rho \equiv R = 0$, а угловая координата φ не имеет определенного значения.

Таким образом, *структурное начало полиполярной СК характеризуется нулевым значением метрической координаты ρ и неопределенным значением угловой координаты φ , как и в классической СК.*

Другие особенности ППЛ-координации, связанные с разрывностью лемнискат, имеющей место для любой kf -структуры в критическом диапазоне $0 < \rho < \rho_0$, где ρ_0 – значение радиуса, начиная с которого лемниската приобретает односвязную форму. В частности, эффект нарушения однозначности в кратных точках является естественным следствием присущей любой полярной СК периодичности угловой координаты φ - в классической полярной СК φ имеет, как известно, значения с точностью до $2\pi l$. Вопросы *взаимной однозначности, непрерывности и монотонности* предлагаемой системы координации рассмотрены в [3] и доказаны для общего случая kf -структуры и всего диапазона R -форм лемнискат.

Одним из наиболее важных вопросов для kf -структуры произвольной конфигурации является вопрос об объединении несвязных петель многосвязной лемнискаты в единую замкнутую координатную линию $\rho = \text{const}$, вдоль которой монотонно меняются значения угловой координаты φ в диапазоне от 0 до 2π , т.е. организация единой φ -параметризации на многосвязной лемнискате. Обход многосвязной формы сопряжен с переходом с одной петли на другую, при этом порядок обхода, соответствующий φ -параметризации, может дополнительно фрагментировать ее, нарушая топологическую связность петель. Ответ на поставленный вопрос о возможности требуемой φ -параметризации для любой многосвязной метрической изолинии $\rho = \text{const}$ произвольной kf -ЛСК и способе организации соответствующего обхода несвязных форм положительный (конструктивное доказательство приведенное в [3]): *замкнутый и однократный обход многосвязных лемнискат с непрерывной и монотонной φ -параметризацией в диапазоне $[0, 2\pi]$ существует и однозначен. Структура фрагментации и переходов на всем множестве многосвязных лемнискат идентифицируется семейством сепаратрис, разделяющих бассейны фокусов.*

В таком образом устроенной ППЛ могут быть рассмотрены разные объекты и построения как классической, так и современной математики, к каковым относятся симметричные свойства и построения. Особенность состоит в том, что симметричные характеристики полиполярной плоскости и математических объектов в ней создают новые композиционные возможности и свойства.

Цель настоящей работы – анализ симметрий полиполярной лемнискатической системы координат с k -фокусной структурой.

Часть II. Симметрии полиполярной координации

Симметрии фокусов и лемнискат. Сохраняя в сжатом виде информацию о форме

представляемой кривой, фокусная структура наследует и симметрии ее формы, в отличие, например, от системы степеней свободы гармонического представления. С другой стороны, лемниската, однозначно определяясь фокусной структурой, содержит в своей форме фокусные симметрии [4].

Группа симметрий лемнискаты Бернулли состоит, как известно, из зеркальных отражений относительно двух ортогональных осей, что эквивалентно центральной симметрии. Такой же группой симметрий обладает и ее фокусная структура, состоящая из двух фокусов ($2f$ -структура всегда симметрична и обладает постоянной группой симметрий, отражение от одной из осей вырожденное). Фокусная структура, состоящая из трех и более фокусов, может быть как симметричной, так и несимметричной и в зависимости от конфигурации может иметь разную группу симметрий. На рис.2а представлено, как отмечалось выше, семейство лемнискат со структурой фокусов несимметричной формы, а на рис.2б, напротив, фокусная структура имеет правильную $4f$ -форму - фокусы расположены в вершинах квадрата - и обладает всеми симметриями квадрата. Той же группой симметрий обладают и соответствующие лемнискаты. Обобщая, можно сформулировать утверждение: *Лемниската и ее фокусная структура имеют одну и ту же группу симметрий.*

В основе этого утверждения лежит порождающий инвариант (1) а также то обстоятельство, что и фокусная структура, и соответствующая ей лемниската имеют представление в одной и той же системе координат, а, значит, выдерживают преобразования, сохраняющие форму. Порождающий инвариант, как следует из (1), представляет собой мультипликативную композицию расстояний между точками, что ограничивает данное исследование рассмотрением преобразований метрического пространства, сохраняющих расстояния и форму. Такие преобразования, являющиеся, как известно, ортогональными, образуют группу подобия, которая порождает группу симметрий, включающую переносные, масштабные, поворотные симметрии и отражения. Порождающий инвариант (1) может быть расширен рассмотрением не только евклидовых расстояний [6, 113], что ставит ряд новых интересных задач, но в настоящей работе мы ограничимся рассмотрением указанных преобразований и симметрий.

Доказательство сформулированного утверждения распадается на две части.

Для доказательства прямого утверждения можно предположить наличие у фокусной структуры некоторой группы плоских симметрий, содержащей перенос, отражение, поворот или растяжение, и вычислить инвариантный функционал радиуса (1) для произвольной точки (x, y) и симметричной ей точки (x', y') . Полученное равенство радиусов $R^k = R'^k$ для симметричных точек, в силу однозначности соответствия радиуса определенной лемнискате, будет свидетельствовать о наличии у лемнискаты данной группы симметрий. Так, kf -структура с переносной симметрией даст лемнискату с такой же переносной симметрией, а с масштабной симметрией – лемнискату с другим радиусом, соответствующим масштабному коэффициенту преобразований фокусов. Следствием α -поворотной симметрии kf -структуры будет лемниската с α -поворотной симметрией, - точки (x, y) и (x', y') , связанные соответствующим преобразованием, будут иметь одно и то же расстояние до фокусной структуры с точностью до порядка входящих в функционал k фокусных расстояний r_j .

Доказательство обратного утверждения об отсутствии у лемнискаты иных симметрий выполняется аналогично. Предположив наличие у лемнискаты какой-либо из указанных симметрий формы, выражаемой в равенстве соответствующих инвариантных

функционалов $R^k = R'^k$ для симметричных точек (x, y) и (x', y') , из уравнения $R^k = R'^k$ с необходимостью получаем соотношение для координат фокусов, соответствующее данной симметрии у фокусной структуры. Такое доказательство не составляет принципиальных трудностей для каждой конкретной группы симметрий, но представляет технические трудности для общего случая. В связи с этим, более целесообразным представляется другое доказательство.

Рассмотрим произвольную kf -лемнискату L_s , порождаемую структурой k фокусов. Любая фокусная структура является предельной формой софокусного семейства лемнискат при стремлении радиуса ρ к нулю. Значит, в связи с выше изложенным (часть I), для любого, сколь угодно малого ε лемниската L_ε в ε -окрестности фокусов данной kf -структуры имеет ту же φ -параметризацию, что и любая другая софокусная лемниската, в том числе и рассматриваемая лемниската L_s . Поворотная симметрия для произвольной пары симметричных точек (x, y) и (x', y') на L_s имеет соответствующую симметрию φ -параметризации на ней и на лемнискате L_ε в ε -окрестности ее kf -структуры. При устремлении ε к нулю получим k точек фокусной структуры.

Таким образом, *φ -параметризация устанавливает соответствие симметрий произвольной kf -лемнискаты и ее фокусной структуры.*

Симметрии полиполярной плоскости. Фокусную группу симметрий наследует и каждая лемниската в отдельности, и все семейство в целом. Симметрии kf -структуры порождают те же симметрии всей полиполярной системы координат, состоящей из семейства софокусных лемнискат и сопряженного семейства градиентных кривых.

Таким образом, *группу симметрий полиполярной плоскости определяет группа симметрий фокусной структуры – структурного начала системы координат.*

Полиполярная лемниската в kf -ЛСК, как указывалось выше, играет такую же роль, что и окружность в классической полярной СК. На полиполярной плоскости относительно *единичной kf -лемнискаты* реализуются классические симметричные конструкции: отражения, поворотные и др.

Для построения симметрий на полиполярной плоскости расчеты всех преобразований выполняются в полиполярных координатах (ρ, φ) , являющихся по определению функциями однополярных координат (ρ_j, φ_j) , $j = 1, \dots, k$. Рис. 3 иллюстрирует подобные симметричные построения для единичной полиполярной окружности, представленной $2f$ -структурной лемнискатой.

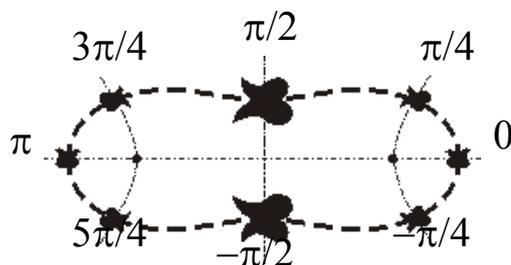


Рис. 3 Симметрии произвольного несимметричного мотива на $2f$ -лемнискате

Этот рисунок представляет, во-первых, иллюстрацию *симметрии отражения* от единичной полиполярной $2f$ -окружности - геометрические объекты произвольного не-

симметричного мотива внутри полиполярной окружности отражены во внешнюю область. Каждой точке мотива с координатами $\rho_0 = (\rho_{10}, \rho_{20})^{1/2}$ и $\varphi_0 = (\varphi_{10} + \varphi_{20})/2$, где $(\rho_{10}, \varphi_{10})$ и $(\rho_{20}, \varphi_{20})$ – обычные монополярные координаты этой точки относительно первого и второго фокусов, поставлена в соответствие точка с координатами $\rho'_0 = 1/\rho_0$ и $\varphi'_0 = \varphi_0$, т.е. каждая точка перемещена вдоль угловой изолинии $\varphi = \text{const} = \varphi_0$ на соответствующее расстояние ($\rho_0 \cdot \rho'_0 = 1$). Внешние образы отраженных мотивов оказались, как и в классической полярной СК, по размерам больше, но, в отличие от нее, в полиполярной СК они претерпели еще и разные искривления формы. Рис. 3 иллюстрирует также *поворотную симметрию* - вдоль единичной $2f$ -лемнискаты через равные полиполярные угловые интервалы расположены объекты данного мотива и отраженного, полученные в результате применения преобразования полиполярного поворота на $\Delta\varphi = \pi/4$. При этом произвольной точке мотива с координатами ρ_0 и φ_0 поставлена в соответствие точка с координатами $\rho'_0 = \rho_0$ и $\varphi'_0 = \varphi_0 + \Delta\varphi$, т.е. точка перемещалась вдоль метрической изолинии $\rho = \text{const} = \rho_0$ на $\Delta\varphi$ (монополярные интервалы $\Delta\varphi_1, \Delta\varphi_2$, естественно, не были равными).

В АСО-координатах построенные симметрии представляют собой композицию полиполярных симметрий и симметрий структурного начала координат ППЛ.

Криволинейные симметрии. Построение всех групп криволинейных симметрий возможно на многофокусных лемнискатах, произвольных по числу фокусов, форме и связности. На рис. 4а приведены иллюстрации симметричных построений с прежним мотивом, для односвязной (рис 4а внизу) и двусвязной (рис 4а вверху) лемнискаты-окружности. Поворотные преобразования для последней выполняются в порядке: от крайней правой точки ($\varphi = 0$) по верхней части правой петли, скачкообразный переход и полный обход левой петли, возврат на правую до исходной точки ($\varphi = 2\pi$).

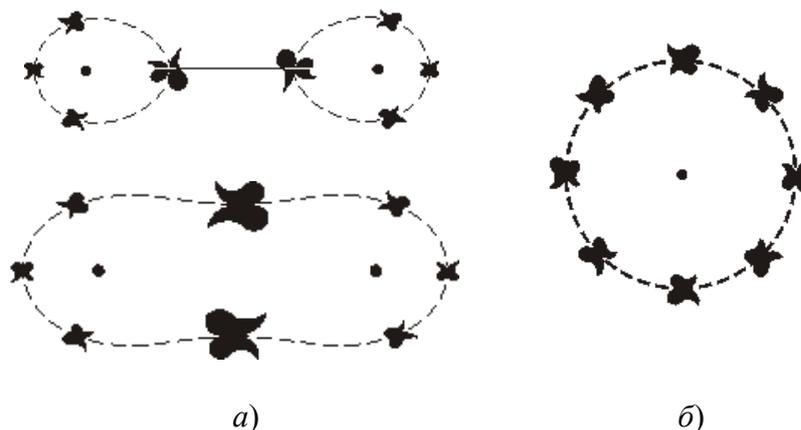


Рис. 4. Симметрии для $2f$ -структуры разной связности (а) и конфигурации (б)

Фокусное представление полиполярной окружности позволяет менять ее симметрии и формы мотива, управляя фокусами (рис. 4б)).

Сближая фокусы kf -структуры в одну точку, получим обычную окружность с визуально идентичной формой мотива.

Действительно, произвольная точка с координатами (ρ_1, φ_1) некоторого мотива име-

ет соответствующие данной группе симметрий точки (ρ_i, φ_i) , где $i = 2, \dots, m$, в других мотивах (m количество мотивов). В случае, например, поворотной симметрии, представленной на рис.3, данные точки имеют одно и то же значение метрической координаты $\rho_i = \rho_0$ и отличающиеся на $\Delta\varphi$ значения ориентационной координаты $\varphi_i = (i-1)\Delta\varphi$, $i = 1, \dots, m$. Осуществляя непрерывный предельный переход kf -структуры в точку, указанные соотношения между выделенными точками сохраняются. В пределе, как было показано выше, любая kf -лемниската трансформируется в окружность. Значит, данные точки окажутся на окружности, отличаясь по угловой координате на те же $\Delta\varphi$. Поскольку это относится к произвольной точке произвольного мотива, все мотивы окажутся одинаковыми, расположенными на окружности через равные угловые интервалы (рис 4б).

Таким образом, действительно, сближая фокусы kf -структуры в одну точку, несимметричная, с точки зрения АСО-восприятия, и симметричная, с точки зрения ППЛ-восприятия, непрерывно трансформируется в обычную АСО-окружность с визуально идентичной формой мотива.

На рис. 5 представлен другой вид симметрии на $3f$ -лемнискатах. Единичная “окружность-лемниската” с $3f$ -структурой в произвольно-несимметричном и симметрично-правильном вариантах. Здесь использован другой мотив и симметрии зеркального отражения заменены на симметрии локальной *инверсии*, а *повороты* выполнены на угол $\pi/6$.

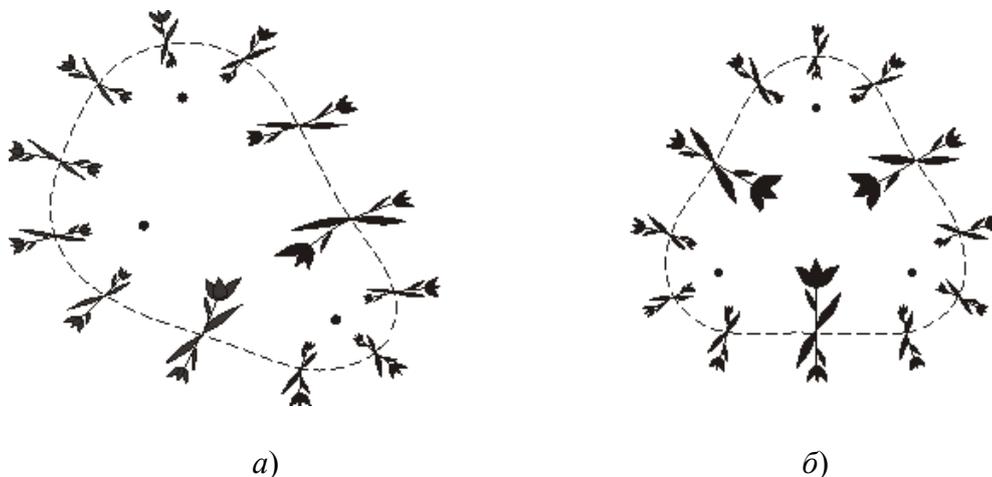


Рис. 5. Криволинейные симметрии инверсии и поворотов на угол $\pi/6$ на $3f$ -лемнискатах с асимметричной (а) и симметричной (б) структурой.

Симметрии наследуются и квазилемнискатами - фокусными кривыми с аддитивным, вместо мультипликативного (1), инвариантом [6]:

$$\sum_{j=1}^k r_j(x, y) = S ,$$

где $r_j(x, y)$ может быть разной функцией евклидова расстояния. Тожественный вариант задает семейство многофокусных «эллипсов», а логарифмическая функция – семейство многофокусных лемнискат (1). На рис. 6 представлены семейства квазилемнискат с

разным функционалом расстояния: а) «корни» $\varphi(r) = r^{1/3}$; б) лемнискаты $\varphi(r) = \ln(r)$; в) эллипсы $\varphi(r) = r$. Как можно видеть, Kf -лемнискаты удерживают фокусы, а kf -эллипсы и kf -«корни» теряют их, стягиваясь к центру kf -структуры - центру симметрии.

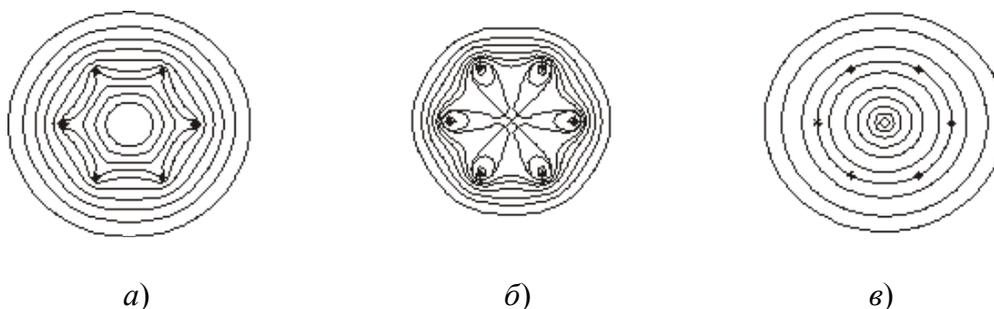


Рис. 6. Семейства изофокусных бf-квазилемнискат с правильной гексагональной системой фокусов

Комбинирование симметрий kf -лемнискат и форм-мотивов позволяет получить большое разнообразие орнаментов, как розеточного типа, так и паркетного, а интерактивное управление фокусами в компьютерном эксперименте дает возможность непрерывной трансформации орнамента.

Заключение. Полиполярная система координат представляется хорошо организованной криволинейной СК, характеризующей точку плоскости полиполярным радиусом ρ и полиполярным углом φ . Объектами ППЛ являются: структурное начало, состоящее из конечного множества фокусов и определяющее ее симметрии, а также взаимно ортогональные сопряженные координатные семейства лемнискат $\rho = \text{const}$ и градиентных кривых $\varphi = \text{const}$. При этом метрическая координата ρ рассматривается как расстояние до структурного начала, а ориентационная координата φ - как направление на структурное начало полиполярной системы координат.

Особенностью полиполярной системы координат является широкий диапазон применимости от универсальности до узкой специализации. Такая особенность является следствием возможностей рассматриваемого класса функций - многофокусных лемнискат, которые допускают множество самых разнообразных приложений. Одним из наиболее значительных приложений является аппроксимация эмпирических кривых [2, 5]. Манипулируя положением фокусов и их количеством, можно решать также задачу интерактивной генерации форм для дизайнерских, диагностических и других целей. С любым конкретным предметным образом можно связать его *собственную систему координат*. Метрическая компонента при этом может быть произвольной, достаточно сложной, настраиваемой вручную или автоматически, и при любой форме метрической компоненты угловая компонента получается ортогональной к метрической. В таком образом организованной собственной полиполярной системе координат реализуемы разного рода представления, преобразования и симметрии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Маркушевич, А.И. Теория аналитических функций, т.1 [Текст]. – М.: Наука, 1967. С. 486.
2. Ракчеева, Т.А. Приближение кривых: фокусы или гармоники [Текст]. //МКО. Сб. ст. Вып. 14, т.2. – М.-Ижевск, 2007. С.83-90.
3. Ракчеева, Т.А. Полиполярная лемнискатическая система координат [Текст]. // Компьютерные исследования и моделирование. 2009. Том 1, № 3. С. 251-261.
4. Ракчеева, Т.А. Симметрии формы многофокусных лемнискат [Текст]. //Симметрии: теоретический и методический аспекты. Сб. ст. III Международного симпозиума, 2009. С. 66-75.
5. Ракчеева, Т.А. Приближение кривых многофокусными лемнискатами на комплексной плоскости [Текст]. //МКО. Сб. ст. Вып.15, т.2. – М.-Ижевск, 2008. С.68-75.
6. Ракчеева, Т.А. Квазилемнискаты в задаче приближения [Текст]. // Третьи Курдюмовские чтения: Синергетика в естественных науках: Материалы международной междисциплинарной научной конференции. – Тверь, 2007. С. 113-117.
7. Hilbert, D. Gessamelte Abhandlungen [Text]. - Berlin: Springer, 1935. Bd. 3. P. 435.

SYMMETRIES OF POLYPOLAR COORDINATION

T. Rakcheeva

*Mechanical Engineering Research Institute, RAS (Moscow)
4, Bardina st., Moscow, 119991, Russia*

Abstract. The polypolar system of coordinates formed by a family of multifocal lemniscates is introduced, the full gang of which focuses forms its structural beginning. The arbitrary point of a plane has, as well as in a classical polar system of coordinates, polypolar coordinates: metric ρ , and angular φ , being functions of polar coordinates of rather each of focuses. The focal representation of the curve form by multifocal lemniscates allows to adjust a polypolar system of coordinates so that a metric component corresponded to the form of the given curve. Lemniscate and its focal structure have the same group of symmetries. The symmetries of polypolar coordination, and also curvilinear symmetries on multifocal lemniscates are considered.

Key words: curvilinear system of coordinates, symmetries, curves, focuses, lemniscates, degrees of freedom, approximation.

ФИЗИКА

УДК 621.215

**НЕКОТОРЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ ФИЗИЧЕСКОЙ И ХИМИЧЕСКОЙ
РЕГЕНЕРАЦИИ ОТХОДОВ ПРОИЗВОДСТВ,
ИСПОЛЬЗУЮЩИХ ВЫСОКОЧИСТЫЙ КРЕМНИЙ**

**Е.Е. Гринберг*, Ю.И. Левин*, В.Б. Жаданов*, Р.А. Санду*,
В.В. Беляев**, М.В. Рябцева*, А.В. Наумов*, И.Е. Стрельникова***

**ФГУП «ИРЕА»
107076, Москва, Богородский вал, 3*

***Московский государственный областной университет (МГОУ)
105005, Москва, ул. Радио, 10а*

Аннотация. Рассмотрены вопросы физической и химической регенерации отходов, образующихся при переработке (резке и шлифовке) поликристаллического или монокристаллического кремния с использованием карбида кремния, минерального масла и полиэтиленгликоля. Показана возможность выделения и возвращения в технологические циклы значительной части отходов, что позволяет снизить экологическую нагрузку при производстве электронных компонентов и фотоэлектрических преобразователей (ФЭП).

Ключевые слова: кремний, карбид кремния, отходы, регенерация.

Широкое развитие в последние десятилетия микроэлектронной технологии и «альтернативной» энергетики, одним из основных направлений избрано получение электроэнергии с использованием кремниевых преобразователей солнечной энергии вызвало резкий рост производства высокочистого кремния [1]. При этом требования к чистоте «солнечного» кремния приближаются к показателям «электронного». На рис.1 представлены данные по развитию данного направления и перспективам на ближайшее будущее. В [2,3] приведены данные по динамике другого важного сегмента микроэлектроники – активно матричные дисплеи, в которых также используется кремний высокой чистоты.

Несмотря на то, что чистота «солнечного» кремния и связанная с этим стоимость его производства пока ниже «электронного», объемы выпуска и переработки высококонцентрированных кремнийсодержащих отходов достаточно высокой степени чистоты, образующихся при производстве солнечных модулей и компонентов интегральных схем таковы, что закономерным становится вопрос об их утилизации.

Основными отходами производства указанных выше производств является металлический кремний, смешанный с порошком карбида кремния, используемого в качестве абразивного материала при резке моно- и поликристаллического кремния. До последнего времени используются два метода резки – кругами с рабочей кромкой из алмазного порошка и стальными струнами. Последний метод находит все более широкое применение, поскольку позволяет уменьшить толщину получаемых кремниевых пластин и тем самым повысить степень использования исходных кристаллов. Однако и в этом

случае количество кремния, попадающего в отходы в виде порошка, достигает 30-40% от исходного продукта.

Резку кристаллов кремния проводят в среде полиэтиленгликоля-200 (ПЭГ) или индустриального масла И1, в которые добавляются различные добавки с целью придания маслу определенных оптимальных вязкостных характеристик.

Таким образом, при резке образуются суспензии кремния, карбида кремния и сопутствующих примесей различного характера в масле или ПЭГ. Зарубежные фирмы [4] разрабатывают установки для разделения этих суспензий и возвращения в технологические циклы полезных компонентов. Так для выделения масла и ПЭГ используют методы декантации или центрифугирования. При этом удается достаточно эффективно выделить и твердую фазу, в основном, карбид кремния и вернуть его в процесс резки кристаллов. Однако даже в самом лучшем случае до 20% материалов смесей поступает в нереализуемые и не утилизируемые отходы.

□

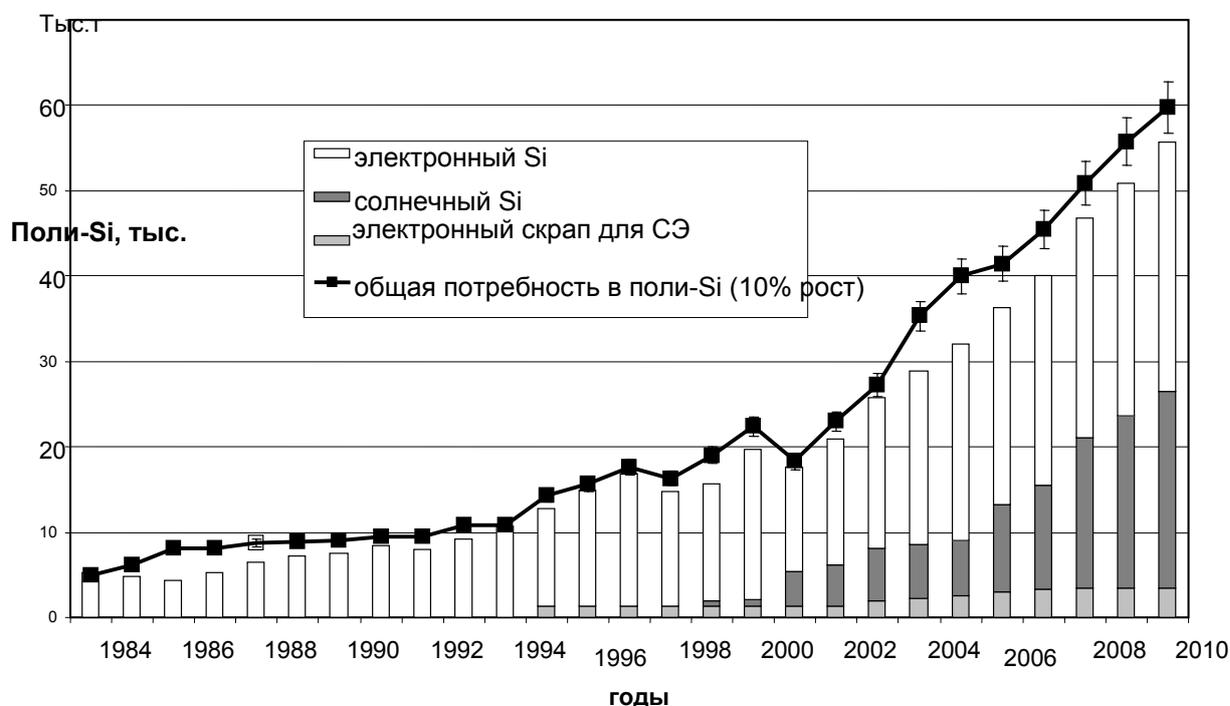


Рис. 1. Производство и потребление поли-Si (Источник - Wacker)

Нами предпринята попытка разработать методы утилизации этих смесей с целью повышения эффективности выделения полезных компонентов смесей и перевода ранее не утилизированных веществ в реализуемые формы. Ряд методов регенерации отходов производства кремниевых и интерметаллидных $A^{III}B^V$ компонентов электронной и промышленной промышленности, описан в [5,6].

