



Вестник

московского государственного
областного университета

Библиотека МГОУ
Читальный зал уч.к.2

Серия

**«ФИЗИКА-
МАТЕМАТИКА»**

1-2 / 2009

МАТЕМАТИКА

УДК 517.55

ПРИЛОЖЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ДЛЯ КРУГОВЫХ ОБЛАСТЕЙ К РЕШЕНИЮ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОСОБЫМИ ПЛОСКОСТЯМИ

А.В. Нелаев

*Московский государственный областной университет (МГОУ)
105005, Москва, ул. Радио, 10а*

На базе одного из установленных ранее автором интегральных представлений голоморфных функций многих комплексных переменных для круговых областей поставлены и решены две краевые задачи для, соответственно, дифференциального уравнения в частных производных первого порядка и уравнения в частных производных второго порядка.

1. Введение. Автором (см., напр., [1], [2]) для введенного класса Λ ограниченных выпуклых полных круговых областей $D \subset C^n$ ($n \geq 2$) с параметрически задаваемой границей были установлены интегральные представления голоморфных функций, конструкция которых делает их удобными для приложений (некоторые из них были рассмотрены в [1], [2]). К этой прикладной направленности относится и настоящая работа. Изложение ведется для случая двух комплексных переменных.

2. Интегральные представления для круговых областей. Напомним, что ограниченная гиперповерхностью

$\Gamma = \{(\zeta_1, \zeta_2) \in C^2 : \zeta_1 = R_{11}(\tau)\eta + R_{12}(\tau)\eta e^{-it}, \zeta_2 = R_{21}(\tau)\eta + R_{22}(\tau)\eta e^{-it}, 0 < \tau < 1, 0 \leq t \leq 2\pi, |\eta| = 1\}$ область $D \subset C^2$ является областью класса Λ (кратко: $D \in \Lambda$), если она представима в виде

$$D = \bigcap_{0 < \tau < 1} \{(z_1, z_2) \in C^2 : \tau |r_{11}(\tau)z_1 + r_{12}(\tau)z_2| + (1-\tau) |r_{21}(\tau)z_1 + r_{22}(\tau)z_2| < 1\}, \quad (1)$$

где определенные на сегменте $0 \leq \tau \leq 1$ непрерывные и, вообще говоря, комплекснозначные функции $R_{ij}(\tau)$ ($i, j = 1, 2$) непрерывно дифференцируемы в интервале $0 < \tau < 1$, $\det_{0 < \tau < 1} \|R_{ij}\| \neq 0$, матрица $\|r_{ij}(\tau)\| = \|R_{ij}(\tau)\|^{-1}$.

Заметим, что при таком задании области D оказываются выполненными соотношения: $\tau \operatorname{Re} A_{11}(\tau) + (1-\tau) \operatorname{Re} A_{22}(\tau) = 0$, $r A_{12}(\tau) + (1-\tau) \overline{A_{21}(\tau)} = 0$ - необходимые условия представимости области D в виде (1), где функции $A_{ij}(\tau)$ - элементы матрицы

$$\|A_{ij}(\tau)\| = \|r_{ij}(\tau)\| \cdot \|R'_{ij}(\tau)\|.$$

Два основных интегральных представления голоморфных функций двух комплексных переменных для областей $D \in \Lambda$ заключаются в следующем.

Предложение 1. Если функция $f(z_1, z_2)$ есть функция класса α в области D , т.е. $f(z_1, z_2)$ голоморфна в D и функции $f(z_1, z_2)$, $f'_{z_1}(z_1, z_2)$, $f'_{z_2}(z_1, z_2)$ непрерывны в $D \cup \Gamma$, то значения функции $f(z_1, z_2)$ в области D определяются поведением линейного дифференциального оператора

$$L[f(z_1, z_2)] \equiv f(z_1, z_2) + z_1 f'_{z_1}(z_1, z_2) + z_2 f'_{z_2}(z_1, z_2) = \Phi(z_1, z_2) \quad (2)$$

на гиперповерхности Γ по формуле

$$f(z_1, z_2) = \frac{1}{4\pi^2 i} \int_0^1 d\tau \int_0^{2\pi} \nu dt \int_{|\eta|=1} \frac{\Phi(\zeta_1, \zeta_2)}{\eta - u} d\eta, \quad (3)$$

где

$$u = [\tau r_{11}(\tau) + (1-\tau)r_{21}(\tau)e^{it}]z_1 + [\tau r_{12}(\tau) + (1-\tau)r_{22}(\tau)e^{it}]z_2, \\ \nu = 1 + \tau A_{12}(\tau)e^{-it} - (1-\tau)A_{21}(\tau)e^{it}.$$

Предложение 2. Если функция $f(z_1, z_2)$ голоморфна в области D и непрерывна в $D \cup \Gamma$, то для $(z_1, z_2) \in D$

$$f(z_1, z_2) = \frac{1}{4\pi^2 i} \int_0^1 d\tau \int_0^{2\pi} \nu dt \int_{|\eta|=1} \frac{\eta f(\zeta_1, \zeta_2)}{(\eta - u)^2} d\eta. \quad (4)$$

Замечание 1. В специальном частном случае, когда область $D \subset C^2$ есть ограниченная выпуклая полная двоякокруговая область типа (T) (т.е. участвующие в параметризации D функции $R_{12}(\tau) \equiv R_{21}(\tau) \equiv 0$, $R_{11}(\tau) = r_1(\tau)$, $R_{22}(\tau) = r_2(\tau)$, где $r_1(\tau)$ и $r_2(\tau)$ - функции Темлякова (см., напр., [3]-[5]), причем $0 < r'_1(\tau) \leq r_1(\tau)/\tau$; такие области называют еще областями Темлякова) формулы (3) и (4) совпадают с, соответственно, интегралами Темлякова I и II рода (несложно показать, что в этом случае $u = \tau z_1/r_1(\tau) + (1-\tau)z_2 e^{it}/r_2(\tau)$, $\nu \equiv 1$). Поэтому мы, естественно, будем называть содержимое предложений 1 и 2 аналогами интегральных представлений Темлякова соответственно I и II рода для круговых областей $D \subset C^2$ класса Λ .

3. Аналоги интегралов типа Темлякова. Для последующих рассуждений нам надо ввести понятие аналогов интегралов типа Темлякова для круговых областей класса Λ (понятие обычных интегралов типа Темлякова впервые было введено в [6]). Функцию $\varphi(\tau, t, \eta)$, определенную и непрерывную по совокупности аргументов на множестве $\{(\tau, t, \eta): 0 \leq \tau \leq 1, 0 \leq t \leq 2\pi, |\eta| = 1\}$ будем называть функцией класса γ (кратко: $\varphi(\tau, t, \eta) \in \gamma$), если по комплексному переменному η она удовлетворяет условию $Lip \nu$, т.е. $|\varphi(\tau, t, \eta) - \varphi(\tau, t, \eta_0)| < K|\eta - \eta_0|^\nu$, где константы $K > 0$ и ν ($0 < \nu \leq 1$) не зависят от τ и t .

Определение 1. Интеграл, образуемый из интеграла (3) (интеграла (4)) при замене в нем $\Phi(\zeta_1, \zeta_2)$ ($f(\zeta_1, \zeta_2)$) на функцию $\varphi(\tau, t, \eta) \in \gamma$, будем называть аналогом интеграла типа Темлякова I (II) рода с круговой определяющей областью $D \subset C^2$ класса Λ .

Отметим некоторые свойства аналога интеграла типа Темлякова I рода

$$F(z_1, z_2) = \frac{1}{4\pi^2 i} \int_0^1 d\tau \int_0^{2\pi} \nu dt \int_{|\eta|=1} \frac{\varphi(\tau, t, \eta)}{\eta - u} d\eta. \quad (5)$$

Предложение 3. Интеграл (5) представляет собой функцию, голоморфную в области D и непрерывную в замкнутой области \bar{D} за исключением, быть может, особого случая, когда область D принадлежит семейству гиперконусов $\{(z_1, z_2) \in C^2 : a|z_1| + b|z_2| < 1, a > 0, b > 0\}$, для которых непрерывность интеграла (5) не имеет, вообще говоря, места на множествах $\{(z_1, z_2) \in C^2 : |z_1| = 1/a, z_2 = 0\}$ и $\{(z_1, z_2) \in C^2 : z_1 = 0, |z_2| = 1/b\}$.

Доказательство предложения базируется на том факте, что если точка $(z_1, z_2) \in D$, то $|u| < 1$, а если $(z_1, z_2) \in \bar{D}$, то $|u| \leq 1$. Действительно, согласно теореме И.И.Привалова ([8], стр. 180-186) интеграл $\frac{1}{2\pi i} \int_{|\eta|=1} \frac{\varphi(\tau, t, \eta)}{\eta - u} d\eta \equiv \Psi(\tau, t, u) \equiv \tilde{\Psi}(\tau, t, z_1, z_2)$ представляет собой функцию, голоморфную по u в круге $|u| < 1$ и непрерывную в замкнутом круге $|u| \leq 1$ для всех τ и t . Следовательно, при всех τ и t функция $\tilde{\Psi}(\tau, t, z_1, z_2)$ голоморфна в D и непрерывна в \bar{D} . Кроме того, $\tilde{\Psi}(\tau, t, z_1, z_2)$ непрерывна по τ и t при $(z_1, z_2) \in D$. Поэтому для $(z_1, z_2) \in D$ имеем

$$F(z_1, z_2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 d\tau \int_0^{2\pi} \nu \cdot \tilde{\Psi}(\tau, t, z_1, z_2) dt,$$

откуда и из непрерывности $\nu = \nu(\tau, t)$ следует, что функция $F(z_1, z_2)$ голоморфна в D .

Докажем второе утверждение предложения (сразу же выведем из рассмотрения указанный особый случай – он был подробно изучен [7] еще при исследовании интегралов типа Темлякова). Обозначим $\tilde{\Psi}_i(\tau, t, \zeta_1^0, \zeta_2^0) \equiv \Psi_i(\tau, t, \eta_0)$ – предельные граничные значения $\Psi(\tau, t, u)$ на окружности $|\eta| = 1$ при стремлении $u \rightarrow \eta_0$ изнутри круга. Вновь обращаясь к теореме И.И.Привалова, получим:

$$\Psi_i(\tau, t, \eta_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\eta|=1} \frac{\varphi(\tau, t, \eta)}{\eta - u} d\eta + \frac{1}{2} \varphi(\tau, t, \eta_0). \quad (6)$$

Интеграл здесь определен как особый – в смысле главного значения по Коши. Далее, из того условия, что $\varphi(\tau, t, \eta)$ удовлетворяет условию $Lip \nu$ не зависящему от τ и t ,

вытекает, что этот интеграл равномерно ограничен при всех τ, t, η_0 . Ограниченным является и второе слагаемое в правой части формулы (6) (ограниченность $\varphi(\tau, t, \eta)$ следует из ее непрерывности по совокупности переменных). Следовательно, $\Psi_i(\tau, t, \eta_0)$ ограничена при $0 \leq \tau \leq 1, 0 \leq t \leq 2\pi, |\eta| = 1$. На основании принципа максимума модуля функция $\Psi(\tau, t, u)$ равномерно ограничена в $|u| \leq 1$ при всех τ и t . Пусть точка $(\zeta_1^0, \zeta_2^0) \in \Gamma$ и $F_i(\zeta_1^0, \zeta_2^0) = \lim_{\substack{(z_1, z_2) \rightarrow (\zeta_1^0, \zeta_2^0) \\ (z_1, z_2) \in D}} F(z_1, z_2)$. Воспользовавшись возможностью предельного перехода под знаком интеграла в случае ограниченных функций, получаем формулу:

$$F_i(\zeta_1^0, \zeta_2^0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 d\tau \int_0^{2\pi} \nu \tilde{\Psi}(\tau, t, \zeta_1^0, \zeta_2^0) dt,$$

из которой и следует непрерывность $F(z_1, z_2)$ в \bar{D} .

Замечание 2. Можно доказать голоморфность интеграла (5) в области D и при более общих предположениях относительно его плотности $\varphi(\tau, t, \eta)$. Именно, если $\varphi(\tau, t, \eta)$ есть произвольная суммируемая на множестве $\{0 \leq \tau \leq 1, 0 \leq t \leq 2\pi, |\eta| = 1\}$ функция (интеграл в этом случае понимается в смысле Лебега).

Замечание 3. Все отмеченные свойства интеграла (5) справедливы и для аналога интеграла типа Темлякова II рода.

4. Краткое обсуждение. Интегральная формула (3) дает, фактически, решение следующей краевой задачи: дано линейное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка (2). Требуется найти решение этого уравнения в круговой области D по заданному на гиперповерхности Γ граничному условию $\Phi(z_1, z_2)|_{\Gamma} = \Phi(\zeta_1, \zeta_2)$. Причем, из изложенного выше следует, что гарантией существования искомого решения $f(z_1, z_2)$ является то, чтобы функция $\Phi(z_1, z_2)$ была голоморфна в D , непрерывна в \bar{D} , а на Γ , как функция параметров (τ, t, η) , удовлетворяла по η условию $Lip \nu$ ($0 < \nu \leq 1$), независимому от τ и t .

Оказывается, на основе интегрального представления (3) возможно решать аналогичные краевые задачи для более общих дифференциальных уравнений в частных производных, причем не только первого, но и более высоких (в частности второго) порядков. Иными словами, с помощью формулы (3) выводятся интегральные формулы, определяющие значения функции $f(z_1, z_2)$ в области D , если известно поведение на Γ линейного дифференциального оператора первого порядка

$$a(z_1, z_2)[z_1 f'_{z_1}(z_1, z_2) + z_2 f'_{z_2}(z_1, z_2)] + b(z_1, z_2)f(z_1, z_2) \equiv \lambda_1[f(z_1, z_2)],$$

или – оператора второго порядка

$$a(z_1, z_2)[z_1^2 f''_{z_1^2}(z_1, z_2) + 2z_1 z_2 f''_{z_1 z_2}(z_1, z_2) + z_2^2 f''_{z_2^2}(z_1, z_2)] + b(z_1, z_2)[z_1 f'_{z_1}(z_1, z_2) + z_2 f'_{z_2}(z_1, z_2)] + c(z_1, z_2)f(z_1, z_2) \equiv \lambda_2[f(z_1, z_2)],$$

где $a(z_1, z_2)$, $b(z_1, z_2)$, $c(z_1, z_2)$ - голоморфные в \bar{D} функции.

Заметим, что уравнение в частных производных второго порядка $\lambda_2[f(z_1, z_2)] = 0$ включает в себя обыкновенное дифференциальное уравнение

$$z^2 f''(z) + p(z)zf'(z) + q(z)f(z) = 0,$$

имеющее в точке $z = 0$ регулярную особую точку, если $p(z)$, $q(z)$ - голоморфные функции в точке $z = 0$. В связи с этим будем говорить, что плоскости $z_1 = 0$, $z_2 = 0$ являются особыми плоскостями уравнения $\lambda_2[f(z_1, z_2)] = 0$, если $a(0,0) \neq 0$.

5. Краевая задача I. Пусть известно поведение на гиперповерхности Γ дифференциального оператора $\lambda_1[f(z_1, z_2)] = \Phi(z_1, z_2)$, т.е. задано граничное условие $\Phi(z_1, z_2)|_{\Gamma} = \Phi(\zeta_1, \zeta_2)$. Требуется найти по этим данным формулу, определяющую значения голоморфной функции $f(z_1, z_2)$ в D .

Определим с этой целью функции $\varphi_1(z_1, z_2)$ и $\varphi_2(z_1, z_2)$, удовлетворяющие условию:

$$\varphi_2(z_1, z_2)L[\varphi_1(z_1, z_2)f(z_1, z_2)] \equiv a(z_1, z_2)[z_1 f'_{z_1}(z_1, z_2) + z_2 f'_{z_2}(z_1, z_2)] + b(z_1, z_2)f(z_1, z_2),$$

или, что эквивалентно, системе двух уравнений:

$$\varphi_1(z_1, z_2)\varphi_2(z_1, z_2) = a(z_1, z_2), \quad \varphi_2(z_1, z_2)L[\varphi_1(z_1, z_2)] = b(z_1, z_2),$$

из которой следует:

$$L[\varphi_1(z_1, z_2)] = \frac{b(z_1, z_2)}{\varphi_2(z_1, z_2)} = \frac{b(z_1, z_2)}{a(z_1, z_2)}\varphi_1(z_1, z_2).$$

Рассмотрим линейное уравнение в частных производных первого порядка:

$$L[\varphi_1(z_1, z_2)] = \varphi_1(z_1, z_2)b(z_1, z_2)/a(z_1, z_2)$$

и возьмем какое-нибудь его частное решение $\varphi_1(z_1, z_2)$. Зная $\varphi_1(z_1, z_2)$, найдем соответствующую функцию $\varphi_2(z_1, z_2)$: $\varphi_2(z_1, z_2) = a(z_1, z_2)/\varphi_1(z_1, z_2)$. Теперь поставленная задача I свелась к следующей краевой задаче: задано граничное условие $\varphi_2(z_1, z_2)L[\varphi_1(z_1, z_2)f(z_1, z_2)]|_{\Gamma} = \Phi(\zeta_1, \zeta_2)$, причем произведение $\varphi_1(z_1, z_2)f(z_1, z_2)$ голоморфно в D и $L[\varphi_1(z_1, z_2)f(z_1, z_2)]$ непрерывно в \bar{D} . Требуется восстановить функцию $f(z_1, z_2)$ в области D .

Применяя формулу (1) к функции $\varphi_1(z_1, z_2)f(z_1, z_2)$, будем иметь

$$\begin{aligned} \varphi_1(z_1, z_2)f(z_1, z_2) &= \frac{1}{4\pi^2 i} \int_0^1 d\tau \int_0^{2\pi} \nu dt \int_{|\eta|=1} \frac{L[\varphi_1(\zeta_1, \zeta_2)f(\zeta_1, \zeta_2)]}{\eta - u} d\eta = \\ &= \frac{1}{4\pi^2 i} \int_0^1 d\tau \int_0^{2\pi} \nu dt \int_{|\eta|=1} \frac{\Phi(\zeta_1, \zeta_2)}{\varphi_2(\zeta_1, \zeta_2)(\eta - u)} d\eta = \frac{1}{4\pi^2 i} \int_0^1 d\tau \int_0^{2\pi} \nu dt \int_{|\eta|=1} \frac{\varphi_1(\zeta_1, \zeta_2)\Phi(\zeta_1, \zeta_2)}{a(\zeta_1, \zeta_2)(\eta - u)} d\eta \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$f(z_1, z_2) = \frac{1}{4\pi^2 i} \int_0^1 d\tau \int_0^{2\pi} \nu dt \int_{|\eta|=1} \frac{\varphi_1(\zeta_1, \zeta_2)}{\varphi_1(z_1, z_2)} \cdot \frac{\Phi(\zeta_1, \zeta_2)}{a(\zeta_1, \zeta_2)(\eta - u)} d\eta. \quad (7)$$

Здесь $(z_1, z_2) \in D \setminus P$, $P = \{(z_1, z_2) \in D, \varphi_1(z_1, z_2) = 0\}$.

Формула (7) с учетом результатов п. 3 показывает, что искомое решение $f(z_1, z_2)$ уравнения $\lambda_1[f(z_1, z_2)] = \Phi(z_1, z_2)$ существует в области D в том случае, если $\Phi(\zeta_1, \zeta_2)$ - граничные значения такой функции $\Phi(z_1, z_2)$, что функция $\varphi_1(z_1, z_2)\Phi(z_1, z_2)/a(z_1, z_2)$ голоморфна в D , непрерывна в $D \cup \Gamma$ и $\varphi_1(\zeta_1, \zeta_2)\Phi(\zeta_1, \zeta_2)/a(\zeta_1, \zeta_2) \equiv \Psi_1(\tau, t, \eta) \in \gamma$.

6. Краевая задача II. Дано дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка $\lambda_2[f(z_1, z_2)] = \Phi(z_1, z_2)$ с заданным граничным условием $\Phi(z_1, z_2)|_{\Gamma} = \Phi(\zeta_1, \zeta_2)$. Требуется найти решение этого уравнения в области D , т.е. восстановить голоморфную в D функцию $f(z_1, z_2)$.

При решении поставленной задачи будем следовать тому же методу, что и при решении задачи I, т.е., в конечном итоге, вновь воспользуемся интегральным представлением (3). Именно, определим функции $\varphi_1(z_1, z_2)$, $\varphi_2(z_1, z_2)$ и $\varphi_3(z_1, z_2)$, удовлетворяющие условию:

$$\varphi_3(z_1, z_2)L[\varphi_2(z_1, z_2)L[\varphi_1(z_1, z_2)f(z_1, z_2)]] \equiv a(z_1, z_2)\left[z_1^2 f''_{z_1^2}(z_1, z_2) + 2z_1 z_2 f''_{z_1 z_2}(z_1, z_2) + z_2^2 f''_{z_2^2}(z_1, z_2)\right] + b(z_1, z_2)\left[z_1 f'_{z_1}(z_1, z_2) + z_2 f'_{z_2}(z_1, z_2)\right] + c(z_1, z_2)f(z_1, z_2)$$

или, что эквивалентно, системе трех уравнений:

$$\begin{aligned} \varphi_1(z_1, z_2)\varphi_2(z_1, z_2)\varphi_3(z_1, z_2) &= a(z_1, z_2), \\ \varphi_3(z_1, z_2)\{L[\varphi_1(z_1, z_2)\varphi_2(z_1, z_2)] + \varphi_2(z_1, z_2)L[\varphi_1(z_1, z_2)]\} &= b(z_1, z_2), \\ \varphi_3(z_1, z_2)L[\varphi_2(z_1, z_2)L[\varphi_1(z_1, z_2)]] &= c(z_1, z_2). \end{aligned}$$

Представим эту систему в виде:

$$\begin{aligned} \varphi_3(z_1, z_2) &= a(z_1, z_2)/(\varphi_1(z_1, z_2)\varphi_2(z_1, z_2)), \\ L[\varphi_1(z_1, z_2)\varphi_2(z_1, z_2)] + \varphi_2(z_1, z_2)L[\varphi_1(z_1, z_2)] &= A(z_1, z_2)\varphi_1(z_1, z_2) + B(z_1, z_2), \\ L[\varphi_2(z_1, z_2)L[\varphi_1(z_1, z_2)]] &= B(z_1, z_2)\varphi_1(z_1, z_2)\varphi_2(z_1, z_2), \end{aligned}$$

где $A(z_1, z_2) = b(z_1, z_2)/a(z_1, z_2)$, $B(z_1, z_2) = c(z_1, z_2)/a(z_1, z_2)$.

Выражая из второго уравнения

$$\varphi_2(z_1, z_2)L[\varphi_1(z_1, z_2)] = A(z_1, z_2)\varphi_1(z_1, z_2)\varphi_2(z_1, z_2) - L[\varphi_1(z_1, z_2)\varphi_2(z_1, z_2)]$$

и, производя подстановку, в третье, получим:

$$L[A(z_1, z_2)\varphi_1(z_1, z_2)\varphi_2(z_1, z_2) - L[\varphi_1(z_1, z_2)\varphi_2(z_1, z_2)]] = B(z_1, z_2)\varphi_1(z_1, z_2)\varphi_2(z_1, z_2)$$

или, что то же самое,

$$L[A(z_1, z_2)\varphi(z_1, z_2) - L[\varphi(z_1, z_2)]] = B(z_1, z_2)\varphi(z_1, z_2),$$

где обозначено $\varphi(z_1, z_2) = \varphi_1(z_1, z_2)\varphi_2(z_1, z_2)$. Отсюда, в силу линейности оператора L ,

$$L[A(z_1, z_2)\varphi_1(z_1, z_2)] - L[L[\varphi(z_1, z_2)]] = B(z_1, z_2)\varphi(z_1, z_2).$$

Далее, используя тождество:

$$L[A(z_1, z_2)\varphi(z_1, z_2)] = L[A(z_1, z_2)]\varphi(z_1, z_2) + A(z_1, z_2)L[\varphi(z_1, z_2)] - A(z_1, z_2)\varphi(z_1, z_2),$$

имеем:

$$L[L[\varphi(z_1, z_2)]] - A(z_1, z_2)L[\varphi(z_1, z_2)] + \{A(z_1, z_2) + B(z_1, z_2) - L[A(z_1, z_2)]\}\varphi(z_1, z_2) = 0.$$

Приводя это уравнение к явной форме, получим

$$z_1^2 \varphi_{z_1^2}''(z_1, z_2) + 2z_1 z_2 f_{z_1 z_2}''(z_1, z_2) + z_2^2 \varphi_{z_2^2}''(z_1, z_2) + p(z_1, z_2)(z_1 \varphi_{z_1}'(z_1, z_2) + z_2 \varphi_{z_2}'(z_1, z_2)) + q(z_1, z_2)\varphi(z_1, z_2) = 0, \quad (8)$$

где $p(z_1, z_2) = 2 - A(z_1, z_2)$, $q(z_1, z_2) = B(z_1, z_2) - L[A(z_1, z_2)] - 1$.

Теперь нужно найти частное решение однородного уравнения в частных производных второго порядка (8). Для этого можно, например, воспользоваться способом, примененным в [4] для нахождения частного решения уравнения (8) в полных двоякокруговых областях. Там, естественно, решение искалось в виде некоторого обобщенного двойного степенного ряда. В нашем случае рассматриваются полные круговые области D с центром в нуле, являющиеся областями сходимости диагональных рядов. С учетом этого, будем рассуждать следующим образом: Пусть функции $p(z_1, z_2)$ и $q(z_1, z_2)$ голоморфны в области D и представимы в ней диагональным рядами:

$$p(z_1, z_2) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^m a_{m-n,n} z_1^{m-n} z_2^n \right), \quad q(z_1, z_2) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^m b_{m-n,n} z_1^{m-n} z_2^n \right).$$

Решение будем искать в виде обобщенного диагонального ряда:

$$\varphi(z_1, z_2) = z_1^{\rho_1 - \rho_2} z_2^{\rho_2} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^m \alpha_{m-n,n} z_1^{m-n} z_2^n \right) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^m \alpha_{m-n,n} z_1^{m+\rho_1-n-\rho_2} z_2^{n+\rho_2} \right), \quad (9)$$

где ρ_1 и ρ_2 - константы, которые нужно определить; коэффициент α_{00} считается отличным от нуля.

Далее, производя выкладки, аналогичные соответствующим выкладкам из работы [4], найдем частное решение уравнения (8) $\varphi(z_1, z_2)$ в виде ряда (9) (т.е. будем уметь определять числа ρ_1, ρ_2 и коэффициенты $\alpha_{m-n,n}$ через коэффициенты входящих в уравнение (8) функций $p(z_1, z_2)$ и $q(z_1, z_2)$).

Отсюда, принимая во внимание, что

$$\varphi(z_1, z_2) = \varphi_1(z_1, z_2)\varphi_2(z_1, z_2)$$

и

$$L[\varphi_1(z_1, z_2)\varphi_2(z_1, z_2)] + \varphi_2(z_1, z_2)L[\varphi_1(z_1, z_2)] = A(z_1, z_2)\varphi_1(z_1, z_2)\varphi_2(z_1, z_2),$$

получаем:

$$\varphi_2(z_1, z_2) = \varphi(z_1, z_2) / \varphi_1(z_1, z_2),$$

$$L[\varphi_1(z_1, z_2)]\varphi(z_1, z_2) / \varphi_1(z_1, z_2) = A(z_1, z_2)\varphi(z_1, z_2) - L[\varphi(z_1, z_2)].$$

Определив из последнего уравнения $\varphi_1(z_1, z_2)$ (взяв какое-нибудь его частное решение), находим затем:

$$\varphi_2(z_1, z_2) = \varphi(z_1, z_2) / \varphi_1(z_1, z_2) \text{ и } \varphi_3(z_1, z_2) = a(z_1, z_2) / \varphi(z_1, z_2).$$

Таким образом, поставленная краевая задача свелась теперь к следующей задаче: требуется найти голоморфную в области D функцию $f(z_1, z_2)$, если произведение $\varphi_2(z_1, z_2)L[\varphi_1(z_1, z_2)f(z_1, z_2)]$ аналитично в D , функция $L[\varphi_2(z_1, z_2)L[\varphi_1(z_1, z_2)f(z_1, z_2)]]$ непрерывна в \bar{D} и известно граничное значение $\varphi_3(z_1, z_2)L[\varphi_2(z_1, z_2)L[\varphi_1(z_1, z_2)f(z_1, z_2)]]|_{\Gamma} = \Phi(\zeta_1, \zeta_2)$.

Решение этой краевой задачи получаем двукратным применением интегрального представления (3). Сначала находим

$$f_1(z_1, z_2) = \varphi_2(z_1, z_2)L[\varphi_1(z_1, z_2)f(z_1, z_2)] = \frac{1}{4\pi^2 i} \int_0^1 d\tau \int_0^{2\pi} \int_{|\eta|=1} \nu dt \int \frac{\varphi(\zeta_1, \zeta_2)\Phi(\zeta_1, \zeta_2)}{a(\zeta_1, \zeta_2)(\eta - u)} d\eta,$$

затем, используя полученный результат, определяем

$$\varphi_1(z_1, z_2)f(z_1, z_2) = \frac{1}{4\pi^2 i} \int_0^1 d\tau \int_0^{2\pi} \int_{|\eta|=1} \nu dt \int \frac{\varphi_1(\zeta_1, \zeta_2)f_1(\zeta_1, \zeta_2)}{\varphi(\zeta_1, \zeta_2)(\eta - u)} d\eta,$$

откуда и выражаем искомое решение:

$$f(z_1, z_2) = \frac{1}{4\pi^2 i} \int_0^1 d\tau \int_0^{2\pi} \int_{|\eta|=1} \nu dt \int \frac{\varphi_1(\zeta_1, \zeta_2)f_1(\zeta_1, \zeta_2)d\eta}{\varphi_1(z_1, z_2)\varphi(\zeta_1, \zeta_2)(\eta - u)},$$

где $(z_1, z_2) \in D \setminus P$, $P = \{(z_1, z_2) \in D, \varphi_1(z_1, z_2) = 0\}$.

Полученные формулы показывают, что искомое решение $f(z_1, z_2)$ в области D существует в том случае, если $\Phi(\zeta_1, \zeta_2)$ есть граничные значения такой функции $\Phi(z_1, z_2)$, что функции $\varphi(z_1, z_2)\Phi(z_1, z_2)/a(z_1, z_2)$ и $\varphi_1(z_1, z_2)f_1(z_1, z_2)/\varphi(z_1, z_2)$ голоморфны в области D , непрерывны в \bar{D} , а на гиперповерхности Γ (как функции параметров τ, t, η) принадлежат классу γ .

ЛИТЕРАТУРА

1. Нелаев А.В. Интегральные представления и порождаемые ими классы квазианалитических функций // Вестник МПУ. Серия «математика-физика». М.: Изд. МПУ. – 1998, №3-4. – С. 16-28.
2. Нелаев А.В. К теории интегральных представлений в C^n // Вестник МГОУ. Серия «физика-математика». М.: Изд. МГОУ. – 2005, №7. – С.102-128.
3. Темляков А.А. Интегральные представления функций двух комплексных переменных // Докл. АН СССР. – 1958. – Т. 120, №5. – С. 976-979.
4. Темляков А.А. Краевые задачи для уравнений с особыми плоскостями // Учен. зап. МОПИ. М. – 1959. – Т. 77. – С. 91-98.
5. Баврин И.И. Операторный метод в комплексном анализе. – М.: Изд. МПГУ «Прометей», 1991. – 200с.
6. Айзенберг Л.А. Об интегралах Темлякова и граничных свойствах аналитических функций двух комплексных переменных // Докл. АН СССР. – 1958. – Т. 120, №5. – С. 935-938.
7. Айзенберг Л.А. Об интегралах Темлякова и граничных свойствах аналитических функций многих комплексных переменных // Учен. зап. МОПИ. М. – 1959. – Т. 77. – С. 13-35.
8. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. – М.: Гостехиздат, 1954.

