



Вестник

московского государственного
областного университета

Библиотека МГОУ
Читальный зал уч.к.2

Серия

«ФИЗИКА-
МАТЕМАТИКА»

3 / 2009

МАТЕМАТИКА

УДК 517.217

**К ТЕОРИИ ОТРАЖЕНИЯ ПЛАЗМЕННЫХ ВОЛН ОТ ГРАНИЦЫ
С ЗЕРКАЛЬНО–АККОМОДАЦИОННЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ**

Н.В. Грициенко, А.В. Латышев, А.А. Юшканов

*Московский государственный областной университет
105005, Москва, ул. Радио, д. 10а*

Аннотация. Аналитически решена линеаризованная задача об отражении плазменной волны от границы полупространства. Рассматриваются зеркально–аккомодационные условия отражения волны от границы плазмы. Коэффициент отражения волны найден как функция исходных параметров задачи, показана его зависимость от коэффициента аккомодации нормального импульса электронов.

Ключевые слова: вырожденная плазма, полупространство, коэффициент аккомодации нормального импульса, зеркально–аккомодационное граничное условие, длинноволновой предел, коэффициент отражения волны

ВВЕДЕНИЕ

Изучение поведения вырожденной электронной плазмы, процессов, происходящих в плазме под действием электрического поля, плазменных волн становится всё более актуальным в наше время в связи с проблемами таких интенсивно развивающихся отраслей, как микроэлектроника, нанотехнологии и других областей научно-технического знания [1].

В данной работе аналитически решена линеаризованная задача об отражении плазменной волны от границы полупространства проводящей среды. Рассматриваются зеркально–аккомодационные условия для отражения электронов от границы.

Работа является продолжением исследований поведения электронной плазмы во внешнем продольном переменном электрическом поле [4 - 10].

При решении задачи автором рассматривается общий случай - учитывается аккомодация нормального импульса электронов при взаимодействии с поверхностью.

Получено выражение для коэффициента отражения волны и показано, что в случае, когда коэффициент аккомодации нормального импульса электронов принимает значение, равное нулю, коэффициент отражения волны выражается известной формулой, полученной ранее в [7, с. 20], [9, с. 253].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть вырожденная плазма занимает полупространство $x > 0$. Возьмём τ - модельное уравнение Больцмана [4, с. 488], [9, с. 229], [10]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial r} + e_0 \mathbf{E} \frac{\partial f}{\partial p} = \nu(f_{eq} - f), \quad (1)$$

и уравнение Максвелла для электрического поля

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad (2)$$

$$\rho = e_0 \int (f - f_0) \frac{2d^3 p}{(2\pi\hbar)^3}, \quad d^3 p = dp_x dp_y dp_z.$$

Здесь f_{eq} - локально-равновесная функция распределения Ферми, $f_{eq} = H(\varepsilon_F(t, x) - \varepsilon)$, $H(x)$ - единичная «ступенька» Хэвисайда, f_0 - невозмущённая функция распределения Ферми (абсолютный фермиан), $f_0 = H(\varepsilon_F - \varepsilon)$, $p = mv$ - импульс электрона, $\varepsilon_F(t, x) = \frac{mv_F^2(t, x)}{2}$ - возмущённая кинетическая энергия Ферми, $\varepsilon = \frac{mv^2}{2}$ - кинетическая энергия электрона, $\varepsilon_F = \frac{mv_F^2}{2}$ - невозмущённая кинетическая энергия Ферми, e_0 - заряд электрона, ρ - плотность заряда, $\hbar$ - постоянная Планка, ν - эффективная частота рассеяния электронов.

Линеаризуем функцию распределения электронов f и локально-равновесную функцию распределения f_{eq} относительно абсолютного фермиана $f_0(\varepsilon)$:

$$f = f_0(\varepsilon) + f_1(x, v_x, t), \quad (3)$$

$$f_{eq} = f_0(\varepsilon_F - \varepsilon) + (\varepsilon_F(t, x) - \varepsilon)\delta(\varepsilon_F - \varepsilon). \quad (4)$$

Самосогласованное электрическое поле внутри плазмы $\mathbf{E}$ будем искать в виде $\mathbf{E} = (E(x)\exp(-i\omega \cdot t), 0, 0)$.

С помощью равенств (3) и (4) вместо уравнений (1) и (2) получаем следующие уравнения:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + v_x \frac{\partial f_1}{\partial x} + \nu f_1 = \delta(\varepsilon_F - \varepsilon) [e_0 \exp(-i\omega t) E(x) v_x + \nu(\varepsilon_F(t, x) - \varepsilon_F)], \quad (5)$$

$$\frac{dE(x)}{dx} = \frac{8\pi e_0}{(2\pi\hbar)^3} e^{i\omega t} \int f_1 d^3 p. \quad (6)$$

Из закона сохранения числа частиц

$$\int f_{eq} \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} d^3 p = \int f \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} d^3 p \quad (7)$$

определим величину $\varepsilon_F(t, x) - \varepsilon_F$. Согласно (3), (4) получаем:

$$f_{eq} - f = (\varepsilon_F(t, x) - \varepsilon_F) \delta(\varepsilon_F - \varepsilon) - f_1. \quad (8)$$

Подставляя (8) в (7), имеем:

$$(\varepsilon_F(t, x) - \varepsilon_F) \int \delta(\varepsilon_F - \varepsilon) d^3 p = \int f_1 d^3 p. \quad (9)$$

Из уравнения (5) следует, что функцию f_1 можно искать в виде

$$f_1 = e^{-i\omega t} \delta(\varepsilon_F - \varepsilon) \varepsilon_F h(x, \mu), \quad \mu = \frac{v_x}{v}. \quad (10)$$

Из выражения (10) следует, что функция $h(x, \mu)$ – безразмерная. Представим уравнения (5), (6) и (9) в виде, записанном относительно функции $h(x, \mu)$:

$$-i\omega \varepsilon_F h(x, \mu) + v_x \varepsilon_F \frac{\partial h}{\partial x} + v \varepsilon_F h(x, \mu) = e_0 v_x E(x) + v \cdot e^{i\omega t} (\varepsilon_F(t, x) - \varepsilon_F), \quad (11)$$

$$\frac{dE(x)}{dx} = \frac{8\pi e_0 \varepsilon_F}{(2\pi\eta)^3} \int \delta(\varepsilon_F(t, x) - \varepsilon) h(x, \mu) d^3 p, \quad (12)$$

$$e^{i\omega t} (\varepsilon_F(t, x) - \varepsilon_F) \int \delta(\varepsilon_F - \varepsilon) d^3 p = \varepsilon_F \int \delta(\varepsilon_F - \varepsilon) h(x, \mu) d^3 p. \quad (13)$$

При помощи равенства (13) найдём:

$$(\varepsilon_F(t, x) - \varepsilon_F) = e^{-i\omega t} \frac{\varepsilon_F}{2} \int_{-1}^1 h(x, \mu') d\mu'. \quad (14)$$

С помощью (14) равенства (11) и (12) преобразуются к следующему виду:

$$(v - i\omega) h(x, \mu) + v_F \mu \frac{\partial h(x, \mu)}{\partial x} = \frac{e_0 v_F \mu}{\varepsilon_F} E(x) + \frac{v}{2} \int_{-1}^1 h(x, \mu') d\mu', \quad (15)$$

$$\frac{dE(x)}{dx} = \frac{16\pi^2 e_0 \varepsilon_F m^2 v_F}{(2\pi\eta)^3} \int_{-1}^1 h(x, \mu') d\mu'. \quad (16)$$

Поделим обе части уравнения (15) на v , в (15), (16) сделаем замену переменной:

$x_1 = \frac{vx}{v_F}$, здесь x_1 – безразмерная координата. Введём безразмерную величину

$k_1 = k \frac{v_F}{\omega_p}$; тогда $kx = \frac{k_1 x_1}{\varepsilon_1}$, где $\varepsilon_1 = \frac{v}{\omega_p}$. Тогда получим следующие уравнения:

$$\mu \frac{\partial h}{\partial x_1} + z_0 h(x_1, \mu) = \mu e(x_1) + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 h(x_1, \mu') d\mu', \quad (17)$$

где

$$z_0 = 1 - i \frac{\omega}{\nu},$$

и

$$\frac{de(x_1)}{dx_1} = \frac{2\pi e_0^2}{\nu^2 \pi^2 m} \left(\frac{\nu_F m}{\eta} \right)^3 \int_{-1}^1 h(x_1, \mu') d\mu', \quad (18)$$

где $e(x) = \frac{e_0 \nu_F}{\nu \varepsilon_F} E(x)$.

Воспользовавшись формулой $\nu_F = (3\pi^2 n)^{1/3} \frac{\eta}{m}$, где n - концентрация (числовая плотность электронов), обозначив переменную x_1 снова через x , перепишем равенства (17) и (18) в безразмерном виде [4, с. 489], [6, с. 426], [7, с. 17], [9, с. 234]:

$$\mu \frac{\partial h(x, \mu)}{\partial x} + z_0 h(x, \mu) = \mu e(x) + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 h(x, \mu') d\mu', \quad (19)$$

$$\frac{de(x)}{dx} = \frac{3\omega_p^2}{2\nu^2} \int_{-1}^1 h(x, \mu') d\mu', \quad x > 0, \quad |\mu| < 1. \quad (20)$$

Здесь ω_p - ленгмюровская (собственная) частота плазмы, $\omega_p^2 = \frac{4\pi e_0^2 n}{m}$.

Пусть на границу плазмы, лежащую в плоскости $x=0$, движется волна $E_1 \exp(-i(kx/\varepsilon_1 + \omega t))$, отражается волна $E_2 \exp(i(kx/\varepsilon_1 - \omega t))$, где k - волновое число, ω - частота колебаний волны, причём зависимость $\omega = \omega(k)$ определяется дисперсионным уравнением $\lambda(z) = 0$ (определение дисперсионной функции $\lambda(z)$ см. ниже).

Требуется определить, какая часть энергии волны поглощается при отражении электронов от границы, а какая – отражается от границы плазмы, и найти сдвиг фазы волны, т.е. вычислить отношение амплитуд падающей и отражённой от границы волн и аргумент отношения амплитуд. Амплитуда E_1 задана, E_2 – неизвестная амплитуда, подлежащая отысканию из решения задачи. Амплитуда E_2 зависит от параметров задачи k и ε_1 .

Условие на электрическое поле имеет вид:

$$e(0) = 0. \quad (21)$$

Данное условие означает, что электрическое поле за пределами плазмы отсутствует.

Условие непротекания для функции распределения электронов записывается в виде:

$$\int_{-1}^1 \mu h(0, \mu) d\mu = 0. \quad (22)$$

Зеркально–аккомодационное граничное условие на функцию распределения электронов имеет вид:

$$h(0, \mu) = h(0, -\mu) + A_1 + A_2 \mu, \quad 0 < \mu < 1. \quad (23)$$

Коэффициент аккомодации нормального импульса определяется следующим равенством:

$$\alpha_p = \frac{P_i - P_r}{P_i - P_s}, \quad 0 \leq \alpha_p \leq 1, \quad (24)$$

где P_i и P_r - потоки импульсов падающих на поверхность и отраженных от нее электронов, $P_i = \int_{-1}^0 \mu^2 h(0, \mu) d\mu$, $P_r = \int_0^1 \mu^2 h(0, \mu) d\mu$, а P_s – поток импульса отраженных от поверхности таких электронов, которые находятся в термодинамическом равновесии со стенкой,

$$P_s = \int_0^1 \mu^2 h_s(\mu) d\mu,$$

где $h_s(\mu) = A_s$, $0 < \mu < 1$.

Равновесная функция распределения $h_s(\mu)$ должна также удовлетворять условию непротекания, которое для нее имеет следующий вид:

$$\int_{-1}^0 \mu h(0, \mu) d\mu + \int_0^1 \mu h_s(\mu) d\mu = 0.$$

Константы A_1 и A_2 определяются из условия непротекания (22), граничных условий (23) и определения коэффициента аккомодации нормального импульса электронов (24).

Условие непротекания приводит к уравнению - условию на поле:

$$E_1 + E_2 + \int_0^1 E(\eta) d\eta = 0. \quad (25)$$

Определение функции $E(\eta)$ см. ниже – это второе уравнение из системы (29).

Вычислим полный поток импульса $P_0 = P_i + P_r$. Получаем, что

$$P_0 = 2P_r - \frac{1}{3}A_1 - \frac{1}{4}A_2 .$$

Тогда из определения коэффициента аккомодации нормального импульса (24) и условий непротекания выводим следующее уравнение:

$$\alpha_p P_r + (1 - \alpha_p) \left(\frac{1}{3}A_1 + \frac{1}{4}A_2 \right) - \frac{1}{3}A_s \alpha_p = 0 . \quad (26)$$

Первое равенство из условия непротекания (22) при подстановке выражения (23) для функции распределения электронов даёт $A_1 = -\frac{2}{3}A_2$, из второго получаем $A_s = 2 \int_0^1 \mu \cdot h(0, \mu) d\mu$; при подстановке полученных выражений в (26) приходим к соотношению, которое понадобится нам в дальнейшем:

$$\int_0^1 \left(\mu^2 - \frac{2}{3}\mu \right) h(0, \mu) d\mu + \frac{1}{36}A_2 \frac{1 - \alpha_p}{\alpha_p} = 0 . \quad (27)$$

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Следуя методу Фурье разделения переменных, получаем характеристическую систему уравнений. Не выписывая эту систему, в пространстве обобщенных функций находим её собственные функции:

$$\begin{aligned} \Phi(\eta, \mu) &= F(\eta, \mu) \frac{E(\eta)}{z_0}, \\ F(\eta, \mu) &= P \frac{\mu\eta - \eta_1^2}{\eta - \mu} - 2\eta_1^2 z_0 \frac{\lambda(\eta)}{\eta} \delta(\eta - \mu) , \end{aligned} \quad (28)$$

где $\lambda(z)$ – дисперсионная функция задачи (см. [4, с. 491], [6, с. 427], [7, с. 18]),

$$\lambda(z) = 1 - \frac{z}{2\eta_1^2 z_0} \int_{-1}^1 \frac{\mu z - \eta_1^2}{\mu - z} d\mu , \quad \eta_1^2 = \frac{\varepsilon_1}{3} \frac{v - i\omega_p}{\omega_p} .$$

Система уравнений (19)-(20) с граничными условиями (23) имеет решение, представимое в виде разложения по собственным функциям характеристической системы:

$$h(x, \mu) = \frac{E_2}{z_0} \frac{\eta_0 \mu - \eta_1^2}{\eta_0 - \mu} e^{\frac{ikx}{\varepsilon_1}} + \frac{E_1}{z_0} \frac{\eta_0 \mu + \eta_1^2}{\eta_0 + \mu} e^{-\frac{ikx}{\varepsilon_1}} + \frac{1}{z_0} \int_0^1 e^{-z_0 \frac{x}{\eta}} F(\eta, \mu) E(\eta) d\eta ,$$

$$e(x) = E_2 e^{i \frac{kx}{\varepsilon_1}} + E_1 e^{-i \frac{kx}{\varepsilon_1}} + \int_0^1 e^{-z_0 \frac{x}{\eta}} E(\eta) d\eta, \quad (29)$$

где $\pm \eta_0$ - нули дисперсионной функции $\lambda(z)$, вместе с точкой $\eta_i = \infty$ составляющие дискретный спектр задачи, $E(\eta)$ – неизвестная функция, называемая коэффициентом непрерывного спектра [4, с. 494], [7, с. 19], [9, с. 240].

Для решения задачи подставим представление функции распределения электронов (29) в первое из граничных условий (23), получим следующее уравнение:

$$(E_1 + E_2)\varphi(\mu) + \int_0^1 [F(\eta, \mu) - F(\eta, -\mu)] E(\eta) d\eta = z_0 A_1 + z_0 A_2 \mu, \quad (30)$$

где

$$\varphi(\mu) = \frac{\eta_0 \mu - \eta_1^2}{\eta_0 - \mu} + \frac{\eta_0 \mu + \eta_1^2}{\eta_0 + \mu}.$$

Продолжим функцию $E(\eta)$ в отрицательную полуось чётным образом, так чтобы выполнялось $E(\eta) = E(-\eta)$, и распространим уравнение (30) в интервал $(-1; 1)$ нечётным образом. В результате получаем следующее интегральное уравнение [6, с. 429], [9, с. 244]:

$$(E_1 + E_2)\varphi(\mu) + \int_{-1}^1 F(\eta, \mu) E(\eta) d\eta - z_0 A_2 \mu = z_0 A_1 \operatorname{sgn} \mu, \quad -1 < \mu < 1. \quad (31)$$

Подставим в полученное уравнение (31) собственные функции непрерывного спектра (28), получаем сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши:

$$(E_1 + E_2)\varphi(\mu) + \int_{-1}^1 \frac{\eta \mu - \eta_1^2}{\eta - \mu} E(\eta) d\eta - 2\eta_1^2 z_0 \frac{\lambda(\mu)}{\mu} E(\mu) - z_0 A_2 \mu = z_0 A_1 \operatorname{sgn} \mu. \quad (32)$$

Введём вспомогательную функцию:

$$M(z) = \int_{-1}^1 \frac{\eta z - \eta_1^2}{\eta - z} E(\eta) d\eta. \quad (33)$$

При помощи формул Сохоцкого для функций $M(z)$ и $\lambda(z)$:

$$\begin{aligned} M^+(\mu) - M^-(\mu) &= 2\pi \cdot i(\mu^2 - \eta_1^2)E(\mu), \\ \lambda^+(\mu) - \lambda^-(\mu) &= \frac{i\pi}{\eta_1^2 z_0} \mu(\eta_1^2 - \mu^2) \end{aligned} \quad (34)$$

преобразуем уравнение (32) к краевой задаче Римана, а именно к задаче определения функции по её скачку [9, с. 244] :

$$\begin{aligned} \lambda^+(\mu)[\varphi(\mu)(E_1 + E_2) + M^+(\mu) - z_0 A_2 \mu] - \\ - \lambda^-(\mu)[\varphi(\mu)(E_1 + E_2) + M^-(\mu) - z_0 A_2 \mu] &= \frac{i\pi}{\eta_1^2 z_0} z_0 A_1 \mu(\eta_1^2 - \mu) \operatorname{sgn} \mu. \end{aligned} \quad (35)$$

Общее решение задачи (35) имеет вид:

$$\lambda(z)[\varphi(z)(E_1 + E_2) + M(z) - z_0 A_2 z] = -\frac{z_0 A_1}{2\eta_1^2 z_0} \int_{-1}^1 \frac{\mu(\mu^2 - \eta_1^2) \operatorname{sgn} \mu}{\mu - z} d\mu + C_1 z.$$

Введём вспомогательную функцию:

$$T(z) = \frac{1}{2\eta_1^2 z_0} \int_{-1}^1 \frac{\mu(\mu^2 - \eta_1^2) \operatorname{sgn} \mu}{\mu - z} d\mu.$$

Тогда общее решение задачи с помощью этой функции записывается в виде:

$$M(z) = -\varphi(z)(E_1 + E_2) + z_0 A_2 z - z_0 A_1 \frac{T(z)}{\lambda(z)} + \frac{C_1 z}{\lambda(z)}, \quad (36)$$

где C_1 - произвольная постоянная.

Устраняя полюсы у решения (36) в бесконечно удалённой точке, получим:

$$C_1 = -z_0 A_2 \lambda_\infty,$$

$$z_0 A_2 = \frac{(E_1 + E_2)\lambda'(\eta_0)(\eta_1^2 - \eta_0^2)}{(2/3)T(\eta_0) - \lambda_\infty \eta_0},$$

где λ_∞ выражается следующей формулой [7, с. 19], [9, с. 23]:

$$\lambda_\infty = 1 - \frac{1}{z_0} + \frac{1}{3z_0 \eta_1^2},$$

а также

$$\lambda'(z) = \frac{1}{\eta_1^2 z_0} \left[-2z - z^2 \ln \frac{1-z}{1+z} + (\eta_1^2 - z^2) \left(\frac{1}{2} \ln \frac{1-z}{1+z} - \frac{z}{1-z^2} \right) \right],$$

$$T(z) = \frac{z}{2\eta_1^2 z_0} \int_0^1 (\mu^2 - \eta_1^2) \left(\frac{1}{\mu-z} + \frac{1}{\mu+z} \right) d\mu.$$

Коэффициент непрерывного спектра $E(\eta)$ найдём из первой формулы Сохоцкого (34) для функции $M(z)$:

$$E(\mu) = \frac{1}{2\pi i(\mu^2 - \eta_1^2)} (M^+(\mu) - M^-(\mu)). \quad (37)$$

Подставляя в уравнение (27) выражение для функции распределения (29) и коэффициент непрерывного спектра (37), получаем и интегральное уравнение Фредгольма:

$$\frac{E_1}{z_0} m(-\eta_0) + \frac{E_2}{z_0} m(\eta_0) + \frac{1}{z_0} \int_0^1 m(\eta) E(\eta) d\eta = -\frac{1}{36} A_2 \frac{1-\alpha_p}{\alpha_p},$$

где введено обозначение:

$$m(\eta) = \int_0^1 (\mu^2 - \frac{2}{3} \mu) F(\eta, \mu) d\mu.$$

Так как величины $\pm \eta_0$ обращают в нуль значение дисперсионной функции $\lambda(z)$ [4, с. 494], [7, с. 19], [9, с. 240], то отсюда нетрудно вывести следующие два равенства:

$$m(\pm \eta_0) = (\eta_0^2 - \eta_1^2) \left[-\frac{1}{2} + \left(1 \pm \eta_0 \ln \frac{\eta_0 \mu_1}{\eta_0} \right) \left(\frac{2}{3} \mu \eta_0 \right) \right],$$

$$m(\eta) = (\eta^2 - \eta_1^2) \left[-\frac{1}{2} + \left(1 + \eta \ln \frac{\eta-1}{\eta} \right) \left(\frac{2}{3} - \eta \right) \right] + 2\eta_1^2 z_0 \lambda(\eta) \left(\frac{2}{3} - \eta \right).$$

Из формул Сохоцкого (34) и выражения (36) для общего решения задачи получим явное представление для коэффициента непрерывного спектра задачи:

$$E(\eta) = \frac{1}{2\pi i(\eta^2 - \eta_1^2)} \left[C_1 \eta \left(\frac{1}{\lambda^+(\eta)} - \frac{1}{\lambda^-(\eta)} \right) + \frac{2}{3} A_2 z_0 \left(\frac{T^+(\eta)}{\lambda^+(\eta)} - \frac{T^-(\eta)}{\lambda^-(\eta)} \right) \right].$$

Пользуясь этими равенствами, приходим к выражению искомой амплитуды отражённой волны:

$$E_2 = -\frac{m(-\eta_0) - L(\eta_0)N(\eta_0)}{m(\eta_0) - L(\eta_0)N(\eta_0)} \cdot E_1, \quad (38)$$

что и заканчивает решение задачи.

Здесь

$$L(\eta_0) = \frac{(\eta_1^2 - \eta_0^2)\lambda'(\eta_0)}{2T(\eta_0) - 3\eta_0\lambda_\infty}, \quad N(\eta_0) = \frac{2}{z_0} \int_0^1 m(\eta)Q(\eta)d\eta - \frac{1 - \alpha_p}{\alpha_p},$$

$$Q(\eta) = -\frac{z_0}{2\pi i(\mu^2 - \eta_1^2)} \left[\left(\frac{1}{\lambda^+(\eta)} - \frac{1}{\lambda^-(\eta)} \right) - \frac{2}{3} \left(\frac{T^+(\eta)}{\lambda^+(\eta)} - \frac{T^-(\eta)}{\lambda^-(\eta)} \right) \right].$$

АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

На основе формулы (38) для коэффициента отражения плазменной волны $R = \left| \frac{E_2}{E_1} \right|^2$ мы получили выражение:

$$R = \left| \frac{m(-\eta_0) - L(\eta_0)N(\eta_0)}{m(\eta_0) - L(\eta_0)N(\eta_0)} \right|^2.$$

Численные расчеты показывают, что в случае длинноволнового предела (при $k \rightarrow 0, \varepsilon_1 \rightarrow 0$) значение коэффициента отражения R оказывается близким к единице.

Рассмотрим предельный случай, когда значение коэффициента аккомодации нормального импульса электронов стремится к нулю, т.е. $\alpha_p \rightarrow 0$. Рассмотрим соотношение (38), записав явное выражение для функции $N(\eta_0)$, получим:

$$\frac{E_2}{E_1} = -\frac{m(-\eta_0) - L(\eta_0) \left(\frac{2}{z_0} \int_0^1 m(\eta)Q(\eta)d\eta - \frac{1 - \alpha_p}{\alpha_p} \right)}{m(\eta_0) - L(\eta_0) \left(\frac{2}{z_0} \int_0^1 m(\eta)Q(\eta)d\eta - \frac{1 - \alpha_p}{\alpha_p} \right)}.$$

Умножая числитель и знаменатель дроби на α_p , и, учитывая, что $\alpha_p \rightarrow 0$, имеем:

$$\frac{E_2}{E_1} = -\frac{(1 - \alpha_p)L(\eta_0)}{(1 - \alpha_p)L(\eta_0)} = -1. \text{ Это означает, что из полученного нами выражения для коэф-}$$

фициента отражения вытекает известный ранее результат – значение отношения амплитуд отражённой и падающей волн при условии чисто зеркального отражения от границы без учёта аккомодации нормального импульса электронов [7, с. 20], [9, с. 253] равно -1, т.е. амплитуда отражённой волны сохраняется, а её фаза изменяется на 180° .

ЛИТЕРАТУРА

1. Ведыняпин В.В. Кинетические уравнения Больцмана и Власова. М.: Физматлит, 2001. 101 С.
2. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977, 640 с.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Физическая кинетика. М.: Наука, 1979, 528 с.
4. Латышев А.В., Юшканов А.А. Вырожденная плазма в полупространстве во внешнем электрическом поле // ТМФ. 2006. Т.147, №3, с. 487-502.
5. Латышев А.В., Юшканов А.А. Вырожденная плазма в полупространстве во внешнем электрическом поле вблизи резонанса // ФТТ. 2006. Т.48, вып. 12, с. 2113-2118.
6. Латышев А.В., Юшканов А.А. Отражение плазменной волны от плоской границы // ТМФ. 2007. Т.150, №3, с. 425-435.
7. Латышев А.В., Юшканов А.А. Отражение плазменной волны от плоской границы вырожденной плазмы // ЖТФ. 2007. Т.77, №3, с. 17-22.
8. Латышев А.В., Юшканов А.А. Электронная плазма в полупространстве металла в переменном электрическом поле // Ж. выч. матем. и матем. физ. 2001. Т.41, №8, с.1239-1251.
9. Латышев А.В., Юшканов А.А. Граничные задачи для вырожденной электронной плазмы. М.:– Изд-во МГОУ, 2006. 274 с.
10. Черчиньяни К. Теория и приложения уравнения Больцмана. М, Мир, 1978, 495 с.

**ON THE THEORY OF PLASMA WAVE
REFLECTION FROM A BOUNDARY
WITH SPECULAR ACCOMMODATIVE BOUNDARY CONDITIONS**

N. Gritsienko, A. Latyshev, A. Yushkanov

*Moscow State Regional University
10a, Radio st., Moscow 105005, Russia*

Abstract. In the present work linearized problem of plasma wave reflection from a boundary of a half-space is solved analytically. Specular accommodative boundary conditions of plasma reflection from plasma boundary are considered. Wave reflectance is found as a function of given parameters of the problem, and dependence of the reflectance on normal electron impulse accommodation coefficient is shown.

Keywords: degenerate plasma, half-space, normal electron impulse accommodation coefficient, wave reflectance, specular accommodative boundary conditions, long-wave limit.

УДК 533.72

ИЗОТЕРМИЧЕСКОЕ СКОЛЬЖЕНИЕ КВАНТОВОГО БОЗЕ-ГАЗА

С ДИФфуЗНЫМ ОТРАЖЕНИЕМ ОТ ГРАНИЦЫ

А.Ю. Квашнин

Московский государственный областной университет
105005, Москва, ул. Радио, д. 10а

Аннотация. Аналитически решена классическая задача кинетической теории – задача Крамерса об изотермическом скольжении для квантовых бозе – газов. Используется модельное кинетическое уравнение с интегралом столкновений в форме τ -модели и с частотой столкновений, пропорциональной молекулярной скорости. Проведен анализ зависимости скорости скольжения от величины параметра, представляющего собой отношение химического потенциала к произведению постоянной Больцмана на абсолютную температуру.

Ключевые слова: задача Крамерса, диффузное отражение, бозе-газ, изотермическое скольжение.

Введение

В последние годы наблюдается значительный интерес к изучению поведения квантовых газов [1, 43]. В работах Латышева А.В. и Юшканова А.А. [2, 310], [3, 80] были построены кинетического уравнения для квантовых ферми- и бозе-газов с частотой столкновений, пропорциональной модулю скорости молекул и рассмотрены задачи Смолуховского о температурном скачке и слабом испарении (конденсации).

В настоящей работе аналитически решена граничная задача об изотермическом скольжении для квантовых бозе – газов (задача Крамерса). Показано, что в классической задаче Крамерса об изотермическом скольжении безразмерная скорость скольжения не зависит от химического потенциала молекул. Однако, после вычисления вязкости квантового газа, переход от безразмерной скорости скольжения к размерной делает последнюю зависящей от химического потенциала молекул. Нахождение этой зависимости и составляет содержание настоящей работы. Показано, что когда квантовый газ переходит в классический, найденный коэффициент изотермического скольжения переходит в известное значение – в коэффициент скольжения для классического газа, найденный в [4, 51] с помощью кинетического уравнения Вильямса для больцмановских газов с частотой столкновений, пропорциональной модулю скорости молекул.

1. Постановка задачи

Рассмотрим τ - модельное или так называемое релаксационное уравнение:

$$V_x \frac{\partial f}{\partial x} = \nu_0 V (f_{eq} - f) . \quad (1)$$

Имеется полупространство $x > 0$ над плоской стенкой, лежащей в плоскости $x=0$. Предположим, что газ движется вдоль оси Y с некоторой массовой скоростью $U_y(x)$:

$$U_y(x) = \frac{1}{n} \int V_y f(x, \mathbf{V}) d^3V .$$

Предположим, что в газе задан градиент массовой скорости вдали от стенки:

$$g_v = \left(\frac{dU_y(x)}{dx} \right)_{x=\infty}.$$

Будем считать, что частота столкновений пропорциональна модулю скорости $\nu(V) = \nu_0 V$, где $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$.

Мы считаем, что газ является квантовым бозе-газом. Тогда равновесная функция распределения равна:

$$f_{eq} = \frac{1}{-1 + \exp \left[\frac{m}{2kT} (\mathbf{V} - \mathbf{U})^2 - \frac{\mu(x)}{kT} \right]},$$

где m – масса молекулы, k – постоянная Больцмана, T – абсолютная температура, $\mu(x)$ – химический потенциал молекул.

Будем считать, что молекулы отражаются от стенки чисто диффузно. Это означает, что молекулы отражаются с бозевским распределением по скоростям. Тогда получаем следующее граничное условие для отраженных молекул:

$$f(x=0, \mathbf{V}) = f_0(V), \quad V_x > 0,$$

где $f_0(V)$ – абсолютный бозиан (абсолютное распределение молекул по скоростям):

$$f_0(V) = \frac{1}{-1 + \exp \left[\frac{m}{2kT} V^2 - \frac{\mu_0}{kT} \right]}.$$

Граничное условие вдали от стенки состоит в том, что функция распределения бозе-частиц должна переходить в так называемую функцию распределения Чемпена-Энского или, что одно и то же, должна переходить в свою асимптотическую функцию распределения

$$f = f_{as}(x, \mathbf{V}) + o(1), x \rightarrow +\infty,$$

где f_{as} – линейная комбинация частных решений исходного или линеаризованного уравнения.

Требуется построить функцию распределения $f(x, \mathbf{V})$.

2. Вывод уравнения

Вернемся к уравнению (1):

$$V_x \frac{\partial f}{\partial x} = v_0 V(f_{eq} - f) .$$

Перепишем его в следующем виде:

$$V_x \frac{\partial f}{\partial (v_0 x)} = V(f_{eq} - f) .$$

Изменим масштаб, вводя новую координату: $x_1 = v_0 x$, и перепишем уравнение (1) в виде:

$$V_{x_1} \frac{\partial f}{\partial x_1} = V(f_{eq} - f) . \quad (2)$$

Далее переменную x_1 снова будем обозначать через x : $x_1 \equiv x$. Введём безразмерную скорость газовых молекул: $c = \sqrt{\beta} V$, где $\beta = \frac{m}{2kT}$. Умножим уравнение (2) на $\sqrt{\beta}$. Получим:

$$\sqrt{\beta} V_x \frac{\partial f}{\partial x} = \sqrt{\beta} V(f_{eq} - f) ,$$

или, с учетом введения безразмерной скорости:

$$c_x \frac{\partial f}{\partial x} = c(f_{eq} - f) , \quad (3)$$

где локально равновесная бозевская функция распределения преобразуется следующим образом:

$$f_{eq} = \frac{1}{-1 + \exp\left[\frac{m(\mathbf{V} - \mathbf{U})^2}{2kT} - \frac{\mu(x)}{kT}\right]} = \frac{1}{-1 + \exp(\varepsilon(x))} .$$

Здесь введено обозначение:

$$\varepsilon(x) = \frac{m(V - U(x))^2}{2kT} - \frac{\mu(x)}{kT} = \frac{m(V^2 - 2\mathbf{V}\mathbf{U}(x))}{2kT} - \frac{\mu(x)}{kT} .$$

После линеаризации этого выражения получаем:

$$\varepsilon(x) = \frac{m}{2kT} (V^2 - 2V_y U_y(x)) - \frac{\mu(x)}{kT} = C^2 - 2C_y W_y(x) - \alpha(x) .$$

Следовательно, локально равновесная функция распределения после линеаризации ее знаменателя равна:

$$f_{eq} = \frac{1}{-1 + \exp(C^2 - 2C_y W_y(x) - \alpha(x))} .$$

В данной задаче приведенный химический потенциал будем считать постоянной величиной, т.е.

$$\alpha(x) = \alpha_0 + \delta\alpha(x), \quad |\delta\alpha(x)| \ll \alpha_0 .$$

В данной задаче $\alpha(x) \equiv \alpha$, т.е. является const. Будем линеаризовать функцию f_{eq} по степеням $W_y(x)$ относительно абсолютного бозиана.