Были проведены эксперименты с суспензиями на основе индустриального масла и ПЭГ, получаемыми на промышленных установках резки кристаллов кремния.

На первой стадии суспензии разделяли отстаиванием и отделением жидкости на центрифугах. Жидкая фаза была исследована на предмет пригодности для дальнейшего использования в технологических процессах резки кристаллов кремния. Исследования

жидкостей показали, что они могут быть успешно использованы для повторного использования либо в индивидуальном виде, либо при добавлении в свежеприготовленные смеси.

Полученные при выделении из использованных смесей твердые продукты отмывали углеводородными растворителями от масла или ПЭГ.

Контроль полноты отмывки порошков от масла и ПЭГ проводили методом ИК-спектроскопии по методике, описанной в работе [7]. Содержание масла и ПЭГ в отмытых порошках составляло менее 0,1% масс.

Предварительные опыты со смесями ПХЭ и ТХЭ показали, что они также могут быть применены для отмывки порошков. Однако при этом появляются трудности при дистилляционной регенерации растворителей ввиду достаточно существенной разницы в температурах их кипения. Объем фракции растворителей может зависеть от их соотношения. При этом возможно образование азеотропных систем, которые могут затруднять осуществление процесса разгонки смесей и отмывки смесей от масла различными растворителями.

На рис. 2 представлены результаты отмывки твердых компонентов смесей различными растворителями.

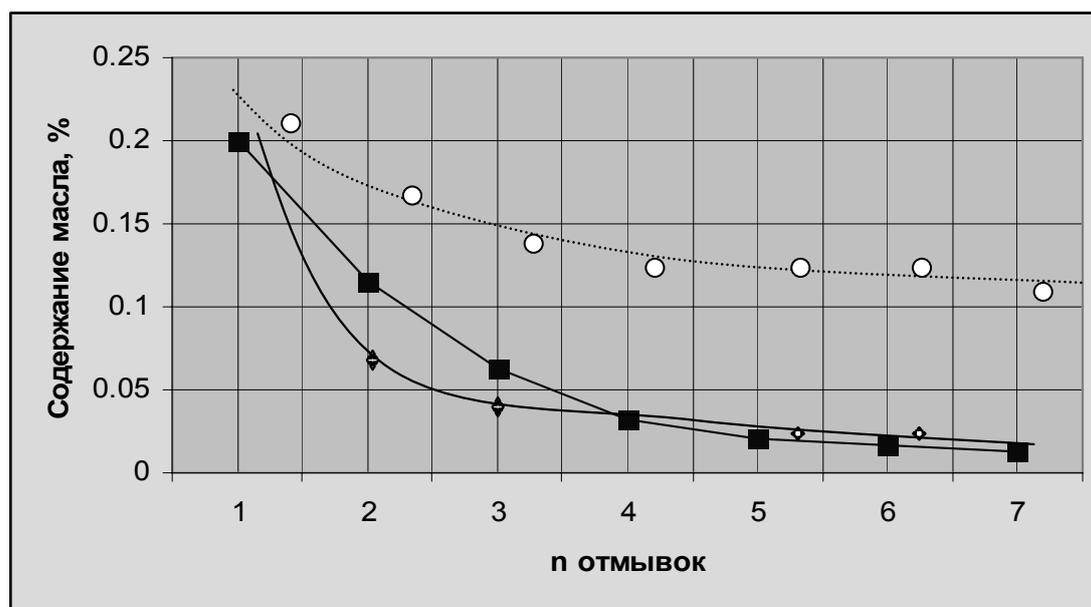


Рис.2. Результаты отмывки смесей от масла различными растворителями:
1 - ○ ЧХУ; 2 - ◆ ТХЭ; 3 - ■ ПХЭ.

Как видно из рис. 2, трехкратная промывка позволяет получать порошки с содержанием примесей масла на уровне не выше 0,1% масс. Этого вполне достаточно для дальнейшего использования порошков в процессах химической переработки.

По окончании эксперимента определяли распределение примесей металлов и масла (или ПЭГ) между твердой и жидкой фазами, которое количественно выражали через эффективный коэффициент распределения примеси K_d , мл/г и удельную сорбционную емкость твердой фазы – Γ , мл/г. Подобный подход был с успехом применен в работе [8]. Эти параметры представлены в табл. 1.

Таблица 1

Значения эффективных коэффициентов распределения и сорбционной емкости смесей

Примесь	Fe	Cr	Ca	Al	Ni	Масло
Г, ммоль/г	14	25	12	9	13	35
K _d , мл/г	80-300	23- 50	42-60	35-40	120-230	18-40

Порошкообразную смесь карбида кремния с кремнием подвергали флотационному разделению в колоннах при ультразвуковом перемешивании для разрушения крупных агломератов, состоявших из смеси присутствовавших твердых фаз, в частности, кремния, карбида кремния и оксидных кремниевых соединений. В качестве разделительных агентов были использованы смеси жидкостей, имеющих плотности, лежащие между плотностями карбида кремния и смесью кремния и его диоксида. Полученные смеси флотационных агентов с маслом и ПЭГ разделяли ректификацией на тарельчатых колоннах с щелевыми тарелками.

Масло и ПЭГ, которые концентрировались в кубе колонны, после дополнительного центрифугирования присоединяли к выделенным на предыдущем этапе жидкофазным продуктам, а флотационные смеси использовали в рецикле. Это позволило достигнуть выхода по ПЭГ и маслу более 92% масс. Потери флотационных агентов составляли 2-3% за 1 операцию разделения. При использовании эффективных систем улавливания паров сорбционными методами эти потери могут быть еще более сокращены.

На рис. 3 приведены фотографии порошков исходной смеси и разделенных в результате обработки суспензии на основе ПЭГ. По данным анализа в регенерированном порошке карбида кремния содержание основного вещества составляет 94-96% масс. Основной примесью в карбиде кремния является порошок оксида кремния. Его содержание составляет 3 - 5% масс.

Кроме диоксида кремния, в порошках обнаружены примеси железа, хрома, алюминия и некоторых других металлов (табл. 2).

Таблица 2

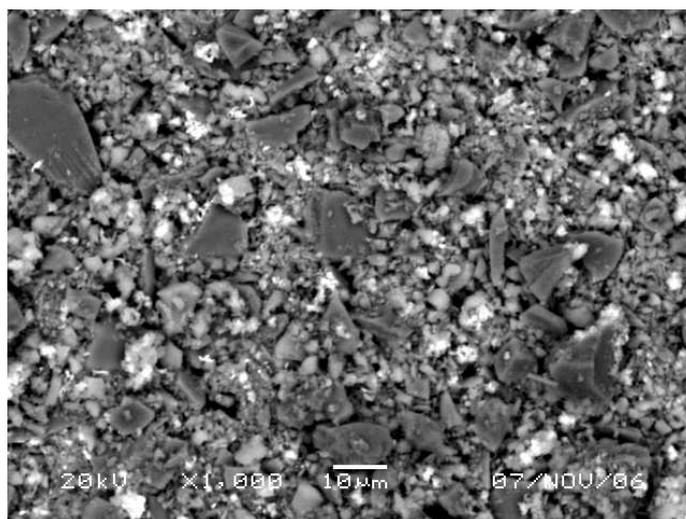
Содержание примесей металлов в смесях (%масс x 10³)

Элемент	Fe	Cr	Al	Ni	Na	Ca	Mg
Содержание	5-8	0,2-0,4	2-4	0,1-0,3	0,3-0,7	0,1-0,4	0,05-0,1

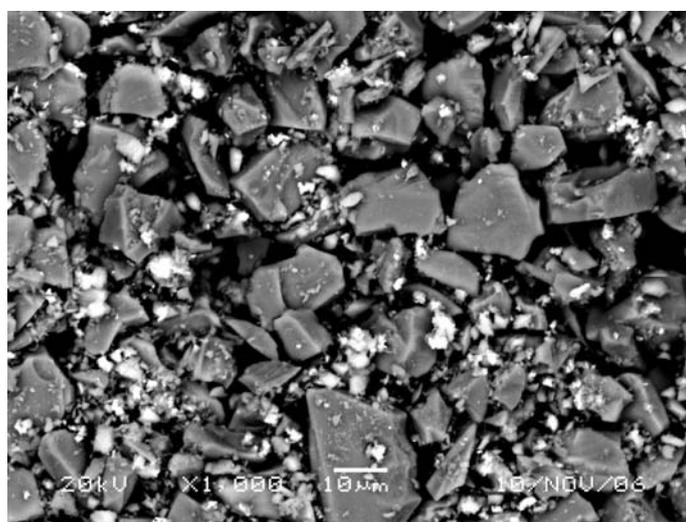
Появление большого количества оксида кремния связано с высокой температуры в точках контакта режущей кромки инструмента с кристаллом. По различным расчетам она достигает в этих точках от 950 до 1100°С. В условиях наличия в системах кислорода, влаги и других кислородсодержащих соединений, а также тонкодисперсного высокоактивного порошка кремния образование диоксида кремния представляется весьма вероятным. В особенности это относится к обработке кремния в среде кислородсодержащего ПЭГ, когда становится возможным взаимодействие с образованием высокомолекулярных кремнийорганических эфиров.

Примеси металлов появляются в продукте из режущего инструмента – дисков, на которые нанесены алмазные кромки, или струн. В условиях наличия высоко абразивной среды естественно истирание металлического инструмента, что приводит к появлению примесей металлов в порошках.

Для удаления металлических примесей были проведены отмывки порошков слабыми растворами кислот. Хотя наблюдалось снижение концентрации примесей металлов в смеси, в целом это не привело к ожидаемым результатам, поскольку высокодисперсный кремний вступал в интенсивную реакцию не только с кислотами, но и с водой. При этом выделялось значительное количество водорода и происходило накопление поликремневых кислот в реакционной массе. Поэтому химическая отмывка порошка от металлов водой и водными растворами как стадия технологического процесса в дальнейшем не рассматривалась.



а



б

Рис. 3 Микрофотографии порошков смесей карбида кремния с кремнием и диоксидом кремния. (а – до флотационного разделения; б – после разделения)

Были проведены эксперименты по хлорированию смесей порошков, полученных после отделения масла и ПЭГ, элементарным хлором при различных температурах. Расчет оптимальных температур для проведения процесса был проведен на основе результатов работы [9]. Результаты опытов представлены в табл. 3.

Таблица 3

Зависимость выхода SiCl_4 и содержания в нем углеводородов от температуры хлорирования

$t, ^\circ\text{C}$	250	300	450	500	600	750
Выход $\text{SiCl}_4, \%$	65	70	85	95	96	96
Содержание углеводородов в $\text{SiCl}_4 \%$	0,16	0,2	0,25	0,35	0,7	0,7

Как видно из табл.3, в результате хлорирования при низких температурах из кремния и карбида кремния образуются четыреххлористый кремний (ЧХК) и летучие хлорированные углеводороды, которые уносятся из зоны реакции и конденсируются в холодильнике.

При этом в твердой фазе остается диоксид кремния в смеси с углеродом, который образуется при хлорировании карбида кремния. Данная смесь хлорируется при более высоких температурах также с образованием ЧХК и оксида углерода с практически количественным выходом.

На стадии хлорирования образующиеся летучие хлориды металлов переходят в паровую фазу и отделяются фракционной конденсацией до выделения ЧХК, а труднолетучие остаются в реакторе. Однако, как видно из табл. 3, в синтезированном ЧХК содержится значительное количество углеродсодержащих примесей, очистка от которых представляет значительные трудности, поскольку коэффициенты разделения в системе «жидкость- пар» для смесей на основе ЧХК с углеродсодержащими примесями достаточно близки к 1, что требует использования высокоэффективных колонных аппаратов. Однако для использования этого продукта в элементоорганическом синтезе кремнийсодержащих соединений данный недостаток не имеет принципиального значения.

Полученный ЧХК-сырец был очищен термообработкой и ректификацией на кварцевой колонне высотой 2,5м, диаметром 40мм, заполненной одновитковыми кварцевыми спиралями Фенске.

Качество полученного продукта представлено в табл.4. Оно соответствует квалификации «осч».

Таблица 4

Содержание примесей в исходном и очищенном ЧХК (%масс $\times 10^8$)

Al	B	Ca	Co	Cr	Cu	Fe	Mg	Mn	Ni	Sn	Ti	V	Bi	Cd	Na	Pb
2	01	10	5	2	1	10	8	1	2	3	1	2	3	2	2	10

Очищенный ЧХК был использован для нанесения тонких слоев диоксида кремния на кварц из паровой фазы при получении высококачественных оптических изделий [10]. Он был также использован в синтезах для получения высокочистых эфиров ортокремневой кислоты – тетраметокси- и тетраэтоксисилана квалификации «осч 11-5», применявшихся для получения оксидных покрытий, а также для синтеза наноструктурированных порошков галлосиликата лития методом «золь-гель»-технологии.

Предлагаемая нами схема переработки кремнийсодержащих отходов включает следующие стадии:

- отделение масла или ПЭГ от твердой фазы декантацией и центрифугированием;
- промывка осадка растворителем от остатков масла или ПЭГ;
- выделение карбида кремния из смеси твердых продуктов флотацией;
- двухстадийное хлорирование смеси кремния и диоксида кремния элементарным хлором;
- регенерация жидких продуктов разделения.

Стадия хлорирования может быть ограничена только переработкой металлического кремния (одностадийный процесс). Образующийся остаток порошка оксида кремния с примесями углерода может быть использован как наполнитель в производстве резиновых изделий или строительстве.

Вариантом предлагаемой схемы может быть непосредственное хлорирование всей твердой кремнийсодержащей фазы после выделения масла и ПЭГ. Однако при этом безвозвратно теряется дорогостоящий компонент – карбид кремния.

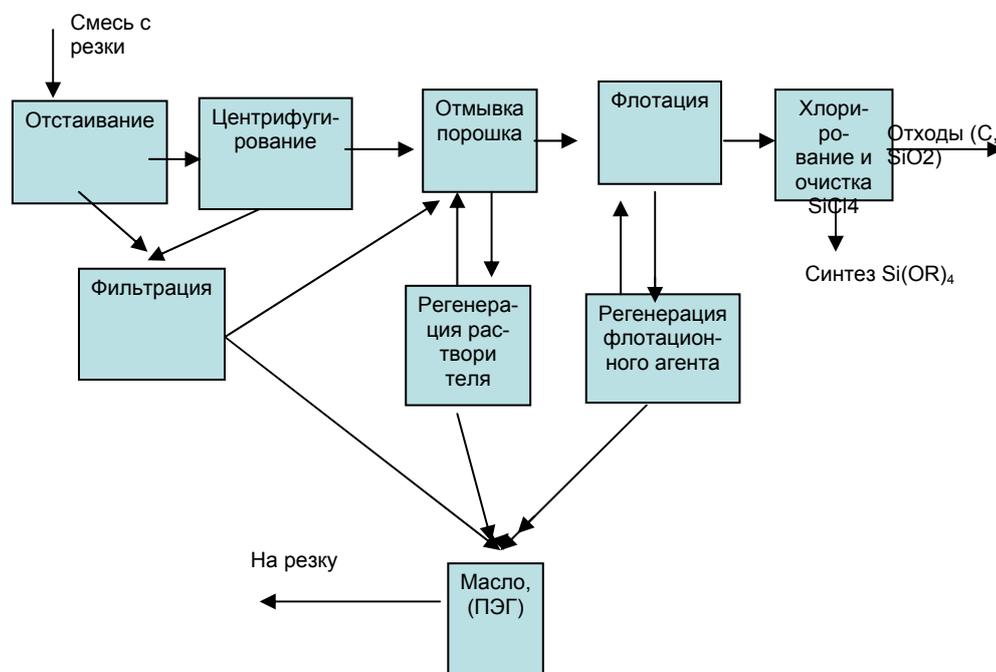


Рис. 4. Схема переработки кремнийсодержащих отходов

На рис. 4 представлена схема утилизации кремнийсодержащих продуктов переработки высокочистого кремния. Её осуществление позволяет уменьшить количество отходов, не возвращаемых в производственные циклы «высоких» технологий, до 3-5%, и при этом они могут быть использованы в других отраслях производства.

Работа выполнена при поддержке государственного контракта 02.740.11.0435.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гринберг, Е.Е., Наумов А.В., Супоненко А.Н. [Текст] // Вестник МАСИ, М., 2006, Т.9, ч.1, с. 50-54.

2. *Беляев, В.В.* Новые дисплейные технологии и их применения [Текст]. // Электронные компоненты, №3, с.26-27 (2003).
3. *Беляев, В.В., Коваленко В.И.* Рынок жидкокристаллических дисплеев [Текст]. // Электронные компоненты, №3, с.59-63 (2003).
4. SiC-proceeding, Hirschau, Germany, инф. материал, 2005.
5. *Наумов, А.В., Гринберг Е.Е., Быков И.С., Беляев В.В.* [Текст]. // Вестник МГОУ, Физика, 2010, В.1, с.57-63.
6. *Баранов, К.В., Жаданов В.Б., Сырычко В.В. и др.* [Текст] // Химическая промышленность сегодня, М., №5, 2007, С.17-21.
7. *Жаданов, В.Б., Жаданов Б.В., Гринберг Е.Е.* [Текст] // Успехи в химии и химической технологии, М., Т.XIX, 2005, №3(51), с.33-37.
8. *Воловодов, А.И.* Разработка технологии очистки от тяжелых металлов загрязненных территорий и ливневых стоков промышленных предприятий. [Текст] Автореф. дисс. канд. техн. наук. М.: - 2006.
9. *Lewis, T.J.* [Text] // Mat.Res.Bull., Vol.4, pp. S 321 – S 330, 1969, Pergamon Press, Inc., USA.
10. *Сенник, Б.Н., Гринберг Е.Е., Жаданов В.Б. и др.* [Текст] // Успехи в химии и химической технологии, М., Т.XX, 2006, №3(61), с.94 -98.

SOME POSSIBILITIES OF PHYSICAL AND CHEMICAL REGENERATION OF WASTES OF SILICON USING PRODUCTION

**E. Grinberg*, Yu. Levin*, V. Jadanov*, R. Sandu*,
V. Belyaev**, M. Ryabtseva*, A. Naumov*, I. Strel'nikova***

**Federal State Unitary Enterprise "IREA"
3, Bogorodsky val, Moscow, 107076, Russia*

***Moscow region state university
10a, Radio st., Moscow, 105005, Russia*

Abstract. Some problems of both physical and chemical regeneration of high purity silicon using manufactories are observed. Possibilities of wastes separation of silicon and silicon carbide, mineral oil and polyethylenglycole (PEG) are discussed. This allows decreasing ecological problems of solar batteries and electronic components production.

Key words: silicon, silicon carbide, waste, regeneration.

УДК 534.2:535.36

МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЯ АНИЗОТРОПИИ СКОРОСТИ УЛЬТРАЗВУКА В НЕМАТИКАХ ПРИ ВЫСОКИХ ДАВЛЕНИЯХ

Е.М. Банникова, Д.Л. Богданов, Э.В. Геворкян, Ю.Н. Обыденков

Московский государственный областной университет (МГОУ)
105005, Москва, ул. Радио, 10а

Аннотация. Представлена методика исследования анизотропии скорости ультразвука в нематике Н-37 в температурном интервале от 25 до 70 °С при различных давлениях. Во всех исследованных температурных интервалах существования нематической мезофазы, скорость ультразвука больше в случае параллельной ориентации вектора магнитной индукции и волнового вектора по сравнению с перпендикулярной ориентацией. Вдали ($\Delta T \geq 10\text{K}$) от фазового перехода относительная анизотропия скорости ультразвука практически не зависит от температуры и имеет малое значение. Максимальное влияние магнитного поля на скорость ультразвука имеет место за $\Delta T = 5\text{ K}$ от температуры просветления.

Ключевые слова: методика, анизотропия скорости ультразвука, нематическая фаза ЖК, магнитное поле, температура, давление.

Являющийся одним из наиболее точных импульсно-фазовый метод переменного расстояния, который используется для измерения акустических параметров жидких кристаллов, не позволяет выявить влияние магнитного поля на скорость распространения ультразвука. В НЖК анизотропия скорости ультразвука находится в пределах погрешности, присущей данному методу. В этой связи, для определения анизотропии акустических свойств жидких кристаллов на частоте 2 МГц, был выбран импульсно-фазовый метод переменной частоты, основанный на интерференции прошедшего через исследуемую среду импульсного высокочастотного сигнала с когерентными непрерывными колебаниями при постоянной акустической базе. Для изучения НЖК его впервые применили Муллен и др. [1].

Физическую основу метода составляют магнитоакустические явления в нематических жидких кристаллах при изменяющихся термодинамических параметрах в статическом магнитном поле. В отличие от метода переменного расстояния, измерения данным методом не сопровождаются изменением доменной структуры исследуемого вещества.

Напряжение U_1 на приёмном пьезоэлементе можно записать в следующем виде (предполагаем, что при $\tau/T \cong 30$ справедливы соотношения для непрерывных сигналов):

$$U_1 = U_0 \sin 2\pi f(t - l/c), \quad (1)$$

где τ и T – длительность и период заполнения импульса, соответственно, l – длина акустического пути, c – скорость распространения ультразвука.

В результате его взаимодействия с когерентными непрерывными колебаниями той же амплитуды $U_2 = U_0 \sin 2\pi f t$ получаем сумму колебаний:

$$U = U_1 + U_2 = 2U_0 \sin \pi f(2t - l/c) \cos \frac{\pi f l}{c}. \quad (2)$$

При определённых частотах:

$$2f_n l / c = (2n + 1) \quad (3)$$

выражение (2) обращается в ноль, где $n = 1, 2, 3 \dots$

Итак, измеряя две близкие между собой частоты, соответствующие нулевому значению интерферирующих сигналов, можно найти величину скорости ультразвука:

$$c = l(f_{n+1} - f_n). \quad (4)$$

Однако, для точных измерений данный способ непригоден, т.к. в пьезопреобразователях возникает зависящий от частоты сдвиг фаз, который практически трудно оценить [2].

При постоянной температуре, для двух предельных ориентаций магнитного поля относительно волнового вектора ($\vec{B} \parallel \vec{k}$), ($\vec{B} \perp \vec{k}$) и одного и того же n , имеем:

$$\frac{f_{\parallel} l}{c_{\parallel}} = \frac{f_{\perp} l}{c_{\perp}}. \quad (5)$$

Изменение направления магнитного поля не влияет на величину акустического пути, поэтому относительное изменение скорости ультразвука равно:

$$\frac{\Delta f}{f_{\perp}} = \frac{\Delta c}{c_{\perp}}, \quad (6)$$

где $\Delta f = f_{\parallel} - f_{\perp}$; $\Delta c = c_{\parallel} - c_{\perp}$.

Из условия равенства амплитуд принятого акустического импульса и непрерывных колебаний, можно оценить разность коэффициентов поглощения ультразвука в магнитных полях нормальной и перпендикулярной ориентаций:

$$\Delta \alpha = \alpha_{\parallel} - \alpha_{\perp} = \frac{\Delta A}{8,68 \cdot l} \frac{\text{непер}}{\text{см}}, \quad (7)$$

где ΔA - изменение амплитуды непрерывного сигнала в дБ.

Экспериментальная установка

Для решения задачи, создана экспериментальная установка, блок-схема которой представлена на рис. 1.

Высокочастотный сигнал с генератора (Ч6-31) прямоугольных импульсов поступает в модулятор, где высокочастотный сигнал преобразуется в зондирующие прямоугольные радиоимпульсы, которые после усиления поступают на излучающий пьезопреобразователь. Пьезопреобразователь, выполненный из цирконата титана свинца (ЦТС-19), преобразует высокочастотные сигналы в акустические импульсы с продольной модой колебания ультразвуковых волн. После прохождения в измерительной ячейке через исследуемую среду (ЖК), ультразвуковые импульсы с высокочастотным заполнением достигают приёмного пьезоэлемента, где преобразуются в высокочастотный сигнал.

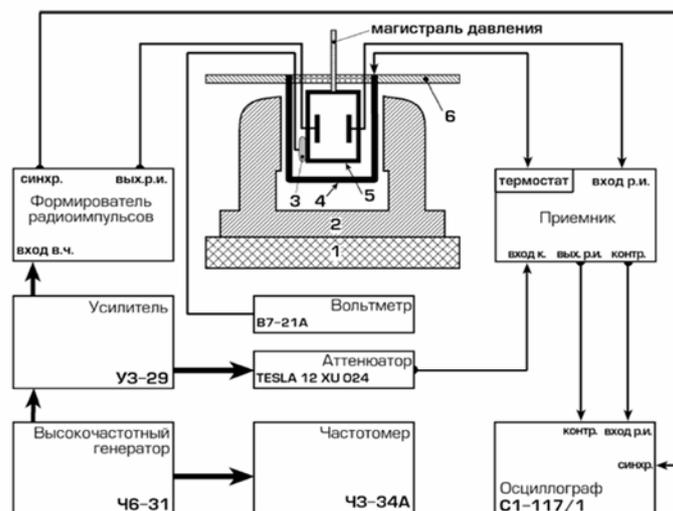


Рис. 1. Блок-схема экспериментальной установки

Через приёмник (УЗ-29) радиоимпульсы поступают на вход двухканального осциллографа (С1-117/1). Синхронизация развёртки осциллографа и управление модулятором, осуществляется от генератора прямоугольных импульсов. Опорное ВЧ напряжение через аттенуатор подаётся на другой вход осциллографа. Сигнал с приёмного пьезоэлемента векторно складывается с прошедшими через аттенуатор непрерывными колебаниями. Амплитуда и частота непрерывного сигнала регулируются до полного гашения принятого акустического импульса. Контроль результирующего сигнала осуществляется на экране осциллографа (С1-17). Контроль частоты производится цифровым частотомером (ЧЗ-34А).

Постоянный магнит 2 индукцией 0,17 Гс, что превышает индукцию насыщения исследуемых веществ, устанавливался на вращающейся платформе 1 установки для проверки и испытания гироскопических приборов УПГ-56, имеющей лимб для отсчёта угла. В зазоре магнита неподвижно укреплялся термостатирующий стакан 4 на жёстко закреплённом относительно платформы столе 6. Внутри стакана располагалась камера высокого давления 5.

Температура вещества в измерительной ячейке, контролируется отградуированным термосопротивлением 3 и поддерживается системой термостатирования. Предварительное термостатирование проводилось в течении 3-5 часов.

Акустическая камера для исследования ЖК при высоких давлениях

Схематически автоклав представлен на рис. 2. Его основу составляет непосредственно камера высокого давления 4 и расположенная внутри измерительная ячейка 3. Корпус камеры выполнен из немагнитной нержавеющей стали марки 10Х17Н13М2Т, содержит полость, для размещения измерительной ячейки, которая резьбовым соединением связана с головкой камеры 9. Через головку камеры осуществляется заправка ячейки посредством заправочного канала 7, который впоследствии заглушается запорной иглой 8. Ввод и вывод зондирующих высокочастотных импульсов реализован через вводы 10. Головка камеры высокого давления герметизируется фторопластовым кольцом 6. Через магистраль 2 в камеру поступает силиконовое масло, которое служит рабочим телом для станции высокого давления. Оригинальная конструкция измерительной ячейки представлена на рис. 3. Ячейка выполнена из немагнитной нержавеющей

шей стали марки 10X17H13M2T, не реагирующей с исследуемым веществом. Состоит из корпуса 3, подвижного поршня 1 с уплотнительным силиконовым кольцом 2, пары оправок 5.