УДК 519.6

ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ. ПУТЬ К ОПТИМУМУ

Н.А. Семенов

*Московский государственный областной университет (МГОУ)
105005, Москва, ул. Радио, 10а*

Разработан алгоритм, осуществляющий численное интегрирование с заданной точностью за минимальное время. Применен метод Симпсона с последовательным удвоением числа шагов. Оптимизированы выражения для критерия Рунге для правильного определения достигнутой точности и наилучшей корректировки значения результата.

Целью работы является получение метода численного вычисления определенного интеграла, обеспечивающего заданную точность при минимальном времени счёта и не требующего какой либо настройки на конкретный интеграл; то есть работающего по принципу Plug and Play. Отправной точкой послужили методы Симпсона и трапеций с равновеликими шагами и критерием Рунге для апостериорной оценки достигнутой точности и корректировки величины интегральной суммы. [1], [2]. Предполагается,

что интеграл собственный с обычными ограничениями на вид подынтегральной функции.

Метод исследования экспериментальный. Для каждого этапа создавались комплексы экспертных программ, позволяющих наблюдать ход интегрирования и определять нужные параметры. Испытуемыми объектами служили 15 произвольно выбранных интегралов разных типов, точное решение которых известно. Предыдущие результаты работы опубликованы в статьях [3].

Обозначены: подынтегральная функция $F(x)$, пределы интегрирования a и b , интегральная сумма при N шагах S_N ; она включает сумму всех нечётных ординат V_N и модифицированную сумму чётных ординат W_N , у которой первая и последняя ордината имеют вес 0,5.

Применена процедура с последовательным удвоением числа шагов N в каждом следующем цикле интегрирования $N=2^{LN}$, где LN - номер цикла. Это позволяет в каждом новом цикле использовать вычисленную ранее сумму ординат и тем самым экономит время счёта вдвое. Процесс интегрирования начинаем с $N=2$, что обеспечивает единство алгоритма для всех итераций и, в принципе, позволяет завершить процесс уже при $N=4$. Чтобы избежать досрочного ошибочного выхода из процесса при некоторых периодических подынтегральных функциях, наложен запрет на его окончание при $S=0$. Критерий Рунге R_N , его относительное значение DR_N и скорректированное значение интеграла I_N при N шагах:

$$R_N = (S_N - S_{N/2}) / L; \quad DR_N = R_N / S_N; \quad I_N = S_N + R_N. \quad (1)$$

Если задана относительная погрешность метода $Del=10^{-JD}$ то при выполнении условия $|DR_N| \leq Del$ процесс завершается. При $N=2$ $W=[F(a)+F(b)]/2$, а $V=F(x_1)$; $x_1=(a+b)/2$. В последующих итерациях $W_N=W_{N/2}+V_{N/2}$, а вновь вычисляются и суммируются только нечётные ординаты $V_N=F(x_1)+F(x_3)+...+F(x_{N-1})$. Для метода трапеций $S_N=H(W_N+V_N)$, $L=3$. Для метода Симпсона $S_N=2H(W_N+2V_N)/3$, $L=15$. Шаг интегрирования $H=|b-a|/N$.

Этап 1. Проверка корректности работы критерия Рунге DR_N показала, что во многих случаях он неверно определяет момент завершения процесса: чаще с опозданием, тогда время счёта и точность результата избыточно велики; но иногда, наоборот, преждевременно, когда нужная точность еще не достигнута.

Улучшение 1. Замена критерия Рунге на аналогичный критерий DS , основанный на сравнении скорректированных значений интеграла в последовательных итерациях I_N и $I_{N/2}$:

$$DS_N = (I_N - I_{N/2}) / (L I_N). \quad (2)$$

Этап 2. Сравнительный анализ четырёх возможных вариантов интегрирования: методов трапеций и Симпсона, с критериями DR и DS при заданной относительной погрешностью $Del=10^{-12}$. Результаты интегрирования сравнивались с истинными значениями. Установлено следующее.

1. Для достижения заданной точности метод трапеций требовал в среднем двух лишних циклов интегрирования по сравнению с методом Симпсона. Конкретнее, из пятнадцати интегралов один вычислялся на один цикл быстрее, четыре - одинаково, остальные медленнее: один - на один цикл, восемь - на 2..3 и один - на 9 циклов.

2. При методе Симпсона для достижения результата с заданной погрешностью для разных интегралов потребовалось от 2 до 26 циклов, от 4 до $6.71 \cdot 10^7$ шагов. Следовательно рекомендуемое некоторыми авторами априорное задание числа N «на глазок» совершенно неуместно. Время счёта пропорционально числу шагов в завершающем цикле. Поэтому особенно важна правильная диагностика для интегралов, требующих для расчета большого числа циклов.

3. Для метода трапеций критерий DS в 8-ми случаях диагностировал точно и в 7-ми случаях предписал выполнение одного лишнего цикла. Критерий DR только в 3-х случаях диагностировал точно, в 2-х потребовал 1 лишний цикл, в одном 4 цикла и в 9-ти 9..12 излишних циклов.

4. Для метода Симпсона критерий DS вел себя аналогично: 6 точных диагнозов, 6 с одним лишним циклом, но в 3-х случаях недобор 1..2 циклов, приводящий к превышению погрешности. Для критерия DR : 3 точных, 1 с лишним циклом и 8 случаев перебора на 2..3 цикла; снова в тех же 3-х интегралах недобор на 1..2 цикла (эти интегралы требовали для решения 16..26 циклов).

Стало очевидным преимущество метода Симпсона с критерием DS по сравнению с другими способами. В 12-ти случаях из 15 он обеспечил получение заданной погрешности, хотя в 6-ти из них с превышением числа циклов. Однако в 3-х случаях он со своей задачей не справился. Таким образом, введенный нами критерий DS для управления процессом численного интегрирования экспериментально показал лучшую точность диагноза необходимого числа циклов. В большинстве случаев для метода Симпсона он сокращает время счёта в 4..8 раз по сравнению с критерием DR . Для метода трапеций это различие достигает 2048 кратности. Метод трапеций, как менее эффективный во всех случаях, из дальнейшего рассмотрения исключим.

Время счёта T является важным критерием совершенства алгоритма. При принятой процедуре оно пропорционально числу шагов в последнем цикле N , которое связано с числом необходимых циклов LN соотношением $N = 2^{LN}$. По оси времени T все рассмотренные интегралы разместились в трех компактных группах, им даны соответствующие названия. «Легкие» интегралы требуют для вычисления с точностью $Del=10^{-12}$ от 2 до 8 циклов, «тяжёлые» – 25..26 циклов и «средние» – 15..16 циклов. В соответствии с этим считаем, что каждому интегралу присуща определенная «тяжесть». В качестве численной характеристикой тяжести интеграла введем величину «Нормированное число циклов»:

$$CN = 14 LN / JD, \quad (3)$$

которую определяем при завершении процесса интегрирования.

Рассмотрение графиков подынтегральных функций показывает, что у «тяжёлых» интегралов хотя бы на одном из пределов наблюдается быстрый рост функции от нулевого уровня, в пределе первая производная стремится к бесконечности; у средних - график также начинается с нуля, но крутизна не бесконечна, хотя и не близка к нулю.

Этап 3. Анализ процесса интегрирования показал, что неточность диагноза объясняется тем, что для многих интегралов постоянный коэффициент $L=15$ в формуле (2) не оптимален. В действительности оптимальная величина этого коэффициента зависит как от требуемой точности Del , так и «тяжести» интеграла.

Улучшение 2. Замена константы в формуле (2) функцией $CS(LN, Del)$:

$$DS_N = (I_N - I_{N/2}) / (I_N \cdot CS(LN, Del)). \quad (4)$$

Новая экспертная программа определила нужные значения CS для точного завершения процесса интегрирования пятнадцати ранее выбранных интегралов при $Del=10^{-JD}$, где $JD = 6, 8, 10, 12, 14$. Интересно, что для различных интегралов результаты совпали с точностью до 3..4 знаков. В то же время для всего массива данных (75 точек) разброс значителен. Обнаружено качественное различие в функциональной зависимости CS от аргументов Del и LN для легких и тяжелых интегралов. Для легких функция CS зависит прежде всего от Del , а различие LN обуславливает лишь некоторый разброс значений; у тяжелых ситуация иная. Конечно, с увеличением требуемой точности число циклов LN растет, но оптимальное значение CS для данного интеграла почти одинаково, независимо от Del .

У «легких» $CN < 10$; у «тяжелых» $CN > 14$; между ними имеется нейтральная полоса, до которой «легкие» интегралы не доходят, вычисляются раньше, а тяжелые - «заведомо» её переходят. Нормированное число циклов CN является единственным аргументом функции CS для тяжелых интегралов.

Оптимальное значение функции CS определяется следующими условиями. Она должна обеспечивать правильный ответ на вопрос: «Продолжать ли процесс интегрирования?» в двух случаях. «ДА» - при завершении предпоследнего цикла; для этого $|DSP|/Del > 1$, где DSP -значение DS на предпоследнем цикле. «НЕТ» - при завершении последнего цикла, когда достигнута нужная точность и $|DS|/Del \leq 1$. Для этого значение DS и соответствующая величина CS должны удовлетворять обоим неравенствам одновременно. Экспертная программа определила для всех вариантов два множества точек CS , ограничивающих область существования оптимальной функции сверху (для DSP) и снизу (для DS).

Для построения этой функции применён графический компьютерный метод: две разные программы для легких и тяжелых интегралов. Первоначально наносились точки, ограничивающие фарватер оптимальной кривой сверху и снизу; из всего массива значений выбирались только пограничные. Затем был выбран вид функции и подобраны её параметры. Для «тяжелых» ($CN > 14$) фарватер оказался очень узким, но удалось пройти по нему одной плавной функцией. Для легких интегралов фарватер достаточно широк, но при $JD=8$ произошла инверсия: одна из «верхних» точек получилась на уровне 17.35, намного ниже «нижней» (45.14). Оба условия выполнить невозможно; мы предпочли в данном случае возможный перебор точности: разрешение лишнего цикла для некоторых вариантов при $JD=6..8$. Кривая оптимальной функции получилась «склеенной» из трёх частей, явно неэстетичной

$$CS(JD) = \text{Min}(75, \text{Max} \{17, 75[1 - 0.025(11.3 - JD)^3] \}) \quad \text{при } CN \leq 14; \quad (5)$$

$$CS(CN) = 1 + 7.2 \exp(-0.14(CN - 14)) \quad \text{при } CN > 14.$$

Этап 4. Результаты испытаний алгоритма интегрирования с критерием DS по (4), (5) для всех 75 вариантов. Два «легких» интеграла ведут себя своеобразно. Один из них, содержащий полином 5 степени, определяется абсолютно точно уже при $LN=2, N=4$; критерий DS не успевал и останавливал работу только на следующем цикле $LN=3$. Другой интеграл, вычисляющий функцию Бесселя, содержит периодическую функ-

цию; после $LN=4$ точность вычислений возрастает лавинообразно: в каждом из двух последующих циклов более чем в 10^7 раз. Критерий DS в 4/5 случаев допустил один лишний цикл. Для остальных 9 «легких» интегралов перебор точности на один цикл наблюдался только при $JD=6$ и 8 (8 случаев из 18). При $JD=12$ и 14 остановка работы всегда происходила точно. Для четырех «тяжелых» интегралов критерий DS работал безукоризненно во всех случаях. При этом общее число циклов достигало 30.

Улучшения 3. Согласно (1) критерий Рунге, помимо прогноза точности интегрирования, уточняет численное значение интеграла, внося поправку в величину интегральной суммы. Нами установлено, что критерий Рунге R в формуле (1) не всегда лучшим образом выполняет эту функцию. Для более точной корректировки константа «15» в знаменателе заменена функцией, зависящей от нормированного числа циклов CN :

$$R_N = (S_N - S_{N/2}) / CR(CN) ; \quad I_N = S_N + R_N . \quad (6)$$

Оптимальные значения функции $CR(CN)$ найдены с помощью модифицированной экспертной программы для тех же 15 интегралов. Установлено, что для «легких» интегралов критерий Рунге с коэффициентом $CR=15$ даёт превосходные результаты. Для «средних» и «тяжелых» интегралов эта классическая величина знаменателя непригодна. Определены оптимальные значения $CR(CN)$ внутри этой группы; эта функция получилась ступенчатой.

Введение R_N по формуле (6) внесло качественные изменения в ход процесса интегрирования «средней» и «тяжёлой» групп: оно существенно ускорило его вычисление. Изменились оптимальные значения функции CS , входящей в критерий DS , диагностирующий точность результата. В отличие от ранее введенной плавной функции (5), теперь оптимальна ступенчатая функция CS с высотой ступенек 21 и 2 для этих групп. Ускорение интегрирования привело к уменьшению максимального числа циклов LN и, соответственно, нормированного их числа CN . «Средняя» группа заняла участок, ограниченный сверху значением $CN=14.5$, а тяжёлая – $CN=25$. При проведении предыдущих расчётов стало понятно, что выбор функции CS (5) для «легких» интегралов неудачен. Обратились снова к графической программе и решили игнорировать единственную инверсную точку - провести прямую линию посреди фарватера допустимых значений, ограниченного всеми остальными точками.

Отмечена такая особенность. Переход CR со ступеньки на ступеньку, происходящий в процессе вычисления интеграла, искажает плавное изменение критерия DS . Поэтому противопоказано затягивать переходный процесс, например заменой ступенек плавно изменяющейся функцией. Новые значения CR и CS лучше вводить как можно раньше, сразу после выхода из области существования предыдущей группы. Для большинства легких интегралов верхняя граница теперь $CN=10.5$. В соответствии с этими соображениями установим следующие значения коэффициентов в формулах (4) и (6):

$$\begin{array}{lll} CR=15; & CS=75-3*(14-JD) & \text{при } CN < 10.5 , \\ CR=4.66; & CS=21 & \text{при } 10.5 \leq CN < 14.5 , \\ CR=1.83; & CS=2 & \text{при } CN \geq 14.5 . \end{array} \quad (7)$$

Этап 5. Контрольный расчет всех вариантов по обновленной программе. Главным и почти неожиданным результатом явилось весьма существенное сокращение времени счёта и числа циклов для «тяжёлых» интегралов. Для вычисления с точностью 10^{-14} по-

надобилось 23..24 цикла вместо прежних 30 ($N=8..17 \cdot 10^6$ вместо $1.1 \cdot 10^9$): получилась экономия времени в 64..128 раз. Для средних, соответственно, 13 циклов вместо 18.

Об эффективности диагностики можно судить по тому: что из всех 75 расчётов в 74-х достигнута заданная точность. Небольшое превышение погрешности наблюдалось только однажды: при задании $Del=10^{-8}$ получилось $Del=1,48 \cdot 10^{-8}$. В двух вариантах, с полиномом 5 степени и периодической функцией, почти всегда происходил перебор на один цикл. Интересен случай с полиномом 5-ой степени: уже после двух циклов, при 4 шагах достигается абсолютная точность (как известно, метод Симпсона вычисляет точно интегралы с полиномами до 3 степени). Понятно, что диагностика здесь запаздывает и останавливает расчёт на трех циклах. В других вариантах, тяжёлых и легких, зафиксировано 6 случаев перебора на один цикл, причём все они происходят только при малых заданных точностях $JD=6$ и 8. В 59 случаях из 75 (79%) диагностика работала безукоризненно: процесс останавливался сразу по достижении заданной точности.

Выводы. Применение метода Симпсона с видоизменёнными критериями Рунге позволило улучшить эффективность интегрирования: достижение заданной точности происходит за кратчайшее время. Итоговые формулы (7) получены из экспериментов с 15 различными интегралами при пяти значениях требуемой точности. Значения делителей в формулах Рунге, вместо привычных 15, теперь зависят от номера цикла интегрирования и заданной точности; они меняются в широком диапазоне от 1.83 до 75. Полагаем, что тестирование новых групп интегралов может привести лишь к незначительному изменению этих результатов.

Описание алгоритма. Задаются: подынтегральная функция $F(x)$, пределы интегрирования a и b , относительная погрешность метода $Del=10^{-JD}$. Начальные значения: число интервалов $N=1$; $LN=0$; $D=b-a$; сумма нечетных ординат $V=0$; сумма четных ординат $W=[F(a)+F(b)]/2$; интегральная сумма $S=0.123456789875$ (произвольное нереальное число $\langle \rangle 0$); скорректированное значение интеграла $I=S$.

Вход в цикл: $N=2*N$; $Incr LN$; $H=D/N$; $W=W+V$; $V=0$; предыдущие значения $SP=S$, $IP=I$; $CN=LN*14/JD$; $V=$ сумме нечетных ординат; CR и CS по формулам (7); $S=2*H*(W+2*V)/3$; $R=(S-SP)/CR$; $I=S+R$; $DS=Abs((I-IP)/(I*CS))$.

Выход из цикла при $DS \leq Del$ and $S \langle \rangle 0$. Печать или передача результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н.С.Бахвалов. Численные методы. –М: Изд. «Наука», 1975.
2. А.Е.Мудров. Численные методы для ПЭВМ на языках Бейсик,
3. Н.А.Семенов. Оптимизация алгоритма численного интегрирования. Первый, Второй и третий этапы. Вестник МГОУ. Серия «Физика и математика». 2005, №7, стр.155-159, 160-163; 2006, № 1 (17), стр.122-125. М: Изд. МГОУ.

ФИЗИКА

УДК 541.64:539.2:536.7

**МОДЕЛИРОВАНИЕ БЛИЖНЕГО ОРИЕНТАЦИОННОГО ПОРЯДКА
В РАСТВОРАХ АЛИФАТИЧЕСКИХ УГЛЕВОДОРОДОВ**

А.К. Дадиванян, Ю.М. Рябова

*Московский государственный областной университет (МГОУ)
105005, Москва, ул. Радио, 10а*

Рассчитана энергия взаимодействия участка цепи полиэтилена $C_{24}H_{48}$ с молекулами углеводородов. Показано, что существует область углов ориентации малых молекул относительно цепи, вероятность реализации которых существенно выше остальных. Получены зависимости энергии взаимодействия и фактора ориентации от температуры. Показано, что при температурах, близких к критическим, поведение фактора ориентации обуславливает существование НКТС при этих температурах.

Известно, что процесс растворения характеризуется верхними и нижними точками смешения (ВКТС и НКТС). Если существующие статистические теории хорошо объясняют природу ВКТС, то наличие НКТС в их рамках не объясняется [1]. Для решения этой проблемы предлагались гипотезы о меняющихся ячейках решеточной модели, свободном объеме и др. [2-3].

Статистическая теория, объясняющая существование НКТС, была развита лишь в последние годы [4-6]. Авторы этой теории использовали концепцию ближнего ориентационного порядка в растворах полимеров, т.е. корреляции ориентаций полимерных цепей и окружающих их молекул растворителя [7-8], которые оказывает существенное влияние на оптические, спектральные, электрические, релаксационные, термодинамические свойства растворов полимеров [9]. В рамках этой теории не только обосновано существование ВКТС и НКТС, но и показано, что их может быть несколько.

К настоящему времени ближний ориентационный порядок наблюдался только в растворах ароматических растворителей, однако существуют системы с НКТС, в которых нет ароматических молекул [10]. Поэтому представляет интерес выяснить, есть ли корреляция ориентаций в таких системах.

Нами было исследовано взаимодействие участка цепи полиэтилена $C_{24}H_{48}$ с молекулами этана (C_2H_6), бутана (C_4H_{10}), гексана (C_6H_{14}) и декана ($C_{10}H_{22}$).

В связи с тем, что степень ориентации молекул растворителя относительно полимерной цепи не зависит от состава смешанного растворителя, ее можно считать независимой от окружающих молекул растворителя и ограничиться рассмотрением взаимодействия участка полимерной цепи с изолированной молекулой растворителя.

Вычисления проводили методом атом-атом потенциалов, модели строили по химическим формулам молекул, считая молекулы *транс*-цепями.

Группы CH_2 и CH_3 были заменены модельными атомами, энергия взаимодействия которых хорошо описывает взаимодействие указанных групп [11]. Такая замена делает зависимость энергии взаимодействия от величин, определяющих взаимное расположение молекул, более гладкой, что значительно облегчает исследование. Энергия взаимодействия молекул представлялась в виде суммы величин энергии взаимодействия между атомами макромолекулы и молекулы растворителя, которая определялась соотношением:

$$E_{ij} = \frac{A}{R_{ij}} + \frac{B}{R_{ij}^6},$$

где R_{ij} - расстояние между атомами i и j .

$$A = 11,50 \cdot 10^{-3} \text{ джмоль}^{-1} \text{ \AA}^{12}$$

$$B = -5,30 \cdot 10^6 \text{ джмоль}^{-1} \text{ \AA}^6$$

Энергия взаимодействия двух цепей равна:

$$E = \sum_{ij} E_{ij}.$$

Взаимная ориентация молекул определяется углами Эйлера: θ, φ, ψ . Значения углов брали равными $7,5^\circ; 22,5^\circ; 37,5^\circ; 52,5^\circ; 67,5^\circ; 82,5^\circ$.

Вычисления показали, что энергия межмолекулярного взаимодействия существенно зависит от углов θ, φ и не зависит от ψ .

Это означает, что вероятности реализации ориентаций с различными значениями углов θ, φ также сильно различаются.

Пользуясь функцией распределения Больцмана, можно, зная величину E , определить вероятность ориентации с данными значениями углов $\theta_n, \varphi_m, \psi_l$.

$$W_{nm} = \frac{\sum_l e^{-\frac{E_{nml}}{kT}} \cdot \sin \theta_n \cdot \Delta\theta \cdot \Delta\varphi \cdot \Delta\psi}{\sum_{n,m,l} e^{-\frac{E_{nml}}{kT}} \cdot \sin \theta_n \cdot \Delta\theta \cdot \Delta\varphi \cdot \Delta\psi},$$

где $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана.

На рис.1 приведена зависимость вероятности ориентации от углов θ, φ при $T=293\text{K}$ для системы $\text{C}_{24}\text{H}_{48}$ – декан.

Как видно из рисунка, величина W_{nm} зависит от взаимной ориентации молекул растворителя и полимерной цепи, при этом вероятность реализации некоторых состояний намного больше остальных. Отметим, что полученные нами данные показали, что с увеличением длины молекулы растворителя от этана до декана область максимальной вероятности смещается в сторону меньших θ .

По соотношению

$$\bar{E} = \frac{\sum_{n,m,l} E_{n,m,l} \cdot e^{-\frac{E_{nml}}{kT}} \cdot \sin \theta_n \cdot \Delta\theta \cdot \Delta\varphi \cdot \Delta\psi}{\sum_{n,m,l} e^{-\frac{E_{nml}}{kT}} \cdot \sin \theta_n \cdot \Delta\theta \cdot \Delta\varphi \cdot \Delta\psi}$$

была рассчитана средняя энергия взаимодействия участка цепи $C_{24}H_{48}$ с деканом, гексаном, бутаном и этаном при различных температурах (рис.2). Температуру меняли в интервале от 200К до 700К с шагом 20 град.

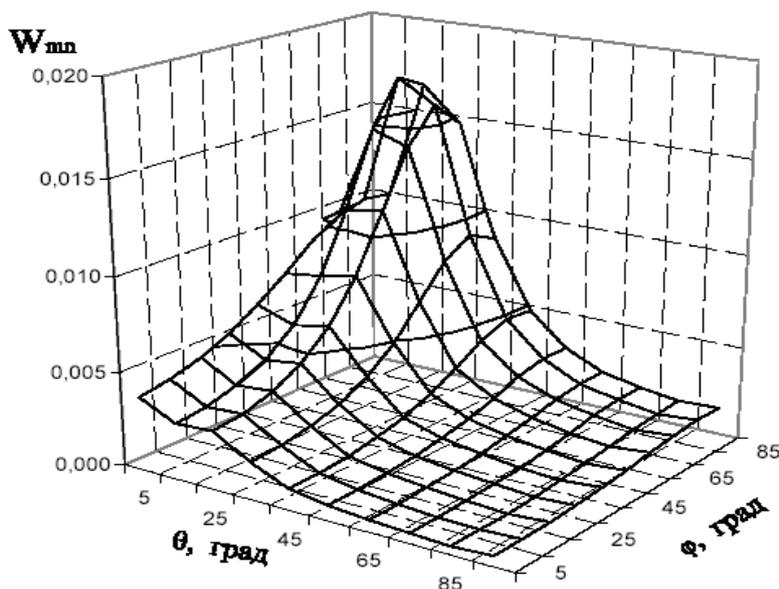


Рис. 1. Зависимость вероятности ориентации молекулы декана относительно участка цепи $C_{24}H_{48}$ от величин θ и φ для $T = 293K$.

Как видно из рисунка, с ростом температуры абсолютная величина средней энергии взаимодействия уменьшается.

Полученные нами данные позволили рассчитать значение фактора ориентации, определяемого как:

$$S = \frac{3\overline{\cos^2\theta} - 1}{2},$$

где

$$\overline{\cos^2\theta} = \frac{\sum_{n,m,l} \cos^2\theta_n \cdot e^{-\frac{E_{nml}}{kT}} \cdot \sin \theta_n \cdot \Delta\theta \cdot \Delta\varphi \cdot \Delta\psi}{\sum_{n,m,l} e^{-\frac{E_{nml}}{kT}} \cdot \sin \theta_n \cdot \Delta\theta \cdot \Delta\varphi \cdot \Delta\psi}.$$

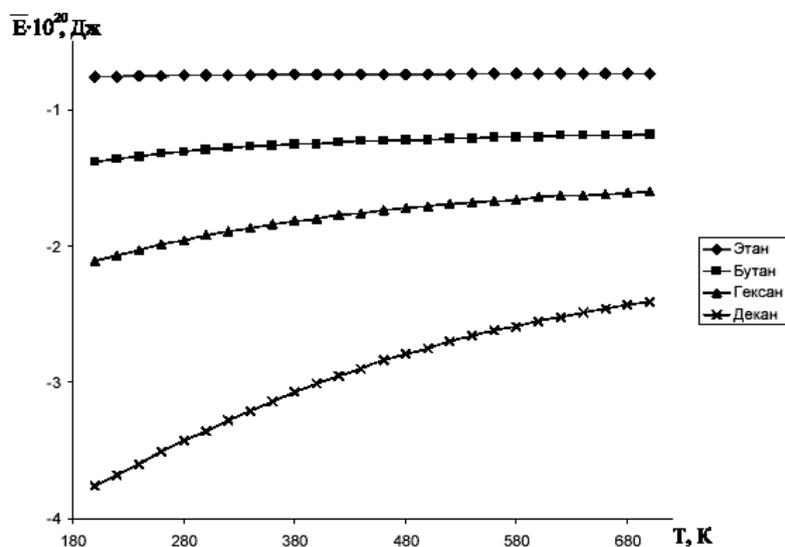


Рис. 2. Зависимость средней энергии взаимодействия молекулы полиэтилена с молекулой растворителя от температуры.

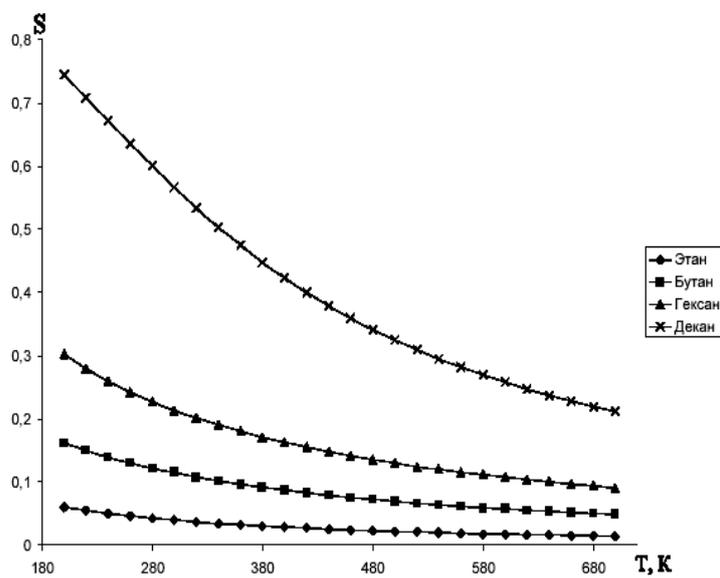


Рис. 3. Зависимость фактора ориентации от температуры.

Зависимость фактора ориентации от температуры приведена на рис.3.

Как видно из рисунка степень ориентации молекул меняется с температурой. С повышением температуры ближний ориентационный порядок разрушается, но фактор ориентации не достигает нуля даже при критических температурах растворителя, в то

время как в чистых растворителях при критических температурах значение фактора ориентации равно нулю [12]. Это означает, что в области критических температур степень упорядоченности раствора выше степени упорядоченности чистого растворителя. В результате этого энтропия смешения может быть меньше нуля, что должно проявляться в существовании НКТС при этих температурах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Flory P.J. Principles of Polymer Chemistry. New York: Cornell Univ. Press, 1953.
2. Prigogine J., Trappeniens N., Mathod V. Disc.Farad.Soc. 1953. №15. P.93-107.
3. Flory P.J., Orwoll R.A. Vrij A. J. Am. Chem. Soc. 1964. V.86. №17. P.3507-3520.
4. Дадиванян А.К., Ноа О.В. Вестник Московского государственного областного университета, Труды Центра фундаментальных научных исследований. 2006. №1. С.51-58.
5. Дадиванян А.К., Ноа О.В. Высокомолек. соед. А. 2007. Т. 49. № 2. С.313-320.
6. Дадиванян А.К., Ноа О.В., Чаусов Д.Н., Игнатов Ю.А. Высокомолек. соед. А. 2008. Т.50. №2. С.1-6.
7. Фрисман Э.В., Дадиванян А.К., Дюжев Г.А. Докл. АН СССР, 1963, Т.153. №5. С. 1063.
8. Фрисман Э.В., Дадиванян А.К. Открытия. Изобретения. 1987. № 43. Диплом №331.
9. Дадиванян А.К., Грищенко А.Е., Цветков Н.В., Рюмцев Е.И. Высокомолек. соед. Б. 2008. Т.50. №10. С. 1870-1904.
10. Тагер А.А. Физикохимия полимеров. М.: Химия, 1977.
11. Katz L., Levinthal S. Ann. Rev. Biophys. Bioeng. 1972. V. 1. № 2. P. 465.
12. Вукс М.Ф. Рассеяние света в газах, жидкостях и растворах. Л.: Изд. Ленинградского университета, 1977.

УДК 530.11

К ТЕОРИИ КВАЗИТРЕХМЕРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

С.Б. Богданова, С.О. Гладков

*Московский государственный областной университет (МГОУ)
105005, Москва, ул. Радио, 10а*

Проанализировано решение уравнения теплопроводности для пространства размерности $d_F = 3 - \varepsilon$, где ε по абсолютной величине не превосходит $1/2$, и найдено распределение температуры в подобных физических объектах.

Описанию многообразных геометрических объектов, имеющих фрактальную (лат. fractus – дробленый) природу, посвящено немало работ и монографий [1...3]. Классическими примерами в этом направлении служит ковер Серпинского, снежинка или поверхность Коха, канторова пыль.

Главной топологической характеристикой, присущей тем или иным фрактальным объектам, является их иррациональная, и в общем случае, нецелая размерность d_F , определение которой можно найти, скажем, в [4].

Так, фрактальная размерность ковра Серпинского $d_F = \frac{\ln 8}{\ln 3} \approx 1.89$, снежинки Коха $d_F = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1.26$, поверхности Коха $d_F = 1 + \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 2.26$.

Однако изучение физических свойств фракталов было начато сравнительно недавно. Одной из работ, посвященной изучению физических свойств фракталов, является работа [5], в которой была решена задача теоретического описания распределения температуры в структурах с размерностью $1 + \varepsilon$, где ε – некоторое произвольное положительное число, не превосходящее единицу.

