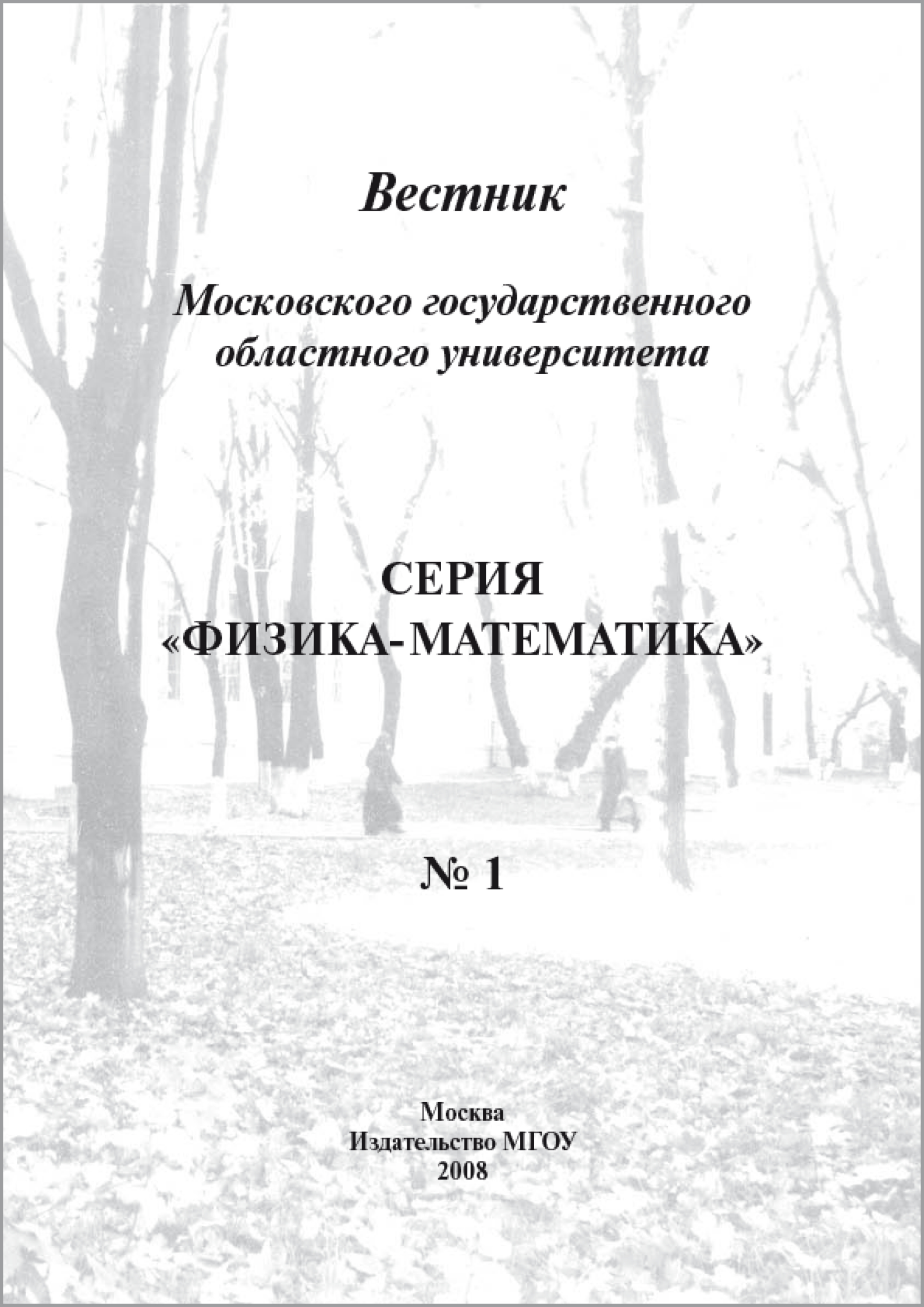




Вестник

***Московского государственного
областного университета***

**СЕРИЯ
«ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА»**

№ 1

Москва
Издательство МГОУ
2008

Вестник

***Московского государственного
областного университета***

**СЕРИЯ
«ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА»**

№ 1

**Москва
Издательство МГОУ
2008**

**Вестник
Московского государственного
областного университета**

Научный журнал основан в 1998 году

Редакционно-издательский совет:

Пасечник В.В. – председатель
Дембицкий С.Г. – зам. председателя
Коничев А.С.
Лекант П.А.
Макеев С.В.
Пусько В.С.
Яламов Ю.И.

Редакционная коллегия серии «Физика-Математика»:

Яламов Ю.И. – главный редактор
Дадиванян А.К. – зам. главного редактора
Кузьмин М.К. – учёный секретарь

Вестник МГОУ. Серия «Физика-Математика». – №1 – 2008. – М.: Изд-во МГОУ. – 48 с.

Вестник МГОУ (все его серии) является рецензируемым и подписным изданием, предназначенным для публикации научных статей докторантов, а также аспирантов и соискателей (См.: Бюллетень ВАК № 4 за 2005 г., с. 5).

В «Вестнике» могут публиковаться статьи не только работников МГОУ, но и других научных и образовательных учреждений.

ISBN 978-5-7017-1179-0

© МГОУ, 2008
© Издательство МГОУ, 2008

ТЕРМОФОРЕЗ НЕСФЕРИЧЕСКОЙ ЧАСТИЦЫ В ГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ РЕЖИМЕ

В статье предложен метод приближённого решения уравнения теплопроводности для неограниченной среды с твёрдым включением при малых числах Пекле. В приближении точечной силы для нелетучей частицы продемонстрирован способ вычисления термофоретической силы и скорости термофореза в поле температуры с постоянным градиентом в «бесконечности».

Распределение температуры T удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta T = 0 \quad (1)$$

с дополнительными условиями

$$T|_{s-} = T|_{s+}, \quad (2)$$

$$-\kappa_- (\nabla T|_{s-} \cdot \vec{n}) = -\kappa_+ (\nabla T|_{s+} \cdot \vec{n}) - Q \quad (3)$$

на поверхности S включения и условием на «бесконечности»

$$T(\vec{r}) \rightarrow T_\infty + (\nabla T)_\infty \cdot \vec{r}, \quad \vec{r} \rightarrow \infty. \quad (4)$$

В формулах (3)-(4) и далее $\vec{r}$ - радиус-вектор произвольной точки пространства относительно полюса O , совпадающего с некоторой фиксированной точкой включения, $r = \|\vec{r}\|$, индексы « $s-$ » и « $s+$ » относятся к внутренней и внешней сторонам поверхности S соответственно; $\vec{n}$ - единичная нормаль к внешней стороне поверхности S ; T_∞ и $(\nabla T)_\infty$ - константы, $\nabla \Leftrightarrow$ «градиент» в произвольной точке, $(\nabla \dots)_0$ и $(\nabla \dots)_\infty$ - градиент в точке $\vec{r} = 0$ и в «бесконечности»; Q - поверхностная плотность тепловых источников;

$$\kappa = \begin{cases} \text{const} = \kappa_-, & \vec{r} \in G; \\ \text{const} = \kappa_+, & \vec{r} \in R^3 \setminus G, \end{cases} \quad - \text{коэффициент теплопроводности};$$

E^3 - евклидово пространство, G - область, ограниченная поверхностью S .

Решение ищем в виде суммы невозмущённого температурного поля

$T_\infty + (\nabla T)_\infty \cdot \vec{r}$ и потенциала простого слоя $\tilde{T}$ [1], то есть

$$T(\vec{r}) = T_\infty + (\nabla T)_\infty \cdot \vec{r} + \tilde{T}, \quad (5)$$

$$\tilde{T} = \int_s \frac{\rho}{R} ds, \quad \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}', \quad R = \|\vec{r} - \vec{r}'\|, \quad \vec{r}' - \text{радиус-вектор произвольной точки}$$

поверхности S , ρ - плотность поверхностного заряда. На поверхности S для потенциала простого слоя имеем соотношения

$$\tilde{T}|_{s-} = \tilde{T}|_{s+}, \quad (6)$$

$$\nabla \tilde{T}|_{s-} \cdot \vec{n} - \nabla \tilde{T}|_{s+} \cdot \vec{n} = 4\pi\rho. \quad (7)$$

Далее рассматриваются «малые» частицы (малые числа Пекле), для которых решение в области G представляется линейной функцией координат

$$T(\vec{r}) = \alpha + \vec{\beta} \cdot \vec{r}, \quad \vec{r} \in G, \quad (8)$$

где α и $\vec{\beta}$ - постоянные.

С учётом (5) найдём

$$\tilde{T} = \alpha + \vec{\beta} \cdot \vec{r} - T_\infty - (\nabla T)_\infty \cdot \vec{r}, \quad \vec{r} \in G, \quad (9)$$

Уравнения (3) и (7) с помощью (9) и (5) перепишутся в форме

$$\kappa_+(\nabla \tilde{T}|_{s+} \cdot \vec{n}) = (\kappa_- \vec{\beta} - \kappa_+(\nabla T)_\infty) \cdot \vec{n} - Q, \quad (10)$$

$$4\pi\rho = (\vec{\beta} - (\nabla T)_\infty) \cdot \vec{n} - \nabla \tilde{T}|_{s+} \cdot \vec{n}. \quad (11)$$

откуда

$$\rho = -\frac{1}{4\pi} \left[\left(\frac{\kappa_-}{\kappa_+} - 1 \right) \vec{\beta} \cdot \vec{n} - \frac{Q}{\kappa_+} \right]. \quad (12)$$

Следовательно, в области G с одной стороны

$$T = T_\infty + (\nabla T)_\infty \cdot \vec{r} - \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\kappa_-}{\kappa_+} - 1 \right) \int_s \frac{\vec{\beta} \cdot d\vec{S}}{R} + \frac{1}{4\pi\kappa_+} \int_s \frac{Q dS}{R}, \quad (13)$$

с другой стороны

$$T(r) = \alpha + \vec{\beta} \cdot \vec{r}.$$

Из двух последних уравнений, вычисляя градиент в точке $\vec{r} = 0$, находим

$$\vec{\beta} = (\nabla T)_\infty - \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\kappa_-}{\kappa_+} - 1 \right) \vec{\beta} \cdot \int_s d\vec{S} \left(\nabla \frac{1}{R} \right)_0 + \frac{1}{4\pi\kappa_+} \int_s Q \left(\nabla \frac{1}{R} \right)_0 dS. \quad (14)$$

Уравнение (14) можно переписать в виде

$$\vec{\beta} \cdot \left({}^2\vec{I} + \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\kappa_-}{\kappa_+} - 1 \right) \int_s d\vec{S} \left(\nabla \frac{1}{R} \right)_0 \right) = (\nabla T)_\infty + \frac{1}{4\pi\kappa_+} \int_s Q \left(\nabla \frac{1}{R} \right)_0 dS, \quad (15)$$

где ${}^2\vec{I}$ - единичный тензор. Окончательно

$$\vec{\beta} = \left((\nabla T)_\infty + \frac{1}{4\pi\kappa_+} \int_s Q \left(\nabla \frac{1}{R} \right)_0 dS \right) \cdot \left({}^2\vec{I} + \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\kappa_-}{\kappa_+} - 1 \right) \int_s d\vec{S} \left(\nabla \frac{1}{R} \right)_0 \right)^{-1}. \quad (16)$$

Пусть с частицей скреплена система координат $Oxyz$ с базисными векторами $\vec{e}_q = \overline{\vec{e}_q}, \vec{e}_q, \vec{e}_q$. Если частица имеет три попарно ортогональные плоскости симметрии, то направляя оси координат по соответствующим осям симметрии и замечая, что в такой системе координат матрица тензора $\left({}^2\vec{I} + \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\kappa_-}{\kappa_+} - 1 \right) \int_s d\vec{S} \left(\nabla \frac{1}{R} \right)_0 \right)^{-1}$ становится диагональной, с помощью (16) приходим к выражению

$$\beta_q = \frac{(\nabla T)_\infty + \frac{1}{4\pi\kappa_+} \int_s Q \left(\nabla \frac{1}{R} \right)_0 dS}{1 + \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\kappa_-}{\kappa_+} - 1 \right) \int_s (d\vec{S} \cdot \vec{e}_q) \left(\left(\nabla \frac{1}{R} \right)_0 \cdot \vec{e}_q \right)} \cdot \vec{e}_q \quad (17)$$

для q - компоненты вектора $\vec{\beta}$, $q = x, y, z$.

Так, например, в частном случае шара

$$\beta_x = \frac{3\kappa_+}{2\kappa_+ + \kappa_-} \left((\nabla_x T)_\infty + \frac{1}{4\pi\kappa_+} \int_s Q \left(\nabla_x \frac{1}{R} \right)_0 dS \right),$$

что совпадает с известным результатом. Далее символом T_- будем обозначать внутреннее решение уравнения теплопроводности, продолженное на внешнюю область.

Рассмотрим теперь распределение скоростей $\vec{v}$ и давлений P в неоднородно нагретой в смысле (1)-(4) несжимаемой жидкости при малых числах Рейнольдса.

“Ползущее” течение описывается уравнениями Стокса

$$\Delta \vec{v} = \frac{1}{\mu} \nabla P \quad (18)$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (19)$$

с условием теплового скольжения

$$\left. \vec{v} \right|_{s+} = \frac{K_{TS}}{\kappa_+ - \kappa_-} (\kappa_+ \nabla T|_{s+} - \kappa_- \nabla T|_{s+}) \quad (20)$$

на поверхности частицы и условиями

$$\vec{v} \rightarrow \text{const} = \vec{v}_\infty, \quad P \rightarrow \text{const} = P_\infty, \quad r \rightarrow \infty \quad (21)$$

в “бесконечности”.

Будем искать решение в виде

$$\vec{v} = \vec{v}^{(C)} + \vec{v}^{(T)}, \quad P = P^{(C)} + P^{(T)},$$

где функции

$$\vec{v}^{(T)} = \frac{K_{TS}}{\kappa_+ - \kappa_-} (\kappa_+ \nabla T - \kappa_- \nabla T_-)$$

и

$$P^{(T)} = 0$$

удовлетворяют уравнениям

$$\Delta \vec{v}^{(T)} = \frac{1}{\mu} \nabla P^{(T)}, \quad (22)$$

$$\nabla \cdot \vec{v}^{(T)} = 0 \quad (23)$$

и условиям

$$\left. \vec{v}^{(T)} \right|_{s+} = \frac{K_{TS}}{\kappa_+ - \kappa_-} (\kappa_+ \nabla T|_{s+} - \kappa_- \nabla T_-|_{s+}), \quad (24)$$

$$\vec{v}^{(T)} \rightarrow \frac{K_{TS}}{\kappa_+ - \kappa_-} (\kappa_+ \cdot (\nabla T)_\infty - \kappa_- \cdot (\nabla T_-)_\infty), \quad P^{(T)} \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty, \quad (25)$$

тогда, как функции $\vec{v}^{(C)}$ и $P^{(C)}$ являются решением уравнений

$$\Delta \vec{v}^{(C)} = \frac{1}{\mu} \nabla P^{(C)}, \quad (26)$$

$$\nabla \cdot \vec{v}^{(C)} = 0 \quad (27)$$

с граничными условиями

$$\left. \vec{v}^{(C)} \right|_{s+} = \vec{0}, \quad (28)$$

$$\vec{v}^{(C)} \rightarrow \vec{v}_\infty - \frac{K_{TS}}{\kappa_+ - \kappa_-} (\kappa_+ (\nabla T)_\infty - \kappa_- (\nabla T_-)_\infty), \quad P^{(C)} \rightarrow P_\infty, \quad r \rightarrow \infty. \quad (29)$$

В соответствии с формулой [2]

$$\vec{F} = -4\pi\eta(r^3 P_{-2}) \quad (30)$$

вклад в силу $\vec{F}$, действующую на неподвижную частицу при обтекании её потоком жидкости с распределением скоростей $\vec{v}^{(T)}$ и давлений $P^{(T)}$, равен нулю; P_{-2} - сферическая гармоника P_n при $n = -2$.

