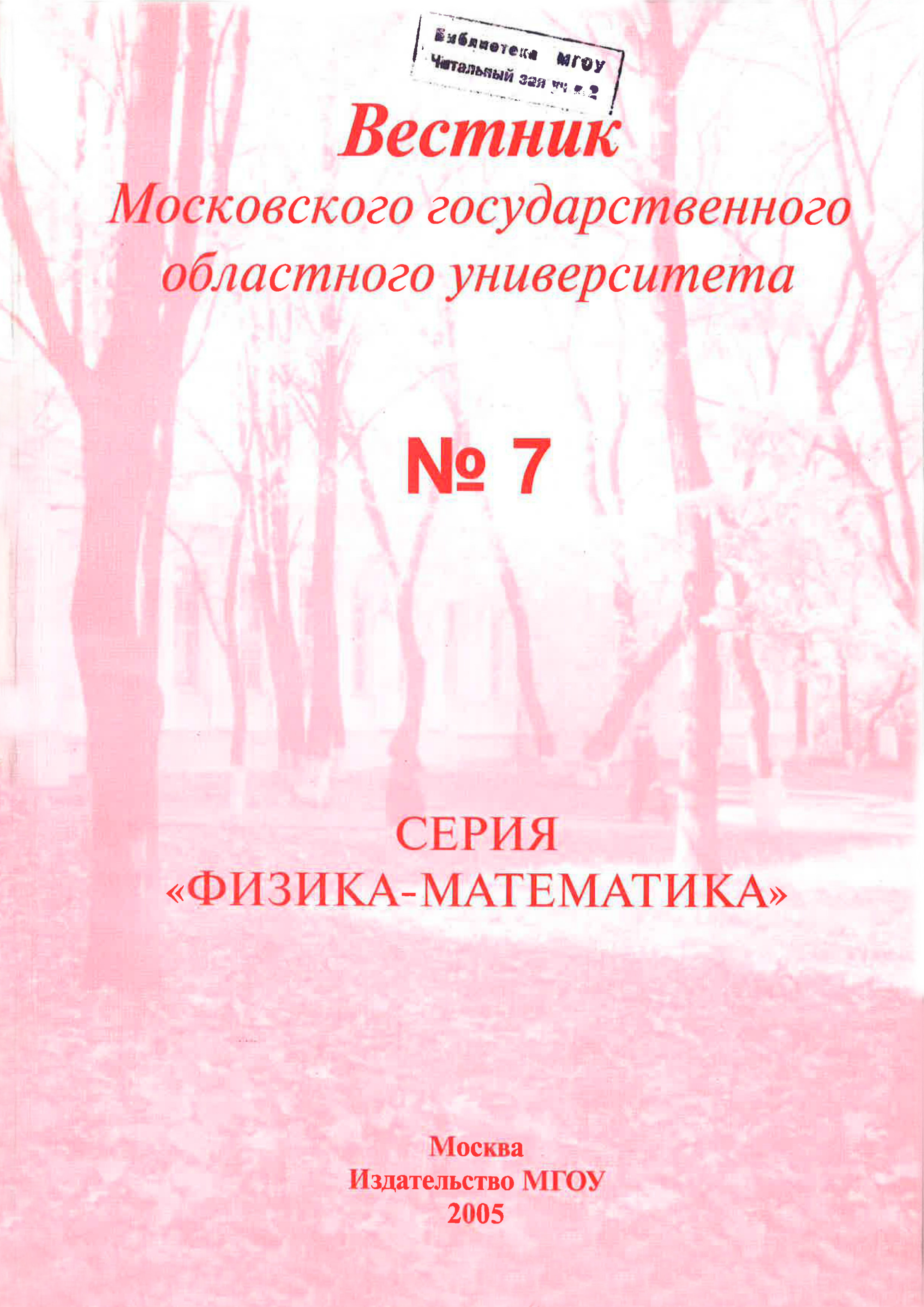


Вестник

Московского государственного областного университета

№ 7

СЕРИЯ «ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА»

Москва
Издательство МГОУ
2005

ВЕСТНИК

Московского государственного
областного университета

№7

СЕРИЯ
«ФИЗИКА – МАТЕМАТИКА»

Москва
Издательство МГОУ
2005

Вестник
Московского государственного областного университета

В «Вестнике» могут публиковаться статьи не только работников МГОУ, но и других образовательных учреждений.

Межсерийный порядковый номер Вестника МГОУ - 15

ISBN 5-7017-0799-7

Предисловие

В настоящем «Вестнике» МГОУ, серии «Физика – Математика»,№ 7, ч.1 (2005г.) публикуются работы по физике, математике и методике их преподавания.

В «Вестнике» могут публиковаться статьи не только работников МГОУ, но и других образовательных учреждений.

СОДЕРЖАНИЕ

С.В. АГЕЕВ, А.В. ЛАТЫШЕВ

СКОРОСТЬ ДИФФУЗИИ ЛЕГКОЙ КОМПОНЕНТЫ БИНАРНОГО ГАЗА

В работе [1] решена аналитически задача о поведении бинарного газа вблизи поверхности. Предполагалось, что масса молекулы одной из компонент газа много меньше массы молекулы другой компоненты, и рассматривалась диффузия легкой компоненты относительно тяжелой. Была построена функция распределения легкой компоненты.

В настоящей работе продолжается рассмотрение этой задачи. Построено распределение массовой скорости легкой компоненты в полупространстве, найдены точные выражения массовой скорости на стенке и вдали от нее (на границе слоя Кнудсена).

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Пусть бинарный газ занимает полупространство x > 0 над плоской неподвижной стенкой, лежащей в плоскости x = 0. Предположим, что скорость диффузии параллельна стенке и направлена вдоль оси y и выполняются условия линеаризации:

$$\sqrt{\beta}U_y(x) << 1, \qquad G_n = \frac{d\ln n(y)}{dy} << 1. \tag{1.1}$$

В [1] показано, что если искать функцию распределения в виде

$$f = f_0(1+\varphi+G_n y), \tag{1.2}$$

то БГК — уравнение Больцмана для функции φ запишется в виде неоднородного уравнения:

$$v_x\frac{\partial\varphi}{\partial x} + v_y G_n = \nu_{11}\left[2\beta v_y U_y(x) - \varphi\right] - \nu_{12}\varphi. \tag{1.3}$$

В уравнении (1.3) ν_{11} — частота столкновений легких молекул между собой, ν_{12} — частота столкновений легких молекул с тяжелыми, $U_y(x)$ — величина массовой скорости легкой компоненты вдоль оси y, $\beta = \dfrac{2}{mkT}$, m — масса молекулы легкой компоненты, k — постоянная Больцмана, T — температура газа, считающаяся постоянной; f_0 — абсолютный максвеллиан,

$$f_0 = n_0\left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{3/2}\cdot\exp(-\beta v^2), \; G_n = \frac{1}{n_0}\cdot\frac{dn}{dy} — \tag{1.4}$$

градиент логарифма концентрации легкой компоненты, n(y) — концентрация легкой компоненты, причем $n(y) = n_0(1+G_n y)$,

$$U_y(x)=\frac{1}{n}\int v_y f d^3v=\left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{3/2}\int v_y \exp(-\beta v^2)\varphi\cdot d^3v. \tag{1.5}$$

Будем искать функцию φ в виде:

$$\varphi(x,\vec{v})=\sqrt{\beta}\cdot v_y\cdot\psi(x,\sqrt{\beta}\cdot v_x). \tag{1.6}$$

Далее, уравнение (1.3) можно переписать в виде:

$$C_x\frac{\partial\varphi}{\partial x}+G_n=2\sqrt{\beta}\cdot\nu_{11}\cdot U_y(x)-\sqrt{\beta}(\nu_{11}+\nu_{12})\psi(x,\mu), \tag{1.7}$$

где $C_x=\sqrt{\beta}\cdot v_x$, $\vec{C}=\sqrt{\beta}\vec{v}$ - безразмерная скорость молекул,

$$U_y(x)=\sqrt{\beta}\cdot U_y(x)=\pi^{3/2}\cdot\int\exp(-C^2)C_y^2\psi(x,C_x)d^3C=$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\mu^2)\psi(x,\mu)d\mu \tag{1.8}$$

– безразмерная массовая скорость, $\mu=C_x$.

Обозначим далее $C=\frac{\nu_{11}}{\nu_{11}+\nu_{12}}=\frac{\nu_{11}}{\nu}<1$, $\nu=\nu_{11}+\nu_{12}$, и введем новую координату $x'=\sqrt{\beta}\cdot\nu\cdot x$. Тогда уравнение (1.7) можно представить в виде:

$$\mu\frac{\partial\psi}{\partial x'}+\psi(x',\mu)+\frac{G_n}{\nu\sqrt{\beta}}=2C\cdot U_y(x'), \tag{1.9}$$

или, согласно (1.8) представим (1.9) –
в стандартном для теории переноса в виде:

$$\mu\frac{\partial\psi}{\partial x}+\psi(x,\mu)+\frac{G_n}{\nu\sqrt{\beta}}=C\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\mu'^2)\psi(x,\mu')d\mu'. \tag{1.10}$$

Нетрудно проверить, что уравнение (1.10) имеет частное решение вида $\psi_*(x,\mu)=A$, где

$$A=-\frac{G_n}{\sqrt{\beta}\cdot\nu(1-C)}. \tag{1.11}$$

Граничные условия к уравнению (1.10) согласно [1] в случае полностью диффузного отражения молекул от стенки имеют вид:

$$\psi(0,\mu)=0,\ \ \mu>0. \tag{1.12}$$

$$\psi(\infty,\mu)=A,\ \ \mu<0. \tag{1.13}$$

Далее, будем рассматривать однородное кинетическое уравнение

$$\mu\frac{\partial\psi}{\partial x}+\psi(x,\mu)=C\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\mu'^2)\psi(x,\mu')d\mu', \tag{1.14}$$

соответствующее неоднородному уравнению (1.10).

Отметим, что величина А равна

$$A=-\frac{G_n}{\sqrt{\beta}\nu_{12}}=-\frac{1}{\sqrt{\beta}n_0\nu_{12}}\cdot\left(\frac{dn}{dy}\right).$$

2. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Покажем, что решение задачи (1.10) - (1.13) единственным образопредставимо в виде разложения по соответствующим функциям характеристического уравнения, соответствующего уравнению (1.7):

$$\psi(x,\mu)=A+\int_0^\infty \exp(-\frac{x}{\eta})\Phi_C(\eta,\mu)a_C(\eta)d\eta\,, \tag{2.1}$$

где Φ_C — собственная функция характеристического уравнения, соответствующего уравнению (1.14).

