



Вестник

московского государственного
областного университета

Библиотека МГОУ
Читальный зал уч.к.2

Серия

«ФИЗИКА-
МАТЕМАТИКА»

2 / 2008

Вестник

***Московского государственного
областного университета***

**СЕРИЯ
«ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА»**

№ 2

**Москва
Издательство МГОУ
2008**

**Вестник
Московского государственного
областного университета**

Научный журнал основан в 1998 году

Редакционно-издательский совет:

Пасечник В.В. – председатель, доктор педагогических наук, профессор
Дембицкий С.Г. – зам. председателя, первый проректор, проректор по учебной работе,
доктор экономических наук, профессор
Коничев А.С. – доктор химических наук, профессор
Лекант П.А. – доктор филологических наук, профессор
Макеев С.В. – директор издательства, кандидат философских наук, доцент
Пусько В.С. – доктор философских наук, профессор
Яламов Ю.И. – проректор по научной работе и международному сотрудничеству,
доктор физико-математических наук, профессор

Редакционная коллегия серии «Физика-Математика»:

Бугримов А.Л. – доктор технических наук, профессор (ответственный редактор)
Барина М.Ф. – доктор физико-математических наук, профессор (зам. ответственного редактора)
Латышев А.В. – доктор физико-математических наук, профессор
Мантуров О.В. – доктор физико-математических наук, профессор
Богданов Д.Л. – доктор физико-математических наук, профессор

Вестник МГОУ. Серия «Физика-Математика». – № 2 – 2008. – М.: Изд-во МГОУ. – 62 с.

Вестник МГОУ (все его серии) является рецензируемым и подписным изданием, предназначенным для публикации научных статей докторантов, а также аспирантов и соискателей (См.: Бюллетень ВАК № 4 за 2005 г., с. 5).

В «Вестнике» могут публиковаться статьи не только работников МГОУ, но и других научных и образовательных учреждений.

ISBN 978-5-7017-1262-9

© МГОУ, 2008

© Издательство МГОУ, 2008

МАТЕМАТИКА

УДК 517.55

ОБ ОДНОРОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ РИМАНА В C^n

А.В.Нелаев

Московский государственный областной университет
105005, Москва, ул. Радио, 10а

1. Введение. Актуальность развития теории многомерных краевых задач ТФКП в значительной степени обусловлена тем, что в последние годы описан широкий класс задач математической физики, квантовой механики, теории вероятностей, которые соответствующим преобразованием Фурье приводятся к многомерной краевой задаче линейного сопряжения (пространственной задаче Римана).

Считаем известными результаты и обозначения предыдущей работы [1].

2. Постановка однородной краевой задачи Римана в классе функций (T)

Пусть в пространстве C^n ($n \geq 2$) задана область D типа A :

$D = \{z \in C^n : |z_1| + c_2|z_2| + \dots + c_n|z_n| < 1, c_2 > 0, \dots, c_n > 0\}$ (условие $c_1 = 1$ не ограничивает общности рассуждений, т.к. к области типа A общего вида несложно перейти преобразованием подобия). Требуется найти функцию $f(z)$ класса (T) , исчезающую в бесконечно удаленных точках при стремлении к ним из области E_1 , удовлетворяющую в точках окружности $B_1 = \{z \in C^n : z = z_1 \equiv (\eta_1, 0, \dots, 0), |\eta_1| = 1\}$ краевому условию

$$f^+(z_1) = G(\eta_1)f^-(z_1), \quad (1)$$

где $f^+(z_1) = \lim_{\substack{z \rightarrow z_1 \\ z \in D}} f(z)$, $f^-(z_1) = \lim_{\substack{z \rightarrow z_1 \\ z \in E_1}} f(z)$, функция $G(\eta_1)$ определена на окружности B_1 , нигде на ней не обращается в нуль и удовлетворяет условию Гёльдера, причем её индекс $\chi = \text{Ind} G(\eta_1) \geq 0$.

3. Решение задачи Римана. Учитывая, что функции, определяемые интегралом типа Темлякова I рода:

$$F(z) = \frac{1}{(2\pi)^n i} \int d\omega_\theta \int_{|\eta|=1} \frac{\varphi(\theta, \eta)}{\eta - u} d\eta, \quad (2)$$

являются функциями класса (T) , будем искать решение задачи в виде интеграла (2). Подставляя в соотношение (1) предельные значения интеграла (2), получим:

$$\frac{1}{(2\pi)^n i} \int d\omega_\theta \int_{|\eta|=1} \frac{\varphi(\theta, \eta)}{\eta - \eta_1} d\eta + \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int \varphi(\theta, \eta_1) d\omega_\theta =$$

$$= G(\eta_1) \cdot \left[\frac{1}{(2\pi)^n i} \int d\omega_\theta \int_{|\eta|=1} \frac{\varphi(\theta, \eta)}{\eta - \eta_1} d\eta - \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int \varphi(\theta, \eta_1) d\omega_\theta \right],$$

или

$$\frac{1}{2 \cdot (2\pi)^{n-1}} \int \left[(1 + G(\eta_1)) \varphi(\theta, \eta_1) + \frac{1 - G(\eta_1)}{\pi i} \int_{|\eta|=1} \frac{\varphi(\theta, \eta)}{\eta - \eta_1} d\eta \right] d\omega_\theta = 0.$$

Отсюда следует, что

$$(1 + G(\eta_1)) \varphi(\theta, \eta_1) + \frac{1 - G(\eta_1)}{\pi i} \int_{|\eta|=1} \frac{\varphi(\theta, \eta)}{\eta - \eta_1} d\eta = 2\lambda(\theta, \eta_1), \quad (3)$$

где функция $\lambda(\theta, \eta_1)$, предполагаемая непрерывной по совокупности аргументов и удовлетворяющей по η_1 условию Гельдера, независимому от $\theta_j, j = \overline{2, n}$, является решением уравнения $\int \lambda(\theta, \eta_1) d\omega_\theta = 0$, а коэффициент 2 взят для удобства дальнейших выкладок.

Решать полученное сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши (II) будем тем же способом, каким решают характеристическое уравнение в теории функций одного комплексного переменного (см. [2]). Рассмотрим с этой целью интеграл типа Коши:

$$\Phi(\theta, u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\eta|=1} \frac{\varphi(\theta, \eta)}{\eta - u} d\eta, \quad (4)$$

где $u = z_1 + c_2 z_2 e^{-i\theta_2} + \dots + c_n z_n e^{-i\theta_n}$.

Учитывая равенство $\lim_{z \rightarrow z_1} u = \eta_1$ и используя формулы Сохоцкого для интеграла (4), перепишем уравнение (3) в виде:

$$\varphi(\theta, \eta_1) + G(\eta_1) \varphi(\theta, \eta_1) + 2\Phi^+(\theta, \eta_1) - \varphi(\theta, \eta_1) - G(\eta_1) \varphi(\theta, \eta_1) - 2G(\eta_1) \Phi^-(\theta, \eta_1) = 2\lambda(\theta, \eta_1),$$

или, что то же самое,

$$\Phi^+(\theta, \eta_1) = G(\eta_1) \Phi^-(\theta, \eta_1) + \lambda(\theta, \eta_1). \quad (5)$$

Таким образом, решение сингулярного интегрального уравнения (II) (а значит и поставленной однородной задачи линейного сопряжения) свелось к решению задачи Римана с краевым условием (IV).

Решение этой задачи, учитывая что $\chi \geq 0$, имеет вид

$$\Phi(\theta, u) = \frac{X(u)}{2\pi i} \int_{|\eta|=1} \frac{\lambda(\theta, \eta)}{X^*(\eta)} \cdot \frac{d\eta}{\eta - u} + X(u) \cdot P_{\chi-1}(u), \quad (6)$$

где

$$X(u) = \begin{cases} e^{\Gamma^+(u)}, & \text{если } |u| < 1, \\ u^{-\chi} \cdot e^{\Gamma^-(u)}, & \text{если } |u| > 1, \end{cases}$$

$$\Gamma(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\eta|=1} \frac{\ln[\eta^{-\chi} \cdot G(\eta)]}{\eta - u} d\eta,$$

$P_{\chi-1}(u)$ – полином степени не выше $\chi - 1$ с произвольными комплексными коэффициентами (при $\chi = 1$ $P_{\chi-1}(u) = C_0$; при $\chi = 0$ полагаем $P_{\chi-1}(u) \equiv 0$).

Итак, найдены определяющие функции $\Phi^+(\theta, u)$ интеграла (2). Далее, используя формулу (6), можно получить решение поставленной задачи.

Замечание 1. Вычислив с помощью формул Сохоцкого предельные значения определяющих функций, можно найти плотность интеграла типа Темлякова I рода $\varphi(\theta, \eta)$, где $\varphi(\theta, \eta_1) = \Phi^+(\theta, \eta_1) - \Phi^-(\theta, \eta_1)$, а значит, по формуле (2), и решение поставленной однородной задачи Римана.

4. Условие нормировки. Наличие в найденном решении задачи полинома $P_{\chi-1}(u)$ с произвольными коэффициентами и некоторой неизвестной функции $\lambda(\theta, \eta)$ указывает на неоднозначность решения. Решение задачи станет вполне определенным, если наложить на искомую функцию $F^+(z) \equiv F(z)$ (или $F^-(z) \equiv F(z)$) χ независимых условий. Например, это можно сделать следующим образом: задать в начале координат (где $u = 0$) значение определяющей функции $\Phi^+(\theta, u)$ и всех ее производных по u до порядка $\chi - 1$ включительно. Это позволит найти коэффициенты полинома $P_{\chi-1}(u)$.

Найдем, например, коэффициент C_0 . Пусть задано значение $\Phi^+(\theta, u)|_{u=0} = \Phi^+(\theta, 0)$. Из формулы (6) следует, что

$$\frac{\Phi^+(\theta, 0)}{X^+(0)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\eta|=1} \frac{\lambda(\theta, \eta)}{X^*(\eta)} \cdot \frac{d\eta}{\eta} + C_0. \quad (7)$$

Интегрируя данное соотношение по θ_j , $j = 2, n$, в пределах от 0 до 2π и учитывая, что $\int \lambda(\theta, \eta) d\omega_\theta = 0$, получаем:

$$C_0 = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int \frac{\Phi^+(\theta, 0)}{X^+(0)} d\omega_\theta = \frac{1}{(2\pi)^{n-1} \cdot X^+(0)} \int \Phi^+(\theta, 0) d\omega_\theta ,$$

или

$$C_0 = \frac{F^+(0)}{X^+(0)} , \quad (8)$$

так как

$$F^+(0) = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int \Phi^+(\theta, 0) d\omega_\theta .$$

Далее, для нахождения функции $\lambda(\theta, \eta)$ надо решать уравнение (7), в котором C_0 определяется по формуле (8).

ЛИТЕРАТУРА

1. Нелаев А.В. Граничные свойства функций, голоморфных в областях Рейнхарта пространства C^n // Вестник МГОУ. Серия «физика-математика». – М.: Изд. МГОУ. – 2006, №1. – С.86-90.
2. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. 3-е изд. – М.: Наука, 1977. – 640 с.

УДК 517.55

О НЕОДНОРОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ РИМАНА В C^n

А.В.Нелаев

*Московский государственный областной университет
105005, Москва, ул. Радио, 10а*

1. ПОСТАНОВКА НЕОДНОРОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ РИМАНА В КЛАССЕ ФУНКЦИЙ (T)

Считаем известными результаты и обозначения предыдущей работы [1].

Пусть в пространстве C^n ($n \geq 2$) задана область D типа A :

$$D = \{z \in C^n : |z_1| + c_2|z_2| + \dots + c_n|z_n| < 1, c_2 > 0, \dots, c_n > 0\} .$$

Требуется найти функцию $f(z)$ класса (T) , исчезающую в бесконечно удаленных точках при стремлении к ним из области

$$E_1 = \{z \in C^n : |z_1| - c_2|z_2| - \dots - c_n|z_n| > 1\}$$

и удовлетворяющую в точках окружности

$$B_1 = \{z \in C^n : z = z_1 \equiv (\eta_1, 0, \dots, 0), |\eta_1| = 1\}$$

краевому условию

$$f^+(z_1) = G(\eta_1)f^-(z_1) + g(\eta_1), \quad (1)$$

где

$$f^+(z_1) = \lim_{\substack{z \rightarrow z_1 \\ z \in D}} f(z), \quad f^-(z_1) = \lim_{\substack{z \rightarrow z_1 \\ z \in B_1}} f(z),$$

а функции $G(\eta_1)$ и $g(\eta_1)$ определены и удовлетворяют условию Гёльдера на окружности B_1 , причем $G(\eta_1)$ нигде на B_1 не обращается в нуль.

2. РЕШЕНИЕ НЕОДНОРОДНОЙ ЗАДАЧИ РИМАНА

Решение поставленной задачи будем искать в виде интеграла типа Темлякова I рода:

$$F(z) = \frac{1}{(2\pi)^n i} \int d\omega_\theta \int_{|\eta|=1} \frac{\varphi(\theta, \eta)}{\eta - z} d\eta. \quad (2)$$

Подставляя формулы предельных значений этого интеграла [1] в краевое условие (1), получаем:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi)^n i} \int d\omega_\theta \int_{|\eta|=1} \frac{\varphi(\theta, \eta)}{\eta - \eta_1} d\eta + \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int \varphi(\theta, \eta_1) d\omega_\theta = \\ & = G(\eta_1) \cdot \left[\frac{1}{(2\pi)^n i} \int d\omega_\theta \int_{|\eta|=1} \frac{\varphi(\theta, \eta)}{\eta - \eta_1} d\eta - \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int \varphi(\theta, \eta_1) d\omega_\theta \right] + g(\eta_1), \end{aligned}$$

или

$$\frac{1}{2 \cdot (2\pi)^{n-1}} \int \left[(1 + G(\eta_1)) \varphi(\theta, \eta_1) + \frac{1 - G(\eta_1)}{\pi i} \int_{|\eta|=1} \frac{\varphi(\theta, \eta)}{\eta - \eta_1} d\eta - 2g(\eta_1) \right] d\omega_\theta = 0.$$

Отсюда следует, что

$$(1 + G(\eta_1))\varphi(\theta, \eta_1) + \frac{1 - G(\eta_1)}{\pi i} \int_{|\eta|=1} \frac{\varphi(\theta, \eta)}{\eta - \eta_1} d\eta = 2(g(\eta_1) + \lambda_1(\theta, \eta_1)), \quad (3)$$

где $\lambda_1(\theta, \eta_1)$ – некоторая функция, предполагаемая непрерывной по совокупности аргументов и удовлетворяющей по η_1 условию Гельдера, независимому от θ , являющаяся решением уравнения $\int \lambda_1(\theta, \eta_1) d\omega_\theta = 0$.

Полученное уравнение (б) есть сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши, решать которое будем тем же способом, каким решают характеристическое уравнение в теории функций одного комплексного переменного (см. [2]). Рассмотрим с этой целью интеграл типа Коши:

$$\Phi(\theta, u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\eta|=1} \frac{\varphi(\theta, \eta)}{\eta - u} d\eta, \quad (4)$$

где $u = z_1 + c_2 z_2 e^{-i\theta_1} + \dots + c_n z_n e^{-i\theta_n}$.

Учитывая равенство $\lim_{z \rightarrow \eta_1} u = \eta_1$ и используя формулы Сохоцкого для интеграла (4), перепишем уравнение (3) в виде:

$$\begin{aligned} \varphi(\theta, \eta_1) + G(\eta_1)\varphi(\theta, \eta_1) + 2\Phi^+(\theta, \eta_1) - \varphi(\theta, \eta_1) - G(\eta_1)\varphi(\theta, \eta_1) - 2G(\eta_1)\Phi^-(\theta, \eta_1) = \\ = 2(g(\eta_1) + \lambda_1(\theta, \eta_1)), \end{aligned}$$

или

$$\Phi^+(\theta, \eta_1) = G(\eta_1)\Phi^-(\theta, \eta_1) + g(\eta_1) + \lambda_1(\theta, \eta_1). \quad (5)$$

Решение сингулярного интегрального уравнения (3), а значит и поставленной неоднородной задачи линейного сопряжения, свелось, таким образом, к решению задачи Римана с краевым условием (5).

Рассмотрим два возможных случая.

1) Пусть $\chi = \text{Ind} G(\eta_1) \geq 0$. Тогда решение задачи имеет вид

$$\Phi(\theta, u) = \frac{X(u)}{2\pi i} \int_{|\eta|=1} \frac{g(\eta) + \lambda_1(\theta, \eta)}{X^+(\eta)} \cdot \frac{d\eta}{\eta - u} + X(u) \cdot P_{\chi-1}(u), \quad (6)$$

где

$$X(u) = \begin{cases} e^{\Gamma^+(u)}, & \text{если } |u| < 1, \\ u^{-\chi} \cdot e^{\Gamma^-(u)}, & \text{если } |u| > 1, \end{cases}$$

$$\Gamma(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\eta|=1} \frac{\ln[\eta^{-\chi} \cdot G(\eta)]}{\eta - u} d\eta,$$

$P_{\chi-1}(u)$ – полином степени не выше $\chi - 1$ с произвольными комплексными коэффициентами (при $\chi = 1$ $P_{\chi-1}(u) = C_0$; при $\chi = 0$ полагаем $P_{\chi-1}(u) \equiv 0$).

2) Пусть $\chi = \text{Ind}G(\eta_1) < 0$. Тогда решение задачи имеет вид

$$\Phi(\theta, u) = \frac{X(u)}{2\pi i} \int_{|\eta|=1} \frac{g(\eta) + \lambda_1(\theta, \eta)}{X^+(\eta)} \cdot \frac{d\eta}{\eta - u}. \quad (7)$$

Отметим следующее обстоятельство. Неоднородная задача Римана в случае $\chi < -1$, вообще говоря, неразрешима. Для ее разрешимости необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие $|\chi|$ условий:

$$\int_{|\eta|=1} \frac{g(\eta) + \lambda_1(\theta, \eta)}{X^+(\eta)} \cdot \eta^{k-1} d\eta = 0, \quad k = 1, 2, \dots, |\chi|.$$

Итак, нами найдены определяющие функции $\Phi^+(\theta, u)$ и $\Phi^-(\theta, u)$, задаваемые формулой (6), если $\chi \geq 0$, или формулой (7), если $\chi < 0$. Это дает возможность получить решение поставленной задачи.

3. СЛЕДСТВИЯ И ЗАМЕЧАНИЯ

Замечание 1. Решение поставленной неоднородной краевой задачи можно найти в виде интеграла типа Темлякова I рода (2) с плотностью $\varphi(\theta, \eta)$, где $\varphi(\theta, \eta_1) = \Phi^+(\theta, \eta_1) - \Phi^-(\theta, \eta_1)$, а $\Phi^+(\theta, \eta_1)$ и $\Phi^-(\theta, \eta_1)$ есть предельные значения определяющих функций, вычисленные по формулам Сохоцкого.

Замечание 2. Если для нахождения решения краевой задачи используется формула (6), то решение зависит от полинома $P_{\chi-1}(u)$ с произвольными комплексными коэффициентами и некоторой неизвестной функции $\lambda_1(\theta, \eta)$. Решение задачи станет вполне определенным, если наложить на искомую функцию $F^+(z)$ (или $F^-(z)$) χ независимых условий. Это, например, можно сделать так: задать в начале координат (где $u = 0$) значение определяющей функции $\Phi^+(\theta, u)$ и всех ее производных по u до порядка $\chi - 1$ включительно. Это позволит найти коэффициенты полинома $P_{\chi-1}(u)$.

Найдем, например, коэффициент C_0 . Пусть задано значение $\Phi^+(\theta, u)|_{u=0} = \Phi^+(\theta, 0)$. Из формулы (6) следует, что

$$\frac{\Phi^+(\theta, 0)}{X^+(0)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\eta|=1} \frac{g(\eta) + \lambda_1(\theta, \eta)}{X^+(\eta)} \cdot \frac{d\eta}{\eta} + C_0. \quad (8)$$

Интегрируя это соотношение по θ_j , $j = \overline{2, n}$, в пределах от 0 до 2π и учитывая, что $\int \lambda_1(\theta, \eta_1) d\omega_\theta = 0$, получаем:

$$C_0 = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int \left[\frac{\Phi^+(\theta, 0)}{X^+(0)} - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\eta|=1} \frac{g(\eta)}{X^+(\eta)} \cdot \frac{d\eta}{\eta} \right] d\omega_\theta,$$

т.е.

$$C_0 = \frac{F^+(0)}{X^+(0)} - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\eta|=1} \frac{g(\eta)}{X^+(\eta)} \cdot \frac{d\eta}{\eta},$$

поскольку

$$F^+(0) = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int \Phi^+(\theta, 0) d\omega_\theta.$$

Подставив значение коэффициента C_0 в соотношение (8), получаем уравнение для нахождения функции $\lambda_1(\theta, \eta)$:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\eta|=1} \frac{\lambda_1(\theta, \eta)}{X^+(\eta)} \cdot \frac{d\eta}{\eta} = \frac{\Phi^+(\theta, 0) - F^+(0)}{X^+(0)}.$$

Если же решение краевой задачи находится с использованием формулы (7) (то есть индекс $\chi < 0$), то это решение будет содержать неизвестную функцию $\lambda_1(\theta, \eta)$. В этом случае для получения определенного решения надо на функцию $F^+(z)$ (или $F^-(z)$) наложить одно условие. Например, так же, как в рассмотренном случае, можно задать в начале координат (где $u = 0$) значение определяющей функции $\Phi^+(\theta, 0)$. Тогда для нахождения функции $\lambda_1(\theta, \eta)$ следует рассмотреть уравнение

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\eta|=1} \frac{\lambda_1(\theta, \eta)}{X^+(\eta)} \cdot \frac{d\eta}{\eta} = \frac{\Phi^+(\theta, 0)}{X^+(0)} - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\eta|=1} \frac{g(\eta)}{X^+(\eta)} \cdot \frac{d\eta}{\eta}.$$

Следствие 1. В случае $G(\eta_1) \equiv 1$ неоднородная задача линейного сопряжения обращается в задачу о скачке с краевым условием:

$$f^+(z_1) - f^-(z_1) = g(\eta_1).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Нелаев А.В. Граничные свойства функций, голоморфных в областях Рейнхарта пространства C^n // Вестник МГОУ. Серия «физика-математика». – М.: Изд. МГОУ. – 2006, №1. – С.86-90.
2. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. 3-е изд. – М.: Наука, 1977. – 640 с.