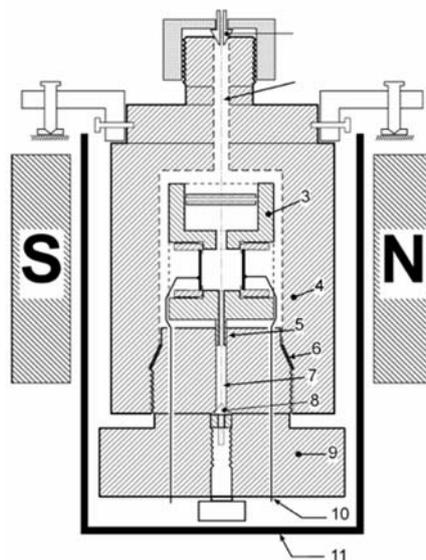


Рис. 2. Схема автоклава

Внутренняя поверхность цилиндра 4 в котором перемещается поршень обработана с высокой степенью точности, шероховатость поверхности составляет порядка 0,3 мкм. Пьезопреобразователи 6 закрепляются и герметизируются в оправках с помощью эпоксидной смолы. Оправки ввинчиваются в корпус ячейки и резьбовое соединение дополнительно герметизируется высокотемпературным силиконовым герметиком.

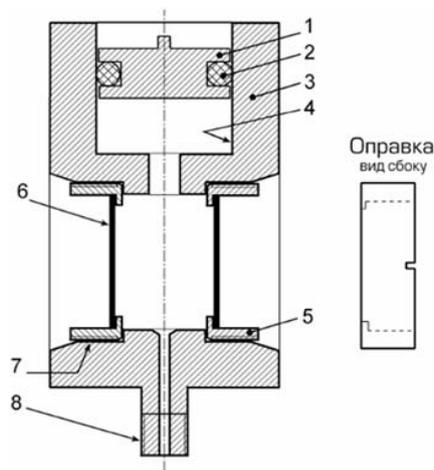


Рис. 3. Измерительная ячейка

С помощью соединения 8, ячейка жёстко закрепляется на головке камеры (рис.2), резьбовое соединение дополнительно герметизируется силиконовым герметиком.

Применение подвижного поршня позволило значительно сократить заправочный объем ячейки, в данном случае он составляет 1,2 см³, что позволяет более экономно расходовать рабочий материал. Поршневая система передачи давления в измерительную ячейку обеспечивает надёжное разделение жидкостей. Подпоршневой объём явля-

ется также буфером, предотвращая загрязнение зондируемой области исследуемого вещества. Этому способствует и методика проведения эксперимента. Отсутствие градиента давления внутри измерительной ячейки относительно окружающего объема обеспечивается тщательной дегазацией исследуемого НЖК. Размещение пьезопреобразователей внутри измерительной ячейки в непосредственном контакте с исследуемым веществом, позволило отказаться от линий задержек, что исключило погрешность, обусловленную их влиянием.

Применение оправок позволяет, достаточно оперативно менять наборы пьезопреобразователей и тем самым работать с широким диапазоном частот не прибегая к дополнительным конструктивным изменениям. Во всех сериях эксперимента осуществлялась промывка измерительной ячейки бензолом. Перед заправкой образец ЖК дегазировался в течение 2 – 3 часов в вакууме (10^{-6} атм.).

При исследовании анизотропии акустических параметров НЖК магнитное поле \vec{B} первоначально устанавливается в положение нормальной ориентации относительно волнового вектора \vec{k} , по показаниям частотомера $f_{0\perp}$ и аттенюатора $A_{0\perp}$ отмечаются значения частоты и величины затухания непрерывных колебаний, которые соответствуют минимуму результирующих сигналов в магнитных полях параллельной ($\vec{B} \parallel \vec{k}$) и перпендикулярной ($\vec{B} \perp \vec{k}$) ориентаций. Расчёт анизотропии скорости и коэффициента поглощения производился по формулам:

$$\frac{\Delta c}{c_{\perp}} = \frac{c_{\parallel} - c_{\perp}}{c_{\perp}}, \quad (8)$$

$$\frac{\Delta \alpha}{f^2} = \frac{\alpha_{\parallel} - \alpha_{\perp}}{f^2}. \quad (9)$$

Относительные изменения скорости ультразвука в НЖК

Результаты измерения относительных изменений скорости ультразвука (8) в Н-37 при атмосферном давлении на частоте 2 МГц представлены на рис.4. Влияние магнитного поля параллельной ($\vec{B} \parallel \vec{k}$) и перпендикулярной ($\vec{B} \perp \vec{k}$) ориентаций на скорость ультразвука наблюдается только в нематической фазе исследованного Н-37. В изотропной фазе переориентация магнитного поля не изменяет величины скорости ультразвука. Во всех исследованных температурных интервалах существования нематической мезофазы, скорость ультразвука больше в случае параллельной ориентации вектора магнитной индукции и волнового вектора по сравнению с перпендикулярной ориентацией. Вдали ($\Delta T \geq 10\text{K}$) от фазового перехода относительная анизотропия скорости ультразвука практически не зависит от температуры и имеет малое значение, равное $1,6 \cdot 10^{-4}$. За $\Delta T \leq 10\text{K}$ от температуры просветления наблюдается рост с последующим резким спадом до нуля в фазовом переходе. Максимальное влияние магнитного поля на скорость ультразвука имеет место за $\Delta T = 5\text{ K}$ от температуры просветления. Разность между максимальным значением $\Delta c/c_{\perp}$ и её значением вдали от фазового перехода составляет $11,5 \cdot 10^{-4}$. Температурная зависимость относительных изменений скорости ультразвука в Н-37, являющемся смесью МББА и ЭББА качественно имеет тот же вид, что и для исходных веществ. Повышение давления приводит к смещению зависимостей $\Delta c/c_{\perp}$ в сторону более высоких температур. Экспериментальные изобары $\Delta c/c_{\perp}$ в исследованном диапазоне давлений представлены на рис.5. Температура, при которой

$\Delta c/c_{\perp}=0$ соответствует фазовому переходу $T_c = T_c(P_0)+kP$. Зависимость температуры перехода от давления представлена на рис.6.

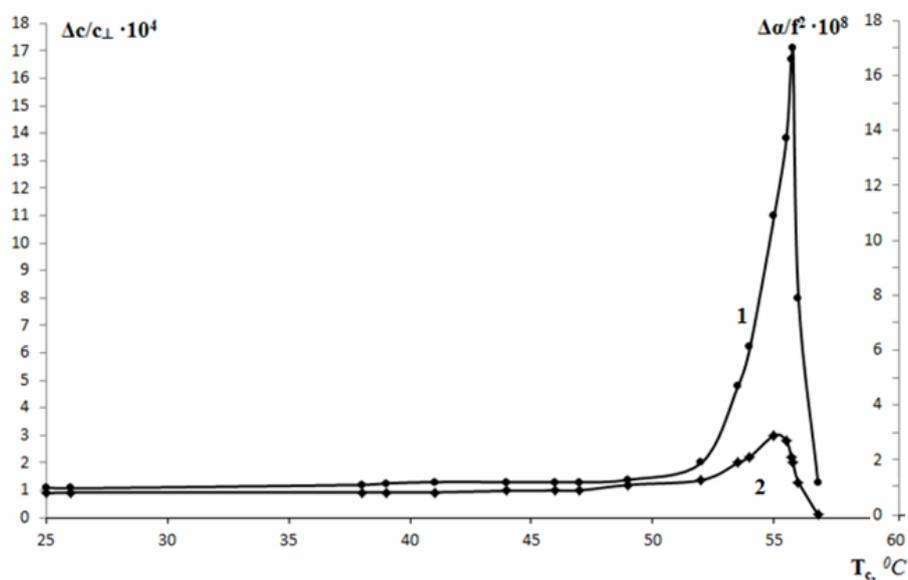


Рис. 4. Анизотропия скорости и поглощения в Н-37 при атмосферном давлении. 1-скорость, 2-поглощение.

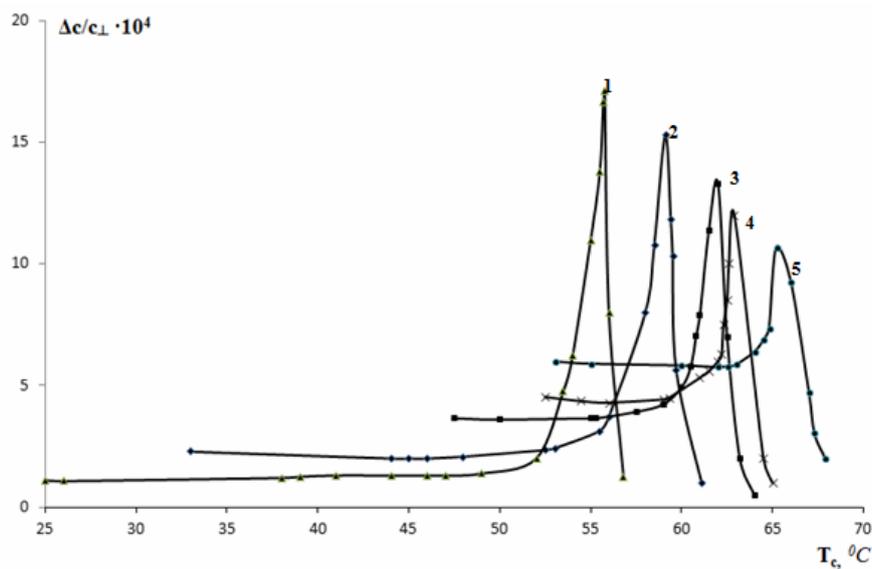


Рис. 5. Изобары анизотропии скорости при различных давлениях. 1- 1 атм. 2-150 атм. 3-250 атм. 4-300 атм. 5-400 атм.

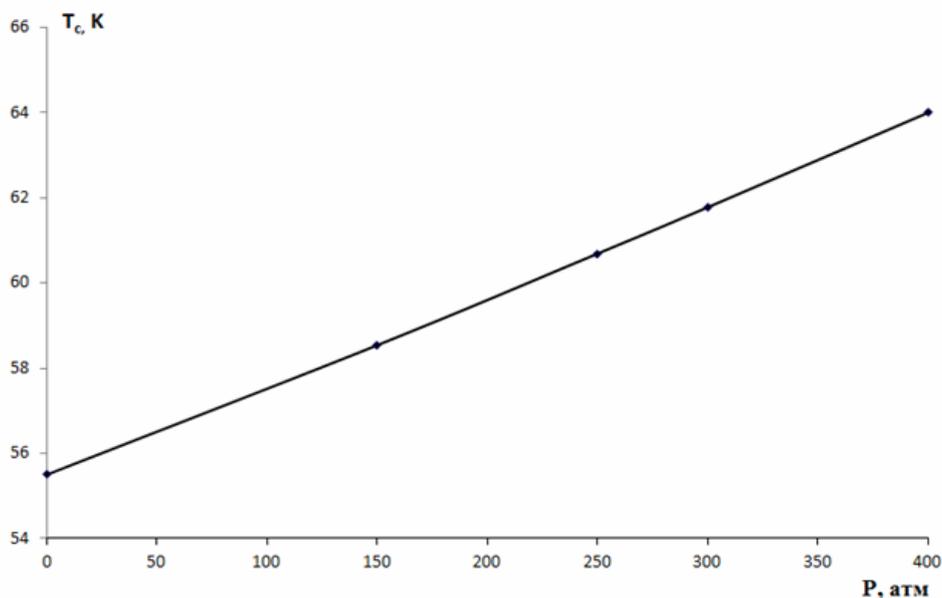


Рис. 6. Зависимость температуры перехода от давления

ЛИТЕРАТУРА

1. Mullen, M.E., Luthi B., Stephen M.J. Phys.Rev.Lett [Text]. 1972, v.28, p.799.
2. Мезон, У. Физическая Акустика [Текст]. М.: Мир. 1973.

TECHNIQUE OF RESEARCH OF ANISOTROPY OF SPEED OF ULTRASOUND IN NEMATIC AT HIGH PRESSURES

E. Bannikova, D. Bogdanov, E. Gevorkyn, Yu. Obydenkov

*Moscow region state university
10a, Radio st., Moscow, 105005, Russia*

Abstract. The technique of research of anisotropy of speed of ultrasound in nematic H-37 in a temperature interval from 25 to 70 °C is presented at various pressure. In all investigated temperature intervals of existence of a nematic mesophase, speed of ultrasound is more in case of parallel orientation of a vector of a magnetic induction and a wave vector in comparison with perpendicular orientation. In the distance ($\Delta T \geq 10K$) from phase transition relative anisotropy of speed of ultrasound practically doesn't depend on temperature and has small value. The maximum influence of a magnetic field on speed of ultrasound takes place for $\Delta T = 5$ to from enlightenment temperature.

Key words: Technique, anisotropy анизотропия of speed of ultrasound, nematic нематическая а phase LC ЖК, magnetic field, temperature, pressure.

УДК 537.9, 53.096, 53.081.7, 53.043, 539.232

ИДЕНТИФИКАЦИЯ СВОЙСТВА СВЕРХПРОВОДИМОСТИ И ПРОГНОЗИРОВАНИЕ НОВЫХ СОСТАВОВ ПЯТИКОМПОНЕНТНЫХ ОКСИАРСЕНИДОВ С ПОВЫШЕННОЙ ТЕМПЕРАТУРОЙ ПЕРЕХОДА В СВЕРХПРОВОДЯЩЕЕ СОСТОЯНИЕ

А.Н. Гусев

*Московский государственный областной университет (МГОУ)
105005, Москва, ул. Радио, 10а*

Аннотация. В статье приведены данные по веществам с рекордно высокими температурами перехода в сверхпроводящее состояние, краткий обзор применений сверхпроводящих веществ в области силовой электроники и микроэлектроники. На основе идентификации сверхпроводящих свойств нового класса железосодержащих сверхпроводящих веществ и выполнено прогнозирование составов этих веществ с температурами сверхпроводящего перехода от 55 до 62,5 К.

Ключевые слова: высокотемпературная сверхпроводимость, аномальные эффекты в сверхпроводящем состоянии, изотопический эффект у сверхпроводников, идентификация, прогнозирование составов, температура перехода в сверхпроводящее состояние.

С момента своего открытия в 1911 году явление сверхпроводимости стало сильнейшим стимулятором новых исследований для заинтересованных специалистов. Результатом этих исследований стало появление принципиально новых материалов, областей науки и техники, прежде всего систем электроники, в которых применение сверхпроводимости позволило получить рекордные показатели по ряду технических характеристик энергетических устройств и систем [1], микроэлектронных устройств обработки информации [2], болометрических приемников теплового излучения [3] и т.д. Проблемы практического применения эффектов, наблюдаемых в состоянии сверхпроводимости, были связаны с реализацией надежного теплового охлаждения [4], поэтому задача повышения температуры перехода в сверхпроводящее состояние превратилась в фундаментальную проблему.

Открытие высокотемпературной сверхпроводимости 25 лет назад [5] произвело эффект разорвавшейся бомбы, т.к. при этом не только произошел резкий скачок в значениях температуры сверхпроводящего перехода до значения 92 К, но и резко расширился круг материалов (оксиды, керамики), обладающих свойством сверхпроводимости. Открытие высокотемпературной сверхпроводимости ещё больше обострило существовавшие в этой области проблемы:

1. поиска материалов с более высокой температурой перехода в сверхпроводящее состояние,
2. реализации технических решений в силовой электронике,
3. создания микроэлектронных устройств и систем обработки информации и вычислительной техники.

Решение первой проблемы происходит очень интенсивно в последние годы, благодаря совершенствованию технологии изготовления многослойных керамик. На сайте

[6] ведется календарь рекордов величины очередной более высокой обнаруженной температуры перехода в сверхпроводящее состояние (табл. 1, рис. 1).

Таблица 1
Рекорды температур перехода материалов в состояние сверхпроводимости

Дата публикации	Температура T_c	Состав
03.10.2007	175	$\text{Sn}_{1.4}\text{In}_{0.6}\text{Ba}_4\text{Tm}_5\text{Cu}_7\text{O}_{20+}$
14.03.2008	185	$(\text{Sn}_{1.0}\text{Pb}_{0.5}\text{In}_{0.5})\text{Ba}_4\text{Tm}_5\text{Cu}_7\text{O}_{20+}$
17.07.2008	195	$(\text{Sn}_{1.0}\text{Pb}_{0.5}\text{In}_{0.5})\text{Ba}_4\text{Tm}_6\text{Cu}_8\text{O}_{22+}$
30.11.2008	212	$(\text{Sn}_5\text{In})\text{Ba}_4\text{Ca}_2\text{Cu}_{10}\text{O}_y$
24.03.2009	233	$\text{Tl}_5\text{Ba}_4\text{Ca}_2\text{Cu}_{10}\text{O}_y$
18.05.2009	240	$(\text{Tl}_4\text{Ba})\text{Ba}_4\text{Ca}_2\text{Cu}_{10}\text{O}_y$
10.10.2009	250	$(\text{Tl}_4\text{Ba})\text{Ba}_2\text{Ca}_2\text{Cu}_7\text{O}_{13+}$
14.10.2010	258	$(\text{Tl}_4\text{Ba})\text{Ba}_2\text{Mg}_2\text{Cu}_7\text{O}_{13+}$
24.10.2010	265	$(\text{Tl}_4\text{Ba})\text{Ba}_2\text{MgCu}_8\text{O}_{13+}$



Рис. 1. Зависимость открытия рекордных температур перехода в сверхпроводящее состояние во времени

Группа материалов, позволивших получить рекордно высокие температуры перехода, была исследована ещё в начале 90-х годов прошлого века [7]. Тогда было показано, что определяющую роль на значение температуры T_c оказывают базовые слои проводящих окислов CuO_2 , разделенных слоями ионов Ca^{2+} , которые обеспечивают прочную ионную связь между купратными слоями. При этом считалось, что диэлектрические оксидные слои (TlO , BaO , MgO и т.д.) играют вспомогательную роль, создавая между купратными слоями расстояния, обеспечивающие эффект близости, определяющий джозефсоновскую (туннельную) связь. Однако последние исследования показали, что именно ионные связи, созданные атомами Mg , могут существенно изменить физические свойства всей структуры.

В последних исследованиях [8] решающую роль сыграла технология получения многослойных структур и использование в качестве базовых слоев состава CuO_2 и MgO_2 . Здесь был реализован обмен атомов Mg и Cu в купратных слоях, поскольку атомы меди и магния имеют почти идентичные ионные радиусы. В итоге перемещения атомов Mg в определяющей стехиометрической оси Mg-Cu-Tl-Ba в исходной последовательности слоев (Mg-O)-(Cu-O)-(Tl₂-O₃)-(Ba-Cu-O)-(Cu-O) возникает структура (Tl₄Ba-CuO (9223)-Mg₂), которая увеличивает температуру T_c за счет резкого возрастания плоского соотношения веса для оси Tl-O-Cu с 5 до 6,3 (рис. 2).

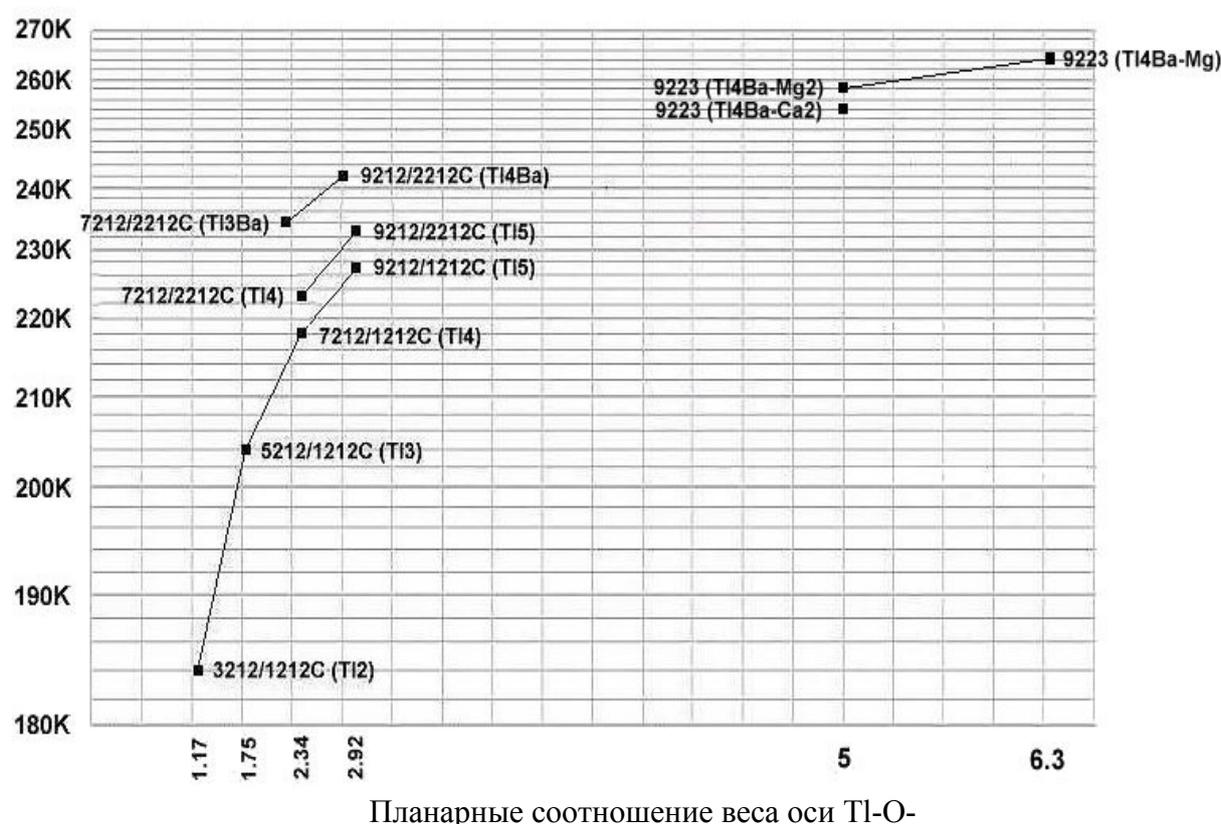


Рис. 2. Зависимость температуры T_c от показателей многослойных структур класса $(\text{Tl}_4\text{Ba})\text{Ba}_2\text{MgCu}_8\text{O}_{13+}$

Вторая проблема, связанная с технической реализацией применений явления сверхпроводимости в силовой электронике, также сопряжена, прежде всего, с поиском подходящих материалов. В основе любых применений в данной области (сверхпроводящие кабели, магниты, ЯМР-томографы, ускорители частиц, реакторы и т.д.) лежит сверхпроводящий проводник электрического тока. Как и к любому проводнику электрического тока к нему предъявляется определенный набор технических требований: электрических, механических, радиационных, экологических, технологических и т.д.

При этом оказалось, что открытие высокотемпературной сверхпроводимости не позволило в промышленных масштабах применить новые классы материалов для сверхпроводящих проводников, т.к. они не удовлетворяют целому ряду требований для этих применений. В итоге материалы низкотемпературной сверхпроводимости, открытые до

1986 года, до сих пор остаются основными в силовой электронике. Разработки и исследования ВСТП кабелей до 2010 года так и не вышли на стадию промышленного производства ни в России, ни за рубежом [1, 9].

Решение третьей проблемы – применение явления сверхпроводимости в микронных системах обработки информации и вычислительной техники - сложилось наиболее драматически. С первых дней после публикации пионерной работы [5] во всех странах развернулось настоящее соревнование по всем направлениям: поиска материалов, новых технологий синтеза пленок, разработок схемотехнических и конструктивных решений элементов и устройств систем обработки информации и вычислительной техники [1]. Ведущие мировые фирмы затрачивали огромные средства на исследования в области высокотемпературной сверхпроводимости. Например, ведущие фирмы Японии запатентовали практически всю элементную базу вычислительной техники на основе логических элементов с эффектом Джозефсона.

Наибольшие успехи были достигнуты в области СВЧ электроники, т.к. были разработаны различные устройства на высокотемпературных сверхпроводящих материалах: линии передач, линии задержки, полосовые фильтры, амплитудные и фазовые модуляторы, переключатели и ограничители СВЧ-мощности, малогабаритные антенны и другие, в которых рабочий диапазон частот расширился до сотен ГГц [1,2].

Наконец, были сформированы и программы государственного финансирования исследований, в частности в СССР - государственная научно-техническая программа «Высокотемпературная сверхпроводимость».

Постепенно стало выясняться, что отдача от инвестиций в исследования и разработки не соответствует ожиданиям и прогнозам. Проект высокотемпературной сверхпроводимости по суммарным затратам оказался в одном ряду с такими несбыточными глобальными проектами, как проект стратегической оборонной инициативы, направленный на создание сплошного трехмерного радиолокационного поля с нереализуемым пространственным разрешением или объявленный несколько лет назад мировой проект «Геном человека», целью которого является полная расшифровка генома человека как вида.

Для того чтобы понять, почему на первых этапах исследований высокотемпературной сверхпроводимости не был произведен ожидаемый прорыв, перечислим сначала главные решенные задачи, определившие прогресс современной микроэлектроники.

1. Открытие электронных свойств полупроводников как нового класса материалов.
2. Открытие транзисторного эффекта в германиевой и кремниевой полупроводниковых структурах с чередующимися областями электронной и дырочной проводимостями и переход от вакуумной к твердотельной элементной базе электронных устройств.
3. Разработка полного комплекса схемотехнических решений, необходимых для построения универсальных электронных вычислительных машин, а также специализированных электронных систем обработки информации.
4. Создание кремниевой полупроводниковой технологии мультиплицирования и интеграции схем в одном кристалле.
5. Разработка алгоритмов и программного обеспечения, определивших эффективность работы электронных систем.

Теперь можно отметить, что в исследованиях при решении третьей проблемы создания микроэлектронных устройств и систем обработки информации и вычислительной техники на основе явления сверхпроводимости выпали такие логические звенья, кото-

рые аналогичны второй и четвертой задачам, решение которых и определило прогресс современной микроэлектроники.

Эффекта, аналогичного транзисторному эффекту в сверхпроводящей электронике, пока не обнаружено. Открытие транзисторного эффекта базируется на модели и действительном наличии альтернативных по механизмам проводимости свойствам (электронной и дырочной проводимости). В объяснении сверхпроводимости превалирует одна теория, которая не предусматривает разных, а тем более альтернативных механизмов сверхпроводимости. Теоретически принято существование сверхпроводников 1 и 2 рода по критерию знака такой физической характеристики как поверхностная энергия. Для сверхпроводников второго рода поверхностная энергия отрицательна, в силу чего в них допускается разбиение образца на отдельные области сверхпроводящего и нормального состояний, однако гипотез каких-либо различий (как, например, разной намагниченности для магнитных доменов) для областей сверхпроводящего состояния не выдвинуто. Поэтому практические применения сверхпроводимости основаны на эффекте разрушения сверхпроводимости под влиянием внешних факторов.

Эффект Джозефсона, который был заложен в основу схемотехнических решений логических элементов на основе низкотемпературной сверхпроводимости [2], а затем перенесен и на решения на основе высокотемпературных сверхпроводящих материалов, определяет возникновение туннельного тока, чрезвычайно малого по своей величине. Принцип действия таких логических элементов заключается в фиксировании двух состояний: при наличии тока сверхпроводимости в отсутствие действия управляющего фактора (вентиль открыт), и исчезновении сверхпроводящего состояния под действием управляющего фактора (ток отсутствует - вентиль закрыт). В традиционной электронике давно известно, что выполнение логической или иной функциональной обработки информации можно проводить на резистивных схемах, однако точность и стабильность выполнения заданных преобразований не соответствуют современным требованиям [10]. Схемотехника логических и иных элементов на эффекте Джозефсона страдает теми же недостатками [2].