Разложение (2.1) понимается в классическом смысле:

$$\psi(x,\mu)=A+\frac{c}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\eta a_c(\eta)\exp\left(\frac{-x}{\eta}\right)d\eta}{\eta-\mu}+\exp\left(\mu^2-\frac{x}{\mu}\right)\lambda_c(\mu)a_c(\mu);$$

$$\Phi_C(\eta,\mu)=\frac{C}{\sqrt{\pi}}\eta\cdot P\frac{1}{\eta-\mu}+\exp(-\eta^2)\lambda_C(\eta)\cdot\delta(\eta-\mu), \tag{2.2}$$

$\lambda_C(z)$ — дисперсионная функция задачи, $\lambda\ (z)=1-C+\lambda_0(z)$, $\lambda_0(z)$ — дисперсионная функция Черчиньяни,

$$\lambda_0(z)=1+\frac{z}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(-\tau^2)}{\tau-z}d\tau\,.$$

Разложение (2.1) автоматически удовлетворяет граничному условию (1.13). Подставляя разложение (2.1) в граничное условие (1.12) и учитывая (2.2), приходим к сингулярному интегральному уравнению с ядром Коши [4] :

$$\frac{\tilde{N}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\eta a_C(\eta)}{\eta-\mu}d\eta+\exp(\mu^2)\lambda_C(\mu)a_C(\mu)+A,\ \ \mu>0\,. \tag{2.3}$$

Введем вспомогательную функцию:

$$N_C(z)=\frac{\tilde{N}}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\frac{\eta a_C(\eta)d\eta}{\eta-z}\,, \tag{2.4}$$

для которой, согласно формулам Сохоцкого [4],

$$N_C^+(\eta)-N_C^-(\mu)=2\sqrt{\pi}\cdot i\cdot C\cdot\mu a_C(\mu),\ \ \mu>0\,. \tag{2.5}$$

$$\frac{1}{2}\left[N_c^+(\mu)+N_c^-(\mu)\right]=N_c(\mu),\qquad \mu>0.$$

$N(\mu)$ - сингулярный интеграл, понимаемый в смысле главного значения: $N_c(\mu)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^\infty\frac{\eta a_c(\eta)}{\eta-\mu}d\eta,\quad \mu>0.$ Здесь

$N_c^{\pm}(\mu)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0} N_c(\mu \pm i\varepsilon), \quad \varepsilon>0$ - граничные значения функции $N_C(z)$ сверху и снизу на разрезе $(0;+\infty)$.

Для граничных значений дисперсионной функции сверху и снизу на разрезе также справедливы формулы Сохоцкого:

$$\lambda_{\tilde{n}}^{+}(\mu)-\lambda_{\tilde{n}}^{-}(\mu)=2\tilde{N}\sqrt{\pi}i\mu\exp(-\mu^2), \quad \mu\in R,$$

$$\frac{1}{2}\left[\lambda_c^{+}(\mu)+\lambda_c^{-}(\mu)\right]=\lambda_c(\mu), \quad \mu\in R,$$

где $\lambda_c(\mu)=1+\frac{C}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(-\tau^2)}{\tau-\mu}d\tau.$

Согласно результатам [1], функция $\lambda_{\tilde{n}}(\mu), \mu\in R$ вычисляется по формуле: $\lambda_c(\mu)=1-2C\mu\exp(-\mu^2)\int\limits_0^u\exp(u^2)du$.

С помощью граничных значений функций $N_C(z)$ и $\lambda_C(z)$ сведем уравнение (10) к краевой задаче Римана:

$$\lambda_C^{+}(\mu)\left[N_C^{+}(\eta)+A\right]=\lambda_C^{-}(\eta)\left[N_C^{-}(\mu)+A\right], \ \mu>0. \tag{2.6}$$

Коэффициентом этой задачи будет функция $G_n(\mu)=\frac{\lambda_c^{-}(\mu)}{\lambda_c^{+}(\mu)}$. Однородную краевую задачу, соответствующую неоднородной задаче (2.6), рассмотрим в виде:

$$\frac{X^{+}(\mu)}{X^{-}(\mu)}=\frac{\lambda_C^{+}(\mu)}{\lambda_C^{-}(\mu)}, \ \mu>0. \tag{2.7}$$

Здесь $X(z)$ - неизвестная функция, аналитическая везде в комплексной плоскости С. за исключением точек разреза $[0;+\infty]$ вдоль положительной действительной полуоси. Граничные значения этой функции сверху и снизу на разрезе удовлетворяют краевому условию (2.7).

В качестве решения задачи (2.7) возьмем функцию $X(z)=\exp V(z)$,

$$V(z)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{\theta_C(\mu)}{\mu-z}d\mu,$$

где

$$\theta_{\tilde{n}}(\tau)=arcctg\frac{\lambda_c(\tau)}{C\sqrt{\pi}\tau\exp(-\tau^2)}=\frac{\pi}{2}-arctg\frac{\lambda_c(\tau)}{C\sqrt{\pi}\tau\exp(-\tau^2)}.$$

С помощью решения задачи (2.7) сведем задачу (2.6) к задаче определения аналитической функции по нулевому скачку на разрезе:

$$X^{+}(\mu)\cdot\left[N_C^{+}(\mu)+A\right]=X^{-}(\mu)\cdot\left[N_C^{-}(\mu)+A\right], \ \mu>0. \tag{2.8}$$

Учитывая поведение входящих в краевое условие (2.8) функций, получим общее решение:

$$N_c(z)=-A+\frac{C_0}{X(z)}, \ C_0=\text{const}. \tag{2.9}$$

Из условия разрешимости $N_C(\infty)=0$ находим: $C_0=A$, следовательно, решение (2.9) записывается в виде:

$$N(z)=A\left(-1+\frac{1}{X(z)}\right). \tag{2.10}$$

Таким образом, разложение (2.1) – установлено, ибо коэффициент непрерывного спектра $a_C(\eta)$ находится из уравнения (2.5), если в последнее подставить решение (2.10):

$$2\sqrt{\pi}ic\mu a(\mu)=A\cdot\left[\frac{1}{X^+(\mu)}-\frac{1}{X^-(\mu)}\right]. \tag{2.11}$$

Покажем единственность решения (2.1). Воспользуемся методом от противного. Предположим, что помимо решения (2.1) существует еще одно решение:

$$\psi(x,\mu)=A+\int_0^\infty \exp\left(\frac{-x}{\eta}\right)\Phi_c(\eta,\mu)\tilde{a}_c(\eta)d\eta, \quad a(\eta)\neq a_c(\eta),\eta>0. \tag{2.12}$$

Составим разность решений (2.11) и (2.12), в которую подставим x=0, в результате получим:

$$\frac{C}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{\eta b_c(\eta)}{\eta-\mu}d\eta+\exp(\mu^2)\lambda_c(\mu)b_c(\mu)=0, \quad b_c(\eta)=a_c(\eta)-\tilde{a}_c(\eta).$$

Это уравнение эквивалентно краевой задаче:

$M_c^+(\mu)\lambda_c^+(\mu)=M_c^-(\mu)\lambda_c^-(\mu), \quad \mu>0.$

Эта задача имеет тривиальное решение

$$M_c(z)\equiv 0, \quad M_c(z)=\frac{C}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{\eta b_c(\eta)}{\eta-z}d\eta.$$

Отсюда и следует, что $a_c(\eta)\equiv\tilde{a}_c(\eta)$. Таким образом, единственность разложения (2.1) – установлена.

3. СКОРОСТЬ ДИФФУЗИИ

Для построения скорости распределения диффузии легкой компоненты бинарного газа в полупространстве, воспользуемся определением массовой скорости (1.3). Таким образом, будем иметь:

$$U_y(x)=\frac{A}{2}+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2}d\mu\cdot\int_0^\infty \exp(-\frac{x}{\eta})\Phi_C(\eta,\mu)\cdot a_C(\eta)d\eta \tag{3.1}$$

Поменяем местами порядок интегрирования в (3.1) и вычислим внутренний интеграл:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\mu^2)\Phi_c(\eta,\mu)d\mu\equiv 1.$$

Следовательно, согласно (3.1) распределение массовой скорости дается выражением:

$$U_y(x) = \frac{A}{2} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2} d\mu \cdot \int\limits_0^{\infty} \exp(-\frac{x}{\eta}) a_C(\eta) d\eta \quad . \tag{3.2}$$

Подставим в соотношение (3.2) выражение (2.11) для коэффициента непрерывного спектра. В результате находим распределение массовой скорости в полупространстве:

$$U_y(x) = \frac{A}{2}\left[1 + \frac{1}{2\pi i c}\int\limits_0^{\infty} \exp\left(\frac{-x}{\eta}\right)\left[\frac{1}{X_c^+(\eta)} - \frac{1}{X_c^-(\eta)}\right]\frac{d\eta}{\eta}\right]. \tag{3.3)}$$

Так как величина А пропорционально градиенту концентрации, то из выражения (3.3) видно, что массовая скорость газа в этой задаче является скоростью диффузии. Представим выражение (3.3) в виде:

$$U_y(x) = \frac{A}{2} f_c(x). \tag{3.4}$$

Здесь

$$f_c(x) = 1 + \frac{1}{c}\int\limits_0^{\infty} \exp\left(\frac{-x}{\eta}\right)\left[\frac{1}{X_c^+(\eta)} - \frac{1}{X_c^-(\eta)}\right]\frac{d\eta}{\eta} \quad . \tag{3.5}$$

или в виде:

$$\mathrm{U_y(x) = K_n(x, \nu, c)}\left(\frac{\mathrm{dn}}{\mathrm{dy}}\right). \tag{3.6}$$

Здесь $K_n(x, \nu, c)\left(\frac{dn}{dy}\right)$ – коэффициент диффузии.

$$K_n(x, \nu, c) = -\frac{1}{2\nu\sqrt{\beta}(1-c)n_0} \cdot f_c(x) \quad , \tag{3.7}$$

или

$$K_n(x, \nu_{11}, c) = -\frac{f_c(x)}{2\sqrt{\beta}\nu_{11} n_0} \quad . \tag{3.8}$$

Представим скорость диффузии легкой компоненты бинарного газа (3.6) с коэффициентом диффузии (3.7) или (3.8) в размерном виде:

$$U\acute{o}(x) = -\frac{\kappa T \tau_{12}}{m n_0} f_c(x)(\frac{dn}{dy}), \quad \tau_{12} = \frac{1}{\nu_{12}} \quad . \tag{3.9}$$

Обозначим $\mathrm{G_n} = -\frac{\kappa T \tau_{12}}{m n_0}(\frac{dn}{dy})$ - значение скорости диффузии на границах слоя Кнудсена. Тогда

$U\acute{o}(x) = G_n f_c(x)$. (3.10)

Отсюда ясно, что $U_y(\infty) = G_n$, где G_n - это значение скорости диффузии на границе слоя Кнудсена.

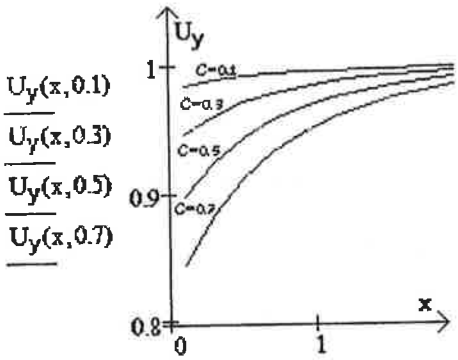


Рис.1. Функция $U_y(x)$ - профиль массовой безразмерной массовой скорости в полупространстве.

4. СКОРОСТЬ ДИФФУЗИИ У СТЕНКИ

Вычислим значение массовой скорости легкой компоненты бинарного газа на стенке, точнее, непосредственно у стенки.