В приближении точечной силы [2] имеем

$$\vec{v}^{(C)} = \frac{-\vec{F}}{8\pi\mu} \cdot (\nabla^2 \psi^2 \vec{I} - \nabla \nabla \psi) + \vec{v}_\infty - \frac{K_{TS}}{\kappa_+ - \kappa_-} (\kappa_+ (\nabla T)_\infty - \kappa_- (\nabla T_-)_\infty), \quad (31)$$

где

$$\psi = r. \quad (32)$$

Потребуем, чтобы условие (28) на поверхности выполнялось в среднем (обозначение $\langle \dots \rangle$):

$$0 = \langle \vec{v}^{(C)} \rangle = \frac{-\vec{F}}{8\pi\mu S} \cdot \int_S (\nabla^2 \psi^2 \vec{I} - \nabla \nabla \psi) dS + \vec{v}_\infty - \frac{K_{TS}}{\kappa_+ - \kappa_-} (\kappa_+ (\nabla T)_\infty - \kappa_- (\nabla T_-)_\infty),$$

откуда действующая на частицу сила

$$\vec{F} = 8\pi\mu S \left[\vec{v}_\infty - \frac{K_{TS}}{\kappa_+ - \kappa_-} (\kappa_+ (\nabla T)_\infty - \kappa_- (\nabla T_-)_\infty) \right] \cdot \left(\int_S (\nabla^2 \psi^2 \vec{I} - \nabla \nabla \psi) dS \right)^{-1}. \quad (33)$$

Полная сила $\vec{F}$ складывается из силы

$$\vec{F}^{(C)} = 8\pi\mu S \vec{v}_\infty \cdot \left(\int_S (\nabla^2 \psi^2 \vec{I} - \nabla \nabla \psi) dS \right)^{-1}, \quad (34)$$

действующей на частицу при обтекании её изотермической жидкостью, и термофоретической силы

$$\vec{F} = -\frac{8\pi K_{TS} \mu S}{\kappa_+ - \kappa_-} (\kappa_+ (\nabla T)_\infty - \kappa_- (\nabla T_-)_\infty) \cdot \left(\int_S (\nabla^2 \psi^2 \vec{I} - \nabla \nabla \psi) dS \right)^{-1}, \quad (35)$$

линейной по градиенту температуры в «бесконечности» $(\nabla T)_\infty$.

В случае $\vec{F} = 0$ находим скорость термофореза

$$\vec{U}^{(T)} = -\vec{v}_\infty = -\frac{K_{TS}}{\kappa_+ - \kappa_-} (\kappa_+ (\nabla T)_\infty - \kappa_- (\nabla T_-)_\infty) \quad (36)$$

или с учётом (16)

$$\vec{U}^{(T)} = -\frac{K_{TS}}{\kappa_+ - \kappa_-} \left[\kappa_+ (\nabla T)_\infty - \kappa_- \left((\nabla T)_\infty + \frac{1}{4\pi\kappa_+} \int_S Q \left(\nabla \frac{1}{R} \right) dS \right) \cdot \left({}^2\vec{I} + \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\kappa_-}{\kappa_+} - 1 \right) \int_S d\vec{S} \left(\nabla \frac{1}{R} \right)_0 \right)^{-1} \right].$$

(37) Для простоты будем считать, что частица имеет три попарно перпендикулярные плоскости симметрии (ортотропное тело) и что оси системы координат направлены по соответствующим осям симметрии. В приближении точечной силы, считая, что она действует вдоль оси Ox , для компонент силы, действующей на частицу, имеем

$$F_y = F_z = 0,$$

а также с помощью (31)-(32)

$$v_x^{(C)} = \frac{-F_x}{8\pi\mu} \left(\frac{1}{r} + \frac{x^2}{r^3} \right) + (v_x)_\infty - \frac{K_{TS}}{\kappa_+ - \kappa_-} (\kappa_+ (\nabla_x T)_\infty - \kappa_- (\nabla_x T_-)_\infty),$$

$$v_y^{(C)} = \frac{-F_x}{8\pi\mu} \frac{xy}{r^3},$$

$$v_z^{(c)} = \frac{-F_x}{8\pi\mu} \frac{xz}{r^3},$$

При этом для скорости жидкости на поверхности частицы в среднем выполняется условие $\vec{v}^{(c)}|_{S+} = 0$. Заметив, что для компонент $v_y^{(c)}$ и $v_z^{(c)}$ это требование выполняется автоматически, для компоненты $v_x^{(c)}$ находим

$$0 = \langle v_x^{(c)} \rangle = \frac{-F_x}{8\pi\mu S} \cdot \int_s \left(\frac{1}{r} + \frac{x^2}{r^3} \right) dS + (v_x)_\infty - \frac{K_{TS}}{\kappa_+ - \kappa_-} (\kappa_+ (\nabla_x T)_\infty - \kappa_- (\nabla_x T)_\infty),$$

откуда

$$F_x = \frac{8\pi\mu S}{\int_s \left(\frac{1}{r} + \frac{x^2}{r^3} \right) dS} \left((v_x)_\infty - \frac{K_{TS}}{\kappa_+ - \kappa_-} (\kappa_+ (\nabla_x T)_\infty - \kappa_- (\nabla_x T)_\infty) \right). \quad (38)$$

Используя выражения для температурного поля (8), (13) а также (17), при $Q=0$ запишем

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{8\pi\mu S}{\int_s \left(\frac{1}{r} + \frac{x^2}{r^3} \right) dS} \left((v_x)_\infty - \frac{K_{TS}}{\kappa_+ - \kappa_-} \left(\kappa_+ - \frac{\kappa_-}{1 + \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\kappa_-}{\kappa_+} - 1 \right) J_{xx}} \right) (\nabla_x T)_\infty \right) = \\ &= \frac{8\pi\mu S}{\int_s \left(\frac{1}{r} + \frac{x^2}{r^3} \right) dS} \left((v_x)_\infty - \frac{K_{TS} \left(1 - \frac{J_{xx}}{4\pi} \right) (\nabla_x T)_\infty}{1 + \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\kappa_-}{\kappa_+} - 1 \right) J_{xx}} \right); \end{aligned} \quad (39)$$

полагая $F_x = 0$, получим скорость термофореза

$$U_x^{(T)} = -(v_x^{(T)})_\infty = - \frac{K_{TS} \left(1 - \frac{J_{xx}}{4\pi} \right)}{1 + \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\kappa_-}{\kappa_+} - 1 \right) J_{xx}} (\nabla_x T)_\infty, \quad (40)$$

где

$${}^2\vec{J} = \int_s d\vec{S} \left(\nabla \frac{1}{R} \right)_0 - \text{тензорный форм-фактор},$$

$$J_{qp} = \hat{e}_q \cdot {}^2\vec{J} \cdot \hat{e}_p = \int_s (d\vec{S} \cdot \hat{e}_q) \left(\left(\nabla \frac{1}{R} \right)_0 \cdot \hat{e}_p \right),$$

$$\hat{e}_q, \hat{e}_p = \hat{i}, \hat{j}, \hat{k}.$$

В случае произвольного направления $(\nabla T)_\infty$, используя принцип суперпозиции решений, находим скорость термофореза

$$\vec{U}^{(T)} = - \sum_{p=1}^3 \frac{K_{TS} \left(1 - \frac{J_{pp}}{4\pi} \right) (\nabla_p T)_{\infty}}{1 + \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\kappa_-}{\kappa_+} - 1 \right) J_{pp}} \mathfrak{E}_p, \quad \mathfrak{E}_p = \overline{\mathfrak{E}, \mathfrak{F}, \mathfrak{K}}. \quad (41)$$

Из (37) следует, что

$$\begin{aligned} U_x^{(T)} &\rightarrow 0, \quad \kappa_- \rightarrow \infty; \\ U_x^{(T)} &\rightarrow -K_{TS} (\nabla T)_{\infty}, \quad \kappa_- \rightarrow 0. \end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Курант «Уравнения с частными производными», изд. «Мир», М., 1964.
2. Дж. Хаппель, Г. Бреннер. «Гидродинамика при малых числах Рейнольдса», изд. «Мир», М., 1976.

ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ В АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ С ЗАДАННОЙ АСИМПТОТИКОЙ НА “БЕСКОНЕЧНОСТИ”

На основе теории потенциала [1] найдено температурное поле внутри и вне “малой” анизотропной частицы произвольной формы с произвольным тензором теплопроводности, имеющее заданную асимптотику в бесконечно удалённых точках. Проанализированы простейшие частные случаи.

В использованной системе обозначений $\vec{r}$ и $\vec{r}'$ - радиусы-векторы точки наблюдения и точки расположения заряда, отсчитываемые от некоторой точки (полюса) O , $r = \|\vec{r}\|$, $r' = \|\vec{r}'\|$, $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$, $R = \|\vec{r} - \vec{r}'\|$; T и T_∞ - текущая температура и температура в отсутствие частицы; $(\psi)_0$ - значение функции ψ в точке O ; “малость” частицы характеризуется числом Пекле $Pe = \frac{(\nabla T_\infty)_0 d}{(T_\infty)_0}$, так что $\frac{(\nabla T_\infty)_0 d}{(T_\infty)_0} \ll 1$, d - характерный размер частицы; J - плотность тепловых источников; ${}^2\vec{\mathcal{K}}$ - тензор теплопроводности, ${}^2\vec{\mathcal{K}} = \begin{cases} {}^2\vec{\mathcal{K}}(\vec{r}), & \vec{r} \in G; \\ \mathcal{K}_+ {}^2\vec{I}, & \vec{r} \in \mathbb{E}^3 \setminus G \end{cases}$, G - область евклидова пространства $\mathbb{E}^3$, занятая частицей, $\mathcal{K}_+ = \text{const}$, ${}^2\vec{I}$ - единичный тензор; кроме того, используются известные обозначения тензоров и тензорных операций [2].

Рассматривается уравнение теплопроводности

$$\nabla \cdot ({}^2\vec{\mathcal{K}} \cdot \nabla T) = -J \quad (1)$$

с условием

$$T \rightarrow T_\infty, \quad \vec{r} \rightarrow \infty. \quad (2)$$

Разлагая тензор теплопроводности

$${}^2\vec{\mathcal{K}} = \frac{1}{3} Sp {}^2\vec{\mathcal{K}} {}^2\vec{I} + {}^2\vec{D}^{(ж)} \quad (3)$$

на шаровую и девиаторную части, перепишем (1) в виде

$$\Delta T = \frac{3}{Sp {}^2\vec{\mathcal{K}}} (-(\nabla \cdot {}^2\vec{\mathcal{K}}) \cdot \nabla T - ({}^2\vec{D}^{(ж)} \cdot \nabla) \cdot \nabla T - J) = -4\pi\rho. \quad (4)$$

Представим решение, как суперпозицию

$$T = T_\infty + \tilde{T} \quad (5)$$

невозмущенного температурного поля и объёмного потенциала

$$\tilde{T} = \frac{3}{4\pi} \int_{V'} \frac{(\nabla \cdot {}^2\vec{\mathcal{K}}) \cdot \nabla T + ({}^2\vec{D}^{(ж)} \cdot \nabla) \cdot \nabla T + J}{Sp {}^2\vec{\mathcal{K}} R} dV' \quad (6)$$

с неизвестной плотностью заряда

$$\rho = \frac{3}{4\pi Sp^2 \vec{\mathbf{ж}}} ((\nabla \cdot^2 \vec{\mathbf{ж}}) \cdot \nabla T + ({}^2 \vec{D}^{(\mathbf{ж})} \cdot \nabla) \cdot \nabla T + J). \quad (7)$$

Полагая далее размер частицы малым, считаем, что решение в области G , можно аппроксимировать линейной функцией координат

$$T = \alpha + \vec{\beta} \cdot \vec{r}, \vec{r} \in G. \quad (8)$$

Вычисляя градиент от (5) и (8) в точке $O_1 \in G$, с учетом условия $\nabla \cdot^2 \vec{\mathbf{ж}} = \vec{0}$, $\vec{r} \in E^3 \setminus G$, а затем приравнивая соответствующие выражения, придём к соотношению

$$\vec{\beta} \cdot ({}^2 \vec{I} - \frac{3}{4\pi} \int_G \frac{(\nabla \cdot^2 \vec{\mathbf{ж}})(\nabla \frac{1}{R})_{O_1}}{Sp^2 \vec{\mathbf{ж}}} dV') = \frac{3}{4\pi} \int_{V'} \frac{J}{Sp^2 \vec{\mathbf{ж}}} (\nabla \frac{1}{R})_{O_1} dV' + (\nabla T_\infty)_{O_1}, \quad (9)$$

из которого находим

$$\vec{\beta} = (\frac{3}{4\pi} \int_{V'} \frac{J}{Sp^2 \vec{\mathbf{ж}}} (\nabla \frac{1}{R})_{O_1} dV' + (\nabla T_\infty)_{O_1}) \cdot ({}^2 \vec{I} - \frac{3}{4\pi} \int_G \frac{(\nabla \cdot^2 \vec{\mathbf{ж}})(\nabla \frac{1}{R})_{O_1}}{Sp^2 \vec{\mathbf{ж}}} dV')^{-1}. \quad (10)$$

Следовательно, плотность заряда

$$\rho = \frac{3}{4\pi Sp^2 \vec{\mathbf{ж}}} ((\nabla \cdot^2 \vec{\mathbf{ж}}) \cdot \vec{\beta} + J) \quad (11)$$

и температурное поле

$$T = T_\infty + \frac{3}{4\pi} \int_G \frac{(\nabla \cdot^2 \vec{\mathbf{ж}}) \cdot \vec{\beta}}{Sp^2 \vec{\mathbf{ж}} R} dV' + \frac{3}{4\pi} \int_{V'} \frac{J}{Sp^2 \vec{\mathbf{ж}} R} dV' \quad (12)$$

является решением задачи.

В частности, пусть

$$T_\infty = T_0 + (\nabla T)_\infty \cdot \vec{r} \quad (13)$$

с постоянным градиентом $(\nabla T)_\infty$ на “бесконечности”.

Скрепим с частицей систему координат $Oxyz$ с базисными векторами $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$ и $(\nabla T)_\infty \uparrow \uparrow \hat{\mathbf{k}}$. Для простоты будем считать, что $J = 0$, частица имеет три попарно перпендикулярные плоскости симметрии (ортотропное тело) и оси системы координат направлены по соответствующим осям симметрии; считаем также, что оси симметрии частицы совпадают с главными осями частного тензора теплопроводности вида

$${}^2 \vec{\mathbf{ж}} = \begin{cases} \mathbf{ж}_{xx} \hat{\mathbf{i}} \hat{\mathbf{i}} + \mathbf{ж}_{yy} \hat{\mathbf{j}} \hat{\mathbf{j}} + \mathbf{ж}_{zz} \hat{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{k}}, & \vec{r} \in G; \\ \mathbf{ж}_+, & \vec{r} \in E^3 \setminus G \end{cases} \quad (14)$$

с постоянными $\mathbf{ж}_{xx}$, $\mathbf{ж}_{yy}$, $\mathbf{ж}_{zz}$ и $\mathbf{ж}_+$.

При сделанных предположениях находим

$$\beta_x = \frac{(\nabla T)_\infty \cdot \mathbf{e}}{1 - \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\mathbf{j}_{xx}}{\mathbf{j}_+} - 1 \right) \int_S (d\vec{S} \cdot \mathbf{e}) \left(\left(\nabla \frac{1}{R} \right)_0 \cdot \mathbf{e} \right)}, \quad \beta_y = \beta_z = 0. \quad (15)$$

Например, для шара

$$\beta_x = \frac{3\mathbf{j}_+}{2\mathbf{j}_+ + \mathbf{j}_{xx}} (\nabla T)_\infty \cdot \mathbf{e}, \quad \beta_y = \beta_z = 0. \quad (16)$$

что согласуется с известным результатом [3].

В случае произвольного направления $(\nabla T)_\infty$ находим

$$\vec{\beta} = \sum_{p=1}^3 \frac{(\nabla T)_\infty \cdot \mathbf{e}_p}{1 - \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\mathbf{j}_{pp}}{\mathbf{j}_+} - 1 \right) \int_S (d\vec{S} \cdot \mathbf{e}_p) \left(\left(\nabla \frac{1}{R} \right)_0 \cdot \mathbf{e}_p \right)} \mathbf{e}_p,$$

$$\mathbf{e}_p = \mathbf{e}, \mathbf{j}, \mathbf{k}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Р.Курант “Уравнения с частными производными”, изд. “Мир”, М., 1964.
2. Дж.Хаппель, Г.Бреннер “Гидродинамика при малых числах Рейнольдса”, изд. “Мир”, М., 1976.
3. Редчиц В.П., Гайдуков М.Н. “О движении анизотропных аэрозольных частиц в неоднородной по температуре газовой среде”. Коллоидный журнал, 1980, т.42, вып.6, с. 1118-1122.

СКОРОСТЬ ИЗМЕНЕНИЯ МАССЫ ЧАСТИЦЫ, АССОЦИИРОВАННАЯ С ФАЗОВЫМ ПЕРЕХОДОМ НА ПОВЕРХНОСТИ

Решена задача о стационарном испарении или конденсации малой жёсткой частицы произвольной формы. Полученные формулы согласуются с известными ранее для частного случая испарения или конденсации шара.

Рассматривается уравнение диффузии

$$\Delta C = 0 \quad (1)$$

с дополнительными условиями

$$-D_+ \nabla C \cdot \vec{n}|_{S_+} = J_M = \alpha \nu (C_p - C)|_{S_+} \quad (2)$$

на поверхности S частицы и

$$C \rightarrow \text{const} = C_\infty, \quad \vec{r} \rightarrow \infty. \quad (3)$$

на большом удалении от неё.