По формуле Тейлора $f(x) = f(0) + f'(0)x$ получаем:

$$f_{eq}|_{W_y(x)=0} = f_0(C) = \frac{1}{-1 + \exp(C^2 - \alpha)} ,$$

$$\frac{f_{eq}}{\partial W_y} = \frac{\exp(C^2 - \alpha - 2C_y W_y(x))(-2C_y)}{-1 + \exp(C^2 - \alpha - 2C_y W_y(x))^2} \Big|_{W_y=0} = \frac{\exp(C^2 - \alpha)2C_y}{[-1 + \exp(C^2 - \alpha)]^2} = 2g(C, \alpha)C_y ,$$

$$g(C, \alpha) = \frac{\exp(C^2 - \alpha)}{[-1 + \exp(C^2 - \alpha)]^2} .$$

Линеаризацию осуществили:

$$f_{eq} = f_0(C) + 2C_y g(C, \alpha) W_y(x) . \quad (4)$$

В формуле (4) видно, что неизвестную функцию надо искать в виде:

$$f = f_0(C, \alpha) + g(C, \alpha)\varphi(x, C) . \quad (5)$$

$\varphi(x, C)$ - новая неизвестная функция.

Вычтем из (4) соотношение (5):

$$f_{eq} - f(x, C) = 2g(C, \alpha)C_y W_y(x) - g(C, \alpha)\varphi(x, C) \quad V_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} = v_0 V [2C_y W_y(x) - \varphi]$$

Осуществим переход к безразмерной скорости, умножив на $\sqrt{\beta}$:

$$C_x \frac{\partial \varphi}{\partial (\nu_0 x)} = C [2C_y W_y(x) - \varphi(x, C)]. \quad (6)$$

Обозначим $x_1 = \nu_0 x$, а потом $x_1 \equiv x$, получим:

$$C_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + C \varphi(x, C) = 2CC_y W_y(x) .$$

В формуле (6) компонент $W_y(x)$ найдём из закона сохранения импульса. Закон сохранения импульса:

$$\int CC(f - f_{eq}) d\Omega_B = 0 .$$

$$\int CC_y g(C, \alpha) [2C_y W_y(x) - \varphi(x, C)] d^3 C = 0 .$$

$$2W_y(x) \int CC_y^2 g(C, \alpha) d^3 C = \int CC_y^2 g(C, \alpha) \varphi(x, C) d^3 C .$$

Перейдём к сферическим координатам:

$$C_x = C \cos \theta = C\mu, \quad C_y = C \sin \theta \cos \chi, \quad C_z = C \sin \theta \sin \chi$$

$$d^3 C = C^2 \sin \theta d\theta d\chi dC = -C^2 d\mu dC d\chi .$$

$$\begin{aligned} \int C^3 \sin^2 \theta \cos^2 \chi g(C, \alpha) d^3 C &= \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{C^5 (1 - \mu^2) \cos^2 \chi \exp(C^2 - \alpha) d\mu d\chi dC}{[-1 + \exp(c^2 - \alpha)]^2} = \\ &= \frac{4}{3} \pi \int_0^\infty \frac{C^5 \exp(C^2 - \alpha) dC}{[-1 + \exp(c^2 - \alpha)]^2} \end{aligned}$$

В результате получим следующее кинетическое уравнение:

$$\mu \frac{\partial \psi}{\partial x} + \psi(x, \mu, C) = \frac{3}{4} \int_{-1}^{+1} (1 - \mu'^2) d\mu' \int_0^{+\infty} e^{-C'^2} C'^5 \psi(x, \mu', C') dC' \quad (7)$$

Граничные условия имеют следующий вид:

$$\psi(0, \mu, C) = 0, 0 < \mu < 1, \quad (8)$$

$$\psi(x, \mu, C) = 2u_0 + 2q_\nu(x - \mu) + o(1), \quad x \rightarrow \infty, -1 < \mu < 0. \quad (9)$$

Так как граничные условия не зависят от C , то получаем более простое кинетическое уравнение:

$$\mu \frac{\partial \psi}{\partial x} + \psi(x, \mu, C) = \frac{3}{4} \int_{-1}^{+1} (1 - \mu'^2) \psi(x, \mu') d\mu' \quad (10)$$

3. Аналитическое решение

Разделение переменных уравнения (10) осуществим анзацем Кейза:

$$\psi_{\eta}(x, \mu) = \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right) \Phi(x, \mu) ,$$

где η - называется спектральным параметром.

Получаем характеристическое уравнение в следующем виде:

$$(\eta - \mu) \Phi(\eta, \mu) = \frac{3}{4} \eta n(\eta) , \quad (11)$$

$$n(\eta) = \int_{-1}^{+1} (1 - \mu'^2) \Phi(\eta, \mu') d\mu' . \quad (12)$$

Уравнение (11) является конечным (недифференциальным) уравнением. Условие называется нормировочным условием, нормировочным интегралом, или просто нормировкой.

В силу однородности исходного уравнения можно считать, что

$$n(\eta) \equiv \int_{-1}^{+1} (1 - \mu'^2) \Phi(\eta, \mu') d\mu' \equiv 1 , \quad (13)$$

т. е. считать, что нормировочный интеграл собственной функции тождественно равен единице.

Характеристическое уравнение можно записать в виде уравнения на собственные значения:

$$L\Phi(\eta, \mu) = \eta \Phi(\eta, \mu) \quad (14)$$

где L – оператор, действующий по формуле:

$$L\Phi(\eta, \mu) = \frac{3}{4} \int_{-1}^{+1} e^{-\mu'^2} \Phi(\eta, \mu') d\mu' + \mu \Phi(\eta, \mu) .$$

Поэтому параметр η , при котором уравнение имеет нетривиальное решение $\Phi(\eta, \mu)$, называется собственным (характеристическим) значением, или спектральным параметром, а соответствующее решение $\Phi(\eta, \mu)$ называется собственной функцией характеристического уравнения.

Собственные функции определяются выражением:

$$\Phi(\eta, \mu) = \frac{3}{4} \eta P \frac{1}{\eta - \mu} n(\eta) + g(\eta) \delta(\eta - \mu). \quad (15)$$

Здесь $g(\eta)$ - произвольная непрерывная функция, определяемая ниже из условия нормировки, символ Px^{-1} означает распределение (обобщенную функцию) - главное значение интеграла по Коши при интегрировании выражения x^{-1} , т. е. Px^{-1} означает линейный функционал, действующий по формуле

$$(P \frac{1}{x}, \varphi) = Vp \int_{-1}^1 \frac{\varphi(x)}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\int_{-1}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^1) \frac{\varphi(x)}{x} dx.$$

Дельта-функция является простейшим примером сингулярной обобщенной функции. Одним из важнейших для приложений свойств (δ -функции является следующее: свертка любой обобщенной функции f с δ -функцией равна f , $f * \delta = \delta * f = f$).

$$n(\eta) = \int_{-1}^{+1} (1 - \mu'^2) \left[\frac{3}{4} \eta P \frac{1}{\eta - \mu'} + g(\eta) \delta(\eta - \mu') \right] d\mu'. \quad (16)$$

Отсюда:

$$n(\eta) = \frac{3}{4} \eta \int_{-1}^{+1} (1 - \mu'^2) \frac{d\mu'}{\eta - \mu'} + g(\eta) \int_{-1}^{+1} (1 - \mu'^2) \delta(\eta - \mu') d\mu'. \quad (17)$$

Используя свойство дельта-функции, получаем:

$$\begin{aligned} n(\eta) &= \frac{3}{4} \eta \int_{-1}^{+1} (1 - \mu'^2) \frac{d\mu'}{\eta - \mu'} + (1 - \eta^2) g(\eta), \\ 1 - \frac{3}{4} \eta \int_{-1}^{+1} (1 - \mu'^2) \frac{d\mu'}{\eta - \mu'} &= g(\eta) (1 - \eta^2), \\ 1 - \frac{3}{4} \eta \int_{-1}^{+1} (1 - \mu'^2) \frac{d\mu'}{\eta - \mu'} &= \lambda(\eta). \end{aligned} \quad (18)$$

Отсюда:

$$g(\eta) = \frac{\lambda(\eta)}{1 - \eta^2},$$

где

$$\lambda(z) = 1 + z \frac{3}{4} \int_{-1}^{+1} (1 - u^2) \frac{du}{u - z}, \quad (20)$$

$\lambda(z)$ - дисперсионная функция Вильямса.

Тогда:

$$\Phi(\eta, \mu) = \frac{3}{4} \eta^P \frac{1}{\eta - \mu} + \frac{\lambda(\eta)}{1 - \eta^2} \delta(\eta - \mu).$$

Данное выражение представляет собой собственную функцию непрерывного спектра, отвечающую единичной нормировке. Дискретным спектром характеристического уравнения называют множество нулей дисперсионного уравнения $\lambda(z) = 0$. Это уравнение $\lambda(z)$ имеет единственный нуль - двойной нуль в точке $z = \infty$. Одно из двух решений исходного уравнения в силу его однородности является произвольной постоянной. Второе собственное решение уравнения есть разность $x - \mu$. Следовательно, функция $\psi(x, \mu) = a_1(x - \mu) + a_0$ есть линейная комбинация двух простейших линейно независимых решений:

$$\psi_+(x, \mu) = 1 \quad \text{и} \quad \psi_-(x, \mu) = x - \mu,$$

которые будем называть решениями, отвечающими дискретному спектру, или дискретными решениями уравнения. Эти решения являются частными решениями уравнения.

Подставляя собственную функцию в анзац Кейза, получаем собственное решение уравнения непрерывного спектра

$$\psi_\eta(x, \mu) = e^{-\frac{x}{\eta}} \left[\frac{3}{4} \eta^P \frac{1}{\eta - \mu} + \frac{\lambda(\eta)}{1 - \eta^2} \delta(\eta - \mu) \right]. \quad (22)$$

Для граничных значений дисперсионной функции Вильямса сверху и снизу на разрезе $\Delta = (-1, 1)$ справедливы формулы Сохоцкого

$$\lambda^\pm(\mu) = \lambda(\mu) \pm i \frac{3}{4} \pi \mu (1 - \mu^2) \quad (23)$$

где $\lambda(\mu) = 1 + \mu \frac{3}{4} \int_{-1}^{+1} \frac{1 - \tau^2}{\tau - \mu} d\tau = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} (1 - \mu^2) \left(1 + \frac{\mu}{2} \ln \frac{1 - \mu}{1 + \mu} \right), \quad \mu \in (-1, 1).$

Из формул вытекает, что

$$\begin{aligned}\lambda^+(\mu) - \lambda^-(\mu) &= i\pi \frac{3}{2} \mu(1 - \mu^2), \quad \mu \in (-1, 1), \\ \frac{1}{2} [\lambda^+(\mu) + \lambda^-(\mu)] &= \lambda(\mu), \quad \mu \in (-1, 1),\end{aligned}$$

Докажем, что наша граничная задача имеет единственное решение, представимое в виде разложения по собственным функциям характеристического уравнения

$$\psi(x, \mu) = \psi_{as}(x, \mu) + \int_0^1 e^{-\frac{x}{\eta}} \Phi(\eta, \mu) a(\eta) d\eta,$$

или

$$\psi(x, \mu) = \psi_{as}(x, \mu) + \frac{3}{4} \int_0^1 e^{-\frac{x}{\eta}} \frac{\eta a(\eta) d\eta}{\eta - \mu} + e^{-\frac{x}{\eta}} \frac{\lambda(\mu) a(\mu)}{1 - \mu^2} H_+(\mu). \quad (24)$$

Подставим $x=0$ в (24) и левую часть заменим согласно граничному условию (8), приходим к сингулярному интегральному уравнению с ядром Коши.

$$2U_0 - 2G_\nu \mu + \frac{3}{4} \int_0^1 \frac{\eta a(\eta) d\eta}{\eta - \mu} + \frac{\lambda(\mu) a(\mu)}{1 - \mu^2} = 0, \quad 0 < \mu < 1.$$

Введем вспомогательную функцию

$$N(z) = \frac{3}{4} \int_0^1 \frac{\eta a(\eta)}{\eta - z} d\eta, \quad (25)$$

аналитичную в комплексной плоскости с разрезом вдоль отрезка $[0, 1]$ действительной оси. Ее граничные значения сверху и снизу в интервале $(0, 1)$ связаны формулами Сохоцкого

$$\begin{aligned}N^+(\mu) - N^-(\mu) &= i \frac{3}{2} \pi \mu a(\mu), \quad 0 < \mu < 1. \\ \frac{1}{2} [N^+(\mu) - N^-(\mu)] &= N(\mu),\end{aligned} \quad (26)$$

где $N(\mu) = \frac{3}{4} \int_0^1 \frac{\eta a(\eta)}{\eta - \mu} d\eta, \mu \in (0, 1)$, $N(\mu)$ - сингулярный интеграл.

С помощью граничных значений функций $N(z)$ и $\lambda(z)$ сведем уравнение (26) к неоднородной краевой задаче Римана:

$$\lambda^+(\mu)[N^+(\mu) + 2U_0 - 2G_v\mu] = \lambda^-(\mu)[N^-(\mu) + 2U_0 - 2G_v\mu] \quad 0 < \mu < 1. \quad (27)$$

Рассмотрим соответствующую однородную краевую задачу Римана:

$$\frac{X^+(\mu)}{X^-(\mu)} = \frac{\lambda^+(\mu)}{\lambda^-(\mu)}, \quad 0 < \mu < 1 \quad (28)$$

В качестве решения задачи (3.18) возьмем ограниченное в концевых точках промежутка интегрирования (разреза) решение

$$X(z) = \frac{1}{z} e^{V(z)}, \quad V(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\zeta(\tau) d\tau}{\tau - z},$$

где $\lambda^\pm(\mu) = \lambda(\mu) \pm i \frac{3}{4} \pi \mu (1 - \mu^2)$, $\zeta(\tau) = \theta(\tau) - \pi$, $\theta(\tau) = \arg \lambda^+(\tau)$, причем:

$$\theta(0) = 0, \quad \zeta(\tau) = \frac{\pi}{2} - \arctg \frac{4\lambda(\tau)}{3\pi\tau(1 - \tau^2)}$$

Неоднородную краевую задачу (27) с помощью однородной (28) преобразуем к задаче определения аналитической функции по ее нулевому скачку в интервале (0,1)

$$X^+(\mu)[N^+(\mu) + 2U_0 - 2G_v\mu] = X^-(\mu)[N^-(\mu) + 2U_0 - 2G_v\mu] \quad (29)$$

$$0 < \mu < 1$$

Учитывая поведение всех функций, входящих в краевое условие (29), получим его общее решение

$$N(z) = -2U_0 + 2G_v z + \frac{c_0}{X(z)}, \quad (30)$$

где c_0 – произвольная постоянная.

Решение (30) имеет простой полюс в точке $z = \infty$, в то время как функция $N(z)$, определенная равенством (25), исчезает в бесконечности как $1/z$. Поэтому, чтобы функцию $N(z)$, определенную равенством (30) можно было принять в качестве функции $N(z)$, определенной равенством (25), устраним у решения (30) полюс в точке $z = \infty$ равенством $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{N(z)}{z} = 0$.

Потребуем, чтобы функция исчезала в бесконечности, т.е. $N(\infty) = 0$. На этом пути получаем, что $c_0 = -2G_v$, а также получаем скорость изотермического скольжения

$$U_0 = V_1 G_v = 0.581946 G_v, \quad (31)$$

где $V_1 = -\frac{1}{\pi} \int_0^1 \zeta(\tau) d\tau = 0.581946$.

Подставим решение (30) в формулу Сохоцкого (26). Найдем коэффициент непрерывного спектра $a(\eta)$:

$$\eta a(\eta) = -\frac{4G_v}{3\pi i} \left[\frac{1}{X^+(\eta)} - \frac{1}{X^-(\eta)} \right] \quad (32)$$

Таким образом, разложение установлено.

Сначала перейдем к размерным величинам в формуле (31), которую представим в виде

$$U_0 = V_1 \left(\frac{dU_y(x^*)}{dx^*} \right)_{x^*=+\infty}$$

где индекс «звездочка» относится к безразмерным величинам. Безразмерные величины связаны с размерными следующими равенствами

$$x^* = \nu_0 \sqrt{\beta_0} x, \beta_0 = \frac{m}{2kT_0}, U_y(x^*) = \sqrt{\beta_0} u_y(x)$$

Для размерной скорости имеем: $u_{sl} = \frac{V_1}{\nu_0 \sqrt{\beta_0}} g_v,$

Или

$$u_{sl} = K_v \lg_v, \quad K_v = \frac{V_1}{\nu_0 l \sqrt{\beta_0}}.$$

где K_v - коэффициент изотермического скольжения, l - средняя длина свободного пробега.

Величину l возьмем в том же виде, т.е. $l = \nu \sqrt{\pi \beta_0}, \nu = \frac{\eta}{\rho}$, где ν - кинематическая

вязкость, η - динамическая вязкость газа, ρ - плотность газа, $\eta = \frac{8\rho}{15\sqrt{\pi}\nu_0\beta_0}$.

Следовательно,

$$K_v = \frac{15}{8} V_1 = 1.091149. \quad (33)$$

Для сравнения напомним, что коэффициент изотермического скольжения, вычисленный для газа с постоянной частотой столкновений, равен $K_V = 1.1466$. Таким образом, учет зависимости частоты столкновений молекул от величины модуля их скорости приводит к уменьшению коэффициента изотермического скольжения на 4.74%.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Uehling E.A., Uhlenbeck G.E.* Phys. Rev. 43, 552 (1933).
2. *Латышев А.В., Юшканов А.А.* Кинетическое уравнение для квантовых ферми-газов и аналитическое решение граничных задач// ТМФ. Т.134. №2, февр., 2003, с.310-324.
3. *Латышев А.В., Юшканов А.А.* Кинетические процессы в квантовых бозе-газах и аналитическое решение граничных задач// Математическое моделирование. 2003. Т.15, №5, с.80-94.
4. *Латышев А.В., Юшканов А.А.* Кинетические уравнения типа Вильямса и их точные решения. Монография. М., МГОУ, 2004. 271 с.
5. *Черчиньяни К.* Теория и приложения уравнения Больцмана. М., Мир, 1978, 495 с.

KRAMERS PROBLEM IN QUANTUM BOSE – GASES WITH THE FREQUENCY OF COLLISIONS PROPORTIONAL TO THE MODULE OF VELOCITY OF MOLECULES

A. Kvashnin

*Moscow State Regional University
10a, Radio st., Moscow 105005, Russia*

Abstract: the classical problem of the kinetic theory – Kramers problem about isothermal slide for quantum бозе – gases is analytically solved. The modelling kinetic equation with a collision integral in the form of-model and with the frequency of collisions proportional to the molecular velocity is used. The analysis of dependence of velocity of slide from quantity of the parametre representing the relation of chemical potential to product by a Boltzmann constant on a Kelvin temperature is carried out.

Keywords: Kramers problem, diffusion reflexion, analytical decision, boze-gas, isothermal sliding

ФИЗИКА

УДК.533.72

УРАВНЕНИЯ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ ДИСПЕРСНОЙ ФАЗЫ В НЕСТАЦИОНАРНОЙ ГАЗОДИСПЕРСНОЙ СИСТЕМЕ

А.Н. Голов

Московский государственный областной университет
105005, Москва, ул. Радио, д. 10а

Аннотация. Дан вывод уравнения непрерывности и уравнений движения дисперсной фазы, эффективно представляемой квазинепрерывной средой в смысле кинетической теории, исходя из удлинённого уравнения Лиувилля – Гиббса для статистико-механической модели газодисперсной системы.

Ключевые слова: уравнения непрерывности, уравнения движения, дисперсная фаза, кинетическая теория.

Целью данной работы является вывод уравнений, описывающих динамику дисперсной фазы в неравновесной и нестационарной газодисперсной системе многих частиц в представлении квазинепрерывной среды, исходя из статистико-механической модели. Обычно, уравнения статистической гидродинамики (газодинамики) выводятся из уравнения Больцмана, которое является 1-частичным и само выводится при дополнительных предположениях из уравнения Лиувилля – Гиббса (УЛГ) ([1, 2] и др.). Ранее нами было показано [3, 4], что эти уравнения могут быть выведены непосредственно из УЛГ, и было получено их обобщение для случая, когда газоподобная система подчиняется более общему удлинённому уравнению Лиувилля – Гиббса (УУЛГ), учитывающему диссипативные силы и нестационарность макросостояния системы, вида

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial F}{\partial a_\mu} \dot{a}_\mu = -\lambda \cdot D \cdot F. \quad (1)$$

Здесь: F – N -частичная функция распределения, a_μ – макроскопические параметры состояния, $\lambda = 1/\Theta$ – константа (Θ – модуль распределения), $D = Q_i \dot{q}_i$ – мощность диссипативных сил Q_i (диссипанта), прочие обозначения – стандартные. Здесь и далее в формулах принято правило тензорной алгебры, согласно которому подразумевается сумма по всем значениям повторяющихся индексов.

Когда система физически подразделяется на две подсистемы, последние описываются многочастичными кинетическими уравнениями (МКУ), выводимыми из (1) [4, 5]. Именно этот случай мы имеем для газодисперсной системы. При этом будем рассматривать подсистему атомов (молекул) газа, как термостат для подсистемы дисперсных частиц. Примем, что последние имеют постоянную массу, и их внутренние степени свободы не возбуждаются. Обе подсистемы считаем газоподобными, т. е., далее пренебрегаем в первом приближении взаимодействием однородных частиц. Суммарный объём дисперсных частиц считаем много меньше объёма объединённой системы. Пусть F – функция распределения объединённой системы. Определим соответствующие функции системы F_S и термостата F_T так (см. [5, 6]):

$$F_S = \int_{\tilde{A}_T} F \cdot d\tilde{A}_T; \quad F_T = \int_{\tilde{A}_S} F \cdot d\tilde{A}_S; \quad (2)$$

где $d\Gamma_S$ и $d\Gamma_T$ – соответствующие элементы фазовых объёмов, и $d\Gamma = d\Gamma_S \cdot d\Gamma_T$. Определение (2) близко к определению частичных функций по Боголюбову [2]. При этом F_S

не зависит от фазовых переменных термостата, а F_T – от фазовых переменных системы. (Здесь и далее S и T – не тензорные индексы). Очевидное условие нормировки:

$$\int_{\tilde{A}_T} F_T \cdot d\tilde{A}_T = \int_{\tilde{A}_S} F_S \cdot d\tilde{A}_S = \int_{\tilde{A}} F \cdot d\tilde{A} = 1. \quad (3)$$

Граничные условия таковы, что $F_S \rightarrow 0$ и $F_T \rightarrow 0$ на границе подсистем, а также на внешней границе объединённой системы, которая может быть удалена в бесконечность. Также предполагается обращение всех трёх функций в нуль на границах пространства импульсов. Далее мы будем искать уравнения, которым подчиняются F_S и F_T .

Удобно ввести следующие обозначения «полусредних» по системе и термостату для произвольной функции $u = u(q_i, p_i, a_\mu, t)$:

$$\langle u | = F_S^{-1} \cdot \int_{\tilde{A}_O} u F \cdot d\tilde{A}_O; \quad |u\rangle = F_T^{-1} \cdot \int_{\tilde{A}_S} u F \cdot d\tilde{A}_S; \quad (4)$$

сохранив обозначение средних по объединённой системе $\langle u \rangle$. По определению, $\langle u |$ не зависит от фазовых переменных термостата, а $|u\rangle$ – от фазовых переменных системы. Мы предполагаем следующий, часто используемый, вид функции распределения:

$$F = F_S \cdot F_T, \quad (5)$$

что соответствует представлению о статистически независимых подсистемах. Примем, что общая масса дисперсной фазы много меньше массы газа, и что последний может рассматриваться, как неподвижный термостат, состояние которого не изменяется существенно в процессе эволюции объединённой системы. В этом случае МКУ для F_T не имеет значения, т. к. эту функцию можно приближённо моделировать известным квазиравновесным каноническим распределением, параметры которого считаются данными. Уравнение для F_S при этом оказывается независимым и имеет вид:

$$\frac{\partial F_S}{\partial t} + \langle \hat{L}_S | F_S + \frac{\partial F_S}{\partial a_\mu} \mathcal{E}_\mu = - \left(\lambda \langle D | - \left\langle \frac{\partial \mathcal{E}_\mu}{\partial p_a} \right| \right) F_S, \quad (6)$$

где $\hat{L}_S$ – стационарный лиувиллиан подсистемы дисперсных частиц. Здесь и далее индексы $i, j, \dots$ относятся к дисперсным частицам, а индексы $a, b, \dots$ – к частицам газа ($i, k = 1 \dots 3N$, $a, b = 1 \dots 3N'$). При выводе (6) приняты уравнения движения дисперсных частиц в квазиньютоновой форме, включая как потенциальные, так и непотенциальные (диссипативные) силы, действующие на эти частицы со стороны однородных частиц, атомов (молекул) газа, а также частиц, внешних, по отношению к объединённой системе. Конкретные выражения указанных сил не используются. Тогда входящие в $\langle \hat{L}_S |$ – полусредние имеют вид:

$$\langle \mathbf{F}_i \rangle = f_{i(ex)} + Q_{i(ex)} + f_{SSi} + \langle f_{STi} \rangle + Q_{SSi} + \langle Q_{STi} \rangle. \quad (7)$$

Здесь значком (*ex*) обозначены силы внешних полей, подразделяемые на потенциальные $f_{i(ex)}(q_i)$ и непотенциальные $Q_{i(ex)}(p_i)$. f_{SSi} и Q_{SSi} – соответственно потенциальные и непотенциальные силы, действующие на дисперсную частицу со стороны других таковых частиц. $\langle f_{STi} \rangle$ и $\langle Q_{STi} \rangle$ – аналогичные силы, действующие на дисперсную частицу со стороны частиц газа, усреднённые по фазовым переменным термостата. Далее приняты выражения диссипативных сил, действующих на частицу, в стоксовом приближении:

$$Q_i = -\kappa_{ij} p_j / m - \kappa_{ia} p_a / m'. \quad (8)$$

Здесь $Q_{i(ex)}$ и Q_{SSi} объединены (для чего достаточно переопределить коэффициенты κ_{ij}), m' – масса частицы газа. Приближение (8) может быть неприменимо при рассмотрении бурных астрофизических и геофизических явлений (взрывы новых звёзд, извержения вулканов), техногенных процессов взрывного типа и быстрых струй. Входящее в (6) выражение полусредней диссипанты $\langle D \rangle$ приводится к виду:

$$\langle D \rangle = -\frac{\kappa_{ik} \cdot p_k p_i}{m^2} - \frac{\kappa_{ia} \cdot \langle p_a \rangle p_i}{m \cdot m'} - \frac{\kappa_{ak} \cdot p_k \langle p_a \rangle}{m \cdot m'} - \frac{\kappa'_{ab} \cdot \langle p_b p_a \rangle}{m'^2}. \quad (9)$$

Здесь 1-й член справа зависит только от импульсов частиц. Последний член справа не зависит от каких-либо динамических переменных, т. к. импульсы частиц в него не входят, а по молекулярным переменным выполнено усреднение. 2-й и 3-й члены справа в (9) содержат величины $\langle p_a \rangle$, пропорциональные средней скорости частиц газа. Но для неподвижного квазиравновесного термостата их можно принять близкими нулю, с точностью до флуктуаций (что практически эквивалентно переходу в соответствующую СО), и в дальнейших выкладках этими членами можно пренебречь. Поэтому, в дальнейшем коэффициенты κ_{ia} и κ_{ak} роли не играют.

Далее перейдём к описанию статистической системы многих частиц в представлении квазинепрерывной среды. Методика этого перехода известна в кинетической теории ([7] и др.). Она основана на введении кинетических операторов, соответствующих тем или иным физическим величинам, определяемым для непрерывной среды. Указанные величины находятся при этом путём усреднения соответствующих операторов по данному распределению. Мы вводим таковые операторы, сохраняя их стандартный вид, отдельно для дисперсных частиц и для молекул газа. Т. о., газодисперсная система представляется «смесью» двух квазинепрерывных сред – дисперсной фазы и газовой фазы, движущихся во взаимодействии друг с другом. Умножим (6) на $m_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{q}_i)$, где $\mathbf{r}$ – радиус-вектор произвольной точки физического пространства, проинтегрируем по фазовому объёму Γ_S и просуммируем по всем частицам. Используя известные определения кинетических операторов, выражения (7) – (9), свойства фазовых переменных, граничные условия и приведённые выше дополнительные соображения, получим дифференциальный закон сохранения массы:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j_\alpha}{\partial x_\alpha} = -\frac{\partial \rho}{\partial a_\mu} \mathcal{E}_\mu + \kappa \lambda \cdot \left(P_{\alpha\alpha} - \frac{3\rho}{\lambda m} \right) + \left(\frac{\lambda \kappa'_{ab} \cdot \langle p_b p_a \rangle}{m'^2} - \frac{\kappa'_{aa}}{m'} \cdot \frac{N'}{N} \right) \cdot \rho, \quad (10)$$

Здесь: ρ – эффективная плотность дисперсной фазы, j_α – эффективная плотность потока её, $\alpha = 1, 2, 3$ нумерует пространственные проекции векторов, κ – диагональный компонент тензора κ_{ij} , $P_{\alpha\alpha}$ – диагональные компоненты тензора плотности потока импульса

$$P_{\alpha\beta} = \rho v_\alpha v_\beta. \quad ()$$

Коэффициенты κ'_{ab} в (10) переопределены при объединении диссипативных сил, созданных внешними полями, с внутренними диссипативными силами в газовой фазе аналогично (8) алгебраической суммой соответствующих величин. При использовании формулы (10) надо иметь в виду, что для квазиравновесного термостата выражение $\langle p_b p_a \rangle$, по крайней мере, квазидиагонально, а для газа однородных атомов, находящихся в одинаковых условиях, в принятом приближении диагонально. Левая часть (10) совпадает с известным уравнением непрерывности. 1-й член справа возникает вследствие допускаемой нестационарности системы. 2-й член учитывает диссипацию энергии дисперсной фазы и отклонение её динамического уравнения состояния от уравнения идеальной газоподобной среды. 3-й член учитывает воздействие движения вязкой газовой среды на движение дисперсной фазы. При обращении некоторых из этих членов (или всех) в нуль приходим к соответствующим частным случаям.

Тот же метод применим и для получения уравнения движения дисперсной фазы в представлении квазинепрерывной среды. Умножим все члены (6) на $p_{i\alpha} \cdot \delta(\mathbf{r} - \mathbf{q}_i)$, проинтегрируем по фазовому объёму и просуммируем по всем частицам ($i, k = 1 \dots N, \alpha = 1, 2, 3$). Используя те же соображения, что и выше, получим:

$$\frac{\partial j_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial P_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = (f_\alpha + Q_\alpha) - \frac{\partial j_\alpha}{\partial a_\mu} \mathcal{E}_\mu - 3 \cdot \left(\frac{\kappa}{m} + \frac{\kappa'}{m'} \cdot \frac{N'}{N} \right) \cdot j_\alpha + 2\lambda \cdot \left(\kappa \cdot j_{Q\alpha} + \kappa' \frac{mN'}{m'N} \cdot j'_{Q\alpha} \right), \quad (11)$$

где κ' – диагональный элемент тензора κ'_{ab} . Это – уравнения движения дисперсной фазы в представлении квазинепрерывной среды для α -проекций вектора j_α . В (11) входят плотность потока кинетической энергии (тепла), переносимого дисперсной фазой:

$$j_{Q\alpha} = \sum_i \int_{\Gamma_S} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{q}_i) \cdot \mathcal{E}_{i\alpha} \frac{p_{i\beta} p_{i\beta}}{2m} F_S \cdot d\tilde{A}_S, \quad (12)$$

и плотность потока тепла, переносимого газовой фазой:

$$j'_{Q\alpha} = \sum_a \int_{\Gamma_T} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{q}_a) \cdot \mathcal{E}_{a\alpha} \frac{p_{a\beta} p_{a\beta}}{2m_\mu} F_T \cdot d\tilde{A}_T. \quad (13)$$

Появление потоков тепла в уравнениях динамики сплошных сред свойственно неравновесной термодинамике ([8] и др.). Но формулы (12) и (13), выявляющие микроскопический смысл потоков тепла, не могут быть получены в феноменологической теории.

Уравнения (10) и (11) переходят в стандартные уравнения газодинамики в стационарных состояниях ($\frac{d}{dt} = 0$) и при отсутствии диссипативных сил ($\kappa_{ik} = 0$; $\kappa'_{ab} = 0$). Когда предположенная выше газовая фаза отсутствует ($N' = 0$), либо имеет нулевую вязкость ($\kappa'_{ab} = 0$), из (10) и (11) получим уравнения для однородной среды с диссипацией энергии в нестационарном состоянии (см. [3, 4]). Этот частный случай может описывать, например, нестационарную систему дисперсных частиц в вакууме. Отметим, что наличие дополнительных членов в правой части (10) не означает несохранения массы. Это означает лишь, что конвективный поток j_α , определяемый стандартным кинетическим оператором, не является полным потоком вещества. Последний содержит неконвективную часть, дивергенция которой и даёт дополнительные члены в правой части соотношения (10).