Из выражений (3.5) при x=0 имеем:

$$f_c(0) = 1 + \frac{1}{2\pi c i}\int_0^\infty \left[\frac{1}{X_c^+(\eta)} - \frac{1}{X_c^-(\eta)}\right]\frac{d\eta}{\eta}. \tag{4.1}$$

интеграл из правой части равенства (4.1) можно вычислить аналитически, для чего воспользуемся интегральным представлением без вывода $\frac{1}{X(z)}$ [1]:

$$\frac{1}{X(z)} = 1 + \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty \left(\frac{1}{X^+(\eta)} - \frac{1}{X^-(\eta)}\right)\frac{d\eta}{\eta - z}, \quad z \in C \setminus [0;+\infty).$$

и в результате получим, что

$$f_c(0) = 1 + \frac{1}{c}\left(\frac{1}{X(0)} - 1\right). \tag{4.2}$$

Теперь воспользуемся формулой факторизации дисперсионной функции:

$$\lambda_C(z) = (1-c)X(z)X(-z), \quad z \in C \setminus [0;+\infty) \tag{4.3}$$

Из формулы (4.3) находим:

$$X(0) = \pm\frac{1}{\sqrt{1-c}}. \tag{4.4}$$

В формуле (4.4) возьмем знак "+" у радикала. Именно в этом случае скорость диффузии не равна нулю при $c \to 0$. Согласно (5.4) из (5.2) получаем, что $f_c(0) = 1 + \dfrac{\sqrt{1-c}-1}{c}$, или

$$f_c(0) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-c}+1} = \frac{\sqrt{1-c}}{\sqrt{1-c}+1}. \qquad \textbf{(4.5)}$$

Из формулы (4.5) видно, что $\lim\limits_{c\to 0} f_c(0) = \dfrac{1}{2}$; это означает, что при переходе на границу слоя Кнудсена величина скорости диффузии уменьшается в два раза при малых значениях параметра "с".

Возьмем далее формулу (3.7). С помощью равенства (4.5) запишем ее в виде:

$$K_n(0,\nu,c) = -\frac{1}{2\nu\sqrt{\beta}n_0\sqrt{1-c}(\sqrt{1-c}+1).} \qquad \textbf{(4.6)}$$

Из формулы (4.6) видно, что при $c \to 1$ скорость диффузии непосредственно у стенки расходится. Преобразуем (4.6), учитывая, что $1-c=\dfrac{\nu_{12}}{\nu}$. Имеем:

$$K_n(0,\nu_{11},\nu_{12}) = -\frac{1}{2\sqrt{\beta}n_0} \cdot \frac{1}{\nu_{12}+\sqrt{\nu_{12}(\nu_{11}+\nu_{12})}}.$$

Отсюда видно, что причиной расходимости коэффициента диффузии у стенки является стремление к нулю частоты столкновений ν_{12} молекул легкой компоненты газа с молекулами тяжелой компоненты.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе впервые находится распределение массовой скорости газа в задаче о диффузии легкой компоненты бинарной газовой смеси. Получены выражения для массовой скорости как на границе слоя, так и на стенке.

Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта: 03-01-00281). Авторы искренне признательны профессору Юшканову Александру Алексеевичу за взаимные обсуждения задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Латышев А.В., Юшканов А.А.** Точные решения модельных кинетических уравнений с параметром в задаче о поведении бинарного газа вблизи поверхности // Сборник трудов "Многомерный комплексный анализ и его приложения". М.: МОПИ.1991. С.78-89. (Деп.в ВИНИТИ, №4899-В 91).

2. **Владимиров В.С., Жаринов В.В.** Уравнения математической физики.- М.:Физматлит, 2001.

3. **Черчиньяни К.** Математические методы в кинетической теории газов.- М.: Мир, 1973.

4. **Гахов Ф.Д.** Краевые задачи.- М: Наука. 1977.

5. **Лифанов И.К.** Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент.(в математике, физике, аэродинамике, теории упругости и дифракции волн).- М.: ТОО "Янус", 1995.

6. **Латышев А.В., Юшканов А.А.** Аналитическое решение граничных задач кинетической теории. Монография.- М.: МГОУ, 2004, 286 с.

Н.М. АНТИПИНА , М.М. РАССУДОВСКАЯ

СОДЕРЖАТЕЛЬНОЕ ОПИСАНИЕ ЗАДАЧИ ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

Современные тенденции повышения эффективности образования, в том числе и высшего, обусловливают поиск путей активизации деятельности обучаемых, развитие их самостоятельности и инициативы. Все большее значение приобретает ориентация на максимально возможное развитие личности обучаемого, что в вузе достигается в значительной степени благодаря организации самостоятельной работы студентов.

Поскольку личности обучаемого всегда уделялось значительное внимание, то одна из задач преподавателя – установление некоторого соответствия возможностям студентов уровня сложности заданий, степени помощи со стороны преподавателя и способа подачи учебного материала. При этом индивидуализация отнюдь не означает, что должны учитываться особенности именно каждого студента. Обычно выделяются малые группы учащихся на основании некоторых общих особенностей. Принцип индивидуализации в педагогическом процессе реализуется через (в частности) учет возрастных и индивидуально-типологических особенностей личности обучаемого (студента).

Необходим переход к более совершенным технологиям обучения, учитывающим индивидуальные особенности обучаемых. При новой парадигме образования преподаватель выступает не в традиционной роли распространителя информации, а в роли советчика, консультанта. Следовательно, главной задачей преподавателя становится квалифицированная помощь обучаемому в организации самостоятельной активной познавательной деятельности. Студент не только самостоятельно приобретает знания, но и учится применять их при решении различных проблем окружающей действительности. Индивидуализации учебной деятельности способствуют: знания реальных учебных возможностей и индивидуальных особенностей студента, соразмерность сложности учебных задач и реальных его возможностей. Подобная ориентация высшего образования приводит к необходимости решения преподавателем следующих задач:

осуществление педагогической диагностики (определение индивидуально-типологических характерологических особенностей студентов);

определение целей педагогического воздействия (на основе имеющейся информации);

планирование и прогнозирование предстоящей работы (оказание конкретной помощи в затруднительных ситуациях, учет зоны ближайшего развития и реальных возможностей обучаемых);

практическое осуществление намеченного плана (демонстрация приемов и способов деятельности, стимулирование работы);

анализ результатов выполненной работы (определение степени достижения ставившихся целей, определение новых целей на следующий период).

В этой связи при построении модели процесса обучения приходится исходить из того, что преподаватель должен выполнять следующие конкретные действия:

подбирать для каждого студента задания, соответствующие его индивидуально-типологическим особенностям;

адаптировать методы работы в соответствии с различными индивидуально-типологическими особенностями студентов;

направлять поиск выполнения задания студентом, основываясь на собственных представлениях об алгоритме работы;

оказывать помощь слабым студентам, предлагая план или приемы выполнения задания;

обеспечивать обратную связь и создавать положительную мотивацию путем оценки успехов студентов при выполнении задания;

анализировать результаты, оценивая способы решения, предлагаемые студентами (наиболее эффективные из которых использует в дальнейшей работе), и определять степень достижения ставившихся целей;

при необходимости напоминать теоретические сведения или указывать содержащие их разделы учебников;

показывать более эффективный (по сравнению с предложенным студентом) способ выполнения задания.

Обобщая результаты проведенного автором анализа содержания существующих технологий организации самостоятельной работы студентов при подготовке к практическим занятиям и приведенный перечень действий преподавателя можно заключить, что преподаватель должен выполнять две основные функции:

анализ индивидуально-типологических особенностей студентов и разбиение их на однородные (по определенным критериям) группы;

разработка системы методических заданий, выдача заданий, соответствующих по назначению и сложности индивидуально-типологическим особенностям студентов, организация выполнения заданий.

Разбиение студентов на группы выполняется путем психолого-педагогического тестирования и отнесения их в соответствии с полученными результатами к однородным по определенному критерию (совокупности критериев) группам. Понятие “однородность” предполагает существование некоторых групп в чем-то отличных, но обладающих некоторыми общими свойствами студентов. Сходство студентов по этим свойствам позволяет отнести их к одному классу и служит основанием для их объединения в однородную группу. От цели разбиения зависят перечень оцениваемых свойств и критерии разбиения на группы.

В общем случае выполнение первой из рассматриваемых функций состоит из ряда функциональных операций, которые можно разделить на два этапа. На первом этапе для анализируемых индивидуально-типологических свойств студентов устанавливается набор оценочных параметров, характеризующих эти свойства, и критерии деления на группы (классы) в зависимости от значений параметров; отбираются тесты, которые при необходимости адаптируются и преобразуются в форму, пригодную для дальнейшего использования. Определяются значения оценочных параметров для каждого студента курса (потока). Каждый студент при дальнейшем исследовании является элементарным источником информации, который подлежит наблюдению и контрольному тестированию. В итоге проведенной работы накапливаются индивидуальные данные об особенностях каждого студента. При сборе и обработке данных в качестве основного допущения принимается то, что для каждого студента измеряемые характеристики находятся в течение некоторого периода времени в одном и том же состоянии, но постепенно они могут изменяться, в том числе и в результате целенаправленной деятельности преподавателя.

Оценка особенностей производится при помощи набора качественных и количественных характеристик (параметров, признаков), выбор которых и задание критериев производится преподавателем в зависимости от цели обследования. Сбор информации для каждого студента производится по конечному числу таких признаков, принимающих либо конечное число состояний, либо значения в фиксированном интервале. При этом значения качественных признаков определяются как наличие анализируемого свойства или степень его развития по определенной шкале. Значения количественных признаков получаются либо методом экспресс оценки по упрощенным формулам с использованием минимально необходимой исходной информации, получаемой обычно из данных о текущей успеваемости или по результатам тестирования, либо путем вычислений по более сложным алгоритмам с применением исходной модели студента и длительного времени наблюдения. Цель обследования и разбиения определяет ту информацию, которая может быть использована для последующей обработки, а характер исходных данных и приемы их фиксации непосредственно влияют на способы обработки материала. Следовательно, на этом этапе, прежде всего важны следующие факторы: цель разбиения на группы, существующие знания о студенте, о технике выявления индивидуальных особенностей и о технологиях личностно-ориентированного обучения.

Необходимо отметить, что выявление и использование данных об индивидуально-типологических особенностях студента (формирование его модели) целесообразно и эффективно только при постоянном наблюдении за ним, накоплении и корректировке (по мере необходимости) этих данных (модели студента) на протяжении всего периода обучения.

На втором этапе анализа индивидуально-типологических особенностей студентов осуществляется выявление однородных групп путем переработки собранной информации. Исходный материал – набор элементарных описаний студентов. Производится сравнение элементарных описаний с заданными критериями и объединение студентов в однородные группы. При этом студенты могут быть «типичными» представителями выделенных групп, либо «нетипичными», «пограничными». В первом случае у студентов набор элементарных описаний соответствует одной классификационной категории, а во втором - у студентов встречаются сочетания пограничных описаний, то есть отдельные характеристики имеют значения, равные граничным для двух соседних классов или близкие к ним. С такими студентами необходимо проводить дополнительную работу – наблюдение, тестирование, – в ходе которой уточняются их индивидуальные характеристики.

Разбиение на группы по совокупности признаков может выполняться путем одновременного учета всех признаков или последовательного введения (чередования) признаков, при котором на каждой ступени разбиение проводится только по одному признаку. Каждый из подходов реализуется при помощи определенных методов в разной степени поддающихся формализации. Для одновременного учета всех признаков используются метод ведущего фактора или метод сопряженного анализа. Второй подход реализуется с помощью метода многоступенной классификации или метода наложения серии наблюдений. Следует однако отметить, что при использовании любого из перечисленных методов часть операций выполняется на интуитивно-профессиональном уровне.

