ISSN 2072-8387 (print)
ISSN 2310-7251 (online)

Вестник

Московского государственного областного университета

Серия

Физика-математика

ТЕОРИЯ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ НЕМАТИЧЕСКИХ НАНОКОМПОЗИТОВ, СОДЕРЖАЩИХ СФЕРИЧЕСКИЕ НАНОЧАСТИЦЫ

К ВОПРОСУ О ВЫВОДЕ УРАВНЕНИЯ ВЛАСОВА-МАКСВЕЛЛА-ЭЙНШТЕЙНА И ЕГО СВЯЗЬ С КОСМОЛОГИЧЕСКИМ ЛЯМБДА-ЧЛЕНОМ

ЛОКАЛЬНАЯ ПРОВОДИМОСТЬ СУБМИКРОННОГО МЕТАЛЛИЧЕСКОГО СЛОЯ С УЧЁТОМ ПОПРАВКИ К ЗАКОНУ ВИДЕМАНА-ФРАНЦА

2019/ № 2

ВЕСТНИК
МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
ОБЛАСТНОГО УНИВЕРСИТЕТА

ISSN 2072-8387 (print) 2019 / № 2 ISSN 2310-7251 (online)

серия

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА

Рецензируемый научный журнал. Основан в 1998 г.

Журнал «Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика» включён Высшей аттестационной комиссией при Министерстве образования и науки Российской Федерации в «Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук» по следующим научным специальностям: 01.04.02 – Теоретическая физика (физико-математические науки); 01.04.07 – Физика конденсированного состояния (физико-математические науки) (См.: Список журналов на сайте ВАК при Минобрнауки России).

The peer-reviewed journal was founded in 1998

«Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics» is included by the Supreme Certifying Commission of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation into "the List of leading reviewed academic journals and periodicals recommended for publishing in corresponding series basic research thesis results for a Ph.D. Candidate or Doctorate Degree" on the following scientific specialities: 01.04.02 – Theoretical physics (physical-mathematical sciences); 01.04.07 – Physics of the condensed state (physical-mathematical sciences) (See: the online List of journals at the site of the Supreme Certifying Commission of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation).

ISSN 2072-8387 (print) 2019 / № 2 ISSN 2310-7251 (online)

series

PHYSICS AND MATHEMATICS

BULLETIN OF THE MOSCOW REGION
STATE UNIVERSITY

Учредитель журнала
«Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика»
Государственное образовательное учреждение высшего образования Московской области
Московский государственный областной университет
Выходит 4 раза в год

ISSN 2072-8387 (print)
ISSN 2310-7251 (online)

Рецензируемый научный журнал «Вестник московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика» публикует статьи по математическим проблемам термодинамики, кинетики и статистической физики; теории конденсированного состояния классических и квантовых, макроскопических и микроскопических систем; изучению различных состояний вещества и физических явлений в них; статистической физике и кинетической теории равновесных и неравновесных систем; теоретическому и экспериментальному исследованию физических свойств неупорядоченных неорганических систем; изучению экспериментального состояния конденсированных веществ и фазовых переходов в них. Журнал адресован ученым, докторантам, аспирантам и всем, интересующимся достижениями физико-математических наук.

Журнал «Вестник Московского государственного областного университета. Серия «Физика-математика» зарегистрирован в Федеральной службе по надзору за соблюдением законодательства в сфере массовых коммуникаций и охране культурного наследия. Регистрационное свидетельство ПИ № ФС 77-73344.

Индекс серии «Физика-математика» по Объединенному каталогу «Пресса России» 40723

Журнал включён в базу данных Российского индекса научного цитирования (РИНЦ), имеет полнотекстовую сетевую версию в Интернете на платформе Научной электронной библиотеки (www.elibrary.ru), с августа 2017 г. на платформе Научной электронной библиотеки «КиберЛенинка» (https://cyberleninka.ru), а также на сайте Московского государственного областного университета (www.vestnik-mgou.ru).

Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. – 2019. – № 2. – 122 с.

Адрес Отдела по изданию научного журнала «Вестник Московского государственного областного университета»
г. Москва, ул. Радио, д.10А, офис 98
тел. (495) 723-56-31; (495) 780-09-42 (доб. 6101)
e-mail: vest_mgou@mail.ru; сайт: www.vestnik-mgou.ru

Founder of journal
«Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics»
Moscow Region State University

Issued 4 times a year

ISSN 2072-8387 (print)
ISSN 2310-7251 (online)

The reviewed scientific journal "Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics" publishes articles on mathematical problems of thermodynamics, kinetics and statistical physics; the theory of the condensed state of classical and quantum, macroscopic and microscopic systems; the study of various states of substance and physical phenomena in them; statistical physics and the kinetic theory of equilibrium and non-equilibrium systems; theoretical and experimental research of physical features of disordered inorganic systems; the study of the experimental state of condensed substances and phase transitions in them. The journal is addressed to scientists, doctoral students, PhD students and everyone interested in the achievements of physical and mathematical sciences.

The series «Physics and Mathematics» of the Bulletin of the Moscow Region State University is registered in Federal service on supervision of legislation observance in sphere of mass communications and cultural heritage protection. The registration certificate ПИ № ФС 77 - 73344.

Index series «Physics and Mathematics» according to the union catalog «Press of Russia» 40723

The journal is included into the database of the Russian Science Citation Index, has a full text network version on the Internet on the platform of Scientific Electronic Library (www.elibrary.ru), and from August 2017 on the platform of the Scientific Electronic Library "CyberLeninka" (https://cyberleninka.ru), as well as at the site of the Moscow Region State University (www.vestnik-mgou.ru)

Bulletin of the Moscow State Regional University. Series: Physics and Mathematics. – 2019. – № 2. – 122 p.

The Editorial Board address:
Moscow Region State University
10A Radio st., office 98, Moscow, Russia
Phones: (495) 723-56-31; (495) 780-09-42 (add. 6101)
e-mail: vest_mgou@mail.ru; site: www.vestnik-mgou.ru

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

РАЗДЕЛ I. МАТЕМАТИКА

УДК 514.76 + 512.54+517.9
DOI: 10.18384-2310-7251-2019-2-6-13

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ И АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА НА ГЛАДКИХ КОНЕЧНОМЕРНЫХ ВЕЩЕСТВЕННЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

Забелина С. Б., Марченко Т. А., Матвеев О. А., Пинчук И. А.
Московский государственный областной университет
141014, Московская область, г. Мытищи, ул. Веры Волошиной, д. 24, Российская Федерация

Аннотация. Рассматриваются геометрические и алгебраические свойства дифференциального уравнения первого порядка на гладких конечномерных вещественных многообразиях. Дифференциальному потоку (автономному или неавтономному) на многообразии сопоставляется некоторая аффинная связность без кручения, причём все исходные траектории являются некоторыми геодезическими линиями этой аффинной связности. Используя дифференциально-алгебраические характеристики аффинной связности, проводится исследование некоторых классов уравнений первого порядка на гладких конечномерных вещественных дифференцируемых многообразиях.

Ключевые слова: системы обыкновенных дифференциальных уравнений, гладкие многообразия, аффинные связности, универсальные алгебры, квазигруппы.

GEOMETRIC AND ALGEBRAIC PROPERTIES OF FIRST-ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS ON SMOOTH FINITE-DIMENSIONAL REAL MANIFOLDS

S. Zabelina, T. Marchenko, O. Matveyev, I. Pinchuk
Moscow Region State University
ul. Very Voloshinoi 24, 141014 Mytishchi, Moscow Region, Russian Federation

Abstract. We consider the geometric and algebraic properties of the first-order differential equation on smooth finite-dimensional real manifolds. An affine connection without torsion is compared with a differential flow (autonomic or non-autonomic) on a manifold, with all the original trajectories being some geodesic lines of this affine connection. Using differential-algebraic characteristics of affine connectivity, we study some classes of first-order equations on smooth finite-dimensional real differentiable manifolds.

Keywords: systems of ordinary differential equations, smooth manifolds, affine connections, universal algebras, quasi-groups.

С классической точки зрения одной из основных задач теории обыкновенных дифференциальных уравнений является классификация решений дифференциальных уравнений по некоторому признаку, то есть введение топологических, дифференциальных, алгебраических инвариантов векторного поля, которые определяли бы «качественную» картину поведения соответствующего этому полю потока.

Нашей задачей является сопоставление дифференциальному потоку некоторой аффинной связности без кручения. Тогда тензорные поля кривизны и его ковариантные производные являются тензорными характеристиками исходного потока. Такой подход позволяет в дальнейшем, используя алгебраические аспекты теории пространств аффинной связности [1–5] к потоку, присоединить алгебраические конструкции, такие как касательные алгебры, геометрические лупы, определяемые параллельными переносами, геодезические квазигруппы, определяемые гомотетиями. Это позволяет провести классификацию уже по дифференциально-алгебраическим признакам.

Пусть M – дифференцируемое многообразие конечной размерности n, $\dim M = n$, n – натуральное число, $T(M)$ – касательное расслоение, слой которого в каждой точке носителя обозначим $\mathbb{R}^n$ – n-мерное векторное пространство. Касательное расслоение $T(M)$ локально диффеоморфно тривиальному расслоению $U \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\pi} U,$ где U – открытое подмножество M, а π – проекция на первый сомножитель. Автономное векторное поле X на M локально задаётся отображением $X : U \to \mathrm{U} \times \mathbb{R}^n$, где $X(x) = (x, f(x))$, $x \in U$.

Интегральные кривые автономного векторного поля локально представляются в некоторой системе координат решениями автономной системы дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}^i = \frac{dx^i}{dt} = f^i\left(x\right), \; i = \overline{1,n}. \qquad (1)$$

Неавтономное векторное поле $\tilde{X}$ на M локально задаётся отображением $\tilde{X} : U \times \mathbb{R} \to U \times \mathbb{R}^n,$ где $\tilde{X}\left(x,t\right) = \left(x, g\left(x,t\right)\right) \quad x \in U; t \in \mathbb{R}.$

Интегральные кривые неавтономного векторного поля в некоторой локальной системе координат задаются решениями неавтономной системы дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}^i = \frac{dx^i}{dt} = g^i\left(x,t\right), \; i = \overline{1,n}. \qquad (2)$$

При некоторых естественных предположениях на теоремы существования и единственности для обыкновенных дифференциальных уравнений возможно гладким образом «склеить» эти локальные решения и получить автономный или неавтономный «поток» на M, то есть отображение $\varphi : M \times \mathbb{R} \to M$, $(x, t) \to \varphi(x, t)$.

Наше исследование носит локальный характер; все вычисления мы проводим в одной локальной системе координат.

Дифференцируем по t каждое уравнение системы (2):

$$\ddot{x}^i = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx^i}{dt}\right) = \frac{d^2x^i}{dt^2} = \frac{\partial g^i(x,t)}{\partial x^j}\dot{x}^j + \frac{\partial g^i(x,t)}{\partial t}. \tag{3}$$

(Здесь, согласно правилу Эйнштейна, происходит свертка по «слепому» индексу j: $\frac{\partial g^i(x,t)}{\partial x^j}\dot{x}^j = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial g^i(x,t)}{\partial x^j}\dot{x}^j$.)

Подставляя соотношения (2) в выражения (3), получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\ddot{x}^i = \frac{\partial g^i(x,t)}{\partial x^j} g^i(x,t) + \frac{\partial g^i(x,t)}{\partial t};\ i = \overline{1,n}\ . \tag{4}$$

Сделаем невырожденную линейную замену независимой переменной t:

$$t = au + b,\ a = \text{const},\ b = \text{const},\ a \neq 0,\ \frac{dt}{du} = a,\ \frac{d^2}{du^2} = 0.$$

$$\frac{dx^i}{du} = \frac{dx^i}{dt}\cdot\frac{dt}{du};\ \frac{d^2x^i}{du^2} = \frac{d}{du}\left(a\frac{dx^i}{dt}\right) = a^2\frac{d^2x^i}{dt^2} = \frac{d^2x^i}{dt^2}\cdot\left(\frac{dt}{du}\right)^2.$$

Теперь считаем u независимой переменной. От системы уравнений (4) приходим к следующим соотношениям:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y^i}{du^2} - \left[\dfrac{\partial g^i(y,au+b)}{\partial y^j} g^j(y,au+b) + \dfrac{\partial g^i(y,au+b)}{\partial u}\cdot\dfrac{1}{a}\right]\left(\dfrac{dt}{du}\right)^2 = 0, \\ \dfrac{d^2t}{du^2} = 0; \end{cases} \tag{5}$$

где $y^i(u) = x^i(au+b),\ i = \overline{1,n}.$

Положим $\tilde{A}^i_{n+1,n+1}(y) = -\left[\dfrac{\partial g^i(y,au+b)}{\partial y^j} g^j(y,au+b) + \dfrac{\partial g^i(y,au+b)}{a\cdot\partial u}\right]$,

$\tilde{A}^i_{jk}(y) = 0$, где индексы i, j, k изменяются от 1 до n, $\tilde{A}^{n+1}_{ij} = 0$; $\tilde{A}^{n+1}_{n+1,n+1} = 0$. Для удобства дальнейших записей положим $y^{n+1}(u) = t; g^i(y, y^{n+1}) = \theta^i(y)$. Теперь мы можем систему (5) переписать следующим образом:

$$\frac{d^2 y^a}{du^2} + \tilde{A}^{\alpha}_{\beta\gamma}(y)\cdot\frac{dy^{\beta}}{du}\frac{dy^{\gamma}}{du} = 0, \tag{6}$$

где $1 \le \alpha, \beta, \gamma \le n + 1$.

Система (6) представляет собой уравнения геодезических линий с аффинным параметром u на $U \times R^{-}U \subset M$, U – некоторое открытое подмногообразие в M, $\left\{\tilde{A}^{\alpha}_{\beta\gamma}\right\}$ – символы Кристоффеля второго рода, то есть коэффициенты некоторой аффинной связности ∇ на $U \times R$.

Тензорное поле кручения в $(U \times R, \nabla)$ тождественно равно нулю $\left(\tilde{A}^{\alpha}_{\beta\gamma} = \tilde{A}^{\alpha}_{\gamma\beta}\right)$. Компоненты тензорного поля кривизны R вычисляем по формулам:

$$R^{\alpha}_{km,\beta} = \frac{\partial\tilde{A}^{\alpha}_{m\beta}}{\partial y^k} - \frac{\partial\tilde{A}^{\alpha}_{k\beta}}{\partial y^m} + \tilde{A}^{\gamma}_{m\beta}\tilde{A}^{\alpha}_{k\gamma} - \tilde{A}^{\gamma}_{k\beta}\tilde{A}^{\alpha}_{m\gamma}, \tag{7}$$

где $1 \le \alpha, \beta, k, m \le n+1; R^{\alpha}_{km,\beta} = -R^{\alpha}_{mk,\beta}$.

$$R^{i}_{n+1\,j,n+1} = -R^{i}_{j\,n+1,n+1} = \frac{\partial^2\theta^i}{\partial y^j \partial y^k}\theta^k + \frac{\partial\theta^i}{\partial y^k}\frac{\partial\theta^k}{\partial y^j} + a\frac{\partial^2\theta^i}{\partial y^j \partial y^{n+1}}. \tag{8}$$

Здесь индексы i, j, k изменяются от 1 до n. Остальные компоненты тензора кривизны тождественно равны нулю.

Итак, мы доказали следующую теорему.

Теорема. Пусть на дифференцируемом многообразии M, $\dim M = n$, задан неавтономный поток. Пусть в некотором открытом подмногообразии $U \subset M$ введена локальная система координат $(x^1, x^2, ..., x^n)$, в которой интегральные кривые потока локально являются решениями системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (2).

Сделаем замену координат:

$$\begin{cases} y^i(u) = x^i(t) = x^i(au+b), \quad i = \overline{1,n} \\ y^{n+1}(u) = t = au+b, \end{cases} \tag{9}$$

где t, u – действительные переменные, a, b – действительные числа, $a \ne 0$.

Ещё замена $g^i\left(y(u), y^{n+1}(u)\right) = \theta^i(y)$.

Тогда неавтономному потоку на M сопоставляется однопараметрическое семейство аффинных связностей $(U \times R, \nabla(a))$, $a \in R$, $a \ne 0$ с нулевым кручением, ненулевые коэффициенты этих связностей (символы Кристоффеля второго рода) задаются формулой:

$$\tilde{A}^{i}_{n+1,n+1}(y) = -\left[\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\theta^i(y)}{\partial y^j}\theta^j(y) + a\frac{\partial\theta^i(y)}{\partial y^{n+1}}\right]. \tag{10}$$

Ненулевые компоненты тензора кривизны задаются соотношениями (8).

Следствие. Пусть на дифференцируемом многообразии M, $n = \dim M$, задан автономный поток. Пусть в некотором открытом подмногообразии $U \subset M$ введена локальная система координат $(x^1, x^2, ..., x^n)$. Сделаем замену (9).

Тогда автономному потоку сопоставляется семейство аффинных связностей на $U \times R$, то есть (M, ∇) с нулевым кручением, ненулевые компоненты связности в выбранной системе координат задаются формулами:

$$\tilde{A}^i_{n+1,n+1}(y) = -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial h^i(y)}{\partial y^j} h^j(y) + \frac{\partial g^i(y, au+b)}{\partial u}, \tag{11}$$

где $h^i(y) = f^i(x(t)) = f^i(x(au+b)) = f^i(y(u))$.

Пример. Рассмотрим автономную систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = \gamma_1 x^2 x^3, \\ \dot{x}^2 = \gamma_2 x^1 x^3, \\ \dot{x}^3 = \gamma_3 x^1 x^2, \end{cases} \tag{12}$$

где $\dot{x}^i = \dfrac{dx^i}{dt}$, t – независимая переменная, действительные коэффициенты γ_1, γ_2, γ_3, считаем постоянными.

Системы этого типа введены при исследовании движения твёрдого тела вокруг неподвижной точки в отсутствие внешних сил (уравнения Эйлера) ([6], с. 123).

Продифференцируем каждое уравнение системы (12) по t:

$$\begin{cases} \ddot{x}^1 = \gamma_1 \left(\dot{x}^2 x^3 + x^2 \dot{x}^3 \right), \\ \ddot{x}^2 = \gamma_2 \left(\dot{x}^1 x^3 + x^1 \dot{x}^3 \right), \\ \ddot{x}^3 = \gamma_3 \left(\dot{x}^1 x^2 + x^1 \dot{x}^2 \right). \end{cases} \tag{13}$$

В систему (13) подставляем соотношения (12):

$$\begin{cases} \ddot{x}^1 = \gamma_1 x^1 \left(\gamma_2 \left(x^3\right)^2 + \gamma_3 \left(x^2\right)^2 \right), \\ \ddot{x}^2 = \gamma_2 x^2 \left(\gamma_1 \left(x^3\right)^2 + \gamma_3 \left(x^1\right)^2 \right), \\ \ddot{x}^3 = \gamma_3 x^3 \left(\gamma_1 \left(x^2\right)^2 + \gamma_2 \left(x^1\right)^2 \right). \end{cases} \tag{14}$$

Сделаем невырожденную замену независимой переменной t: $t = au + b$, $a = \text{const}$, $b = \text{const}$, $a \neq 0$. Положим $y^i(u) = x^i(au+b)$, $i = \overline{1,3}$, $y^4 = t = au + b$. Имеем:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y^1}{du^2} - \gamma_1 y^1 \left(\gamma_2 \left(y^3\right)^2 + \gamma_3 \left(y^2\right)^2\right) \left(\dfrac{dy^4}{du}\right)^2 = 0, \\ \dfrac{d^2y^2}{du^2} - \gamma_2 y^2 \left(\gamma_1 \left(y^3\right)^2 + \gamma_3 \left(y^1\right)^2\right) \left(\dfrac{dy^4}{du}\right)^2 = 0, \\ \dfrac{d^2y^3}{du^2} - \gamma_3 y^3 \left(\gamma_1 \left(y^2\right)^2 + \gamma_2 \left(y^1\right)^2\right) \left(\dfrac{dy^4}{du}\right)^2 = 0, \\ \dfrac{d^2y^4}{du^2} = 0. \end{cases} \tag{15}$$

Ненулевые коэффициенты аффинной связности имеют вид:

$$\begin{aligned} \tilde{A}^1_{44}(y) &= -\gamma_1 y^1 \left(\gamma_2 \left(y^3\right)^2 + \gamma_3 \left(y^2\right)^2\right), \\ \tilde{A}^2_{44}(y) &= -\gamma_2 y^2 \left(\gamma_1 \left(y^3\right)^2 + \gamma_3 \left(y^1\right)^2\right), \\ \tilde{A}^3_{44}(y) &= -\gamma_3 y^3 \left(\gamma_1 \left(y^2\right)^2 + \gamma_2 \left(y^1\right)^2\right). \end{aligned} \tag{16}$$

Заключение

Конструкция, изложенная выше, позволяет построить дифференциально-алгебраические инварианты [7; 8] для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, с помощью алгебраической теории пространств аффинной связности.

Статья поступила в редакцию 22.02.2019 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Matveyev O. A. On quasigroup theory of manifolds with trajectories // Webs and quasigroups. Tver: Tver State University, 2000. P. 129–139.
2. Матвеев О. А. Квазигрупповые свойства многообразий с траекториями // Вестник Московского педагогического университета. Математика-физика. 1998. № 3–4. С. 10–15.
3. Паншина А. В., Матвеев О. А. О локально симметрических и абелевых механических системах // Актуальные проблемы математики и методики ее преподавания: межвузовский сборник научных трудов. Пенза: ПГПУ, 2001. С. 62–68.
4. Паншина А. В., Матвеев О. А., Матвеева Н. В. О квазигрупповой теории абелевых и симметрических механических систем // Фундаментальные физико-математические проблемы и моделирование технико-технологических систем: сборник научных трудов. Выпуск 9. М.: СТАНКИН, 2005. С. 22–25.
5. Паншина А. В., Матвеев О. А. Геометрические и алгебраические свойства систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2011. № 3. С. 31–40.

6. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1979. 432 с.
7. Матвеев О. А., Нестеренко Е. Л. Алгебраическая теория пространств, близких к симметрическим: монография. Germany: Lap Lambert Academic Publishing, 2012. 125 с.
8. Матвеев О. А., Нестеренко Е. Л. Универсальные алгебры в теории пространств аффинной связности, близких к симметрическим: монография. М.: МГОУ, 2012. 132 с.

REFERENCES

1. Matveyev O. A. On quasi-group theory of manifolds with trajectories. In: *Webs and quasi-groups*. Tver, Tver State University Publ., 2000. pp. 129–139.
2. Matveev O. A. [Quasi-group properties of manifolds with trajectories]. In: *Vestnik Moskovskogo pedagogicheskogo universiteta. Matematika-fizika* [Bulletin of Moscow Pedagogical University. Mathematics-physics], 1998, no. 3–4, pp. 10–15.
3. Panshina A. V., Matveev O. A. [On locally symmetric and abelian mechanical systems]. In: *Aktual'nye problemy matematiki i metodiki ee prepodavaniya: mezhvuzovskii sbornik nauchnykh trudov* [Actual problems of mathematics and methods of teaching: Interuniversity collection of scientific papers]. Penza, Penza State Pedagogical University Publ., 2001. pp. 62–68.
4. Panshina A. V., Matveev O. A., Matveeva N. V. [On the quasi-group theory of abelian and symmetric mechanical systems]. In: *Fundamental'nye fiziko-matematicheskie problemy i modelirovanie tekhniko-tekhnologicheskikh sistem: sbornik nauchnykh trudov. Vypusk 9* [Fundamental physical and mathematical problems and modeling of technological systems: Collection of scientific works. Issue 9]. Moscow, STANKIN Publ., 2005. pp. 22–25.
5. Panshina A. V., Matveev O. A. [The geometric and algebraic properties of the systems of ordinary differential equations]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika* [Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], 2011, no. 3, pp. 31–40.
6. Arnold V. I. Mathematical methods of classical mechanics. New York, Springer, 2010. 520 p.
7. Matveev O. A., Nesterenko E. L. *Algebraicheskaya teoriya prostranstv, blizkikh k simmetricheskim* [Algebraic theory of spaces close to symmetric: Monograph]. Germany, Lap Lambert Academic Publishing Publ., 2012. 125 p.
8. Matveev O. A., Nesterenko E. L. *Universal'nye algebry v teorii prostranstv affinnoi svyaznosti, blizkikh k simmetricheskim* [Universal algebra in the theory of spaces with affine connection close to symmetric: Monograph]. Moscow, Moscow Region State University Publ., 2012. 132 p.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Забелина Светлана Борисовна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры высшей алгебры, элементарной математики и методики преподавания математики Московского государственного областного университета;
e-mail: zabelina_sb@mail.ru;

Марченко Татьяна Андреевна – студент физико-математического факультета Московского государственного областного университета;
e-mail: tatian96@rambler.ru;

Матвеев Олег Александрович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математического анализа и геометрии Московского государственного областного университета;
e-mail: matveyevoa@mail.ru;

Пинчук Ирина Александровна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей алгебры, элементарной математики и методики преподавания математики Московского государственного областного университета;
e-mail: irenepin@yandex.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Svetlana B. Zabelina – PhD in pedagogical Sciences, associate professor at the Department of Higher Algebra, Elementary Mathematics and Mathematics Teaching Methodology, Moscow Region State University;
e-mail: zabelina_sb@mail.ru;

Tatyana A. Marchenko – student at the Faculty of Physics and Mathematics, Moscow Region State University;
e-mail: tatian96@rambler.ru;

Oleg A. Matveyev – PhD in physical and mathematical sciences, associate professor at the Department of Mathematical Analysis and Geometry, Moscow Region State University;
e-mail: matveyevoa@mail.ru;

Irina A. Pinchuk – PhD in physical and mathematical sciences, associate professor at the Department of Higher Algebra, Elementary Mathematics and Mathematics Teaching Methodology, Moscow Region State University;
e-mail: irenepin@yandex.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Забелина С. Б., Марченко Т. А., *Матвеев О. А.,* Пинчук И. А. Геометрические и алгебраические свойства дифференциальных уравнений первого порядка на гладких конечномерных вещественных многообразиях // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика–математика. 2019. № 2. С. 6–13.
DOI: 10.18384-2310-7251-2019-2-6-13

FOR CITATION

Zabelina S. B., Marchenko T. A., Matveyev O. A., Pinchuk I. A. Geometric and algebraic properties of first-order differential equations on smooth finite-dimensional real manifolds. In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics.* 2019, no. 2, pp. 6–13.
DOI: 10.18384-2310-7251-2019-2-6-13

РАЗДЕЛ II. ФИЗИКА

УДК 532.783
DOI: 10.18384-2310-7251-2019-2-14-23

ТЕОРИЯ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ НЕМАТИЧЕСКИХ НАНОКОМПОЗИТОВ, СОДЕРЖАЩИХ СФЕРИЧЕСКИЕ НАНОЧАСТИЦЫ

Осипов М. А.
Университет Стречклайд
G1 1XQ, г. Глазго, ул. Ричмонд, д. 16, Шотландия, Великобритания

Аннотация. Построена теория диэлектрической проницаемости нематического жидкого кристалла с примесью изотропных металлических наночастиц. При этом используется простая модель сферической наночастицы, помещённой в анизотропную диэлектрическую матрицу. Получено выражение для эффективной поляризуемоти одной наночастицы в нематической диэлектрической матрице, которое затем используется в теории макроскопической диэлектрической проницаемости нанокомпозита, построенной с использованием анизотропной формулы Лоренц-Лоренца. В заключение рассмотрены сдвиг и расщепление плазмонного резонанса наночастицы, индуцированного анизотропией поляризуемости жидкокристаллической матрицы.

Ключевые слова: нематические жидкие кристаллы, наночастицы, поляризуемость, диэлектрическая проницаемость.

THEORY OF DIELECTRIC SUSCEPTIBILITY OF NEMATIC NANOCOMPOSITES DOPED WITH SPHERICAL NANOPARTICLES

M. Osipov
University of Strathclyde
16 Richmond Street, Glasgow G1 1XQ, Scotland, United Kingdom

Abstract. A theory of dielectric susceptibility of a nematic liquid crystal doped with isotropic nanoparticles has been developed using a simple model of a spherical nanoparticle embedded into an anisotropic dielectric medium. A simple expression is obtained for the effective polarizability of a nanoparticle in the nematic dielectric matrix. This expression is used in the theory of the macroscopic dielectric susceptibility of the nanocomposite which is developed using the anisotropic Lorentz-Lorenz equation. Finally, a shift and a splitting of the plasmon resonance of a nanoparticle are calculated determined by the polarizability anisotropy of the liquid crystal host.

Keywords: nematic liquid crystals, nanoparticles, polarizability, dielectric susceptibility.

Введение

В последние годы большое внимание привлекают к себе жидкокристаллические нанокомпозиты, представляющие собой нематические [1; 2], смектические [3] и холестерические [4; 5] жидкие кристаллы с примесью металлических или полупроводниковых наночастиц [6]. Такие системы обладают рядом необычных свойств, так как добавление даже небольшого количества наночастиц в нематичскую жидкокристаллическую матрицу может существенно повлиять почти на все свойства жидкокристаллических материалов, включая пороговые напряжения и времена переключения [7; 8] жидкокристаллических дисплеев. Ещё одним интересным примером является стабилизация голубых фаз в хиральных нанокомпозитах [4], что имеет большое значение для приложений.

Особый интерес представляют собой оптические [9] и диэлектрические свойства [10; 11] нематических нанокомпозитов, которые можно контролировать, меняя концентрацию и параметры наночастиц. Необходимо отметить, что эффективные наблюдаемые оптические характеристики композитного материала, состоящего из анизотропной жидкокристаллической (ЖК)-матрицы (полимерной либо низкомолекулярной) и изотропных металлических наночастиц (НЧ) зависят как от исходных свойств ЖК-матрицы, так и от эффективной поляризуемости и концентрации наночастиц. Отметим, что и сферические частицы, состоящие из оптически изотропного материала (золото, серебро и проч.), будучи помещены в анизотропную диэлектрическую среду, характеризуются эффективно анизотропной поляризуемостью. В случае, когда наночастицы имеют анизотропную форму, эффективная анизотропия поляризуемости отдельной частицы определяется как её геометрической анизотропией, так и диэлектрической анизотропией окружающей среды. С теоретической точки зрения наиболее сложный случай соответствует частицам анизотропной формы, которые частично состоят из оптически анизотропной среды. Такие системы возникают, например, когда металлическая или полупроводниковая наночастица покрывается монослоем анизотропных органических молекул, облегчающих растворение наночастиц в жидкокристаллической среде.

В данном разделе рассматривается наиболее простой для понимания и близкий к практике случай, когда относительно небольшая концентрация сферически симметричных металлических НЧ растворена равномерно в анизотропной ЖК матрице. Отметим, что поскольку характерные длины нелокальности формирования оптического отклика такой среды определяются средним расстоянием между соседними НЧ, рассмотренные выше эффекты расслоения имеют для оптических свойств вторичный характер: расслоённые подобласти можно рассматривать как однородные (изотропные либо анизотропные для изотропной и нематической подфаз соответственно). Ниже будет рассмотрена нематическая ЖК фаза, так что из результатов анализа – уравнений, описывающих оптические свойства нематической фазы композита, – можно легко получить и выражения для изотропной фазы, устремив к нулю значение параметра нематического порядка S.

Диэлектрическая проницаемость композитов вообще и рассматриваемых ЖК-нанокомпозитов, в частности, не является простой суммой диэлектрической проницаемости матрицы и суммарной поляризуемости всех наночастиц в единице объёма. На НЧ, помещённую в диэлектрическую среду, действует так называемое локальное поле, которое отличается как от внешнего поля, так и от среднего макроскопического поля в среде. Такое различие связано с тем, что НЧ образует эффективную полость в диэлектрической среде, а электрическое поле в такой полости существенно отличается от поля в окружающем диэлектрике. В простейшем случае изотропной сферической полости в изотропном диэлектрике локальное поле в полости определяется известными соотношениями Лоренц-Лоренца [12]. Эффекты локального поля световой волны в теории оптических свойств жидких кристаллов подробно рассмотрены в обзоре Аверьянова и Осипова [13].

В настоящей работе построена теория макроскопической диэлектрической проницаемости нематического нанокомпозита с примесью неполярных сферических наночастиц. Молекулярно-статистическая теория диэлектрической проницаемости нематических ЖК с примесью полярных наночастиц рассмотрена в работах [14; 15].

Эффективная поляризуемость наночастицы в жидкокристаллической матрице

Для НЧ, размеры которых сопоставимы с размерами молекул ЖК (порядка 3–10 нанометров), можно считать в первом приближении, что оптические свойства частицы определяются контактом с первым слоем ближайших молекул. Этот слой также можно считать приблизительно изотропным, так как мезогенные молекулы весьма разупорядочены из-за противоречивых тенденций упорядочения их длинных осей вдоль директора, с одной стороны, и в направлении перпендикулярно или параллельно поверхности наночастицы, с другой.

Таким образом, мы будем использовать модель, в которой НЧ представляет собой сферическое металлическое ядро, с плазменным оптическим откликом (в первом грубом приближении) согласно модели Друде:

$$\varepsilon_m = 1 - \frac{(\omega_p \tau)^2}{\omega\tau(\omega\tau + i)}, \tag{1}$$

в которой ω – частота света, ω_p – так называемая плазменная частота металла, которая в простейшем случае даётся выражением $\omega_p = 4\pi n_e e^2 m^{-1}$, где n_e – концентрация электронов проводимости, а m – их эффективная масса. Параметр τ есть характерное время релаксации импульса электронов или, что то же самое, среднее время пробега электронов. В благородных металлах в оптическом диапазоне можно считать, что $\omega\tau \gg 1$, и диэлектрическая проницаемость (1) является слабо комплексной величиной с малой положительной мнимой частью и относительно большой отрицательной действительной частью.

Ближайшее окружение металлического ядра является изотропной средой с диэлектрической проницаемостью:

$$\varepsilon_s = \frac{1}{3}\left(\varepsilon_{||} + \varepsilon_{\perp}\right), \tag{2}$$

где $\varepsilon_{||}$ представляет собой диэлектрическую проницаемость одноосного ЖК вдоль оптической оси, а $\varepsilon_{\perp}$ – диэлектрическую проницаемость ЖК перпендикулярно его оптической оси. Такое приближение вполне достаточно при определении эффективной поляризуемости НЧ, перенормированной на малых масштабах за счёт взаимодействия с окружающей средой. В рамках квазистатического подхода такая НЧ радиуса a обладает поляризуемостью [16]:

$$\alpha_{np} = a^3 \varepsilon_s \frac{\left(\varepsilon_m - \varepsilon_s\right)}{\left(2\varepsilon_s + \varepsilon_m\right)}, \tag{3}$$

то есть демонстрирует плазмонный резонанс Ми [17] на частоте, соответствующей выполнению равенства $\mathrm{Re}\varepsilon_m = -2\varepsilon_s$, что соответствует резонансной частоте $\omega = \omega_{r0} = \omega_p(1 + 2\varepsilon_s)^{-1/2}$.

Эффективная диэлектрическая проницаемость нанокомпозита

Как известно, показатели преломления одноосной среды определяются главными значениями её диэлектрической проницаемости на оптических частотах. При этом электрическое поле световой волны не только непосредственно поляризует НЧ в среде, но и поляризует окружающие молекулы жидкого кристалла, которые, в свою очередь, создают дополнительное электрическое поле, воздействующее на НЧ. Необходимо также учитывать, что НЧ вытесняет одну или несколько молекул жидкого кристалла, создавая, таким образом, некоторую эффективную полость в среде. На отдельную НЧ фактически воздействует некоторое локальное электрическое поле, создаваемое внутри такой полости всеми окружающими молекулами. В результате, индуцированный дипольный момент i-ой НЧ может быть записан в следующем общем виде [13]:

$$\mathbf{d}_i = \alpha_{np}\,\mathbf{E}_{eff}, \tag{4}$$

где $\mathbf{E}_{eff}$ – есть усреднённое локальное поле, действующее на НЧ.

В рамках модели среднего поля можно считать, что данное локальное поле одинаково для всех НЧ в композите.

Далее это локальнее поле можно записать с помощью тензора Лоренца через макроскопическое среднее поле в среде $\mathbf{E}$ и макроскопическую поляризацию $\mathbf{P}$:

$$\mathbf{E}_{eff} = \mathbf{E} + 4\pi\,\hat{\Lambda}\,\mathbf{P}, \tag{5}$$

где $\hat{\Lambda}$ – тензорный коэффициент пропорциональности – так называемый тензор Лоренца. Эффективное локальное поле связано со средним полем в среде при помощи тензора локального поля $\hat{f}$: $\mathbf{E}_{eff} = \hat{f}\,\mathbf{E}$.

В случае изотропной среды тензор локального поля и тензор Лоренца также изотропны, и простейшее выражение для тензора локального поля даётся формулой Лоренц-Лоренца:

$$\hat{f} = \frac{\hat{1}}{3}(\varepsilon + 2), \tag{6}$$

где $\hat{1}$ – единичный тензор, а ε – скалярная диэлектрическая проницаемость изотропной среды.

При анализе оптических свойств нематических ЖК широко применяется простая эмпирическая формула Вукса [12]:

$$\hat{f} = \frac{\hat{1}}{3}(\varepsilon_{av} + 2), \tag{7}$$

где ε_{av} – средняя диэлектрическая проницаемость нематической фазы. Формула Вукса соответствует предположению об изотропном характере локального поля в жидких кристаллах. Более детальный анализ экспериментальных данных показывает [13], что в действительности локальное поле анизотропно, но эта анизотропия сравнительно мала.

Используя общие методы, разработанные в статистической теории высокочастотной диэлектрической проницаемости жидких кристаллов [7; 8; 10; 13], можно получить следующее выражение для тензора диэлектрической проницаемости ЖК нанокомпозита $\hat{\varepsilon}$:

$$\frac{\hat{\varepsilon} - \hat{1}}{\hat{\varepsilon} + 2\hat{1}} = \frac{4\pi}{3}\left[\rho_m \left\langle \gamma_{eff} \right\rangle + \rho_n \alpha_{np}\right], \tag{8}$$

где деление на тензор обозначает умножение на обратный тензор, а ρ_m и ρ_n обозначают число молекул ЖК и НЧ в единице объёма, соответственно. Тензор $\langle \gamma_{eff} \rangle$ представляет собой усреднённый эффективный тензор поляризуемости молекул ЖК, который перенормирован с учётом корреляций ближайших соседей и может быть разложен в ряд по корреляционным функциям.

При малых концентрациях НЧ можно пренебречь их взаимодействием между собой, что и делает возможным использование поляризуемости (3) в (8). Эффективную поляризуемость молекул ЖК рассчитать гораздо труднее из-за их высокой концентрации, анизотропии и статистической разупорядоченности. Однако в данном случае в этом и нет необходимости, так как при низкой концентрации наночастиц величину $\rho_m \langle \gamma_{eff} \rangle$ можно выразить через диэлектрическую проницаемость исходной ЖК матрицы $\hat{\varepsilon}_{LC}$, которая удовлетворяет условию:

$$\frac{\hat{\varepsilon}_{LC}-\hat{1}}{\hat{\varepsilon}_{LC}+2\hat{1}}=\frac{4\pi}{3}\rho_m\left\langle\gamma_{eff}\right\rangle. \qquad (9)$$

Подстановка (3) в (8) даёт следующее уравнение:

$$\frac{\hat{\varepsilon}-\hat{1}}{\hat{\varepsilon}+2\hat{1}}=(1-\varphi)\frac{\hat{\varepsilon}_{LC}-\hat{1}}{\hat{\varepsilon}_{LC}+2\hat{1}}+\varphi\frac{\alpha_{np}}{a^3}, \qquad (10)$$

где, как и ранее, φ – объёмная доля НЧ в композите, а a – радиус сферических НЧ.

Подставляя в уравнение (10) соотношение (9) и выражение для поляризуемости НЧ (3), можно получить окончательную формулу для тензора диэлектрической проницаемости рассматриваемого ЖК нанокомпозита:

$$\hat{\varepsilon}=\frac{\left(\hat{\varepsilon}_{LC}+2\hat{1}\right)\left(\varepsilon_m+2\varepsilon_s\right)+2\left[(1-\varphi)\left(\hat{\varepsilon}_{LC}-1\right)\left(\varepsilon_m+2\varepsilon_s\right)+\varphi\varepsilon_s\left(\varepsilon_m-\varepsilon_s\right)\left(\hat{\varepsilon}_{LC}+2\right)\right]}{\left(\hat{\varepsilon}_{LC}+2\hat{1}\right)\left(\varepsilon_m+2\varepsilon_s\right)-\left[(1-\varphi)\left(\hat{\varepsilon}_{LC}-1\right)\left(\varepsilon_m+2\varepsilon_s\right)+\varphi\varepsilon_s\left(\varepsilon_m-\varepsilon_s\right)\left(\hat{\varepsilon}_{LC}+2\right)\right]}. \qquad (11)$$

Из этой общей тензорной формулы несложно получить следующие выражения для показателей преломления нематического ЖК нанокомпозита в направлении его главной оптической оси и перпендикулярно к ней:

$$n_{||}^2=\frac{\left(\varepsilon_{||}+2\right)\left(\varepsilon_m+2\varepsilon_s\right)+2\left[(1-\varphi)\left(\varepsilon_{||}-1\right)\left(\varepsilon_m+2\varepsilon_s\right)+\varphi\varepsilon_s\left(\varepsilon_m-\varepsilon_s\right)\left(\varepsilon_{||}+2\right)\right]}{\left(\varepsilon_{||}+2\right)\left(\varepsilon_m+2\varepsilon_s\right)-\left[(1-\varphi)\left(\varepsilon_{||}-1\right)\left(\varepsilon_m+2\varepsilon_s\right)+\varphi\varepsilon_s\left(\varepsilon_m-\varepsilon_s\right)\left(\varepsilon_{||}+2\right)\right]}, \qquad (12)$$

$$n_{\perp}^2=\frac{\left(\varepsilon_{\perp}+2\right)\left(\varepsilon_m+2\varepsilon_s\right)+2\left[(1-\varphi)\left(\varepsilon_{\perp}-1\right)\left(\varepsilon_m+2\varepsilon_s\right)+\varphi\varepsilon_s\left(\varepsilon_m-\varepsilon_s\right)\left(\varepsilon_{\perp}+2\right)\right]}{\left(\varepsilon_{\perp}+2\right)\left(\varepsilon_m+2\varepsilon_s\right)-\left[(1-\varphi)\left(\varepsilon_{\perp}-1\right)\left(\varepsilon_m+2\varepsilon_s\right)+\varphi\varepsilon_s\left(\varepsilon_m-\varepsilon_s\right)\left(\varepsilon_{\perp}+2\right)\right]}, \qquad (13)$$

где $\varepsilon_{||}$ и $\varepsilon_{\perp}$ представляют собой, соответственно, продольную и поперечную диэлектрическую проницаемость ЖК матрицы. Отметим, что формулы (12) и (13), очевидным образом, справедливы как в нематическом, так и в одноосном смектическом А композите, так как слоевое упорядочение в смектической фазе не влияет на оптические свойства материала в силу того, что период смектической структуры гораздо меньше длины световой волны.