Аналогичная картина наблюдается и в области создания болометрических приемников теплового излучения. Их принцип действия также основан на исчезновении сверхпроводимости при воздействии на приемник теплового излучения [2], т.е. на изменении сопротивления, как и в традиционных болометрах, хотя при этом возникает целый ряд технических преимуществ.

Неизбежная логика исследований привела исследователей к открытию ряда эффектов, существующих в области сверхпроводящего состояния, т.е. в условиях, когда при сохранении основного свойства – сверхпроводимости, дополнительно наблюдаются новые физические явления. При этом экспериментальные данные свидетельствуют о наличии явных аномалий, которые нельзя объяснить изменением сопротивления в зоне сверхпроводящего состояния, т.е. когда сопротивление пленки оставалось предельно малым, оно не может испытывать существенных изменений.

Первоначально в экспериментах при изучении комплексного воздействия нескольких физических факторов на исследуемый материал схемы считывания информации строились таким образом, что выходной сигнал интерпретировался как изменение сопротивления сверхпроводящей пленки [11], наблюдаемое при температурах существования сверхпроводящего состояния, что свидетельствовало об определенной противоречивости данной интерпретации результатов экспериментальных исследований.

Изменение методологии экспериментов когда высокотемпературный сверхпроводящий материал находился под воздействием двух физических полей: температурного поля, характеризующегося температурой T , и электрического поля, характеризующегося током смещения I_{cm} позволило зарегистрировать изменения шумового отклика материала, которые можно регистрировать в виде спектральной плотности напряжения шума $U_{ш}$ [12].

В конечном счете, пиковые изменения выходного сигнала в зоне сверхпроводимости были интерпретированы как изменения шумовых свойств с наличием аномального участка падения шума с ростом температуры в области существования сверхпроводящего состояния. Зависимость положения максимума шумового напряжения в сверхпроводящей пленке от мощности падающего теплового излучения позволила реализовать, по существу, неболометрическое считывание информации о величине теплового излучения [13, 14].

Впоследствии экспериментальным путем было обнаружено ещё одно аномальное поведение другого физического параметра - скорости распространения ультразвуковых колебаний в зоне высокотемпературной сверхпроводимости [15]. Однако этот эффект не нашел практического применения.

Что касается необходимости решения четвертой задачи – создания технологии мультиплицирования и интеграции сверхпроводящих схем в одном кристалле, то её решение непосредственно связано с поиском соответствующих материалов, в которых имеют место альтернативные (аномальные) эффекты проводимости.

Надо признать, что известные на сегодняшний день низкотемпературные и высокотемпературные сверхпроводники не позволяют решить первую и четвертую задачи. Этим объясняется постоянный поиск новых материалов, которые отвечали бы требованиям и возможностям серийной микронэлектронной технологии.

В 2008 году был открыт новый класс высокотемпературных сверхпроводников – допированных фтором оксиарсенидов железа с обобщенной формулой $LaO_{1-x}F_xFeAs$. Они могут иметь как монокристаллическую (технология - метод кристаллизации в расплаве), так и поликристаллическую структуру (технология - метод твердофазного синтеза) [16]. Первый обнаруженный материал этого класса имел $T_c = 26$ К, затем были обнаружены материалы этого класса, имеющие T_c до 55 К.

В данной работе для выявления новых составов с повышенной T_c применен метод прогнозирования составов с повышенной T_c , основанный на сценарном методе многомерного прогнозирования [17]. Прогноз проведен в семимерном пространстве параметров $\{k, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$, где k – формальный параметр (например, номер по порядку массива экспериментальных данных), x_1 – текущие значения T_c , x_2 - атомная масса лантаноида, x_3 – атомная масса кислорода с учетом доли $(1-x)$, x_4 – атомная масса фтора с учетом доли x , x_5 – атомная масса железа, x_6 - атомная масса мышьяка.

Таким образом, в качестве исходных данных для прогноза взяты атомные массы компонентов материала и соответствующие температуры сверхпроводящего перехода. Обоснованность выбора исходных данных базируется на известном изотопическом законе, устанавливающем взаимосвязь T_c и атомной массы M изотопов компонентов [18]

$$T_c \approx C \cdot M^{\alpha},$$

где C – константа, не зависящая от T_c и M , α – константа, рассчитываемая по экспериментальным данным T_c для веществ, в которых использованы изотопы компонентов по формуле

$$\alpha = -\frac{M}{\Delta M} * \frac{\Delta T_c}{T_c}.$$

Если α равно или близко к 0,5, то в данном материале куперовские пары (сверхпроводимость) возникают за счет электрон-фононного притяжения, принятого в классической квантовой теории, поэтому значение α принято считать тестом на роль фононов в создании сверхпроводимости.

В противном случае сверхпроводимость вызвана иным механизмом. В железистых сверхпроводниках проявление изотопического закона приводит к аномальному отрицательному диапазону значений параметра α (- 0,12 - - 0,37). По мнению авторов работы [19] в железосодержащих высокотемпературных сверхпроводниках реализуется аномальный механизм объединения куперовских пар: смесь «более сложного» электрон-фононного и обменного взаимодействий.

Метод прогнозирования основан на базе знаний, включающей полную систему многомерных математических моделей, получаемую на основе анализа многомерных исходных данных. В нашем случае математические модели оригинальны и позволяют реализовать итеративный алгоритм установления устойчивых сочетаний параметров вещества в принятом пространстве, называемых сценариями. Для принятой размерности пространства число сценариев составляет 46656.

В отличие от работы [17], в которой прогнозирование велось во времени, которое было первым параметром рабочего пространства, в данной статье прогнозирование нужно вести по температуре T_c (параметр x_2). Проблема в данном случае состоит в том, что значения температуры T_c не являются регулярными в отличие от значений времени в работе [17]. Поэтому введен формальный регулярный параметр k , который в алгоритме прогнозирования формально нарастает как время в работе [17]. В этом случае формально применяется тот же алгоритм. Отличие прогноза в данной работе состоит в том, что из всего множества сгенерированных сценариев для очередного значения формального параметра k мы будем отбирать те составы веществ, которые соответствуют физической реализуемости по атомным массам компонентов. Для обеспечения отбора физически реализуемых составов в алгоритме сформированы следующие ограничения для прогнозируемых составов на k – м шаге прогнозирования:

$$\begin{aligned} x_{1k} &> x_{11}, \\ (x_{6k} - A_{As}) &\leq \delta_{As}, \\ (x_{2k} - A_{Fe}) &\leq \delta_{Fe}, \\ \left\{ \left(\frac{x_{4k}}{A_F} \right) - \left(1 - \frac{x_{1k}}{A_{La}} \right) \right\} &\leq \delta_x, \end{aligned}$$

где x_{11} – наибольшая температура T_c из экспериментальных данных,

A_{As} , A_{Fe} , A_F , A_{La} – атомные массы мышьяка, железа, фтора и лантаноида соответственно,

δ_{As} , δ_{Fe} , δ_x – допустимые пределы на расхождение для значений параметров x_5 , x_6 и атомных масс мышьяка и железа соответственно, а также для доли x допирования фто-

ра в состав вещества, вычисленной двумя способами на основе значений параметров x_3 и x_4 .

На параметр x_2 (атомная масса лантаноида) никаких ограничений не наложено, поскольку, как следует из экспериментальных данных (табл. 2 строки 1 – 12), это могут быть атомные массы разных металлов: гадолиния, диспрозия, лантана, неодима, празеодима, самария, тербия или церия.

Таблица 2

Составы и характеристики сверхпроводящих пятикомпонентных оксиферридов редкоземельных и переходных металлов (1111-фазы)

		x	Tc	Ln	O _{1-x}	F _x	Fe	As
1	LaO _{1-x} F _x FeAs, x = 0,05-0,12	0,12	26	138,9055	14,07947	2,279808	55,8	74,9
2	SmO _{0,93} F _{0,07} FeAs	0,07	36	150,36	14,87944	1,329888	55,8	74,9
3	GdO _{1-x} F _x FeAs, x = 0,12-0,17	0,17	36,6	157,25	13,2795	3,229729	55,8	74,9
4	CeO _{1-x} F _x FeAs, x = 0-0,20	0,2	41	140,116	12,79952	3,799681	55,8	74,9
5	SmO _{0,90} F _{0,10} FeAs	0,1	43	150,36	14,39946	1,89984	55,8	74,9
6	DyO _{1-x} F _x FeAs, x = 0-0,2	0,2	45,4	162,5	12,79952	3,799681	55,8	74,9
7	TbO _{1-x} F _x FeAs, x = 0-0, 2	0,2	45,9	158,9253	12,79952	3,799681	55,8	74,9
8	NdO _{0,82} F _{0,18} FeAs	0,18	50	144,24	13,11951	3,419713	55,8	74,9
9	NdO _{0,9} F _{0,1} FeAs	0,1	51	144,24	14,39946	1,89984	55,8	74,9
10	PrO _{0,89} F _{0,11} FeAs	0,11	52	140,9077	14,23947	2,089824	55,8	74,9
11	NdO _{0,90} F _{0,10} FeAs	0,1	53	144,24	14,39946	1,89984	55,8	74,9
12	SmO _{0,90} F _{0,10} FeAs	0,1	55	150,36	14,39946	1,89984	55,8	74,9
13	SmO _{0,885} F _{0,115} FeAs	0,115	56,2	150,36	14,15947	2,184816	55,8	74,9
14	PrO _{0,887} F _{0,113} FeAs	0,113	57,5	140,9077	14,19147	2,14682	55,8	74,9
15	PmO _{0,892} F _{0,108} FeAs	0,108	57,8	145	14,27146	2,051828	55,8	74,9
16	DyO _{0,885} F _{0,115} FeAs	0,115	57,9	162,5	14,15947	2,184816	55,8	74,9
17	EuO _{0,892} F _{0,108} FeAs	0,108	58,3	151,964	14,27146	2,051828	55,8	74,9
18	EuO _{0,878} F _{0,122} FeAs	0,122	58,6	151,964	14,04747	2,317805	55,8	74,9
19	EuO _{0,877} F _{0,123} FeAs	0,123	59,1	151,964	14,03147	2,336804	55,8	74,9
20	GdO _{0,886} F _{0,114} FeAs	0,114	59,5	157,25	14,17547	2,165818	55,8	74,9
21	SmO _{0,874} F _{0,126} FeAs	0,126	61,9	150,36	13,98348	2,393799	55,8	74,9
22	SmO _{0,875} F _{0,125} FeAs	0,125	62,1	150,36	13,99948	2,3748	55,8	74,9
23	EuO _{0,883} F _{0,117} FeAs	0,117	62,6	151,964	14,12747	2,222813	55,8	74,9

Прогнозирование составов веществ с повышенной температурой T_c реализуется, по существу, поисковой системой, которая выдает составы с повышенной температурой T_c , из которых необходимо дополнительно отобрать физически реализуемые со значениями параметра x_2 , соответствующими ближайшему с заданной погрешностью материалу из группы лантаноидов. Отобранные новые составы включались в исходный набор экспериментальных данных и процесс поиска вновь повторялся. В результате были получены данные составов веществ, представленные в табл. 2 (строки 13-23 – прогнозные данные). Прогноз позволил выявить 11 новых составов разных материалов указанного класса с температурами T_c в диапазоне (55 К – 62,6 К).

Как видно из табл. 2 наиболее представительной группой и в экспериментальных данных (3 состава) и в результатах прогнозирования (3 состава) оказались материалы на основе самария (рис. 3).

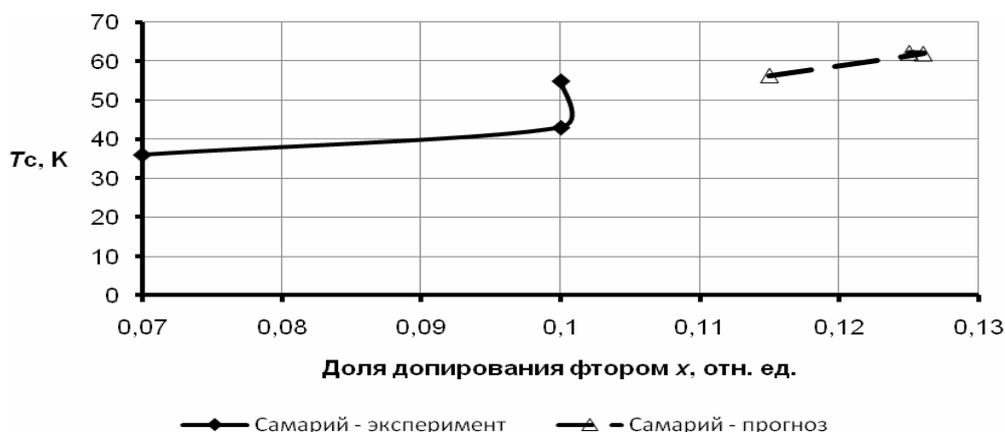


Рис. 3. Зависимость температуры T_c от доли допирования x фтором в сверхпроводящих материалах на основе самария

Самой представительной в прогнозных данных оказалась группа из 4-х составов материалов на основе европия (рис. 4), хотя экспериментальные данные по сверхпроводимости веществ с этим металлом вообще отсутствуют.

Прогнозных составов на основе неодима найти не удалось совсем, хотя имеются экспериментальные данные о сверхпроводимости 3-х составов веществ на основе этого металла. Прогноз материалов на основе гадолиния и диспрозия дал по одному новому составу соответственно.

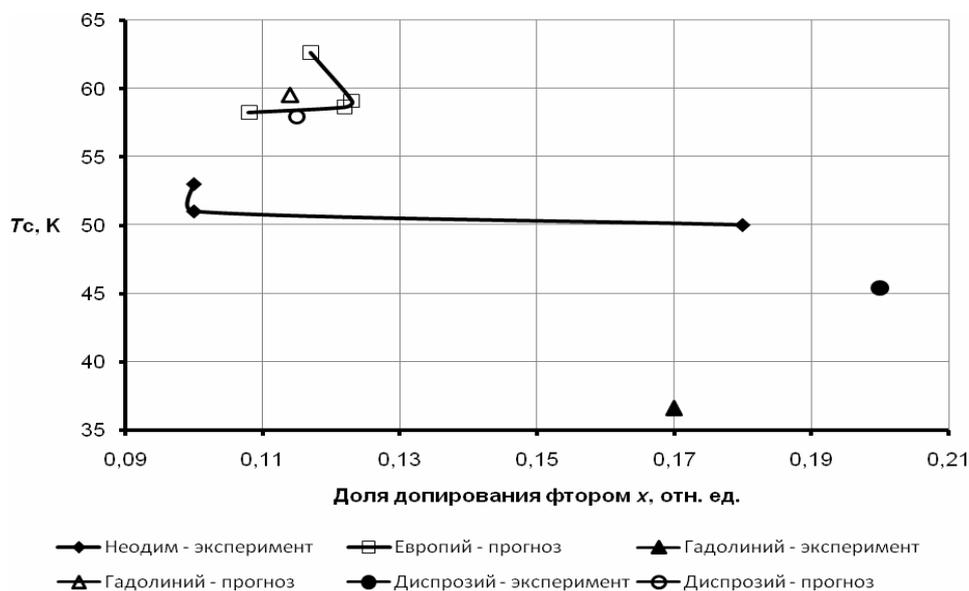


Рис. 4. Зависимость температуры T_c для обнаруженных и прогнозируемых сверхпроводящих материалов на основе гадолиния, диспрозия, неодима и европия

Разработанный метод прогнозирования составов сверхпроводящих веществ с повышенной температурой перехода в сверхпроводящее состояние может быть применен и для других классов материалов, по которым имеются достаточно обширные экспериментальные данные по составам и температурам T_c .

Применение данного метода прогнозирования новых составов сверхпроводящих веществ может существенно ускорить поиск и исследования сверхпроводящих материалов не только с повышенными температурами перехода в сверхпроводящее состояние, но с другими заданными свойствами, определенными областями применения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черноплеков, Н.А. Сверхпроводниковые технологии: современное состояние и перспективы практического применения. // Вестник Российской академии наук, 2001, том 71, №4, С. 303-319.
2. Алфеев, В.Н. и др. Интегральные схемы и микроэлектронные устройства на сверхпроводниках. – М.: Радио и связь, 1985. – 232 с.
3. Колесников, Д.П. и др. Оптимизация режимов работы интегрального многоэлементного сверхпроводящего болометра. В кн. Тепловые приемники излучения. Л.: ГОИ, 1981, С. 19 – 20.
4. Миропольский, З.Л. и др. Гидродинамика и теплообмен в сверхпроводящих устройствах. М.: Наука, 1987. 288 с.
5. Bednorz, J G, Müller K.A. Possible High T_c Superconductivity in the Ba-La-Cu-O System. // Zeitschrift für Physik. B. Condensed Matter, 64, 1986 S. 189 193/
6. Superconductor News. <http://www.superconductors.org/265K.htm>.
7. Пашицкий, Э.А. О механизме высокотемпературной сверхпроводимости в соединении $(Ca_{1-x}Sr_x)_{1-y}CuO_2$ с «бесконечным» числом купратных слоев. // Письма в ЖЭТФ, 1992, том 56, вып. 7, С. 364-369.
8. Record Superconductivity Approaches 265 K. <http://www.superconductors.org/265K.htm>.
9. Сайт Всероссийского научно-исследовательского института кабельной промышленности. Дорожная карта по ВТСП кабелям. <http://vniikp.ru>.
10. Маклюков, М.И., Протопопов В.А. Применение аналоговых интегральных микросхем в вычислительных устройствах. М.: Энергия, 1980. – 100 с.
11. Вышеславцев, П.П. и др. Разрушение сверхпроводимости оптическим излучением и неравновесные резистивные состояния в пленках высокотемпературного сверхпроводника $YBa_2Cu_3O_{7-x}$ // ЖЭТФ, 1991 т.99, вып. 3, С. 911 – 928.
12. Бандурян, Б.Б., Гапонов С.В., Дмитренко И.М. и др. Болометрические и шумовые свойства ВТСП структур. // Физика низких температур, 1990, т. 16, № 1, с. 70-79.
13. Голубь, Б.И., Гусев А.Н. Математическая модель ВТСП преобразователя с временным способом съема информации. // Тепловидение № 13: Межотраслевой сб. научн. тр. - М.: МИРЭА, 2000. С. 40-50.
14. Голубь, Б.И., Гусев А.Н., Сигов А.С. Новые физическая и информационная технологии построения широкоспектральных измерителей ИК-излучений на высокотемпературных сверхпроводниках для систем мониторинга различных объектов. Электроника и информатика - XXI век. Третья МНТК. Тезисы докладов. - М.: МИЭТ, 2000,- С. 303-304.
15. Перепечко, И.И., Данилов В.А. К вопросу об акустических свойствах высокотемпературного сверхпроводника. В материалах МНТК «Тонкие пленки и слоистые структуры», Пленки-2002, Часть 2. М.: МИРЭА, 2002. – С. 113 – 117.

16. *Ивановский, А.Л.* Новые высокотемпературные сверхпроводники на основе оксиарсенидов редкоземельных и переходных металлов и родственных фаз: синтез, свойства и моделирование // УФН, 2008, т. 178, № 12, С. 1273-1306.
17. *Гусев, А.Н.* Обнаружение полиномиального алгоритма решения *NP* задачи многомерного прогнозирования в режиме параллельных вычислений. // Вестник Московского государственного областного университета. Серия «Физика, математика», вып. 2. М.: МГОУ. - 2010. С. 63-75.
18. *Maxwell, E.* Isotope Effect in the Superconductivity of Mercury // Phys. Rev. 1950, 78, P. 477-477.
19. *Parasharam, M. Shirage, Kunihiro Kihou, Kiichi Miyazawa, Chul-Ho Lee, Hijiri Kito, Hiroshi Eisaki, Takashi Yanagisawa, Yasumoto Tanaka, Akira Iyo.* [Inverse Iron Isotope Effect on the Transition Temperature of the \(Ba,K\)Fe₂As₂ Superconductor.](#) // Phys. Rev. Lett. 2009, 103, 257003.

**IDENTIFICATION OF THE PROPERTIES OF SUPERCONDUCTIVITY
AND FORECASTING NEW COMPOSITIONS-PILLAR OKSIARSENIDY
WITH FEVER IN SUPERCONDUCTIVITY**

Gusev A.

*Moscow region state university
10a, Radio st., Moscow, 105005, Russia*

Abstract. This article provides information on substances with a record high temperature superconductivity transition, a brief overview of the use of superconducting substances in the field of power electronics and microelectronics. Based on the identity of the superconducting properties of a new class of iron superconducting materials and perform prediction of compositions of these substances with temperature superconducting transition from 55 to 62.5 k.

Key words: high-temperature superconductivity, abnormal effects in superconducting States, by the isotopic effect in superconductors, identification, prediction, transition temperature superconductivity.

УДК 55.550.370:379

**К ВОПРОСУ О КОСВЕННОЙ ОЦЕНКЕ ОТНОШЕНИЯ СИГНАЛ/ШУМ
В НИЗКОЧАСТОТНОЙ ЭЛЕКТРОРАЗВЕДКЕ
С ИСКУССТВЕННЫМ ИСТОЧНИКОМ ТОКА**

А.И. Гераськин

*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
геологический факультет
119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы*

Аннотация. В данной статье рассматривается метод косвенной оценки отношения сигнал/шум при работе различными методами низкочастотной электроразведки с искусственным источником тока. Задача определения отношения сигнал/шум является важной как при проведении полевых работ, так и при последующей обработке данных. Однако невозможно определить это отношение напрямую, так как при измерении истинный сигнал оцифровывается вместе с шумами и помехами. Предложенный метод косвенной оценки строится на основе свойства антипериодичности сигнала, которым обладают сигналы, применяемые в низкочастотной электроразведке. В статье приводятся описания свойств такой оценки и ее связь с прямой оценкой отношения сигнал/шум.

Ключевые слова: электроразведка, *SNR*, *OER*, отношение сигнал/шум, обработка временных рядов

ВВЕДЕНИЕ

Основной целью обработки геофизических данных, полученных в результате полевых работ, является подавление случайных шумов и помех, содержащихся в исходных записях (временных рядах) измеряемых физических величин и выделение из этих временных рядов полезного сигнала. От эффективности подавления шумов и помех напрямую зависит качество геофизической продукции, т. е. геоэлектрических разрезов и карт, на основании которых происходит дальнейшая геологическая интерпретация.

В общем случае помеха представляет собой случайный процесс, изучение статистических характеристик которого может оказаться значительно более трудоёмким, чем изучение собственно геологической модели среды. С другой стороны, качественная обработка сигналов низкочастотной электроразведки существенным образом опирается на модель помех.

Пока речь идёт о слабых шумах, выбор модели шума не играет существенной роли, однако основное преимущество методов с искусственным источником тока ([3]) как раз и состоит в том, что эти методы можно применять в местностях с высоким уровнем зашумления промышленной помехой и добиваться при этом высокого качества результата ([4]).

С практической точки зрения, во время полевых работ бывает крайне важно оценить отношение сигнал/шум. Эта оценка может дать объективную поддержку и оператору-полевому, проводящему замер, и оператору-обработчику. Первый сможет вовремя заметить проблему измерения временных рядов и исправить процесс замера, а второй сможет более объективно настроить алгоритм обработки.

Однако собственно полезный сигнал в процессе полевых работ неизвестен, поэтому невозможно напрямую оценить отношение сигнал/шум. В связи с этим особую ценность имеют приёмы, позволяющие косвенно (то есть без знания истинного полезного сигнала) произвести такую оценку.

В данной работе представлена косвенная оценка (*OER*) отношения сигнал/шум, вычисляемая напрямую из временного ряда измеряемой физической величины, т. е. без знания истинного полезного сигнала. Кроме того, приводится зависимость истинного отношения сигнал/шум (*SNR*) от введённого нами нового параметра *OER*.

НОВЫЙ ПАРАМЕТР (*OER*)

В данной статье предполагается, что несущим сигналом является *T*-периодическим сигналом типа меандр или меандр с паузой. Полезный сигнал, представляющий собою отклик Земли на несущий сигнал, является (*T/2*)-антипериодическим сигналом ([4]):

$$s\left(t + \frac{T}{2}\right) = -s(t) \quad (1)$$

Легко показать, что для антипериодического сигнала вся информация о нем содержится в нечётных гармониках, а чётные гармоники равны нулю. С другой стороны, если взять для простоты белый шум, то в нём все частоты независимы и имеют равную вероятность. Такое свойство подталкивает к тому, чтобы рассмотреть отдельно мощность нечётных (P_{odd}) и чётных (P_{even}) гармоник измеренного временного ряда:

$$P_{odd} = \frac{2}{N} \sum_{\substack{1 \leq k \leq N \\ k \text{ нечётно}}} |C_k|^2, \quad P_{even} = \frac{2}{N} \sum_{\substack{1 \leq k \leq N \\ k \text{ чётно}}} |C_k|^2 \quad (2)$$

где комплексные амплитуды C_n определяются из временного ряда $\{M(t_n)\}_{n=1, \dots, L}$, $t_n = n \cdot T/N$, в соответствии с преобразованием Фурье [2]:

$$C_k = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N M(t_n) e^{2\pi i n k / N} \quad (3)$$

Для белого шума при нулевом полезном сигнале мощности P_{even} и P_{odd} должны быть в среднем равны, а для чистого полезного сигнала лишь P_{odd} является отличным от нуля. Была поставлена задача исследования практически наблюдаемых сигналов с помощью отношения P_{odd}/P_{even} статистически, используя большой набор временных рядов, полученных за последние годы работы на множестве геофизических объектов, расположенных в разных регионах мира и характеризующихся различными видами и интенсивностью электромагнитных помех.

Таким образом, была введена в рассмотрение величина

$$OER = 10 \cdot \lg\left(\frac{P_{odd}}{P_{even}}\right) \text{ дБ} \quad (4)$$

где P_{odd} и P_{even} вычисляются по формуле (2). Её название *OER* (odd-to-even ratio) образовано по аналогии с *SNR* (signal-to-noise ratio)[2]:

$$SNR = 10 \cdot \lg \left(\frac{P_{signal}}{P_{noise}} \right) \text{ дБ} \quad (5)$$

Величина *SNR* практически вычислима лишь в той ситуации, когда известен истинный полезный сигнал, так что обработка временного ряда не требуется. Величина *OER* вычисляется напрямую из измеренного временного ряда, таким образом, она несёт в себе некую объективную информацию. Возможность использования этой информации будет исследовано в следующих разделах.

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЕЛИЧИНЫ *OER*

Было рассмотрено 6 наборов полевых данных из различных регионов (Тиман, 2006 г., Печорская область, 2006 г., Кольский полуостров, 2007 г., Норильская область, 2008 г., Азербайджан, 2008 г., Саратовская область, 2009 г.). Каждый набор содержал временные ряды электрического поля, полученные на различных пикетах (точках наблюдения). Каждый временной ряд содержал отрезок времени, когда генератор поля был выключен и отрезок времени, когда генератор поля был включён, и производилось зондирование одним из электроразведочных методов.