Итак, составными частями процедуры разбиения студентов на однородные группы являются:

разработка системы классификации индивидуально-типологических свойств (разработка алфавита классов студентов), определяющих содержание разбиения (таксономической системы);

отбор исходных данных;

задание совокупности оценочных параметров;

определение значений параметров для каждого студента;

выявление однородных групп по заданному критерию (критериям), а также описание их особенностей с необходимыми рекомендациями по организации обучения;

систематизация и накопление полученных материалов для дальнейшего использования.

Выполнение преподавателем второй функции также состоит из нескольких этапов (функциональных операций). В общем случае на первом этапе проводится проверка готовности студента к выполнению заданий путем экспресс опроса или тестирования. Задача этого этапа – выявление и ликвидация пробелов в знаниях основных определений, понятий, классификаций и т.п., необходимых для выполнения методического задания. При положительном результате данного этапа студент допускается к выполнению задания, при отрицательном – ему указывается научно-методическая литература, с которой ему необходимо ознакомиться.

Второй этап – выдача студенту методического задания, соответствующего изучаемой теме и классификационной группировке, к которой относится студент по своим индивидуально-типологическим характеристикам. При этом предполагается, что уже имеется разработанная система методических заданий, удовлетворяющих определенным требованиям.

Третий этап – построение студентом алгоритма выполнения задания и последовательная самостоятельная его реализация. При этом студент (в случае необходимости) обращается за консультациями к преподавателю, а последний осуществляет промежуточный контроль в некоторых узловых точках и (если требуется) корректировку алгоритма. По итогам выполнения этого этапа анализируется готовность студента к аудиторным занятиям по изучаемой теме. В результате анализа могут быть скорректированы данные об индивидуально-типологических характеристиках студента (модель студента).

В итоге анализа содержательного описания процесса организации самостоятельной работы студента при подготовке его к практическим занятиям можно заключить, что основными задачами преподавателя являются:

построение модели ситуации обучения, предусматривающей построение модели учебной деятельности; построение и уточнение модели студента, уточнение цели обучения применительно к данному студенту; анализ результатов промежуточного контроля и оценка ситуации, корректировка стратегии обучения; выдача обучающих воздействий.

Конечной целью выполнения всех заданий в процессе самостоятельной работы по курсу «Теория и методика обучения математике» является формирование у каждого студента предметно-ориентированных методических умений.

Новые педагогические технологии предполагают широкое применение новых информационных и, в частности, компьютерных средств в образовании. Это предусматривает и внедрение в процесс обучения электронных учебников, и использование в качестве источника информации глобальных телекоммуникационных сетей Интернет, и разработку концепции дистанционного образования. В то же время для автоматизации решения неформализуемых задач процесса обучения целесообразно применение методов теории искусственного интеллекта, в частности – экспертных систем.

М.В. ВАСИЛЬЕВА

О ЭФФЕКТИВНОСТИ ПРОФИЛЬНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЦИИ В ОБУЧЕНИИ

Реальностью, обуславливающей необходимость дифференцированного обучения математике, является объективно существующие различия учащихся в темпах овладения учебным материалом, в способностях самостоятельного применения усвоенных знаний и умений. На современном этапе развития общества для отечественной школы особое значение приобретает ***гуманизация образования***, предполагающая уважение личности учащегося, учет ее индивидуальности, заботу о состоянии ее развития, как высшей цели всего процесса обучения. Каждому ученику должны быть созданы наиболее благоприятные условия для индивидуального развития в соответствии с его склонностями и способностями. Необходимость индивидуального подхода к личности в процессе обучения давно отменена как отечественными, так и зарубежными дидактами, ими же проводились исследования путей ее осуществления. В практике работы средней школы наибольшее отражение получили такие направления индивидуального подхода, как собственно индивидуализация и дифференциация обучения.

Особое значение для внедрения в практику любых форм и приемов дифференцированного обучения имеет организация предметного содержания учебного материала. Центральное место в нем отводится задачам, так как они служат основным средством формирования приемов учебной деятельности учащихся по их решению и должны служить основным средством дифференциации учебного процесса. В исследованиях, посвященных роли и месту задач, широкое распространение нашел деятельностный подход (Ю.М. Колягин, В.И. Крупич, В.И. Мишин, Г.И. Саранцев и др.). Внимание уделяется как внешней (информационной) структуре задачи (Ю.М. Колягин, В.И. Мишин, Л.М. Фридман и др.), так и проблеме, связанной с изучением внутренней структуре задачи (В.И. Крупич и др.). Идея гуманизации, лежащая в основе профильной и уровневой дифференциации определяет методику, основными положениями которой является изучение и учет индивидуальных особенностей каждого учащегося класса, анализ мыслительной деятельности учеников каждой и выделенных подгрупп при решении задач с учетом их возможных затруднений.

В дифференцированном обучении математике мы придерживаемся концепции единства уровневой и профильной дифференциации. ***Любая из этих двух разновидностей дифференциации одна без другой неполноценны.*** Раскроем внутреннее единство двух названных видов дифференциации.

Во-первых, «высокий» уровень изучения математики в средней школе не может быть в полной мере осуществим, если он опирается на профильную дифференциацию. Профильная дифференциация является важнейшим средством осуществления уровневой дифференциации. ***Не использовать первую как рычаг для приведения в действия всех возможностей второй- значит заранее запланировать заниженную эффективность обучения по сравнению с той, какой она могла быть.***

Во-вторых, профильная дифференциация является эффективным средством варьирования уровней обучения предмету и независимо от того, ведется ли преподавание математике в математическом, техническом, гуманитарном, естественно-биологическом или обычном классе, без профильной дифференциации невозможна эффективная уровневая дифференциация.

В-третьих, выбор профильности обучения нисколько не снижает значимости уровневой дифференциации, а изменяет лишь возможности ее осуществления.

В реальности уровневость и профильность дифференциации неразрывные элементы единой дифференциации. Вообще, расчленение дифференциации на два вида полезно для того, что бы более разносторонне и глубоко и полно изучить проблему дифференцированного обучения.

Дифференцированный подход можно осуществлять на различных этапах урока, а именно на этапе введения нового материала, на этапе самостоятельной работы учащихся по изучению нового и самостоятельной работе по применению изученной теории к решению задач, возможности разделения самостоятельной работы по степени помощи со стороны учителя ученикам, на этапе работы с учебником, дифференцированный контроль подготовленности к уроку, дифференциация домашнего задания, дифференциация оценки знаний.

Остановимся на стиле изложения основ математического анализа в классах различных уровней. Выбор этого стиля является весьма существенным. Здесь надо идти по пути ***разумного компромисса между строгостью, доступностью и прикладной направленностью,*** не забывая ни об одной из этих сторон. Какого уровня строгости придерживаться, что и как доказывать? В классах гуманитарного профиля изложение математического анализа должно иметь максимально наглядный характер. Оно должно постоянно уделять внимание содержательной стороне рассматриваемых понятий и фактов. Формально-логическое совершенство определений и доказательств отнюдь не должно быть самоцелью. Достижение таких качеств усвоения учащимися содержания математического образования как осознанность, прочность, глубина, систематичность, обобщенность возможно лишь при реализации деятельностного подхода в обучении.

В технических классах целесообразно акцентировать внимание на прикладной и практической направленности. Методика обучения должна быть направлена на формирование умений моделировать реальные процессы, развитие графических умений, образного компонента мышления, усиление межпредметных связей.

В математических классах изложение материала носит достаточно абстрактный характер с высокой степенью формальных доказательств, оставляя большую часть изучаемого материала для самостоятельной работы. Большую эффективность дает лекционная форма работы с последующими семинарскими занятиями.

Для реализации основных целей дифференцированного обучения в средней школе необходимы качественно иные системы задач и упражнений, которые и должны выступать, как средство интеграции различных разделов школьной математики, что будет способствовать ликвидации перегрузок учащихся учебным материалом. При работе с классами различных профилей и уровней обучения учителю математики также необходимы материалы, при помощи которых он сможет реализовать идеи «гибкой технологии».

Говоря о принципах отбора содержания школьного математического образования отметим, что важнейшей особенностью современного этапа развития школы, оказывающей влияние на сами принципы отбора содержания обучения математике, является развитие и широкое внедрение уровневой и профильной дифференциации, предполагающей максимальную гибкость, как в определении самого объема информации, так и в требованиях к уровню овладения этой информацией различными учащимися.

Чаще всего в подходах к дифференциации обучения учитываются свойства личности, отражающие индивидуально приобретенный опыт: знания, умения, навыки, привычки, опыт эмоционально-оценочных отношений и разнообразной деятельности. Эти свойства личности легче изучаются и действительно определяют возможности дифференциации в обучении, так как отражают и актуальный уровень и возможный уровень. Однако эти качества могут подсказать уровневую дифференциацию в обучении на определенном этапе, но не всегда отражают возможности в профильной дифференциации.

Проблема дифференциации обучения учащихся средней школы, а также время, отводимое на изучение алгебры и начал анализа в 10-11 классах подтверждает целесообразность знакомства учащихся с достаточно общими методами решения задач, например, функциональным. Владение этим методом позволяет существенно упростить решение многих сложных задач прикладного характера. Реализация общего функционального подхода в условиях дифференцированного обучения оказывает существенное влияние на развитие структурных компонентов учебно-математических и научно-математических способностей обучаемых: функциональное мышление, склонность к математическому моделированию, построению алгоритмов и эвристических схем, динамическое пространственное воображение, математическая индукция.

Преподавание математики в классах гуманитарного профиля имеет свои особенности. Полноценное усвоение учащимися школьной программы должно сопровождаться их умственным развитием, формированием познавательных интересов. Обучение только тогда способствует развитию ума, когда оно руководит самостоятельными поисками учащихся. Преподавание математики в этих классах сложно именно потому, что основные познавательные интересы учащихся находятся в иных областях знания - история, литература, общественных наук и т.д. В процессе обучения математике «гуманитариев» преимущественное внимание следует уделять эмоциональной стороне интереса учащихся. Это необходимо учитывать при выборе методов, средств и форм обучения. При этом общими особенностями методики преподавания математики в классах гуманитарного профиля являются следующие: первостепенное внимание мировоззренческим вопросам науки, систематическое обобщение материала в рамках частных теоретических схем, способствующих формированию обобщенных, наиболее значимых для мировоззрения знаний, возможно большая эмоциональная насыщенность материала, стимулирование активности учащихся на основе профильного интереса, индуктивности при осмыслении.

В классах технического профиля одна из целей – научить учащихся правильно формировать задачи, связанные с реальной ситуацией, т.е. научить применять процесс математического моделирования. Согласно содержательно-методическому критерию, в классах технического направления распределение учебного времени происходит в пользу увеличения практических знаний, при этом акцентируется внимание на решение задач прикладного характера. Методик обучения должна быть направлена на формирование умений моделировать реальные процессы, развитие графических умений, образного компонента мышления, усиление межпредметных связей. Для классов технического профиля наиболее подходящими учебными заданиями является те в которых понятие производной вытекает из физических явлений, геометрических толкований и приближенных вычислений, в которых на первый план выдвигается задача о нахождении мгновенной скорости движения и вычисления углового коэффициента касательной к кривой в заданной точке. В учебниках должно быть большое количество задач на межпредметные связи и использование вычислительной техники. В современных пособиях почти нет задач на развитие конструктивных навыков. Важные по степени профессиональной значимости задачи на применение проводной при решении уравнений и неравенств почти отсутствуют в школьных учебниках. Поскольку обучение анализу вообще связано с приложениями, метод обучения в технических классах должен быть таков, что понятие производной должно вводится в неразрывной связи с их приложениями. Уже подход к анализу должен быть связан с приложениями. Математические классы отличаются тем, что в них и теоретический и задачный материал может быть построен с точки зрения доказательности, строгости и сложности изложения на высоком уровне.