В то же время, в холестерических композитах при наличии спиральной закрутки директора оптические свойства характеризуются пространственно неоднородным распределением тензора диэлектрической проницаемости, который следует распределению директора вдоль оси z холестерической спиральной структуры. В таком случае следует записывать пространственно неоднородный тензор $\hat{\varepsilon}(z)$ согласно выражению (11), в котором тензор ЖК матрицы имеет вид:

$$\hat{\varepsilon}_{LC}(z)=\varepsilon_{\perp}\hat{1}+\Delta\varepsilon\,\mathbf{n}(z)\otimes\mathbf{n}(z), \qquad (14)$$

где $\Delta\varepsilon=\varepsilon_{||}-\varepsilon_{\perp}$, пространственное распределение директора $\mathbf{n}(z)$ вдоль оси z даётся выражением:

$$\mathbf{n}(z)=\mathbf{x}\cos qz+\mathbf{y}\sin qz, \tag{15}$$

единичные векторы **x** и **y** направлены перпендикулярно оси спирали, а шаг спирали q может в общем случае и не совпадать с таковым в исходной ЖК матрице.

В заключение рассмотрим важное наблюдаемое следствие, вытекающее из приведённого анализа – сдвиг и расщепление плазмонных резонансов НЧ, происходящее под влиянием анизотропного ЖК окружения. Резонансы нанокомпозита соответствуют полюсам выражений (12) и (13), рассматриваемых как функции частоты света ω. Предполагая, что исходная ЖК матрица прозрачна и обладает пренебрежимо малой частотной дисперсией, можно считать, что зависимость от частоты целиком определяется дисперсией ε_m, которая, в соответствии с (1), является слабо комплексной величиной.

Учитывая предполагаемую при выводе ранее малость объёмной доли НЧ в композите, $\varphi \ll 1$, и подставив в уравнения (12) и (13) выражение для диэлектрической проницаемости металла (1), можно найти положение плазмонных резонансов НЧ для двух ортогональных направлений поляризации электрического поля световой волны (вдоль и поперёк локального ЖК директора):

$$\omega_{r\|}=\omega_{r0}\left(1-\varphi\varepsilon_s\frac{\varepsilon_\| +2}{2+4\varepsilon_s}\right), \tag{16}$$

$$\omega_{r\perp}=\omega_{r0}\left(1-\varphi\varepsilon_s\frac{\varepsilon_\perp +2}{2+4\varepsilon_s}\right). \tag{17}$$

Таким образом, в рамках использованного приближения анизотропное расщепление плазмонного резонанса линейно растёт с концентрацией НЧ композите:

$$\Delta\omega_r=\omega_{r\|}-\omega_{r\perp}=-\varphi\ \omega_{r0}\ \frac{\Delta\varepsilon\,\varepsilon_s}{2+4\varepsilon_s}. \tag{18}$$

Несложно оценить условия, при которых данное расщепление может становиться наблюдаемой величиной. Для этого необходимо, чтобы расщепление как минимум превышало полуширины плазмонных резонансов композита. Последние определяются поглощением света в НЧ, то есть мнимой частью диэлектрической проницаемости (1), на которую, соответственно, должно быть наложено ограничение $\mathrm{Im}\varepsilon_m \le \varphi\Delta\varepsilon\varepsilon_s$, которое в соответствии с (1) означает ограничение снизу на время свободного пробега электронов проводимости в металле:

$$\tau \ge \frac{1}{\omega_p}\frac{\left(1+2\varepsilon_s\right)^{3/2}}{\varphi\varepsilon_s\,\Delta\varepsilon}. \tag{19}$$

При выполнении данного условия расщепление резонансов разных поляризаций становится заметным и анизотропия эффективной диэлектрической поляризации композита в резонансной области существенно больше анизотропии исходной ЖК матрицы Δε. Соответственно, на таких частотах существенно усиливаются все эффекты, связанные с анизотропией и её пространственной закруткой в холестерических ЖК-материалах [14].

Статья поступила в редакцию 24.02.2019 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Osipov M. A., Gorkunov M. V. Effect of nanoparticle chain formation on dielectric anisotropy of nematic composites // Physical Review E. 2015. Vol. 92. Iss. 3. P. 032501.
2. Осипова В. В., Чаусов Д. Н., Беляев В. В., Галяметдинов Ю. Г. Физико-химические свойства композитов на основе светоизлучающих компонентов // Вестник Казанского технологического университета. 2014. Т. 17. № 17. С. 50–52.
3. Pajak G., Osipov M. A. Unified molecular field theory of nematic, smectic-A, and smectic-C phases // Physical Review E. 2013. Vol. 88. Iss. 1. P. 012507.
4. Nanoparticle-Stabilized Cholesteric Blue Phases / Yoshida H., Tanaka Y., Kawamoto K., et al. // Applied Physics Express. 2009. Vol. 2. No. 12. P. 121501.
5. Dielectric properties of liquid crystalline composites doped with nano-dimensional fragments of shungite carbon / Chausov D. N., Kurilov A. D., Kazak A. V., et al. // Liquid Crystals. 2019. URL: https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/02678292.2019.1566503?journalCode=tlct20 (дата обращения: 01.04.2019).
6. Шамилов Р. Р., Нугаева А. А., Чаусов Д. Н., Беляев В. В., Галяметдинов Ю. Г. Нанокомпозиты на основе гибридных квантовых точек и PFO // Вестник Казанского технологического университета. 2014. Т. 17. № 23. С. 42–44.
7. Parameters of LC molecules' movement measured by dielectric spectroscopy in wide temperature range / Chausov D. N., Kurilov A. D., Belyaev V. V., Kumar S. // Opto-Electronics Review. 2018. Vol. 26. Iss. 1. P. 44–49.
8. Чаусов Д. Н., Курилов А. Д., Константинов М. С., Беляев В. В., Богданов Д. Л. Анизотропия диэлектрической проницаемости смеси ЖК-1282 // Жидкие кристаллы и их практическое использование. 2015. Т. 15. № 2. С. 35–43.
9. Беляев В. В., Соломатин А. С., Чаусов Д. Н. Оптические свойства ЖК ячеек с произвольным краевым углом наклона директора // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2013. № 1. С. 32–40.
10. Чаусов Д. Н. Диэлектрическая релаксация в жидкокристаллической смеси на основе цианофенилпиридинов // Жидкие кристаллы и их практическое использование. 2018. Т. 18. № 3. С. 45–52.
11. Osipov M. A. The general statistical theory of the dielectric permittivity and the internal field in anisotropic fluids // Chemical Physics Letters. 1985. Vol. 113. Iss. 5. P. 471–475.
12. Вукс М. Ф. Электрические и оптические свойства молекул и конденсированных сред: учебное пособие. Л.: ЛГУ, 1984. 334 с.
13. Аверьянов Е. М., Осипов М. А. Эффекты локального поля световой волны в молекулярной оптике жидких кристаллов // Успехи физических наук. 1990. Т. 160. № 5 С. 89–125.
14. Osipov M. A., Gorkounov M. V. Nematic liquid crystals doped with nanoparticles: phase behavior and dielectric properties // Liquid Crystals with Nano and Microparticles / ed. by J. P. F. Lagerwall, G. Scalia. Singapore: World Scientific Publishing Company, 2016. P. 135–175.

15. Kobayashi S., Toshima N. Nanoparticles and LCDs: It's a Surprising World // SID Information Display. 2007. Vol. 29/9. pp. 26–35.
16. Осипов М. А. Диэлектрическая проницаемость и проблема локального поля в жидких кристаллах // Кристаллография. 1986. Т. 31. № 6. С. 1051–1058.
17. Mie G. Beitrage zur Optik Medien, speziell kolloidaler Metallosungen // Annalen der Physic. 1908. Vol. 330. Iss. 3. pp. 377–445.

REFERENCES

1. Osipov M. A., Gorkunov M. V. Effect of nanoparticle chain formation on dielectric anisotropy of nematic composites. In: *Physical Review E*, 2015, vol. 92, iss. 3, pp. 032501.
2. Osipova V. V., Chausov D. N., Belyaev V. V., Galyametdinov Yu. G. [Physico-chemical properties of composites based on light-emitting components]. In: *Vestnik Kazanskogo tekhnologicheskogo universiteta* [Herald of Kazan Technological University], 2014, vol. 17, no. 17, pp. 50–52.
3. Pajak G., Osipov M. A. Unified molecular field theory of nematic, smectic-A, and smectic-C phases. In: *Physical Review E*, 2013, vol. 88, iss. 1, pp. 012507.
4. Yoshida H., Tanaka Y., Kawamoto K., et al. Nanoparticle-stabilized cholesteric blue phases. In: *Applied Physics Express*, 2009, vol. 2, no. 12. pp. 121501.
5. Chausov D. N., Kurilov A. D., Kazak A. V., et al. Dielectric properties of liquid crystalline composites doped with nano-dimensional fragments of shungite carbon. In: *Liquid Crystals*, 2019. URL: https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/02678292.2019.1566503?journalCode=tlct20 (accessed: 01.04.2019).
6. Shamilov R. R., Nugaeva A. A., Chausov D. N., Belyaev V. V., Galyametdinov Yu. G. [Nanocomposites based on hybrid quantum dots and PFO]. In: *Vestnik Kazanskogo tekhnologicheskogo universiteta* [Herald of Kazan Technological University], 2014, vol. 17, no. 23, pp. 42–44.
7. Chausov D. N., Kurilov A. D., Belyaev V. V., Kumar S. Parameters of LC molecules' movement measured by dielectric spectroscopy in wide temperature range. In: *Opto-Electronics Review*, 2018, vol. 26, iss. 1, pp. 44–49.
8. Chausov D. N., Kurilov A. D., Konstantinov M. S., Belyaev V. V., Bogdanov D. L. [Dielectric permittivity anisotropy of the ZhK-1282 mixture]. In: *Zhidkie kristally i ikh prakticheskoe ispol'zovanie* [Liquid Crystals and their Application Russian Journal], 2015, vol. 15, no. 2, pp. 35–43.
9. Belyaev V. V., Solomatin A. S., Chausov D. N. [Optical properties of the liquid crystal in cells with arbitrary LC director pretilt angle]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika* [Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], 2013, no. 1, pp. 32–40.
10. Chausov D. N. [Dielectric relaxation in liquid crystalline mixtures based on cyanophenylpyridines]. In: *Zhidkie kristally i ikh prakticheskoe ispol'zovanie* [Liquid Crystals and their Application Russian Journal], 2018, vol. 18, no. 3, pp. 45–52.
11. Osipov M. A. The general statistical theory of the dielectric permittivity and the internal field in anisotropic fluids. In: *Chemical Physics Letters*, 1985, vol. 113, iss. 5, pp. 471–475.
12. Vuks M. F. *Elektricheskie i opticheskie svoistva molekul i kondensirovannykh sred* [Electrical and optical properties of molecules and condensed matter]. Leningrad, Leningrad State University Publ., 1984. 334 p.
13. Aver'yanov E. M., Osipov M. A. [Effects of the local field of a light wave in the molecular optics of liquid crystals]. In: *Uspekhi fizicheskikh nauk* [Physics-Uspekhi (Advances in Physical Sciences)], 1990, vol. 160, no. 5, pp. 89–125.

14. Osipov M. A., Gorkounov M. V. Nematic liquid crystals doped with nanoparticles: phase behavior and dielectric properties. In: Lagerwall J. P. F., Scalia G., eds. *Liquid Crystals with Nano and Microparticles*. Singapore, World Scientific Publishing Company, 2016. pp. 135–175.
15. Kobayashi S., Toshima N. Nanoparticles and LCDs: It's a Surprising World. In: *SID Information Display*, 2007, vol. 29/9, pp. 26–35.
16. Osipov M. A. [The dielectric constant and the problem of the local field in liquid crystals]. In: *Kristallografiya* [Crystallography Reports], 1986, vol. 31, no. 6, pp. 1051–1058.
17. Mie G. Beitrage zur Optik Medien, speziell kolloidaler Metallosungen. In: *Annalen der Physic*, 1908, vol. 330, iss. 3, pp. 377–445.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Осипов Михаил Алексеевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики и статистики университета Стречклайд;
e-mail: m.osipov@strath.ac.uk

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Mikhail A. Osipov – Doctor in physical and mathematical sciences, professor at the Department of Mathematics and Statistics, University of Strathclyde;
e-mail: m.osipov@strath.ac.uk

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Осипов М. А. Теория диэлектрической проницаемости нематических нанокомпозитов, содержащих сферические наночастицы // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2019. № 2. С. 14–23.
DOI: 10.18384-2310-7251-2019-2-14-23

FOR CITATION

Osipov M. A Theory of dielectric susceptibility of nematic nanocomposites doped with spherical nanoparticles In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*, 2019, no. 2, pp. 14–23.
DOI: 10.18384-2310-7251-2019-2-14-23

УДК 539.1
DOI: 10.18384-2310-7251-2019-2-24-48

К ВОПРОСУ О ВЫВОДЕ УРАВНЕНИЯ ВЛАСОВА-МАКСВЕЛЛА-ЭЙНШТЕЙНА И ЕГО СВЯЗЬ С КОСМОЛОГИЧЕСКИМ ЛЯМБДА-ЧЛЕНОМ

Веденяпин В. В. [1,2]***, Фимин Н. Н.*** [1]***, Чечеткин В. М.*** [1]

[1] *Институт прикладной математики имени М. В. Келдыша Российской Академии наук*
125047, г. Москва, Миусская пл., д. 4, Российская Федерация

[2] *Российский университет дружбы народов*
117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Российская Федерация

Аннотация. Из классического действия Лоренца-Гильберта-Эйнштейна выводятся кинетические уравнения Власова-Максвелла-Эйнштейна для частиц в гравитационном и электромагнитном полях. Предложена методика синхронизации собственных времён различных частиц. На основе полученных выражений для действий (в том числе в постньютоновском приближении) анализируется связь космологического лямбда-члена и тёмной энергии.

Ключевые слова: модель Милна-МакКри, уравнение Власова-Максвелла-Эйнштейна, лагранжиан, космологическая постоянная, действие Гильберта.

DERIVATION OF VLASOV–MAXWELL–EINSTEIN EQUATION AND ITS CONNECTION WITH COSMOLOGICAL LAMBDA-TERM

V. Vedenyapin [1,2]***, N. Fimin*** [1]***, V. Chechetkin*** [1]

[1] *Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences*
Miusskaya ploshchad' 4, 125047 Moscow, Russian Federation

[2] *RUDN University*
ul. Mikluho-Maklaya 6, 117198 Moscow, Russian Federation

Abstract. Using the classical Lorentz–Hilbert–Einstein action, we derive the kinetic Vlasov–Maxwell–Einstein equation for particles in the gravitational and electromagnetic fields. The method of synchronization of intrinsic times of different particles is proposed. Based on the obtained expressions for actions (including in the post-Newtonian approximation), we analyze the connection of the cosmological lambda-term and dark energy.

Keywords: Milne-McCree model, Vlasov–Maxwell–Einstein equation, Lagrangian, cosmological constant, Hilbert action.

Введение

Уравнения типа Власова проживают удивительную жизнь. Всё время расширяются не только сферы их приложения, но и приставки, соответствующие этим приложениям: уже сейчас в научном обиходе есть уравнения Власова-

Пуассона для гравитации, плазмы и электронов, уравнения Власова-Максвелла для электродинамики и уравнения Власова-Эйнштейна для систем гравитирующих частиц. Мы будем рассматривать в настоящей работе уравнения Власова-Максвелла-Эйнштейна. Это название естественное, поскольку проистекает из классических лагранжианов общей теории относительности (ОТО) и электродинамики. При выводе уравнений типа Власова из классических лагранжианов обычно сначала выводятся уравнения Лиувилля. В случае уравнений Власова-Максвелла-Эйнштейна возникают новые трудности: для корректности вывода требуется синхронизация времён разных частиц и сравнение разных форм лагранжианов для движения по геодезическим. При этом появляется интеграл интервала (в пособиях по ОТО фактически принудительно полагаемый равным единице), без изучения которого невозможно синхронизовать собственные времена разных частиц, а поэтому и выписать уравнение Власова-Эйнштена для многих частиц. Для получения уравнений самосогласованных полей требуется преобразование классических действий от лагранжева представления к эйлерову с использованием функций распределения.

Уравнение движения частиц в гравитационном и электромагнитном поле и уравнение Лиувилля

Общерелятивистское действие для движущейся заряженной (с зарядом e) частицы массы m в присутствии гравитационного и электромагнитного поля может быть записан в следующем виде:

$$S_1 = -mc\int_0^{\lambda_{max}} \sqrt{g_{\mu\nu}(\mathbf{X})\frac{dX^\mu(\mathbf{q},\lambda)}{d\lambda}\frac{dX^\nu(\mathbf{q},\lambda)}{d\lambda}}d\lambda - \frac{e}{c}\int A_\mu \frac{dX^\mu}{d\lambda}d\lambda,$$

где: $g_{\mu\nu}(\mathbf{X})$ – фундаментальный тензор 4-мерного пространства-времени $\left(\mathbf{X} = \left\{X^\mu\right\}_{\mu=1,\dots,4}\right)$, $A_\mu(\mathbf{X}) \equiv \left\{\varphi(\mathbf{X});\mathbf{A}(\mathbf{X})\right\}$ – 4-потенциал электромагнитного поля, $\mathbf{q}$ – лагранжев параметр частицы; переменная $\lambda \in \mathbb{R}^+$ – произвольный параметр. По повторяющимся индексам идёт суммирование.

Введём в рассмотрение также действие с модифицированным первым членом:

$$S_2 = -\frac{mc}{2\sqrt{I}}\int_0^{\lambda_{max}} g_{\mu\nu}(\mathbf{X})\frac{dX^\mu(\mathbf{q},\lambda)}{d\lambda}\frac{dX^\nu(\mathbf{q},\lambda)}{d\lambda}d\lambda - \frac{e}{c}\int A_\mu \frac{dX^\mu}{d\lambda}d\lambda.$$

В литературе (см., например, [1–3; 8]) подобная операция (переход к новой форме действия) производится без электромагнитного поля (второго слагаемого в действиях) и обосновывается тем, что уравнения движения частицы в гравитационном поле будут одинаковыми в обоих случаях (то есть при использовании действий S_1 и S_2 с заменой параметра λ на «натуральный» параметр s или собственное время $\tau = s/c$).

Поставим вопрос обоснования эквивалентности действий по признаку совпадения уравнений Эйлера-Лагранжа. Рассмотрим два типа действий с ядрами-лагранжианами следующей общей формы:

$$S_I = k\int L\left(\mathbf{X},\frac{d\mathbf{X}}{d\lambda}\right)d\lambda + \int L_1\left(\mathbf{X},\frac{d\mathbf{X}}{d\lambda}\right)d\lambda,$$

$$S_{II} = \int h(L)\,d\lambda + \int L_1\left(\mathbf{X},\frac{d\mathbf{X}}{d\lambda}\right)d\lambda,$$

где $h(L)$ – некоторая (гладкая) произвольная функция своего аргумента. Сравним уравнения Эйлера-Лагранжа, получаемые из действий S_I и S_{II}.

Лемма (об эквивалентности действий S_I и S_{II}). Достаточные условия для эквивалентности, то есть совпадения уравнений Эйлера-Лагранжа, действий S_I и S_{II} таковы:

1) лагранжиан $L(\mathbf{X}, \mathbf{X}_\lambda)$ должен быть интегралом движения для действия S_I;

2) коэффициент k в определении S_I должен совпадать с производной функции $h(L)$ из определения действия S_{II}: $k = dh(L)/dL$. Если лагранжиан не равен нулю, то коэффициент k определяется единственным образом.

Доказательство получается прямым варьированием действия S_{II}, генерирующего уравнения Эйлера-Лагранжа [1; 12; 8]:

$$\frac{d^2h}{dL^2}\frac{dL}{d\lambda}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{X}_\lambda} + \frac{dh}{dL}\frac{d}{d\lambda}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{X}_\lambda} + \frac{d}{d\lambda}\frac{\partial L_1}{\partial \mathbf{X}_\lambda} = \frac{dh}{dL}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{X}} + \frac{\partial L_1}{\partial \mathbf{X}},$$

и сравнением получающихся уравнений с соответствующими уравнениями движения для действия S_I:

$$K\frac{d}{d\lambda}\frac{\partial L_1}{\partial \mathbf{X}_\lambda} + \frac{d}{d\lambda}\frac{\partial L_1}{\partial \mathbf{X}_\lambda} = k\frac{\partial L}{\partial \mathbf{X}} + \frac{\partial L_1}{\partial \mathbf{X}}.$$

Следствием из данной Леммы является тот факт, что ранее введённые действия S_1 и S_2 эквивалентны в смысле Леммы, то есть обладают одинаковыми уравнения движения. Действительно, для этих действий имеем:

$$h(L) = -mc\sqrt{L}\ ,\ L = g_{\mu\nu}\frac{dX^\mu}{d\lambda}\frac{dX^\nu}{d\lambda}\ ,\ L_1 = -\frac{e}{c}A_\mu\frac{dX^\mu}{d\lambda}\ .$$

Условие 1 Леммы выполнено по теореме Эйлера об однородных функциях: функция Гамильтона (интеграл движения!) для действия S_2, получаемая преобразования Лежандра, пропорциональна лагранжиану $L = g^\mu_\nu X^\mu_\lambda X^\nu_\lambda$, и лангранжиан L_2 первой степени по «скоростной» переменной X^μ_λ; условие 2 выполнено, поскольку коэффициент k в S_1 равен в точности производной функции $h(L)$ из S_{II}: $k = dh/dL = -mc/2\sqrt{L}$ (это соотношение проясняет физический смысл величины I: она численно равна сохраняющейся величине лангранжиана L и пропорциональна соответствующему ему гамильтониану).

Выпишем уравнения Эйлера–Лангранжа для действия S_1 или S_2 в соответствии с Леммой, они идентичны (в отличие от обычной процедуры [1; 3] при варьировании S_1 величину интервала полагаем равной не единице, а $\sqrt{I}$):

$$\frac{mc}{\sqrt{I}}\frac{d}{d\lambda}\left(g_{\mu\nu}\frac{dX^{\nu}}{d\lambda}\right)+\frac{e}{c}\frac{dA_{\mu}}{d\lambda}=\frac{mc}{2\sqrt{I}}\frac{\partial g_{\nu\zeta}}{\partial X^{\mu}}\frac{dX^{\nu}}{d\lambda}\frac{dX^{\zeta}}{d\lambda}+\frac{e}{c}\frac{\partial A_{\nu}}{\partial X^{\mu}}\frac{dX^{\nu}}{d\lambda}. \tag{1}$$

Отсюда видно, что при отсутствии электромагнитного взаимодействия между частицами величина $mc/\sqrt{I}$ сокращается, и уравнения движения могут быть равносильным образом записаны с использованием как параметра λ, так и параметра собственного интервала s. Однако учёт электромагнитного взаимодействия приводит при использовании различных параметров к различающимся уравнениям. Хотя, как можно видеть из уравнения (1), можно в принципе перейти к аффинному параметру s, выразив $d\lambda$ через ds и I: $ds=\sqrt{I}d\lambda$.

В многочастичных системах такая возможность отсутствует. Рассмотрим действие, аналогичное S_1, но для системы многих частиц с различающимися массами m_a и зарядами e_a $\left(a=\overline{1,N}\right)$:

$$S_{1,\Sigma}=-\sum_a m_a c\int\sqrt{g_{\mu\nu}\frac{dX_a^{\mu}}{d\lambda}\frac{dX_a^{\nu}}{d\lambda}}d\lambda-\sum_a\frac{e_a}{c}\int A_{\mu}\frac{dX_a^{\mu}}{d\lambda}d\lambda.$$

Снова переходим к лагранжиану, квадратичному по скоростям, и получаем эквивалентное действие:

$$S_{2,\Sigma}=-\sum_a\frac{m_a c}{2\sqrt{I_a}}\int g_{\mu\nu}\left(\mathbf{X}_a\right)\frac{dX_a^{\mu}}{d\lambda}\frac{dX_a^{\nu}}{d\lambda}d\lambda-\sum_a\frac{e_a}{c}\int A_{\mu}\frac{dX_a^{\mu}}{d\lambda}d\lambda.$$

Отметим здесь появление индекса a, нумерующего частицы, у интеграла I_a: величины этих интегралов, обозначающих величину интервала разных частиц, необязательно одинаковы. Этим мы синхронизовали собственное время разных частиц $ds_a=\sqrt{I_a}d\lambda$ в следующем смысле: 1) установили, что невозможность синхронизации самих интервалов ds_a связана с различными величинами интегралов I_a; 2) показали, как различные собственные времена связаны между собой: параметр λ для всех частиц один и тот же. Отметим, что интегралы I_a зависят от параметризации, но их отношение не зависит $\left(I_{a1}/I_{a2}\neq\varphi(\lambda), a_{1,2}\in\{1,\ldots,N\}\right)$.

Для описания динамики многочастичной системы, ассоциированной с действиями $S_{1,\Sigma}$ или $S_{2,\Sigma}$, можно ввести стандартным образом канонические («длинные») [1–3] импульсы:

$$\left(Q_a\right)_{\mu}=\frac{\partial L}{\partial V_a^{\mu}}=-\frac{m_a c}{\sqrt{I_a}}g_{\mu\nu}\left(\mathbf{X}_a\right)V_a^{\nu}-\frac{e_a}{c}A_{\mu}\left(\mathbf{X}_a\right),\ V_a^{\nu}\equiv\frac{\partial X_a^{\nu}}{\partial\lambda}.$$

Очевидным образом можно получить явное выражение скоростей через длинные импульсы:

$$V_{\mu}^{\nu}=-\frac{\sqrt{I_a}}{m_a c}g^{\mu\nu}\left(\mathbf{X}_a\right)\left(\left(Q_a\right)_{\mu}+\frac{e_a}{c}A_{\mu}\right).$$

Соответственно, второе уравнение гамильтоновой пары уравнений, ассоциированной с канонически сопряженными переменными (X_a, Q_a):

$$\frac{d(Q_a)_\mu}{d\lambda}=\sum_a\frac{\sqrt{I_a}}{m_a c}\left((Q_a)_\zeta+\frac{e_a}{c}A_\zeta(\mathbf{X}_a)\right)\frac{\partial g^{\zeta\nu}}{\partial X_a^\mu}\left((Q_a)_\nu+\frac{e_a}{c}A_\nu(\mathbf{X}_a)\right)+$$

$$+\frac{e_a\sqrt{I_a}}{m_a c^2}\left((Q_a)_\zeta+\frac{e_a}{c}A_\zeta(\mathbf{X}_a)\right)g^{\zeta\xi}\frac{\partial A_\xi(\mathbf{X}_a)}{\partial X_a^\mu}.$$

При этом соответствующая этим уравнениям функция Гамильтона имеет вид:

$$H=\sum_a\frac{\sqrt{I_a}}{m_a c}\left((Q_a)_\zeta+\frac{e_a}{c}A_\zeta(\mathbf{X}_a)\right)g^{\zeta\xi}\left((Q_a)_\nu+\frac{e_a}{c}A_\nu(\mathbf{X}_a)\right).$$

Здесь интегралы $\sqrt{I_a}$ осуществляют синхронизацию времён, приводя к дифференцированию по одному и тому же параметру λ: соотношение $ds_a=\sqrt{I_a}d\lambda$ показывает, что получаются уравнения, где можно перейти к собственным (вообще говоря, различающимся) временам. Введём (парциальную, для типа a частиц) функцию распределения $f_a(\mathbf{X}, \mathbf{Q}, \lambda)$ над расширенным 9-мерным фазовым пространством (в соответствии с [9–11] индексы a переместились от координат и импульсов к функции распределения f_a). Соответствующее уравнение Лиувилля для f_a принимает следующую форму:

$$\frac{\partial f_a(\mathbf{X},\mathbf{Q},\lambda)}{\partial\lambda}-\frac{\sqrt{I_a}}{m_a c}g^{\mu\nu}(\mathbf{X}_a)\left((Q_a)_\mu+\frac{e}{c}A_\mu\right)\frac{\partial f_a}{\partial X^\nu}+$$

$$+\left(\frac{\sqrt{I_a}}{m_a c}\left((Q_a)_\zeta+\frac{e_a}{c}A_\zeta(\mathbf{X}_a)\right)\frac{\partial g^{\zeta\nu}}{\partial X_a^\mu}\left((Q_a)_\nu+\frac{e_a}{c}A_\nu(\mathbf{X}_a)\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{e_a\sqrt{I_a}}{m_a c^2}\left((Q_a)_\zeta+\frac{e_a}{c}A_\zeta(\mathbf{X}_a)\right)g^{\zeta\xi}\frac{\partial A_\xi}{\partial X_a^\mu}\right)\frac{\partial f_a}{\partial P_\mu}=0. \qquad (2)$$

Уравнения зависят от индекса a через массы m_a, заряды e_a и интеграла I_a. Выпишем λ-стационарную форму этого уравнения, когда f_a не зависит от параметра λ (именно так обычно записывают уравнение Власова-Эйнштейна, хотя и в более упрощенном случае отсутствия электромагнитного взаимодействия [9; 13; 14]:

$$-g^{\mu\nu}(\mathbf{X}_a)\left((Q_a)_\mu+\frac{e}{c}A_\mu\right)\frac{\partial f_a(\mathbf{X},\mathbf{P})}{\partial X^\nu}+$$

$$+\left(\frac{\partial g^{\zeta\nu}}{\partial X_a^\mu}\left((Q\text{-})_\zeta+\frac{e_a}{c}A_\zeta\right)\left((Q\ )_\nu+\frac{e_a}{c}A_\nu\right)+\frac{e_a}{c}F_{\mu\nu}(\mathbf{X})g^{\zeta\nu}\left((Q\ )_\zeta+\frac{e_a}{c}A_\zeta\right)\right)\frac{\partial f_a}{\partial P_\mu}=0.$$

Можно сравнить выписанные выше кинетические уравнения с уравнениями Лиувилля, где используются неканонические («короткие») импульсы с нулевыми электромагнитными полями действия $S_{1,\Sigma}$:

$$\left(P_a\right)_\mu = -m_a c I_a^{-1/2} g_{\mu\nu}(\mathbf{X}_a) V_a^\nu .$$

Получаемые при этом уравнения негамильтоновы, но бездивергентные:

$$\frac{dX_a^\nu}{d\lambda} = -\frac{\sqrt{I_a}}{m_a c} g^{\mu\nu}\left(\mathbf{X}\right)\left(P_a\right)_\mu , \tag{3}$$

$$\frac{d\left(P_a\right)_\mu}{d\lambda} = -\frac{\sqrt{I_a}}{m_a c}\frac{\partial g^{\nu\zeta}}{\partial X^\mu}\left(P_a\right)_\nu\left(P_a\right)_\zeta + \frac{e_a}{c}\frac{\sqrt{I_a}}{m_a c} F_{\mu\nu}\left(\mathbf{X}_a\right) g^{\zeta\nu}\left(\mathbf{X}_a\right)\left(P_a\right)_\zeta .$$

Отметим, что и здесь такая ситуация с синхронизацией времён: собственные времена все различаются, как показывает та же формула $ds_a = \sqrt{I_a}\, d\lambda$. Выпишем уравнение Лиувилля, вводя парциальные функции распределения $f_a(\mathbf{X}, \mathbf{P}, \lambda)$ частиц с массами m_a и зарядами e_a над 9-мерным фазовым $(\mathbf{X}, \mathbf{P}, \lambda)$-пространством:

$$\frac{\partial f_a\left(\mathbf{X},\mathbf{P},\lambda\right)}{\partial\lambda} - \frac{\sqrt{I_a}}{m_a c} g^{\mu\nu}\left(\mathbf{X}\right)\left(P_a\right)_\mu \frac{\partial f_a}{\partial X^\nu} +$$

$$+\left(-\frac{\sqrt{I_a}}{m_a c}\frac{\partial g^{\nu\zeta}}{\partial X^\mu}\left(P_a\right)_\nu\left(P_a\right)_\zeta + \frac{e_a}{c}\frac{\sqrt{I_a}}{m_a c} F_{\mu\nu}\left(\mathbf{X}\right) g^{\zeta\nu}\left(P_a\right)_\zeta\right)\frac{\partial f_a}{\partial P_\mu} = 0.$$

Это уравнение можно переписать в форме, исключающей параметр λ, заменяя его на собственный интервал фиксированной a_0-ой частицы ($a_0 \in \{1, ..., N\}$) согласно формуле $d\lambda = ds_{a_0} / \sqrt{I_{a_0}}$:

$$\frac{\partial f_a\left(\mathbf{X},\mathbf{P},s\right)}{\partial s_{a_0}} - \frac{1}{m_a c}\frac{\sqrt{I_a}}{\sqrt{I_{a_0}}} g^{\mu\nu}\left(\mathbf{X}\right)\left(P_a\right)_\mu \frac{\partial f_a}{\partial X^\nu} +$$

$$+\left(-\frac{1}{m_a c}\frac{\sqrt{I_a}}{\sqrt{I_{a_0}}}\frac{\partial g^{\nu\zeta}}{\partial X^\mu}\left(P_a\right)_\nu\left(P_a\right)_\zeta + \frac{e_a}{c}\frac{1}{m_a c}\frac{\sqrt{I_a}}{\sqrt{I_{a_0}}} F_{\mu\nu}\left(\mathbf{X}\right) g^{\zeta\nu}\left(P_a\right)_\zeta\right)\frac{\partial f_a}{\partial P_\mu} = 0.$$

При этом, как уже было отмечено выше, отношение I_a/I_{a0} не зависит от λ (а является только функцией переменной $\mathbf{X}$).

Приведём λ–стационарную форму уравнения Лиувилля, когда $f_a = f_a(\mathbf{X}, \mathbf{P})$, то есть не зависит от параметрической переменной λ (при этом сокращаются множители $\sqrt{I_a} / m_a c$ в левой части уравнения):

$$-g^{\mu\nu}\left(\mathbf{X}\right)P_\mu \frac{\partial f_a\left(\mathbf{X},\mathbf{P}\right)}{\partial X^\nu} + \left(-\frac{1}{2}\frac{\partial g^{\nu\zeta}}{\partial X^\mu} P_\nu P_\zeta + \frac{e_a}{c} F_{\mu\nu}\left(\mathbf{X}\right) g^{\zeta\nu} P_\nu\right)\frac{\partial f_a}{\partial P_\mu} = 0$$

(поскольку $X^0 = ct$, последнее уравнение в общем случае t нестационарно). В известной авторам литературе подобная форма (для гравитирующих заряженных частиц для функции распределения, зависящей от «короткого» импульса) уравнения Лиувилля отсутствуют; с использованием канонических импульсов уравнение Лиувилля выписано – отметим, на уровне интуитивных рассуждений – в некоторых работах, см., например, [13; 14]). Для нейтральных массивных частиц одинаковой массы m над фазовым $(\mathbf{X}, \mathbf{P})$–пространством уравнение Лиувилля записано [14; 15] в следующем виде:

$$\frac{P^{\mu}}{m}\frac{\partial f(\mathbf{X},\mathbf{P})}{\partial X^{\mu}}-\frac{1}{2m}P_{\eta}P_{\zeta}\frac{\partial g^{\eta\zeta}}{\partial X^{\mu}}\frac{\partial f}{\partial P_{\mu}}=0,$$

то есть с точностью до переобозначений совпадает с введённым нами λ–независимым уравнением Лиувилля (без электромагнетизма). Следует, однако, указать на то, что в большинстве публикаций, посвящённых уравнению Власова-Эйнштейна, приводится другая форма общерелятивистского уравнения Лиувилля, использующая функцию распределения, зависящую от 4 скоростей (см., например, [16; 17]):

$$V^{\zeta}\frac{\partial f}{\partial X^{\zeta}}+\left(-\Gamma^{\zeta}_{\eta\mu}V^{\eta}V^{\mu}+\frac{e}{c}F^{\zeta}_{\beta}V^{\beta}\right)\frac{\partial f}{\partial V^{\zeta}}=0,$$

(практически идентичная данной форма уравнения Лиувилля рассматривается также в работах [18–20]).

Рассмотрим в качестве *Примера 1* частный случай уравнения (1), когда метрика $g_{\mu\nu}$ и компоненты векторного потенциала A_{μ} не зависят от временной координаты. Тогда правая часть равенства (1) при индексе $\mu = 0$ аннулируется, и возможно аналитически проинтегрировать левую часть (индекс a опускаем):

$$\frac{mc}{\sqrt{I}}\left(g_{0\nu}\frac{dX^{\nu}}{d\lambda}\right)+\frac{e}{c}A_0=Q_0.$$

Смысл получающегося интеграла можно выяснить, взяв постгалилееву метрику $g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1 + 2U/c^2, -1, -1, -1)$, где U – ньютоновский гравитационный потенциал (см., например, [3]). Тогда последнее соотношение преобразуется к форме:

$$\frac{mc}{\sqrt{I}}\left(1+\frac{2U}{c^2}\right)\frac{dX^0}{d\lambda}+\frac{e}{c}A_0=Q_0, \tag{4}$$

а остальные уравнения Эйлера-Лагранжа системы (1) приобретают вид:

$$\frac{mc}{\sqrt{\tilde{}}}\frac{d}{d\lambda}\frac{dX^j}{d\lambda}+\frac{dA_j}{d\lambda}=\frac{mc}{2\ {}^{2}\sqrt{\ }}\frac{\partial U}{\partial x^j}\left(\frac{dX^0}{d\lambda}\right)^2+\frac{e}{c}\frac{\partial A_{\nu}}{\partial X^j}\frac{dX^{\nu}}{d\lambda},\ j=1,2,3.$$

Заменяя параметр λ из уравнения (9) на время t, получаем уравнения движения заряженной частицы в электростатическом поле и в гравитационном потенциале U:

$$M\frac{d^2x^j}{dt^2}=M\frac{\partial U}{\partial x^j}+\frac{e}{c}F_{\mu j}\frac{dX^\mu}{dt},$$

где $M = (Q_0/c - eA_0/c^2)/(1 + 2U/c^2)$ — эффективная масса частицы при суперпозиции полей.

В качестве ещё одного физически интересного *Примера 2* (в некотором смысле противоположного рассмотренному выше) разберём случай полностью однородной Вселенной: метрика, гравитационное и электромагнитное поля зависят только от времени. В этом случае уравнения (1) интегрируются из общих соображений гамильтоновой механики, но интересно проследить и конкретные детали. Имеем три интеграла движения (для простоты индекс a не вводится):

$$\frac{mc}{\sqrt{I}}\left(g_{j\nu}\frac{dX^\nu}{d\lambda}\right)+\frac{e}{c}A_j=Q_j \qquad \left(j=1,2,3\right). \tag{5}$$

Вместо соотношения для нулевой компоненты циклического импульса воспользуемся интегралом энергии $I=g_{\mu\nu}X^\mu_\lambda X^\nu_\lambda$. Следовательно, пространственные компоненты «короткого» импульса определяются как функции времени из формулы (4): $P_j=p_j=eA_j/c-Q_j$, а нулевая («временная») компонента определяется как функция времени из определения $I: g^{\varepsilon\mu}P_\mu P_\varepsilon=m^2c^2$. Мы пришли к известному соотношению (так называемому условию массовой поверхности [17]), которое ведёт к методу Гамильтона-Якоби [3; 8].

Итак, мы получаем следующие уравнения для определения всех координат:

$$\frac{dX^\mu}{d\lambda}=-\frac{\sqrt{I}}{mc}g^{\nu\mu}\left(X^0\right)P_\nu \quad \left(\mu=\overline{0,3}\right),$$

по ν суммируем от нуля до трёх.

Исключая отсюда параметр λ путём деления трёх уравнений (5) (для j = 1,2,3) на уравнение для $\mu = 0$, получаем:

$$\frac{dX^i}{dX^0}=\frac{g^{\nu i}\left(X^0\right)P_\nu\left(X^0\right)}{g^{0\nu}\left(X^0\right)P_\nu\left(X^0\right)}=\frac{g^{\nu i}\left(X^0\right)\left(eA_\nu/c-Q_\nu\right)}{g^{0\nu}\left(X^0\right)\left(eA_\nu/c-Q_\nu\right)}, \quad i=1,2,3.$$

Мы получили уравнения с заданными функциями только временной компоненты, которые просто интегрируются. Такие уравнения можно будет применить к вопросу о тёмной энергии и тёмной материи. Эти решения обобщают Вселенную де Ситтера и другие Вселенные [28].

Общерелятивистское суммарное действие для системы частиц с учётом полевых действий

Рассмотрим общее действие для материи с электромагнитным полем в гравитационном поле, представляющее собой сумму действия S_p (*particles*), действия Максвелла S_f для электромагнитного поля (*f* от *fields*) с учётом взаимодействия с частицами S_{pf} (*particles – fields*) и действия S_g (*gravity*) Эйнштейна-Гильберта [1–3]) (по повторяющиеся верхним и нижним индексам идёт суммирование):

$$S_4^L = \sum_a m_a c \sum_q \int_0^{\lambda_{max}} \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dX_a^{\mu}(\mathbf{q},\lambda)}{d\lambda} \frac{dX_a^{\nu}(\mathbf{q},\lambda)}{d\lambda}} d\lambda -$$

$$-\sum_a \frac{e_a}{c} \sum_q \int_0^{\lambda_{max}} A_{\mu}(\mathbf{X}_a(\mathbf{q},\lambda)) \frac{dX_a^{\mu}(\mathbf{q},\lambda)}{d\lambda} d\lambda - \frac{1}{16\pi c} \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} |g|^{1/2} d^4 X +$$

$$+ \mathcal{K} \int |g|^{1/2} (R + \Lambda) d^4 X \equiv S_p^L + S_{pf}^L + S_f^L + S_g^L, \quad \mathcal{K} = \frac{-c^3}{16\pi\gamma}, \tag{6}$$

где: a – индекс сорта частиц с массой m_a и зарядом e_a ($a = 1, ..., a_{\max}$), лангранжев параметрический индекс $\mathbf{q}$ идентифицирует частицы (числом N_a) внутри сорта a, $\mathbf{X}_a(\mathbf{q}, \lambda)$ – 4-координата $\mathbf{q}$-частицы сорта a (μ, $\nu = 0, 1, 2, 3$), $d\lambda = ds_a / \sqrt{I_a}$; $A_{\mu} = (\varphi, \mathbf{A})$ 4-потенциал, $F_{\mu\nu} = A_{\mu;\nu} - A_{\nu;\mu}$ – тензор напряженности электромагнитного поля:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -H_3 & H_2 \\ -E_2 & H_3 & 0 & -H_1 \\ -E_3 & -H_2 & H_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad F^{\mu\nu} = g^{\mu\eta} g^{\nu\zeta} F_{\eta\zeta},$$

где $g_{\mu\vartheta}(\mathbf{X})$ – метрический тензор ($g = \det g_{\mu\nu}$), R – скаляр Риччи.