Мы видим, что метод получения уравнений движения однородной газоподобной среды из основного уравнения для плотности вероятности, может быть применён для получения уравнений движения бинарных сред, в т. ч., газодисперсных систем. Т. о., уравнения динамики сплошных сред могут быть использованы для описания движения дисперсной фазы в газодисперсной системе с сохранением их общего вида и структуры, но с дополнительными членами, полученными выше. Уравнения (10) и (11) позволяют получить аналитические и численные решения задачи о макроскопическом движении газодисперсных сред известными методами, которые разработаны для решения уравнений гидродинамики (газодинамики) [9, 10 и др.]. Для достаточно широкого круга задач это не является необходимым, если известно выражение нестационарной N -частичной функции распределения. Но в тех случаях, когда, по каким-то причинам, построение этой функции вызывает затруднение, либо вид её сложен, или статистическое описание системы не обязательно, полученные уравнения позволяют найти непосредственно поля плотности и плотности потока вещества дисперсной фазы в квазинепрерывной молекулярной среде. Отметим, что использование стандартных уравнений гидродинамики в работах по математическому моделированию движения дисперсной фазы ограничивает применимость получаемых результатов, т. к. не учитывает нестационарности состояния и тонкостей микроскопической модели системы. Выше мы рассматривали газ, как неподвижный термостат, что соответствует известной модели «запылённого газа». Но возможно и обратное представление, когда за неподвижный термостат принимается множество дисперсных частиц, совокупная масса которых много больше массы газа. В этом случае приходим к задаче просачивания газа через облако дисперсных частиц. При этом можно сохранить общую структуру выкладок, внося, конечно, соответствующие поправки. В этом случае, однако, уже нельзя пренебрегать размерами дисперсных частиц.

Одним из возможных практических приложений найденных уравнений является применение их к задаче регулирования движения дисперсной фазы в технических установках с газодисперсными средами, а также к описанию природных и техногенных явлений, имеющих экологическое значение.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Chapman S., Cowling T.* The Mathematical Theory of Nonuniform Gases, Cambridge, 1939.
2. *Боголюбов Н. Н.* Проблемы динамической теории в статистической физике. М. Гостехиздат, 1946.
3. *Голов А. Н.* Уравнения статистической гидродинамики неконсервативных неравновесных систем. // «Современные проблемы физики аэродисперсных систем», с.109 - 116, ВИНТИ, №4900-B91, М., МПУ, 1991.
4. *Яламов Ю. И., Голов А. Н.* Статистикомеханические методы в теории неравновесных молекулярных и дисперсных систем, 280 с., ВИНТИ, №2423-B92, М., МПУ, 1992.
5. *Яламов Ю. И., Голов А. Н.* Многочастичное кинетическое уравнение для двух взаимодействующих подсистем. // «Механика и физическая кинетика дисперсных систем», с. 2 – 12, ВИНТИ, № 8113-B88, М., МПУ, 1988.
6. *McLennan J.* // Adv. in Chem. Phys, **5**, 261, 1963.
7. *Гуров К. П.* Основания кинетической теории. М.: «Наука», 1966. 351 с.
8. *Де Гроот С., Мазур П.* Неравновесная термодинамика. М.: «Мир», 1964.
9. *Холпанов Л. П., Ибятков Р. И.* Математическое моделирование динамики дисперсной фазы. // Теор. Основы Хим. Технол., **39**, № 2, с. 206-215, 2005.
10. *L. P. Kholpanov, E. I. Nekrasova, A. K. Nekrasov.* Mathematical simulation of the dynamics of a dispersed phase// Journal of Engineering Physics and Thermophysics, v. 81, № 1, 2008.

THE EQUATIONS OF STATISTICAL DYNAMIC OF A DISPERSED PHASE IN NONSTATIONARY GAS-DISPERSED SYSTEM.

A. Golov

*Moscow State Regional University
10a, Radio st., Moscow 105005, Russia*

Abstract. The conclusion of the equation of continuity and the equations of movement of the disperse phase, effectively represented by the quasicontinuous medium in sense of the kinetic theory, proceeding from the extended equation of Liouville – Gibbs for statistic-mechanical model gas-dispersed system is given.

Keywords: equation of continuity, equations of movement, disperse phase, kinetic theory.

УДК 534.28

УЛЬТРАЗВУКОВЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ДИССИПАТИВНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ НЕМАТИЧЕСКИХ ЖИДКИХ КРИСТАЛЛОВ

**Д.Л. Богданов, Э.В. Геворкян, Е.М. Банникова,
М.С. Константинов, Ю. Н. Обыденков**

*Московский государственный областной университет (МГОУ)
105005, Москва, ул. Радио, 10а.*

Аннотация. Представлены результаты ультразвуковых исследований зависимостей диссипативных коэффициентов нематических жидких кристаллов Н-8 от частоты и температуры. Показано, что измерения анизотропии коэффициента поглощения ультразвука при низких и высоких частотах позволяют рассчитать целый ряд важных физических параметров. Определены анизотропные коэффициенты сдвиговой и объемной вязкостей, времена ориентационной релаксации, энергии активации и другие параметры Н-8 в широком диапазоне частот и температур.

Ключевые слова: нематические жидкие кристаллы, анизотропия, коэффициент поглощения ультразвука, коэффициенты сдвиговой и объемной вязкостей, времена ориентационной релаксации.

Из гидродинамической теории [1] нематических жидких кристаллов (НЖК) с учетом их симметрии следует выражение для угловой зависимости коэффициента поглощения ультразвука в низкочастотном пределе

$$\alpha(\theta) = \frac{\omega^2}{2 \cdot \rho \cdot c_0^3} \cdot \left[(v_2 + v_4) + 2 \cdot (v_1 - v_4 + v_5) \cdot \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \cdot (v_1 + v_2 - 2 \cdot v_3) \cdot \sin^2 2\theta \right] \quad (1)$$

от угла θ между директором и волновым вектором.

В общем случае в рамках обобщенной теории с учетом релаксации коэффициентов вязкости можно сохранить выражение (1) в виде

$$\alpha / f^2 = a \cdot \cos^2 \theta + b \cdot \sin^2 \theta + d, \quad (2)$$

где параметры a , b и d являются комбинациями зависящих от частоты диссипативных коэффициентов, которые имеют размерность коэффициентов вязкости.

Из соотношения (1) можно выразить стандартные акустические параметры $\alpha^{\parallel} / f^2$ и $\alpha^{\perp} / f^2$ (вдоль и поперек директора) а также коэффициенты a , b и d формулы (2):

$$\begin{cases} \frac{\alpha^0}{f^2} = \frac{2 \cdot \pi^2}{\rho \cdot c_0^3} \cdot (2 \cdot v_1 + v_2 - v_4 + 2 \cdot v_5), \\ \frac{\alpha^{\perp}}{f^2} = \frac{2 \cdot \pi^2}{\rho \cdot c_0^3} (v_2 + v_4) \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} a = (4 \cdot \pi^2 / \rho \cdot c_0^3) \cdot (-v_2 + 2 \cdot v_3 - v_4 + v_5), \\ b = (4 \cdot \pi^2 / \rho \cdot c_0^3) \cdot (v_1 + v_2 - 2v_3), \\ d = (2 \cdot \pi^2 / \rho \cdot c_0^3) \cdot (v_2 + v_4). \end{cases} \quad (4)$$

Таким образом, ультразвуковые измерения позволяют исследовать релаксационные свойства и частотные зависимости диссипативных коэффициентов в широкой области термодинамических параметров состояния [2,3]. Причем, наибольшую информацию дает сочетание данных самых низкочастотных измерений с высокочастотными гиперзвуковыми.

В качестве объекта исследования выбран Н-8 (эвтектическая смесь МББА и ЭББА), температура просветления которого равна 325,2 К, относительная погрешность измерения величины α/f^2 в статическом магнитном поле не превышает 2% (здесь α - коэффициент поглощения, f - частота ультразвука).

Существующий в нематической фазе максимум анизотропии коэффициента поглощения ультразвука низкой частоты вблизи температуры просветления уменьшается при повышении частоты ультразвука (рис.1) и исчезает в высокочастотном пределе. Отсутствие аномального увеличения коэффициента поглощения ультразвука высокой частоты является характерной особенностью акустических свойств нематической фазы в области фазового перехода НЖК-ИЖ и определяется параметром $\omega \tau_m$. При частоте ультразвука выше 400 МГц, когда время релаксации сдвиговой вязкости меньше периода волны, выполняется неравенство $\omega \tau_m < 1$, и частотная зависимость коэффициента поглощения на квадрат частоты должна отсутствовать. Справедливость данного заключения подтверждается экспериментальными исследованиями температурной зависимости параметра $\Delta\alpha/f^2$, выполненными в смеси Н-8 на высоких ультразвуковых частотах (620 МГц) [2].

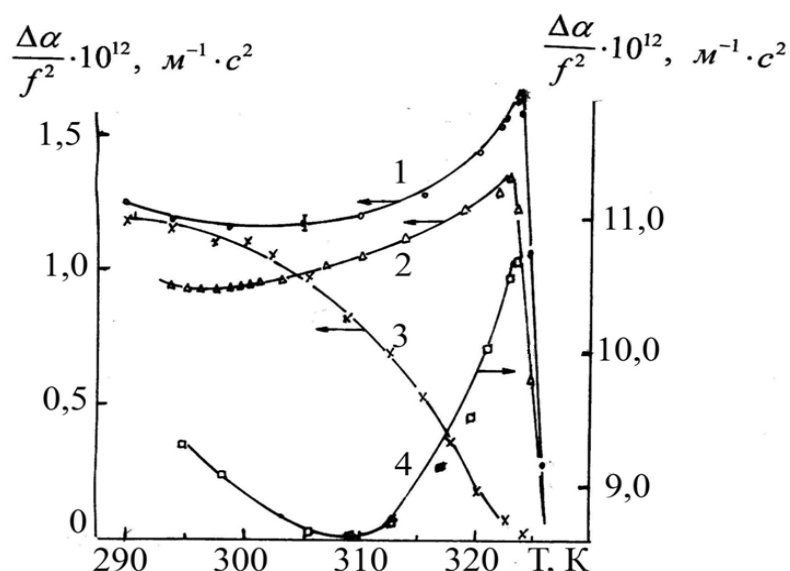


Рис. 1. Температурная зависимость $\Delta\alpha/f^2$ в Н-8 при атмосферном давлении и частоте: 1-2,8 МГц; 2-1,43 МГц; 3-8,23 МГц; 4-0,5 МГц

На высоких частотах при $\omega \tau_m > 1$ НЖК можно рассматривать как квазинесжимаемую среду. Требование несжимаемости ($\rho = const$), и в соответствии с уравнением неразрывности равенства нулю следа тензора скоростей деформаций A_{kk} определяет отсутствие объемных кинетических коэффициентов диссипативной части тензора напряжений, а также их связь с коэффициентами сдвиговой вязкости. В этом случае диссипация энергии определяется сдвиговой вязкостью (то есть $\nu_2 = \nu_4$ и $\nu_5 = 0$). Эта модель позволяет рассчитать анизотропные коэффициенты сдвиговой вязкости НЖК по результатам высокочастотных измерений.

Для этого достаточно подставить в приведенные выше формулы (3) результаты измерений коэффициента поглощения ультразвука высокой частоты вдоль $\alpha_{gc}(\theta = 0^\circ) = \alpha_{gc}^{\parallel}$ и поперек $\alpha_{gc}(\theta = 90^\circ) = \alpha_{gc}^{\perp}$ директора.

$$\nu_1 = \frac{(\alpha^2 / f^2)_{вч} \cdot \rho \cdot c_0^2}{4 \cdot \pi^2}, \quad (5)$$

$$\nu_2 = \frac{(\alpha^\perp / f^2)_{вч} \cdot \rho \cdot c_0^2}{4 \cdot \pi^2}. \quad (6)$$

Трудности молекулярно-кинетической теории жидкого и жидкокристаллического состояний обусловили многообразие подходов для микроскопического описания зависимости коэффициентов вязкости от термодинамических параметров состояния [4-8]. Поэтому при использовании подобных моделей используется полуфеноменологический подход с двумя подгоночными параметрами.

Температурная зависимость коэффициентов сдвиговой вязкости ν_1 и ν_2 имеет активационный характер:

$$\nu_i(T) = Q_i \cdot e^{\frac{E_i}{RT}}, \quad (7)$$

где $i = 1, 2$; E_i - энергия активации, Q_i - постоянный множитель (табл.1).

Таблица 1

Параметры уравнения (7)

$Q_1 \cdot 10^6, \text{Па} \cdot \text{с}$	$Q_2 \cdot 10^6, \text{Па} \cdot \text{с}$	$E_1, \text{кДж/моль}$	$E_2, \text{кДж/моль}$
1,62	4,95	24,3	21,1

Заметим, что результаты акустических исследований позволяют также оценить время ориентационной релаксации, поскольку анизотропия акустических свойств НЖК имеет релаксационную природу с механизмом, обусловленным динамикой ориентационной структуры (релаксацией директора).

В рамках гидродинамической теории НЖК с помощью соотношений (3) и значений коэффициентов сдвиговой вязкости ν_1 и ν_2 , а также коэффициента поглощения ультразвука высокой частоты (620 МГц) и низкой частоты (500 кГц ... 8,3 МГц), измеренного в случае параллельной и взаимно-перпендикулярной ориентаций директора и волнового вектора, рассчитаны коэффициенты объемной вязкости ν_4 и ν_5 , обусловленные фазовыми сдвигами между колебаниями объема, температуры и давления в ультразвуковой волне. Таким образом, коэффициенты ν_4 и ν_5 являются следствием существования молекулярных релаксационных процессов с конечными временами установления равновесия. Поскольку эти времена составляют $10^{-4} \dots 10^{-10}$ с, в диапазоне частот ультразвука 500 кГц ... 8,3 МГц коэффициенты ν_4 и ν_5 должны быть частотно-зависимыми. В исследованных веществах в диапазоне частот 500 кГц ... 8,3 МГц повышение частоты ультразвука приводит к уменьшению коэффициентов объемной вязкости (рис.2) причем $\nu_5 > \nu_4$.

Наблюдаемое резкое увеличение коэффициентов объемной вязкости при повышении температуры в окрестности температуры фазового перехода НЖК-ИЖ в нематической фазе связано как ростом флуктуаций, так и с возрастанием времени релаксации параметра ориентационного порядка вблизи T_c .

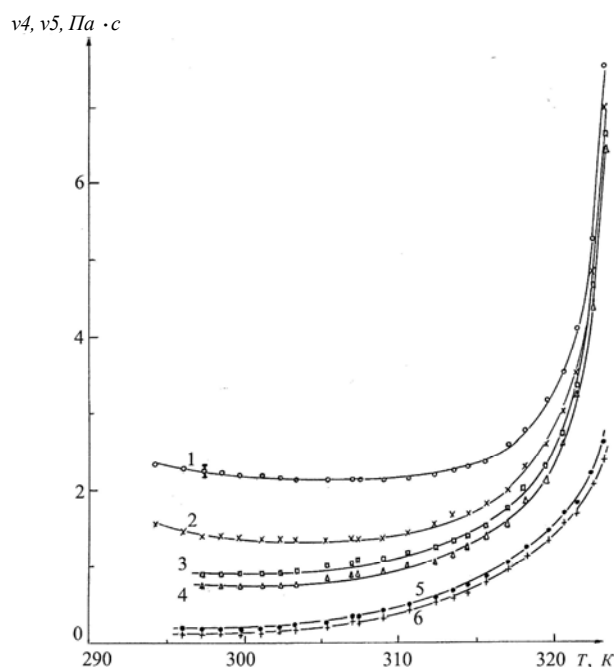


Рис. 2. Температурная зависимость коэффициентов объемной вязкости ν_4 (2, 4, 6) и ν_5 (1, 3, 5) Н-8 при атмосферном давлении и частоте ультразвука; 1 и 2 - 500 кГц; 3 и 4 - 2,8 МГц; 5 и 6 - 8,3 МГц

Если представить коэффициенты объемной вязкости в виде суммы регулярной ($\nu_{рег}$) и критической ($\nu_{кр}$) составляющих:

$$\nu_{4,5}(T) = \nu_{4,5,рег} + \nu_{4,5,кр} \quad (8)$$

то регулярная составляющая коэффициентов ν_4 и ν_5 Н-8 на частотах 0,5... 8,3 МГц слабо зависит от температуры. Регулярная составляющая коэффициента объемной вязкости уменьшается по экспоненциальному закону:

$$\nu_{i,рег} = \nu_{i0} \cdot \exp(E_i / RT) \quad (9)$$

Значения энергии активации E_i и сомножителя ν_{i0} приведены в табл.2.

Таблица 2

Параметры формулы (9)

f , МГц	E_4 кДж моль	E_5 кДж моль	ν_{40} , Па с	ν_{50} , Па с

0,5	8,3	7,6	0,048	0,103
-----	-----	-----	-------	-------

Критическая составляющая коэффициентов ν_4 , и ν_5 резко возрастает при уменьшении $\Delta T_c = T_c - T < 5 \text{ K}$:

$$\nu_{ik}(T) = Q_i \cdot \left(\frac{\Delta T_c}{T}\right)^{-X}. \quad (10)$$

В области низких температур объемная вязкость на порядок превышает сдвиговую вязкость, причем при повышении температуры это различие возрастает, достигая максимума в окрестности температуры T_c , где объемная вязкость превышает сдвиговую более, чем в 100 раз в диапазоне частот 500 кГц ... 6,2 МГц.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Forster D. et al.* Hydrodynamics of liquid crystals. // Physical Review Letters. - 1971. - V. 26. - № 17. - P. 1016-1019.
2. *Хабибуллаев П.К., Геворкян Э.В., Лагунов А. С.* Реология жидких кристаллов. Ташкент. - ФАН. 1992. С.300.
3. *Богданов Д.Л., Лагунов А.С., Ларионов А.Н.* Релаксационные свойства ЖК растворов азоксибензилиден-бутианилинов в статическом магнитном поле. // Журнал физ.Химии. Т.62. Вып. 3. 1988 С.726-734
4. *Базаров И.П., Геворкян Э.В.* Статистическая физика жидких кристаллов. Изд.Моск.ун-та. 1992. 496 С.
5. *Беляев В. В.* Физические методы измерения коэффициентов вязкости нематических жидких кристаллов / В. В. Беляев // Успехи физических наук. -2001. Т. 171. -№ 3. - С. 267-298.
6. *Фабелинский И. Л.* О макроскопической и молекулярной сдвиговой вязкости // Успехи физических наук. - 1997. - Т. 167. - № 7. - С. 721-731.
7. *Leslie F. M.* Viscosimetry of nematic liquid crystals / Leslie F. M. // Molecular crystals and liquid crystals. - 1981. - V. 6. - P. 111-128.
8. *Bermet L., Hess S.* Nonequilibrium molecular dynamics investigation of the presmectic behavior of the viscosities of a Gay-Berne nematic liquid crystal // Physical Review. E. - 1999. - V. 60 E. -№ 5. -P. 5561-5567.

ULTRASONIC STUDIES OF DISSIPATIVE COEFFICIENTS OF NEMATIC LIQUID CRYSTALS

**D. Bogdanov, E. Gevorkyan, E. Bannikova,
M. Konstantinov, J. Obidenkov**

*Moscow State Regional University
10a, Radio st., Moscow 105005, Russia*

Abstract. The results of ultrasound dependencies dissipation coefficients of nematic liquid crystals N-8 on the frequency and temperature. It is shown that measurements of the anisotropy of the absorption coefficient of ultrasound at low and high frequencies allow the calculation of a number of important physical parameters. Determined anisotropic coefficients of shear and bulk viscosity, the orientation relaxation times, energy activation and other parameters of N-8 in a wide range of frequencies and temperatures.

Keywords: nematic liquid crystals, anisotropy, absorption coefficient of ultrasound, coefficients of shear and bulk viscosity, orientation relaxation times.

УДК 532.783

РЕЛАКСАЦИЯ ОБЪЕМНОЙ И СДВИГОВОЙ ВЯЗКОСТЕЙ В ДИЭТИЛСИЛОКСАНЕ И ЭТИЛОКТИЛСИЛОКСАНЕ

В.В. Сурнычев, В.И. Коваленко, Е.М. Банникова

Московский государственный областной университет (МГОУ)
105005, Москва, ул. Радио, 10а

Аннотация. Представлены результаты экспериментальных исследований температурной и частотной зависимостей скорости и коэффициента поглощения ультразвука в диэтилсилоксане и этилоктилсилоксане для частотного диапазона от 4 до 63 МГц. Вычислены значения коэффициентов объемной и сдвиговой вязкостей. Установлена их частотная зависимость. Приведены значения времени релаксации обнаруженных релаксационных процессов.

Ключевые слова: скорость ультразвука, коэффициент поглощения ультразвука, объемная вязкость, сдвиговая вязкость, время релаксации.

Органосилоксаны (кремнеорганические соединения, КОС) это вещества, молекулы которых состоят из основной неорганической силоксановой цепочки, содержащей [Si–O] – звенья и органических заместителей при кремнии [1, 2]. Некоторые физические свойства КОС до настоящего времени мало изучены. Сведения, полученные в результате анализа данных по температурно-частотной зависимости скорости и коэффициента поглощения ультразвука, позволяют получить информацию о вязко-упругих свойствах и динамических процессах исследуемого объекта. Что, в конечном счёте, представляет интерес как с прикладной, так и с научной точек зрения.

В качестве объектов исследования были выбраны диэтилсилоксан (ДЭС) и этилоктилсилоксан (ЭОС) (общие формулы $(C_2H_5)_3SiO[(C_2H_5)_2SiO]_nSi(C_2H_5)_3$ и $(C_2H_5)_3SiO[C_2H_5C_8H_{17}SiO]_nSi(C_2H_5)_3$ соответственно) (ГНИИХТЭОС, Россия), с концевыми триэтилсилоксан звеньями. Молярные массы ДЭС и ЭОС составляют 0,65 и 3,5 кДж/моль.

Результаты исследований представлены на рис. 1. Установлено, что для исследованных веществ наблюдается значительное отклонение от классического закона поглощения ультразвука. Это свидетельствует о наличии в этой области релаксационных процессов.

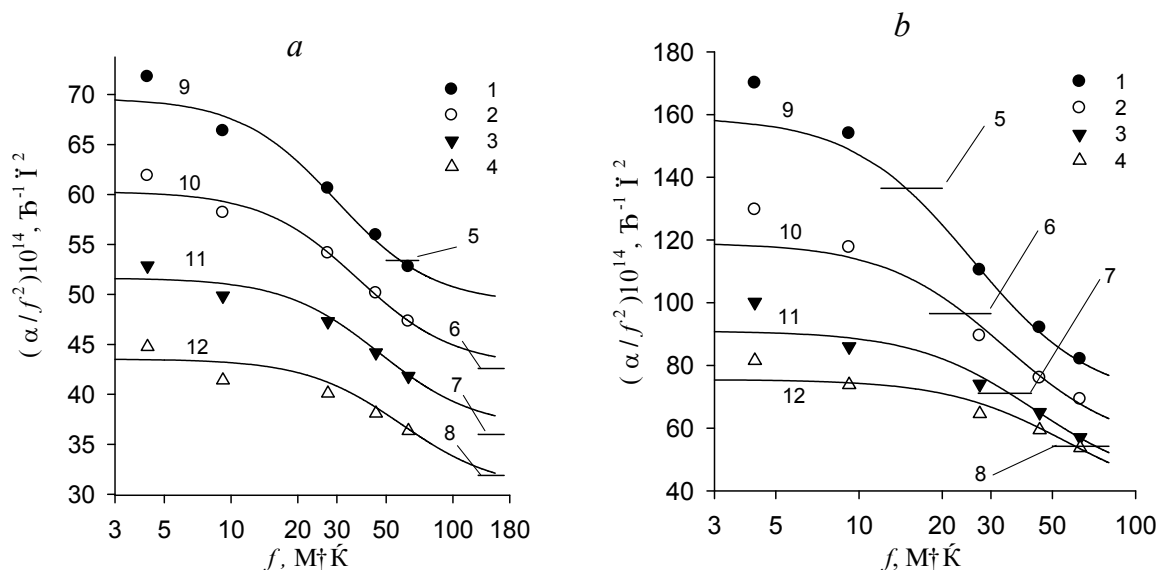


Рис. 1. Частотные зависимости для ДЭС (а) и ЭОС (b) экспериментальных значений коэффициента поглощения (α/f^2) (1-4) в сравнении с теоретическими расчетами (9-12) по (3) и коэффициентом поглощения $(\alpha/f^2)_S$ (5-8), рассчитанным по (2). 1, 5, 9 – $T=30^\circ\text{C}$; 2, 6, 10 – $T=45^\circ\text{C}$; 3, 7, 11 – $T=60^\circ\text{C}$; 4, 8, 12 – $T=75^\circ\text{C}$.

Согласно [3]:

$$\frac{\alpha}{f^2} = \frac{2\pi^2}{\rho c^3} \left(\frac{4}{3} \eta_S + \eta_V \right), \quad (1)$$

где η_S и η_V – сдвиговая и объемная вязкости. При $\eta_V=0$ получаем соотношение:

$$\left(\frac{\alpha}{f^2} \right)_S = \frac{2\pi^2 f^2}{\rho c^3} \frac{4}{3} \eta_S, \quad (2)$$

описывающее потери связанные со сдвиговой вязкостью («стоксовское» поглощение). Величину $(\alpha/f^2) - (\alpha/f^2)_S$ называют сверхстоксовским поглощением. Это поглощение, а, следовательно, и объемная вязкость η_V может быть обусловлена факторами как структурной, так и термической релаксации [3].

Видно (рис. 1), что при некоторых температурах величина стоксовского поглощения $(\alpha/f^2)_S$ превышает экспериментальные значения (α/f^2) , что соответствует области II на графиках температурных зависимостей (рис. 2). Аналогичные процессы ранее наблюдались в сильновязких жидкостях [4, 5]. Этот факт указывает на то, что в исследуемых органосилоксанах в области низких температур имеет место релаксация как объемной, так и сдвиговой вязкостей. Кроме того, кривые частотной зависимости коэффициента поглощения для всех температурах монотонно убывают без явно выраженных перегибов, наличие которых свидетельствовало бы о существовании ряда дискретных значений времен релаксации достаточно далеко отстоящих друг от друга. Та-

ким образом, в ДЭС и ЭОС наблюдается наложение нескольких процессов связанных с релаксацией как объемной, так и сдвиговой вязкости.

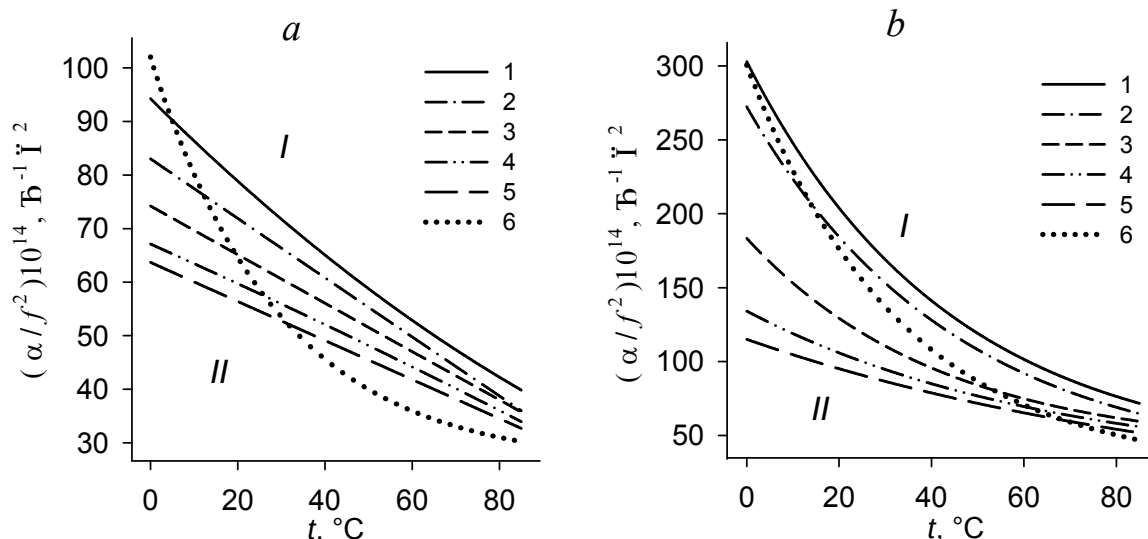


Рис. 2. Температурная зависимость коэффициента поглощения ультразвука (α/f^2) в ДЭС (a) и ЭОС (b) (1-5) при $f=4,2; 9,6; 27,3; 45; 63$ МГц соответственно, в сравнении с коэффициентом поглощения $(\alpha/f^2)_S$ (6), рассчитанным по (2). I – область с $(\alpha/f^2) > (\alpha/f^2)_S$, II – область с $(\alpha/f^2) < (\alpha/f^2)_S$.

Скорость ультразвука в обоих веществах имеет довольно значительную дисперсию. При изменении частоты ультразвука от 4,2 до 63 МГц, при температуре 303 К скорость ультразвука изменяется от 1214 до 1219 м/с в ДЭС и от 1309 до 1330 м/с в ЭОС; при $T=348$ К от 1078 до 1102 м/с и от 1180 до 1240 м/с соответственно. Температурная зависимость скорости ультразвука в исследуемом температурном диапазоне в пределах погрешности описывается линейной функцией.

Согласно релаксационной теории, в рамках модели с одним релаксационным процессом частотная зависимость коэффициента поглощения описывается выражением вида:

$$\frac{\alpha}{f^2} = \frac{A}{1 + \omega^2 \tau^2} + B. \quad (3)$$

Анализ результатов частотной зависимости коэффициента поглощения с помощью соотношения (3) дает значения релаксационных параметров A , B , τ_α — время релаксации, $B/(\alpha/f^2)_S$ (табл. 1). Анализ зависимостей τ_α выполнен по формуле Аррениуса с энергией активации ΔE_α , значения которой приведены в табл. 3.

Из полученных результатов рассчитывают объемную вязкость η_v по формуле:

$$\eta_v = \frac{\rho c^3}{2\pi^2} \left[\left(\frac{\alpha}{f^2} \right) - B \right] \quad (4)$$

Значения η_v для некоторых температур и частот приведены в табл. 2.

Поскольку в области II (рис. 2) $\eta_v=0$, то поглощение ультразвука определяется только величиной η_s , т. е. величина $\left(\alpha/f^2\right)_s$ становится функцией частоты. Анализируя значения $\left(\alpha/f^2\right)_s$ для области II при помощи соотношения (2) и полагая при этом, что $A_s + B_s = \left(\alpha/f^2\right)_s$, получим параметры, характеризующие процесс релаксации классического поглощения A_s , B_s , τ_s , (табл. 1), а также значение энергии активации ΔE_s (табл. 3). Полученные данные используем при вычислении значения величины η_s при различных температурах и частотах (табл. 2):

$$\eta_s = \frac{3\rho c^3}{8\pi^2} \left[\left(\frac{\alpha}{f^2} \right) - B_s \right]. \quad (5)$$

В табл. 2 представлены также значения величины η_v/η_s для ряда температур и частот, а в табл. 1 значения τ_a/τ_s . Видно, что в обоих веществах величина $\eta_v/\eta_s < 1$ и величина τ_a/τ_s изменяется в пределах 1,3...1,7. При этом, температурная зависимость этих величин выражена слабо.

Таблица 1

Значения релаксационных параметров ДЭС и ЭОС

t, °C	A	B	A _s	B _s	τ _α	τ _S	τ _α /τ _S	(α/f ²) _S	B/(α/f ²) _S
	×10 ¹² м ⁻¹ с ²				×10 ⁹ с			×10 ¹² м ⁻¹ с ²	
ДЭС									
0	0,28	0,61	0,37	0,58	8,2	6,4	1,28	1,02	0,60
10	0,25	0,57	0,25	0,56	7,5	5,7	1,31	0,80	0,71
15	0,24	0,55	0,2	0,55	7,1	5,3	1,35	0,72	0,77
25	0,22	0,51	0,14	0,52	5,7	4,2	1,35	0,58	0,87
45	0,18	0,43			4,3			0,4	1,00
75	0,13	0,30			2,7			0,3	0,95
ЭОС									
0	1,81	1,16	2,2	0,9	12,2	6,9	1,77	3,0	0,39
10	1,45	0,98	1,5	0,83	9,4	6,1	1,53	2,3	0,43
15	1,28	0,90	1,15	0,79	8,4	5,5	1,53	2,0	0,45
30	0,91	0,68	0,75	0,64	6,2	4,1	1,51	1,4	0,50
45	0,66	0,53			4,0			1,0	0,55
60	0,50	0,41			3,7			0,7	0,58
75	0,40	0,36			2,8			0,5	0,66

Это позволяет сделать вывод, что в данных веществах наблюдается процесс структурной релаксации. Тот факт, что времена релаксации объемной и сдвиговой вязкостей незначительно отличаются одно от другого, а значения энергий активации, ΔE_a , ΔE_s и энергии активации вязкого течения ΔE_η , полученного из анализа температурной зависимости коэффициента сдвиговой вязкости, достаточно близки (табл. 3), позволяет сделать вывод в пользу того, что механизмы возникновения как объемной так и сдвиговой вязкостей имеет одинаковую природу.