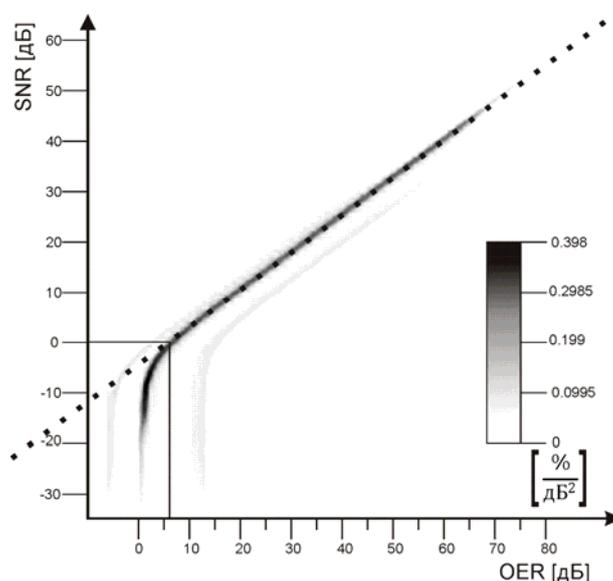


Рис. 1. Плотность распределения вероятности (*SNR*, *OER*)

По набору отрезков временных рядов, измеренных с выключенным генератором, была составлена база данных полевых шумов. К этим реализациям шума был добавлен полезный сигнал (смоделированный для случая однородного разреза отклик земли на несущий сигнал в форме меандра частоты f_g). Амплитуда полезного сигнала принимала значения из широкого диапазона на экспоненциальной сетке с шагом 20 %. Всего в анализ было включено 633 временных ряда на различных пикетах, четыре частоты ге-

нератора f_g (1.22 Гц, 2.44 Гц, 4.88 Гц, 9.76 Гц), 60 значений амплитуды полезного сигнала. Для каждого сочетания указанных параметров были вычислены отношение полезного сигнала к шуму - SNR (см. (5)) и введённый параметр OER (см. (4)). Всего было сделано 151920 таких оценок. На основе этих расчётов была произведена оценка плотности распределения вероятности в плоскости (SNR, OER) , рис.1. На этом рисунке видна линейчатая структура этого распределения вероятности, причём средний магистральный лист этого распределения выражен наиболее ярко, но слева и справа от него можно видеть два других параллельно идущих лепестка.

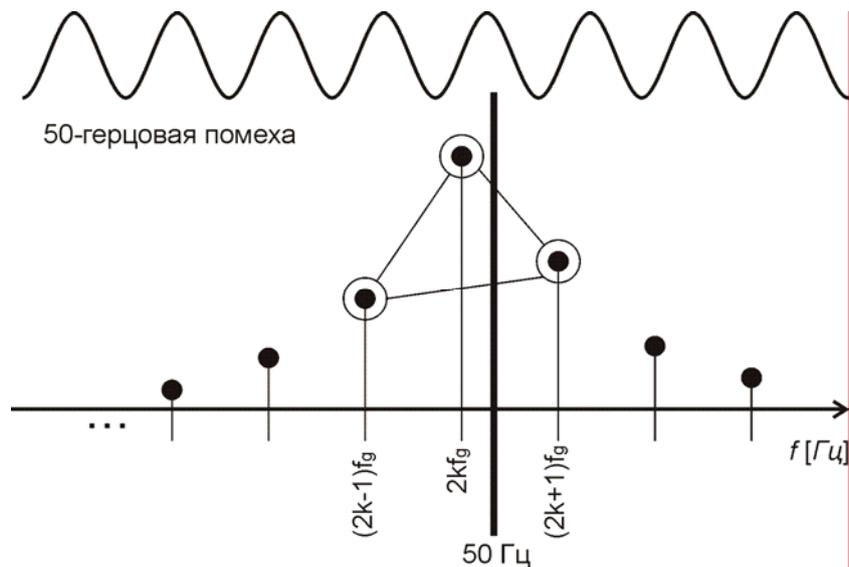


Рис.2. Эффект утечки спектра

Анализ этого феномена и дальнейшее исследование временных рядов, отвечающих левому и правому лепесткам распределения, показало, что в этих временных рядах имеются заметные искажения, вызванные 50-герцовой промышленной помехой. Эффект сдвига вызван эффектом утечки спектра ([1]) 50-герцовой помехи, который оказался близким к одному из обертонов T_g -периодического сигнала генератора, рис.2. Сама величина и направление сдвига лепестка в основном определяется отношением трёх-четырёх обертонов несущего T_g -периодического сигнала генератора, наиболее близких по частоте к величине 50 Гц. Если вклад чётных $(2kf_g)$ гармоник превосходит вклад нечётных $(2(k+1)f_g)$, то имеет место сдвиг лепестка OER влево, в противном случае - вправо. Веса гармоник определяются эффектом утечки спектра и могут быть вычислены заранее, исходя из известной частоты оцифровки и частоты генератора f_g . Таким образом, линейчатая структура распределения вероятности на рис.1 возникает вследствие редкой сетки использованных нами периодов генератора T_g .

Был исследован центральный лист распределения, для чего была произведена его аппроксимация линейной функцией, в результате чего была получена линейная зависимость $SNR = OER - 6 \text{ дБ}$, хорошо согласующаяся с наблюдениями при $OER > 6 \text{ дБ}$.

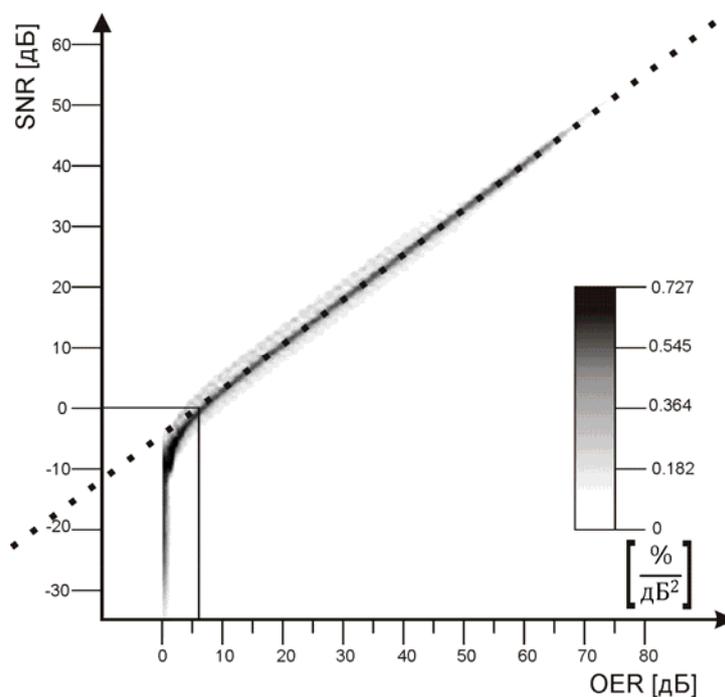


Рис.3. Плотность распределения вероятности в плоскости (SNR , OER)

Для того чтобы исследовать более универсальную связь SNR и OER , была проведена компенсация значения OER в соответствии с эффектом утечки спектра. На рис.3 приведена гистограмма с оценкой плотности распределения вероятности в плоскости (SNR , OER'), где OER' есть исправленный с учётом утечки спектра параметр OER . Видно, что левый и правый лепестки исчезли, что говорит о правильности выполненного анализа утечки спектра.

ВЫВОДЫ

Построенная в работе оценка OER позволяет косвенно, то есть без знания истинного полезного сигнала, оценивать отношение сигнал/шум при $OER > 6$ дБ по формуле $SNR = OER - 6$ дБ. Эта оценка может быть полезна непосредственно в процессе производства замеров для контроля качества и для исключения бракованных записей. В процессе обработки данных эта оценка также может быть весьма полезна при предобработке записанных временных рядов и выборе оптимального алгоритма обработки данных низкочастотной электроразведки с искусственным источником тока. При наличии значительной промышленной (50-герцовой или 60-герцовой) помехи вместо величины OER надлежит использовать скорректированную величину OER' .

ЛИТЕРАТУРА

1. Айфичер, Э., Джервис Б. Цифровая обработка сигналов [Текст]. 2004. М.: Вильямс. 989 с.
2. Ричард, Л. Цифровая обработка сигналов [Текст]. 2009. М.: Бином. 656 с.
3. Электроразведка: пособие по электроразведочной практике для студентов геофизических специальностей, под. ред. В. К. Хмелевского и др. [Текст]. 2005. М.: ГЕРС. 311 с.
4. Pankratov, O.V., Geraskin A.I. On processing of Controlled Source Electromagnetic (CSEM) Data [Text] // Acta Geologica. 2010. Vol. 8. P. 31-49.

**ON INDIRECT SIGNAL TO NOISE RATIO ESTIMATION
IN LOW-FREQUENCY CONTROLLED SOURCE ELECTROPROSPECTING.**

A. Geraskin

*Lomonosov Moscow State University, Faculty of Geology
Moscow, 119899*

Abstract A method to indirectly estimate the signal-to-noise ratio is described in this article for various low-frequency controlled source electroprospecting methods. The problem of the determination of the signal-to-noise ratio is important during the field work and in the subsequent processing. However it cannot be calculated directly as the true signal is not known. It is the antiperiodicity property of the signal that gives rise to the proposed method. All controlled source electroprospecting signals possess this property. A description of the proposed indirect estimation method is presented here as well as its relation to the direct signal-to-noise ratio formula.

Keyword: electroprospecting, SNR, OER, signal-to-noise ratio, time series processing

КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ

УДК 004.932.1

КОНЦЕПЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ СЕГМЕНТАЦИИ СЛИТНОГО РУКОПИСНОГО ТЕКСТА

Е.В. Долгова, Д.С. Курушин

*Пермский государственный технический университет
614990 Пермь, Комсомольский пр., 29*

Аннотация: Слитный рукописный текст обладает значительной вариативностью символов, что делает затрудняет создание качественных моделей его распознавания. В то время как большинство подобных работ сконцентрированы на поиске средней линии символов, авторы предлагают выделить внешний контур. Этот подход позволяет упростить модель, сохраняя приемлемое качество сегментации.

Ключевые слова: текст, рукопись, модель, сегментация, распознавание, алгоритм.

Несмотря на успехи технологий распознавания образов (OCR), проблема оцифровки слитного рукописного текста остается достаточно актуальной. Современные коммерческие OCR-системы показывают достаточно высокое качество ввода т.н. рукопечатных текстов, особенно если символы располагаются в специальных ячейках формы. Однако, текст, написанный в свободном стиле, даже идеальным каллиграфическим почерком, остается непосильной задачей [1]. В значительной степени это обусловлено недостатками математических моделей рукописного текста, использованных на этапе превращения его из растрового изображения во внутреннюю модель распознающей системы.

Одним из перспективных способов разрешения этой проблемы является сегментация, так, например, в [2] описан базовый алгоритм распознавания рукописи, основанный на таком подходе. Однако, сама сегментация может выполняться различными способами, на основе разных моделей и систем примитивов, от выбора которых в конечном счете зависит точность результата и возможность использования модели и базирующейся на ней системы распознавания в практических задачах.

В случае, когда рукописные символы вносятся специально отведенные для них клетки (блоклеттеры), моделирование задачи распознавания текста является относительно простой задачей. Однако, если сегментации подлежит слитный рукописный текст, задача его сегментации значительно усложняется. Вместе с тем, концепции математического моделирования, разработанные для неслитного текста могут послужить исходной основой для разработки специфических моделей, ориентированных на слитный рукописный текст.

Современное состояние проблемы моделирование сегментации рукопечатных символов латиницы, цифр, а также китайских и японских иероглифов достаточно хорошо освещено в публикациях. Классический подход, представленный, в статьях [6 - 8] состоит в сохранении результатов распознавания разных вариантов сегментации и после-

дующем комбинаторном анализе на фазе контекстной обработки с использованием словаря. Фактически, при этом решается задача поиска кратчайшего пути в графе альтернатив распознавания символов. В [9] предлагается иной подход, в большей степени ориентированный на сегментацию цифровых полей, в которых контекстная поддержка в виде словарей не может быть использована как основа модели. Основной акцент в этой работе делается на исследовании и использовании характеристических особенностей строки — средней высоты символов и толщины пера. В [10] рассмотрен алгоритм, сочетающий оба этих подхода. В рамках всех вышеописанных концепций фрагментация строки рукопечатного текста на символы состоит из следующих этапов:

- 1) выделение компонент связности в рамках поля;
- 2) вертикальная коррекция рамки поля;
- 3) вычисление расположения сетки формы;
- 4) анализ изображения строки и выбор стратегии фрагментации;
- 5) распознавание различных комбинаций компонент связности и выбор наилучшей коллекции альтернатив, полученных от алгоритмов распознавания.

Отметим, что вышеперечисленные модели и алгоритмы ориентированы в первую очередь на распознавания форм (последний, описанный в [10] используется в системе Cognitive Forms). Однако с нашей точки зрения интерес представляет менее «разработанная» тема — распознавание слитного рукописного текста. Описанные выше подходы малоприменимы в этой сфере, так как при этом нет предопределенных элементов форм (блоклеттеров), в которые человек вписывает символы. Однозначное (без альтернатив) разделение символов в слитном рукописном тексте невозможно, если не задано множество этих символов, в иногда (в зависимости от особенностей почерка) невозможно вообще. Вместе с тем, человек распознает содержание слитного рукописного текста с той или иной степенью легкости, в зависимости от условий восприятия (почерк, скорость письма, размер растрового изображения). Таким образом, проблему распознавания слитного рукописного текста до сих пор нельзя считать полностью решенной, и новые математические модели в этой области представляют существенный теоретический и практический интерес.

В основу работы, выполненной авторами, положен подход, опирающийся на сегментацию текста не на символы, а на примитивы более низкого уровня — штрихи, петли и т. д. Очевидно, что вариативность начертания штрихов значительно ниже, чем символов или целых слов, причем это упрощает задачу классификации. Любой символ или слово можно составить из конечного множества комбинаций штрихов. Таким образом, трудно решаемая задача распознавания слитно написанного слова распадается на две или несколько (в зависимости от подхода) относительно простых задачи.

В данной работе рассмотрен один из возможных методов моделирования сегментации слитного текста, отличающийся при компьютерной реализации высоким быстродействием. В общем виде процесс сегментации можно описать функцией:

$$I^S = S(I) \quad (1)$$

где I^S - сегментированное изображение, I - исходное изображение, а S - сегментирующая функция.

Необходимо конкретизировать вид этой функции и на его основе разработать алгоритм решения задачи сегментации. Информация о цвете и яркости с точки зрения сег-

ментации изображения не представляет интереса, поэтому первой операцией будет бинаризация — приведение изображения к чисто черно-белому формату. Традиционно эта задача решается с использованием σ -функции:

$$\sigma = \begin{cases} 0, & x < x_0 \\ 1, & x \geq x_0 \end{cases}, \quad (2)$$

где x - входное значение, x_0 - пороговое значение функции. Однако такое представление имеет существенный недостаток, так как значение x_0 может различаться в разных участках изображения. Поэтому для бинаризации изображения используем функцию вида:

$$\theta = \begin{cases} 0, & x < x_0 \\ 1, & x > x_0 \end{cases}, x_0 = \overline{I_n(\vec{x})} + b, \quad (3)$$

где I_n - последовательность пикселей изображения I длиной n , \vec{x} - вектор координат текущей точки изображения (x, y) , b - смещение, подбираемое экспериментально.

После бинаризации изображения следует удалить остаточные пиксели фона, которые образовались вследствие выбора низкого порога яркости пикселя в предыдущем алгоритме. Удаление происходит следующим образом. Из изображения выделяются четыре пикселя по следующей формуле:

$$f(n, \vec{x}) = \begin{cases} n = 0, (x_1, x_2) \\ n = 1, (x_1 + 1, x_2) \\ n = 2, (x_1, x_2 + 1) \\ n = 3, (x_1 + 1, x_2 + 1) \end{cases}, \quad (4)$$

где n — порядковый номер соседа обрабатываемого пикселя.

Обрабатываемым является пиксель $n = 0$. Далее определяется суммарная яркость выделенных пикселей:

$$B = \sum_{x=0}^3 f(i, \vec{x}). \quad (5)$$

Если она больше единицы, то пиксель помечается белым: где $B(\vec{x})$ — яркость в точке с координатами \vec{x} .

После проведения процедуры бинаризации (согласно (3)), и удаления остаточных фоновых пикселей (4), изображение подготовлено для процедуры скелетизации.

Большая часть массы подобного рода алгоритмов базируется на выделении средней линии фигуры, после чего лишние пиксели удаляются. Однако, можно выделять край линии, и при таком подходе алгоритм получается заметно проще.

Из изображения выделяются четыре пикселя (проход слева-направо, сверху вниз), после чего формируется матрица размерностью 2×2 , в которую заносятся выделенные

пиксели. Предлагаемый алгоритм скелетизации основан на алгоритме [5]:

$$N_w(\vec{x}_i) = \sum_{i=1}^4 \sigma_w(B(\vec{x}_i)), \quad (6)$$

$$\sigma_w = \begin{cases} 1, x = 1 \text{ (белый)} \\ 0, x = 0 \text{ (черный)} \end{cases}, \quad (7)$$

$$N_{0 \rightarrow 1}(\vec{x}_i) = \sum_{i=1}^4 \nabla_{0 \rightarrow 1}^i B(\vec{x}_i), \quad (8)$$

$$\nabla_{0 \rightarrow 1}^i = \begin{cases} 1, B(\vec{x}_i) - B(\vec{x}_{i+1}) = -1, i \in [1, 3] \\ 0, B(\vec{x}_i) - B(\vec{x}_{i+1}) \neq -1, i \in [1, 3] \\ 1, B(\vec{x}_i) - B(\vec{x}_1) = -1, i = 4 \\ 0, B(\vec{x}_i) - B(\vec{x}_1) \neq -1, i = 4 \end{cases}. \quad (9)$$

Таким образом, с учетом (6) - (9), функция сегментации (для указанной точки) примет вид:

$$I^S(\vec{x}) = S(I'(\vec{x})), \quad (10)$$

где:

$$S = \begin{cases} 0, 0 \leq N_w \leq 2, N_{0 \rightarrow 1} = 1 \\ 1, N_w > 2, N_{0 \rightarrow 1} = 1 \\ 1, N_{0 \rightarrow 1} \neq 1 \end{cases}. \quad (11)$$

Пример изображения до и после обработки по формулам (10), (11) показан на рис.1.

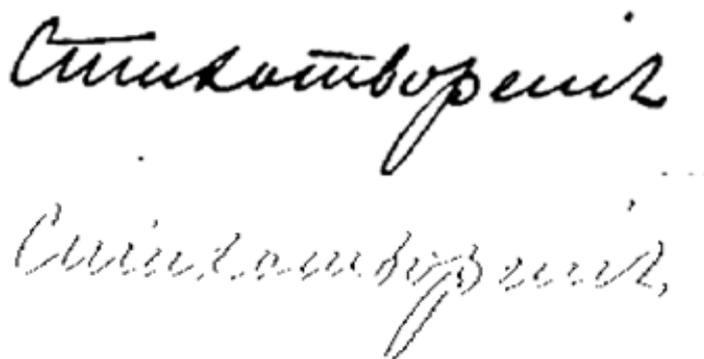


Рис.1. Текст до и после сегментации

Как можно видеть, из символов успешно выделены наборы однотипных сегментов, которые можно легко отделить друг от друга (например используя алгоритм potrace [3]), и распознать. Одновременно, с использованием potrace может быть решена задача устранения пятен. На вход блока распознавания же будет поступать не растровое изображение, а определённым образом представленный набор кривых.

Таким образом, задача моделирования слитного рукописного текста находит свое решение. Результат может быть использован в качестве математической основы при разработке распознающих систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Авраменко, А. «Компьютер читает» [Электронный документ] / <http://ocrai.narod.ru/fr.html>
2. Gillies, A., Hepp, D., Rovner, R., Whalen, M. Handwritten Text Recognition System for Processing Census Forms [Text] // Proceedings of the IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics, vol. 3, pp. 2335-2340, October 1995.
3. Selinger, P. Potrace: a polygon-based tracing algorithm [Электронный документ] / <http://potrace.sourceforge.net>, 2003.
4. Chen, Y.K., Wang J.F. Segmentation of Handwritten Connected Numeral String Using Background and Foreground Analysis [Text] // ICPR00, Vol II: 598-601, 2000.
5. Suen, H.M., Wang J.F. Segmentation of Uniform Colored Text from Color Graphics Background [Text] // VISIP-144, 1997, P. 317-322.
6. Gillies, A., Hepp D., Rovner R., Whalen M. Handwritten Text Recognition System for Processing Census Forms [Text] // Proceedings of the IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics, vol. 3, pp. 2335-2340, October 1995.
Gader, P. D., Mohamed M., Chiang J. H. [Text] // Segmentation-Based Handwritten Work Recognition», Proceedings of the USPS Advanced Technology Conference, Washington, DC, 1992.
Kimura, F., Shridar M., Narasimhamurthi N. Lexicon Directed Segmentation-Recognition Procedure for Unconstrained Handwritten Words [Text] // Proceedings of the Third International Workshop on Frontiers in Handwriting Recognition, Buffalo, NY, 1993.
7. Michael, D. Garris. Component-Based Handprint Segmentation Using Adaptive Writing Style Model [Text] // NISTIR 5843 (Internal report of National Institute of Standards and Technology).
8. Михайлов, А. А., Постников В. В. Алгоритмы сегментации рукопечатных символов [Текст] // Сборник трудов Института системного анализа РАН, 1999 г.

**MATHEMATICAL CONCEPT OF UNCONSTRAINED
HANDWRITTEN TEXT SEGMENTATION PROCESS**

E. Dolgova, D. Kurushin

*Perm State Technical University
29, Komsomolsky Avenue, Perm, Russia*

Abstract: To take care of variability involved in the writing style of different individuals in this paper we propose a robust scheme to segment unconstrained handwritten texts into primitives, which can be easily recognized later. While most similar works concentrated on searching for middle line of the character we decided to extract an outer line. This approach leads to much simpler implementation and acceptable quality of segmentation.

Key words: unconstrained handwritten text, recognition, segmentation, model.

ТЕХНОЛОГИИ И МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ

УДК 530.12:531.18+378.147

ПОНЯТИЕ СОБСТВЕННОЙ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ СИСТЕМЫ ЧАСТИЦ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МЕХАНИКЕ

И.В. Гордеев, А.Н. Малинин

*Липецкий государственный педагогический университет
398020, Липецк, ул. Ленина, 42*

Аннотация. В статье вводится понятие собственной релятивистской кинетической энергии. Показана его фундаментальная значимость в кинематике ядерных реакций и процессов столкновений элементарных частиц. Методически обоснована необходимость введения этого понятия при изложении основ теории относительности в курсах теоретической физики классических и педагогических университетов.

Ключевые слова: собственная кинетическая энергия, релятивистская механика, мировой постулат Минковского, ядерные реакции, процессы столкновений элементарных частиц.

В ядерных реакциях и процессах столкновения элементарных частиц, как будет показано ниже, фундаментальную значимость играет понятие собственной релятивистской кинетической энергии системы частиц. Однако в вузовских учебниках физики и в монографиях по теории относительности это понятие не вводится (см., например, [1-3] и др.; в качестве исключения можно назвать школьный учебник [4] для классов с углубленным изучением физики), что безусловно затрудняет понимание с энергетической точки зрения процессов столкновений элементарных частиц, составляющих содержание одного из разделов современной экспериментальной и теоретической физики.

Данная статья восполняет названный пробел. Ее методический материал может быть непосредственно использован в преподавании основ релятивистской механики студентам классических и педагогических университетов.

Изложение вопроса предлагается начать с определения собственной кинетической энергии совокупности частиц в классической механике. Ограничимся для простоты случаем совокупности двух частиц массами m_1 , m_2 . Пусть в лабораторной системе отсчета они движутся со скоростями соответственно \vec{v}_1 , \vec{v}_2 . Их суммарная кинетическая энергия в этой системе отсчета: $T = (m_1\vec{v}_1^2 + m_2\vec{v}_2^2)/2$, а импульс $\vec{p} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$. Перейдем в систему отсчета центра масс данной совокупности частиц. По определению в такой системе отсчета их суммарный импульс: $\vec{p}' = m_1\vec{v}'_1 + m_2\vec{v}'_2 = 0$. Если \vec{v}_c – скорость центра масс совокупности частиц, то по классическому закону сложения скоростей: $\vec{v}_1 = \vec{v}_c + \vec{v}'_1$, $\vec{v}_2 = \vec{v}_c + \vec{v}'_2$. Тогда суммарная кинетическая энергия совокупности частиц в системе отсчета центра масс:

$$T' = (m_1\vec{v}'_1{}^2 + m_2\vec{v}'_2{}^2)/2 = \left[m_1 (\vec{v}_1 - \vec{v}_c)^2 + m_2 (\vec{v}_2 - \vec{v}_c)^2 \right] / 2 .$$

Принимая во внимание равенство: $(m_1 + m_2)\vec{v}_c = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$, получим:

$$T' \equiv T_0^{кл.} = \frac{\mu v_{отн.}^2}{2}, \quad (1)$$

где $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ – приведенная масса совокупности двух частиц, $\vec{v}_{отн.} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$ – их от-носительная скорость.

Суммарную кинетическую энергию совокупности двух частиц в системе отсчета центра масс, выражаемую формулой (1), назовем *классической собственной кинетической энергией совокупности двух частиц*.

Обратим внимание на то, что величина $T_0^{кл.} = inv$, т. е. ее значение не зависит от выбора системы отсчета. Кроме того, она имеет смысл только для совокупности двух и более частиц (для одной частицы $T_0^{кл.} \equiv 0$). Величина $T_0^{кл.} < T$, т. к. согласно классической теоремы Кёнига: $T = (m_1 + m_2)\vec{v}_c^2/2 + T_0$, в чем можно убедиться непосредственно.

Рассмотрим неупругое столкновение двух частиц, в результате которого образуется одна частица массой $M = m_1 + m_2$, движущаяся со скоростью \vec{v}_c . До столкновения кинетическая энергия совокупности частиц $T_1 = T$, а после столкновения $T_2 = (m_1 + m_2)\vec{v}_c^2/2$. Разность $\Delta T = T_2 - T_1 = -T_0^{кл.}$, причем вначале $T_0^{кл.}$ (начальн.) = $\mu\vec{v}_{отн.}^2/2$, а в итоге $T_0^{кл.}$ (конечн.) $\equiv 0$. Куда же пропала собственная кинетическая энергия начальной совокупности частиц? Очевидно, что она перешла во внутреннюю энергию вновь образовавшейся частицы массой $M = m_1 + m_2$.

В качестве примера можно назвать лобовое столкновение двух автомобилей. Именно собственная кинетическая энергия, определяемая формулой (1) – источник их деформации и разрушения.

Заметим также, что при упругом столкновении частиц их собственная кинетическая энергия сохраняется.

Понятие собственной кинетической энергии совокупности частиц можно определить и в релятивистской схеме Эйнштейна. Однако последняя формально носит квазиклассический характер и связана с условным определением координатной одновременности [5]. Следуя тому, что специальная теория относительности есть теория, в сущностной основе которой лежит мировой постулат Минковского и соответственно пространство-время Минковского с псевдоевклидовой геометрией [6], введем понятие собственной кинетической энергии совокупности частиц в рамках релятивистской схемы Минковского, опираясь на понятие псевдоевклидова вектора – объекта, не зависящего от выбора системы координат и, следовательно, от определения координатной одновременности. При этом предлагаемый здесь методический подход будет несколько отличаться от того, как понятие собственной кинетической энергии совокупности частиц было введено А.Н. Малининым [7].