Дальнейшее рассмотрение структуры действия S_4^L может проводиться на основании двух подходов: если исключить из рассмотрения параметр λ и пытаться исследовать соответствующие уравнения движения и кинетические уравнения, производя при необходимости определённые упрощения, и, в качестве альтернативы, принять в качестве основы 9-мерное расширенное фазовое пространство и развивать надлежащий формализм для получений уравнений типа Лиувилля и Власова.

В настоящей статье мы будем действовать в основном в соответствии с первой методикой, поскольку априори специальное внимание мы полагали уделить постньютоновскому приближению, в котором можно перейти от параметра λ к переменной единого для всей системы времени t. Перепишем действие S_4^L, заменяя скорости $X_{\lambda}^{\mu}, X_{\lambda}^{\nu}$, в 1-ом и 2-ом слагаемом правой части определения (6), в соответствии с результатами п. 3 (см. формулу (3)):

$$\frac{dX_a^{\mu}(\mathbf{q})}{d\lambda} \to \frac{dX_a^{\mu}(\mathbf{q})}{dt_a} \frac{dt_a}{d\lambda} = c \frac{g^{\xi\mu}(\mathbf{X}_a(\mathbf{q}))(P_{\xi})_a(\mathbf{q})}{g^{0\xi}(\mathbf{X}_a(\mathbf{q}))(P_{\xi})_a(\mathbf{q})} \frac{dt_a}{d\lambda}, \quad \xi, \mu = \overline{0,3}.$$

Тогда действие S_4^L приобретает следующий вид:

$$S_4^L = -\sum_{a,\mathbf{q}} m_a c^2 \int_0^{t_{a,max}} \frac{\sqrt{(P_a)_\mu g^{\xi\mu}(\mathbf{X}_a)(P_a)_\xi}}{g^{\xi 0}(\mathbf{X}_a)(P_a)_\xi} dt_a -$$

$$-\sum_{a,\mathbf{q}} e_a \int_0^{t_{a,max}} \frac{A_\mu g^{\xi\mu}(\mathbf{X}_a)(P_a)_\xi}{g^{\xi 0}(\mathbf{X}_a)(P_a)_\xi} dt_a -$$

$$-\frac{1}{16\pi c}\int F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}|g|^{1/2}d^4X + \mathcal{K}\int |g|^{1/2}(R+\Lambda)d^4X. \qquad (7)$$

Перейдём к континуальному пределу при суммировании по **q**, заменяя сумму интегралом с плотностью в виде функции распределения $f_a(\mathbf{X}, \mathbf{P})$:

$$S_4^E = -\sum_a m_a c^2 \iint \frac{\sqrt{P_\mu g^{\xi\mu}(\mathbf{X})P_\xi}}{g^{\xi 0}(\mathbf{X})P_\xi} f_a(\mathbf{X},\mathbf{P})d^4Xd^4P -$$

$$-\sum_a e_a \int \frac{A_\mu g^{\xi\mu}(\mathbf{X})P_\xi}{g^{\xi 0}(\mathbf{X})P_\xi} f_a(\mathbf{X},\mathbf{P})d^4Xd^4P -$$

$$-\frac{1}{16\pi c}\int F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}|g|^{1/2}d^4X + \mathcal{K}\int |g|^{1/2}(R+\Lambda)d^4X. \qquad (8)$$

(В S_4^E верхний индекс E означает эйлерово представление, а в ранее введённом S_4^L индекс L – лагранжево представление). Обратный переход от действия (8) к действию (7) производится подстановкой

$$f_a(\mathbf{X},\mathbf{P}) = \sum_{\mathbf{q}} \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_a(\mathbf{q},t))\delta(\mathbf{P}-\mathbf{P}_a(\mathbf{q},t)),$$

что по сути является проверкой метода.

Отметим, что подстановка функции распределения в виде суммы дельта-функций хорошо известна в теории уравнения Власова, так как она приводит к точным уравнениям движения системы N тел (для любого N), что показывает фундаментальность уравнений типа Власова, а также является основой метода частиц [7; 24].

Обратимся к рассмотрению Λ-члена. В последнее время он вновь находится под пристальным вниманием специалистов по космологии в связи с новыми экспериментальными данными по ускоренному расширению Вселенной и попытками это хоть как-то объяснить [4; 5; 34; 36].

Сравним лагранжиан, определяемый действием S_4^L, с действием, включающим в качестве подынтегральной функции лагранжиан Гильберта-Эйнштейна с Λ-членом:

$$S_{g,\Lambda} = \mathcal{K}\int (R+\Lambda)|g|^{1/2}d^4X. \qquad (9)$$

Из сравнения формул (8) и (9) видно, что в качестве формального аналога Λ-члена могут выступать первые три слагаемые в правой части формулы (8):

$$\Lambda' = -\frac{1}{16\pi c\mathcal{K}} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \sum_a \frac{m_a c^2}{\sqrt{-g}\mathcal{K}} \int \frac{\sqrt{P_\mu g^{\xi\mu}(\mathbf{X}) P_\xi}}{g^{\xi 0}(\mathbf{X}) P_\xi} f_a(\mathbf{X},\mathbf{P}) d^4 P -$$

$$-\sum_a \frac{e_a}{\sqrt{-g}\mathcal{K}} \int \frac{A_\mu g^{\mu\xi}(\mathbf{X}) P_\xi}{g^{\xi 0}(\mathbf{X}) P_\xi} f_a(\mathbf{X},\mathbf{P}) d^4 P.$$

Подобным же образом можно учитывать вклады любых других полей. Мы получаем шанс не вводить Λ-член априори, а получить его аналог по математике воздействия на материю из классических лагранжианов. Отметим, что в (8) интегрирование при $\Lambda = \mathrm{const}$ даёт бесконечность (что отмечалось многими исследованиями), в то время как выражение с Λ' вполне может быть конечным.

Уравнения Власова-Максвелла-Эйнштейна для метрики и электромагнитных полей получаются варьированием (8) по ним. Варьируем метрику, получаем полевые уравнения Эйнштейна:

$$\mathcal{K}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R\right)\sqrt{-g} == \sum_a m_a c^2 \int \left(\frac{1}{2P^0\sqrt{P^\xi P_\xi}} - \frac{\sqrt{P^\xi P_\xi}}{P_0\left(P^0\right)^2}\delta_0^\nu \right) f_a(\mathbf{X},\mathbf{P}) P_\mu P_\nu d^4 P +$$

$$+\sum_a e_a \int \left(\frac{A_\mu P_\nu + A_\nu P_\mu}{2P^0} - \frac{A_\xi P^\xi}{P_0\left(P^0\right)^2} P_\mu P_\nu \delta_0^\nu \right) f_a(\mathbf{X},\mathbf{P}) d^4 P - \frac{F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}}{32\pi c}\sqrt{-g}\, g_{\mu\nu}.$$

Варьируем электромагнитные потенциалы, получаем уравнения Максвелла в гравитационном поле:

$$\frac{1}{8\pi c}\frac{\partial\left(F^{\alpha\beta}\sqrt{-g}\right)}{\partial X^\beta} = \sum_a e_a \int \frac{g^{\xi\alpha}(\mathbf{X}) P_\xi}{g^{\xi 0}(\mathbf{X}) P_\xi} f_a(\mathbf{X},\mathbf{P}) d^4 P.$$

Далее мы рассмотрим аналогию с Λ-членом для каждого из слагаемых (8) в нерелятивистском и слаборелятивистском пределах.

Вывод уравнения Власова-Пуассона-Пуассона в нерелятивистском случае

Рассмотрим, следуя [25], нерелятивистское действие, соответствующее предельному переходу в действии (6) $c \to \infty$ (скорость света стремится к бесконечности), для электростатики с гравитацией (в лагранжевых 3-координатах, причем параметр λ заменяется на t, поскольку он является переменной интегрирования и инвариантен относительно замены):

$$S_5^L = \sum_{a,\mathbf{q}} \frac{1}{2} m_a \int \dot{\mathbf{x}}_a^2(\mathbf{q},t)\, dt - \sum_a e_a \int \sum_q \varphi\left(\mathbf{x}_a(\mathbf{q},t),t\right) dt -$$

$$-\sum_a m_a \int \sum_q U\left(\mathbf{x}_a(\mathbf{q},t),t\right) dt + \frac{1}{8\pi}\int (\nabla\varphi)^2\, d\mathbf{x}dt - \frac{1}{8\pi\gamma}\int (\nabla U)^2\, d\mathbf{x}dt.$$

Оно легко может быть получено из S_4^L (индекс L означает принадлежность к лагранжеву подходу), если в первом слагаемом правой части произвести предельный переход $g_{00} \to 1 + 2U/c^2$, $g_{kk} = -1$ (остальные компоненты метрического тензора аннулируются). Это приближение слабого релятивизма для действия (6):

$$-\sum_a m_a c \int \sqrt{g_{\mu\nu} \dot{X}_a^{\mu}(\mathbf{q},t) \dot{X}_a^{\nu}(\mathbf{q},t)}\, dt \to$$

$$\to -\sum_a m_a c^2 \int \left(1 - \frac{\mathbf{v}_a^2}{c^2} + \frac{2U\left(\mathbf{x}_a(\mathbf{q},t),t\right))}{c^2}\right)^{1/2} dt \approx$$

$$\approx \sum_a m_a c^2 \int \left(-1 + \frac{1\mathbf{v}_a^2}{2c^2} - \frac{U\left(\mathbf{x}_a(\mathbf{q},t),t\right)}{c^2}\right) dt.$$

Затем нужно исключить из рассмотрения постоянную $\left(-\sum_a m_a c^2\right)$.

Покажем, что из действия S_5^L получаются правильные уравнения динамики и полей. Варьируя координаты частиц в первых трёх слагаемых, получаем уравнение движения:

$$m_a \ddot{\mathbf{x}}_a(\mathbf{q},t) = -m_a \nabla U\left(\mathbf{x}_a(\mathbf{q},t)\right) - e_a \nabla \varphi\left(\mathbf{x}_a(\mathbf{q},t)\right)$$

(второй закон Ньютона для частицы массы m_a с учётом гравитационного и электромагнитного взаимодействия).

Чтобы получить уравнение для функции распределения (в фазовом пространстве), перепишем уравнение движения в гамильтоновом виде:

$$\frac{d\mathbf{x}_a}{dt} = \frac{\mathbf{p}}{m_a}, \quad \frac{d\mathbf{p}_a}{dt} = -m_a \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}} - e_a \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}}.$$

На их основании можно выписать уравнение Лиувилля для функции распределения $f_a(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$:

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} + \left(\frac{\mathbf{p}}{m_a}, \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{x}}\right) - \left(\left(m_a \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}} + e_a \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}}\right), \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{p}}\right) = 0. \qquad (10)$$

Чтобы написать уравнения для полей, перепишем, следуя [7; 9–13], действие S_4^L через функцию распределения во втором и третьем слагаемых. Этот переход можно символически выразить, заменяя суммы интегралами, переходя от лагранжевых координат к эйлеровым:

$$\sum_q \to \int d\mathbf{q} \to \iint f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)\, d^3x\, d^3p.$$

Получаем в эйлеровом представлении:

$$S_4^E = \sum_a \int \frac{\mathbf{p}^2}{2m_a} f_a(\mathbf{x},\mathbf{p},t)\, d^3x d^3p dt - \sum_a e_a \int \varphi(\mathbf{x},t) f_a(\mathbf{x},\mathbf{p},t)\, d^3x d^3p dt -$$

$$-\sum_a m_a \int U(\mathbf{x},t) f_a(\mathbf{x},\mathbf{p},t)\, d^3x d^3p dt + \int \frac{(\nabla\varphi)^2}{8\pi} d^3x dt - \int \frac{(\nabla U)^2}{8\pi\gamma} d^3x dt.$$

(индекс E в обозначении S_4^E означает эйлеровость). Переход от действия S_4^E к исходному S_4^L получаем формально подстановкой функции распределения f во второе и третье слагаемое правой части определения S_4^E в виде суммы произведений дельта-функций:

$$f_a(\mathbf{x},\mathbf{p},t) = \sum_{\mathbf{q}} \delta\big(\mathbf{x} - \mathbf{x}_a(\mathbf{q},t)\big)\delta\big(\mathbf{p} - \mathbf{p}_a(\mathbf{q},t)\big),$$

так мы контролируем эквивалентность действий в эйлеровом и лагранжевом представлениях.

Варьируя действие S_4^E по U и φ, получаем уравнение Пуассона для гравитационного и электромагнитного полей:

$$\Delta U = 4\pi\gamma \sum_a m_a \int f_a(\mathbf{x},\mathbf{p},t)\, d^3p, \quad \Delta\varphi = -4\pi \sum_a e_a \int f_a(\mathbf{x},\mathbf{p},t)\, d^3p. \tag{11}$$

Систему уравнений (10)–(11), рассматриваемых совместно, можно назвать системой Власова-Пуассона-Пуассона [12; 25]. Этот вывод уравнения типа Власова является, видимо, самым простым и наглядным – например, его можно сравнить с более сложными выводами И. Хуанчуна и Ф. Моррисона [31]. А в сложных ситуациях простые выводы предпочтительны.

В работе [27] было введено понятие «критической массы» $m_{cr} = m_e\sqrt{D_1} \approx 10^{-12}$ г. (m_e – масса электрона, D_1 – первая «большая» константа Дирака), связанной с доминированием во взаимодействии сил гравитации или электростатических сил. При $m \gtrsim m_{cr}$ преобладает гравитация, при $m \lesssim m_{cr}$ преобладает, соответственно, электростатика. Из этого следует, что тёмная энергия должна быть связана с заряженными объектами (частицами, системами частиц) с массой $m \lesssim m_{cr}$, а заряженные объекты с $m \gtrsim m_{cr}$ и все электронейтральные объекты дают вклад только в материю (обычную или тёмную).

Слаборелятивистский предел уравнений Эйнштейна и учёт космологического члена

Помимо нерелятивистского приближения при выписывании действия для материи с электромагнитным и гравитационным полями значительный интерес представляет собой первое постньютоновское (иначе слаборелятивистское) приближение, в котором компоненты фундаментального метрического тензора раскладываются по степеням величины 1/c. Предположим, следуя [1–3], что ненулевые компоненты метрического тензора имеют следующий вид:

$$g_{00} = 1 + \frac{2U}{c^2}, \quad g_{jj}\,|_{j=1,2,3} = -\left(1 - \frac{2U}{c^2}\right).$$

Если следовать методике слабого релятивизма, принятой в [3], то получаем:

$$\int R\left|g\right|^{1/2} d^4X = c^{-2}\int \Delta U\sqrt{1-4U/c^2}\,d^4X = \frac{2}{c^4}\int \left(\nabla U\right)^2 d^4X.$$

Действительно, первое слагаемое под знаком интеграла при разложении корня $\sqrt{1-4U/c^2} \approx 1-2U/c^2$ равно нулю: $\int \Delta U d^4X = 0$, а второе слагаемое $\int\left(-2Uc^{-4}\Delta U\right)d^4X$ преобразуем интегрированием по частям к форме $\left(-2c^{-4}\right)\int Ud\left(\nabla U\right) = (-2c^{-4})\left(U\nabla U\,|_{-\infty}^{\infty} - \int \nabla U\nabla U d^4X\right)$, после чего имеем окончательно:

$$\mathcal{K}\int R\left|g\right|^{1/2} d^4X \to \frac{2\mathcal{K}}{c^4}\int \left(\nabla U\right)^2 d^3x\,dct.$$

Сравниваем полученное выражение с последним членом правой части S_4^{L+E} (см. п. 5), получаем: $2\mathcal{K}/c^3 = -1/(8\pi\gamma)$, откуда $\mathcal{K} = -c^3/(16\pi\gamma)$ (этот вывод соответствует [1–3]).

Теперь исследуем случай учёта Λ-члена в действии Эйнштейна-Гильберта в том же приближении:

$$\int\left(R+\Lambda\right)\left|g\right|^{1/2} d^4X = \frac{2}{c^4}\int\left(\nabla U\right)^2 d^3x\,d\left(ct\right) + \int \Lambda d^3x\,d\left(ct\right) - \frac{2\Lambda}{c^2}\int U d^3x\,d\left(ct\right).$$

Укажем, что при $\Lambda = \text{const} \neq 0$ второе слагаемое в правой части стремится к бесконечности, так что правомерно предполагать, что эта величина, действительно достаточно быстро убывающая функция пространственно-временных координат.

Действие для гравитации в приближении слабого релятивизма с Λ-членом имеет следующий вид (в лагранжевом представлении):

$$S_6^L = \sum_{a,\mathbf{q}}\int \frac{m_a}{2}\dot{\mathbf{x}}_a^2\left(\mathbf{q},t\right)dct - \sum_{a,\mathbf{q}}\int m_a U\left(\mathbf{x}_a\left(\mathbf{q},t\right)\right)dct +$$

$$+\frac{2\mathcal{K}}{c^4}\iint (\nabla U)^2 d^3x\,dct + \mathcal{K}\iint \Lambda d^3x\,dct - \frac{2\mathcal{K}\Lambda}{c^2}\iint U d^3x\,dct.$$

Варьируем по частицам, получаем уравнение движения в постньютоновском приближении, соответствующее вышеприведённому действию:

$$m_a\ddot{\mathbf{x}}_a = -m_a\nabla U\left(\mathbf{x}_a\right)$$

(оно оказывается совпадающим по форме с уравнением классической динамики). Перепишем действие S_5 в эйлеровом представлении, вводя классическую функцию распределения (на 7-мерном расширенном фазовом пространстве):

$$S_5^E = \sum_a \frac{1}{2m_a}\int \mathbf{p}^2 f_a\left(\mathbf{x},\mathbf{p},t\right) d^3x d^3p dt - \sum_a \int U(\mathbf{x},t) f_a\left(\mathbf{x},\mathbf{p},t\right) d^3p d^3x dt +$$

$$+\frac{2\mathcal{K}}{c^4}\iint (\nabla U)^2 d^3x dt + \mathcal{K}\iint \Lambda\, d^3x dct - \frac{2\mathcal{K}\Lambda}{c^2}\iint U d^3x dct.$$

Обратное преобразование к лагранжеву представлению может быть произведено путём подстановки $f_a\left(\mathbf{x},\mathbf{p},t\right) = \sum_{\mathbf{q}} \delta\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}_a\left(\mathbf{q},t\right)\right)\delta\left(\mathbf{p}-\mathbf{p}_a\left(\mathbf{q},t\right)\right)$.

Проварьировав S_5^E по U, получим уравнение Пуассона с Λ-членом:

$$\Delta U = 4\pi\gamma \sum_a m_a \int f_a\left(\mathbf{x},\mathbf{p},t\right) d^3p - \frac{1}{2}c^2\Lambda. \tag{12}$$

Что даёт второе слагаемое в правой части? Наличие «эффективного» внешнего поля: решение уравнения $\Delta U = -\frac{1}{2}c^2\Lambda$ можно выбрать в простейшем виде, как $U = -\frac{1}{12}c^2\Lambda\left(x^2+y^2+z^2\right)$, что приводит к «расталкиванию» частиц. Что даёт нам это в решении типа Милна-МакКри? Из уравнения Пуассона получаем:

$$U = 4\pi\gamma \sum_a m_a \int \frac{f_a\left(x',\mathbf{p},t\right)}{\left|x-x'\right|} d^3p d^3x' - \frac{c^2\Lambda}{12}\left(x^2+y^2+z^2\right).$$

Мы воспользовались тем, что решение неоднородного линейного уравнения (12) есть сумма частного решения и общего решения однородного уравнения, то есть гармонические функции. Наш выбор частного решения однозначно диктуется требованием изотропности (инвариантности относительно вращений) решения Фридмана и Милна МакКри.

Уравнение модели Милна принимает вид:

$$\frac{\partial^2\mathcal{R}}{\partial t^2} = -\gamma\frac{M\left(r\right)}{\mathcal{R}^2} + \frac{c\Lambda}{6}\mathcal{R}.$$

Интегрируя последнее уравнение, получаем:

$$\frac{1}{2}\left(\dot{\mathcal{R}}^2\right) - \gamma\frac{M\left(r\right)}{\mathcal{R}} - \frac{c^2\mathcal{R}^2\Lambda}{12} = E.$$

Эффективный потенциал $\psi\left(\mathcal{R}\right) = -\gamma\frac{M\left(r\right)}{\mathcal{R}} - \frac{1}{12}c^2\mathcal{R}^2\Lambda$ имеет вид выпуклой (перевёрнутой) псевдопараболы с точкой максимума $\mathcal{R} = \mathcal{R}_0 = \left(\frac{12\gamma M\left(r\right)}{c\Lambda}\right)^{\frac{1}{3}}$.

Приведём соответствующее «уравнение Власова-Пуассона с Λ-членом» (для сорта частиц a):

$$\frac{\partial f_a}{\partial t}+\left(\frac{\mathbf{p}}{m_a},\frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{x}}\right)-\left(\nabla U,\frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{p}}\right)=0,$$

$$\Delta U=4\pi\gamma\sum_a m_a\int f_a\left(\mathbf{x},\mathbf{p},t\right)d^3p-\frac{1}{2}c^2\Lambda.$$

Итак, мы теперь видим не только в лагранжианах, но и в уравнениях динамики, где искать аналоги Λ-члена.

Из приведённого выше выражения для S_6^E вытекает математическая аналогия Λ' и «космологического параметра» Λ в постньютоновском приближении (в нём присутствует зависимость от координат и времени), причём интеграл в S_6^E с Λ' конечен:

$$\Lambda\left(\mathbf{x},t\right)=\left(\mathcal{K}-2\mathcal{K}U\left(\mathbf{x},t\right)c^{-2}\right)^{-1}\left(\sum_a\frac{1}{2m_a}\int\mathbf{p}^2 f_a\left(\mathbf{x},\mathbf{p},t\right)d^3p-\right.$$

$$\left.-\sum_a U\left(\mathbf{x},t\right)f_a\left(\mathbf{x},\mathbf{p},t\right)d^3p\right),\ \ \mathcal{K}=-\frac{c^3}{16\pi\gamma}\ .$$

Уравнение Власова-Максвелла-Эйнштейна в слаборелятивистском по гравитации случае

Перейдём к анализу в слаборелятивистском приближении общего действия S_4^L (с дополнительным учётом космологического Λ-члена), для чего перепишем формулу (7) (а впоследствии и (8)), заменяя члены, содержащие компоненты метрического тензора $g^{\mu\nu}$ и $\det g_{\mu\nu}\equiv g$ их приближенными постньютоновскими выражениями, как сделано выше:

$$S_7^L=\sum_{a,\mathbf{q}}\frac{m_a}{2}\dot{\mathbf{x}}_a^2\left(\mathbf{q},t\right)dct-\sum_{a,\mathbf{q}}m_aU\left(\mathbf{x}_a\left(\mathbf{q},t\right)\right)dct-$$

$$-\iint\frac{1}{8\pi\gamma c}\left(\nabla U\right)^2d^3xdct-\iint\frac{c^3}{16\pi\gamma}\Lambda d^3xdct+\iint\frac{c\Lambda}{8\pi\gamma}Ud^3xdct-$$

$$-\sum_a\frac{e_a}{c^2}\sum_q\int_0^T A_\mu V_a^\mu\left|g\right|^{1/2}dct+\frac{1}{16\pi c}\int F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\left|g\right|^{1/2}d^4X,$$

$$V_a^0=-m_a^{-1}g^{0\zeta}\left(P_\zeta\right)_a,\quad V_a^j=-m_a^{-1}g^{jk}\left(P_k\right)_a,$$

$$g^{\zeta\eta}\approx\operatorname{diag}\left(1+\frac{2U}{c^2},-\left(1-\frac{2U}{c^2}\right),-\left(1-\frac{2U}{c^2}\right),-\left(1-\frac{2U}{c^2}\right)\right),\qquad\left|g\right|^{1/2}\approx1-\frac{2U}{c^2}.$$

Здесь мы взяли слаборелятивистскую метрику по «Фоку» [2]. Она отличается от слаборелятивистской метрики «по Ландау» [1; 3]:

$$g^{\mu\nu} = \mathrm{diag}\left(1-2U/c^2,\ -1,\ -1,\ -1\right), \text{ где } |g|^{1/2} \approx 1-U/c^2.$$

Варьируя по координатам частиц, получаем уравнение движения (3-х мерной динамики) в заданных полях (с точностью до c^{-2}):

$$\frac{dp_{ai}}{dt} = m_a\left(\ddot{x}_a\right)_i = -m_a\frac{\partial U}{\partial x_a^i} - \frac{e_a}{c}\left(\dot{A}_i + c\frac{\partial A_0}{\partial x_a^i} + \sum_j F_{ij}\dot{x}_a^j\right).$$

Переходя к функции распределения, получим соответствующую систему уравнений Власова-Максвелла-Эйнштейна в постньютоновском (по гравитации) приближении:

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} + \sum_i\left(\frac{p_i}{m_a}, \frac{\partial f_a}{\partial x^i}\right) + \sum_i \frac{e_a}{c}\left(\left(-\frac{\partial A_i}{\partial t} - c\frac{\partial A_0}{\partial x^i} - \sum_j F_{ij}\frac{p_j}{m_a}\right), \frac{\partial f_a}{\partial p_i}\right) -$$

$$-\sum_i\left(\nabla U_i, \frac{\partial f_a}{\partial p_i}\right) = 0. \tag{13}$$

Чтобы выписать уравнение для полей, перепишем действие S_6^L, переходя к эйлеровскому представлению для второго и пятого слагаемых правой части формулы, определяющей данное действие (то есть для членов, которые могут выражаться через функцию распределения частиц):

$$S_7^{L+E} = \sum_a \int \frac{\mathbf{p}^2}{2m_a} f_a\left(\mathbf{x},\mathbf{p},t\right) d^3x d^3p dc - \sum_a m_a \int U\left(\mathbf{x},t\right) f_a\left(\mathbf{x},\mathbf{p},t\right) d^3x d^3p dct -$$

$$-\frac{c^3}{16\pi\gamma}\int \Lambda d^3x dct + \frac{\Lambda c}{8\pi\gamma}\int U d^3x dct - \sum_a \frac{e_a}{m_a c^2}\int f_a\left(\mathbf{x},\mathbf{p},t\right)\sum_{j=1}^{3} p_j A_j\left(\mathbf{x},t\right) d^3x d^3p dct +$$

$$+\sum_a \frac{e_a}{m_a c^2}\int f_a\left(\mathbf{x},\mathbf{p},t\right)\left(P_0\left(1-\frac{4U}{c^2}\right)\right)\varphi\left(\mathbf{x},t\right) d^3x d^3p dct + \frac{1}{16\pi c}\int F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\left(1-\frac{2U}{c^2}\right) d^3x dct,$$

(здесь $\varphi(\mathbf{x}, t) \equiv A_0(\mathbf{x}, t)$).

Отсюда непосредственно можно получить выражение для «космологического параметра» $\Lambda'(\mathbf{x}, t)$ в используемом приближении:

$$\Lambda' = \left[\sum_a \frac{1}{2m_a}\int \mathbf{p}^2 f_a\left(\mathbf{x},\mathbf{p},t\right) d^3p - \sum_a U\left(\mathbf{x},t\right)\int f_a\left(\mathbf{x},\mathbf{p},t\right) d^3p -\right.$$

$$-\sum_a \frac{e_a}{m_a c^2}\int f_a\left(\mathbf{x},\mathbf{p},t\right)\sum_{j=1}^{3} p_j A_j\left(\mathbf{x},t\right) d^3p +$$

$$+\sum_a \frac{e_a}{m_a c^2}\int f_a\left(\mathbf{x},\mathbf{p},t\right)\left(P_0\left(1-\frac{4U}{c^2}\right)\right)\varphi\left(\mathbf{x},t\right) d^3p +$$

$$+\frac{1}{16\pi c}\int F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\left(1-\frac{2U}{c^2}\right)\right]\cdot\left(\frac{cU}{8\pi\gamma}-\frac{c^3}{16\pi\gamma}\right)^{-1}.$$

Отметим, что в вышеприведённых формулах мы использовали выражение скорости через импульсы в виде: $V_a^{\zeta}=-m_a^{-1}g^{\zeta\eta}\left(P_\eta\right)_a$, где $\left(P_\eta\right)_a=\partial\tilde{L}_p/\partial V_a^{\eta}$, где

$\tilde{L}_p=-\frac{m_a}{2}g_{\eta\zeta}V_a^{\eta}V_a^{\zeta}$ – упрощённый лагранжиан, приводящий к тем же геодезическим, что и исходный L_p (фактически, здесь использована возможность введения для системы частиц в постньютоновском приближении единого времени). При варьировании по U получаем:

$$\Delta U=4\pi\gamma\sum_a\int f_a\left(\mathbf{x},\mathbf{p},t\right)d^3p-\frac{c^2\Lambda}{2}+$$

$$+8\pi\gamma\sum_a e_a\varphi\int f_a\left(\mathbf{x},\mathbf{p},t\right)\frac{P_0}{m_a c^2}d^3p-\frac{\gamma}{2c^2}F_{ik}F^{ik}. \tag{14}$$

Уравнение Власова (13) следует рассматривать совместно с уравнением (14) для U и уравнениями Максвелла для полей:

$$\partial_i F^{ji}=-\frac{4\pi}{c}\sum_a e_a\int \upsilon_a^j\left(\mathbf{p}\right)f_a\left(\mathbf{x},\mathbf{p},t\right)d^3p.$$

Это и есть система уравнений Власова-Максвелла-Эйнштейна в слаборелятивистском приближении. Особый интерес представляет уравнение (14): первое слагаемое в правой части, очевидно, представляет собой величину плотности вещества, состоящего из частиц сортов *a*, второе слагаемое – классический Λ-член, который в настоящее время олицетворяет тёмную энергию, третье слагаемое – электромагнитная энергия (которая может быть переписана в виде, пропорциональном ($\mathbf{E}^2$ – $\mathbf{H}^2$)).

Итак, мы получили выражения, аналогичные Λ-члену, из принципа наименьшего действия, как в самих действиях, так и в уравнениях.

Заключение

Мы предложили способ вывода уравнений Власова-Максвелла-Эйнштейна и сравнили эти уравнения с нерелятивистскими и слаборелятивистскими аналогами, находя и проверяя константы как для действий, так и для уравнений, а также проверяя сами уравнения. Уравнения Власова-Эйнштейна ранее выписывались в разных формах [15–23; 31–35], поэтому их вывод из классических действий совершенно необходим. При этом выводе автоматически получались выражения, похожие на Λ-член. Анализ этих выражений, как количественный, так и качественный, представляет значительный интерес в связи с природой тёмной материи и тёмной энергии [4; 5; 49]. При этом здесь должны помочь частные решения уравнений типа Власова – стационарные, гидродинамического типа и микроканонические [29; 46]. Особый интерес представляет вопрос о росте энтропии и о совпадении временных средних и экстремалей Больцмана для уравнений типа Власова, как это имеет место для уравнений Лиувилля [27; 46–48].

Мы также в настоящей статье рассмотрели способ вывода уравнений типа Власова в слаборелятивистской форме, где такие слагаемые, отвечающие за тёмную материю и тёмную энергию, обретают явную форму. Дальнейшее исследование требует изучения частных решений, которые могут быть аналогичны рассмотренным в работах [7–48].

Здесь представляет интерес исследовать модели фридмановского типа однородной вселенной [1–7], стационарные [25–30], микроскопические [7–28] и гидродинамические [7–28; 43–45] решения. Интерес представляет вопрос об агрегации материи [42] во Вселенной, насколько эти процессы влияют на формирование тёмной энергии и темной материи. Интерес представляют работы по изучению автомодельных решений – насколько именно такие решения соответствуют крупномасштабным процессам во Вселенной [49].

Мы предложили выражение для Λ-члена, анализ которого даёт представление как о тёмной энергии, так и о тёмной материи: заряженные частицы с массой, меньшей $m_e\sqrt{D_1}$ дают вклад в тёмную энергию (m_e – масса электрона, D_1 – первая большая константа Дирака).

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена при финансовой поддержке министерства образования и науки РФ по программе повышения конкурентоспособности РУДН 5-100 среди ведущих мировых научно-образовательных центров на 2016–2020 гг. и при поддержке программы Президиума РАН № 01 «Фундаментальная математика и ее приложения», грант PRAS-18-01 (В. В. Веденяпин), при поддержке Программы Президиума РАН № 28 «Космос: исследования фундаментальных процессов и их взаимосвязей» (В. М. Чечеткин) и гранта РФФИ № 16-02-00656-А (Н. Н. Фимин).

ACKNOWLEDGMENTS

The work was supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (Enhancing the Competitiveness of RUDN 5-100 Among the World's Leading Scientific and Educational Centers for 2016–2020 Program), by the Presidium of the Russian Academy of Sciences [Fundamental Mathematics and Its Applications Program No. 01, Grant No. PRAS-18-01 (V. V. Vedenyapin)], the Presidium of the Russian Academy of Sciences [Space: Studies of Fundamental Processes and Their Interrelations Program No. 28 (V. M. Chechetkin)], and by the Russian Foundation for Basic Research [Grant No. 16-02-00656-A (N. N. Fimin)].

Статья поступила в редакцию 26.04.2019 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Паули В. Теория относительности. М.: Наука, 1983. 328 с.
2. Фок В. А. Теория пространства, времени и тяготения. М.: ГИТТЛ, 1956. 504 с.

3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М.: Наука, 1988. 736 с.
4. Чернин А. Д. Темная энергия и всемирное антитяготение // Успехи физических наук. 2008. Т. 178. № 3. С. 267–300.
5. Лукаш В. Н., Рубаков В. А. Темная энергия: мифы и реальность // Успехи физических наук. 2008. Т. 178. № 3. С. 301–308.
6. Зельдович Я. Б., Мышкис А. Д. Элементы математической физики. М.: Наука, 1973. 351 с.
7. Веденяпин В. В. Кинетические уравнения Больцмана и Власова. М.: Физматлит, 2001. 112 с.
8. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. Методы и приложения. М.: Наука, 1986. 760 с.
9. Власов А. А. Статистические функции распределения. М.: Наука, 1966. 356 с.
10. Негматов М. А., Веденяпин В. В. О выводе и классификации уравнений типа Власова и МГД. Тождество Лагранжа и форма Годунова. // Теоретическая и математическая физика. 2012. Т. 170. № 3. С. 468–480.
11. Веденяпин В. В., Негматов М.-Б. А., Фимин Н. Н. Уравнения типа Власова и Лиувилля, их микроскопические, энергетические и гидродинамические следствия // Известия Российской академии наук. Серия математика. 2017. Т. 81. № 3. С. 45–82.
12. Vedenyapin V., Sinitsyn A., Dulov E. Kinetic Boltzmann, Vlasov and related equations. Amsterdam: Elsevier Insights, 2011 304 p.
13. O'Neill E. Hamiltonian structure and stability of relativistic gravitational theories: Dissertation for degree D. Ph. University of Florida, 2000.
14. Kandrup H. E., Morrison P. J. Hamiltonian structure of the Vlasov-Einstein system and the problem of stability for spherical relativistic star clusters // Annals of Physics. 1993. Vol. 225. Iss. 1. P. 114–166.
15. Zeldovich Ya. B., Novikov I. D. Relativistic astrophysics. Vol. 1. Chicago: Univesity of Chicago, 1971. 540 p.
16. Cercigniani C., Kremer G. M. The relativistic Boltzmann equation: theory and applications. Basel: Birkhauser, 2002. 384 p.
17. Choquet-Bruhat Y. General relativity and the Einstein equations. Oxford: Oxford University Press, 2009. 816 p.
18. Ehlers J. Kinetic theory of gases in general relativity theory // Lecture Notes in Physics. 1974. Vol. 28: Lectures in Statistical Physics. P. 78–105.
19. Droz-Vincent Ph., Hakim R. Collective motions of the relativistic gravitational gas // Annales de l'Institut Henri Poincarй. Physique thйorique. 1968. Vol. 9. No. 1. P. 17–33.
20. Lindquist R. W. Relativistic transport theory // Annals of Physics. 1966. Vol. 37. Iss. 3. P. 487–518.
21. Choquet-Bruhat Y., Damour T. Introduction to general relativity, black holes and cosmology. New York: Oxford University Press. 2015. 320 p.
22. Batt J. Global symmetric solutions of the initial value problem in steller dynamics // Journal of Different Equations. 1977. Vol. 25. No. 3. P. 342–364.
23. Rein G., Rendall A.D. Smooth static solutions of the spherically symmetric Vlasov-Einstein system // Annales de l'Institut Henri Poincarй. Physique Theorique. 1993. Vol. 59. No. 4. P. 383–397.
24. Волков Ю. А. О решениях уравнения Власова в лагранжевых координатах // Теоретическая и математическая физика. 2007. Т. 191. № 1. С. 138–148.

25. Веденяпин В. В., Фимин Н. Н., Негматов М. А. Уравнения Лиувилля и Власова. Их микроскопические и гидродинамические следствия. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2016. 52 с.
26. Веденяпин В. В., Негматов М. А. О выводе и классификации уравнений типа Власова и магнитной гидродинамики. Тождество Лагранжа, форма Годунова и критическая масса // Современная математика. Фундаментальные направления. 2013. Т. 47. С. 5–17.
27. Веденяпин В. В. Уравнение Власова-Максвелла-Эйнштейна // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша РАН. 2018. № 188. С. 1–20.
28. Narlikar J. V. An introduction to cosmology (3rd ed.). Cambridge: Cambridge University Press, 2002. 560 p.
29. Веденяпин В. В. О стационарных решениях уравнения Власова-Пуассона // Доклады АН СССР. 1986. Т. 290. № 4. С. 777–780.
30. Веденяпин В. В. О классификации стационарных решений уравнения Власова на торе и граничная задача // Доклады АН СССР. 1992. Т. 323. № 6. С. 1004–1006.
31. Huanchun Ye, Morrison Ph. Action principles for the Vlasov equations // Physics of Fluids B: Plasma Physics. 1992. Vol. 4. No. 4. P. 771–777.
32. Игнатьев Ю. Г. Релятивистская кинетическая теория неравновесных процессов. Казань: ООО “Фолиантъ”, 2010. 523 с.
33. Игнатьев Ю. Г. Вывод кинетических уравнений из общерелятивистской цепочки Боголюбова // Всесоюзная конференция «Современные теоретические и экспериментальные проблемы теории относительности и гравитации»: тезисы докладов. Минск: БГУ, 1976. С. 146–148.
34. Munoz J. B., Loeb A. A small amount of mini–charged dark matter couldcool the baryons in the early Universe // Nature. 2018. Vol. 557. Iss. 7707. P. 684–686.
35. Brans C., Dicke R. H. Mach’s principle and a relativistic theory of gravitation // Physical Review. 1961. Vol. 124. Iss. 3. P. 925–935.
36. Мейерович Б. Э. Гравитационные свойства космических струн // Успехи физических наук. 2001. Т. 171. № 10. С. 1033–1049.
37. Kibble T. W. B. Lorentz invariance and gravitational field // Journal of Mathematical Physics. 1961. Vol. 2. Iss. 2. P. 212–221
38. Choquet-Bruhat Y. Noutcheguenne N. Systeme hyperbolique pour les ŕequations d’Einstein avec sources // Comptes rendus de l’Acadйmie des sciences. Sйrie 1. 1986. Vol. 303. No. 6. P. 259–263.
39. Orlov Yu. N., Pavlotsky I. P. BBGKY-hierarchies and Vlasov’s equations in postgalilean aproximation // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 1988. Vol. 151. Iss. 2–3. P. 318–340.
40. Скубачевский А. Л., Тсузуки Ю. Уравнения Власова-Пуассона для двухкомпонентной плазмы в полупространстве // Доклады Академии наук. 2016. Т. 471. № 5. С. 528–530.
41. Веденяпин В. В., Аджиев С. З., Казанцева В. В. Энтропия по Больцману и Пуанкаре, экстремали Больцмана и метод Гамильтона–Якоби в негамильтоновой ситуации // Современная математика. Фундаментальные направления. 2018. Т. 64. № 1. С. 37–59.
42. Аджиев С. З., Веденяпин В. В., Волков Ю. А., Мелихов И. В. Обобщенные уравнения типа Больцмана для агрегации в газе // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2017. Т. 57. № 12. С. 2065–2078.
43. Веденяпин В. В., Фимин Н. Н. Уравнение Лиувилля, гидродинамическая подстановка и уравнение Гамильтона-Якоби // Доклады Академии наук. 2012. Т. 446. № 2. С. 142–144.
44. Веденяпин В. В., Негматов М. А. О топологии гидродинамических и вихревых следствий уравнений Власова и метод Гамильтона-Якоби // Доклады Академии наук. 2013. Т. 449. № 5. С. 521–526.

45. Захаров В. Е., Кузнецов Е. А. Гамильтоновский формализм для нелинейных волн // Успехи физических наук. 1997. Т. 167. № 12. С. 1137–1167.
46. Веденяпин В. В. Временные средние и экстремали по Больцману // Доклады Академии наук. 2008. Т. 422. № 2. С. 161–163.
47. Аджиев С. З., Веденяпин В. В. Временные средние и экстремали Больцмана для марковских цепей, дискретного уравнения Лиувилля и круговой модели Каца // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2011. Т. 51. № 11. С. 2063–2074.
48. Веденяпин В. В., Аджиев С. З. Энтропия по Больцману и Пуанкаре // Успехи математических наук. 2014. Т. 69. № 6 (420). С. 45–80.
49. Валиев Х. Ф., Крайко А. Н. Разлет идеального газа из точки в пустоту. Новая модель большого взрыва и расширения вселенной // Прикладная математика и механика. 2015. Т. 79. № 6. С. 793–807.