Таблица 2

Значения η_v , η_s и их отношение η_v/η_s при различных температурах и частотах в ДЭС и ЭОС

t °C	$\eta_v \cdot 10^2$, Па·с					$\eta_s \cdot 10^2$, Па·с					η_v/η_s				
	f , МГц														
	4,2	9,2	27,3	45	63	4,2	9,2	27,3	45	63	4,2	9,2	27,3	45	63
ДЭС															
0	3,5	2,3	1,2	0,6	0,2	10	9,1	8,2	7,4	7,0	0,34	0,25	0,15	0,080	0,028
5	3,2	2,2	1,2	0,6	0,2	9,5	8,4	7,6	6,9	6,5	0,34	0,25	0,16	0,087	0,034
10	2,9	2	1,2	0,6	0,2	8,0	7,8	7,0	6,4	6,0	0,36	0,26	0,16	0,095	0,041
15	2,65	1,9	1,1	0,6	0,3	6,9	6,9	6,4	5,9	5,6	0,39	0,28	0,17	0,104	0,048
20	2,4	1,7	1,1	0,6	0,3	5,9	5,9	5,9	5,4	5,1	0,41	0,30	0,18	0,111	0,057
25	2,2	1,6	1,0	0,6	0,3	5,1	5,1	5,1	5,0	4,7	0,43	0,32	0,20	0,120	0,065
ЭОС															
0	22	19	8,1	2,4	0,8	30	27	18	13	11	0,74	0,69	0,45	0,18	0,07
5	20	17	7,3	2,5	1,2	25	23	16	12	10	0,79	0,71	0,46	0,21	0,12
10	17	15	6,5	2,6	1,4	21	20	14	11	10	0,82	0,71	0,47	0,24	0,15
15	16	13	5,8	2,6	1,5	18	16	12	10	9	0,88	0,79	0,47	0,27	0,17
20	14	11	5,3	2,7	1,5	15	14	11	8,9	8,0	0,92	0,80	0,49	0,30	0,18
25	12	10	4,7	2,6	1,6	13	12	10	8,1	7,4	0,95	0,86	0,48	0,32	0,22
30	11	8,9	4,4	2,7	1,9	11	11	8,6	7,4	6,8	0,99	0,85	0,51	0,37	0,28
35	9,3	7,8	4,0	2,7	2,0	9,1	10	7,7	6,7	6,2	1,02	0,82	0,52	0,40	0,32

Таблица 3

Значения энергии активации для ДЭС и ЭОС в кДж/моль

ΔE_a	ΔE_s	ΔE_η	ΔE_a	ΔE_s	ΔE_η
ДЭС			ЭОС		
13,1	11,8	17,8	15,3	16,6	24,6

При сравнении данных по релаксационным свойствам и вязкости ДЭС и ЭОС видно, что, как коэффициенты поглощения ультразвука, так и обе вязкости η_v и η_s , а также энергия активации ΔE_η имеют большее значение у ЭОС, как у вещества состоящего из более длинных и гребнеобразных молекул.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андрианов К. А. Методы элементо–органической химии (кремний). М.: Наука, 1968. С. 34.
2. Соболевский М. В., Скороходов И. И., Гриневич К. П. Органосилоксаны. Свойства, получение, применение. – М.: Химия, 1985.
3. Михайлов М. В., Соловьев В. А., Сырников Ю. С. Основы молекулярной акустики. – М.: Наука, 1964. 514 с.
4. Лэмб. Дж. Термическая релаксация в жидкостях. // Физическая акустика / Под ред. Мэзона. У. М. Т. 2А. М.: Мир, 1968. – С. 222–297
5. Литовиц. Т., Дэвис К. Структурная и сдвиговая релаксация в жидкостях. // Физическая акустика / Под ред. Мэзона. У. М. – т. 2А. – М.: Мир, 1968. – С. 298–370.

RELAXATION OF THE VOLUME AND SHEAR VISCOSITIES

IN DIETHYL SILOXANE AND ETHYLOCTHYL SILOXANE

V. Surnichov, V. Kovalenko, E. Bannikova

*Moscow State Regional University
10a, Radio st., Moscow 105005, Russia*

Abstract. A variable distance pulsed phase-locked method is applied to study temperature and frequency dependences of the rate and coefficient of ultrasound absorption in diethyl siloxane and ethyloctyl siloxane in the frequency range 4-63 MHz at temperature from 293 to 348 K. Based on experimental data, a frequency dependence of the volume and shear viscosities is derived. The values of the shear and volume viscosity coefficients, as well as the relaxation times of processes discovered, are found.

Keywords: rate of ultrasound, coefficient of ultrasound absorption, volume viscosities, shear viscosities, relaxation times.

УДК 533.72

ОБ АСИМПТОТИКЕ ТЕЧЕНИЙ РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА С НЕСКОЛЬКИМИ МАЛЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

М.М. Кузнецов, Ю.Д. Кулешова

*Московский государственный областной университет
105005, Москва, ул. Радио, д. 10а*

Аннотация. Рассмотрен ряд асимптотических задач динамики разреженных газов с несколькими малыми параметрами, когда результирующее асимптотическое состояние газа зависит от относительной скорости стремления этих параметров к своим предельным значениям.

К задачам указанного типа относятся:

1. Определение структуры переходных по степени разреженности вязких ударных и пограничных слоев.
2. Предельное решение задачи о слое Кнудсена на «дне» пограничного слоя Прандтля при обобщенной (на случай физико-химических процессов) модели зеркально-диффузной поверхности Максвелла.
3. Расчет коэффициента аккомодации по внутренним степеням свободы многоатомных («лазерных») молекул при адсорбции их на поверхности неравновесно возбужденного двухтемпературного аэрозоля.
4. Гиперзвуковое обтекание тонких тел под большими углами атаки, когда параметр подобия k_δ [5] стремится к нулю, и степень сжатия в ударной волне $\varepsilon^{-1} \rightarrow \infty$, а их «относительная» скорость $k_\delta / \sqrt{\varepsilon} \approx \text{const}$.
5. Определение асимптотической структуры неравновесных предельных течений с замкнутыми линиями тока, когда характерные значения релаксационных параметров G_k и значение обратной величины числа Рейнольдса Re^{-1} стремятся к нулю: $G_k \rightarrow 0$, $\text{Re}^{-1} \rightarrow 0$.

Ключевые слова: асимптотика, гиперзвук, неравновесность, обтекание, течение.

1. В настоящее время асимптотические методы в теории движения неравновесных сред являются едва ли не самым надежным средством в понимании как механизмов различных физико-химических процессов на молекулярном уровне, так и определении влияния этих процессов на движение газа в целом (макроуровне) [1-4].

В связи с этим уместно отметить, что основополагающее уравнение движения поступательно-неравновесной среды – уравнение Больцмана – получено именно асимптотическими методами из фундаментального теоретического базиса механики – уравнения Лиувилля.

Практическая важность асимптотического подхода обусловлена его непосредственным применением к решению ряда актуальных проблем гиперзвуковых неравновесных течений, связанных с разработкой перспективных воздушно-космических аппаратов и газодинамических устройств непрерывного действия, таких как адсорбционные лазеры и гиперзвуковые воздушно-реактивные двигатели, а также проблем неравновесного гетерогенного катализа.

Ниже рассмотрен ряд моделей неравновесных сред, имеющих разнообразное физическое содержание, но допускающих аналитическое исследование в рамках, по существу, единого асимптотического подхода.

На рис. 1 представлена схематично асимптотическая структура предельных течений разреженного газа, когда основные газодинамические критерии подобия: число Маха, число Кнудсена стремятся к своим экстремальным значениям:

$$M_{\infty} \rightarrow \infty, \quad Kn \rightarrow 0, \quad \varepsilon = I^{-1} \rightarrow 0, \quad \varepsilon M_{\infty}^2 \gg 1, \quad N = \frac{K_{\delta}}{\sqrt{\varepsilon}} \leq 1. \quad (1)$$

Здесь M_{∞} , Kn , ε^{-1} , I – соответственно числа Маха, Кнудсена, степень сжатия в ударной волне, число степеней свободы молекул газа, $Kn \approx K_{\delta} = l\delta^{-1}$, l – длина среднего свободного пробега молекул, δ – толщина тонкого ударного или пограничного слоя. На рис. 1 индексы S, SL, BL, KL относятся соответственно к зонам ударной волны, тонкого ударного, пограничного и кнудсеновского слоёв.

Характерной особенностью рассматриваемой теории является стремление к нулю обратной величины степени сжатия за сильной ударной волной. Степень сжатия пропорциональна числу степеней свободы молекул газа. Такие теории, как известно, получили название ньютоновских.

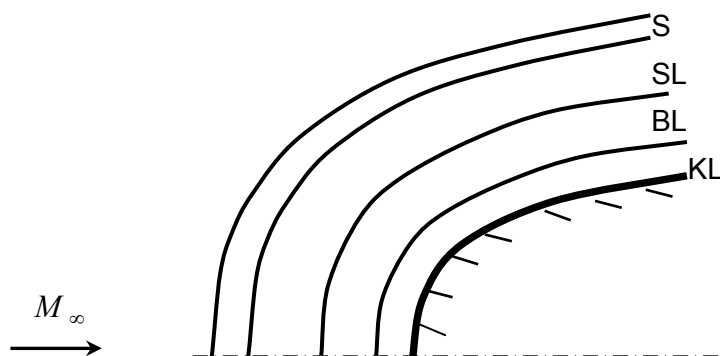


Рис. 1. Асимптотические зоны при гиперзвуковом обтекании затупленных тел

Отметим, что стремление газодинамических критериев к своим экстремальным значениям ограничено двумя неравенствами.

Первое из них выделяет класс ньютоновских предельных течений.

Второе связано с еще одним безразмерным параметром N . Этот параметр постоянно возникает при рассмотрении обтеканий затупленных и острых тел в континуальных режимах. Он имеет много разных физических представлений, одним из которых является отношение толщин невязкого ударного и пограничного слоев. Однако до недавнего времени не было известно, что этот параметр является также мерой отношения конвективного и столкновительного операторов в уравнении Больцмана при рассмотрении гиперзвуковых ньютоновских течений [4]. И в том случае, когда он становится величиной порядка единицы, континуальность течения в гиперзвуковом ударном слое нарушается. При этом справедлив следующий критерий:

Гиперзвуковые пограничные слои, в которых число Кнудсена K_δ приблизительно равно величине M_s^{-1} , где M_s – число Маха, определенное по скорости на внешней границе пограничного слоя и температуре за ударной волной T_s (или температуре торможения T_0) являются не континуальными, а кинетическими, причем $K_\delta \sim M_s^{-1} \sim \sqrt{\varepsilon}$.

Таким образом, в ньютоновской кинетической теории нарушение континуального режима вязких гиперзвуковых течений происходит не при числе Кнудсена $Kn \sim 1$, а несколько ранее, поскольку $\varepsilon \ll 1$.

С асимптотической точки зрения предельный переход по двум малым параметрам $K_\delta \rightarrow 0$ и $\varepsilon \rightarrow 0$ будет приводить к разным предельным состояниям вязкого гиперзвукового потока в зависимости от соотношения малых параметров K_δ и ε :

- 1) ($K_\delta \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$ и $\frac{K_\delta}{\sqrt{\varepsilon}} \ll 1$) – континуальный тонкий вязкий ударный слой [6];
- 2) ($K_\delta \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$ и $\frac{K_\delta}{\sqrt{\varepsilon}} \sim 1$) – кинетический тонкий вязкий ударный (или пограничный) слой с нелинейными явлениями переноса [4].

Наличие второго малого параметра ε при совершении ньютоновского предельного перехода позволяет расщепить конвективный оператор на главную и поправочную части. При этом для главной части конвективного оператора будет отсутствовать зацепление уравнений моментов n -го порядка с уравнением $(n+1)$ -го порядка. Это позволяет произвести строгий асимптотический обрыв бесконечной системы уравнений моментов и получить замкнутые выражения для вектора потока тепла тензора напряжения, нелинейных по компоненте градиента скорости, нормальной к обтекаемой поверхности [4]. Заметим, что в отличие от уравнений Барнетта, супер-Барнетта и т.д. система итоговых макроскопических уравнений моментов имеет тот же порядок, что и уравнения Навье-Стокса (Прандтля), а также то же число граничных условий. Система уравнений является замкнутой, однако замыкающие реологические соотношения имеют нелинейную структуру по компоненте градиента скорости.

Численная верификация полученной замкнутой системы уравнений была проведена при исследовании гиперзвуковых течений многоатомного газа в вязких ударных слоях на поверхности затупленных тел. В дальнейшем аналогичный подход был развит для

анализа гиперзвукового обтекания тонких тел, а также для течений газа в гиперзвуковых пограничных слоях [4]. В случае бесструктурного газа (при равной нулю теплоемкости внутренних степеней свободы) соответствующие уравнения с нелинейными эффектами, переходят в уравнения, полученные на основе приближения 13-ти моментов Грэда [7].

Численные исследования нелинейных уравнений переноса были проведены при решении следующих задач:

- 1) гиперзвукового обтекания параболоида вращения фреоном – 14 (CF₄), имеющим 12 внутренних степеней свободы, при $M_\infty = 12$, $Re_\infty = 145$;
- 2) гиперзвукового обтекания сферического затупления молекулярным азотом при $M_\infty = 26$, $Re_\infty = 65$;
- 3) гиперзвукового обтекания скользящего цилиндра $\chi = 75^\circ$ (χ – угол скольжения), $M_\infty = 20$, $Re_s = 10$;
- 4) гиперзвукового обтекания пластины с острой передней кромкой потоком вращательно-возбужденного азота при $M_\infty = 23$.

Эти исследования показали лучшее совпадение найденных характеристик течения (в частности, давления) с расчетами по методу Монте-Карло, чем расчеты упрощенных уравнений Навье – Стокса, т.н. уравнений вязкого ударного слоя.

2. Следующей областью гиперзвукового обтекания, где нельзя обойтись без решения уравнения Больцмана, является тонкий приповерхностный слой Кнудсена с толщиной порядка средней длины свободного пробега молекул.

С феноменологической точки зрения проблема постановки граничных условий на дне области «KL» заключается в получении необходимых дополнительных соотношений, замыкающих интегральные законы сохранения потоков массы, импульса, энергии и т.д., записанных для поверхностей разрыва характеристик сред. Конкретный вид этих дополнительных соотношений зависит от физической природы и молекулярной структуры поверхности разрывов, исследование которых для диссипативных сред уже невозможно в рамках феноменологических теорий и требует более детального молекулярно-кинетического анализа. В кинетической теории газов поверхностями разрывов соответствуют пристеночные кнудсеновские слои (область «KL»), исследование которых было начато еще Максвеллом [8]. В этой основополагающей работе он сформулировал два основных положения, которые сохранили свое принципиальное значение и по настоящее время. Суть их состоит в том, что для определения макроскопических граничных условий необходимо:

- а) построить физическую модель поверхности, рассеивающей молекулы газа;
- б) определить функцию распределения молекул в пристеночном слое.

Первое положение является наиболее сложным. В настоящее время оно трансформировалось в отдельную научную дисциплину – взаимодействие молекул газа с поверхностью [2].

Второе положение нашло отражение при получении макроскопических граничных условий, задаваемых на поверхностях с произвольной аккомодацией импульса и энергии. При этом, как показано в [4], объемным влиянием слоя Кнудсена на искомую функцию распределения молекул вблизи стенки в главном приближении можно пренебречь. Учет этого влияния необходим в следующих приближениях по малому параметру $\sqrt{Kn}$ при получении более точных граничных условий.

Вследствие этого, а также благодаря тому, что зеркально-диффузную схему Максвелла можно распространить в обобщенном смысле на ряд других физических взаимодействий: адсорбцию, десорбцию, испарение, конденсацию, колебательный энергообмен, каталитическую рекомбинацию и т.д. [4], макроскопические граничные условия в главном приближении приобретают математически универсальный, так называемый смешанный тип:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = g v, \quad (2)$$

где y – нормаль к поверхности, g и v – соответственно вектор-столбцы безразмерных и размерных характеристик газа: среднемассовой скорости, поступательной температуры, энергии колебательных степеней свободы, концентраций и т.п. Например, при тепловой аккомодации, характеризуемой коэффициентом α , для газа, имеющего температуру T вблизи поверхности с температурой T_w , будет:

$$v = T - T_w, \quad g \sim \alpha / \sqrt{Kn}$$

Отметим, что при $g \sim 1$ граничные условия (2) будут сильно отличаться от термодинамически и механически равновесных условий прилипания, т.е. на дне области «KL» газ будет находиться в неравновесном состоянии, сильно отличающемся от состояния термодинамически равновесного со стенкой.

В этом состоит главное отличие теоремы единственности [4] от установленных ранее теорем [9,10]. Заметим также, что теорема единственности, доказанная в работе [11] для газа в термостате, покоящегося относительно его стенок, не имеет отношения к состоянию газа на дне области «KL». Различие будет особенно заметным при $g_\sigma \cong 1$, где

$$g_\sigma \cong \frac{\sigma}{\sqrt{Kn}}, \quad \sigma - \text{коэффициент аккомодации тангенциального импульса. В этом случае}$$

скорость скольжения газа на дне области «KL» сравнима по величине со скоростью на внешней границе пограничного слоя (область «BL»).

С асимптотической точки зрения результаты работ [9, 10] соответствуют частному виду предельного перехода:

$$\sigma \rightarrow 0, \quad \alpha \rightarrow 0, \quad (\sigma / \sqrt{Kn}) \equiv g_\sigma \gg 1, \quad (\alpha / \sqrt{Kn}) \equiv g_\alpha \gg 1.$$

В общем случае, когда g_σ и g_α могут быть величинами порядка единицы, теорема единственности приобретает следующую формулировку:

Единственным решением уравнения Больцмана в слое Кнудсена на непроницаемой в главном приближении (при $Kn \ll 1$) зеркально-диффузной поверхности является локально-максвелловская функция распределения $f^{(0)}(v)$ с макроскопическими параметрами v , удовлетворяющими граничным условиям (2).

Следует отметить, что в общем случае при совершении двойного предельного перехода по числу Кнудсена $Kn \rightarrow 0$ и соответствующему малому параметру (аналогу σ

или а) в обобщенном зеркально-диффузном взаимодействии единственность граничных условий (2) будет определяться единственным выбором критерия g в однопараметрической зависимости $\nu = \nu(g)$.

3. Для определения эффективных режимов накачки внутренних степеней свободы газового компонента в дисперсной среде с неравновесно возбужденным аэрозолем необходимо решить квантовомеханическую задачу о расчете вероятности резонансного обмена квантами колебательной энергии ξ в поле адсорбционных сил [4]. Величину ξ можно также трактовать как коэффициент аккомодации внутримолекулярной колебательной энергии. Благодаря наличию асимптотического неравенства $\hbar\omega_D \ll D \ll \hbar\Omega_0$, решение задачи удастся получить в конечном аналитическом виде. (Здесь D – глубина потенциальной ямы, $\hbar\omega_D$, $\hbar\Omega_0$ – дебаевский и внутримолекулярный колебательные кванты).

В итоге величина ξ оказывается равной отношению $\zeta / (1 + \zeta)$, где ζ – безразмерный параметр, равный отношению характерного времени десорбции к времени резонансного обмена квантами внутренних колебаний молекул. Для эффективного механизма резонансного обмена внутренними колебательными квантами в адсорбционном слое необходимо выполнение неравенства $\zeta \gg 1$, что количественно выражает условие длительности взаимодействия. При $\zeta \sim 1$ и переходном режиме разреженности вблизи частицы аэрозоля распределение частиц в адсорбционном слое по внутримолекулярным колебательным уровням не будет больцмановским.

Заметим, что здесь вновь, как и в пунктах 1, 2, возникает асимптотическая проблема определения предельного состояния физической системы при стремлении к нулю двух малых параметров: $\varepsilon \rightarrow 0$ и $\varepsilon_1 \rightarrow 0$. Эти параметры пропорциональны соответственно отношению одного «быстрого» масштаба – времени переходов молекулы между уровнями потенциальной ямы к двум «медленным»: времени внутримолекулярных переходов и времени десорбции с верхних уровней ямы. Как и раньше, предельное состояние зависит от относительной скорости стремления к нулю этих параметров, которой в данном случае соответствует величина ζ .

4. Предельный переход по двум малым параметрам $\varepsilon \rightarrow 0$, $\Omega \rightarrow 0$ в уравнениях пространственного ударного слоя в зоне «SL» (рис.1) приводит к плоскому течению вдоль сечений по размаху крыла (Ω – параметр Месситера [12]).

Однако пристеночный вихревой подслой, образованный линиями тока, входящими в ударный слой вблизи плоскости симметрии или у вершины крыла, имеет в общем случае пространственный характер.

Как и в предыдущих пунктах, где имела место аналогичная ситуация с двойным предельным переходом, предельное семейство решений будет зависеть от относительной скорости стремления двух малых параметров к нулю. В данном случае таким «относительным» параметром будет $\tilde{\Omega} = \Omega \varepsilon^{-1/2}$ [4].

Существуют три характерных режима течения, различающихся значением параметра $\tilde{\Omega}$: а) $\tilde{\Omega} \ll 1$; б) $\tilde{\Omega} \sim 1$; в) $\tilde{\Omega} \gg 1$.

В первых двух случаях вихревой подслой оказывает существенное влияние на течение в основной области влияя на форму ударной волны. В случае в) вихревой подслой, в отличие от двух предыдущих, не требует учета тангенциального градиента давления (по размаху крыла).

Аналитическое решение задачи обтекания тонкого крыла гиперзвуковым потоком совершенного газа (при $\Omega \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$) было обобщено на случай релаксирующего газа с произвольной моделью химической кинетики в [4].

Аналогичный «относительный» параметр $\tilde{k}_\delta = k_\delta \varepsilon^{-1/2}$ был введен в случае предельной картины обтекания тонких тел при больших углах атаки ($k_\delta \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$, $\text{tg} \alpha \sim 1$, где $k\delta = \delta \text{ctg} \alpha$, δ – безразмерная толщина, $\delta \ll 1$) [4]. Оказалось, что этот параметр связан с другим параметром K [13], характеризующим азимутальное растекание потока на тонком конусе, причем

$$K = \frac{1}{3} (\sqrt{1 + 3\tilde{k}_\delta^{-2}} - 1) .$$

Это обстоятельство существенно для моделирования коэффициентов трения и теплопередачи в пограничном слое, поскольку K не может задаваться независимо от k_δ .

5. Характерной особенностью неравновесных возвратных течений с замкнутыми линиями тока является наличие в системе исходных уравнений большого числа релаксационных параметров G_k , задающих отношение (масштабы) времен химической релаксации к основному газодинамическому времени. Многообразие этих параметров обуславливает многообразие различных асимптотических случаев. Как было показано в [4], уравнения релаксационной газодинамики для течений с замкнутыми, кольцевыми трубками тока допускают периодические решения. Однако, в практическом отношении наиболее интересным оказался случай:

$$Re^{-1} < G_k \ll 1 , \quad (3)$$

или в предельном смысле:

$$Re^{-1} \rightarrow 0, \quad G_k \rightarrow 0, \quad ReG_k = \text{const} . \quad (3)$$

Снова, как и ранее, имеет место двойной предельный переход по двум малым параметрам $Re^{-1} \rightarrow 0$, $G_k \rightarrow 0$. Как и в пунктах 1-4, итоговое предельное состояние функционально зависит от относительной скорости стремления этих параметров к нулю, т.е. в данном случае от величины $\xi_k = Re G_k Sc_k$ (Sc_k – число Шмидта).

Возможны следующие характерные значения ξ_k :

- а) $\xi_k \gg 1$. – Существенной особенностью этого режима является наличие тонких слоев химической релаксации с большими градиентами термохимических параметров.
- б) $\xi_k \ll 1$. – Замороженное течение с однородным распределением концентрации по замкнутым линиям тока.
- в) $\xi_k \sim 1$. – Течение с неоднородным распределением концентрации по линиям тока. Этот случай представляет определенный интерес для приложений, связанных с прохождением электромагнитных волн через плазменные образования и определением концентрации электронов в них [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Валландер С.В., Нагнибеда Е.А., Рыдалевская М.А.* Некоторые вопросы кинетической теории химически реагирующей смеси газов. Ленинград: Издательство ЛГУ, 1977, 280 с.
2. *Баранцев Р.Г.* Взаимодействие разреженных газов с обтекаемыми поверхностями. М.: Наука, 1975, 344 с.
3. *Филиппов Б.В., Хантулева Т.А.* Граничные задачи нелокальной гидродинамики. Л.: Ленинградский университет, 1984, 87 с.
4. *Кузнецов М.М., Яламов Ю.И.* Модели асимптотической теории динамики неравновесных сред. М.: Издательство МГОУ, 2007, 257 с.
5. *Сычев В.В.* Пространственные гиперзвуковые течения около тонких тел при больших углах атаки. // ПММ. 1960. Т. 24. вып. 2, с. 205-212.
6. *Тирский Г.А.* К теории гиперзвукового обтекания плоских и осесимметричных затупленных тел вязким химически реагирующим многокомпонентным потоком газа при наличии вдува. // Научные труды Инст. механики, Изд-во МГУ, 1975, №39, с.5-38.
7. *Cheng H.K.* The Viscous Shock Layer Problem Formulation Revisited // International Conference of Research in Hypersonic Flows and Hypersonic Technologies, Sept. 19-21, 1994, Zhykovsky, Russia, Book of Abstracts.
8. *Maxwell J.C.* On stresses in rarefied gas arising from inequilitis of temperatures, appendix: The Scientific paper of J.C. Maxwell, Paris, 1927, vol.II, p.681-712.
9. *Луцет М.О.* О течении релаксирующего газа вблизи твердой поверхности. // ПМТФ, 1973, №4, с.33-39.
10. *Гиро Ж.П.* Газовая динамика с точки зрения кинетической теории. // Сб. пер. Механика, 1974, №3, с.53-75.
11. *Москалев О.Б.* Н – теорема Больцмана для газа в термостате. // Докл. АН СССР, 1977, т.232, №3, с.521-523.
12. *Месситер А.Ф.* Подъемная сила тонких треугольных крыльев по ньютоновской теории. //Ракетная техника и космонавтика, 1963, № 4, с. 31-41.
13. *Авдудевский В.С.* Расчет трехмерного пограничного слоя на линиях растекания. //Известия АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1962, № 1, с. 32-41.

**ON ASYMPTOTICAL THEORY OF RAREFIED GAS DYNAMICS
WITH SOME SMALL PARAMETERS**

M. Kuznetsov, Ju. Kuleshova

*Moscow State Regional University
10a, Radio st., Moscow 105005, Russia*

Abstract: Analytical results of the asymptotical study of some problems of the rarefied gas dynamics with two small parameters are represented. The resulting state of the gas

depends on the relative speed of the tendency of these parameters toward its limiting values. This procedure proved to be useful by investigations of: 1) the investigation of viscous shock layer and boundary layer structure in transitional regime; 2) the limited solution of Knudsen's layer problem by physical - chemical surface model generalization on specular-diffused surface of Maxwell; 3) the gas-surface collision problems; 4) the hypersonic theory problems; 5) the separation of flow theory problem.

Keywords: asymptotic behavior, hypersound, nonequilibrium, flow.

УДК 533.72

ТЕРМОФОРЕЗ ДУБЛЕТОВ ДВУХСЛОЙНЫХ АЭРОЗОЛЬНЫХ ЧАСТИЦ ПРИ НАЛИЧИИ И ОТСУТСТВИИ ИХ ВРАЩЕНИЯ

А.С. Хасанов*, И.М. Арсланов**

**Российская экономическая академия им. Г.В. Плеханова (РЭА им. Г.В. Плеханова)
113054 г. Москва, Стремянный пер., 36*

***Камская государственная инженерно-экономическая академия (ИНЭКА)
423810 Татарстан, г. Набережные Челны, Проспект Мира, 11/18*

Аннотация. Рассмотрен термофорез двух крупных двухслойных аэрозольных частиц при наличии и отсутствии их вращения. Получены формулы для скорости термофореза и угловой скорости вращения частиц. Как предельный случай рассмотрена задача о гравитационном осаждении двух сферических частиц при наличии и отсутствии их вращения и выведены точные формулы для поправочных коэффициентов к закону Стокса и угловой скорости вращения частиц. Для практических расчетов приведены приближенные формулы.

Ключевые слова: термофорез, аэрозольные частицы.

Введение. Одной из основных целей в задаче о движении взаимодействующих аэрозольных частиц в газовых средах является оценка влияния гидродинамического взаимодействия на движение частиц. Среди систем взаимодействующих частиц наибольший интерес представляют системы из двух частиц (дублеты). Движение частиц может зависеть и от других видов взаимодействия, например, от силы электрического взаимодействия. Но они существенны в случае мелких частиц. В случае крупных частиц интерес представляет именно эффект гидродинамического взаимодействия. Частица считается крупной, если число Кнудсена λ/a является величиной малой [1], где λ – средняя длина свободного пробега газовых молекул, a – радиус частицы. В этом случае газ рассматривается как сплошная среда и при описании движения частиц применяется гидродинамический метод. Перенос частиц в газовых средах может происходить под действием различных внешних полей. Движение частиц в поле постоянного на большом удалении от них градиента температуры называется термофорезом. Движение ча-

стиц в поле оптического излучения называется фотофорезом. В задаче о гравитационном осаждении частиц рассматривается их движение под действием силы тяжести. Следует отметить, что в задачах о движении частиц в неоднородных по температуре газам характер взаимодействия частиц зависит и от их внутренней структуры. К частицам с неоднородными теплофизическими свойствами относятся, например, двухслойные и многослойные частицы. Двухслойные частицы образуются в ходе конденсации молекул паров какого-либо вещества на поверхности твердого ядра. После затвердевания жидкой оболочки образуется твердая двухслойная частица. Ясно, что модель двухслойной частицы включает и однородные частицы (ядро и оболочка могут состоять из одного вещества). Существуют различные методы решения задач о взаимодействующих частицах [2-3]. Интерес вызывают расчетные формулы, полученные из точных формул, учитывающих одновременно и гидродинамический эффект и эффект неоднородности частиц. В случае однородных частиц точные формулы, учитывающие гидродинамический эффект, могут быть выведены методом, основанным на использовании биполярной системы координат [2]. Но этот метод неприменим в случае неоднородных частиц. Точные формулы, описывающие движение двух крупных твердых сферических как однородных, так и неоднородных частиц могут быть выведены операторным методом [4]. Интерес вызывают формулы, полученные как для частиц, которые могут свободно вращаться, так и для частиц, лишенных возможности вращаться. С одной стороны, сравнение этих формул позволяет оценить влияние вращения частиц на их скорость. С другой стороны, рассматривая две жестко закрепленные друг к другу и лишенные возможности вращаться частицы, мы получим формулу для скорости гантелеобразных частиц. Так как точные формулы имеют сложный вид, то интерес представляют выведенные из них достаточно простые формулы. В данной работе будут выведены такие формулы для термофоретического движения. Также будут выведены формулы для случая движения двух частиц в поле тяжести. Аналогичные формулы могут быть выведены и в случае фотофореза двух двухслойных частиц.

Постановка задачи о термофорезе двух двухслойных частиц. Пусть в газовой среде поддерживается постоянный градиент температуры ∇T (газ будем считать однокомпонентным, соответствующее ∇T поле температуры обозначим через T_∞). Две одинаковые крупные твердые сферические двухслойные аэрозольные частицы взвешены в рассматриваемом газе. Пусть b – радиус ядра частиц, $\chi = b/a$, O_1 и O_2 – центры частиц, O – середина отрезка O_1O_2 , $l = |O_1O_2|$, $t = a/l$, $\vec{l}^w$ – вектор O_1O_2 , α – угол между векторами ∇T и $\vec{l}^w$. Ясно, что $0 \leq \chi \leq 1$, $0 \leq t \leq 0,5$. Выберем декартову систему координат $Oxyz$, в которой направление оси Oz совпадает с направлением вектора $\vec{l}^w$, координатная плоскость Oxz параллельна вектору ∇T . Нумерация частиц и направление оси Ox выбраны так, что углы между вектором ∇T и единичными векторами $\vec{i}^w$, $\vec{k}^w$ не превосходят $\pi/2$. Пусть T_e – поле температуры в газе, $T_i^{(j)}$ и $T_b^{(j)}$ – соответственно, поля температуры внутри оболочки и ядра j -й частицы (верхний индекс $j \in \{1, 2\}$ означает номер частицы), T_0 – температура в точке O_1 в поле T_∞ , $T_a = |\nabla T|a$. Предполагается, что $T_a/T_0 \ll 1$ [1]. Тогда поля T_e , $T_i^{(j)}$, $T_b^{(j)}$ можно изучать в квазистационарном ре-

жиме, решая уравнения $\nabla^2 T_e = 0$, $\nabla^2 T_i^{(j)} = 0$, $\nabla^2 T_b^{(j)} = 0$ [1]. Путем параллельного переноса системы $Oxyz$ в точки O_1 и O_2 получим системы координат, в которых записываются граничные условия (кроме сферических координат r, θ, φ используются координаты r_1, θ_1, φ_1 и r_2, θ_2, φ_2): $T_e = T_i^{(j)}$, $\kappa_e \frac{\partial T_e}{\partial r_j} = \kappa_i \frac{\partial T_i^{(j)}}{\partial r_j}$ при $r_j = a$ и $T_i^{(j)} = T_b^{(j)}$, $\kappa_b \frac{\partial T_b^{(j)}}{\partial r_j} = \kappa_i \frac{\partial T_i^{(j)}}{\partial r_j}$ при $r_j = b$, где κ_e , κ_i , κ_b – соответственно, коэффициенты теплопроводности газа, оболочки и ядра частиц. Поля $T_b^{(j)}$ ограничены в центрах ядер и $T_e \rightarrow T_\infty$ равномерно при $r \rightarrow \infty$. Основной целью тепловой части задачи является нахождение точных формул для поля температуры в газе вблизи поверхности частиц.

Исследование движения в квазистационарном режиме означает решение стационарной задачи с теми граничными условиями, которые имеют место в рассматриваемый момент времени. Взаимодействие газа с неоднородно нагретой поверхностью частицы приводит к тепловому скольжению [1] газа по ее поверхности. В этих условиях создается действующий на частицу импульс, под действием которого она приходит в ускоренное движение. На частицу также действует сила вязкого сопротивления внешней среды, которая увеличивается с ростом скорости [2] и уравнивает термофоретическую силу, что позволяет определить мгновенную термофоретическую скорость частицы $\vec{U}^{(j)}$. В общем случае частица совершает и вращательное движение вокруг оси, проходящей через ее центр масс O_j с некоторой угловой скоростью $\vec{\omega}^{(j)}$. Пусть $\vec{V}$ и p – поля скорости и давления в газе. Из условия $T_a/T_0 \ll 1$ следует, что число Рейнольдса является величиной малой [1], поля $\vec{V}$ и p могут быть определены из уравнений Стокса $\eta \nabla^2 \vec{V} = \nabla p$, $\nabla \cdot \vec{V} = 0$, где $\lim \vec{V} = 0$ и $\lim p = p_\infty$ при $r \rightarrow \infty$. На поверхности движущейся j -й частицы генерируется поле скоростей в газе

$$\vec{V}^{(j)} = \vec{U}^{(j)} + [\vec{\omega}^{(j)}, \vec{r}_j] + \frac{K_{Tsl} \eta}{T_0 \rho_e a} \nabla_{\theta, \varphi_j} T_e,$$

где $r_j = a$, $[\vec{\omega}^{(j)}, \vec{r}_j]$ – векторное произведение векторов $\vec{\omega}^{(j)}$ и $\vec{r}_j$,

$$\nabla_{\theta, \varphi} T_e = \vec{i}_\theta \frac{\partial T_e}{\partial \theta} + \vec{i}_\varphi \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial T_e}{\partial \varphi},$$

а K_{Tsl} , ρ_e , η – соответственно, коэффициент теплового скольжения ($K_{Tsl} = 1,169$), плотность и динамическая вязкость газа. Поле $\vec{V}$ удовлетворяет граничным условиям $\vec{V} = \vec{V}^{(j)}$ при $r_j = a$ и сформулированным выше условиям на бесконечности. Одной из основных целей в гидродинамической части задачи является вывод формул для силы $\vec{F}^{(j)}$ и крутящего момента $\vec{T}^{(j)}$, действующих на j -ю частицу со стороны газа.