В формулах (1)-(3) и далее $\vec{r}$, C , C_p , D_+ , J_M , α , ν - радиус-вектор произвольной точки пространства относительно полюса O , скреплённого с внутренней точкой частицы; концентрация и равновесная концентрация, коэффициент внешней диффузии, плотность источников масс, коэффициент испарения, $\frac{1}{4}$ тепловой скорости молекул пара соответственно; $\vec{n}$ - внешняя нормаль к поверхности S ; индексы " S_- " и " S_+ " относятся к внутренней и внешней сторонам поверхности S .

Формально решение задачи (1)-(3) следует из решения сопряженной задачи

$$\Delta C = 0$$

$$-D_- \nabla C|_{S_-} \cdot \vec{n} = -D_+ \nabla C|_{S_+} \cdot \vec{n} - J_M, \quad (4)$$

$$C|_{S_-} = C|_{S_+}, \quad (5)$$

$$C \rightarrow \text{const} = C_\infty, \quad \vec{r} \rightarrow \infty$$

при $D_- = 0$, где D_- - коэффициент внутренней диффузии.

Решение сопряженной задачи (1), (4), (5), (3) ищем в виде

$$C = C_\infty + \int_S \frac{\rho_M}{R} dS, \quad (6)$$

$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$, $R = \|\vec{r} - \vec{r}'\|$; $\vec{r}'$ - радиус-вектор произвольной точки поверхности S , ρ_M - плотность "заряда". При этом для плотности заряда с учетом свойств потенциала простого слоя и граничного условия (4), а также принимая во внимание малость частицы (полагая концентрацию $C = C_0$ внутри частицы постоянной), находим

$$\rho_M = \frac{J_M}{4\pi D_+} = \frac{\alpha \nu (C_p - C)|_{S_-}}{4\pi D_+}. \quad (7)$$

Таким образом,

$$C = C_{\infty} + \frac{\alpha v}{4\pi D_+} (C_p - C_0) \int_S \frac{dS}{R}. \quad (8)$$

Вычисляя значение концентрации при $\vec{r} = 0$, получим соотношение

$$C_0 = C|_{S_+} = C_{\infty} + \frac{\alpha v}{4\pi D_+} (C_p - C_0) \int_S \frac{dS}{r'} = C_{\infty} + \frac{\alpha v}{4\pi D_+} (C_p - C_0) I, \quad (9)$$

из которого определяем

$$C_0 = \frac{C_{\infty} + \frac{\alpha v C_p}{4\pi D_+} I}{1 + \frac{\alpha v}{4\pi D_+} I} = C_p + \frac{\delta C_{\infty}}{1 + \frac{\alpha v}{4\pi D_+} I}, \quad \delta C_{\infty} = C_{\infty} - C_p - \quad (10)$$

- пересыщение на «бесконечности», $I = \int_S \frac{dS}{r'}$ - форм-фактор.

Тогда

$$\dot{m} = \frac{dm}{dt} = - \int_S J_m dS = \alpha v (C_0 - C_p) \sigma = \frac{\alpha v \sigma \delta C_{\infty}}{1 + \frac{\alpha v}{4\pi D_+} I} - \quad (11)$$

- скорость изменения массы частицы при ее испарении или конденсации, σ – площадь поверхности частицы.

В случае, когда температурная неоднородность влияет на процесс испарения или конденсации, к системе уравнений (1)-(3) должно быть присоединено уравнение теплопроводности

$$\Delta T = 0 \quad (12)$$

для температурного поля T с дополнительными условиями

$$-\kappa_- \nabla T|_{S_-} \cdot \vec{n} + \kappa_+ \nabla T|_{S_+} \cdot \vec{n} = \frac{L m_1 n}{4\pi \kappa_+} J_M = -J_T, \quad (13)$$

$$T|_{S_-} = T|_{S_+}, \quad (14)$$

$$T(\vec{r}) \rightarrow \text{const} = T_{\infty}, \quad \vec{r} \rightarrow \infty \quad (15)$$

на поверхности S частицы и на больших расстояниях от нее в среде с внутренним κ_- и внешним κ_+ коэффициентами теплопроводности соответственно.

Проводя аналогичные рассуждения в отношении температурного поля и делая те же допущения, запишем

$$T = T_{\infty} + \int_S \frac{\rho_T}{R} dS, \quad \rho_T = \frac{J_T}{4\pi \kappa_+} = - \frac{L m_1 n}{4\pi \kappa_+} J_M \quad (16)$$

и далее с учетом (2) и (16)

$$T = T_{\infty} - \frac{L m_1 n \alpha v}{4\pi \kappa_+} (C_{p0} - C_0) \int_S \frac{dS}{R}, \quad (17)$$

$C_{p0} = C_p(T_0)$ - равновесная концентрация на поверхности.

Вычисляя значение температуры при $\vec{r} = 0$, придем к соотношению

$$T_0 = T_\infty - \frac{Lm_1 n \alpha \nu}{4\pi \kappa_+} (C_{p0} - C_0(T_0)) \cdot I \quad (18)$$

С использованием линейного приближения уравнения Клапейрона-Клаузиуса

$$C_{p0} = C_p(T_0) = C_p(T_\infty)(1 + \nu_0(T_0 - T_\infty)) \quad (19)$$

неизвестные величины C_0 , T_0 и C_{p0} определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} C_0 - C_\infty = \frac{\alpha \nu}{4\pi D_+} (C_{p0} - C_0) I, \end{cases} \quad (20)$$

$$\begin{cases} T_0 - T_\infty = \frac{Lm_1 n \alpha \nu}{4\pi \kappa_+} (C_0 - C_{p0}) I, \end{cases} \quad (21)$$

$$\begin{cases} C_{p0} = C_{p\infty} (1 + \nu_0(T_0 - T_\infty)) \end{cases} \quad (22)$$

или

$$C_0 - C_\infty = \frac{\alpha \nu}{4\pi D_+} (C_{p0} - C_0) I,$$

$$T_0 - T_\infty = \frac{Lm_1 n \alpha \nu}{4\pi \kappa_+} (C_0 - C_{p0}) I,$$

$$(C_{p0} - C_0) + (C_0 - C_\infty) = -C_\infty + C_{p\infty} (1 + \nu_0(T_0 - T_\infty)) = -\delta C_\infty + C_{p\infty} \nu_0 (T_0 - T_\infty),$$

$$\delta C_\infty = C_\infty - C_{p\infty};$$

или

$$\begin{cases} -C_0 + C_\infty = \frac{\kappa_+}{Lm_1 n D_+} (T_0 - T_\infty), \end{cases} \quad (23)$$

$$\begin{cases} C_0 - C_{p0} = \frac{4\pi \kappa_+}{Lm_1 n \alpha \nu I} (T_0 - T_\infty), \end{cases} \quad (24)$$

$$\begin{cases} (C_{p0} - C_0) + (C_0 - C_\infty) = C_{p\infty} \nu_0 (T_0 - T_\infty) - \delta C_\infty. \end{cases} \quad (25)$$

Из системы уравнений (23)-(25) следует соотношение

$$\left[-\frac{\kappa_+}{Lm_1 n D_+} - \frac{4\pi \kappa_+}{Lm_1 n \alpha \nu I} - C_{p\infty} \nu_0 \right] (T_0 - T_\infty) = -\delta C_\infty, \quad (26)$$

из которого

$$T_0 - T_\infty = \frac{\delta C_\infty}{C_{p\infty} \nu_0 + \frac{\kappa_+}{Lm_1 n} \left(\frac{4\pi}{\alpha \nu I} + \frac{1}{D_+} \right)}. \quad (27)$$

При этом легко находятся C_0 , а также J_M и, следовательно,

$$\dot{m} = -\int J_M dS = \frac{4\pi \kappa_+ \sigma \delta C_\infty}{Lm_1 n I \left[\nu_0 (C_\infty - \delta C_\infty) + \frac{\kappa_+}{Lm_1 n} \left(\frac{4\pi}{\alpha \nu I} + \frac{1}{D_+} \right) \right]}$$

В частном случае шара диаметра d

$$I = \int_S \frac{dS}{r'} = \frac{d}{2} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi d \quad (29)$$

и скорость изменения массы

$$\dot{m} = \frac{4\pi\kappa_+\sigma\delta C_\infty}{2\pi d L m_1 n \left[\nu_0 (C_\infty - \delta C_\infty) + \frac{\kappa_+}{L m_1 n} \left(\frac{2}{\alpha v d} + \frac{1}{D_+} \right) \right]}, \quad (30)$$

что согласуется с полученной в [2] формулой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Курант Р. // Уравнения с частными производными, М.: Мир, 1964.
2. Фукс Н.А. // Испарение и рост капель в газообразной среде. М: АН СССР, 1968, 92 с.

ВЛИЯНИЕ ВНЕШНИХ ГРАНИЦ НА ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦЫ В НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ ЖИДКОСТИ

В приближении малых чисел Пекле решена сопряжённая краевая задача для уравнения теплопроводности; в режиме «ползущего» течения определено полескоростей и давлений в жидкости; получены формулы для термофоретической силы и скорости термофореза нелетучей частицы при произвольной асимптотике функций поля в «бесконечности».

Распределение температуры T удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta T = 0 \quad (1)$$

с дополнительными условиями

$$T|_{s-} = T|_{s+}, \quad (2)$$

$$-\kappa_-(\nabla T|_{s-} \cdot \vec{n}) = -\kappa_+(\nabla T|_{s+} \cdot \vec{n}) - Q \quad (3)$$

на поверхности S включения и условиями на «бесконечности»

$$T(\vec{r}) \rightarrow T_\infty(\vec{r}), \quad \vec{r} \rightarrow \infty. \quad (4)$$

В формулах (3)-(4) и далее $\vec{r}$ - радиус-вектор произвольной точки пространства относительно полюса O , совпадающего с некоторой фиксированной точкой включения, $r = \|\vec{r}\|$; индексы « $s-$ » и « $s+$ » относятся к внутренней и внешней сторонам поверхности S соответственно; $\vec{n}$ - единичная нормаль к внешней стороне поверхности S ; T_∞ - температурное поле в отсутствие включения, $\nabla \Leftrightarrow$ «градиент» в произвольной точке, $(\nabla \dots)_0$ и $(\nabla \dots)_\infty$ - градиент в точке $\vec{r} = 0$ и в «бесконечности»; Q - поверхностная плотность тепловых источников;

$$\kappa = \begin{cases} \text{const} = \kappa_-, & \vec{r} \in G; \\ \text{const} = \kappa_+, & \vec{r} \in R^3 \setminus G, \end{cases} \quad - \text{коэффициент теплопроводности};$$

E^3 - евклидово пространство, G - область, ограниченная поверхностью S .

Решение ищем в виде суммы невозмущённого температурного поля T_∞ и потенциала простого слоя $\tilde{T}$ [1], то есть

$$T(\vec{r}) = T_\infty + \tilde{T}, \quad (5)$$

$$\tilde{T} = \int_s \frac{\rho}{R} ds, \quad \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}', \quad R = \|\vec{r} - \vec{r}'\|, \quad \vec{r}' - \text{радиус-вектор произвольной точки}$$

поверхности S , ρ - плотность поверхностного заряда. На поверхности S для потенциала простого слоя имеем соотношения

$$\tilde{T}|_{s-} = \tilde{T}|_{s+}, \quad (6)$$

$$\nabla \tilde{T}|_{s-} \cdot \vec{n} - \nabla \tilde{T}|_{s+} \cdot \vec{n} = 4\pi\rho. \quad (7)$$

Далее рассматриваются «малые» частицы (малые числа Пекле), для которых решение в области G представляется линейной функцией координат

$$T(\vec{r}) = \alpha + \vec{\beta} \cdot \vec{r}, \quad \vec{r} \in G, \quad (8)$$

где α и β - постоянные.

С учётом (5) найдём

$$\tilde{T} = \alpha + \vec{\beta} \cdot \vec{r} - T_{\infty} \quad \vec{r} \in G, \quad (9)$$

Уравнения (3) и (7) с помощью (9) и (5) перепишутся в форме

$$\kappa_+ (\nabla \tilde{T}|_{s+} \cdot \vec{n}) = (\kappa_- \vec{\beta} - \kappa_+ \nabla T_{\infty}|_{s+}) \cdot \vec{n} - Q, \quad (10)$$

$$4\pi\rho = (\vec{\beta} - \nabla T_{\infty}|_{s+}) \cdot \vec{n} - \nabla \tilde{T}|_{s+} \cdot \vec{n}, \quad (11)$$

откуда

$$\rho = -\frac{1}{4\pi} \left[\left(\frac{\kappa_-}{\kappa_+} - 1 \right) \vec{\beta} \cdot \vec{n} - \frac{Q}{\kappa_+} \right]. \quad (12)$$

Следовательно, в области G с одной стороны

$$T = T_{\infty} - \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\kappa_-}{\kappa_+} - 1 \right) \int_s \frac{\vec{\beta} \cdot d\vec{S}}{R} + \frac{1}{4\pi\kappa_+} \int_s \frac{Q dS}{R}, \quad (13)$$

с другой стороны

$$T(r) = \alpha + \vec{\beta} \cdot \vec{r}.$$

Из двух последних уравнений, вычисляя градиент в точке $\vec{r} = 0$, находим

$$\vec{\beta} = (\nabla T_{\infty})_0 - \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\kappa_-}{\kappa_+} - 1 \right) \vec{\beta} \cdot \int_s d\vec{S} \left(\nabla \frac{1}{R} \right)_0 + \frac{1}{4\pi\kappa_+} \int_s Q \left(\nabla \frac{1}{R} \right)_0 dS. \quad (14)$$

Уравнение (14) можно переписать в виде

$$\vec{\beta} \cdot \left({}^2\vec{I} + \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\kappa_-}{\kappa_+} - 1 \right) \int_s d\vec{S} \left(\nabla \frac{1}{R} \right)_0 \right) = (\nabla T_{\infty})_0 + \frac{1}{4\pi\kappa_+} \int_s Q \left(\nabla \frac{1}{R} \right)_0 dS, \quad (15)$$

где ${}^2\vec{I}$ - единичный тензор. Окончательно

$$\vec{\beta} = \left((\nabla T_{\infty})_0 + \frac{1}{4\pi\kappa_+} \int_s Q \left(\nabla \frac{1}{R} \right)_0 dS \right) \cdot \left({}^2\vec{I} + \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\kappa_-}{\kappa_+} - 1 \right) \int_s d\vec{S} \left(\nabla \frac{1}{R} \right)_0 \right)^{-1}. \quad (16)$$

Пусть с частицей скреплена система координат $Oxyz$ с базисными векторами $\vec{e}_q = \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$. Если частица имеет три попарно ортогональные плоскости симметрии, то направляя оси координат по соответствующим осям симметрии и замечая, что в такой системе координат матрица тензора $\left({}^2\vec{I} + \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\kappa_-}{\kappa_+} - 1 \right) \int_s d\vec{S} \left(\nabla \frac{1}{R} \right)_0 \right)^{-1}$ становится диагональной, с помощью (16) приходим к выражению

$$\beta_q = \frac{(\nabla T_{\infty})_0 + \frac{1}{4\pi\kappa_+} \int_s Q \left(\nabla \frac{1}{R} \right)_0 dS}{1 + \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\kappa_-}{\kappa_+} - 1 \right) \int_s (d\vec{S} \cdot \vec{e}_q) \left(\left(\nabla \frac{1}{R} \right)_0 \cdot \vec{e}_q \right)} \cdot \vec{e}_q \quad (17)$$

для q - компоненты вектора $\vec{\beta}$, $q = x, y, z$.

Далее символом T_- будем обозначать внутреннее решение уравнения теплопроводности, продолженное на внешнюю область.

Рассмотрим теперь распределение скоростей $\vec{v}$ и давлений P в неоднородно нагретой в смысле (1)-(4) несжимаемой жидкости при малых числах Рейнольдса.

“Ползущее” течение описывается уравнениями Стокса

$$\Delta \vec{v} = \frac{1}{\mu} \nabla P \quad (18)$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (19)$$

с условием теплового скольжения

$$\vec{v} \Big|_{s+} = \frac{K_{TS}}{\kappa_+ - \kappa_-} (\kappa_+ \nabla T|_{s+} - \kappa_- \nabla T_-|_{s+}) \quad (20)$$

на поверхности частицы и условиями

$$\vec{v} \rightarrow \vec{v}_\infty, \quad P \rightarrow P_\infty, \quad r \rightarrow \infty \quad (21)$$

в “бесконечности”.