ФИЗИКА

УДК 534.286

**АНИЗОТРОПНОЕ РАСТЕКАНИЕ КАПЛИ ЖИДКОГО
КРИСТАЛЛА НА АНИЗОМЕТРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ****Д.В.Шмелева, В.А.Цветков, С.В.Пасечник, В.М.Козенков***

*Московский государственный университет
приборостроения и информатики
107996, Москва, ул. Стромывка, д.20
Shmeliova@mail.ru,*

1. Введение

Поведение жидких кристаллов при сильных пространственных ограничениях привлекает повышенное внимание как ученых, занимающихся фундаментальными исследованиями жидких кристаллов, так и специалистов, участвующих в практическом использовании ЖК материалов. Многочисленные эксперименты, выполненные в нерегулярных 3Д наноструктурах, таких как пористые стекла, аэрогели, аэросилы, эмульсии, с чрезвычайно большим вкладом поверхности раздела ЖК-твердое тело в физические характеристики таких систем показали, что пространственное ограничение приводит к существенной модификации термодинамического поведения жидких кристаллов [1]. В частности, были экспериментально обнаружены и теоретически объяснены в рамках мезоскопических приближений выраженные сдвиги температур фазовых переходов и изменения порядка фазовых переходов. Было также установлено, что не только равновесные, но и неравновесные свойства, такие как диэлектрические и вязкостные, могут модифицироваться при сильных нерегулярных и регулярных ограничениях [2-6]. В последнем случае это происходит за счет существенного замедления как трансляционных, так и ориентационных молекулярных движений в приповерхностных слоях жидких кристаллов [5]. Хотя такие эффекты существуют и в изотропных жидкостях [2,3,6,7,8], они обычно приписываются чрезвычайно тонким (порядка нескольких нанометров) приповерхностным слоям, в то время как приповерхностные слои жидких кристаллов с модифицированными неравновесными свойствами могут быть существенно толще, например порядка 100 нм. Таким образом, это может приводить к модификации интегрального динамического поведения относительно тонких (1..10 мкм) слоев ЖК, используемых в современной дисплейной индустрии. Это стимулирует экспериментальные и теоретические исследования необратимых явлений в приповерхностных слоях ЖК.

Растекание ЖК капель по поверхностям твердого тела различных типов может рассматриваться как интересное явление, которое открывает новые возможности для лучшего понимания неравновесного взаимодействия жидких кристаллов с твердым телом [10]. Несмотря на многочисленные экспериментальные и теоретические исследования, касающиеся растекания изотропных жидкостей, которые ведутся и в настоящее время, первые эксперименты такого типа с жидкокристаллическими каплями были вы-

полнены совсем недавно [11,12]. До некоторой степени это может быть объяснено отсутствием соответствующих теоретических обоснований, которые в настоящее время только создаются [13]. Тем не менее, существует возможность физического объяснения новых результатов в рамках разумных допущений. Например, можно пренебречь анизотропной природой поверхностного натяжения в жидких кристаллах и таким образом использовать при физической интерпретации растекания жидких кристаллов (капель?) некоторые существенные результаты, полученные ранее для изотропных жидкостей.

В данной статье мы уделяем особое внимание взаимодействию жидкокристаллических капель с сильно анизотропной поверхностью, индуцированной регулярным рельефом. Для получения описанных ниже результатов использовалась обычная поляризационная микроскопия наряду с обработкой цифровых изображений. Мы надеемся, что новые экспериментальные данные, представленные в данной статье будут стимулировать теоретическое описание сложных необратимых процессов, присущих растеканию анизотропных жидкостей по анизотропным поверхностям.

2. Эксперимент

В наших экспериментах мы использовали подложки с хорошо определенным поверхностным рельефом, показанным на рис.1. Он формировался с помощью специального штампа в фотополимерном слое, который покрывал пластину из поликарбоната толщиной 1мм. Мы также использовали образцы с плоской поверхностью, сделанные из тех же материалов с толщиной полимерного слоя 0.2мкм. Такие образцы обеспечивали поверхность сравнения, свободную от рельефа.

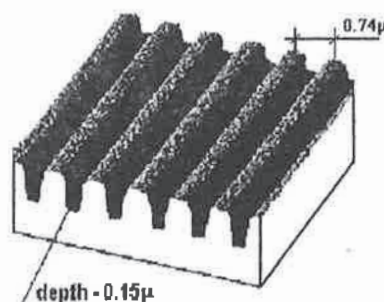


Рис.1. Подложка с периодическим рельефом

Для установления общих закономерностей в растекании анизотропных жидкостей использовалась жидкокристаллическая нематическая смесь ЖК1289 (14). Некоторые эксперименты были выполнены с изотропными жидкостями (водой, глицерином, вазелиновым маслом и т.д.) существенно отличающимися по отдельным физическим свойствам.

В экспериментах аленькая капля ЖК или изотропной жидкости помещалась на рельефную или гладкую поверхность. Процесс растекания регистрировался с помощью микрофотографирования в поляризованном свете с дальнейшей обработкой цифровых изображений. Исследования выполнялись в параллельных и скрещенных поляроидах, ориентированных под 45° относительно направления рельефа.

3. Результаты и обсуждение

Растекание жидкокристаллических капель по изотропной поверхности

Изотропные и ЖК капли показывали аналогичное поведение на изотропной подложке. Форма капель была близка к форме сферического сегмента. В поляризованном свете на изображении изотропной капли не наблюдалось интерференционных колец в то время как такие кольца появлялись в случае ЖК капель. Ранее аналогичная картина интерференции была описана в работе [12] для капель 5CB на гладкой поверхности окиси кремния.

В отличие от Ньютоновских колец интерференционные полосы связаны с изменением двулучепреломления ЖК. Мы так же наблюдали деформацию формы контактной линии, связанную с возникновением гидродинамической неустойчивости в ЖК.

Растекание ЖК капель по анизотропной поверхности

После высаживания на подложку капли ЖК и изотропных жидкостей быстро вытягивались вдоль бороздок (Рис2). Такое поведение связано с лучшим смачиванием поверхности в направлении рельефа.

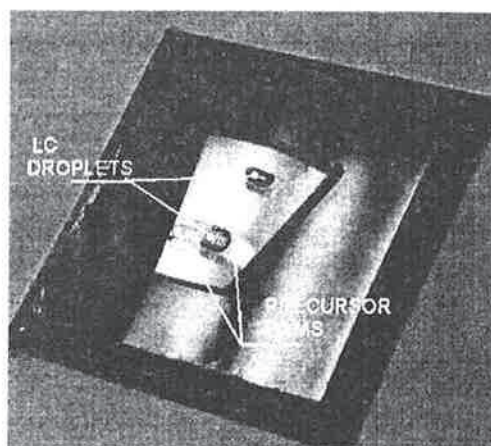


Рис.2. Фотография растекания двух ЖК капель в естественном свете. Прекурсорная пленка хорошо визуализируется на чистом участке диска (внизу) и практически не видна на участке диска, обработанного хромоланом (вверху)

Далее наблюдался поток в отдельных бороздках. На следующем этапе отдельные каналы соединялись с образованием сплошной тонкой пленки (Рис3).

Характер и скорость растекания существенно зависели от размера капли и предшествующей обработки поверхности. Так, обработка поверхности гомеотропным сурфактантом приводила к замедлению и последующему прекращению растекания.

В то же время на чистой поверхности растекание ограничивалось лишь размером подложек в направлении растекания и наблюдалось в течении нескольких часов. В результате большая площадь подложки покрывалась тонкой пленкой, хорошо видимой в естественном свете т.к. при смачивании исчезала дифракционная картина (Рис 2,3). В

отличие от растекания изотропной жидкости по поверхности с хорошим смачиванием форма растекающейся капли сохранялась долгое время [10].

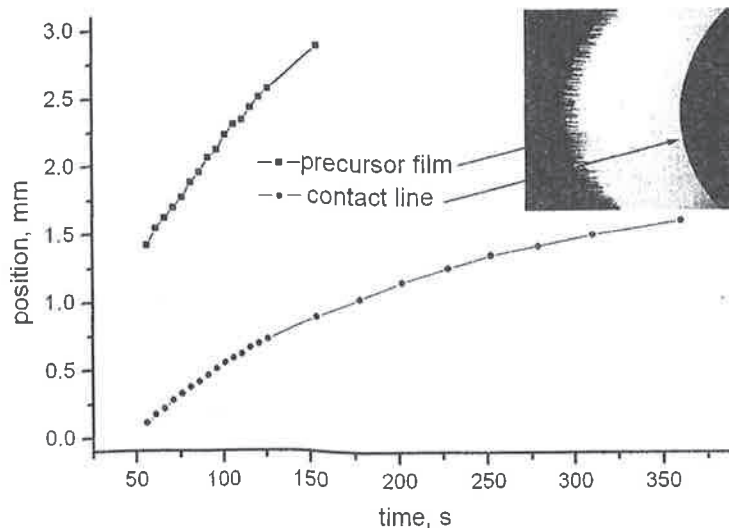


Рис.3. Положение прекурсорной пленки (квадраты) и контактной линии (кружки) в различные моменты времени и микрофотография ЖК капли в скрещенных поляроидах.

В скрещенных поляроидах в следствии анизотропии жидкого кристалла изображение тонкой прекурсорной пленки включало последовательность интерференционных полос (Рис 4). Каждая интерференционная полоса соответствовала одинаковой разности фаз Φ между необыкновенным (е) и обыкновенным (о) лучами. Приближенный профиль поверхности капли можно восстановить, используя предположения об ориентационной структуре внутри пленки [12].

Было установлено, что рельеф обеспечивает планарную ориентацию на подложке в направлении рельефа т.к. при ячейка, изготовленная из двух одинаковых подложек, с перпендикулярным направлением рельефа, давала твистовую ориентацию ЖК. Тоже получалось в комбинированной ячейке, где одна из подложек – с рельефом, другая – натертая стеклянная пластина. Ориентация на границе раздела ЖК - воздух принималась нормальной как и в случае с 5ЦБ [12].

В этом случае угол β между директором и нормалью к подложкам, направленной по оси z , выражается в одноконстантном приближении как линейная функция координаты z :

$$\beta(z) = (\pi/2)(1 - z/d) \quad (1)$$

Локальную толщину d пленки как функцию координаты x можно определить из анализа распределения интенсивности света I в интерференционных полосах согласно известному соотношению:

$$I = I_0 \sin^2 \frac{\Phi}{2}, \quad (2)$$

где разность фаз Φ выражается как:

$$\Phi = \frac{2\pi}{\lambda} \int_0^d \Delta n dz \quad (3)$$

$$\Delta n = n(\beta) - n_0 \quad (4)$$

$$n(\beta) = n_0 \left[1 - \frac{n_e^2 - n_0^2}{n_e^2} \cos^2 \beta \right]^{-1/2} \quad (5)$$

(n_e и n_0 – показатели преломления необыкновенного и обыкновенного лучей).

Используя уравнения (1-5) можно рассчитать локальную толщину d численно. Но можно получить простое аналитическое выражение для малых значений анизотропии показателя преломления:

$$\Delta n = n_e - n_0 \ll n_e \quad (6)$$

В этом случае разность фаз определяется выражением:

$$\Phi = (\pi d / \lambda) [n_0 (n_e^2 - n_0^2) / n_e^2], \quad (7)$$

где λ – длина волны света.

Из (7) можно получить выражения для определения локальной толщины как функцию порядка интерференционного экстремума k :

$$d_{k \max} = [\lambda / (2 \Delta n)] (2k + 1) \quad \text{для максимума интенсивности,} \quad (8)$$

$$d_{k \min} = [\lambda k / \Delta n] \quad \text{для минимума интенсивности.} \quad (9)$$

Пример профиля $d(x)$, полученный при использовании выражения (8) для различных моментов времени показан на рисунке 4. Экстраполяция этой кривой позволяет рассчитать контактный угол и положение контактной линии как функцию времени и дают возможность проверки теоретических моделей.

Наиболее существенное отличие наших экспериментов от описанных в [12] связано с прекурсорной пленкой, движущейся впереди контактной линии: расстояние от фронта прекурсорной пленки до контактной линии достигает нескольких миллиметров, в то время как при растекании ЖК по изотропной поверхности прекурсорная пленка локализована вблизи контактной линии (~50 мкм) (См. рисунок 3).

Проведенный эксперимент ставит несколько задач для теоретического рассмотрения:

Во-первых, было бы интересным рассмотреть проблему течения в индивидуальных бороздках как течения в открытых каналах. В общем случае, толщина ЖК пленки d_0 в центре такого канала может отличаться от глубины h бороздки вследствие мениска. При хорошем смачивании, как в нашем случае, $d_0 \ll h$, так что в первом приближении

кажется разумным рассматривать такое движение как поток Пуазейля при нанометровых ограничениях.

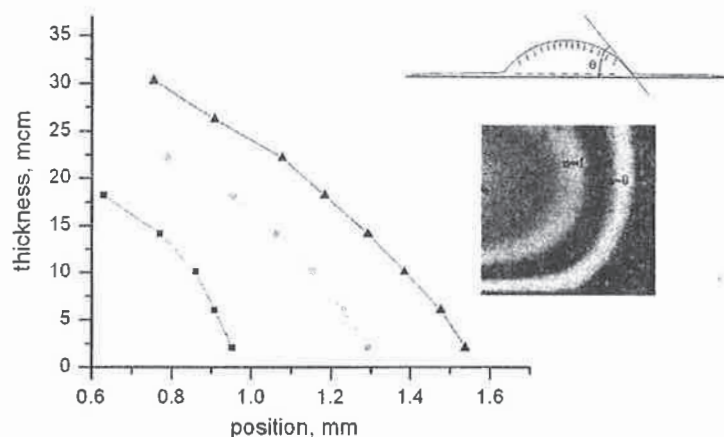


Рис.4. Профиль ЖК капли в направлении растекания в различные моменты времени (квадраты - 178 s, $\theta=5.0^\circ$, кружки - 252 s, $\theta=3.4^\circ$, треугольники - 360 s, $\theta=2.2^\circ$) и микрофотография, используемая при расчете.

Во-вторых, остается открытым вопрос: определяется ли динамика растекания полностью процессами структурной релаксации, характерными для нанометровой прекурсорной пленки в изотропных жидкостях, или балансом обычных вязкостных потерь и поверхностного натяжения [12]? Если вязкостные потери играют существенную роль, можно надеяться, что компьютерное моделирование такого потока обеспечит получение информации об анизотропных сдвиговых вязкостях в нанометровых поверхностных слоях. Такие вязкости могут вносить вклад и в движение контактной линии. Качественный анализ этой проблемы для более простого случая изотропного растекания ЖК капли [12] по плоской поверхности показывает, что оба механизма диссипации энергии, упомянутые выше, могут быть важны. Последнее отражено в уравнении баланса сил, действующих на контактную линию:

$$(\eta/\theta + A)U = \gamma\theta^2 + B, \quad (10)$$

где A и B относятся к диссипативным и упругим вкладам, η - коэффициент сдвиговой вязкости, θ - краевой угол, γ - коэффициент поверхностного натяжения. В случае $A=B=0$ выражение (10) преобразуется к хорошо известному закону Таннера [10]. Интересно получить выражение, аналогичное (10) для случая анизотропного растекания ЖК капель, реализованного в наших экспериментах с тем, чтобы оценить вязкостные потери и коэффициент сдвиговой вязкости в прекурсорной пленке субмикронной толщины.

Таким образом, дальнейшие экспериментальные исследования и теоретическое рассмотрение указанного выше анизотропного растекания может быть важным для разработки общей динамической теории жидких кристаллов при сильных пространственных ограничениях.

4. Заключение

Представлены первые экспериментальные данные по растеканию ЖК капель по поверхности с регулярным рельефом. Основные результаты:

1. Субмикронный рельеф обуславливает планарную поверхностную ориентацию ЖК вдоль борозд и задает направление растекания.
2. Первая стадия движения прекурсорной пленки выглядит как сдвиговое течение ЖК по отдельным каналам субмикронного размера. Компьютерное моделирование таких потоков может дать информацию об анизотропных сдвиговых вязкостях в приповерхностных слоях ЖК.
3. Растекание капли ЖК может обсуждать в терминах движения контактной линии как и в случае изотропных подложек, следовательно можно ввести эффективный анизотропный коэффициент поверхностного натяжения. Определение его значения возможно после создания адекватной модели.
4. Установлено, что анизотропное растекание существенно зависит от предварительной обработки поверхности с микрорельефом, что связано с конкуренцией влияния межмолекулярных взаимодействий ЖК-рельеф и ЖК-сурфактант.

ЛИТЕРАТУРА

1. G.P. Crawford, S. Zumer. *Liquid Crystals In Complex Geometries: Formed by Polymer And Porous Networks*. Taylor and Francis, UK (1996)
2. G.P. Crawford, et.al. *Phys. Rev. Lett.* 66, 723 (1991)
3. B.Y. Derjaguin, YU. M. Popovskij, B.A. Altoiz. *J. of Colloid and Interface Science*, 96, 492 (1983)
4. M.Vilfan, et. al. *Phys. Rev. E*, 63, 061709 (2001)
5. S. Basu; F. Aliev. *Mol. Cryst. Liq. Cryst.*, 421(1), 49 (2004)
6. V.A. Tsvetkov. *Mol. Cryst. Liq. Cryst.*, 436 (1) 203/1157 (2005)
7. J.-P. Korb, et.al. *Phys. Rev. Lett.* 77, 2312 (1996)
8. R.C. Major, et.al. *Phys. Rev. Lett.* 96, 177803 (2006)
9. S. Pasechnik; et.al. *Liq. Crist.* 33, 10, 1153 (2006)
10. P.G. De Gennes. *Rev. Mod. Phys.*, 57, 827 (1985)
11. S. Bardon, et.al. *Phys. Rev. E* 59, 6808 (1999)
12. C. Poulard, A. M. Cazabat. *Langmuir*; 21(14); 6270 (2005)
13. A.D. Rey. *Phys. Rev. E* 69, 041707 (2004)
14. M.F. Grebenkin, A.V. Ivashenko. *LC matter*. Moscow, Russia (1989)

УДК 534.286:535.51

НИЗКОЧАСТОТНЫЕ УЛЬТРАЗВУКОВЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ В ОБРАЗЦАХ ЖИДКИХ КРИСТАЛЛОВ МАЛОГО ОБЪЕМА

Г.И.Максимочкин, С.В.Пасечник, А.В.Лукин,
Г.А.Тимофеев*, Н.В.Усольцева*, В.В.Быкова*

*Московский государственный университет
приборостроения и информатики,*

**Ивановский государственный университет*

Существует проблема анализа физических свойств образцов жидких кристаллов (ЖК) малых размеров, например, вновь синтезируемых мезогенных соединений. Свойства ЖК в образцах ограниченных размеров могут существенно отличаться от свойств макроскопических образцов из-за влияния поверхностных взаимодействий. До настоящего времени для определения характеристик фазовых переходов в ЖК часто используют метод поляризационной микроскопии. Однако, результаты измерений в этом случае могут зависеть от толщины образца и качества (шероховатости) ограничивающих поверхностей (предметное и покровное стекла). Так, в работе [1] при изменении толщины образца от 1 мм до 1 мкм наблюдалось уменьшение температуры изотропного перехода в *n*-азоксианизоле (ПАО) от 409 К до 403,2 К. Этот эффект автор связывает с ростом удельной поверхностной энергии при уменьшении толщины слоя. Аналитическое описание данного эффекта может быть построено на основе феноменологической теории Ландау – де Жена [2], если учесть влияние микрорельефа поверхности с размерами порядка 10..100 нм на упорядоченность в жидком кристалле. Подобная задача рассмотрена, например, в работах [3, 16], для дисперсных жидкокристаллических систем. Микрорельеф поверхностей может образоваться вследствие различных причин – при механической обработке, фотоориентации, загрязнении и т.п. От влияния поверхностей на свойства ЖК не свободны и другие широко используемые методы анализа образцов малых размеров. Следует отметить, что взаимодействия ЖК с «гладкими» поверхностями в тонких слоях может приводить и к увеличению упорядоченности в слое, что вызывает расширение температурной области существования мезофаз и даже появление новых фаз как в ЖК, так и в соединениях, не являющихся мезогенами в макроскопических образцах.

Известно, что ультразвуковой метод является удобным средством для изучения фазовых переходов и критической динамики в объемных образцах ЖК, в условиях слабого влияния граничащих поверхностей [5, 6]. В простейшем случае нематических жидких кристаллов (НЖК), отличающихся от изотропной жидкости наличием дальнего порядка в ориентации отдельных асимметричных молекул, коэффициент поглощения α и скорость продольного ультразвука c являются анизотропными параметрами, зависящими от угла θ между волновым вектором q и директором n , задающим направле-

ние преимущественной ориентации. В гидродинамическом приближении зависимость $\alpha(\theta)$ имеет вид [6]:

$$\frac{\alpha(\theta)}{f^2} = \frac{2\pi^2}{\rho c^3} [(\mu_1 + \alpha_4) + (\mu_2 + \mu_3 + \alpha_5 + \alpha_3 - \gamma_1 \lambda^2) \cos^2 \theta + (\alpha_1 + \gamma_1 \lambda^2) \cos^4 \theta], \quad (1)$$

где f – частота ультразвука, ρ – плотность, $\lambda = \gamma_2 / \gamma_1$, $\gamma_2 = \alpha_3 + \alpha_2$, $\gamma_1 = \alpha_3 - \alpha_2$; μ_i – коэффициенты объемной вязкости, α_i – коэффициенты Лесли, имеющие размерность вязкости и входящие в гидродинамическое описание несжимаемой жидкокристаллической среды.

Таким образом, методы акустической спектроскопии позволяют получать информацию как о температурах фазовых переходов, по точкам экстремумов в зависимости $\alpha = \alpha(T)$, так и о коэффициентах объемной вязкости (в комбинации с коэффициентами Лесли). В области фазовых переходов наблюдаются существенные аномалии акустических параметров, скорости распространения и коэффициента поглощения продольных ультразвуковых волн, связанные с критическим замедлением релаксационных процессов [5]. Данные аномалии наиболее четко выражены в области частот ниже 1 МГц [6, 7]. Интересной особенностью акустического метода является его чувствительность к молекулярным процессам, предшествующим фазовым переходам – развитие флуктуаций параметра порядка, образование зародышей новой фазы и т.п.