Формулы для силы $\vec{F}^{(j)}$ и крутящего момента $\vec{T}^{(j)}$. Как было сказано выше, точное решение задачи о термофорезе двух двухслойных частиц можно получить оператор-

ным методом. В этом методе поля T_e , $T_i^{(j)}$, $T_b^{(j)}$, V , p представляются в виде разложений по объемно-сферическим функциям. Нахождение этих разложений равносильно нахождению векторов, координатами которых являются коэффициенты разложений. Формулы для этих векторов записываются с использованием линейных операторов, заданных с помощью бесконечных матриц. Приведем только формулы для силы $\vec{F}^{(j)}$ и крутящего момента $\vec{T}^{(j)}$. Пусть $m \in \{0,1\}$,

$$\gamma_{sn}^{(m)} = \frac{(s-m)(s+m)[sn-2(s+n)+1]}{s(2s-1)(n+1)(n+s)} + \frac{2-n}{2(n+1)}, \quad \beta_{sn} = \frac{n(2n-1)}{2(n+1)(2s+3)},$$

а запись $(A)_{sn}$ означает элемент матрицы A . Определим матрицы с бесконечным числом строк и столбцов по следующим формулам:

$$(M^{(m)})_{sn} = C_{n+s}^{n-m} t^{n+s+1}, \quad (M_{\beta}^{(m)})_{sn} = C_{n+s}^{n-m} t^{n+s+1} \beta_{sn}, \quad (M_{\gamma}^{(m)})_{sn} = C_{n+s}^{n-m} t^{n+s-1} \gamma_{sn}^{(m)},$$

$$(M_{\omega 1}^{(m)})_{sn} = C_{n+s}^{n-m} t^{n+s} m/s, \quad (M_{\omega 2}^{(m)})_{sn} = C_{n+s}^{n-m} t^{n+s+1} n/(s+1),$$

$$(M_{\omega 3}^{(m)})_{sn} = C_{n+s}^{n-m} t^{n+s} m(2n-1)/[s(s+1)(n+1)].$$

Следующие матрицы являются диагональными и определены по формулам:

$$(\Lambda_1)_{sn} = -(s+1)/s \delta_{sn}, \quad (\Lambda_4)_{sn} = (s+1) \delta_{sn}, \quad (\Lambda_5)_{sn} = (2s+3) \delta_{sn}, \\ (\Lambda_6)_{sn} = (2s+1) \delta_{sn},$$

$$(\Lambda^{(d)})_{sn} = \varphi_s(\tau \varphi_s(\chi^{2s+1} \varphi_s(\tau_b))) \delta_{sn},$$

где δ_{sn} – символ Кронекера, $\tau = \kappa_e/\kappa_i$, $\tau_b = \kappa_i/\kappa_b$, $\varphi_s(x) = (1-x)/[1+(1+1/s)x]$. Элементы $(\Lambda^{(d)})_{11}$ и $(\Lambda^{(d)})_{22}$ матрицы $\Lambda^{(d)}$ обозначим через λ_{11} и λ_{22} . Можно показать корректность определения следующих матриц:

$$R^- = \Lambda_5 M_{\beta}^{(0)} + \Lambda_6 M_{\gamma}^{(0)} - \Lambda_6 M^{(0)} \Lambda_1^{-1} (E - M^{(0)} \Lambda_1^{-1})^{-1} (0,5E - M_{\beta}^{(0)} - M_{\gamma}^{(0)}),$$

$$R^+ = \Lambda_5 M_{\beta}^{(1)} + \Lambda_6 M_{\gamma}^{(1)} + \Lambda_6 M_{\omega 1}^{(1)} (E + M_{\omega 2}^{(1)})^{-1} M_{\omega 3}^{(1)} -$$

$$- \Lambda_6 M^{(1)} \Lambda_1^{-1} (E + M^{(1)} \Lambda_1^{-1})^{-1} [0,5E + M_{\beta}^{(1)} + M_{\gamma}^{(1)} + M_{\omega 1}^{(1)} (E + M_{\omega 2}^{(1)})^{-1} M_{\omega 3}^{(1)}].$$

Формулы для силы $\vec{F}^{(j)}$ и крутящего момента $\vec{T}^{(j)}$ записываются через функции, которые, в свою очередь, записаны через приведенные выше матрицы. Пусть $E_1 = (1,0,0,\dots)^T$ – бесконечномерный вектор. Можно показать корректность определения следующих функций при $\Lambda \in \{\Lambda_1^{-1}, \Lambda^{(d)}\}$:

$$f^-(t, \Lambda) = E_1^T (E - R^-)^{-1} \Lambda_4 (E - \Lambda) (E - M^{(0)} \Lambda)^{-1} E_1, \quad (1)$$

$$f^+(t, \Lambda) = E_1^T (E + R^+)^{-1} \Lambda_4 (E - \Lambda) (E + M^{(1)} \Lambda)^{-1} E_1, \quad (2)$$

$$f^{+\omega}(t, \Lambda) = E_1^T (E + M_{\omega 2}^{(1)})^{-1} M_{\omega 3}^{(1)} (E + R^+)^{-1} \Lambda_4 (E - \Lambda) (E + M^{(1)} \Lambda)^{-1} E_1, \quad (3)$$

$$f_{\omega}^+(t, \Lambda) = E_1^T (E + R^+)^{-1} \Lambda_4 (E - \Lambda) (E + M^{(1)} \Lambda_1^{-1})^{-1} M_{\omega 1}^{(1)} (E + M_{\omega 2}^{(1)})^{-1} E_1, \quad (4)$$

$$f_{\omega}^{+\omega}(t, \Lambda) = E_1^T (E + M_{\omega 2}^{(1)})^{-1} E_1 + \\ + E_1^T (E + M_{\omega 2}^{(1)})^{-1} M_{\omega 3}^{(1)} (E + R^+)^{-1} \Lambda_4 (E - \Lambda) (E + M^{(1)} \Lambda)^{-1} M_{\omega 1}^{(1)} (E + M_{\omega 2}^{(1)})^{-1} E_1, \quad (5)$$

$$h^+(t, \Lambda) = f^{+\omega}(t, \Lambda) / f^+(t, \Lambda), \quad (6)$$

$$g^+(t, \Lambda) = f_{\omega}^{+\omega}(t, \Lambda_1^{-1}) - h^+(t, \Lambda) f_{\omega}^+(t, \Lambda_1^{-1}). \quad (7)$$

Заметим, что

$$f^{\pm}(0, \Lambda_1^{-1}) = 3, \quad f^{\pm}(0, \Lambda^{(d)}) = 2(1 - \lambda_{11}). \quad (8)$$

Формулы (1)-(7) содержат бесконечномерные матрицы. Но несложно составить компьютерные программы (для этого достаточны возможности Excel) для расчета этих функций. Для матрицы A определим при любом фиксированном $k \geq 3$ матрицу $A^{[k]}$, которая получена путем обнуления всех элементов a_{sn} матрицы A при $s + n \geq k$. Матрица $A^{[k]}$ имеет блочно-диагональную структуру и состоит из двух диагональных блоков. Первый диагональный блок имеет размеры $(k - 2) \times (k - 2)$, а второй диагональный блок является нулевой матрицей. В формулах (1)-(7) заменим матрицы $M^{(0)}$, $M_{\beta}^{(0)}$, $M_{\gamma}^{(0)}$, $M_{\beta}^{(1)}$, $M_{\gamma}^{(1)}$, $M_{\omega 1}^{(1)}$, $M_{\omega 2}^{(1)}$, $M_{\omega 3}^{(1)}$ на матрицы $M^{(0)[k]}$, $M_{\beta}^{(0)[k]}$, $M_{\gamma}^{(0)[k]}$, $M^{(1)[k]}$, $M_{\beta}^{(1)[k]}$, $M_{\gamma}^{(1)[k]}$, $M_{\omega 1}^{(1)[k]}$, $M_{\omega 2}^{(1)[k]}$, $M_{\omega 3}^{(1)[k]}$ при некотором $k \geq 3$. Достаточно найти первые блоки матриц, входящих в эти формулы. Полученные таким образом значения функций с ростом k стремятся к точным. Расчеты нами проводились с помощью программы Excel при $k = 54$, что обеспечивает высокую точность. Если при некотором $k \geq 1$ отбросить в матрицах $M^{(0)}$, $M_{\beta}^{(0)}$, $M_{\gamma}^{(0)}$, $M^{(1)}$, $M_{\beta}^{(1)}$, $M_{\gamma}^{(1)}$, $M_{\omega 1}^{(1)}$, $M_{\omega 2}^{(1)}$, $M_{\omega 3}^{(1)}$ все элементы вида $o(t^k)$ при $t \rightarrow 0$, то эти матрицы также приобретают блочно-диагональную структуру. Несложно составить компьютерную программу (в пределах возможностей Excel), выполняющую операции сложения, вычитания, умножения первых диагональных блоков матриц, входящих в формулы (1)-(7), с точностью до $o(t^k)$. Формулы для функций (1)-(7) с точностью до $o(t^k)$ при $t \rightarrow 0$ нами были выведены при $k = 7$. Что касается обратных матриц, то в случае нильпотентных матриц с показателем нильпотентности $n \in N$ (т.е. $A^i = 0$ при $i \geq n$ с точностью до $o(t^7)$) $(E + A)^{-1} = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i A^i$. Показатели

нильпотентности матриц $M^{(0)}\Lambda_1^{-1}$, $M^{(1)}\Lambda_1^{-1}$, $M_{\omega 2}^{(1)}$, R^- , R^+ равны, соответственно, 3, 3, 3, 8, 8.

Пусть U_0 – величина термофоретической скорости одиночной двухслойной частицы. Из постановки задачи следует, что скорости $\vec{U}^{(j)}$ и угловые скорости $\vec{\omega}^{(j)}$ можно представить в виде

$$\vec{U}^{(j)} = -U_0 (u_x \vec{i} + u_z \vec{k}) , \quad (9)$$

$$\vec{\omega}^{(j)} = (-1)^{j+1} \frac{U_0}{a} \omega_j^{\vec{\rho}} , \quad (10)$$

где u_x , u_z и ω – неизвестные безразмерные постоянные. Тогда формулы для результирующей силы $\vec{F}^{(j)}$ и для результирующего крутящего момента $\vec{T}^{(j)}$, действующих на j -ю частицу со стороны газа, могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned} \vec{F}^{(j)} = & -2\pi U_0 a \eta \{ [-u_z f^-(t, \Lambda_1^{-1}) + K \cos \alpha f^-(t, \Lambda^{(d)})] \vec{k} + \\ & + [-u_x f^+(t, \Lambda_1^{-1}) + K \sin \alpha f^+(t, \Lambda^{(d)}) + \omega f_{\omega}^+(t, \Lambda_1^{-1})] \vec{i} \} , \end{aligned} \quad (11)$$

$$\vec{T}^{(j)} = (-1)^j 8\pi U_0 a^2 [u_x f^{+\omega}(t, \Lambda_1^{-1}) - K \sin \alpha f^{+\omega}(t, \Lambda^{(d)}) - \omega f_{\omega}^{+\omega}(t, \Lambda_1^{-1})] \vec{j} , \quad (12)$$

где

$$K = \frac{K_{Tsl} \eta |\nabla T|}{T_0 \rho_e U_0} . \quad (13)$$

Основываясь на формулах (11)-(12), перейдем к рассмотрению различных случаев. Для записи полученных формул введем обозначения:

$$u^-(t, \Lambda^{(d)}) = \frac{f^-(t, \Lambda^{(d)}) f^-(0, \Lambda_1^{-1})}{f^-(t, \Lambda_1^{-1}) f^-(0, \Lambda^{(d)})} , \quad (14)$$

$$u^+(t, \Lambda^{(d)}) = \frac{f^+(t, \Lambda^{(d)}) f^+(0, \Lambda_1^{-1}) g^+(t, \Lambda^{(d)})}{f^+(t, \Lambda_1^{-1}) f^+(0, \Lambda^{(d)}) g^+(t, \Lambda_1^{-1})} . \quad (15)$$

Термофорез дублета вдоль линии центров. В этом случае $\vec{F}^{(j)} = 0$, $\vec{T}^{(j)} = 0$, $\alpha = 0$. Из формул (11)-(12) следует, что $\omega_j^{\vec{\rho}} = 0$,

$$\vec{U}^{(j)} = -\frac{2K_{Tsl} \eta}{3T_0 \rho} (1 - \lambda_{11}) u^-(t, \Lambda^{(d)}) \nabla T . \quad (16)$$

Если в формуле (16) $u^-(t, \Lambda^{(d)})$ найти с точностью до $o(t^7)$, то

$$U^{(j)} = -\frac{2K_{Tsl}\eta}{3T_0\rho}(1-\lambda_{11})[1+(1+2\lambda_{11})t^3+(4\lambda_{11}^2+2\lambda_{11}-7,5+13,5\lambda_{11}\frac{1-\lambda_{22}}{1-\lambda_{11}})t^6]\nabla T. \quad (17)$$

В этом случае вращение частиц отсутствует. Скорости движения пары закрепленных частиц и дублета совпадают.

Термофорез дублета перпендикулярно линии центров при наличии свободного вращения частиц. В этом случае $\alpha = \pi/2$, $\vec{F}^{(j)} = 0$, $\vec{T}^{(j)} = 0$. Из формул (11)-(12) следует, что

$$U^{(j)} = -\frac{2K_{Tsl}\eta}{3T_0\rho}(1-\lambda_{11})u^+(t, \Lambda^{(d)})\nabla T, \quad (18)$$

$$\omega^{(j)} = (-1)^j \frac{K_{Tsl}\eta|\nabla T|}{T_0\rho\alpha} \frac{f^+(t, \Lambda^{(d)})}{g^+(t, \Lambda_1^{-1})} [h^+(t, \Lambda_1^{-1}) - h^+(t, \Lambda^{(d)})]j^{\overline{\omega}}. \quad (19)$$

Если в формулах (18)-(19) все функции найти с точностью до $o(t^7)$, то

$$U^{(j)} = -\frac{2K_{Tsl}\eta}{3T_0\rho}(1-\lambda_{11})[1-(\lambda_{11}+0,5)t^3+\lambda_{11}(\lambda_{11}+0,5)t^6]\nabla T, \quad (20)$$

$$\omega^{(j)} = (-1)^j \frac{K_{Tsl}\eta|\nabla T|}{T_0\rho\alpha} (2,5+2\lambda_{11}-4,5\lambda_{11}\lambda_{22})t^7j^{\overline{\omega}}. \quad (21)$$

Термофорез дублета перпендикулярно линии центров при отсутствии вращения частиц. В этом случае частицы жестко закреплены и $\alpha = \pi/2$, $u_z = 0$, $w = 0$. Тогда из условия $\vec{F}^{(j)} = 0$ и формулы (11) (условие $\vec{T}^{(j)} = 0$ в этом случае не ставится)

$$U^{(j)} = -\frac{2K_{Tsl}\eta}{3T_0\rho}(1-\lambda_{11})u^+(t, \Lambda^{(d)}) \frac{g^+(t, \Lambda_1^{-1})}{g^+(t, \Lambda^{(d)})} \nabla T. \quad (22)$$

Если в формуле (22) все функции найти с точностью до $o(t^7)$, то получим формулу (20), так как $g^+(t, \Lambda_1^{-1})/g^+(t, \Lambda^{(d)}) = 1 + o(t^7)$.

Термофорез дублета, ориентированного под углом α к градиенту ∇T , при наличии свободного вращения частиц. В этом случае $\vec{F}^{(j)} = 0$, $\vec{T}^{(j)} = 0$. Из формул (11)-(12) следует, что

$$U^{(j)} = \frac{2K_{Tsl}\eta|\nabla T|}{3T_0\rho_e}(1-\lambda_{11})\left[\frac{u^-(t, \Lambda^{(d)})-u^+(t, \Lambda^{(d)})}{2}\sin 2\alpha k^{\overline{\omega}} - \left(\frac{u^-(t, \Lambda^{(d)})+u^+(t, \Lambda^{(d)})}{2} + \frac{u^-(t, \Lambda^{(d)})-u^+(t, \Lambda^{(d)})}{2}\cos 2\alpha\right)i^{\overline{\omega}}\right], \quad (23)$$

$$\wp^{(j)} = (-1)^{j+1} \frac{K_{Tsl} \eta |\nabla T|}{T_0 \rho_e a} \frac{f^+(t, \Lambda^{(d)})}{g^+(t, \Lambda_1^{-1})} [h^+(t, \Lambda_1^{-1}) - h^+(t, \Lambda^{(d)})] \sin \alpha j^{\overline{\omega}}, \quad (24)$$

где $i^{\overline{\omega}} = |\nabla T|^{-1} \nabla T$, $k^{\overline{\omega}} = \left| [[\overline{l}, \nabla T], \nabla T] \right|^{-1} [[\overline{l}, \nabla T], \nabla T]$ ($k^{\overline{\omega}} = 0$, если векторы $\overline{l}$ и ∇T коллинеарны). Если в формулах (23)-(24) все функции найти с точностью до $o(t^7)$, то

$$\begin{aligned} U^{(j)} = & \frac{2K_{Tsl} \eta |\nabla T|}{3T_0 \rho_e} (1 - \lambda_{11}) \{ [(1,5\lambda_{11} + 0,75)t^3 + (1,5\lambda_{11}^2 + 0,75\lambda_{11} - 3,75 + \\ & + 6,75\lambda_{11} \frac{1 - \lambda_{22}}{1 - \lambda_{11}})t^6] \sin 2\alpha k^{\overline{\omega}} - [1 + (0,5\lambda_{11} + 0,25)t^3 + (2,5\lambda_{11}^2 + 1,25\lambda_{11} - 3,75 + \\ & + 6,75\lambda_{11} \frac{1 - \lambda_{22}}{1 - \lambda_{11}})t^6 + ((1,5\lambda_{11} + 0,75)t^3 + (1,5\lambda_{11}^2 + 0,75\lambda_{11} - 3,75 + \\ & + 6,75\lambda_{11} \frac{1 - \lambda_{22}}{1 - \lambda_{11}})t^6) \cos 2\alpha] i^{\overline{\omega}} \}, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\wp^{(j)} = (-1)^j \frac{K_{Tsl} \eta |\nabla T|}{T_0 \rho a} (2,5 + 2\lambda_{11} - 4,5\lambda_{11}\lambda_{22}) t^7 \sin \alpha j^{\overline{\omega}}. \quad (26)$$

Термофорез дублета, ориентированного под углом α к градиенту ∇T , при отсутствии вращения. В этом случае частицы жестко закреплены и $w = 0$. Тогда из условия $F^{(j)} = 0$ и формулы (11) (условие $T^{(j)} = 0$ в этом случае не ставится) следует, что

$$\begin{aligned} U^{(j)} = & \frac{2K_{Tsl} \eta |\nabla T|}{3T_0 \rho_e} (1 - \lambda_{11}) \{ 0,5[u^-(t, \Lambda^{(d)}) - u^+(t, \Lambda^{(d)})] \frac{g^+(t, \Lambda_1^{-1})}{g^+(t, \Lambda^{(d)})} \sin 2\alpha k^{\overline{\omega}} - 0,5[u^-(t, \Lambda^{(d)}) + \\ & + u^+(t, \Lambda^{(d)})] \frac{g^+(t, \Lambda_1^{-1})}{g^+(t, \Lambda^{(d)})} + (u^-(t, \Lambda^{(d)}) - u^+(t, \Lambda^{(d)})] \frac{g^+(t, \Lambda_1^{-1})}{g^+(t, \Lambda^{(d)})} \cos 2\alpha] i^{\overline{\omega}} \}. \end{aligned} \quad (27)$$

Если в формуле (27) все функции найти с точностью до $o(t^7)$, то получим формулу (25), так как $g^+(t, \Lambda_1^{-1})/g^+(t, \Lambda^{(d)}) = 1 + o(t^7)$.

Задача о гравитационном осаждении двух сферических частиц. Одиночная сферическая частица, падающая под действием силы тяжести в вязкой внешней среде, начинает двигаться с постоянной скоростью U_0 , при которой действие силы тяжести уравновешивается гидродинамическими силами (в случае газов выталкивающую силу можно не учитывать). Для скорости U_0 может быть выведена формула [2]. Перейдем от одиночной частицы к системе из двух одинаковых частиц. Обычно в этой задаче рассматри-

вают три случая [2]: движение частиц вдоль линии центров, параллельное осаждение частиц со свободным вращением и параллельное осаждение жестко закрепленных частиц (в этом случае вращение частиц отсутствует). Формулы для задачи о гравитационном осаждении двух одинаковых частиц могут быть выведены из формул (11)-(12) путем предельного перехода. Рассмотрим движение двух частиц под действием термофоретической силы и силы тяжести. Скорость термофоретического движения одиночной частицы и градиент температуры ∇T имеют противоположные направления. Будем считать, что градиент температуры ∇T и сила тяжести также противоположно направлены. Если под скоростью U_0 иметь в виду скорость движения одиночной частицы под действием термофоретической силы и силы тяжести, то формулы (11)-(12) применимы и в этой задаче. Устремляя ∇T к нулю, мы получим формулы для задачи о гравитационном осаждении двух частиц:

$$\vec{F}^{(j)} = -2\pi U_0 a \eta \{-u_z f^-(t, \Lambda_1^{-1}) \vec{k} + [-u_x f^+(t, \Lambda_1^{-1}) + \omega f_\omega^+(t, \Lambda_1^{-1})] \vec{i}\} , \quad (28)$$

$$\vec{T}^{(j)} = (-1)^j 8\pi U_0 a^2 [u_x f^{+\omega}(t, \Lambda_1^{-1}) - \omega f_\omega^{+\omega}(t, \Lambda_1^{-1})] \vec{j} , \quad (29)$$

где U_0 – скорость движения одиночной частицы под действием силы тяжести. Перейдем к рассмотрению различных случаев.

Осаждение двух сферических частиц вдоль линии их центров. В этом случае $u_x = 0$, $\vec{U}^{(j)} = -U_0 u_z \vec{k}$, $\vec{T}^{(j)} = 0$. Тогда $\omega = 0$, т.е. в этом случае вращение частиц отсутствует. Из формулы (28) следует, что закон Стокса в этом случае имеет вид

$$\vec{F}_S^{(j)} = -6\pi a \eta \frac{f^-(t, \Lambda_1^{-1})}{3} \vec{U}^{(j)} . \quad (30)$$

Если в формуле (30) функцию $f^-(t, \Lambda_1^{-1})$ найти с точностью до $o(t^7)$ [2], то

$$\vec{F}_S^{(j)} = -6\pi a \eta (1 - \frac{3}{2}t + \frac{9}{4}t^2 - \frac{19}{8}t^3 + \frac{93}{16}t^4 - \frac{387}{32}t^5 + \frac{1197}{64}t^6 - \frac{5331}{128}t^7) \vec{U}^{(j)} . \quad (31)$$

Параллельное осаждение двух сферических частиц при наличии свободного вращения частиц. В этом случае $u_z = 0$, $\vec{U}^{(j)} = -U_0 u_x \vec{i}$, $\vec{T}^{(j)} = 0$. Тогда из формулы (29) следует, что $\omega = u_x f^{+\omega}(t, \Lambda_1^{-1}) / f_\omega^{+\omega}(t, \Lambda_1^{-1})$, а

$$\vec{\omega}^{(j)} = (-1)^j \frac{U^{(j)}}{a} \frac{f^{+\omega}(t, \Lambda_1^{-1})}{f_\omega^{+\omega}(t, \Lambda_1^{-1})} \vec{j} . \quad (32)$$

Если формулу (32) преобразовать с точностью до $o(t^7)$ [2], то

$$\overline{\omega}^{(j)} = (-1)^j \frac{U^{(j)}}{a} \left(\frac{3}{4}t^2 - \frac{9}{16}t^3 + \frac{27}{64}t^4 - \frac{177}{256}t^5 + \frac{819}{1024}t^6 - \frac{13305}{4096}t^7 \right) j^p. \quad (33)$$

Из формулы (28) получим следующую формулу для силы Стокса:

$$\overline{F}_S^{(j)} = -6\pi a \eta \left[\frac{f^{+\omega}(t, \Lambda_1^{-1}) f_{\omega}^{+}(t, \Lambda_1^{-1})}{3 f_{\omega}^{+\omega}(t, \Lambda_1^{-1})} - \frac{f^{+}(t, \Lambda_1^{-1})}{3} \right] U^{(j)}. \quad (34)$$

Если в формуле (34) все функции найти с точностью до $o(t^7)$ [2], то

$$\overline{F}_S^{(j)} = -6\pi a \eta \left(1 - \frac{3}{4}t + \frac{9}{16}t^2 - \frac{59}{64}t^3 + \frac{273}{256}t^4 - \frac{1107}{1024}t^5 + \frac{9561}{4096}t^6 - \frac{50475}{16384}t^7 \right) U^{(j)}. \quad (35)$$

Параллельное осаждение двух частиц при отсутствии свободного вращения частиц. В этом случае $u_z = 0$, $\overline{U}^{(j)} = -U_0 u_x i$, $\omega = 0$. Тогда из формулы (28) получим формулу для силы Стокса:

$$\overline{F}_S^{(j)} = -6\pi a \eta \frac{f^{+}(t, \Lambda_1^{-1})}{3} U^{(j)}. \quad (36)$$

Если в формуле (36) функцию $f^{+}(t, \Lambda_1^{-1})$ найти с точностью до $o(t^7)$ [2], то

$$\overline{F}_S^{(j)} = -6\pi a \eta \left(1 - \frac{3}{4}t + \frac{9}{16}t^2 - \frac{59}{64}t^3 + \frac{465}{256}t^4 - \frac{2259}{1024}t^5 + \frac{14745}{4096}t^6 - \frac{89643}{16384}t^7 \right) U^{(j)}. \quad (37)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Яламов Ю.И., Галоян В.С. Динамика капель в неоднородных вязких средах. Ереван: Луйс, 1985. 208 с.
2. Ханпель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976. 632 с.
3. Яламов Ю.И., Мелехов А.П., Гайдуков М.Н. Термофорез гидродинамически взаимодействующих аэрозольных частиц // ДАН СССР. 1986. Т. 287. № 2. С. 337-341.
4. Хасанов А.С., Арсланов И.М. Теория термофореза дублетов двухслойных частиц с учетом скачка температуры на их поверхности при произвольной ориентации дублетов // Вестник МГОУ. Серия «Физика-Математика», 2009. № 1-2. С. 31-45.

THERMOPHORESIS OF DOUBLETS OF TWO-LAYER ROTATING AND NON-ROTATING AEROSOL PARTICLES

A. Khasanov*, I. Arslanov**

**Plekhanov Russian Academy of Economics
113054 Moscow, Russia, Stremianny, 36*

***Kama State Academy of Engineering and Economics,
423810 Tatarstan, Naberezhnye Chelny, Prospekt Mira, 11/18*

Abstract. Thermophoresis of two large two-layer rotating and non-rotating aerosol particles is considered. Formulas for the rate of thermophoresis and angular velocity of rotation for particles are derived. The problem of gravitational falling of two rotating and non-rotating spherical particles is considered as a limiting case and exact formulas for the correction coefficients to the Stokes law and angular velocity of rotation are derived. Approximate engineering formulas are presented.

Key words: thermophoresis, aerosol particles.

КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ

УДК 004.94:519.85

ГЕНЕТИЧЕСКИЙ АЛГОРИТМ В ЗАДАЧЕ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

А.И. Беспалов, Ш.У. Низаметдинов

*Московский инженерно-физический институт
115409 Москва, Каширское ш. 31*

Аннотация. Исследуется эффективность применения генетического алгоритма для задачи кусочно-линейного программирования. Дается пример содержательной постановки такой задачи. Приводятся результаты численных экспериментов.

Ключевые слова: генетический алгоритм.

Рассматривается задача поиска экстремума целевой функции

$$\sum_{i=1}^n p_i(x_1, x_2, \dots, x_n) x_i,$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_{ij} \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

где коэффициенты $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ представляют собой кусочно-постоянные функции в области изменения переменных.

Примером подобного рода задачи является задача оптимизации закупок материалов для нужд предприятия с учетом их заменяемости. Для того чтобы использовать один материал вместо другого, требуются определенные дополнительные затраты (например, можно выточить деталь определенного диаметра из прутка большего диаметра, введя в техпроцесс начальную операцию приведения к требуемому размеру). Появившиеся затраты могут быть частично компенсированы за счет реализации дополнительных отходов. Возможность замены, с одной стороны, и наличие оптовых скидок в зависимости от объема закупаемой партии, с другой – позволяет поставить задачу оптимизации.

Применительно к данной задаче общая постановка может быть уточнена. Необходимо закупить набор из n ресурсов $R_1, R_2, \dots, R_n$, каждый из которых требуется в объеме $V_1, V_2, \dots, V_n$. Ресурсы предполагаются частично взаимозаменяемыми, то есть для некоторых R_i, R_j возможно использование j -го ресурса вместо i -го, при этом единица j -го ресурса заменяет a_{ij} единиц i -го. Пусть x_i – объем закупок, а p_i – цена единицы i -го ре-

сурса, $i \in [1, n]$; x_{ij} – объем дополнительной закупки j -го ресурса для замены i -го; q_{ij} – «штраф» за замену одного ресурса другим (он включает в себя как дополнительные технологические затраты, вызванные заменой a_{ij} единиц i -го ресурса на единицу j -го, так и доход от продажи отходов; сюда, однако, не входит разница цен на материалы разных размеров – она отражена в ценах p_i).

Целевая функция, отражающая затраты на материалы с учетом замен и штрафов за них, имеет вид:

$$\sum_{i=1}^n p_i (x_i + \sum_{i \neq j} x_{ij}) + \sum_{i \neq j} q_{ij} x_{ij} \rightarrow \min .$$

При изменении объемов закупок j -го материала изменяется и цена p_j , поскольку действуют различные оптовые скидки, т.е. $p_j = p_j(x_j, x_{1j}, \dots, x_{nj})$. Эта зависимость носит, как правило, кусочно-постоянный характер: каждая скидка начинает действовать при превышении объемом закупки некоторого порогового значения.

Рассмотрим теперь ограничения задачи.

Общие ограничения – это ограничения, учитывающие ресурсные потребности предприятия:

$$x_i + \sum_{i \neq j} a_{ij} x_{ij} \geq V_i \quad i \in [1, n] .$$

Частные ограничения описывают вид функции цены:

$$p_j = \begin{cases} p_j^0, & \text{если } 0 \leq x_j + \sum_{i \neq j} x_{ij} \leq v_j^1 \\ p_j^1, & \text{если } v_j^2 \leq x_j + \sum_{i \neq j} x_{ij} \leq v_j^2 \\ \vdots & \vdots \\ p_j^{m_j-1}, & \text{если } v_j^{m_j-1} \leq x_j + \sum_{i \neq j} x_{ij} \leq \infty, \end{cases} \quad j \in [1, n] ,$$

то есть для каждого размера материала, закупаемого для использования «в качестве самого себя» и для замен других размеров, может быть указан свой набор оптовых цен.

Анализируя структуру частных ограничений, можно увидеть, что частные ограничения разбивают пространство возможных объемов закупок на $m_1 \times m_2 \times \dots \times m_n$ ячеек, в каждой из которых определена своя задача линейного программирования [1]. Исходная задача разбивается тем самым на множество линейных подзадач вида:

$$\sum_{i=1}^n p_i^k (x_i + \sum_{i \neq j} x_{ij}) + \sum_{i \neq j} q_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

при ограничениях:

$$x_i + \sum_{i \neq j} a_{ij} x_{ij} \leq V_i,$$

$$x_i + \sum_{i \neq j} x_{ij} \geq v_i^k,$$

$$x_i + \sum_{i \neq j} x_{ij} \leq v_i^{k+1},$$

$$x_i \geq 0, \quad x_{ij} \geq 0, \quad i, j \in [1, n], \quad k \in [1, m_j] .$$

В общем случае число таких подзадач может быть настолько большим, что исключит возможность нахождения оптимального решения прямым перебором всех задач линейного программирования.

Для сокращения перебора простым и достаточно действенным инструментом являются генетические алгоритмы (ГА) [2]. Это семейство адаптивных методов поиска, основанных на генерации новых решений на основе имеющихся и последующей селекции лучших и отбраковке неперспективных решений путем различных имитаций естественного отбора. ГА являются в определенной степени аналогом биологической эволюции.

Принцип работы ГА таков. На начальном этапе для решаемой задачи создается код, позволяющий закодировать любое допустимое решение задачи последовательностью букв какого-либо алфавита. Решение, закодированное таким образом, называется хромосомой. Элементарная единица в хромосоме называется геном, множество его возможных значений – аллелем. Код должен давать возможность декодировать хромосому в исходное решение и оценивать целевую функцию этого решения, а также позволять различные комбинаторные перестановки для получения новых решений. Идеального представления решений для любой задачи не существует, и для получения хорошего кода необходимы анализ и перебор.