Будем искать решение в виде

$$\vec{v} = \vec{v}^{(C)} + \vec{v}^{(T)}, \quad P = P^{(C)} + P^{(T)},$$

где функции

$$\vec{v}^{(T)} = \frac{K_{TS}}{\kappa_+ - \kappa_-} (\kappa_+ \nabla T - \kappa_- \nabla T_-)$$

и

$$P^{(T)} = 0$$

удовлетворяют уравнениям

$$\Delta \vec{v}^{(T)} = \frac{1}{\mu} \nabla P^{(T)}, \quad (22)$$

$$\nabla \cdot \vec{v}^{(T)} = 0 \quad (23)$$

и условиям

$$\vec{v}^{(T)} \Big|_{s+} = \frac{K_{TS}}{\kappa_+ - \kappa_-} (\kappa_+ \nabla T|_{s+} - \kappa_- \nabla T_-|_{s+}), \quad (24)$$

$$\vec{v}^{(T)} \rightarrow \frac{K_{TS}}{\kappa_+ - \kappa_-} (\kappa_+ \nabla T_\infty - \kappa_- \nabla T_-), \quad P^{(T)} \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty, \quad (25)$$

тогда, как функции $\vec{v}^{(C)}$ и $P^{(C)}$ являются решением уравнений

$$\Delta \vec{v}^{(C)} = \frac{1}{\mu} \nabla P^{(C)}, \quad (26)$$

$$\nabla \cdot \vec{v}^{(C)} = 0 \quad (27)$$

с граничными условиями

$$\vec{v}^{(C)} \Big|_{s+} = \vec{0}, \quad (28)$$

$$\vec{v}^{(C)} \rightarrow \vec{v}_\infty - \frac{K_{TS}}{\kappa_+ - \kappa_-} (\kappa_+ \nabla T_\infty - \kappa_- \nabla T_-), \quad P^{(C)} \rightarrow P_\infty, \quad r \rightarrow \infty. \quad (29)$$

В соответствии с формулой [2]

$$\vec{F} = -4\pi\eta(r^3 P_{-2}) \quad (30)$$

вклад в силу сопротивления, действующую на неподвижную частицу при обтекании её потоком жидкости с распределением скоростей $\vec{v}^{(T)}$ и давлений $P^{(T)}$, равен нулю; P_{-2} - сферическая гармоника P_n при $n = -2$.

В приближении точечной силы [2] имеем

$$\vec{v}^{(C)} = \frac{-\vec{F}}{8\pi\mu} \cdot (\nabla^2 \psi^2 \vec{I} - \nabla \nabla \psi) + \vec{v}_\infty - \frac{K_{TS}}{\kappa_+ - \kappa_-} (\kappa_+ \nabla T_\infty - \kappa_- \nabla T_-), \quad (31)$$

где

$$\psi = r. \quad (32)$$

Потребуем, чтобы условие (28) на поверхности выполнялось в среднем (обозначение $\langle \dots \rangle$):

$$0 = \langle \vec{v}^{(C)} \rangle = \frac{-\vec{F}}{8\pi\mu S} \cdot \int_S (\nabla^2 \psi^2 \vec{I} - \nabla \nabla \psi) dS + \langle \vec{v}_\infty \rangle - \frac{K_{TS}}{\kappa_+ - \kappa_-} (\kappa_+ \langle \nabla T_\infty \rangle - \kappa_- \nabla T_-),$$

откуда действующая на частицу сила

$$\vec{F} = 8\pi\mu S \left[\langle \vec{v}_\infty \rangle - \frac{K_{TS}}{\kappa_+ - \kappa_-} (\kappa_+ \langle \nabla T_\infty \rangle - \kappa_- \nabla T_-) \right] \cdot \left(\int_S (\nabla^2 \psi^2 \vec{I} - \nabla \nabla \psi) dS \right)^{-1}. \quad (33)$$

Полная сила $\vec{F}$ складывается из силы

$$\vec{F}^{(C)} = 8\pi\mu S \vec{v}_\infty \cdot \left(\int_S (\nabla^2 \psi^2 \vec{I} - \nabla \nabla \psi) dS \right)^{-1}, \quad (34)$$

действующей на частицу при обтекании её изотермической жидкостью, и термофоретической силы

$$\vec{F} = -\frac{8\pi K_{TS} \mu S}{\kappa_+ - \kappa_-} (\kappa_+ \nabla T_\infty - \kappa_- \nabla T_-) \cdot \left(\int_S (\nabla^2 \psi^2 \vec{I} - \nabla \nabla \psi) dS \right)^{-1}, \quad (35)$$

связанной с неоднородностью температурного поля.

В случае $\vec{F} = 0$ находим скорость термофореза

$$\vec{U}^{(T)} = \langle -\vec{v}_\infty \rangle = -\frac{K_{TS}}{\kappa_+ - \kappa_-} (\kappa_+ \langle \nabla T_\infty \rangle - \kappa_- \nabla T_-) \quad (36)$$

или с учётом (16)

$$\vec{U}^{(T)} = -\frac{K_{TS}}{\kappa_+ - \kappa_-} \left[\kappa_+ \langle \nabla T_\infty \rangle - \kappa_- \left((\nabla T_\infty)_0 + \frac{1}{4\pi\kappa_+} \int_Q \left(\nabla \frac{1}{R} \right)_0 dS \right) \cdot \left({}^2\vec{I} + \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\kappa_-}{\kappa_+} - 1 \right) \int_S d\vec{S} \left(\nabla \frac{1}{R} \right)_0 \right)^{-1} \right]. \quad (37)$$

Для простоты будем считать, что частица имеет три попарно перпендикулярные плоскости симметрии (ортотропное тело) и что оси системы координат направлены по соответствующим осям симметрии. При этом матрица тензора

$$\left({}^2\vec{I} + \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\kappa_-}{\kappa_+} - 1 \right) \int_S d\vec{S} \left(\nabla \frac{1}{R} \right)_0 \right)^{-1}, \text{ как было отмечено выше, принимает диагональ-}$$

ный вид и выражение (37) для скорости термофореза можно записать в форме

$$U_q^{(T)} = -\frac{K_{TS}}{\kappa_+ - \kappa_-} \left(\kappa_+ \langle \nabla T_\infty \rangle - \frac{\kappa_- \left((\nabla T_\infty)_0 + \frac{1}{4\pi\kappa_+} \int_s Q \left(\nabla \frac{1}{R} \right)_0 dS \right)}{1 + \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\kappa_-}{\kappa_+} - 1 \right) \int_s (d\vec{S} \cdot \mathbf{e}_q) \left(\left(\nabla \frac{1}{R} \right)_0 \cdot \mathbf{e}_q \right)} \right) \cdot \mathbf{e}_q, \quad q = \overline{x, y, z} \quad (38)$$

или в инвариантном представлении

$$\vec{U}^{(T)} = -\frac{K_{TS}}{\kappa_+ - \kappa_-} \left(\kappa_+ \langle \nabla T_\infty \rangle - \sum_{p=1}^3 \frac{\kappa_- \left((\nabla T_\infty)_0 + \frac{1}{4\pi\kappa_+} \int_s Q \left(\nabla \frac{1}{R} \right)_0 dS \right)}{1 + \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\kappa_-}{\kappa_+} - 1 \right) J_{pp}} \right) \mathbf{e}_p, \quad (39)$$

где ${}^2\vec{J} = \int_s d\vec{S} \left(\nabla \frac{1}{R} \right)_0$ -тензорный форм-фактор,

$$J_{qp} = \mathbf{e}_q \cdot {}^2\vec{J} \cdot \mathbf{e}_p = \int_s (d\vec{S} \cdot \mathbf{e}_q) \left(\left(\nabla \frac{1}{R} \right)_0 \cdot \mathbf{e}_p \right), \quad \mathbf{e}_q, \mathbf{e}_p = \overline{\mathbf{e}, \mathbf{j}, \mathbf{k}}.$$

Из (37) следует, что

$$\begin{aligned} U_x^{(T)} &\rightarrow 0, \quad \kappa_- \rightarrow \infty; \\ U_x^{(T)} &\rightarrow -K_{TS} \langle \nabla T_\infty \rangle, \quad \kappa_- \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Приблизённо можно считать, что $\langle \nabla T_\infty \rangle = (\nabla T_\infty)_0$, при этом выражение (39) для скорости термофореза приводится к виду

$$\vec{U}^{(T)} = -K_{TS} \sum_{p=1}^3 \frac{\left(1 - \frac{J_{pp}}{4\pi} \right) (\nabla_p T_\infty)_0 - \frac{1}{4\pi\kappa_+} \int_s Q \left(\nabla_p \frac{1}{R} \right)_0 dS}{1 + \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\kappa_-}{\kappa_+} - 1 \right) J_{pp}} \cdot \mathbf{e}_p. \quad (40)$$

Отметим, что система координат, относительно которой получены поля температуры, скоростей и давлений в жидкости, скреплена с частицей, тогда, как асимптотические поля обычно вычислены в другой системе координат, скреплённой со стенками, ограничивающими жидкость, учитывающей симметрию стенок. Так, например, для течения между двумя коаксиальными цилиндрическими поверхностями внутреннее температурное поле при постоянных температурах T_1 на внутренней и T_2 на внешней поверхностях в цилиндрической системе координат ρ, φ, z определяется выражением

$$T_\infty = \frac{1}{\ln \frac{\rho_2}{\rho_1}} [(T_2 - T_1) \ln \rho + T_1 \ln \rho_2 - T_2 \ln \rho_1],$$

откуда

$$(\nabla T_\infty(\vec{r}))_0 = \nabla T_\infty(\rho_0, \varphi_0, z_0) = \frac{T_2 - T_1}{\ln \frac{\rho_2}{\rho_1}} \frac{\mathbf{e}_\rho}{\rho_0},$$

где ρ_1 и ρ_2 - радиусы внутренней и внешней цилиндрических поверхностей соответственно; ρ_0, φ_0, z_0 - цилиндрические координаты начала первой системы координат относительно второй. Положив для простоты $Q = 0$, из (40) находим

$$\vec{U}^{(T)} = -\frac{K_{TS}(T_2 - T_1)}{\rho_0 \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}} \sum_{q=1}^3 \frac{\left(1 - \frac{J_{qq}}{4\pi}\right) (\boldsymbol{\epsilon}_\rho \cdot \boldsymbol{\epsilon}_q)}{1 + \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\kappa_-}{\kappa_+} - 1\right) J_{qq}} \boldsymbol{\epsilon}_q.$$

В частности, для шара

$$\vec{U}^{(T)} = -\frac{K_{TS}(T_2 - T_1)}{\rho_0 \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}} \frac{\left(1 - \frac{J_{qq}}{4\pi}\right)}{1 + \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\kappa_-}{\kappa_+} - 1\right) J_{qq}} \boldsymbol{\epsilon}_\rho = -\frac{2\kappa_+}{2\kappa_+ + \kappa_-} \cdot \frac{K_{TS}(T_2 - T_1)}{\ln \frac{\rho_2}{\rho_1}} \cdot \frac{1}{\rho_0} \boldsymbol{\epsilon}_\rho.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Р.Курант «Уравнения с частными производными», изд. «Мир», М.,1964.
2. Дж. Хаппель, Г. Бреннер. «Гидродинамика при малых числах Рейнольдса», изд. «Мир», М.,1976.

ВЛИЯНИЕ БЛИЖНЕГО ОРИЕНТАЦИОННОГО ПОРЯДКА НА ПРОЦЕСС НАБУХАНИЯ МАКРОМОЛЕКУЛЯРНЫХ КЛУБКОВ

В известных на сегодняшний день теориях набухания полимеров не учитывается ближний ориентационный порядок – корреляция ориентаций макромолекулярных цепей и окружающих их молекул растворителя. Выводы этих теорий полностью не описывают поведение коэффициента набухания в растворах при изменении температуры.

Цель настоящей работы – найти величину коэффициента набухания с учетом корреляции ориентаций полимерных цепей и молекул растворителя в растворах.

Представим макромолекулу в виде облака сегментов, распределенных вокруг ее центра инерции по закону гаусса, как сделано в работах [1,2], и учтем влияние ориентационного порядка на энтропию смешения [3,4]. Если полное число сегментов в молекуле x , то число их x_j в сферическом слое $r_j \leq r \leq r_j + \delta r_j$, согласно функции распределения плотности сегментов (звеньев) в клубке

$$W(r) = \left(\frac{3}{2\pi R^2} \right)^{3/2} e^{-3r^2/2R^2},$$

запишется в виде

$$\delta x_j = x \left(\frac{3}{2\pi R_0^2} \right)^{3/2} e^{-3r_j^2/2R_0^2} \cdot 4\pi r_j^2 \delta r_j, \quad (1)$$

где $(R_0^2)^{1/2}$ – радиус инерции макромолекулы в невозмущенном состоянии.

Линейное изотропное увеличение размеров макромолекулы определяется коэффициентом набухания α , равным

$$\alpha = \frac{(R^2)^{1/2}}{(R_0^2)^{1/2}},$$

где $(R^2)^{1/2}$ – радиус инерции макромолекулы после набухания.

После набухания клубка число x_j сегментов перейдет в слой $r_j\alpha \leq r \leq (r_j + \delta r_j)\alpha$, имеющий объем $\delta V = 4\pi\alpha^3 r_j^2 \delta r_j$. Число δn_{1j} молекул растворителя, находящихся в объеме δV , который занимает x_j полимерных сегментов, равно

$$\delta n_{1j} = 4\pi\alpha^3 r_j^2 \delta r_j (1 - \varphi_{2j}) \frac{N_A}{v_1}$$

где φ_{2j} – объемная доля полимера в данном объеме. Отсюда, в предположении $\varphi_{2j} \ll 1$ получаем:

$$\left(\frac{\partial(\delta n_{1j})}{\partial \alpha} \right) \cong 12\pi\alpha^2 r_j^2 \delta r_j \frac{N_A}{v_1}. \quad (2)$$

Далее, используя (1), имеем:

$$\varphi_{2j} = \frac{\delta x_j v_s}{\delta V} = \frac{\delta x_j v_s}{4\pi\alpha^3 r_j^2 \delta r_j} = x v_s \left(\frac{3}{2\pi\alpha^3 R_0^2} \right)^{3/2} e^{-3r_j^2/2R_0^2}, \quad (3)$$

где v_s – объем сегмента, а xv_s – объем полимерной молекулы, равный $xv_s = \bar{M}v/N_A$, v_1 – парциальный удельный объем полимера, а M – его молекулярная масса.

Значение полной свободной энергии смешения ΔF одной макромолекулы с растворителем состоит из суммы величин ΔF_{cj} по всем элементам объема макромолекулы и члена $\Delta F_{\text{упр}}$, связанного с изменением ее конформаций:

$$\Delta F = \sum_j \Delta F_{cj} + \Delta F_{\text{упр}}. \quad (4)$$

Условие равновесия имеет вид

$$\left(\frac{\partial \Delta F}{\partial \alpha} \right)_{T,p} = 0$$

или

$$\frac{\partial \Delta F}{\partial \alpha} = \sum_j \frac{\partial \Delta F_{cj}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \Delta F_{\text{упр}}}{\partial \alpha} = \sum_j \frac{\partial \Delta F_{cj}}{\partial (\delta n_{1j})} \frac{\partial (\delta n_{1j})}{\partial \alpha} + \frac{\partial \Delta F_{\text{упр}}}{\partial \alpha} = 0. \quad (5)$$

Рассмотрим малый объем, внутри которого средняя плотность сегментов одинаковая, тогда химический потенциал растворителя $\frac{\partial \Delta F_{cj}}{\partial (\delta n_{1j})}$ в этом объеме принимает значение, равное избыточному химическому потенциалу $(\mu_1 - \mu_1^0)$. Тогда продифференцировав соотношение (4) по α , получим

$$\frac{\partial \Delta F}{\partial \alpha} = \sum_j (\mu_{1j} - \mu_1) \frac{\partial (\delta n_{1j})}{\partial \alpha} + \frac{\partial \Delta F_{\text{упр}}}{\partial \alpha}. \quad (6)$$

Воспользуемся выражением для химического потенциала, найденным в работе [4],

$$\Delta \mu_1 = RT \left(\chi_H - \frac{1}{2} + Z_2 \ln \frac{\alpha_1}{\beta_1} + Z_1 \ln \frac{\alpha_2}{\beta_2} \right) \varphi_2^2 \quad (7)$$

или

$$\Delta \mu_1 = -RT \psi_1^* \left(1 - \frac{\theta}{T} \right) \varphi_2^2 \quad (8)$$

где $\psi_1^* = \frac{1}{2} - Z_2 \ln \frac{\alpha_1}{\beta_1} - Z_1 \ln \frac{\alpha_2}{\beta_2}$ - энтропийный параметр. Отличие этой функции от использованной в работах Флори [1,2] функции ψ_1 - в наличии параметра ближнего ориентационного порядка $Z_2 \ln \frac{\alpha_1}{\beta_1} + Z_1 \ln \frac{\alpha_2}{\beta_2}$.