Однако, до настоящего времени такие измерения выполняются в акустических резонаторах с объемом порядка 5 см^3 , что существенно затрудняет применение акустического метода для исследования дорогих и вновь синтезируемых мезогенных соединений. С другой стороны, проведение акустических исследований в образцах меньшего размера и, особенно, меньшей толщины, может привести, как уже отмечалось, к искажению характеристик фазовых переходов вследствие влияния поверхностных взаимодействий. Это касается и методов исследования свойств ЖК с помощью сдвиговых колебаний.

В связи с этим, в данной работе экспериментально проверена, на примере ряда мезогенных соединений, возможность акустического исследования «объемных» характеристик фазовых переходов в образцах малого объема: $0,15$ и $0,06 \text{ см}^3$, при толщине слоя (акустической базы) равной 2 мм. В образцах объемом $0,06 \text{ см}^3$, одновременно с акустическими измерениями, проводился оптический контроль характеристик изотропного перехода. Полученные акустические данные сравнивались с результатами поляризационной микроскопии тех же соединений в слоях толщиной несколько микрометров, размещенных между предметным и покровным стеклами микроскопа.

В качестве объектов исследования был использован ряд сложных эфиров (рис.1 а), синтезированных в Проблемной лаборатории жидких кристаллов Ивановского государственного университета. Соединения получены по реакции этерификации хлорангидридов 4-алкилоксифенил-циклогексан-2-карбоновой кислоты с 4-амилфенолом [8]. Исследовались 6-ой, 7-ой, 8-ой и 9-й гомологи (I – IV, соответственно). Акустические измерения проводились резонаторным методом [9, 10] в диапазоне частот $0,7 - 1,6 \text{ МГц}$ при температурах вблизи фазового перехода нематик - изотропная жидкость. Измери-

тельные ячейки были выполнены в виде полых акустических резонаторов (рис. 1 б, с) с собственной частотой 2,7 МГц при акустической базе равной 2 мм.

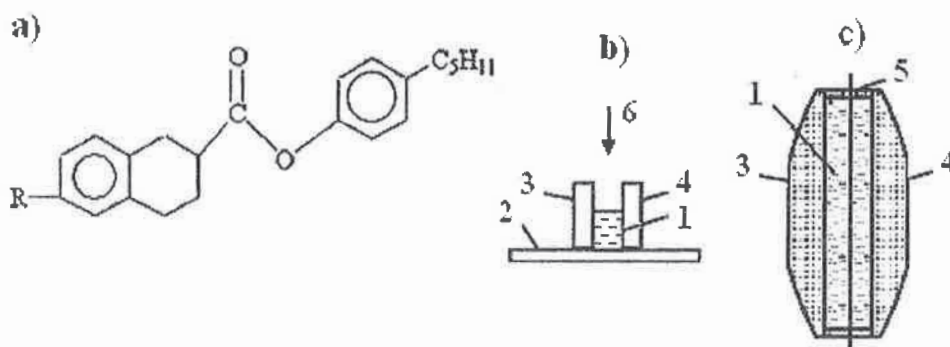


Рис. 1. Структурные формулы (а) соединений I – IV: (I: R = $-\text{OC}_6\text{H}_{13}$, II: R = $-\text{OC}_7\text{H}_{15}$, III: R = $-\text{OC}_8\text{H}_{17}$, IV: R = $-\text{OC}_9\text{H}_{19}$), исследовавшиеся в миниатюрных акустических резонаторных ячейках: (б) - объемом $0,06 \text{ см}^3$ и (с) – $0,15 \text{ см}^3$; 1 – образец ЖК, 2 – предметное стекло микроскопа, 3 и 4 – пьезопреобразователи, 5 – распорное кольцо, 6 – направление дополнительного, оптического, канала исследования.

При минимальных размерах ячеек (рис. 1 б) приходилось довольствоваться относительными измерениями акустических характеристик. Это связано с большими собственными потерями резонатора. Абсолютные акустические измерения проводились в резонаторе (рис. 1 с), составленном из двух плоско-выпуклых преобразователей и металлического распорного кольца; диаметр резонатора - 10 мм, объем - $0,15 \text{ см}^3$, акустическая база - 2 мм. Материал преобразователей - пьезокерамика ЦТС-23. В качестве эталонного образца, при градуировке резонатора, использовалась нематическая смесь ЖК-440. Ячейки размещались в специальных термостатах, обеспечивающих поддержание постоянной или изменяющейся с заданной скоростью температуры. Скорость изменения температуры в экспериментах варьировалась в диапазоне от 1 до 20 К/час с целью выбора оптимального соотношения «продолжительность измерения – точность контроля температуры». Было установлено, что для использовавшихся миниатюрных ячеек при скорости сканирования температуры равной 10 К/час суммарная ошибка определения температуры в ячейке, включая возможные градиенты по объему, не превышала 0,2 К. Измерения акустических параметров в зависимости от температуры осуществлялось на автоматизированной экспериментальной установке. Более детально экспериментальная техника и особенности методики изложены в работе [11]. Микроскопические наблюдения выполнялись на оптических поляризационных микроскопах (Leitz Laborlux 12 Pol и MC400A), снабженных термостоиками (Mettler FP 82 и т.п.). Измерялась также интенсивность проходящего через акустическую ячейку (рис. 1 б) светового потока в зависимости от температуры, с целью независимого от акустических данных контроля характеристик фазовых переходов.

На рис.2 а, б приведены характерные температурные зависимости акустических параметров c и α для исследованных образцов ЖК объемом $0,15 \text{ см}^3$ в окрестности температуры перехода нематик-изотроп и рассчитанной на их основе эффективной вяз-

кости μ^* , включающей комбинацию коэффициентов объемной вязкости и коэффициентов Лесли [12, 13]:

$$\frac{\alpha}{f^2} = \frac{2\pi^2}{\rho c^3} \mu^* \quad (2)$$

Выражение (2) может быть получено из соотношения (1) путем усреднения по равновероятному распределению ориентаций, что справедливо для объемных образцов.

Следует отметить, что в области фазового перехода на низких частотах основной вклад в величину μ^* вносят коэффициенты объемной вязкости, имеющие релаксационную природу (рис. 2 б).

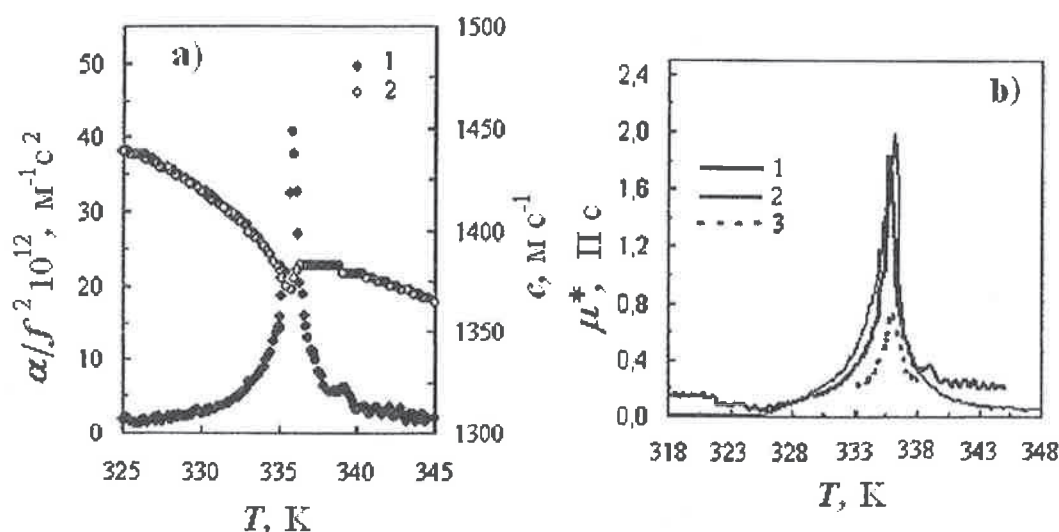


Рис. 2. Результаты акустических исследований соединения I в образце объемом $0,15 \text{ см}^3$; температурные зависимости акустических параметров (а): 1 – α/f^2 , 2 – c ; и эффективной вязкости (б) для частот: 1 – 0,68; 2 – 1,37; 3 – 1,63 МГц.

Можно ожидать, что низкочастотный предел, рассматриваемый в теории критических явлений в жидких кристаллах [14], справедлив при частотах ниже 1 МГц. Этот вывод соответствует результатам, полученным ранее в образцах большего объема [6]. Более того, зависимость α/f^2 от температуры хорошо описывается степенными зависимостями (рис. 3 а, б) для изотропной и нематической фаз, соответственно:

$$\alpha/f^2 = \alpha/(T - T^*)^\beta \quad \text{и} \quad \alpha/f^2 = \alpha/(T_{NI} - T)^\beta, \quad (3)$$

где T_{NI} – температура перехода из нематической фазы в изотропную фазу, $T^* = T_{IN} - \Delta T^*$ – температура перехода из изотропной в нематическую фазу, $\Delta T^* \approx 1$ – температура переохлаждения при переходе.

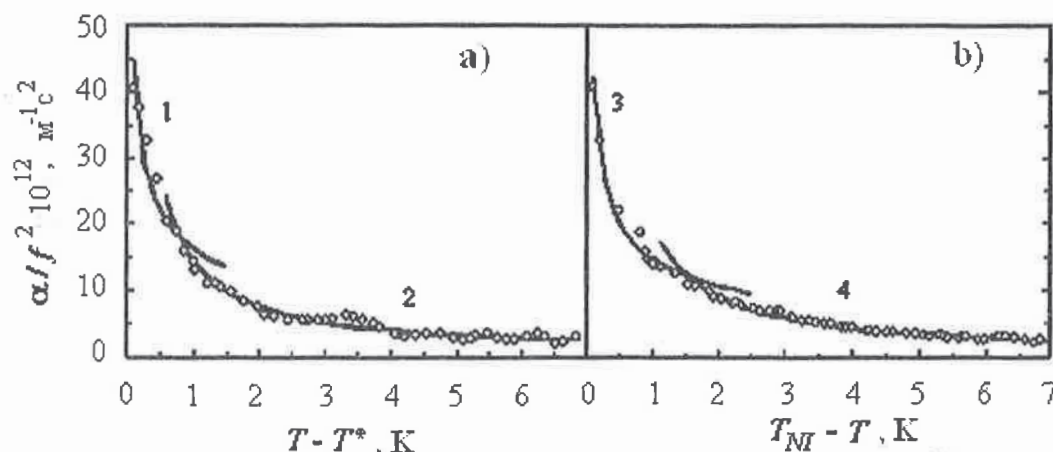


Рис. 3. Характер температурной зависимости α / f^2 в образце соединения I объемом $0,15 \text{ см}^3$:

а – для изотропной фазы, б – для нематической фазы.

Сплошные кривые 1–4 отвечают значениям критического индекса β :

1 – $0,44 \pm 0,05$ (при статистических характеристиках $R^2 = 0,902$, $\chi^2 = 12,6$);

2 – $0,93 \pm 0,03$ (при $R^2 = 0,949$, $\chi^2 = 0,27$);

3 – $0,46 \pm 0,02$ ($R^2 = 0,978$, $\chi^2 = 1,8$); 4 – $1,08 \pm 0,02$ ($R^2 = 0,988$, $\chi^2 = 0,07$).

Для обеих фаз получено $\beta \approx 1$ для температур, отстоящих более чем на $1,5 \text{ К}$ от фазового перехода и $\beta \approx 0,45$ для температур вблизи фазового перехода, что также характерно для объемных образцов жидких кристаллов [6, 14]. Эти данные показывают, что вдали от фазового перехода, при температурах, отстоящих от T_{NI} на величину более $1,5 \text{ К}$, β – с высокой достоверностью соответствует значению 1, предсказываемому теорией [14], исходящей из приближения низкочастотного гидродинамического предела $\omega\tau \ll 1$. Значение критического индекса вблизи фазового перехода равно порядка $0,45$, что также соответствует ранее установленному значению для объемных фаз [6].

Таким образом, акустические данные на частоте около $0,7 \text{ МГц}$ в образцах ЖК объемом $0,15 \text{ см}^3$ при толщине контролируемого слоя 2 мм хорошо описывают свойства ЖК, соответствующие объемным фазам, и влиянием поверхностных взаимодействий, по-видимому, можно пренебречь.

На рис. 4 представлены температурные зависимости c и α , выраженные в относительных единицах, для образцов соединений I–IV объемом $0,06 \text{ см}^3$ при толщине слоя 2 мм . Измерения проводились в режиме контролируемого нагрева в специальном термостате со скоростью 10 К/час . Стрелками показаны температуры фазовых переходов в образцах тех же соединений в слое толщиной несколько микрон, по данным поляризационной микроскопии [15], позволяющие идентифицировать переходы кристалл – смектик (Cr–Sm), смектик – нематик (Sm–N) и нематик – изотроп (N–I). Как видно из рисунка, экстремумы в зависимостях $c(T)$ и $\alpha(T)$ для всех соединений связаны с переходом исследованных соединений в изотропное состояние, и в пределах нескольких градусов совпадают с данными микроскопии. Тем не менее, наблюдающиеся различия, по нашим оценкам, выходят за пределы ошибок опыта и могут быть связаны с тем, что акустические данные в большей степени отражают объемные свойства жидкого кристалла. В тонком слое ЖК, как отмечалось выше, поверхностные взаимо-

действия могут увеличивать ориентационную упорядоченность в ЖК, что приводит к увеличению температуры изотропного перехода, что, возможно, имеет место в случае соединений I – III (рис. 4).

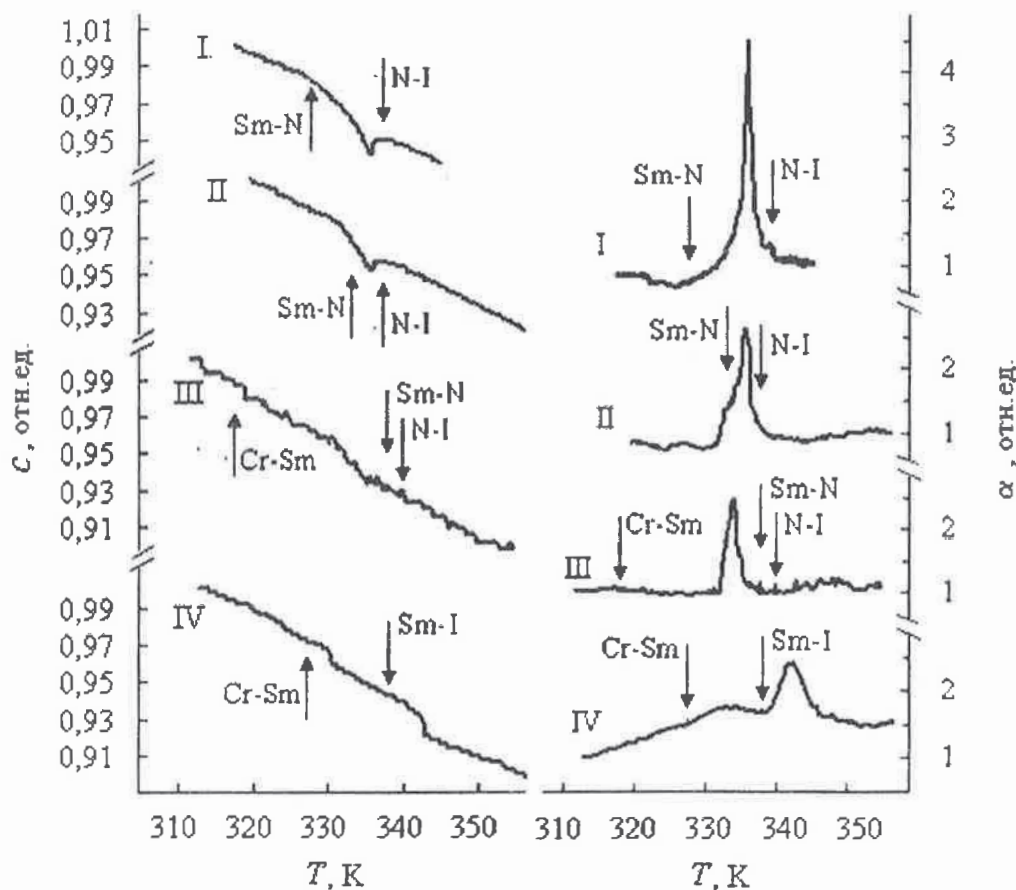


Рис. 4. Зависимости $c = c(T)$ и $\alpha = \alpha(T)$ в относительных единицах для образцов соединений I – IV объемом $0,06 \text{ см}^3$ при толщине 2 мм. Нагревание со скоростью 10 К/час. Стрелками показаны температуры фазовых переходов в образцах толщиной несколько микрометров, по данным микроскопии.

В рамках данного предположения уменьшение температуры изотропного перехода соединения IV в тонком слое по данным микроскопии (рис. 4), по сравнению с объемным образцом (по акустическим данным), соответствует дополнительному разупорядочиванию в ЖК вследствие взаимодействий на границе смектик – подложка. Переход смектик-нематик, четко наблюдающийся в тонких слоях при микроскопических наблюдениях текстур [15], не проявился в акустических данных в виде отдельных экстремумов в зависимостях $c(T)$ и $\alpha(T)$. Для соединений II и III это можно было бы объяснить наложением пиков поглощения от близко лежащих точек фазовых переходов, что, однако, явно не соответствует акустическим данным для соединения I, для которого температуры переходов Sm – N и N – I достаточно различаются, чтобы проявиться в виде отдельных пиков в акустических данных. Отсутствие такого пика может указывать на то, что в кинетике формирования смектической фазы существенную

роль играют поверхностные взаимодействия, а в случае объемных образцов (в акустической ячейке) при нагревании смектическая фаза не образовалась. Другой причиной могло быть уменьшение коэффициента поглощения ультразвука в области перехода $Sm - N$ за пределы разрешающей способности миниатюрной акустической ячейки.

Выводы

Исследованы температурные зависимости скорости распространения и коэффициента поглощения ультразвука на частотах 0,7 – 1,6 МГц в образцах малых объемов ($0,06 - 0,15 \text{ см}^3$) у мезогенных соединений на примере ряда: 4-*n*-амилфениловых эфиров 4'-*n*-алкилокси(гексилокси-, гептилокси-, октилокси- и нонилокси-)фенилциклогексан-2-карбоновой кислоты, при температурах 300 – 360 К. Показана возможность акустического контроля объемных свойств жидких кристаллов в области фазовых переходов в образцах малого размера. Установлены различия в характеристиках фазовых переходов объемных образцов и тонких слоев исследованных соединений на основе акустических и микроскопических данных. Выявленные различия могут быть связаны с влиянием поверхностных взаимодействий на кинетику формирования мезофаз и температуры фазовых переходов.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Гранта РФФИ № 07-01-13523 и Министерства образования и науки РФ (грант РНП.2.2.1.1.7280).

ЛИТЕРАТУРА

1. Клейнман И.А. Методы исследования физических свойств жидких кристаллов // В кн. Жидкие кристаллы / Под ред. С.И. Жданова, М.: Химия, 1979. 328 с.
2. de Gennes P.G. and Prost J., The Physics of Liquid Crystals // Oxford University Press, Oxford, 1993.
3. Капустин А.П., Капустина О.А. Акустика жидких кристаллов. М.: Наука, 1986. 247 с.
4. Баландин В.А., Ларионов А.Н., Пасечник С.В. // ЖЭТФ. 1982. Т. 83. № 6. С. 2121–2127.
5. Баландин В.А., Пасечник С.В., Прокопьев В.И., Шмелев О.Я. // Акуст. журнал. 1987. Т. 33. В. 4. С.583 – 587.
6. Пасечник С.В., Баландин В.А., Прокопьев В.И. и др. // ЖФХ. 1989. Т. 63. 1 2. С.471 – 475.
7. Balandin V.A., Pasechnik S.V., Prokopjev V.I., Shmelyoff O.Ya. // Liquid Crystals. 1988. V. 3. N. 10. P. 1319 – 1325.
8. Быкова В.В., Жарова М.А., Жарникова Н.В., Усольцева Н.В. // Жидкие кристаллы и их практическое использование. 2002. Вып. 2. С. 13 – 18.
9. Eggers F., Funk T. // Rev. Sci. Instr. 1973. V. 44. P. 969.
10. Кононенко В.С. // Акуст. Журнал. 1987. Т. 23. В. 4. С. 688 – 694.
11. Максимочкин Г.И., Максимочкин А.Г., Пасечник С.В. // Труды XVI сессии РАО. Москва, 2005. С. 30 – 33.
12. Пасечник С.В., Прокопьев В.И., Шмелев О.Я., Баландин В.А. // ЖФХ. 1987. Т. 61. №1. С. 1675 – 1677.
13. Максимочкин Г.И., Пасечник С.В., Кравчук А.С., Усольцева Н.В., Быкова В.В., Тимофеев Г.А. // Письма в ЖТФ. 2007. Т. 33. Вып. 12. С. 22 – 28.

14. Анисимов М.А., Воронов В.П. Гольдштейн А.С. и др. // ЖЭТФ. 1984. Т. 87. С. 1969.
15. Тимофеев Г. А., Савченко В. Е., Усольцева Н. В., Быкова В.В. // Жидкие кристаллы и их практическое использование. 2004. Вып. 3–4. С. 126 – 132.
16. Crawford G. P., Zumer S. Phase transitions in Restricted Geometries // In Liquid Crystals in Complex Geometries Formed by Polimers and Porous Networks / Ed. by G.P. Crawford and S. Zumer. Chap. 1. London: Taylor and Francis, 1996. P. 323 – 343.

УДК 530.18

О НЕКОТОРЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЯ КЛЕЙНА-ГОРДОНА В ТЕОРИИ МЕТОДА ФАКТОРИЗАЦИИ

В.А.Делянов

НОУ «Тульская школа естественных наук»
г.Тула, ул.Вересаева,12

1. Многочисленные решения волнового уравнения, в том числе и для четырехмерного электромагнитного потенциала (см. табл.1) интересны тем, что далеко не все они упоминаются, когда говорят о волновом уравнении. И, тем не менее, они очень полезны для выявления физической сути релятивистского волнового уравнения-уравнения Клейна - Гордона.