Задача, которая будет решена в настоящей работе, является обобщением результатов статьи [5] (см. также работу [6]) и посвящена она исследованию особенностей теплопереноса в почти трехмерных структурах с размерностью $d_F = 3 - \varepsilon$, где $\varepsilon < \frac{1}{2}$.

Для решения этой задачи будем предполагать, что тепловой поток \vec{q} в исследуемом нами почти трехмерном пространстве линейным образом связан с градиентом температуры (как и для обычного явления теплопереноса, в соответствии с законом Фурье $\vec{q} = -\kappa \nabla T$, где κ - коэффициент теплопроводности, в общем случае являющийся тензором второго ранга) [7]:

$$\vec{q} = -\kappa \hat{A} T, \quad (1)$$

Скалярная величина κ остается неизменной вне зависимости от размерности пространства, но при этом должна иметь соответствующую размерность. Что касается оператора градиента в нашем случае, то его можно ввести с помощью правил, предложенных в [5, 6].

Для этого рассмотрим оператор дробного дифференцирования интересующей нас функции температуры $T_{\vec{x}} = T(x_1, x_2, x_3, t)$ по i -й координате ($i = 1, 2, 3$) в виде следующего разложения в интеграл Фурье:

$$A_{x_i} T_{\vec{x}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} i k_i^{1-\varepsilon} T_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\vec{x}} d^3 \vec{k}, \quad (2)$$

где $T_{\vec{k}} = T(k_1, k_2, k_3, t)$ – Фурье – образ функции $T_{\vec{x}} = T(x_1, x_2, x_3, t)$, $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{k} = (k_1, k_2, k_3)$, $\vec{k}\vec{x} = \sum_{i=1}^3 k_i x_i$, $t \geq 0$, $-\infty \leq x_i \leq +\infty, i = 1, 2, 3$, $-\infty \leq k_i \leq +\infty$.

Везде далее (где это не оговорено особо) будем записывать для краткости тройной интеграл как одномерный, не указывая при этом верхнюю и нижнюю границы.

Очевидно, что при $\varepsilon = 0$ оператор дробного дифференцирования по i -й координате A_{x_i} совпадает с обычным дифференцированием по координате x_i .

Таким образом, для почти трехмерного пространства оператор градиента можно задать с помощью следующего соотношения:

$$\nabla T = AT = A_{x_1} T\vec{i} + A_{x_2} T\vec{j} + A_{x_3} T\vec{k}$$

Тогда, учитывая, что квадрат оператора, заданного формулой (2), имеет вид:

$$A_{x_i}^2 T_{\vec{x}} = -\frac{1}{2\pi} \int k_i^{2-2\varepsilon} T_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\vec{x}} d^3\vec{k}, \quad (3)$$

находим:

$$(\nabla T)^2 = (AT)^2 = A_{x_1}^2 T + A_{x_2}^2 T + A_{x_3}^2 T = -\frac{1}{2\pi} \int (k_1^{2-2\varepsilon} + k_2^{2-2\varepsilon} + k_3^{2-2\varepsilon}) T_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\vec{x}} d^3\vec{k}. \quad (4)$$

В итоге уравнение Фурье, записанное для квазитрехмерного пространства в виде $\dot{T} = \chi A^2 T$, где χ – коэффициент температуропроводности, с помощью формулы (4) в \vec{k} – представлении переписывается таким образом:

$$\dot{T}_{\vec{k}} = -\chi(k_{x_1}^{2-2\varepsilon} + k_{x_2}^{2-2\varepsilon} + k_{x_3}^{2-2\varepsilon}) T_{\vec{k}}, \quad (5)$$

Разделяя переменные и интегрируя, получаем:

$$T_{\vec{k}} = C_{\vec{k}} \exp(-\chi(k_{x_1}^{2-2\varepsilon} + k_{x_2}^{2-2\varepsilon} + k_{x_3}^{2-2\varepsilon})t),$$

где постоянная интегрирования $\check{N}_{\vec{k}} = C(k_1, k_2, k_3)$ есть некоторая функция переменных k_1, k_2, k_3 .

Таким образом

$$T_{\vec{x}} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int C_{\vec{k}} \exp(-\chi(k_{x_1}^{2-2\varepsilon} + k_{x_2}^{2-2\varepsilon} + k_{x_3}^{2-2\varepsilon})t + i\vec{k}\vec{x}) d^3\vec{k}.$$

Для определения множителя $\check{N}_{\vec{k}}$ совершим обратное преобразование Фурье и, пользуясь условием, что в начальный момент времени $t = 0$ распределение температуры $T_{\vec{x}}(0)$ известно, получим следующее выражение для функции, определяющей температуру в точке с координатами (x_1, x_2, x_3, t) , $-\infty \leq x_i \leq +\infty, i = 1.2.3$, а $t \geq 0$,

$$T_{\vec{x}} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int T_{\vec{x}'} \exp(-\chi(k_{x_1}^{2-2\varepsilon} + k_{x_2}^{2-2\varepsilon} + k_{x_3}^{2-2\varepsilon})t + i\vec{k}(\vec{x} - \vec{x}')) d^3\vec{k} d^3\vec{x}', \quad (6)$$

где $\vec{x}' = (x'_1, x'_2, x'_3)$.

При вычислении интеграла по \bar{k} – пространству, нам придется иметь дело с интегралами вида

$$\int \exp(-\chi k_i^{2-2\varepsilon} t + ik_i(x_i - x'_i)) dk_i = \int \exp(-\chi t f(k_i)) dk_i, \quad (7)$$

где функция

$$f(k_i) = k_i^{2-2\varepsilon} - \frac{i}{\chi t} k_i(x_i - x'_i). \quad (8)$$

Чтобы их оценить, мы применим метод перевала, который предполагает разложение функции (8) в ряд Тейлора вблизи седловой точки k_i^0 , которая находится из условия $f'(k_i) = 0$. Поскольку $f'(k_i) = (2 - 2\varepsilon)k_i^{1-2\varepsilon} - \frac{i}{\chi t}(x_i - x'_i)$, то немедленно находим:

$$k_i^0 = \left(\frac{i(x_i - x'_i)}{\chi t(2 - 2\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{1-2\varepsilon}}. \quad (9)$$

Простые вычисления показывают, что

$$f(k_i^0) = (2\varepsilon - 1) \left(\frac{i(x_i - x'_i)}{\chi t(2 - 2\varepsilon)} \right)^{\frac{2-2\varepsilon}{1-2\varepsilon}}, \quad (10)$$

$$f''(k_i^0) = ((1 - \varepsilon)(1 - 2\varepsilon)) \left(\frac{i(x_i - x'_i)}{\chi t(2 - 2\varepsilon)} \right)^{\frac{2\varepsilon}{1-2\varepsilon}}. \quad (11)$$

Таким образом, ограничивая разложение в ряд функции $f(k_i)$ первыми двумя ненулевыми слагаемыми, получаем следующее выражение:

$$f(k_i) = (2\varepsilon - 1) \left(\frac{i(x_i - x'_i)}{\chi t(2 - 2\varepsilon)} \right)^{\frac{2-2\varepsilon}{1-2\varepsilon}} + (1 - \varepsilon)(1 - 2\varepsilon) \left(\frac{i(x_i - x'_i)}{\chi t(2 - 2\varepsilon)} \right)^{\frac{2\varepsilon}{1-2\varepsilon}} (k_i - k_i^0)^2.$$

Благодаря этому, интегрирование в (7) сводится к вычислению хотя и громоздкого, но, тем не менее, берущегося интеграла Пуассона

$$\int \exp \left(-\chi t (2\varepsilon - 1) \left(\frac{i(x_i - x'_i)}{\chi t(2 - 2\varepsilon)} \right)^{\frac{2-2\varepsilon}{1-2\varepsilon}} - \chi t (1 - \varepsilon)(1 - 2\varepsilon) \left(\frac{i(x_i - x'_i)}{\chi t(2 - 2\varepsilon)} \right)^{\frac{2\varepsilon}{1-2\varepsilon}} (k_i - k_0)^2 \right) dk_i. \quad (12)$$

Если ввести здесь новую переменную интегрирования $k_i - k_i^0 = m_i$, то после вынесения постоянного множителя за знак интеграла получаем:

$$\exp\left(-\chi t(2\varepsilon - 1)\left(\frac{i(x_i - x'_i)}{\chi t(2 - 2\varepsilon)}\right)^{\frac{2-2\varepsilon}{1-2\varepsilon}}\right) \int \exp\left(-\chi t(1 - \varepsilon)(1 - 2\varepsilon)\left(\frac{i(x_i - x'_i)}{\chi t(2 - 2\varepsilon)}\right)^{\frac{2\varepsilon}{1-2\varepsilon}} (m_i)^2\right) dm_i. \quad (13)$$

Пользуясь далее простой формулой (см. [8]) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$, находим:

$$\begin{aligned} \int \exp(-\chi t f(k_i)) dk_i &= \\ &= \exp\left(-\chi t(2\varepsilon - 1)\left(\frac{i(x_i - x'_i)}{\chi t(2 - 2\varepsilon)}\right)^{\frac{2-2\varepsilon}{1-2\varepsilon}}\right) \sqrt{\pi} \left(\chi t(1 - \varepsilon)(1 - 2\varepsilon)\left(\frac{i(x_i - x'_i)}{\chi t(2 - 2\varepsilon)}\right)^{\frac{2\varepsilon}{1-2\varepsilon}}\right)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (14)$$

Как видим из выражения (14), оно не является действительным, хотя известно, что температура – величина действительная. Чтобы эту неприятность обойти, воспользуемся предварительно соотношением Эйлера – Муавра $e^{ix} = \cos\frac{\pi}{2}x + i\sin\frac{\pi}{2}x$. В результате, после несложных манипуляций будем иметь в итоге;

$$\begin{aligned} \exp\left(-\chi t(2\varepsilon - 1)\left(\frac{x_i - x'_i}{\chi t(2 - 2\varepsilon)}\right)^{\frac{2-2\varepsilon}{1-2\varepsilon}} i^{\frac{2-2\varepsilon}{1-2\varepsilon}}\right) \left(\frac{\pi}{\chi t(1 - \varepsilon)(1 - 2\varepsilon)}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{x_i - x'_i}{\chi t(2 - 2\varepsilon)}\right)^{\frac{\varepsilon\varepsilon}{1-2\varepsilon}} \exp\left(i\frac{\pi\varepsilon}{2(1 - 2\varepsilon)}\right) &= \\ = \exp\left(-\chi t(2\varepsilon - 1)\left(\frac{x_i - x'_i}{\chi t(2 - 2\varepsilon)}\right)^{\frac{2-2\varepsilon}{1-2\varepsilon}} \left(\cos\frac{\pi(1 - \varepsilon)}{1 - 2\varepsilon} + i\sin\frac{\pi(1 - \varepsilon)}{1 - 2\varepsilon}\right)\right) \times \\ \times \left(\frac{\pi}{\chi t(1 - \varepsilon)(1 - 2\varepsilon)}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{x_i - x'_i}{\chi t(2 - 2\varepsilon)}\right)^{\frac{\varepsilon\varepsilon}{1-2\varepsilon}} \exp\left(i\frac{\pi\varepsilon}{2(1 - 2\varepsilon)}\right) &= \\ = \exp\left(-\chi t(2\varepsilon - 1)\left(\frac{x_i - x'_i}{\chi t(2 - 2\varepsilon)}\right)^{\frac{2-2\varepsilon}{1-2\varepsilon}} \left(\cos\frac{\pi(1 - \varepsilon)}{1 - 2\varepsilon}\right)\right) \times \\ \times \left(\frac{\pi}{\chi t(1 - \varepsilon)(1 - 2\varepsilon)}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{x_i - x'_i}{\chi t(2 - 2\varepsilon)}\right)^{\frac{\varepsilon\varepsilon}{1-2\varepsilon}} \exp\left(i\left(\frac{\pi\varepsilon}{2(1 - 2\varepsilon)} - \varphi\right)\right) \end{aligned} \quad (15)$$

где функция $\varphi = \chi t(2\varepsilon - 1)\left(\frac{x_i - x'_i}{\chi t(2 - 2\varepsilon)}\right)^{\frac{2-2\varepsilon}{1-2\varepsilon}} \sin\frac{\pi(1 - \varepsilon)}{1 - 2\varepsilon}$.

Таким образом, учитывая трехмерность интеграла по \vec{k} , находим из (6):

$$T_{\vec{x}} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int T_{\vec{x}'} d\vec{x}' \prod_{i=1}^3 \int \exp(-\chi k_i^{2-2\varepsilon} t + ik_i(x_i - x'_i)) dk_i = \frac{1}{(2\pi)^2} \int T_{\vec{x}'} d\vec{x}' \prod_{i=1}^3 \int \exp(-\chi t f(k_i)) dk_i.$$

Отделяя здесь действительную часть, и принимая во внимание результат (15), получаем искомое температурное распределение в квазитрехмерном объекте:

$$\begin{aligned} T_{\vec{x}} &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int T_{\vec{x}'} d\vec{x}' \prod_{i=1}^3 \int \exp(-\chi t f(k_i)) dk_i = \\ &= \frac{X(\varepsilon)}{(2\pi)^2} \int T_{\vec{x}'} \prod_{i=1}^3 \left(\frac{x_i - x'_i}{\chi t (2 - 2\varepsilon)} \right)^{\frac{\varepsilon}{1-2\varepsilon}} e^{Y(\varepsilon)} \cos \left(\frac{3\pi\varepsilon}{2(1-2\varepsilon)} - 3\varphi \right) d^3 \vec{x}' \end{aligned}, \quad (16)$$

где функции

$$\begin{aligned} X(\varepsilon) &= \left(\frac{\pi}{\chi t (1-\varepsilon)(1-2\varepsilon)} \right)^{\frac{3}{2}}, \\ Y(\varepsilon) &= \sum_{i=1}^3 -\chi t (2\varepsilon - 1) \cos \frac{\pi(1-\varepsilon)}{1-2\varepsilon} \left(\frac{(x_i - x'_i)^2}{2\chi t (1-\varepsilon)} \right)^{\frac{1-\varepsilon}{1-2\varepsilon}}, \\ \varphi &= \chi t (2\varepsilon - 1) \left(\frac{(x_i - x'_i)^2}{2\chi t (1-\varepsilon)} \right)^{\frac{1-\varepsilon}{1-2\varepsilon}} \sin \frac{\pi(1-\varepsilon)}{1-2\varepsilon}. \end{aligned} \quad (17)$$

Выражение (16), как и следовало ожидать, в предельном случае, когда $\varepsilon \rightarrow 0$, а $n = 3$ переходит в известную формулу для распределения температуры в бесконечном трехмерном пространстве [7]:

$$T_x = \frac{1}{2(\pi\chi t)^{\frac{3}{2}}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} T_{x'} e^{-\frac{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}{4\chi t}} dx'.$$

Таким образом, формулы (16), (17) отвечают на вопрос о распределении температуры по почти трехмерному классическому объекту при условии, что начальное распределение температуры нам задано.

В заключение работы отметим основные результаты проведенного исследования.

1. Построена теория теплопроводности в физических объектах почти трехмерной размерности.
2. Выяснена зависимость температуры от параметра ε . Вычисления показали, что соответствующая функция согласно (16), (17) является довольно сложной.

3. Полученные результаты могут быть применены для объяснения распределения температуры по физическим объектам типа куба Серпинского и ему подобных, когда возникает вопрос о выяснении характера процесса теплопереноса в подобных геометрических структурах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. Ижевск, РХД, 2002г.
2. Шредер М. Фракталы, хаос, степенные законы. Ижевск., 2001. 528с
3. Федер Е. Фракталы. М.: Мир, 1991, 254с.
4. Гладков С.О.. Сборник задач по теоретической и математической физике. М.: Физматлит, 2006. 460с.
5. Гладков С.О. // ЖТФ. 1997. Т.67. Вып.7. С.8-12.
6. Гладков С.О. //ЖТФ. 2001. Т.71. Вып.11. С.130-132.
7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. Т.6. 736с
8. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.2. М., 1962, 807с.

УДК 536.7

ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЙ ИНВАРИАНТ СТЕХИОМЕТРИЧЕСКОЙ ЦЕПОЧКИ РЕАКЦИЙ

А.Л. Бугримов

*Московский государственный областной университет (МГОУ)
105005, Москва, ул. Радио, 10а*

Предложен термодинамический инвариант стехиометрической цепочки реакций, численное значение которого не зависит от состава веществ, участвующих в реакции, уравненной в стехиометрическом отношении.

Теплота взрыва Q_B взрывчатого вещества (ВВ) имеет важное значение для анализа взрывных процессов. Ее величина в соответствии с правилом Гесса (законом постоянства тепловых сумм) определяется разностью теплоты образования продуктов взрыва $Q_{обр}(ПВ)$ и теплоты образования $Q_{обр}(ВВ)$ рассматриваемого ВВ [1]:

$$Q_B = Q_{обр}(ПВ) - Q_{обр}(ВВ) . \quad (1)$$

В свою очередь теплота образования ВВ определяется разностью теплоты образования $Q_{обр}(ПСГ)$ продуктов сгорания ВВ и теплоты сгорания $Q_{сг}(ВВ)$ самого ВВ [1]:

$$Q_{обр}(ВВ) = Q_{обр}(ПСГ) - Q_{сг}(ВВ) . \quad (2)$$

Далее вместо теплот будут использоваться энтальпии. Согласно соглашению о знаках $Q = - \Delta H$, соотношения (1) и (2) примут вид:

$$\Delta H_B = \Delta H_{обр}(ПВ) - \Delta H_{обр}(ВВ) , \quad (3)$$

$$\Delta H_{обр}(ВВ) = \Delta H_{обр}(ПСГ) - \Delta H_{сз}(ВВ) . \quad (4)$$

Таким образом, понятие теплоты (энтальпии) взрыва является сложным. С формальной точки зрения, для ее определения необходимо, во-первых, знать состав продуктов взрыва, и во-вторых, привести продукты реакции взрывчатого превращения к стандартному состоянию ($T=298,15$ К и $p=101,3$ кПа). Однако сам состав продуктов взрыва при такой процедуре постоянным, естественно, не будет.

Целью настоящей работы является получение такого термодинамического параметра значение которого было бы инвариантным относительно продуктов реакции.

Рассмотрим реакцию, в которой вещество А превращается в новое вещество В (вещества А и В могут представлять собой совокупность веществ, вступающих в реакцию и получающихся в результате протекания реакции):



Энтальпия реакции ΔH_r° определяется соотношениями, полученными на основе правила Гесса [2, 3]. Согласно этим соотношениям энтальпия ΔH_r° определяется разностью энтальпий образования конечных $\Delta H_{f,298}^\circ(B)$ и начальных $\Delta H_{f,298}^\circ(A)$ продуктов реакции:

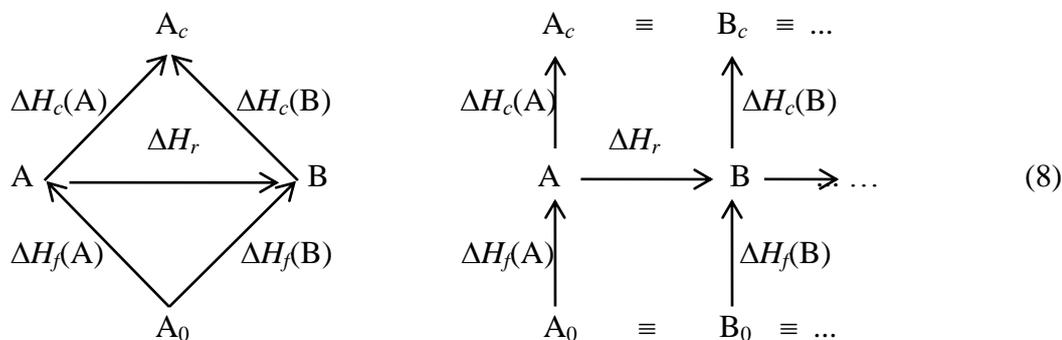
$$\Delta H_r^\circ = \Delta H_{f,298}^\circ(B) - \Delta H_{f,298}^\circ(A) , \quad (6)$$

или разностью энтальпий сгорания начальных $\Delta H_{c,298}^\circ(A)$, и конечных $\Delta H_{c,298}^\circ(B)$, продуктов реакции:

$$\Delta H_r^\circ = \Delta H_{c,298}^\circ(A) - \Delta H_{c,298}^\circ(B) . \quad (7)$$

Далее индексы, обозначающие стандартную температуру (298) и стандартное давление ($^\circ$) будем опускать, понимая, что энтальпии сгорания и образования уже по своему определению предполагают стандартные условия.

Легко понять, что для реакции (5), как и для любой другой, уравненной в стехиометрическом соотношении, состав простых веществ, из которых образуются начальные и конечные вещества, одинаков. Одинаковым является и состав продуктов сгорания начальных и конечных веществ, участвующих в реакции. Поэтому для реакции (5) справедливо представление в виде замкнутого и разомкнутого циклов:



Учитывая соотношения (6) и (7), можно записать:

$$\Delta H_f(B) - \Delta H_f(A) = \Delta H_c(A) - \Delta H_c(B), \quad (9)$$

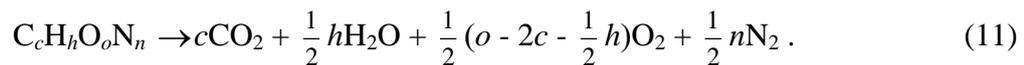
откуда следует, что

$$\Delta H_f(A) + \Delta H_c(A) = \Delta H_f(B) + \Delta H_c(B) = \Delta H_{inv} = \text{Const}, \quad (10)$$

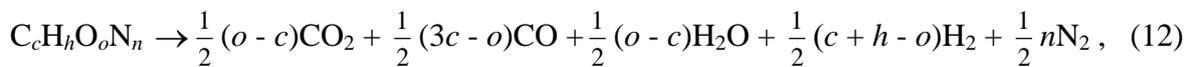
и таким образом сумма энтальпий образования и сгорания исходных веществ и продуктов, получающихся в результате любой стехиометрической цепочки реакций (см. правую часть (8)), есть величина постоянная.

Для определения теплоты взрыва ВВ на практике применяют упрощенный подход, в рамках которого реакцию взрывчатого превращения записывают тем или иным приближенным способом. В соответствии с таким подходом взрывчатые вещества, формулы которых, например, могут быть представлены в общем виде $C_cH_hO_oN_n$, в зависимости от соотношения между c, h, o, n , условно подразделяют на три группы.

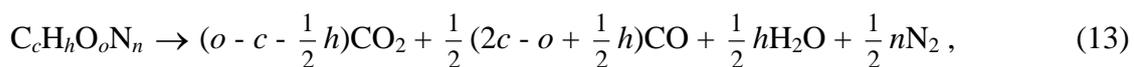
К первой группе относят те ВВ, для которых $o \geq (2c + \frac{1}{2}h)$ и реакцию взрывчатого превращения записывают в виде [1]:



Ко второй группе относят ВВ, для которых $(c + \frac{1}{2}h) \leq o \leq (2c + \frac{1}{2}h)$ и реакцию взрывчатого превращения записывают в виде [1]:



И соответственно к третьей группе относят те ВВ, для которых $o \leq (c + \frac{1}{2}h)$ и [1]:



В каждом из рассмотренных случаев соотношения между конечными продуктами реакции различно.

Поскольку очевидно, что

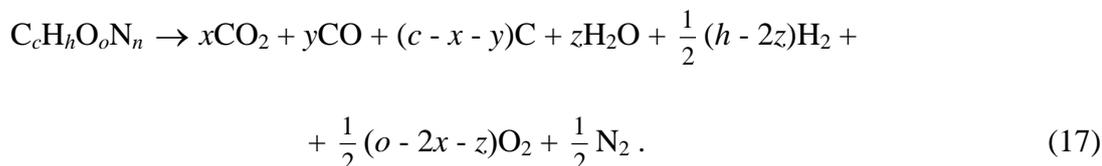
$$\Delta H_f(CO_2) = \Delta H_f(CO) + \Delta H_{c2}(CO) = \Delta H_{c2}(C), \quad (14)$$

$$\Delta H_f(H_2O) = \Delta H_{c2}(H_2), \quad (15)$$

а энтальпии образования простых веществ и энтальпии сгорания полных окислов применительно к стандартному состоянию равны нулю, то, как легко определить, значение инварианта для реакций (11) - (13) будет равно:

$$\Delta H_{\text{inv}} = c\Delta H_f(\text{CO}_2) + \frac{1}{2}h\Delta H_f(\text{H}_2\text{O}) . \quad (16)$$

Для реакции взрывчатого превращения более общего, чем (11) - (13), вида:



значение инварианта будет точно таким же.

Так например, для реакции взрывчатого превращения тротила $\text{C}_7\text{H}_5\text{O}_6\text{N}_3$, состав продуктов взрыва которого определяется уравнениями (11) - (13) или уравнением более общего вида (17), значение инварианта $\Delta H_{\text{inv}} = -829,15$ ккал/моль (здесь принято: $\Delta H_{f,298}^0(\text{CO}_2) = -94,05$; $\Delta H_{f,298}^0(\text{H}_2\text{O}, \text{ж}) = -68,32$ ккал/моль [4]).

Следует отметить, что численное значение инварианта сохраняется и для продуктов любой стадии химического превращения ВВ, что особенно важно для анализа протекания сложных химических реакций, таких как реакции горения ракетных топлив, реакции взрывчатого превращения ВВ и других многостадийных реакций.

Рассмотренное выше справедливо для стандартного соглашения, в рамках которого принято, что сгорание называется полным (применительно к рассматриваемому случаю, в частности), если азот, входящий в соединение, превращается в молекулярный азот [5]. Можно считать стандартным состояние, при котором азот достигает высшей степени окисления (N_2O_5 , $\Delta H_f(\text{N}_2\text{O}_5) = 2,7$ ккал/моль [4]). В этом случае все рассуждения сохраняются, а изменяется лишь численное значение инварианта: $\Delta H_{\text{inv}} = -825,10$ ккал/моль.

Таким образом, предложен термодинамический инвариант стехиометрической цепочки реакций, являющийся следствием закона Гесса. Численное значение инварианта не зависит от состава веществ, участвующих в реакциях, уравненных в стехиометрическом отношении, и в совокупности представляющих процесс преобразования исходных веществ в конечные.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баум Ф.А. и др. Физика взрыва// Под ред. К.П.Станюковича.-М.: Наука, 1975.-704с.
2. Сивухин Д.В. Общий курс физики, т.2.-М.: Наука, 1975.
3. Базаров И.П. Термодинамика.-М.: Высш. шк.- 1991. -376 с.
4. Термодинамические свойства индивидуальных веществ. Справочное издание: В 4-х т./Л.В.Гурвич, И.В.Вейц, В.А.Медведев и др. - 3-е изд. Т.1, кн.2.-М.: Наука, 1978.-328 с.
5. Краснов К.С и др. Физическая химия, т.1.: М., Высш. шк., 1995.- 512 с.

**ТЕОРИЯ ТЕРМОФЕРЕЗА ДУБЛЕТОВ ДВУХСЛОЙНЫХ ЧАСТИЦ
С УЧЕТОМ СКАЧКА ТЕМПЕРАТУРЫ НА ИХ ПОВЕРХНОСТИ
ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ОРИЕНТАЦИИ ДУБЛЕТОВ**

А.С. Хасанов¹, И.М. Арсланов²

¹ *Российская экономическая академия им. Г.В. Плеханова,
113054 г. Москва, Стремянный пер. 36.*

² *Камская государственная инженерно-экономическая академия,
423810 Татарстан, г. Набережные Челны, Проспект Мира, д.11/18.*

Рассмотрено термофоретическое движение двух крупных твердых сферических гидродинамически взаимодействующих двухслойных аэрозольных частиц с учетом скачка температуры на их поверхности при произвольной ориентации дублета. Получены формулы для скорости термофореза и угловой скорости вращения частиц. Для практических расчетов приведены приближенные формулы.

Введение. Проблема переноса аэрозольных частиц в газовых средах под действием внешнего поля имеет большое научное и прикладное значение. Движение аэрозольной частицы в поле постоянного на большом удалении от нее градиента температуры называется термофорезом. Частица называется крупной, если число Кнудсена λ/a является величиной малой [1], где λ – средняя длина свободного пробега газовых молекул, a – радиус частицы. Характер термофоретического движения зависит как от гидродинамического взаимодействия с близко расположенными частицами [2], так и от структуры частицы [3]. В реальных условиях аэрозольные частицы часто являются двухслойными или многослойными. Двухслойные частицы образуются в ходе конденсации молекул паров какого-либо вещества на поверхности твердого ядра (радиус ядра частицы обозначим через b). После затвердевания жидкой оболочки образуется твердая двухслойная частица. В данной работе рассмотрено движение двух крупных гидродинамически взаимодействующих двухслойных частиц с учетом скачка температуры на их поверхности при произвольной ориентации дублета.

Уравнения теплопроводности. Если в газовой среде поддерживается заданный постоянный градиент температуры ∇T (газ будем считать однокомпонентным), то нахождение поля температуры (обозначим его через T_∞) является простейшей задачей [4]. Если однородная сферическая аэрозольная частица взвешена в рассматриваемом газе, то получим поле $T_\infty + \varepsilon$, где ε – некоторое возмущение (для ε также существует формула [5]). Характер возмущения ε усложняется, если частица является двухслойной и рядом с данной частицей взвешена точно такая же вторая частица. Пусть O_1 и O_2 – центры частиц, O – середина отрезка $O_1 O_2$, l – расстояние между центрами частиц, \vec{l} – вектор $O_1 O_2$, α – угол между векторами ∇T и \vec{l} . Выберем декартову систему координат $Oxuz$, в которой направление оси Oz совпадает с направлением вектора \vec{l} , координатная плоскость Oxz параллельна вектору ∇T (везде далее r, θ, φ – сферические координаты точки в системе с началом в точке O). Нумерация частиц и направ-

ление оси Ox выбраны так, что углы между вектором ∇T и единичными векторами \vec{i} , \vec{k} не превосходят $\pi/2$. Пусть T_e – поле температуры в газе, $T_i^{(j)}$ и $T_b^{(j)}$ – соответственно, поля температуры внутри оболочки и ядра j -й частицы (верхний индекс $j \in \{1,2\}$ означает номер частицы), T_0 – температура в точке O_1 в поле T_∞ , $T_a = |\nabla T|a$ – перепад температуры в поле T_∞ на расстоянии в один радиус частицы вдоль ∇T , $T_l = (\nabla T, \vec{l})$ – перепад температуры в поле T_∞ при переходе из точки O_1 в точку O_2 (запись (\vec{a}, \vec{b}) означает скалярное произведение векторов \vec{a} и \vec{b}). Теория термофореза одиночной частицы строится при условии $T_a/T_0 \ll 1$ [1]. Влияние рядом находящейся второй частицы на движение первой частицы четко выражено на небольших расстояниях между частицами (при $l \leq 10a$) [2]. Поэтому в широком диапазоне градиентов ∇T для практически важных классов дублетов наряду с условием $T_a/T_0 \ll 1$ выполняется и условие $T_l/T_0 \ll 1$. Поля температуры в газе и внутри частиц можно изучать в квазистационарном режиме, число Пекле (характеризующее отношение между конвективными и молекулярными процессами переноса тепла) является величиной малой, поля T_e , $T_i^{(j)}$, $T_b^{(j)}$ удовлетворяют уравнениям $\nabla^2 T_e = 0$, $\nabla^2 T_i^{(j)} = 0$, $\nabla^2 T_b^{(j)} = 0$ [2].