Тогда в соответствии с (5) и (7) выражение (6) примет вид

$$\frac{\partial \Delta F}{\partial \alpha} = -RT\psi_1^* \left(1 - \frac{\theta}{T}\right) \sum_j \varphi_{2j}^2 \frac{\partial(\delta n_{1j})}{\partial \alpha} + \frac{\partial \Delta F_{\text{упр}}}{\partial \alpha}. \quad (9)$$

После подстановки выражений для $\partial(\delta n_{1j})/\partial \alpha$ из (2) и φ_{2j} из (3) в (9) и замены суммирования δn_{1j} интегрированием по всем элементам объема при $r_j \in [0; \infty)$, получим:

$$\frac{\partial \Delta F}{\partial \alpha} = -6C_m kT\psi_1^* \left(1 - \frac{\theta}{T}\right) \frac{M^{1/2}}{\alpha^4} + \frac{\partial \Delta F_{\text{упр}}}{\partial \alpha}, \quad (10)$$

где параметр C_m определяется выражением, полученным в работах [1,2]

$$C_m = \left(\frac{3^3}{2^{5/2} \pi^{3/2}} \right) \left(\frac{\overline{v^2}}{v_1 N_A} \right) \left(\frac{M}{\overline{h_0^2}} \right)^{3/2}.$$

Для вычисления свободной энергии упругой деформации $\Delta F_{\text{упр}}$ существенно предположение, что при набухании макромолекулы, среднее квадратичное расстояние между ее концами $(\overline{h_0^2})^{1/2}$, как и $(\overline{R_0^2})^{1/2}$ увеличивается в α раз [1,2]. Для вывода выражения для $\Delta F_{\text{упр}}$ предположим, что имеется сетка, образованная из n отрезков линейных полимерных цепей, длину которых будем считать для простоты одинаковой. Набор конформаций каждой из n цепей, находящихся между двумя узлами недеформированной сетки, описывается функцией распределения

$$W_\tau d\tau = \left(\frac{3}{2\pi N A^2} \right)^{3/2} e^{-3h^2/2NA^2} d\tau, \quad (11)$$

определяющей вероятность $W_\tau d\tau$ того, что компоненты вектора $\mathbf{h}$ лежат в пределах от X, Y, Z до $(X + dX), (Y + dY), (Z + dZ)$. Допустим теперь, что полимерный образец претерпел изотропную и однородную по всему объему деформацию — всестороннее растяжение в α раз так, что среднее расстояние между узлами его сетки и средняя величина $\mathbf{h}$ для всех его цепей увеличились в α раз. Набор микросостояний, соответствующих данной конформации цепи в деформированной сетке по-прежнему будет определяться функцией (11). Число цепей n_i с компонентами $\mathbf{h}$ в пределах от X, Y, Z до $(X + dX), (Y + dY), (Z + dZ)$ после деформации будет определяться формулой (11), в ко-

торую, однако, следует подставить величины X/α , Y/α , Z/α , dX/α , dY/α , dZ/α , соответствующие положению концов цепей до деформации:

$$n_i = n \left(\frac{1}{\pi h_m^2} \right)^{3/2} e^{-(X^2+Y^2+Z^2)/h_m^2 \alpha^2} \frac{dX}{\alpha} \frac{dY}{\alpha} \frac{dZ}{\alpha}. \quad (12)$$

Вероятность состояния Φ всей сетки определяется произведением функций распределения W_τ для всех составляющих ее цепей:

$$\Phi \sim \prod_i (W_\tau)_i^{n_i}.$$

Так как перестановки цепей с данной величиной h не дают нового состояния сетки, то их следует исключить из общего числа $n!$ возможных перестановок цепей. Таким образом,

$$\Phi = \frac{n!}{\prod_i n_i!} \prod_i (W_\tau)_i^{n_i} = n! \prod_i \frac{(W_\tau)_i^{n_i}}{n!}.$$

Используя формулу Стирлинга, получим:

$$\ln \Phi = \sum_i n_i \ln \left(W_\tau \frac{n}{n_i} \right). \quad (13)$$

Согласно соотношениям (11) и (12)

$$\ln \left(W_\tau \frac{n}{n_i} \right) = \frac{1}{h_m^2} [X^2 + Y^2 + Z^2] \left(\frac{1}{\alpha^2} - 1 \right) + \ln \alpha^3. \quad (14)$$

Подставляя (12) и (14) в выражение (13) и заменяя суммирование интегрированием, получаем изменение энтропии при деформации $\Delta S_{\text{упр}}$

$$\Delta S_{\text{упр}} = -kn \left(\frac{3}{2} (\alpha^2 - 1) - \ln \alpha^3 \right).$$

Используя приращение энтропии $\Delta S_{\text{упр}}$ деформированной сетки и считая в нем $n = 1$ (один упругий элемент), имеем для $\Delta F_{\text{упр}}$:

$$\Delta F_{\text{упр}} = -T \Delta S_{\text{упр}} = kT \left(\frac{3(\alpha^2 - 1)}{2} - \ln \alpha^3 \right) \quad (15)$$

и

$$\frac{\partial \Delta F_{\text{упр}}}{\partial \alpha} = 3kT \left(\alpha - \frac{1}{\alpha} \right). \quad (16)$$

Приравнявая (10) нулю и подставляя туда (16), получаем окончательно:

$$\alpha^5 - \alpha^3 = 2C_m \psi_1^* \left(1 - \frac{\theta}{T}\right) M^{1/2}. \quad (17)$$

Наряду с приближенной теорией Флори [1,2] было предложено большое число статистических теорий объемных эффектов. Попытки построения строгой статистической теории, справедливой для произвольно больших объемных эффектов, до сих пор не увенчались успехом, однако рядом авторов [6 - 9] были получены точные уравнения для случая, когда объемные эффекты малы. В теории [8 - 9] рассматривается модель «жемчужного ожерелья» для полимерной цепи: бусинки, соединенные бестелесными нитями. В результате было получено

$$\overline{h^2} = \overline{h_0^2} \left(1 + \frac{4}{3} z\right), \quad (18)$$

где

$$z = \left(\frac{3}{2\pi}\right)^{3/2} \frac{\sqrt{N}\varphi_0}{A^3}. \quad (19)$$

Значение второго вириального коэффициента с учетом исключенного объема φ_0 , вблизи θ -температуры определяется как

$$A_2 = N_A N^2 \varphi_0 / 2M^2. \quad (20)$$

В работе [5] было показано, что второй вириальный коэффициент с учетом ближнего ориентационного порядка равен

$$A_2 = \frac{\overline{v^2}}{v_1} \psi_1^* \left(1 - \frac{\theta}{T}\right) \Re(J\xi^3). \quad (21)$$

где φ_0 – исключенный объем, а $\Re(J\xi^3)$ и $X = J\xi^3$, как и в работах [8 - 9], имеют вид

$$\Re(X) = \frac{8}{3\pi^{1/2}} \int_0^\infty \exp(-y^2 + X \exp(-y^2)) y^{-4} dy$$

$$y = \left(\frac{\pi^{1/2}}{2^{1/3}}\right) \frac{\xi a}{m^{2/3}}$$

$$\xi = \frac{3m^{2/3}}{2^{1/6} \pi^{1/2} (\overline{h^2})^{1/2}}$$

$$J = (\psi_1^* - \chi_H) \frac{\overline{v^2}}{V_1} \equiv \psi_1^* \left(1 - \frac{\theta}{T}\right) \frac{\overline{v^2}}{V_1}$$

Так как оба выражения для A_2 связаны с термодинамическими параметрами взаимодействия, то при $T \rightarrow 0$, $\Re(J\xi^3) \rightarrow 1$ их можно приравнять:

$$\varphi_0 = \frac{\overline{v^2}}{v_1} \psi_1^* \left(1 - \frac{\theta}{T}\right) \frac{2M^2}{N_A N^2} \quad (22)$$

Разложив (17) вблизи $T = \theta$ в ряд по α и подставив полученное выражение в (18), (19) и (22) с учетом того, что $A^3 = (\overline{h^2}/N)^{3/2}$, получим

$$\alpha^2 = \overline{h^2}/h_0^2 = 1 + 2C'_m \psi_1^* \left(1 - \frac{\theta}{T}\right) M^{1/2}, \quad (23)$$

где

$$C'_m = \frac{4}{3} \left(\frac{3}{2\pi}\right)^{3/2} \frac{\overline{v^2}}{v_1 N_A} \left(\frac{M}{h_0^2}\right)^{3/2} = \frac{1}{2} C_m.$$

При разложении выражения (17) по $J\xi^3$ вблизи θ -точки получаем величину второго вириального коэффициента

$$A_2 = \frac{\overline{v^2}}{v_1} \psi_1^* \left(1 - \frac{\theta}{T}\right) \left[1 - \frac{\sqrt{\pi}}{8} J\xi^3\right],$$

или аналогично [7] в точке близкой к θ - температуре

$$A_2 = \frac{\overline{v^2}}{v_1} \psi_1^* \left(1 - \frac{\theta}{T}\right). \quad (24)$$

Исходя из вышеизложенного, можно заключить, что выражения (17) и (24) наиболее полно описывают поведение раствора при понижении и повышении температуры, связь второго вириального коэффициента и коэффициента набухания показывает общую природу этих величин при растворении.

Из уравнения (17) следует, что коэффициент набухания α медленно возрастает с молекулярным весом (C_m для данных полимера и растворителя от M не зависит). Так как размеры клубка в данном растворителе

$$\left(\overline{h^2}\right)^{1/2} = \alpha \left(h_0^2\right)^{1/2},$$

то $\left(\overline{h^2}\right)^{1/2}$ возрастает при увеличении M быстрее, чем $M^{1/2}$. Согласно (17) α зависит от свойств растворителя, обусловленных членом $\psi_1^*(1 - \theta/T)$. В случае, когда растворитель хороший (ВКТР меньше НКТР), при температурах Флори и Роулинсона значение коэффициента набухания принимает значение равное единице. При удалении от критической точки в область раствора величина коэффициента набухания α растет. Однако, так как вблизи ВКТР величина ψ^* положительна, а вблизи НКТР отрицательна, между ними она должна принять значение, равное нулю, и коэффициент набухания должен быть равен единице в точке θ_M (Рис.1а).

Рассуждая аналогично, можно показать, что в случае, когда ВКТР больше НКТР, при удалении от критических точек коэффициент набухания сначала убывает. Далее, начиная с некоторых значений температуры, если не произойдет расслоения, величина α , начнет возрастать (Рис.1б). Однако, скорее всего, расслоение произойдет раньше.

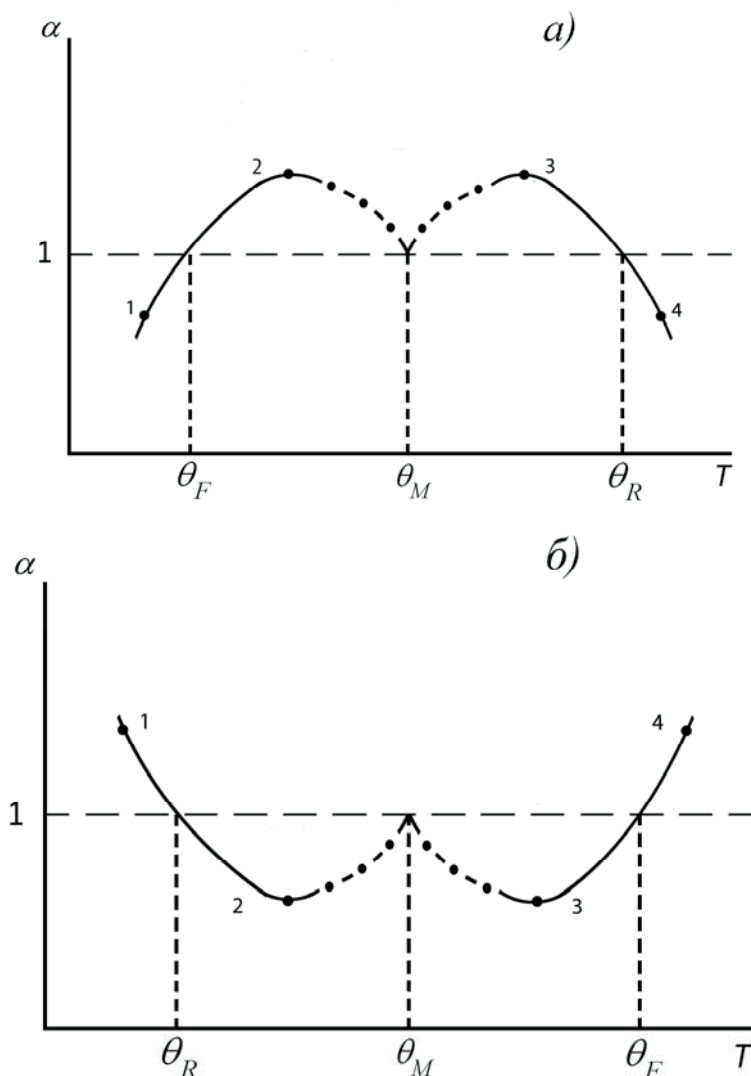


Рис.1. Зависимость коэффициента набухания от температуры для случаев $VКТР < НКТР$ (а) и $VКТР > НКТР$ (б).

Таким образом, полученные нами результаты показывают, что с повышением температуры вблизи ВКТР коэффициент набухания растет, а вблизи НКТР уменьшается. В области между ВКТР и НКТР значение α может быть равно 1 (при температуре θ_M), однако, если ВКТР выше НКТР, то этот случай может не реализоваться из-за расслоения системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Flory P.* // Principles of the Polymer Chemistry, N. Y., 1953.
2. *Flory P., T. Fox Jr.* // J. Polymer Sci., 5, p.745, 1950.
3. *Дадиванян А. К., Ноа О. В.* // Высокомолек. соедин. (А) Т. 49, с.51, 2007.
4. *Дадиванян А. К., Ноа О. В., Чаусов Д. Н.* // Вестник Московского государственного областного университета, Труды Центра фундаментальных научных исследований. №1, с.96, 2007.
5. *Дадиванян А. К., Чаусов Д. Н.* // Вестник Московского государственного областного университета, Труды Центра фундаментальных научных исследований. №2, с.47, 2007.
6. *Волькенштейн М. В., Птицын О. Б.* // Успехи физических наук, Т. 49, с.501, 1953.
7. *Stockmayer W. H.* // Makromol. Chem., 1960, 35, p.54.
8. *Zimm B. H., Stockmayer W. H., Fixman M.* // J. Chem. Phys., 21., №10, p.1775, 1953
9. *Zimm B. H., Stockmayer W. H.*, // Ibid., 17., №3, p.1716, 1949.

РЕЛАКСАЦИЯ ОРИЕНТАЦИИ НЕМАТИЧЕСКОГО ЖИДКОГО КРИСТАЛЛА Н8 И ЕГО РАСТВОРА В НЕМЕЗОГЕННОМ РАСТВОРИТЕЛЕ ПРИ НАЛОЖЕНИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Исследованы временные зависимости коэффициента поглощения ультразвука в пульсирующем магнитном поле в нематическом жидком кристалле (НЖК) Н8 и его растворе в немезогенном растворителе (бензоле) при изменяющихся термодинамических параметрах состояния (p, T); найдено отношение вращательной вязкости к диамагнитной восприимчивости ($\gamma/\Delta\chi$); определена энергия активации для различных давлений; найден активационный объем.

Исследование диссипативных свойств жидких кристаллов (ЖК) и их растворов в области существования мезофазы представляет интерес как в научном, так и в прикладном аспектах. Однако, если молекулярно - кинетические, термодинамические, гидродинамические и другие физические свойства многих ЖК в настоящее время достаточно полно изучены, то исследований, посвященных растворам ЖК крайне мало.

В качестве объекта исследования выбран НЖК Н8 и его раствор в немезогенном растворителе - бензоле (отношение масс растворенных веществ 7 : 1 Н8 и C_6H_6 соответственно). Этот выбор обусловлен большим температурным интервалом существования мезофазы, позволяющим определить ее диссипативные свойства в регулярной области.

Известно, что добавление в Н8 немезогенного растворителя приводит к понижению температуры фазового перехода нематик - изотропная жидкость (T_c). Если в Н8 температура просветления $T_c=325$ К, то в исследованном нами растворе $T_c=306$ К. Наложение магнитного поля на неориентированный образец НЖК в области существования мезофазы приводит к возникновению анизотропии коэффициента поглощения ультразвука. При температуре перехода "нематик - изотропная жидкость" анизотропия пропадает, что позволяет определить температуру этого перехода для различных давлений по исчезновению анизотропии коэффициента поглощения. В исследуемом интервале давлений зависимости температуры перехода $T_c(P)$ как для чистого Н8, так и для его раствора линейны и удовлетворяют соотношению:

$$T_c(P) = T_c + \frac{dT}{dP} P, \quad (1)$$

где $\frac{dT}{dP} \approx 0,29$ К/МПа для Н8 и 0,3 К/МПа для его раствора.

В области существования мезофазы наложение магнитного поля сопровождается замедленной реакцией физических свойств НЖК, в том числе и коэффициента поглощения ультразвука. Этот процесс имеет конечное время релаксации, зависящее от величины вращательной вязкости. На рис.1 приведена временная зависимость коэффициента поглощения ультразвука, отнесенного к квадрату частоты $\alpha^{\parallel}(t)/f^2$ в пульсирующем магнитном поле при параллельной ориентации вектора магнитной индукции и волнового вектора. В момент времени t_1 включается магнитное поле и в интервале

времени (t_1, t_2) параметр $\alpha_{||}(t)/f^2$ возрастает от α_0/f^2 (α_0 - поглощение в отсутствие поля) достигая при $t \approx 10^2$ с значения α_m/f^2 .