Таблица 1

Некоторые решения $f(\vec{r}, ct)$ уравнения $\square A_{1-4}(\vec{r}, t) = \rho_{1-4}$ в случае $\rho_{1-4} = 0$

$f(r, ct)$ в сферич. коорд.	$f(x, ct)$ в декарт. коорд.
$(ar+b)/r$	$ax+b$
$(ar+bt)/r$	$ax+bt$
$r^2/3+t^2$	$x^3/3+t^2x$
$(r^2+t^2)/r$	x^2+t^2
$(r^3t+t^3r)/r$	x^3t+t^3x
$(r^2t+t^3/3)/r$	$x^2t+t^3/3$
$r^3+6t^2r+t^4$	$x^4+6t^2x^2+t^4x$
$f(r\pm t+a)/r$	$f(x\pm t+a)$
$\sin(r+a) \sin(t+b)/r$	$\sin(x+a) \sin(t+b)$
t	tx
$(r^2t-t^2r+t^3/3-r^3/3)/r$	$x^2t-t^2x+t^3/3-x^3/3$
$(2r^3t+t^4r+t^5/5)/r$	$2x^3t^2+xt^4+x^5/5$
$(2t^3r^2+tr^4+t^5/5)/r$	$2t^3x^2+tx^4+t^5/5$
$(r^3t^3+0.3rt^5+0.3r^5t)/r$	$x^3t^3+0.3xt^5+0.3x^5t$
$(r^2t^2+t^4/6+r^4/6)/r$	$x^2t^2+t^4/6+x^4/6$
r	и др. комбинации

Эти решения - основание решений так называемого линеаризованного уравнения Клейна - Гордона (см. ниже) для релятивистской свободной частицы.

2. Распространение решения уравнения для электромагнитной волны на решение уравнения Клейна - Гордона в теории метода факторизации, см.[1], будет состоять из следующих операций:

1) Исходя из решений релятивистского уравнения для свободной электромагнитной волны, записанного в виде уравнения для электромагнитных потенциалов:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial (ict)^2} \right] A_{1-4}(x, t) = 0, \quad (1)$$

где $\square A_{1-4}(x, t) = 0$, а A_{1-3} и A_4 определяются соответственно из выражений $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$ и $A_4 = e\Phi$, запишем в наиболее распространенном виде его решение как $A_{1-4} = f(x + ct)$.

Если рассматривать уравнение (1) еще и как уравнение для квантового описания поведения частицы:

$$(E^2 - c^2 p^2 - m_0^2 c^4) \Psi = 0, \quad (2)$$

где $p_{1-3} = -i\hbar \nabla$, $E = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$,

так что $E^2 - c^2 p^2$ соответствует $-\frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} + \nabla^2$, то уравнение (2) представляет из себя уже уравнение Клейна - Гордона:

$$\left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial (ct)^2} - k_0^2 \right) \Psi = 0, \quad (3)$$

или $(\square - k_0^2) \Psi = 0$.

2) По таблице факторизации (см. ниже), т.к. потенциальная функция (энергия) $U = \text{const}$, пользуясь типом факторизации «D», имеем:

Таблица 2.

Таблица факторизации для общего типа факторизации «D».

$U(x, m)$	$K(x, m)$	$L(m)$
$-(bx+d)^2 + b(2m+1)$	$bx+d$	$-2bm$

(В таблице 2 b и d – постоянные, m – параметр, x – переменная.)

Полагая в нашем случае, что $b = 0$, находим: $U = d^2, K = d, L = 0 = \text{const}$.

3) Далее выбирая $d = \pm |d|$, имеем, согласно теории метода факторизации, см.[1], уравнение:

$$\hat{\alpha} \Psi_0 = 0, \quad (4)$$

где $m = 0, 1, 2, \dots, \ell$, $\hat{\alpha} = d \pm \frac{\partial}{\partial x}$, а Ψ_0 - основная функция, т.е. экстремальному значению параметра m соответствующая.

С учетом конкретного выражения $\hat{\alpha}$, из (4) имеем:

$$d \cdot \Psi_0 = \pm \frac{\partial}{\partial x} \Psi_0. \quad (5)$$

Решение (в случае только одной переменной x) такое:

$$\Psi_0 = C \cdot e^{-\int K(x, \ell) dx} = C \cdot e^{-d \cdot x}, \quad (6)$$

или

$$\Psi_0 = C \cdot e^{+\int K(x, \ell+1)} = C \cdot e^{+d \cdot x}, \quad (7)$$

4) Выбирая $d = \pm i|d|$, решение получаем теперь такое:

$$\Psi_0 = C \cdot e^{-id \cdot x}, \quad (8)$$

или

$$\Psi_0 = C \cdot e^{+id \cdot x}. \quad (9)$$

3. Заменяем x на $x - ct$. Решения такие хорошо известны, например, $\sin(x - ct)$ - решение обычного волнового уравнения. Сделаем также замену для K : с $K = d$ на $K = d + 0$.

Выбирая по физическим соображениям решение из п. 2.4), запишем его полностью с учетом последних высказываний:

$$\Psi_0 = C \cdot e^{\pm \int i|d| \cdot d(x - ct) + \int 0 \cdot d(x - ct)} = e^{\ln \int f(x \pm ct) |_{(x-ct)} d(x - ct)} = \dots f(x + ct). \quad (10)$$

Последнее выражение записано так из того, что производная и интеграл компенсируют друг друга.

4. Решение (10) может быть не только решением уравнения (1), но и уравнения (3), если дополнить его так:

$$\Psi_0 = \dots f(x + ct \pm ik_0 y),$$

или, с самого начала записывая (10):

$$\begin{aligned} \Psi_0 &= C \cdot e^{\pm \int i|d| \cdot d(x - ct) + \int 0 \cdot d(x - ct) + ik_0 y} = \\ &= \dots e^{\ln \int f(x + ct + ik_0 y) |_{(x-ct)} d(x - ct)} = \\ &= \dots f(x + ct + ik_0 y) \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь, кстати сказать, данное решение соответствует версии Паули по интерпретации физического смысла спина частиц, поэтому запишем в обобщение такой вид решения (10), по той же аналогии, что и предыдущее:

$$\Psi_0 = e^{\ln \int f(x+ct \pm ik_0 y) |'_{(x \mp ik_0 y)} d(x \mp ik_0 y)} = \dots f(x+ct \pm ik_0 y), \quad (12)$$

где «K» в более общем виде, можно записать так:

$$K = d + \varphi [\ln f(x+ct \pm ik_0 y) |'_{(x \mp ik_0 y)}].$$

5. При $y \rightarrow 0$ мы получаем из Ψ_0 простое, хорошо известное, решение для электромагнитной волны (см. табл.1).

6. Некоторые замечания по поводу смысла «K». Операции замены $K \rightarrow K + 0$ можно сопоставить следующую интерпретацию:

а) $x \pm iy$ - пространственное перемещение "туда - назад", так что

$$x + y = \frac{1}{2}[(x+iy) + (x-iy)], \text{ см. рис.1;}$$

б) дифференцирование, а затем интегрирование (что физически эквивалентное сведению к точке, а затем к бесконечности) рассматриваемой функции; в) операцию замены для $f(x=ct)$ в смысле " $x+ct$ " на " $x-ict$ " при выполнении условия

$$\nabla_x + \frac{\partial}{\partial(ict)} = 0 \text{ в выражении } e^{\int f |'_{(x+ct)} d(x+ict)}, \text{ а затем замены " } x-ict \text{ " опять на " } x+ct \text{ " для выполнения условия } (\square - k_0^2)\Psi_0 = 0 \text{ и т.д.}$$

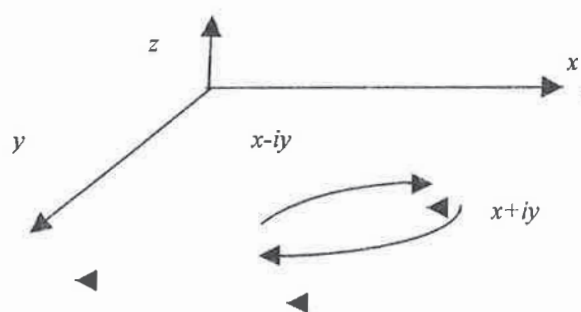


Рис.1.Интерпретация замены «K → K+0»

В заключение выпишем некоторые частные случаи решений в виде (12) для соответствующих решений $\Psi = f(x \pm ct)$ Таблицы 1 как обобщение:

1. $\Psi_1 = \sin(x + iyk_0 \pm ct)$, переходящие при $y \rightarrow 0$ в $\Psi_1 \rightarrow \sin(x \pm ct)$;

2. $\Psi_2 = e^{(x + iyk_0 \pm ct)}$, при $y \rightarrow 0$ $\Psi_2 \rightarrow e^{(x \pm ct)}$;
3. $\Psi_3 = e^{i(x + yk_0 \pm ct)}$, при $y \rightarrow 0$ $\Psi_3 \rightarrow e^{i(x + yk_0 \pm ct)}$;
4. $\Psi_4 = e^{k_0 y} f(x \pm ct)$, при $y \rightarrow 0$ $\Psi_4 \rightarrow f(x \pm ct); \dots$

Последние представляют собой решения уравнения Клейна - Гордона для свободной частицы, переходящие при условии $y \rightarrow 0$ в обычные решения волнового уравнения. Аналогичные операции можно проделать для других решений

ЛИТЕРАТУРА

1. Делянов. В.А. Об уравнении Шредингера и методе факторизации.//Вестник Моск.Гос.обл.Ун-та. Сер. Физика и мат-ка.2007,№1.С.28-36.
2. L.Infield, T. E. Hull. Method of the factorization .// Rev. Mod. Phys. Tom 23.P.21-96,1951.

УДК 531.4:530

ПРОГИБ УПРУГО – ДЕФОРМИРУЕМОЙ БАЛКИ КАК ФРАКТАЛЬНЫЙ ОБЪЕКТ

С.О.Гладков

*Московский государственный областной университет
105005, Москва, ул.Радио, 10а*

Широчайшее практическое применение теория фрактальных размерностей получила еще в прошлом веке. Первые чисто формальные математические шаги в теории рациональных и иррациональных размерностей принадлежат, по – видимому, перу Хаусдорфа [1], а несколько более поздние работы, но с явно практическим уклоном неразрывно связаны с именем Мандельброта [1]. Классическими примерами в этой области являются фрактальные размерности береговой линии, канторовой пыли, ковра Серпинского и т.д.

В настоящей работе мы покажем, что величина максимального прогиба твердо – упругой балки, опирающейся на оба конца под действием некоторой внешней нагрузки (см. рис. 1) также может быть определена благодаря общим принципам теории фракталов.

Обозначим максимальный прогиб в центре балки через ξ . Запишем нагрузку балки G в виде факторизованного выражения

$$G = \Delta G N, \quad (1)$$

где N – полное количество разбиений равномерно распределенного по балке груза G , ΔG – нагрузка одной части.

Поскольку

$$\Delta G = \rho g b^3, \quad (2)$$

где b – длина стороны куба (вся нагрузка условно разбита на кубические объемы), ρ – плотность куба, g – ускорение силы тяжести.

В итоге у нас получается:

$$G = \rho g N b^3. \quad (3)$$

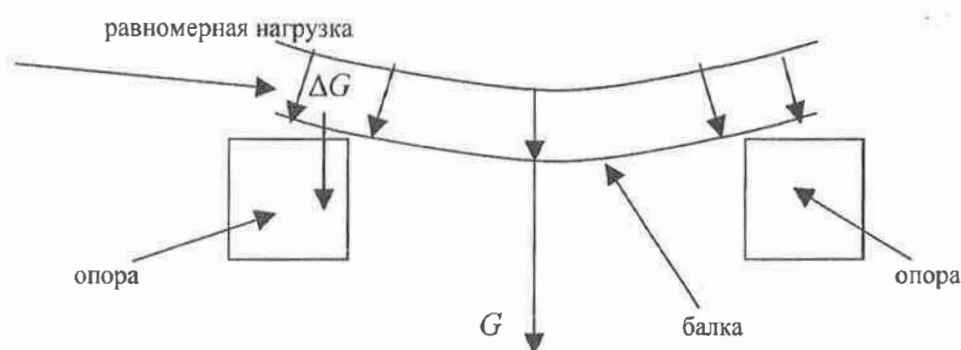


Рис. 1. Схематическое изображение лежащей на двух опорах балки, на которую действует внешняя равномерная нагрузка G с линейным размером b .

Согласно, например, [2] (см. также [3]), энергия деформируемого тела есть

$$E_d = \frac{K}{2} \int_V u_{ik}^2 dV, \quad (4)$$

где K – коэффициент Ламэ, u_{ik} – тензор деформации, V – объем тела.

Поскольку по порядку величины тензор деформации может быть представлен как

$$u_{ik} \approx \frac{\xi}{L}, \quad (5)$$

где L – длина балки, получаем:

$$E_d \approx \frac{K}{2} \left(\frac{\xi}{L} \right)^2 V = \frac{K}{2} \left(\frac{\xi}{L} \right)^2 LS, \quad (6)$$

где S – сечение балки.

С другой стороны, энергия прогиба под действием распределенной нагрузки G есть произведение

$$E_u = G\xi. \quad (7)$$

Приравнивая (6) и (7), найдем, что прогиб есть

$$\xi = \frac{2GL}{KS}. \quad (8)$$

Подставив, наконец, сюда (3), имеем в результате:

$$\xi = \frac{2\rho g}{KS} b^3 LN. \quad (9)$$

Далее. Так как $L = bN$, отсюда следует:

$$\xi = \frac{2\rho g b^4 N^2}{KS}. \quad (10)$$

Количество разбиений N зависит от размера куба b . Причем, чем больше b , тем естественно, меньше N и наоборот. Это означает, что мы имеем право ввести первый показатель фрактальной размерности α по формуле:

$$\alpha = \lim_{b \rightarrow 0} \frac{\ln N(b)}{\ln b^{-1}}, \quad (11)$$

или иначе:

$$N = N(b) = \left(\frac{b_0}{b} \right)^\alpha, \quad (12)$$

где b_0 – некоторая постоянная длина.

Подставив (12) в (10) и вводя сокращенное обозначение

$$\xi_0 = \frac{\rho g b_0^4}{KS}, \quad (13)$$

получаем, что

$$\xi = \xi_0 \left(\frac{b_0}{b} \right)^{2\alpha-4}. \quad (14)$$

Если теперь ввести еще одну новую фрактальную размерность прогиба

$$\beta = 2\alpha - 4, \quad (15)$$

из (14) найдем:

$$\beta = \frac{\ln \xi}{\ln b^{-1}}. \quad (16)$$

Поэтому размерность α можно вычислить как

$$\alpha = 2 + \frac{\ln \xi}{2 \ln b^{-1}}. \quad (17)$$

Простая формула (17) с помощью также простых экспериментов позволяет практически оценить величину α , тем самым, определив искомую зависимость $N(b)$ из (11).

Действительно, задав вначале нагрузку в виде куба с длиной стороны b_1 , и измерив ξ_1 в середине балки, получаем некоторую величину α_1 . Выбрав далее куб со стороной b_2 , измеряем величину смещения ξ_2 , а, следовательно, и α_2 .

Очевидно, что в некотором диапазоне значений $b \in [b_{\min}, b_{\max}]$ показатель α не будет меняться. Это значение и определит фрактальную размерность смещения. В областях же $b < b_{\min}$ и $b > b_{\max}$ α будет изменяться и, таким образом, искомый объект не является фрактальным, что представляется вполне очевидным.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Шредер. Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая. Москва – Ижевск. R&C, 2001, 527 с.
2. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теория упругости. Т.7. М.: Наука, 1987. 246 с.
3. С.О. Гладков. К вопросу о вычислении модуля Юнга. ИФЖ 2003, т. 76, в. 5, с. 144 – 147.

УДК 531

ЗАДАЧА О МАЯТНИКЕ

Н.А.Семенов, Б.В.Хребтов

Московский государственный областной университет
105005, Москва, ул. Радио, 10а

Задача о маятнике является, по-видимому, наиболее общеизвестной и простой в теории механических колебаний. В то же время обычно решение завершается нулевым приближением: получением формулы Томсона. Чтобы выйти за эти пределы, проведено численное решение задачи для всего реально возможного диапазона амплитуд при наличии трения. Это решение изложено во второй части статьи. Сначала рассмотрим возможности аналитического представления в разных приближениях.

1. Приближенные решения

В определенных фазах колебания маятника вся его энергия превращается в кинетическую $W_K = m V_{\max}^2 / 2$ либо в потенциальную $W_{II} = 2 m g L \sin^2(\varphi_{\max} / 2)$, где $V_{\max}$ и $\varphi_{\max}$ – максимальные значения скорости и угла отклонения маятника от вертикали, L – его

длина. Длина дуги, описываемой маятником за половину периода, $2 \varphi_{\max} L = \langle v \rangle T / 2$, где $\langle v \rangle$ – среднее значение скорости за половину периода. Введем два параметра:

$$\begin{aligned} B &= (\varphi_{\max} / 2) / \sin(\varphi_{\max} / 2) - \text{параметр амплитуды и} \\ K &= (2/\pi) (V_{\max} / \langle v \rangle) - \text{параметр гармоничности.} \end{aligned} \quad (1)$$

Учитывая равенство максимумов кинетической и потенциальной энергии, а также введенные ранее обозначения, получаем:

$$T = B K T_0, \quad \text{где } T_0 = 2\pi\sqrt{L/g} - \text{формула Томсона} \quad (2)$$

При $\varphi_{\max} \rightarrow 0$ параметр амплитуды $B \rightarrow 1$. Если колебания гармонические, то есть функции скорости и угла от времени синусоидальны, что происходит при малых амплитудах, то средняя скорость $\langle v \rangle = (\pi/2) V_{\max}$ и $K = 1$. В этом, **нулевом** приближении $T = T_0$, что конечно не является откровением.

С ростом амплитуды параметр B увеличивается быстрее, чем K . Поэтому можно считать **первым** приближением $K = 1$ и *очень простую формулу*

$$T = B T_0 = (\varphi_{\max} / 2) / \sin(\varphi_{\max} / 2) T_0 \quad (3)$$

Вторым приближением является формула (1). Функциональную зависимость параметра K мы установили эмпирически, основываясь на приведенном ниже численном расчете значений T (в случае отсутствия трения). Параметр гармоничности аппроксимирован функцией

$$K = [\operatorname{tg}(\varphi_{\max} / 2) / (\varphi_{\max} / 2)]^{1/4}. \quad (4)$$

В развернутом виде формула второго приближения

$$T = B K T_0 = (\varphi_{\max} / 2) / \sin(\varphi_{\max} / 2) [\operatorname{tg}(\varphi_{\max} / 2) / (\varphi_{\max} / 2)]^{1/4} T_0 \quad (5)$$

Для практического использования формул (2) и (3) нужно установить границы применимости каждого из приближений по критерию допустимости определённой погрешности. Численное решение при $L=2$ м привело к таким результатам для граничных значений амплитуды колебаний в градусах.

Таблица 1

Граничные значения амплитуды колебаний при относительной погрешности не выше заданной

ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ПОГРЕШНОСТЬ	0.1%	0.5%	1%	2%	5%	10%
НУЛЕВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ	7°	15°	23°	32.4°	51°	73°
ПЕРВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ	13°	28°	39°	55°	84°	112°
ВТОРОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ	115°	159°	167°	171°	175.3°	177.7

Как видно, область применения полученных приближений охватывает почти все возможные на практике ситуации.

2. Численное решение. Алгоритм

Процесс колебаний маятника описывается дифференциальным уравнением второго порядка относительно угла отклонения от вертикали φ либо равнозначной ему системой двух уравнений первого порядка. В полярных координатах

$$d\varphi/dt = \omega \quad \text{и} \quad d\omega/dt = \eta \quad (6)$$

Угловое ускорение η , испытываемое маятником под действием гравитации и трения,

$$\eta = - [m g L \sin\varphi + D \omega L] / J, \quad (7)$$

где L и m – длина и масса маятника; массу считаем сосредоточенной; g – ускорение гравитации; ω – угловая скорость; $J = m L^2$ – момент инерции; D – коэффициент трения. Здесь принята линейная зависимость величины трения от скорости, что справедливо в большинстве случаев.

Эта математическая модель маятника не содержит ограничений и поэтому справедлива при произвольной амплитуде его колебаний и учитывает возможные диссипативные потери, вызванные трением.

Основной блок алгоритма для вычисления последовательных значений φ и ω в функции от времени состоит из известных процедуры метода Рунге-Кутты 4-го порядка для системы из двух дифференциальных уравнений с двумя неизвестными и блока с функциями, соответствующими правым частям уравнений (6). Точность решения контролируется критерием Коллатца.

Управляющий блок алгоритма задает начальные значения $\varphi = \varphi_{\max}$ и $\omega = 0$ и устанавливает величину шага итераций dt , от которой зависит точность результата и время счета. При амплитудах колебаний, приближающихся к π , количество необходимых итераций возрастает. Например, при амплитуде 178° для расчета одного полупериода с шагом $dt=10^{-4}$ с потребовалось 34705 итераций. Управляющий блок определяет форму выдачи результатов, отличающуюся в разных версиях, и проводит вспомогательные расчеты.

Все особенности процесса и период колебаний определяются за один полупериод колебаний. Время полупериода $T/2$ фиксируется в точке, где $\omega = 0$; это значение определяется методом интерполяции с высокой точностью, так как крутизна кривой $\omega(t)$ здесь максимальна. Удобно рассматривать нормированное значение периода колебаний $T_R = T / T_0$, которое в определенном далее приближении инвариантно от длины маятника L . Результаты выдаются в виде таблиц и графиков.

Коэффициент затухания α при наличии трения измеряется в мНеп/с и определяется, как коэффициент в экспоненте, описывающей изменение амплитуды колебаний $\varphi_m = \varphi_{\max} \exp(-\alpha t)$. Сравниваются значения углов $\varphi_{\max}$ при $t = 0$ и φ_m при $t = T/2$. Тогда $\alpha = (2000 / T) \ln (\varphi_{\max} / \varphi_m)$, мНеп/с.