REFERENCES

1. Pauli W. Theory of relativity. New York, Dover Books, 1981. 272 p.
2. Fock V. A. Theory of space, time and gravitation. London, Pergamon press, 1956. 448 p.
3. Landau L. D., Lifshits E. M. The classical theory of fields. Oxford, Pergamon Press, 1971. 374 p.
4. Chernin A. D. [Dark energy and universal antigravitation]. In: *Uspekhi fizicheskikh nauk* [Physics-Uspekhi (Advances in Physical Sciences)], 2008, vol. 178, no. 3, pp. 267–300.
5. Lukash V. N., Rubakov V. A. [Dark energy: Myths and reality]. In: *Uspekhi fizicheskikh nauk* [Physics-Uspekhi (Advances in Physical Sciences)], 2008, vol. 178, no. 3, pp. 301–308.
6. Zel'dovich Ya. B., Myshkis A. D. *Elementy matematicheskoi fiziki* [Elements of mathematical physics]. Moscow, Nauka Publ., 1973. 351 p.
7. Vedenyapin V. V. *Kineticheskie uravneniya Bol'tsmana i Vlasova* [Kinetic equations of Boltzmann and Vlasov]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2001. 112 p.
8. Dubrovin B. A., Novikov S. P., Fomenko A. T. *Sovremennaya geometriya. Metody i prilozheniya* [Modern geometry. Methods and applications]. Moscow, Nauka Publ., 1986. 760 p.
9. Vlasov A. A. *Statisticheskie funktsii raspredeleniya* [Statistical distribution functions]. Moscow, Nauka Publ., 1966. 356 p.
10. Negmatov M. A., Vedenyapin V. V. [Derivation and classification of Vlasov-type and magnetohydrodynamics equations: Lagrange identity and Godunov's form]. In: *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika* [Theoretical and Mathematical Physics], 2012, vol. 170, no. 3, pp. 468–480.
11. Vedenyapin V. V., Negmatov M. B. A., Fomin N. N. [Vlasov-type and Liouville-type equations, their microscopic, energetic and hydrodynamical consequences]. In: *Izvestiya Rossiiskoi akademii nauk. Seriya matematika* [Izvestiya: Mathematics], 2017, vol. 81, no. 3, pp. 45–82.
12. Vedenyapin V., Sinitsyn A., Dulov E. Kinetic Boltzmann, Vlasov and related equations. Amsterdam, Elsevier Insights Publ., 2011 304 p.
13. O'Neill E. Hamiltonian structure and stability of relativistic gravitational theories: Dissertation for degree D. Ph. University of Florida, 2000.
14. Kandrup H. E., Morrison P. J. Hamiltonian structure of the Vlasov–Einstein system and the problem of stability for spherical relativistic star clusters. In: *Annals of Physics*, 1993, vol. 225, iss. 1, pp. 114–166.
15. Zeldovich Ya. B., Novikov I. D. Relativistic astrophysics. Vol. 1. Chicago, Univesity of Chicago Publ., 1971. 540 p.

16. Cercigniani C., Kremer G. M. The relativistic Boltzmann equation: theory and applications. Basel, Birkhauser Publ., 2002. 384 p.
17. Choquet-Bruhat Y. General relativity and the Einstein equations. Oxford, Oxford University Press Publ., 2009. 816 p.
18. Ehlers J. Kinetic theory of gases in general relativity theory. In: *Lecture Notes in Physics*, 1974, vol. 28: Lectures in Statistical Physics, pp. 78–105.
19. Droz-Vincent Ph., Hakim R. Collective motions of the relativistic gravitational gas. In: *Annales de l'Institut Henri Poincarŭ. Physique thŭorique*, 1968, vol. 9, no. 1, pp. 17–33.
20. Lindquist R. W. Relativistic transport theory. In: *Annals of Physics*, 1966, vol. 37, iss. 3, pp. 487–518.
21. Choquet-Bruhat Y., Damour T. Introduction to general relativity, black holes and cosmology. New York, Oxford University Press Publ., 2015. 320 p.
22. Batt J. Global symmetric solutions of the initial value problem in steller dynamics. In: *Journal of Different Equations*, 1977, vol. 25, no. 3, pp. 342–364.
23. Rein G., Rendall A.D. Smooth static solutions of the spherically symmetric Vlasov-Einstein system. In: *Annales de l'Institut Henri Poincarŭ. Physique Theorique*, 1993, vol. 59, no. 4, pp. 383–397.
24. Volkov Yu. A. [Solutions of the Vlasov equation in Lagrange coordinates]. In: *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika* [Theoretical and Mathematical Physics], 2007. T, 151, no. 1, pp. 138–148.
25. Vedenyapin V. V., Fimin N. N., Negmatov M. A. *Uravneniya Liuvillya i Vlasova. Ikh mikroskopicheskie i gidrodinamicheskie sledstviya* [Liouville and Vlasov equations. Their microscopic and hydrodynamic effects]. Moscow, Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS Publ., 2016. 52 p.
26. Vedenyapin V. V., Negmatov M. A. [On derivation and classification of Vlasov-type equations and equations of magnetohydrodynamics. The Lagrange identity, the Godunov form, and critical mass]. In: *Sovremennaya matematika. Fundamental'nye napravleniya* [Journal of Mathematical Sciences], 2013, vol. 47, pp. 5–17.
27. Vedenyapin V. V. [Vlasov–Maxwell–Einstein equation]. In: *Preprinty IPM im. M. V. Keldysha RAN* [Keldysh Institute. Preprints], 2018, no. 188, pp. 1–20.
28. Narlikar J. V. An introduction to cosmology (3rd ed.). Cambridge, Cambridge University Press Publ., 2002. 560 p.
29. Vedenyapin V. V. [On stationary solutions of the Vlasov–Poisson equation]. In: *Doklady AN SSSR* [Soviet Mathematics. Doklady], 1986, vol. 290, no. 4, pp. 777–780.
30. Vedenyapin V. V. [On the classification of stationary solutions of the Vlasov equation on a torus and the boundary problem]. In: *Doklady AN SSSR* [Soviet Mathematics. Doklady], 1992, vol. 323, no. 6, pp. 1004–1006.
31. Huanchun Ye, Morrison Ph. Action principles for the Vlasov equations. In: Physics of Fluids B: Plasma Physics, 1992, vol. 4, no. 4, pp. 771–777.
32. Ignat'ev Yu. G. *Relyativistskaya kineticheskaya teoriya neravnovesnykh protsessov* [Relativistic kinetic theory of nonequilibrium processes]. Kazan, Foliant Publ., 2010. 523 p.
33. Ignat'ev Yu. G. [Derivation of kinetic equations from the general relativistic Bogolyubov chain]. In: *Vsesoyuznaya konferentsiya 'Sovremennye teoreticheskie i eksperimental'nye problemy teorii otnositel'nosti i gravitatsii': tezisy dokladov* [All-Union Conference "Modern theoretical and experimental problems of the theory of relativity and gravity": abstracts of reports]. Minsk, Belorussian State University Publ., 1976. pp. 146–148.

34. Munoz J. B., Loeb A. A small amount of mini-charged dark matter could cool the baryons in the early Universe. In: *Nature*, 2018, vol. 557, iss. 7707, pp. 684–686.
35. Brans C., Dicke R. H. Mach's principle and a relativistic theory of gravitation. In: *Physical Review*, 1961, vol. 124, iss. 3, pp. 925–935.
36. Meierovich B. E. [Gravitational properties of cosmic strings]. In: *Uspekhi fizicheskikh nauk* [Physics-Uspekhi (Advances in Physical Sciences)], 2001, vol. 171, no. 10, pp. 1033–1049.
37. Kibble T. W. B. Lorentz invariance and gravitational field. In: *Journal of Mathematical Physics*, 1961, vol. 2, iss. 2, pp. 212–221.
38. Choquet-Bruhat Y. Noutcheguenne N. Systeme hyperbolique pour les ŕequations d'Einstein avec sources. In: *Comptes rendus de l'Acadŭmie des sciences. Sŭrie 1*, 1986, vol. 303, no. 6, pp. 259–263.
39. Orlov Yu. N., Pavlotsky I. P. BBGKY-hierarchies and Vlasov's equations in post-Galilean approximation. In: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 1988, vol. 151, iss. 2–3, pp. 318–340.
40. Skubachevskii A. L., Tsuzuki Yr. [Vlasov–Poisson equations for a two-component plasma in a half-space]. In: *Doklady akademii nauk* [Doklady Mathematics], 2016, vol. 471, no. 5, pp. 528–530.
41. Vedenyapin V. V., Adzhiev C. Z., Kazantseva V. V. [Entropy in the sense of Boltzmann and Poincare, Boltzmann extremals, and the Hamilton–Jacobi method in non-Hamiltonian context]. In: *Sovremennaya matematika. Fundamental'nye napravleniya* [Contemporary Mathematics. Fundamental Directions], 2018, vol. 64, no. 1, pp. 37–59.
42. Adzhiev S. Z., Vedenyapin V. V., Volkov Yu. A., Melikhov I. V. [Generalized Boltzmann-type equations for aggregation in gases]. In: *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki* [Computational Mathematics and Mathematical Physics], 2017, vol. 57, no. 12, pp. 2065–2078.
43. Vedenyapin V. V., Fimin N. N. [The Liouville equation, hydrodynamic substitution and the Hamilton–Jacobi equation]. In: *Doklady Akademii nauk* [Doklady Mathematics], 2012, vol. 446, no. 2, pp. 142–144.
44. Vedenyapin V. V., Negmatov M. A. [On the topology of steady-state solutions of hydrodynamic and vortex consequences of the Vlasov equation and the Hamilton–Jacobi method]. In: *Doklady Akademii nauk* [Doklady Mathematics], 2013, vol. 449, no. 5, pp. 521–526.
45. Zakharov V. E., Kuznetsov E. A. [Hamiltonensis formalism for nonlinear waves]. In: *Uspekhi fizicheskikh nauk* [Physics-Uspekhi (Advances in Physical Sciences)], 1997, vol. 167, no. 12, pp. 1137–1167.
46. Vedenyapin V. V. [Temporary averages and Boltzmann extremals]. In: *Doklady Akademii nauk* [Doklady Mathematics], 2008, vol. 422, no. 2, pp. 161–163.
47. Adzhiev S. Z., Vedenyapin V. V. [Time averages and Boltzmann extremals for Markov chains, discrete Liouville equations, and the Kac circular model]. In: *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki* [Computational Mathematics and Mathematical Physics], 2011, vol. 51, no. 11, pp. 2063–2074.
48. Vedenyapin V. V., Adzhiev S. Z. [Entropy in the sense of Boltzmann and Poincareì]. In: *Uspekhi matematicheskikh nauk* [Russian Mathematical Surveys], 2014, vol. 69, no. 6 (420), pp. 45–80.
49. Valiev Kh. F., Kraiko A. N. [The dispersion of an ideal gas from a point into a void. A new model of the Big Bang and the expansion of the Universe]. In: *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Journal of Applied Mathematics and Mechanics], 2015, vol. 79, no. 6, pp. 793–807.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Веденяпин Виктор Валентинович – доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Института прикладной математики имени М. В. Келдыша Российской Академии наук, профессор Российского университета дружбы народов;
e-mail: vicveden@yahoo.com;

Фимин Николай Николаевич – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института прикладной математики имени М. В. Келдыша Российской Академии наук;
e-mail: oberon@kiam.ru;

Чечеткин Валерий Михайлович – доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Института прикладной математики имени М. В. Келдыша Российской Академии наук;
e-mail: chechetv@gmail.com.

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Victor V. Vedenyapin – Doctor in physical and mathematical sciences, leading scientist, Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences, Professor of the RUDN University;
e-mail: vicveden@yahoo.com;

Nikolai N. Fimin – PhD in physical and mathematical sciences, senior scientist, Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences;
e-mail: oberon@kiam.ru;

Valeriy M. Chechetkin – Doctor in physical and mathematical sciences, main scientist, Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences;
e-mail: chechetv@gmail.com

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Веденяпин В. В., Фимин Н. Н., Чечеткин В. М. К вопросу о выводе уравнения Власова–Максвелла–Эйнштейна и его связь с космологическим лямбда-членом // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2019. № 2. С. 24–48.
DOI: 10.18384-2310-7251-2019-2-24-48

FOR CITATION

Vedenyapin V. V., Fimin N. N., Chechetkin V. M. Derivation of Vlasov–Maxwell–Einstein equation and its connection with cosmological lambda term In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*, 2019, no. 2, pp. 24–48.
DOI: 10.18384-2310-7251-2019-2-24-48

УДК 537.311.31
DOI: 10.18384-2310-7251-2019-2-49-60

ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТЬ ТОНКОЙ НЕОДНОРОДНОЙ МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ ПРОВОЛОКИ В СЛУЧАЕ АНИЗОТРОПНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ФЕРМИ И ИЗОТРОПНОГО РАССЕЯНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ

Романов Д. Н.
Ярославский государственный университет имени П. Г. Демидова
150000, г. Ярославль, ул. Советская, д. 14, Российская Федерация

Аннотация. Целью статьи является получение аналитического выражения для высокочастотной электропроводности тонкой металлической проволоки с диэлектрическим ядром в случае диффузного характера взаимодействия электронов металла с границами проводящего слоя. Проведён анализ зависимости модуля и аргумента электрической проводимости от соотношения радиусов проволоки и диэлектрического ядра, от эффективной массы вдоль прямой, перпендикулярной оси проволоки, от радиуса проволоки, от частоты электрического поля. Данный анализ показал влияние эффективной массы носителей заряда и границ металлического слоя на его электропроводность. Кинетическая задача обобщена на случай эллипсоидальной поверхности Ферми металлического слоя, что является естественным обобщением более простой и часто используемой при описании явлений переноса модели сферической поверхности Ферми. Статья адресована проектировщикам элементов интегральных схем с заданными параметрами.

Ключевые слова: функция распределения, уравнение Больцмана, электропроводность, тонкая неоднородная проволока, эллипсоидальная поверхность Ферми, диффузные граничные условия, изотропное рассеяние электронов.

ELECTRICAL CONDUCTIVITY OF AN INHOMOGENEOUS THIN METAL WIRE IN THE CASE OF AN ANISOTROPIC FERMI SURFACE AND ISOTROPIC ELECTRON SCATTERING

D. Romanov
P. G. Demidov Yaroslavl State University
ul. Sovetskaya 14, 150000 Yaroslavl, Russian Federation

Abstract. We have derived an analytical expression for high-frequency electrical conductivity of a thin metal wire with a dielectric core in the case of the diffuse interaction of metal electrons with the boundaries of the conductive layer. We have analyzed the dependence of the modulus and the argument of electrical conductivity on the ratio of the radii of the wire and the dielectric core, on the effective mass along a straight line perpendicular to the axis of the wire, on the radius of the wire, and on the electric field frequency. The analysis has shown that the effective mass of charge carriers and the boundaries of the metal layer influence its electrical conductivity. The kinetic problem has been generalized to the case of an ellipsoidal Fermi surface of a metal layer, which is a natural generalization of a simpler and more frequently used model of a spherical Fermi surface in the description of transport phenomena. The paper is addressed to designers of integrated circuit elements with specified parameters.

Keywords: distribution function, Boltzmann equation, electrical conductivity, thin inhomogeneous wire, ellipsoidal Fermi surface, diffuse boundary conditions, isotropic electron scattering.

Введение

Электропроводность проводящих тел, характерный линейный размер которых сравним с длиной свободного пробега носителей заряда λ, зависит от механизма поверхностного рассеяния [1]. Вклад поверхностного рассеяния электронов проводимости приводит к росту сопротивления металлического провода. Высокое электрическое сопротивление сопровождается нагревом образца при протекании тока и, как следствие, приводит к электромиграции атомов металла, что быстрее выводит приборы из строя. В классической работе [1] выявлена следующая закономерность: чем выше длина свободного пробега носителей заряда, тем быстрее возрастает сопротивление проволоки при снижении её диаметра. В работе [2] показаны потенциальные кандидаты для замены меди в тонких соединительных проводах, которые имеют меньшую длину свободного пробега по сравнению с медью.

Поверхность тонких металлических проводов, диаметр которых сравним с длиной свободного пробега электронов проводимости, оказывает существенную роль на транспорт свободных носителей заряда. Влияние поверхности может привести к искривлению поверхности Ферми [3]. В ряде случаев изоэнергетическую поверхность металла можно рассматривать как трёхосный эллипсоид [4], что является естественным обобщением более простой и часто используемой при описании явлений переноса модели сферической поверхности Ферми. Систематического изучения процессов переноса в случае эллипсоидальной поверхности Ферми для таких систем как тонкие пленки и проволоки до сих пор не проводилось.

Электропроводность металлической проволоки разных сечений рассчитана в работах [5] и [6]. Расчет высокочастотной электропроводимости тонкой полупроводниковой проволоки круглого сечения проведен в работе [7]. В упомянутых работах используется модель Фукса [8] для кинетического уравнения Больцмана. Модель Соффера [9] применялась в работе [10] в расчёте высокочастотной электропроводности тонкой цилиндрической проволоки. Выражение для электропроводности тонкого цилиндрического металлического провода получено в [11] с помощью модели Маядаса и Шацкеса [12] с учётом поликристаллического строения. Квантовая теория влияния поверхности на движение электронов в металлической плёнке описана в работе [13].

В настоящей работе проведён расчёт высокочастотной электропроводности тонкой неоднородной металлической проволоки с анизотропной поверхности Ферми без учёта механизма рассеяния в объёме (время релаксации не зависит от энергии). На границе цилиндрического слоя заданы диффузные граничные условия.

Постановка задачи

В данной работе исследуется металлическая цилиндрическая проволока длиной L. Внутри проводящей проволоки находится диэлектрическая проволока радиусом R_1, ось которой совпадает с осью металлической проволоки с внешним радиусом R_2, причём $L \gg R_2$. Проволока находится во внешнем электрическом поле **E**, направленном вдоль оси проволоки и изменяющимся с частотой ω. Частота поля позволяет пренебречь скин-эффектом.

Однородное электрическое поле меняется по следующему гармоническому закону:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t). \tag{1}$$

Для равновесной функции Ферми-Дирака f_0 электронов проводимости в металле используем ступенчатую аппроксимацию:

$$f_0 = \begin{cases} 1, \ \varepsilon < \varepsilon_F, \\ 0, \ \varepsilon > \varepsilon_F, \end{cases}$$

где ε и ε_F – это энергия квазичастицы и энергия Ферми-поверхности, соответственно.

В случае слабого внешнего электрического поля **E** (1) неравновесную функцию распределения f можно представить следующим образом:

$$f(\mathbf{v},\mathbf{r},t) = f_0(\varepsilon) + f_1(\mathbf{v},\mathbf{r},t) = f_0(\varepsilon) + f_1(\mathbf{v},\mathbf{r})\exp(-i\omega t),$$

где **v** и **r** – соответственно скорость и радиус-вектор квазичастицы.

Уравнение Больцмана в приближении времени релаксации и линейном приближении имеет вид:

$$-i\omega f_1 + \mathbf{v}\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{r}} + e(\mathbf{vE})\frac{\partial f_1}{\partial \varepsilon} = -\frac{f_1}{\tau}. \tag{2}$$

Время релаксации τ в металле не зависит ни от направления, ни от скорости носителей заряда (пренебрегаем механизмом рассеяния).

Ось тонкой проволоки совпадает с осью Z; соответственно две другие оси (X, Y) направлены перпендикулярно боковой поверхности. В данной работе поверхность Ферми – трёхосный эллипсоид, главные оси которого совпадают с координатными осями, поэтому энергия электронов проводимости определяется следующим образом [4]:

$$\varepsilon = \frac{m_1 v_x^2}{2} + \frac{m_2 v_y^2}{2} + \frac{m_3 v_z^2}{2},$$

где m_1, m_2, m_3 – эффективные массы квазичастицы вдоль осей X, Y и Z соответственно.

Плотность тока **j** равна:

$$\mathbf{j} = en\langle \mathbf{v} \rangle = e\int \mathbf{v} f \frac{2d^3(mv)}{h^3} = 2e\frac{m_1 m_2 m_3}{h^3}\int \mathbf{v} f_1 d^3 v \qquad (3)$$

с учётом концентрации n в виде:

$$n = 2\frac{m_1 m_2 m_3}{h^3}\int f_0 d^3 v = \frac{8\pi}{3}\frac{\sqrt{m_1 m_2 m_3}}{h^3}(2\varepsilon_F)^{3/2}. \qquad (4)$$

В качестве граничных условий для уравнения (2) примем модель диффузного рассеяния [8]:

$$f_{11}(\mathbf{v},\mathbf{r}) = 0 \text{ при } |\mathbf{r}_\perp| = R_1, \mathbf{r}_\perp \mathbf{v}_\perp > 0,$$

$$f_{12}(\mathbf{v},\mathbf{r}) = 0 \text{ при } |\mathbf{r}_\perp| = R_2, \mathbf{r}_\perp \mathbf{v}_\perp < 0,$$

где $\mathbf{v}_\perp$ и $\mathbf{r}_\perp$ – соответственно поперечные компоненты скорости и радиус-вектора электрона проводимости.

Расчёт проводимости

Решение кинетического уравнения (2) получим методом характеристик, который описан в работе [14]:

$$f_1(\tilde{t}) = -\frac{e(\mathbf{vE})}{\nu}\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}\left(1 - \exp(-\nu \tilde{t})\right), \qquad (5)$$

где $\nu = 1/\tau - i\omega$. Эту величину в дальнейшем будем называть комплексной частотой рассеяния.

Параметр $\tilde{t}$ зависит от точки отражения следующим образом:

$$\tilde{t} = \tilde{t}_1 = \frac{\mathbf{r}_\perp \mathbf{v}_\perp - \sqrt{(\mathbf{r}_\perp \mathbf{v}_\perp)^2 + (R_1^2 - r_\perp^2)v_\perp^2}}{v_\perp^2},\ r_\perp = R_1;$$

$$\tilde{t} = \tilde{t}_2 = \frac{\mathbf{r}_\perp \mathbf{v}_\perp + \sqrt{(\mathbf{r}_\perp \mathbf{v}_\perp)^2 + (R_2^2 - r_\perp^2)v_\perp^2}}{v_\perp^2},\ r_\perp = R_2.$$

Найденные функции распределения позволяют рассчитать плотность тока (3) внутри проволоки. Связь плотности тока $\mathbf{j}$ с напряжённостью $\mathbf{E}$ определяется локальным законом Ома:

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E},$$

где σ – удельная электропроводность.

Опуская дальнейшее вычисление удельной электропроводности σ, напишем для неё сразу ответ

$$\sigma = \sigma_0 \Sigma(x_0, y_0, k_{m1}, k_{m2}, K),\ \ \sigma_0 = \frac{ne^2\tau}{m_0},$$

$$\Sigma\left(x_0, y_0, k_{m1}, k_{m2}, K\right) = \frac{x_0 k_{m1} k_{m2}}{z_0}\left(1 - \frac{6\sqrt{k_{m1}k_{m2}}}{\pi\left(1-K^2\right)}\int_K^1 \xi d\xi \times\right.$$

$$\times\left\{\int_{\alpha_0}^{\pi}\int_0^{1/\sqrt{\mu_0}} \rho \exp\left(-\frac{z_0\psi}{\rho}\right)\sqrt{1-\rho^2\mu_0}\, d\rho d\alpha + \right.$$

$$\left.\left. + \int_0^{\alpha_0}\int_0^{1/\sqrt{\mu_0}} \rho \exp\left(-\frac{z_0\eta}{\rho}\right)\sqrt{1-\rho^2\mu_0}\, d\rho d\alpha\right\}\right), \tag{6}$$

$$m_0 = \sqrt[3]{m_1 m_2 m_3},\ v_0 = \sqrt{\frac{2\varepsilon_F}{m_0}},$$

$$k_{m1} = \frac{m_1}{m_0}, \quad k_{m2} = \frac{m_2}{m_0}, \quad k_{m3} = \frac{m_3}{m_0},$$

$$\mu_0 = k_{m1}\cos^2\alpha + k_{m2}\sin^2\alpha,$$

$$x_0 = \frac{R_2}{\lambda}, \quad y_0 = \frac{\omega R_2}{v_0}, \quad z_0 = \frac{\nu R_2}{v_0} = x_0 - iy_0,$$

$$\xi = \frac{r_\perp}{R_2}, \quad \rho = \frac{v_\perp}{v_0}, \quad K = \frac{R_1}{R_2}, \quad \alpha_0 = \arccos\left(1 - \frac{K^2}{\xi^2}\right)^{1/2},$$

$$\tilde{t}_1 = \frac{R_2}{v_\perp}\eta, \quad \tilde{t}_2 = \frac{R_2}{v_\perp}\psi,$$

$$\eta = \xi\cos\alpha - \sqrt{K^2 - \xi^2\sin^2\alpha}, \quad \psi = \xi\cos\alpha + \sqrt{1 - \xi^2\sin^2\alpha}.$$

Здесь k_{m1}, k_{m2}, k_{m3}, – безразмерные эффективные массы вдоль осей X, Y, Z соответственно; v_0 – эффективная скорость Ферми; x_0 – безразмерный радиус проволоки; y_0 – безразмерная частота электрического поля; $\lambda = v_0\tau$ – длина свободного пробега электронов проводимости, Σ – безразмерная электропроводность.

Отдельно стоит отметить взаимосвязь параметров эллиптичности: так как $m_0 = \sqrt[3]{m_1 m_2 m_3}$, то $k_{m1}k_{m2}k_{m3} = 1$, поэтому $k_{m3} = 1/k_{m1}k_{m2}$. Также при изменении параметров эллиптичности предполагается постоянство концентрации свободных носителей заряда (4), следовательно, $m_1 m_2 m_3 = \mathrm{const}$, $m_0 = \mathrm{const}$, а $k_{m1} \propto m_1$, $k_{m2} \propto m_2$, $k_{m3} \propto m_3$.

Для толстой плёнки $x_0 \gg 1$ (макроскопическая асимптотика) получается формула Друде:

$$\Sigma = \frac{x_0 k_{m1} k_{m2}}{z_0} = \frac{x_0}{z_0 k_{m3}}, \tag{7}$$

$$\sigma = \sigma_0 \Sigma = \frac{ne^2\tau}{m_0}\frac{x_0}{z_0 k_{m3}} = \frac{ne^2\tau}{m_3\left(1 - i\omega\tau\right)}. \tag{8}$$

При $y_0 \gg 1$ (высокие частоты) экспоненты в выражении (6) сильно осциллируют. Непосредственно пренебречь этими экспонентами нельзя, но интегралы от них будут малы из-за быстрой осцилляции подынтегральных выражений. Поэтому в случае высоких частот электропроводность определяется выражениями (7) и (8).

В классическом случае (7, 8) электропроводность не зависит ни от коэффициента зеркальности поверхности проволоки, ни от соотношения радиусов между диэлектрическим ядром и металлической проволокой.

Если симметрия металла такова, что эффективные массы вдоль оси X и Y равны, то поверхность Ферми принимает форму эллипсоида вращения, у которой ось вращения совпадает с осью Z, причём $m_\perp = m_1 = m_2$ – поперечная эффективная масса, $m_{||} = m_3$ – продольная эффективная масса. Тогда безразмерная электропроводность Σ (6) примет вид:

$$\Sigma\left(x_0, y_0, k_\perp, K\right) = \frac{x_0 k_\perp^2}{z_0}\left(1 - \frac{6k_\perp}{\pi\left(1-K^2\right)}\int_K^1 \xi d\xi \int_0^{1/\sqrt{k_\perp}} \rho\sqrt{1-\rho^2 k_\perp}\, d\rho \times\right.$$

$$\left.\times\left\{\int_{\alpha_0}^{\pi} \exp\left(-\frac{z_0\psi}{\rho}\right)d\alpha + \int_0^{\alpha_0} \exp\left(-\frac{z_0\eta}{\rho}\right)d\alpha\right\}\right),$$

где $k_\perp = m_\perp = m_0$ – безразмерная поперечная эффективная масса.

В предельном случае сферической поверхности Ферми ($k_{m1} = k_{m2} = 1$) полученные выражения переходят в результаты работы [14].

Для однородной проволоки ($K = 0$, $\alpha_0 = 0$):

$$\Sigma\left(x_0, y_0, k_{m1}, k_{m2}\right) = \frac{x_0 k_{m1} k_{m2}}{z_0}\left(1 - \frac{6\sqrt{k_{m1}k_{m2}}}{\pi}\int_0^1 \xi d\xi \times\right.$$

$$\left.\times\int_0^{\pi}\int_0^{1/\sqrt{\mu_0}} \rho \exp\left(-\frac{z_0\psi}{\rho}\right)\sqrt{1-\rho^2\mu_0}\, d\rho d\alpha\right).$$

Анализ результатов

На рис. 1а и 1б изображены зависимости модуля и аргумента безразмерной проводимости Σ (6) от параметра $K = R_1/R_2$, соответственно.

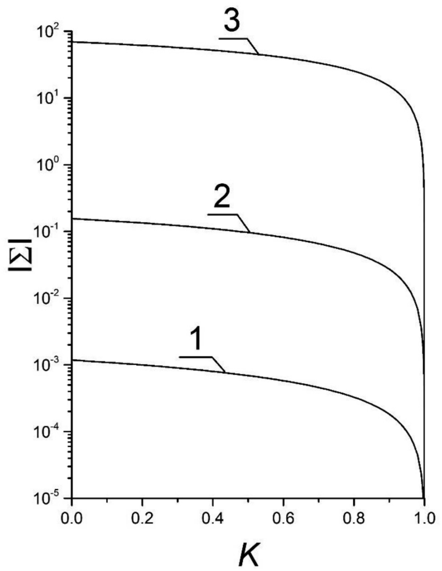

Рис. 1а. Зависимость модуля безразмерной проводимости Σ от параметра $K = R_1/R_2$ при $x_0 = 0{,}1$, $y_0 = 0{,}1$. Кривые 1 – $k_{m1} = 0{,}12$, $k_{m2} = 0{,}15$; 2 – $k_{m1} = k_{m2} = 1$; 3 – $k_{m1} = 12$, $k_{m2} = 15$.

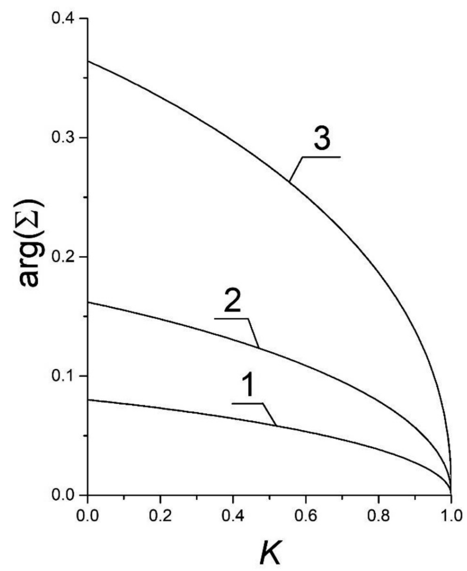

Рис. 1б. Зависимость аргумента безразмерной проводимости Σ от параметра $K = R_1/R_2$ при $x_0 = 0{,}1$, $y_0 = 0{,}1$. Кривые 1 – $k_{m1} = 0{,}12$, $k_{m2} = 0{,}15$; 2 – $k_{m1} = k_{m2} = 1$; 3 – $k_{m1} = 12$, $k_{m2} = 15$.

Кривая 2 соответствует случаю сферической поверхности Ферми ($k_{m1} = k_{m2} = 1$). Рост радиуса диэлектрического ядра R_1 проволоки, или уменьшение параметра K, сопровождается увеличением вклада поверхностного рассеяния по сравнению с объемным рассеянием и его возрастающим влиянием на проводимость, что приводит к снижению модуля и аргумента проводимости. В случае проволоки из диэлектрика ($K = 1$) электрическая проводимость стремится к нулю ($\Sigma = 1$).

На рис. 2а и 2б показаны зависимости соответственно модуля и аргумента безразмерной проводимости Σ (6) от безразмерной эффективной массы вдоль оси X k_{m1}. При постоянной концентрации (4) рост эффективной массы m_1 или m_2 сопровождается снижением эффективной массы m_3 и, как следствие, увеличением скорости электронов вдоль оси Z и уменьшением скорости квазичастиц в плоскости XY, что приводит к возрастанию модуля и аргумента проводимости проволоки.

На рис. 3а и 3б изображены зависимости соответственно модуля и аргумента безразмерной проводимости Σ (6) от безразмерной частоты электрического поля y_0. С ростом частоты поля носители заряда ведут себя подобно совокупности связанных зарядов. При высокой частоте сдвиг фазы между током и напряжением стремится к $\pi/2$, а модуль проводимости стремится к нулю.

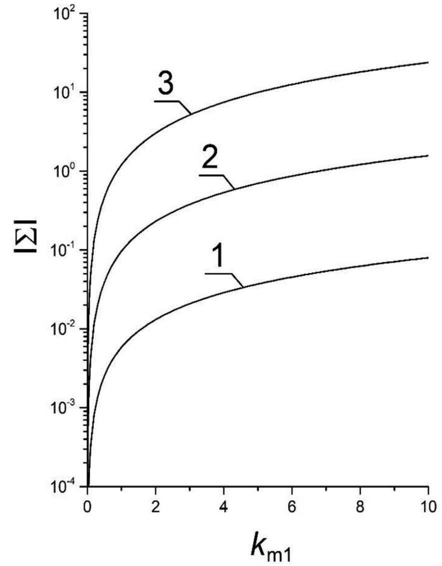

Рис. 2а. Зависимость модуля безразмерной проводимости Σ от безразмерной эффективной массы вдоль оси *X* k_{m1} при $x_0 = 0{,}1$, $y_0 = 0{,}1$, $K = 0{,}5$. *Кривые 1* – $k_{m2} = 0{,}1$; 2 – $k_{m2} = 1$; 3 – $k_{m2} = 10$.

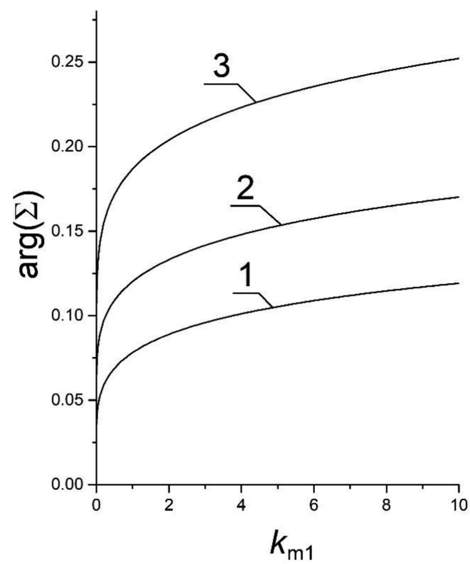

Рис. 2б. Зависимость аргумента безразмерной проводимости Σ от безразмерной эффективной массы вдоль оси *X* k_{m1} при $x_0 = 0{,}1$, $y_0 = 0{,}1$, $K = 0{,}5$. *Кривые 1* – $k_{m2} = 0{,}1$; 2 – $k_{m2} = 1$; 3 – $k_{m2} = 10$.

На рис. 4а и 4б построены зависимости соответственно модуля и аргумента безразмерной проводимости Σ (6) от безразмерного радиуса проволоки x_0. С увеличением радиуса проволоки снижается вероятность поверхностного рассеяния по сравнению с объёмным рассеянием, что приводит к росту модуля проводимости. При увеличении радиуса проволоки R_2 (или с уменьшением x_0) частота поля ω растёт, т.к. $y_0 = \omega R_2/v_0 = \text{const}$. Из графика 3б видно, что при повышении частоты аргумент проводимости возрастает, поэтому при снижении безразмерного радиуса проволоки аргумент также увеличивается. Для толстой проволоки ($x_0 \gg 1$) наблюдается макроскопическая асимптотика (7).

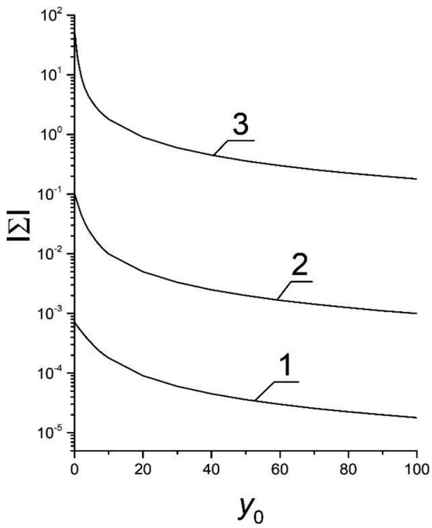

Рис. 3а. Зависимость модуля безразмерной проводимости Σ от безразмерной частоты электрического поля y_0 при $x_0 = 0{,}1$ и $K = 0{,}5$. Кривые 1 – $k_{m1} = 0{,}1$, $k_{m2} = 0{,}15$; *2* – $k_{m1} = k_{m2} = 1$; 3 – $k_{m1} = 12$, $k_{m2} = 15$.

2 – $k_{m1} = k_{m2} = 1$; 3 – $k_{m1} = 12, k_{m2} = 15$.

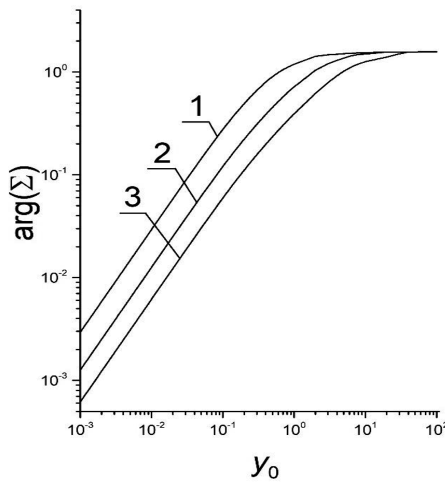

Рис. 3б. Зависимость аргумента безразмерной проводимости Σ от безразмерной частоты электрического поля y_0 при $x_0 = 0{,}1$ и $K = 0{,}5$. Кривые 1 – $k_{m1} = 0{,}12$, $k_{m2} = 0{,}15$; *2* – $k_{m1} = k_{m2} = 1$; 3 – $k_{m1} = 12$, $k_{m2} = 15$.

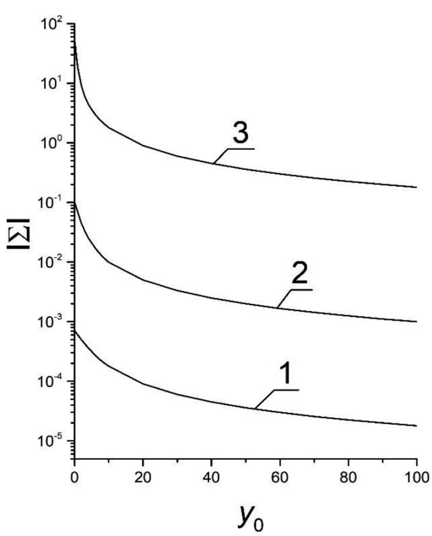

Рис. 4а. Зависимость модуля безразмерной проводимости Σ от безразмерного радиуса проволоки x_0 при $y_0 = 0{,}1$ и $K = 0{,}5$. Кривые 1 – $k_{m1} = 0{,}12$, $k_{m2} = 0{,}15$; 2 – $k_{m1} = k_{m2} = 1$; 3 – $k_{m1} = 12$, $k_{m2} = 15$.

2 – $k_{m1} = k_{m2} = 1$; 3 – $k_{m1} = 12, k_{m2} = 15$.

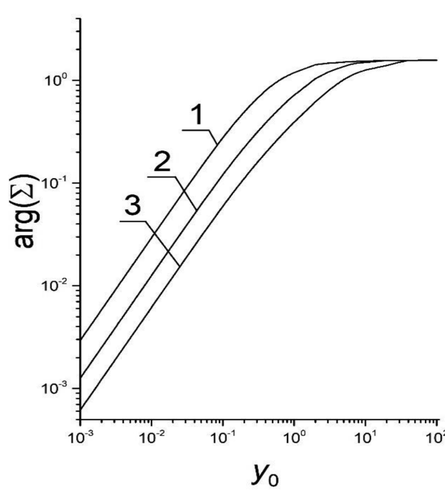

Рис. 4б. Зависимость аргумента безразмерной проводимости Σ от безразмерного радиуса проволоки x_0 при $y_0 = 0{,}1$ и $K = 0{,}5$. Кривые 1 – $k_{m1} = 0{,}12$, $k_{m2} = 0{,}15$; 2 – $k_{m1} = k_{m2} = 1$; 3 – $k_{m1} = 12$, $k_{m2} = 15$.

Заключение

В данной работе показана связь между анизотропией поверхности Ферми и классическим размерным эффектом в тонкой металлической неоднородной проволоке. Показано, что зависимость сопротивления образца от эффективной массы носителей заряда для тонкой проволоки отличается от аналогичной зависимости для массивного проводника вследствие вклада поверхностного рассеяния. Чем меньше эффективная масса вдоль любой из осей, перпендикулярной оси проволоки, тем ниже вероятность диффузного рассеяния электрона, что приводит к росту как модуля, так и аргумента проводимости (рис. 2а и 2б).