Общепризнанно, что обучение решению задач является важнейшим средством формирования у школьников системы основных знаний, умений, навыков, а также ведущей формой обучения деятельности учащихся в процессе обучения математике. Успешность и эффективность обучения решению задач зависит от их постановки и вида, от усвоения учащимися курса школьной математики, от систематизации задач, с учетом психологических особенностей школьников.

Для формирование прочных умений и навыков, учащихся должно быть достаточное число задач одного и того же типа по изучаемой теме. Однако и в этом случае надо проявлять умеренность, разумность. В психологии установлено, что выполнение однотипных задач приводит к ряду негативных явлений: учащиеся начинают решать задачи, шаблонно, по аналогии с предыдущими, не вдумываясь в условия данной задачи, опуская при этом отдельные существенные рассуждения. Надо отметить, что последовательность рассуждений , повторяющихся при решении однотипных задач, может свертывается до ассоциации, которая в дальнейшем, в случае необходимости, должна легко развернуться в первоначальную цепь рассуждений. Свертывание рассуждений - естественный процесс, однако не у всех учащихся обратный процесс – развертывание – происходит без потерь каких – либо существенных рассуждений.

Важно среди задачного материала систематическое использование «провоцирующих» упражнений, которые способствуют развитию внимания и самостоятельности, повышению точности. Весьма ценной в методическом отношении группой задач являются те, которые получаются в результате переделывания какой - либо другой задачи.

Обучение школьников решению математических задач, как правило, осуществляется при решении тех из них, которые сформированы учителем, взяты из учебника или из учебного пособия, из другой литературы. Однако роль при этом играет деятельность учащихся по их составлению. Дело в том, что составление задач часто требует от учащихся такой умственной работы, которая при решении «готовых» задач не имела места. Иначе говоря составление задач можно рассматривать как творческую деятельность учащихся. Стало быть работа учащихся по составлению задач служит развитию их творческого мышления.

Один из аспектов деятельности по составлению задач – это составление и решение задач, порожденных данной задачей, или, иначе говоря, составление и решение задач, развивающих тему данной задачи. Такого рода задачи можно получить из данной (исходной) различными путями:

Путем замены части данных в исходной задаче другими данными без замены заключения задачи;

Путем обобщения данных или искомых исходной задачи;

Путем специализации данных или искомых исходной задачи;

Путем добавления новых заключений при сохранении данных в исходной задаче;

Путем замены части данных исходной задачи ее искомые (части данных принимается за искомые, а некоторые искомые считаются данными), т.е. путем обращения задачи или составления задачи, обратной данной.

Подобного рода замены нередко приводят к применению разнообразных приемов и методов решения полученных задач, казалось бы близких по содержанию с данными задачами. Таким образом, в этом случае осуществляется не отработка какого - либо одного приема решения задачи, а усвоение широкого их спектра. Замену значений данных в условии желательно осуществлять не беспорядочно, а придерживаясь определенного логического плана.

Составление и решение задач, порождённых данной – это уже творческая деятельность учащихся. Место этой деятельности не ограничивается временем, уровнем подготовки, но особое внимание ей нужно уделять на стадии завершающего, обобщающего обучения при изучении различных разделов школьного курса математики. Наверное, не стоит вводить системы специальных уроков или внеклассных занятий для этих целей. Лучше систематически, время от времени, обращаться к составлению задач, родственных данной, при изучении различных тем в классах различных уровней и профилей.

В.В.ВЕДЕНЯПИН

РЕАКТИВНЫЕ СИЛЫ И ФОТОФОРЕЗ В АЭРОЗОЛЯХ

Фотофорезом называется движение частиц под действием света. Существование светового давления было доказано П.Н.Лебедевым, с которым иногда фотофорез связывают. Однако в 1918 году Эренхафом [1] было открыто явление обратного фотофореза. Частицы пыли, взвешенные в воздухе, в лучах мощной лампы иногда двигались по направлению к источнику. Этот эффект нельзя было объяснить световым давлением. Движение частиц от источника света было названо положительным или прямым фотофорезом, к источнику – отрицательным или обратным фотофорезом.

Прямой фотофорез иногда объясняется просто. Как правило, величина фотофоретической силы, вызванная соударениями молекул много больше сил светового давления. Свет разогревает молекулы взвеси, и они давят на частицу с большей отдачей со стороны света – возникает прямой фотофорез (ср. [2], где объяснение дается на основе того, что тело нагревается). Возможно другое объяснение – частицы испаряют молекулы под действием света. При этом возникают реактивные силы. Такое объяснение принято сейчас в кометной астрономии с 1950 года, когда «американский астрофизик Ф.Уиппл высказал гипотезу, основанную как раз на анализе вековых ускорений некоторых комет, согласно которой силы негравитационной природы – это реактивные силы, связанные с испарением вещества из кометных ядер»([3], стр. 143).

Что касается обратного фотофореза, то тут удовлетворительного объяснения, насколько мне известно, нет. Например, в [2] объяснение основано на предположении, что освещенная сторона может оказаться холоднее.

В настоящей работе предлагается объяснение на основе также реактивных сил. Мы полагаем, что нагретая светом сторона может иногда оказаться более способной к смягчению удара, а иногда и к захвату частиц. Но импульс отдачи упруго отраженной молекулы меньше импульса отдачи не упруго отраженной (в частности, в случае захваченной частицы импульс отдачи – в проекции на нормаль - точно в два раза меньше). Поэтому возникает избыточное давление именно по направлению к источнику света. Таково простое возможное объяснение некоторых случаев обратного фотофореза.

Возникновение таких сил наблюдались экспериментаторами. Для любой гетерогенной реакции [4], при росте кристаллов [5-6]. Был сделан вывод об универсальности данного явления [7], т.е. возникновение движения крупных частиц в любой химически активной среде, если реакция идет неоднородно по поверхности. Математическая модель такого движения требует уравнений типа Эйлера движения твердого тела. Эта модель состоит в том, чтобы рассматривать движущуюся в газе частицу, как твердое тело, на которое действуют силы, складывающиеся из соударений молекул газа с ее поверхностью.

Итак, кинетический подход для описания динамики твердого тела заключается в том, что сила, момент сил и скорости изменения других величин, характеризующих состояние тела, рассчитываются как потоки микроскопических изменений (этих величин) от соударений молекул газа с поверхностью тела. Такой подход восходит к Максвеллу [8], который в этой работе фактически предсказал термофорез. Новый интерес к такому подходу возник в связи с летательными аппаратами – так стали рассчитывать иногда аэродинамические силы[9]. Однако влияние сил молекулярного движения на движение аппарата, насколько мне известно, было учтено только в книге Белецкого и Яншина [10] – там, массы и скорости огромны, и такие силы часто очень малы. В работах [11-14] была создана модель движения тела в химически активной среде, фактически методом Максвелла. Этой моделью мы и воспользуемся.

В первом параграфе описывается модель, во втором – приближение малых скоростей [11-14], в третьем – решение задачи о прямолинейном движении под действием сил фотофореза.

§1. Описание модели и вывод уравнений.

Рассмотрим движущийся в газе твердый однородный по плотности шар с активной неоднородной поверхностью, способной поглощать молекулы газа. Будем считать, что распределение активности имеет ось симметрии, что позволит задавать ориентацию тела с помощью одного вектора.

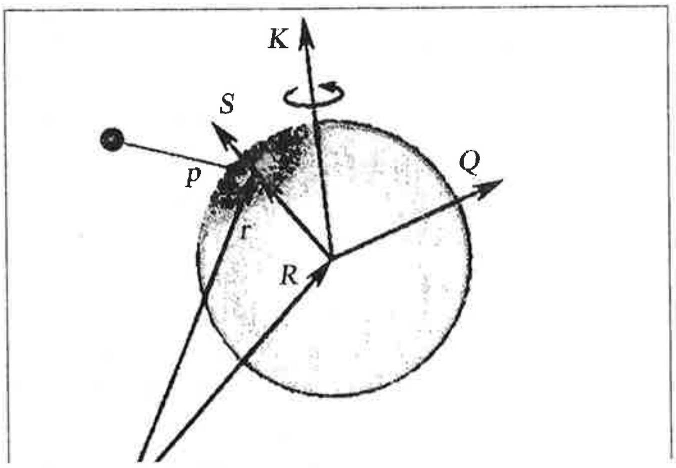


Рис. 1. Состояние тела будем описывать координатами центра масс R, импульсом тела Q, кинетическим моментом K, вектором ориентации S.

Молекулы газа будем описывать с помощью функции распределения $f(r,p)$ молекул по координатам r и импульсам p. Состояние тела будем описывать координатами центра масс R, импульсом тела Q, кинетическим моментом K, и вектором ориентации S, представляющим собой единичный вектор, направленный от центра масс к центру активной зоны (рис. 1.).

Какие силы действуют на частицу, движущуюся в газе? Очевидно, они определяются столкновениями, частота которых $d\Omega$ дается выражением [9], [14]:

(1.1) $\quad d\Omega = \sigma\cdot(u,n)\cdot\theta((u,n))\cdot f(r,p)\cdot dr\cdot dp$

Здесь $\sigma=\sigma(R,Q,r,p)$ – геометрическое сечение столкновений $\{R,Q,S,K\}+\{r,p\}\to\ldots$, которое для твердых шаров имеет вид:

(1.2) $\quad \sigma(R,Q,r,p)=\delta(|r-R|-\rho)$,

$\theta(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$, $\delta(x)$ — ∂функция Дирака, $u=\dfrac{p}{m}-\dfrac{Q}{M}$ — относительная скорость молекулы и шара, ρ — радиус частицы, n — единичный вектор, перпендикулярный поверхности в точке $r=R-\rho n$ (рис. 2).

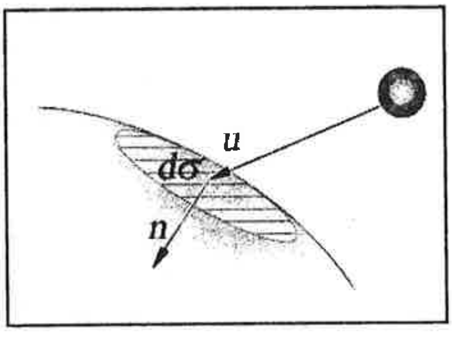


Рис. 2 Описание столкновения: n — единичный вектор, перпендикулярный поверхности.

Предположим, что возможны два исхода столкновения молекулы газа с телом: поглощение и упругое отражение. Пусть β - доля поглощенных частиц – как-то зависит от координаты поверхности тела. Тогда в случае шара $\beta=\beta(n)$, где n - внутренняя нормаль. Рассмотрим вектор: $A=\int\limits_{S_2} n\cdot\beta(n)dn$. В случае, когда его модуль не равен нулю, определим единичный вектор S: $S=\dfrac{A}{|A|}$. Динамика этого вектора описывается уравнением [10]: $\frac{dS}{dt}=\frac{1}{J}\cdot[K,S]$, где J — главный момент инерции тела.