3. Результаты численного решения

Первая версия предусматривает выдачу таблиц и графиков зависимостей нормированного периода колебаний T_R и коэффициента затухания α от амплитуды колебаний

$\varphi_{\max}$ в пределах от 0 (расчет велся для 0.01°) до 178° и коэффициента трения D от 0 до 0.1. Численные результаты приведены в таблице 2.

В первой рассчитанной точке для $D=0$ и стремящейся к нулю амплитуде $\varphi_{\max}$ значение $T_R=1$ с погрешностью 10^{-9} , т.е. период определяется формулой Томсона. Это подтверждает как корректность алгоритма, так и ничтожную погрешность (10^{-9}) численного решения дифференциального уравнения.

С ростом амплитуды колебаний период колебаний значительно возрастает, в 3.5 раза при $\varphi_{\max} = 178^\circ$ и $D=0$. В такой же степени возрастают необходимое число итераций и, соответственно, время счета. При дальнейшем приближении амплитуды к π результаты становятся недостоверными вследствие накопления ошибок округления.

При наличии трения период колебаний несколько больше, чем при $D=0$, если амплитуды малы. При амплитудах больших $\pi/2$, наоборот, период колебаний заметно меньше, чем в идеальном случае: до 28% в рассмотренных вариантах. Коэффициент затухания α с ростом амплитуды также увеличивается весьма заметно.

Таблица 2

Зависимость нормированного периода колебаний T_R
и коэффициента затухания α , мНеп/с, от амплитуды колебаний $\varphi_{\max}$
и коэффициента трения D

$\varphi_{\max}$	$D=0; \alpha=0$	$D = 0.01$	$D = 0.1$		
	T_R	T_R	α	T_R	α
0	1.00000000	1.00000125	4.96	1.00012723	49.96
10	1.00190726	1.00189897	4.97	1.00194488	50.03
20	1.00766934	1.00763159	4.99	1.00743101	50.26
30	1.01740952	1.01731988	5.03	1.01668671	50.65
40	1.03134183	1.03117320	5.09	1.02988575	51.21
50	1.04978508	1.04950286	5.17	1.04728290	51.96
60	1.07318519	1.07274314	5.28	1.06922679	52.92
70	1.10214947	1.10148332	5.41	1.09617824	54.12
80	1.13749891	1.13651605	5.57	1.12873619	55.62
90	1.18034930	1.17891127	5.78	1.16767418	57.46
100	1.23224105	1.23013227	6.04	1.21399221	59.74
110	1.29535626	1.29222452	6.37	1.26899338	62.56
120	1.37290322	1.36813787	6.81	1.33440559	66.09
130	1.46985225	1.46230982	7.41	1.41260311	70.54
140	1.59449699	1.58180206	8.26	1.50710628	76.17
150	1.76229200	1.73872878	9.57	1.62403125	83.23
160	2.00769947	1.95613495	11.83	1.77747657	91.61
170	2.44010616	2.28774891	16.33	2.01766668	99.27
178	3.47930481	2.86768938	22.23	2.54344156	93.86

Во второй версии рассчитываются и выдаются на дисплей графики временных зависимостей угла отклонения φ и угловой скорости ω при разных $\varphi_{\max}$ и D . Графики нормируются в обоих измерениях. Для малых амплитуд при любых D графики

синусоидальны, т.е. колебания гармонические. Даже при амплитуде 90° они еще незначительно отличаются от синусоиды, но уже видна тенденция функции φ к полноте своей фигуры: замедляется уменьшение от максимума. График функции ω , наоборот, худеет, максимум обостряется, на высоте половины от максимума на 12% по сравнению с малыми амплитудами.

Зато при больших амплитудах, особенно приближающихся к 180° , видны существенные качественные изменения. Кривые для φ расширяются по сравнению с синусоидой, а график ω , наоборот, сужается в талии (при 178° в 3 раза по сравнению с синусоидой на половине высоты); в пределе он становится похожим на Гауссову кривую распределения вероятностей, подобную колоколу. При $D=0$ все графики симметричны. С ростом величины D происходит деформация графиков, сдвиг в сторону больших t , особенно заметная по перемещению максимума кривых ω вправо.

Все расчеты велись для конкретных значений длины маятника $L=1$ м и среднего земного ускорения гравитации $g=9.81$ м/с². Нельзя а priori утверждать, что так точно будет и при других значениях этих параметров. Поэтому в третьей версии проведено сравнение результатов для T_R при трех значениях $L = 0.2; 2$ и 20 м. Результаты приведены в табл.3.

Таблица 3
Сравнение нормированных периодов колебаний
при разных длинах маятника

φ_{max}	T_{R1}	T_{R2}	$\delta T_{R12\%}$	T_{R3}	$\delta T_{R32\%}$
0.1	1.00000019	1.00000019	0.00000	1.00000019	-0.00000
10	1.00190734	1.00190724	0.00001	1.00190721	-0.00000
20	1.00766971	1.00766925	0.00005	1.00766910	-0.00001
30	1.01741039	1.01740931	0.00011	1.01740896	-0.00003
40	1.03134344	1.03134145	0.00019	1.03134081	-0.00006
50	1.04978769	1.04978446	0.00031	1.04978344	-0.00010
60	1.07318911	1.07318426	0.00045	1.07318272	-0.00014
70	1.10215509	1.10214813	0.00063	1.10214593	-0.00020
80	1.13750674	1.13749705	0.00085	1.13749398	-0.00027
90	1.18036003	1.18034675	0.00113	1.18034254	-0.00036
100	1.23225570	1.23223758	0.00147	1.23223185	-0.00047
110	1.29537635	1.29535150	0.00192	1.29534363	-0.00061
120	1.37293129	1.37289656	0.00253	1.37288558	-0.00080
130	1.46989294	1.46984261	0.00342	1.46982669	-0.00108
140	1.59455991	1.59448208	0.00488	1.59445748	-0.00154
150	1.76240116	1.76226614	0.00766	1.76222346	-0.00242
160	2.00793718	2.00764319	0.01464	2.00755033	-0.00463
170	2.44102988	2.43988805	0.04680	2.43952866	-0.01473
178	3.50698624	3.47339503	0.96710	3.46409504	-0.26775

Нормированные значения периодов колебаний в диапазоне амплитуд от 0.1° до 178° даны в столбцах: T_{R1} для $L=0.2$ м; T_{R2} – 2 м; T_{R3} – 20 м. Относительные разности значений T_R в процентах при изменении длины маятника на порядок даны в столбцах.

$\delta T_{R12} = (T_{R1} - T_{R2}) \cdot 100\%$ и $\delta T_{R32} = (T_{R3} - T_{R2}) \cdot 100\%$. Только при амплитуде 178° эта разность приближается к 1%, при 170° – менее 0.05%, при 155° – около 0.0001%, при 86° – 0.00001%, при 30° – 0.000001%, при 20° – 0.0000001%. Следовательно, с указанной точностью значения нормированных периодов колебаний инвариантны относительно длины маятника.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хайкин С.Э. Физические основы механики. –М: Наука», 1971. –752 с.

УДК 533.72

ПРЯМОЕ ВЛИЯНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ИСПАРЕНИЯ ЖИДКОСТИ НА ИСПАРЕНИЕ ОДНОКОМПОНЕНТНОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ КАПЛИ

Ю.И.Яламов, Н.Е.Знак

*Московский государственный областной университет
105005, Москва, ул.Радио, 10а*

Испарение и конденсационный рост капель жидкости в газообразной среде играют значительную роль в природе и в деятельности человека. Аэрозольные капли встречаются в атмосферных явлениях, в выбросах промышленных предприятий, активно используются в медицине при лечении катаральных заболеваний органов дыхания и туберкулеза, в сельском хозяйстве для борьбы с вредителями и болезнями растений, а также при защите растений от заморозков путем создания искусственных туманов. Знание физики аэродисперсных систем полезно для развития многих производственных процессов.

Данная работа является развитием теории испарения (конденсационного роста) жидких аэрозольных частиц научной школы профессора Ю.И.Яламова. В статье приводится решение задачи испарения и роста однокомпонентной сферической капли в свете учета прямого влияния на фазовый переход коэффициента испарения жидкости. Предполагается, что рассматриваемая частица является крупной, но не настолько, чтобы не учитывать коэффициент испарения жидкости. Так же рассматривается дополнительный вклад, вносимый термодиффузией, эффектом Дюфура и энтальпией во время испарения указанной аэрозольной частицы.

Предположим, что сферическая капля радиуса R взвешена в бинарной вязкой смеси газов. На поверхности капли происходит фазовый переход одного из компонентов внешней смеси. Радиус капли велик по сравнению со средними длинами свободного пробега компонент внешней смеси. Внешняя среда будет характеризоваться средней вязкостью η_{0e} , плотностью ρ_{0e} и температурой T_{0e} на большом расстоянии от капли. Относительные перепады температуры в окрестностях капли будем полагать много меньше единицы, что позволит в ходе решения уравнений газовой динамики считать коэффициенты молекулярного переноса (вязкости, диффузии и теплопроводности) по-

стоянными величинами. Числа Пекле также предполагаются много меньше единицы.

Линеаризованная система уравнений тепло- и массопереноса имеет вид [1]:

$$\eta_e \nabla^2 \vec{V}^{(e)} = \nabla p^{(e)}, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \vec{V}^{(e)} = 0, \quad (2)$$

$$\nabla^2 T_e = 0, \quad (3)$$

$$\nabla^2 T_i = 0, \quad (4)$$

$$\nabla^2 C_{1e} = 0. \quad (5)$$

В формулах (1) – (5) приняты следующие обозначения: индексы «e» и «i» указывают на отношение величин к областям вне и внутри капли соответственно; C_{1e} – относительная концентрация первой компоненты внешней смеси, T_e – температура внешней среды, T_i – температура внутри капли, η_e – средняя вязкость бинарной газовой смеси, $p^{(e)}$ – давление внешней среды, $\vec{V}^{(e)}$ – скорость центра инерции внешней среды.

Выражения (1) – (2) являются уравнениями Навье – Стокса и непрерывности во внешней несжимаемой среде. Уравнение конвективной теплопроводности (3) позволяет найти распределение температуры в окружающей каплю среде. Внутри капли справедливо уравнение (4). Уравнение диффузии (5) позволяет определить распределение относительной концентрации первой компоненты вне капли.

Для определения скорости изменения массы капли и времени ее жизни из уравнений (1) – (5) найдем распределение концентрации C_{1e} и $\vec{V}^{(e)}$ в ее окрестности.

Решение системы (1) – (5) проведем в сферической системе координат, связанной с центром частицы, имеющей форму шара радиусом R . Задача имеет сферическую симметрию. Общий вид решений системы уравнений (1) – (5):

$$C_{1e} = -\frac{B}{r} + C_{1\infty}, \quad (6)$$

$$T_e = \frac{C}{r} + T_{0e}, \quad (7)$$

$$V_r^{(e)} = \frac{A}{r^2}, \quad (8)$$

$$T_i = T_0, \quad (9)$$

где $C_{1\infty}$ – концентрация первой компоненты внешней смеси на большом расстоянии от

капли, T_{0e} - средняя температура внешней смеси на большом расстоянии от капли, $V_r^{(e)}$ - радиальная составляющая скорости центра тяжести газовой смеси, T_0 - температура поверхности капли.

Неизвестные коэффициенты A , B и C определяются путем подстановки уравнений (6)-(9) в граничные условия.

Перейдем теперь к постановке граничных условий на поверхности капли.

$$\left(n_{02e} V_r^{(e)} - D_{12}^{(e)} \beta_1 \frac{\partial C_{1e}}{\partial r} \right) \Big|_{r=R} = 0. \quad (10)$$

Соотношение (10) выражает непроницаемость поверхности капли для радиального потока второй компоненты бинарной внешней смеси.

$$\left(n_{01e} V_r^{(e)} - D_{12}^{(e)} \beta_2 \frac{\partial C_{1e}}{\partial r} \right) \Big|_{r=R} = n_{0e} \nu \alpha \left(-C_{1e} + C_{1e}^{(n)}(T_{0e}) + \frac{\partial C_{1e}^{(n)}}{\partial T_e} \Big|_{T_e=T_{0e}} (T_e - T_{0e}) \right). \quad (11)$$

Уравнение (11) отражает непрерывность радиальной составляющей скорости первого компонента внешней смеси на поверхности капли. Левая часть равна сумме конвективного и диффузионного радиальных потоков первой компоненты вне капли.

В уравнениях (10), (11) используются следующие обозначения: n_{01e} , n_{02e} - средние концентрации молекул первой и второй компонент внешней смеси, $D_{12}^{(e)}$ - коэффициент взаимной диффузии внешней смеси, $n_{0e} = n_{01e} + n_{02e}$ - средняя концентрация молекул внешней смеси, m_1 , m_2 - массы молекул первой и второй компонент внешней смеси соответственно; β_1 и β_2 - коэффициенты, определяемые выражениями

$$\beta_1 = n_{0e}^2 \frac{m_1}{\rho_{0e}}, \quad \beta_2 = n_{0e}^2 \frac{m_2}{\rho_{0e}}, \quad (12)$$

$$\nu = \left(\frac{kT}{2\pi m_1} \right)^{1/2}, \quad (13)$$

где ν - $\frac{1}{4}$ часть средней абсолютной скорости молекул пара [2], α - коэффициент испарения (конденсации) вещества капли, $C_{1e}^{(n)}$ - относительная насыщающая концентрация первой компоненты внешней смеси при температуре T_{0e} .

$$\left(-\chi_e \frac{\partial T_e}{\partial r} + \chi_i \frac{\partial T_i}{\partial r} \right) \Big|_{r=R} = -L m_1 n_{0e} \nu \alpha \left(-C_{1e} + C_{1e}^{(n)}(T_{0e}) + \frac{\partial C_{1e}^{(n)}}{\partial T_e} \Big|_{T_e=T_{0e}} (T_e - T_{0e}) \right). \quad (14)$$

Условие (14) выражает непрерывность радиального потока тепла на поверхности капли с учетом фазового перехода. Здесь χ_e - теплопроводность внешней смеси, χ_l - теплопроводность вещества капли, L - удельное тепло фазового перехода вещества капли. Подставив уравнения (6) - (9) в граничные условия (10) - (14), получим выражения:

$$V_r^{(e)} = \frac{1}{R\Delta} D_{12}^{(e)} \beta_1 \chi_e \nu \alpha C_1^*, \quad (15)$$

$$C_{1e} = \frac{1}{\Delta} n_{02e} \nu \alpha \chi_e C_1^* + C_{1\infty}, \quad (16)$$

где

$$\Delta = D_{12}^{(e)} n_{0e} \left(\frac{\chi_e}{R} + L m_1 n_{0e} \nu \alpha \frac{\partial C_{1e}^{(n)}}{\partial T_e} \right) + n_{02e} \nu \alpha \chi_e, \quad (17)$$

$$C_1^* = \left(C_{1e}^{(n)}(T_{0e}) - C_{1\infty} \right). \quad (18)$$

Уравнения (15), (16) используем для вывода формулы массового потока пара J .

Выражение для J вдоль направления радиус-вектора $\vec{r}$ в сферических координатах имеет вид:

$$J = 4\pi R^2 \left(m_1 n_{01e} V_r^{(e)} - m_1 D_{12}^{(e)} \beta_2 \frac{dC_{1e}}{dr} \right) \Big|_{r=R}. \quad (19)$$

Подставив (15), (16) в (19), получим:

$$J = \frac{1}{\Delta} 4\pi R m_1 D_{12}^{(e)} n_{0e}^2 \chi_e \nu \alpha C_1^*. \quad (20)$$

По физическому смыслу величины J

$$J = -\frac{dM}{dt}, \quad (21)$$

где ρ_k - плотность вещества капли, а M - масса капли:

$$M = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho_k, \quad (22)$$

Используя выражения (21), (22) можно получить формулу для времени испарения

крупной однокомпонентной сферической капли:

$$t_{исп} = \rho_{\kappa} \left(D_{12}^{(e)} n_{0e} \chi_e (R_0 - R') + (n_{02e} \nu \alpha \chi_e + \right. \\ \left. + L m_1 n_{0e}^2 \nu \alpha D_{12}^{(e)} \frac{\partial C_{1e}^{(n)}}{\partial T_e} \right) \left(\frac{R_0^2 - R'^2}{2} \right) \left(D_{12}^{(e)} m_1 n_{0e}^2 \chi_e \nu \alpha C_1^* \right)^{-1}. \quad (23)$$

В формуле (23) R_0 - начальный радиус капли, R' - текущий радиус капли. Из нее следует, что при коэффициенте испарения $\alpha \rightarrow 0$ время испарения капли $t_{исп} \rightarrow \infty$.

Рассмотрим влияние термодиффузии, эффекта Дюфура и энтальпии на время испарения умеренно крупной однокомпонентной сферической капли. Для решения данной задачи уравнения (6)-(9) подставим в следующие граничные условия.

$$\left(n_{02e} V_r^{(e)} + D_{12}^{(e)} \beta_1 \frac{\partial C_{1e}}{\partial r} + D_{12}^{(e)} \beta_1 \frac{K_{TD}^{(e)}}{T_{0e}} \frac{\partial T_e}{\partial r} \right) \Big|_{r=R} = 0. \quad (24)$$

Здесь $K_{TD}^{(e)}$ - термодиффузионное отношение, $D_{12}^{(e)} \beta_1 \frac{K_{TD}^{(e)}}{T_{0e}} \frac{\partial T_e}{\partial r}$ - радиальный термодиффузионный поток первой компоненты.

$$\left(n_{01e} V_r^{(e)} - D_{12}^{(e)} \beta_2 \frac{\partial C_{1e}}{\partial r} - D_{12}^{(e)} \beta_2 \frac{K_{TD}^{(e)}}{T_{0e}} \frac{\partial T_e}{\partial r} \right) \Big|_{r=R} = \\ = n_{0e} \nu \alpha \left(-C_{1e} + C_{1e}^{(n)}(T_{0e}) + \frac{\partial C_{1e}^{(n)}}{\partial T_{0e}} \Big|_{\substack{r=R \\ T_e=T_{0e}}} (T_e - T_{0e}) \right), \quad (25)$$

$$\left(-\chi_e \frac{\partial T_e}{\partial r} + \chi_i \frac{\partial T_i}{\partial r} \right) \Big|_{r=R} = \\ = -L m_1 n_{0e} \nu \alpha \left(-C_{1e} + C_{1e}^{(n)}(T_{0e}) + \frac{\partial C_{1e}^{(n)}}{\partial T_e} \Big|_{\substack{r=R \\ T_e=T_{0e}}} (T_e - T_{0e}) \right) - h_1 m_1 j_1 - h_2 m_2 j_2 + D \frac{\partial C_{1e}}{\partial r}. \quad (26)$$

Здесь:

$$j_1 = n_{01e} V_r^{(e)} - D_{12}^{(e)} \beta_2 \frac{\partial C_{1e}}{\partial r} - D_{12}^{(e)} \beta_2 \frac{K_{TD}^{(e)}}{T_{0e}} \frac{\partial T_e}{\partial r}, \quad (27)$$

$$j_2 = n_{02e} V_r^{(e)} + D_{12}^{(e)} \beta_1 \frac{\partial C_{1e}}{\partial r} + D_{12}^{(e)} \beta_1 \frac{K_{TD}^{(e)}}{T_{0e}} \frac{\partial T_e}{\partial r}, \quad (28)$$

$$D = \frac{K_{TD}^{(e)} D_{12}^{(e)}}{C_{1e}^{(n)} (1 - C_{1e}^{(n)})} p. \quad (29)$$

Условие (26) выражает непрерывность радиального потока тепла на поверхности капли с учетом тепла, идущего на фазовый переход, энтальпии и эффекта Дюфура. Здесь h_1, h_2 – удельные энтальпии первой и второй компонент газовой смеси, j_1, j_2 – радиальные потоки первой и второй компонент вне капли, D обозначает член, представляющий собой поток тепла, обусловленный эффектом Дюфура. В формуле (29) p – давление газовой смеси.

После подстановки уравнений (6) - (9) и (27) - (29) в граничные условия (24) - (26) получим выражения:

$$V_r^{(e)} = \frac{1}{R \Delta'} D_{12}^{(e)} \beta_1 \nu \alpha C_1^* \left(\chi_e - \frac{K_{TD}^{(e)} D}{T_{0e}} \right), \quad (30)$$

$$C_{1e} = \frac{1}{\Delta'} \nu \alpha C_1^* \left(\frac{1}{T_{0e}} D_{12}^{(e)} K_{TD}^{(e)} n_{0e}^2 m_1 (L + h_1) + n_{02e} \chi_e \right) + C_{1\infty}, \quad (31)$$

$$T_e = -\frac{1}{\Delta'} \nu \alpha C_1^* \left(D_{12}^{(e)} n_{0e}^2 m_1 (L + h_1) + n_{02e} D \right) + T_{0e}. \quad (32)$$

Здесь:

$$\Delta' = D_{12}^{(e)} n_{0e} \left[m_1 n_{0e} \nu \alpha (h_1 + L) \left(\frac{K_{TD}^{(e)}}{T_{0e}} + \frac{\partial C_{1e}^{(n)}}{\partial T_{0e}} \right) + \frac{\chi_e}{R} - \frac{K_{TD}^{(e)} D}{R} \right] + n_{02e} \nu \alpha \left(\chi_e + D \frac{\partial C_{1e}^{(n)}}{\partial T_{0e}} \right). \quad (33)$$

Результаты (30) - (32) используем для вывода формулы массового потока пара:

$$J = \frac{1}{\Delta} 4\pi R m_1 D_{12}^{(e)} \nu \alpha C_1^* \left[n_{01e} \beta_1 \left(\chi_e - \frac{K_{TD}^{(e)} D}{T_{0e}} \right) + \beta_2 \left(\frac{1}{T_{0e}} D_{12}^{(e)} K_{TD}^{(e)} n_{0e}^2 m_1 \times \right. \right. \\ \left. \left. \times (L + h_1) + n_{02e} \chi_e \right) - \frac{\beta_2 K_{TD}^{(e)}}{T_{0e}} \left(D_{12}^{(e)} n_{0e}^2 m_1 (L + h_1) + n_{02e} D \right) \right]. \quad (34)$$

Выражение (34) применяем для вывода формулы времени испарения капли:

$$t_{исп} = \rho_\kappa \left[D_{12}^{(e)} n_{0e} \left(\chi_e - K_{TD}^{(e)} D \right) (R_0 - R') + \left(D_{12}^{(e)} n_{0e}^2 m_1 \nu \alpha (h_1 + L) \times \right. \right.$$

$$\times \left(\frac{K_{TD}^{(e)}}{T_{0e}} + \frac{\partial C_{1e}^{(n)}}{\partial T_{0e}} \right) + n_{02e} \nu \alpha \left(\chi_e + D \frac{\partial C_{1e}^{(n)}}{\partial T_{0e}} \right) \left(\frac{R_0^2 - R'^2}{2} \right) \times$$

$$\times \left\{ D_{12}^{(e)} m_1 n_{0e}^2 \nu \alpha C_1^* \left(\chi_e - \frac{K_{TD}^{(e)}}{T_{0e}} D \right) \right\}^{-1}. \quad (35)$$

В формулу (35) не входят величины h_2 и m_2 , что указывает на то, что второй компонент газовой смеси не испытывает фазовый переход на поверхности капли.