Статья поступила в редакцию 22.02.2019 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Sondheimer E. H. The mean free path of electrons in metals // Advances in Physics. 2001. Vol. 50. No. 6. P. 499–537.
2. Daniel G. Electron mean free path in elemental metals // Journal of Applied Physics. 2016. Vol. 119. Iss. 8. P. 085101.
3. Pengyuan Z., Daniel G. The anisotropic size effect of the electrical resistivity of metal thin films: Tungsten // Journal of Applied Physics. 2017. Vol. 122. Iss. 13. P. 135301.
4. Абрикосов А. А. Основы теории металлов. М.: Наука, 1987. 520 с.
5. Dingle R. B. The electrical conductivity of thin wires // Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences. 1950. Vol. 201. No. 1067. P. 545–560.
6. Dephasing of electrons in mesoscopic metal wires / Pierre F., Gougam A. B., Anthore A., Pothier H., Esteve D., Birge N. O. // Physical Review B. 2003. Vol. 68. No. 8. P. 085413.
7. Кузнецова И. А., Хадчукаева Р. Р., Юшканов А. А. Влияние поверхностного рассеяния носителей заряда на высокочастотную проводимость тонкой цилиндрической полупроводниковой проволоки // Физика твердого тела. 2009. Т. 51. № 10. С. 2022–2027.
8. Fuchs K. The conductivity of thin metallic films according to the electron theory of metals // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1938. Vol. 34. Iss. 1. P. 100–108.
9. Soffer S. B. Statistical model for the size effect in electrical conduction // Journal of Applied Physics. 1967. Vol. 38. Iss. 4. P. 1710.
10. Кузнецова И. А., Савенко О. В., Юшканов А. А. Влияние граничных условий на электропроводность тонкой цилиндрической проволоки // Микроэлектроника. 2016. Т. 45. № 2. С. 126–134.
11. Weihuang Xue, Wenhua Gu. Conductivity size effect of polycrystalline metal nanowires // AIP Advances. 2016. Vol. 6. Iss. 1. P. 115001.
12. Mayadas A. F., Shatzkes M. Electrical-resistivity model for polycrystalline films: the case of arbitrary reflection at external surface // Physical Review B. 1970. Vol. 1. Iss. 4. P. 1382–1389.
13. Munoz R. C., Arenas C. Size effects and charge transport in metals: Quantum theory of the resistivity of nanometric metallic structures arising from electron scattering by grain boundaries and by rough surfaces // Applied Physics Review. 2017. Vol. 4. Iss. 1. P. 011102.
14. Завитаев Э. В., Юшканов А. А. Влияние характера отражения электронов на электромагнитные свойства неоднородной цилиндрической частицы // Физика твердого тела. 2005. Т. 47. № 7. С. 1153–1161.

REFERENCES

1. Sondheimer E. H. The mean free path of electrons in metals. In: *Advances in Physics*, 2001, vol. 50, no. 6, pp. 499–537.
2. Daniel G. Electron mean free path in elemental metals. In: *Journal of Applied Physics*, 2016, vol. 119, iss. 8, pp. 085101.
3. Pengyuan Z., Daniel G. The anisotropic size effect of the electrical resistivity of metal thin films: Tungsten. In: *Journal of Applied Physics*, 2017. vol. 122, iss. 13, pp. 135301.
4. Abrikosov A. A. Fundamentals of the theory of metals. Amsterdam, North-Holland, 1988. 630 p.
5. Dingle R. B. The electrical conductivity of thin wires. In: *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 1950, vol. 201, no. 1067, pp. 545–560.
6. Pierre F., Gougam A. B., Anthore A., Pothier H., Esteve D., Birge N. O. Dephasing of electrons in mesoscopic metal wires. In: *Physical Review B*, 2003, vol. 68, no. 8, pp. 085413.
7. Kuznetsova I. A., Khadchukaeva R. R., Yushkanov A. A. [Effect of surface scattering of charge carriers on the high-frequency conductivity of a thin cylindrical semiconductor wire]. In: *Fizika tverdogo tela* [Physics of the Solid State], 2009, vol. 51, no. 10, pp. 2022–2027.
8. Fuchs K. The conductivity of thin metallic films according to the electron theory of metals. In: *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 1938, vol. 34, iss. 1, pp. 100–108.
9. Soffer S. B. Statistical model for the size effect in electrical conduction. In: *Journal of Applied Physics*, 1967, vol. 38, iss. 4, pp. 1710.
10. Kuznetsova I. A., Savenko O. V., Yushkanov A. A. [The influence of boundary conditions on the electrical conductivity of a thin cylindrical wire]. In: *Mikroelektronika* [Russian Microelectronics], 2016, vol. 45, no. 2, pp. 126–134.
11. Weihuang Xue, Wenhua Gu. Conductivity size effect of polycrystalline metal nanowires. In: *AIP Advances*, 2016, vol. 6, iss. 1, pp. 115001.
12. Mayadas A. F., Shatzkes M. Electrical-resistivity model for polycrystalline films: the case of arbitrary reflection at external surface. In: *Physical Review B*, 1970, vol. 1, iss. 4, pp. 1382–1389.
13. Munoz R. C., Arenas C. Size effects and charge transport in metals: Quantum theory of the resistivity of nanometric metallic structures arising from electron scattering by grain boundaries and by rough surfaces. In: *Applied Physics Review*, 2017, vol. 4, iss. 1, pp. 011102.
14. Zavitaev E. V., Yushkanov A. A. [Effect of the character of conduction electron reflection on the electromagnetic properties of an inhomogeneous cylindrical particle]. In: *Fizika tverdogo tela* [Physics of the Solid State], 2005, vol. 47, no. 7, pp. 1153–1161.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Романов Дмитрий Николаевич – аспирант кафедры микроэлектроники и общей физики Ярославского государственного университета имени П. Г. Демидова;
e-mail: romanov.yar357@mail.ru.

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Dmitrij N. Romanov – postgraduate student at the Department of Microelectronics and General Physics, P. G. Demidov Yaroslavl State University;
e-mail: romanov.yar357@mail.ru.

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Романов Д. Н. Электропроводность тонкой неоднородной металлической проволоки в случае анизотропной поверхности Ферми и изотропного рассеяния электронов // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика–Математика. 2019. № 2. С. 49–60.
DOI: 10.18384-2310-7251-2019-2-49-60

FOR CITATION

Romanov D. N. Electrical conductivity of an inhomogeneous thin metal wire in the case of an anisotropic Fermi surface and isotropic electron scattering. In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*, 2019, no. 2, pp. 49–60.
DOI: 10.18384-2310-7251-2019-2-49-60

УДК 517.958
DOI: 10.18384-2310-7251-2019-2-61-73

ОРТОГОНАЛЬНОСТЬ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ БОЗЕ-ГАЗА В СЛУЧАЕ ПОСТОЯННОЙ ЧАСТОТЫ СТОЛКНОВЕНИЯ ЧАСТИЦ

Бедрикова Е. А., Серегина Л. С.
Московский государственный областной университет
141014, г. Московская область, г. Мытищи, ул. Веры Волошиной, д. 24 Российская Федерация

Аннотация. В настоящей работе проводится исследование собственных функций характеристического уравнения, отвечающего кинетическому уравнению для бозе-газ с постоянной частотой столкновения частиц. Используется решение однородной краевой задачи Римана. Обобщается теория ортогональности собственных функций на квантовые газы, а именно на бозе-газ. Свойства ортогональности, положенные в основу кинетической теории, позволяют находить аналитическое решение задач с граничными условиями.

Ключевые слова: бозе-газ, равновесная функция распределения Бозе-Эйнштейна, дисперсионная функция, собственные функции, ортогональность собственных функций.

ORTHOGONALITY OF EIGENFUNCTIONS FOR A BOSE GAS IN THE CASE OF A CONSTANT FREQUENCY OF PARTICLE COLLISIONS

E. Bedrikova, L. Seregina
Moscow Region State University
24 Very Voloshinoi ul., Mytishchi 141014, Moscow Region, Russian Federation

Abstract. We have studied the eigenfunctions of a characteristic equation corresponding to the kinetic equation for a Bose gas with a constant frequency of particle collisions. The solution of the homogeneous Riemann boundary value problem is used. The theory of orthogonality of eigenfunctions is generalized to quantum gases, namely, to a Bose gas. The orthogonality properties underlying the kinetic theory allow us to find an analytical solution of problems with boundary conditions.

Key words: Bose gas, equilibrium Bose–Einstein distribution function, dispersion function, eigenfunctions, orthogonality of eigenfunctions.

Введение

В последнее время исследование свойств собственных функций характеристического уравнения вызывает большой интерес [2–6; 8–13]. Данная статья является продолжением работ [1; 7] и обобщением рассматриваемой в них теории на квантовые газы.

В настоящей работе рассматривается кинетическое уравнение для бозе-газа с постоянной частотой столкновения частиц.

Дана неподвижная твёрдая плоская поверхность, над которой в полупространстве $x > 0$ имеется бозе-газ. Задана прямоугольная система координат O_{xyz}. Начало координат находится на поверхности, поскольку плоскость O_{yz} совпадает с данной поверхностью.

Вдоль оси O_y движется бозе-газ с массовой скоростью $u_y(x)$. Вдали от рассматриваемой поверхности задан постоянный градиент массовой скорости газа g_v.

$$g_v = \left(\frac{du_y(x)}{dx}\right)_{x=+\infty}.$$

Движение газа вдоль плоской поверхности обуславливается наличием градиента массовой скорости.

Рассмотрим БГК-уравнение, которое имеет вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla f) = \nu(f_{eq} - f).$$

Здесь f является функцией распределения частиц бозе-газа по скоростям, $\mathbf{v}$ – скорость частиц, ν является эффективной частотой столкновений частиц газа, которая постоянна, f_{eq} является локально–равновесной функцией распределения Бозе

$$f_{eq} = \frac{1}{-1+\exp\left(\dfrac{\varepsilon_* - \mu}{kT}\right)}, \qquad \varepsilon_* = \frac{m}{2}(\mathbf{v}-\mathbf{u})^2, \qquad -\infty < \mu \le 0,$$

где $\mathbf{u}$ – массовая скорость бозе-газа, μ – химический потенциал частиц [11], m – масса частицы, k – постоянная Больцмана, T – температура газа, являющаяся постоянной.

Движение частиц стационарно. При малых значениях градиента g_v задачу можно линеаризовать.

Линеаризуем задачу относительно равновесной функции распределения Бозе-Эйнштейна f_B

$$f_B = \frac{1}{-1+\exp\left(\dfrac{\varepsilon - \mu}{kT}\right)}, \qquad \varepsilon = \frac{m\mathrm{v}^2}{2}, \qquad -\infty < \mu < 0,$$

и придём к выражению

$$f_{eq} = f_B(\mathrm{v}) + g_B(\mathrm{v})\frac{m\mathrm{v}_y}{kT}u_y,$$

в котором $f_B(\mathrm{v})$ – абсолютный бозеан, $g_B(\mathrm{v})$ – функция Эйнштейна:

$$f_B(\mathrm{v}) = \frac{1}{-1+\exp\left(\dfrac{m\mathrm{v}^2}{2kT}-\dfrac{\mu}{kT}\right)}, \quad g_B(\mathrm{v}) = \frac{\exp\left(\dfrac{m\mathrm{v}^2}{2kT}-\dfrac{\mu}{kT}\right)}{\left[-1+\exp\left(\dfrac{m\mathrm{v}^2}{2kT}-\dfrac{\mu}{kT}\right)\right]^2}.$$

Введём безразмерные величины:

$\mathbf{C} = \sqrt{\beta}\mathbf{v}$ – безразмерная скорость, где $\beta = \dfrac{m}{2kT}$;

$\alpha = \dfrac{\mu}{kT}$ – безразмерный химпотенциал;

$x_1 = xv\sqrt{\beta}$ – безразмерная координата;

$U_y(x) = \sqrt{\beta}u_y(x)$ – безразмерная массовая скорость.

В этих переменных уравнение (1.1) записывается так:

$$f_{eq} = f_B(C) + 2g_B(C)C_yU_y(x).$$

Функцию распределения будем искать в виде:

$$f = f(x,\mathbf{C}) = f_B(C) + g_B(C)C_yh(x,C_x). \tag{1.1}$$

Переходя к безразмерным координатам и сделав необходимые преобразования, получим кинетическое уравнение:

$$\mu\frac{\partial h}{\partial x_1} + h(x,C_x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} K_B(\mu',\alpha)h(x_1,\mu')d\mu', \tag{1.2}$$

где

$$K_B(\mu,\alpha) = \frac{\ln\left(1-\exp(\alpha-\mu^2)\right)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\ln\left(1-\exp(\alpha-\tau^2)\right)d\tau}.$$

Уравнение (1.2) является БГК-уравнением для бозе-газа [1; 8], с постоянной частотой столкновения частиц.

Собственные функции и их ортогональность

Рассмотрим подстановку, позволяющую разделить переменные в уравнении (1.2) [6]

$$h_\eta(x,\mu) = \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right)\Phi(\eta,\mu), \tag{2.1}$$

где η – параметр разделения.

Подстановка (2.1) в уравнение (1.2) приводит к следующему соотношению:

$$\Phi(\eta,\mu)(\eta-\mu)=\eta\int_{-\infty}^{\infty}K_B(\mu,\alpha)\Phi(\eta,\mu)d\mu. \qquad (2.2)$$

Введём нормировку собственной функции

$$n(\eta)=\int_{-\infty}^{\infty}K_B(\mu,\alpha)\Phi(\eta,\mu)d\mu.$$

Уравнение (2.2) запишем в виде:

$$\Phi(\eta,\mu)(\eta-\mu)=\eta n(\eta).$$

Сделав все необходимые преобразования, получим собственные функции

$$\Phi(\eta,\mu)=\eta n(\eta)P\frac{1}{\eta-\mu}+\frac{n(\eta)\lambda(\eta)\delta(\eta-\mu)}{K_B(\eta,\alpha)}.$$

Рассмотрим дисперсионную функцию

$$\lambda(\eta)=1+\eta\int_{-\infty}^{\infty}\frac{K_B(\mu,\alpha)d\mu}{\mu-\eta}, \qquad (2.3)$$

где $\lambda(\eta)$ – дисперсионная функция, $\delta(x)$ – дельта функция.

Допустим, что $n(\eta)\equiv\frac{1}{\sqrt{\pi}}$. В этом случае собственные функции представляются в виде:

$$\Phi(\eta,\mu)=\eta\frac{1}{\sqrt{\pi}}P\frac{1}{\eta-\mu}+\frac{\lambda(\eta)\delta(\eta-\mu)}{\sqrt{\pi}K_B(\eta,\alpha)}. \qquad (2.4)$$

Из свойств формул Сохоцкого для дисперсионной функции следует

$$\frac{\lambda^+(z)+\lambda^-(z)}{2}=\lambda(z). \qquad (2.5)$$

Рассмотрим скалярное произведение, которое имеет вес:

$$\rho(\mu)=\sqrt{\pi}K_B(\mu,\alpha)\gamma(\mu,\alpha),$$

где

$$\gamma(\mu)=\mu\frac{X^+(\mu)}{\lambda^+(\mu)}. \qquad (2.6)$$

Представим однородную краевую задачу Римана в виде [6; 8]:

$$\frac{X^+(\mu)}{X^-(\mu)}=\frac{\lambda^+(\mu)}{\lambda^-(\mu)},\ \mu>0. \qquad (2.7)$$

Её решение можно записать следующим выражением [1]:

$$X(z)=\frac{1}{z}e^{V(z)},\ \ V(z)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\theta(\mu,\alpha)-\pi}{\mu-z}d\mu,$$

где

$$\theta(\mu)=\operatorname{arcctg}\frac{\lambda(\mu)}{s(\mu)}=\operatorname{arcctg}\frac{\lambda(\mu)}{z\pi i K_B(z,\alpha)},$$

$$\operatorname{Re}\lambda^{\pm}(z)=1+\mathrm{z}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{K_B(\mu,\alpha)d\mu}{\mu-z}=\lambda(z),$$

$$s(z)=\operatorname{Im}\lambda^{\pm}(z)=\pm z\pi i K_B(z,\alpha).$$

Воспользуемся скалярным произведением двух функций, которые зависят от скоростной переменной μ

$$\left(f,g\right)=\int_{0}^{\infty}\rho(\mu)f(\mu)g(\mu)d\mu. \tag{2.8}$$

Обозначим $\Phi(\eta,\mu)=\Phi_{\eta}(\eta,\mu)$.

Свойства собственных функций

Теорема 1.

Скалярное произведение единицы на собственный спектр есть спектральный параметр [7]

$$\left(1,\Phi_{\eta}\right)=\eta,\qquad \eta>0.$$

Доказательство.

Согласно скалярному произведению

$$\left(1,\Phi_{\eta}\right)=\int_{0}^{\infty}\rho(\tau)\Phi_{\eta}d\tau. \tag{3.1}$$

Исходя из выражений (3.1), (2.6) и (2.4), получим:

$$\left(1,\Phi_{\eta}\right)=\eta\int_{0}^{\infty}\frac{K_B(\tau,\alpha)\gamma(\tau)}{\eta-\tau}d\tau+\lambda(\eta)\int_{0}^{\infty}\frac{\delta(\eta-\tau)}{K_B(\eta,\alpha)}K_B(\tau,\alpha)\gamma(\tau)d\tau=$$

$$=\eta\int_{0}^{\infty}\frac{K_B(\tau,\alpha)\gamma(\tau)}{\eta-\tau}d\tau+\lambda(\eta)\gamma(\eta).$$

По интегральному представлению [8]

$$X(z)=1+\int_{0}^{\infty}\frac{K_B(\tau,\alpha)\gamma(\tau)}{\tau-z}d\tau \tag{3.2}$$

имеем:

$$\left(1,\Phi_\eta\right) = -\eta X(\eta) + \eta + \lambda(\eta)\gamma(\eta) =$$

$$= -\eta X(\eta) + \eta + \frac{1}{2}\eta\left[\lambda^+(\eta) + \lambda^-(\eta)\right]\frac{X^+(\eta)}{\lambda^+(\eta)} = \eta.$$

Докажем, что

$$X(\eta) = \frac{1}{2}\left[\lambda^+(\eta) + \lambda^-(\eta)\right]\frac{X^+(\eta)}{\lambda^+(\eta)}.$$

Для этого воспользуемся снова выражением (3.2).

Так как

$$X(\eta) = \frac{1}{2}\left[X^+(\eta) + X^-(\eta)\right], \text{ то}$$

$$\frac{1}{2}\left[X^+(\eta) + X^-(\eta)\right] = \frac{1}{2}\left[\lambda^+(\eta) + \lambda^-(\eta)\right]\frac{X^+(\eta)}{\lambda^+(\eta)},$$

$$\left[X^+(\eta) + X^-(\eta)\right] = \left[\lambda^+(\eta) + \lambda^-(\eta)\right]\frac{X^+(\eta)}{\lambda^+(\eta)},$$

$$1 + \frac{X^-(\eta)}{X^+(\eta)} = \frac{\lambda^+(\eta) + \lambda^-(\eta)}{\lambda^+(\eta)},$$

$$1 + \frac{\lambda^-(\eta)}{\lambda^+(\eta)} = \frac{\lambda^+(\eta) + \lambda^-(\eta)}{\lambda^+(\eta)},$$

$$\frac{\lambda^+(\eta) + \lambda^-(\eta)}{\lambda^+(\eta)} = \frac{\lambda^+(\eta) + \lambda^-(\eta)}{\lambda^+(\eta)}.$$

Таким образом, $\left(1,\Phi_\eta\right) = \eta$.

Что и требовалось доказать.

Теорема 2.

Собственные функции $\Phi_\eta(\mu)$ непрерывного спектра образуют ортогональное семейство и справедливо равенство [7]:

$$\left(\Phi_\eta, \Phi_{\eta'}\right) = N(\eta)\delta(\eta - \mu), \tag{3.3}$$

где

$$N(\eta) = \gamma(\eta)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{K_B(\eta,\alpha)}\lambda^+(\eta)\lambda^-(\eta).$$

Доказательство.

Воспользуемся определением скалярного произведения (2.8)

$$\left(\Phi_\eta,\Phi_{\eta'}\right)=\sqrt{\pi}\int_0^\infty K_B(\tau,\alpha)\gamma(\tau)\left[\eta\frac{1}{\sqrt{\pi}}P\frac{1}{\eta-\tau}+\frac{\lambda(\eta)\delta(\eta-\tau)}{\sqrt{\pi}K_B(\eta,\alpha)}\right]\times$$

$$\times\left[\eta'\frac{1}{\sqrt{\pi}}P\frac{1}{\eta'-\tau}+\frac{\lambda(\eta')\delta(\eta'-\tau)}{\sqrt{\pi}K_B(\eta',\alpha)}\right]d\tau=I_1+I_2+I_3+I_4.$$

Обозначим

$$I_1=\frac{\eta\eta'}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\frac{K_B(\tau,\alpha)\gamma(\tau)}{(\eta-\tau)(\eta'-\tau)}d\tau,$$

$$I_2=\frac{\eta}{\sqrt{\pi}}\frac{\lambda(\eta')}{K_B(\eta',\alpha)}\int_0^\infty\frac{\delta(\eta'-\tau)}{\eta-\tau}K_B(\tau,\alpha)\gamma(\tau)d\tau,$$

$$I_3=\frac{\eta'}{\sqrt{\pi}}\frac{\lambda(\eta)}{K_B(\eta,\alpha)}\int_0^\infty\frac{\delta(\eta-\tau)}{\eta'-\tau}K_B(\tau,\alpha)\gamma(\tau)d\tau,$$

$$I_4=\frac{\lambda(\eta)\lambda(\eta')}{\sqrt{\pi}K_B(\eta,\alpha)K_B(\eta',\alpha)}\int_0^\infty K_B(\tau,\alpha)\gamma(\tau)\delta(\eta-\tau)\delta(\eta'-\tau)d\tau.$$

Согласно свойству дельта-функции

$$f(x)=\int_{-\infty}^\infty f(\xi)\delta(x-\xi)d\xi, \tag{3.4}$$

$$I_2=\frac{\eta\lambda(\eta')\gamma(\eta')}{\sqrt{\pi}(\eta-\eta')},$$

$$I_3=\frac{\eta'\lambda(\eta)\gamma(\eta)}{\sqrt{\pi}(\eta'-\eta)},$$

$$I_4=\frac{\lambda^2(\eta)\gamma(\eta)\delta(\eta-\eta')}{\sqrt{\pi}K_B(\eta,\alpha)}.$$

Вычислим I_1.

Для этого выражение $\dfrac{1}{(\eta-\tau)(\eta'-\tau)}$ разложим на элементарные дроби:

$$\frac{1}{(\eta-\tau)(\eta'-\tau)}=\frac{1}{\eta-\eta'}\left(\frac{1}{\tau-\eta}-\frac{1}{\tau-\eta'}\right).$$

Используя формулу Пуанкаре-Бертрана, получим:

$$P\frac{1}{\eta-\mu}P\frac{1}{\eta'-\mu}=P\frac{1}{\eta-\eta'}\left(P\frac{1}{\tau-\eta}-P\frac{1}{\tau-\eta'}\right)+\pi^2\delta(\eta-\mu)\delta(\eta'-\mu).$$

$$I_1=\eta\eta'\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{1}{\eta-\eta'}\int\limits_0^\infty\frac{K_B(\tau,\alpha)\gamma(\tau)}{\tau-\eta}d\tau-\frac{1}{\eta-\eta'}\int\limits_0^\infty\frac{K_B(\tau,\alpha)\gamma(\tau)}{\tau-\eta'}d\tau\right]+$$

$$+\eta\eta'\pi\sqrt{\pi}\int\limits_0^\infty K_B(\tau,\alpha)\gamma(\tau)\delta(\eta-\mu)\delta(\eta'-\mu)d\tau.$$

Согласно интегральному представлению (3.2) и свойству дельта-функции (3.4):

$$I_1=\eta\eta'\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{X(\eta)-X(\eta')}{\eta-\eta'}+\eta^2\pi\sqrt{\pi}K_B(\eta,\alpha)\gamma(\eta)\delta(\eta-\eta'). \qquad (3.5)$$

Найдём сумму I_2+I_3.

$$I_2+I_3=\frac{\eta\eta'}{\sqrt{\pi}(\eta-\eta')}\left[\lambda(\eta')\frac{X^+(\eta')}{\lambda^+(\eta')}-\lambda(\eta)\frac{X^+(\eta')}{\lambda^+(\eta')}\right].$$

Из (2.4), (2.7) следует:

$$I_2+I_3=\frac{\eta\eta'}{\sqrt{\pi}(\eta-\eta')}\left[\frac{\lambda^+(\eta')+\lambda^-(\eta')}{2}\cdot\frac{X^+(\eta')}{\lambda^+(\eta')}-\frac{\lambda^+(\eta)+\lambda^-(\eta)}{2}\cdot\frac{X^+(\eta)}{\lambda^+(\eta)}\right]=$$

$$=\frac{\eta\eta'}{\sqrt{\pi}\tilde{\ }\eta-\eta}\times$$

$$\times\left[\frac{\lambda^+(\eta')}{2}\cdot\frac{X^+(\eta')}{\lambda^+(\eta')}+\frac{\lambda^-(\eta')}{2}\cdot\frac{X^+(\eta')}{\lambda^+(\eta')}-\frac{\lambda^+(\eta)}{2}\cdot\frac{X^+(\eta)}{\lambda^+(\eta)}-\frac{\lambda^-(\eta)}{2}\cdot\frac{X^+(\eta)}{\lambda^+(\eta)}\right]=$$

$$=\frac{\eta\eta'}{\sqrt{\pi}(\eta-\eta')}\left[\frac{X^+(\eta')+X^-(\eta')}{2}-\frac{X^+(\eta)+X^-(\eta)}{2}\right]=$$

$$=\frac{\eta\eta'}{\sqrt{\pi}(\eta-\eta')}\left[X(\eta')-X(\eta)\right].$$

Найдём

$$I_1+I_2+I_3+I_4=\frac{\gamma(\eta)\delta(\eta-\eta')}{\sqrt{\pi}K_B(\eta,\alpha)}\left[\lambda^2(\eta)+\eta^2\pi^2K_B^2(\eta,\alpha)\right]=$$

$$=\frac{\gamma(\eta)\delta(\eta-\eta')}{\sqrt{\pi}K_B(\eta,\alpha)}\left(\left[\lambda(\eta)-\eta\pi K_B(\eta,\alpha)i\frac{2}{2}\right]\right)\left(\left[\lambda(\eta)+\eta\pi K_B(\eta,\alpha)i\frac{2}{2}\right]\right)=$$

$$=\frac{\gamma(\eta)\delta(\eta-\eta')}{\sqrt{\pi}K_B(\eta,\alpha)}\left[i\lambda(\eta)-\frac{2\eta\pi i K_B(\eta,\alpha)}{2}\right]\left[i\lambda(\eta)+\frac{2\eta\pi i K_B(\eta,\alpha)}{2}\right].$$

Согласно (2.3), (2.4), (2.5):

$$I_2+I_3+I_3+I_4=\frac{\gamma(\eta)\delta(\eta-\eta')}{\sqrt{\pi}K_B(\eta,\alpha)}\left[\frac{\lambda^+(\eta')-\lambda^-(\eta')}{2}+\frac{\lambda^+(\eta)-\lambda^-(\eta)}{2}\right]\times$$

$$\times\left[\frac{\lambda^+(\eta')-\lambda^-(\eta')}{2}+\frac{\lambda^+(\eta)-\lambda^-(\eta)}{2}\right]=\frac{\gamma(\eta)\delta(\eta-\eta')}{\sqrt{\pi}K_B(\eta,\alpha)}\lambda^+(\eta)\lambda^-(\eta).$$

Обозначим

$$N(\eta)=\gamma(\eta)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{K_B(\eta,\alpha)}\lambda^+(\eta)\lambda^-(\eta).$$

$$\left(\Phi_\eta,\Phi_{\eta'}\right)=I_1+I_2+I_3+I_4=N(\eta)\delta(\eta-\eta').$$

$$\left(\Phi_\eta,\Phi_{\eta'}\right)=N(\eta)\delta(\eta-\eta').$$

Введём на множестве собственных функций скалярное произведение с интегрированием по спектральному параметру и весом $r(\eta)=\dfrac{1}{N(\eta)}$. Итак,

$$\left(f,g\right)=\int_0^\infty\frac{1}{N(\eta)}f(\eta)g(\eta)d\eta. \tag{3.6}$$

<u>Теорема 3.</u>

Собственные функции характеристического уравнения ортогональны и выполняется равенство [7]:

$$\left(\Phi_\eta,\Phi_{\eta'}\right)=\frac{1}{\rho(\mu)}\delta(\mu-\mu').$$

Доказательство.

Согласно (3.6),

$$\left(\Phi_\eta(\mu),\Phi_\eta(\mu')\right)=\int_0^\infty\frac{1}{N(\eta)}\Phi_\eta(\mu),\Phi_\eta(\mu')d\eta. \tag{3.7}$$

Подставим (3.3) в (3.7):

$$\left(\Phi_\eta(\mu),\Phi_\eta(\mu')\right)=\int_0^\infty\frac{\sqrt{\pi}K_B(\eta,\alpha)}{\gamma(\eta)\lambda^+(\eta)\lambda^-(\eta)}\Phi_\eta(\mu),\Phi_\eta(\mu')d\eta=$$

$$=\int_0^\infty\frac{\sqrt{\pi}K_B(\eta,\alpha)}{\gamma(\eta)\lambda^+(\eta)\lambda^-(\eta)}\left[\eta\frac{1}{\sqrt{\pi}}P\frac{1}{\eta-\mu}+\frac{\lambda(\eta)\delta(\eta-\mu)}{\sqrt{\pi}K_B(\eta,\alpha)}\right]\times$$

$$\times\left[\eta\frac{1}{\sqrt{\pi}}P\frac{1}{\mathfrak{I}\qquad '}+\frac{\lambda(\eta)\delta(\eta-\mu')}{\sqrt{\pi}K_B\,\tilde{}\,\eta\ \alpha}\right]d\eta=I_1+I_2+I_3+I_4,$$

где

$$I_1=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\infty\frac{\eta^2K_B(\eta,\alpha)}{\gamma(\eta)(\eta-\mu)(\eta-\mu')\lambda^+(\eta)\lambda^-(\eta)}d\eta,$$

$$I_2=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\infty\frac{\eta\lambda(\eta)}{\gamma(\eta)\lambda^+(\eta)\lambda^-(\eta)}\frac{\delta(\eta-\mu')}{(\eta-\mu)}d\eta,$$

$$I_3=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\infty\frac{\eta\lambda(\eta)}{\gamma(\eta)\lambda^+(\eta)\lambda^-(\eta)}\frac{\delta(\eta-\mu)}{(\eta-\mu')}d\eta,$$

$$I_4=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\infty\frac{\lambda^2(\eta)}{\gamma(\eta)\lambda^+(\eta)\lambda^-(\eta)K_B(\eta,\alpha)}\delta(\eta-\mu)\delta(\eta-\mu')d\eta.$$

По свойству дельта-функции (3.4):

$$I_4=\frac{\lambda^2(\mu')\delta(\mu'-\mu)}{\sqrt{\pi}\gamma(\mu')\lambda^+(\mu')\lambda^-(\mu')K_B(\mu,\alpha)},$$

$$I_2=\frac{\mu'\lambda(\mu')}{\sqrt{\pi}\gamma(\mu')(\mu'-\mu)\lambda^+(\mu')\lambda^-(\mu')},$$

$$I_3=\frac{\mu'\lambda(\mu')}{\sqrt{\pi}\gamma(\mu')(\mu-\mu')\lambda^+(\mu')\lambda^-(\mu')},$$

$$I_2+I_3=0.$$

Рассчитаем I_1. Вычислим аналогично (3.5) I_1 из теоремы 2.

$$I_1=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\infty\frac{\eta^2K_B(\eta,\alpha)}{\gamma(\eta)(\mu'-\eta)(\mu-\mu')\lambda^+(\eta)\lambda^-(\eta)}d\eta-$$

$$-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\infty\frac{\eta^2K_B(\eta,\alpha)}{\gamma(\eta)(\mu'-\eta)(\mu-\mu')\lambda^+(\eta)\lambda^-(\eta)}d\eta+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\infty\frac{\eta^2K_B(\eta,\alpha)\delta(\mu-\eta)\delta(\mu'-\eta)}{\gamma(\eta)\lambda^+(\eta)\lambda^-(\eta)}d\eta.$$

$$I_1 = \frac{\mu'^2 K_B(\mu',\alpha)}{\gamma(\mu')\lambda^+(\mu')\lambda^-(\mu')}\pi\sqrt{\pi}\delta(\mu-\mu').$$

$$\left(\Phi_\eta,\Phi_{\eta'}\right) = \frac{\pi\sqrt{\pi}\mu'^2\,\delta(\mu-\mu')K_B(\mu',\alpha)}{\gamma(\mu')\lambda^+(\mu')\lambda^-(\mu')} + \frac{\lambda^2(\mu')\delta(\mu-\mu')}{\sqrt{\pi}\gamma(\mu')\lambda^+(\mu')\lambda^-(\mu')K_B(\mu,\alpha)} =$$

$$= \frac{\delta(\mu-\mu')}{\gamma(\mu')\lambda^+(\mu')\lambda^-(\mu')}\left[\frac{\pi^2\mu'^2\,K^2{}_B(\mu',\alpha)+\lambda^2(\mu')}{\sqrt{\pi}K_B(\mu,\alpha)}\right].$$

Аналогично теореме 2:

$$\pi^2\mu'^2\,K^2{}_B(\mu',\alpha)+\lambda^2(\mu') = \lambda^+(\mu')\lambda^-(\mu')$$

и (2.6)

$$\left(\Phi_\eta,\Phi_{\eta'}\right) = \frac{\delta(\mu-\mu')}{\gamma(\mu')}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{K_B(\mu,\alpha)} = \frac{1}{\rho(\mu)}\delta(\mu-\mu').$$

$$\left(\Phi_\eta,\Phi_{\eta'}\right) = \frac{1}{\rho(\mu)}\delta(\mu-\mu').$$

Заключение

В данной работе исследована математическая модель движения квантового газа Бозе в полупространстве вдоль его границы. Это движение обусловлено наличием градиента массовой скорости газа вдали от границы полупространства. При исследовании рассмотрена теория ортогональности собственных функций характеристического уравнения, соответствующего кинетическому уравнению движения газа Бозе с постоянной частотой столкновений частиц газа. В работе доказаны теоремы ортогональности собственных функций уравнения движения газа Бозе. При доказательстве теорем используется решение однородной краевой задачи Римана. Доказанные теоремы в дальнейшем следует использовать для аналитического решения граничных задач движения квантовых газов Бозе.

Статья поступила в редакцию 17.01.2019 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бедрикова Е. А. Граничные задачи для бозе-газа в полупространстве и канале: дис. … канд. физ.-мат. наук. М., 2015. 107 с.
2. Бедрикова Е. А., Латышев А. В. Аналитическое решение задачи Куэтта для бозе-газа // VII Международная научная практическая конференция «Наука и образование – 2014» (Мюнхен, Германия, 27–28 июня 2014). С. 399–405.
3. Бедрикова Е. А., Латышев А. В. Задача Куэтта для бозе-газа // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика и математика. 2014. № 4. С. 29–43.
4. Бедрикова Е. А., Латышев А. В. Скачок химического потенциала при испарении бозе-газа // Физика низких температур. 2014. Т. 40. № 3. С. 296–302.

5. Квашнин А. Ю., Латышев А. В., Юшканов А. А. Изотермическое скольжение квантового бозе-газа с зеркально-диффузным отражением от границы // Физика низких температур. 2010. Т. 36. № 4. С. 413–417.
6. Латышев А. В., Юшканов А. А. Аналитическое решение граничных задач кинетической теории. М.: МГОУ, 2004. 286 с.
7. Латышев А. В., Курилов А. Д. Ортогональность собственных функций характеристических уравнений как метод решения граничных задач модельных кинетических уравнений // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2015. № 1. С. 8–21.
8. Латышев А. В., Юшканов А. А. Аналитические методы в кинетической теории. М.: МГОУ, 2008. 280 с.
9. Латышев А. В., Юшканов А. А. Кинетические процессы в квантовых бозе-газах и аналитическое решение граничных задач // Математическое моделирование. 2003.Т. 15. № 5. С. 80–94.
10. Case K. M. Elementary solutions of the transport equations and their applications // Annals of Physics. 1960. Vol. 9. No. 1. P. 1–23.
11. Cercignani C., Lampis M. Kinetic model for gas-surface ineraction // Transport Theory and Statistical Physics. 1971. Vol. 1. P. 101–109.
12. Cercignani C. Mathematical Methods in Kinetic Theory. New York: Plenum Press, 1969. 268 p.
13. Ferziger J. H., Kaper H. G. Mathematical Theory of Transport Processes in Gases. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1972. 568 p.

REFERENCES

1. Bedrikova E. A. *Granichnye zadachi dlya boze-gaza v poluprostranstve i kanale: dis. … kand. fiz.-mat. nauk* [The boundary value problems for the Bose gas in half-space and the channel: PhD thesis in Physics and Mathematics]. Moscow, 2015. 107 p.
2. Bedrikova E. A., Latyshev A. V. [Analytical solution of the Couette problem for a Bose gas]. In: *VII Mezhdunarodnaya nauchnaya prakticheskaya konferentsiya «Nauka i obrazovanie – 2014» (Munchen, Germaniya, Iun 27–28, 2014)* [VII international scientific practical conference "Science and education – 2014" (Munich, Germany, June 27–28, 2014)]. pp. 399–405.
3. Bedrikova E. A., Latyshev A. V. [The Couette problem for a Bose gas]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika i matematika* [Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], 2014, no. 4, pp. 29–43.
4. Bedrikova E. A., Latyshev A. V. [Chemical potential jump during evaporation of Bose gases]. In: *Fizika nizkikh temperature* [Low Temperature Physics], 2014, vol. 40, no. 3, pp. 296–302.
5. Kvashnin A. Yu., Latyshev A. V., Yushkanov A. A. [Isothermal slip of a quantum Bose gas with specular-diffuse reflection from the boundary]. In: *Fizika nizkikh temperature* [Low Temperature Physics], 2010, vol. 36, no. 4, pp. 413–417.
6. Latyshev A. V., Yushkanov A. A. *Analiticheskoe reshenie granichnykh zadach kineticheskoi teorii* [Analytical solution of boundary problems of the kinetic theory]. Moscow, Moscow Region State University Publ., 2004. 286 p.
7. Latyshev A. V., Kurilov A. D. [Orthogonality of the eigenfunctions of characteristic equations as a method for solving boundary value problems of model kinetic equations]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika* [Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], 2015, no. 1, pp. 8–21.

8. Latyshev A. B., Yushkanov A. A. *Analiticheskie metody v kineticheskoi teorii* [Analytical methods in kinetic theory]. Moscow, Moscow Region State University Publ., 2008. 280 p.
9. Latyshev A. V., Yushkanov A. A. [Kinetic processes in quantized Bose gases and analytical solution of boundary value problems]. In: *Matematicheskoe modelirovanie* [Mathematical Models and Computer Simulations], 2003, vol. 15, no. 5, pp. 80–94.
10. Case K. M. Elementary solutions of the transport equations and their applications. In: *Annals of Physics*, 1960, vol. 9, no. 1, pp. 1–23.
11. Cercignani C., Lampis M. Kinetic model for gas-surface ineraction. In: *Transport Theory and Statistical Physics*, 1971, vol. 1, pp. 101–109.
12. Cercignani C. Mathematical methods in kinetic theory. New York, Plenum Press Publ., 1969. 268 p.
13. Ferziger J. H., Kaper H. G. Mathematical theory of transport processes in gases. Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 1972. 568 p.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Бедрикова Екатерина Алексеевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа и геометрии Московского государственного областного университета;
e-mail: bedrikova@mail.ru;

Серегина Людмила Сергеевна – студент физико-математического факультета Московского государственного областного университета;
e-mail: seregina.lyudmila.97@mail.ru.

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Ekaterina A. Bedrikova – PhD in physical and mathematical sciences, associate professor at the Department of Mathematical Analysis and Geometry, Moscow Region State University;
e-mail: bedrikova@mail.ru;

Ludmila S. Seregina – student at the Physics and Mathematics Faculty, Moscow Region State University;
e-mail: seregina.lyudmila.97@mail.ru.

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Бедрикова Е. А., Серегина Л. С. Ортогональность собственных функций для бозе-газа в случае постоянной частоты столкновения частиц // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2019. № 2. С. 61–73.
DOI: 10.18384-2310-7251-2019-2-61-73

FOR CITATION

Bedrikova E. A., Seregina L. S. Orthogonality of eigenfunctions for a Bose gas in the case of a constant frequency of particle collisions. In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*, 2019, no. 2, pp. 61–73.
DOI: 10.18384-2310-7251-2019-2-61-73

УДК 539.23+539.216.1+537.311.31
DOI: 10.18384/2310-7251-2019-2-74-82

ЛОКАЛЬНАЯ ПРОВОДИМОСТЬ СУБМИКРОННОГО МЕТАЛЛИЧЕСКОГО СЛОЯ С УЧЁТОМ ПОПРАВКИ К ЗАКОНУ ВИДЕМАНА-ФРАНЦА

Завитаев Э. В.[1], Русаков О. В.[1], Чухлеб Е. П.[2]

[1] *Государственный гуманитарно-технологический университет*
142611, Московская обл., г. Орехово-Зуево, ул. Зелёная, д. 22, Российская Федерация

[2] *Центр дополнительного образования «Малая академия наук Импульс»*
142432, Московская обл., г. Черноголовка, Школьный бульвар, д. 1, Российская Федерация

Аннотация. В статье впервые рассчитана проводимость субмикронного металлического слоя. Учитывается поправка к закону Видемана–Франца при наличии зеркально-диффузного отражения электронов.

Ключевые слова: тонкий слой, закон Видемана-Франца, локальная проводимость.

LOCAL CONDUCTIVITY OF A SUBMICRON METAL LAYER WITH ALLOWANCE FOR A CORRECTION TO THE WIEDEMANN-FRANZ LAW

E. Zavitaev[1], O. Rusakov[1], E. Chukhleb[2]

[1] *State University of Humanities and Technologies*
ul. Zelenaya 22, 142611 Orekhovo-Zuyevo, Moscow Region, Russian Federation

[2] *The Center of Additional Education “Junior Academy of Sciences Impulse”*
Shkol’nyi bulv. 1, 142432 Chernogolovka, Moscow Region, Russian Federation

Abstract. We have calculated for the first time the conductivity of a submicron metal layer. A correction to the Wiedemann–Franz law is taken into account in the presence of specular-diffuse reflection of electrons.

Keywords: thin layer, Wiedemann–Franz law, local conductivity.

Введение

Теоретические исследования электрических и магнитных свойств тонкого слоя из металла были начаты ещё в прошлом веке. По указанной тематике было опубликовано достаточно большое количество работ, ссылки на которые можно найти в современных электронных базах. Например, в работе [1] приведён расчёт проводимости металлического слоя в магнитном поле с учётом зеркально-диффузных граничных условий.

Однако несмотря на то, что с момента публикации указанной выше работы прошло более 60 лет, актуальность данной тематики не становится менее востребованной. В первую очередь это связано с необходимостью подробного изучения влияния поверхностного рассеяния носителей заряда на электромагнитные свойства малых проводящих объектов.