Путем параллельного переноса системы $Oxuz$ в точки O_1 и O_2 получим системы координат, в которых записываются граничные условия. Ясно, что $T_\infty = T_0 + (\delta_{2j}\vec{l} + \vec{r}_j, \nabla T)$ в системе координат с центром в точке O_j , где δ_{sn} – символ Кронекера. Поля T_e , $T_i^{(j)}$ и $T_b^{(j)}$ согласованы. Пусть κ_e , κ_i , κ_b – коэффициенты теплопроводности газа, оболочки и ядра частиц. Непрерывность радиального потока тепла через поверхность частицы приводит к условию $\kappa_e \frac{\partial T_e}{\partial r_j} = \kappa_i \frac{\partial T_i^{(j)}}{\partial r_j}$ при $r_j = a$. Аналогичное условие выполнено и на поверхности ядра: $\kappa_b \frac{\partial T_b^{(j)}}{\partial r_j} = \kappa_i \frac{\partial T_i^{(j)}}{\partial r_j}$ при $r_j = b$. Учету скачка температуры на поверхностях частиц соответствует условие [1]

$T_e = T_i^{(j)} + C_T \lambda \frac{\partial T_e}{\partial r_j}$ при $r_j = a$, где C_T – коэффициент скачка температуры (в нашем случае $C_T = 2,179$). На большом удалении от частиц возмущение поля температуры исчезает: $\lim_{r \rightarrow \infty} (T_e - T_\infty) = 0$. Поля температуры в ядрах ограничены: $\sup_{r_j \leq b} |T_b^{(j)}| < +\infty$. Величина зазора между частицами не меньше $0,01a$, следовательно, $l \geq 2,01a$. Пусть $t = a/l$, $t_0 = a/(2,01a) = 0,4975$. Тогда $0 \leq t \leq t_0$. При $\alpha = \pi/2$ и $l \rightarrow \infty$ теория термофореза дублетов должна перейти в теорию термофореза одиночной частицы ($T_l/T_0 = 0$ при $\alpha = \pi/2$ для всех $l \geq 2,01a$). В тепловой части задачи при фиксированных t и α необходимо найти решения уравнений $\nabla^2 T_e = 0$, $\nabla^2 T_i^{(j)} = 0$ и $\nabla^2 T_b^{(j)} = 0$, удовлетворяющие сформулированным условиям.

Решение уравнений теплопроводности. Из свойств гармонических функций следует единственность решения тепловой части задачи [6,7]. Пусть N – множество нату-

ральных чисел, $Z_+ = N \cup \{0\}$, $n \in Z_+$, $m \in Z_+$, $P_n(x)$ – многочлен Лежандра,

$$Y_n^{(-m,j)} = \sin^m \theta_j \frac{d^m P_n(\cos \theta_j)}{d \cos^m \theta_j} \cos m \varphi_j, \quad Y_n^{(+m,j)} = \sin^m \theta_j \frac{d^m P_n(\cos \theta_j)}{d \cos^m \theta_j} \sin m \varphi_j, \quad m \leq n.$$

Пусть $x_{nm}^{(bj)}$, $x_{nm}^{(ij)}$, $y_{nm}^{(ij)}$, $x_{nm}^{(ej)}$ – неопределенные коэффициенты. Поля $T_i^{(j)}$, $T_b^{(j)}$, T_e ищем в виде [6]:

$$\begin{aligned} T_i^{(1)} &= T_0 + T_a \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n [x_{nm}^{(i1)} (r_1/a)^n + y_{nm}^{(i1)} (a/r_1)^{n+1}] Y_n^{(-m,1)}, \\ T_i^{(2)} &= T_0 + (\bar{l}, \nabla T) + T_a \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n [x_{nm}^{(i2)} (r_2/a)^n + y_{nm}^{(i2)} (a/r_2)^{n+1}] (-1)^{n+m} Y_n^{(-m,2)}, \\ T_b^{(1)} &= T_0 + T_a \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n x_{nm}^{(b1)} (r_1/a)^n Y_n^{(-m,1)}, \\ T_b^{(2)} &= T_0 + (\bar{l}, \nabla T) + T_a \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n x_{nm}^{(b2)} (r_2/a)^n (-1)^{n+m} Y_n^{(-m,2)}, \\ T_e &= T_\infty + T_a \left[\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n x_{nm}^{(e1)} (a/r_1)^{n+1} Y_n^{(-m,1)} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n x_{nm}^{(e2)} (a/r_2)^{n+1} (-1)^{n+m} Y_n^{(-m,2)} \right]. \end{aligned}$$

Так как вблизи первой частицы [8]

$$(-1)^{n+m} Y_n^{(\pm m,2)} (a/r_2)^{n+1} = \sum_{s=m}^{\infty} C_{n+s}^{n-m} t^{n+s+1} (r_1/a)^s Y_s^{(\pm m,1)} \quad \text{при } r_1 < l, \quad (1)$$

то в системе координат с центром в точке O_1 при $r_1 < l$

$$T_e = T_0 + (\bar{r}_1, \nabla T) + T_a \left[\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n x_{nm}^{(e1)} (a/r_1)^{n+1} Y_n^{(-m,1)} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{s=m}^{\infty} x_{nm}^{(e2)} C_{n+s}^{n-m} t^{n+s+1} (r_1/a)^s Y_s^{(-m,1)} \right].$$

Так как при $r_2 < l$,

$$Y_n^{(\pm m,1)} (a/r_1)^{n+1} = \sum_{s=m}^{\infty} C_{n+s}^{n-m} t^{n+s+1} (r_2/a)^s (-1)^{s+m} Y_s^{(\pm m,2)},$$

то

$$\begin{aligned} T_e &= T_0 + (\bar{l} + \bar{r}_2, \nabla T) + T_a \left[\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n x_{nm}^{(e2)} (a/r_2)^{n+1} (-1)^{n+m} Y_n^{(-m,2)} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{s=m}^{\infty} x_{nm}^{(e1)} C_{n+s}^{n-m} t^{n+s+1} (r_2/a)^s (-1)^{s+m} Y_s^{(-m,2)} \right] \end{aligned}$$

в системе с центром в O_2 .

Перейдем к учету граничных условий на поверхностях частиц и их ядер. Заметим, что $(\bar{r}_j, \nabla T) = Y_1^{(-1,j)} |\nabla T| r_j \sin \alpha + Y_1^{(-0,j)} |\nabla T| r_j \cos \alpha$. Пусть $\chi = a/b$, $\tau = \kappa_e / \kappa_i$, $\tau_b = \kappa_i / \kappa_b$.

При учете скачка температуры при $r_j = a$ величину $\frac{\partial T_e}{\partial r_j}$ заменим на $\frac{1}{\tau} \frac{\partial T_i}{\partial r_j}$. Приравняв коэффициенты при одинаковых сферических функциях левой и правой частей граничных условий, получим систему уравнений:

$$x_{sm}^{(e1)} + \sum_{n=1}^{\infty} x_{nm}^{(e2)} C_{n+s}^{n-m} t^{n+s+1} - x_{sm}^{(i1)} [1 + s C_T \lambda / (\tau a)] - y_{sm}^{(i1)} [1 - (s+1) C_T \lambda / (\tau a)] =$$

$$= -\delta_{s1} (\delta_{m1} \sin \alpha + \delta_{m0} \cos \alpha),$$

$$-(s+1)x_{sm}^{(e1)} + s \sum_{n=1}^{\infty} x_{nm}^{(e2)} C_{n+s}^{n-m} t^{n+s+1} - 1/\tau [x_{sm}^{(i1)} s - y_{sm}^{(i1)} (s+1)] =$$

$$= -\delta_{s1} (\delta_{m1} \sin \alpha + \delta_{m0} \cos \alpha),$$

$$x_{sm}^{(i1)} \chi^s + y_{sm}^{(i1)} \chi^{-s-1} = x_{sm}^{(b1)} \chi^s,$$

$$x_{sm}^{(i1)} s \chi^{s-1} - (s+1) y_{sm}^{(i1)} \chi^{-s-2} = 1/\tau_b x_{sm}^{(b1)} s \chi^{s-1},$$

$$x_{sm}^{(e2)} + \sum_{n=1}^{\infty} x_{nm}^{(e1)} C_{n+s}^{n-m} t^{n+s+1} - x_{sm}^{(i2)} [1 + s C_T \lambda / (\tau a)] - y_{sm}^{(i2)} [1 - (s+1) C_T \lambda / (\tau a)] =$$

$$= -\delta_{s1} (\delta_{m1} \sin \alpha - \delta_{m0} \cos \alpha),$$

$$-(s+1)x_{sm}^{(e2)} + s \sum_{n=1}^{\infty} x_{nm}^{(e1)} C_{n+s}^{n-m} t^{n+s+1} - 1/\tau [x_{sm}^{(i2)} s - y_{sm}^{(i2)} (s+1)] =$$

$$= -\delta_{s1} (\delta_{m1} \sin \alpha - \delta_{m0} \cos \alpha),$$

$$x_{sm}^{(i2)} \chi^s + y_{sm}^{(i2)} \chi^{-s-1} = x_{sm}^{(b2)} \chi^s,$$

$$x_{sm}^{(i2)} s \chi^{s-1} - (s+1) y_{sm}^{(i2)} \chi^{-s-2} = 1/\tau_b x_{sm}^{(b2)} s \chi^{s-1}.$$

Из этих равенств следует, что

$$x_{00}^{(e1)} = x_{00}^{(e2)} = y_{00}^{(i1)} = y_{00}^{(i2)} = 0, \quad x_{00}^{(i1)} = x_{00}^{(b1)} = \sum_{n=1}^{\infty} x_{n0}^{(e2)} t^{n+1}, \quad x_{00}^{(i2)} = x_{00}^{(b2)} = \sum_{n=1}^{\infty} x_{n0}^{(e1)} t^{n+1}.$$

При $m \notin \{0,1\}$ единственным решением этой системы является нулевое решение: $x_{nm}^{(ej)} = x_{nm}^{(ij)} = y_{nm}^{(ij)} = x_{nm}^{(bj)} = 0$. Нахождение остальных коэффициентов сводится к поиску векторов $X_e^{(m,j)} = (x_{1m}^{(ej)}, x_{2m}^{(ej)}, \dots)^T$, $X_i^{(m,j)} = (x_{1m}^{(ij)}, x_{2m}^{(ij)}, \dots)^T$, $Y_i^{(m,j)} = (y_{1m}^{(ij)}, y_{2m}^{(ij)}, \dots)^T$, $X_b^{(m,j)} = (x_{1m}^{(bj)}, x_{2m}^{(bj)}, \dots)^T$, где $m \in \{0,1\}$. Их поиск будем вести в пространстве l_1' , состоящем из векторов $X = (x_1, x_2, \dots)^T$, для которых $\sum_{i=1}^{\infty} |i^\alpha x_i| < +\infty$ при $\forall \alpha \in Z_+$. Можно показать, что если искомые векторы принадлежат l_1' , то в тепловой части задачи все ряды сходятся, правомерно почленное дифференцирование этих рядов и изменение порядка

суммирования в кратных суммах (включая поверхности частиц). Пространство l'_1 является подпространством полного линейного нормированного пространства (т.е. банахова пространства) l_1 [9], состоящего из векторов $X = (x_1, x_2, \dots)^T$, для которых $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| < +\infty$ ($\|X\| = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|$). Пусть L – банахово пространство ограниченных линейных операторов [9], действующих из l_1 в l_1 , а $L_1^{(M)}$ – пространство матриц A с бесконечным числом строк и столбцов с нормой $\|A\| = \sup_n \sum_{s=1}^{\infty} |a_{sn}|$. Оператор $B \in L$ задается с помощью некоторой матрицы $A \in L_1^{(M)}$ по формуле $BX = AX$, где $X \in l_1$, AX – произведение матрицы A на вектор X . Норма оператора B , согласованная с нормой вектора X , совпадает с $\|A\| = \sup_n \sum_{s=1}^{\infty} |a_{sn}|$. Для обозначения матрицы и порожденного ею оператора используется одно и то же обозначение.

Перейдем к решению системы уравнений относительно неопределенных коэффициентов при $m=0$. Из единственности решения системы следует, что $X_e^{(0,1)} = -X_e^{(0,2)}$, $X_i^{(0,1)} = -X_i^{(0,2)}$, $Y_i^{(0,1)} = -Y_i^{(0,2)}$, $X_b^{(0,1)} = -X_b^{(0,2)}$. Методом исключения переменных можно получить уравнение:

$$\begin{aligned} x_{s0}^{(e1)} - \varphi_s(\tau\varphi_s(\chi^{2s+1}\varphi_s(\tau_b))) + sC_T \lambda/a \sum_{n=1}^{\infty} x_{n0}^{(e1)} C_{n+s}^{n-m} t^{n+s+1} = \\ = -\delta_{s1} \cos\alpha \varphi_s(\tau\varphi_s(\chi^{2s+1}\varphi_s(\tau_b))) + sC_T \lambda/a \text{ для } \forall s \geq 1, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\varphi_s(x) = (1-x)/[1+(1+1/s)x]$. Пусть $(A)_{sn}$ – элемент матрицы A , а матрицы $M^{(m)}$ при $m \in \{0,1\}$ и $\Lambda^{(d)}$ определены по формулам $(M^{(m)})_{sn} = C_{n+s}^{n-m} t^{n+s+1}$ и $(\Lambda^{(d)})_{sn} = \varphi_s(\tau\varphi_s(\chi^{2s+1}\varphi_s(\tau_b))) + sC_T \lambda/a \delta_{sn}$. Можно доказать, что $\|M^{(m)}\| \leq t/(1-t) < 1$ при $t \in [0, t_0]$ и $m \in \{0,1\}$, т.е. оператор $M^{(m)}$ является сжимающим. Так как $-1 < \varphi_s(x) \leq 1$ при $x \geq 0$, то $\|\Lambda^{(d)}\| \leq 1$. Уравнение (2) можно переписать в операторном виде: $(E - \Lambda^{(d)}M^{(0)})X_e^{(0,1)} = -\cos\alpha \Lambda^{(d)}E_1$, где $E_1 = (1,0,0,\dots)^T$, а E – единичный оператор. Если оператор A отображает банахово пространство l_1 в себя и $\|A\| < 1$, то [9] $(E \pm A)^{-1} \in L$, $(E \pm A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\mp A)^n$. Так как $\|\Lambda^{(d)}M^{(m)}\| \leq \|\Lambda^{(d)}\| \|M^{(m)}\| < 1$, то $(E \pm \Lambda^{(d)}M^{(m)})^{-1} \in L$. Следовательно,

$$X_e^{(0,1)} = -X_e^{(0,2)} = -\cos\alpha (E - \Lambda^{(d)}M^{(0)})^{-1} \Lambda^{(d)}E_1. \quad (3)$$

Аналогичные формулы могут быть выведены и для векторов $X_i^{(0,j)}$, $Y_i^{(0,j)}$, $X_b^{(0,j)}$.

При $m=1$ из единственности решения следует, что $X_e^{(1,1)} = X_e^{(1,2)}$, $X_i^{(1,1)} = X_i^{(1,2)}$, $Y_i^{(1,1)} = Y_i^{(1,2)}$, $X_b^{(1,1)} = X_b^{(1,2)}$. Методом исключения переменных получим для $\forall s \geq 1$ уравнение:

$$x_{s1}^{(e1)} + \varphi_s(\tau\varphi_s(\chi^{2s+1}\varphi_s(\tau_b))) + sC_T \lambda/a \sum_{n=1}^{\infty} x_{n1}^{(e1)} C_{n+s}^{n-m} t^{n+s+1} = -\delta_{s1} \sin \alpha \varphi_s(\tau\varphi_s(\chi^{2s+1}\varphi_s(\tau_b))) + sC_T \lambda/a$$

или в операторном виде:

$$(E + \Lambda^{(d)} M^{(1)}) X_e^{(1,1)} = -\sin \alpha \Lambda^{(d)} E_1.$$

Отсюда

$$X_e^{(1,1)} = X_e^{(1,2)} = -\sin \alpha (E + \Lambda^{(d)} M^{(1)})^{-1} \Lambda^{(d)} E_1. \quad (4)$$

Аналогичные формулы могут быть выведены и для $X_i^{(1,j)}$, $Y_i^{(1,j)}$, $X_b^{(1,j)}$.

Пусть $L_2^{(M)}$ – линейное нормированное пространство матриц с нормой $\|A\|_2 = \sum_{s,n=1}^{\infty} |a_{sn}|$. Ясно, что $L_2^{(M)} \subset L_1^{(M)}$ и $\|A\| \leq \|A\|_2$. Обозначим через $L_3^{(M)}$ множество матриц A , элементы a_{sn} которых удовлетворяют условию $|a_{sn}| \leq P(s,n) C_{n+s}^n t^{n+s-1+q}$, где $q \in Z_+$, $P(s,n)$ – многочлен относительно s и n . Можно показать, что $L_3^{(M)} \subset L_2^{(M)}$ (при любом $t \in [0, t_0]$). Пусть $L_4^{(M)}$ – множество диагональных матриц Λ , элементы которых удовлетворяют условию $|(\Lambda)_{ss}| \leq P(s)$, где $P(s)$ – многочлен относительно s . Множество матриц $L_3^{(M)}$ замкнуто относительно умножения слева и справа на матрицы из $L_4^{(M)}$. Обобщением $L_3^{(M)}$ является $L_5^{(M)}$ – линейное пространство матриц A , для которых матрицы ΛA и $A \Lambda$ принадлежат $L_1^{(M)}$ при всех матрицах Λ из $L_4^{(M)}$. Ясно, что $L_3^{(M)} \subset L_5^{(M)}$, $E_1 \in l'_1$. Можно доказать, что пространство l'_1 замкнуто относительно умножения слева его элементов на матрицы $\Lambda \in L_4^{(M)}$, $A \in L_5^{(M)}$, $(E+B)^{-1}$, где $B \in L_5^{(M)}$ и $(E+B)^{-1} \in L_1^{(M)}$. Отсюда следует, что все найденные векторы принадлежат l'_1 . Из полученных формул при $\alpha = \pi/2$ и $l \rightarrow \infty$ можно вывести формулы для одиночных частиц, а при $\tau_b = 1$ получим формулы для дублетов из однородных частиц.

Уравнения гидродинамики. При малых числах Кнудсена газ рассматривается как сплошная среда и задача о термофорезе крупных частиц решается гидродинамическим методом. Взаимодействие газа с неоднородно нагретой поверхностью частицы приводит к тепловому скольжению [1] газа по ее поверхности. В этих условиях создается действующий на частицу импульс, под действием которого она приходит в ускоренное движение. На частицу также действует сила вязкого сопротивления внешней среды, которая увеличивается с ростом скорости [8] и уравнивает термофоретическую силу, что позволяет определить мгновенную термофоретическую скорость частицы. Из

условия $T_a/T_0 \ll 1$ следует, что число Рейнольдса является величиной малой [1], т.е. движение газа относительно частицы является медленным вязким течением. В широком диапазоне градиентов температуры ∇T поля скорости и давления также можно изучать в квазистационарном режиме [2]. Для нахождения мгновенной термофоретической скорости j -й частицы используется условие равенства нулю результирующей силы $\vec{F}^{(j)}$, действующей на j -ю частицу: $\vec{F}^{(j)} = 0$. В общем случае частица совершает и вращательное движение вокруг оси, проходящей через ее центр масс O_j . Результирующий крутящий момент $\vec{T}^{(j)}$, действующий на j -ю частицу, равен нулю: $\vec{T}^{(j)} = 0$. В теории термофореза предполагается единственность мгновенной поступательной скорости движения $\vec{U}^{(j)}$ и мгновенной угловой скорости вращения $\vec{\omega}^{(j)}$ j -й частицы. На поверхности движущейся j -й частицы генерируется поле скоростей в газе

$$\vec{V}^{(j)} = \vec{U}^{(j)} + [\vec{\omega}^{(j)}, \vec{r}_j] + \frac{K_{Tsl}\eta}{T_0\rho_e a} \nabla_{\theta, \varphi} T_e, \quad (5)$$

где $r_j = a$, а запись $[\vec{a}, \vec{b}]$ означает векторное произведение, K_{Tsl} , ρ_e , η – соответственно, коэффициент теплового скольжения ($K_{Tsl} = 1,169$), плотность и динамическая вязкость газа, $\nabla_{\theta, \varphi} T_e = \vec{i}_\theta \frac{\partial T_e}{\partial \theta} + \vec{i}_\varphi \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial T_e}{\partial \varphi}$. Использование в граничных условиях для обеих частиц одного и того же значения T_0 правомерно, так как $T_l/T_0 \ll 1$. Пусть \vec{v} и p – поля скорости и давления в газе. Оценки показывают [1], что поля \vec{v} и p могут быть определены из линеаризованных уравнений Стокса $\eta \nabla^2 \vec{v} = \nabla p$, $(\nabla, \vec{v}) = 0$, где $\lim_{r \rightarrow \infty} \vec{v} = 0$ и $\lim_{r \rightarrow \infty} p = p_{e\infty}$ при $r \rightarrow \infty$. В гидродинамической части задачи необходимо найти решения \vec{v} и p уравнений $\eta \nabla^2 \vec{v} = \nabla p$, $(\nabla, \vec{v}) = 0$, удовлетворяющие граничным условиям $\vec{v} = \vec{V}^{(j)}$ при $r_j = a$ и сформулированным выше условиям на бесконечности. Основной целью гидродинамической части задачи является нахождение векторов $\vec{U}^{(j)}$ и $\vec{\omega}^{(j)}$.

Решение уравнений гидродинамики. Из единственности решения тепловой части задачи и из единственности векторов $\vec{U}^{(j)}$, $\vec{\omega}^{(j)}$ следует единственность решения и гидродинамической части задачи [10]. Поля \vec{v} и p будем искать в виде $\vec{v} = \vec{v}^{(1)} + \vec{v}^{(2)}$, $p = p_{e\infty} + p^{(1)} + p^{(2)}$, где $\vec{v}^{(j)}$, $p^{(j)}$ – возмущения, вызванные движением j -й частицы и определяемые из уравнений Стокса $\eta \nabla^2 \vec{v}^{(j)} = \nabla p^{(j)}$, $(\nabla, \vec{v}^{(j)}) = 0$, где $\lim_{r \rightarrow \infty} \vec{v}^{(j)} = 0$ и $\lim_{r \rightarrow \infty} p^{(j)} = 0$ при $r_j \rightarrow \infty$. Поля $\vec{v}^{(j)}$, $p^{(j)}$ имеют вид [2, 8]:

$$\vec{v}^{(j)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \nabla \Phi_{-n-1}^{(j)} + [\nabla, \chi_{-n-1}^{(j)} \vec{r}_j] - \frac{(n-2)r_j^2}{2\eta n(2n-1)} \nabla p_{-n-1}^{(j)} + \frac{(n+1)\vec{r}_j}{\eta n(2n-1)} p_{-n-1}^{(j)} \right\},$$

$$p^{(j)} = \sum_{n=1}^{\infty} p_{-n-1}^{(j)},$$

где $\Phi_{-n-1}^{(j)} = r_j^{-n-1} \sum_{m=0}^n A_{nm}^{(j)} Y_n^{(-m,j)}$, $p_{-n-1}^{(j)} = r_j^{-n-1} \sum_{m=0}^n D_{nm}^{(j)} Y_n^{(-m,j)}$, $\chi_{-n-1}^{(j)} = r_j^{-n-1} \sum_{m=0}^n C_{nm}^{(j)} Y_n^{(+m,j)}$,
а $A_{nm}^{(j)}$, $D_{nm}^{(j)}$, $C_{nm}^{(j)}$ – коэффициенты.

Пусть $D_{nm}^{(j)} = \frac{\eta n(2n-1)}{n+1} B_{nm}^{(j)}$.

Тогда

$$\vec{v}^{(j)} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \{ A_{nm}^{(j)} \nabla H_{-n-1}^{(-m,j)} + C_{nm}^{(j)} [\nabla, H_{-n-1}^{(+m,j)} \vec{r}_j] + \alpha_n r_j^2 B_{nm}^{(j)} \nabla H_{-n-1}^{(-m,j)} + B_{nm}^{(j)} \vec{r}_j H_{-n-1}^{(-m,j)} \},$$

$$p^{(j)} = \eta \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{n(2n-1)}{n+1} B_{nm}^{(j)} H_{-n-1}^{(-m,j)},$$

где $\alpha_n = 0,5(2-n)/(n+1)$. Скорости $\vec{U}^{(j)}$ и $\vec{\omega}^{(j)}$ ищем в виде $\vec{U}^{(j)} = -U_0(u_x \vec{i} + u_z \vec{k})$, $\vec{\omega}^{(j)} = (-1)^{j+1} U_0/a \vec{\omega}^j$, где U_0 – величина термофоретической скорости одиночной двухслойной частицы, а u_x , u_z и ω – неизвестные безразмерные постоянные, $j \in \{1,2\}$.

Пусть

$$\gamma_{sn}^{(m)} = \frac{(s-m)(s+m)[sn-2(s+n)+1]}{s(2s-1)(n+1)(n+s)} + \frac{2-n}{2(n+1)}, \quad \beta_{sn} = \frac{n(2n-1)}{2(n+1)(2s+3)},$$

$$A_{nm}^{(1)} = U_0 a^{n+2} a_{nm}^{(1)}, \quad A_{nm}^{(2)} = (-1)^{n+m} U_0 a^{n+2} a_{nm}^{(2)},$$

$$B_{nm}^{(1)} = U_0 a^n b_{nm}^{(1)}, \quad B_{nm}^{(2)} = (-1)^{n+m} U_0 a^n b_{nm}^{(2)}, \quad (6)$$

$$C_{nm}^{(1)} = U_0 a^{n+1} c_{nm}^{(1)}, \quad C_{nm}^{(2)} = (-1)^{n+m+1} U_0 a^{n+1} c_{nm}^{(2)}, \quad (7)$$

где $a_{nm}^{(j)}$, $b_{nm}^{(j)}$, $c_{nm}^{(j)}$ – безразмерные неопределенные коэффициенты.

Учет граничного условия $\vec{v} = \vec{V}^{(j)}$ при $r_j = a$ равносильен [8] учету трех условий при $r_j = a$:

$$v_{r_j} = (r_j^{-1} \vec{r}_j, \vec{V}^{(j)}), \quad r_j \frac{\partial v_{r_j}}{\partial r_j} = -r_j (\nabla, \vec{V}^{(j)}), \quad (\vec{r}_j, [\nabla, \vec{v}]) = (\vec{r}_j, [\nabla, \vec{V}^{(j)}]). \quad (8)$$

Неопределенные коэффициенты находим из граничных условий (8). Пусть $m \in \{0,1\}$. Рассмотрим граничное условие на поверхности первой частицы. На основании формулы (1) можно показать [11], что вблизи первой частицы (при $r_1 < l$):

$$v_{r_1} = U_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n [-(n+1)(a/r_1)^{n+2} a_{nm}^{(1)} + 0,5n(a/r_1)^n b_{nm}^{(1)}] Y_n^{(-m,1)} +$$

$$+ U_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{s=\max(1,m)}^{\infty} s C_{n+s}^{n-m} t^{n+s-1} (r_1/a)^{s-1} Y_s^{(-m,1)} \{ a_{nm}^{(2)} t^2 - c_{nm}^{(2)} t m/s + b_{nm}^{(2)} [\beta_{sn} (r_1/a)^2 t^2 + \gamma_{sn}^{(m)}] \},$$

$$r_1 \frac{\partial v_{r_1}}{\partial r_1} = U_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n [(n+1)(n+2)(a/r_1)^{n+2} a_{nm}^{(1)} - 0,5n^2 (a/r_1)^n b_{nm}^{(1)}] Y_n^{(-m,1)} +$$

$$\begin{aligned}
 & + U_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{s=\max(1,m)}^{\infty} C_{n+s}^{n-m} t^{n+s-1} Y_s^{(-m,1)} \{s(s-1)(r_1/a)^{s-1} [a_{nm}^{(2)} t^2 - c_{nm}^{(2)} t m/s + \\
 & + b_{nm}^{(2)} \gamma_{sn}^{(m)}] + s(s+1)b_{nm}^{(2)} \beta_{sn} (r_1/a)^{s+1} t^2\}, \\
 (\vec{r}_1, [\nabla, \vec{v}]) = & U_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n n(n+1)c_{nm}^{(1)} (a/r_1)^{n+1} Y_n^{(+m,1)} + \\
 & + U_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{s=\max(1,m)}^{\infty} [n s t c_{nm}^{(2)} + (2n-1)/(n+1) m b_{nm}^{(2)}] C_{n+s}^{n-m} t^{n+s} (r_1/a)^s Y_s^{(+m,1)}.
 \end{aligned}$$

На основании формулы (5) можно также найти правые части условий (8). Приравняв коэффициенты при одинаковых сферических функциях левой и правой частей условий (8), получим систему уравнений относительно неопределенных коэффициентов, нахождение которых сводится к поиску векторов $A^{(m,j)} = (a_{1m}^{(j)}, a_{2m}^{(j)}, \dots)^T$, $B^{(m,j)} = (b_{1m}^{(j)}, b_{2m}^{(j)}, \dots)^T$, $C^{(m,j)} = (c_{1m}^{(j)}, c_{2m}^{(j)}, \dots)^T$ при $m \in \{0,1\}$, $j \in \{1,2\}$. Поиск этих векторов также будем вести в пространстве l_1' (тогда и в гидродинамической части задачи правомерно почленное дифференцирование рядов и изменение порядка суммирования в кратных суммах, включая поверхности частиц). Определим три матрицы из $L_1^{(M)}$ по формулам $(\Lambda_1)_{sn} = -(s+1)/s \delta_{sn}$, $(\Lambda_2)_{sn} = (s+2)/s \delta_{sn}$, $(\Lambda_3)_{sn} = (s-1)/(s+1) \delta_{sn}$, три матрицы из $L_4^{(M)}$ по формулам $(\Lambda_4)_{sn} = (s+1)\delta_{sn}$, $(\Lambda_5)_{sn} = (2s+3)\delta_{sn}$, $(\Lambda_6)_{sn} = (2s+1)\delta_{sn}$, пять матриц из $L_3^{(M)}$ по формулам $(M_{\beta}^{(m)})_{sn} = C_{n+s}^{n-m} t^{n+s+1} \beta_{sn}$, $(M_{\gamma}^{(m)})_{sn} = C_{n+s}^{n-m} t^{n+s-1} \gamma_{sn}^{(m)}$, $(M_{\omega 1}^{(m)})_{sn} = C_{n+s}^{n-m} t^{n+s} m/s$, $(M_{\omega 2}^{(m)})_{sn} = C_{n+s}^{n-m} t^{n+s+1} n/(s+1)$, $(M_{\omega 3}^{(m)})_{sn} = C_{n+s}^{n-m} t^{n+s} \times \times m(2n-1)/[s(s+1)(n+1)]$. При $j=1$ и $m=1$ систему (8) можно записать в операторном виде:

$$\begin{aligned}
 \Lambda_1 A^{(1,1)} + 0,5 B^{(1,1)} + M^{(1)} A^{(1,2)} - M_{\omega 1}^{(1)} C^{(1,2)} + (M_{\beta}^{(1)} + M_{\gamma}^{(1)}) B^{(1,2)} &= -u_x E_1, \\
 \Lambda_2 A^{(1,1)} + 0,5 \Lambda_1^{-1} B^{(1,1)} + \Lambda_3 M^{(1)} A^{(1,2)} - \Lambda_3 M_{\omega 1}^{(1)} C^{(1,2)} + (M_{\beta}^{(1)} + \Lambda_3 M_{\gamma}^{(1)}) B^{(1,2)} &= \\
 &= K(\sin \alpha E_1 + X_e^{(1,1)} + M^{(1)} X_e^{(1,2)}), \\
 C^{(1,1)} + M_{\omega 2}^{(1)} C^{(1,2)} + M_{\omega 3}^{(1)} B^{(1,2)} &= \omega E_1,
 \end{aligned}$$

где $X_e^{(1,1)}$, $X_e^{(1,2)}$ определяются по формулам (4), $K = K_{Tsl} \eta |\nabla T| / (T_0 \rho_e U_0)$.