Для проведения численных оценок по формулам (23) и (35) в качестве примеров рассмотрим:

- 1) испарение водяной капли в бинарной газовой смеси воздух - водяной пар при следующих значениях величин [3,4], входящих в (23) и (35):

$$\rho_k = 1000 \text{ кг/м}^3; T_{0e} = 275 \text{ К}; D_{12}^{(e)} = 2,05 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}; n_{01} = 1,86 \cdot 10^{23} \text{ м}^{-3}; n_{02} = 2,62 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3};$$

$$\chi_e = 1,86 \cdot 10^{-2} \text{ Дж}/(\text{м} \cdot \text{с} \cdot \text{К}); m_1 = 3 \cdot 10^{-26} \text{ кг}; m_2 = 4,8 \cdot 10^{-26} \text{ кг}; L = 2,5 \cdot 10^6 \text{ Дж/кг};$$

$$\frac{\partial C_{1e}^{(n)}}{\partial T_{0e}} = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ К}^{-1}; C_{1e}^{(n)}(T_{0e}) = 0,71 \cdot 10^{-2}; C_{1\infty} = 0; R_0 = 15 \cdot 10^{-6} \text{ м}; R' = 10 \cdot 10^{-6} \text{ м}; K_{TD}^{(e)} = 1,4 \cdot 10^{-4}; p = 7,9 \cdot 10^4 \text{ Па}; h_1 = 316250 \text{ Дж/кг}.$$

- 2) испарение капли, веществом которой является этиловый спирт, при следующих значениях величин [3,4], входящих в (23) и (35):

$$\rho_k = 798 \text{ кг/м}^3; T_{0e} = 275 \text{ К}; D_{12}^{(e)} = 9,94 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}; n_{01} = 5,27 \cdot 10^{23} \text{ м}^{-3}; n_{02} = 2,58 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3};$$

$$\chi_e = 1,09 \cdot 10^{-2} \text{ Дж}/(\text{м} \cdot \text{с} \cdot \text{К}); m_1 = 7,6 \cdot 10^{-26} \text{ кг}; m_2 = 4,8 \cdot 10^{-26} \text{ кг}; L = 1,05 \cdot 10^6 \text{ Дж/кг};$$

$$\frac{\partial C_{1e}^{(n)}}{\partial T_{0e}} = 1,01 \cdot 10^{-3} \text{ К}^{-1}; C_{1e}^{(n)}(T_{0e}) = 1,98 \cdot 10^{-2}; C_{1\infty} = 0; R_0 = 15 \cdot 10^{-6} \text{ м}; R' = 10 \cdot 10^{-6} \text{ м}; K_{TD}^{(e)} = 0,13 \cdot 10^{-2}; p = 7,9 \cdot 10^4 \text{ Па}; h_1 = 124835 \text{ Дж/кг}.$$

Зависимость времени испарения крупной капли от коэффициента испарения с учетом и без учета термодиффузии, эффекта Дюфура и энтальпии представлена в табл.1.

Из данных табл.1 видно, что с уменьшением значения коэффициента испарения α время испарения крупной капли увеличивается. Эффект Дюфура и энтальпия оказывают заметное влияние на время испарения крупной однокомпонентной сферической капли, которое возрастает с увеличением коэффициента испарения вещества капли (в диапазоне значений α от 0,04 до 1 результаты отличаются примерно на 6 % для водяной капли и приблизительно на 8 % для капли, веществом которой является этиловый спирт).

Учет термодиффузии, эффекта Дюфура и энтальпии позволяет рассчитывать время испарения крупных сферических однокомпонентных капель более точно.

Таблица 1

Зависимость времени испарения крупной сферической капли от коэффициента испарения жидкости с учетом и без учета термодиффузии, эффекта Дюфура и энтальпии (при $T_{0e}=275$ К)

α	$t_{\text{исп}}, \text{с}$			
	водяная капля		капля, веществом которой является этиловый спирт	
	без учета термодиффузии, эффекта Дюфура и энтальпии	с учетом термодиффузии, эффекта Дюфура и энтальпии	без учета термодиффузии, эффекта Дюфура и энтальпии	с учетом термодиффузии, эффекта Дюфура и энтальпии
0,02	1,451	1,421	0,431	0,462
0,03	1,346	1,421	0,431	0,462
0,04	1,294	1,368	0,421	0,452
0,05	1,263	1,337	0,415	0,446
0,06	1,242	1,316	0,411	0,442
0,07	1,227	1,301	0,408	0,439
0,08	1,215	1,290	0,406	0,437
0,09	1,207	1,281	0,404	0,435
0,1	1,200	1,274	0,403	0,434
0,2	1,168	1,243	0,397	0,428
0,3	1,158	1,232	0,395	0,426
0,4	1,153	1,227	0,394	0,425
0,5	1,150	1,224	0,393	0,424
1	1,143	1,218	0,392	0,423

ЛИТЕРАТУРА

1. Яламов Ю.И., Галоян В.С. Динамика капель в неоднородных вязких средах. - Е: Луйс, 1985, 208 с.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Статистическая физика. - М.: Наука, 1964, 567 с.
3. Варгафтик Н.Б. справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. – М.: Наука, 1972, 721 с.
4. Зенкина О.Н., Лебедева А.Л., Яламов Ю.И. К вопросу о вычислении коэффициентов переноса и термодиффузионного отношения бинарных газовых смесей. МПУ. – М., 2002. Деп. в ВИНТИ №559-В2002. 16 с.

УДК 533.72

ПРЯМОЕ ВЛИЯНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ИСПАРЕНИЯ ЖИДКОСТИ НА ИСПАРЕНИЕ ДВУХКОМПОНЕНТНОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ КАПЛИ

Ю.И.Яламов, Н.Е.Знак

Московский государственный областной университет
105005, Москва, ул. Радио, 10а

В данной работе приведено решение задачи об испарении двухкомпонентной капли, обе компоненты которой испаряются во внешний газ, создавая вокруг капли трехкомпонентную газовую смесь. Теория строится для крупной капли сферической формы с учетом влияния коэффициентов испарения жидкости. Предполагается, что рассматриваемая частица является крупной, но не настолько, чтобы не учитывать коэффициенты испарения вещества капли. Полученные результаты являются дальнейшим развитием теории квазистационарного испарения и роста аэрозольных капель и могут быть применены в решении прикладных задач экологического характера.

Рассмотрим задачу об испарении двухкомпонентной крупной капли радиуса R в трехкомпонентной газовой смеси. Две из компонент внешней бинарной смеси по химическому составу совпадает с веществом капли. Предполагается, что размер капли $R \gg \lambda$. Внешняя среда будет характеризоваться средними вязкостью η_{0e} , плотностью ρ_{0e} и температурой T_{0e} на большом расстоянии от капли. Относительные перепады температуры в окрестностях капли будем полагать много меньше единицы, что позволит в ходе решения уравнений газовой динамики считать коэффициенты молекулярного переноса (вязкости, диффузии и теплопроводности) постоянными величинами. Числа Пекле также предполагаются много меньше единицы.

Линеаризованная система уравнений тепло- и массопереноса имеет вид [1]:

$$\eta_e \nabla^2 \vec{V}^{(e)} = \nabla p^{(e)}, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \vec{V}^{(e)} = 0, \quad (2)$$

$$\nabla^2 T_e = 0, \quad (3)$$

$$\nabla^2 T_i = 0, \quad (4)$$

$$\nabla^2 C_{1e} = 0, \quad (5)$$

$$\nabla^2 C_{2e} = 0. \quad (6)$$

В (1) – (6) приняты следующие обозначения: C_{1e} – относительная концентрация пер-

вой компоненты внешней смеси, C_{2e} - относительная концентрация второй компоненты внешней смеси, T_e - температура внешней среды, T_i - температура внутри капли, η_e - коэффициент динамической вязкости внешней среды, $p^{(e)}$ - давление внешней среды, $\vec{V}^{(e)}$ - скорость центра инерции внешней среды.

Выражения (1) – (2) являются уравнениями Навье - Стокса и непрерывности во внешней несжимаемой среде. Уравнение конвективной теплопроводности (3) позволяет найти распределение температуры в окружающей каплю среде. Внутри капли справедливо уравнение (4). Уравнения диффузии (5) – (6) позволяют определить распределение относительной концентрации первой и второй компонент вне капли.

Для определения скорости изменения массы капли и времени ее жизни из уравнений (1) – (6) найдем распределение концентраций C_{1e} , C_{2e} и $\vec{V}^{(e)}$ в ее окрестности.

Решение системы (1) – (6) было проведено в сферической системе координат, связанной с центром частицы, имеющей форму шара, радиусом R . Задача имеет сферическую симметрию. Общий вид решений системы уравнений (1) – (6):

$$C_{1e} = -\frac{B_1}{r} + C_{1\infty}, \quad (7)$$

$$C_{2e} = -\frac{B_2}{r} + C_{2\infty}, \quad (8)$$

$$T_e = \frac{C}{r} + T_{0e}, \quad (9)$$

$$V_r^{(e)} = \frac{A}{r^2}, \quad (10)$$

$$T_i = T_0, \quad (11)$$

где $C_{1\infty}$ - концентрация первой компоненты внешней смеси на большом расстоянии от капли, $C_{2\infty}$ - концентрация второй компоненты внешней смеси на большом расстоянии от капли, T_{0e} - средняя температура внешней смеси на большом расстоянии от капли, $V_r^{(e)}$ - радиальная составляющая скорости центра тяжести газовой смеси, T_0 - температура поверхности капли.

Неизвестные коэффициенты A , B_1 , B_2 и C определяются путем подстановки уравнений (7) - (11) в граничные условия.

Перейдем к постановке граничных условий на поверхности капли.

$$\left(n_{03e} V_r^{(e)} + D_{13}^{(e)} \beta_1 \frac{\partial C_{1e}}{\partial r} + D_{23}^{(e)} \beta_2 \frac{\partial C_{2e}}{\partial r} + D_{13}^{(e)} \beta_1 \frac{K_{TD(1,3)}^{(e)}}{T_{0e}} \frac{\partial T_e}{\partial r} + D_{23}^{(e)} \beta_2 \frac{K_{TD(2,3)}^{(e)}}{T_{0e}} \frac{\partial T_e}{\partial r} \right) \Big|_{r=R} = 0 \quad (12)$$

Условие (12) отражает непроницаемость поверхности капли для несущего газа.

$$\left(n_{01e} V_r^{(e)} - D_{13}^{(e)} \beta_3 \frac{\partial C_{1e}}{\partial r} - D_{13}^{(e)} \beta_3 \frac{K_{TD(1,3)}^{(e)}}{T_{0e}} \frac{\partial T_e}{\partial r} \right) \Big|_{r=R} = n_{0e} v_1 \alpha_1 \times \left(-C_{1e} + C_{1e}^{(n)}(T_{0e}) + \frac{\partial C_{1e}^{(n)}}{\partial T_e} \Big|_{T_e=T_{0e}} (T_e - T_{0e}) \right) \quad (13)$$

Соотношение (13) выражает непрерывность радиальной составляющей скорости первой компоненты внешней смеси на поверхности капли.

$$\left(n_{02e} V_r^{(e)} - D_{23}^{(e)} \beta_3 \frac{\partial C_{2e}}{\partial r} - D_{23}^{(e)} \beta_3 \frac{K_{TD(2,3)}^{(e)}}{T_{0e}} \frac{\partial T_e}{\partial r} \right) \Big|_{r=R} = n_{0e} v_2 \alpha_2 \times \left(-C_{2e} + C_{2e}^{(n)}(T_{0e}) + \frac{\partial C_{2e}^{(n)}}{\partial T_e} \Big|_{T_e=T_{0e}} (T_e - T_{0e}) \right). \quad (14)$$

Уравнение (14) отражает непрерывность радиальной составляющей скорости второй компоненты внешней смеси на поверхности капли. В условиях (13) и (14) левые части равны суммам конвективного, диффузионного и термодиффузионного радиальных потоков первой (в (13)) и второй (в (14)) компонент вне капли при $r=R$.

В уравнениях (12) - (14) n_{01e} - средняя концентрация молекул первой компоненты внешней смеси, n_{02e} - средняя концентрация молекул второй компоненты внешней смеси, n_{03e} - средняя концентрация молекул третьей компоненты внешней смеси, R - радиус капли, $D_{13}^{(e)}$, $D_{23}^{(e)}$ - коэффициенты взаимной диффузии внешней смеси, m_1 , m_2 , m_3 - массы молекул первой, второй и третьей компонент внешней смеси, α_1, α_2 - коэффициенты испарения (конденсации) веществ капли, $C_{1e}^{(n)}$ - относительная насыщающая концентрация первой компоненты внешней смеси при температуре T_{0e} , коэффициенты, зависящие от параметров внешней смеси β_1 , β_2 , β_3 и средняя концентрация молекул внешней смеси n_{0e} определяются выражениями:

$$\beta_1 = n_{0e}^2 \frac{m_1}{\rho_{0e}}, \quad \beta_2 = n_{0e}^2 \frac{m_2}{\rho_{0e}}, \quad \beta_3 = n_{0e}^2 \frac{m_3}{\rho_{0e}}, \quad \beta_3 = n_{0e}^2 \frac{m_3}{\rho_{0e}}, \quad n_{0e} = n_{01e} + n_{02e} + n_{03e}. \quad (15)$$

В (13), (14) $\frac{1}{4}$ — части средних абсолютных скоростей молекул пара v_1, v_2 рассчитываются по формуле [2]:

$$v_1 = \left(\frac{kT}{2\pi m_1} \right)^{1/2}, \quad v_2 = \left(\frac{kT}{2\pi m_2} \right)^{1/2}, \quad (16)$$

где k - постоянная Больцмана.

$$\left(-\chi_e \frac{\partial T_e}{\partial r} + \chi_i \frac{\partial T_i}{\partial r} \right) \Big|_{r=R} = -L_1 m_1 n_{0e} \nu_1 \alpha_1 \left[-C_{1e} + C_{1e}^{(n)}(T_{0e}) + \frac{\partial C_{1e}^{(n)}}{\partial T_e} \Big|_{\substack{r=R \\ T_e=T_{0e}}} (T_e - T_{0e}) \right] - \\ -L_2 m_2 n_{0e} \nu_2 \alpha_2 \left[-C_{2e} + C_{2e}^{(n)}(T_{0e}) + \frac{\partial C_{2e}^{(n)}}{\partial T_e} \Big|_{\substack{r=R \\ T_e=T_{0e}}} (T_e - T_{0e}) \right] \quad (17)$$

Условие (17) выражает непрерывность радиального потока тепла на поверхности капли с учетом фазовых переходов. Здесь χ_e - теплопроводность внешней смеси, χ_i - теплопроводность вещества капли, L_1 - удельное тепло фазового перехода первой компоненты вещества капли, L_2 - удельное тепло фазового перехода второй компоненты вещества капли.

Подставив уравнения (7) - (11) в граничные условия (12) - (17) и используя выражения для массового потока пара, получим формулу для времени испарения крупной сферической двухкомпонентной капли:

$$J = J_1 + J_2, \quad (18)$$

где J_1 - массовый поток пара первой компоненты вещества капли, J_2 - массовый поток пара второй компоненты вещества капли.

$$J_1 = 4\pi R^2 \left(m_1 n_{01e} V_r^{(e)} - m_1 D_{13}^{(e)} \beta_3 \frac{\partial C_{1e}}{\partial r} - m_1 D_{13}^{(e)} \beta_3 \frac{K_{TD(1,3)}^{(e)}}{T_{0e}} \frac{\partial T_e}{\partial r} \right) \Big|_{r=R}, \quad (19)$$

$$J_2 = 4\pi R^2 \left(m_2 n_{02e} V_r^{(e)} - m_2 D_{23}^{(e)} \beta_3 \frac{\partial C_{2e}}{\partial r} - m_2 D_{23}^{(e)} \beta_3 \frac{K_{TD(2,3)}^{(e)}}{T_{0e}} \frac{\partial T_e}{\partial r} \right) \Big|_{r=R}. \quad (20)$$

$$J = -\frac{dM}{dt}, \quad (21)$$

где M - масса капли:

$$M = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho_\kappa. \quad (22)$$

Окончательная формула для времени испарения крупной двухкомпонентной сферической капли имеет вид:

$$t_{исп} = \rho_\kappa \left\{ \left(\frac{C^*}{B^*} - \frac{D^* A^*}{B^{*2}} + \frac{E^* A^{*2}}{B^{*3}} \right) \ln \frac{A^* + B^* R_0}{A^* + B^* R'} + \frac{E^*}{2B^*} (R_0^2 - R'^2) + \left(\frac{D^*}{B^*} - \frac{E^* A^*}{B^{*2}} \right) (R_0 - R') \right\} \quad (23)$$

В формуле (23) R_0 – начальный радиус капли, R' – текущий радиус капли.

$$\begin{aligned}
 A^* = m_1 \left\{ n_{01e} \psi_1^* + D_{13}^{(e)} \beta_3 \left(\frac{K_{TD(1,3)}^{(e)}}{T_{0e}} \psi_2^* - \frac{n_{0e}}{T_{0e}} D_{23}^{(e)} v_1 \alpha_1 \delta_2^* v_2 \alpha_2 L_2 m_2 C_1^* \chi_e - \right. \right. \\
 \left. \left. - \frac{n_{0e}^2}{T_{0e}} D_{13}^{(e)} D_{23}^{(e)} \beta_3 K_{TD(1,3)}^{(e)} (L_1 m_1 v_1 \alpha_1 C_1^* + L_2 m_2 v_2 \alpha_2 C_2^*) + D_{23}^{(e)} n_{01e} \beta_2 v_2 \alpha_2 \chi_e C_2^* \right) \right\} + \\
 + m_2 \left\{ n_{02e} \psi_1^* + D_{23}^{(e)} \beta_3 \left(\frac{K_{TD(2,3)}^{(e)}}{T_{0e}} \psi_2^* - \frac{n_{0e}}{T_{0e}} D_{13}^{(e)} v_2 \alpha_2 \delta_1^* v_1 \alpha_1 L_1 m_1 C_2^* \chi_e - \right. \right. \\
 \left. \left. - \frac{n_{0e}^2}{T_{0e}} D_{13}^{(e)} D_{23}^{(e)} \beta_3 K_{TD(2,3)}^{(e)} (L_1 m_1 v_1 \alpha_1 C_1^* + L_2 m_2 v_2 \alpha_2 C_2^*) + D_{13}^{(e)} n_{02e} \beta_1 v_1 \alpha_1 \chi_e C_1^* \right) \right\}, \quad (24)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B^* = n_{0e} v_1 v_2 \alpha_1 \alpha_2 \left\{ m_1 \left\{ n_{01e} \psi_3^* + D_{13}^{(e)} \beta_3 \left[\frac{K_{TD(1,3)}^{(e)}}{T_{0e}} \psi_4^* - D_{23}^{(e)} L_2 m_2 \delta_2^* \times \left(C_1^* \left(\frac{\partial C_{2e}^{(n)}}{\partial T_{0e}} + \frac{K_{TD(2,3)}^{(e)}}{T_{0e}} \right) - C_2^* \frac{\partial C_{1e}^{(n)}}{\partial T_{0e}} \right) - \right. \right. \right. \\
 \left. \left. - D_{23}^{(e)} \beta_2 n_{01e} L_1 m_1 \times \left(C_1^* \frac{\partial C_{2e}^{(n)}}{\partial T_{0e}} - C_2^* \frac{\partial C_{1e}^{(n)}}{\partial T_{0e}} \right) - C_1^* \left(n_{03e} \chi_e + \frac{1}{T_{0e}} (D_{23}^{(e)} n_{01e} \beta_2 L_1 m_1 K_{TD(2,3)}^{(e)} + \right. \right. \right. \\
 \left. \left. + D_{13}^{(e)} n_{02e} \beta_3 L_2 m_2 K_{TD(1,3)}^{(e)} + D_{13}^{(e)} L_1 m_1 K_{TD(1,3)}^{(e)} \delta_1^* \right) \right] \right\} + m_2 \left\{ n_{02e} \psi_3^* + D_{23}^{(e)} \beta_3 \left[\frac{K_{TD(2,3)}^{(e)}}{T_{0e}} \psi_4^* - \right. \right. \\
 \left. \left. - D_{13}^{(e)} L_1 m_1 \delta_1^* \times \left(C_2^* \left(\frac{\partial C_{1e}^{(n)}}{\partial T_{0e}} + \frac{K_{TD(1,3)}^{(e)}}{T_{0e}} \right) - C_1^* \frac{\partial C_{2e}^{(n)}}{\partial T_{0e}} \right) - D_{13}^{(e)} \beta_1 n_{02e} L_2 m_2 \times \left(C_2^* \frac{\partial C_{1e}^{(n)}}{\partial T_{0e}} - C_1^* \frac{\partial C_{2e}^{(n)}}{\partial T_{0e}} \right) - \right. \right. \\
 \left. \left. - C_2^* \left(n_{03e} \chi_e + \frac{1}{T_{0e}} (D_{23}^{(e)} n_{01e} \beta_2 L_1 m_1 K_{TD(2,3)}^{(e)} + D_{13}^{(e)} n_{02e} \beta_3 L_2 m_2 K_{TD(1,3)}^{(e)} + D_{23}^{(e)} L_2 m_2 K_{TD(2,3)}^{(e)} \delta_2^* \right) \right] \right\} \right\}, \quad (25)
 \end{aligned}$$