Так, в современных работах [2–4] учитывалось влияние коэффициентов зеркальности поверхности на электропроводность и постоянную Холла субмикронного проводящего слоя, а в работе [5] изучалось магнитное поле такого объекта.

Как известно из научной литературы, поправка к закону Видемана-Франца становится наиболее существенной при низких температурах [6; 7]. Новизна и актуальность данной работы как раз и заключаются в учёте подобного эффекта для субмикронного металлического слоя.

Математическая модель и расчёт

Рассматривается субмикронный металлический слой толщиной b, к которому приложено переменное напряжение частоты ω. Электрическое поле параллельно слою и направлено вдоль координатной оси Z, ось X перпендикулярна слою. Напряжённость поля E подчиняется закону:

$$E = E_0 \exp(-i\omega t), \tag{1}$$

где E_0 – вещественная амплитуда напряжённости электрического поля, i – мнимая единица, t – время протекания процесса.

Работа выполнена без учёта скин-эффекта, так как исследование этого явления нужно проводить отдельно (толщина слоя предполагается малой по сравнению с характерной глубиной скин-слоя).

Исходя из того, что возмущённая функция Ферми-Дирака $f(x,\mathbf{v}) = f_0(\varepsilon) + f_1(x,\mathbf{v})$ для электронов удовлетворяет уравнению Больцмана [7], имеем:

$$\mathrm{v}_x \frac{\partial f_1}{\partial x} + e\,\mathrm{v}_z E \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} - i\omega f_1 = -\frac{f_1}{\tau}, \tag{2}$$

где e – заряд электронов, v_z , v_x – соответствующие проекции вектора их скорости на координатные оси, τ – электронное время релаксации.

Здесь $f_0'(\varepsilon) = -\delta(\varepsilon - \varepsilon_F)$, где δ – дельта-функция Дирака, ε_F – энергия Ферми, $\varepsilon = \dfrac{mv^2}{2}$ – кинетическая энергия электронов, v – модуль вектора скорости электронов $\mathbf{v}$, m – эффективная масса электронов.

Плотность высокочастотного тока j, вызванного приложенным напряжением, рассчитывается по формуле:

$$j = en\langle v \rangle = en\left[\int f_0 d^3\mathbf{v}\right]^{-1} \int f_1 \mathbf{v} d^3\mathbf{v}. \tag{3}$$

В этой формуле n – концентрация электронов проводимости, определяемая с помощью распределения Ферми-Дирака:

$$n = 2\left(\frac{m}{h}\right)^3 \int f_0 d^3\mathbf{v} = 2\left(\frac{m}{h}\right)^3 \frac{4\pi \mathrm{v}_F^3}{3},$$

где h – постоянная Планка, v_F – скорость Ферми.

При записи кинетического уравнения Больцмана в виде (2) содержание закона Видемана-Франца соответствует приближению времени релаксации τ, когда доминируют объёмные и поверхностные столкновения. Такой режим рассеяния электронов реализуется при наличии значительного количества примесей.

При низких температурах, в случае, когда степень чистоты металла достаточно высока, существенными оказываются электрон-электронные столкновения.

Для учёта электрон-электронных столкновений запишем кинетическое уравнение (2) в следующем виде [8]:

$$-i\omega f_1 + v_x \frac{\partial f_1}{\partial x} + e v_z E \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} = -\frac{1}{\tau}\left(f_1 - \frac{3 g_0 m}{4\pi v_F^3} v_z \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \int v_z f_1 d^3\mathbf{v} \right), \qquad (4)$$

где g_0 – параметр $(0 \le g_0 \le 1)$, отвечающий за «проявление» закона Видемана-Франца [7]. Заметим, что при $g_0 = 0$ данный закон выполняется точно.

Подставим в уравнение (4) функцию

$$f\,(x,\mathbf{v}) = g(x,\mathbf{v})\,\delta(\varepsilon - \varepsilon\ \ )\exp\left(-i\,\omega\,t\right),$$

и получим новое уравнение

$$\nu g + v_x \frac{\partial g}{\partial x} - e\, v_z E_0 = -\frac{3 g_0 m}{4\pi v_F^3 \tau} v_z \int v_z\, g\, \delta(\varepsilon - \varepsilon_F)\, d^3\mathbf{v}, \qquad (5)$$

где $\nu = 1/\tau - i\omega$.

Решение уравнения (5) проведём с помощью моментного метода [7]:

$$g = a_1(x) v_z + a_2(x) v_z sign(v_x). \qquad (6)$$

С учётом (6) уравнение (5) может быть записано в виде:

$$\nu(a_1 v_z + a_2 v_z \mathrm{sign}(v_x)) + v_x v_z \frac{\partial a_1}{\partial x} + v_x v_z \mathrm{sign}(v_x) \frac{\partial a_2}{\partial x} - e\, v_z E_0 =$$

$$= -\frac{3 g_0 m}{4\pi v_F^3 \tau} v_z \int v_z\, (a_1 v_z + a_2 v_z sign(v_x))\, \delta(\varepsilon - \varepsilon_F)\, d^3\mathbf{v}. \qquad (7)$$

Для вычисления интеграла, стоящего в правой части уравнения (7), удобно перейти к цилиндрической системе координат ($v_\perp$, φ, v_z) в пространстве скоростей.

Учитывая свойства дельта-функции Дирака и связи

$$v_x = v_\perp \cos\varphi, \qquad v_\perp^2 + v_z^2 = v_F^2,$$

имеем:

$$\left(\nu + \frac{g_0}{\tau}\right) a_1 \mathbf{v}_z + \nu a_2 \mathbf{v}_z sign(\mathbf{v}_x) + \mathbf{v}_x \mathbf{v}_z \frac{\partial a_1}{\partial x} + \mathbf{v}_x \mathbf{v}_z sign(\mathbf{v}_x) \frac{\partial a_2}{\partial x} - e E_0 \mathbf{v}_z = 0. \qquad (8)$$

Умножим выражение (8) на проекцию скорости электронов v_z и проинтегрируем по всему пространству скоростей:

$$\left(\nu+\frac{g_0}{\tau}\right)a_1\int v_z^2 d^3\mathbf{v}+\nu a_2\int v_z^2 sign(v_x)d^3\mathbf{v}+\frac{\partial a_1}{\partial x}\int v_x v_z^2 d^3\mathbf{v}+$$

$$+\frac{\partial a_2}{\partial x}\int v_x\, v_z^2\, \mathrm{sign}(v_x)d^3\mathbf{v}-e\,E_0\int v_z^2\, d^3\mathbf{v}=0.$$

В результате приходим к уравнению:

$$\frac{4}{5}\left(\nu+\frac{g_0}{\tau}\right)a_1+\frac{\mathbf{v}_F}{4}\frac{\partial a_2}{\partial x}=\frac{4}{5}eE_0. \qquad (9)$$

Теперь умножим выражение (8) на $v_z\mathrm{sign}(v_x)$ и снова проинтегрируем по пространству скоростей:

$$\left(\nu+\frac{g_0}{\tau}\right)a_1\int v_z^2 sign(v_x)d^3\mathbf{v}+\nu a_2\int v_z^2 sign^2(v_x)d^3\mathbf{v}+\frac{\partial a_1}{\partial x}\int v_x v_z^2 sign(v_x)d^3\mathbf{v}+$$

$$+\frac{\partial a_2}{\partial x}\int v_x\, v_z^2\, \mathrm{sign}^2(v_x)d^3\mathbf{v}-e\,E_0\int v_z^2\,\mathrm{sign}(v_x)d^3\mathbf{v}=0.$$

Таким образом, приходим ещё к одному уравнению:

$$\frac{4}{5}\nu a_2+\frac{v_F}{4}\frac{\partial a_1}{\partial x}=0. \qquad (10)$$

Объединяя в систему выражения (9) и (10), получим:

$$\begin{cases}\dfrac{4}{5}\left(\nu+\dfrac{g_0}{\tau}\right)a_1+\dfrac{\mathbf{v}_F}{4}\dfrac{\partial a_2}{\partial x}=\dfrac{4}{5}eE_0\\[2ex] a_2=-\dfrac{5\mathbf{v}_F}{16\nu}\dfrac{\partial a_1}{\partial x}.\end{cases}$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial^2 a_1}{\partial x^2}-\frac{16^2\,\nu^2}{5^2\,v_F^2}\left(1+\frac{g_0}{\nu\tau}\right)a_1=-\frac{16^2\,\nu^2}{5^2\,v_F^2}\frac{e\,E_0}{\nu}$$

или

$$\frac{\partial^2 a_1}{\partial x^2}-\lambda^2 a_1=-\lambda^2\frac{e\,E_0}{\nu\beta^2}, \qquad (11)$$

где

$$\beta=\sqrt{1+\frac{g_0}{\nu\tau}}=\left|\nu\tau=1-i\omega\tau=1-i\Omega\frac{v_F\,\tau}{b}=1-i\frac{\Omega}{\Delta}=\frac{\Psi}{\Delta}\right|=\sqrt{1+\frac{\Delta}{\Psi}g_0},\ \ \lambda=\frac{16\nu\beta}{5\,v_F},$$

$\Psi = \Delta - i\Omega$ – безразмерная комплексная частота рассеяния электронов.

Моментный коэффициент $a_1(x)$ найдём, решая неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка (11):

$$a_1(x) = A_0 + C_1 \exp(\lambda x) + C_2 \exp(-\lambda x), \tag{12}$$

где $A_0 = \dfrac{eE_0}{\nu\beta^2}$; C_1, C_2 – константы интегрирования.

Тогда из (10) следует, что

$$a_2(x) = -\frac{5\mathrm{v}_F}{16\nu}\frac{\partial}{\partial x}\big(A_0 + C_1 \exp(\lambda x) + C_2 \exp(-\lambda x)\big) =$$

$$= -\frac{\beta}{\lambda}\big(\lambda C_1 \exp(\lambda x) - \lambda C_2 \exp(-\lambda x)\big) = \beta C_2 \exp(-\lambda x) - \beta C_1 \exp(\lambda x). \tag{13}$$

Подставив (12) и (13) в (6), найдём общий вид решения уравнения (5):

$$g = (A_0 + C_1 \exp(\lambda x) + C_2 \exp(-\lambda x))\mathrm{v}_z +$$

$$+(\beta C_2 \exp(-\lambda x) - \beta C_1 \exp(\lambda x))\mathrm{v}_z \operatorname{sign}(\mathrm{v}_x). \tag{14}$$

Применим граничные условия на верхней и нижней границах слоя для нахождения коэффициентов C_1 и C_2:

$$\begin{cases} g(v_x, x) = q_1 g(-v_x, x), \; v_x < 0 \\ g(v_x, x) = q_2 g(-v_x, x), \; v_x > 0, \end{cases}$$

где q_1 и q_2 – коэффициенты зеркальности его поверхностей.

С учётом (14), система граничных условий может быть представлена как:

$$\begin{cases} A_0 + C_1 \exp(\lambda b) + C_2 \exp(-\lambda b) + \beta C_1 \exp(\lambda b) - \beta C_2 \exp(-\lambda b) = \\ = q_1\left[A_0 + C_1 \exp(\lambda b) + C_2 \exp(-\lambda b) + \beta C_2 \exp(-\lambda b) - \beta C_1 \exp(\lambda b)\right] \\ A_0 + C_1 + C_2 + \beta C_2 - \beta C_1 = q_2\left[A_0 + C_1 + C_2 + \beta C_1 - \beta C_2\right] \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} A_0(1-q_1) + \exp(\lambda b)(1+\beta-q_1+\beta q_1)C_1 = \exp(-\lambda b)(\beta q_1 + q_1 + \beta - 1)C_2 \\ C_2 = \dfrac{A_0(1-q_2) + (1-\beta-q_2-\beta q_2)C_1}{q_2 - \beta q_2 - \beta - 1}. \end{cases}$$

Откуда

$$\begin{cases} C_1 = A_0 \dfrac{(1-q_1)(q_2-\beta q_2-\beta-1) - \exp(-\lambda b)(1-q_2)(\beta q_1+q_1+\beta-1)}{\exp(-\lambda b)(\beta q_1+q_1+\beta-1)(1-\beta-q_2-\beta q_2) - \exp(\lambda b)(1+\beta-q_1+\beta q_1)(q_2-\beta q_2-\beta-1)} \\ C_2 = A_0 \dfrac{(1-q_1)(1-\beta-q_2-\beta q_2) - \exp(\lambda b)(1-q_2)(1+\beta-q_1+\beta q_1)}{\exp(-\lambda b)(\beta q_1+q_1+\beta-1)(1-\beta-q_2-\beta q_2) - \exp(\lambda b)(1+\beta-q_1+\beta q_1)(q_2-\beta q_2-\beta-1)} \end{cases}$$

Введём новые обозначения:

$$D_1 = \frac{C_1}{A_0}, \quad D_2 = \frac{C_2}{A_0},$$

и запишем выражение (14) в следующем виде:

$$g = A_0[(1 + D_1 \exp(\lambda x) + D_2 \exp(-\lambda x))\mathrm{v}_z +$$

$$+ (\beta D_2 \exp(-\lambda x) - \beta D_1 \exp(\lambda x))\mathrm{v}_z \mathrm{sign}(\mathrm{v}_x)]. \tag{15}$$

Конкретизировав с помощью (15) вид функции $f_1(x,\mathbf{v})$, найдём проекцию плотности тока $\boldsymbol{j}$ внутри слоя на координатную ось Z. Применяя формулу (3), имеем:

$$j_z = \frac{ne}{m}\exp(-i\omega t)\, a_1(x).$$

Выражение для локальной электрической проводимости слоя σ получим как следствие закона Ома в дифференциальной форме:

$$\sigma = \frac{ne\, a_1(x)}{m E_0}.$$

Учитывая выражение (15), имеем

$$\sigma = \frac{ne A_0}{m E_0}\big(1 + D_1 \exp(\lambda x) + D_2 \exp(-\lambda x)\big) =$$

$$= \frac{ne^2}{m\nu\beta^2}\big(1 + D_1 \exp(\lambda x) + D_2 \exp(-\lambda x)\big) =$$

$$= \frac{ne^2\tau}{m\beta^2}\frac{\Delta}{\Psi}\big(1 + D_1 \exp(\lambda x) + D_2 \exp(-\lambda x)\big)$$

или

$$\sigma = \sigma_0 \frac{\Delta}{\beta^2\Psi}\big(1 + D_1 \exp(\lambda x) + D_2 \exp(-\lambda x)\big), \tag{16}$$

где

$$\lambda = \frac{16\nu\beta}{5\mathrm{v}_F} = \frac{16\nu\tau\beta}{5\mathrm{v}_F\,\tau} = \frac{16\beta}{5b}\Psi.$$

Введя безразмерную ширину слоя $\xi = x/b$, запишем выражение (16) для локальной проводимости в безразмерной форме:

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{\sigma_0} = \frac{\Delta}{\beta^2\Psi}\left(1 + D_1 \exp\left(\frac{16\Psi\beta}{5}\xi\right) + D_2 \exp\left(-\frac{16\Psi\beta}{5}\xi\right)\right). \tag{17}$$

Обсуждение результатов

В таблице 1 представлены результаты численного расчёта относительной погрешности модуля безразмерной удельной электрической проводимости тонкого металлического слоя (17) в зависимости от числового параметра g_0, который характеризует степень отклонения от закона Видемана-Франца ($\xi = 0{,}5$; $\Omega = 1$; $q_1 = q_2 = 0{,}5$). При этом безразмерная обратная длина свободного пробега электронов в слое Δ принимает различные значения ($\Delta_1 = 1$; $\Delta_2 = 2$; $\Delta_3 = 3$).

Анализ содержания столбцов таблицы позволяет сделать вывод о том, что по мере роста Δ, то есть отношения толщины слоя b к средней длине свободного пробега электронов Λ, наблюдается тенденция заметного увеличения относительной погрешности расчёта модуля проводимости, выполненного с применением закона Видемана-Франца, по отношению к аналогичному расчёту, выполненному кинетическим методом. Отмеченная закономерность объясняется всё более существенным вкладом в проводимость электрон-электронных столкновений, которые позволяет учесть кинетический метод расчёта, в связи с увеличением объёма металла.

Поскольку увеличение толщины слоя приводит к сильному отклонению от указанного закона и может достигать почти 100 %, возникает необходимость применения рассмотренной теории к непосредственному расчёту электрической проводимости тонких слоёв из достаточно чистых металлов при низких температурах в практических и технических приложениях, например, при промышленном изготовлении интегральных микросхем.

Таблица 1. Относительная погрешность модуля безразмерной удельной электрической проводимости тонкого металлического слоя с учётом отклонения от закона Видемана-Франца

g_0	$\Delta_1 = 1$	$\Delta_2 = 2$	$\Delta_3 = 3$
0	0 %	0 %	0 %
0,1	6,8 %	8,9 %	9,5 %
0,2	13,7 %	17,8 %	19 %
0,3	20,6 %	26,7 %	28,5 %
0,4	27,5 %	35,7 %	38 %
0,5	34,4 %	44,6 %	47,6 %
0,6	41,4 %	53,6 %	57,1 %
0,7	48,4 %	62,6 %	66,6 %
0,8	55,3 %	71,6 %	76,1 %
0,9	62,4 %	80,6 %	85,7 %
1,0	69,4 %	89,5 %	95,2 %

Статья поступила в редакцию 01.04.2019 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Sondheimer E. H. The influence of a transverse magnetic field on the conductivity of thin metallic films // Physical Review. 1950. Vol. 80. Iss. 3. P. 401–406.

2. Савенко О. В. Расчет высокочастотной электропроводности и постоянной Холла для тонкой металлической пленки // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2016. № 4. С. 43–55.
3. Расчёт высокочастотной электропроводности тонкого полупроводникового слоя в случае различных коэффициентов зеркальности его поверхностей / Кузнецова И. А., Романов Д. Н., Савенко О. В., Юшканов А. А. // Микроэлектроника. 2017. Т. 46. № 4. С. 275–283.
4. Кузнецова И. А., Савенко О. В., Юшканов А. А. Влияние граничных условий на электрические и гальваномагнитные свойства тонкой металлической пленки // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. 2017. № 11. С. 52–60.
5. Завитаев Э. В., Русаков О. В., Чухлеб Е. П. Магнитное поле тонкого металлического слоя // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2018. № 1. С. 63–72.
6. Моисеев И. О., Юшканов А. А., Яламов Ю. И. Использование двухпараметрического кинетического уравнения для вычисления электромагнитного поглощения мелкой металлической частицей // Оптика и спектроскопия. 2006. Т. 101. № 5. С. 846–850.
7. Завитаев Э. В., Русаков О. В., Юшканов А. А. К вопросу об отклонении от закона Видемана-Франца в тонкой цилиндрической проволоке из металла // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2012. № 2. С. 122–131.
8. De Gennaro S., Rettori A. The low-temperature electrical resistivity of potassium size effects and the role of normal electron-electron scattering // Journal of Physics F: Metal Physics. 1984. Vol. 14. No. 12. P. 237–242.

REFERENCES

1. Sondheimer E. H. The influence of a transverse magnetic field on the conductivity of thin metallic films. In: *Physical Review*, 1950, vol. 80, iss. 3, pp. 401–406.
2. Savenko O. V. [Calculation of high-frequency conductivity and Hall constant of a thin metal film]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-Matematika* [Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], 2016, no. 4, pp. 43–55.
3. Kuznetsova I. A., Romanov D. N., Savenko O. V., Yushkanov A. A. [Calculating the high-frequency electrical conductivity of a thin semiconductor film for different specular reflection coefficients of its surface]. In: *Mikroelektronika* [Russian Microelectronics], 2017, vol. 46, no. 4, pp. 275–283.
4. Kuznetsova I. A., Savenko O. V., Yushkanov A. A. [Influence of boundary conditions on the electric and galvanomagnetic properties of a thin metal film]. In: *Poverkhnost'. Rentgenovskie, sinkhrotronnye i neitronnye issledovaniya* [Journal of Surface Investigation. X-ray, Synchrotron and Neutron Techniques], 2017, no. 11, pp. 52–60.
5. Zavitaev E. V., Rusakov O. V., Chukhleb E. P. [Magnetic field of a thin metal layer]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-Matematika* [Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], 2018, no. 1, pp. 63–72.
6. Moiseev I. O., Yushkanov A. A., Yalamov Yu. I. [Calculation of the electromagnetic absorption by a small metal particle with a two-parameter kinetic equation]. In: *Optika i spektroskopiya* [Optics and Spectroscopy], 2006, vol. 101, no 5, pp. 846–850.
7. Zavitaev E. V., Rusakov O. V., Yushkanov A. A. [To the problem of deviation from the Wiedemann–Franz law in a thin cylindrical metal wire]. In: *Vestnik Moskovskogo*

gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-Matematika [Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], 2012, no. 2, pp. 122–131.
8. De Gennaro S., Rettori A. The low-temperature electrical resistivity of potassium size effects and the role of normal electron-electron scattering. In: *Journal of Physics F: Metal Physics*,1984, vol. 14, iss. 12, pp. 237–242.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Завитаев Эдуард Валерьевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики и физики Государственного гуманитарно-технологического университета;
e-mail: eduardzavitaev@yandex.ru;

Русаков Олег Владимирович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и физики Государственного гуманитарно-технологического университета;
e-mail: olegrusmail@mail.ru;

Чухлеб Екатерина Петровна – педагог дополнительного образования Центра дополнительного образования «Малая академия наук Импульс»;
e-mail: e.chuhleb@mail.ru.

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Eduard V. Zavitaev – Doctor in physical and mathematical sciences, professor at the Department of Mathematics and Physics, State University of Humanities and Technologies;
e-mail: eduardzavitaev@yandex.ru;

Oleg V. Rusakov – PhD in physical and mathematical sciences, associate professor at the Department of Mathematics and Physics, State University of Humanities and Technologies;
e-mail: olegrusmail@mail.ru;

Ekaterina P. Chukhleb – teacher of the additional education at the Center of Additional Education "Junior Academy of Sciences Impulse";
e-mail: e.chuhleb@mail.ru.

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Завитаев Э. В., Русаков О. В., Чухлеб Е. П. Локальная проводимость субмикронного металлического слоя с учётом поправки к закону Видемана–Франца // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2019. № 2. С. 74–82.
DOI: 10.18384/2310-7251-2019-2-74-82

FOR CITATION

Zavitaev E. V, Rusakov O. V., Chukhleb E. P. Local conductivity of a submicron metal layer with allowance for a correction to the Wiedemann–Franz law. In: *Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*. 2019. no. 2. pp. 74–82.
DOI: 10.18384/2310-7251-2019-2-74-82

УДК 537.632
DOI: 10.18384-2310-7251-2019-2-83-95

ДИНАМИКА НЕЛИНЕЙНОГО ТУННЕЛИРОВАНИЯ БОЗЕ-КОНДЕНСИРОВАННЫХ АТОМОВ В ДВУХЪЯМНОЙ ЛОВУШКЕ

Васильева О. Ф., Зинган А. П.
Приднестровский государственный университет имени Т. Г. Шевченко
3300, г. Тирасполь, ул. 25 Октября, д. 107, Молдова

Аннотация. Изучена динамика туннелирования бозе–конденсированных атомов в двухъямной ловушке с учётом процессов упругого межатомного взаимодействия в каждой яме и нелинейного парного туннелирования через барьер между ямами. Решения полученной системы нелинейных эволюционных уравнений, описывающих нестационарное туннелирование, показывают, что существуют как периодический, так и апериодический режимы эволюции разности населенностей ям. Особенности временной эволюции системы определяются начальной разностью населенностей, начальной разностью фаз и параметром нелинейности системы. Указано на возможность существования явления квантового самозахвата и фазового управления динамикой системы.

Ключевые слова: бозе-эйнштейновская конденсация, квантовый самозахват, нелинейное туннелирование, фазовый контроль, периодический режим, апериодический режим.

DYNAMICS OF NONLINEAR TUNNELING OF BOSE-CONDENSED ATOMS IN A DOUBLE-WELL TRAP

O. Vasilieva, A. Zingan
Pridnestrovian State University
ul. 25 Oktyabrya 107, 3300 Tiraspol, Moldova

Abstract. The dynamics of tunneling of Bose-condensed atoms in a double-well trap is studied with allowance for the processes of elastic interatomic interaction in each well and nonlinear pair tunneling through the barrier between the wells. Solutions of the resulting system of nonlinear evolution equations describing nonstationary tunneling show that there are both periodic and aperiodic modes of evolution of the difference between the populations of the wells. The features of the time evolution of the system are determined by the initial population difference, the initial phase difference, and the nonlinearity parameter of the system. The possibility of the existence of quantum self-trapping and phase control of the system dynamics is indicated.

Keywords: Bose–Einstein condensation, quantum self-trapping, nonlinear tunneling, phase control, periodic mode, aperiodic mode.

Введение

За последние несколько десятилетий динамика ультрахолодных атомов в двухъямной ловушке привлекает к себе значительное внимание [1; 2]. Модель двойной квантовой ямы играет ключевую роль в выявлении многочисленных интересных явлений благодаря экспериментальной доступности и точной управляемости. Многие свойства были предсказаны теоретически и наблюдались экспериментально в бозе-эйнштейновских конденсатах атомов в двойных квантовых ямах, начиная от квантового коллапса, эффекта Джосефсона, квантового самозахвата, квантового хаоса, спиновой корреляции [3–5]. В [6] рассмотрен атомный конденсат Бозе-Эйнштейна в симметричном одномерном двухъямном потенциале в четырёхмодовом приближении. Получена богатая динамика осцилляций Раби, смешанный режим Джозефсона-Раби, самозахват. Исследована возможность управления динамикой атомов в возбужденном состоянии, управляя начальными населенностями атомов. В [7] теоретически изучено влияние ловушек и межатомных взаимодействий на Джозефсоновские колебания и квантовый самозахват для бозе-эйнштейновского конденсата, заключенного в ловушку с симметричной двойной квантовой ямой. Рассмотрены три типа модельных потенциалов взаимодействия. Показано, что, изменяя соотношения между осевыми и радиальными размерами ловушек, можно вызвать переход от Джозефсоновских колебаний к квантовому самозахвату. Для дальнодействующих дипольных межатомных взаимодействий изучен переход от осцилляций Раби к Джозефсоновским колебаниям.

Расширенная модель Бозе–Хаббарда для двухъямного потенциала с парным туннелированием изучается как с помощью точной диагонализации, так и теории среднего поля. В [8] теоретически исследовано нелинейное туннелирование двух слабо связанных бозе-эйнштейновских конденсатов в двухъямной ловушке в режиме сильного взаимодействия. Показано, что сильное взаимодействие приводит к значительным поправкам энергетического спектра и резкому изменению основного состояния, рассматриваемого как квантовый фазовый переход. В [9] обсуждалось парное туннелирование бозе-конденсированных атомов в двухъямной ловушке на основе модели Бозе-Хаббарда. В [10] предложен гамильтониан ультрахолодных атомов в оптических решётках, включающих двухчастичное взаимодействие ближайших соседей, которое сводится к модели Бозе-Хаббарда в пределе слабого взаимодействия. Было показано, что корреляционное туннелирование является результатом парного туннелирования, которое включает в себя взаимодействие между частицами в соседних ямах. В [11] была рассмотрена динамика бозе-конденсированных атомов в двухъямном потенциале при учёте парного туннелирования. Для относительно слабых отталкивающих межатомных взаимодействий динамика системы с максимальной начальной разностью населенностей развивается от Джозефсоновских колебаний до квантового самозахвата при увеличении парного туннелирования, в то время как при сильном отталкивании сильное парное туннелирование подавляет квантовый самозахват. Показано, что сильное парное туннелирование приводит к разрушению Джозефсоновских осцилляций и квантового самозахвата, и система, в конечном счёте, входит в режим с нулевой разностью населенностей атомов в ямах. В [12] было показано, что сильное парное туннелирование влияет на структуру энергетического спектра стационарных состояний. Получено, что в зависимости от начальной населенности атомов возникают различные колебательные режимы. Максимальная амплитуда колебаний связана со значением фазы Пайерса, чего не наблюдалось при исследовании динамики бозе-конденсата без учёта парного туннелирования. В [13] были получены два вида эллиптических решений через функции Якоби и семейство рациональных решений атомно-молекулярных бозе-эйнштейновских конденсатов с потенциалом захвата и пространственно-модулированной нелинейностью. Актуальной темой стало изучение динамики туннелирования в режиме сильного взаимодействия как теоретически, так и экспериментально [14; 15], поскольку теория туннелирования взаимодействующей системы многих тел всё ещё отсутствует. В [15] было обнаружено, что динамика туннелирования атомов в одномерной двойной яме эволюционирует от осцилляций Раби до парного туннелирования, при уменьшении силы взаимодействия.

В [16; 17] была теоретически изучена динамика туннелирования бозе-конденсированных атомов в двухъямной ловушке при одновременном учёте процессов линейного одноатомного и нелинейного парного туннелирования. Показано, что в зависимости от начальной разности фаз возникают как периодический, так и апериодический режимы эволюции системы. Доказана возможность фазового управления динамикой системы.

В [3; 8; 11; 12; 14; 16–18] отсутствуют результаты исследований временной эволюции атомной системы при одновременном учёте процессов линейного туннелирования и нелинейного туннелирования (упругого межатомного взаимодействия атомов в каждой яме, коррелированного двухатомного туннелирования и стимулированного атомного туннелирования), поэтому исследование особенностей временной эволюции системы при одновременном учёте обоих механизмов туннелирования является актуальной задачей.

Результаты и обсуждение

Изучим явление туннелирования бозе-конденсированных атомов в симметричной двухъямной ловушке между идентичными ямами 1 и 2. Считаем, что ямы разделены потенциальным барьером, который допускает возможность туннелирования атомов из одной ямы в другую. Цель этого исследования состоит в изучении роли различных механизмов нелинейности в процессе туннелирования. Согласно [3; 8], гамильтониан взаимодействия имеет вид:

$$H=-\hbar\kappa\left(\hat{a}_1^+\hat{a}_2+\hat{a}_2^+\hat{a}_1\right)+\hbar\nu\left(\hat{a}_1^+\hat{a}_1^+\hat{a}_1\hat{a}_1+\hat{a}_2^+\hat{a}_2^+\hat{a}_2\hat{a}_2\right)+\hbar\mu\left(\hat{a}_1^+\hat{a}_1^+\hat{a}_2\hat{a}_2+\hat{a}_2^+\hat{a}_2^+\hat{a}_1\hat{a}_1\right)+$$

$$+\hbar\lambda\left(\hat{a}_1^+\hat{a}_1^+\hat{a}_1\hat{a}_2+\hat{a}_2^+\hat{a}_1^+\hat{a}_1\hat{a}_1+\hat{a}_1^+\hat{a}_2^+\hat{a}_2\hat{a}_2+\hat{a}_2^+\hat{a}_2^+\hat{a}_2\hat{a}_1\right),\qquad(1)$$

где $\hat{a}_i\,(i=1,2)$ – оператор уничтожения атома в i-ой яме, κ – постоянная линейного процесса туннелирования, ν – постоянная упругого межатомного взаимодействия в каждой яме, μ – постоянная коррелированного двухатомного туннелирования, λ – постоянная стимулированного атомного туннелирования. Используя гамильтониан (1), легко получить систему гайзенберговских эволюционных уравнений для операторов $\hat{a}_1$ и $\hat{a}_2$. Вводя далее в рассмотрение плотности атомов $n_1 = |a_1|^2$, $n_2 = |a_2|^2$, разность населенностей $n = n_1 - n_2$ и полную плотность атомов $N_0 = n_1 + n_2$ в ямах, а также величины $Q = i(a_1^* a_2 - a_2^* a_1)$ и $R = a_1^* a_2 + a_2^* a_1$, получаем следующую замкнутую систему нелинейных дифференциальных уравнений для функций n, Q и R:

$$\dot{n} = -2\left(\kappa + \lambda N_0 + 2\mu R\right)Q,$$

$$\dot{Q} = 2n\left(\kappa + \lambda N_0 + \left(\mu - \nu\right)R\right),$$

$$\dot{R} = 2\left(\mu + \nu\right)nQ. \tag{2}$$

Начальные условия для введённых функций можно записать в виде:

$$n_{|t=0} = n_0, \quad Q_{|t=0} \equiv Q_0 = 2\sqrt{N_0^2 - n_0^2}\,\sin\varphi_0, \quad R_{|t=0} \equiv R_0 = 2\sqrt{N_0^2 - n_0^2}\,\cos\varphi_0, \tag{3}$$

где φ_0 – начальная разность фаз. Введём далее обобщённую константу туннелирования $\tilde{\kappa}$ соотношением: $\tilde{\kappa} = \kappa + \lambda N_0$.

Используя систему нелинейных дифференциальных уравнений (2) получим два независимых интеграла движения:

$$n^2 = n_0^2 + \frac{2\mu}{\mu+\nu}R_0\left(R_0 + \frac{\tilde{\kappa}}{\mu}\right) - \frac{2\mu}{\mu+\nu}R\left(R + \frac{\tilde{\kappa}}{\mu}\right), \tag{4}$$

$$Q^2 = N_0^2 - n_0^2 - \frac{2\mu}{\mu+\nu}R_0\left(R_0 + \frac{\tilde{\kappa}}{\mu}\right) + R\left(\frac{\mu-\nu}{\mu+\nu}R + \frac{2\tilde{\kappa}}{\mu+\nu}\right). \tag{5}$$

Далее представим основные результаты исследования динамики системы для физически наиболее интересного случая, когда постоянная упругого межатомного взаимодействия ν и постоянная корреляционного туннелирования μ одинаковы ($\mu = \nu$).

Введём нормированные переменные:

$$n = N_0 z, \quad R = N_0 y, \quad Q = N_0 q, \quad \tau = \tilde{\kappa} t, \quad \beta = \frac{n_0}{N_0}, \quad s = \frac{\mu N_0}{\tilde{\kappa}}. \tag{6}$$

Тогда основные уравнения и интегралы движения принимают вид:

$$\frac{dz}{d\tau} = -2\left(1 + 2sy\right)q, \quad \frac{dq}{d\tau} = 2z, \quad \frac{dy}{d\tau} = 4szq \tag{7}$$

$$z^2 = \left(y_+ - y\right)\left(y - y_-\right), \quad q^2 = \left(y - y_1\right)/s, \tag{8}$$

где

$$y_\pm = -\frac{1}{2s} \pm \sqrt{\left(y_0 + \frac{1}{2s}\right)^2 + \beta^2}, \quad y_1 = y_0 - sq_0^2, \tag{9}$$

а $y_0 = \sqrt{1-\beta^2}\,\cos\varphi_0, q_0 = \sqrt{1-\beta^2}\,\sin\varphi_0$. Из (7) и (8) можно получить нелинейное дифференциальное уравнение, описывающее эволюцию функции $y(\tau)$:

$$\frac{dy}{d\tau} = \pm 4\sqrt{s}\sqrt{(y_+ - y)(y - y_-)(y - y_1)}, \tag{10}$$

Используя решение этого уравнения и первый интеграл движения из (8), можно найти функцию $z(\tau)$. Из (10) видно, что поведение функции $y(\tau)$ существенно определяется соотношениями между корнями y_+, y_- и y_1.

На рисунке 1 представлены графики корней:

$$y_\pm = -\frac{1}{2s} \pm \sqrt{\left(y_0 + \frac{1}{2s}\right)^2 + \beta^2} \;\text{ и }\; y_1 = y_0 - sq_0^2.$$

Видно, что при параметре нелинейности $s = 0{,}5$ корень y_- монотонно увеличивается при увеличении начальной разности фаз, а корни y_+ и y_1 монотонно уменьшаются (рис. 1 a). При $s = 0{,}7$ наблюдается вырождение двух наименьших корней $y_- = y_1$ (рис. 1 b). Вырождение двух наименьших корней нашего уравнения приводит к возникновению апериодического режима эволюции системы. При $s = 0{,}9$ наблюдается двукратное вырождение двух наименьших корней $y_- = y_1$ (рис. 1 c).

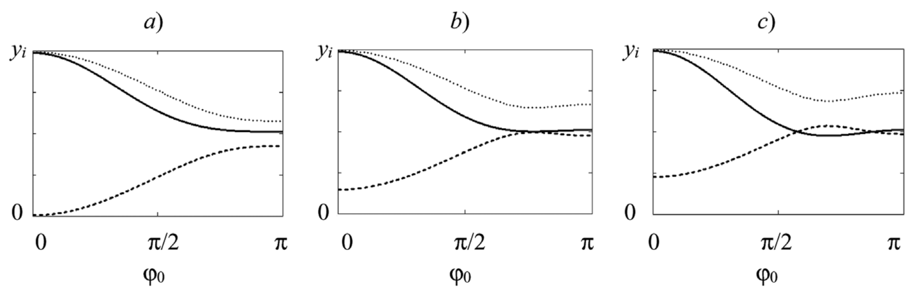

Рис. 1. Корни y_-, y_+ и y_1 уравнения (8) в зависимости от начальной разности фаз φ_0 при фиксированных значениях нормированной начальной разности населенностей атомов в ямах $\beta = 0{,}3$ и параметра нелинейности s, равных: a) 0,5, b) 0,7 и c) 0,9.

Представим решения для различных случаев.

1) $y_+ > y_1 > y_-$. Эти неравенства выполняются при условии, что $\left(y_0 - sq_0^2\right)^2 < 1$.

Решение дифференциального уравнения (10), описывающего эволюцию функции $y(\tau)$ в этом случае имеет вид:

$$y = y_- + \frac{y_1 - y_-}{dn^2\left(2\sqrt{s(y_+ - y_-)}\tau \pm F(\psi_0, k)\right)}, \tag{11}$$

где $dn(x)$ – эллиптическая функция Якоби с модулем k, $F(\psi_0, k)$ – неполный эллиптический интеграл первого рода с параметром ψ_0 и модулем k[1], которые определяются выражениями:

[1] Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1971. С. 751–754.

$$\psi_0 = \arcsin\sqrt{\frac{y_+ - y_-}{y_+ - y_1}\frac{y_0 - y_1}{y_0 - y_-}}, \qquad k^2 = \frac{y_+ - y_1}{y_+ - y_-}. \tag{12}$$

Используя (11) и (8), для нормированной разности населенностей $z(\tau)$ получаем выражение:

$$z = \sqrt{(y_1 - y_-)(y_+ - y_1)}\frac{cn\left(2\sqrt{s(y_+ - y_-)}\tau \pm F(\psi_0, k)\right)}{dn^2\left(2\sqrt{s(y_+ - y_-)}\tau \pm F(\psi_0, k)\right)}. \tag{13}$$

Отсюда видно, что разность населенностей периодически изменяется во времени с периодом T и амплитудой A, равными:

$$T = 2K(k)\Big/\sqrt{s(y_+ - y_-)}, \qquad A = \sqrt{1 - \left(y_0 - sq_0^2\right)^2}, \tag{14}$$

где $K(k)$ – полный эллиптический интеграл первого рода с модулем k^2.

2) $y_+ > y_- > y_1$. В этом случае параметры системы удовлетворяют неравенству $\left(y_0 - sq_0^2\right)^2 > 1$. Решение для разности населенностей имеет вид:

$$z = (y_+ - y_-)\sqrt{\frac{y_- - y_1}{y_+ - y_1}}\frac{sn\left(x\tau \pm F(\psi_0, k)\right)cn\left(x\tau \pm F(\psi_0, k)\right)}{dn^2\left(x\tau \pm F(\psi_0, k)\right)}, \tag{15}$$

где

$$x = 2\sqrt{s(y_+ - y_1)}, \qquad \psi_0 = \arcsin\sqrt{\frac{y_+ - y_1}{y_+ - y_-}\frac{y_0 - y_-}{y_0 - y_1}}, \qquad k^2 = \frac{y_+ - y_-}{y_+ - y_1}, \tag{16}$$

$sn(x)$, $cn(x)$ и $dn(x)$ – эллиптические функции Якоби[3].

В этом случае также имеет место периодическая эволюция разности населенностей атомов с периодом T, равным

$$T = 2K(k)\Big/\sqrt{s(y_+ - y_1)}. \tag{17}$$

3) $y_+ > y_- = y_1$. В этом случае $\left(y_0 - sq_0^2\right)^2 = 1$.

Решение для функции $z(\tau)$ имеет вид:

$$z = (y_+ - y_-)\frac{sh\left(2\sqrt{s(y_+ - y_-)}\tau \pm arch\sqrt{\frac{y_+ - y_-}{y_0 - y_-}}\right)}{ch^2\left(2\sqrt{s(y_+ - y_-)}\tau \pm arch\sqrt{\frac{y_+ - y_-}{y_0 - y_-}}\right)}. \tag{18}$$

---

[2] Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1971. С. 751–754.

[3] Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1971. С. 751–754.

Видно, что особенности эволюции определяются параметрами системы. При малых значениях параметра нелинейности s наблюдается периодическая эволюция разности населенностей атомов в ямах (рис. 2). Амплитуда и период колебаний разности населенностей атомов в ямах существенно зависят от параметра нелинейности s, нормированной начальной разности населенностей атомов в ямах β и начальной разности фаз φ_0. С ростом s наряду с периодической эволюцией возникают также участки апериодической эволюции (рис. 2), при которой разность населенностей эволюционирует к нулевому значению. Это свидетельствует о том, что асимптотически атомы одинаково заселяют обе ямы, чем эволюция и заканчивается.

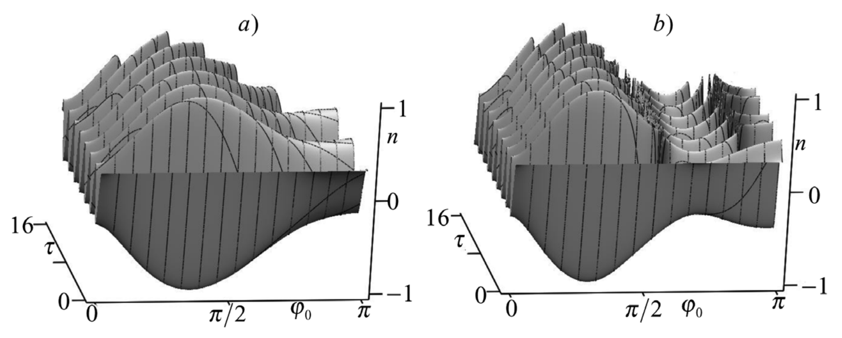

Рис. 2. Эволюция разности населенностей n в зависимости от времени и начальной разности фаз φ_0 при фиксированных значениях нормированной начальной разности населенностей атомов в ямах $\beta = 0,3$ и параметра нелинейности s, равных: *a)* 0,5, *b)* 0,9. Здесь $\tau = \tilde{\kappa} t$.