В мире Минковского совокупность двух свободных частиц представляется двумя прямыми мировыми линиями. Псевдоевклидовы векторы импульса частицы: $\vec{P}_1 = m_1\vec{V}_1$,

$\vec{P}_2 = m_2 \vec{V}_2$, где \vec{V}_1, \vec{V}_2 – псевдоевклидовы векторы скоростей, причем $\vec{V}_1^2 = \vec{V}_2^2 = 1$ (здесь релятивистская постоянная $c \equiv 1$). Поэтому $\vec{P}_1^2 = m_1^2, \vec{P}_2^2 = m_2^2$.

По определению *собственной релятивистской кинетической энергии* совокупности двух свободных частиц назовем величину

$$T_0 \equiv \sqrt{(\vec{P}_1 + \vec{P}_2)^2} - \left(\sqrt{\vec{P}_1^2} + \sqrt{\vec{P}_2^2} \right). \quad (2)$$

Сразу заметим, что конструкция (2) означает, что T_0 – инвариантная величина. Она не зависит ни от выбора пространственно-временной сетки в заданной инерциальной системе отсчета, ни от выбора самой инерциальной системы отсчета. Таким образом, T_0 – объективная энергетическая характеристика совокупности свободных частиц.

Поскольку $\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \vec{P}$ – псевдоевклидов вектор импульса совокупности двух свободных частиц как целого и $\vec{P}^2 = M^2$, где M – масса этого целого или, иначе, эквивалентной исходной совокупности двух свободных частиц некой «суперчастицы», то формула (2) может быть записана так:

$$T_0 = M - (m_1 + m_2), \quad (3)$$

т. е. собственная релятивистская кинетическая энергия совокупности двух свободных частиц выражается разностью между массой M эквивалентной «суперчастицы» и суммарной массой $(m_1 + m_2)$ частиц.

Сравнивая формулы (2), (3) с выражением (1) величины $T_0^{кл}$ и учитывая, что в классической механике $M = m_1 + m_2$, обратим внимание на то, что понятия о величинах T_0 и $T_0^{кл}$ существенно различны и никакого соответствия между ними нет, вопреки распространенному в литературе по теории относительности ошибочному утверждению, что при малых скоростях релятивистская механика будто бы переходит в классическую механику. Да, определенное соответствие отдельных соотношений релятивистской механики в неадекватной квазиклассической форме и соотношений классической механики можно установить. Но концептуального соответствия между ними, как справедливо замечает Т. Кун [8, с. 139-140], нет и быть не может, тем более, если иметь в виду адекватную форму выражения релятивистской механики на языке понятий пространства-времени Минковского.

Формула (2) непосредственным образом обобщается на случай совокупности n свободных частиц:

$$T_0 = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n \vec{P}_i \right)^2} - \sum_{i=1}^n \sqrt{\vec{P}_i^2}, \quad (4)$$

что иначе выражается простым равенством

$$T_0 = M - \sum_{i=1}^n m_i . \quad (5)$$

Величина T_0 в релятивистской механике, как и величина $T_0^{кл}$ в классической механике, имеет смысл только для совокупности двух и более частиц. В случае одной частицы $T_0 \equiv 0$. Вместе с тем возможно (как и для $T_0^{кл}$) $T_0 = 0$ для совокупности свободных частиц (масса такой совокупности $M = \sum m_i$). Тогда из выражения (4) следует:

$$\left(\sum_{i=1}^n \vec{P}_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n \vec{P}_i^2 + 2 \sum_{i,j=1}^n \sqrt{\vec{P}_i^2} \sqrt{\vec{P}_j^2} , \quad i \neq j . \quad (6)$$

Из равенства (6), поскольку $\left(\sum_{i=1}^n \vec{P}_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n \vec{P}_i^2 + 2 \sum_{i,j=1}^n \sqrt{\vec{P}_i^2} \sqrt{\vec{P}_j^2} \operatorname{ch} \varphi_{ij}$, получим $\varphi_{ij} = 0$, т. е. прямые мировые линии частиц параллельны. Иными словами, относительные скорости всех пар частиц равны нулю.

Формула (4) применима и к совокупности безмассовых частиц – фотонов (их линии в пространстве-времени прямые, имеют нулевую длину и называются изотропными). В таком случае $\vec{P}_i^{*2} = 0$ (где \vec{P}_i^* – псевдоевклидов импульс i -го фотона совокупности), и собственная кинетическая энергия совокупности фотонов выражается формулой:

$$T_0^* = \sqrt{2 \sum_{i,j=1}^n \vec{P}_i^* \vec{P}_j^*} . \quad (7)$$

Отсюда следует, что $T_0^* = 0$, если все пары скалярных произведений $\vec{P}_i^* \vec{P}_j^* = 0$. Это имеет место только в случае, когда изотропные прямые совокупности фотонов не пересекаются друг с другом, т. е. параллельны.

В релятивистской механике, так же как и в классической, имеет место теорема Кёнига в форме:

$$T = T_0 + T_c , \quad (8)$$

где T – суммарная кинетическая энергия совокупности частиц в системе отсчета лабораторного наблюдателя с псевдоевклидовым вектором скорости \vec{U} :

$$T = \vec{U} \cdot \sum_{i=1}^n \vec{P}_i - \sum_{i=1}^n \sqrt{\vec{P}_i^2} , \quad (9)$$

T_0 – собственная релятивистская кинетическая энергия совокупности частиц, определяемая формулой (4), T_c – кинетическая энергия центра масс совокупности частиц:

$$T_c = \bar{U} \cdot \sum_{i=1}^n \bar{P}_i - M \quad (10)$$

Рассмотрим ядерную реакцию типа:



где X, Y – ядра, вступившие в реакцию (столкновение ядер); A, B – ядра, образовавшиеся после реакции.

По определению энергетический выход ядерной реакции (или, кратко, ее энергия):

$$Q = \Delta T \quad (12)$$

где ΔT – разность суммарных лабораторных кинетических энергий совокупностей конечных и начальных ядер реакции, т. е. в случае (11): $\Delta T = (T_A + T_B) - (T_X + T_Y)$.

Так как в процессе ядерной реакции $\sum_{i=1}^n \bar{P}_i = const$ (закон сохранения релятивистского импульса замкнутой совокупности частиц, в рассматриваемом случае – ядер), то очевидно, что $T_c = const$, и тогда согласно теореме Кёнига (8):

$$\Delta T = \Delta T_0 \quad (13)$$

Поэтому

$$Q = \Delta T_0 \quad (14)$$

т. е. энергия ядерной реакции определяется разностью собственных кинетических энергий совокупностей конечных и начальных ядер.

Учитывая теперь равенство (5), находим: $\Delta T_0 = -\Delta(\sum m_i)$ и, таким образом, получим выражение:

$$Q = -\Delta\left(\sum_{i=1}^n m_i\right) \quad (15)$$

согласно которому энергия ядерной реакции может быть найдена посредством вычисления разности суммарных масс начальных и конечных продуктов реакции.

Учтем, что согласно фундаментальному релятивистскому закону взаимосвязи массы и энергии масса ядра выражается равенством:

$$m_i = \left(\sum m_k^*\right)_i + W_i \quad (16)$$

где $\sum m_k^*$ – суммарная масса частиц (нуклонов – протонов и нейтронов), составляющих ядро; W_i – энергия связи ядра ($W_i < 0$).

Поскольку в процессе ядерной реакции имеет место закон сохранения числа нуклонов, то из соотношений (15), (16) следует:

$$Q = -\Delta W, \quad (17)$$

где ΔW – разность суммарных энергий связи конечных и начальных ядер реакции.

Из равенств (14), (17) следует $\Delta T_0 = -\Delta W$, т. е. $\Delta(T_0 + W) = 0$. Таким образом, получим следующий *релятивистский закон сохранения для ядерных реакций*:

$$T_0 + W = const, \quad (18)$$

означающий, что *собственная кинетическая энергия вместе с суммарной энергией связи совокупности ядер представляет собой величину, сохраняющуюся при ядерных реакциях*.

Именно закон (18) позволяет определить по энергиям связи заданных исходных ядер собственную кинетическую энергию их совокупности, необходимую для осуществления реакции этих ядер.

Пусть задана совокупность двух свободных элементарных частиц a, b массами $m_a = \sqrt{\vec{P}_a^2}$, $m_b = \sqrt{\vec{P}_b^2}$, где \vec{P}_a, \vec{P}_b псевдоевклидовы импульсы частиц. Согласно определению (4) собственная кинетическая энергия этой совокупности частиц:

$$T_0 = \sqrt{(\vec{P}_a + \vec{P}_b)^2} - \left(\sqrt{\vec{P}_a^2} + \sqrt{\vec{P}_b^2} \right). \quad (19)$$

Допустим, что частица b в системе отсчета лабораторного наблюдателя покоится, а частица a , движется в направлении к частице b . В результате их кратковременного столкновения образуются новые элементарные частицы α, β массами $m_\alpha = \sqrt{\vec{P}_\alpha^2}$, $m_\beta = \sqrt{\vec{P}_\beta^2}$. Ставится задача: определить пороговую кинетическую энергию реакции $a + b \rightarrow \alpha + \beta$, т. е. минимальную кинетическую энергию частицы-снаряда a в системе отсчета лабораторного наблюдателя, при которой данная реакция оказывается возможной.

Порог рассматриваемой реакции определяется тем, что собственная кинетическая энергия совокупности образовавшихся частиц равна нулю:

$$T'_0 = \sqrt{(\vec{P}_\alpha + \vec{P}_\beta)^2} - \left(\sqrt{\vec{P}_\alpha^2} + \sqrt{\vec{P}_\beta^2} \right) = 0. \quad (20)$$

Учитывая в равенстве (20) закон сохранения псевдоевклидова импульса $\vec{P}_a + \vec{P}_b = \vec{P}_\alpha + \vec{P}_\beta$, имеем соотношение

$$(\vec{P}_a + \vec{P}_b)^2 = (m_a + m_b)^2 . \quad (21)$$

Отсюда следует равенство:

$$(m_a + m_b)^2 + 2m_a m_b (\text{ch}\varphi - 1) = (m_a + m_b)^2 , \quad (22)$$

где $\text{ch}\varphi = (e^\varphi + e^{-\varphi})/2$ – гиперболический косинус, $i\varphi$ – угол между псевдоевклидовыми векторами \vec{P}_a, \vec{P}_b , а φ – быстрота частицы a относительно частицы b .

Кинетическая энергия частицы a в системе отсчета лабораторного наблюдателя определяется выражением:

$$T_a = \vec{U} \cdot \vec{P}_a - \sqrt{\vec{P}_a^2} , \quad (23)$$

где $\vec{U} = (1, 0)$ – псевдоевклидов вектор скорости лабораторного наблюдателя.

Так как $\vec{U} \cdot \vec{P}_a = m_a \text{ch}\varphi$, $\sqrt{\vec{P}_a^2} = m_a$, то

$$T_a = m_a (\text{ch}\varphi - 1) . \quad (24)$$

Тогда из равенства (22) следует искомая величина:

$$T_a^{\text{нороз}} = \frac{(m_a + m_b)^2 - (m_a + m_b)^2}{2m_b} . \quad (25)$$

В заключение резюмируем следующее. Собственная релятивистская кинетическая энергия представляет собой фундаментальную величину – инвариантную энергетическую характеристику заданной совокупности частиц любой природы. Именно поэтому, как показано выше, она столь физически значима в ядерных процессах и в явлениях столкновений элементарных частиц.

ЛИТЕРАТУРА

1. Матвеев, А.Н. Механика и теория относительности [Текст] / А.Н. Матвеев. – М.: Высшая школа, 1976. – 416 с.
2. Бондарев, Б.В. Курс общей физики: в 3 кн. Кн. 1. Механика [Текст] / Б.В. Бондарев, Н.П. Калашников, Г.Г. Спирин. – М.: Высшая школа, 2003. – 352 с.
3. Мёллер, К. Теория относительности [Текст] / К. Мёллер. – М.: Атомиздат, 1975. – 400 с.

4. Физика: Учеб. для 11 кл. с углубл. изучением физики [Текст] / А.Т. Глазунов, О.Ф. Кабардин, А.Н. Малинин и др.; Под ред. А.А. Пинского, О.Ф. Кабардина. – М.: Просвещение, 2005. – 448 с.
5. *Эйнштейн, А.* Собрание научных трудов: в 4 томах [Текст] / А. Эйнштейн. М.: Наука, 1965. – 700 с.
6. *Логунов, А.А.* Лекции по теории относительности и гравитации: Современный анализ проблемы [Текст] / А.А. Логунов. – М.: Наука, 1987. – 272 с.
7. *Малинин, А.Н.* Методические вопросы теории относительности [Текст] / А.Н. Малинин. – Липецк: Изд-во ЛГПИ, 2000. – 267 с.
8. *Кун, Т.* Структура научных революций [Текст] / Т. Кун. – М.: Прогресс, 1977. – 300с.

CONCEPT OF INTRINSIC KINETIC ENERGY SYSTEM OF PARTICLES IN RELATIVISTIC MECHANICS

I. Gordeyev, A. Malinin

*Lipetsk State Pedagogical University
398020, Lipetsk, Lenina, 42*

Abstract. The article introduces the concept of intrinsic relativistic kinetic energy. Its fundamental significance in kinetics of nuclear reaction and the process of elementary particles collisions were shown. The necessity of introduction of this concept in teaching the basics of the theory of relativity in theoretical physics courses in both classical and pedagogical universities was methodically substantiated.

Key words: inherent kinetic energy, relativistic mechanics, Minkovski's world postulate, nuclear reaction, collision process of elementary particles.

УДК 37.016:51

ЗАДАЧА О ПОГОНЕ

М.В.Самоявчева, Л.И. Федоров

*Государственный университет управления
109542, Москва, Рязанский пр., 99*

Аннотация. На примере задачи о погоне проводится сравнение двух дополняющих друг друга подходов к изучению данной темы, направленных на повышение познавательной активности учащихся при изучении динамических систем: - с использованием дифференциальных уравнений и с применением имитационной модели. Графические иллюстрации выполнены в среде MathCad и NetLOGO.

Ключевые слова: задача о погоне, динамическая система, дифференциальные уравнения, имитационная модель.

Задача состоит в определении траектории, по которой движется догоняющий (хищник, пиратское судно, полицейский и т.п.), если преследуемый (жертва, торговое судно, нарушитель и пр.) движется по заданной кривой, причем направление движения догоняющего всегда направлено на преследуемого.

Пусть $P = (x, y)$ – точка на кривой, соответствующей траектории догоняющего, а $Q = (\xi, \eta)$ – точка на траектории преследуемого, последняя пусть задана уравнением

$$f(\xi, \eta) = 0. \quad (1)$$

По условию задачи тангенс наклона касательной к кривой догоняющего

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\eta - y}{\xi - x}. \quad (2)$$

Относительно соотношения скоростей предположим, что скорость по величине догоняющего в k раз больше преследуемого

$$\frac{ds}{dt} = k \frac{d\sigma}{dt}, \quad (3)$$

где ds и $d\sigma$ - элементы кривых соответственно догоняющего и преследователя.

Тогда имеем

$$dx^2 + dy^2 = k(d\xi^2 + d\eta^2), \quad (4)$$

которое можно преобразовать к виду

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = k^2 \left[\left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2 \right]. \quad (5)$$

Из соотношений (1) и (2), дифференцированием по x получим еще два уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{d\eta}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}(\xi - x) + \frac{dy}{dx} \frac{d\xi}{dx} . \quad (7)$$

Имея соотношения выражения для производных $\frac{d\xi}{dx}$ и $\frac{d\eta}{dx}$ как функции от x , y , первой и второй производной y по x , используя (5), получим нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка для определения траектории догоняющего.

В качестве примера рассмотрим случай, когда преследуемый движется по прямой с постоянной скоростью. Для определенности будем полагать, что прямая направлена вертикально и задается уравнением $\xi = a$. Соответственно составляющая скорости по горизонтальной оси равна нулю:

$$\frac{d\xi}{dx} = 0 .$$

Из уравнения (7) получим:

$$\frac{d\eta}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}(\xi - x) , \quad (8)$$

а когда подставим в (5), то получим:

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = k^2 \left[\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 \right] (\xi - x)^2 . \quad (9)$$

Обозначим $p = \frac{dy}{dx}$. Тогда уравнение (9) можно переписать в виде

$$\frac{kdp}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{dx}{a-x} . \quad (10)$$

Интегрирование (10) дает:

$$k * \operatorname{arsh}(p) = -\ln(a-x) , \quad (11)$$

или, что то же:

$$k * \ln(p + \sqrt{p^2 + 1}) = -\ln(a-x) + C , \quad (12)$$

где C – произвольная постоянная.

Избавляемся от логарифмов и получаем

$$p + \sqrt{1 + p^2} = \frac{C}{(a-x)^{\frac{1}{k}}}. \quad (13)$$

Решение относительно p дает:

$$p = \frac{1}{2} \left(\frac{C}{(a-x)^{1/k}} - \frac{(a-x)^{1/k}}{C} \right). \quad (14)$$

Следующим шагом является решение дифференциального уравнения:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \left(\frac{C}{(a-x)^{1/k}} - \frac{(a-x)^{1/k}}{C} \right). \quad (15)$$

Интегрирование дает для $y(x)$ выражение:

$$y(x) = \frac{1}{2} \left[\frac{k(a-x)^{1+1/k}}{c(k+1)} + \frac{ck(a-x)^{1-1/k}}{(1-k)} \right] + c', \quad (16)$$

где c' – произвольная постоянная (вторая) и $k \neq 1$.

Догоняющий начинает движение в начале координат (выбор системы координат) и его скорость направлена на преследуемого, значит производная dy/dx также равна нулю.

Из этих начальных условий определяем значения обеих произвольных постоянных.

$$c = a^{1/k}, \quad c' = \frac{ka}{k^2 - 1}. \quad (17)$$

Окончательно получаем для нашего примера

$$y(x) = \frac{1}{2} \left[\frac{k(a-x)^{1+1/k}}{a^{1/k}(k+1)} + \frac{a^{1/k}k(a-x)^{1-1/k}}{(1-k)} \right] + \frac{ka}{k^2 - 1}. \quad (18)$$

Выражение внутри скобок можно несколько видоизменить, приведя слагаемые к общему знаменателю и вынося за скобки общий множитель:

$$y(x) = \frac{ka}{2(k^2 - 1)} \left[(k-1) \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{1+1/k} - (k+1) \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{1-1/k} \right] + \frac{ka}{k^2 - 1}. \quad (19)$$

Полученная кривая представлена на рис.1 соответствует $k=6/5$.

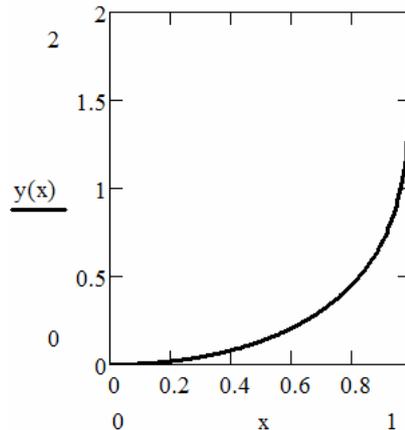


Рис.1. Траектория движения догоняющего

Интегрирование (15) при $k = 1$ дает

$$y(x) = \frac{ka}{2(k^2 - 1)} \left[(k-1) \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{1+1/k} - (k+1) \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{1-1/k} \right] + \frac{ka}{k^2 - 1}. \quad (20)$$

При $k > 1$ догоняющий достигнет преследуемого. Значение координаты x , очевидно, будет равно a , значение координаты y , при котором произойдет «долгожданная» встреча из (19) получается равной:

$$\frac{ka}{k^2 - 1}. \quad (21)$$

При $k = 3/2, 2, 3$ координата точки перехвата равна соответственно $6a/5, 2a/3, 3a/8$.

В более общем случае задача имеет очевидные сложности как при попытках численного решения, и тем более при попытках аналитического решения [1].

В связи с этим представляет интерес, как с прикладной, так и с дидактической стороны использование системы агентного моделирования на базе системы NetLOGO [2].

В среде NetLOGO преследователь и преследуемый изображаются элементарными объектами среды – агентами. В данной среде реализованы операции перемещения, в том числе и действие **movoto**, для задания движения в сторону другого объекта. Применение данного оператора фактически исключает необходимость численного дифференцирования.

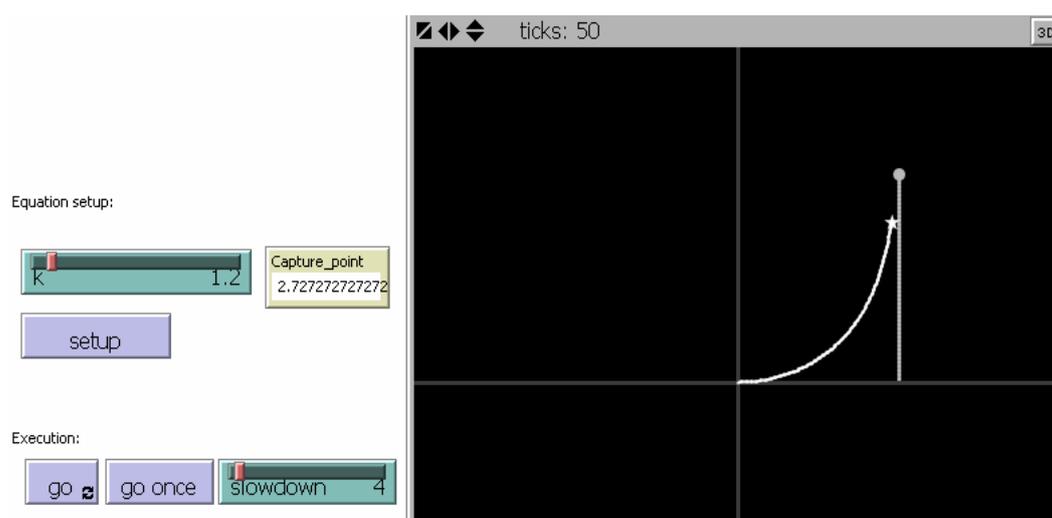


Рис. 2. Траектория преследования в задаче о погоне

Простота программирования, удобные средства визуализации и наличие управляющих элементов делает среду NetLOGO эффективным инструментом при изучении динамических систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Понтрягин, Л. Оптимизация и дифференциальные игры. «Вестник АН СССР», 1978, № 7, с. 10–17.
2. <http://ccl.northwestern.edu/netlogo/>

PURSUIT PROBLEM

M. Samoyavcheva, L. Fedorov

*State University of Management
99, Ryzanskiy Prospekt, Moscow, 109542, Russia*

Abstract: In the article for the problem of pursuit a comparison made of two approaches to the study of this topic, aimed at improving the cognitive activity of students in the study of dynamical systems: first with using differential equations and second with the use of a simulation model. Graphic illustrations are made in the environment MathCad and NetLOGO.

Key words: problem of pursuit, dynamical systems, differential equations, simulation model.

УДК 37.016:51

КОНСТРУИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ ЗАДАЧ

ПО МАТЕМАТИКЕ

Н.М. Антипина, Т.Н. Грань

Московский государственный областной университет,
105005, Москва, ул. Радио, 10 а

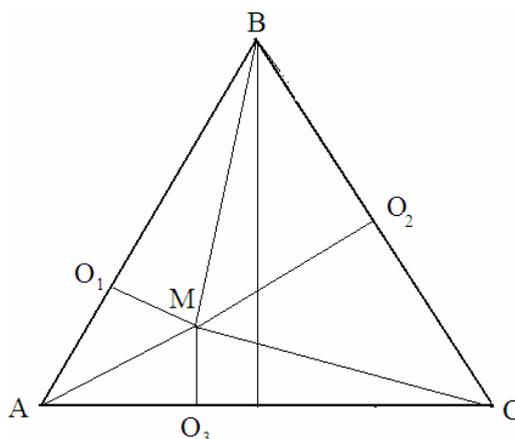
Аннотация. Рассматривается процесс конструирования системы задач по математике для школьников. В задачах предложенной системы исследуются величина суммы расстояний от точки до сторон многоугольника и аналогичная величина в пространстве, когда объектами выступают точка и многогранник.

Ключевые слова: математика, задача, система задач, точка, многоугольник, многогранник, методика.

Во многих видах профессиональной деятельности необходимо владение исследовательскими умениями. Одним из средств, позволяющих формировать такие умения у школьников, является использование в учебном процессе системы взаимосвязанных задач. Попробуем сконструировать систему задач, обладающих этим свойством.

В каждой задаче данной системы рассматриваются выпуклый многоугольник (или многогранник) и точка. Исследуется зависимость величины суммы расстояний от произвольной точки до сторон многоугольника (или граней многогранника). В ходе работы с системой задач школьники должны прийти к выводу, что сумма расстояний не зависит от положения точки и является величиной постоянной.

1. Доказать, что сумма расстояний от любой точки M , лежащей внутри равностороннего треугольника, до всех сторон постоянна и равна высоте треугольника.



Решение. Пусть стороны треугольника ABC равны a , высота – H . Из точки M опустим перпендикуляры на стороны треугольника: $MO_1 \perp AB$, $MO_2 \perp BC$, $MO_3 \perp AC$. Соединим точку M с вершинами треугольника. Исходный треугольник ABC разбивается на три: $\triangle AMB$, $\triangle BMC$ и $\triangle AMC$. Площадь $\triangle ABC$, с одной стороны, можно найти по форму-

ле: $S_{ABC} = \frac{1}{2}aH$, с другой – $S_{ABC} = S_{AMB} + S_{BMC} + S_{AMC} = \frac{1}{2}a \cdot (MO_1 + MO_2 + MO_3)$, приравняв правые части, получим: $MO_1 + MO_2 + MO_3 = H$.

Заметим, что высота правильного треугольника равна трем радиусам (r) вписанной окружности: $r = \frac{S}{p} = \frac{\frac{1}{2}aH}{\frac{1}{2}3a} = \frac{H}{3}$, $H = 3r$. Следовательно, сумма расстояний от точки

M , лежащей внутри равностороннего треугольника, до всех сторон равна не только высоте треугольника, но и трем радиусам вписанной в треугольник окружности, т.е. $MO_1 + MO_2 + MO_3 = 3r$.

Проверим, сохранится ли отмеченный факт для точек, лежащих на стороне или в вершине равностороннего треугольника.

2. Пусть точка M лежит на одной из сторон равностороннего треугольника.

Пусть стороны треугольника ABC равны a , высота – H . Из точки M , лежащей, например, на стороне AC , опустим перпендикуляры на стороны треугольника: $MO_1 \perp AB$, $MO_2 \perp BC$. Соединим точку M с вершинами треугольника. Исходный треугольник ABC разбивается на два: $\triangle AMB$ и $\triangle BMC$. Площадь $\triangle ABC$, с одной стороны, можно найти по формуле: $S_{ABC} = \frac{1}{2}aH$, с другой – $S_{ABC} = S_{AMB} + S_{BMC} = \frac{1}{2}a \cdot (MO_1 + MO_2)$. Приравняв правые части, получим: $MO_1 + MO_2 = H$ или $MO_1 + MO_2 = 3r$.

3. Пусть точка M лежит в одной из вершин равностороннего треугольника.

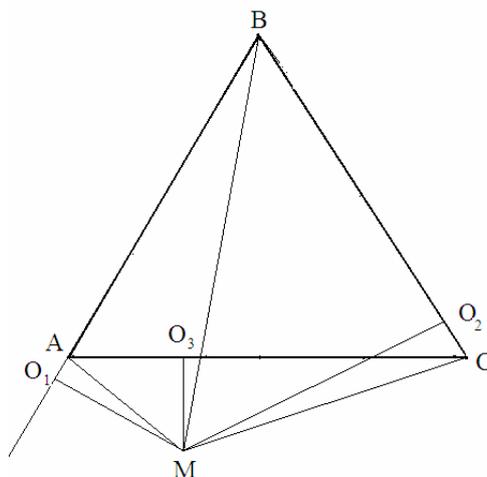
Стороны треугольника ABC равны a , высота – H . Из точки M , лежащей, например, в вершине C , можно опустить только один перпендикуляр на сторону треугольника: $MO_1 \perp AB$. Этот перпендикуляр и является высотой треугольника: $MO_1 = H$ или $MO_1 = 3r$.