$$\psi_1^* = -\chi_e D_{13}^{(e)} D_{23}^{(e)} \beta_3 (v_1 \alpha_1 \beta_1 C_1^* + v_2 \alpha_2 \beta_2 C_2^*), \quad (26)$$

$$\psi_2^* = D_{13}^{(e)} D_{23}^{(e)} \beta_3 n_{0e}^2 (L_1 m_1 v_1 \alpha_1 C_1^* + L_2 m_2 v_2 \alpha_2 C_2^*), \quad (27)$$

$$\begin{aligned}
 \psi_3^* = D_{13}^{(e)} D_{23}^{(e)} \beta_3 (\beta_2 m_1 L_1 - \beta_1 m_2 L_2) \left[\frac{1}{T_{0e}} (K_{TD(2,3)}^{(e)} C_1^* - K_{TD(1,3)}^{(e)} C_2^*) + \right. \\
 \left. + C_1^* \frac{\partial C_{2e}^{(n)}}{\partial T_{0e}} - C_2^* \frac{\partial C_{1e}^{(n)}}{\partial T_{0e}} \right] - \chi_e (D_{13}^{(e)} \beta_1 C_1^* + D_{23}^{(e)} \beta_2 C_2^*), \quad (28)
 \end{aligned}$$

$$\psi_4^* = D_{13}^{(e)} C_1^* \zeta_1^* + D_{23}^{(e)} C_2^* \zeta_2^* , \quad (29)$$

$$C_1^* = \left(C_{1e}^{(n)} (T_{0e}) - C_{1\infty} \right) , \quad C_2^* = \left(C_{2e}^{(n)} (T_{0e}) - C_{2\infty} \right) , \quad (30)$$

$$\delta_1^* = n_{01e} \beta_1 + n_{03e} \beta_3 , \quad (31)$$

$$\delta_2^* = n_{02e} \beta_2 + n_{03e} \beta_3 , \quad (32)$$

$$C^* = -n_{0e} D_{13}^{(e)} D_{23}^{(e)} \beta_3 \chi_e , \quad (33)$$

$$D^* = -D_{13}^{(e)} \left\{ D_{23}^{(e)} L_1 m_1 v_1 \alpha_1 n_{0e}^2 \beta_3 \left(\frac{\partial C_{1e}^{(n)}}{\partial T_{0e}} + \frac{K_{TD(1,3)}^{(e)}}{T_{0e}} \right) + v_2 \alpha_2 \chi_e \delta_1^* \right\} - \\ - D_{23}^{(e)} \left\{ D_{13}^{(e)} L_2 m_2 v_2 \alpha_2 n_{0e}^2 \beta_3 \left(\frac{\partial C_{2e}^{(n)}}{\partial T_{0e}} + \frac{K_{TD(2,3)}^{(e)}}{T_{0e}} \right) + v_1 \alpha_1 \chi_e \delta_2^* \right\} \quad (34)$$

$$E^* = n_{0e} v_1 v_2 \alpha_1 \alpha_2 \left\{ -D_{13}^{(e)} \zeta_1^* \left(\frac{\partial C_{1e}^{(n)}}{\partial T_{0e}} + \frac{K_{TD(1,3)}^{(e)}}{T_{0e}} \right) - D_{23}^{(e)} \zeta_2^* \left(\frac{\partial C_{2e}^{(n)}}{\partial T_{0e}} + \frac{K_{TD(2,3)}^{(e)}}{T_{0e}} \right) - n_{03e} \chi_e \right\} \quad (35)$$

Определим время испарения капли без учета термодиффузии. Тогда формула (23) принимает вид:

$$t_{исп} = \rho_\kappa \left\{ \left(\frac{C^*}{B^*} - \frac{D^* A^*}{B^{*2}} + \frac{E^* A^{*2}}{B^{*3}} \right) \ln \left| \frac{A^* + B^* R_0}{A^* + B^* R'} \right| + \frac{E^*}{2B^*} (R_0^2 - R'^2) + \left(\frac{D^*}{B^*} - \frac{E^* A^*}{B^{*2}} \right) (R_0 - R') \right\} \quad (36)$$

где

$$A^* = m_1 \left\{ n_{01e} \psi_1^* - D_{13}^{(e)} \beta_3 \left(\frac{n_{0e}}{T_{0e}} D_{23}^{(e)} v_1 \alpha_1 \delta_2^* v_2 \alpha_2 L_2 m_2 C_1^* \chi_e - D_{23}^{(e)} n_{01e} \beta_2 v_2 \alpha_2 \chi_e C_2^* \right) \right\} + \\ + m_2 \left\{ n_{02e} \psi_1^* - D_{23}^{(e)} \beta_3 \left(\frac{n_{0e}}{T_{0e}} D_{13}^{(e)} v_2 \alpha_2 \delta_1^* v_1 \alpha_1 L_1 m_1 C_2^* \chi_e - D_{13}^{(e)} n_{02e} \beta_1 v_1 \alpha_1 \chi_e C_1^* \right) \right\} , \quad (37)$$

$$B^* = n_{0e} v_1 v_2 \alpha_1 \alpha_2 \left\{ m_1 \left[n_{01e} \psi_3^* - D_{13}^{(e)} \beta_3 \left(D_{23}^{(e)} L_2 m_2 \delta_2^* \left(C_1^* \frac{\partial C_{2e}^{(n)}}{\partial T_{0e}} - C_2^* \frac{\partial C_{1e}^{(n)}}{\partial T_{0e}} \right) + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + D_{23}^{(e)} \beta_2 n_{01e} L_1 m_1 \left(C_1^* \frac{\partial C_{2e}^{(n)}}{\partial T_{0e}} - C_2^* \frac{\partial C_{1e}^{(n)}}{\partial T_{0e}} \right) + n_{03e} \chi_e C_1^* \right) \right] + m_2 \left[n_{02e} \psi_3^* - D_{23}^{(e)} \beta_3 \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(D_{13}^{(e)} L_1 m_1 \delta_1^* \left(C_2^* \frac{\partial C_{1e}^{(n)}}{\partial T_{0e}} - C_1^* \frac{\partial C_{2e}^{(n)}}{\partial T_{0e}} \right) + D_{13}^{(e)} \beta_1 n_{02e} L_2 m_2 \left(C_2^* \frac{\partial C_{1e}^{(n)}}{\partial T_{0e}} - C_1^* \frac{\partial C_{2e}^{(n)}}{\partial T_{0e}} \right) + n_{03e} \chi_e C_2^* \right) \right] \right\} , \quad (38)$$

$$\psi_3^* = D_{13}^{(e)} D_{23}^{(e)} \beta_3 (\beta_2 m_1 L_1 - \beta_1 m_2 L_2) \left(C_1^* \frac{\partial C_{2e}^{(n)}}{\partial T_{0e}} - C_2^* \frac{\partial C_{1e}^{(n)}}{\partial T_{0e}} \right) - \chi_e (D_{13}^{(e)} \beta_1 C_1^* + D_{23}^{(e)} \beta_2 C_2^*), \quad (39)$$

$$C^* = C^* = -n_{0e} D_{13}^{(e)} D_{23}^{(e)} \beta_3 \chi_e, \quad (40)$$

$$D^* = -D_{13}^{(e)} \left(D_{23}^{(e)} L_1 m_1 \nu_1 \alpha_1 n_{0e}^2 \beta_3 \frac{\partial C_{1e}^{(n)}}{\partial T_{0e}} + \nu_2 \alpha_2 \chi_e \delta_1^* \right) - D_{23}^{(e)} \left(D_{13}^{(e)} L_2 m_2 \nu_2 \alpha_2 n_{0e}^2 \beta_3 \frac{\partial C_{2e}^{(n)}}{\partial T_{0e}} + \nu_1 \alpha_1 \chi_e \delta_2^* \right), \quad (41)$$

$$E^* = -n_{0e} \nu_1 \nu_2 \alpha_1 \alpha_2 \left(D_{13}^{(e)} \zeta_1^* \frac{\partial C_{1e}^{(n)}}{\partial T_{0e}} + D_{23}^{(e)} \zeta_2^* \frac{\partial C_{2e}^{(n)}}{\partial T_{0e}} + n_{03e} \chi_e \right). \quad (42)$$

Рассмотрим влияние эффекта Дюфура и энтальпии на время испарения крупной двухкомпонентной сферической капли. С этой целью уравнения (7) - (11) подставим в следующие граничные условия:

$$\left(n_{03e} V_r^{(e)} + D_{13}^{(e)} \beta_1 \frac{\partial C_{1e}}{\partial r} + D_{23}^{(e)} \beta_2 \frac{\partial C_{2e}}{\partial r} + D_{13}^{(e)} \beta_1 \frac{K_{TD(1,3)}^{(e)}}{T_{0e}} \frac{\partial T_e}{\partial r} + D_{23}^{(e)} \beta_2 \frac{K_{TD(2,3)}^{(e)}}{T_{0e}} \frac{\partial T_e}{\partial r} \right) \Big|_{r=R} = 0, \quad (43)$$

$$\left(n_{01e} V_r^{(e)} - D_{13}^{(e)} \beta_3 \frac{\partial C_{1e}}{\partial r} - D_{13}^{(e)} \beta_3 \frac{K_{TD(1,3)}^{(e)}}{T_{0e}} \frac{\partial T_e}{\partial r} \right) \Big|_{r=R} = n_{0e} \nu_1 \alpha_1 \left(-C_{1e} + C_{1e}^{(n)}(T_{0e}) + \frac{\partial C_{1e}^{(n)}}{\partial T_e} \Big|_{T_e=T_{0e}} (T_e - T_{0e}) \right), \quad (44)$$

$$\left(n_{02e} V_r^{(e)} - D_{23}^{(e)} \beta_3 \frac{\partial C_{2e}}{\partial r} - D_{23}^{(e)} \beta_3 \frac{K_{TD(2,3)}^{(e)}}{T_{0e}} \frac{\partial T_e}{\partial r} \right) \Big|_{r=R} = n_{0e} \nu_2 \alpha_2 \left(-C_{2e} + C_{2e}^{(n)}(T_{0e}) + \frac{\partial C_{2e}^{(n)}}{\partial T_e} \Big|_{T_e=T_{0e}} (T_e - T_{0e}) \right), \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \left(-\chi_e \frac{\partial T_e}{\partial r} + \chi_i \frac{\partial T_i}{\partial r} \right) \Big|_{r=R} &= -L_1 m_1 n_{0e} \nu_1 \alpha_1 \left(-C_{1e} + C_{1e}^{(n)}(T_{0e}) + \frac{\partial C_{1e}^{(n)}}{\partial T_e} \Big|_{T_e=T_{0e}} (T_e - T_{0e}) \right) - \\ &- L_2 m_2 n_{0e} \nu_2 \alpha_2 \left(-C_{2e} + C_{2e}^{(n)}(T_{0e}) + \frac{\partial C_{2e}^{(n)}}{\partial T_e} \Big|_{T_e=T_{0e}} (T_e - T_{0e}) \right) - h_1 m_1 j_1 - h_2 m_2 j_2 - h_3 m_3 j_3 + D_1 \frac{\partial C_{1e}}{\partial r} + D_2 \frac{\partial C_{2e}}{\partial r}. \end{aligned} \quad (46)$$

Условие (46) выражает непрерывность радиального потока тепла на поверхности капли с учетом фазовых переходов. Здесь h_1, h_2, h_3 – удельные энтальпии первой, второй и третьей компонент газовой смеси, j_1, j_2, j_3 – радиальные потоки первой, второй и третьей компонент вне капли, D_1 и D_2 обозначают члены, представляющие собой потоки тепла, обусловленные эффектом Дюфура. В формулах (47) – (48) p – давление газовой смеси:

$$D_1 = \frac{D_{13}^{(e)} K_{TD(1,3)}^{(e)}}{C_{1e}^{(n)} (1 - C_{1e}^{(n)})} p, \quad (47)$$

$$D_2 = \frac{D_{23}^{(e)} K_{TD(2,3)}^{(e)}}{C_{2e}^{(n)} (1 - C_{2e}^{(n)})} p, \quad (48)$$

$$j_1 = n_{01e} v_r^{(e)} - D_{13}^{(e)} \beta_3 \frac{\partial C_{1e}}{\partial r} - D_{13}^{(e)} \beta_3 \frac{K_{TD(1,3)}^{(e)}}{T_{0e}} \frac{\partial T_e}{\partial r}, \quad (49)$$

$$j_2 = n_{02e} v_r^{(e)} - D_{23}^{(e)} \beta_3 \frac{\partial C_{2e}}{\partial r} - D_{23}^{(e)} \beta_3 \frac{K_{TD(2,3)}^{(e)}}{T_{0e}} \frac{\partial T_e}{\partial r}, \quad (50)$$

$$j_3 = n_{03e} v_r^{(e)} - D_{13}^{(e)} \beta_1 \frac{\partial C_{1e}}{\partial r} - D_{23}^{(e)} \beta_2 \frac{\partial C_{2e}}{\partial r} + D_{13}^{(e)} \beta_1 \frac{K_{TD(1,3)}^{(e)}}{T_{0e}} \frac{\partial T_e}{\partial r} + D_{23}^{(e)} \beta_2 \frac{K_{TD(2,3)}^{(e)}}{T_{0e}} \frac{\partial T_e}{\partial r}. \quad (51)$$

В результате решения данной задачи получаем формулу для времени испарения крупной двухкомпонентной сферической капли с учетом термодиффузии, эффекта Дюфура и энтальпии:

$$t_{исп} = \rho_\kappa \left\{ \left(\frac{C^{**}}{B^{**}} - \frac{D^{**} A^{**}}{B^{**2}} + \frac{E^{**} A^{**2}}{B^{**3}} \right) \ln \left| \frac{A^{**} + B^{**} R_0}{A^{**} + B^{**} R'} \right| + \frac{E^{**}}{2B^{**}} (R_0^2 - R'^2) + \left(\frac{D^{**}}{B^{**}} - \frac{E^{**} A^{**}}{B^{**2}} \right) (R_0 - R') \right\}. \quad (52)$$

В выражении (52) используются следующие обозначения:

$$\begin{aligned} A^{**} = m_1 \left\{ n_{01e} \psi_5^* + D_{13}^{(e)} \beta_3 \left\{ \frac{K_{TD(1,3)}^{(e)}}{T_{0e}} \psi_6^* - D_{23}^{(e)} v_1 \alpha_1 \delta_2^* C_1^* \times \left(\chi_e - \frac{K_{TD(2,3)}^{(e)}}{T_{0e}} D_2 \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{n_{0e}^2}{T_{0e}} D_{13}^{(e)} D_{23}^{(e)} \beta_3 K_{TD(1,3)}^{(e)} \zeta_5^* + D_{23}^{(e)} n_{01e} \beta_2 v_2 \alpha_2 \chi_e C_2^* - \frac{1}{T_{0e}} \left(D_2 \left(D_{23}^{(e)} \beta_2 n_{01e} v_2 \alpha_2 K_{TD(2,3)}^{(e)} C_2^* - \right. \right. \right. \\ \left. \left. - D_{13}^{(e)} \beta_1 n_{02e} v_1 \alpha_1 K_{TD(1,3)}^{(e)} C_1^* \right) + D_{13}^{(e)} v_2 \alpha_2 K_{TD(1,3)}^{(e)} \sigma_1^* D_2 C_2^* \right\} \right\} + m_2 \left\{ n_{02e} \psi_5^* + D_{23}^{(e)} \beta_3 \left\{ \frac{K_{TD(2,3)}^{(e)}}{T_{0e}} \psi_6^* - \right. \right. \\ \left. \left. - D_{13}^{(e)} v_2 \alpha_2 \delta_1^* C_2^* \times \left(\chi_e - \frac{K_{TD(1,3)}^{(e)}}{T_{0e}} D_1 \right) - \frac{n_{0e}^2}{T_{0e}} D_{13}^{(e)} D_{23}^{(e)} \beta_3 K_{TD(2,3)}^{(e)} \zeta_5^* + D_{13}^{(e)} n_{02e} \beta_1 v_1 \alpha_1 \chi_e C_1^* - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{T_{0e}} \left(D_1 \left(D_{13}^{(e)} \beta_1 n_{02e} v_1 \alpha_1 K_{TD(1,3)}^{(e)} C_1^* - D_{23}^{(e)} \beta_2 n_{01e} v_2 \alpha_2 K_{TD(2,3)}^{(e)} C_2^* \right) + D_{23}^{(e)} v_1 \alpha_1 K_{TD(2,3)}^{(e)} \delta_2^* D_1 C_1^* \right) \right\} \right\}. \quad (53) \end{aligned}$$

Здесь:

$$\psi_5^* = D_{13}^{(e)} D_{23}^{(e)} \beta_3 \left(\frac{1}{T_{0e}} (K_{TD(2,3)}^{(e)} D_2 + K_{TD(1,3)}^{(e)} D_1) - \chi_e \right) \times (v_1 \alpha_1 \beta_1 C_1^* + v_2 \alpha_2 \beta_2 C_2^*), \quad (54)$$

$$\psi_6^* = D_{13}^{(e)} D_{23}^{(e)} \beta_3 n_{0e}^2 \zeta_5^* - D_2 D_{13}^{(e)} \beta_1 n_{02e} \nu_1 \alpha_1 - D_1 D_{23}^{(e)} \beta_2 n_{01e} \nu_2 \alpha_2 C_2^* + D_{13}^{(e)} \nu_2 \alpha_2 \delta_1^* D_2 C_2^* + D_{23}^{(e)} \nu_1 \alpha_1 \delta_2^* D_1 C_1^*, \quad (55)$$

$$\begin{aligned} B^{**} = n_{0e} \nu_1 \nu_2 \alpha_1 \alpha_2 \left\{ m_1 \left\{ n_{01e} \psi_7^* + D_{13}^{(e)} \beta_3 \left[\frac{K_{TD(1,3)}^{(e)}}{T_{0e}} \psi_8^* - D_{23}^{(e)} m_2 \delta_2^* (h_2 + L_2) \times \left(C_1^* \left(\frac{\partial C_{2e}^{(u)}}{\partial T_{0e}} + \frac{K_{TD(2,3)}^{(e)}}{T_{0e}} \right) - C_2^* \frac{\partial C_{1e}^{(u)}}{\partial T_{0e}} \right) - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \zeta_4^* \left(C_1^* \frac{\partial C_{2e}^{(u)}}{\partial T_{0e}} - C_2^* \frac{\partial C_{1e}^{(u)}}{\partial T_{0e}} \right) - C_1^* \left(n_{03e} \chi_e + \frac{1}{T_{0e}} (D_{23}^{(e)} n_{01e} \beta_2 K_{TD(2,3)}^{(e)} m_1 (h_1 + L_1) + \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + D_{13}^{(e)} n_{02e} \beta_1 K_{TD(1,3)}^{(e)} m_2 (h_2 + L_2) \right) \right) \right] - \frac{1}{T_{0e}} D_{13}^{(e)} K_{TD(1,3)}^{(e)} m_1 C_1^* \delta_1^* (h_1 + L_1) \right\} + \\ + m_2 \left\{ n_{02e} \psi_7^* + D_{23}^{(e)} \beta_3 \left[\frac{K_{TD(2,3)}^{(e)}}{T_{0e}} \psi_8^* - D_{13}^{(e)} m_1 \delta_1^* (h_1 + L_1) \times \left(C_2^* \left(\frac{\partial C_{1e}^{(u)}}{\partial T_{0e}} + \frac{K_{TD(1,3)}^{(e)}}{T_{0e}} \right) - C_1^* \frac{\partial C_{2e}^{(u)}}{\partial T_{0e}} \right) - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \zeta_3^* \left(C_2^* \frac{\partial C_{1e}^{(u)}}{\partial T_{0e}} - C_1^* \frac{\partial C_{2e}^{(u)}}{\partial T_{0e}} \right) - C_2^* \left(n_{03e} \chi_e + \frac{1}{T_{0e}} (D_{23}^{(e)} n_{01e} \beta_2 K_{TD(2,3)}^{(e)} m_1 (h_1 + L_1) + \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + D_{13}^{(e)} n_{02e} \beta_1 K_{TD(1,3)}^{(e)} m_2 (h_2 + L_2) \right) \right) \right] - \frac{1}{T_{0e}} D_{23}^{(e)} K_{TD(2,3)}^{(e)} m_2 C_2^* \delta_2^* (h_2 + L_2) \right\} \right\}, \quad (56) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_7^* = D_{13}^{(e)} D_{23}^{(e)} \beta_3 (\beta_2 m_1 (h_1 + L_1) - \beta_1 m_2 (h_2 + L_2)) \left(\frac{1}{T_{0e}} (K_{TD(2,3)}^{(e)} C_1^* - K_{TD(1,3)}^{(e)} C_2^*) + \right. \\ \left. + C_1^* \frac{\partial C_{2e}^{(u)}}{\partial T_{0e}} - C_2^* \frac{\partial C_{1e}^{(u)}}{\partial T_{0e}} \right) + (D_{13}^{(e)} D_2 \beta_1 - D_{23}^{(e)} D_1 \beta_2) \left(C_2^* \frac{\partial C_{1e}^{(u)}}{\partial T_{0e}} - C_1^* \frac{\partial C_{2e}^{(u)}}{\partial T_{0e}} \right) + \\ + \frac{1}{T_{0e}} (D_1 C_1^* + D_2 C_2^*) (D_{13}^{(e)} K_{TD(1,3)}^{(e)} \beta_1 + D_{23}^{(e)} K_{TD(2,3)}^{(e)} \beta_2) - \chi_e (D_{13}^{(e)} \beta_1 C_1^* + D_{23}^{(e)} \beta_2 C_2^*), \quad (57) \end{aligned}$$

$$\psi_8^* = D_{13}^{(e)} m_1 C_1^* \delta_1^* (h_1 + L_1) + D_{23}^{(e)} m_2 C_2^* \delta_2^* (h_2 + L_2) + C_1^* \zeta_3^* + C_2^* \zeta_4^*, \quad (58)$$

$$C^{**} = D_{13}^{(e)} D_{23}^{(e)} n_{0e} \beta_3 \left(\frac{1}{T_{0e}} (K_{TD(2,3)}^{(e)} D_2 + K_{TD(1,3)}^{(e)} D_1) - \chi_e \right), \quad (59)$$

$$\begin{aligned} D^{**} = D_{13}^{(e)} \left(\nu_1 \alpha_1 \zeta_8^* \left(\frac{\partial C_{1e}^{(u)}}{\partial T_{0e}} + \frac{K_{TD(1,3)}^{(e)}}{T_{0e}} \right) + \nu_2 \alpha_2 \delta_1^* \left(\frac{K_{TD(1,3)}^{(e)}}{T_{0e}} D_1 - \frac{\partial C_{2e}^{(u)}}{\partial T_{0e}} D_2 - \chi_e \right) \right) + \\ + D_{23}^{(e)} \left(\nu_2 \alpha_2 \zeta_9^* \left(\frac{\partial C_{2e}^{(u)}}{\partial T_{0e}} + \frac{K_{TD(2,3)}^{(e)}}{T_{0e}} \right) + \nu_1 \alpha_1 \delta_2^* \left(\frac{K_{TD(2,3)}^{(e)}}{T_{0e}} D_2 - \frac{\partial C_{1e}^{(u)}}{\partial T_{0e}} D_1 - \chi_e \right) \right), \quad (60) \end{aligned}$$

$$E^{n*} = n_{0e} \nu_1 \nu_2 \alpha_1 \alpha_2 \left\{ -D_{13}^{(e)} \zeta_6^* \left(\frac{\partial C_{1e}^{(n)}}{\partial T_{0e}} + \frac{K_{TD(1,3)}^{(e)}}{T_{0e}} \right) - D_{23}^{(e)} \zeta_7^* \left(\frac{\partial C_{2e}^{(n)}}{\partial T_{0e}} + \frac{K_{TD(2,3)}^{(e)}}{T_{0e}} \right) - n_{03e} \left(\frac{\partial C_{1e}^{(n)}}{\partial T_{0e}} D_1 + \frac{\partial C_{2e}^{(n)}}{\partial T_{0e}} D_2 + \chi_e \right) \right\}, \quad (61)$$

$$\zeta_3^* = D_{13}^{(e)} \beta_1 n_{02e} m_2 (h_2 + L_2) + n_{03e} D_1, \quad (62)$$

$$\zeta_4^* = D_{23}^{(e)} \beta_2 n_{01e} m_1 (h_1 + L_1) + n_{03e} D_2, \quad (63)$$

$$\zeta_5^* = m_1 \nu_1 \alpha_1 C_1^* (L_1 + h_1) + m_2 \nu_2 \alpha_2 C_2^* (L_2 + h_2), \quad (64)$$

$$\zeta_6^* = n_{02e} \beta_1 m_2 (h_2 + L_2) + m_1 \delta_1^* (h_1 + L_1), \quad (65)$$

$$\zeta_7^* = n_{01e} \beta_2 m_1 (h_1 + L_1) + m_2 \delta_2^* (h_2 + L_2), \quad (66)$$

$$\zeta_8^* = n_{02e} \beta_1 D_2 - n_{0e}^2 D_{23}^{(e)} \beta_3 m_1 (h_1 + L_1), \quad (67)$$

$$\zeta_9^* = n_{01e} \beta_2 D_1 - n_{0e}^2 D_{13}^{(e)} \beta_3 m_2 (h_2 + L_2). \quad (68)$$