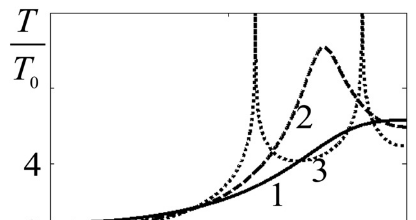

Рис. 3. Период T колебаний разности населенностей n в зависимости от начальной разности фаз φ_0 и фиксированных значениях нормированной начальной разности населенностей атомов в ямах $\beta = 0,3$ и нескольких значениях параметра нелинейности s, равных: 1 (0,5), 2 (0,7), 3 (0,9). Здесь $T_0 = \pi/\tilde{\kappa}$.

Период колебаний разности населенностей атомов в ямах при $s = 0,5$ монотонно растёт с ростом начальной разности фаз φ_0, тогда как при $s = 0,9$ период колебаний дважды обращается в бесконечность при увеличении φ_0 (рис. 2, рис. 3). Следовательно, периодический режим эволюции дважды срывается и дважды устанавливается апериодический режим эволюции (рис. 2*b*). При переходе через апериодический режим отсутствует резкое изменение амплитуды колебаний, что свидетельствует об отсутствии ярко выраженного эффекта самозахвата. Из рис. 3 видно, что период колебаний монотонно растёт с ростом начальной разности фаз φ_0 при параметре нелинейности s = 0,5, имеет максимум при s = 0,7, который далее с ростом *s* растёт и сужается и при определённом значении *s* обращается в бесконечность, что свидетельствует об апериодической эволюции. При дальнейшем увеличении *s* расходимость у функции $T(\varphi_0)$ расщепляется на две, расстояние между которыми увеличивается с увеличением параметра *s*. Величина параметра нелинейности *s*, при котором период колебаний *T* обращается в бесконечность, определяется начальной разностью фаз φ_0 и нормированной начальной разностью населенностью атомов в ямах β и определяется следующим соотношением:

$$s=\left(1+\sqrt{1-\beta^2}\cos\varphi_0\right)\Big/\left(\left(1-\beta^2\right)\sin^2\varphi_0\right).$$

При $\varphi_0 = 0$ ($k\pi$, $k = 0, 1, 2, \ldots$) бифуркационное значение *s* обращается в бесконечность, то есть апериодический режим при $\varphi_0 = 0$, либо $\varphi_0 = \pi$, невозможен (рис. 4), невозможен случай равнозаселения обеих ям. Однако, при начальной разности фаз равной $\varphi_0 = \pi$, эволюция атомов в пределах одного периода является модулированной в зависимости от времени (рис. 4 *b*). При нормированной начальной разности населенностей атомов в ямах равной $\beta = 0{,}3$ период колебаний монотонно возрастает с ростом параметра нелинейности *s*, далее достигает максимума, а затем происходит монотонное уменьшение периода колебаний. С увеличением нормированной начальной разности населенностей атомов в ямах β максимальное значение периода колебаний уменьшается. При достижении $\beta = 1$ (в начальный момент времени заселена только одна из ям) период колебаний монотонно уменьшается с ростом параметра нелинейности *s* (рис. 4 *c*).

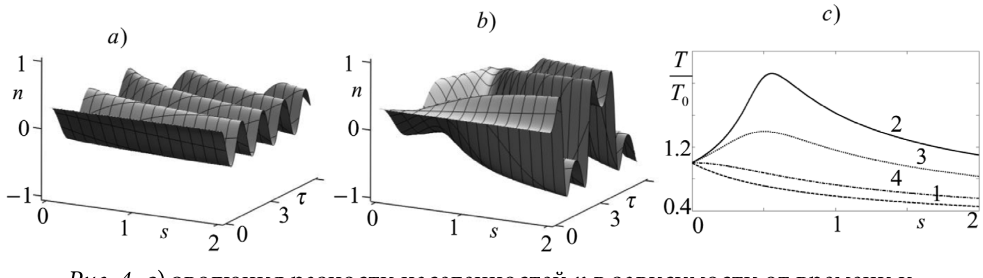

Рис. 4. a) эволюция разности населенностей *n* в зависимости от времени и параметра нелинейности *s* при фиксированных значениях нормированной разности населенностей атомов в ямах $\beta = 0{,}3$ и начальной разности фаз $\varphi_0 = 0$;
b) эволюция разности населенностей *n* в зависимости от времени и параметра нелинейности *s* при $\beta = 0{,}3$ и $\varphi_0 = \pi$;
c) период *T* колебаний разности населенностей *n* в зависимости от параметра нелинейности *s* и различных значениях нормированной разности населенностей атомов в ямах β и нескольких значениях начальной разности фаз φ_0, равных:
1 ($\beta = 0{,}3$, $\varphi_0 = 0$), 2 ($\beta = 0{,}3$, $\varphi_0 = \pi$), 3 ($\beta = 0{,}6$, $\varphi_0 = \pi$), 4 ($\beta = 1$, $\varphi_0 = \pi$).
Здесь $\tau = \tilde{\kappa}t,\ T_0 = \pi/\tilde{\kappa}$.

При начальной разности фаз равной $\varphi_0 = \pi/2$ имеются наиболее удовлетворительные условия для возникновения бифуркации, при котором период колебаний обращается в бесконечность. На рис. 5*a* представлена эволюция разности населенностей от времени при различных значениях параметра нелинейности *s* и фиксированном значении начальной разности фаз $\varphi_0 = \pi/2$.

Видно, что имеется только одна бифуркация изменения характера временной эволюции с переходом через апериодический режим. При малых *s* период (и амплитуда) колебаний велики по сравнению с периодом и амплитудой при больших значениях параметра *s*. Эта особенность коррелирует с аналогичной особенностью, которая возникает при учёте только упругих межатомных взаимодействий [18] и свидетельствует о наступлении явления самозахвата. Что касается периода колебаний, то из рис. 5*b* видно, что он сложным образом зависит от параметра нелинейности *s* и начальной разности фаз φ_0. Однако изменение параметра *s* приводит только к одной бифуркации при определённых значениях *s* и φ_0.

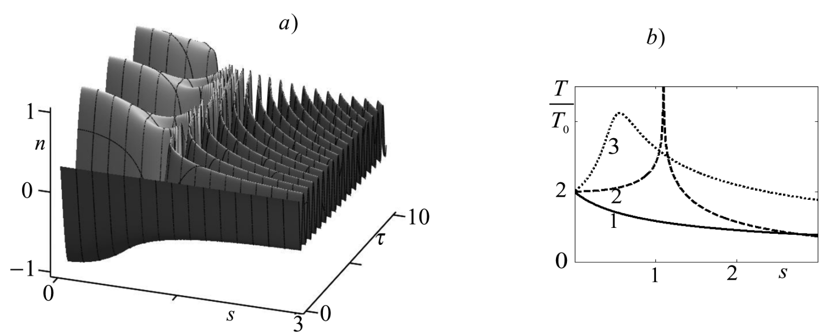

Рис. 5. a) эволюция разности населенностей *n* в зависимости от времени и параметра нелинейности *s* при фиксированных значениях нормированной разности населенностей атомов в ямах $\beta = 0{,}3$ и начальной разности фаз $\varphi_0 = \pi/2$;
b) период *T* колебаний разности населенностей *n* в зависимости от параметра нелинейности *s* и фиксированных значениях нормированной разности населенностей атомов в ямах $\beta = 0{,}3$ и нескольких значениях начальной разности фаз φ_0, равных: 1 (0), 2 ($\pi/2$), 3 (π). Здесь $\tau = \tilde{\kappa}t$, $T_0 = \pi/\tilde{\kappa}$.

Выводы

Из представленных результатов следует, что при учёте упругого межатомного взаимодействия, корреляционного и стимулированного туннелирования характер временной эволюции атомов в ямах может существенно измениться по сравнению с простым случаем, когда в качестве нелинейности рассматривается только лишь упругое межатомное взаимодействие. При равенстве постоянной упругого межатомного взаимодействия и постоянной корреляционного туннелирования, могут возникнуть бифуркационные переходы от периодического к апериодическому режиму эволюции при изменении параметров системы. При малых значениях параметра нелинейности *s*, т. е. когда упругое межатомное взаимодействие и корреляционное туннелирование намного меньше, чем стимулированное туннелирование, наблюдается периодический режим эволюции. При увеличении постоянной упругого взаимодействия и корреляционного туннеливания при начальной разности фаз $\varphi_0 \neq k\pi$ ($k = 0, 1, 2 ...$) возникает апериодический режим эволюции, т. е. процесс при котором ямы оказываются равнозаселёнными, чем эволюция и завершается. Что касается стимулированного туннелирования, то его учет приводит только к монотонному, линейному росту эффективного коэффициента туннелирования с ростом полного числа атомов в системе.

Статья поступила в редакцию 19.04.2019 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Leggett A. J. Bose–Einstein condensation in the alkali gases: Some fundamental concepts // Reviews of Modern Physics. 2001. Vol. 73. Iss. 2. P. 307–356.
2. Ueda M. Fundamentals and New Frontiers of Bose-Einstein Condensation. Singapore: Word Scientific, 2010. 368 p.
3. Ananikian D., Bergeman T. Erratum: Gross–Pitaevskii equation for Bose particles in a double well potential: Two mode models and beyond // Physical Review A. 2006. Vol. 73. Iss. 1. P. 013604.
4. Carvalho D. W. S., Foerster A., Gusmao M. A. Ground states of spin-1 bosons in asymmetric double wells // Physical Review A. 2015. Vol. 91. Iss. 3. P. 033608.
5. Wen L. H., Li J. H. Tunneling dynamics between two-component Bose–Einstein condensates // Physics Letters A. 2007. Vol. 369. Iss. 4. P. 307–311.
6. Tunneling, self-trapping, and manipulation of higher modes of a Bose-Einstein condensate in a double well / Gillet J., Garcia-March M. A., Busch Th., Sols F. // Physical Review A. 2014. Vol. 89. Iss. 2. P. 023614.
7. The effects of trap-confinement and interatomic interactions on Josephson effects and macroscopic quantum self-trapping for a Bose–Einstein condensate / Saha A. K., Adhikary K., Mal S., Dastidar K. R., Deb B. [Электронный ресурс] // arXiv : [сайт]. URL: https://arxiv.org/abs/1903.07417 (дата обращения: 02.03.2019).
8. Liu J.-L., Liang J.-Q. Atom-pair tunnelling-induced quantum phase transition and scaling behaviour of fidelity susceptibility in the extended boson Josephson-junction model // Journal of Physics. B, Atomic, Molecular and Optical Physics. 2011. Vol. 44. No. 2. P. 025101.
9. Zhu Q., Zhang Q., Wu B. Extended two-site Bose–Hubbard model with pair tunneling: spontaneous symmetry breaking, effective ground state and fragmentation // Journal of Physics. B, Atomic, Molecular and Optical Physics. 2015. Vol. 48. No. 4. P. 045301.
10. Atom-pair tunneling and quantum phase transition in the strong-interaction regime / Liang J.-Q., Liu J.-L., Li W. D., Li Z. J. // Physical Review A. 2009. Vol. 79. Iss. 3. P. 033617.
11. Stationary states and quantum quench dynamics of Bose–Einstein condensates in a double-well potential / Linhua Wen, Qizhong Zhu, Tianfu Xu, Xili Jing, Chengshi Liu [Электронный ресурс] // arXiv : [сайт]. URL: https://arxiv.org/abs/1507.00786 (дата обращения: 02.03.2019).
12. Stationary states and quantum quench dynamics of Bose–Einstein condensates in an Abelian-gauge double-well potential / Linhua Wen, Qizhong Zhu, Tianfu Xu, Xili Jing, Chengshi Liu [Электронный ресурс]. URL: https://www.researchgate.net/profile/Linghua_Wen/publication/279808835_Stationary_states_and_quantum_quench_

dynamics_of_Bose-Einstein_condensates_in_an_Abelian-gauge_double-well_potential/links/564fce7608ae1ef9296ecb29/Stationary-states-and-quantum-quench-dynamics-of-Bose-Einstein-condensates-in-an-Abelian-gauge-double-well-potential.pdf?origin=publication_detail (дата обращения: 02.03.2019).
13. Localized spatially nonlinear matter waves in atomic-molecular Bose–Einstein condensates with space-modulated nonlinearity / Yao Yu-Qin, Li Ji, Han Wei, Wang Deng-Shan, Liu Wu-Ming [Электронный ресурс] // arXiv : [сайт]. URL: https://arxiv.org/abs/1606.07348 (дата обращения: 02.03.2019).
14. Direct observation of second-order atom tunneling / Fölling S., Trotzky S., Cheinet P., Feld M., Saers R., Widera A., Müller T., Bloch I. // Nature. 2007. Vol. 448. No. 1. P. 1029–1032.
15. Zöllner S., Meyer H.-D., Schmelcher P. Few-Boson dynamics in double wells: from single-atom to correlated pair tunneling // Physical Review Letters. 2008. Vol. 100. Iss. 4. P. 040401.
16. Хаджи П. И., Васильева О. Ф. Динамика туннелирования бозе-конденсированных атомов в двухъямной ловушке // Вестник Приднестровского университета. Серия: Физико-математические и технические науки. 2012. № 3 (42). С. 3 –12.
17. Хаджи П. И., Васильева О. Ф. Динамика туннелирования бозе-конденсированных атомов в двухъямной ловушке при учете одноатомного и корреляционного двухатомного процессов туннелирования // Вестник Приднестровского университета. Серия: Физико-математические и технические науки. 2013. № 3 (45). С. 26–35.
18. Khadzhi P. I., Vasilieva O. F. Coherent Dynamics of Bose Condensed Atoms in a Double-Well Trap // Journal of Nanoelectronics and Optoelectronics. 2011. Vol. 6. Iss. 4. P. 433–451.

REFERENCES

1. Leggett A. J. Bose–Einstein condensation in the alkali gases: Some fundamental concepts. In: *Reviews of Modern Physics*, 2001, vol. 73, iss. 2, pp. 307–356.
2. Ueda M. Fundamentals and new frontiers of Bose–Einstein condensation. Singapore, Word Scientific Publ., 2010. 368 p.
3. Ananikian D., Bergeman T. Erratum: Gross–Pitaevskii equation for Bose particles in a double-well potential: Two mode models and beyond. In: *Physical Review A*, 2006, vol. 73, iss. 1, pp. 013604.
4. Carvalho D. W. S., Foerster A., Gusmao M. A. Ground states of spin-1 bosons in asymmetric double wells. In: *Physical Review A*, 2015, vol. 91, iss. 3, pp. 033608.
5. Wen L. H., Li J. H. Tunneling dynamics between two-component Bose–Einstein condensates. In: *Physics Letters A*, 2007, vol. 369, iss. 4, pp. 307–311.
6. Gillet J., Garcia-March M. A., Busch Th., Sols F. Tunneling, self-trapping, and manipulation of higher modes of a Bose–Einstein condensate in a double well / Gillet J., Garcia-March M. A., Busch Th., Sols F. // Physical Review A. 2014. Vol. 89. Iss. 2. P. 023614.
7. Saha A. K., Adhikary K., Mal S., Dastidar K. R., Deb B. The effects of trap-confinement and interatomic interactions on Josephson effects and macroscopic quantum self-trapping for a Bose–Einstein condensate. In: *arXiv*. Available at: https://arxiv.org/abs/1903.07417 (accessed: 02.03.2019).
8. Liu J.-L., Liang J.-Q. Atom-pair tunnelling-induced quantum phase transition and scaling behaviour of fidelity susceptibility in the extended boson Josephson-junction model. In: *Journal of Physics. B, Atomic, Molecular and Optical Physics*, 2011, vol. 44, no. 2, pp. 025101.

9. Zhu Q., Zhang Q., Wu B. Extended two-site Bose–Hubbard model with pair tunneling: spontaneous symmetry breaking, effective ground state and fragmentation. In: *Journal of Physics. B, Atomic, Molecular and Optical Physics*, 2015, vol. 48, no. 4, pp. 045301.
10. Liang J.-Q., Liu J.-L., Li W. D., Li Z. J. Atom-pair tunneling and quantum phase transition in the strong-interaction regime. In: *Physical Review A*, 2009, vol. 79, iss. 3, pp. 033617.
11. Linhua Wen, Qizhong Zhu, Tianfu Xu, Xili Jing, Chengshi Liu. Stationary states and quantum quench dynamics of Bose–Einstein condensates in a double-well potential. In: *arXiv*. Available at: https://arxiv.org/abs/1507.00786 (accessed: 02.03.2019).
12. Linhua Wen, Qizhong Zhu, Tianfu Xu, Xili Jing, Chengshi Liu. Stationary states and quantum quench dynamics of Bose–Einstein condensates in an Abelian-gauge double-well potential. Available at: https://www.researchgate.net/profile/Linghua_Wen/publication/279808835_Stationary_states_and_quantum_quench_dynamics_of_Bose-Einstein_condensates_in_an_Abelian-gauge_double-well_potential/links/564fce7608ae1ef9296ecb29/Stationary-states-and-quantum-quench-dynamics-of-Bose-Einstein-condensates-in-an-Abelian-gauge-double-well-potential.pdf?origin=publication_detail (accessed: 02.03.2019).
13. Yao Yu-Qin, Li Ji, Han Wei, Wang Deng-Shan, Liu Wu-Ming. Localized spatially nonlinear matter waves in atomic-molecular Bose–Einstein condensates with space-modulated nonlinearity. In: *arXiv*. Available at: https://arxiv.org/abs/1606.07348 (accessed: 02.03.2019).
14. Fölling S., Trotzky S., Cheinet P., Feld M., Saers R., Widera A., Müller T., Bloch I. Direct observation of second-order atom tunneling. In: *Nature*, 2007, vol. 448, no. 1, pp. 1029–1032.
15. Zöllner S., Meyer H.-D., Schmelcher P. Few-Boson dynamics in double wells: from single-atom to correlated pair tunneling. In: *Physical Review Letters*, 2008, vol. 100, iss. 4, pp. 040401.
16. Khadzhi P. I., Vasil'eva O. F. [Tunneling dynamics of Bose-condensed atoms in a double-well trap]. In: *Vestnik Pridnestrovskogo universiteta. Seriya: Fiziko-matematicheskie i tekhnicheskie nauki* [Bulletin of the Pridnestrovian University. Series: Physics and mathematics, engineering sciences], 2012, no. 3 (42), pp. 3–12.
17. Khadzhi P. I., Vasil'eva O. F. [Dynamics of tunneling of Bose-condensed atoms in a double-well trap with allowance for the monatomic and correlation diatomic tunneling processes]. In: *Vestnik Pridnestrovskogo universiteta. Seriya: Fiziko-matematicheskie i tekhnicheskie nauki* [Bulletin of the Pridnestrovian University. Series: Physics and mathematics, engineering sciences], 2013, no. 3 (45), pp. 26–35.
18. Khadzhi P. I., Vasilieva O. F. Coherent dynamics of Bose-condensed atoms in a double-well trap. In: *Journal of Nanoelectronics and Optoelectronics*, 2011, vol. 6, iss. 4, pp. 433–451.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Васильева Ольга Федоровна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры квантовой радиофизики и систем связи Приднестровского государственного университета имени Т. Г. Шевченко;
e-mail: florina_of@mail.ru;

Зинган Анна Петровна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры квантовой радиофизики и систем связи Приднестровского государственного университета имени Т. Г. Шевченко;
e-mail: zingan.anna@mail.ru.

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Olga F. Vasilieva – PhD in physical and mathematical sciences, associate professor at the Department of Quantum Radiophysics and Communication Systems, Pridnestrovian State University;
e-mail: florina_of@mail.ru;

Anna P. Zingan – PhD in physical and mathematical sciences, associate professor at the Department of Quantum Radiophysics and Communication Systems, Pridnestrovian State University;
e-mail: zingan.anna@mail.ru.

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Васильева О. Ф., Зинган А. П. Динамика нелинейного туннелирования бозе-конденсированных атомов в двухъямной ловушке // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2019. № 2. С. 83–95.
DOI: 10.18384-2310-7251-2019-2-83-95

FOR CITATION

Vasilieva O. F., Zingan A. P. Dynamics of nonlinear tunneling of Bose-condensed atoms in a double-well trap In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*, 2019, no. 2, pp. 83–95.
DOI: 10.18384-2310-7251-2019-2-83-95

РАЗДЕЛ III. ТЕОРИЯ И МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ И ВОСПИТАНИЯ

УДК 530.145 (09)
DOI: 10.18384-2310-7251-2019-2-96-105

ДЖ. РЭЛЕЙ И ИСТОРИЯ ОТКРЫТИЯ ЗАКОНА ТЕПЛОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ РЭЛЕЯ-ДЖИНСА

Исаев В. И.
Независимый исследователь
г. Москва, Российская Федерация

Аннотация. В работе рассмотрена история открытия закона теплового излучения Рэлея-Джинса. Это событие явилось одним из важных эпизодов в предыстории открытия универсальной функции Кирхгофа. Открытие этой функции М. Планком в декабре 1900 г. привело к постепенному развитию квантовой теории и установлению квантовой механики в 1926–1926 гг. и фактически явилось началом новой физической эпохи – эпохи квантовой физики.

Ключевые слова: теория теплового излучения, Кирхгоф, Вин, Планк, Рэлей, Джинс.

J. W. STRUTT (LORD RAYLEIGH) AND HISTORY OF THE DISCOVERY OF THE RAYLEIGH–JEANS LAW OF THERMAL RADIATION

V. Isaev
Independent researcher
Moscow, Russian Federation

Abstract: The paper discusses the history of the discovery of the Rayleigh–Jeans law of thermal radiation. This discovery was an important step in the prehistory of the discovery of the universal Kirchhoff function. The discovery of this function by M. Planck in December 1900 led to the gradual development of quantum theory and to the appearance of quantum mechanics in 1925–1926, which was in fact the beginning of a new physical era, i.e. quantum physics.

Keywords: theory of thermal radiation, Kirchhoff, Wien, Planck. Rayleigh, Jeans.


Дж. У. Стретт (Рэлей)

Настоящая работа является кратким изложением одного из разделов лекционного курса по истории квантовой теории, разрабатываемого автором. Актуальность темы определяется теми приложениями, которые квантовая механика получила за последнее десятилетие – необходимостью создания квантовых компьютеров и развития систем квантовой связи, основанных на явлении квантового перепутывания связанных состояний. Без глубокого знания квантовой теории создание квантовых компьютеров и систем квантовой связи невозможно. Необходимость создания такого курса диктуется тем, что студенты при изучении квантовой теории зачастую испытывают трудности и для более глубокого понимания квантовой механики автор предлагает читать студентам одновременно курс истории квантовой теории. Дополнительным аргументом для создания такого курса также является то, что многие тонкие вопросы интерпретации квантовой механики невозможно понять, не обладая знаниями хотя бы элементарного курса истории квантовой теории.

Джон Уильям Стретт родился 12 ноября 1842 г. в г. Лэнгфорд-Гроф, графство Эссекс, Великобритания, в семье Джона Джеймса Стретта, второго барона Рэлея, и был его старшим сыном. Мать Дж. У. Стретта звали Клара Элизабет Ля Туш, она была дочерью капитана Инженерных войск Р. Викерса [1]. Начальное образование Джон Уильям Стретт получил в нескольких частных школах: сначала в Итоне, затем в Уимблдоне и в Харроу, и затем около четырёх лет он учился в частной школе г. Торки, которую окончил в 1861 г.

В октябре 1861 г. Дж. Стретт поступил в Тринити-колледж (колледж Св. Троицы) в Кембридже, где начались его занятия математикой и физикой. Тринити-колледж был «альма матер» английских математиков и физиков. Выпускниками этого колледжа ранее Дж. Стретта были такие известные учёные, как Ф. Бэкон, И. Ньютон, Г. Кавендиш, У. Томсон (лорд Кельвин), Дж. Максвелл и др. Следует отметить высокий уровень преподавания математики и физики в Тринити-колледже, где учителями Дж. Стретта были, в частности, известные учёные – математик Э. Раус и физик Дж. Стокс, которые способствовали возникновению первых научных интересов Дж. Стретта. Во время обучения у Дж. Стретта проявились его математические способности, и в 1865 г. Дж. Стретт закончил Тринити-колледж первым бакалавром, получил премию Смита и был оставлен преподавателем в Тринити-колледже, где он начал свою научную работу в 1866 г. [1].

В 1871 г. после женитьбы на Э. Бальфур Дж. Стретт оставил Тринити-колледж и поселился в своём фамильном имении Терлинг, в графстве Эссекс. В Терлинге он оборудовал физическую лабораторию и проводил физические исследования в области акустики и оптики. После перенесённого приступа ревматизма в 1872 г. Дж. Стретт отправился в длительную поездку в Египет и Грецию. Во время путешествия по Нилу Дж. Стреттом была написана первая часть его фундаментального труда по акустике и оптике «Теория звука», которая была опубликована совместно со второй частью в 1877 г. В этой монографии впервые с единых позиций с использованием функций Лагранжа и Гамильтона рассматривались задачи теории колебаний в механике, акустике, оптике и гидродинамике.

В 1879 г., после смерти Дж. Максвелла, лорд Рэлей был назначен на пятилетний срок директором Кавендишской лаборатории в Кембридже и стал профессором экспериментальной физики Кавендишской лаборатории. В течение пяти лет, с 1879 по 1884 гг., Рэлею удалось превратить Кавендишскую лабораторию в ведущую научную лабораторию. Научная программа, предложенная Рэлеем для работ в Кавендишской лаборатории, – это программа упорядочения значений электростатических и электромагнитных единиц и разработка технических стандартов в этой области [2].

В 1873 г. Рэлей был избран членом Лондонского Королевского общества, в 1885 г. после ухода Дж. Стокса в отставку Дж. Рэлей был назначен секретарём Лондонского Королевского общества и оставался на этом посту до 1896 г. В 1887 г. Дж. Рэлей стал профессором натуральной философии (физики) в Британском Королевском институте в Лондоне после отставки Дж. Тиндаля и занимал эту должность до 1905 г. [1].

К 1894–1895 гг. относятся работы Рэлея, в которых ему, совместно с химиком У. Рамзаем, профессором Лондонского университета, удалось впервые выделить инертный газ – аргон. За эти исследования в 1904 г. Рэлею была присуждена Нобелевская премия по физике. К 1900 г. относятся исследования Рэлея по теории излучения твёрдых тел, в которых он нашёл асимптотическую формулу распределения энергии излучения абсолютно чёрного тела, верную в пределе длинных волн и названную впоследствии законом излучения Рэлея-Джинса [1].

С 1905 по 1908 гг. Дж. Рэлей был президентом Лондонского Королевского общества, а в 1908 г. Рэлей был избран президентом Кембриджского университета. Первая научная работа Рэлея была напечатана в 1869 г., а последняя – в 1919 г. Список его научных трудов включает 446 статей и несколько книг. Научные работы Рэлея собраны в 6 томах его "Scientific papers", напечатанных в 1889–1920 гг. Дж. Рэлей скончался 30 июня 1919 г. в своём имении в Терлинге [1].

Рэлеем был сделан фундаментальный вклад в теорию колебаний стержней, пластин и оболочек, им была выведена формула связи между фазовой и групповой скоростями волн, развита теория рассеяния света, позволившая объяснить голубой цвет неба, была развита теория поверхностных упругих (рэлеевских) волн, играющая важную роль в сейсмологии [3]. Рэлей одним из первых начал применять асимптотические методы для анализа колебаний тел, им был разработан приближенный энергетический метод для определения частот колебаний (метод Рэлея-Ритца).

В 1891 г. Рэлей обнаружил в архивах Лондонского Королевского общества статью морского офицера – капитана Дж. Уотерстона (1811–1883), инспектора Ост-Индской компании в Бомбее, написанную им в 1853 г. и отклонённую рецензентом от публикации, в которой впервые содержались некоторые идеи развития кинетической теории газов. Статья Уотерстона называлась «О физике среды, состоящей из абсолютно упругих молекул в состоянии движения» [4]. В ней впервые была предложена теорема о равномерном распределении энергии по степеням свободы по отношению к поступательному движению молекул. Эту статью Рэлей опубликовал в 1892 г., отметив, что отклонение этой статьи от публикации задержало развитие кинетической теории газов на 10 или 15 лет.

Независимо от Уотерстона эту же теорему в более общей формулировке открыл и опубликовал Дж. К. Максвелл в 1860 г. в своей статье «Пояснение к динамической теории газов» в виде следующего утверждения: «Два различных набора частиц будут перераспределять свои скорости, пока их кинетические энергии не окажутся одинаковыми». Максвелл распространил действие этой теоремы не только на поступательные, но и на вращательные движения молекул. В 1868 г. Л. Больцман обобщил теорему о равномерном распределении энергии по степеням свободы молекул, распространив её действие на внутренние степени свободы молекул.

В 1878 г. Дж. К. Максвелл показал, что теорема о равномерном распределении энергии по степеням свободы имеет место и в случае, когда динамическая система, состоящая из произвольного числа молекул, может быть описана функцией Лагранжа и имеет произвольное число степеней свободы.

Теорема о равномерном распределении энергии по степеням свободы гласит, что для любой динамической системы с N степенями свободы, кинетическая энергия которой содержит квадраты обобщённых скоростей $m_i v_i^2/2$, а потенциальная энергия может быть представлена суммой квадратов нормальных координат системы $m_i \omega_i^2 q_i^2/2$, на каждую степень свободы системы в среднем приходится одна и та же энергия, равная $kT/2$. При этом подразумевается, что рассмотренная динамическая система находится в состоянии теплового равновесия при температуре T. В статистической механике теорема о равномерном распределении энергии по степеням свободы является обобщением известной в аналитической механике теоремы о вириале. Основное различие между ними в том, что при доказательстве теоремы о вириале обычно используют усреднение в течение длительного периода времени, в то время как при доказательстве теоремы о равномерном распределении энергии используется усреднение по фазовому пространству, что верно для случая эргодических систем.

Лорд Кельвин, в отличие от Максвелла, Больцмана и Рэлея, никогда не признавал всеобщую применимость теоремы о равнораспределении энергии по степеням свободы и в своей знаменитой лекции «Облака XIX века над динамической теорией теплоты и света», прочитанной в Лондонском Королевском обществе 27 апреля 1900 г., он отметил, что одно из облаков, омрачающих ясный горизонт физики XIX столетия, – это недоказанная, по его мнению, теорема Максвелла-Больцмана о равномерном распределении энергии по степеням свободы. Отрицательное отношение Кельвина к теореме о равномерном распределении энергии по степеням свободы было связано с нарушениями этой теоремы при подсчётах теплоёмкостей многоатомных газов.

Статья Михельсона [5] под названием «Опыт теоретического объяснения распределения энергии в спектре твёрдого тела», законченная в марте 1887 г., была напечатана в четвёртом выпуске физической части Журнала Русского Физико-Химического Общества в 1887 г., а позже переведена на английский язык и опубликована в 1888 г. в английском журнале “Philosophical Magazine”. Эта статья была замечена лордом Рэлеем, который в 1889 г. опубликовал в английском журнале “Philosophical Magazine” своё первое сообщение по теории теплового излучения под названием «О характере полного излучения при данной температуре» [6]. В этой небольшой заметке Рэлей отмечает, что под полным излучением он понимает «излучение, которое в конце концов устанавливается в полости, стенки которой непроницаемы и находятся при одинаковых температурах». При этом в сноске Рэлей замечает, что «излучение, называемое здесь полным, иногда определяется как чёрное. Называть чёрной раскалённую кочергу или её излучение не кажется удачным» – остроумно добавляет Рэлей. В этой заметке Рэлея содержится анализ приближенной формулы для универсальной функции Кирхгофа, предложенной в 1887 г. В. А. Михельсоном [5]:

$$\varepsilon(\lambda,T) = B_1 T^{3/2} \exp\left(-\frac{c_2}{T\lambda^2}\right)\frac{1}{\lambda^6}, \tag{1}$$

где B_1, $c_{1,2}$ – const, а также анализ другой формулы, предложенной в 1888 г. Г. Ф. Вебером. Если переписать формулу Михельсона (1) для частот, а не для длин волн, то она примет вид:

$$\varepsilon(\nu,T) = A\nu^4 \exp\left(-a^2\nu^2\right), \tag{2}$$

где A, a – const, а формула, предложенная в 1888 г. Г. Ф. Вебером по известным на то время данным наблюдений американского физика С. Лэнгли, имеет более простой вид:

$$\varepsilon(\nu,T) = A\exp\left(-a^2\nu^2\right). \tag{3}$$

В своей заметке Рэлей попытался математически проанализировать характер световых импульсов, составляющих чёрное излучение. Рэлей пишет: «Тот вопрос, который я хочу поставить, состоит в следующем: можно ли определить вид импульсов, нерегулярная последовательность которых даёт полное излучение при любой температуре». Рэлей в результате приходит к выводу, что «наиболее простой вид импульсов, могущий удовлетворить всем требованиям данного случая – это тот, который хорошо известен в теории ошибок, а именно: $\varphi(x) = \exp(-x^2)$. Далее Рэлей пишет: «Таким образом, мы определили вид импульсов, случайная совокупность которых будет представлять полное (чёрное) излучение в соответствии с законом Вебера (3)».

После этого Релей обращается к анализу низкочастотной асимптотики формул Михельсона (1)–(2) и Вебера (3) и отмечает, что в пределе малых частот формула Михельсона стремится к нулю, в то время как формула Вебера даёт некоторое конечное значение, отличное от нуля. Свой анализ Рэлей заканчивает так: «но мы не знаем достаточно хорошо механизма излучения, чтобы сделать уверенные выводы. Всё, что можно сейчас потребовать – это более полных экспериментальных данных, подобных обещанным профессором Ленгли». Далее в этой заметке, посвящённой анализу природы теплового излучения, Рэлей сделал важное замечание: «что касается излучения при очень низкой частоте, то можно сомневаться в том, содержатся ли данные о нем в наших нынешних измерениях» [6]. Это свидетельствует о том, что статья Михельсона [5] привела Рэлея к размышлениям о том, насколько хорошо формулы для $\varepsilon(\lambda,T)$ или $\varepsilon(\nu,T)$, предложенные Михельсоном и Вебером, описывают низкочастотную (длинноволновую) часть спектра теплового излучения. Итог своих исследований Рэлей опубликовал в 1900 г. в краткой заметке под названием «Замечания о законе полного излучения» [7].

В этой заметке Рэлей, рассматривая тепловые колебания молекул эфира по аналогии с колебаниями молекул воздуха и применяя классическую теорему о равномерном распределении тепловой энергии по степеням свободы к стоячим электромагнитным волнам в полости, получил асимптотическую формулу для универсальной функции Кирхгофа $\varepsilon(\lambda,T)$, правильную (с точностью до коэффициента 8) для области длинных волн и имеющую вид:

$$\varepsilon(\lambda,T)=\frac{\pi kT}{\lambda^4}, \tag{4}$$

и названную впоследствии законом излучения Рэлея-Джинса. Затем, понимая, что интегрирование по частотам или длинам волн данной формулы даёт бесконечное значение полной энергии излучения всего спектра – физически бессмысленный результат, так называемую «ультрафиолетовую катастрофу», Рэлей, опираясь на аналогию с законом излучения Вина, вводит в формулу (4) затухающую экспоненту без какого-либо обоснования и получает следующее приближенное выражение для универсальной функции Кирхгофа:

$$\varepsilon(\lambda,T)=\frac{\pi kT}{\lambda^4}\exp\left(-\frac{c}{\lambda kT}\right), \tag{5}$$

которое, хотя и напоминает формулу Вина (6), но всё же является неверной формулой.

Напомним, что в 1896 г. Вильгельм Вин, уточнив гипотезы, высказанные в статье [5] В. А. Михельсоном, и использовав принцип Доплера, получил выражение для универсальной функции Кирхгофа $\varepsilon(\lambda,T)$, правильное для коротких волн и имеющее вид:

$$\varepsilon(\lambda,T)=\frac{8\pi hc}{\lambda^5}\exp\left(-\frac{hc}{kT\lambda}\right), \tag{6}$$

названное впоследствии законом теплового излучения Вина.

Дж. Джинс

Обоснование и уточнение формулы Рэлея (4) было позднее проведено английским физиком Джеймсом Джинсом в 1905 г. в работе под названием «Распределение энергии между эфиром и материей» [8].

Джеймс Хопвуд Джинс родился 11 сентября 1877 г. в г. Ормскирке, графство Ланкашир, Великобритания, в семье журналиста и владельца газет Уильяма Таллаха Джинса. Мать Джинса звали Марта Энн Хопвуд, она происходила из семьи промышленников из г. Стокпорта, от неё Джеймс получил второе имя Хопвуд [10]. В 1879 г. семья Джинсов переехала в Лондон.

В 1890 г. Джеймс Джинс поступил в Тейлоровскую коммерческую школу, которую окончил в 1896 г. Уже с детства проявились блестящие математические способности Джинса. Так в семье Джинсов помнили случай, когда однажды мать забыла билет на поезд дома и маленький Джеймс смог назвать проводнику поезда его номер по памяти.

В 1896 г. Джинс поступил в Тринити-колледж Кембриджского университета. В колледже Джинс слушал лекции известных математиков – профессоров Г. Т. Уолкера, Дж. В. Глэйзера, А. Н. Уайтхеда, Е. Т. Уиттекера.

В 1899 г. Джинсу пришлось прервать обучение в университете из-за болезни. Однако Джинс не прекратил активные занятия математикой и физикой, и в 1900 г. была опубликована его первая научная работа «Стратифицированный электрический заряд». В 1900 г. Джинсу была присуждена стипендия И. Ньютона по астрономии и оптике, а в 1901 г. за свою научную работу «Распределение энергии молекул» Джинс получил премию Смита [10].

В 1903 г. Джинсу была присуждена учёная степень магистра Кембриджского университета и в 1904 г. он начал чтение курса лекций по математике в Кембриджском университете. В том же 1904 г. была опубликована его первая научная монография «Динамическая теория газов». В 1905 г. Джинс принял предложение Принстонского университета в США и занял должность профессора прикладной математики.

В 1905 г была опубликована статья Джинса [8], в которой он применил теорему о равнораспределении энергии по степеням свободы в спектре равновесного излучения и исправил (увеличил в 8 раз) множитель в законе излучения Рэлея.

Джинс строго рассмотрел стоячие электромагнитные волны или «волны эфира» (по терминологии того времени) в замкнутой полости с зеркальными отражающими стенками. Энергия всей системы таких волн может быть представлена в виде суммы энергий отдельных электромагнитных осцилляторов, и Джинс показал, что энергия всей системы может быть выражена, с использованием теоремы о равномерном распределении энергии, через среднюю тепловую энергию одного осциллятора $\langle E \rangle = kT$ в виде [8]:

$$\varepsilon(\lambda, T) = \frac{8\pi}{\lambda^4}\langle E \rangle = \frac{8\pi}{\lambda^4}kT. \tag{7}$$

Именно это соотношение и получило впоследствии название закона излучения Рэлея-Джинса. После выхода статьи Джинса Рэлей, проверив вычисления, согласился с Джинсом, и предложил называть далее закон излучения Рэлея законом излучения Рэлея–Джинса.

Джинс, получив строго этот результат из классической статистической механики, в ряде последующих работ по теории теплового излучения [9] настаивал на его применимости ко всему спектру электромагнитных волн, что конечно же не соответствовало истинной природе электромагнитного излучения, поскольку закон излучения Рэлея-Джинса верен только для области длинных волн, что со всей убедительностью было продемонстрировано М. Планком [11].

В результате многочисленных обсуждений этих работ Дж. Джинса [9] было окончательно доказано, что классическая статистическая механика даёт для функции Кирхгофа только приближенную асимптотическую формулу (7) закона излучения Рэлея-Джинса. Упорная критика Джинсом [9] работ М. Планка не прошла незамеченной физиками, и даже наоборот, многочисленные статьи Джинса, а также его выступления в защиту своей точки зрения и с критикой работ Планка, например на 1-ом Сольвеевском конгрессе в 1911 г., способствовали полному прояснению области применимости закона излучения Рэлея-Джинса. Как справедливо отмечено в биографии Джинса, написанной известным астрофизиком, доктором физико-математических наук А. В. Козенко, «акцентируя на этом внимание, Джинс в конечном итоге способствовал признанию теории Планка» [10]. Последние исследования различных аспектов спектра теплового излучения содержатся в работах [12–16].

Статья поступила в редакцию 15.04.2019 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Howard J. N. John William Strutt, Third Baron Rayleigh // Applied Optics. 1964. Vol. 3. P. 1091.
2. Schaffer S. Rayleigh and the establishment of electrical standards // European Journal of Physics. 1994. Vol. 15. No. 6. P. 277–285.
3. Lewis M. F. Rayleigh waves – a progress report // European Journal of Physics. 1995. Vol. 16. No. 1. P. 1–7.
4. Waterstone J. J., Strutt J. W. On the physics of media that are composed of free and perfectly elastic molecules in a state of motion // Philosophical Transactions of the Royal Society of London A. 1892. Vol. 183. P. 1–79.
5. Михельсон В. А. Опыт теоретического объяснения распределения энергии в спектре твердого тела // Журнал русского физико-химического общества, часть физика. 1887. Т. 19. Вып. 4. С. 79–99.

6. Strutt J. W. (Lord Rayleigh). On the Character of the Complete Radiation at a given Temperature // The Philosophical magazine. 1889. Vol. 27. P. 460–469.
7. Strutt J. W. (Lord Rayleigh) Remarks upon the law of complete radiation // The Philosophical magazine. 1900. Vol. 49. P. 539–540.
8. Jeans J. H. On the partition of energy between matter and ether // The Philosophical magazine. 1905. Vol. 10. P. 91–98.
9. Jeans J. H. Report on radiation and the quantum theory. London: "The Electrician" Printing & Publishing Co, 1914. 90 p.
10. Козенко А. В. Джеймс Хопвуд Джинс М.: Наука, 1985. 145 с.
11. Исаев В. И. М. Планк и история открытия квантов теплового излучения // Вестник Московского государственного областного университета. Серия Физика-математика. 2018. № 1. С. 91–99.
12. Calcaneo-Roldan C., Salcidone O., Santana D. A semy-analytical approach to black body radiation // European Journal of Physics. 2017. Vol. 38. No. 5. P. 055807.
13. Boyer T. H. Understanding the Planck blackbody spectrum and Landau diamagnetism within classical electromagnetism // European Journal of Physics. 2016. Vol. 37. No. 6. P. 065102.
14. Boyer T. H. Scaling, Scattering and blackbody radiation in classical physics // European Journal of Physics. 2017. Vol. 38. No. 4. P. 045101.
15. Investigation of black body radiation with the aid of a self-made pyroelectric infrared detector / Poprawski W., Gnutek Z., Radojewska E. B., Poprawski R. // European Journal of Physics. 2015. Vol. 36. No. 6. P. 065025.
16. Nauenberg M. Max Planck and the birth of the quantum hypothesis // American Journal of Physics. 2016. Vol. 84. P. 709–716.