Вывод: сумма расстояний от точки M , лежащей внутри равностороннего треугольника (на его стороне или в вершине), до всех сторон треугольника равна его высоте или трем радиусам вписанной в треугольник окружности.

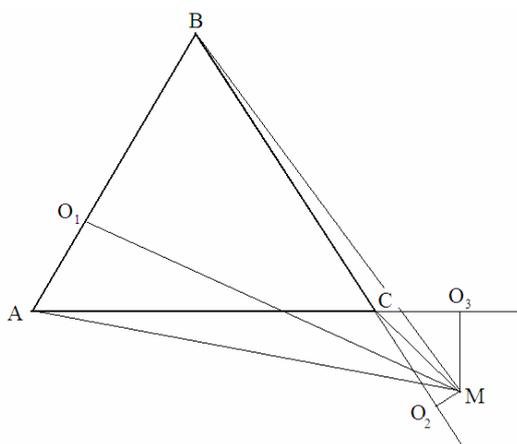
Любопытно рассмотреть случай, когда точка M лежит вне равностороннего треугольника (точка лежит в плоскости треугольника).

4. Пусть точка M лежит, например, «за стороной» AC (точка M и треугольник ABC лежат в разных полуплоскостях, образованных прямой AC). Используем тот же прием решения задачи. Из точки M опустим перпендикуляры на стороны треугольника или их продолжения: $MO_1 \perp AB$, $MO_2 \perp BC$, $MO_3 \perp AC$. Соединим точку M с вершинами треугольника. Площадь $\triangle ABC$, с одной стороны, можно найти по формуле: $S_{ABC} = \frac{1}{2}aH$, с

другой – $S_{ABC} = S_{AMB} + S_{BMC} - S_{AMC} = \frac{1}{2}a \cdot (MO_1 + MO_2 - MO_3)$, приравняв правые части, получим: $MO_1 + MO_2 - MO_3 = H$, т.е. $MO_1 + MO_2 - MO_3 = 3r$ или $MO_1 + MO_2 + (-MO_3) = 3r$.



5. Если точка M лежит, например, «за сторонами» BC и AC (точка M и треугольник ABC лежат в разных полуплоскостях, образованных как прямой AC , так и прямой BC), то, решая задачу тем же способом, опустим перпендикуляры на стороны треугольника или их продолжения: $MO_1 \perp AB$, $MO_2 \perp BC$, $MO_3 \perp AC$.



Соединим точку M с вершинами треугольника. Площадь $\triangle ABC$ можно найти по формуле: $S_{ABC} = \frac{1}{2}aH$ или $S_{ABC} = S_{AMB} - S_{BMC} - S_{AMC} = \frac{1}{2}a \cdot (MO_1 - MO_2 - MO_3)$, приравняв правые части, получим: $MO_1 - MO_2 - MO_3 = H$, т.е. $MO_1 - MO_2 - MO_3 = 3r$ или $MO_1 + (-MO_2) + (-MO_3) = 3r$.

6. Если точка M лежит на продолжении одной из сторон треугольника ABC , например, на продолжении стороны AC , то опускаем перпендикуляры на стороны (или их продолжения) AB и BC : $MO_1 \perp AB$, $MO_2 \perp BC$; соединяем точку M с вершинами треугольника. Площадь $\triangle ABC$, с одной стороны, можно найти по формуле: $S_{ABC} = \frac{1}{2}aH$, с другой – $S_{ABC} = S_{AMB} - S_{BMC} = \frac{1}{2}a \cdot (MO_1 - MO_2)$, приравняв правые части, получим: $MO_1 - MO_2 = H$, т.е. $MO_1 - MO_2 = 3r$. или $MO_1 + (-MO_2) = 3r$.

Вывод: можно считать, что сумма расстояний от точки M до всех сторон равностороннего треугольника равна высоте треугольника или трем радиусам вписанной в треугольник окружности, но расстояния, на которые точка M удалена от прямых, образующих полуплоскости, берутся с минусом.

В последующих задачах подвергнем варьированию количество вершин многоугольника.

7. Рассмотрим правильный четырехугольник (квадрат) $ABCD$ со стороной a . Способ решения задачи прежний: из точки M , лежащей внутри квадрата, опустим перпендикуляры на стороны квадрата: $MO_1 \perp AB$, $MO_2 \perp BC$, $MO_3 \perp CD$, $MO_4 \perp AD$. Соединим точку M с вершинами квадрата. Площадь квадрата $ABCD$, с одной стороны, можно найти по формуле: $S_{ABCD} = a^2$, с другой – $S_{ABCD} = S_{AMB} + S_{BMC} + S_{CMD} + S_{AMD} =$, $= \frac{1}{2} a \cdot (MO_1 + MO_2 + MO_3 + MO_4)$ приравняв правые части, получим: $MO_1 + MO_2 + MO_3 + MO_4 = 2a$. Этот факт мало примечателен, но, заметив, что сторона квадрата равна двум радиусам вписанной в него окружности, получим $MO_1 + MO_2 + MO_3 + MO_4 = 4r$.

Вывод: сумма расстояний от любой точки M , лежащей внутри квадрата, до всех его сторон равна четырем радиусам вписанной в квадрат окружности.

Можно рассмотреть случаи, когда точка M лежит на стороне квадрата или в одной из его вершин.

8. Пусть точка M лежит на одной из сторон квадрата, например, на AD . Из точки M опустим перпендикуляры на стороны квадрата: $MO_1 \perp AB$ и точка O_1 совпадает с точкой A , $MO_2 \perp BC$, $MO_3 \perp CD$ и точка O_3 совпадает с точкой D . Соединим точку M с вершинами квадрата. Площадь $ABCD$ можно найти по формуле: $S_{ABCD} = a^2$ или – как сумму площадей трех треугольников: $S_{ABCD} = S_{AMB} + S_{BMC} + S_{CMD} = \frac{1}{2} a \cdot (MO_1 + MO_2 + MO_3)$, приравняв правые части, получим: $MO_1 + MO_2 + MO_3 = 2a$, т.к. $a = 2r$, то $MO_1 + MO_2 + MO_3 = 4r$.

9. Пусть точка M лежит в одной из вершин квадрата, например, в точке D . Из точки D опустим перпендикуляры на стороны квадрата: $MO_1 \perp AB$ и точка O_1 совпадает с точкой A , $MO_2 \perp BC$ и точка O_2 совпадает с точкой C . Сумма расстояний от точки M (D) до сторон квадрата $MO_1 + MO_2 = 2a$, т.к. $a = 2r$, то $MO_1 + MO_2 = 4r$.

Вывод: сумма расстояний от точки M , лежащей внутри квадрата или на его границе, до всех его сторон равна четырем радиусам вписанной в квадрат окружности.

Рассмотрим случаи, когда точка M лежит за пределами квадрата (точка и квадрат принадлежат одной плоскости).

10. Пусть точка M лежит «за стороной» CD . Способ решения задачи прежний: из точки M опустим перпендикуляры на стороны квадрата: $MO_1 \perp AB$, $MO_2 \perp BC$, $MO_3 \perp CD$, $MO_4 \perp AD$. Соединим точку M с вершинами квадрата. Площадь квадрата $ABCD$, с одной стороны, можно найти по формуле: $S_{ABCD} = a^2$, с другой – $S_{ABCD} = S_{AMB} + S_{BMC} + S_{AMD} - S_{CMD} = \frac{1}{2} a \cdot (MO_1 + MO_2 + MO_4 - MO_3)$, приравняв правые части, получим: $MO_1 + MO_2 + MO_4 - MO_3 = 2a$ или $MO_1 + MO_2 + MO_4 + (-MO_3) = 4r$.

11. Пусть точка M лежит «за сторонами» CD и AD . Как и прежде, из точки M опустим перпендикуляры на стороны квадрата: $MO_1 \perp AB$, $MO_2 \perp BC$, $MO_3 \perp CD$, $MO_4 \perp AD$. Соединим точку M с вершинами квадрата. Площадь квадрата $ABCD$ можно найти через площади треугольников, на которые разбит квадрат:

$$S_{ABCD} = S_{AMB} + S_{BMC} - S_{AMD} - S_{CMD} = \frac{1}{2} a \cdot (MO_1 + MO_2 - MO_3 - MO_4) \quad \text{или по формуле:}$$

$$S_{ABCD} = a^2, \quad \text{приравняв правые части, получим: } MO_1 + MO_2 - MO_3 - MO_4 = 2a \quad \text{или} \\ MO_1 + MO_2 + (-MO_3) + (-MO_4) = 4r .$$

12. Если точка M лежит на продолжении одной из сторон квадрата, например, на продолжении AD , то $2a$ равно сумме расстояний от точки M до сторон квадрата, но расстояние до стороны CD берется с минусом.

Вывод: можно считать, что сумма расстояний от точки M до всех сторон квадрата равна четырем радиусам вписанной в квадрат окружности, но расстояния, на которые точка M удалена от прямых, образующих полуплоскости, берутся с минусом.

13. Рассмотрим правильный пятиугольник $ABCDE$ со стороной a . Из точки M , лежащей внутри пятиугольника, опустим перпендикуляры на его стороны: $MO_1 \perp AB$, $MO_2 \perp BC$, $MO_3 \perp CD$, $MO_4 \perp DE$, $MO_5 \perp AE$. Соединим точку M с вершинами пятиугольника. Площадь $ABCDE$ можно найти по формуле: $S_{ABCDE} = \frac{5}{2} a \cdot r$. В то же время спра-

ведливо равенство: $S_{ABCDE} = S_{AMB} + S_{BMC} + S_{CMD} + S_{DME} + S_{AME} =$

$$= \frac{1}{2} a (MO_1 + MO_2 + MO_3 + MO_4 + MO_5). \quad \text{Приравняв правые части, получим:}$$

$$MO_1 + MO_2 + MO_3 + MO_4 + MO_5 = 5r .$$

Рассмотрим правильный n -угольник $A_1A_2 \dots A_n$ со стороной a . Из точки M , лежащей внутри n -угольника, опустим перпендикуляры на его стороны: $MO_1 \perp A_1A_2$, $MO_2 \perp A_2A_3$, \dots $MO_n \perp A_1A_n$. Соединим точку M с вершинами n -угольника. Площадь $A_1A_2 \dots A_n$ можно найти по формуле: $S_{A_1 \dots A_n} = \frac{n}{2} a \cdot r$. В то же время справедливо равенство:

$$S_{A_1 \dots A_n} = S_{A_1MA_2} + S_{A_2MA_3} + \dots + S_{A_nMA_1} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot (MO_1 + MO_2 + \dots + MO_n). \quad \text{Приравняв правые части,}$$

получим: $MO_1 + MO_2 + \dots + MO_n = n \cdot r$.

14. Рассмотрим правильный n -угольник $A_1A_2 \dots A_n$ со стороной a . Из точки M , лежащей вне n -угольника, например, «за сторонами» $A_{n-1}A_n$ и A_nA_1 , опустим перпендикуляры на его стороны: $MO_1 \perp A_1A_2$, $MO_2 \perp A_2A_3$, \dots $MO_n \perp A_1A_n$. Соединим точку M с вершинами n -угольника. Площадь $A_1A_2 \dots A_n$ можно найти по формуле: $S_{A_1 \dots A_n} = \frac{n}{2} a \cdot r$. В то же время справедливо равенство:

$$S_{A_1 \dots A_n} = S_{A_1MA_2} + S_{A_2MA_3} + \dots + S_{A_{n-2}MA_{n-1}} - S_{A_{n-1}MA_n} - S_{A_nMA_1} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot a \cdot (MO_1 + MO_2 + \dots + MO_{n-2} - MO_{n-1} - MO_n) .$$

Приравняв правые части, получим: $MO_1 + MO_2 + \dots + MO_{n-2} - MO_{n-1} - MO_n = n \cdot r$.

Вывод: сумма расстояний от точки M до всех сторон правильного n -угольника равна n радиусам вписанной в этот многоугольник окружности, но расстояния, на которые точка M удалена от прямых, образующих полуплоскости, берутся с минусом.

Итак, мы рассмотрели задачи, в которых исследовалась зависимость величины суммы расстояний от произвольной точки до сторон многоугольников. Возникает вопрос, будет ли обнаруженная зависимость иметь место при рассмотрении правильных многогранников?

15. Рассмотрим правильный тетраэдр $A_1A_2A_3A_4$ со стороной a . Точка M лежит внутри тетраэдра. Пространственным аналогом расстояния от точки до стороны многоугольника на плоскости является расстояние от точки до грани многогранника. Из точки M опустим перпендикуляры на грани тетраэдра. Таких перпендикуляров четыре: $MO_1 \perp A_1A_2A_4$, $MO_2 \perp A_2A_3A_4$, $MO_3 \perp A_1A_3A_4$, $MO_4 \perp A_1A_2A_3$. Соединим точку M с вершинами тетраэдра. Пространственным аналогом площади плоской фигуры является объем. Объем тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$, с одной стороны, можно найти по формуле:

$$V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12} = \frac{a^2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{12} = \frac{a^2}{\sqrt{3}} \cdot r$$

(где r – радиус вписанной в тетраэдр сферы), с другой сто-

роны–

$$V = V_{A_1A_2A_4M} + V_{A_2A_3A_4M} + V_{A_1A_3A_4M} + V_{A_1A_2A_3M} = \frac{1}{3} S_{\Delta} \cdot (MO_1 + MO_2 + MO_3 + MO_4) =$$

$$\frac{1}{3} \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} (MO_1 + MO_2 + MO_3 + MO_4)$$

(где S_{Δ} – площадь правильного треугольника); приравняв правые части, получим: $MO_1 + MO_2 + MO_3 + MO_4 = 4r$.

16. Рассмотрим куб $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ со стороной a . Из точки M , лежащей внутри куба, опустим перпендикуляры на шесть боковых граней: $MO_1 \perp A_1A_2A_6A_5$, $MO_2 \perp A_2A_3A_7A_6$, $MO_3 \perp A_3A_4A_8A_7$, $MO_4 \perp A_1A_4A_8A_5$, $MO_5 \perp A_5A_6A_7A_8$, $MO_6 \perp A_1A_2A_3A_4$. Соединим точку M с вершинами куба, получим шесть пирамид, в основании каждой из которых лежит квадрат площади a^2 . Объем куба можно найти по формуле: $V = a^3 = a^2 \cdot 2r$ (r – радиус вписанной сферы) или как сумму объемов шести пирамид:

$$V = V_{A_1A_2A_6A_5M} + V_{A_2A_3A_7A_6M} + V_{A_3A_4A_8A_7M} + V_{A_1A_4A_8A_5M} + V_{A_5A_6A_7A_8M} + V_{A_1A_2A_3A_4A_4M} =$$

$$= \frac{1}{3} a^2 (MO_1 + MO_2 + MO_3 + MO_4 + MO_5 + MO_6).$$

Приравняв правые части равенств, получим, что $MO_1 + MO_2 + MO_3 + MO_4 + MO_5 + MO_6 = 6r$.

17. Рассмотрим куб $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ со стороной a . Из точки M , лежащей внутри куба, опустим перпендикуляры на шесть боковых граней: $MO_1 \perp A_1A_2A_6A_5$, $MO_2 \perp A_2A_3A_7A_6$, $MO_3 \perp A_3A_4A_8A_7$, $MO_4 \perp A_1A_4A_8A_5$, $MO_5 \perp A_5A_6A_7A_8$, $MO_6 \perp A_1A_2A_3A_4$. Соединим точку M с вершинами куба, получим шесть пирамид, в основании каждой из которых лежит квадрат площади a^2 . Объем куба можно найти по формуле: $V = a^3 = a^2 \cdot 2r$ (r – радиус вписанной сферы) или как сумму объемов шести пирамид:

$$V = V_{A_1A_2A_6A_5M} + V_{A_2A_3A_7A_6M} + V_{A_3A_4A_8A_7M} + V_{A_1A_4A_8A_5M} + V_{A_5A_6A_7A_8M} + V_{A_1A_2A_3A_4A_4M} =$$

$$= \frac{1}{3} a^2 (MO_1 + MO_2 + MO_3 + MO_4 + MO_5 + MO_6).$$

Приравняв правые части равенств, получим, что $MO_1 + MO_2 + MO_3 + MO_4 + MO_5 + MO_6 = 6r$.

18. Проведя аналогичные выкладки для точки, лежащей внутри октаэдра, получим:

$$V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{3} = \frac{2 \cdot a^2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{a \sqrt{6}}{6} = \frac{2 \cdot a^2}{\sqrt{3}} \cdot r \quad (r - \text{радиус вписанной сферы});$$

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 + V_6 + V_7 + V_8 =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot S_{\Delta} \cdot (MO_1 + MO_2 + MO_3 + MO_4 + MO_5 + MO_6 + MO_7 + MO_8) =$$

$$= \frac{1}{3} a^2 \frac{\sqrt{3}}{4} (MO_1 + MO_2 + MO_3 + MO_4 + MO_5 + MO_6 + MO_7 + MO_8)$$

Приравняв правые части равенств, получаем:

$$MO_1 + MO_2 + MO_3 + MO_4 + MO_5 + MO_6 + MO_7 + MO_8 = 8r.$$

19. Если точка M лежит внутри додекаэдра, грани которого составляют 12 правильных пятиугольников, то с помощью тех подходов к решению получим:

$$V = \frac{a^3}{4} \cdot (15 + 7\sqrt{5}) = a^2 \cdot \frac{a}{4} \cdot \sqrt{10 + \frac{22}{\sqrt{5}}} \cdot \frac{15 + 7\sqrt{5}}{\sqrt{10 + \frac{22}{\sqrt{5}}}} = a^2 \cdot \frac{15 + 7\sqrt{5}}{\sqrt{10 + \frac{22}{\sqrt{5}}}} \cdot r$$

(r – радиус вписанной сферы);

$$V = V_1 + V_2 + \dots + V_{12} = \frac{1}{3} S_{5-ка} (MO_1 + MO_2 + \dots + MO_{12}) = \frac{1}{3} \frac{a^2}{4} \sqrt{25 + 10\sqrt{5}} (MO_1 + \dots + MO_{12})$$

($S_{5-ка}$ – площадь правильного пятиугольника).

Приравняв правые части равенств, получаем:

$$MO_1 + MO_2 + \dots + MO_{12} = 12r \cdot \frac{15 + 7\sqrt{5}}{\sqrt{(10 + \frac{22}{\sqrt{5}})(25 + 10\sqrt{5})}} = 12r \cdot \frac{15 + 7\sqrt{5}}{\sqrt{470 + 210\sqrt{5}}} =$$

$$= 12r \cdot \frac{15 + 7\sqrt{5}}{\sqrt{(15 + 7\sqrt{5})^2}} = 12r$$

20. Рассмотрим последний из правильных многогранников – икосаэдр. Он имеет 20 граней, каждая из которых – правильный треугольник. Точка M лежит внутри икосаэдра. Выкладки, аналогичные предшествующим, позволяют найти объем икосаэдра двумя способами:

1) $V = a^3 \cdot \frac{5}{12} \cdot (3 + \sqrt{5}) = a^2 \cdot \frac{a}{4\sqrt{3}} \cdot (3 + \sqrt{5}) \cdot \frac{5}{\sqrt{3}} = a^2 \cdot \frac{5}{\sqrt{3}} \cdot r$, где r – радиус вписанной сферы.

2) $V = \frac{1}{3} S_{\Delta} (MO_1 + MO_2 + \dots + MO_{20}) = \frac{1}{3} \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} (MO_1 + MO_2 + \dots + MO_{20})$, где S_{Δ} – площадь правильного треугольника.

Приравняв правые части равенств, получаем: $MO_1 + MO_2 + \dots + MO_{20} = 20r$

Вывод: сумма расстояний от точки M до всех граней правильного многогранника равна n радиусам вписанного в этот многогранник сферы, где n – число граней многогранника.

Можно выделить следующие системообразующие признаки рассматриваемой системы задач:

- ✓ наличие двух объектов: многоугольника (многогранника) и точки;
- ✓ исследование во всех задачах величины суммы расстояний от произвольной точки до сторон многоугольника (многогранника);
- ✓ все задачи могут быть решены с помощью метода площадей или метода объемов;
- ✓ возможность выразить исследуемую величину при некоторых условиях либо через высоту фигуры, либо через радиус вписанной окружности (сферы).

Конструируемую систему можно считать открытой, поскольку варьирование отдельных параметров возможно продолжить. Целесообразно провести исследование на плоскости для фигур с равными сторонами, но не равными углами. Например, ромб удовлетворяет этим условиям. В пространстве перейти к исследованию многогранников, у которых грани равны или грани имеют равные площади.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пойа, Д.* Как решать задачу. [Текст] : пособие для учителей / Пойа Д. - М. : Либроком, 2010
2. *Саранцев, Г. И.* Методика обучения математике в средней школе [Текст] : учебное пособие / Г. И. Саранцев. – М. : Просвещение, 2008. – 224 с. : ил.
3. *Саранцев, Г.И.* Упражнение в обучении математике. [Текст] / Г. И. Саранцев. – М. : Просвещение, 2006. – 256 с. : ил.
4. *Стефанова, Н. Л.* Методика и технология обучения математике [Текст] : курс лекций / Н. Л. Стефанова и др. – М. : Дрофа – 2005.
5. *Финкельштейн, В.М.* Когда задача не выходит [Текст] / В. М. Финкельштейн. – М. : Просвещение, 2004.
6. *Фридман, Л.М. Турецкий, Е.Н.* Как научиться решать задачи [Текст] / Л.М Фридман, Е.Н. Турецкий - М. : Просвещение, 2004.

DESIGN OF THE SYSTEM OF TASKS IN MATHEMATICS

N. Antipina, T. Gran

*Moscow Region State University
10a, Radio st., Moscow, 105005, Russia*

Abstract. Process of mathematical tasks system construction for schoolchild is considered. In the tasks of the offered system the sum of distances from the point to polygon sides and similar value in volume for point and polyhedron are examined.

Key words: mathematic, task, the system of the tasks, point, polygon, polyhedron, method.

УДК 681.3.07

МОДЕЛЬ ФОРМИРОВАНИЯ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ КОМПЕТЕНТНОСТИ БУДУЩЕГО УЧИТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ

С.Б. Забелина

*Московский государственный областной университет (МГОУ)
105005, Москва, ул. Радио, 10а*

Аннотация. В статье ставится проблема изменения статуса исследовательской деятельности в профессиональном образовании учителя математики. Автор формулирует первоочередные задачи в организации исследовательской деятельности студентов и предполагает, что успешное их решение возможно в рамках реализации модели формирования исследовательской компетентности. В статье представлена модель формирования исследовательской компетентности будущего учителя математики, указаны организационно-педагогические условия ее реализации, описаны уровни сформированности исследовательской компетентности, рассмотрены формы развития исследовательских компетенций.

Ключевые слова: исследовательская деятельность, исследовательские компетенции, исследовательская компетентность, модель, форма, организация исследовательской деятельности.

Современное высшее профессиональное образование ориентировано на обеспечение высокого качества подготовки специалиста, на формирование его компетентности. В мировой образовательной практике компетентность выступает центральным понятием, так как объединяет в себе интеллектуальную и навыковую составляющие образования и обладает интегративной природой, «вбирая в себя ряд однородных умений и знаний, относящихся к широким сферам культуры и деятельности». В работах отечественных исследователей (А.Л. Андреев, В.А. Болотов, В.А. Байденко, И.А. Зимняя, А.В. Хуторской и др.) отмечается, что компетентностный подход – это методологический фундамент новой, формирующейся парадигмы высшего профессионального образования в России. Главным результатом высшего профессионального образования должны стать не только отдельные знания, умения и навыки по определенным дисциплинам, но способность и готовность выпускника вуза самостоятельно строить свою профессиональную деятельность, самостоятельно выстраивать свое поведение, производить относительно устойчивый ценностный выбор. Первый шаг по пути становления профессиональной компетентности будущих учителей математики приходится на педагогический вуз. В структуре профессиональной компетентности будущих учителей математики можно выделить как нормативную составляющую, позволяющую специалисту реализовать полученный алгоритм деятельности, так и исследовательскую, состоящую в умении осуществлять инновационные преобразования, принимать оптимальные решения в различных проблемных ситуациях. В «Концепции долгосрочного социально-экономического развития Российской Федерации на период до 2020 года» определяется

одно из главных условий развития системы высшего профессионального образования – вовлеченность преподавателей и студентов в фундаментальные и прикладные исследования. «Это позволит не только сохранить известные в мире российские научные школы, но и вырастить новое поколение исследователей, ориентированных на потребности инновационной экономики знаний. Фундаментальные научные исследования должны стать важнейшим ресурсом и инструментом освоения студентами компетентностей поиска, анализа, освоения и обновления информации». Потребность информационного общества в специалистах с высоким уровнем исследовательской компетентности актуализирует создание адекватной модели по ее формированию.

Под исследовательской компетентностью понимаем «интегративное, потенциально развивающееся качество специалиста, объединяющее общие и специальные компетенции, личностные качества и отражающее готовность специалиста к результативному применению имеющихся знаний и опыта в исследовании объектов профессиональной деятельности». Компетентность, как отмечает И.Б. Будник, всегда проявляется в деятельности и не проявленную компетентность «увидеть» нельзя. Формирование исследовательских компетенций будущих учителей математики возможно только в ходе осуществления студентами исследовательской деятельности. К сожалению, анкетирование, проведенное среди студентов старших курсов физико-математического факультета, выявило, что только 12% опрошенных студентов занимаются исследовательской деятельностью. Большинство считает учебную аудиторную деятельность наиболее значимой для себя. Среди опрошенных студентов 53% продемонстрировали невысокий уровень исследовательских компетенций, выполняя предложенные задания на анализ, синтез, сравнение, классификацию фактов, на умение аргументировать выбранный вариант решения проблемы, на умение формулировать логически обоснованные выводы. Природа компетентности такова, что она может проявляться только «в органичном единстве с ценностями человека, то есть при наличии ценностно-смыслового отношения, глубокой личной заинтересованности в данном виде деятельности». Поэтому необходимо изменить статус исследовательской деятельности в профессиональном образовании учителя математики. Она должна стать личностно-значимой, смыслообразующей деятельностью. Исследовательская деятельность студента осуществляется в рамках образовательного процесса в педвузе средствами познания в соответствии с логикой научного поиска. Продуктом ее являются субъективно новые знания о самом исследуемом объекте или о конкретном, или специфическом методе исследования. Но следует отметить, что в результате исследовательской деятельности субъективный характер «открытий» может приобретать определенную объективную значимость и новизну. Первоочередными задачами в организации исследовательской деятельности студентов должны быть: 1) создание условий для раскрытия и реализации личностного исследовательского потенциала каждого студента; 2) отбор и поддержка одаренных студентов для продолжения образования в магистратуре и аспирантуре; 3) целенаправленное формирование исследовательских компетенций в соответствии с требованиями государственных стандартов; 4) усиление исследовательского аспекта содержания учебно-познавательной деятельности студентов в процессе предметной подготовки; 5) переход от субъект-объектных отношений между преподавателем и студентом на субъект-субъектную основу межличностных отношений с четкой ориентацией на саморазвитие студентов. Решение этих задач будет успешным, если в основу организации исследовательской деятельности студентов будет положена модель формирования иссле-

довательской компетентности и созданы организационно- педагогические условия для ее реализации.