Аналогично можно получить систему уравнений при $j=2$ и $m=1$. Так как эти системы совпадают, то из единственности решения гидродинамической части задачи следует, что:

$$A^{(1,1)} = A^{(1,2)}, \quad B^{(1,1)} = B^{(1,2)}, \quad C^{(1,1)} = C^{(1,2)}.$$

Отсюда:

$$\begin{aligned}
 B^{(1,1)} = & -u_x (E + R^+)^{-1} \Lambda_4 (E - \Lambda_1^{-1}) (E + M^{(1)} \Lambda_1^{-1})^{-1} E_1 + \\
 & + K \sin \alpha (E + R^+)^{-1} \Lambda_4 (E - \Lambda^d) (E + M^{(1)} \Lambda^d)^{-1} E_1 + \\
 & + \omega (E + R^+)^{-1} \Lambda_4 (E - \Lambda_1^{-1}) (E + M^{(1)} \Lambda_1^{-1})^{-1} M_{\omega 1}^{(1)} (E + M_{\omega 2}^{(1)})^{-1} E_1, \\
 C^{(1,1)} = & u_x (E + M_{\omega 2}^{(1)})^{-1} M_{\omega 3}^{(1)} (E + R^+)^{-1} \Lambda_4 (E - \Lambda_1^{-1}) (E + M^{(1)} \Lambda_1^{-1})^{-1} E_1 -
 \end{aligned} \tag{9}$$

$$-K \sin \alpha (E + M_{\omega 2}^{(1)})^{-1} M_{\omega 3}^{(1)} (E + R^+)^{-1} \Lambda_4 (E - \Lambda^{(d)}) (E + M^{(1)} \Lambda^{(d)})^{-1} E_1 + \\ + \omega (E + M_{\omega 2}^{(1)})^{-1} [E - M_{\omega 3}^{(1)} (E + R^+)^{-1} \Lambda_4 (E - \Lambda_1^{-1}) (E + M^{(1)} \Lambda_1^{-1})^{-1} M_{\omega 1}^{(1)} (E + M_{\omega 2}^{(1)})^{-1}] E_1, \quad (10)$$

где $R^+ = \Lambda_5 M_{\beta}^{(1)} + \Lambda_6 M_{\gamma}^{(1)} + \Lambda_6 M_{\omega 1}^{(1)} (E + M_{\omega 2}^{(1)})^{-1} M_{\omega 3}^{(1)} - \Lambda_6 M^{(1)} \Lambda_1^{-1} (E + M^{(1)} \Lambda_1^{-1})^{-1} \times \\ \times [0,5E + M_{\beta}^{(1)} + M_{\gamma}^{(1)} + M_{\omega 1}^{(1)} (E + M_{\omega 2}^{(1)})^{-1} M_{\omega 3}^{(1)}]$.

Операторы $M^{(1)} \Lambda^{(d)}$, $M^{(1)} \Lambda_1^{-1}$ являются сжимающими и $(E + M^{(1)} \Lambda^{(d)})^{-1} \in L$, $(E + M^{(1)} \Lambda_1^{-1})^{-1} \in L$. Операторы $M_{\omega 2}^{(1)}$ и R^+ не при всех t являются сжимающими, но можно показать, что $M_{\omega 2}^{(1)} \in L_5^{(M)}$, $(E + M_{\omega 2}^{(1)})^{-1} \in L$, $R^+ \in L_5^{(M)}$, $(E + R^+)^{-1} \in L$. Вектор $A^{(1,j)}$ можно выразить через вектор $B^{(1,j)}$:

$$A^{(1,j)} = \Lambda_1^{-1} (E + M^{(1)} \Lambda_1^{-1})^{-1} [-u_x E_1 - (0,5E + M_{\beta}^{(1)} + M_{\gamma}^{(1)}) B^{(1,j)} + \\ + M_{\omega 1}^{(1)} (E + M_{\omega 2}^{(1)})^{-1} (\omega E_1 - M_{\omega 3}^{(1)} B^{(1,j)})].$$

Ясно, что $A^{(1,j)}$, $B^{(1,j)}$, $C^{(1,j)} \in l'_1$.

Пусть $m=0$. Тогда $C^{(0,j)} = 0$ при $\forall j \in \{1,2\}$. При $j=1$ имеем уравнения:

$$\Lambda_1 A^{(0,1)} + 0,5 B^{(0,1)} + M^{(0)} A^{(0,2)} + (M_{\beta}^{(0)} + M_{\gamma}^{(0)}) B^{(0,2)} = -u_z E_1, \\ \Lambda_2 A^{(0,1)} + 0,5 \Lambda_1^{-1} B^{(0,1)} + \Lambda_3 M^{(0)} A^{(0,2)} + (M_{\beta}^{(0)} + \Lambda_3 M_{\gamma}^{(0)}) B^{(0,2)} = \\ = K(\cos \alpha E_1 + X_e^{(0,1)} + M^{(0)} X_e^{(0,2)}),$$

где векторы $X_e^{(0,1)}$, $X_e^{(0,2)}$ определяются по формулам (3).

Аналогичные уравнения можно вывести и при $j=2$. Из единственности решения системы (8) следует, что

$$A^{(0,1)} = -A^{(0,2)}, \quad B^{(0,1)} = -B^{(0,2)}.$$

Отсюда:

$$B^{(0,1)} = -u_z (E - R^-)^{-1} \Lambda_4 (E - \Lambda_1^{-1}) (E - M^{(0)} \Lambda_1^{-1})^{-1} E_1 + \\ + \cos \alpha K (E - R^-)^{-1} \Lambda_4 (E - \Lambda^{(d)}) (E - M^{(0)} \Lambda^{(d)})^{-1} E_1, \quad (11)$$

где $R^- = \Lambda_5 M_{\beta}^{(0)} + \Lambda_6 M_{\gamma}^{(0)} - \Lambda_6 M^{(0)} \Lambda_1^{-1} (E - M^{(0)} \Lambda_1^{-1})^{-1} (0,5E - M_{\beta}^{(0)} - M_{\gamma}^{(0)})$. Операторы $M^{(0)} \Lambda^{(d)}$, $M^{(0)} \Lambda_1^{-1}$, R^- принадлежат $L_5^{(M)}$ и являются сжимающими, $(E - M^{(0)} \Lambda^{(d)})^{-1}$, $(E - M^{(0)} \Lambda_1^{-1})^{-1}$, $(E - R^-)^{-1} \in L$. Ясно, что $A^{(0,1)} = -A^{(0,2)} = \\ = -\Lambda_1^{-1} (E - M^{(0)} \Lambda_1^{-1})^{-1} [u_z E_1 + (0,5E - M_{\beta}^{(0)} - M_{\gamma}^{(0)}) B^{(0,1)}]$, и векторы $A^{(0,j)}$, $B^{(0,j)}$ принадлежат пространству l'_1 . Можно показать, что при $m \notin \{0,1\}$ единственным решением системы (8) является нулевое решение: $a_{sm}^{(j)} = b_{sm}^{(j)} = c_{sm}^{(j)} = 0$, где $s \geq m$.

Величины u_x , u_z и ω найдем из условий $\bar{F}^{(j)} = 0$, $\bar{T}^{(j)} = 0$. Как известно [8],
 $\bar{F}^{(j)} = -4\pi\nabla(r_j^3 p_{-2}^{(j)})$, $\bar{T}^{(j)} = -8\pi\nabla(r_j^3 \chi_{-2}^{(j)})$. Так как $p_{-2}^{(j)} = 0,5\eta r_j^{-2} [B_{10}^{(j)} Y_1^{(-0,j)} +$
 $+ B_{11}^{(j)} Y_1^{(-1,j)}]$, $\chi_{-2}^{(j)} = r_j^{-2} [C_{10}^{(j)} Y_1^{(+0,j)} + C_{11}^{(j)} Y_1^{(+1,j)}]$, то из формул (6)-(7)
 $p_{-2}^{(j)} = 0,5r_j^{-3} U_0 a \eta [E_1^T B^{(0,1)} z_j + E_1^T B^{(1,1)} x_j]$, $\chi_{-2}^{(j)} = (-1)^{j+1} r_j^{-3} U_0 a^2 y_j E_1^T C^{(1,1)}$,
 $\bar{F}^{(j)} = -2\pi U_0 a \eta [E_1^T B^{(0,1)} \bar{k} + E_1^T B^{(1,1)} \bar{i}]$, $\bar{T}^{(j)} = (-1)^j 8\pi U_0 a^2 E_1^T C^{(1,1)} \bar{j}$. Так как $\bar{F}^{(j)} = 0$,
 $\bar{T}^{(j)} = 0$, то на основании формул (9)-(11) получим систему уравнений относительно u_x , u_z , ω . Введем обозначения:

$$\begin{aligned} f^-(t, \Lambda) &= E_1^T (E - R^-)^{-1} \Lambda_4 (E - \Lambda) (E - M^{(0)} \Lambda)^{-1} E_1, \\ f^+(t, \Lambda) &= E_1^T (E + R^+)^{-1} \Lambda_4 (E - \Lambda) (E + M^{(1)} \Lambda)^{-1} E_1, \\ h^+(t, \Lambda) &= E_1^T (E + M_{\omega 2}^{(1)})^{-1} M_{\omega 3}^{(1)} (E + R^+)^{-1} \Lambda_4 (E - \Lambda) (E + M^{(1)} \Lambda)^{-1} E_1 / f^+(t, \Lambda), \\ g^+(t, \Lambda) &= E_1^T (E + M_{\omega 2}^{(1)})^{-1} E_1 - E_1^T (E + M_{\omega 2}^{(1)})^{-1} M_{\omega 3}^{(1)} (E + R^+)^{-1} \Lambda_4 (E - \Lambda_1^{-1}) \times \\ &\quad \times (E + M^{(1)} \Lambda_1^{-1})^{-1} M_{\omega 1}^{(1)} (E + M_{\omega 2}^{(1)})^{-1} E_1 + \\ &\quad + h^+(t, \Lambda) E_1^T (E + R^+)^{-1} \Lambda_4 (E - \Lambda_1^{-1}) (E + M^{(1)} \Lambda_1^{-1})^{-1} M_{\omega 1}^{(1)} (E + M_{\omega 2}^{(1)})^{-1} E_1, \end{aligned}$$

где Λ – диагональная матрица, $\Lambda \in L_1^{(M)}$ и $\|\Lambda\| \leq 1$. Пусть

$$\begin{aligned} u^-(t, \Lambda^{(d)}) &= f^-(t, \Lambda^{(d)}) f^-(0, \Lambda_1^{-1}) / [f^-(t, \Lambda_1^{-1}) f^+(0, \Lambda^{(d)})], \\ u^+(t, \Lambda^{(d)}) &= f^+(t, \Lambda^{(d)}) f^+(0, \Lambda_1^{-1}) g^+(t, \Lambda^{(d)}) / [f^+(t, \Lambda_1^{-1}) f^+(0, \Lambda^{(d)}) g^+(t, \Lambda_1^{-1})]. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} (\Lambda^{(d)})_{11} &= \varphi_1(\tau \varphi_1(\chi^3 \varphi_1(\tau_b))) + C_T \lambda / a, \quad f^\pm(0, \Lambda_1^{-1}) = 3, \\ f^\pm(0, \Lambda^{(d)}) &= 2[1 - \varphi_1(\tau \varphi_1(\chi^3 \varphi_1(\tau_b))) + C_T \lambda / a]. \end{aligned}$$

Формулы для u_z , u_x , ω имеют вид:

$$\begin{aligned} u_z &= 2/3 K [1 - \varphi_1(\tau \varphi_1(\chi^3 \varphi_1(\tau_b))) + C_T \lambda / a] u^-(t, \Lambda^{(d)}) \cos \alpha, \\ u_x &= 2/3 K [1 - \varphi_1(\tau \varphi_1(\chi^3 \varphi_1(\tau_b))) + C_T \lambda / a] u^+(t, \Lambda^{(d)}) \sin \alpha, \\ \omega &= K f^+(t, \Lambda^{(d)}) / g^+(t, \Lambda_1^{-1}) [h^+(t, \Lambda_1^{-1}) - h^+(t, \Lambda^{(d)})] \sin \alpha. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\bar{U}^{(j)} = -\frac{2K_{Tsl} \eta |\nabla T|}{3T_0 \rho_e} [1 - \varphi_1(\tau \varphi_1(\chi^3 \varphi_1(\tau_b))) + C_T \lambda / a] \times$$

$$\times [u^+(t, \Lambda^{(d)}) \sin \alpha \bar{i} + u^-(t, \Lambda^{(d)}) \cos \alpha \bar{k}], \quad (12)$$

$$\bar{\omega}^{(j)} = (-1)^{j+1} \frac{K_{Tsl} \eta |\nabla T|}{T_0 \rho_e a} \frac{f^+(t, \Lambda^{(d)})}{g^+(t, \Lambda_1^{-1})} [h^+(t, \Lambda_1^{-1}) - h^+(t, \Lambda^{(d)})] \sin \alpha \bar{j}. \quad (13)$$

Формулы (12)-(13) можно записать через обычные и двойные векторные произведения:

$$\vec{U}^{(j)} = \frac{2K_{Tsl}\eta}{3T_0\rho_e l^2} [1 - \varphi_1(\tau\varphi_1(\chi^3\varphi_1(\tau_b))) + C_T \lambda/a] \times \\ \times \{u^+(t, \Lambda^{(d)})[\vec{l}, [\vec{l}, \nabla T]] - u^-(t, \Lambda^{(d)})\vec{l}(\vec{l}, \nabla T)\}, \quad (14)$$

$$\vec{\omega}^{(j)} = (-1)^{j+1} \frac{K_{Tsl}\eta}{T_0\rho_e a l} \frac{f^+(t, \Lambda^{(d)})}{g^+(t, \Lambda_1^{-1})} [h^+(t, \Lambda_1^{-1}) - h^+(t, \Lambda^{(d)})][\vec{l}, \nabla T]. \quad (15)$$

При $\alpha = \pi/2$ и $l \rightarrow \infty$ из этих формул можно получить формулы для одиночной двухслойной частицы. При $\alpha = 0$ и $\alpha = \pi/2$ из них можно получить формулы для $\vec{U}^{(j)}$ и $\vec{\omega}^{(j)}$, соответственно, в случаях движения дублетов перпендикулярно и вдоль линии центров. Разложим скорость $\vec{U}^{(j)}$ по векторам $[[\vec{l}, \nabla T], \nabla T], \nabla T$:

$$\vec{U}^{(j)} = \frac{2K_{Tsl}\eta}{3T_0\rho_e (|\nabla T|l)^2} [1 - \varphi_1(\tau\varphi_1(\chi^3\varphi_1(\tau_b))) + C_T \lambda/a] \times \\ \times \{[u^-(t, \Lambda^{(d)}) - u^+(t, \Lambda^{(d)})](\vec{l}, \nabla T)[[\vec{l}, \nabla T], \nabla T] - \\ - [u^-(t, \Lambda^{(d)}) - u^+(t, \Lambda^{(d)})](\vec{l}, \nabla T)^2 + u^+(t, \Lambda^{(d)})(l|\nabla T|^2)\nabla T\}, \quad (16)$$

или в другой форме:

$$\vec{U}^{(j)} = \frac{2K_{Tsl}\eta|\nabla T|}{3T_0\rho_e} [1 - \varphi_1(\tau\varphi_1(\chi^3\varphi_1(\tau_b))) + C_T \lambda/a] \times \\ \times \left[\frac{u^-(t, \Lambda^{(d)}) - u^+(t, \Lambda^{(d)})}{2} \sin 2\alpha \vec{k}' - \right. \\ \left. - \left(\frac{u^-(t, \Lambda^{(d)}) + u^+(t, \Lambda^{(d)})}{2} + \frac{u^-(t, \Lambda^{(d)}) - u^+(t, \Lambda^{(d)})}{2} \cos 2\alpha \right) \vec{i}' \right], \quad (17)$$

где $\vec{i}' = |\nabla T|^{-1} \nabla T$, $\vec{k}' = [([\vec{l}, \nabla T], \nabla T)]^{-1} [[\vec{l}, \nabla T], \nabla T]$ ($\vec{k}' = 0$, если векторы \vec{l} и ∇T коллинеарны). При $\alpha \in [0, \pi/2]$ коэффициент при \vec{k}' в формуле (17) имеет экстремум в точке $\alpha = \pi/4$, а коэффициент при \vec{i}' является монотонной функцией.

Вычисления с точностью до $o(t^7)$. Отбросим в матрицах $M^{(1)}$, $M_\beta^{(1)}$, $M_\gamma^{(1)}$, $M_{\omega 1}^{(1)}$, $M_{\omega 2}^{(1)}$, $M_{\omega 3}^{(1)}$ все элементы вида $o(t^7)$ при $t \rightarrow 0$. Тогда эти матрицы приобретают блочно-диагональную структуру [12]. Пусть $L_{b,k}^{(M)}$ ($k \in N$) – класс блочно-диагональных матриц A , состоящих из двух диагональных блоков следующего вида: A_{11} – некоторая конечная матрица с размерами $k \times k$, A_{22} – диагональная матрица из $L_1^{(M)}$. Класс $L_{b,k}^{(M)}$ является подмножеством класса $L_1^{(M)}$ и замкнут относительно операций умножения на число, сложения, вычитания и умножения матриц. Эти операции сводятся к операциям над соответствующими диагональными блоками, а если $A \in L_{b,k}^{(M)}$ и $(E + A)^{-1} \in L_1^{(M)}$, то $(E + A)^{-1} \in L_{b,k}^{(M)}$ (для обращения матрицы $E + A$ достаточно обратить ее диагональные блоки). При вычислении с точностью до $o(t^7)$ матрицы $M^{(1)}$, $M_\beta^{(1)}$, $M_\gamma^{(1)}$, $M_{\omega 1}^{(1)}$, $M_{\omega 2}^{(1)}$,

$M_{\omega_3}^{(1)}$ окажутся элементами класса $L_{b,7}^{(M)}$, а все матричные операции, присутствующие в формулах для $f^\pm(t, \Lambda)$, $h^+(t, \Lambda)$, $g^+(t, \Lambda)$, не выводят из $L_{b,7}^{(M)}$. Так как в формулах для $f^\pm(t, \Lambda)$, $h^+(t, \Lambda)$, $g^+(t, \Lambda)$ после выполнения матричных операций находится первый диагональный элемент результата, то достаточно проводить все матричные операции с первыми диагональными блоками.

Несложно составить компьютерную программу (в пределах возможностей Excel), выполняющую операции сложения, вычитания, умножения первых диагональных блоков матриц, входящих в вышеприведенные формулы, с точностью до $o(t^7)$. Что касается обратных матриц, то в случае нильпотентных матриц с показателем нильпотентности $k \in N$ (т.е. $A^i = 0$ при $i \geq k$ с точностью до $o(t^7)$) $(E + A)^{-1} = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i A^i$. Показатели нильпотентности матриц $M^{(0)}\Lambda_1^{-1}$, $M^{(1)}\Lambda_1^{-1}$, $M_{\omega_2}^{(1)}$, R^- , R^+ равны, соответственно, 3, 3, 3, 8, 8. Что касается формул, в которых присутствует $\Lambda^{(d)}$, то

$$\begin{aligned} E_1^T (E - R^-)^{-1} \Lambda_4 (E - \Lambda) (E - M^{(0)}\Lambda)^{-1} E_1 &= \\ &= (E_1^T (E - R^-)^{-1} E_1) (E_1^T \Lambda_4 (E - \Lambda) (E - M^{(0)}\Lambda)^{-1} E_1) + \\ &+ (E_1^T (E - R^-)^{-1} E_2) (E_2^T \Lambda_4 (E - \Lambda) (E - M^{(0)}\Lambda)^{-1} E_1), \\ E_1^T (E + R^+)^{-1} \Lambda_4 (E - \Lambda) (E + M^{(1)}\Lambda)^{-1} E_1 &= \\ &= (E_1^T (E + R^+)^{-1} E_1) (E_1^T \Lambda_4 (E - \Lambda) (E + M^{(1)}\Lambda)^{-1} E_1), \\ E_1^T (E + M_{\omega_2}^{(1)})^{-1} M_{\omega_3}^{(1)} (E + R^+)^{-1} \Lambda_4 (E - \Lambda) (E + M^{(1)}\Lambda)^{-1} E_1 &= \\ &= (E_1^T (E + M_{\omega_2}^{(1)})^{-1} M_{\omega_3}^{(1)} (E + R^+)^{-1} E_1) (E_1^T \Lambda_4 (E - \Lambda) (E + M^{(1)}\Lambda)^{-1} E_1) + \\ &+ (E_1^T (E + M_{\omega_2}^{(1)})^{-1} M_{\omega_3}^{(1)} (E + R^+)^{-1} E_2) (E_2^T \Lambda_4 (E - \Lambda) (E + M^{(1)}\Lambda)^{-1} E_1) \end{aligned}$$

с точностью до $o(t^7)$, где $E_2 = (0, 1, 0, \dots)^T$, Λ – диагональная матрица, $\Lambda \in L_1^{(M)}$ и $\|\Lambda\| \leq 1$. Первые множители в этих произведениях легко найти с помощью вышеупомянутой компьютерной программы. Такой подход приводит к формулам:

$$\begin{aligned} u^-(t, \Lambda^{(d)}) &= 1 + [1 + 2(\Lambda^{(d)})_{11}]t^3 + \{-7,5 + 2(\Lambda^{(d)})_{11} + 4[(\Lambda^{(d)})_{11}]^2 + \\ &+ 13,5(\Lambda^{(d)})_{11} [1 - (\Lambda^{(d)})_{22}] / [1 - (\Lambda^{(d)})_{11}]\}t^6, \\ h^+(t, \Lambda) &= -\{0,25t^2 + 0,125t^5 - [2,0625 + 2,25(\Lambda)_{11}(1 - (\Lambda)_{22}) / (1 - (\Lambda)_{11})]\}t^7, \\ h(t, \Lambda_1^{-1}) - h(t, \Lambda^{(d)}) &= O(t^7), \quad g^+(t, \Lambda) = 1 - 0,5t^3 - 3,5t^6 + 0,75t^7, \\ u^+(t, \Lambda^{(d)}) &= 1 - [0,5 + (\Lambda^{(d)})_{11}]t^3 + [0,5(\Lambda^{(d)})_{11} + ((\Lambda^{(d)})_{11})^2]t^6, \\ f^+(t, \Lambda^{(d)}) / g^+(t, \Lambda_1^{-1}) [h^+(t, \Lambda_1^{-1}) - h^+(t, \Lambda^{(d)})] &= -[2,5 + 2(\Lambda^{(d)})_{11} - 4,5(\Lambda^{(d)})_{11}(\Lambda^{(d)})_{22}]t^7. \end{aligned}$$

Вычисления по точным формулам. Точные формулы (12)-(17) содержат бесконечномерные матрицы. Но несложно составить компьютерные программы (для этого достаточны возможности Excel), основанные на полученных точных формулах, для расчета величин $f^\pm(t, \Lambda^{(d)})$, $f^\pm(t, \Lambda_1^{-1})$, $h^+(t, \Lambda^{(d)})$, $h^+(t, \Lambda_1^{-1})$, $g^+(t, \Lambda^{(d)})$, $g^+(t, \Lambda_1^{-1})$ (интересующие нас величины выражаются через них). Для матрицы $A \in L_3^{(M)}$ определим при любом фиксированном $k \geq 3$ матрицу $A^{[k]}$, которая получена путем обнуления

всех элементов a_{sn} матрицы A при $s+n \geq k$, и матрицу $A^{[k]} = A - A^{[k]}$. Тогда $A = A^{[k]} + A^{[k]}$, $A^{[k]} \rightarrow 0$ в $L_2^{(M)}$ при $k \rightarrow \infty$. Матрица $A^{[k]}$ имеет блочно-диагональную структуру и состоит из двух диагональных блоков. Первый диагональный блок имеет размеры $(k-2) \times (k-2)$, а второй диагональный блок является нулевой матрицей. В формулах для величин $f^\pm(t, \Lambda^{(d)})$, $f^\pm(t, \Lambda_1^{-1})$, $h^+(t, \Lambda^{(d)})$, $h^+(t, \Lambda_1^{-1})$, $g^+(t, \Lambda^{(d)})$, $g^+(t, \Lambda_1^{-1})$ заменим матрицы $M^{(0)}$, $M_\beta^{(0)}$, $M_\gamma^{(0)}$, $M^{(1)}$, $M_\beta^{(1)}$, $M_\gamma^{(1)}$, $M_{\omega 1}^{(1)}$, $M_{\omega 2}^{(1)}$, $M_{\omega 3}^{(1)}$ на матрицы $M^{(0)[k]}$, $M_\beta^{(0)[k]}$, $M_\gamma^{(0)[k]}$, $M^{(1)[k]}$, $M_\beta^{(1)[k]}$, $M_\gamma^{(1)[k]}$, $M_{\omega 1}^{(1)[k]}$, $M_{\omega 2}^{(1)[k]}$, $M_{\omega 3}^{(1)[k]}$ при некотором $k \geq 3$. Достаточно использовать первые блоки матриц, входящих в эти формулы (они принадлежат классу $L_{b, k-2}^{(M)}$). Полученные таким образом значения с ростом k стремятся к точным. Расчеты проводились с помощью программы Excel при $k=54$, что обеспечивает высокую точность.

Заключение. Математический аппарат теории линейных операторов, отображающих банахово пространство в себя, позволяет найти точное решение задачи о термофореze двух крупных твердых сферических двухслойных частиц с учетом скачка температуры на их поверхности при любой ориентации дублета относительно постоянного на большом удалении от него градиента температуры. От бесконечномерных операторов можно перейти к их конечномерным аналогам и вычислять требуемые величины с любой точностью, так как точные формулы записаны только через операции, реализованные в компьютерных программах (например, в Excel) в виде стандартных функций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Яламов Ю.И., Галоян В.С. Динамика капель в неоднородных вязких средах. Луйс, Ереван, 1985.
2. Яламов Ю.И., Мелехов А.П., Гайдуков М.Н. Термофорез гидродинамически взаимодействующих аэрозольных частиц // ДАН СССР. 1986. Т. 287. № 2. С. 337-341.
3. Татевосян А.М., Яламов Ю.И. Термофорез крупной двухслойной сферической частицы // Коллоидный журнал. 1978. Т. 40. № 1. С. 88-91.
4. Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. Наука, М., 1980.
5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. Наука, М., 1988.
6. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. Наука, М., 1972.
7. Бицадзе Б.М., Калинин Д.Ф. Сборник задач по уравнениям математической физики. Наука, М., 1977.
8. Хаппель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. Мир, М., 1976.
9. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. Наука, М., 1976.
10. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. Физматгиз, М., 1961.
11. Мелехов А.П. Термофорез гидродинамически взаимодействующих аэрозольных частиц: Дисс. к. физ.-мат. н. М., 1984.
12. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. Наука, М., 1970.

УДК 533.72

**ТЕОРИЯ ФОТОФОРЕЗА ДУБЛЕТОВ КРУПНЫХ ТВЕРДЫХ
СФЕРИЧЕСКИХ АЭРОЗОЛЬНЫХ ЧАСТИЦ****А.С. Хасанов¹, И.М. Арсланов²**¹ *Российская экономическая академия им. Г.В. Плеханова,
113054 г. Москва, Стремянный пер., 36.*² *Камская государственная инженерно-экономическая академия,
423810 Татарстан, г. Набережные Челны, Проспект Мира, д.11/18.*

Построена теория фотофореза дублетов крупных твердых сферических аэрозольных частиц в случае, когда направление распространения оптического излучения перпендикулярно линии центров частиц. Получены формулы для скоростей фотофореза и угловых скоростей вращения аэрозольных частиц. Приведены формулы для практических расчетов.

Введение. Движение частицы в газовой среде под действием оптического излучения происходит под действием светового давления и фотофоретической силы, обусловленной неравномерным нагревом поверхности частицы. В случае прозрачных частиц основную роль играет световое давление, а для поглощающих частиц преобладающим является фотофоретическая сила. При взаимодействии оптического излучения с такой частицей внутри нее появляются источники тепла с некоторой объемной плотностью, которые неоднородно нагревают поверхность частицы. В случае крупных частиц, т.е. при малых числах Кнудсена λ/a [1], где λ – средняя длина свободного пробега газовых молекул, a – радиус частицы, задача о фотофорезе решается гидродинамическим методом (газ рассматривается как сплошная среда). Характер фотофореза зависит от гидродинамического взаимодействия с близко расположенными частицами, но это взаимодействие отличается от гидродинамического взаимодействия в других внешних полях (например, в поле градиента температуры). В работе рассмотрено движение дублета из двух одинаковых крупных твердых сферических однородных аэрозольных частиц в случае, когда направление распространения однородного потока оптического излучения перпендикулярно линии центров частиц. Результаты могут быть обобщены на случай двухслойных и многослойных частиц с учетом скачка температуры на их поверхностях.

Уравнения теплопроводности. Пусть две одинаковые крупные твердые сферические однородные аэрозольные частицы взвешены в газе (газ будем считать однокомпонентным), O_1 и O_2 – центры частиц, l – расстояние между центрами, O – середина отрезка O_1O_2 . На частицы падает однородный поток оптического излучения с интенсивностью $E^{(o)}$ так, что направление распространения излучения перпендикулярно линии центров частиц. Выберем декартову систему координат $Oxuz$, в которой направление оси Oz совпадает с направлением луча O_1O_2 , а направление оси Ox – с направлением распространения излучения. Путем параллельного переноса системы $Oxuz$ в точки O_1

и O_2 получим еще две системы координат $Ox_1y_1z_1$ и $Ox_2y_2z_2$. Сферические координаты в этих системах обозначим через r_1, θ_1, φ_1 и r_2, θ_2, φ_2 . Пусть T_e – поле температуры в газе, T_{∞} – температура в газе на большом удалении от частиц. Будем считать, что относительные перепады температуры в газе являются величинами малыми: $|(T_e - T_{\infty})/T_{\infty}| \ll 1$. Пусть κ_i и κ_e – коэффициенты теплопроводности частиц и газа, $T_i^{(j)}$ и $q^{(j)}$ – поле температуры и объемная плотность тепловых источников внутри j -й частицы (верхний индекс $j \in \{1, 2\}$ означает номер частицы). Плотности $q^{(j)}$ имеют вид [2]: $q^{(j)} = q(r_j/a, \sin \theta_j \cos \varphi_j)$, где q – известная функция двух переменных, определенная на декартовом произведении $[0, 1] \times [-1, 1]$, кусочно-непрерывная по первой переменной и дважды дифференцируемая по второй переменной. Влияние одной частицы на распределение источников тепла в другой частице считается малым (примером такого случая является случай поглощения излучения по принципу черного тела). При малых относительных перепадах температуры в газе поля температур можно изучать в квазистационарном режиме, число Пекле (характеризующее отношение между конвективными и молекулярными процессами переноса тепла) является величиной малой. Поле T_e описывается уравнением $\nabla^2 T_e = 0$ [2], где $T_e \rightarrow T_{\infty}$ при $r \rightarrow \infty$, поля температуры $T_i^{(j)}$ – уравнениями [3] $\text{div}(-\kappa_i \nabla T_i^{(j)}) = q^{(j)}$ или $\nabla^2 T_i^{(j)} = -q^{(j)}/\kappa_i$, где $\sup_{r_j \leq a} |T_i^{(j)}| < +\infty$. На поверхностях частиц выполняются граничные условия: $T_e = T_i^{(j)}$, $\kappa_e \frac{\partial T_e}{\partial r_j} = \kappa_i \frac{\partial T_i^{(j)}}{\partial r_j}$ при $r_j = a$. Пусть $t = a/l$. Будем считать, что минимальный зазор между частицами равен $0,01a$. Это выполнено при $l \geq a + a + 0,01a = 2,01a$, т.е. $0 \leq t \leq 0,4975$. При $l \rightarrow \infty$ теория фотофореза дублетов должна перейти в теорию фотофореза одиночной частицы. В тепловой части задачи необходимо найти поля температур T_e и $T_i^{(j)}$.