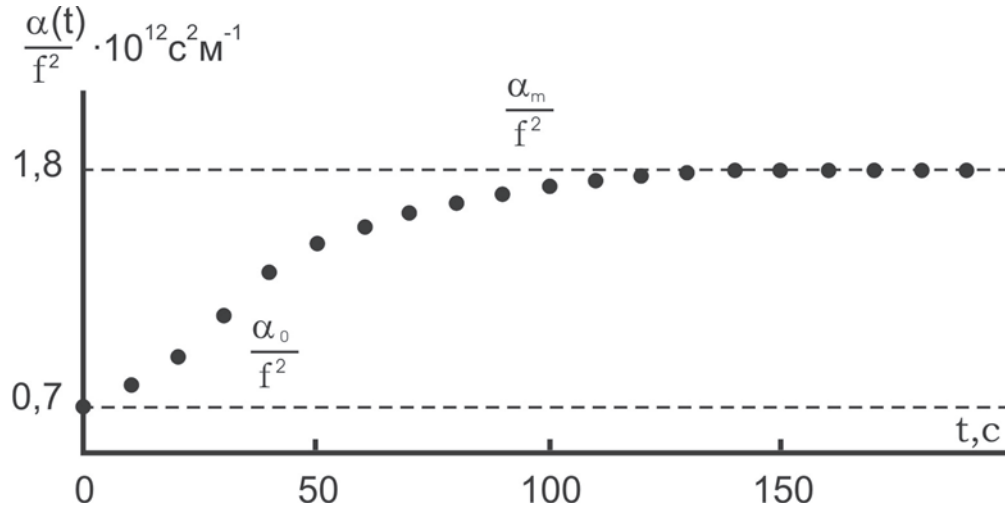


Рис.1. Временная зависимость $\alpha_{||}(t)/f^2$ для Н8 при $B=0,052$ Тл, $P=0,1$ МПа, $T=315$ К, $f=6,5$ МГц.

Известны выражения [1], описывающие временные зависимости коэффициента поглощения ультразвука в пульсирующем магнитном поле параллельной ориентации относительно волнового вектора при наложении поля, которые учитывают собственное время τ_b включения электромагнита:

$$f^{-2}\alpha(t) = c^* + a \cdot \frac{1 - \left(\frac{e^-}{1-e^-}\right)^{1/2} \arccos\left((e^-)^{1/2}\right)}{1-e^-} + b \cdot \frac{1 + \frac{e^-}{2} - \frac{3}{2}\left(\frac{e^-}{1-e^-}\right)^{1/2} \arccos\left((e^-)^{1/2}\right)}{(1-e^-)^2}, \quad (2)$$

где временная зависимость параметра e^- от времени определяется формулой:

$$e^- = \exp\left[-\frac{1}{\tau_n}\left(2t - 3\tau_b + 4\tau_b e^{-t/\tau_b} - \tau_b e^{-2t/\tau_b}\right)\right] \quad (3)$$

Здесь τ_n - время релаксации коэффициента поглощения ультразвука. Время включения электромагнита τ_b определяется выражением:

$$e(t) = \left[1 - e^{-\frac{t}{\tau_b}}\right] B_m. \quad (4)$$

Время τ_n находится методом наименьших квадратов из выражения (2) по наилучшему соответствию экспериментальной и теоретической зависимостей. Значения параметров угловой зависимости коэффициента поглощения a и b для чистого Н8 и его раствора взяты из работы [2].

Зависимости времени τ_n от давления и температуры для Н8 и его раствора приведены в табл. 1 и 2 соответственно.

Табл.1. Зависимость времени τ_n от давления при температуре 306К.

вещество	Н8				раствор		
P, МПа	0,1	30	70	110	30	70	110
0,070 Тл	17	28	49	71	21	38	66
0,060 Тл	28	46	69	114	29	52	90
0,050 Тл	40	62	115	155	48	79	141

Табл.2. Зависимость времени τ_n от температуры при давлении 30МПа.

вещество	Н8				раствор			
T, К	298	306	312	320	293	298	306	312
0,070 Тл	43	28	19	12	45	31	21	19
0,060 Тл	58	46	30	20	68	46	29	30
0,050 Тл	87	62	47	33	96	70	48	47

По значениям времен релаксации коэффициента поглощения ультразвука τ_n определено отношение вращательной вязкости к диамагнитной восприимчивости $\gamma_1/\Delta\chi = \tau_n B^2/\mu_0$.

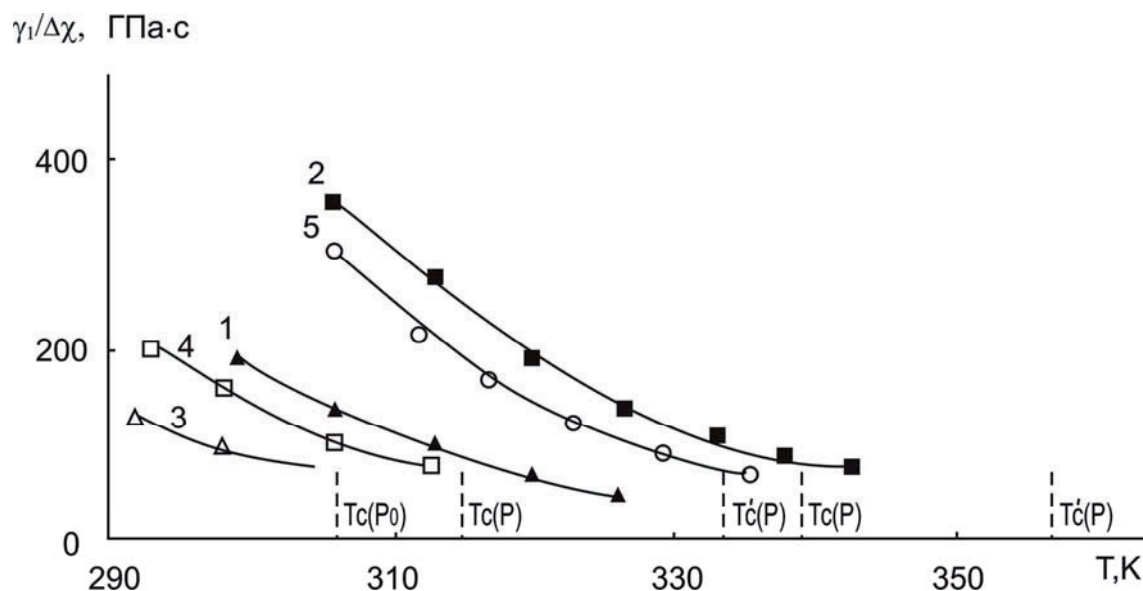


Рис.2. Зависимость $\gamma_1/\Delta\chi$ от температуры для Н8 при давлениях (P, МПа): 1 - 30 и 2 - 110 и раствора при давлениях (P, МПа): 3 - 0,1, 4- 30 и 5 - 110.

На рис. 2 приведены зависимости $\gamma_1/\Delta\chi$ от температуры для чистого Н8 при давлениях 30 и 110 МПа и раствора при давлениях 0,1, 30 и 110 МПа. Эти зависимости носят экспоненциальный характер и описываются выражениями вида:

$$\frac{\gamma_1}{\Delta\chi} = A \cdot e^{\frac{E}{RT}}, \quad (5)$$

где А - коэффициент, который практически не зависит от температуры и давления, является индивидуальной характеристикой НЖК и составляет 7,5 и 2,8 Па·с для Н8 и для раствора соответственно, Е – молярная энергия активации, R – универсальная газовая постоянная. Значения энергии активации при различных давлениях для Н8 и раствора приведены в табл. 3.

Табл.3. Значения Е и dE/dP при различных давлениях для Н8 и для раствора.

Р, МПа	0,1	30	50	70	90	110
вещество	Н8					
Е, кДж/моль	35,8	36,8	37,4	38,1	38,8	39,4
dE/dP , 10^{-6} м ³ /моль	41	37	34	32	31	30
вещество	раствор					
Е, кДж/моль	37,4	38,6	39,3	40	40,5	41
dE/dP , 10^{-6} м ³ /моль	44	38	33	30	29	29

Энергию активации Е можно аппроксимировать линейной формулой: $E = E^* + dE/dP \cdot P$, где E^* - энергия активации при $P = 0$. Величина dE/dP - имеет размерность молярного объема. Ее значения при различных давлениях приведены в табл. 3.

Из приведенных данных следует, что с увеличением давления происходит уменьшение параметра dE/dP . Это соответствует уменьшению тангенса угла наклона изохор на рис. 3. Если при атмосферном давлении для Н8 параметр dE/dP составляет $41 \cdot 10^{-6}$ м³/моль, что соответствует 14% от объема вещества, то при давлении в 110 МПа этот параметр почти на треть меньше. Из этого следует, что увеличение давления приводит к уменьшению свободного объема между молекулами, что затрудняет переход молекул из одного равновесного положения в другое.

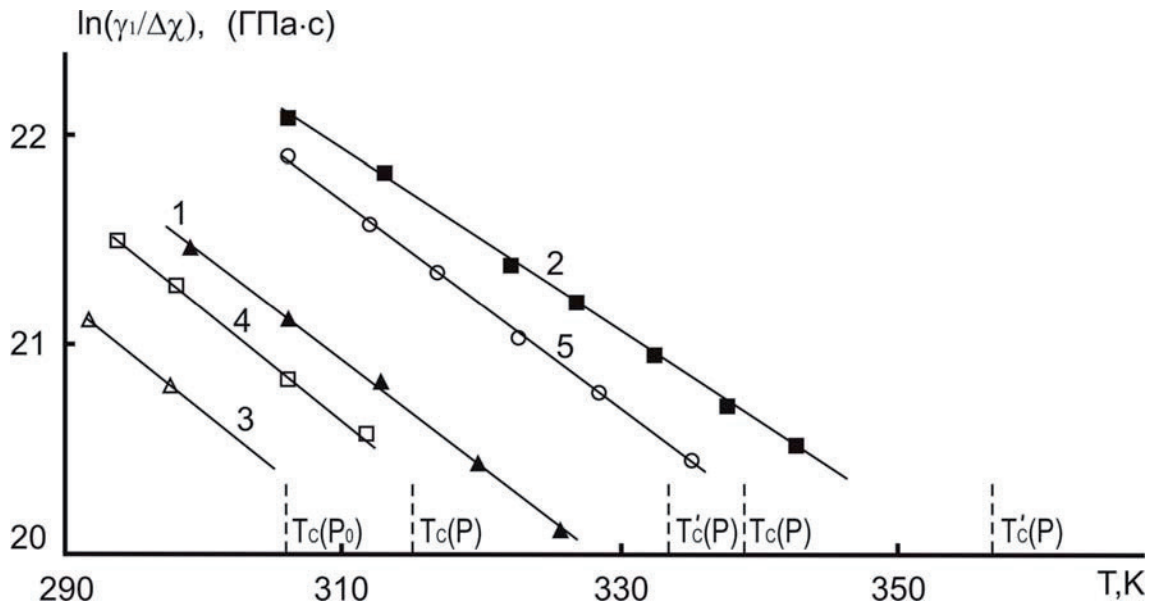


Рис.3. Зависимость $\ln(\gamma_1/\Delta\chi)$ от температуры для Н8 при давлениях (Р, МПа): 1 - 30 и 2 - 110 и раствора при давлениях (Р, МПа): 3 - 0,1, 4- 30 и 5 - 110.

Полуфеноменологическая теория вращательной вязкости, разработанная Диого и Мартиншем [3] и основанная на приближении среднего поля Майера - Заупе, дает следующее выражение для γ_1 :

$$\gamma_1 = q \cdot Q^2 \cdot \exp \left[\frac{\varepsilon \cdot Q}{kT} + \frac{\theta \cdot Q^2}{T - T^*} \right], \quad (6)$$

где q , θ - константы; T^* - температура, при которой начинается процесс “замораживания” вращения директора. В температурном интервале $T_c < T < T^*$ поведение γ_1 определяется, главным образом, изменением вероятности перехода молекул из возбужденного в основное состояние, связанным с изменением “свободного объема”:

$$\gamma_1(T_c < T < T^*) \approx q \cdot Q^2 \cdot \exp \left[\frac{\theta \cdot Q^2}{T - T^*} \right]. \quad (7)$$

В выражении (8) от давления зависят два параметра: Q и T^* . Величина параметра порядка прежде всего зависит от разности $T_c - T$. При $T_c - T = \text{const}$ параметр ориентационного порядка Q практически не меняется с давлением. Таким образом, зависимость параметра ориентационной упорядоченности от давления сводится к его зависимости от $T_c(P)$:

$$\frac{dQ}{dP} = \frac{dQ}{dT_c} \frac{dT_c}{dP}, \quad (8)$$

Результаты расчета $\frac{d(\ln(\gamma_1/\Delta\chi))}{dP}$ в Н8 при $dT^*/dP \approx 0,14$ К/МПа приведены в табл. 4.

Табл.4. Сравнение значений $d(\ln(\gamma_1/\Delta\chi))/dP$, рассчитанных по выражению (4) и полученных из экспериментальных зависимостей.

T, K	300	305	310	315	320
dQ/dP ГПа ⁻¹	1,78	2	2,33	2,91	4,36
$d(\ln(\gamma_1/\Delta\chi))/dP$ МПа ⁻¹ расчет по (6)	0,014	0,0121	0,0109	0,0107	0,0123
$d(\ln(\gamma_1/\Delta\chi))/dP$ МПа ⁻¹ эксперимент	0,0132	0,0129	0,0127	0,0125	0,0123

T, K	$d(\ln(\gamma_1/\Delta\chi))/dP$ МПа ⁻¹ расчет по (6)	$d(\ln(\gamma_1/\Delta\chi))/dP$ МПа ⁻¹ эксперимент
300	0,0171	0,0132
305	0,0133	0,0129
310	0,0106	0,0127

ЛИТЕРАТУРА

1. Хабибуллаев П.К. Геворкян Э.В. Лагунов А.С. Реология жидких кристаллов // Ташкент: Фан, 1992. 300с
2. Вековищев М.П. Исследование ориентационной релаксации в растворах жидких кристаллов с немезогенным растворителем при высоких давлениях. // Канд. дисс. М., МПУ, 1997. с.170.
3. Diogo A., Martins A. F. // Mol. Cryst. Liq. Cryst. 1981. Vol. 66. P. 133.

УДК 533.9:518.5

Н. С. Келлин, С. В. Пароткин
Институт прикладной математики
им. М.В. Келдыша РАН

ОДНОМЕРНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ВЛАСОВА-МАКСВЕЛЛА

Рассматривается модельная одномерная задача Коши для уравнения Власова. Уравнение описывает эмиссию с бесконечной плоскости монохроматического потока электронов в самосогласованном электрическом поле. Для гладких начальных данных строится явное выражение для значения электрического поля в форме рядов Бюрмана-Лагранжа. Задача определения потока электронов сводится к решению линейного уравнения первого порядка по характеристикам, как в релятивистском, так и в классическом случае. Производится суммирование построенных рядов и распространение полученных для решения исходной задачи формул на негладкие начальные данные (получение обобщённых решений).

N. S. Kellin, S. V. Parot'kin

Keldysh Institute for Applied Mathematics, Russian Academy of Science.

THE 1-DIMENSIONAL PROBLEM FOR THE WLASSOFF-MAXWELL SYSTEM

The model one-dimensional Cauchy problem for the Wlasoff equation is considered. The equation describes the slab emission of monochromatic electron flux in the self-consistent electric field. The explicit expression for the electric field is obtained for smooth initial data. This expression is obtained in the Brūman-Lagrange series form. The problem of the electron flux determination is reduced to the linear equation of the first order which is solving along characteristics, both in the relativistic and classic cases. The sums of written series have been received as functions of Cauchy problem's initial data. So the generalized solutions can be obtained also in terms of such functions with non-smooth initial data as their arguments.

Введение

Пусть электромагнитное поле (далее – ЭМП) генерируется в широком потоке быстрых электронов, образующемся при рассеянии в среде фотонов ионизирующего излучения. В общем случае ЭМП будет самосогласованным. Математическое моделирование такого самосогласованного ЭМП в трехмерных постановках требует большого объема ресурсов ЭВМ. В ряде практически важных случаев параметры потоков ионизирующих частиц и среды оказываются такими, что эффект согласования ЭМП и плотности тока быстрых электронов можно учитывать как малое возмущение. Другие моменты функции распределения быстрых электронов в задачах радиационной генерации ЭМП, как правило, интереса не представляют. Этот подход к трёхмерным задачам целесообразно исследовать в рамках более простых одномерных постановок [1].

Движение потока электронов, формирующего радиационное ЭМП, в газовой среде сопровождается столкновениями электронов с нейтральными молекулами. Вто-

ричная ионизация и упругое рассеяние [2] приводят к уменьшению амплитуды ЭМП и снижению влияния его на движение электронов. Адекватность методик, рассматривающих эффект согласования как малое возмущение, целесообразно исследовать в рамках модельных задач, описывающих распространение потоков электронов в вакууме.