Для кодирования решения задач с дискретным пространством решений необходимо каждому решению по какому-либо правилу поставить в соответствие закодированную хромосому. Для задач с непрерывным пространством решений (такие задачи обычно возникают при поиске глобального экстремума многоэкстремальной функции с вещественными аргументами на пространстве действительных чисел или векторов) – на пространство накладывается сетка с определенным шагом, который определяет точность алгоритма. Решения, аргументы которых попадают в одну и ту же ячейку сетки, алгоритмом не различаются и кодируются одной и той же хромосомой. Процесс оптимизации, таким образом, сводится к направленному поиску ячейки с наилучшим значением целевой функции.

Для поставленной выше задачи пространство решений дискретно: каждая из имеющихся задач линейного программирования должна быть представлена хромосомой. Это позволяет закодировать решение без сложных манипуляций с накладыванием сетки, а также легко интерпретировать каждую полученную алгоритмом хромосому (то есть восстанавливать по ней задачу линейного программирования). Подходящим кодом является десятичное или двоичное представление, состоящее из номеров k цен p_j^k , действующих для данной задачи линейного программирования. Если в первом гене хромо-

сомы, соответствующем цене p_1 , стоит число m , то это означает, что актуальна цена $p_1 = p_1^m$, соответственно объем закупки j -го размера материала находится в пределах от v_1^m до v_1^{m+1} . Таким образом, мы получаем коэффициенты цен в целевой функции и частные ограничения. Общие же ограничения остаются неизменными.

После кодирования решения необходимо определить алгоритм вычисления его приспособленности (витальности, она же «живучесть»). В данной задаче мерой качества решения естественно принять значение целевой функции, получаемое при решении задачи линейного программирования. Чем меньше это значение, тем более приспособленным является решение.

Витальность решений используется в генетических операторах, реализующих эволюцию популяции решений. Существует огромное число таких операторов для получения новых решений из хромосом старых. Основными такими операторами являются:

- различные исполнения оператора размножения (кроссовера), при котором производится скрещивание генетического материала двух различных решений-родителей для получения решений-потомков;
- различные исполнения оператора мутации, который преобразует исходную хромосому для получения нового решения (обычно случайным образом);
- оператор селекции, который определяет, какие из решений, уже имеющих и вновь сгенерированных на текущем шаге алгоритма, попадут в следующее поколение;

Мутации создают в популяции изменчивость. Лучшие решения, отбираемые каким-либо механизмом (чаще всего стохастичной «рулеткой», на которой вероятность выбора решения пропорциональна его витальности), допускаются к кроссоверу и дают решения-потомки. Селекция, которая также опирается на витальность решений, отсеивает малоперспективные хромосомы. Отсев этот также является стохастичным, и в популяции остается некоторый небольшой процент «неприспособленных» решений. Некоторое количество решений с «плохой» витальностью должно проходить в следующее поколение, т.к., несмотря на свою малую пригодность, такие решения могут содержать элементы, необходимые для генерации оптимальных решений; оптимальные решения могут происходить не только от хороших, но и от плохих. Существует и еще одна причина не вести «геноцид» плохих решений: в некоторых задачах критерий оптимальности может корректироваться по ходу решения. ГА лучше других методов оптимизации приспособлены для решения таких задач, т.к. не требуется начинать всю вычислительную процедуру сначала, а можно задействовать другой алгоритм определения витальности и продолжать эволюцию имеющейся популяции решений в изменившихся условиях. И если в ней присутствует определенный процент решений с сильно отличающимся составом хромосом, эти решения в новых условиях могут стать очень ценным материалом и ускорить нахождение оптимума.

В данной задаче это ценное свойство ГА вследствие четкости критерия приспособленности не используется.

Следующий этап после определения генетических операторов — генерация начальной популяции.

Существует четыре основных принципа формирования начальной популяции:

- «одеяло» - генерируется полная популяция, покрывающая все множество решений в данной области (плотно или с определенным шагом, аналогично факторному эксперименту);

- «дробовик» - из множества допустимых решений случайно выбирается подмножество, аналогично методу Монте-Карло;
- «фокусировка» - случайный выбор решений из определенного подмножества допустимого множества;
- комбинация первых трех способов.

После генерации начальной популяции к ней применяются генетические операторы, и новые поколения решений создаются до тех пор, пока не сработает критерий останова.

Критерий останова может быть основан на наблюдении за эволюцией решений - если в течение фиксированного числа N поколений наилучшее решение не меняется, или в популяции в течение N поколений не появилось ни одного решения (или их появилось слишком мало по отношению к численности популяции), которое прошло отбор - это указывает на затухание эволюционных изменений в популяции. Возможны и другие подходы - хотя бы простая генерация фиксированного числа поколений.

ГА для решения задачи реализован в виде программного модуля, который предоставляет простой интерфейс, позволяет сохранять введенную задачу и решение в файле и ведет лог генетических преобразований и времени выполнения. Интерфейс также позволяет регулировать численность популяции, процент хромосом, порождающих потомков и процент мутантов в каждом поколении и некоторые другие параметры эволюционного поиска.

Кодирование решения осуществляется простейшим способом — хромосома представляет собой массив десятичных чисел, по которым определяются значения цен и интервалы возможных объемов закупок. Это позволяет легко сопоставлять хромосомы с задачами линейного программирования и пробовать различные методы генерации начальной популяции.

Приспособленность решения определяется следующим образом. По хромосоме восстанавливается задача линейного программирования, которая подается на вход пакета Linprog, разработанного кафедрой системного анализа. Пакет возвращает значение ЦФ, которое присваивается хромосоме и сохраняется. Такая процедура производится для каждой порожденной алгоритмом хромосомы (один раз).

Вычисленное значение ЦФ становится витальностью хромосомы только в сочетании с «рулеткой», которая преобразует значение ЦФ данной хромосомы в вероятность ее выбора для кроссовера или перехода в следующее поколение. Основной рулеткой в реализованной программе является линейная пороговая рулетка, которая определяет вероятность выбора i -й хромосомы

$$P_i = \frac{R - TF_i}{\sum_{j=1}^N (R - TF_j)}, \text{ где } N - \text{общее количество хромосом}$$

в популяции, а R — порог, определяемый пользователем относительно максимальной (наихудшей) ЦФ в популяции (12/10, 13/10 максимальной ЦФ, и т.д.), TF_i — значение целевой функции, доставляемой i -й хромосомой. Чем меньше (ближе к максимальной ЦФ) значение порога, тем более жестким становится отбор по отношению к малоприспособленным решениям. Интерфейс модуля позволяет указывать порог перед запуском алгоритма. Реализация рулетки позволяет добавлять новые ее варианты без изменений в имеющемся коде.

Генетические операторы программно реализованы так, чтобы можно было без переделки кода добавлять новые реализации операторов. Оператор мутации реализован в

двух вариантах — стандартный двухточечный оператор, который меняет местами два случайно выбранных гена, и одноточечный, который заменяет имеющееся значение случайно выбранного гена на случайное число в пределах области допустимых значений этого гена (которая состоит из номеров значений цены, определяемой данным геном). Оператор кроссовера выполнен классическим способом — обменом участков хромосом крест-накрест в случайно выбранной точке. Для выбора хромосом он использует описанную выше рулетку. Оператор селекции выполнен на основе той же рулетки, но наилучшее по всей популяции решение он переносит всегда («элитизм»).

После генерации следующего поколения подсчитываются среднее, лучшее и худшее значение ЦФ в популяции, проверяется критерий останова, и, если он не выполнен — к поколению снова применяются генетические операторы. Когда критерий выполнен, поиск останавливается.

Алгоритм тестировался на примерах задач различной размерности и с различными объемами популяции. Критерием останова было сохранение лучшего решения в 7 поколениях подряд.

Эксперимент 1. Первая тестовая задача включала 8 размеров с двумя ценами на каждый (256 задач линейного программирования). Исходные данные задачи приведены в табл. 1.

Таблица 1

Исходные данные для задачи с 8 размерами

Материал	1	2	3	4	5	6	7	8
1-я цена	100	120	150	180	200	220	240	300
Порог перехода ко 2-й цене, единиц продукта	100	100	100	100	100	100	100	100
2-я цена	80	90	110	145	165	190	200	240
Потребности, единиц	200	115	50	95	10	25	60	200

Допускаются только замены материала с меньшим номером на материал с большим номером, штраф за замену принимается равным 0.

Численность популяции была установлена на уровне 16 особей. ГА дал решение со следующими параметрами (табл. 2).

Таблица 2

Результаты эксперимента для задачи с 8 размерами

№ прогона	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Число поколений	7	7	8	14	15	16	11	12	18	8	14	10	7
Перебрано решений	112	112	128	224	240	256	176	192	288	128	224	160	112
Средний объем перебора, решений	185,6												
Эффективность	1,38												

Эффективность вычислялась как отношение числа задач, которые требуется решить полным перебором, к числу решений, которые перебрал ГА.

В 3-х случаях ГА дал неоптимальное, но близкое к оптимуму решение, при этом было создано 7, 10 и 14 поколений в каждом случае. При этом неоптимизированное реше-

ние без замен дает затраты в 120850, а найденные неоптимальные решения не превосходили 116650. Найденный оптимум составил 114650. Экономия, таким образом, составила 5,1%.

Эксперимент 2. Задача состояла из 10 размеров с двумя ценами на каждый (1024 задачи линейного программирования). Исходные данные содержатся в табл. 3.

Таблица 3

Исходные данные для задачи с 10 размерами

Материал	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1-я цена	100	120	150	180	200	220	240	300	310	325
Порог перехода ко 2-й цене, единиц продукта	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
2-я цена	80	90	110	145	165	190	200	240	280	300
Потребности, единиц	200	115	50	95	10	25	60	200	55	30

Численность популяции была оставлена на уровне 16. Параметры решения приведены в табл. 4.

Таблица 4

Результаты эксперимента для задачи с 8 размерами

№ прогона	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Число поколений	17	9	17	12	10	10	12	15	10	17	14	12	19
Перебрано решений	340	180	340	240	200	200	240	300	200	340	280	240	380
Средний объем перебора, решений	258												
Эффективность	3,97												

При этом было 5 случаев предварительной сходимости на близких к оптимуму решениях. Если неоптимизированное решение составляло 147650, то оптимум равнялся 141050, а остальные найденные ГА решения не выходили за границу 143600. Экономия, таким образом, составила 4,47%.

Для устранения предварительной сходимости была предпринята попытка увеличить количество поколений, в течение которых не происходит изменения наилучшего найденного решения, в критерии останова до 15 (было 10). Одновременно популяция была сокращена до 8 особей (табл.5).

Наблюдалось 5 случаев предварительной сходимости, из которых 4 дали решение в пределах 142000, и только одно - 143800, т.е. относительно «плохое», но все же лучшее, чем в отсутствие оптимизации.

Таблица 5

Результаты для задачи с 8 размерами (15 поколений до останова)

№ прогона	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Число поколений	21	37	28	53	30	38	32	20	44	53	37	33	38
Перебрано решений	168	296	224	424	240	304	256	160	352	424	296	264	304
Средний объем перебора, решений:	284,8												
Эффективность	3,60												

Вывод из проведенных экспериментов можно сделать такой: ГА устойчиво находит либо оптимальное решение, либо очень близкое к нему и, по крайней мере, значительно лучшее, чем решение без оптимизации. Полностью устранить предварительную сходимость невозможно, но это и не требуется, т.к. все равно получаются хорошие решения. При этом ГА работает с числом объектов, в несколько раз меньшим общего числа задач линейного программирования, которые бы потребовалось решить при полном переборе. При увеличении размерности задачи этот разрыв будет только возрастать.

ЛИТЕРАТУРА

1. Таха Х. Введение в исследование операций. Вильямс, 2005. – 901 с.
2. Гладков Л.А., Курейчик В.В., Курейчик В.М. Генетические алгоритмы. Физматлит, 2006. – 320 с.
3. Hamdy A. Taha. Operations Research: An Introduction. 7th Edition. Pearson Education, Inc., 2005
L.Gladkov, V.V.Kureychik, V.M.Kureychik. Genetic Algorithms. Fizmatlit, 2006.

A GENETIC ALGORITHM FOR SOLVING A PIECEWISE-LINEAR PROGRAMMING PROBLEM

A. Bespalov, Sh. Nizametdinov

*Moscow Engineering Physics Institute
115409 Moscow, Russia, Kashirskoye shosse, 31*

Abstract. Efficiency of applying a genetic algorithm to solve a given piecewise-linear programming problem is researched in the present article. An example of conceptual problem description is introduced and results of computational experiments are provided.

Key words: genetic algorithm.

О МЕТОДАХ ФРАГМЕНТАРНОГО КЭШИРОВАНИЯ ИНФОРМАЦИИ В ИНТЕРНЕТЕ НА ПРИМЕРЕ ПОСТРЕЛЯЦИОННОЙ БД

И.А. Калашников, Ю.А. Тимофеев

*Московский инженерно-физический институт
115409 Москва, Каширское ш. 31*

Аннотация. Приводятся причины использования кэширования в Интернете, проводится обзор методов кэширования объектов информации в «глобальной паутине» на различных этапах следования запроса от пользователя к серверу и формирования ответа. Также поставлена проблема кэширования динамических объектов и актуальность дальнейшего развития данного направления на примере постреляционной БД.

Ключевые слова: кэширование, динамические объекты, постреляционные БД.

С ростом количества пользователей Интернета возрастает и нагрузка на WEB-сервера. Количество запросов на один сервер, обслуживающий несколько Интернет-сайтов на данный момент свыше нескольких миллионов в сутки, и с каждым днем эта цифра увеличивается.

Для снижения нагрузки на сервера и уменьшение числа запросов, обрабатываемых сервером, используется кэширование результатов ответа WEB-сервера на определенные запросы [1].

Самый быстрый результат ответа WEB-сервера для пользователя дает кэширование результатов (веб-страниц, изображений и т.д.) на компьютере пользователя. В данном случае кэшированием занимается браузер пользователя. При обращении к какому-либо объекту информации (в дальнейшем именуемый объектом) в Интернете, браузер сначала проверяет наличие его в собственном КЭШе, и если он там обнаружен, выдает его пользователю как результат; если же в КЭШе запрашиваемого объекта нет, браузер посылает запрос серверу [3].

Далее, если пользователь находится в корпоративной сети и доступ в Интернет осуществляется через прокси-сервер (Интернет-шлюз), кэшированием объектов, загруженных в данной сети, занимается вышеупомянутый прокси-сервер. В случае нахождения запрашиваемого объекта в КЭШе Интернет-шлюза, он отдается пользователю как результат запроса и запрос на данный объект не выходит за пределы прокси-сервера [1]. Эта технология позволяет уменьшить исходящий и входящий трафик данной сети и сэкономить время ожидания пользователем запрашиваемого объекта. По утверждению фирмы Netscape Communications, от 30 до 60% всех HTTP-запросов в Интернет - это повторяющиеся запросы пользователей, которым нужна информация, уже единожды сформированная для другого пользователя и остающаяся актуальная в связи с её неизменностью [2].

Системы, осуществляющие кэширование результатов работы различных служб сервера, работают на пути следования запроса, начиная с самого низа, заканчивая процедурой отдачи результата пользователю; а так же зачастую и на самом WEB-сервере, для того, что бы уменьшить если не количество обращений, то хотя бы количество операций, выполняемых WEB-сервером для формирования ответа на запрос пользователя.

Но у такого кэширования есть один недостаток – сохраняется весь объект целиком, и при нынешнем развитии динамических страниц и сервисов, где из всего объекта часто меняется лишь малая часть, огромная доля статической информации не попадает в КЭШ из-за какой-нибудь небольшой части объекта. Но при текущем распространении динамически изменяющихся страниц и авторизации пользователей, которые делают каждый загружаемый объект фактически уникальным, изменяя всего лишь минимальную часть объекта, кэширование готового сформированного объекта целиком является малоэффективным из-за постоянных изменений в объекте. Частично исправить данную ситуацию в настоящий момент позволяют технологии, перечисленные ниже.

AJAX. Суть данной технологии заключается в передаче пользователю не полноценных страниц с контентом, а блоков данных, которые разбиваются и передаются пользователю отдельными частями, затем «собираются» в запрашиваемый объект на компьютере пользователя (при помощи JavaScript). Данная технология имеет ряд недостатков:

1. Затрата времени и ресурсов пользовательских компьютеров на многократные запросы частей нужного объекта и последующего его сбора;
2. Многократные запросы к WEB-серверу, при отсутствии каких-либо частей объекта в КЭШе, которые обрабатываются как отдельные небольшие объекты, и на них также затрачивается время и ресурсы WEB-сервера [3].

Следующая технология - фрагментарное кэширование информации на WEB-серверах. Суть ее заключается в том, чтобы в обработке запроса на объект при формировании динамического объекта, составные части итогового объекта, попавшие в КЭШ, формируются не при помощи прямого выполнения серверных скриптов с запросами в базу данных, а из КЭШа, что существенно уменьшает время формирования ответа пользователю и снижает нагрузку на сервер. Данная технология позволяет существенно снизить нагрузку на WEB-сервер при формировании динамических объектов, но в настоящий момент она не достаточно развита. Попытки реализации данной технологии существует в дорогостоящих коммерческих продуктах, например, таких как Xcache и Oracle Web Cache. Но существует ряд недостатков, таких как не гибкость решений, достаточно сложная установка, внедрение и администрирование этих систем и стоимость этих продуктов, которые не позволяют использовать данную технологию в большинстве случаев из-за «заточенности» (узкой специализации) решения под конкретный продукт [2].

На текущий момент для фрагментарного кэширования динамических объектов часто используются кэш-сервера memcached работающие на уровне серверных скриптовых языков программирования, т.е. для их использования необходимо вносить существенные изменения в код динамически формирующихся страниц, что представляется не всегда возможным. Именно в этом заключается один из основных минусов практически всех систем фрагментарного кэширования – отсутствие прозрачного внедрения и использования с минимальными изменениями со стороны разработчиков и абсолютно незаметно для пользователя. Второй распространенный недостаток – это алгоритм автоматического определения устаревания данных в КЭШе. На текущий момент распространение метода отбора данных для КЭШа «по количеству запросов» не столь актуален, т.к. современные сервера и каналы с легкостью выдерживают тысячи «легких» запросов. Таким образом, ответ на легкие запросы формируется практически мгновенно, а редкие но «тяжеловесные» запросы, для формирования которых может потребоваться

задействование существенных ресурсов сервера, могут нарушить его стабильную и привести к даун-тайму [4].

Для решения задачи по созданию системы кэширования, лишенной вышеописанных недостатков, нами предлагается акцентировать 2 пункта:

1. Система кэширования должна работать автоматически и с минимальным процессом настроек со стороны администратора сервера;
2. Для перераспределения важности фрагментов в сторону более нагруженных, ввести понятие «сложность фрагмента».

За определение «сложности фрагмента» должен отвечать параллельный модуль системы кэширования, наблюдающий за нагрузкой на сервер и временем генерации фрагментов; на основании данных, полученных в результате наблюдения, указанный сервер должен выявлять наиболее ресурсоемкие и длительные операции.

Время жизни фрагмента объекта в КЭШе, соответственно, напрямую зависит от сложности фрагмента и частоты его вызова. Также система кэширования должна самостоятельно определять, когда следует обновлять, добавлять или удалять тот или иной фрагмент в КЭШе.

Минимизации процесса настройки можно добиться путем интеграции системы кэширования в серверные скриптовые языки программирования и использования полуавтоматической системы обучения и подстройки системы кэширования (на основании частоты запросов) под объект и «сложность фрагмента». Для того, чтобы подключить данную систему кэширования к уже готовым сторонним продуктам без возможности изменения исходного кода, активацию и интеграцию модулей кэширования можно реализовать при помощи манипуляции настройками web-сервера [4].

Данный подход к системе серверного фрагментарного кэширования даст более гибкую систему кэширования наиболее слабых, с точки зрения нагрузки на сервер, фрагментов динамических объектов высоконагруженных проектов, что, предположительно даст существенный прирост в производительности и пропускной способности web-сервера. Но наилучшие результаты кэширования и максимальный прирост производительности и пропускной способности высоконагруженных проектов будут наблюдаться при конвергенции различных систем кэширования: как фрагментарных вариантов кэширования в «ручном режиме» на этапе разработки и проектирования систем, так и автоматических фрагментарных системы кэширования вместе с кэширующими прокси-серверами.

Рассмотрим пример алгоритма работы фрагментарного кэширования работающего на постреляционной СУБД (системе управления базой данных). Самостоятельное кэширование данных - одна из неотъемлемых черт любой СУБД [5].

Кэш обычно состоит из двух частей: очереди кэшируемых объектов и выделяемой под них памяти.

Память для кэшируемых объектов – это оперативная память, в которую наиболее важные или часто использованные объекты загружаются для последующей отдачи клиенту. В этой памяти в большинстве случаев располагаются только те объекты, идентификаторы которых находятся в очереди кэшируемых объектов. Удаляемый из очереди объект выгружается в дисковую память.

Задача управления кэшированием объектов схожа по сути с задачей управления памятью в операционной системе. В операционной системе для организации процесса обмена между оперативной и внешней памятью информация представлена набором

сегментов или страниц. Способ управления памятью называется алгоритмом замещения, который определяет состав сегментов или страниц в более быстродействующей основной памяти. Таким образом, частота обращений к внешней памяти, а, следовательно, и быстродействие двухуровневой памяти в целом, существенно зависят от выбранного алгоритма замещения. Наибольшее распространение получила страничная структура памяти.[5]

В нашем случае система кэширования работает аналогичным образом, с той разницей, что роль страницы играет объект. Минимальную частоту обращений к ВП (внешней памяти) дает алгоритм, замещающий те объекты в ОП (оперативной памяти), обращение к которым в будущем произойдет через максимально долгое время. Однако реализовать такой алгоритм практически невозможно, поскольку заранее неизвестна информация о будущих обращениях к объектам программой. В данном случае наиболее подходящим будет алгоритм замещения наиболее давно использовавшегося объекта (НДИ)

Для алгоритма замещения желательно, чтобы он обладал двумя внешне противоречивыми свойствами: с одной стороны, он должен сохранять в ОП объекты, к которым обращения происходят наиболее часто, с другой – быстро обновлять содержимое ОП при смене множества рабочих объектов.

При хранении абстрактных данных в КЭШе механизм анализа неизменности реализован через хэш массив, хранящийся в отдельной структуре. При обработке структурированных объектов данных, описанных программистом и имеющих метаданные, может быть применено фрагментированное кэширование на уровне отдельных полей или метаданных объекта.[6] Применяя данный подход можно существенно сократить нагрузку на базу данных. Однако в случае кэширования абстрактных данных следует производить дополнительную настройку и даже, возможно, изменение алгоритма замещения и анализа в виду затрудненного анализа актуальности данных в кэше и потенциально большого объема.

В условиях непрекращающейся инфокоммуникационной революции, в частности, при взрывном характере развития web-технологий, поставленная выше проблема оптимизации кэширования данных стоит предельно остро.

На первый взгляд может показаться, что увеличивая мощность серверов и проходимость каналов связи можно расти до бесконечности. Но, учитывая опыт развития высоконагрузочных проектов (nginx, memcached), подобный подход в абсолютном большинстве случаев не рационален ни с точки зрения логики бизнеса, ни с позиции технической эффективности. Именно поэтому предложенный метод автоматического фрагментарного кэширования может существенно облегчить работу как администраторам серверов, так и разработчикам высоконагрузочных систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Камер Д.* Сети TCP/IP, том 1. Принципы, протоколы и структура, 4-е издание. 2003г, 880 стр.
2. *Хебрейкен Д., Крейнак Д.* Интернет. Энциклопедия. 2-е изд. 2000г, 528 стр.
3. *Комер Д.* Принципы функционирования Интернета. 2002г, 384 стр.
4. *Киллелиа П.* Тюнинг веб-сервера. 2-е изд. 2003г, 528 стр.

5. Андреев А.М., Березкин Д.В., Кантонистов Ю.А. Среда и хранилище: ООБД // Мир ПК, №4, 1998. - с.74 - 81.
6. Буч Г. Объектно-ориентированное проектирование (с примерами применения) М.Конкорд 1992

METHODS OF FRAGMENTED CACHING INFORMATION ON THE INTERNET BY EXAMPLE POST-RELATIONAL DATABASE

I. Kalashnikov, Yu. Timofeev

*Moscow Engineering Physics Institute
115409 Moscow, Russia, Kashirskoye shosse, 31*

Abstract. We give reasons for using caching in the Internet, provide an overview of methods of caching information objects in the "global web" at various stages following a request from the user to the server and the formation of a response. Also, we put the problem of caching dynamic objects and the relevance of the further development of this direction on the example in post-relational database.

Key words: caching, dynamic objects, post-relational database.

УДК 681.3:682.3

ПУБЛИКАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ТЕКСТОВ В СЕТИ ИНТЕРНЕТ

В.А. Кубаев

***Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
119992, Москва, Ленинские горы*

Аннотация. В статье дан обзор существующих технологий публикации математических текстов в сети Интернет. Проведен анализ используемых форматов документов с точки зрения эффективности автоматической обработки, повторного использования информации и совместимости с современными браузерами. Рассмотрены проекты в области редактирования и конвертации математических документов, предназначенных для размещения в сети Интернет.

Ключевые слова: TeX, MathML, HTML, публикация текстов.

Технологии публикации документов в сети Интернет исторически были ориентированы на представление текстовой и графической информации и не предусматривали специализированного стандарта для размещения математических текстов. Это привело к тому, что среди используемых в настоящее время форматов для публикации матема-

тических текстов в Интернет сложно выделить один формат, бесспорно превосходящий все остальные.

В данной статье приведен краткий обзор основных форматов, используемых для размещения математических текстов в сети Интернет, и существующих программных проектов, облегчающих публикацию таких текстов. Особое внимание в статье уделено XML-формату MathML, предложенному в 1999 году Консорциумом World Wide Web (W3C) и предназначенному для представления формул и математических символов в документах сети Интернет.

Публикация документов в нотации TeX

Формат TeX, бесспорно, является стандартом для профессионального математического сообщества. В данном формате накоплено значительное количество математических текстов, и возможность разместить документы в сети Интернет непосредственно в этом формате была бы весьма привлекательна.

К сожалению, современные Интернет-браузеры не позволяют корректно отображать веб-страницы, содержащие текст, размеченный с помощью нотации TeX. На практике приходится либо преобразовывать текст в нотации TeX в формат (X)HTML, в котором формулы представлены с помощью графических фрагментов, либо выкладывать документы в формате PDF или PS. Единственный известный автору плагин для веб-браузеров techexplorer Hypermedia Browser от компании Integre¹, позволяющий отображать в браузере документы с разметкой в нотации TeX, не получил широкого распространения. Альтернативным является вариант использования Java-апплетов для отображения формул. Например, такое решение было реализовано в рамках пакета WebEQ от Design Science², однако продукт WebEQ является платным.

Остановимся подробнее на способе публикации документа в формате TeX, при котором математический текст представлен в формате (X)HTML, содержащем графические фрагменты для представления формул.

Конвертация документа в формате TeX в формат (X)HTML с графическими фрагментами может быть проведена до размещения (X)HTML-страницы на веб-сайте. В этом случае на сайте хранятся уже подготовленные для отображения на клиентской стороне математические документы.

Также автор документа может возложить обязанность по конвертации математического документа на веб-сервер, подключив к нему дополнительный модуль или плагин (примеры см. в таблице ниже). В этом случае на сайт выкладываются документы, в которых формулы представлены непосредственно в нотации TeX.

Вне зависимости от выбранного способа, пользователь, просматривающий страницу, получит для своего браузера (X)HTML-документ, содержащий графические изображения формул.

Ручной перевод математических текстов из формата TeX в (X)HTML может быть весьма трудоемким, поэтому на практике часто используются специальные программы, автоматизирующие этот процесс. В таблице приведена информация о популярных утилитах конвертации документов в формате TeX в формат (X)HTML.

¹ Integre techexplorer™ Hypermedia Browser. <http://www.integretechpub.com/techexplorer/>

² Design Science WebEQ™ Developers Suite. <http://www.dessci.com/en/products/webeq/>

Название	Информация о проекте
LaTeX2HTML	Адрес в Интернет: http://www.latex2html.org/ Статус: свободно распространяемый продукт Описание проекта: LaTeX2HTML представляет собой Perl-скрипт, позволяющий автоматически преобразовывать документы в нотации LaTeX в HTML-документы. При преобразовании математические формулы преобразуются в растровые изображения. Совместим с большинством UNIX-систем, Microsoft Windows 4.x и Windows NT [1].
TeX4ht	Адрес в Интернет: http://www.cse.ohio-state.edu/~gurari/TeX4ht/ Статус: свободно распространяемый продукт Описание проекта: TeX4ht представляет собой основанную на TeX систему, позволяющую конвертировать документы TeX в формат HTML. Входит в популярный дистрибутив TeX для платформы Windows MiKTeX.
TtH	Адрес в Интернет: http://hutchinson.belmont.ma.us/tth/ Статус: свободно распространяемый продукт Описание проекта: TtH осуществляет преобразование документа в нотации TeX в нотацию HTML без использования графических изображений. Данное преобразование не может быть сделано полноценно, поэтому фактически осуществляется имитация формулы.
HeVeA	Адрес в Интернет: http://hevea.inria.fr/ Статус: свободно распространяемый продукт Описание проекта: HeVeA преобразует документы в нотации TeX в формат HTML с помощью HTML-сущностей (мнемоник) без использования изображений.
mimeTeX	Адрес в Интернет: http://www.forkosh.com/mimetex.html Статус: свободно распространяемый продукт Описание проекта: mimeTeX генерирует «на лету» изображения формул в нотации LaTeX. Доступен открытый веб-сервис, позволяющий использовать mimeTeX на своем сайте без установки. Не требует установки дополнительных приложений.
MathTran	Адрес в Интернет: http://www.mathtran.org/ Статус: свободно распространяемый продукт Описание проекта: MathTran осуществляет преобразование формул в графический формат с помощью TeX. Для отображения формулы на странице пользователя используются технологии AJAX.
imgTeX	Адрес в Интернет: http://www.eaflux.com/imgtex/index.html.en Статус: свободно распространяемый продукт Описание проекта: imgTeX является аналогом mimeTeX, позволяет конвертировать формулы в графические изображения.

Описанный подход к публикации математических текстов обладает как своими преимуществами, так и недостатками.

Несомненным преимуществом является полная совместимость с Интернет-браузерами, поскольку отображение текста и графики является для них базовой функцией.

К недостаткам относится неэффективное повторное использование информации (т.е. возможность модификации и использования частей опубликованного документа) и от-

сутствие возможности реализовать полноценный поиск по страницам, содержащим часть информации в графическом виде. Кроме того, практически невозможно подготовить страницу, содержащую графические изображения формул, которая бы одинаково корректно отображалась в браузерах всех пользователей. Это связано с тем, что у различных пользователей установлено различное разрешение экранов мониторов. В результате изображение, размер которого в разметке (X)HTML фиксирован в пикселях, будет иметь различный физический размер на экранах, а изображение, размер которого в разметке (X)HTML фиксирован в единицах длины, будет масштабироваться браузером под требуемое разрешение, что приведет к ухудшению качества отображения формулы.

MathML

Формат MathML был предложен в 1999 году Консорциумом World Wide Web (W3C) как язык разметки математических документов и исходно ориентирован на использование в сети Интернет. На момент написания статьи действующей является вторая версия стандарта (MathML 2.0), в стадии разработки находится третья. Информация о стандарте и смежных с ним технологиях доступна по адресу www.w3.org/math/. Русский перевод стандарта MathML 2.0, выполненный П. Головиным, Г. Стаценко и В. Ярошевичем, доступен по адресу <http://www.raleigh.ru/MathML/MathML2/overview.html>.

MathML является приложением XML, поэтому все документы в формате MathML должны быть корректным (well-formed) и действительными (valid) XML-документами (подробнее см. <http://www.w3.org/TR/xml/#dt-wellformed> и <http://www.w3.org/TR/xml/#dt-valid>). Корневым элементом MathML-документа должен являться элемент `<math>`.

Стандарт MathML предусматривает два вида разметки математических формул: разметка представления (presentation markup) и разметка содержания (content markup).

Разметка представления MathML позволяет описать внешний вид математической формулы, т.е. определяет ее графическое представление. Например, следующий фрагмент документа MathML:

```
<mrow>
  <mi> x</mi>
  <sup>
    <mn>2</mn>
  </sup>
</mrow>
```

будет проинтерпретирован как указание разместить в строчном элементе символ «х», а над ним разместить число 2.

В отличие от разметки представления, разметка содержания фиксирует смысловую нагрузку формулы. В частности, если приведенный выше пример обозначал выражение «переменная x в квадрате» (а не, скажем, вторую координату вектора), то та же самая формула будет записана в следующем виде:

```
<apply>
  <power/>
  <ci>x</ci>
```

$\sqrt{2}$

Формат разметки содержания сводит к минимуму неоднозначность интерпретации смысла формулы по ее записи. Этот формат является также более предпочтительным по сравнению с форматом разметки представления, поскольку позволяет организовать поиск формул в Интернет с учетом смысловой нагрузки, а также использовать системы компьютерной алгебры. Однако, в настоящее время разметка содержания в меньшей степени, чем разметка представления, поддерживается браузерами и другими программными продуктами.

Публикация MathML документов

Современные браузеры в различной степени поддерживают MathML и устанавливают свои ограничения по оформлению документов в формате MathML.

Браузер	Поддержка MathML
Internet Explorer (начиная с версии 5.5)	Поддерживает разметку представления и содержания при установке бесплатного плагина MathPlayer (подробнее см. http://www.dessci.com/en/products/mathplayer/default.htm). Плагин MathPlayer требует введения на странице дополнительного пространства имен и привязки к этому пространству имен объекта MathPlayer. Для всех элементов формул в формате MathML в документе должна быть явно указана привязка к введенному пространству имен.
Mozilla Firefox (начиная с версии 0.9.4)	Имеет встроенную поддержку разметки представления MathML. Для просмотра формул требуется дополнительно установить математические шрифты.
Amaya	Поддерживает разметку представления MathML.
Opera (начиная с версии 9.5)	Поддерживает профиль MathML для CSS (подробнее см. http://www.w3.org/TR/mathml-for-css/). Полноценная поддержка MathML отсутствует.
Galeon	Имеет встроенную поддержку разметки представления MathML.
Conkeror	Имеет встроенную поддержку разметки представления MathML.