Перейдем к динамике столкновений. Отметим, что при упругом столкновении координаты R, r и вектор S не меняются. Также, что характерно для упругого соударения с шаром, не меняется и момент K, поскольку сила, с которой взаимодействуют шар и точечная частица направлена вдоль прямой, проходящей через центр масс и точку соударения. Итак, упругое соударение может быть представлено схемой: $\{R,Q,S,K\}+\{r,p\}\to\{R,\tilde{Q},S,K\}+\{r,\tilde{p}\}$, где:

(1.3) $\tilde{Q}_{упр.}=Q+2\mu\cdot(u,n)n$,

(1.4) $\tilde{p}_{упр.}=p-2\mu\cdot(u,n)n$,

здесь $\mu=\frac{mM}{M+m}$ – приведенная масса.

При неупругом соударении меняются величины Q, K, и, вообще говоря, масса тела M за счет поглощения молекулы газа. Однако изменением последней мы будем пренебрегать в виду его малости. Итак, имеем $\{R,Q,S,K\}+\{r,p\}\to\{R,\tilde{Q},S,\tilde{K}\}$, где:

(1.5) $\tilde{Q}_{неупр.}=Q+p$,

(1.6) $\tilde{K}_{неупр.}=K+\mu[r-R,u]$.

Уравнения динамики шара можно записать в виде:

$$(1.7)\qquad \begin{cases} \frac{dR}{dt}=\frac{Q}{M}, \\ \frac{dQ}{dt}=\int(\tilde{Q}_{неупр.}-Q)\cdot\beta\cdot d\Omega+\int(\tilde{Q}_{упр.}-Q)\cdot(1-\beta)\cdot d\Omega+F_{внеш.}, \\ \frac{dK}{dt}=\int(\tilde{K}_{неупр.}-K)\cdot\beta\cdot d\Omega+M_{внеш.}, \\ \frac{dS}{dt}=\frac{1}{J}\cdot[K,S]. \end{cases}$$

Заметим, что выражение для $\frac{dQ}{dt}$ можно преобразовать к виду:

$$\frac{dQ}{dt}=\int(\tilde{Q}_{неупр.}-\tilde{Q}_{упр.})\cdot\beta\cdot d\Omega+\int(\tilde{Q}_{упр.}-Q)\cdot d\Omega+F_{внеш.}$$

Здесь первое слагаемое и есть сила, возникающая за счет того, что поглощенная частица «недодает» импульс по сравнению с упруго отскочившей. Она названа в [7] хемореактивной

$$(1.8)\qquad F_{хем.}=\rho^2\iint\limits_{\mathbf{R}^3\times\mathbf{S}^2}\beta(n,S)\{p-2\mu(u,n)n\}(u,n)\cdot\theta((u,n))\cdot f(R-\rho n,p)dndp.$$

Второе слагаемое связано только с упругими ударами – это есть сила сопротивления движению:

$$(1.9)\qquad F_{трен.}=2\mu\rho^2\iint\limits_{\mathbf{R}^3\times\mathbf{S}^2}n\cdot(u,n)^2\cdot\theta((u,n))\cdot f(R-\rho n,p)\cdot dn\cdot dp.$$

Момент сил в выражении для $\frac{dK}{dt}$ связан только с неупругими ударами:

$$(1.10)\qquad M_{хем.}=\mu\rho^3\iint\limits_{\mathbf{R}^3\times\mathbf{S}^2}\beta(n,S)\cdot[u,n]\cdot(u,n)\cdot\theta((u,n))\cdot f(R-\rho n,p)\cdot dn\cdot dp.$$

Эти общие выражения содержат информацию о движении шара в газе, и при произвольных функциях распределения $f(r,p)$ и коэффициенте прилипания $\beta=\beta(n)$ они не могут быть упрощены.

§ 2. Уравнения медленного движения шара в равновесном газе.

В этом параграфе будут выведены уравнения движения твердого тела в газе с максвелловской функцией распределения в предположении, что скорость тела мала по сравнению с тепловой скоростью молекул.

Таким образом, считаем, что функция распределения молекул газа по скоростям есть максвеллиан:

$$f(t,r,p)=n_0(2\pi mkT)^{-3/2}\cdot e^{-\frac{|p|^2}{2mkT}}.$$

Здесь T — температура, k — постоянная Больцмана. Это предположение обеспечивает широкий диапазон предлагаемых параметров, которыми в задаче являются размер тела, интервал наблюдения, плотность и давление (либо температура) газа. Характерная площадь, на которой протекают процессы на поверхности тела, должна быть такова, чтобы произведение частоты ударов в нее на время наблюдения было бы достаточно велико по сравнению с единицей. Это условие нарушится, если размер тела будет столь мал, что тело начнет чувствовать отдельные удары. Кроме того, мы пренебрегаем влиянием движения тела на функцию распределения молекул газа, считая тело не очень большим по сравнению с длиной свободного пробега молекул газа, в противном случае вместо максвелловской функции распределения должна быть использована функция Максвелла-Чепмена-Энскога [9].

Предположим, что характерные значения скорости тела малы по сравнению со средней скоростью теплового движения.

При этих предположениях получаем следующее выражение для интегралов (1.8-1.10):

$$F_{сопр.}=-\frac{8\sqrt{2\pi}\cdot\rho^2 n_0 kT}{3\cdot(1+\varepsilon)}\cdot v$$

$$(2.1)\qquad F_{хем.}=\frac{2\rho^2 n_0 kT}{1+\varepsilon}\cdot\left\{-\frac{1-\varepsilon}{4}\int\beta(n)\,ndn+\frac{3-\varepsilon}{2\sqrt{\pi}}\int\beta(n)(v,n)ndn\right\}$$

$$M_{хем.}=-\frac{\rho^3 n_0 kT}{1+\varepsilon}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\int\beta(n)\,[v,n]\,ndn.$$

Здесь $v=\frac{Q}{M}\sqrt{\frac{m}{kT}}$ – величина порядка отношения скорости тела Q/M к тепловой скорости молекул, $\varepsilon=m/M$ – отношение масс.

Будем теперь считать, что функция β симметрична относительно поворотов вокруг вектора S, т.е. зависит только от скалярного произведения (n,S) :

(2.2) $\quad \beta=\beta((n,S))$.

Тогда система уравнений (1.7) приобретает следующий вид.

$$(2.3)\quad \begin{cases} \dfrac{dR}{dt}=\dfrac{Q}{M}, \\ \dfrac{dQ}{dt}=(\chi_0+\chi_1\cdot(Q,S))\cdot S-\lambda\cdot Q, \\ \dfrac{dS}{dt}=\dfrac{1}{J}[K,S], \\ \dfrac{dK}{dt}=\gamma[Q,S]. \end{cases}$$

Здесь, с учетом (2.2):

$$\chi_0=\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\pi\rho^2 n_0 kT\int_{-1}^{1}\beta(\zeta)\,\zeta\,d\zeta,$$

$$(2.4)\quad \chi_1=\frac{\rho^2 n_0\cdot\sqrt{2\pi mkT}}{2M}\cdot\frac{(3-\varepsilon)}{(1+\varepsilon)}\cdot\int_{-1}^{1}\beta(\zeta)(3\zeta^2-1)d\zeta,$$

$$\lambda=\frac{\rho^2 n_0\cdot\sqrt{2\pi mkT}}{M(1+\varepsilon)}\cdot\left(\frac{8}{3}-\frac{3-\varepsilon}{2}\cdot\int_{-1}^{1}\beta(\zeta)(1-\zeta^2)d\zeta\right)$$

$$\gamma=-\frac{\rho^3 n_0\cdot\sqrt{2\pi mkT}}{M(1+\varepsilon)}\int_{-1}^{1}\beta(\zeta)\zeta d\zeta$$

§ 3. Исследование уравнений движения.

Это есть общие уравнения движения тела сферической формы под действием молекул, прилипающих неоднородно по поверхности [11-13]. Но если активная зона возникает под действием источника света, то возникают следующие дополнительные упрощения. Вектор реактивной силы S параллелен вектору импульса Q и не меняется, а момент вращения K = 0. Поэтому два последних уравнения системы (2.3) исчезают, и остаются первые два уравнения. Функцию бета в этой задаче можно положить постоянной на освещенной стороне и коэффициенты 2.4 принимают вид

$$\chi_0=\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\pi\rho^2 n_0 kT\beta_0,$$

$$\chi_1=\frac{\rho^2 n_0\cdot\sqrt{2\pi mkT}}{2M}\cdot\frac{(3-\varepsilon)}{(1+\varepsilon)}\cdot\beta_0\int_{-1}^{1}(3\zeta^2-1)d\zeta=0,$$

$$\lambda=\frac{\rho^2 n_0\cdot\sqrt{2\pi mkT}}{M(1+\varepsilon)}\cdot\left(\frac{8}{3}-\beta_0\frac{3-\varepsilon}{3}\cdot\right)$$

Поэтому система уравнений (2.3) в этих условиях упрощается до следующей

$$\begin{cases} \dfrac{dR}{dt}=\dfrac{Q}{M}, \\ \dfrac{dQ}{dt}=\chi_0\cdot S-\lambda\cdot Q, \end{cases}$$

Решение такой системы уравнений получается без труда

$$\begin{cases} Q(t) = \chi_0 \lambda^{-1} \cdot S + (Q(0) - \chi_0 \lambda^{-1} S) \exp(-\lambda t), \\ R(t) = \chi_0 \lambda^{-1} M^{-1} \cdot St - \lambda^{-1} M^{-1} (Q(0) - \chi_0 \lambda^{-1} S) \exp(-\lambda t) + R(0). \end{cases}$$

Это означает, что асимптотически при больших временах движение превращается в равномерное со следующей скоростью

$$\chi_0 \lambda^{-1} M^{-1} \cdot = \frac{\beta_0 (1-\varepsilon)}{\frac{8}{3} - \beta_0 \frac{3-\varepsilon}{3}} \cdot \sqrt{\frac{\pi k T}{2m}}$$

Формула показывает, что эта асимптотическая скорость стремится к нулю при доле β_0 захваченных частиц, стремящейся к нулю. Она пропорциональна тепловой скорости и стремится к нулю, если отношение масс молекул и тела стремится к единице. Эти выражения можно предложить для сравнения со скоростью движения частиц в эксперименте.

Заключение.

В работе высказывается предположение, что в некоторых случаях явление обратного фотофореза может быть объяснено реактивными силами захвата частиц. Это объяснение подходит и для объяснения прямого фотофореза, если окажется, что основную роль здесь играют реактивные силы испарения. Для подтверждения – или скорее для выявления таких случаев - требуется детальное сравнение с экспериментом. Кроме того, возможно уточнение модели – отказ от сферической формы и приближения малых скоростей.

Литература.