Решение уравнений теплопроводности. На основе свойств гармонических функций [4, 5] можно доказать единственность решения тепловой части задачи. Пусть:

$$Y_n^{(-m,j)} = \sin^m \theta_j \frac{d^m P_n(\cos \theta_j)}{d \cos^m \theta_j} \cos m \varphi_j,$$

$$Y_n^{(+m,j)} = \sin^m \theta_j \frac{d^m P_n(\cos \theta_j)}{d \cos^m \theta_j} \sin m \varphi_j,$$

$$P_n^{(m)}(\cos \theta_j) = \sin^m \theta_j \frac{d^m P_n(\cos \theta_j)}{d \cos^m \theta_j},$$

где $m \leq n$, $j \in \{1, 2\}$.

Поле T_e ищем в виде [4]:

$$T_e = T_{\infty} \left[1 + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n x_{nm}^{(e)} (a/r_1)^{n+1} Y_n^{(-m,1)} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n x_{nm}^{(e)} (a/r_2)^{n+1} (-1)^{n+m} Y_n^{(-m,2)} \right],$$

где $x_{nm}^{(e)}$ – неопределенные коэффициенты.

Так как вблизи первой частицы [6] при $r_1 < l$:

$$(-1)^{n+m} Y_n^{(\pm m, 2)} (a/r_2)^{n+1} = \sum_{s=m}^{\infty} C_{n+s}^{n-m} t^{n+s+1} (r_1/a)^s Y_s^{(\pm m, 1)},$$

то при $r_1 < l$

$$T_e = T_{e\infty} [1 + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n x_{nm}^{(e)} (a/r_1)^{n+1} Y_n^{(-m, 1)} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{s=m}^{\infty} x_{nm}^{(e)} C_{n+s}^{n-m} t^{n+s+1} (r_1/a)^s Y_s^{(-m, 1)}].$$

Так как

$$Y_n^{(\pm m, 1)} (a/r_1)^{n+1} = \sum_{s=m}^{\infty} C_{n+s}^{n-m} t^{n+s+1} (r_2/a)^s (-1)^{s+m} Y_s^{(\pm m, 2)} \text{ при } r_2 < l,$$

то в системе координат с центром в O_2 :

$$T_e = T_{e\infty} [1 + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n x_{nm}^{(e)} (a/r_2)^{n+1} (-1)^{n+m} Y_n^{(-m, 2)} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{s=m}^{\infty} x_{nm}^{(e)} C_{n+s}^{n-m} t^{n+s+1} (r_2/a)^s (-1)^{s+m} Y_s^{(-m, 2)}].$$

Поля $T_i^{(j)}$ ищем в виде

$$T_i^{(1)} = T_0 + T_{e\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n g_{nm} (r_1/a) Y_n^{(-m, 1)},$$

$$T_i^{(2)} = T_0 + T_{e\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n g_{nm} (r_2/a) (-1)^{n+m} Y_n^{(-m, 2)},$$

где g_{nm} – безразмерные неизвестные функции, заданные на отрезке $[0,1]$ и удовлетворяющие условиям $g_{nm}(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$. Так как при каждом фиксированном r_j функции $q^{(j)}$ дважды дифференцируемы по θ_j и φ_j , то [4] они могут быть представлены в виде абсолютно и равномерно сходящихся рядов по сферическим функциям:

$$q^{(j)} = \kappa_i T_{e\infty} / a^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (2n+1) q_{nm} (r_j/a) Y_n^{(-m, j)},$$

где

$$q_{nm} (r_j/a) = \frac{a^2}{2\pi \kappa_i T_{e\infty} (1 + \delta_{m0})} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} q(r_j/a, \sin \theta_j \cos \varphi_j) Y_n^{(-m, j)} \sin \theta_j d\theta_j d\varphi_j, \quad (1)$$

δ_{mn} – символ Кронекера.

Из симметрий в задаче следует, что в разложении $q^{(j)}$ отсутствуют функции $Y_n^{(+m,j)}$ и $q_{nm} = 0$, если не выполнено условие $m \equiv n \pmod{2}$. Следовательно, $(-1)^{n+m} q_{nm} = q_{nm}$. Подставив разложения $T_i^{(j)}$ и $q^{(j)}$ в соответствующее дифференциальное уравнение и приравняв коэффициенты при одинаковых сферических функциях в левой и правой его частей, получим дифференциальное уравнение, решением которого является неизвестная функция g_{nm} : $y''(x) + 2/x y'(x) - n(n+1)/x^2 y(x) = -(2n+1)q_{nm}(x)$. Решая это уравнение стандартными методами [2, 7], получим:

$$y(x) = x_{nm}^{(i)} x^n + y_{nm}^{(i)} x^{-n-1} - x^n \int_1^x q_{nm}(x) x^{1-n} dx + x^{-n-1} \int_1^x q_{nm}(x) x^{n+2} dx,$$

где $x_{nm}^{(i)}$ и $y_{nm}^{(i)}$ – неопределенные коэффициенты.

Так как $g_{nm}(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$, то

$$x_{00}^{(i)} = - \int_0^1 q_{00}(x) x dx, \quad y_{nm}^{(i)} = \int_0^1 q_{nm}(x) x^{n+2} dx.$$

Отсюда:

$$T_i^{(1)} = T_0 + T_{e\infty} \left\{ a/r_1 \int_0^{r_1/a} q_{00}(x) x^2 dx - \int_0^{r_1/a} q_{00}(x) x dx + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n [x_{nm}^{(i)} (r_1/a)^n - (r_1/a)^n \int_1^{r_1/a} q_{nm}(x) x^{1-n} dx + (a/r_1)^{n+1} \int_0^{r_1/a} q_{nm}(x) x^{n+2} dx] Y_n^{(-m,1)} \right\},$$

$$T_i^{(2)} = T_0 + T_{e\infty} \left\{ a/r_2 \int_0^{r_2/a} q_{00}(x) x^2 dx - \int_0^{r_2/a} q_{00}(x) x dx + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n [x_{nm}^{(i)} (r_2/a)^n - \right. \\ \left. - (r_2/a)^n \int_1^{r_2/a} q_{nm}(x) x^{1-n} dx + (a/r_2)^{n+1} \int_0^{r_2/a} q_{nm}(x) x^{n+2} dx] (-1)^{n+m} Y_n^{(-m,2)} \right\}.$$

Из граничных условий на поверхности первой частицы следует, что

$$T_{e\infty} \left[1 + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n x_{nm}^{(e)} Y_n^{(-m,1)} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{s=m}^{\infty} x_{nm}^{(e)} C_{n+s}^{n-m} t^{n+s+1} Y_s^{(-m,1)} \right] = \\ = T_0 + T_{e\infty} \left\{ \int_0^1 q_{00}(x) x^2 dx - \int_0^1 q_{00}(x) x dx + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n [x_{nm}^{(i)} + \int_0^1 q_{nm}(x) x^{n+2} dx] Y_n^{(-m,1)} \right\}, \quad (2)$$

$$\kappa_e T_{e\infty} / a \left[\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n x_{nm}^{(e)} (-n-1) Y_n^{(-m,1)} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{s=m}^{\infty} x_{nm}^{(e)} C_{n+s}^{n-m} t^{n+s+1} s Y_s^{(-m,1)} \right] = \\ = \kappa_i T_{e\infty} / a \left\{ - \int_0^1 q_{00}(x) x^2 dx + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n [n x_{nm}^{(i)} - (n+1) \int_0^1 q_{nm}(x) x^{n+2} dx] Y_n^{(-m,1)} \right\}. \quad (3)$$

Из уравнения (3) следует, что

$$x_{00}^{(e)} = 1/\tau \int_0^1 q_{00}(x)x^2 dx,$$

где $\tau = \kappa_e/\kappa_i$.

Из уравнения (2) следует:

$$T_0 = T_{e\infty} [1 + (1+t-\tau)/\tau \int_0^1 q_{00}(x)x^2 dx + \int_0^1 q_{00}(x)xdx + \sum_{n=1}^{\infty} x_{n0}^{(e)} t^{n+1}].$$

Для нахождения T_0 достаточно найти вектор $X_e^{(0)} = (x_{10}^{(e)}, x_{20}^{(e)}, \dots)^T$.

Введем обозначения:

$$X_e^{(m)} = (x_{1m}^{(e)}, x_{2m}^{(e)}, \dots)^T, \quad X_i^{(m)} = (x_{1m}^{(i)}, x_{2m}^{(i)}, \dots)^T, \quad I^{(m)} = (I_{1m}, I_{2m}, \dots)^T,$$

где

$$I_{nm} = \int_0^1 q_{nm}(x)x^{n+2} dx. \quad (4)$$

Ясно, что $I_{nm} = 0$, если не выполнено условие $n \equiv m \pmod{2}$. Следовательно, $I_{nm} = (-1)^{n+m} I_{nm}$. Пусть J_0 – бесконечномерный вектор, s -я координата которого определена по формуле:

$$(J_0)_s = t^{s+1}/\tau \int_0^1 q_{00}(x)x^2 dx. \quad (5)$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых сферических функциях при $Y_s^{(-m,1)}$ в левой и правой частях уравнений (2)-(3), где $s \geq 1$, получим систему уравнений относительно неопределенных коэффициентов. Для описания движения дублета достаточно рассмотреть случай $m \in \{0,1\}$. Систему уравнений относительно неопределенных коэффициентов можно записать в виде:

$$x_{sm}^{(e)} + \sum_{n=1}^{\infty} x_{nm}^{(e)} C_{n+s}^{n-m} t^{n+s+1} = x_{sm}^{(i)} + I_{sm} - \delta_{m0} (J_0)_s, \quad (6)$$

$$-(s+1)/s x_{sm}^{(e)} + \sum_{n=1}^{\infty} x_{nm}^{(i)} C_{n+s}^{n-m} t^{n+s+1} = 1/\tau [x_{sm}^{(i)} - (s+1)/s I_{sm}] - \delta_{m0} (J_0)_s, \quad (7)$$

где $s \geq 1$. Учет граничных условий на границе второй частицы приводит к тем же уравнениям.

Для решения нашей задачи достаточно найти $X_e^{(m)} = (x_{1m}^{(e)}, x_{2m}^{(e)}, \dots)^T$, $X_i^{(m)} = (x_{1m}^{(i)}, x_{2m}^{(i)}, \dots)^T$ при $m \in \{0,1\}$. Неизвестные векторы будем искать в полном линейном нормированном пространстве (т.е. в банаховом пространстве) l_1 [8], состоящем из векторов $X = (x_1, x_2, \dots)^T$, для которых $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| < +\infty$ ($\|X\| = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|$). Пусть L – банахово пространство ограниченных линейных операторов [8], действующих из l_1 в l_1 , а $L_1^{(M)}$ – пространство матриц A с бесконечным числом строк и столбцов с нормой

$\|A\| = \sup_n \sum_{s=1}^{\infty} |a_{sn}|$. Оператор $B \in L$ задается с помощью некоторой матрицы $A \in L_1^{(M)}$ по формуле $BX = AX$, где $X \in l_1$, AX – произведение матрицы A на вектор X . Норма оператора B , согласованная с нормой вектора X , совпадает с $\|A\| = \sup_n \sum_{s=1}^{\infty} |a_{sn}|$. Для обозначения матрицы и порожденного ею оператора используется одно и то же обозначение. Пусть $\varphi_s(x) = (1-x)/[1+(1+1/s)x]$, $(A)_{sn}$ – элемент матрицы A . Матрицы $M^{(m)}$ при $m \in \{0,1\}$, Λ_e и Λ_1 определены по формулам $(M^{(m)})_{sn} = C_{n+s}^{n-m} t^{n+s+1}$, $(\Lambda_1)_{sn} = [-(s+1)/s]\delta_{sn}$ и $(\Lambda_e)_{sn} = \varphi_s(\tau)\delta_{sn}$. Ясно, что $\|\Lambda_1\| = 2$. Можно доказать, что $\|M^{(m)}\| \leq t/(1-t) < 1$ при $t \in [0, t_0]$ и $m \in \{0,1\}$, т.е. оператор $M^{(m)}$ является сжимающим. Так как $-1 < \varphi_s(x) \leq 1$ при $x \geq 0$, то $\|\Lambda_e\| \leq 1$.

Систему уравнений (6)-(7) можно переписать в операторном виде:

$$\begin{aligned} X_e^{(m)} + M^{(m)} X_e^{(m)} &= X_i^{(m)} + I^{(m)} - \delta_{m0} J_0, \\ \Lambda_1 X_e^{(m)} + M^{(m)} X_e^{(m)} &= 1/\tau X_i^{(m)} + 1/\tau \Lambda_1 I^{(m)} - \delta_{m0} J_0. \end{aligned}$$

Ясно, что $J_0, I^{(m)} \in l_1$. Отсюда:

$$X_e^{(m)} = (E + \Lambda_e M^{(m)})^{-1} (E - \Lambda_1 \Lambda_e I^{(m)}), \tag{8}$$

$$X_i^{(m)} = \delta_{m0} J_0 + [(E + M^{(m)})(E + \Lambda_e M^{(m)})^{-1} (E - \Lambda_1 \Lambda_e) - E] I^{(m)}, \tag{9}$$

где E – единичный оператор.

Если оператор A отображает банахово пространство l_1 в себя и $\|A\| < 1$, то [8] $(E \pm A)^{-1} \in L$, $(E \pm A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\mp A)^n$. Так как $\|\Lambda_e M^{(m)}\| \leq \|\Lambda_e\| \|M^{(m)}\| < 1$, то $(E \pm \Lambda_e M^{(m)})^{-1} \in L$. Ясно, что $X_e^{(m)}, X_i^{(m)} \in l_1$.

Уравнения гидродинамики. Взаимодействие газа с неоднородно нагретой поверхностью частицы приводит к тепловому скольжению [1] газа по ее поверхности. В этих условиях создается действующий на частицу импульс, под действием которого она приходит в ускоренное движение. На частицу также действует сила вязкого сопротивления внешней среды, которая увеличивается с ростом скорости [6] и уравнивает фотофоретическую силу, что позволяет определить мгновенную фотофоретическую скорость частицы. При малых относительных перепадах температуры в газе число Рейнольдса является величиной малой [2], т.е. движение газа относительно частицы является медленным вязким течением. Поля скорости и давления можно изучать в квазистационарном режиме [2]. Для нахождения мгновенной фотофоретической скорости j -й частицы используется условие равенства нулю результирующей силы $\vec{F}^{(j)}$, действующей на j -ю частицу: $\vec{F}^{(j)} = 0$. Частица совершает и вращательное движение вокруг оси, проходящей через ее центр масс O_j . Результирующий крутящий момент $\vec{T}^{(j)}$, дей-

ствующий на j -ю частицу, равен нулю: $\vec{T}^{(j)} = 0$. В теории фотофореза предполагается единственность мгновенной поступательной скорости движения $\vec{U}^{(j)}$ и мгновенной угловой скорости вращения $\vec{\omega}^{(j)}$ j -й частицы. На поверхности j -й частицы генерируется поле скоростей в газе:

$$\vec{V}^{(j)} = \vec{U}^{(j)} + [\vec{\omega}^{(j)}, \vec{r}_j] + \frac{K_{Tsl}\eta}{T_0\rho_e a} \nabla_{\theta_j, \varphi_j} T_e, \quad (10)$$

где $r_j = a$, а запись $[\vec{a}, \vec{b}]$ означает векторное произведение, K_{Tsl} , ρ_e , η – соответственно, коэффициент теплового скольжения ($K_{Tsl} = 1,169$), плотность и динамическая вязкость газа, $\nabla_{\theta_j, \varphi_j} = \vec{i}_{\theta_j} \frac{\partial}{\partial \theta_j} + \vec{i}_{\varphi_j} \frac{1}{\sin \theta_j} \frac{\partial}{\partial \varphi_j}$.

При малых относительных перепадах температуры в газе использование в граничных условиях для обеих частиц одного и того же значения T_0 правомерно. Пусть \vec{v} и p – поля скорости и давления в газе. Оценки показывают [2], что поля \vec{v} и p могут быть определены из линеаризованных уравнений Стокса $\eta \nabla^2 \vec{v} = \nabla p$, $(\nabla, \vec{v}) = 0$, где $\lim_{r \rightarrow \infty} \vec{v} = 0$ и $\lim_{r \rightarrow \infty} p = p_{e\infty}$ при $r \rightarrow \infty$, а запись (\vec{a}, \vec{b}) означает скалярное произведение векторов \vec{a} и \vec{b} . В гидродинамической части задачи необходимо найти решения \vec{v} и p уравнений $\eta \nabla^2 \vec{v} = \nabla p$, $(\nabla, \vec{v}) = 0$, удовлетворяющие граничным условиям $\vec{v} = \vec{V}^{(j)}$ при $r_j = a$ и сформулированным выше условиям на бесконечности. Основной целью гидродинамической части задачи является нахождение векторов $\vec{U}^{(j)}$ и $\vec{\omega}^{(j)}$.

Решение уравнений гидродинамики. Из единственности решения тепловой части задачи и из единственности векторов $\vec{U}^{(j)}$, $\vec{\omega}^{(j)}$ следует единственность решения и гидродинамической части задачи [9]. Поля \vec{v} и p будем искать в виде $\vec{v} = \vec{v}^{(1)} + \vec{v}^{(2)}$, $p = p_{e\infty} + p^{(1)} + p^{(2)}$, где $\vec{v}^{(j)}$, $p^{(j)}$ – возмущения, вызванные движением j -й частицы и определяемые из уравнений Стокса $\eta \nabla^2 \vec{v}^{(j)} = \nabla p^{(j)}$, $(\nabla, \vec{v}^{(j)}) = 0$, где $\lim_{r \rightarrow \infty} \vec{v}^{(j)} = 0$ и $\lim_{r \rightarrow \infty} p^{(j)} = 0$ при $r_j \rightarrow \infty$. Поля $\vec{v}^{(j)}$, $p^{(j)}$ имеют вид [6]:

$$\vec{v}^{(j)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \nabla \Phi_{-n-1}^{(j)} + [\nabla, \chi_{-n-1}^{(j)} \vec{r}_j] - \frac{(n-2)r_j^2}{2\eta n(2n-1)} \nabla p_{-n-1}^{(j)} + \frac{(n+1)\vec{r}_j}{\eta n(2n-1)} p_{-n-1}^{(j)} \right\},$$

$$p^{(j)} = \sum_{n=1}^{\infty} p_{-n-1}^{(j)},$$

где $\Phi_{-n-1}^{(j)} = r_j^{-n-1} \sum_{m=0}^n A_{nm}^{(j)} Y_n^{(-m,j)}$, $p_{-n-1}^{(j)} = r_j^{-n-1} \sum_{m=0}^n D_{nm}^{(j)} Y_n^{(-m,j)}$, $\chi_{-n-1}^{(j)} = r_j^{-n-1} \sum_{m=0}^n C_{nm}^{(j)} Y_n^{(+m,j)}$,

а $A_{nm}^{(j)}$, $D_{nm}^{(j)}$, $C_{nm}^{(j)}$ – неопределенные коэффициенты.

Пусть $D_{nm}^{(j)} = \frac{\eta n(2n-1)}{n+1} B_{nm}^{(j)}$. Тогда

$$\vec{v}^{(j)} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \{ A_{nm}^{(j)} \nabla H_{-n-1}^{(-m,j)} + C_{nm}^{(j)} [\nabla, H_{-n-1}^{(+m,j)} \vec{r}_j] + \alpha_n r_j^2 B_{nm}^{(j)} \nabla H_{-n-1}^{(-m,j)} + B_{nm}^{(j)} \vec{r}_j H_{-n-1}^{(-m,j)} \},$$

$$p^{(j)} = \eta \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{n(2n-1)}{n+1} B_{nm}^{(j)} H_{-n-1}^{(-m,j)},$$

где $\alpha_n = 0,5(2-n)/(n+1)$.

Скорости $\vec{U}^{(j)}$ и $\vec{\omega}^{(j)}$ ищем в виде $\vec{U}^{(j)} = U_0 [u_x \vec{i} + (-1)^j u_z \vec{k}]$, $\vec{\omega}^{(j)} = (-1)^{j+1} U_0 / a \vec{\omega} \vec{j}$, где U_0 – величина фотофоретической скорости одиночной частицы, а u_x , u_z и ω – неизвестные безразмерные постоянные величины, $j \in \{1,2\}$. Пусть

$$\gamma_{sn}^{(m)} = \frac{(s-m)(s+m)[sn-2(s+n)+1]}{s(2s-1)(n+1)(n+s)} + \frac{2-n}{2(n+1)}, \quad \beta_{sn} = \frac{n(2n-1)}{2(n+1)(2s+3)},$$

$$A_{nm}^{(1)} = U_0 a^{n+2} a_{nm}, \quad A_{nm}^{(2)} = (-1)^{n+m} U_0 a^{n+2} a_{nm},$$

$$\Lambda_1 A^{(m)} + 0,5 B^{(m)} + M^{(m)} A^{(m)} - M_{\omega 1}^{(1)} C^{(1)} + (M_{\beta}^{(1)} + M_{\gamma}^{(1)}) B^{(1)} = (-u_z \delta_{m0} E_1 + u_x \delta_{m1}) E_1$$

$$B_{nm}^{(2)} = (-1)^{n+m} U_0 a^n b_{nm}^{(2)}, \quad (11)$$

$$C_{nm}^{(1)} = U_0 a^{n+1} c_{nm}, \quad C_{nm}^{(2)} = (-1)^{n+m+1} U_0 a^{n+1} c_{nm}, \quad (12)$$

где a_{nm} , b_{nm} , c_{nm} – безразмерные неопределенные коэффициенты. Учет граничного условия $\vec{v} = \vec{V}^{(j)}$ при $r_j = a$ равносильно [6] учету трех условий при $r_j = a$:

$$v_{r_j} = (r_j^{-1} \vec{r}_j, \vec{V}^{(j)}), \quad r_j \frac{\partial v_{r_j}}{\partial r_j} = -r_j (\nabla, \vec{V}^{(j)}), \quad (\vec{r}_j, [\nabla, \vec{v}]) = (\vec{r}_j, [\nabla, \vec{V}^{(j)}]). \quad (13)$$

Неопределенные коэффициенты находим из граничных условий (13). Рассмотрим граничные условия на поверхности первой частицы. После нахождения левых и правых частей условий (13) и приравнивания коэффициентов при одинаковых сферических функциях левых и правых частей, получим систему уравнений относительно неопределенных коэффициентов. Нахождение коэффициентов сводится к поиску векторов $A^{(m)} = (a_{1m}, a_{2m}, \dots)^T$, $B^{(m)} = (b_{1m}, b_{2m}, \dots)^T$, $C^{(m)} = (c_{1m}, c_{2m}, \dots)^T$. В задаче о фотофорезе достаточно рассмотреть случай $m \in \{0,1\}$.

Поиск векторов будем вести в l_1 . Пусть $L_2^{(M)}$ – линейное пространство матриц с нормой $\|A\|_2 = \sum_{s,n=1}^{\infty} |a_{sn}|$. Ясно, что $L_2^{(M)} \subset L_1^{(M)}$. Обозначим через $L_3^{(M)}$ множество матриц

A , элементы которых удовлетворяют условию $|a_{sn}| \leq P(s,n) C_{n+s}^n t^{n+s-1+q}$, где $q \geq 0$, $P(s,n)$ – многочлен относительно s и n . Можно показать, что $L_3^{(M)} \subset L_2^{(M)}$. Пусть $L_4^{(M)}$ – множество диагональных матриц Λ , элементы которых удовлетворяют условию $|(\Lambda)_{ss}| \leq P(s)$, где $P(s)$ – многочлен относительно s . Множество матриц $L_3^{(M)}$ замкнуто

относительно умножения слева и справа на матрицы из $L_4^{(M)}$. Определим две матрицы из $L_1^{(M)}$ по формулам:

$$(\Lambda_2)_{sn} = (s+2)/s \delta_{sn}, \quad (\Lambda_3)_{sn} = (s-1)/(s+1) \delta_{sn},$$

три матрицы из $L_4^{(M)}$ по формулам:

$$(\Lambda_4)_{sn} = (s+1) \delta_{sn}, \quad (\Lambda_5)_{sn} = (2s+3) \delta_{sn}, \quad (\Lambda_6)_{sn} = (2s+1) \delta_{sn},$$

пять матриц из $L_3^{(M)}$ по формулам:

$$\begin{aligned} (M_{\beta}^{(m)})_{sn} &= C_{n+s}^{n-m} t^{n+s+1} \beta_{sn}, & (M_{\gamma}^{(m)})_{sn} &= C_{n+s}^{n-m} t^{n+s-1} \gamma_{sn}^{(m)}, & (M_{\omega 1}^{(m)})_{sn} &= C_{n+s}^{n-m} t^{n+s} m/s, \\ (M_{\omega 2}^{(m)})_{sn} &= C_{n+s}^{n-m} t^{n+s+1} n/(s+1), & (M_{\omega 3}^{(m)})_{sn} &= C_{n+s}^{n-m} t^{n+s} m(2n-1)/[s(s+1)(n+1)]. \end{aligned}$$

На поверхности первой частицы граничные условия можно записать в операторном виде:

$$\begin{aligned} \Lambda_1 A^{(m)} + 0,5B^{(m)} + M^{(m)} A^{(m)} - M_{\omega 1}^{(m)} C^{(m)} + (M_{\beta}^{(m)} + M_{\gamma}^{(m)}) B^{(m)} &= (u_x \delta_{m1} - u_z \delta_{m0}) E_1, \\ \Lambda_2 A^{(m)} + 0,5\Lambda_1^{-1} B^{(m)} + \Lambda_3 M^{(m)} A^{(m)} - \Lambda_3 M_{\omega 1}^{(m)} C^{(m)} + (M_{\beta}^{(m)} + \Lambda_3 M_{\gamma}^{(m)}) B^{(m)} &= \\ &= K(\delta_{m0} J_0 + X_e^{(m)} + M^{(m)} X_e^{(m)}), \\ C^{(m)} + M_{\omega 2}^{(m)} C^{(m)} + M_{\omega 3}^{(m)} B^{(m)} &= \omega E_1, \end{aligned}$$

где $X_e^{(m)}$ определяется по формулам (8), $E_1 = (1,0,0,\dots)^T$, $K = K_{Tsl} \eta / (U_0 \rho_e a)$.

Граничные условия на поверхности второй частицы приводят к такой же системе. Отсюда:

$$\begin{aligned} B^{(m)} &= -\omega \delta_{m1} (E + R^{(m)})^{-1} \Lambda_6 (E + M^{(m)} \Lambda_1^{-1})^{-1} M_{\omega 1}^{(m)} (E + M_{\omega 2}^{(m)})^{-1} E_1 + \\ &+ u_x \delta_{m1} (E + R^{(m)})^{-1} \Lambda_6 (E + M^{(m)} \Lambda_1^{-1})^{-1} E_1 - \\ &- u_z \delta_{m0} (E + R^{(m)})^{-1} \Lambda_6 (E + M^{(m)} \Lambda_1^{-1})^{-1} E_1 + \\ &+ K(E + R^{(m)})^{-1} \Lambda_4 [\delta_{m0} J_0 + (E + M^{(m)})(E + \Lambda_e M^{(m)})^{-1} (E - \Lambda_1 \Lambda_e) I^{(m)}], \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} C^{(m)} &= -u_z \delta_{m0} (E + M_{\omega 2}^{(m)})^{-1} M_{\omega 3}^{(m)} (E + R^{(m)})^{-1} \Lambda_6 (E + M^{(m)} \Lambda_1^{-1})^{-1} E_1 + \\ &+ u_x \delta_{m1} (E + M_{\omega 2}^{(m)})^{-1} M_{\omega 3}^{(m)} (E + R^{(m)})^{-1} \Lambda_6 (E + M^{(m)} \Lambda_1^{-1})^{-1} E_1 + \omega \delta_{m1} [(E + M_{\omega 2}^{(m)})^{-1} E_1 - \\ &- (E + M_{\omega 2}^{(m)})^{-1} M_{\omega 3}^{(m)} (E + R^{(m)})^{-1} \Lambda_6 (E + M^{(m)} \Lambda_1^{-1})^{-1} M_{\omega 1}^{(m)} (E + M_{\omega 2}^{(m)})^{-1}] E_1 + \\ &+ K(E + M_{\omega 2}^{(m)})^{-1} M_{\omega 3}^{(m)} (E + R^{(m)})^{-1} \Lambda_4 [\delta_{m0} J_0 + \\ &+ (E + M^{(m)})(E + \Lambda_e M^{(m)})^{-1} (E - \Lambda_1 \Lambda_e) I^{(m)}], \end{aligned} \quad (15)$$

где $R^{(m)} = \Lambda_5 M_{\beta}^{(m)} + \Lambda_6 M_{\gamma}^{(m)} + \Lambda_6 M_{\omega 1}^{(m)} (E + M_{\omega 2}^{(m)})^{-1} M_{\omega 3}^{(m)} -$
 $- \Lambda_6 M^{(m)} \Lambda_1^{-1} (E + M^{(m)} \Lambda_1^{-1})^{-1} [0,5E + M_{\beta}^{(m)} + M_{\gamma}^{(m)} + M_{\omega 1}^{(m)} (E + M_{\omega 2}^{(m)})^{-1} M_{\omega 3}^{(m)}].$

Можно показать, что $(E + M^{(m)} \Lambda_1^{-1})^{-1} \in L$, $(E + M_{\omega 2}^{(m)})^{-1} \in L$, $(E + R^{(m)})^{-1} \in L$. Вектор $A^{(m)}$ можно выразить через вектор $B^{(m)}$. Векторы $A^{(m)}$, $B^{(m)}$, $C^{(m)} \in l_1$.