Как видно из таблицы, браузер Internet Explorer накладывает ограничения на документы MathML, делающие их нечитаемыми для других браузеров. Для решения этой проблемы можно использовать специальные таблицы стилей XSLT «XSLT stylesheets for MathML»[2], доступные для свободного скачивания³. В данных таблицах стилей определен набор специальных преобразований над MathML документом, которые осуществляет браузер пользователя при отображении страницы. Это позволяет, в частности, выкладывать один экземпляр документа как для браузера Internet Explorer, так и для браузера Mozilla Firefox, а кроме того, позволяет просматривать MathML документы в формате разметки содержания в браузере Mozilla Firefox. Стилиевой файл необходимо разместить на веб-сайте и добавить в заголовок документа ссылку на этот файл, поскольку исполнение XSLT-преобразований из другого домена запрещено по соображениям безопасности. Кроме того, в декларации типа документа необходимо указать файл, содержащий объединенное объявление форматов XHTML и MathML.

³ <http://www.w3.org/Math/XSL/Overview-tech.html>

Возможный шаблон MathML документа, использующего XSLT-стили приведен ниже (предполагается, что XSLT-стили размещены в каталоге xsl, а файл декларации типа документа – в каталоге mathml2):

```
<?xml version="1.0" encoding="UTF-8" standalone="no"?>
<?xml-stylesheet type="text/xsl" href="/xsl/mathml.xsl" pref:renderer="mathplayer"?>
<!DOCTYPE html PUBLIC "-//W3C//DTD XHTML 1.1 plus MathML 2.0 plus SVG
1.1//EN" "/mathml2/xhtml-math11-f.dtd">
<html xmlns="http://www.w3.org/1999/xhtml">
  <head>
    <meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=UTF-8" />
  </head>
  <body>
    <math xmlns="http://www.w3.org/1998/Math/MathML" display="block">
      ...
    </math>
  </body>
</html>
```

Приложения для конвертации математических документов в формат MathML

Поскольку, как уже отмечалось выше, нотация TeX является стандартом для математического сообщества, и существует большое число документов в данном формате, одной из актуальных задач является конвертация документов из нотации TeX в MathML.

В таблице приведен ряд существующих проектов в данной области.

Название	Информация о проекте
itex2MML	Адрес в Интернет: http://pear.math.pitt.edu/mathzilla/itex2mml.html http://golem.ph.utexas.edu/~distler/blog/itex2MML.html Статус: свободно распространяемый продукт Описание проекта: Средство преобразования документов в формате itex в XHTML+MathML. Есть исходные коды на C. Использует lex. Доступна онлайн-версия.
Blahtex	Адрес в Интернет: http://www.blahtex.org/ Статус: свободно распространяемый продукт Описание проекта: Бесплатная утилита/библиотека для преобразования разметки TeX в MathML. С помощью дополнительных средств может преобразовывать разметку в PNG изображение. Доступна онлайн-версия.
Hermes	Адрес в Интернет: http://hermes.roua.org/ Статус: свободно распространяемый продукт Описание проекта: Средство преобразования документов в формате TeX в XML+MathML+metadata. Использует макросы TeX и bison для синтаксического анализа.
TeX/LaTeX to MathML	Адрес в Интернет: http://www.orcca.on.ca/MathML/texmml/textomml.html Статус: свободно распространяемый продукт

Online Translator	Описание проекта: Онлайн-преобразователь формул в нотации TeX в MathML.
TtM	Адрес в Интернет: http://hutchinson.belmont.ma.us/tth/mml/ Статус: платный продукт Описание проекта: Преобразователь формул в нотации PlainTeX и LaTeX в HTML+MathML. Доступна онлайн-версия.
ACSIIMathML	Адрес в Интернет: http://www1.chapman.edu/~jipsen/mathml/asciimath.html Статус: свободно распространяемый продукт Описание проекта: Программа осуществляет конвертацию документов, размеченных в формате LaTeX (поддерживается подмножество формата) в MathML с помощью ECMAScript.
Tralics	Адрес в Интернет: http://www-sop.inria.fr/apics/tralics/ Статус: свободно распространяемый продукт Описание проекта: Tralics предназначен для конвертации документов в формате TeX в формат XML. Поддерживает конвертацию в формат разметки представления MathML. Используется как составная часть математического редактора LyX ⁴ .
Teacode Latex-сервис	Адрес в Интернет: http://www.teacode.com/ Статус: свободно распространяемый продукт Описание проекта: Преобразователь формул из LaTeX в MathML и GIF. Проект Иркутского Государственного Университета. Доступна онлайн-версия.

Редакторы математических документов с поддержкой MathML

Формат MathML является техническим форматом, и ручной набор формул в этой нотации является трудоемким. Для облегчения этой задачи были созданы различные математические редакторы с поддержкой формата MathML. В таблице приведен обзор существующих проектов.

Название	Информация о проекте
LyX	Адрес в Интернет: http://www.lyx.org/ Статус: свободно распространяемый продукт Описание проекта: Редактор математических документов, поддерживающий форматы LaTeX и MathML. Работает на платформах Linux/Unix, Windows и Mac OS X
MathType	Адрес в Интернет: http://www.dessci.com/en/products/mathtype/ Статус: платный продукт Описание проекта: Интерактивный редактор математических формул в формате LaTeX и MathML. Поддерживает платформы Windows и Macintosh.
WebEQ	Адрес в Интернет: http://www.dessci.com/en/products/webeq/ Статус: платный продукт Описание проекта: Проект ориентирован на построение интерактивных математических страниц. Поддерживает MathML и использует для отображения формул на клиентской стороне Java.
MathEX	Адрес в Интернет: http://www.integretechpub.com/mathex/ Статус: платный продукт Описание проекта: Java-приложение, позволяющее создавать и публиковать

⁴ <http://www.lyx.org/>

	документы в формате MathML [3].
MathML Equation Editor	Адрес в Интернет: http://www.integretechpub.com/zed/ Статус: бесплатный для частного использования Описание проекта: Представляет собой Windows-приложение и элемент управления ActiveX для создания документов в формате MathML.
Amaya	Адрес в Интернет: http://www.w3.org/Amaya/ Статус: свободно распространяемый продукт Описание проекта: Веб-редактор, разработанный и поддерживаемый консорциумом W3C. Программа поддерживает форматы HTML, CSS, XHTML, MathML и SVG.
ActiveMath	Адрес в Интернет: http://www.activemath.org Статус: свободно распространяемый продукт Описание проекта: Система для организации электронных учебных курсов по математике. Включает редактор математических текстов [4, 5].
BrEdiMa	Адрес в Интернет: http://zarama.com/bredima/ Статус: свободно распространяемый продукт Описание проекта: Редактор математических выражений с графическим интерфейсом, написанным на JavaScript. Поддерживает LaTeX и разметку представления MathML [6].
MathEdit	Адрес в Интернет: http://wme.cs.kent.edu/mathedit/ Статус: свободно распространяемый продукт Описание проекта: Редактор математических выражений в формате MathML (поддерживается как разметка представления, так и разметка содержания) [7].
WIRIS OM Tools	Адрес в Интернет: http://www.wiris.com/content/view/20/62/lang,en/ Статус: свободно распространяемый продукт Описание проекта: Редактор математических выражений в формате MathML и OpenMath [8].

Заключение

Существующие на сегодняшний день технологии публикации математических документов в сети Интернет обладают как определенными достоинствами, так и своими недостатками. Наиболее перспективным форматом публикации математических документов представляется формат MathML, однако отсутствие полной встроенной поддержки данного формата в современных браузерах затрудняет его широкое распространение.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Spiel C.* Writing Documentation, Part II: LaTeX with latex2html. // Linux Gazette. -- January 2002, Issue 74
2. *Carlisle D.* MathML on the Web: Using XSLT to Enable Cross-Platform Support for XHTML and MathML in Current Browsers. // Proceedings of MathML International Conference 2002
3. *Dooley S.S.* MathEX: A Direct-Manipulation Structural Editor for Compound XML Documents. // Proceedings of Mathematical User-Interfaces Workshop 2007

4. *Gogvadze G., Tsigler J.* Authoring Interactive Exercises in ActiveMath // Proceedings of Mathematical User-Interfaces Workshop 2007
5. *Libbrecht P., Jednoralski D.* Drag-and-drop of Formula from a Browser // Proceedings of Mathematical User-Interfaces Workshop 2006
6. *Nakano Y., Murao H.* BrEdiMa: Yet Another Web-browser Tool for Editing Mathematical Expressions. // Proceedings of Mathematical User-Interfaces Workshop 2006
7. *Su W., Wang P.S., Li L.* Entering and Editing Mathematical Expressions on the Web. // Proceedings of Mathematical User-Interfaces Workshop 2008
8. *Marques D., Eixarch R., Casanellas G., Martinez B., Smith T.J.* WIRIS OM Tools: a Semantic Formula Editor. // 2000 Mathematics Subject Classification.

WEB PUBLISHING OF MATHEMATICAL TEXTS

V. Kubaev

***M.V. Lomonosov Moscow State University,
119992, Leninskie gory*

Abstract. In this paper we present an overview of Web publishing techniques for mathematical texts. We also perform an analysis of the current document formats from the perspective of effective automatic data processing, reuse of information and compatibility with current browsers. We review projects for editing and converting of mathematical documents intended for Web publishing.

Key words: TeX, MathML, HTML, text publishing

ТЕХНОЛОГИИ И МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ

УДК 53 (37.022)

ПРОБЛЕМНОЕ ОБУЧЕНИЕ ФИЗИКЕ В БАЗОВОЙ ШКОЛЕ НА ОСНОВЕ СОФИЗМОВ И ПАРАДОКСОВ

Л.В. Пилипец

*Тобольская государственная социально-педагогическая академия им. Д.И. Менделеева
626150, Тобольск Тюменской обл., ул. Знаменского, 58*

Аннотация. В статье рассмотрена технология проблемного обучения с привлечением софизмов и парадоксов, как средства создания проблемной ситуации. Описывается конкретная ситуация, иллюстрирующая предлагаемую технологию, приведены примеры физических софизмов и парадоксов.

Ключевые слова: технология, проблемное обучение, проблемная ситуация, мышление, софизм, парадокс.

В настоящее время осознан и сформулирован новый акцент в понимании триединства целей образования: важнейшей целью процесса обучения является развитие личности учащегося. Приобретение же знаний, умений и навыков понимается как средство этого развития. Социальный заказ общества, заключающийся, прежде всего, в требовании формирования в условиях школы активной, самостоятельной, культурной личности, изменил отношение педагогической общественности, как к содержанию образования, так и к системе методов и средств обучения. Кроме того, для развития личности учащегося необходимо, чтобы сам ученик из объекта учебно-воспитательного процесса превратился в субъект, проявляющий свою самостоятельность и активно взаимодействующий с учителем.

Школа ищет новые пути и формы улучшения качества преподавания физики. Эффективность и качество работы педагога и школы определяется, прежде всего, тем, насколько реально выпускник подготовлен для дальнейшего образования. Одним из возможных способов решения данной задачи может служить использование технологии проблемного обучения с использованием физических софизмов и парадоксов.

Проблемным названо обучение, при котором учитель, создавая проблемные ситуации и организуя деятельность учащихся по решению учебных проблем, обеспечивает оптимальное сочетание их самостоятельной поисковой деятельности с усвоением готовых выводов науки. Это обучение направлено на формирование познавательной самостоятельности учащихся, развитие их логического, рационального, критического и творческого мышления и познавательных способностей. Опираясь на закономерности психологии мышления, логику научного исследования, оно способствует развитию интеллекта учащегося, его эмоциональной сферы и формированию на этой основе мировоззрения, что и является главным отличием проблемного обучения от традиционного объяснительно-иллюстративного обучения. В данном случае предполагается не только усвоение результатов научного познания, но и рассмотрение самого пути познания, способов творческой деятельности. В основе проблемного обучения лежит личностно-деятельностный принцип организации процесса обучения.

С точки зрения психологии сущность проблемного обучения заключается в следующем - проблемное обучение есть метод для формирования у учащихся глубокой и устойчивой учебно-познавательной мотивации, для детерминации умственной деятельности и развития учащегося, для извлечения из содержания обучения наиболее важных, глубоких внутренних связей и отношений.

Для успешного применения проблемного обучения можно выделить такие основные психологические условия: проблемные ситуации должны отвечать целям формирования системы знаний; быть доступными для учащихся и соответствовать их познавательным способностям; должны вызывать собственную познавательную деятельность и активность.

Задания должны быть таковыми, чтобы учащийся не мог выполнить их, опираясь на уже имеющиеся знания, но достаточными для самостоятельного анализа проблемы и нахождения неизвестного.

Возникла система методов обучения, в которой создание проблемной ситуации учителем и решение проблем учащимися стали главным условием развития их мышления. В этой системе различаются общие методы (монологический, показательный, диалогический, эвристический, исследовательский, программированный, алгоритмический) и бинарные - правила взаимодействия учителя и учащихся. Структуры общего и бинарного методов рассмотрены М.И. Махмутовым [5, 149]. Существует несколько подходов к трактовке концепции проблемного обучения.

Проблемное обучение - это совокупность таких действий как организация проблемных ситуаций, формулирование проблем, оказание ученикам необходимой помощи в решении проблем, проверка этих решений и, наконец, руководство процессом систематизации и закрепления приобретенных знаний [7, 68].

Проблемное обучение – это целостный тип обучения, в основе которого лежит особый вид взаимодействия учителя и учащихся, характеризующийся систематической самостоятельной учебно-познавательной деятельностью учащихся по усвоению новых знаний и способов действия путем решения учебных проблем. Проблемное обучение трактуется как оптимальное сочетание репродуктивной и творческой деятельности по усвоению системы научных понятий и приемов, способов логического мышления [5, 22].

Проблемное обучение - это такая организация учебных занятий, которая предполагает создание под руководством учителя проблемных ситуаций и активную самостоятельную деятельность учащихся по их разрешению, в результате чего и происходит творческое овладение профессиональными знаниями, навыками, умениями и развитие мыслительных способностей [8, 19].

Таким образом, проблемное обучение организованным учителем способом активного взаимодействия учащихся с проблемно представленным содержанием обучения, в ходе которого они приобщаются к объективным противоречиям научного знания и способам их разрешения, учатся мыслить, творчески усваивать знания. Данный способ направлен на самостоятельный поиск учащимися новых понятий и способов действия; предполагает последовательное и целенаправленное выдвижение перед учащимися познавательных проблем, разрешая которые они под руководством учителя активно усваивают новые знания; обеспечивает особый способ мышления, прочность знаний и творческое применение в практической деятельности [1, 120].

Существует система методов обучения, построенная с учетом принципов проблемности и целеполагания. Данная система обеспечивает управляемый учителем процесс учебно-познавательной деятельности учащихся, усвоение ими научных знаний, способов умственной деятельности, развитие их мыслительных способностей.

К проблемным относят методы, основанные на создании проблемных ситуаций, активной познавательной деятельности учащихся, состоящей в поиске и решении учащимися выдвинутых проблем.

В современной теории проблемного обучения различают два вида проблемных ситуаций: психологическую и педагогическую. Психологическая существует в головах учеников, а педагогическая представляет собой организацию учебного процесса.

Проблемные ситуации классифицируются по направленности на приобретение нового (знания, способы действия, возможности применения знаний и умений в новых условиях); по степени трудности и остроте (зависит от подготовленности учащихся); по характеру противоречий (между житейским и научным знанием).

Г.К. Селевко предлагает следующую классификацию проблемных ситуаций: по содержанию неизвестного, по уровню проблемности, по виду рассогласования информации, по методическим особенностям. Также он предлагает такие приемы создания проблемных ситуаций: подведение обучаемых к противоречию с предложением найти способ его разрешения; столкновение противоречий практической деятельности; изложение различных точек зрения на один и тот же вопрос; предложение обучаемым рассмотреть явление с различных позиций; побуждение обучаемых делать сравнения, обобщения, выводы из ситуации, сопоставлять факты; постановка конкретных вопросов (на обобщение, конкретизацию, логику рассуждения); определение проблемных теоретических и практических заданий (исследовательских); постановка проблемных задач (с недостаточными или избыточными исходными данными, с неопределенностью в постановке вопроса, с противоречивыми данными, с заведомо допущенными ошибками и др.).

Г.К. Селевко также разработана технологическая схема проблемного обучения [8, 20].

Проблемное обучение следует осуществлять в порядке усложнения его видов. Обычно начинают с эвристических бесед, проблемного изложения учебного материала, в которых учитель формулирует, выделяет проблему и показывает пути ее решения. Затем переходят к выполнению учащимися экспериментальных задач и лабораторных работ с ограниченной сферой самостоятельного поиска и т. д. Поэтому выделяют несколько уровней проблемного обучения. Учитель формулирует и решает проблему или показывает, каким образом она была решена в науке (проблемное изложение), либо создает проблемную ситуацию и вовлекает учащихся в совместный поиск ее решения (эвристическая беседа, поисковые задания). Учитель также может сформулировать проблему и предложить ее учащимся для решения (в виде исследовательской лабораторной работы, экспериментальной задачи, задания для домашних опытов и наблюдений, задания на конструирование установки или прибора и т.д.) или предлагает учащимся сформулировать проблему и искать пути ее решения (факультативы, кружки, НОУ).

Начало проблемного обучения лежит в создании проблемных ситуаций. Главное средство для создания проблемных ситуаций это проблемные вопросы, но на уроках физики с этой целью можно использовать демонстрационный и мысленный эксперимент, фронтальные опыты, экспериментальные и занимательные задачи, факты из истории физики, научные парадоксы, софизмы.

Р.И. Малафеев выделяет такие способы создания проблемных ситуаций: неожиданности, конфликта, предположения, опровержения, несоответствия, неопределенности и предлагает процесс решения учебных проблем в общем виде [4, 16].

Применение различных методов обучения, в том числе софизмов и парадоксов, ведущих к возникновению проблемных ситуаций, способствует развитию нестандартного мышления, без которого невозможно никакое открытие. Для физики это имеет огромное значение, так как анализ многих парадоксов сыграл важную роль в развитии современной науки.

При решении проблемных ситуаций у учащихся проявляется инициатива и для большинства из них такая работа становится творческой. Они приучаются самостоятельно планировать, намечать ближайшие и далекие цели своей работы. Главным для них становится умение самостоятельно мыслить, анализировать явления на основе изученных знаний, решать новые задачи, с помощью освоенных методов.

Таким образом, у учителя достаточно возможностей для моделирования на своих уроках парадоксальных ситуаций при изучении физических явлений, законов и теорий, анализ которых в ходе диалогического обсуждения позволяет учащимся не только понять новый материал, ощутить, почувствовать и осмыслить его относительные глубины, но и дать им возможность испытать истинную радость познания, при соответствующих условиях приводящую к серьезному увлечению наукой. Также, знакомство учащихся с отдельными парадоксами физики становится началом осознания ими важнейшей особенности нашего мира, как парадоксальность бытия и человеческого мышления.

Софизм - (от греч. «мастерство, умение, хитрая выдумка, уловка») - ложные умозаключения, которые тем не менее, при поверхностном рассмотрении кажутся правильными. Софизм основан на преднамеренном, сознательном нарушении правил логики.

Софизм - уловка, ухищрение, выдумка, головоломка, умозаключение или рассуждение обосновывающее какую-нибудь заведомую нелепость, абсурд или парадоксальное утверждение, противоречащее общепринятым представлениям.

Парадокс (от греч. paradoxos - неожиданный, странный) - 1) мнение, рассуждение, резко расходящееся с общепринятым, противоречащее (иногда только на первый взгляд) здравому смыслу; 2) необычное, неожиданное явление, не соответствующее привычным представлениям; 3) формально-логическое противоречие, которое возникает в содержательной теории множеств и формальной логике при сохранении логической правильности хода рассуждений [9, 332].

В парадоксе, умозаключение, кажущееся неверным, противоречащим «здравому смыслу», на самом деле справедливо. Например, выражаясь словами популярной поговорки, «невероятно, но факт», что при сложении скоростей, направленных в одну сторону, результирующая скорость будет меньше арифметической суммы скоростей (этот результат является одним из выводов частной теории относительности).

Также можно сказать, что анализ многих парадоксов сыграл чрезвычайно важную роль в развитии современной физики как науки. При открытии закона или разработке теории ученый опирается на конечное число исследуемых объектов и их свойств. Поэтому нет никаких гарантий, что эта теория будет справедлива для объектов и (или) их свойств, ранее не учитывавшихся наукой или не известных ею. Следовательно, нередки ситуации, когда вновь обнаруженные эмпирические факты оказываются несовместимыми с уже разработанной теорией. Так рождаются парадоксы.

Разбор парадоксов и софизмов на уроках, их конкретно-научный, мировоззренческий и методологический анализ позволяет успешно решать целый ряд весьма важных для формирования личности учебно-воспитательных задач. Продемонстрированные учащимся парадоксы: 1) пробуждают у них неподдельный интерес к познанию явлений природы; 2) служат одним из средств глубокого понимания и усвоения конкретного учебного материала; 3) формируют представления о путях и методах научного познания, о стимулах последующего развития науки – преодолении появляющихся противоречий; 4) учат физически мыслить; 5) являются одним из эффективных способов развития творческого мышления; 6) воспитывают у учащихся реальные представления о творческой деятельности классиков науки.

Парадоксы, рассматриваемые на уроках физики, условно можно поделить на фундаментальные парадоксы науки, которые имели место в истории ее развития, и парадоксы, возникающие в ходе учебно-познавательной деятельности. К первым можно отнести парадоксы, вызванные сложностями в понимании, примером могут послужить факты свободного падения тел, возможная «тепловая смерть» Вселенной, излучение абсолютно черного тела, парадокс близнецов и др.

Знакомство с парадоксами науки и повседневного учебного познания и их анализ осуществляются при изучении теоретического материала, постановке демонстрационного эксперимента, решении задач-парадоксов и обобщении накопленных знаний и представлений. В ходе проверки знаний учащихся им могут быть предложены вопросы для выявления уровня понимания ими конкретных парадоксальных ситуаций, возникших в истории физики и на уроках, так и теоретико-методологических представлений о существовании парадоксов науки.

Однако, наряду с изучением на уроках парадоксов науки, к тому же нередко упоминаемых в учебных пособиях по физике, сама учебно-познавательная деятельность нередко преподносит учащимся большие и малые парадоксальные ситуации в виде кажущейся «нестыковки» теоретического материала с данными демонстрационных и лабораторных опытов, либо с собственными наблюдениями физических явлений. Оставлять без анализа эти факты нельзя.

Во-первых, это - пренебрегать интересом учащихся к урокам физики, во-вторых, это вносить в их сознание мысль о недоверии к научному знанию как знанию объективному.

Лабораторные занятия - один из важнейших методов обучения физике. В процессе их выполнения и опытов ученики убеждаются в объективности физических законов, получают непосредственное представление о методах, применяемых в научных исследованиях, знакомятся с физическими измерениями и способами количественной оценки физических явлений, приобретают практические умения и навыки, предусмотренные программой по физике, расширяют свои знания о производстве.

Самостоятельная работа с приборами способствует развитию мышления учащихся, приучает их глубже проникать в явления природы, отличать главное и существенное от второстепенного и случайного, развивает изобретательность и любознательность. Лабораторные занятия могут быть использованы для решения различных дидактических задач: иллюстрация к объяснению учителя, упражнения для выработки умений и навыков, повторения и обобщения ранее изученного материала, привитие исследовательских навыков наблюдать и изучать физические явления, знакомить с измерительными приборами и измерять физические величины, знакомить с устройством и принципом

действия некоторых физических приборов, обнаруживать или проверять количественные закономерности, определять физические константы, физические характеристики веществ и процессов и др.

Предлагаемые типовые схемы лабораторных занятий не всегда способствуют развитию мышления учащихся.

При изучении гравитационных явлений по программе предусмотрена работа «Нахождение центра тяжести плоской пластины». Данной работе предшествует тема «Сила тяжести», после изучения которой, у учащихся появляется устойчивое представление о том, что центр тяжести (центр масс) однородных тел (шар, цилиндр, прямоугольная или круглая пластина и др.) находится в центре симметрии и иногда может не совпадать ни с одной из точек данного тела (кольцо). При выполнении лабораторной работы, они приходят к выводу, что определить центр тяжести плоских однородных тел неправильной формы достаточно легко.

Мы предлагаем такой вариант занятия.

Учащиеся приходят на занятие подготовленные, это означает, что в тетрадях для выполнения лабораторных работ записано название работы, цель работы, которую они должны были сформулировать самостоятельно, и выписано оборудование, которым они должны будут воспользоваться при ее выполнении. Также каждый из учащихся приносит вырезанную из плотной бумаги плоскую фигуру неправильной формы.

Спрашиваем учащихся, смогут ли они определить центр тяжести плоской фигуры. Ответ получаем следующий: для симметричных тел центр тяжести определяется по положению оси симметрии; для несимметричных тел положение центра тяжести определяется из условия: сумма моментов сил относительно центра тяжести равна нулю.

После этого уточняем, что такое центр тяжести: любое тело можно рассматривать как совокупность материальных точек, на каждую из которых действует сила тяжести. Равнодействующая этих элементарных сил тяжести и есть сила тяжести тела, а точка приложения этой равнодействующей называется центром тяжести. Учащиеся дают такое определение: это точка пересечения прямых, вдоль которых действуют силы, сообщаемые телу только поступательное движение. Необходимо добавить, что данное определение относится к центру масс, но поскольку под действием силы тяжести тело, не имеющее закрепленной оси, движется только поступательно, то часто центр масс называют центром тяжести. Обязательно нужно отметить, что центр масс обладает следующим свойством: если в точке тело закрепить, то оно будет находиться в состоянии равновесия. Это свойство обычно и используется для определения положения центра тяжести.

Рассматриваем такие задания:

1. Куда направлена сила тяжести при перемещении предмета вверх по наклонной плоскости?
2. Где находится центр тяжести бумеранга?

Затем выполняется работа по описанию, данному в учебнике.

После выполнения и анализа работы, раздаем учащимся плоские фигуры неправильной формы и формулируем следующую задачу: как с помощью одной лишь линейки, не имеющей делений, определить положение центра тяжести однородных металлических пластин, все углы у которых прямые.

Возникает проблемная ситуация, требующая решения. После нахождения центра тяжести построением предлагаем задания по определению центра тяжести фигур, имеющих цифровое значение, что создает дополнительную проблему для решения.

Домашнее задание состоит из таких заданий:

1. Утка при ходьбе переваливается с боку набок, а курица нет. Почему?
2. Найти построением центр тяжести плоских пластин, имеющих различную геометрическую форму.

Проводя занятия различных форм по технологии проблемного обучения, можно сделать вывод о том, что анализ парадоксов на уроках является важным методическим средством формирования у учащихся рационального, творческого мышления, понимания методологии процесса постижения физической реальности.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Айсмонтас Б.Б.* Теория обучения: Схемы и тесты. – М.: Изд-во ВЛАДОС-ПРЕСС, 2002. – 176 с.
2. *Ланге В.Н.* Физические парадоксы и софизмы: Пособие для учащихся. – 3-е изд., перераб. – М.: Просвещение, 1978. – 176 с.
3. *Макеева Г.П., Цедрик М.С.* Физические парадоксы и занимательные вопросы. – 3-е изд., перераб. – Мн.: Нар. асвета, 1981. – 144 с.
4. *Малафеев Р.И.* Проблемное обучение физике в средней школе: Из опыта работы. Пособие для учителей. – М.: Просвещение, 1980. – 127 с.
5. *Махмутов М.И.* Организация проблемного обучения в школе. Книга для учителей. М.: Просвещение, 1977. – 240 с.
6. *Оконь В.* Введение в общую дидактику: Пер. с польск. Л.Г. Кашкуровича, Н.Г. Горина. – М.: Высш. шк., 1990. – 382 с.
7. *Оконь В.* Основы проблемного обучения. М.: Просвещение, 1968. – 208 с.
8. *Селевко Г.К.* Опыт системного исследования педагогических технологий. / Г.К. Селевко // Школьные технологии. – 1997. – № 1. С. 11 – 34.
9. *Философский энциклопедический словарь.* – М.: ИНФА-М, 1997. – 576 с.

PROBLEM TEACHING IN PHYSICS AT SCHOOL BASING ON SOPHISMS AND PARADOXES

L. Pilipez

*D.I. Mendeleev State Social Pedagogical Academy in Tobolsk
Tobolsk, Tyumen Region, st. Znamensky, 58*

Abstract. The technology of the problem teaching is examined in the article. Sophisms and paradoxes are used here as means to technology with some examples of physical sophisms and paradoxes.

Key words: the technology, problem teaching, problem situation, way of thinking, the sophism, the paradoxes.

УДК 378.176

МЕТОДИЧЕСКАЯ СИСТЕМА ОБУЧЕНИЯ ДИСЦИПЛИНАМ

**«ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СТАТИСТИКИ»
И «КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ»
В УСЛОВИЯХ РЕАЛИЗАЦИИ МЕЖПРЕДМЕТНЫХ СВЯЗЕЙ
КАК ФАКТОР ПОВЫШЕНИЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ
КОМПЕТЕНТНОСТИ БУДУЩИХ УЧИТЕЛЕЙ**

Д.Д. Бычкова

*Московский государственный областной университет,
105005, Москва, ул. Радио, д. 10а*

Аннотация. Анализируются возможности построения методической системы обучения дисциплинам «Элементы теории вероятностей и статистики» и «Компьютерное моделирование», которая базируется на трех составляющих процесса обучения математике и информатике и реализует межпредметные связи.

Ключевые слова: методической системы обучения, теория вероятностей, компьютерное моделирование.

Естественная связь между математикой и информатикой порождает возможность реализации межпредметных связей и между отдельными их дисциплинами. В частности, между дисциплинами «Элементы теории вероятностей и статистики» и «Компьютерное моделирование». Цель использования межпредметных связей в процессе обучения этим дисциплинам состоит в их идейном обогащении, усилении их развивающего потенциала, а также в повышении профессиональной компетентности обучающегося.

Реализация межпредметных связей в процессе обучения ведет к непосредственному его изменению, пересмотру и совершенствованию содержания, форм и методов обучения, а также методики преподавания этих дисциплин. Именно здесь и возникает вопрос о построении методической системы обучения дисциплинам «Элементы теории вероятностей и статистики» и «Компьютерное моделирование» в условиях реализации межпредметных связей.

На основании методической системы обучения математике А.М. Пышкало [1,2] и методической системы обучения информатике И.Н. Антипова построим методическую систему обучения математике и информатике в условиях реализации межпредметных связей. Представим схематично методическую систему математики в виде пятиугольника (каждая вершина которого представляет собой одну из компонент системы), аналогичным образом поступим с методической системой обучения информатике, объединив «средства общения с компьютером» и «средства обучения» в «средства обучения - компьютер», и установим связи между системами, соединив соответствующие вершины этих многоугольников отрезками. Таким образом, мы получим пятиугольную призму, в основаниях которой располагаются методическая система обучения математике и методическая система информатике, а боковые ребра этой призмы отражают связи между соответствующими компонентами систем. Совместим основания призмы, лежащие в разных плоскостях, параллельным переносом. В результате параллельного переноса произойдет наложение одной методической системы обучения на другую, компоненты этих систем совпадут. Схематично наша методическая система обучения

математике и информатике в условиях реализации межпредметных связей будет представлена в виде сечения пятиугольной призмы (рис. 1, 2).

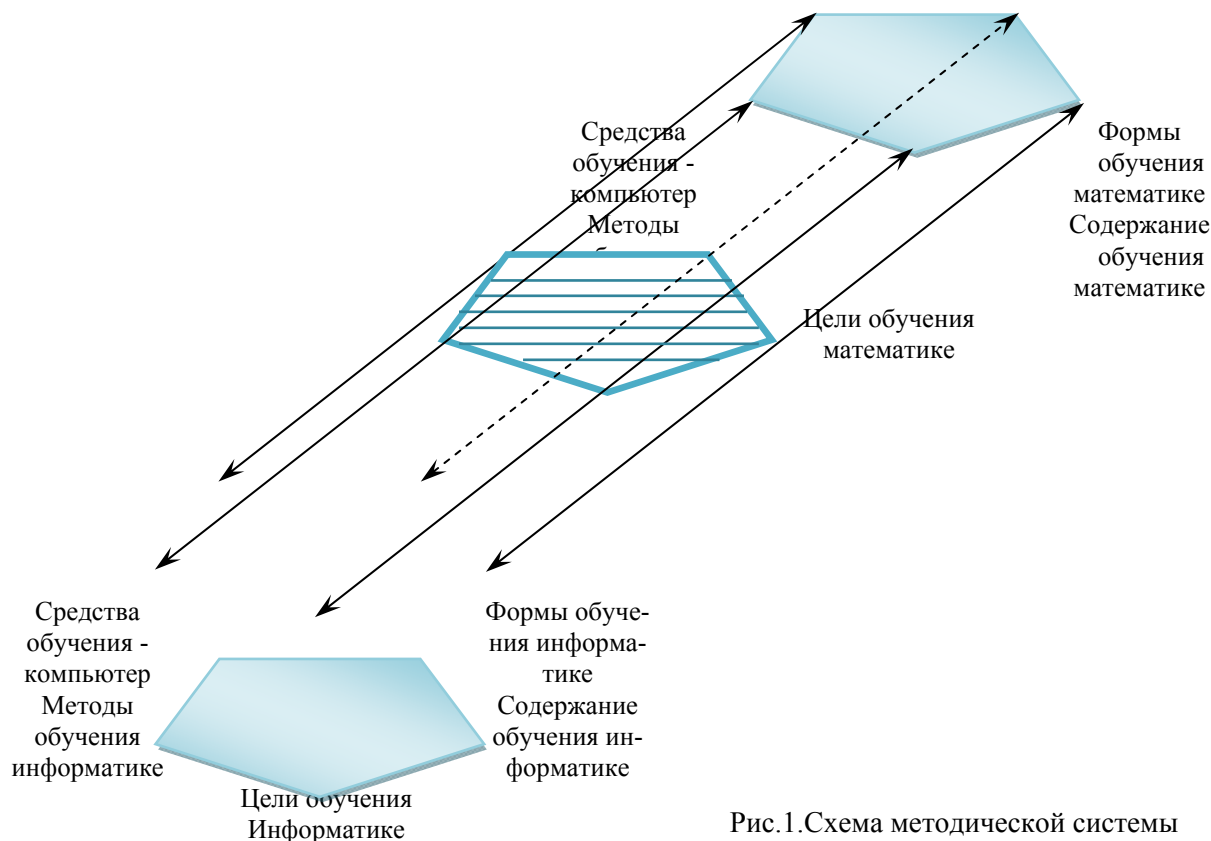


Рис.1.Схема методической системы межпредметных связей



Рис.2. «Сечение» схемы межпредметных связей

Построенная методическая система обучения математике и информатике имеет общий характер. Однако, как упоминалось выше, связь между математикой и информатикой позволяет устанавливать связь и между отдельными их дисциплинами. А, значит, это позволяет рассмотреть частный случай данной методической системы обучения, на

примере интересующих нас дисциплин «Элементы теории вероятностей и статистики» и «Компьютерное моделирование». Дадим краткие характеристики каждой из компонент методической системы обучения «Элементы теории вероятностей и статистики» и «Компьютерное моделирование» в условиях реализации межпредметных связей.