1. Ehrenhalf F. Ann.Phys. 1918. Bd 55. S. 81-132.
2. Ю.И.Яламов, А.С.Хасанов. Фотофорез гетерогенных по теплопроводности крупных аэрозольных частиц. Журнал технической физики, 1998, том 68, N 4.
3. Л.С.Марочник. Свидание с кометой. М.Наука, 1985.
4. В.Ф.Харламов. Рекомбинация атомов на поверхности твердых тел и сопутствующие эффекты. Томск. Изд-во Томск. ун-та. 1994.
5. S.A.Kitchener, R.F.Strickland-Constable. Proc. Roy. Soc. (London). Ser. A. 1958, v. 245, p. 93.
6. R.F.Strickland-Constable. Kinetics and Mechanism of Crystallization. London. Acad. Press. 1968.
7. И.В.Мелихов, Е.Ф.Симонов, А.А.Ведерников, С.С.Бердоносов, В.Е.Божевольнов. Хемореактивное движение твердых тел. Рос. хим. журн. 1997, т.41, с.5.
8. Maxwell J.C. On Stresses in Rarefied Gases arising from Inequalities of Temperature. Philisophical transactions. 1879. Vol.170. P. 231-256.
9. К.Черчиньяни. Теория и приложения уравнения Больцмана. М: Мир, 1978.
10. В.В.Белецкий, А.М.Яншин. Влияние аэродинамических сил на вращательное движение спутников. Киев: Наукова думка. 1984.
11. В.В.Веденяпин, Я.Г.Батищева, И.В.Мелихов, А.Я.Горбачевский. О движении твердых тел в газе, сопровождающемся неоднородными химическими процессами. Мат. моделирование, 2003, т.15, N 6.

12 . В.В.Веденяпин, Я.Г.Батищева, И.В.Мелихов, А.Я.Горбачевский. О движении твердого тела в химически активной среде. Доклады РАН, 2003, т.392, N 6.

13. Батищева Я.Г. К выводу уравнений динамики твердого тела в газе, реагирующем с ним неоднородно по поверхности. Доклады РАН, т. 392, N 5, 2003.

14 . В.В.Веденяпин. Кинетическая теория по Максвеллу, Больцману и Власову. М: Из-во МГОУ, 2005.

С. О. ГЛАДКОВ

О ДИФФУЗИОННОМ ПРИБЛИЖЕНИИ В ТЕОРИИ МЕТАЛЛОВ

АННОТАЦИЯ

С помощью кинетического уравнения Больцмана для электронной функции распределения, выведено уравнение диффузии, описывающее "блуждание" электрона по поверхности Ферми, обусловленное малой передачей его импульса фононам.

Отмечено, что такой подход оправдан лишь в области низких температур, когда выполнено условие $T \ll \theta_D$ (θ_D - температура Дебая), и на флуктуациях плотности электроны рассеиваются квазиупруго практически также, как и на примесях.

Из решения уравнения диффузии вычислена проводимость металла в области низких температур.

Вопросам, посвященным теоретическому анализу проводимости металлов в области низких температур посвящено огромное количество работ и множество монографий, среди которых следует отметить, например, такие, как [1] и [2]. И хотя упомянутые монографии довольно "преклонного" возраста, тем не менее до сих пор не встречались оригинальные работы, посвященные выводу и решению диффузионного уравнения для электронной функции распределения, когда речь заходит об описательной части блуждания электрона по поверхности Ферми. Общим недостатком и [1] и [2] является тот факт, что процесс диффузии электрона по угловой переменной θ считается как бы очевидным и поэтому строго математический вывод зависимости проводимости σ от температуры T в диффузионном пределе отсутствует. Действительно, в [1] констатируется, что обратное время электрон - фононной релаксации $\frac{1}{\tau_{eph}}$ должно просто браться с весовым множителем $(1-\cos\theta)$ (обосновывая его малыми углами рассеяния, важными при низких температурах), а в [2] делаются чисто физические оценки поведения σ при условии, что передача импульса от электрона фонону мала и по порядку величины соответствует отношению $\frac{T}{\theta_D}$, а сам электрон диффундирует по поверхности Ферми. Понятно, что оба таких качественных подхода весьма близки и вполне логичны, но строгого аналитического вычисления проводимости (а, следовательно, и доказательства) не приводится.

Чтобы получить корректное аналитическое подтверждение прозвучавших в [1] и [2] утверждений (что, собственно, и является предметом исследования настоящей статьи) мы начнем с кинетического уравнения Больцмана для электронной функции распределения n_p и из него выведем уравнение диффузии.

Имеем

$$\frac{\partial n_p}{\partial t} + \vec{F}\frac{\partial n_p}{\partial \vec{p}} + \vec{V}\frac{\partial n_p}{\partial \vec{r}} = L_{eph}\{n_p\}\,, \tag{1}$$

где $\vec{p}$ - импульс электрона, $\vec{r}$ - его координата, $\vec{V}$ - скорость, $\vec{F}$ - сила, действующая на частицу в электрическом $\vec{E}$ и магнитном $\vec{B}$ полях, включающую в себя еще и силу "трения", возникающую при движении электронов сквозь фононный газ, который в диффузионном макроскопическом приближении может считаться тормозящей жидкостью с вязкостью η. Таким образом

$$\vec{F} = \vec{F}_{fr} + e\vec{E} + \frac{e}{c}[\vec{V} \times \vec{B}], \tag{2}$$

где e - заряд электрона, c - скорость света в вакууме.

Надо заметить, что последнее слагаемое в (2) исчезнет из ответа поскольку функция распределения будет искаться в виде $n_p = \overline{n}(p) + \delta n$, где равновесная функция распределения зависит от модуля импульса p, а потому произведение $[\vec{V} \times B]\frac{\partial \overline{n}}{\partial \vec{p}} \equiv 0$. Кроме того, будем считать n_p не зависящей от координат и в этой связи "уберем" последнее слагаемое в левой части (1) и, таким образом, после всех упрощений получаем

$$\frac{\partial n_p}{\partial t} + (\vec{F}_{fr} + e\vec{E})\frac{\partial n_p}{\partial \vec{p}} = L_{eph}\{n_p\}, \tag{3}$$

Интеграл электрон - фононных столкновений, стоящий в правой части уравнения (3), мы запишем таким образом (см., скажем, [3], [4])

$$L\{n\} = \frac{2\pi}{\hbar}\Big\{ \sum_{\vec{p}',\vec{q}} \Big\{ |\,\psi(\vec{p},\vec{p}',\vec{q}\,)|^2 \Big[(1-n_p)n_{p'}(1+f_q) - n_p(1-n_{p'})f_q\Big]\delta(\varepsilon_p - \varepsilon_{p'} - \hbar\omega_q)\Delta(\vec{p} - \vec{p}' - \hbar\vec{q})\Big\} +$$
$$+ \sum_{\vec{p}',\vec{q}} \Big\{ |\,\psi(\vec{p}',\vec{p},\vec{q}\,)|^2 \Big[(1-n_p)n_{p'}f_q - n_p(1-n_{p'})(1+f_q)\Big]\delta(\varepsilon_p - \varepsilon_{p'} + \hbar\omega_q)\Delta(\vec{p} - \vec{p}' + \hbar\vec{q})\Big\}\Big\}, \tag{4}$$

где $\psi(\vec{p},\vec{p}',\vec{q})$ - амплитуда рассеяния электронов на фононах. Ее можно выбрать в виде $\psi(\vec{p},\vec{p}',\vec{q}) = ig\theta_D\left(\frac{\hbar q}{\rho \overline{a}^3 c_s N}\right)^{1/2}$, где N - число атомов в кристалле, g - безразмерная константа электрон - фононной связи, ρ - плотность металла, $\overline{a}$ - межатомное расстояние и, наконец, c_s - средняя скорость звука в металле.

Вычисление времени релаксации τ_{eph} с помощью выражения (4) весьма несложное (более подробно с соответствующими выкладками можно познакомиться, например, по монографиям [3 - 6]), приводящее в результате к зависимости

$$\frac{1}{\tau_{eph}} = g^2 \frac{T^3 J}{\pi \rho \overline{a}^4 V_F \theta_D^2}, \tag{5}$$

где $J = \int\limits_0^\infty \frac{x^2 e^x dx}{\left(e^{2x} - 1\right)}$.

Далее. Поскольку передача импульса от электрона фонону при низких температурах мала, то есть $|\,\vec{p} - \vec{p}'| = \Delta p \approx \hbar q = \frac{\hbar}{\overline{a}}\left(\frac{T}{\theta_D}\right) << p_F \approx \frac{\hbar}{\overline{a}}$, выражение (4) может быть разложено в ряд Тейлора по степеням Δp. Если оборвать разложение на членах второго порядка малости по параметру Δp, то после довольно громоздких, но совсем простых преобразований, можно получить следующее выражение для интеграла столкновений $L\{n_p\} \approx \frac{\partial}{\partial \vec{p}}\left(D\frac{\partial n_p}{\partial \vec{p}}\right)$, где коэффициент диффузии

$$D = \frac{p^2}{\tau_e}\left(\frac{T}{\theta_D}\right)^2 \tag{6}$$

Итак, с учетом (3) и (5) уравнение диффузии становится таким

$$\frac{\partial n_p}{\partial t} + e\vec{E}\frac{\partial n_p}{\partial \vec{p}} = \frac{\partial}{\partial \vec{p}}\left(D\frac{\partial n_p}{\partial \vec{p}} - \vec{F}_{fr}n_p\right). \tag{7}$$

Выберем силу трения, пропорциональной импульсу электрона $\vec{p}$, но направленной, естественно, в противоположную сторону, то есть $\vec{F}_{fr} = -\alpha\vec{p}$, где α - некоторый коэффициент, имеющий размерность $\left(\frac{1}{c}\right)$, но потом (см. ниже) выпадающий из ответа (!).

Чтобы решить уравнение (7) и вычислить зависимость $\sigma(T)$, начнем со стационарного случая и рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial \vec{p}}\left(D\frac{\partial \bar{n}_p}{\partial \vec{p}} - \vec{F}_{fr}\bar{n}_p\right) = 0, \tag{8}$$

где $\bar{n}_p$ - равновесная функция распределения электронов при их диффузии по поверхности Ферми.