Целью данной работы является получение асимптотического разложения решения задачи о торможении потока электронов собственным электрическим полем в одномерной вакуумной модели и преобразование его к виду, который интерпретируется в терминах рядов Бюрмана-Лагранжа [3].

В рамках данной работы предполагается, что практический интерес представляет вычисление ЭМП – линейного функционала от функции распределения электронов. Ниже будет показано, что в некоторых достаточно простых случаях оно может быть найдено, минуя определение функции распределения. Задача вычисления функции распределения при этом сведется к решению классических задач с линейными уравнениями первого порядка [4]. Необходимо отметить, что определение функционалов функции распределения, представляющих практический интерес, без вычисления функции распределения во всех подробностях используется и в других областях. Например, детальный учет выгорания [5] в математических моделях реакторов может исследоваться без точного вычисления параметров нейтронного поля [6].

1. Постановка задачи

Рассмотрим тонкую бесконечную пластину в плоскости xOy . Пластина облучается фотонами. В материале пластины в результате фотоэффекта или комптоновского рассеяния образуются электроны отдачи с энергией, превышающей работу выхода. Происходит эмиссия электронов в окружающую среду. На поверхности пластины остается избыточный положительный заряд.

Будем считать окружающую среду вакуумом, поток электронов монохроматическим, направленным перпендикулярно пластине вдоль оси Oz . Электроны будем описывать функцией распределения $f(t, z, p)$, где t – время, p – импульс. Избыточный положительный заряд, остающийся на пластине, будем описывать функцией распределения положительных ионов $f_i(t, z, p)$. Интенсивность излучения фотонов считается настолько малой, что ионной эмиссии не возникает. Кристаллическая решетка материала не разрушается, ионы не могут покинуть пластину.

Разделение заряда приводит к образованию самосогласованного электрического поля в окрестности пластины. Оно стремится скомпенсировать начальную энергию электронов и вернуть их обратно на пластину. Для того, чтобы не рассматривать отдельно случаи $0 < t \leq T$ и $0 < t < \infty$, можно ввести ещё одно приближение: считать, что пластина прозрачна для возвращающихся электронов. (Оно не имеет физического обоснования и вводится только для модельных задач, когда $0 < t < \infty$.)

Рассмотрим одномерное уравнение Власова – Пуассона [7] для функций распределения и самосогласованного электрического поля, описывающее эмиссию электронов в указанных приближениях:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(vf) - e \frac{\partial}{\partial p}(Ef) = F(t)\delta(z)\delta(p - p_0), \quad \frac{\partial f_i}{\partial t} = F(t)\delta(z)\delta(p), \quad \frac{\partial E}{\partial z} = 4\pi\rho, \quad (\text{I})$$

где $\rho = e \int_{-\infty}^{+\infty} (f_i - f) dp$ – плотность электрического заряда, c – скорость света;
 $v = cp / \sqrt{(m_0 c)^2 + p^2}$ – скорость электрона; m_0, r_e, e – его масса покоя, классический радиус и модуль заряда соответственно, p_0 – начальный импульс электрона.
 $E = E(t, z)$ – самосогласованное электрическое поле. Для данной системы уравнений рассматривается задача Коши с однородными начальными условиями при $t = 0$. Поэтому электрическое поле имеет только одну, направленную вдоль оси z , ненулевую компоненту, а магнитное поле равно нулю. Интенсивность эмиссии $F(t)$ при $t \leq 0$ также равна нулю.

Задачи с уравнением Власова изучались многими авторами (например, [8], [9]). В работе [9] приведена подробная библиография.

Интегрируя кинетические уравнения задачи (I) по импульсу, умножая на заряд электрона с соответствующим знаком и складывая, можно получить уравнение непрерывности заряда $\partial \rho / \partial t + \partial j / \partial z = 0$, где $j = e \int_{-\infty}^{+\infty} v (f_i - f) dp$ – плотность электрического тока, имеющая в рассматриваемой задаче только одну компоненту вдоль оси z .

Из уравнения для функции распределения ионов следует, что ионы не создают ненулевой плотности электрического тока, то есть $j = -e \int_{-\infty}^{+\infty} v f dp$. Этот факт позволяет существенно упростить задачу.

Продифференцируем последнее уравнение системы (I) по времени. Предполагая дифференцируемость функции $E(t, z)$ по обеим переменным, с помощью уравнения непрерывности получим: $\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial E}{\partial t} + 4\pi j \right) = 0$.

В силу однородных начальных условий: $\frac{\partial E}{\partial t} + 4\pi j = 0$.

Поскольку для определения плотности тока нет необходимости рассматривать уравнение для ионов, получим следующую задачу Коши:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(vf) - e \frac{\partial}{\partial p}(Ef) = F(t) \delta(z) \delta(p - p_0), \quad \frac{\partial E}{\partial t} + 4\pi j = 0. \quad (\text{II})$$

Задачи (I) и (II) относительно неизвестных функций $E(t, z)$ и $f(t, z)$ эквивалентны. Для этого достаточно однородности начальных условий и равенства нулю функции $F(t)$ при $t \leq 0$. Действительно, рассмотрим задачи (I) и (II) в линейном случае, при $E = 0$ в кинетическом уравнении. Решение кинетических уравнений имеет следующий вид (здесь Θ – функция Хевисайда):

$$f = \frac{I}{v} \delta(p - p_0) \Theta(t - z/v) F(t - z/v) \Theta(z), \quad f_i = \delta(p) \delta(z) \int_0^t du F(u). \quad \text{Тогда}$$

$$\rho = e \left(\delta(z) \int_0^t du F(u) - \frac{F(t - z/v_0)}{v_0} \Theta(t - z/v_0) \Theta(z) \right), \quad j = -e \Theta(t - z/v_0) F(t - z/v_0) \Theta(z).$$

Решение уравнения $\partial E / \partial t + 4\pi j = 0$ с нулевым начальным условием:

$$E = 4\pi e \Theta(z) \int_0^t dt' \Theta(t' - z/v_0) F(t' - z/v_0) = 4\pi e \Theta(z) \Theta(t - z/v_0) \int_0^{t-z/v_0} du F(u).$$

Уравнение $\partial E / \partial z = 4\pi \rho$ с граничным условием $E(t, -\infty) = 0$ имеет такое же решение:

$$\begin{aligned} E &= 4\pi e \int_{-\infty}^z dz' \left(\delta(z') \int_0^t du F(u) - \frac{I}{v_0} \Theta(t - z'/v_0) F(t - z'/v_0) \Theta(z') \right) = \\ &= 4\pi e \Theta(z) \left(\int_0^t du F(u) - \Theta(z - v_0 t) \int_0^t du F(u) - \Theta(v_0 t - z) \int_{t-z/v_0}^t du F(u) \right) = \\ &= 4\pi e \Theta(z) \Theta(v_0 t - z) \int_0^{t-z/v_0} du F(u) \end{aligned}$$

Эквивалентность решений задач (I) и (II), в том числе для линейного случая, позволяет строить асимптотическое разложение решения нелинейной задачи, учитывающее эффект самосогласования как малую поправку, только для уравнения (II). Это возможно, поскольку функция распределения ионов дает вклад только в нулевой член разложения.

2. Математическая формализация задачи

В дальнейшем функции времени предполагаются, если не оговорено противное, продолженными нулем на интервал $(t < 0)$, а функции от z – на интервал $z < 0$. Аргументы функции опускаются при записи, если это не приводит к недоразумению. Обозначение производной штрихом или точкой означает дифференцирование по всему аргументу функции.

Введем безразмерные функции и переменные $t = \tilde{t}\tau$, $\mathbf{r} = \tilde{\mathbf{r}}\rho$, $p = \tilde{p}\pi$, $f = \tilde{f}\varphi(\tau, \rho, \pi)$, $F = \tilde{F}\Phi(\tau, \rho, \pi)$, $E(t, \mathbf{r}) = \tilde{E}E(\tau, \rho)$, $J = \tilde{J}J(\tau, \rho)$, $S_{\text{ext}} = Q_{\text{ext}}/Q$.

Выберем размерные коэффициенты следующим образом. Сохраним для безразмерных переменных две связи – между скоростью и импульсом и между координатой и временем при распространении со скоростью света. Получим следующую систему соотношений $L = \tilde{r}$, или $T = \tilde{t}$, $L = cT$, $P = \tilde{p} = m_0 c$, $\tilde{Q} = 2N/(LTP)$, $\tilde{f} = 2N/(LP)$, $\tilde{J} = -|e|N/T$, $\tilde{E} = 4\pi|e|N$.

Приведенная таким образом к безразмерному виду исходная система (I) приобретает вид:

$$\varphi'_\tau + v\varphi'_\zeta - \varepsilon E(\tau, \zeta)\varphi'_\pi = \Phi(\tau)\delta(\zeta)\delta(\pi - \pi_0) \equiv S_{\text{ext}}, \quad (1)$$

$$(E(\tau, \zeta))'_\tau = \int_0^\infty v(\pi)\varphi(\tau, \zeta, \pi)d\pi, \quad (2)$$

где ε можно выразить как через начальные данные, так и через отношение плазменной частоты $\omega_{\text{плаз}}^2 = 4\pi r_e c^2 n$ и частоты источника $\nu_{\text{ист}} = 1/T$:

$$\varepsilon = 4\pi r_e L N = \frac{\nu_0}{c} \left(\frac{\omega_{\text{плаз}}}{\nu_{\text{ист}}} \right)^2$$

Первой задачей анализа системы (1)-(2) будет получение явных формул для $E(\tau, \chi_0)$, где $\chi_0 = \tau - \zeta/\nu_0$, путём разложения его в ряд по степеням ε , что сведёт дальнейшее решение уравнения (1) к решению классического линейного уравнения первого порядка. При получении формул для $E(t, z)$, нам потребуются производные всех порядков от временной компоненты источника $F(t)$, которую будем считать действительной аналитической функцией.

3. Алгоритм разложения решения системы по параметру ε

Кинетическое уравнение для начального приближения уравнения (1) имеет вид: $(\varphi_0)'_{\tau} + \nu(\varphi_0)'_{\zeta} = S_{\text{ext}} \equiv S_0$. Решение задачи в нулевом приближении:

$$\varphi_0 = \frac{1}{\nu} \Phi(\tau - \zeta/\nu_0) \delta(\pi - \pi_0); \quad J_0 = \Phi(\tau - \zeta/\nu_0); \quad E_0(\chi_0) = \int_0^{\chi_0} \Phi(\eta) d\eta.$$

Далее удобно придерживаться следующих обозначений: $\chi = \tau - \zeta/\nu$, $\tilde{\chi}_0 = \tau - (\zeta - \nu(\tau - \tilde{\tau}))/\nu_0$, $\tilde{\chi} = \chi$. Пусть $\varphi = \sum_{p=0}^{\infty} (-\varepsilon)^p \varphi_p$; $E = \sum_{q=0}^{\infty} (-\varepsilon)^q E_q$.

Разложив по степеням ε произведение $\varepsilon E \varphi'_{\pi}$ и приравняв друг другу коэффициенты при всех последовательных степенях, получим бесконечную серию уравнений, зацепленных правыми частями – последовательными источниками частиц, испытавших данное число взаимодействий. Начальное уравнение цепочки (с $S_0 = S_{\text{ext}}$ для φ_0) уже выписано. Левая часть у всех последующих уравнений одинакова. Правые части их имеют следующий вид: $S_{n+1} = \sum_{m=0}^n E_{n-m} (\varphi_m)'_{\pi}$.

Тождественность операторов $\hat{A}_n$, порождающих все уравнения, позволяет следующим образом записать их решения φ_n , в операторной форме: $\varphi_{n+1} = -\sum_{m=0}^n \hat{I}_n \hat{X}_n E_m \hat{D}_{\pi} \varphi_{n-m}$, где $\hat{I}_n = \int_0^{\tau} \bullet d\tau_{n+1}$, $\hat{X}_n$ – это оператор сдвига по характеристике (невозмущённого) уравнения переноса $\zeta \rightarrow \zeta - \nu(\tau - \tau_{n+1})$, E_m – это оператор умножения на соответствующую функцию, а $\hat{D}_{\pi} = \frac{\partial \bullet}{\partial \pi} \equiv \gamma^3(\nu) \frac{\partial \bullet}{\partial \nu}$. Таким образом, в развёрнутой записи имеем соотношение

$$\hat{X}_n \hat{D}_{\pi} \varphi_{n-m} = \hat{X}_n (\varphi_{n-m}(\tau, \zeta, \pi))'_{\pi} = (\varphi_{n-m}(\tau, \zeta - \nu(\tau - \tau_n), \pi))'_{\pi}.$$

В последней формуле дифференцирования по $d\pi$ отмеченного $\underline{\nu} = \nu(\pi)$ не производится. На этом пути получаются весьма громоздкие явные выражения для поправок φ_n при малых n [1]. Из них для $J_1(\tau, \chi_0)$ и $E_1(\tau, \chi_0)$ получаются выражения:

$$J_1(\tau, \chi_0) = (\nu'_0 / 2\nu_0) (\tau^2 E_0 \Phi)'_{\tau}; \quad E_1(\tau, \chi_0) = \hat{M}^{-1} [J_1(\tau, \chi_0)] = (\nu'_0 / 2\nu_0) (\tau^2 E_0 \Phi).$$

В результате все поправки высших порядков выразятся как полиномы от τ с коэффициентами, зависящими только от $E_0(\chi_0)$ и её производных. В работе [1] получены явные формулы для трёх первых поправок к $E_0(\chi_0)$:

$$E_2(\tau, \chi_0) = \left[(\nu_0'' / \nu_0) (\tau^3 / 6) (E_0^3 / 3)'_{\tau} + 3(\nu_0' / \nu_0)^2 (\tau^4 / 24) (E_0^3 / 3)''_{\tau} \right], \quad E_3(\tau, \chi_0) =$$

$$\left[(\nu_0''' / \nu_0) (\tau^4 / 4!) (E_0^4 / 4)'_{\tau} + 10(\nu_0'' \nu_0' / \nu_0^2) (\tau^5 / 5!) (E_0^4 / 4)''_{\tau} + 15(\nu_0' / \nu_0)^3 (\tau^6 / 6!) (E_0^4 / 4)'''_{\tau} \right]$$

Естественно предположить, что и общая формула для поправки к $E(\tau, \chi_0)$ порядка n будет иметь аналогичный вид:

$$E_n(\tau, \chi_0) = \sum_{k=l}^n \left(\frac{\tau^{n+k}}{(n+k)!} \right) \left(\frac{E_0^{n+l}(\chi)}{(n+l)} \right)_{\chi_0}^{(n)} Z_n^k(\vec{\nu}),$$

где $Z_n^k(\vec{\nu})$ – полином степени k от $\nu_0', \dots, \nu_0^{(n-k+1)}$, на что указывает показатель степени ν_0 в знаменателях его коэффициентов. То, что получатся именно полиномы, а не мономы, как при малых n , угадывается при анализе характера упрощений в полученных формулах при переходе от функции распределения к току электронов. Уже при $n = 4$ в коэффициент при $(\tau^6 / 6!) (E_0^5(\chi_0) / 5)''_{\chi}$, войдёт сумма $A \nu_0' \nu_0''' / \nu_0^2 + B \nu_0'' \nu_0'' / \nu_0^2$ с наперед неизвестными значениями A и B .

4. Операторы Власова порядка n

Обобщение полученных при малых значениях n результатов на поправки к полю высших порядков проводится по той же схеме явного вычисления, но требует дополнительных рассуждений в новых обозначениях. Обозначение ν , использованное выше, естественно заменить на введённые конструкции $\hat{I}\hat{X}E_{n-l}\hat{D}_{\pi}$ и $\hat{I}\hat{X}\gamma^3E_{n-l}\hat{D}_{\nu}$, обозначив их через $\hat{W}_n$ и $\hat{V}_n$ и назвав соответственно импульсным и скоростным операторами Власова порядка n .

Записав нестрого, но наглядно с помощью таких операторов начальный отрезок разложения поля E в ряд по ε , получим следующее выражение полного поля E через невозмущённое $-E_0$:

$$E = E_0 + \varepsilon \hat{V}_1 E_0 + \varepsilon^2 (\hat{V}_2 + \hat{V}_1^2) E_0 + \varepsilon^3 (\hat{V}_3 + \hat{V}_2 \hat{V}_1 + \hat{V}_1 \hat{V}_2 + \hat{V}_1^3) E_0 + \dots$$

$$\text{Более точно: скобка у } \varepsilon^n \text{ такова: } \sum_{k=l}^n \int_0^{\infty} \sum_{i_1+j_1+i_2+j_2+\dots+i_n+j_n=n; i_1+i_2+\dots+i_k=k} (\hat{V}_{i_1}^{j_1} \cdot \hat{V}_{i_2}^{j_2} \cdot \dots \cdot \hat{V}_{i_k}^{j_k}) \varphi_0 \Big) \nu d\pi, \text{ и}$$

аналогично для φ , но без интегрирования по всем импульсам.