Цели обучения дисциплинам «Элементы теории вероятностей и статистики» и «Компьютерное моделирование» в условиях реализации межпредметных связей сформулируем следующим образом:

1. Формирование представлений о взаимосвязи обеих дисциплин, понимание значимости такой взаимосвязи для общественного прогресса (теоретическая, практическая и экспериментальная составляющие).
2. Интеллектуальное развитие учащихся, формирование качеств мышления, характерных как для теории вероятностей, так и для компьютерного моделирования и необходимых человеку для полноценного функционирования в обществе, формирование представлений об идеях и методах обеих дисциплин (теоретическая составляющая).
3. Овладение знаниями совместного применения обеих дисциплин в повседневной жизни (практическая и экспериментальная составляющие).

При отборе содержания обучения важным является параллельность в изучении материала. Для каждой из дисциплин можно выделить два ключевых момента, которые будут характерны для любой ступени обучения любой из этих дисциплин, а именно: овладение знаниями, то есть теорией и применение этих знаний, то есть практика (теоретическая и практическая составляющие). А так как в нашей работе говорится о необходимости обучения «Элементам теории вероятностей и статистики» и «Компьютерному моделированию» в условиях межпредметных связей, то пара «овладение знаний – применение знаний» должна выполняться не только на каждой ступени отдельной дисциплины, но и во взаимосвязи.

По нашему мнению процесс обучения дисциплинам «Элементы теории вероятностей и статистики» и «Компьютерное моделирование» в условиях реализации межпредметных связей будет более эффективным при сочетании различных методов обучения.

На лекциях и семинарах (теоретическая составляющая) можно использовать и сочетать следующие методы: объяснительно-иллюстративный, репродуктивный, метод проблемного изложения, методы индукции и дедукции, методы организации и осуществления познавательной деятельности, методы стимулирования и мотивации учебно-познавательной деятельности. На практических занятиях и лабораторных работах (практическая и экспериментальная составляющая): методы индукции, методы дедукции, проблемного изложения; частично-поисковый; исследовательский, методы организации и осуществления познавательной деятельности, методы стимулирования и мотивации учебно-познавательной деятельности. На самостоятельных работах, коллоквиумах и зачетах: методы индукции, методы дедукции, проблемного изложения; частично-поисковый; исследовательский.

Из организационных форм обучения предпочтительнее всего использовать в процессе обучения: лекции, семинары, практические занятия, коллоквиумы, лабораторные работы, научно-исследовательскую работу студентов.

Приведем рекомендуемый вариант распределения часов по двум дисциплинам в неделю и в семестр (таблица 1).

Таблица 1

Распределение часов на изучаемые вопросы

Название дисциплины	Количество часов в неделю			Количество часов в семестр	
	Лек-ции	Практические занятия	Лабораторные Работы	Самостоятельная работа	Коллоквиум
Элементы теории вероятностей и статистики	2	4		4	3
Компьютерное моделирование	2		4	4	3

Среди традиционных видов контроля выберем следующие: зачет и экзамен.

Предложенная методическая система обучения дисциплинам «Элементы теории вероятностей и статистики» и «Компьютерное моделирование» является специфической и сложной структурой, которая состоит из ряда компонент, таких как: цели, содержание обучения, методы обучения и воспитания, формы и средства обучения и воспитания. Она эффективна в качестве средства повышения научного уровня образования и оптимизирует учебно-воспитательный процесс, а также призвана помочь в подготовке учителей по математике и информатике, обладающих профессиональной компетентностью, умеющих применять свои знания в комплексе и использовать компьютер в процессе преподавания своей дисциплины.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пышкало А.М. Методическая система обучения геометрии в начальной школе. – М.: АПН СССР. 1975. - 60 с.
2. Саранцев Г.И. Методика обучения математике в средней школе. – М.: «Просвещение», 2002. – 224 с.

METHODICAL SYSTEM OF TEACHING THE DISCIPLINES "ELEMENTS OF THE THEORY OF PROBABILITIES AND STATISTICS" AND "COMPUTER MODELING" IN CONDITIONS OF REALIZATION THE INTERSUBJECT COMMUNICATIONS CONNECTIONS AS THE FACTOR OF INCREASE THE PROFESSIONAL COMPETENCE OF THE FUTURE TEACHERS

D. Bychkova

*Moscow Region State University
10a, Radio st., Moscow, 105005, Russia*

Abstract. The opportunities of construction of methodical system of training to disciplines "Elements of the theory of probabilities and statistics" and "Computer modeling" are analyzed which is based on three making of process of training to mathematics and computer science and realizes intersubject communications.

Key words: methodical system of training, theory of probabilities, computer modeling.

Николай Николаевич Боголюбов

(к 100-летию со дня рождения)



БОГОЛЮБОВ, НИКОЛАЙ НИКОЛАЕВИЧ (1909-1992), великий математик и физик-теоретик. Родился 8 августа 1909 в Нижнем Новгороде в семье священника. Из-за невозможности детям священника в то время получить образование семья переехала на Украину. В 1921г. Боголюбов окончил трудовую школу в селе Высокая Круча и уехал в Киев. К этому времени уже начали проявляться его уникальные математические способности: в 13 лет он начал исследования под руководством Н.М.Крылова, в 1924 опубликовал свою первую математическую работу *«О проведении решений линейных дифференциальных уравнений на бесконечности»*. В 1925 г. Н.Н. Боголюбов был принят в аспирантуру на кафедру математики при Академии наук УССР, а в 1928 успешно защитил кандидатскую диссертацию *«О прямых методах вариационного исчисления»*. В 1930 Академия наук Украины присудила ему степень доктора математики (в 1936 степень была подтверждена Президиумом АН СССР).

Начиная с 1931 г. Боголюбов совместно с Крыловым работал над созданием теории нелинейных колебаний и создал методы асимптотического интегрирования нелинейных уравнений; эти методы были успешно распространены на статистическую механику. В 1945 г. он впервые сформулировал представление об иерархии времен релаксации в необратимых процессах, а в 1946 создал метод цепочек уравнений для функций распределения комплексов частиц.

Важные результаты получены Боголюбовым в квантовой статистике. Он применил метод кинетических функций распределения к квантовым системам (1947), разработал метод приближенного вторичного квантования для определения спектра слабозбужденных состояний квантовых систем (1946).

В 1946 Боголюбов дал объяснение сверхтекучести на микроскопическом уровне, а в 1957 создал микроскопическую теорию сверхпроводимости. Эта теория в 1958 была применена к описанию ядерной материи. В 1968 Боголюбов разработал обобщенный метод Хартри - Фока, учитывающий существование коррелированных пар частиц.

Николай Николаевич работал в Киевском государственном университете, Математическом институте им. В.А. Стеклова, МГУ им. М.В. Ломоносова, Объединенном институте ядерных исследований. Он основал Институт теоретической физики АН Украины в Киеве, который сейчас носит его имя, лабораторию теоретической физики Объединенного института ядерных исследований (ОИЯИ) в Дубне, отделы теоретической и математической физики в нескольких российских институтах, а также несколько кафедр в вузах России и Украины, среди которых была и кафедра теоретической физики МГОУ (в 1945 г. - МОПИ).

В 1946 Н.Н. Боголюбов был избран членом-корреспондентом АН СССР, а в 1948 г. Академия наук Украины избрала его действительным членом. В 1953 г. он стал действительным членом АН СССР. Боголюбов был членом многих иностранных академий.

Н.Н. Боголюбов был удостоен почетных наград:

- 1983 г. - Золотая медаль Лаврентьева;
- 1984 г. - Золотая медаль Ломоносова;
- 1989 г. - Золотая медаль Ляпунова;
- 1930 г. - Премия академии наук Болоньи;
- 1966 г. - Премия Хайнеманна Американского физического общества;
- 1969 г. - Золотая медаль Гельмгольца АН ГДР;
- 1973 г. - Золотая медаль Планка Физического общества ФРГ;
- 1974 г. - Золотая медаль Б.Франклина США;
- 1981 г. - Премия Карпинского, ФРГ;
- 1992 г. - медаль Дирака (посмертно).

Умер Боголюбов в Москве 13 февраля 1992.

1 декабря 2009 г. в Московском государственном областном университете состоялся научный семинар «Научное и педагогическое наследие академика Н.Н. Боголюбова», посвященный 100-летию Н.Н. Боголюбова. В работе семинара приняли участие ученые и специалисты из организаций, в которых работал Н.Н. Боголюбов и которые занимаются проблемами, относящимися к области его научных интересов. Открыл семинар проектор МГОУ по научной работе и международному сотрудничеству С.Д. Трайтак. Он зачитал приветствия ученика Н.Н. Боголюбова, академика РАН, почетного директора лаборатории теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова ОИЯИ Дмитрия Васильевича Ширкова, члена-корреспондента РАН, главного научного сотрудника Математического института им. В.А. Стеклова РАН Николая Николаевича Боголюбова-младшего, декана физического факультета Киевского национального университета (КНУ) им. Т. Шевченко профессора Николая Владимировича Макальца и заведующего кафедрой теоретической физики КНУ профессора Станислава Николаевича Ежова.

На первой секции (председатель - декан ФМФ профессор А.Л. Бугримов) заведующий кафедрой теоретической физики МГОУ В.В. Беляев сначала рассказал о жизни и научной деятельности академика Н.Н. Боголюбова, обратив особое внимание студенческой аудитории на возраст ученого в начале его научной деятельности (12 лет) и в момент получения первых выдающихся результатов и последовавшего за ними признания (докторская степень была присвоена Н.Н. Боголюбову в 1930 г., когда ему был 21 год). Также были названы многочисленные научные школы, основанные им. Профессор Л.С. Хижнякова, заведующая кафедрой методики преподавания физики МГОУ, говорила об обстановке, в которой рос и учился Николай Николаевич, о программах и учебниках физики того времени, о влиянии работ Н.Н. Боголюбова и преподавателей МГУ на формирование Академии педагогических наук СССР (сейчас РАО) и современных школьных программ по физике. Затем В.В. Беляев сделал доклад об истории и современной деятельности кафедры теоретической физики МГОУ.

Секцию 2 «Сверхпроводимость» вел профессор кафедры общей физики МГОУ Э.В. Геворкян. В первом докладе секции выступил один из учеников Н.Н. Боголюбова Николай Максимилианович Плакида из лаборатории теоретической физики им. Н.Н.Боголюбова, ОИЯИ. Он очень просто и доступно изложил теорию сверхтекучести и сверхпроводимости Н.Н. Боголюбова и обозначил современные проблемы в этой области. Виталий Сергеевич Круглов, Институт сверхпроводимости и физики твёрдого тела Национального исследовательского центра «Курчатовский институт», рассказал о высокотемпературной сверхпроводимости (ВТСП), методах ее получения. Особо привлекательной чертой его доклада была информация о современных приложениях ВТСП.

Секция 3 (председатель профессор кафедры теоретической физики МГОУ В.А. Жачкин) была посвящена использованию идей Н.Н. Боголюбова в современной статистической механике и физике. Она открылась докладом профессора кафедры квантовой статистики МГУ им. М.В. Ломоносова Николая Павловича Николаева о деятельности Н.Н. Боголюбова в основанной им кафедре и в МГУ вообще. В двух других докладах сообщалось о применении метода ренормализационной группы, разработанного Николаем Николаевичем в 1955 г. совместно с Д.В. Ширковым, в теории диффузионно-контролируемых реакций (Сергей Дмитриевич Трайтак, проректор по научной работе и международному сотрудничеству МГОУ) и в проблеме случайных блужданий без самопересечений (Валерий Иванович Алхимов, профессор Московского государственного психолого-педагогического университета).

Председателем секции 4 «Физика конденсированного состояния» была профессор кафедры методики преподавания физики МГОУ А.А. Синявина. Сначала с докладом «Сегнетоэлектрические и антисегнетоэлектрические жидкие кристаллы (ЖК): физика и применение» выступил ведущий научный сотрудник Физического института РАН им. П.Н. Лебедева Евгений Павлович Пожидаев. Он рассказал о возможности управления электрооптических свойств ЖК, теория которых построена по аналогии с теориями фазовых переходов Н.Н. Боголюбова и Л.Д. Ландау. Наталья Владимировна Каманина, заведующая лабораторией «Фотофизика сред с нанобъектами Государственного оптического института им. С.И.Вавилова, Санкт-Петербург сделала доклад «Свойства и особенности наноструктурированных оптических материалов: ЖК-переключатели, фоторефрактивные записывающие среды, прозрачные сверхпрочные покрытия для УФ и ИК», в котором показана возможность использования исследований Н.Н. Боголюбова по физике микромира в макрообъектах с наночастицами. Программу семинара заключило выступление профессора кафедры общей физики МГОУ Эдварда Вигеновича Геворкяна об использовании идей Н.Н. Боголюбова по статистической физике при исследовании релаксационных процессов в молекулярных жидкостях, проводимых на кафедре.

Все наши гости отметили, что в нашем ВУЗе бережно хранится память о Николае Николаевиче Боголюбове, развиваются инициированные им научные направления. Особенностью проведенного семинара стала направленность не только на научную, но и педагогическую деятельность Н.Н. Боголюбова, повлиявшего на изменения в системе образования не только в СССР, но и за рубежом.

НАШИ АВТОРЫ

Арсланов Ильяс Миргарифович - Камская государственная инженерно-экономическая академия (ИНЭКА) 423810 Татарстан, г. Набережные Челны, Проспект Мира, 11/18.

Банникова Евгения Михайловна - Московский государственный областной университет, администратор учебно-методического отдела № 3, Института открытого образования, 105005, Москва, ул. Радио, 10а, аспирантка кафедры общей физики janebannikova@gmail.com.

Беляев Виктор Васильевич - Московский государственный областной университет, 105005, Москва, ул. Радио, 10а, заведующий кафедрой Теоретической физики, заведующий лабораторией нанотехнологий, доктор технических наук старший научный сотрудник vic_belyaev@mail.ru.

Беспалов Алексей Игоревич - Московский инженерно-физический институт (МИФИ), 115409, г.Москва, Каширское ш., 31, аспирант кафедры Системного анализа.

Голов Александр Николаевич - Московский государственный областной университет, 105005 г. Москва, ул. Радио, д. 10а, доцент кафедры Теоретической физики, кандидат физико-математических наук доцент.

Гриценко Наталия Вячеславовна - Московский государственный областной университет, 105005, Москва, ул. Радио, 10а, аспирантка кафедры математического анализа.

Калашников Иван Андреевич - Московский Инженерно-Физический Институт (МИФИ), 115409, г.Москва, Каширское ш., 31.

Квашнин Александр Юрьевич - Московский государственный областной университет, 105005 г. Москва, ул. Радио, д. 10а, аспирант кафедры Математического анализа и геометрии.

Коваленко Виктор Иванович Инженер Федеральное государственное унитарное предприятие Государственный НИИ химии и технологии элементоорганических соединений ФГУП ГНИИХТЭОС Энтузиастов шоссе, 38 Старший научный сотрудник conrad@nm.ru

Кузнецов Михаил Михайлович - Московский государственный областной университет, 105005, Москва, ул. Радио, 10а, доцент кафедры Теоретической физики, доктор физико-математических наук доцент.

Кулешова Юлия Дмитриевна - Московский государственный областной университет, 105005, Москва, ул. Радио, 10а, аспирантка кафедры Теоретической физики.

Латышев Анатолий Васильевич - Московский государственный областной университет, 105005, Москва, ул. Радио, 10а, заведующий кафедрой Математического анализа и Геометрии, доктор физико-математических наук профессор.

Низаметдинов Шамиль Умерович – Московский инженерно-физический институт (МИФИ), доцент кафедры Системного анализа кандидат технических наук доцент.

Пилипец Любовь Васильевна - Тобольская государственная социально-педагогическая академия им. Д.И. Менделеева, старший преподаватель кафедры Технологии и ТД pilipez@pochta.ru

Сурнычев Вячеслав Владимирович - Московский государственный областной университет, 105005, Москва, ул. Радио, 10а, доцент кафедры общей физики, кандидат физико-математических наук conrad@nm.ru

Тимофеев Юрий Алексеевич Московский инженерно-физический институт (МИФИ), 115409, г.Москва, Каширское ш., 31, аспирант.

Хасанов Анис Саяхович - Российская экономическая академия им. Г.В. Плеханова (РЭА им. Г.В. Плеханова) 113054 г. Москва, Стремянный пер., 36.

Юшканов Александр Алексеевич, Московский государственный областной университет, 105005, Москва, ул. Радио, 10а, профессор кафедры Теоретической физики, доктор физико-математических наук, профессор.

ОТ РЕДАКЦИИ

В Вестнике Московского государственного областного университета, Серия Физика – Математика, №1-2, 2009 г. на стр. 66 допущена техническая ошибка. Следует читать:

УДК 372:373

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ И РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МЕХАНИКИ В ШКОЛЬНЫХ КУРСАХ ФИЗИКИ РАЗЛИЧНОГО УРОВНЯ

И.В. Гордеев

*Липецкий государственный педагогический университет (ЛГПУ)
398020, Липецк, Ленина, 42*

Ошибка возникла – в том числе – и из-за ненадлежащего оформления рукописи статьи.

Редакция приносит свои извинения за допущенную техническую ошибку.

Ответственный редактор

А.Л. Бугримов

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

<i>Гриценко Н.В., Латышев А.В., Юшканов А.А.</i> Теории отражения плазменных волн от границы с зеркально-аккомодационными граничными условиями	3
<i>Квашинин А.Ю.</i> Изотермическое скольжение квантового бозе-газа с диффузным отражением от границы	14

ФИЗИКА

<i>Голов А.Н.</i> Уравнения статистической динамики дисперсной фазы в нестационарной газодисперсной системе	26
<i>Богданов Д.Л., Геворкян Э.В., Банникова Е.М., Константинов М.С., Обыденков Ю. Н.</i> Ультразвуковые исследования диссипативных коэффициентов нематических жидких кристаллов	32
<i>Сурнычев В.В., Коваленко В.И., Банникова Е.М.</i> Релаксация объемной и сдвиговой вязкостей в диэтилсилоксане и этилоктилсилоксане	37
	97

<i>Кузнецов М.М., Кулешова Ю.Д.</i> Об асимптотике течений разреженного газа с несколькими малыми параметрами	42
<i>Хасанов А.С., Арсланов И.М.</i> Термофорез дублетов двухслойных аэрозольных частиц при наличии и отсутствии их вращения	50

КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ

<i>Беспалов А.И., Низаметдинов Ш.У.</i> Генетический алгоритм в задаче кусочно-линейного программирования	61
<i>Калашиников И.А., Тимофеев Ю.А.</i> О методах фрагментарного кэширования информации в интернете на примере постреляционной БД	69
<i>Кубаев В.А.</i> Публикация математических текстов в сети Интернет	73

ТЕХНОЛОГИИ И МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ

<i>Пилипец Л.В.</i> Проблемное обучение физике в базовой школе на основе софизмов и парадоксов	82
<i>Бычкова Д.Д.</i> Методическая система обучения дисциплинам «Элементы теории вероятностей и статистики» и «Компьютерное моделирование» в условиях реализации межпредметных связей как фактор повышения профессиональной компетентности будущих учителей	89

Николай Николаевич Боголюбов (к 100-летию со дня рождения)	93
---	----

НАШИ АВТОРЫ	96
ОТ РЕДАКЦИИ	97

CONTENTS

MATHEMATICS

<i>Gritsienko N., Latyshev A., Yushkanov A.</i> On the theory of plasma wave reflection from a boundary with specular accommodative boundary conditions	3
<i>Kvashnin A.</i> Kramers problem in quantum bose – gases with the frequency of collisions proportional to the module of velocity of molecules	14

PHYSICS

<i>Golov A.</i> The equations of statistical dynamic of a dispersed phase in nonstationary gas-dispersed system	26
<i>Bogdanov D., Gevorkyan E., Bannikova E., Konstantinov M., Obidenkov J.</i> Ultrasonic studies of dissipative coefficients of nematic liquid crystals	32
<i>Surnichov V., Kovalenko V., Bannikova E.</i> Relaxation of the volume and shear viscosities in diethyl siloxane and ethylocthyl siloxane	37
<i>Kuznetsov M., Kuleshova Ju.</i> On asymptotical theory of rarefied gas dynamics with some small parameters	42
<i>Khasanov A., Arslanov I.</i> Thermophoresis of doublets of two-layer rotating and non-rotating aerosol particles	50

COMPUTER SCIENCES

<i>Bespalov A., Nizametdinov Sh.</i> A genetic algorithm for solving a piecewise-linear programming problem	61
<i>Kalashnikov I., Timofeev Yu.</i> Methods of fragmented caching information on the internet by example post-relational database	69
<i>Kubaev V.</i> WEB publishing of mathematical texts	73

TECHNOLOGIES AND TECHNIQUES OF TRAINING

<i>Pilipez L.</i> Problem teaching in physics at school basing on sophisms and paradoxes ...	82
<i>Bychkova D.</i> Methodical system of teaching the disciplines "Elements of the theory of probabilities and statistics" and "Computer modeling" in conditions of realization the intersubject communications connections as the factor of increase the professional competence of the future teachers	89

Nikolai Nikolaevich Bogolyubov	93
---	----

OUR AUTHORS	96
FROM EDITION	97

УДК 517.217

К теории отражения плазменных волн от границы с зеркально-аккомодационными граничными условиями / Грициенко Н.В., Латышев А.В., Юшканов А.А. // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2009, №3. С.3-13.

Аналитически решена линеаризованная задача об отражении плазменной волны от границы полупространства. Рассматриваются зеркально-аккомодационные условия отражения волны от границы плазмы. Коэффициент отражения волны найден как функция исходных параметров задачи, показана его зависимость от коэффициента аккомодации нормального импульса электронов.

Библиогр.10.

УДК 533.72

Изотермическое скольжение квантового бозе-газа с диффузным отражением от границы / Квашнин А.Ю. // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2009, №3. С.14-25.

Аналитически решена классическая задача кинетической теории – задача Крамерса об изотермическом скольжении для квантовых бозе – газов. Используется модельное кинетическое уравнение с интегралом столкновений в форме τ -модели и с частотой столкновений, пропорциональной молекулярной скорости. Проведен анализ зависимости скорости скольжения от величины параметра, представляющего собой отношение химического потенциала к произведению постоянной Больцмана на абсолютную температуру.

Библиогр.5.

УДК.533.72

Уравнения статистической динамики дисперсной фазы в нестационарной газодисперсной системе / Голов А.Н. // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2009, №3. С.26-31.

Дан вывод уравнения непрерывности и уравнений движения дисперсной фазы, эффективно представляемой квазинепрерывной средой в смысле кинетической теории, исходя из удлинённого уравнения Лиувилля – Гиббса для статистико-механической модели газодисперсной системы.

Библиогр.10.

УДК 534.28

Ультразвуковые исследования диссипативных коэффициентов нематических жидких кристаллов / Богданов Д.Л., Геворкян Э.В., Банникова Е.М., Константинов М.С., Обыденков Ю. Н. // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2009, №3. С.32-37.

Представлены результаты ультразвуковых исследований зависимостей диссипативных коэффициентов нематических жидких кристаллов Н-8 от частоты и температуры. Показано, что измерения анизотропии коэффициента поглощения ультразвука при низких и высоких частотах позволяют рассчитать целый ряд важных физических параметров. Определены анизотропные коэффициенты сдвиговой и объемной вязкостей, времена ориентационной релаксации, энергии активации и другие параметры Н-8 в широком диапазоне частот и температур.

Ил.2. Табл.2. Библиогр.8.

УДК 532.783

Релаксация объемной и сдвиговой вязкостей в диэтилсилоксане и этилоктилсилоксане / Сурнычев В.В., Коваленко В.И., Банникова Е.М. // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2009, №3. С.37-42.

Представлены результаты экспериментальных исследований температурной и частотной зависимостей скорости и коэффициента поглощения ультразвука в диэтилсилоксане и этилоктилсилоксане для частотного диапазона от 4 до 63 МГц. Вычислены значения коэффициентов объемной и сдвиговой вязкостей. Установлена их частотная зависимость. Приведены значения времени релаксации обнаруженных релаксационных процессов.

Ил.2. Табл.3. Библиогр.5.

УДК 533.72

Об асимптотике течений разреженного газа с несколькими малыми параметрами / Кузнецов М.М., Кулешова Ю.Д. // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2009, №3. С.42-50.

Рассмотрен ряд асимптотических задач динамики разреженных газов с несколькими малыми параметрами, когда результирующее асимптотическое состояние газа зависит от относительной скорости стремления этих параметров к своим предельным значениям.

К задачам указанного типа относятся:

6. Определение структуры переходных по степени разреженности вязких ударных и пограничных слоев.
7. Предельное решение задачи о слое Кнудсена на «дне» пограничного слоя Прандтля при обобщенной (на случай физико-химических процессов) модели зеркально-диффузной поверхности Максвелла.
8. Расчет коэффициента аккомодации по внутренним степеням свободы многоатомных («лазерных») молекул при адсорбции их на поверхности неравновесно возбужденного двухтемпературного аэрозоля.
9. Гиперзвуковое обтекание тонких тел под большими углами атаки, когда параметр подобия k_δ [5] стремится к нулю, и степень сжатия в ударной волне $\varepsilon^{-1} \rightarrow \infty$, а их «относительная» скорость $k_\delta / \sqrt{\varepsilon} \approx \text{const}$.

Определение асимптотической структуры неравновесных предельных течений с замкнутыми линиями тока, когда характерные значения релаксационных параметров G_k и значение обратной величины числа Рейнольдса Re^{-1} стремятся к нулю: $G_k \rightarrow 0$, $Re^{-1} \rightarrow 0$.

Ил.1. Библиогр.13.

УДК 533.72

Термофорез дублетов двухслойных аэрозольных частиц при наличии и отсутствии их вращения / Хасанов А.С., Арсланов И.М. // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2009, №3. С.50-60.

Рассмотрен термофорез двух крупных двухслойных аэрозольных частиц при наличии и отсутствии их вращения. Получены формулы для скорости термофореза и угловой скорости вращения частиц. Как предельный случай рассмотрена задача о гравитационном осаждении двух сферических частиц при наличии и отсутствии их вращения и выведены точные формулы для поправочных коэффициентов к закону Стокса и угловой скорости вращения частиц. Для практических расчетов приведены приближенные формулы.

Библиогр.4.

УДК 004.94:519.85

Генетический алгоритм в задаче кусочно-линейного программирования / Беспалов А.И., Низаметдинов Ш.У. // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2009, №3. С.61-68.

Исследуется эффективность применения генетического алгоритма для задачи кусочно-линейного программирования. Дается пример содержательной постановки такой задачи. Приводятся результаты численных экспериментов.

Табл.5. Библиогр.3.

УДК 005, 004.421.2,004.652.5

О методах фрагментарного кэширования информации в интернете на примере постреляционной БД / Калашников И.А., Тимофеев Ю.А. // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2009, №3. С.69-73.

Приводятся причины использования кэширования в Интернете, проводится обзор методов кэширования объектов информации в «глобальной паутине» на различных этапах следования запроса от пользователя к серверу и формировании ответа. Также поставлена проблема кэширования динамических объектов и актуальность дальнейшего развития данного направления на примере постреляционной БД.

Библиогр.6.

УДК 681.3:682.3

Публикация математических текстов в сети Интернет / Кубаев В.А. // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2009, №3. С.73-81.

В статье дан обзор существующих технологий публикации математических текстов в сети Интернет. Проведен анализ используемых форматов документов с точки зрения эффективности автоматической обработки, повторного использования информации и совместимости с современными браузерами. Рассмотрены проекты в области редактирования и конвертации математических документов, предназначенных для размещения в сети Интернет.

Табл.4. Библиогр.8.

УДК 53 (37.022)

Проблемное обучение физике в базовой школе на основе софизмов и парадоксов / Пилипец Л.В. // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2009, №3. С.82-88.

В статье рассмотрена технология проблемного обучения с привлечением софизмов и парадоксов, как средства создания проблемной ситуации. Описывается конкретная ситуация, иллюстрирующая предлагаемую технологию, приведены примеры физических софизмов и парадоксов.

Библиогр.9.

УДК 378.176

Методическая система обучения дисциплинам «Элементы теории вероятностей и статистики» и «Компьютерное моделирование» в условиях реализации межпредметных связей как фактор повышения профессиональной компетентности будущих учителей / Бычкова Д.Д. // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика, 2009, №3. С.89-92

Анализируются возможности построения методической системы обучения дисциплинам «Элементы теории вероятностей и статистики» и «Компьютерное моделирование», которая базируется на трех составляющих процесса обучения математике и информатике и реализует межпредметные связи.

Ил.2. Табл.1. Библиогр.2.

ПРАВИЛА

подготовки рукописей, представленных для опубликования в журнале
«Вестник Московского государственного областного университета.
Сер. Физика - математика»

Для публикации научных работ в выпусках серии «Вестник МГОУ» принимаются статьи на русском языке. Публикуются научные материалы преимущественно докторантов, аспирантов, соискателей, преподавателей ВУЗов, докторов и кандидатов наук.

Требования к оформлению статей. Статья должна быть представлена:
в текстовом варианте (текст статьи должен быть подписан всеми авторами);
в виде документа MS Word (с расширением doc);
в виде файла в формате ttf;

Файл должен содержать построчно:

На русском языке	УДК (в верхнем левом углу первого листа рукописи) НАЗВАНИЕ СТАТЬИ – прописными буквами Фамилия, имя, отчество (полностью) Полное наименование организации (в скобках – сокращенное), почтовый адрес Должность (другие сведения, например, E-mail, телефон) Аннотация (1 абзац до 400 символов) под заголовком «АННОТАЦИЯ»
На английском языке	НАЗВАНИЕ СТАТЬИ – прописными буквами Фамилия (полностью), инициалы Полное наименование организации, город Аннотация (1 абзац до 400 символов) под заголовком «ABSTRACT»
На русском языке	Объем статьи ограничен темя уровнями: а) 12 страниц с числом иллюстраций до пяти (к этим статьям предъявляются повышенные требования); б) 6 страниц с числом иллюстраций до трех (содержатся основные результаты без излишних деталей выводов и доказательств); в) 4 страницы с числом иллюстраций до двух (выходят в разделе краткие сообщения вне очереди). Список использованной литературы под заголовком «ЛИТЕРАТУРА»

Формат страницы – А4, книжная ориентация. Поля – 2,5 см. Шрифт Times New Roman Cyrillic, цвет шрифта черный, размер 12 пикселей, междустрочный интервал – полусторонний.

Запрещены специфические действия над текстом: уплотнение интервалов, использование цветowych заливок, «красные строки», центрирование, табуляция, отступы, переносы в словах (делаемые автором), сноски (лучше их оформлять в виде примечаний, замечаний и т.п.). Не допускаются сокращения слов, имен, названий, за исключением общепринятых (и оговоренных).

Формулы нумеруются (справа) только те, на которые в тексте имеются ссылки.

Рисунки и таблицы допускаются в том случае, если описать процесс в текстовой форме невозможно. В этом случае каждый из объектов не должен превышать указанные размеры страницы, а шрифт в нем – 12 пикселей. Возможно использование только вертикальных таблиц и рисунков. Запрещены цветowe заливки, применение «фонов».

Рисунки, схемы, графики выполняются на отдельных листах в формате, обеспечивающем ясность передачи деталей. Места расположения иллюстраций в тексте должны быть указаны простым карандашом на полях. На обороте иллюстрации должны быть написаны фамилия автора и название статьи. Текст к иллюстрациям, а также таблицы следует поместить на отдельных страницах.

Все формулы должны быть созданы с использованием компонента Microsoft Equation.

Абзацы должны быть отделены друг от друга пустой строкой (дополнительным «Enter»).

Список литературы должен содержать библиографические сведения о всех публикациях, упоминаемых в статье, и не должен содержать указаний на работы, на которые в тексте нет ссылок. Располагать публикации в списке следует в порядке упоминания о них в статье. Список литературы приводится на отдельном листе с обязательным указанием следующих данных: для книг (монография, сборник и т.д.) - фамилия и инициалы автора, название книги, издательство, место издания (город), год издания; для журнальных статей – фамилия и инициалы автора, название статьи, название журнала, год издания, том, номер, выпуск, страницы (первая и последняя).

Ссылки на неопубликованные работы не допускаются.

Редакционная коллегия оставляет за собой право на редактирование статей, хотя с точки зрения научного содержания авторский вариант сохраняется. Статьи, не соответствующие указанным требованиям, решением редакционной коллегии серии не публикуются и не возвращаются (почтовой пересылкой).

В случае принятия статьи, условия опубликования оговариваются с ответственным редактором.

Ответственный редактор серии «Физика-математика» декан физико-математического факультета, доктор технических наук, профессор Бугримов Анатолий Львович.

Адрес редколлегии серии «Физика-математика» «Вестника МГОУ»: 105005, г.Москва, ул. Радио, д.10-а, комн. 36. Тел. (495) 261-09-48