Величины u_x , u_z и ω найдем из условий $\vec{F}^{(j)} = 0$, $\vec{T}^{(j)} = 0$. Как известно [6],

$$\vec{F}^{(j)} = -4\pi\nabla(r_j^3 p_{-2}^{(j)}), \quad \vec{T}^{(j)} = -8\pi\nabla(r_j^3 \chi_{-2}^{(j)}).$$

Так как

$$p_{-2}^{(j)} = 0,5\eta r_j^{-2} [B_{10}^{(j)} Y_1^{(-0,j)} + B_{11}^{(j)} Y_1^{(-1,j)}],$$

$$\chi_{-2}^{(j)} = r_j^{-2} [C_{10}^{(j)} Y_1^{(+0,j)} + C_{11}^{(j)} Y_1^{(+1,j)}],$$

то из формул (11)-(12):

$$p_{-2}^{(j)} = 0,5r_j^{-3} U_0 a \eta [E_1^T B^{(0)} z_j + E_1^T B^{(1)} x_j],$$

$$\chi_{-2}^{(j)} = (-1)^{j+1} r_j^{-3} U_0 a^2 y_j E_1^T C^{(1)},$$

$$\vec{F}^{(j)} = -2\pi U_0 a \eta [E_1^T B^{(0)} \vec{k} + E_1^T B^{(1)} \vec{i}],$$

$$\vec{T}^{(j)} = (-1)^j 8\pi U_0 a^2 E_1^T C^{(1)} \vec{j}.$$

Так как $\vec{F}^{(j)} = 0$, $\vec{T}^{(j)} = 0$, то из формул (14)-(15) получим систему уравнений относительно u_x , u_z , ω . Введем обозначения:

$$M_1^{(m)} = (E + R^{(m)})^{-1} \Lambda_4 (E + M^{(m)}) (E + \Lambda_e M^{(m)})^{-1} (E - \Lambda_1 \Lambda_e),$$

$$M_2^{(m)} = (E + R^{(m)})^{-1} \Lambda_6 (E + M^{(m)} \Lambda_1^{-1})^{-1},$$

$$M_3^{(m)} = (E + M_{\omega 2}^{(m)})^{-1},$$

$$M_4^{(m)} = M_{\omega 1}^{(m)} (E + M_{\omega 2}^{(m)})^{-1},$$

$$M_5^{(m)} = (E + M_{\omega 2}^{(m)})^{-1} M_{\omega 3}^{(m)},$$

$$M_6^{(m)} = (E + R^{(m)})^{-1}.$$

Тогда:

$$u_z = K \left[\frac{E_1^T M_6^{(0)} \Lambda_4 J_0}{E_1^T M_2^{(0)} E_1} + \frac{E_1^T M_1^{(0)} I^{(0)}}{E_1^T M_2^{(0)} E_1} \right], \quad (16)$$

$$\omega = -K E_1^T M_1^{(1)} I^{(1)} \frac{E_1^T M_5^{(1)} M_1^{(1)} I^{(1)} / E_1^T M_1^{(1)} I^{(1)} - E_1^T M_5^{(1)} M_2^{(1)} E_1 / E_1^T M_2^{(1)} E_1}{E_1^T M_5^{(1)} M_2^{(1)} M_4^{(1)} E_1 - E_1^T M_3^{(1)} E_1 + E_1^T M_2^{(1)} M_4^{(1)} E_1 \cdot E_1^T M_5^{(1)} M_2^{(1)} E_1 / E_1^T M_2^{(1)} E_1}, \quad (17)$$

$$u_x = -K \frac{E_1^T M_1^{(1)} I^{(1)}}{E_1^T M_2^{(1)} E_1} \frac{E_1^T M_5^{(1)} M_2^{(1)} M_4^{(1)} E_1 - E_1^T M_3^{(1)} E_1 + E_1^T M_2^{(1)} M_4^{(1)} E_1 \cdot E_1^T M_5^{(1)} M_1^{(1)} I^{(1)} / E_1^T M_1^{(1)} I^{(1)}}{E_1^T M_5^{(1)} M_2^{(1)} M_4^{(1)} E_1 - E_1^T M_3^{(1)} E_1 + E_1^T M_2^{(1)} M_4^{(1)} E_1 \cdot E_1^T M_5^{(1)} M_2^{(1)} E_1 / E_1^T M_2^{(1)} E_1} \quad (18)$$

(заметим, что $\Lambda_4 J_0 \in l_1$). Пусть $l \rightarrow \infty$. Тогда $t \rightarrow 0$, $\omega \rightarrow 0$, $J_0 \rightarrow 0$ (в l_1), а так как $(I_0)_1 = 0$, то $u_z \rightarrow 0$. Легко показать, что $u_x \rightarrow -2KI_{11}/(1+2\tau)$. Из условия $u_x \rightarrow 1$ по-

лучим $\vec{U}^{(1)} = -\frac{2K_{Isl}\eta}{3\rho_e T_{e\infty}(\kappa_i + 2\kappa_e)} \frac{1}{V} \left(\int_V (q^{(1)} \vec{r}_i, \vec{i}_i) dv \right) \vec{i}_1$, где $\left(\int_V (q^{(1)} \vec{r}_i, \vec{i}_i) dv \right) \vec{i}_1$ – дипольный мо-

мент плотности тепловых источников (интегрирование ведется по объему первой ча-

стицы, V – ее объем). Полученная формула совпадает с формулой для скорости фотофореза одиночной частицы [2].

Черное тело. Пусть поглощение излучения происходит в тонком слое с толщиной $\delta \ll a$, прилегающем к нагреваемой части поверхности частицы $r_j = a$, $x_j \leq 0$. Тогда $q^{(j)} = -\frac{E^{(0)}}{\delta} \sin \theta_j \cos \varphi_j$ при $a - \delta \leq r_j \leq a$, $0 \leq \theta_j \leq \pi$, $\pi/2 \leq \varphi_j \leq 3\pi/2$ (в других точках j -й частицы $q^{(j)} = 0$). Используя свойства присоединенных функций Лежандра первого рода $P_n^{(m)}(\cos \theta_j)$ и гамма-функций, можно вывести следующие формулы для функций $q_{nm}(x)$, определяемых по формуле (1). Пусть $\chi_\delta(x)$ – характеристическая функция множества $1 - \delta/a \leq x \leq 1$, т.е. $\chi_\delta(x) = 1$ при $1 - \delta/a \leq x \leq 1$ и $\chi_\delta(x) = 0$ в остальных случаях. Тогда

$$q_{11}(x) = -\frac{E^{(0)} a^2}{6\delta\kappa_i T_{e\infty}} \chi_\delta(x), \quad (19)$$

$$q_{n,m}(x) = \frac{(-1)^{\frac{m+1}{2}} E^{(0)} a^2 (n-m-1)!!(n-3)!!}{\delta\kappa_i T_{e\infty} (1+\delta_{m0})(n+m)!!(n+2)!!} \chi_\delta(x) \text{ при } n = 2l, m = 2k, \quad (20)$$

$$q_{nm}(x) = 0, \text{ если } n \neq 2l \text{ или } m \neq 2k, \text{ но при этом } n \neq 1 \text{ и } m \neq 1. \quad (21)$$

Пусть $\chi_n(\delta/a) = \frac{1 - (1 - \delta/a)^{n+3}}{(n+3)\delta/a}$. Можно вывести следующие формулы для величин I_{nm} , определяемых по формуле (4):

$$I_{11} = -\frac{E^{(0)} a}{6\kappa_i T_{e\infty}} \chi_1(\delta/a), \quad (22)$$

$$I_{n,m} = \frac{(-1)^{\frac{m+1}{2}} E^{(0)} a (n-m-1)!!(n-3)!!}{\kappa_i T_{e\infty} (1+\delta_{m0})(n+m)!!(n+2)!!} \chi_n(\delta/a) \text{ при } n = 2l, m = 2k, \quad (23)$$

$$I_{nm}(x) = 0, \text{ если } n \neq 2l \text{ или } m \neq 2k, \text{ но при этом } n \neq 1 \text{ и } m \neq 1. \quad (24)$$

Из формулы (5) $(J_0)_n = \frac{E^{(0)} a t^{n+1}}{4\tau\kappa_i T_{e\infty}} \chi_0(\delta/a)$. Пусть $J_t = (t^2, t^3, t^4, \dots)^T$. Тогда

$J_0 = \frac{E^{(0)} a}{4\tau\kappa_i T_{e\infty}} \chi_0(\delta/a) J_t$. Определим вектор I_0 , нечетные координаты которого равны

нулю, а четные координаты вычисляются по формуле $(I_0)_n = \frac{(n-1)!!(n-3)!!}{n!!(n+2)!!} \frac{\chi_n(\delta/a)}{\chi_1(\delta/a)}$,

где $n = 2k$ и $(-1)!! = 1$.

Тогда $I^{(0)} = -\frac{E^{(0)} a}{2\kappa_i T_{e\infty}} \chi_1(\delta/a) I_0$.

Заметим, что $I^{(1)} = -\frac{E^{(0)} a}{6\kappa_i T_{e\infty}} \chi_1(\delta/a) E_1$. Формулы (16)-(18) могут быть переписаны в

виде:

$$u_z = K \frac{E^{(0)} a \chi_1(\delta/a)}{2\kappa_i T_{e\infty}} \left[\frac{\chi_0(\delta/a)}{2\tau \chi_1(\delta/a)} \frac{E_1^T M_6^{(0)} J_t}{E_1^T M_2^{(0)} E_1} - \frac{E_1^T M_1^{(0)} I_0}{E_1^T M_2^{(0)} E_1} \right], \quad (25)$$

$$\omega = K \frac{E^{(0)} a \chi_1(\delta/a)}{6\kappa_i T_{e\infty}} \frac{E_1^T M_1^{(1)} E_1}{E_1^T M_5^{(1)} M_2^{(1)} M_4^{(1)} E_1 - E_1^T M_3^{(1)} E_1 + E_1^T M_2^{(1)} M_4^{(1)} E_1 \cdot E_1^T M_5^{(1)} M_2^{(1)} E_1 / E_1^T M_2^{(1)} E_1}, \quad (26)$$

$$u_x = K \frac{E^{(0)} a \chi_1(\delta/a)}{6\kappa_i T_{e\infty}} \frac{E_1^T M_1^{(1)} E_1}{E_1^T M_2^{(1)} E_1} \frac{E_1^T M_5^{(1)} M_2^{(1)} M_4^{(1)} E_1 - E_1^T M_3^{(1)} E_1 + E_1^T M_2^{(1)} M_4^{(1)} E_1 \cdot E_1^T M_5^{(1)} M_1^{(1)} E_1 / E_1^T M_1^{(1)} E_1}{E_1^T M_5^{(1)} M_2^{(1)} M_4^{(1)} E_1 - E_1^T M_3^{(1)} E_1 + E_1^T M_2^{(1)} M_4^{(1)} E_1 \cdot E_1^T M_5^{(1)} M_2^{(1)} E_1 / E_1^T M_2^{(1)} E_1}. \quad (27)$$

Пусть $l \rightarrow \infty$. Тогда $t \rightarrow 0$, $u_z \rightarrow 0$, $\omega \rightarrow 0$, $u_x \rightarrow \frac{K_{Tsl} \eta E^{(0)} \chi_1(\delta/a)}{3U_0 \rho_e T_{e\infty} (\kappa_i + 2\kappa_e)}$. Из условия

$u_x \rightarrow 1$ получим формулу $U_0 = \frac{K_{Tsl} \eta E^{(0)} \chi_1(\delta/a)}{3\rho_e T_{e\infty} (\kappa_i + 2\kappa_e)}$. Эта формула совпадает с формулой

для величины скорости одиночной частицы, поглощающей излучение по принципу черного тела [2]. Заметим, что $\chi_n(\delta/a) = 1 + o(1)$ при $\delta/a \rightarrow 0$. Так как второе слагаемое не вносит существенного вклада в результаты расчетов, то будем считать $\chi_n(\delta/a) = 1$. Тогда $U_0 = \frac{K_{Tsl} \eta E^{(0)}}{3\rho_e T_{e\infty} (\kappa_i + 2\kappa_e)}$. В результате формулы (25)-(27) приобретают

вид:

$$u_z = (1,5 + 0,75/\tau) \left[\frac{E_1^T M_6^{(0)} J_t}{E_1^T M_2^{(0)} E_1} - 2\tau \frac{E_1^T M_1^{(0)} I_0}{E_1^T M_2^{(0)} E_1} \right], \quad (28)$$

$$\omega = (0,5 + \tau) \frac{E_1^T M_1^{(1)} E_1}{E_1^T M_5^{(1)} M_2^{(1)} M_4^{(1)} E_1 - E_1^T M_3^{(1)} E_1 + E_1^T M_2^{(1)} M_4^{(1)} E_1 \cdot E_1^T M_5^{(1)} M_2^{(1)} E_1 / E_1^T M_2^{(1)} E_1}, \quad (29)$$

$$u_x = (0,5 + \tau) \frac{E_1^T M_1^{(1)} E_1}{E_1^T M_2^{(1)} E_1} \frac{E_1^T M_5^{(1)} M_2^{(1)} M_4^{(1)} E_1 - E_1^T M_3^{(1)} E_1 + E_1^T M_2^{(1)} M_4^{(1)} E_1 \cdot E_1^T M_5^{(1)} M_1^{(1)} E_1 / E_1^T M_1^{(1)} E_1}{E_1^T M_5^{(1)} M_2^{(1)} M_4^{(1)} E_1 - E_1^T M_3^{(1)} E_1 + E_1^T M_2^{(1)} M_4^{(1)} E_1 \cdot E_1^T M_5^{(1)} M_2^{(1)} E_1 / E_1^T M_2^{(1)} E_1} \quad (30)$$

или

$$u_x = (0,5 + \tau) \frac{E_1^T M_1^{(1)} E_1}{E_1^T M_2^{(1)} E_1} + \omega \frac{E_1^T M_2^{(1)} M_4^{(1)} E_1}{E_1^T M_2^{(1)} E_1}. \quad (31)$$

Вычисления по точным формулам. Точные формулы (28)-(31) содержат бесконечномерные матрицы. Но несложно составить компьютерные программы (для этого достаточны возможности Excel), основанные на полученных точных формулах. Для матрицы $A \in L_3^{(M)}$ определим при любом фиксированном $k \geq 3$ матрицу $A^{[k]}$, которая получена путем обнуления всех элементов a_{sn} матрицы A при $s + n \geq k$, и матрицу $A^{\{k\}} = A - A^{[k]}$. Тогда $A = A^{[k]} + A^{\{k\}}$, $A^{\{k\}} \rightarrow 0$ в $L_1^{(M)}$ при $k \rightarrow \infty$. Матрица $A^{[k]}$ имеет блочно-диагональную структуру и состоит из двух диагональных блоков. Первый диагональный блок имеет размеры $(k-2) \times (k-2)$, а второй диагональный блок является

нулевой матрицей. Заменяем матрицы $M^{(0)}$, $M_{\beta}^{(0)}$, $M_{\gamma}^{(0)}$, $M^{(1)}$, $M_{\beta}^{(1)}$, $M_{\gamma}^{(1)}$, $M_{\omega_1}^{(1)}$, $M_{\omega_2}^{(1)}$, $M_{\omega_3}^{(1)}$ на матрицы $M^{(0)[k]}$, $M_{\beta}^{(0)[k]}$, $M_{\gamma}^{(0)[k]}$, $M^{(1)[k]}$, $M_{\beta}^{(1)[k]}$, $M_{\gamma}^{(1)[k]}$, $M_{\omega_1}^{(1)[k]}$, $M_{\omega_2}^{(1)[k]}$, $M_{\omega_3}^{(1)[k]}$ при некотором $k \geq 3$. Достаточно использовать первые блоки матриц, входящих в формулы. Полученные таким образом значения с ростом k стремятся к точным. Расчеты проводились с помощью программы Excel при $k=54$, что обеспечивает высокую точность.

Заключение. Эффект гидродинамического взаимодействия при фотофоретическом движении отличается своими особенностями. Расчеты на компьютере, основанные на выведенных нами точных формулах в случае черного тела, показывают, что частицы удаляются друг от друга в направлениях, перпендикулярных к направлению распространения оптического излучения. При этом скорость движения частиц в направлении распространения излучения существенно не отличается от скорости одиночной частицы. Заметим также, что скорость удаления частиц существенна, а при удалении частиц эффект гидродинамического взаимодействия быстро ослабевает.

ЛИТЕРАТУРА

1. Яламов Ю.И., Галоян В.С. Динамика капель в неоднородных вязких средах. Луйс, Ереван, 1985.
2. Щукин Е.Р., Яламов Ю.И., Шулиманова З.Л. Избранные вопросы физики аэрозолей. М.: МПУ, 1992.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. Наука, М., 1988.
4. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. Наука, М., 1972.
5. Бицадзе Б.М., Калинин Д.Ф. Сборник задач по уравнениям математической физики. Наука, М., 1977.
6. Хаппель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. Мир, М., 1976.
7. Смирнов В.И. Курс высшей математики. М.: Наука, 1967. Т. II.
8. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. Наука, М., 1976.
9. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. Физматгиз, М., 1961.

ТЕХНОЛОГИИ И МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ

УДК 372:373

ОСОБЕННОСТИ СОДЕРЖАНИЯ КУРСА ФИЗИКИ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

Л.С. Хижнякова

*Московский государственный областной университет (МГОУ)
105005, Москва, ул. Радио, 10а*

Статья посвящена одному из действующих в практике преподавания комплексов учебников по физике для 7-9 классов общеобразовательных учреждений. Определены и обоснованы особенности курса физики: структуры и содержания; методики формирования понятий, на примере механики; средств и форм организации учебного процесса. Выделены его характеристики, которые соответствуют личностным, предметным и метапредметным результатам обучения физике.

Более десяти лет общеобразовательные учреждения работают по единым стандартам обучения и вариативным учебникам. Внедрение в образовательный процесс современных информационных технологий, передовых инноваций учителей; совершенствование экспериментальной базы кабинетов физики; конкурентная борьба методических идей, представленных в учебниках – всё это оказывает положительное влияние на совершенствование содержания образования по физике. Наибольшие изменения в содержании образования претерпевает основная девятилетняя школа. Повышается роль основной школы в формировании научной картины мира, развитии познавательных способностей учащихся, закладываемых системой дошкольного, начального образования на базе теорий развивающего обучения.

Изучение физики в основной школе приходится на сложный этап развития подростка, когда наступает самосознание личности, ученик ощущает себя субъектом в учебной деятельности и в общении; формируется направленность личности - совокупность устойчивых мотивов – интересов к познавательной деятельности по предмету. В этот период важной стороной мотивации учебной деятельности является система мотивов – убеждений личности, побуждающих её к поступкам в соответствии с научными взглядами, принципами, научным мировоззрением. Значительная роль в этом процессе принадлежит содержанию курса физики – научным знаниям об окружающем мире и методам познания природы.

Современная модернизация образования предусматривает реализацию главной образовательной цели, как в основной неполной средней школе, так и профильной средней школе: *развитие личности обучаемого, его познавательных способностей, формирование обобщенных универсальных знаний и способов учебных действий.*

Познавательные способности в психологии рассматриваются как особенности человека, от которых зависит успешность приобретения знаний и умений. При этом способности не сводятся к наличию этих знаний и умений. Качественной оценкой способностей служит динамика приобретения знаний и умений.

Обобщённые универсальные способы учебных действий - это методы эмпирического уровня и теоретического уровня познания. Метод, в отличие от научных знаний,

сводится к совокупности определённых правил, приёмов, способов, норм познания и действия. Основное назначение метода состоит в том, чтобы организовать и регулировать процесс учебного познания.

Для решения сложной современной образовательной задачи, поставленной обществом, требуется изменить традиционный подход к содержанию образования как усвоение определённого перечня научных знаний без обращения к физическому эксперименту, физическим моделям, теоретическим выводам, практическим приложениям. Содержание образования по физике должно проектироваться таким образом, что в нём на первый план выдвигалась деятельность по овладению понятиями и применению этих понятий, формированию теоретических обобщений на уровне законов, теорий и элементов физической картины мира. Это означает, что в учебном процессе следует отдать приоритет не знаниям и умениям, а их возникновению, становлению и развитию. Данный подход согласуется с теориями развивающего обучения [1, 2].

В таблице 1 представлены концептуальные положения конструирования содержания авторского курса физики основной школы, которые определяют особенности учебного комплекта в целом [5, 6].

Таблица 1

Особенности содержание авторского курса физики основной школы (7,8,9 кл)	
Концептуальные положения	Виды содержания
<p>Структура курса основной школы такова: введение (физические методы исследования природы), механика, молекулярная физика, электродинамика, квантовая физика, заключение (элементы ФКМ).</p> <p>Каждый раздел курса систематизирован на базе главных понятий, законов и элементов ФКМ.</p> <p>Отражение в курсе взаимосвязи системы научных знаний и основных методов познания природы – физического эксперимента и теоретического моделирования.</p> <p>Приоритет в содержании отдаётся идеям возникновения, становления и развития научных знаний и методов познания.</p>	<p>Система научных знаний и ее взаимосвязь с эмпирическими и теоретическими методами познания.</p>
<p>Двухуровневое изложение учебного материала: обязательный уровень и продвинутый. Каждый параграф завершает: задание продвинутого уровня, например, экспериментальное исследование, теоретическое исследование, из истории физики; вопросы для самопроверки; система заданий и упражнений.</p>	<p>Система текстовых заданий и упражнений как компонент содержания</p>
<p>Система физического эксперимента включает демонстрационный эксперимент, экспериментальные задания - фронтальные и домашние лабораторные работы.</p>	<p>Физический эксперимент как составляющая содержания</p>
<p>Содержательные блоки каждого раздела систематизируются по схеме: факты (эмпирический базис) - модели, законы (ядро) - следствия – практические приложения. Практические приложения физики рассматриваются как физический эксперимент в широком смысле.</p>	<p>Опыт эмоционально-ценностного отношения к действительности</p>

В соответствии с образовательным стандартом в курс входят вопросы всех основных разделов физики, но последовательность их изучения традиционна для отечественных

учебников. Курс начинается с вводного раздела «Физические методы изучения природы», затем рассматриваются такие разделы: механика (7класс), молекулярная физика (8 класс), электродинамика (8-9 классы), элементы квантовой физики (9 класс). Курс завершается главой «Элементы физической картины мира».

В 9 классе предусмотрено изучение колебательных и волновых процессов разной природы (механические и электромагнитные колебания и волны). Изучение механических колебаний и волн сопровождается повторением избранных вопросов механики 7 класса. Данная структура, в частности изучение законов Ньютона в 7 классе, базируется на пропедевтических знаниях математики 3 – 6 классов, например, о механическом движении, функциональной зависимости расстояния, пройденного телом, от времени, изображении положительных и отрицательных чисел на числовой оси, модуле положительного и отрицательного чисел, взвешивании тел на весах.

Рассмотрим особенности содержания курса физики основной школы на примере вводного раздела: «Физические методы исследования природы» и глав, включающих вопросы кинематики и динамики, курса физики 7 класса [4]. На рис. 1 представлены составляющие содержания учебного материала вводной главы, где указана также последовательность изучения каждой ее составляющей (номера параграфов учебника).



Рис. 1

С основным физическим методом изучения природы – физическим экспериментом - учащиеся знакомятся с первого урока. Объекты физики изучаются на основе опытов, демонстрирующих механические, тепловые, электромагнитные явления. Из наблюдений следует вывод, что все изменения, происходящие с телами, веществом,

электромагнитным полем - это физические явления; в природе явления связаны между собой.

Физический эксперимент включает ряд методов познания, например, воспроизведение природного явления в лабораторных условиях, наблюдение за ним, измерение. Для изучения физического явления, в нём выделяют главное, существенное для поставленной задачи и исключают второстепенное. В результате, происходит его замена некоторыми мысленно созданным объектом, т. е. физической моделью. Примерами физических моделей служат модели Солнечной системы (модель Солнечной системы по Копернику), физического тела (материальная точка), маятника (математический маятник).

Основными формами научного знания по физике служат физические понятия, величины, законы и теории. Физические величины количественно характеризуют тела, вещество и физические явления. Рассматривая примеры физических величин, школьники убеждаются, что каждая из них имеет числовое значение и единицу величины. Измерить какую-либо величину – это значит сравнить её с однородной величиной, принятой за единицу этой величины. Измерительные приборы имеют пределы измерений, многие из них - цену делений. Учащиеся знакомятся не только с прямыми измерениями, но и косвенными (на примере плотности вещества).

Способ измерения плотности вещества связан с измерениями массы с помощью рычажных весов и объёма тела, с которыми учащиеся знакомились ранее в курсах математики. Данный способ измерения массы тела основан на гравитационном свойстве массы и объясняется в теме «Равновесие сил. Простые механизмы». Чтобы при изучении законов Ньютона и массы тел сконцентрировать внимание школьников на инертных его свойствах, способ измерения массы на рычажных весах включён во вводную главу курса, а плотность рассматривается как производная единица СИ и как пример косвенного измерения. Такой методический приём согласуется с принципом историзма. Способы измерения плотности вещества были известны тогда, когда физика ещё не существовала как самостоятельная наука.

Открытие законов – задача физики иллюстрируется на примере эмпирического закона, установленного Х.Гюйгенсом и изложенного в его работе «Маятниковые часы» (1673 г.). Ознакомление с такой формой научных знаний как физическая теория проводится на примере основ молекулярно-кинетической теории, с помощью которой повторяются и обобщаются знания учащихся, сформированные в процессе изучения интегрированных курсов естественных наук начальной школы и в 5-6 классах основной школы.

Завершается раздел учебным материалом, разъясняющим тот факт, что физика развивающаяся наука, связанная с другими естественными науками. Отмечены основные исторические этапы развития физики, некоторые достижения отечественных и зарубежных физиков, которые явились основой создания лазеров, ядерной энергетики, информационных и коммуникационных технологий.

Лабораторные работы (см. таблицу 1) служат составной частью содержанием курса физики. При выполнении лабораторных работ вводной главы учащиеся знакомятся с абсолютной погрешностью прямого измерения, которая складывается из абсолютной инструментальной погрешности и абсолютной погрешности отсчёта. Абсолютная инструментальная погрешность (погрешность средств измерения) определяется конструкцией прибора. В большинстве случаев абсолютная погрешность отсчёта не превосходит половины цены деления средства измерения. Этот материал, согласно Госу-

дарственному стандарту общего образования, подлежит изучению, но не входит в итоговый контроль. В этой связи лабораторные работы курса физики основной школы представлены в двух вариантах: с учетом погрешности измерения и без её учёта. Для интересующихся учащихся предлагается вариант выполнения с подсчётом погрешности измерения величин и выполнением специальной записи интервала, в пределах которого находится истинное значение измеряемой величины.

Для любознательных учащихся в учебнике приведены задания, включающие теоретические и экспериментальные исследования явлений, факты из истории развития физики, знакомство с техническими объектами, измерения физических величин. Так, после первого параграфа «Объекты изучения физики» предлагается задание провести экспериментальное исследование: «Изучите устройство плоского зеркала; убедитесь, что свет (электромагнитные волны) обладает свойством отражаться от металлической поверхности тел. Определите, из каких частей состоит плоское зеркало».

В следующих главах курса физики 7 класса рассматриваются избранные вопросы классической механики. Содержание второй главы курса «Механическое движение: перемещение, скорость, ускорение» представлено на рис. 2. Номерами отмечена последовательность изучения понятий и величин.



Рис. 2

Главной физической величиной данной темы служит ускорение, которое необходимо для последующего изучения законов Ньютона. Методика изучения этого понятия основывается на использовании координатного метода, ознакомления с векторными и

скалярными величинами, применении одномерного движения тела вдоль (или против) положительного направления координатной оси.

В курсе математики учащиеся знакомятся с понятием вектора в 8 классе. В истории методики преподавания физики имеется опыт опережающего изучения понятия вектора на уроках физики. Данный приём использован в авторском курсе физики седьмого класса при изучении перемещения. Векторная величина перемещение рассматривается как направленный отрезок прямой, соединяющий начальное положение тела с его последующим положением. Перемещение одновременно указывает и направление между начальным и конечным положением тела, и числовое значение. Понятие скалярной величины трактуется как величина, не имеющая направления в пространстве, которая характеризуется только своим числовым значением.

Схема формирования понятия ускорения такова: система отсчёта – изменение положения тела за промежуток времени Δt в заданной системе отсчёта ($\Delta x = x_2 - x_1$) - изменение положение тела на оси X равно проекции перемещения ($\Delta x = x_2 - x_1 = s_x$) - скорость является векторной величиной – проекция скорости v_x на ось X - изменение скорости за промежуток времени Δt равно проекции ускорения a_x на ось X - ускорение векторная величина – проекция скорости равноускоренного прямолинейного движения ($v_x = v_o + a_x t$).

Примером экспериментального исследования для интересующихся учащихся служит следующее задание, предлагаемое после изложения материала об ускорении: «Шарик, падающий в вакууме, движется равноускоренно (предлагается стробоскопическая запись свободного падения тела). Положение шарика изображены через равные промежутки времени на фоне линованной клетками бумаги. Длина стороны квадрата равна b . Покажите, что перемещения, совершенные шариком за последовательные промежутки времени, при равноускоренном движении равны соответственно $1b, 3b, 5b, 7b, 9b$.

Таким образом, в главе «Механическое движение: перемещение, скорость, ускорение» представлены не только основные понятия равномерного и равноускоренного движения, но и методы их познания: теоретическое моделирование, действительные модели движений, физический эксперимент, элементы метода Галилея по изучению свободного падения тел.

На рис. 3 изображена схема изучения законов динамики курса физики 7 класса.

Изучение законов движения начинается с закона инерции (первого закона Ньютона), содержание которого сводится к утверждению, что существуют инерциальные системы отсчета. Согласно этому закону тело, не подверженное внешним воздействием, либо находится в покое, либо движется прямолинейно и равномерно. Такое тело называют свободным, а его движение – движением по инерции. Свободных тел в природе не существует; они являются абстракцией. Формирование такого абстрактного понятия как свободное тело начинается с опытов, в которых тело ставится в такие условия, когда внешние воздействия на него по возможности устраняются или практически компенсируют друг друга. Примерами таких опытов служат шарик, подвешенный на нити, испытывающий влияние Земли и нити; опыт с шариком, скатывающимся по наклонной плоскости и движущийся по столу, на котором расположена горка песка. Если уменьшать горку песка или совсем убрать песок и вновь пустить шарик по желобу с прежней высоты, то шарик пройдет большее расстояние по столу. Подобные опыты позволяют сделать вывод: тело (материальная точка), не подверженное внешним воздействиям, либо находится в состоянии покоя, либо прямолинейного и равномерного движения,

т.е. движения по инерции. Как отмечает Д.В. Сивухин, что в этом случае возникает следующая трудность: как убедиться в том, что тело не подвержено внешним воздействиям? По мнению Д.В. Сивухина, вполне удовлетворительного ответа на этот вопрос не существует. В отсутствие внешних воздействий убеждаются по отсутствию растягивающих пружин или веревок, которые тянут тело, по отсутствию тел, которые давят на него [3]. Данный приём использован в изложении первого закона Ньютона.



Рис. 3

Масса тела вводится как мера инертности, а формулой определения массы тела служит отношение модулей ускорений двух взаимодействующих тел равное обратному отношению их масс. Основным методом введения массы являются физический эксперимент по упругому взаимодействию тележек, а также анализ других подобных опытов.

Сила рассматривается как векторная величина, которая характеризует действие на тело другого тела, вызывающего ускорение; обладает числовым значением и направлением. Эти свойства величины иллюстрируются примерами силы тяжести, силы трения скольжения, силы упругости. Затем с помощью опытов выясняется, как сила связана с ускорением, которое она вызывает. Для этого используется сила упругости, возникающая при сжатии или растяжении пружины. Лишь сила упругости, в отличие от других сил, не зависит от свойств тел, на которые она действует.

Для качественной иллюстрации второго закона используются опыты с тележками и пружиной. Эти опыты показывают, что если на тела разных масс действует одна и та же сила, то величина, равная произведению массы тела на его ускорение, остаётся од-

ной и той же. Второй закон Ньютона формулируется так: сила, действующая на тело, равна произведению массы тела на сообщаемое этой силой ускорение.

Сущность третьего закона Ньютона выясняется с помощью опытов по взаимодействию тел: силы, с которыми два тела действуют друг на друга, равны по модулю и направлены вдоль одной прямой в противоположные стороны. При этом эти силы приложены к разным телам, поэтому они не могут уравновешивать друг друга.

В главе «Силы в механике» рассматриваются сила всемирного тяготения, сила тяжести, сила упругости, силы трения. С использованием этих сил и законов Ньютона учащиеся решают простейшие уравнения движения. Так, изучая силу тяжести, учащиеся теоретически доказывают, что ускорение свободного падения не зависит от массы тела и, следовательно, одинаково для всех тел. Приведём пример теоретического исследования, предлагаемого для учащихся, проявляющих интерес к физике. Задание даётся к параграфу «Сила тяжести»: «Земной шар несколько сплюснут у полюсов. Экваториальный радиус Земли больше полярного на 21 км. Вращение Земли и сплюснутость ее у полюсов приводит к тому, что ускорение свободного падения зависит от широты местности. Ниже приведены значения ускорений свободного падения для нескольких широт (средние широты, экватор, полюса Земли): $9,82 \text{ м/с}^2$, $9,81 \text{ м/с}^2$, $9,78 \text{ м/с}^2$. Какие из указанных значений соответствуют ускорениям свободного падения на экваторе и полюсах?»

В учебнике особое внимание уделяется движению тела под действием силы трения. Анализ решения задач убеждает учащихся, что при внезапном торможении транспорт остановить невозможно. Для его остановки необходимо некоторое время, за которое он проходит определённое расстояние - тормозной путь.

Таким образом, учащиеся подводятся к выводу о том, что второй закон Ньютона содержит в себе и определение силы и одно из фундаментальных обобщений классической механики – сила определяется положением рассматриваемого тела (материальной точки) относительно окружающих ее тел и его скоростью. В главе «Законы движения» основное внимание сосредоточено на понятии силы, формулы её определения, содержащейся во втором законе Ньютона. В главе «Силы в механике» на конкретных примерах разных видов сил учащиеся убеждаются, что сила, действующая на тело независимо от её вида (природы), равна произведению массы тела на сообщаемое этой силой ускорение.