Выражения в скобках содержат по $2^{(n-l)}$ слагаемых. Последнюю из них $-E_3$ и все последующие можно разбить на q компонент как минимум двумя способами с различными смысловыми интерпретациями слагаемых.

Во-первых, $E_q = \sum_{m=0}^{q-1} E_q^m$, где индекс m соответствует номеру φ_m от которого берётся производная по импульсу. В этом случае получаем:

$$E = E_0 + \varepsilon \hat{V}_1 E_0 + \varepsilon^2 ((\hat{V}_2 E_0) + (\hat{V}_1^2 E_0)) + \varepsilon^3 ((\hat{V}_3 E_0) + (\hat{V}_2 \hat{V}_1 E_0) + (\hat{V}_1 \hat{V}_2 E_0 + \hat{V}_1^3 E_0)) + \dots,$$

что означает различие взаимодействий частиц с полями различных порядков (индексов).

Во-вторых, то же разложение записывается в симметричной форме:

$$E = E_0 + \varepsilon \hat{V}_1 E_0 + \varepsilon^2 ((\hat{V}_2 E_0) + (\hat{V}_1^2 E_0)) + \varepsilon^3 ((\hat{V}_3 E_0) + (\hat{V}_2 \hat{V}_1 + \hat{V}_1 \hat{V}_2) E_0 + (\hat{V}_1^3 E_0)) + \dots, (3)$$

где учитывается только общее число взаимодействий частиц с полем.

Первая форма записи разложения позволяет (по схеме представления операторов Власова, приведенной в [1]) последовательно находить интегральные соотношения между различными компонентами поля E_q^m :

$$E_{n+1}^0 = \frac{v_0'}{v_0} \int_0^\tau E_n(\tilde{\tau}, \tau - \zeta / v_0) E_0'(\tau - \zeta / v_0)(\tau - \tilde{\tau}) d\tilde{\tau} \text{ и так далее рекуррентно.}$$

5. Общая формула для поправки к полю порядка n

Вторая форма записи разложения (3) позволит найти общую формулу для E_n . Рассмотрим операторное представление:

$$E = E_0 + \sum_{n=0}^{\infty} (-\varepsilon)^n \sum_{k=l}^n \int_0^\infty \left(\sum_{i_1+i_2+\dots+i_k=k}^{i_1 j_1 + i_2 j_2 + \dots + i_n j_n = n} (\hat{V}_{i_1}^{j_1} \cdot \hat{V}_{i_2}^{j_2} \cdot \dots \cdot \hat{V}_{i_k}^{j_k}) \varphi_0 \right) v d\pi, \quad (4)$$

и аналогично для φ , но без интегрирования по всем импульсам.

Заметим, что в каждой внутренней сумме присутствует C_n^k слагаемых, поскольку операторы Власова различных порядков не коммутируют. То есть, φ_n является суммой δ -функции и её n первых производных с соответствующими коэффициентами (в которые входят E_v для $v = 1, \dots, (n-1)$). Такое представление φ неудовлетворительно, поскольку необозримо. Для того чтобы избежать подобной ситуации, надо упростить формулу (4): взять все интегралы, входящие в определение операторов Власова. При таком упрощении формулы (4) оказывается (см. [1]), что коэффициенты при последовательных степенях τ^k , зависящие от v и её производных по $d\pi$, удовлетворяют следующему рекуррентному соотношению:

$$Z_n^k(\vec{v}) = \hat{\Delta} Z_{n-1}^k(\vec{v}) + (n-1+k) v' Z_{n-1}^{k-1}(\vec{v}).$$

Здесь оператор $\hat{\Delta} = v''(\partial \bullet / \partial v') + v'''(\partial \bullet / \partial v'') + \dots$

С учетом вычисленных заранее поправок малых порядков это означает, что получившийся для описания поправки порядка n многочлен с символической переменной $\tau^k (E_0^{n+1})^{(k)} / (n+1)(n+k)!$ совпадает с полиномом $Z_{n+1}(\vec{v})$ для производных от обратных функций [10]. Смещение его порядка на единицу, вызвано снятием одного дифференцирования по $d\tau$ при решении уравнения Максвелла. По той же причине внутренняя его переменная – это не скорость v , а интеграл от неё по импульсу, то есть энергия $\omega = \omega(v)$. Полиномы $Z_n(\vec{v})$ выражаются через полиномы Белла, которые имеют явную формулу. Таким образом, приходим к одному из вариантов формулы Бруно [11].

Суммируя полученные при выводе формул (3)-(4) результаты, приходим к завершающей формуле (5) для записи решения системы (1)-(2) в замкнутом виде.

$$E(\tau, \zeta) = E_0(\tau - \zeta / v_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\varepsilon)^n}{n+1} \sum_{\pi(n)} \frac{\tau^{n+k} (E_0^{n+1})^{(k)}}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_n!} \left(\frac{v_0'}{2! v_0} \right)^{k_1} \cdot \dots \cdot \left(\frac{v_0^{(n)}}{(n+1)! v_0} \right)^{k_n} \quad (5)$$

Здесь сокращение записи суммы $\sum_{\pi(n)} f(\vec{n})$ используется для обозначения её по всем разбиениям натурального параметра n : $\sum_{k=1}^n \left(\sum_{\vec{k}: k_1+k_2+\dots+k_n=k}^{1k_1+2k_2+\dots+nk_n=n} f(\vec{n}) \right)$ (подробнее см. [10], с.173).

Полезно сравнить полученную для решения системы (1)-(2) формулу (5) с формулой Тейлора для разложения сложной функции в степенной ряд, с использованием формулы Бруно для n -производной сложной функции:

$$E(v(-\varepsilon)) = E(v_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\varepsilon)^n}{n!} \sum_{\pi(n)} \frac{E_0^{(k)} n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_n!} \left(\frac{v_0'}{1!} \right)^{k_1} \cdot \dots \cdot \left(\frac{v_0^{(n)}}{n!} \right)^{k_n}$$

6. Классическое и релятивистское решения уравнения Власова

Приведём два частных случая общей формулы (5). Первый соответствует классической трактовке уравнения, когда все производные скорости по импульсу, кроме первой, равны нулю. Второй использует релятивистское соотношение $v^2 = \pi^2/(1+\pi^2) \equiv \pi^2/\omega^2$. (подробнее см. [12], сс. 32-37):

$$E(\tau, \zeta) = E_0(\chi_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon \tau^2}{2} \right)^n \frac{E_0^{n+1} \zeta}{(n+1)!}, \quad (6)$$

$$E = E_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon \tau}{2\gamma_0} \right)^n \sum_{k=1}^n \left(\frac{\tau}{\gamma_0^2} \right)^k \frac{p_n^k(v_0)}{k!} \left(\frac{E_0^{n+1}}{n+1} \right)_{\zeta}^{(k)}. \quad (7)$$

Здесь $\gamma^2 = 1 - v^2$. Величины $p_n^k(v_0)$ вычисляются следующим образом. Для $k=1$

имеем $p_n^1(v_0) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} v_0^{n-1-2j} \frac{(-1)^j}{n} C_n^j \cdot C_{2n-2j}^{n+1}$, а для $k > 1$ по индукции:

$$p_n^k(v_0) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor} v_0^{n-k-2j} \frac{(-1)^j k}{n} C_n^j \cdot C_{2(n-j)}^{n+k} = (1-v_0^2)^{-\frac{k}{2}} P_{n-k}^k(v_0) c_{n,k} = c_{n,k} \frac{\partial^k P_m(v)}{(\partial v)^k} \Big|_{v=v_0}, \quad \text{где}$$

$m = n-k$, $P_m(v)$ – многочлены Лежандра, а $c(n,k) = 2^{n-k} k(m-1)!/n!$

Следовательно [13], полиномы $p_n^k(v)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению: $(1-v^2)y'' - 2(k+1)v y' + (n-k)(n+k+1)y = 0$.

Формулу (5) можно записать, введя энергию ω вместо скорости v , а производные от E_0 брать не по $d\tau$, но по $d\zeta$. Также можно провести дополнительное дифференцирование по $d\zeta$ и индуктивно свернуть сумму по n при постоянном k . В результате получим упрощение ранее полученной формулы, аналогичное ряду Бюрмана-Лагранжа для пары функций $\omega(\pi)$ и $E_0(\chi_0)$ (здесь $x = \varepsilon \tau E_0 / 2\gamma_0$): $-v_0 E'_\zeta - \Phi =$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\tau \gamma_0^{-2})^k}{k!} \left[\Phi \sum_{n=k}^{\infty} p_n^k(v_0) \left(\frac{\varepsilon \tau E_0}{2\gamma_0} \right)^n \right]_{\zeta}^{(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tau^k}{k!} \left[\Phi \left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4xv_0 + 4x^2}}{2xv_0} - 1 \right)^k - 1 \right]_{\zeta}^{(k)}$$

Ряды (6) и (7) и их общий случай (5) формально не являются рядами Бюрмана-Лагранжа для вычисления значений аналитической $f(z)$ при заданной и также аналитической функции $w = w(z)$ ([3], с.141). Требуемая для этого подстановка $z = 0$ приводит, в силу граничных условий, к тривиальному равенству. Тем не менее, их, как и сами ряды Бюрмана-Лагранжа, удаётся интерпретировать как решения уравнений $z = z_0 + w \cdot f(z)$ при надлежащем выборе z, w, z_0, f . Такая их трактовка весьма важна ввиду следующих двух обстоятельств.

Во-первых, ряд (5) вполне может оказаться расходящимся при достаточно больших значениях ε . Однако, решение исходной системы (1)-(2) обязано существовать и в этом случае. Классическим примером с аналогичной проблемой оценки радиуса сходимости является задача Кеплера ([3], с.148).

Во-вторых, в настоящее время в связи с ростом возможностей ЭВМ уже нельзя однозначно говорить, что легче: представлять ли корень исследуемого уравнения (например, $z = \cos z$) рядом Бюрмана-Лагранжа или же напрямую решать данное уравнение. Грубо говоря, многие расчётные формулы XIX – начала XX веков должны лучше читаться сейчас справа налево.

Заключение

I. Одномерное уравнение Власова для плоского монохроматического потока электронов в самосогласованном электрическом поле решено относительно электрического поля. Решение этой модельной, неустойчивой задачи получено в виде ряда по производным от степеней решения соответствующей линейной задачи:

$$E(\tau, \chi) = E_0(\chi) + \sum_{n=1}^{\infty} (-\varepsilon \tau)^n \sum_{\pi(n)} \frac{(-\tau / v_0)^k (\Phi E_0^n)_{\chi}^{(k-1)}}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_n!} \prod_{j=1}^n \left(\frac{v_0^{(j)}}{(j+1)!} \right)^{k_j}$$

и свёрнуто до обычной суммы, аналогичной ряду Бюрмана-Лагранжа для ω, E_0 :

$$\begin{aligned} -v_0 \frac{\partial E}{\partial \zeta} &= \Phi + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tau^k}{k!} \left[\Phi \left(\frac{\omega(\pi_0) - \omega(\pi_0 - \varepsilon \tau E_0)}{v_0 \varepsilon \tau E_0} - 1 \right)^k \right]_{\zeta}^{(k)} = \\ &= \Phi + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tau^k}{k!} \left[\Phi \left(\int_{\pi_0 - \varepsilon \tau E_0}^{\pi_0} \frac{v(\eta) - v_0}{v_0 \varepsilon \tau E_0} d\eta \right)^k \right]_{\zeta}^{(k)} \end{aligned}$$

Решение применимо для априорных оценок точности асимптотических методик решения трёхмерных самосогласованных задач радиационной генерации электромагнитного поля в сложных средах.

II. Если требуется определить только электрическое поле $E(\tau, \chi_0)$, то задача (1)-(2) – система Власова-Максвелла – может быть заменена эквивалентной ей системой уравнений:

$$E(\tau, \chi_0) = E_0(y(\tau, \chi_0)),$$

где для определения $y(\tau, \chi_0)$ служит не дифференциальное уравнение:

$$2v_0(\chi_0 - y) = \varepsilon \tau^2 E_0(y)$$

в классическом,

$$1 - \varepsilon E_0(y) \cdot (y - \chi_0 + \tau) / \gamma_0 = (1 - 2v_0 \varepsilon \tau E_0(y) / \gamma_0 + (\varepsilon \tau E_0(y) / \gamma_0)^2)^{0.5}$$

$$\text{в релятивистском и} \\ v_0 \varepsilon E_0(y) \cdot (y - \chi_0 + \tau) = \omega(\pi_0) - \omega(\pi_0 - \varepsilon \tau E_0(y))$$

в общем ($\omega = \omega(\pi)$) случаях.

III. Основным приложением полученных формул (5)-(6), решающих систему Власова-Максвелла является анализ динамики быстрых электронов. Но это далеко не единственная область их возможного применения. Электронные ливни, рассматривавшиеся в [14], являются характерным примером общих ветвящихся случайных процессов, к анализу которых при наличии детерминированных обратных связей – нелинейное слагаемое в уравнении Власова – можно применять полученные результаты. В частности, описание процесса сохранения и уничтожения сведений (исторических источников) формализуется системой, аналогичной рассмотренной (1)-(2), в которой, однако, роль пространственной переменной z играет древность источника. Полученное (неустойчивое) её решение (5) достаточно хорошо ([15], сс. 162-165) описывает (тоже неустойчивую) модель с широко известной формулой: «у истории нет сослагательного наклонения». Отметим также, что линейная задача, аналогичная рассмотренной, но с газокINETическим оператором (без власовской нелинейности) изучалась в работе ([16], pp. 181-189) при исследовании динамики популяций. В ней роль пространственной переменной играл возраст клетки в популяции.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Н.С. Келлин и др.* Об одномерной модельной задаче для уравнения Власова - I. – М., препринт ИПМ РАН № 67, 2003.
2. Экспериментальная ядерная физика. Под ред. Э. Сегре. М., ИЛ, 1955.
3. *А. Гурвиц, Р. Курант.* Теория функций. М.: «Наука», 1968.
4. *Р. Курант.* Уравнения с частными производными. М.: «Мир», 1964
5. *С.М. Фейнберг, С.Б. Шихов, В.Б. Троянский.* Теория ядерных реакторов. М.: «Атомиздат», т.1, 1978.
6. *Н.С. Келлин.* Условно стационарные начально-краевые задачи в динамике реакторов. – М., ДАН СССР, т. 293, № 2, 1987.
7. *А.А. Власов.* Теория многих частиц. М.-Л., ГИТТЛ, 1950.
8. *А.А. Арсеньев.* Лекции по кинетической теории. М.: «Наука», 1992.
9. *В.В. Веденяпин.* Кинетические уравнения Больцмана и Власова. М., ФИЗМАТЛИТ, 2001.
10. *Дж. Риордан.* Комбинаторные тождества. М.: «Наука», 1982.
11. *И.С. Градштейн, И.М. Рыжик.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Под ред. Ю.В. Геронимуса и М.Ю. Цейтлина. М., ГИФМЛ, 1963.
12. *Н.С. Келлин.* Система уравнений Власова-Максвелла в плоской геометрии. – М., Вестник РосНОУ, сер. «Естествознание, математика, информатика», вып. 4, 2004.
13. *Э. Камке.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., ИЛ, 1951.
14. *Р. Харрис.* Теория ветвящихся случайных процессов. М.: «Мир», 1966.
15. *Н.С. Келлин, Н.Н. Митина, И.С. Неретин.* Ветвящиеся случайные процессы и их приложения к хронографии. – IV Международный форум по информатизации. МФИ-97, М., 1997.
16. *М. Rotenberg.* Transport Theory for Growing Cell Population. – J.Theor. Biol., v.103, No 2, 1983.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Редчиц В.П., Яламов Ю.И.	
Термофорез несферической частицы в гидродинамическом режиме	3
Редчиц В.П., Яламов Ю.И.	
Температурное поле в анизотропной среде с заданной асимптотикой на «бесконечности»	9
Редчиц В.П., Яламов Ю.И.	
Скорость изменения массы частицы, ассоциированная с фазовым переходом на поверхности	12
Яламов Ю.И., Редчиц В.П.	
Влияние внешних границ на движение частицы в неизотермической жидкости	16
Чausов Д.Н., Дадиванян А.К.	
Влияние ближнего ориентационного порядка на процесс набухания макромолекулярных клубков	22
Богданов Д.Л., Геворкян Э.В., Кузнецов В.С.	
Релаксация ориентации нематического жидкого кристалла Н8 и его раствора в немезогонном растворителе при наложении магнитного поля	30
Келлин Н.С., Паротькин С.В.	
Одномерная задача для системы уравнений Власова-Максвелла	36

ВЕСТНИК
Московского государственного
областного университета

Серия
«Физика-Математика»

№ 1

Подписано в печать: 5.02.2008.

Формат бумаги 60x86 /₈. Бумага офсетная. Гарнитура «NewtonC».

Уч. — изд. л. 4,5. Усл. п. л. 3. Тираж 500 экз. Заказ № 14.

Издательство МГОУ
105005, г. Москва, Радио, д. 10а.