REFERENCES

1. Howard J. N. John William Strutt, Third Baron Rayleigh. In: *Applied Optics*, 1964, vol. 3, pp. 1091.
2. Schaffer S. Rayleigh and the establishment of electrical standards. In: *European Journal of Physics*, 1994, vol. 15, no. 6, p. 277–285.
3. Lewis M. F. Rayleigh waves – a progress report. In: *European Journal of Physics*, 1995, vol. 16, no. 1, pp. 1–7.
4. Waterstone J. J., Strutt J. W. On the physics of media that are composed of free and perfectly elastic molecules in a state of motion. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A*, 1892, vol. 183, pp. 1–79.
5. Mikhel'son V. A. [The experience of a theoretical explanation of the energy distribution in the spectrum of a solid body]. In: *Zhurnal russkogo fiziko-khimicheskogo obshchestva* [Journal of Russian Physical and Chemical Society], 1887, vol. 19, no. 4, pp. 79–99.
6. Strutt J. W. (Lord Rayleigh). On the character of the complete radiation at a given temperature. In: *The Philosophical magazine*, 1889, vol. 27, pp. 460–469.
7. Strutt J. W. (Lord Rayleigh) Remarks upon the law of complete radiation. In: *The Philosophical magazine*, 1900, vol. 49, p. 539–540.
8. Jeans J. H. On the partition of energy between matter and ether. In: *The Philosophical magazine*, 1905, vol. 10, pp. 91–98.
9. Jeans J. H. Report on radiation and the quantum theory. London, "The Electrician" Printing & Publishing Co, 1914. 90 p.
10. Kozenko A. V. *Dzheims Khopvud Dzhins* [James Hopwood Jeans]. Moscow, Nauka Publ., 1985. 145 p.

11. Isaev V. I. M. [Planck and history of the discovery of the quanta of the heat radiation]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya Fizika-matematika* [Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], 2018, no. 1, pp. 91–99.
12. Calcaneo-Roldan C., Salcidone O., Santana D. A semy-analytical approach to black body radiation. In: *European Journal of Physics*, 2017, vol. 38, no. 5. pp. 055807.
13. Boyer T. H. Understanding the Planck blackbody spectrum and Landau diamagnetism within classical electromagnetism. In: *European Journal of Physics*, 2016, vol. 37, no. 6, pp. 065102.
14. Boyer T. H. Scaling, Scattering and blackbody radiation in classical physics. In: *European Journal of Physics*, 2017, vol. 38, no. 4, pp. 045101.
15. Poprawski W., Gnutek Z., Radojewska E. B., Poprawski R. Investigation of black body radiation with the aid of a self-made pyroelectric infrared detector. In: *European Journal of Physics*, 2015, vol. 36, no. 6, pp. 065025.
16. Nauenberg M. Max Planck and the birth of the quantum hypothesis. In: *American Journal of Physics*, 2016, vol. 84, pp. 709–716.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Исаев Вячеслав Игоревич – кандидат физико-математических наук, независимый исследователь (г. Москва);
e-mail: vis961@yandex.ru.

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Vyacheslav I. Isaev – PhD in physical and mathematical sciences, independent researcher (Moscow);
e-mail: vis961@yandex.ru.

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Исаев В. И. Дж. Рэлей и история открытия закона теплового излучения Рэлея-Джинса // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2019. № 2. С. 96–105.
DOI: 10.18384/2310-7251-2019-2-96-105

FOR CITATION

Isaev V. I. J. W. Strutt (Lord Rayleigh) and the history of the discovery of the Rayleigh–Jeans law of thermal radiation. In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*, 2019, no. 2, pp. 96–105.
DOI: 10.18384/2310-7251-2019-2-96-105

УДК 004.94
DOI: 10.18384-2310-7251-2019-2-106-121

АЛГОРИТМ ЗАЩИТЫ ОТ НАРУШЕНИЙ ПРАВИЛ ВВОДА ИНФОМАЦИИ С КОРРЕКЦИЕЙ КОНЕЧНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Шабанова А. В., Калашников Е. В.
Московский государственный областной университет
141014, Московская область, г. Мытищи, ул. Веры Волошиной, д. 24 Российская Федерация

Аннотация. Ввод неправильной информации в диалоге «пользователь-машина» может быть преднамеренным или непреднамеренным. В любом случае необходимо «научить» систему, обслуживающую машину, понимать и распознавать ошибки с вводом информации и исправлять их. Таким образом, цель работы состоит в разработке алгоритма защиты от нарушений ввода информации и коррекции конечного результата. Для этого изучаются уже существующие и традиционные алгоритмы. Выявляются их достоинства и недостатки по отношению к поставленной задаче. В частности, аналогичная ситуация с выявлением ошибки ввода, распознаванием и её коррекцией часто наблюдается в наиболее примитивных ситуациях – в калькуляторах перевода из одной системы счисления в другую. Поэтому в представленной работе рассматриваются и разрабатываются пути исправления основных ошибок, которые встречаются в онлайн-калькуляторах при переводе из одной системы счисления в другую, на основе уже существующих алгоритмов.

Ключевые слова: алгоритм, алгоритмизация, кодирование, программирование, система счисления, программа, валидация.

ALGORITHM OF PROTECTION AGAINST VIOLATIONS OF THE RULES OF INFORMATION INPUT AND CORRECTION OF THE FINAL RESULT

A. Shabanova, E. Kalashnikov
Moscow Region State University
ul. Very Voloshinoi 24, 141014 Mytishchi, Moscow Region, Russian Federation

Abstract. Entering of incorrect information in the user–machine dialog may be intentional or unintentional. In any case, it is necessary to 'train' the system, which serves the machine, to understand and to recognize errors with the information input and to correct them. Thus, the aim of the work is to develop an algorithm for protection against violations of information input and correction of the final result. For this purpose, existing and traditional algorithms are studied. Their advantages and disadvantages in relation to the task are revealed. In particular, a similar situation with the detection of the input error, its recognition and correction is often observed in the most primitive situations – in calculators translating one number system (NS) to another. This primitiveness, first of all, indicates the fundamental nature of the problem to be solved. Therefore, in the presented work we use the already existing algorithms to discuss and develop the ways to correct the major errors that are found in Online Calculators translating one number system (NS) to another.

Keywords: algorithm, algorithmization, coding, programming, number system, program, validation.

Введение

Проблема неправильного ввода информации остро стоит перед пользователями. Существует множество ресурсов, готовых предоставить необходимую информацию по запросу пользователя, например Google[1]. Но возможна ситуация, когда перед системой встаёт проблема неверного ввода информации со стороны неопытного или неаккуратного пользователя. В таком случае необходимо «научить» систему понимать ошибки и исправлять их.

Одним из типичных примеров такой системы, способной понимать, распознавать и исправлять ошибки, является поисковая система, которая перерабатывает некорректно введённые данные и предоставляет пользователю вариант правильного написания запроса в виде сообщения «Возможно, вы имели в виду ...». На смартфонах таким примером может послужить автоматическая замена некорректно введённого слова. Не все сервисы могут предоставить (оказать) подобного рода «помощь».

Ситуация с выявлением ошибки ввода, распознаванием и её коррекцией наблюдается на более примитивном уровне – в калькуляторах перевода из одной системы счисления в другую, например, перевода из двоичной системы счисления в восьмеричную. В представленной работе рассматриваются ***пути исправления основных ошибок***, которые встречаются в онлайн-калькуляторах перевода системы счисления, на основе уже существующих алгоритмов.

Цель: построение и применение алгоритма защиты от нарушений правил ввода информации с коррекцией конечного результата на примере перевода из двоичной системы счисления в восьмеричную.

Сравнительный анализ алгоритмов защиты

Пользователь может вводить некорректные данные по разным причинам. На практике встречается множество ситуаций, когда определённые поля в пользовательском интерфейсе могут содержать только те данные, которые строго соответствуют определённым шаблонам. Если не учитывать подобные ситуации, то в системе могут возникать сбои, связанные с некорректным вводом пользователя. Ошибки могут быть допущены случайно или намеренно. Поэтому система должна производить предварительную проверку корректности введённых данных [1].

В работе [2] приведён алгоритм, похожий на реакцию поисковой системы на ошибки ввода. Для исправления опечаток в словах используются несколько алгоритмов.

- Расстояние Левенштейна – это минимальное количество операций вставки одного символа, удаления одного символа и замены одного символа на другой, необ-

---

1 Google [Электронный ресурс]. URL: https://www.google.com (дата обращения: 20.12.2018).

ходимых для превращения одной строки в другую. Используется для исправления ошибок в слове. Указанный алгоритм рассматривается подробно в работе [3].

- *Metaphone* – алгоритм индексирования слова по фонетическому принципу, работает только с буквами английского алфавита.
- Алгоритм Оливера, который вычисляет схожесть двух строк.

Также существует алгоритм, при котором возникает состояние ошибки. Состояние ошибки – это экран или окно, которые указывают пользователю на ошибки. Но этот алгоритм является неэффективным, так как оповещение приходит только после написания запроса. В таком случае на помощь приходит валидация [4], которая моментально информирует пользователя о корректности данного ответа сразу после того, как пользователь ввёл запрос. В статье [5] авторы подробно рассмотрели алгоритм валидации на примере трансформирования логических формул предикатов первого порядка. Существует ещё один алгоритм, не позволяющий вводить неверные символы в строку запроса. Он рассматривается в статье [4]. Алгоритм заключается в том, что накладывается ограничение ввода. Указанный метод подходит больше всего для реализации поставленной задачи. В таком случае, пользователь не сможет ввести цифры, не входящие в алфавит системы счисления.

В [6] указаны рекомендации для того, чтобы пользователь не совершил ошибку и валидация [7] не понадобилась.

Условно можно выделить две основные проблемы, с которыми встречаются калькуляторы перевода из одной системы счисления в другую: ошибки ввода и некорректного ответа

Ошибки ввода

Первая проблема. Основная проблема онлайн-калькуляторов перевода из одной системы счисления в другую заключается в том, что при неверном введении информации система не распознает ошибку и выдаёт неточный ответ. Например, сайт Calculatori.ru[2] пропускает неверные символы, но при нажатии кнопки «ПЕРЕВЕСТИ» (рис. 1) выдаёт рекомендации для ввода неопытному пользователю (рис. 2).

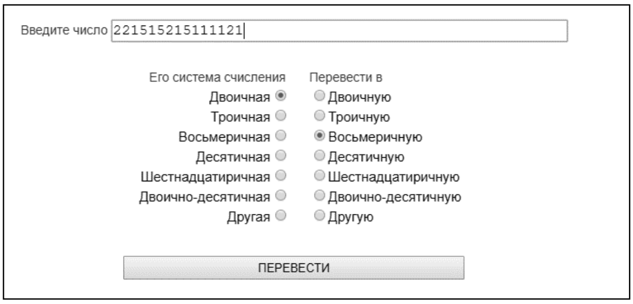

Рис. 1. Калькулятор № 1.

[2] ОНЛАЙН КАЛЬКУЛЯТОРЫ [Электронный ресурс]. URL: http://calculatori.ru (дата обращения: 20.12.2018).

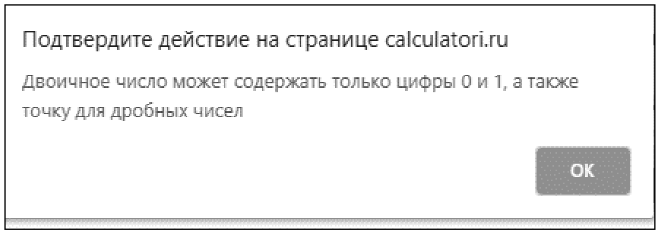

Рис. 2. Реакция Калькулятора №1 на неверный ввод.

Сайт planetcalc.ru[3] (рис. 3) также не реагирует на введение некорректной информации. При нажатии кнопки «РАССЧИТАТЬ» система не выдаёт ошибки. Вместо переведённого числа указан символ «?».

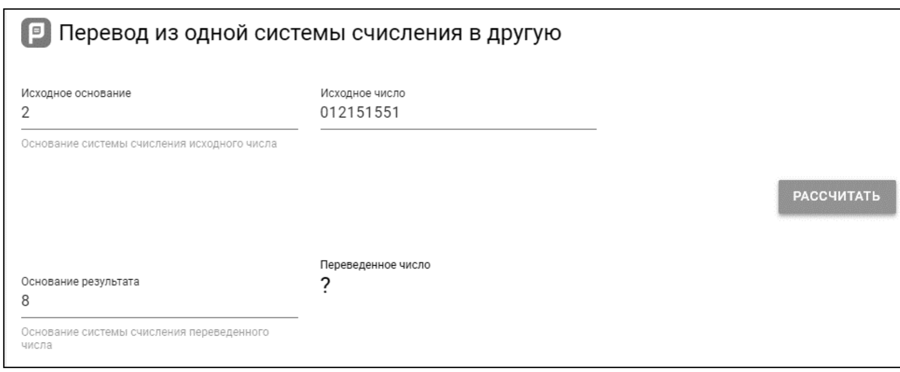

Рис. 3. Реакция Калькулятора №2 на неверный ввод.

Выдача некорректного ответа

Второй проблемой онлайн-калькуляторов является выдача некорректного ответа. Например, при вводе 000000001 в двоичной системе счисления, в ответе получается 001 в восьмеричной, что является некорректным результатом. Также, при вводе 000000, ответ выдаёт 00 в восьмеричной системе счисления[4].

Введение некорректной информации

Существует множество алгоритмов защиты от введения некорректной информации.

Первым из традиционных примеров такого алгоритма является поисковая система Google. Если введённая информация становится непонятной для системы (рис. 4), то она предлагает возможные варианты пользователю (рис. 5) [3; 8].

3 Онлайн калькуляторы [Электронный ресурс]. URL: https://planetcalc.ru/ (дата обращения: 20.12.2018).

4 См.: Перевод из СС 2 в СС 8 [Электронный ресурс] // Киберфорум : [сайт]. URL: cyberforum.ru/pascalabc/thread913916.html (дата обращения: 20.12.2018).

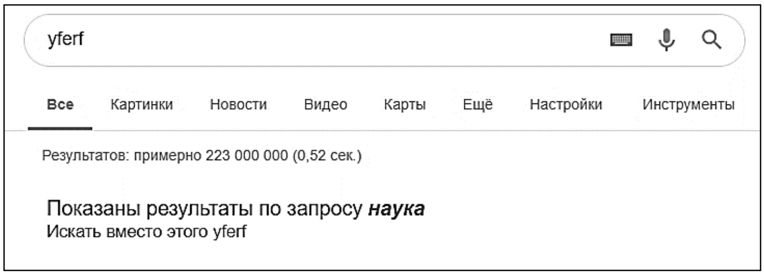

Рис. 4. Реакция поисковой системы на ввод неверных символов.

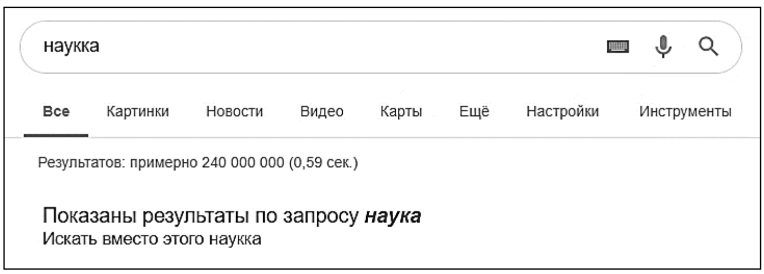

Рис. 5. Реакция поисковой системы на некорректный ввод.

Автозамена / Т9 или форматированный ввод решается аналогично приведённому примеру (рис. 5) с реагированием браузера на некорректный ввод.

Выдача на экран ошибки

Второй алгоритм – это выдача на экран ошибки (рис. 6). Подобная ситуация встречается при неверном введении символов во время регистрации на сайтах. Например, сайт портала государственных услуг РФ[5] имеет определённые требования для безопасности при создании пароля. Система не только не даёт возможности сохранить пароль, если он не соответствует выдвинутым критериям, но и выдаёт дополнительное окошко с невыполненными условиями.

Рис. 6. Реакция системы на несоответствие требованиям.

[5] Портал государственных услуг Российской Федерации. URL: https://www.gosuslugi.ru/ (дата обращения: 20.12.2018).

Игнорирование ненужных символов

Третьим способом защиты от некорректного ввода информации является игнорирование ненужных символов (рис. 7). Например, в поле для ввода даты рождения система не даёт вводить другие символы, кроме цифр[6].

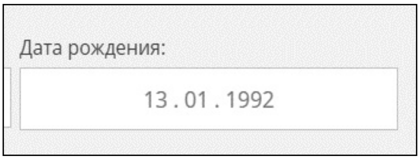

Рис. 7. Реакция системы на неверный ввод.

Таким образом, можно сделать вывод, что существует три основных способа проверки ввода информации [9]:

– предотвращение некорректного пользовательского ввода, то есть до ввода;

– пользователь может вводить всё, что хочет, но осуществляется проверка ввода на корректность; если проверка прошла успешно, то выполняется конвертация данных в переменную;

– пользователь может вводить всё, что хочет, но при операции извлечения данных оператором параллельно создаются исправления возможных ошибок.

Перевод из двоичной в восьмеричную систему счисления

Как отмечалось во введении (и во втором пункте), разработка алгоритмов защиты от ошибок затрагивает сами принципы построения таких алгоритмов и, по-видимому, носит фундаментальный характер. Поэтому рассмотрим построение алгоритма на примере перевода из одной системы счисления в другую. Для этого напомним простейшие операции перевода из двоичной в восьмеричную.

Система счисления [10] – знаковая система, в которой приняты определённые правила записи чисел. Знаки, с помощью которых записываются числа, называются цифрами. Их совокупность называется алфавитом, а их количество – основанием системы счисления [11].

Двоичная система счисления имеет основание – 2, состоит из двух символов, следовательно, её алфавит: 0,1 (рис. 8).

Рис. 8. Двоичная система счисления.

6 См., например, сайт: Здравоохранение: электронная регистрация // Портал государственных услуг Российской Федерации. Московская область. URL: https://uslugi.mosreg.ru/zdrav/ (дата обращения: 20.12.2018).

Восьмеричная система счисления имеет основание – 8, следовательно, состоит из восьми символов: 0 – 7 (рис. 9).

Рис. 9. Восьмеричная система счисления.

Существует несколько алгоритмов перевода из двоичной системы счисления в восьмеричную. Следует определить наиболее удобный из них для реализации поставленной цели. Наиболее распространённым является перевод из двоичной системы счисления в десятичную, а из десятичной в восьмеричную [12].

При переводе числа из системы счисления с основанием 2 в десятичную систему необходимо представить это число в виде суммы произведений степеней основания двоичной системы счисления на соответствующие цифры числа и выполнить арифметические вычисления. Формула перевода имеет вид [11; 13; 14]:

$$a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_1a_0 = a_{n-1}2^{n-1} + a_{n-2}2^{n-2} + \ldots + a_0 2^0, \qquad (1)$$

где q – основание системы счисления, a – цифры двоичного числа, n – количество целых разрядов числа.

Например, если число 10001 перевести из двоичной системы счисления в десятичную, используя представленную формулу, получится 19:

$$10011_2 = 1\cdot 2^4 + 0\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0. \qquad (2)$$

Далее необходимо перевести полученное число из десятичной системы счисления в восьмеричную. Для этого необходимо воспользоваться методом последовательного деления десятичного числа на 8, а затем выписыванием последнего частного и остатков в обратном порядке (рис. 10) [4; 10; 13].

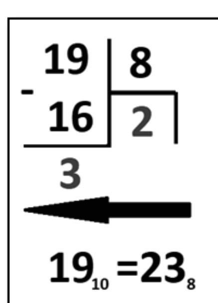

Рис. 10. Перевод из 10-ой системы счисления в 8-ую.

Второй алгоритм напрямую преобразует двоичное число в восьмеричное.

Для реализации перевода из двоичной системы счисления в восьмеричную воспользуемся традиционной таблицей систем счисления, см. табл. 1 [10; 11].

– разделить число на триады от младших разрядов к старшим (справа налево);

– заменить каждую триаду двоичных чисел соответствующей восьмеричной цифрой по таблице 1;

– недостающие до триады позиции заполнить незначащими нулями.

Таблица 1. Системы счисления

Основание системы счисления			
10	**2**	**8**	**16**
0	0	0	0
1	1	1	1
2	10	2	2
3	11	3	3
4	100	4	4
5	101	5	5
6	110	6	6
7	111	7	7
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F
16	10000	20	10
17	10001	21	11
18	10010	22	12
19	10011	23	13
20	10100	24	14

Каждый разряд двоичного числа содержит 1 бит информации. Для записи восьмеричных чисел используются восемь цифр, то есть в каждом разряде числа возможны 8 вариантов записи. Решаем показательное уравнение: $8 = 2^i$. Так как $8 = 2^3$, то $i = 3$ бита [11], то есть каждый разряд восьмеричного числа содержит 3 бита информации.

Таким образом, для перевода целого двоичного числа в восьмеричное, его нужно разбить на группы по три цифры, справа налево, а затем преобразовать каждую группу в восьмеричную цифру. Если в последней, левой, группе окажется меньше трёх цифр, то необходимо её дополнить слева нулями.

Переведём таким способом двоичное число 101001_2 в восьмеричное:

$$101_2 => 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 5 \quad (3)$$

$$001_2 => 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 1 \quad (4)$$

Ответ: 51_8

Решение

Преобразование двоичной системы счисления в восьмеричную, удобную для использования в компьютере.

Проведённый анализ алгоритмов перевода из 2-ой системы счисления в 8-ую позволяет разработать обобщённый алгоритм этого перевода (рис. 11):

1) имеется двоичное число, которое требуется перевести в восьмеричную систему;

2) данное число необходимо разделить по три ячейки (триады) справа налево, так как $2^3 = 8$. При этом нужно принять во внимание то, что если в крайней триаде не хватает ячеек, то они дополняются нулями;

3) каждую триаду следует представить в виде чисел: 4, 2, 1;

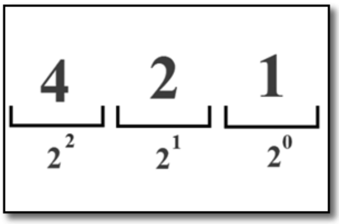

Рис. 11. Представление ячеек.

4) следующий шаг зависит от выбранного метода.

Первый метод заключается в подстановке данных в формулу, как указано на рис. 12.

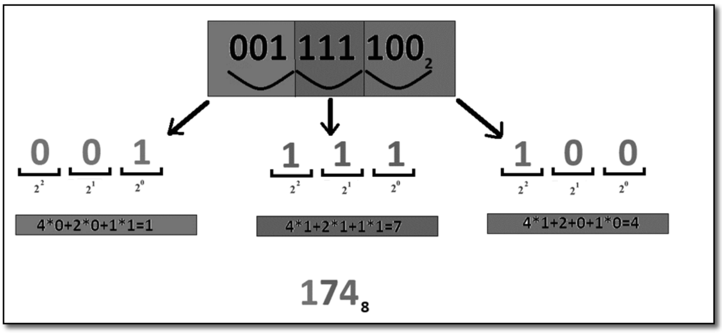

Рис. 12. Первый вариант перевода.

Второй метод позволяет быстро вывести ответ перевода, избегая расписывания формулы (рис. 13).

Алгоритм заключается в рассмотрении отдельных ячеек каждой триады. Если ячейка заполнена 1, то значение истинно, если 0, то ложно или пустое. Истинные значения суммируются, как показано на рисунке 13.

Третий метод является наиболее простым, но неудобным для восприятия. Заключается он в применении таблицы систем счисления в виде таблицы 1.

При составлении калькулятора систем счисления, будем использовать первый вариант, рис. 12, так как он является наиболее понятным для компьютера.

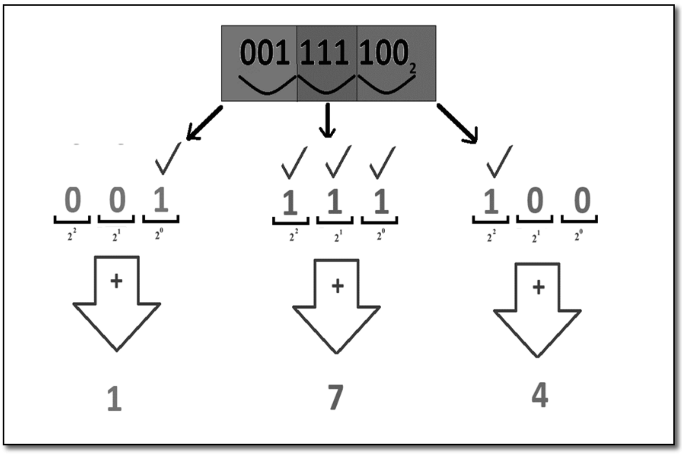

Рис. 13. Второй метод перевода.

Построение алгоритма защиты от неопытного пользователя на примере перевода из 2-ой в 8-ую систему счисления.

Для исправления основных недостатков калькуляторов перевода системы счисления разработан алгоритм, представленный на блок-схеме (рис. 14).

Защита от неопытного пользователя на примере перевода из 2-ой в 8-ую систему отсчёта.

После анализа статей по решению подобной проблемы на разных языках программирования [1; 2; 9; 14] был сделан вывод, что лучше предотвратить ошибки в начале ввода информации: ограничить допустимые символы (алфавит двоичной системы счисления).

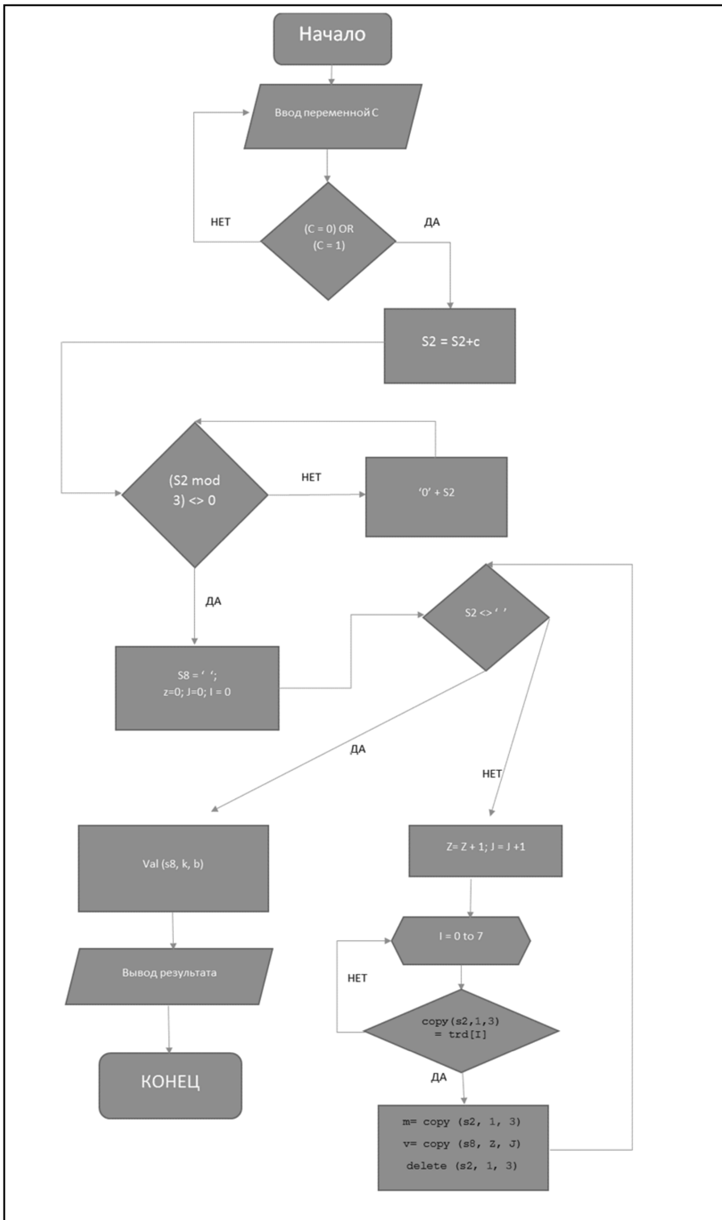

Рис. 14. Блок-схема перевода из 2-ой в 8-ую системы счисления.

Изначально пользователь вводит цифры двоичного числа (переменную *C*). Программа во время ввода проверяет, соответствует ли символ алфавиту системы счисления. Если соответствует, то продолжает перевод, если нет, то не вводит символ, а возвращает в ввод. В PascalABC можно легко реализовать указанный алгоритм. Для этого необходимо ввести переменную символа и определить алфавит двоичной системы счисления (рис. 15).

```
if c in ['0','1'] then
 begin
  write(c);
  s2:=s2+c;
 end;
```

Рис. 15. Алгоритм проверки символов.

Для исправления второй ошибки калькулятора с коррекцией конечного результата необходимо произвести преобразование переменной из строкового типа в числовой, в нашем случае, – целочисленный. Таким образом, получается переменная типа «строка», в которой записаны цифры “0000000” или “0000132”. Чтобы избавится от ненужных (лишних) символов, используется процедура перевода из строкового типа в числовой. При выполнении этой операции все “0”, будут убраны. Для этого необходимо воспользоваться функцией val для перевода из одного типа данных в другой (см. рис. 16).

```
val(s8,k,b);
write('Число в 8 системе счисления: ', k);
readln
End.
```

Рис. 16. Коррекция конечного результата.

Готовая программа указана на рис. 17. При введении 00000000000 программа выдает один ноль, что является корректным результатом (рис. 18). Также при введении 00000001 происходит коррекция конечного результата (рис. 19).

```
uses crt;
const trd:array[0..7] of string[3]=('000','001','010','011','100','101','110','111');
var s2, s8, m, v: string;
    i, j, z, k, b: integer;
    c: char;

Begin
clrscr;
TextColor(green);

s2:='';
writeln('Введите число в 2 системе счисления, и нажмите Enter:');
repeat
c:=readkey;

if c in ['0','1'] then
 begin
  write(c);
  s2:=s2+c;
 end;

 if c=#13 then writeln;
 until c=#13;
 while length(s2) mod 3 <> 0 do s2:='0'+s2;
 s8:='';
 writeln('Делим введённое число на триады');

   z:=0;
   j:=0;
 while s2 <> '' do

   begin
    z:=z+1;
    j:=j+1;
   for i:= 0 to 7 do
   if copy(s2,1,3)= trd[i] then s8:=s8+chr(i+48);

   m:= copy(s2,1,3);
   v:= copy(s8,z,j);
   writeln(copy(s2,1,3),'=',m[1],'*4','+',m[2],'*2','+',m[3],'*1', '=' ,v);
   delete(s2,1,3);
   end;

  val(s8,k,b);
  write('Число в 8 системе счисления: ', k);
  readln
  End.
```

Рис. 17. Полный текст программы.

```
Перевод из 2 в 8.exe
Введите число в 2 системе счисления, и нажмите Enter:
00000000000
Делим введённое число на триады
000=0*4+0*2+0*1=0
000=0*4+0*2+0*1=0
000=0*4+0*2+0*1=0
000=0*4+0*2+0*1=0
Число в 8 системе счисления: 0
```

Рис. 18. Коррекция конечного результата при введении 00000000000.

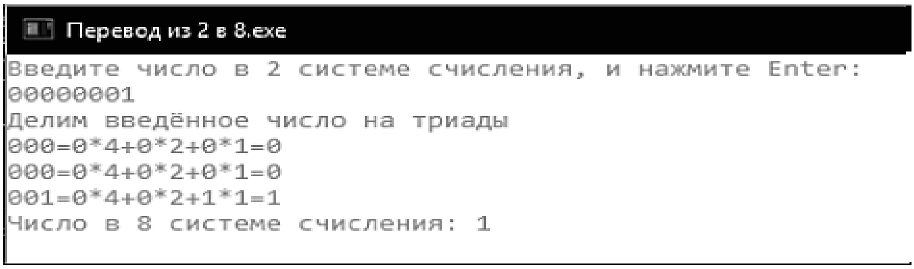

Рис. 19. Коррекция конечного результата при введении 00000001.

Таким образом, разработан алгоритм защиты от нарушений правил ввода информации с коррекцией конечного результата на примере калькулятора перевода из двоичной системы счисления в восьмеричную.

Выводы

Основной проблемой калькуляторов перевода из одной системы счисления в другую является то, что система допускает ошибки неверного ввода информации со стороны пользователя и отсутствие коррекции конечного результата. В результате анализа основных алгоритмов реакции разных систем на некорректный ввод был разработан алгоритм защиты от нарушений правил ввода информации с коррекцией конечного результата на примере калькулятора перевода из двоичной системы счисления в восьмеричную.

Статья поступила в редакцию 17.01.2019 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Chubatov R. Validation and Error Handling in AngularJS Applications [Электронный ресурс] // SteelKiwi : [сайт]. URL: https://steelkiwi.com/blog/validation-error-handling-angularjs-applicatios/ (дата обращения: 20.12.2018).
2. Применение алгоритма нечетного поиска в PHP [Электронный ресурс] // habr : [сайт]. URL: https://habr.com/post/115394/ (дата обращения: 20.12.2018).
3. Чувилин К. В. Эффективный алгоритм сравнения документов в формате LATEX // Компьютерные исследования и моделирование. 2015. Т. 7. № 2. С. 329–345.
4. Hariprasad P. Minimize Errors in Mobile App Forms Using Interaction Design Patterns [Электронный ресурс] // Medium : [сайт]. URL: https://medium.com/ux-for-india/minimize-errors-in-mobile-app-forms-using-interaction-design-patterns-3e88211f633d (дата обращения: 20.12.2018).
5. Popov N., Jebelean T. A Complete Method for Algorithm Validation [Электронный ресурс]. URL: http://www3.risc.jku.at/publications/download/risc_3915/PopJeb-AUTOMATHEO.pdf (дата обращения: 20.12.2018).
6. Laubheimer P. Preventing User Errors: Avoiding Unconscious Slips [Электронный ресурс] // Nielsen Norman Group : [сайт]. URL: https://www.nngroup.com/articles/slips/ (дата обращения: 20.12.2018).
7. Заикин М. Ю., Долгополов Е. С., Обухова О. Л., Соловьев И. В. Технология предотвращения дублирования библиографических описаний в базе данных научных пу-

бликаций БИАС ИПИ РАН // Системы и средства информатики. 2015. Т. 25. № 1. С. 168–185.
8. Сегалович И. В. Как работают поисковые системы // COLTA.RU. URL: https://www.colta.ru/articles/specials/4070 (дата обращения: 20.12.2018).
9. Ворон Ю. В. Урок №72. Обработка некорректного пользовательского ввода [Электронный ресурс] // Ravesli: программирование для начинающих : [сайт]. URL https://ravesli.com/urok-72-obrabotka-nekorrektnogo-vvoda-cherez-std-cin/ (дата обращения: 20.12.2018).
10. Kushwaha K. Number System and base conversions [Электронный ресурс] // GeeksforGeeks : [сайт]. URL: https://www.geeksforgeeks.org/number-system-and-base-conversions/ (дата обращения: 20.12.2018).
11. Бурдинский И. Н. Системы счисления и арифметика ЭВМ: учеб. пособие. Хабаровск: Издательство Тихоокеанского государственного университета, 2008. 79 с.
12. Complete Description of Well-known Number Systems using Single Table / Latif S., Qayyum J., Lal M., Khan F. // International Journal of Electrical & Computer Sciences. 2011. Vol. 11. No. 3. P. 23–29.
13. Parhami B. Number Representation and Computer Arithmetic // Encyclopedia of Information Systems. USA: Academic Press, 2001. P. 317–333.
14. Хабибулин И. Ш. Программирование на языке высокого уровня. С/С++ СПб.: Санкт-Петербург, 2006. 512 с.

REFERENCES

1. Chubatov R. Validation and Error Handling in AngularJS Applications. In: *SteelKiwi*. Available at: https://steelkiwi.com/blog/validation-error-handling-angularjs-applicatios/ (accessed: 20.12.2018).
2. [Application of fuzzy search algorithms in PHP]. In: *habr*. Available at: https://habr.com/post/115394/ (accessed: 20.12.2018).
3. Chuvilin K. V. [An efficient algorithm for comparing LATEX documents]. In: *Komp'yuternye issledovaniya i modelirovanie* [Computer Research and Modeling], 2015, vol. 7, no. 2, pp. 329–345.
4. Hariprasad P. Minimize errors in mobile app forms using interaction design patterns. In: *Medium*. Available at: https://medium.com/ux-for-india/minimize-errors-in-mobile-app-forms-using-interaction-design-patterns-3e88211f633d (accessed: 20.12.2018).
5. Popov N., Jebelean T. A Complete method for algorithm validation. Abailable at: http://www3.risc.jku.at/publications/download/risc_3915/PopJeb-AUTOMATHEO.pdf (accessed: 20.12.2018).
6. Laubheimer P. Preventing user errors: avoiding unconscious slips. In: *Nielsen Norman Group*. Available at: https://www.nngroup.com/articles/slips/ (accessed: 20.12.2018).
7. Zaikin M. Yu., Dolgopolov E. S., Obukhova O. L., Solov'ev I. V. [Technology for prevention of duplication of bibliographic descriptions in the scientific database BIAS IPI RAS]. In: *Sistemy i sredstva informatiki* [Systems and Means of Informatics], 2015, vol. 25, no. 1, pp. 168–185.
8. Segalovich I. V. [How search engines work]. In: *COLTA.RU*. Available at: https://www.colta.ru/articles/specials/4070 (accessed: 20.12.2018).
9. Voron Yu. V. [Lesson number 72. Processing invalid user input]. In: *Ravesli: programming for beginners*. Available at: https://ravesli.com/urok-72-obrabotka-nekorrektnogo-vvoda-cherez-std-cin/ (accessed: 20.12.2018).

10. Kushwaha K. Number system and base conversions. In: *GeeksforGeeks.* Available at: https://www.geeksforgeeks.org/number-system-and-base-conversions/ (accessed: 20.12.2018).
11. Burdinskii I. N. Sistemy schisleniya i arifmetika EVM [Number system and arithmetic of computers]. Khabarovsk, Pacific National University Publ., 2008. 79 p.
12. Latif S., Qayyum J., Lal M., Khan F. Complete description of well-known number systems using single table. In: *International Journal of Electrical & Computer Sciences*, 2011, vol. 11, no. 3, pp. 23–29.
13. Parhami B. Number representation and computer arithmetic. In: *Encyclopedia of Information Systems*. USA, Academic Press Publ., 2001. pp. 317–333.
14. Khabibulin I. Sh. *Programmirovanie na yazyke vysokogo urovnya* C/C++ [Programming in high level language C/C++]. St. Petersburg, Sankt-Peterburg Publ., 2006. 512 p.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Шабанова Анжела Владимировна – студент физико-математического факультета Московского государственного областного университета;
e-mail: anzhela.shabanova.97@mail.ru;

Калашников Евгений Владимирович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительной математики и методики преподавания информатики Московского государственного областного университета;
e-mail: ekevkalashnikov1@gmail.com

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Anjela V. Shabanova – student of Faculty of Physics and Mathematics, Moscow Region State University;
e-mail: anzhela.shabanova.97@mail.ru;

Evgenii V. Kalashnikov – Doctor in physical and mathematical sciences, Professor at the Department of Computational Mathematics and Informatics Teaching Methods, Moscow Region State University,
e-mail: ekevkalashnikov1@gmail.com

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Шабанова А. В., Калашников Е. В. Алгоритм защиты от нарушений правил ввода инфомации с коррекцией конечного результата // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2019. № 2. С. 106–121.
DOI: 10.18384-2310-7251-2019-2-106-121

FOR CITATION

Shabanova A. V., Kalashnikov E. V. Algorithm of protection against violations of the rules of information input and correction of the final result In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*, 2019, no. 2, pp. 106–121.
DOI: 10.18384-2310-7251-2019-2-106-121

ВЕСТНИК
МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
ОБЛАСТНОГО УНИВЕРСИТЕТА

Научный журнал «Вестник Московского государственного областного университета» основан в 1998 г. Сегодня выпускается десять журналов (предметных серий) "Вестника Московского государственного областного университета": «История и политические науки», «Экономика», «Юриспруденция», «Философские науки», «Естественные науки», «Русская филология», «Физика-математика», «Лингвистика», «Психологические науки», «Педагогика». Журналы включены в составленный Высшей аттестационной комиссией Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание учёной степени кандидата наук, на соискание учёной степени доктора наук по наукам, соответствующим названию серии. Журнал включён в базу данных Российского индекса научного цитирования (РИНЦ).

Печатная версия журнала зарегистрирована в Федеральной службе по надзору за соблюдением законодательства в сфере массовых коммуникаций и охране культурного наследия. Полнотекстовая версия журнала доступна в Интернете на платформах Научных электронных библиотек (www.elibrary.ru, cyberleninka.ru), а также на сайте журнала (www.vestnik-mgou.ru).

ВЕСТНИК
МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ОБЛАСТНОГО УНИВЕРСИТЕТА

СЕРИЯ: ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА
2019. № 2

Над номером работали:

Литературный редактор М.С. Тарасова
Переводчик И.А. Улиткин
Корректор М.С. Тарасова
Компьютерная верстка Н.Н. Жильцов

Отдел по изданию научного журнала
«Вестник Московского государственного областного университета»
Информационно-издательского управления МГОУ
105005, г. Москва, ул. Радио, д. 10А, офис 98
тел. (495) 723-56-31; (495) 780-09-42 (доб. 6101)
e-mail: vest_mgou@mail.ru
сайт: www.vestnik-mgou.ru

Формат 70x108/16. Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура «Minion Pro».
Тираж 500 экз. Уч.-изд. л. 6,0, усл. п. л. 7,75.
Подписано в печать: 28.06.2019. Дата выхода в свет: 04.07.2019. Заказ № 2019/06-05.
Отпечатано в ИИУ МГОУ
105005, г. Москва, ул. Радио, 10А