Завершается изложение динамики вопросами: центр масс, центр тяжести тела. Во введении к теме «Законы движения» отмечается, что движение тележек, санок с горы, деревянного бруска по поверхности другого тела рассматриваются как движение материальной точки, расположенной в центре масс. В заключительном параграфе главы выясняется подробно, что это за точка – центр масс и почему возможна замена реального тела этой точкой.

Приведённые примеры методики изучения понятий и законов курса физики основной школы показывают, что обучение предмету ориентировано на современные требования Государственного образовательного стандарта. Они включают *личностные, предметные и метапредметные* результаты. Содержание курса служит средством формирования таких качеств личности как познавательного интереса, интеллектуальных и творческих способностей школьника. Метапредметные результаты обучения обеспечиваются широким использованием в учебном процессе теоретических и эмпирических методов познания природы; самостоятельной деятельностью при выполнении

учащимися разнообразных заданий. Предметные результаты представлены в курсе научными знаниями и физическими методами познания, опытом решения проблем, творческой и исследовательской деятельности. Главными формами научного знания курса физики основной школы служат понятия, физические величины, законы и элементы физической картины мира.

ЛИТЕРАТУРА

1. Давыдов В.В. Виды обобщения в обучении. М.:Пед.ш-во России. 2000. -480 с.
2. Занков Л.В. Избранные педагогические труды. – М.:Педагогика. 1990. – 424 с.
3. Сивухин Д.В. Общий курс физики .Т. I. Механика. – М.: Наука. 1983. – 519 с.
4. Хижнякова Л.С., Синявина А.А. Физика -7 Учеб. для 7 кл. общеобразоват. учреждений. - М.: Вентана-Граф, 2009. - 220 с.
5. Хижнякова Л.С., Синявина А.А. Физика: Механика. Термодинамика и молекулярная физика: Учеб. для 7 – 8 кл. общеобразоват. учрежд. -М.: Вита Пресс, 2000. – 256 с.
6. Хижнякова Л.С., Синявина А.А. Физика: Основы электродинамики. Элементы квантовой физики: Учеб. для 9 кл. общеобразоват. учрежд. -М.: Вита Пресс, 2000. – 288 с.

УДК 372:373

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ И РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МЕХАНИКИ В ШКОЛЬНЫХ КУРСАХ ФИЗИКИ РАЗЛИЧНОГО УРОВНЯ

И.В. Гордеев

Липецкий государственный педагогический университет (ЛГПУ)

В статье обсуждаются проблемы методики преподавания основ теории относительности и релятивистской механики в школьных курсах физики различного уровня. Предлагаются их новые решения в рамках онтодидактического подхода.

Теория относительности (имеется в виду СТО – специальная теория относительности), созданная в начале 20-го века трудами Г. Лоренца, А. Пуанкаре, А. Эйнштейна, Г. Минковского, составляет вместе с квантовыми идеями фундамент современной физики. Область ее приложений простирается от микромира до макро- и мегамира – Вселенной в целом. Концептуальная и прикладная значимости теории относительности обусловили необходимость изучения ее основ не только в вузовском, но и, начиная с середины прошлого века, в школьном курсе физики. Однако, несмотря на ряд методических находок в работах Г. Я. Мякишева, В. А. Угарова, И. Г. Пустильника, Г. М. Голина, Б. М. Яворского, А. А. Пинского, В. В. Мултановского, А. Н. Малинина и др., из-

ложение основ теории относительности и релятивистской механики в школьных курсах физики различного уровня – от базового до профильного – до сих пор оставляет желать лучшего. Оно страдает рядом существенных недостатков, к которым относятся следующие:

- отсутствие четких и строгих определений новых, релятивистских понятий временного промежутка, пространственного расстояния и скорости, смешение их с соответствующими классическими понятиями;

- непонимание того, что в теории относительности нет характерных для ньютоновой механики понятий абсолютно твердой линейки и всеобщего времени для всех пространственных точек каждой инерциальной системы отсчета, а есть только индивидуальное (собственное) время, измеряемое часами;

- акцентирование внимания учащихся на понятие «одновременность пространственно разделенных событий» как на физическое, а не на, по существу, условно-координатное понятие, вводимое в теории относительности по определению;

- придание физической значимости так называемым «релятивистским эффектам замедления хода движущихся часов и сокращения длины движущейся линейки»;

- представление о теории относительности не как о теории пространства-времени, а как о некоей теории быстрых движений, будто бы переходящей при малых скоростях в ньютонову механику (неправильная трактовка принципа соответствия).

Эти замечания о недостатках традиционного изложения теории относительности в школьных учебниках физики (особенно они касаются учебника [1]) подтверждают сказанное о теории относительности выдающимся американским физиком Р. Фейнманом: «Это очень хитрая теория, и достойно удивления уже то, что построить такую теорию вообще оказалось возможным» [2, с. 94].

Когда в методических исследованиях предпринимаются попытки найти достаточно простое и ясное изложение школьникам основ такой сущностно глубокой теории как теория относительности (то же касается, например, поисков методики изложения основ квантовой механики), то руководящим дидактическим принципом в первую очередь, как правило, выступает принцип доступности. Другой дидактический принцип – принцип научности оказывается здесь как бы вторичным. В результате находится «понятное» школьникам изложение, которое однако в научном плане оказывается ущербным и несостоятельным. Да, если обойти существо понятий теории относительности, ограничиться только их поверхностным толкованием, то можно добиться того, что у учащихся возникнет ложное ощущение понимания. Однако такой подход не соответствует дидактическому принципу научности и целям обучения.

В 70-е годы прошлого века Ю. И. Соколовский назвал методические построения учебного изложения в школьном курсе основ современных физических теорий, берущие начало от сущности предмета, онтодидактикой [3]. Онтодидактика предполагает такие методики, в которых доступность учебного материала школьникам достигается за счет методических резервов самой физической науки.

Прежде чем строить те или иные методики преподавания основ теории относительности и релятивистской механики, необходимо, следуя идеям онтодидактики, сначала осознать фундаментальную идею теории относительности, и уже затем попытаться найти различные методические схемы ее реализации в различных курсах физики – от самого простого базового до профильного с физико-математическим уклоном, соответствующего углубленному изучению физики.

Здесь следует иметь в виду то, что фундаментальную идею теории относительности (как и любой другой физической теории) можно выразить по-разному в зависимости от той или иной принятой концептуальной основы – исходной системы понятий. Так, фундаментальная идея теории относительности в теоретической схеме, построенной в 1907-1908 гг. Г. Минковским [4], [5, с. 39; с. 108-115], [6, с. 23-27], выражается *мировым постулатом Минковского*, гласящим: *мир физических событий в пространственно-временном отношении представляет собой 4-мерное пространство с псевдоевклидовой геометрией*. Из этого одного постулата, в частности, следуют эйнштейновы постулаты – принцип относительности и принцип постоянства скорости света [7, с. 126-127].

В теоретической схеме Эйнштейна [8, с. 7-35] фундаментальная идея теории относительности определяется значительно проще, чем в схеме Минковского, на уровне, близком к эмпирическому, как утверждение о том, что для любых движений и взаимодействий на расстоянии существует *предельная скорость*, равная скорости света в вакууме. Наличие предельной скорости приводит к взаимосвязи пространства и времени, которая выражается в схеме теории относительности Эйнштейна преобразованиями Лоренца, относительно которых должны быть инвариантными законы всех физических явлений. Замечательным следствием предельности скорости света (вместе с принципом относительности) оказалась открытая Эйнштейном [8, с. 36-38] знаменитая формула взаимосвязи массы и энергии. Ее практически важные приложения относятся к ядерной физике и физике элементарных частиц.

Соответственно двум уровням выражения фундаментальной идеи следует ориентироваться на две основные методические схемы построения теории относительности: 1) мир событий Минковского (сущностно-теоретический мир) → мир событий Эйнштейна (эмпирико-явленческий мир) как *проявление* пространства-времени Минковского; 2) мир событий Эйнштейна → мир событий Минковского. Первая общая методическая схема отвечает дедуктивному методу познания (сущность → явление), вторая – индуктивному методу (явление → сущность).

Для школьного курса физики базового уровня, в котором ставится цель дать правильное, научное представление о теории относительности и релятивистской механике, возможен лишь подход, основанный на индуктивном методе. О мире Минковского здесь можно и нужно сказать в заключение, причем кратко и описательно без применения математики.

Прежде чем излагать теорию относительности (на любом уровне учебного познания) следует лаконично резюмировать особенности классических представлений о пространстве и времени и подчеркнуть согласованность с ними основных понятий и законов ньютоновой механики.

Именно, классическое пространство есть 3-мерное пространство геометрических точек, описываемое геометрией Евклида (с характерной для нее теоремой Пифагора). Оно жесткое в том смысле, что расстояние между двумя точками в этом пространстве в принципе измеряется абсолютно твердой эталонной линейкой. Время, как характеристика длительности процессов, всеобщее – течет одинаково во всех пространственных точках (любой инерциальной системы отсчета). Утверждение о всеобщем времени эквивалентно утверждению о существовании мгновенного сигнала, автоматически и мгновенно синхронизирующего часы, находящиеся во всех пространственных точках. Существование мгновенного сигнала означает также отсутствие верхнего предела для

скорости любой частицы. Так, в процессе ускорения она с течением времени может приобрести сколь угодно большую скорость. Из второго закона Ньютона следуют определения классических понятий и выражений импульса и кинетической энергии. Они таковы, что соответствуют представлениям о евклидовом пространстве и всеобщем времени.

Теория относительности начинается с отрицания существования мгновенного сигнала. То, что такого сигнала в природе нет – экспериментальный факт. Самым быстрым из всех известных сигналов и движений является световой (электромагнитный) сигнал. Поэтому представляется экспериментально обоснованным постулат: *скорость света в вакууме – предельная скорость для движений любых частиц*. С отрицанием мгновенного сигнала и принятием постулата предельности скорости света мы отрицаем всеобщее для всех пространственных точек время. Теперь *время не всеобщее, а индивидуальное*. Его называют также собственным временем. Оно измеряется часами (в качестве таковых в теории относительности принимаются атомные часы).

И здесь возникает проблема определения двух величин – пространственного расстояния и промежутка времени. Не имея их определения, нельзя определить понятия скорости частицы. Чтобы осознать существо этой проблемы, предлагается рассмотреть простой мысленный опыт: вдоль прямой линии движется свободная частица (O – точка ее старта, A – финиша). В точке O находится наблюдатель, фиксирующий по своим часам момент старта частицы. В точке A расположены точно такие же часы, как и у наблюдателя. По ним фиксируется момент финиша частицы.

Как определить расстояние OA и время движения частицы? С отрицанием мгновенного сигнала связано отрицание абсолютно твердой линейки, т. к. воздействие на один ее конец должно передаваться другому концу мгновенно. Значит в теории относительности нельзя измерить расстояние OA эталонной твердой линейкой, т. к. понятие о ней здесь недопустимо. Но мы не можем измерить и время движения частицы по двум часам, расположенным соответственно в точках A и O . Почему? Потому что всеобщего (единого) времени для этих часов никаким способом установить невозможно. Это значит, что *нет объективной одновременности событий*, свершаемых в разных пространственных точках [9, с. 85], [10, с. 68-69].

Чтобы учащиеся лучше поняли последнее, полезно рассмотреть другой мысленный опыт: наблюдатель из точки O в некоторый момент t_1 по своим часам отправляет световой сигнал в точку A ; он отражается от зеркала, расположенного в точке A , и возвращается к наблюдателю в момент времени t_2 по его часам. Может ли наблюдатель в точке O объективно и однозначно установить, в какой момент времени t по его часам световой сигнал достиг точки A ? Ответ: не может. Но тогда он не в состоянии экспериментально определить ни скорость светового сигнала в одном направлении, ни скорость какой-либо частицы.

Выход из этой, казалось бы тупиковой ситуации, один – *принять условно* значение момента t (учитывая, что $t_1 < t < t_2$) для события в точке A и назвать его *временной координатой* этого события. Какое значение – в принципе не существенно. Но ведущим к наиболее простым физическим соотношениям, позволяющим устанавливать соответствие с соотношениями ньютоновой механики, оказывается значение $t = (t_1 + t_2)/2$. Оно и было принято Эйнштейном [8, с. 9]. Тогда устанавливается *услов-*

ная, координатная одновременность событий, свершаемых в разных пространственных точках. У таких событий должна быть одинаковая временная координата.

После принятия эйнштейнова определения координатной одновременности событий приобретает смысл понятие время распространения светового сигнала и его координатной скорости, а также координатной скорости любой частицы. Расстояние в таком случае определяется через координатное время, затрачиваемое световым сигналом на преодоление этого расстояния. Теперь предельность скорости света выражается неравенством: скорость массовой частицы всегда меньше скорости света.

Так называемые релятивистские эффекты «замедления хода движущихся часов и сокращения длины движущейся линейки» относятся к классу ненаблюдаемых, поскольку они связаны с принятием условного эйнштейнова определения координатной одновременности. При иных определениях координатной одновременности событий (имеющих такое же право условного принятия, как и эйнштейново определение) никаких таких координатных эффектов нет (они будут иными, в частности может оказаться не «замедление», а «убыстрение» хода движущихся часов).

После определения понятия скорости можно ставить вопрос об определении новых понятий импульса и энергии частицы. Их следует записать без какого-либо вывода. Но обязательно дать следующее обоснование. Во-первых, они удовлетворяют предельности скорости света: при ускорении частицы ее энергия и импульс возрастают так, что для достижения частицей скорости света ей необходимо сообщить бесконечно большие энергию и импульс (а это, очевидно, невозможно). Во-вторых, выражения релятивистских энергии и импульса частицы применяются в ядерной физике при расчетах энергетического баланса ядерных реакций, а также при исследованиях процессов столкновения элементарных частиц. Все такие расчеты и исследования экспериментально подтверждают эти выражения.

Завершая изложение элементов релятивистской механики, можно ознакомить учащихся с основным законом релятивистской динамики. Полагая в нем силу постоянной, нетрудно найти в таком случае закон изменения со временем скорости частицы, из которого следует невозможность достижения ускоряемой частицей скорости света. Тем самым показывается соответствие основного закона релятивистской динамики постулату предельности скорости света.

Научное представление учащихся о теории относительности в базовом курсе школьной физики будет не вполне адекватным, если они ничего не будут знать о пространстве-времени Минковского. Как же рассказать о нем учащимся? Можно предложить такую методику. Во-первых, следует воспользоваться рисунками, приближенно напоминающими диаграммы Минковского [7, с. 19]. Такие рисунки применены, например, Дж. Сингом [9]. Во-вторых, пространство-время Минковского определяется как мир событий, в каждой точке-событии которого имеется световой конус [9, с. 121]. Этот мир условно изображается на диаграмме Минковского. Он состоит из мировых линий (прямых и кривых) и прямых изотропных линий. Мировые линии ассоциируются с массовыми частицами или, то же, с часами. Длина отрезка мировой линии равна промежутку времени, показываемому ассоциируемыми с ней часами. Поэтому мировые линии называют времениподобными линиями. С изотропными линиями ассоциируются световые сигналы (или, можно сказать, фотоны). Длина отрезка изотропной линии равна нулю. Поэтому изотропные линии носят еще название линий нулевой длины. Если бы было можно (но нельзя!) установить на фотоне часы, то, следуя Дж. Сингу,

факт нулевой длины изотропной прямой мы выразили бы словами : «Часы на фотоне не идут» [9, с. 98].

Световой конус (его нужно изобразить на рисунке) разбивает мир событий Минковского на четыре сектора: верхний и нижний – времениподобные секторы, левый и правый – пространственноподобные секторы. Это значит, что прямые линии, проходящие через вершину O светового конуса и расположенные в его верхнем и нижнем секторах, есть времениподобные, т. е. мировые линии. Так как каждая такая мировая прямая образует в смысле псевдоевклидовой геометрии мира событий Минковского бесконечно большой угол с изотропной прямой, то отсюда следует: 1) все такие мировые прямые равноправны (эквивалентны), 2) изотропная прямая (образующая светового конуса) предельна для любой мировой прямой. Эти свойства мировых и изотропных прямых мира событий Минковского проявляются в чувственно (экспериментально) наблюдаемом пространстве как *принцип относительности* (поскольку с мировой прямой связывается инерциальная система отсчета) и *принцип предельности скорости света* – основные положения эйнштейновой схемы теории относительности.

Пространственно-временной мир Минковского интересен не столько сам по себе, сколько, главное, тем, что физические величины определяются соответственно этому миру как псевдоевклидовы векторы и с большим числом компонент – тензоры. Они как и мир Минковского, абсолютны (инвариантны), а, следовательно, объективно абсолютными (независимыми от выбора инерциальной системы отсчета) оказываются выражения физических законов. Тем самым в них проявляются необычные псевдоевклидовы геометрические свойства пространства-времени Минковского, а сами физические законы оказываются соответствующими теории относительности.

В классах с углубленным изучением физики может быть применена иная – дедуктивная методическая схема. Изучение теории относительности здесь начинается с формулировки мирового постулата Минковского. Далее раскрывается его содержание с точек зрения математики и физики, дается физическая интерпретация геометрических объектов мира событий Минковского. При этом широко используются диаграммы Минковского, вводятся понятия о псевдоевклидовых векторах и их свойствах, а также применяется математический аппарат гиперболических синуса, косинуса, тангенса (во многом аналогичный известному учащимся аппарату тригонометрических функций), необходимый для выражения соотношений в треугольнике с углом ортогональности, а затем – для вывода преобразований Лоренца.

Физическая интерпретация мира Минковского возможна только в рамках квазиклассических понятий чувственно (экспериментально) воспринимаемого мира событий. То есть с необходимостью должен быть совершен переход от понятий и объектов пространства-времени Минковского к понятиям и объектам, соответствующим экспериментальным ситуациям. Особенности такого перехода специально оговариваются и объясняются учащимся. В итоге вводятся схожие в общем с классическими понятия скорости, импульса, энергии, а соотношения мира Минковского трансформируются в соотношения, которые могут быть экспериментально проверены.

Обратим в заключение внимание на то, что ни в вузовских, ни в школьных отечественных курсах физики, методика, когда за исходное принимается мировой постулат Минковского, не применяется и никогда не применялась. Между тем уже давно ею руководствуются в зарубежных курсах физики [10, 11]. Такая методика позволяет существенно понять и глубоко осознать фундаментальность мира событий Минковского, как

действительно выражающего нетривиальные особенности теории относительности. В результате становится понятной концептуальная и прикладная значимость схемы Эйнштейна, относящейся к чувственно воспринимаемому пространству.

ЛИТЕРАТУРА

1. Касьянов, В. А.. Физика. 10 кл.: Учебн. для общеобразоват. учеб. заведений/В. А. Касьянов. – М.: Дрофа, 2002. – 416 с.
2. Фейнман, Р. Характер физических законов/Р. Фейнман. – М.: Мир, 1968. – 232 с.
3. Соколовский, Ю. И. Онтодидактический арсенал методики физики/Ю. И. Соколовский//Физика в школе. – 1974. – №5. – С. 54-58.
4. Минковский, Г. Пространство и время//Принцип относительности, под ред. А. А. Тяпкина/Г. Минковский. – М.: Атомиздат, 1973. – С. 167-180.
5. Паули, В. Теория относительности/В. Паули. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1947. – 300 с.
6. Логунов, А. А. Лекции по теории относительности и гравитации: Современный анализ проблемы/А. А. Логунов. – М.: Наука, 1987. – 272 с.
7. Сазанов, А. А. Четырёхмерный мир Минковского/А. А. Сазанов. – М.: Наука, 1988. – 224 с.
8. Эйнштейн, А. Собрание научных трудов: в 4 томах/А. Эйнштейн. – М.: Наука, 1965. – Т. 1. – 700 с.
9. Синг, Дж. Беседы о теории относительности/Дж. Синг. – М.: Мир, 1973. – 168 с.
10. Бёрке, У. Пространство-время, геометрия, космология/У. Бёрке. – М.: Мир, 1985. – 416 с.
11. Synge J. L. Relativity: the special theory/J. L. Synge. – Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1956.

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Нелаев А.В. Приложение интегральных представлений для круговых областей к решению краевых задач для дифференциальных уравнений с особыми плоскостями 3

Семенов Н.А. Численное интегрирование. Путь к оптимуму 11

ФИЗИКА

Дадиванян А.К., Рябова Ю.М. Моделирование ближнего ориентационного порядка в растворах алифатических углеводов 17

Богданова С.Б., Гладков С.О. К теории квазитрехмерной теплопроводности 21

Бугримов А.Л. Термодинамический инвариант стехиометрической цепочки реакций 27

Хасанов А.С., Арсланов И.М. Теория термофореза дублетов двухслойных частиц с учетом скачка температуры на их поверхности при произвольной ориентации дублетов 31

Хасанов А.С., Арсланов И.М. Теория фотофореза дублетов крупных твердых сферических аэрозольных частиц 45

ТЕХНОЛОГИИ И МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ

Хижнякова Л.С. Особенности содержания курса физики основной школы 58

Гордеев И.В. Основы теории относительности и релятивистской механики в школьных курсах физики различного уровня 66

CONTENTS

MATHEMATICS

Nelayev A.V. Application of circle domain integral representation to two boundary value problems for the linear pdes with singularities 3

Semenov N.A. Numerical integration. A way to an optimum 11

PHYSICS

Dadivanian A.K., Ryabova Yu.M. Simulation of the short-range orientational order in aliphatic hydrocarbons solution 17

Bogdanova S.B., Gladkov S.O. To the theory of quasi-three-dimensional heat conduction 21

Bugrimov A.L. Thermodynamic invariant of the stoichiometric chain of reaction 27

Khasanov A.S, Arslanov I.M. The theory of thermophoresis for doublets of two-layer particles experiencing a temperature step on their surface for arbitrary orientation of doublets 31

Khasanov A.S, Arslanov I.M. The theory of photophoresis for doublets of large solid spherical 45

TECHNOLOGIES AND TECHNIQUES OF TRAINING

Hizniakova L.S. Features of the contents of a rate of physics of the basic school 58

Gordeyev I.V. The basics of theory of relativity and relativistic mechanics in school courses in physics of different levels 66

УДК 517.55

Приложение интегральных представлений для круговых областей к решению краевых задач для дифференциальных уравнений с особыми плоскостями / Нелаев А.В. // Вестн. Моск. Гос. ун-та. Сер. Физика-математика, 2009, №1-2. С.3-11.

На базе одного из установленных ранее автором интегральных представлений голоморфных функций многих комплексных переменных для круговых областей поставлены и решены две краевые задачи для, соответственно, дифференциального уравнения в частных производных первого порядка и уравнения в частных производных второго порядка.

Библиогр. 8.

УДК 519.6

Численное интегрирование. Путь к оптимуму / Семенов Н.А. // Вестн. Моск. Гос. ун-та. Сер. Физика-математика, 2009, №1-2. С.11-16.

Разработан алгоритм, осуществляющий численное интегрирование с заданной точностью за минимальное время. Применен метод Симпсона с последовательным удвоением числа шагов. Оптимизированы выражения для критерия Рунге для правильного определения достигнутой точности и наилучшей корректировки значения результата.

Библиогр. 3.

УДК 541.64:539.2:536.7

Моделирование ближнего ориентационного порядка в растворах алифатических углеводородов / Дадиванян А.К., Рябова Ю.М. // Вестн. Моск. Гос. ун-та. Сер. Физика-математика, 2009, №1-2. С.17-21.

Рассчитана энергия взаимодействия участка цепи полиэтилена $C_{24}H_{48}$ с молекулами углеводородов. Показано, что существует область углов ориентации малых молекул относительно цепи, вероятность реализации которых существенно выше остальных. Поучены зависимости энергии взаимодействия и фактора ориентации от температуры. Показано, что при температурах, близких к критическим, поведение фактора ориентации обуславливает существование НКТС при этих температурах.

Ил. 3. Библиогр. 12.

УДК 530.11

К теории квазитрехмерной теплопроводности / Богданова С.Б., Гладков С.О. // Вестн. Моск. Гос. ун-та. Сер. Физика-математика, 2009, №1-2. С.21-27.

Проанализировано решение уравнения теплопроводности для пространства размерности $d_F = 3 - \varepsilon$, где ε по абсолютной величине не превосходит $1/2$, и найдено распределение температуры в подобных физических объектах.

Библиогр.8.

УДК 536.7

Термодинамический инвариант стехиометрической цепочки реакций / Бугримов А.Л. // Вестн. Моск. Гос. ун-та. Сер. Физика-математика, 2009, №1-2. С.27-30.

Предложен термодинамический инвариант стехиометрической цепочки реакций, численное значение которого не зависит от состава веществ, участвующих в реакции, уравненной в стехиометрическом отношении.

Ил. 1. Библиогр. 5

УДК 533.72

Теория термофореза дублетов двухслойных частиц с учетом скачка температуры на их поверхности при произвольной ориентации дублетов / Хасанов А.С., Арсланов И.М. // Вестн. Моск. Гос. ун-та. Сер. Физика-математика, 2009, №1-2. С.31-45.

Рассмотрено термофоретическое движение двух крупных твердых сферических гидродинамически взаимодействующих двухслойных аэрозольных частиц с учетом скачка температуры на их поверхности при произвольной ориентации дублета. Получены формулы для скорости термофореза и угловой скорости вращения частиц. Для практических расчетов приведены приближенные формулы.

Библиогр. 12

УДК 533.72

Теория фотофореза дублетов крупных твердых сферических аэрозольных частиц / Хасанов А.С., Арсланов И.М. // Вестн. Моск. Гос. ун-та. Сер. Физика-математика, 2009, №1-2. С.45-57.

Построена теория фотофореза дублетов крупных твердых сферических аэрозольных частиц в случае, когда направление распространения оптического излучения перпендикулярно линии центров частиц. Получены формулы для скоростей фотофореза и угловых скоростей вращения аэрозольных частиц. Приведены формулы для практических расчетов.

Библиогр.18

УДК 372:373

Особенности содержания курса физики основной школы / Хижнякова Л.С. // Вестн. Моск. Гос. ун-та. Сер. Физика-математика, 2009, №1-2. С.31-39.

Статья посвящена одному из действующих в практике преподавания комплексов учебников по физике для 7-9 классов общеобразовательных учреждений. Определены и обоснованы особенности курса физики: структуры и содержания; методики формирования понятий, на примере механики; средств и форм организации учебного процесса. Выделены его характеристики, которые соответствуют личностным, предметным и метапредметным результатам обучения физике.

Ил. 3. Табл.1. Библиогр.6

УДК 372:373

Основы теории относительности и релятивистской механики в школьных курсах физики различного уровня / Гордеев И.В. // Вестн. Моск. Гос. ун-та. Сер. Физика-математика, 2009, №1-2. С.39-45.

В статье обсуждаются проблемы методики преподавания основ теории относительности и релятивистской механики в школьных курсах физики различного уровня. Предлагаются их новые решения в рамках онтодидактического подхода.

Библиогр. 11

ПРАВИЛА

подготовки рукописей, представленных для опубликования в журнале
«Вестник Московского государственного областного университета.
Сер. Физика - математика»

Для публикации научных работ в выпусках серии «Вестник МГОУ» принимаются статьи на русском языке. Публикуются научные материалы преимущественно докторантов, аспирантов, соискателей, преподавателей ВУЗов, докторов и кандидатов наук.

Требования к оформлению статей. Статья должна быть представлена:
в текстовом варианте (текст статьи должен быть подписан всеми авторами);
в виде документа MS Word (с расширением doc);
в виде файла в формате rtf;

Файл должен содержать построчно:

На русском языке	УДК (в верхнем левом углу первого листа рукописи) НАЗВАНИЕ СТАТЬИ – прописными буквами Фамилия, имя, отчество (полностью) Полное наименование организации (в скобках – сокращенное), город (указывается, если не следует из названия организации) Аннотация (1 абзац до 400 символов) под заголовком «АННОТАЦИЯ»
На английском языке	НАЗВАНИЕ СТАТЬИ – прописными буквами Фамилия (полностью), инициалы Полное наименование организации, город Аннотация (1 абзац до 400 символов) под заголовком «ABSTRACT»
На русском языке	Объем статьи ограничен тема уровнями: а) 12 страниц с числом иллюстраций до пяти (к этим статьям предъявляются повышенные требования); б) 6 страниц с числом иллюстраций до трех (содержатся основные результаты без излишних деталей выводов и доказательств); в) 4 страницы с числом иллюстраций до двух (выходят в разделе краткие сообщения вне очереди). Список использованной литературы под заголовком «ЛИТЕРАТУРА»

Формат страницы – А4, книжная ориентация. Поля – 2,5 см. Шрифт Times New Roman Cyrillic, цвет шрифта черный, размер 12 пикселей, междустрочный интервал – полуторный.

Запрещены специфические действия над текстом: уплотнение интервалов, использование цветowych заливок, «красные строки», центрирование, табуляция, отступы, переносы в словах (делаемые автором), сноски (лучше их оформлять в виде примечаний, замечаний и т.п.). Не допускаются сокращения слов, имен, названий, за исключением общепринятых (и оговоренных).

Формулы нумеруются (справа) только те, на которые в тексте имеются ссылки.

Рисунки и таблицы допускаются в том случае, если описать процесс в текстовой форме невозможно. В этом случае каждый из объектов не должен превышать указанные размеры страницы, а шрифт в нем – 12 пикселей. Возможно использование только вертикальных таблиц и рисунков. Запрещены цветные заливки, применение «фонов».

Рисунки, схемы, графики выполняются на отдельных листах в формате, обеспечивающем ясность передачи деталей. Места расположения иллюстраций в тексте должны быть указаны простым карандашом на полях. На обороте иллюстрации должны быть написаны фамилия автора и название статьи. Текст к иллюстрациям, а также таблицы следует поместить на отдельных страницах.

Все формулы должны быть созданы с использованием компонента Microsoft Equation. Размер шрифта также 12 пикселей. Формула создается однократным запуском компонента Microsoft Equation. Запрещается создавать составные формулы! Небольшие строчные фрагменты типа ΔU_{ij} или $C^{(m)} = (c_{1m}, c_{1m}, \dots)^T$ следует набирать обычным способом в латинице, используя средства панели инструментов: изменение шрифта на курсив, написание верхних и нижних индексов, а также вставку символов. При этом следует обратить внимание на написание цифр, скобок, операторов и наименований функций (Δ , \sin , \cos , ...) прямым шрифтом. Хорошее представление об оформлении математических текстов дает чтение научных журналов Российской академии наук физико-математического направления, классических учебников по физике и математике для высших учебных заведений.

Абзацы должны быть отделены друг от друга пустой строкой (дополнительным «Enter»).

Список литературы должен содержать библиографические сведения о всех публикациях, упоминаемых в статье, и не должен содержать указаний на работы, на которые в тексте нет ссылок. Располагать публикации в списке следует в порядке упоминания о них в статье. Список литературы приводится на отдельном листе с обязательным указанием следующих данных: для книг (монография, сборник и т.д.) - фамилия и инициалы автора, название книги, издательство, место издания (город), год издания; для журнальных статей – фамилия и инициалы автора, название статьи, название журнала, год издания, том, номер, выпуск, страницы (первая и последняя).

Ссылки на неопубликованные работы не допускаются.

Редакционная коллегия оставляет за собой право на редактирование статей, хотя с точки зрения научного содержания авторский вариант сохраняется. Статьи, не соответствующие указанным требованиям, решением редакционной коллегии серии не публикуются и не возвращаются (почтовой пересылкой).

В случае принятия статьи, условия опубликования оговариваются с ответственным редактором.

Ответственный редактор серии «Физика-математика» декан физико-математического факультета, доктор технических наук, профессор Бугримов Анатолий Львович.

Адрес редколлегии серии «Физика-математика» «Вестника МГОУ»:
105005, г.Москва, ул. Радио, д.10-а, комн. 36. Тел. (495) 261-09-48