Для проведения расчетов по формулам (23), (36) и (51) рассмотрим каплю, состоящую из смеси воды и этилового спирта, взятых в равных долях. Будем использовать следующие значения величин [3,4], входящих в (23), (36) и (51): $\rho_k = 909 \text{ кг/м}^3$; $T_{0e} = 275 \text{ К}$; $D_{13}^{(e)} = 2,05 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_{23}^{(e)} = 9,94 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $n_{01e} = 1,86 \cdot 10^{23} \text{ м}^{-3}$; $n_{02e} = 5,27 \cdot 10^{23} \text{ м}^{-3}$; $n_{03e} = 2,56 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$; $n_{0e} = 2,64 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$; $\chi_e = 2,62 \cdot 10^{-2} \text{ Дж}/(\text{м} \cdot \text{с} \cdot \text{К})$; $m_1 = 3 \cdot 10^{-26} \text{ кг}$; $m_2 = 7,6 \cdot 10^{-26} \text{ кг}$; $m_3 = 4,8 \cdot 10^{-26} \text{ кг}$; $L_1 = 2,5 \cdot 10^6 \text{ Дж/кг}$; $L_2 = 1,05 \cdot 10^6 \text{ Дж/кг}$; $h_1 = 316250 \text{ Дж/кг}$; $h_2 = 124835 \text{ Дж/кг}$; $\partial C_{1e}^{(n)}/\partial T_{0e} = 0,51 \cdot 10^{-3} \text{ К}^{-1}$; $\partial C_{2e}^{(n)}/\partial T_{0e} = 1,01 \cdot 10^{-3} \text{ К}^{-1}$; $C_{1e}^{(n)}(T_{0e}) = 0,71 \cdot 10^{-2}$; $C_{2e}^{(n)}(T_{0e}) = 1,99 \cdot 10^{-2}$; $C_{1\infty} = 0$; $C_{2\infty} = 0$; $R_0 = 15 \cdot 10^{-6} \text{ м}$; $R' = 10 \cdot 10^{-6} \text{ м}$; $K_{TD(1,3)}^{(e)} = -1,41 \cdot 10^{-4}$; $K_{TD(2,3)}^{(e)} = 1,32 \cdot 10^{-3}$; $p = 7,9 \cdot 10^4 \text{ Па}$; $\alpha_1 = 0,01$.

Численные оценки времени испарения крупной двухкомпонентной сферической капли с учетом влияния коэффициентов испарения компонент капли с учетом и без учета термодиффузии, выполненные по формулам (23) и (36), а так же с учетом эффекта Дюфура и энтальпии отражены в таблице 1.

Из данных, приведенных в таблице 1, видно, что термодиффузия вносит во время испарения крупной двухкомпонентной сферической капли незначительный вклад (приводит к уменьшению времени испарения в диапазоне значений α_2 от 0,01 до 0,03 примерно на 1,5 %; при α_2 от 0,04 до 0,06 – на 0,7 %; при α_2 от 0,07 до 1 – на 0,4 %), что позволяет ее влиянием пренебречь. В этом случае расчетные формулы имеют менее громоздкий вид, что заметно упрощает их использование.

Зависимость времени испарения крупной капли с учетом эффекта Дюфура и энтальпии показывает, что данные эффекты оказывают заметное влияние на время испарения капли (на 4-6 % в зависимости от α_2). Их учет позволяет более точно оценивать время испарения двухкомпонентных сферических капель. Однако, принимая во внимание достаточно громоздкий вид выражений (52) – (68), учитывающих термодиффузию, эф-

фekt Дюфура и энтальпию, в ряде инженерных и экологических задач для определения времени испарения двухкомпонентной сферической капли допустимо использование формул (36) – (42).

Таблица 1

Зависимость времени испарения крупной
двухкомпонентной капли от коэффициента испарения
этилового спирта α_2 с учетом и без учета термодиффузии,
эффекта Дюфура и энтальпии ($\alpha_1=0,01$; $T_{0e}=275K$)

α_2	$t_{\text{исп}}, \text{с}$			Влияние на $t_{\text{исп}}$ капли	
	без учета термодиффузии, эффекта Дюфура и энтальпии	без учета эффекта Дюфура и энтальпии	с учетом термодиффузии, эффекта Дюфура и энтальпии	термодиффузии, %	термодиффузии, эффекта Дюфура и энтальпии, %
0,01	0,371	0,363	0,380	-2,2	2,4
0,02	0,315	0,311	0,328	-1,3	4,1
0,03	0,269	0,293	0,390	-1,3	4,4
0,04	0,286	0,284	0,300	-0,7	4,8
0,05	0,280	0,278	0,294	-0,7	5,0
0,06	0,276	0,274	0,290	-0,7	5,1
0,07	0,273	0,272	0,287	-0,4	5,1
0,08	0,271	0,270	0,285	-0,4	5,2
0,09	0,269	0,268	0,284	-0,4	5,6
0,1	0,268	0,267	0,282	0	5,2
0,2	0,262	0,261	0,276	-0,4	5,3
0,3	0,260	0,259	0,274	-0,4	5,4
0,4	0,259	0,258	0,273	-0,4	5,4
0,5	0,258	0,257	0,273	-0,4	5,8
1,0	0,257	0,256	0,273	-0,4	5,4

ЛИТЕРАТУРА

1. Яламов Ю.И., Галоян В.С. Динамика капель в неоднородных вязких средах. - Е: Луйс, 1985, 208 с.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Статистическая физика. - М.: Наука, 1964, 567 с.
3. Варгафтик Н.Б. справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. - М.: Наука, 1972, 721 с.
4. Зенкина О.Н., Лебедева А.Л., Яламов Ю.И. К вопросу о вычислении коэффициентов переноса и термодиффузионного отношения бинарных газовых смесей. МПУ. - М., 2002. Деп. в ВИНТИ №559-В2002. 16 с.

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

<i>Нелаев А.В.</i> Об однородной краевой задаче Римана в C^n	3
<i>Нелаев А.В.</i> О неоднородной краевой задаче Римана в C^n	6

ФИЗИКА

<i>Шмелева Д.В., Цветков В.А., Пасечник С.В., Козенков В.М.</i> Анизотропное растекание капли жидкого кристалла на анизометрической поверхности	11
<i>Максимочкин Г.И., Пасечник С.В., Лукин А.В., Тимофеев Г.А., Усольцева Н.В., Быкова В.В.</i> Низкочастотные ультразвуковые исследования фазовых переходов в образцах жидких кристаллов малого объема	18
<i>Делянов В.А.</i> О некоторых решениях уравнения Клейна – Гордона в теории метода факторизации	25
<i>Гладков С.О.</i> Прогиб упруго-деформируемой балки как фрактальный объект	29
<i>Семенов Н.А., Хребтов Б.В.</i> Задача о маятнике	32
<i>Яламов Ю.И., Знак Н.Е.</i> Прямое влияние коэффициента испарения жидкости на испарение однокомпонентной сферической капли	37
<i>Яламов Ю.И., Знак Н.Е.</i> Прямое влияние коэффициентов испарения жидкости на испарение двухкомпонентной сферической капли	45

CONTENTS

MATHEMATICS

<i>Nelayev A.V.</i> On the Riemann homogeneous boundary-value problem in C^n	3
<i>Nelayev A.V.</i> On the Riemann inhomogeneous boundary-value problem in C^n	6

PHYSICS

<i>Shmeliova D.V., Tsvetkov V.A., Pasechnik S.V., Kosenkov V.M.</i> Anisotropic spreading drops of a liquid crystal on anisometric surfaces	11
<i>Maksimochkin G.I., Pasechnik S.V., Lukin A.V., Timofeev G.A., Usol'tseva N.V., Bykova V.V.</i> Studying Phase Transitions of Liquid Crystals by Low-Frequency Ultrasound Probing of Small-Volume Samples	18
<i>Delianov V.A.</i> About Some Solution of Klien – Gordon Equation in Theory of the Factorization's Method	25
<i>Gladkov S.O.</i> Sagging of elaste – deformed beam, as a fractal Object	29
<i>Semionov N.A., Hrebtov B.V.</i> Problem about a pendulum	32
<i>Yalamov Yu.I., Znak N.E.</i> Direct Influence of Factor of Evaporation of a Liquid on Evaporation of a unicomponent Spherical Drop	37
<i>Yalamov Yu.I., Znak N.E.</i> Direct Influence of Factors of Evaporation of a liquid on Evaporation of a two-componental Spherical Drop	45

УДК 517.55

Об однородной краевой задаче Римана в C^n / Нелаев А.В. // Вестн. Моск. Гос. ун-та. Сер. Физика-математика, 2008. №2. С.3 – 6.

Представлены результаты исследования свойств функции многих комплексных переменных, представимых интегралом типа Темлякова I рода с n - круговой определяющей областью D типа A :

$$D = \{z \in C^n : c_1|z_1| + \dots + c_n|z_n| < 1, c_1 > 0, \dots, c_n > 0\}.$$

Математический аппарат рассматриваемого интеграла применяется к постановке и решению однородной задачи линейного сопряжения (пространственной задачи Римана).

Библиогр.2.

УДК 517.55

О неоднородной краевой задаче Римана в C^n / Нелаев А.В. // Вестн. Моск. Гос. ун-та. Сер. Физика-математика, 2008. №2. С.6 – 10.

Математический аппарат интеграла типа Темлякова I рода с n - круговой определяющей областью D типа A применяется к постановке и решению неоднородной многомерной задачи линейного сопряжения (пространственной задачи Римана).

Библиогр.2

УДК 534.286

Анизотропное растекание капли жидкого кристалла на анизометрической поверхности / Шмелева Д.В., Цветков В.А., Пасечник С.В., Козенков В.М. // Вестн. Моск. Гос. ун-та. Сер. Физика-математика, 2008. №2. С.11 – 17.

Представлены первые экспериментальные данные по растеканию жидкого кристалла на поверхности с регулярным субмикронным рельефом. Установлено, что рельеф вызывает движение прекурсорной пленки в направлении канавок. Динамика прекурсорной пленки и контактной линии изучена методами поляризационной микроскопии.

Ил.4. Библиогр.14.

УДК 534.286:535.51

Низкочастотные ультразвуковые исследования фазовых переходов в образцах жидких кристаллов малого объема / Максимочкин Г.И., Пасечник С.В., Лукин А.В., Тимофеев Г.А., Усольцева Н.В., Быкова В.В. // Вестн. Моск. Гос. ун-та. Сер. Физика-математика, 2008. №2. С.18 – 25.

В ряде мезогенных соединений: 4- n -амилфениловых эфиров 4'- n -алкилокси (гексилокси-, гептилокси-, октилокси- и нонилокси-)фенил-циклогексан-2-карбоновой ки-

слоты, исследованы температурные изменения скорости распространения и коэффициента поглощения продольных ультразвуковых волн на частотах 0,7-1,6 МГц, в образцах объемом 0,06-0,15 см³, в диапазоне температур 300-360 К, включая области фазовых переходов. Установлено соответствие полученных акустических данных свойствам объемных фаз жидких кристаллов. Выявлены и обсуждаются расхождения между данными акустики и микроскопии по характеристикам фазовых переходов в образцах жидких кристаллов (ЖК) конечных размеров.

Ил.4. Библиогр.16.

УДК 530.18

О некоторых решениях уравнения Клейна – Гордона в теории метода факторизации / Делянов В.А. // Вестн. Моск. Гос. ун-та. Сер. Физика-математика, 2008. №2. С.25 – 29.

Рассмотрены некоторые решения релятивистского уравнения $\square A_{1-4} = \rho_{1-4}$ для четырехмерного электромагнитного потенциала $A_{1-4}(\vec{r}, t)$ в случае $\rho_{1-4} = 0$ в виде $f(x, t)$, которые можно распространить и на нахождение решений релятивистского волнового уравнения для свободной частицы ($\square - k^2_0$) $\Psi(\vec{r}, t) = 0$.

Ил.1. Табл.2. Библиогр.2.

УДК 531.4:530

Прогиб упруго-деформируемой балки как фрактальный объект / Гладков С.О. // Вестн. Моск. Гос. ун-та. Сер. Физика-математика, 2008. №2. С.29 – 32.

Из общих принципов теории фракталов выяснена фрактальная размерность максимальной величины прогиба жесткой закрепленной с обеих сторон упругой балки.

Ил.1. Библиогр.3.

УДК 531

Задача о маятнике / Семенов Н.А., Хребтов Б.В. // Вестн. Моск. Гос. ун-та. Сер. Физика-математика, 2008. №2. С.32 – 37.

Период колебания маятника определяется численно, предлагаются аналитические формулы первого и второго приближений, обсуждается вопрос об инвариантности функции нормированного периода колебаний от длины маятника. Рассматриваются изменения формы графиков функций угла и угловой скорости от времени при разных амплитудах и величине трения.

Табл.3. Библиогр.1.

УДК 533.72

Прямое влияние коэффициента испарения жидкости на испарение однокомпонентной сферической капли / Ю.И.Яламов, Н.Е.Знак // Вестн. Моск. Гос. ун-та. Сер. Физика-математика, 2008. №2. С.37 – 44.

Приводится решение задачи испарения и роста однокомпонентной сферической капли в свете учета прямого влияния на фазовый переход коэффициента испарения жидкости. Предполагается, что рассматриваемая частица является крупной, но не настолько, чтобы не учитывать коэффициент испарения жидкости. Так же рассматривается дополнительный вклад, вносимый термодиффузией, эффектом Дюфура и энтальпией во время испарения указанной аэрозольной частицы.

Табл.1. Библиогр.4

УДК 533.72

Прямое влияние коэффициентов испарения жидкости на испарение двухкомпонентной сферической капли / Ю.И.Яламов, Н.Е.Знак // Вестн. Моск. Гос. ун-та. Сер. Физика-математика, 2008. №2. С.45 – 55.

Приведено решение задачи об испарении двухкомпонентной капли, обе компоненты которой испаряются во внешний газ, создавая вокруг капли трехкомпонентную газовую смесь. Теория строится для крупной капли сферической формы с учетом влияния коэффициентов испарения жидкости. Предполагается, что рассматриваемая частица является крупной, но не настолько, чтобы не учитывать коэффициенты испарения вещества капли. Полученные результаты являются дальнейшим развитием теории квазистационарного испарения и роста аэрозольных капель и могут быть применены в решении прикладных задач экологического характера.

Табл.1. Библиогр.4

ПРАВИЛА

подготовки рукописей, представленных для опубликования в журнале
«Вестник Московского государственного областного университета.
Сер. Физика - математика»

Для публикации научных работ в выпусках серии «Вестник МГОУ» принимаются статьи на русском языке. Публикуются научные материалы преимущественно докторантов, аспирантов, соискателей, преподавателей ВУЗов, докторов и кандидатов наук.

Требования к оформлению статей. Статья должна быть представлена:

- в текстовом варианте (текст статьи должен быть подписан всеми авторами);
- в виде документа MS Word (с расширением doc);
- в виде файла в формате rtf;

Файл должен содержать построчно:

На русском языке	УДК (в верхнем левом углу первого листа рукописи) НАЗВАНИЕ СТАТЬИ – прописными буквами Фамилия, имя, отчество (полностью) Полное наименование организации (в скобках – сокращенное), город (указывается, если не следует из названия организации) Аннотация (1 абзац до 400 символов) под заголовком «АННОТАЦИЯ»
На английском языке	НАЗВАНИЕ СТАТЬИ – прописными буквами Фамилия (полностью), инициалы Полное наименование организации, город Аннотация (1 абзац до 400 символов) под заголовком «ABSTRACT»
На русском языке	Объем статьи ограничен темя уровнями: а) 12 страниц с числом иллюстраций до пяти (к этим статьям предъявляются повышенные требования); б) 6 страниц с числом иллюстраций до трех (содержатся основные результаты без излишних деталей выводов и доказательств); в) 4 страницы с числом иллюстраций до двух (выходят в разделе краткие сообщения вне очереди). Список использованной литературы под заголовком «ЛИТЕРАТУРА»

Формат страницы – А4, книжная ориентация. Поля – 2,5 см. Шрифт Times New Roman Cyrillic, цвет шрифта черный, размер 12 пикселей, междустрочный интервал – полуторный.

Запрещены специфические действия над текстом: уплотнение интервалов, использование цветowych заливок, «красные строки», центрирование, отступы, переносы в словах (делаемые автором), сноски (лучше их оформлять в виде примечаний, замечаний и т.п.). Не допускаются сокращения слов, имен, названий, за исключением общепринятых (и оговоренных).

Формулы нумеруются (справа) только те, на которые в тексте имеются ссылки.

Рисунки и таблицы допускаются в том случае, если описать процесс в текстовой форме невозможно. В этом случае каждый из объектов не должен превышать указанные размеры страницы, а шрифт в нем – 12 пикселей. Возможно использование только вертикальных таблиц и рисунков. Запрещены цветовые заливки, применение «фонов».

Рисунки, схемы, графики выполняются на отдельных листах в формате, обеспечивающем ясность передачи деталей. Места расположения иллюстраций в тексте должны быть указаны простым карандашом на полях. На обороте иллюстрации должны быть написаны фамилия автора и название статьи. Текст к иллюстрациям, а также таблицы следует поместить на отдельных страницах.

Все формулы должны быть созданы с использованием компонента Microsoft Equation.

Абзацы должны быть отделены друг от друга пустой строкой (дополнительным «Enter»).

Список литературы должен содержать библиографические сведения о всех публикациях, упоминаемых в статье, и не должен содержать указаний на работы, на которые в тексте нет ссылок. Располагать публикации в списке следует в порядке упоминания о них в статье. Список литературы приводится на отдельном листе с обязательным указанием следующих данных: для книг (монография, сборник и т.д.) – фамилия и инициалы автора, название книги, издательство, место издания (город), год издания; для журнальных статей – фамилия и инициалы автора, название статьи, название журнала, год издания, том, номер, выпуск, страницы (первая и последняя).

Ссылки на неопубликованные работы не допускаются.

Редакционная коллегия оставляет за собой право на редактирование статей, хотя с точки зрения научного содержания авторский вариант сохраняется. Статьи, не соответствующие указанным требованиям, решением редакционной коллегии серии не публикуются и не возвращаются (почтовой пересылкой).

В случае принятия статьи, условия опубликования оговариваются с ответственным редактором.

Ответственный редактор серии «Физика-математика» декан физико-математического факультета, доктор технических наук, профессор Бугримов Анатолий Львович.

Адрес редколлегии серии «Физика-математика» «Вестника МГОУ»: 105005, г.Москва, ул. Радио, д.10-а, комн. 36. Тел. (495) 261-09-48

ВЕСТНИК
Московского государственного
областного университета

Серия
«Физика-Математика»

№ 2

Подписано в печать: 05.05.2008.
Формат бумаги 60х86 /₈. Бумага офсетная. Гарнитура «NewtonC».
Уч. — изд. л. 5,5. Усл. п. л. 4. Тираж 500 экз. Заказ № 28.

Издательство МГОУ
105005, г. Москва, Радио, д. 10а.