Структурно модель формирования исследовательской компетентности состоит из следующих блоков: теоретико-методологического, технологического, критериально-оценочного. Теоретико-методологический блок включает в себя целевой, методологический, когнитивный компоненты. Целевой компонент ориентирует на формирование исследовательских компетенций. Методологический компонент предполагает овладение системой научных знаний о подходах к познанию исследуемых объектов, выявление роли и характера исследовательской деятельности в рамках профессии учителя математики, получение научных представлений о методике и методах исследований. Когнитивный компонент модели обеспечивает высокий уровень интеллектуальных способностей, творческий подход к восприятию и анализу научной информации, выбор методологических основ исследования. Технологический блок включает в себя содержательный и операционно-деятельностный компоненты. Содержательный компонент предполагает обеспечение совокупности условий для организации результативной исследовательской деятельности студентов. Операционно-деятельностный компонент связан с непосредственной технологией осуществления научного творчества, определяет операционный состав исследовательской деятельности студента. Критериально-оценочный блок определяет оценку уровня и динамику сформированности исследовательской компетентности, включает рефлексию собственной исследовательской деятельности студентов и признание ее ценности для будущей деятельности учителя математики и личного опыта. Основными характеристиками модели являются: 1) ее независимость от конкретной реализации в рамках учебной дисциплины и учебного заведения; 2) ее целостность, поскольку все компоненты взаимосвязаны между собой, работают на конечный результат и при изменении внешних условий наблюдается устойчивость этих связей; 3) наличие инвариантной (глобальная цель, принципы) и вариативной (методы, формы и средства достижения цели) составляющих; 4) открытость, так как посредством цели существует выход на социальный заказ общества. Модель формирования исследовательской компетентности будущего учителя математики рассматривается как последовательная система взаимосвязанных действий преподавателя и студентов. В ходе реализации модели осуществляется мониторинг состояния учебно-исследовательской деятельности и научно-исследовательской деятельности студентов, проводится анализ и отбор содержания программного и дополнительного материалов по учебным дисциплинам, осуществляется организация учебного познания как исследования с помощью активных форм и методов аудиторной и внеаудиторной работы, производится обучение комплексному использованию научных методов познания и технологиям решения исследовательских задач в процессе выполнения исследовательских проектов. Реализация модели формирования исследовательских компетенций будущего учителя математики возможна при выполнении следующих организационно-педагогических условий: формирование ценностного отношения к исследовательской деятельности и к ее результатам, развитие творческой активности каждого студента на основе предоставления свободы выбора тематики исследования, учет индивидуального познавательного опыта, создание творческой среды, обеспечивающей единство углубленного изучения учебных дисциплин и самостоятельного исследовательского поиска, повышение квалификации преподавателей по вопросам организации исследовательской деятельности студентов. Уровень исследовательской компетентности будущего

учителя математики диагностируется по шкале: нормативный, функциональный, преобразующий. Исследовательская компетентность студента соответствует нормативному уровню, если выявляются признаки общего характера. Студент проявляет следующие исследовательские компетенции: анализ состояния предмета исследования, оценка результатов исследования, анализ обеспечения процесса исследования, сбор информации и применение знаний в отношении предмета исследования, готовность и проведение исследования, осуществление рефлексии. Исследовательская компетентность студента соответствует функциональному уровню, если выявляются дополнительные признаки прикладного характера. Студент проявляет следующие дополнительные исследовательские компетенции: выстраивание гипотезы, проведение эксперимента, преодоление творческих затруднений, презентация результатов, использование полученных результатов в новых ситуациях. Исследовательская компетентность студента соответствует преобразующему уровню, если выявляются дополнительные признаки профессионального характера. Студент проявляет следующие дополнительные исследовательские компетенции: выбор методологической базы, точное следование цели исследования. Качество исследовательских компетенций будущего учителя математики определяется с помощью таких критериев, как глубина и всесторонность в анализе, полнота выполняемых действий и операций, степень самостоятельности в использовании исследовательского умения, обоснованность собственных суждений и выводов. Основной формой развития исследовательских компетенций будущего учителя математики является учебно-исследовательская деятельность, которая представляет неотъемлемую составную часть учебного процесса. Учебно-исследовательская деятельность должна отражать специфику профессиональной математической и методической подготовки студентов. Содержание ее составляют элементы исследования, производимого студентами в процессе семинарских, лабораторных занятий, в ходе написания рефератов, во время прохождения педагогической практики. Содержание учебных дисциплин должно наполняться заданиями исследовательского характера. Написание курсовых работ и дипломное проектирование – вторая форма развития исследовательских компетенций, регламентируемая образовательным стандартом. Содержание ее составляют самостоятельные научные разработки будущего учителя математики, в которых отражаются умения практического применения и переноса усвоенных знаний и способов деятельности, а также отражается степень освоения методики этого применения. Следующей формой развития исследовательских компетенций, не регламентируемой образовательным стандартом, является научно-исследовательская деятельность студентов, которая отражает взаимосвязь между образовательным процессом и научной деятельностью кафедр педвуза. Научно-исследовательская деятельность студентов объединяет студентов различных курсов, учитывает их индивидуальные научные интересы. В рамках этой деятельности студенты вовлекаются в участие научных конференций, семинаров, мастер-классов. Только создание и функционирование комплексной системы учебно-исследовательской и научно-исследовательской деятельности студентов позволит стимулировать вовлечение студентов в творческий процесс изучения и освоения научных методов, создать условия для самореализации.

Реализация модели формирования исследовательской компетентности приведет к устойчивому повышению интереса студентов к выполнению исследовательских работ, к увеличению числа студентов, понимающих важность роли и ценности исследовательской деятельности в личном и профессиональном становлении.

ЛИТЕРАТУРА

1. Концепция долгосрочного социально-экономического развития Российской Федерации на период до 2020 года.
2. Хуторской, А.В. Ключевые компетенции как результат личностно-ориентированной парадигмы образования // Народное образование.-2003.-№2.
3. Шапкина, М.Б., Багачук А.В. Формирование исследовательской деятельности студентов педагогического вуза в условиях реализации компетентного подхода. Красноярск, 2006
4. Грачев, В.В., Жукова О.А., Орлов А.А Компетентный подход в высшем профессиональном образовании // Педагогика.-2009.-№2
5. Байденко, В.И. Компетенции в профессиональном образовании // Высшее образование в России.-2004.-№4
6. Андреев, А.В. Знания или компетенции // Высшее образование в России.-2005.-№2

**MODEL OF FORMATION OF RESEARCH COMPETENCY OF THE FUTURE
MATHEMATICS TEACHER.**

S. Zabelina

*Moscow Region State University
10a, Radio st., Moscow, 105005, Russia*

Abstract. In the present article the problem of change of the status of research activity in professional education of the mathematics teacher is considered. The author formulates priority problems in the organization of research activity of students and assumes that their successful solution is possible within the limits of realization of model of formation of research competency. In article the model of formation of research competency of the future mathematics teacher is presented, organizational-pedagogical conditions of its realization are specified, levels of progress of research competency are described, forms of development of research competences are considered.

Key words: research activity, research competences, research competency, model, the form, the organization of research activity.

НАШИ АВТОРЫ

Антипина Наталья Михайловна, Московский государственный областной университет, 105005, Москва, ул. Радио, д. 10 а, заведующая кафедрой прикладной математики и информатики, кандидат педагогических наук, доцент; e-mail: nantipina@yandex.ru

Беляев Виктор Васильевич, Московский государственный областной университет, 105005, Москва, ул. Радио, д. 10 а, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической физики МГОУ; e-mail: vic_belyaev@mail.ru

Гераськин Алексей Игоревич Соискатель в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, геологический факультет; e-mail: alexey.geraskin@gmail.com

Гордеев Иван Вячеславович, Липецкий государственный педагогический университет 398020, Липецк, Ленина; e-mail: 42 gorgiv@mail.ru

Грань Татьяна Николаевна, Московский государственный областной университет, 105005, Москва, ул. Радио, д. 10 а, доцент кафедры высшей алгебры, элементарной математики и методики преподавания математики, кандидат педагогических наук, доцент; e-mail: kaf-vaem@mgou.ru

Гринберг Евгений Ефимович, заместетель директора – главный химик ФГУП «ИРЕА», доктор химических наук, профессор, 107076, Москва, Богородский вал, д.3; e-mail: ireon@mail.ru

Гусев Александр Николаевич, Московский государственный областной университет, 105005, Москва, ул. Радио, 10а, кафедра прикладной математики и информатики, доктор технических наук, профессор; e-mail: fakul-fm@mgou.ru.

Долгова Елена Владимировна, Пермский государственный технический университет, доктор экономических наук, профессор кафедры информационных технологий и автоматизированных систем, 614109, г. Пермь, Комсомольский пр. 29, e-mail: elena.dolgova@gmail.com

Жаданов Василий Борисович, сотрудник ФГУП «ИРЕА», 107076, Москва, Богородский вал; e-mail: ireon@mail.ru

Забелина Светлана Борисовна, Московский государственный областной университет, 105005, Москва, ул. Радио, д. 10 а, доцент кафедры высшей алгебры, элементарной математики и методики преподавания математики, старший преподаватель; e-mail: kaf-vaem@mgou.ru

Левин Юрий Исаакович, ФГУП «ИРЕА», 107076, Москва, Богородский вал, 3, кандидат технических наук, ведущий научный сотрудник д.3; e-mail: ireon@mail.ru

Малинин Алексей Николаевич, Липецкий государственный педагогический университет, 398020, Липецк, Ленина, 42; e-mail: gorgiv@mail.ru

Матвеев Олег Александрович, Московский государственный областной университет (МГОУ), 105005, г. Москва, ул. Радио, д.10 а, доцент кафедры математического анализа и геометрии, кандидат физико-математических наук, доцент; e-mail: veyevtam@mail.ru

Наумов Аркадий Валерьевич, сотрудник ФГУП «ИРЕА», 107076, Москва, Богородский вал, д. 3; e-mail: ireon@mail.ru

Нестеренко Елена Леонидовна, Российский университет дружбы народов (РУДН), 117198, ул. Миклухо-Маклая, д.6, тьютор управления по работе со студентами; e-mail: nestelena@mail.ru.

Ракчеева Татьяна Анатольевна, Институт машиноведения РАН, старший научный сотрудник, кандидат технических наук доцент; e-mail: info@hust.ru.

Рябцева Марина Викторовна, ФГУП «ИРЕА», 107076, Москва, Богородский вал, д.3, кандидат химических наук, ведущий научный сотрудник; e-mail: ireon@mail.ru

Самоявчева Марина Васильевна, Государственный университет управления, Рязанский пр., 99, ст.преп кафедры прикладной математики, кандидат экономических наук; e-mail: fakul-fm@mgou.ru.

Санду Роман Александрович, директор ФГУП «ИРЕА», кандидат технических наук, 107076, Москва, Богородский вал; e-mail: irea@org.ru

Стрельникова Инна Евгеньевна, ФГУП «ИРЕА», 107076, Москва, Богородский вал, ведущий научный сотрудник, кандидат химических наук, д.3; e-mail: irea@org.ru

Фёдоров Леонид Иванович, Государственный университет управления, Рязанский пр., 99, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры Информационных систем ГУУ; e-mail: fakul-fm@mgou.ru.

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

<i>Матвеев О.А., Нестеренко Е.Л.</i> Алгебраические свойства некоторых классов аффинно-связных многообразий, близких к симметрическим	3
<i>Ракчеева Т.А.</i> Симметрии полиполярной координации	10

ФИЗИКА

<i>Гринберг Е.Е., Левин Ю.И., Жаданов В.Б., Санду Р.А., Беляев В.В., Рябцева М.В., Наумов А.В., Стрельникова И.Е.</i> Некоторые возможности физической и химической регенерации отходов производств, использующих высокочистый кремний	21
<i>Банникова Е.М., Богданов Д.Л., Геворкян Э.В., Обыденков Ю.Н.</i> Методика исследования анизотропии скорости ультразвука в нематиках при высоких давлениях ...	29
<i>Гусев А.Н.</i> Идентификация свойства сверхпроводимости и прогнозирование новых составов пятикомпонентных оксиарсенидов с повышенной температурой перехода в сверхпроводящее состояние	36
<i>Гераськин А.И.</i> К вопросу о косвенной оценке отношения сигнал/шум в низкочастотной электроразведке с искусственным источником тока	47

КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ

<i>Долгова Е.В., Курушин Д.С.</i> Концепция математического моделирования сегментации слитного рукописного текста	53
---	----

ТЕХНОЛОГИИ И МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ

<i>Гордеев И.В., Малинин А.Н.</i> Понятие собственной кинетической энергии системы частиц в релятивистской механике	58
<i>Самоявчева М.В., Федоров Л.И.</i> Задача о погоне	66
<i>Антипина Н.М., Грань Т.Н.</i> Конструирование системы задач по математике	71
<i>Забелина С.Б.</i> Модель формирования исследовательской компетентности будущего учителя математики	79

НАШИ АВТОРЫ	84
--------------------------	----

CONTENTS

MATHEMATICS

<i>Matveyev O., Nesterenko H.</i> Algebraic properties of some classes of the affinely connected manifolds, close to the symmetric	3
<i>Rakcheeva T.</i> Symmetries of polypolar coordination	10

PHYSICS

<i>Grinberg E., Levin Yu., Jadanov V., Sandu R., Belyaev V., Ryabtseva M., Naumov A., Strel'nikova I.</i> Some possibilities of physical and chemical regeneration of wastes of silicon using production	21
<i>Bannikova E., Bogdanov D., Gevorkyn E., Obydenkov Yu.</i> Technique of research of anisotropy of speed of ultrasound in nematic at high pressures	29
<i>Gusev A.</i> Identification of the properties of superconductivity and forecasting new compositions-pillar oxyselenides with fever in superconductivity	36
<i>Geraskin A.</i> on indirect signal to noise ratio estimation in low-frequency controlled source electroprospecting	47

COMPUTER SCIENCES

<i>Dolgova E., Kurushin D.</i> Mathematical concept of unconstrained handwritten text segmentation process	53
--	----

TECHNOLOGIES AND TECHNIQUES OF TRAINING

<i>Gordeyev I., Malinin A.</i> Concept of intrinsic kinetic energy system of particles in relativistic mechanics	58
<i>Samoyavcheva M., Fedorov L.</i> Pursuit problem	66
<i>Antipina N., Gran T.</i> Design of the system of tasks in mathematics	71
<i>Zabelina S.</i> Model of formation of research competency of the future mathematics teacher	79

OUR AUTHORS	84
-------------------	----

Алгебраические свойства некоторых классов аффинно-связных многообразий, близких к симметрическим / Матвеев О.А., Нестеренко Е.Л. // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2011. №1. С.3-10.

Рассматриваются алгебраические свойства просимметрических, почти симметрических и антисимметрических многообразий аффинной связности, близких к симметрическим пространствам.

Ил.1. Библиогр.19.

УДК 514.7

Симметрии полиполярной координации / Ракчеева Т.А. // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2011. №1. С.10-20.

Вводится полиполярная система координат, формируемая семейством многофокусных лемнискат, полный набор фокусов которой образует ее структурное начало. Произвольная точка плоскости имеет, как и в классической полярной системе координат, полиполярные координаты: метрическую ρ , и угловую φ , являющиеся функциями полярных координат относительно каждого из фокусов. Фокусное представление формы кривой многофокусными лемнискатами позволяет настроить полиполярную систему координат таким образом, чтобы метрическая компонента соответствовала форме заданной кривой. Лемниската и ее фокусная структура имеют одну и ту же группу симметрий. Рассмотрены симметрии полиполярной координации, а также криволинейные симметрии на многофокусных лемнискатах.

Ил.6. Библиогр.7.

УДК 621.215

Некоторые возможности физической и химической регенерации отходов производств использующих высокочистый кремний / Гринберг Е.Е., Левин Ю.И., Жаданов В.Б., Санду Р.А., Беляев В.В., Рябцева М.В., Наумов А.В., Стрельникова И.Е. // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2011. №1. С.21-28.

Рассмотрены вопросы физической и химической регенерации отходов, образующихся при переработке (резке и шлифовке) поликристаллического или монокристаллического кремния с использованием карбида кремния, минерального масла и полиэтиленгликоля. Показана возможность выделения и возвращения в технологические циклы значительной части отходов, что позволяет снизить экологическую нагрузку при производстве электронных компонентов и фотоэлектрических преобразователей (ФЭП).

Ил.4. Табл.4. Библиогр.10.

УДК 534.2:535.36

Методика исследования анизотропии скорости ультразвука в нематиках при высоких давлениях / Банникова Е.М., Богданов Д.Л., Геворкян Э.В., Обыденков Ю.Н. // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2011. №1. С.29-35.

Представлена методика исследования анизотропии скорости ультразвука в нематике Н-37 в температурном интервале от 25 до 70 °С при различных давлениях. Во всех исследованных температурных интервалах существования нематической мезофазы, скорость ультразвука больше в случае параллельной ориентации вектора магнитной индукции и волнового вектора по сравнению с перпендикулярной ориентацией. Вдали ($\Delta T \geq 10\text{K}$) от фазового перехода относительная анизотропия скорости ультразвука практически не зависит от температуры и имеет малое значение. Максимальное влияние магнитного поля на скорость ультразвука имеет место за $\Delta T = 5\text{ K}$ от температуры просветления.

Ил.5. Библиогр.2.

УДК 537.9, 53.096, 53.081.7, 53.043, 539.232

Идентификация свойства сверхпроводимости и прогнозирование новых составов пятикомпонентных оксиарсенидов с повышенной температурой перехода в сверхпроводящее состояние / Гусев А.Н. // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2011. №1. С.36-46.

В статье приведены данные по веществам с рекордно высокими температурами перехода в сверхпроводящее состояние, краткий обзор применений сверхпроводящих веществ в области силовой электроники и микроэлектроники. На основе идентификации сверхпроводящих свойств нового класса железосодержащих сверхпроводящих веществ и выполнено прогнозирование составов этих веществ с температурами сверхпроводящего перехода от 55 до 62,5 К.

Ил.4. Табл.2. Библиогр.19.

УДК 55.550.370:379

К вопросу о косвенной оценке отношения сигнал/шум в низкочастотной электроразведке с искусственным источником тока / А.И. Гераськин // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2011. №1. С.47-52.

В данной статье рассматривается метод косвенной оценки отношения сигнал/шум при работе различными методами низкочастотной электроразведки с искусственным источником тока. Задача определения отношения сигнал/шум является важной как при проведении полевых работ, так и при последующей обработке

данных. Однако невозможно определить это отношение напрямую, так как при измерении истинный сигнал оцифровывается вместе с шумами и помехами. Предложенный метод косвенной оценки строится на основе свойства антипериодичности сигнала, которым обладают сигналы, применяемые в низкочастотной электроразведке. В статье приводятся описания свойств такой оценки и ее связь с прямой оценкой отношения сигнал/шум.

Ил.3. Библиогр.4.

УДК 004.932.1

Концепция математического моделирования сегментации слитного рукописного текста / Долгова Е.В., Курушин Д.С. // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2011. №1. С.53-57.

Слитный рукописный текст обладает значительной вариативностью символов, что делает затрудняет создание качественных моделей его распознавания. В то время как большинство подобных работ сконцентрированы на поиске средней линии символов, авторы предлагают выделить внешний контур. Этот подход позволяет упростить модель, сохраняя приемлемое качество сегментации.

Ил.1.

УДК 530.12:531.18+378.147

Понятие собственной кинетической энергии системы частиц в релятивистской механике / Гордеев И.В., Малинин А.Н. // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2011. №1. С.58-65.

В статье вводится понятие собственной релятивистской кинетической энергии. Показана его фундаментальная значимость в кинематике ядерных реакций и процессов столкновений элементарных частиц. Методически обоснована необходимость введения этого понятия при изложении основ теории относительности в курсах теоретической физики классических и педагогических университетов.

Ил.8.

УДК 37.016:51

Задача о погоне / Самоявчева М.В., Федоров Л.И. // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2011. №1. С.66-70.

На примере задачи о погоне проводится сравнение двух дополняющих друг друга подходов к изучению данной темы, направленных на повышение познавательной активности учащихся при изучении динамических систем: - с использованием дифференциальных уравнений и с применением имитационной модели. Графические иллюстрации выполнены в среде MathCad и NetLOGO.

Ил.2. Библиогр.2.

УДК 37.016:51

Конструирование системы задач по математике / Антипина Н.М., Грань Т.Н. // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2011. №1. С.71-78.

Рассматривается процесс конструирования системы задач по математике для школьников. В задачах предложенной системы исследуются величина суммы расстояний от точки до сторон многоугольника и аналогичная величина в пространстве, когда объектами выступают точка и многогранник.

Ил.3. Библиогр.6.

УДК 681.3.07

Модель формирования исследовательской компетентности будущего учителя математики / Забелина С.Б. // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2011. №1. С.79-83.

В статье ставится проблема изменения статуса исследовательской деятельности в профессиональном образовании учителя математики. Автор формулирует первоочередные задачи в организации исследовательской деятельности студентов и предполагает, что успешное их решение возможно в рамках реализации модели формирования исследовательской компетентности. В статье представлена модель формирования исследовательской компетентности будущего учителя математики, указаны организационно-педагогические условия ее реализации, описаны уровни сформированности исследовательской компетентности, рассмотрены формы развития исследовательских компетенций.

Библиогр.6.

ПРАВИЛА

подготовки рукописей, представленных для опубликования в журнале
«Вестник Московского государственного областного университета.
Сер. Физика - математика»

Для публикации научных работ в выпусках серии «Вестник МГОУ» принимаются статьи на русском языке. Публикуются научные материалы преимущественно докторантов, аспирантов, соискателей, преподавателей ВУЗов, докторов и кандидатов наук.

Требования к оформлению статей. Статья должна быть представлена:

- в текстовом варианте (текст статьи должен быть подписан всеми авторами);
- в виде документа MS Word 2003 (с расширением doc);
- в виде файла в формате rtf;

Файл должен содержать построчно:

На русском языке	УДК (в верхнем левом углу первого листа рукописи) НАЗВАНИЕ СТАТЬИ – прописными буквами Фамилия, имя, отчество Полное наименование организации (в скобках – сокращенное), почтовый адрес Должность (другие сведения, например, E-mail, телефон) Аннотация (1 абзац до 400 символов) под заголовком «АННОТАЦИЯ» Ключевые слова
На английском языке	НАЗВАНИЕ СТАТЬИ – прописными буквами Фамилия, инициалы Полное наименование организации, почтовый адрес Аннотация (1 абзац до 400 символов) под заголовком «Abstract» Ключевые слова (Key words)
На русском языке	Объем статьи ограничен тремя уровнями: а) 12 страниц с числом иллюстраций до пяти (к этим статьям предъявляются повышенные требования); б) 6 страниц с числом иллюстраций до трех (содержатся основные результаты без излишних деталей выводов и доказательств); в) 4 страницы с числом иллюстраций до двух (выходят в разделе краткие сообщения вне очереди). Список использованной литературы под заголовком «ЛИТЕРАТУРА»

Формат страницы – А4, книжная ориентация. Поля – 2,5 см. Шрифт Times New Roman Cyrillic, цвет шрифта черный, размер 12 пикселей, междустрочный интервал – полуторный.

Запрещены специфические действия над текстом и встраиваемые коды: уплотнение интервалов, использование цветowych заливок, «красные строки», центрирование, табуляция, отступы, переносы в словах (делаемые автором), ссылки, гиперссылки, сноски (лучше их оформлять в виде примечаний, замечаний и т.п.). Не допускаются сокращения слов, имен, названий, за исключением общепринятых (и оговоренных).

Формулы нумеруются (справа) только те, на которые в тексте имеются ссылки.

Рисунки и таблицы допускаются в том случае, если описать процесс в текстовой форме невозможно. В этом случае каждый из объектов не должен превышать указанные размеры страницы, а шрифт в нем – 12 пикселей. Возможно использование только вертикальных таблиц и рисунков. Запрещены цветowe заливки, применение «фонов».

Рисунки, схемы, графики выполняются на отдельных листах в формате, обеспечивающем ясность передачи деталей. Места расположения иллюстраций в тексте должны быть указаны простым карандашом на полях. На обороте иллюстрации должны быть написаны фамилия автора и название статьи. Текст к иллюстрациям, а также таблицы следует поместить на отдельных страницах. Все рисунки, схемы, графики, таблицы должны иметь названия.

Все формулы должны быть созданы с использованием компонента Microsoft Equation, (MathType 4.0). Размер шрифта также 12 пикселей. Формула создается однократным запуском компонента Microsoft Equation (MathType 4.0). Запрещается создавать составные формулы! Небольшие строчные фрагменты типа ΔU_{ij} или $C^{(m)} = (c_{1m}, c_{1m}, \dots)^T$ следует набирать обычным способом в латинице, используя средства панели инструментов: изменение шрифта на курсив, написание верхних и нижних индексов, а также вставку символов. При этом следует обратить внимание на написание цифр, скобок, операторов и наименований функций (Δ , \sin , \cos , ...) прямым шрифтом. Хорошее представление об оформлении математических текстов дает чтение научных журналов Российской академии наук физико-математического направления, классических учебников по физике и математике для высших учебных заведений.

Абзацы должны быть отделены друг от друга пустой строкой (дополнительным «Enter»).

Список литературы должен содержать библиографические сведения о всех публикациях, упоминаемых в статье, и не должен содержать указаний на работы, на которые в тексте нет ссылок. Располагать публикации в списке следует в порядке упоминания о них в статье. Список литературы приводится на отдельном листе с обязательным указанием следующих данных: для книг (монография, сборник и т.д.) – фамилия (после фамилии ставится запятая), инициалы автора, название книги (после названия следует указание [Текст], [Text], [Электронный документ] и др. – в зависимости от языка издания и вида документа) издательство, место издания (город), год издания; для журнальных статей – фамилия и инициалы автора, название статьи, название журнала, год издания, том, номер, выпуск, страницы (первая и последняя). **Обращаем Ваше внимание!** С 01.07.2004 введен новый стандарт ГОСТ 7.1-2003 «Библиографическая запись. Библиографическое описание. Общие требования и правила составления». Наиболее распространенные примеры:

1. Иванов, И.И. Название книги [Текст] / И.И. Иванов. - М.: Наука, 2009. – 205 с.
2. Иванов, И.И. Название книги [Текст] / И.И. Иванов, П.М. Петров, К.Л. Данилов. - М.: Наука, 2009. – 205 с.
3. Иванов, И.И. Название книги [Текст] / И.И. Иванов [и др. (если 4 автора и более)]. - М.: Наука, 2009. – 205 с.
4. Название книги [Текст] / И.И. Иванов [и др.], под ред. И.И. Иванова. - М.: Наука, 2009. – 205 с.
5. Иванов, И.И. Название статьи [Текст] / И.И. Иванов, П.М. Петров, К.Л. Данилов // Название сборника. - М.: Механика, 2009. – С.51-59.
6. Иванов, И.И. Название статьи [Текст] / И.И. Иванов, П.М. Петров, К.Л. Данилов // Название журнала. – 2009. - №2. - С.51-59.

Ссылки на неопубликованные работы не допускаются.

Редакционная коллегия оставляет за собой право на редактирование статей, хотя с точки зрения научного содержания авторский вариант сохраняется. Статьи, не соответствующие указанным требованиям, решением редакционной коллегии серии не публикуются и не возвращаются (почтовой пересылкой).

В случае принятия статьи, условия опубликования оговариваются с ответственным редактором.

Ответственный редактор серии «Физика-математика» декан физико-математического факультета, доктор технических наук, профессор Бугримов Анатолий Львович.

Адрес редколлегии серии «Физика-математика» «Вестника МГОУ»: 105005, Москва, ул. Радио, д.10-а, комн. 36. Тел. (495) 261-09-48