Переходя здесь к сферической системе координат в импульсном пространстве, находим следующее уравнение для $\bar{n}_p$

$$\frac{1}{p^2}\frac{\partial}{\partial p}\left(p^2\frac{\partial \bar{n}_p}{\partial p}\right) + \frac{1}{p^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial \bar{n}_p}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{p^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 \bar{n}_p}{\partial \varphi^2} + \frac{\alpha}{D}div(\bar{n}_p\vec{p}) = 0.$$

Поскольку $div(\bar{n}_p\vec{p}) = \frac{\partial}{\partial \vec{p}}(\bar{n}_p\vec{p}) = 3\bar{n}_p + \vec{p}\nabla\bar{n}_p = 3\bar{n}_p + p\frac{\partial \bar{n}_p}{\partial p}$, то при условии, что $\bar{n}_p = \bar{n}(\theta)$, а движение происходит лишь по поверхности Ферми, то есть $p = p_F = const$, в связи с чем, полагая, согласно (6), что $D = \frac{p_F^2}{\tau_{eph}}\left(\frac{T}{\theta_D}\right)^2$, имеем отсюда

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial \bar{n}}{\partial \theta}\right) + \frac{3\alpha p_F^2}{D}\bar{n} = 0.$$

Или, введя обозначение $a(a+1) = \frac{3\alpha p_F^2}{D}$, приходим к уравнению

$$\bar{n}'' + ctg\theta\bar{n}' + a(a+1)\bar{n} = 0. \tag{9}$$

Уравнение (9) имеет решение $\bar{n} = C_1P_a(\cos\theta)$, где C_1 - константа интегрирования, а $P_a(\cos\theta)$ - функция Лежандра. Для произвольного a ее обычно записывают через гипергеометрическую функцию, то есть

$$P_a(\cos\theta) = F\left(1+a, -a, 1, \frac{1-\cos\theta}{2}\right) = F(1+a, -a, 1, \sin^2(\theta/2)).$$

Таким образом, конечное при $\theta = 2\pi m$, где $m = 0,1,2,3,...$ решение будет

$$n(\theta) = C_1F\left(1+a, -a, 1, \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right). \tag{10}$$

Чтобы выражение (10) было более определенным, поступим следующим образом. Представим гипергеометрическую функцию в виде ряда

$$F(1+a,-a,1,\sin^2(\theta/2)) = 1 - a(a+1)\sin^2(\theta/2) + \frac{a^2(a^2-1)}{2}\frac{\sin^4(\theta/2)}{2} - \ldots .$$

Поскольку параметр a много больше единицы (речь идет о низких температурах), то приблизительно можно положить, что

$$F(1+a,-a,1,\sin^2(\theta/2)) = 1 - a(a+1)\sin^2(\theta/2) + \frac{a^2(a^2-1)}{2}\frac{\sin^4(\theta/2)}{2} - \ldots \approx e^{-a^2\sin^2(\theta/2)} .$$

В таком случае, искомое решение будет

$$\bar{n}(p_F,\theta) = C_1 e^{-a^2\sin^2(\theta/2)} \qquad (11)$$

и напомним, что $a^2 = \dfrac{3\alpha p_F^2}{D}$

Из условия нормировки функции распределения $\dfrac{1}{4\pi}\int \bar{n}(p_F,\theta)dO = 1$, где элемент телесного угла есть $dO = \sin\theta d\theta d\varphi$, получаем после простого интегрирования $C_1 = \dfrac{a^2}{2}\left(1 - e^{-a^2\sin^2(\theta/2)}\right) \approx \dfrac{a^2}{2}$. Таким образом, нормированная равновесная функция распределения должна иметь приблизительный вид

$$\bar{n}(p_F,\theta) \approx \frac{a^2}{2} e^{-a^2\sin^2(\theta/2)} . \qquad (12)$$

Итак, зная равновесное распределение (12), с помощью уравнения (7) можно вычислить искомую температурную зависимость диффузионной проводимости металла при $T << \theta_D$.

С помощью подстановки $n_p = \bar{n}(p) + \delta n$ в (7) для искомой добавки δn находим такое уравнение

$$\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{3\alpha p_F^2}{D}\right]\delta n = -\frac{ep_F^2\vec{E}}{D}\frac{\partial\bar{n}}{\partial\vec{p}} .$$

Или

$$\delta n'' + ctg\theta\delta n' + a(a+1)\delta n = -\frac{ep_F E}{D\sin\theta}\frac{\partial\bar{n}}{\partial\theta} = \frac{ep_F Ea^2}{2D}e^{-a^2\sin^2(\theta/2)} .$$

Его частное решение, имеющее физический смысл, есть

$$\delta n = \frac{eEp_F a^2}{4D} e^{-\frac{a^2}{4}\sin\theta - a^2\sin^2(\theta/2)} . \qquad (13)$$

Поскольку наибольший вклад при диффузионном движении дают малые углы θ, решение (13) можно представить в приближенном виде, а именно

$$\delta n = \frac{eEp_F a^2}{4D} e^{-\frac{a^2}{4}(\theta+\theta^2)} . \qquad (14)$$

Поскольку же параметр $a^2 = \dfrac{3\alpha p_F^2}{D}$, а D определятся с помощью (5) и (6), то видно, что наибольший вклад в диффузионное рассеяние дают углы θ порядка $\dfrac{1}{\sqrt{\alpha\tau_0}}\left(\dfrac{T}{\theta_D}\right)^{5/2}$, где время τ_0 определено соотношением $\dfrac{1}{\tau_0} = \dfrac{g^2\theta_D J}{\rho\bar{a}^4 V_F}$.

Итак, строгий анализ, связанный с выводом уравнения диффузии и его последующее решение показывают, что наибольшее рассеяние на поверхности

Ферми происходит для углов порядка $T^{5/2}$, в то время, как использование "интуитивных" физических соображений дает значительное превышение этого результата и оказывается порядка $\frac{T}{\theta_D}$. В последнем случае, если взять по порядку величины $\theta_D = 200K$, а температуру выбрать, скажем, $T \approx 20K$, то окажется, что электрону нужно всего десять столкновений, чтобы термолизоваться и что сравнимо, вообще говоря, с единицей. В случае же оценки по приведенной выше формуле, согласно которой $\theta \approx \frac{1}{\sqrt{\alpha\tau_0}}\left(\frac{T}{\theta_D}\right)^{5/2}$ (где, заметим, произведение $\alpha\tau_0$ мало) будет иметь место значительно большее число столкновений, что является характерной чертой для процесса диффузии и которая, в согласии с приведенным результатом, начинает проявляться не только при совсем низких температурах (например, при $T < 1K$), а уже при условии $T < \theta_D$!

Переходим теперь к вычислению проводимости. По определению плотность тока есть $\vec{j} = 2e\int \vec{V} n_p \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}$. Поскольку $n_p = \bar{n}(p_F, \theta) + \delta n$, где δn дается решением (14), то после перехода к сферической системе координат получается интеграл $J = \int_0^{p_F}(...)p^2dp\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi$. С угловыми переменными здесь все понятно, а вот при интегрировании по импульсу следует помнить, что диффузия происходит на поверхности Ферми, а потому, в интеграле по p необходимо вести интегрирование по области, близкой к сфере Ферми радиуса p_F. Это означает, что надо положить $\int_0^{p_F}(...)p^2dp \approx p_F^2(...)_{p=p_F}\int_{p_F-\hbar q}^{p_F+\hbar q}dp = 2\hbar q p_F^2(...)_{p=p_F}$, где q - волновой вектор фонона, участвующего во взаимодействии. Поскольку же $\hbar q \approx \frac{\hbar}{\bar{a}}\left(\frac{T}{\theta_D}\right)$, то из определения $j = \sigma E$, после простых выкладок с использованием явного выражения для a^2, получается искомое соотношение для проводимости

$$\sigma = \frac{3e^2\alpha p_F^4}{2\pi m\bar{a}^3D^2}\left(\frac{T}{\theta_D}\right)\int_0^{\pi}e^{-\frac{a^2}{4}(\theta+\theta^2)}\sin\theta d\theta .$$

Ввиду быстрой сходимости интеграла верхний предел интегрирования можно заменить на ∞ и в итоге получается

$$\sigma = \frac{e^2\sqrt{2}p_F^2}{\pi^{3/2}m\bar{a}^3D}\left(\frac{T}{\theta_D}\right). \qquad (15)$$

При низких температурах, как известно, проводимость определяется примесным рассеянием электронов, а потому электрон - фононная релаксация (характеризуемая временем τ_{eph}) становится менее эффективной, чем примесная. Это означает, что коэффициент диффузии следует переопределить и представить в виде $D = \frac{p_F^2}{\tau_{eimp}}\left(\frac{T}{\theta_D}\right)^2$. Заметим здесь, что примесное время релаксации τ_{eimp}, что очень важно, не зависит от температуры. В итоге, число Лоренца будет

$$L=\frac{\kappa}{\sigma T}\approx\frac{\pi^2}{3\bar{a}^3}\left(\frac{T}{\varepsilon_F}\right)V_F^2\tau_{eph}\frac{1}{\sigma T}=\frac{k_B\sqrt{2}\pi^{7/2}}{3e^2}\frac{\tau_{eph}}{\tau_{eimp}}\frac{T}{\theta_D}.$$

Поскольку $\frac{1}{\tau_{eimp}}=\frac{N_i}{N}\frac{\varepsilon_F}{\hbar}$, где N_i - количество примесей, N - полное число атомов в кристалле, а время τ_{eph} дается формулой (5), то для области низких температур получаем искомую зависимость числа Лоренца от T. Действительно, в таком случае оно ведет себя по "обычному" закону $L\sim\frac{1}{T^2}$.

Резюмируя, выделим основные результаты, полученные выше.

С помощью строго выведенного уравнения диффузии вычислена зависимость коэффициента диффузии от температуры;

Показано, что при этом диффузионное рассеяние осуществляется на углах порядка $\left(\frac{T}{\theta_D}\right)^{5/2}$, а не на углах $\frac{T}{\theta_D}$;

Доказано, что для идеально чистого металла ($N_i=0$), число Лоренца не должно стремиться к бесконечности, а идет в ноль.

ЛИТЕРАТУРА

Ф. Д. Блатт. Теория подвижности электронов в твердых телах. М.- Л.: ГИФМЛ 1963, 224 с.

И. М. Лифшиц, М. Я. Азбель, М. И. Каганов. Электронная теория металлов. М.: Наука 1971, 415 с.

С. О. Гладков. Физика композитов: термодинамические и диссипативные свойства. М.: Наука 1999, 330 с.

S. O. Gladkov. Dielectric properties of porous media. Springer 2003, 261 p.

А.И. Ахиезер, В.Г. Барьяхтар, С.В. Пелетминский. Спиновые волны. М.: Наука 1967, 368 с.

Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский. Физическая кинетика, т. 10. М.: Наука 1979, 527 с.

Т.Н. ГРАНЬ

МЕТОДИЧЕСКАЯ ПОДГОТОВКА БУДУЩИХ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ К РАБОТЕ В ПРОФИЛЬНОЙ СТАРШЕЙ ШКОЛЕ

В ближайшем будущем учителю математики придется преподавать в условиях профилизации образования и разработки моделей профильной школы. Согласно концепции профильного обучения оно рассматривается как средство дифференциации и индивидуализации обучения, позволяющее за счет изменений в структуре, содержании и организации образовательного процесса более полно учитывать интересы, склонности и способности учащихся, создавать условия для обучения старшеклассников в соответствии с их профессиональными интересами и намерениями в отношении продолжения образования. Возможны разные формы реализации профильного образования:

1) профильные классы;

2) классы (группы) углубленного изучения профильных предметов;

3) индивидуальный учебный план (индивидуальная образовательная траектория).

Для выполнения ответственных задач, стоящих перед профильной школой необходимы высококвалифицированные учителя, подготовкой которых необходимо заниматься уже сейчас. В концепции профильного обучения говорится о том, что “ новые требования к учителю в условиях перехода к профильному обучению диктуют необходимость дальнейшей модернизации педагогического образования”. Одним из средств методической подготовки студентов к работе в профильной старшей школе может являться курс “ Теория и методика профильного обучения математике”, относящийся к общепрофессиональным дисциплинам учебного плана.

Целью этого курса должно являться формирование готовности будущих учителей математики к работе в классах разных профилей. Данный курс формирует у студентов умение проектировать индивидуальные образовательные траектории и умение их реализовывать; создает условия для освоения студентами проектно- исследовательских и коммуникативных методов; вооружает их средствами для формирования у старшеклассников на уроках математики способностей и компетентностей, необходимых для продолжения образования в соответствующей сфере профессионального образования. Профессиональная направленность рассматриваемого курса осуществляется через сбалансированную реализацию следующих подходов:

1) обеспечение реализации цели курса;

2) усиление образовательной функции курса;

3) формирование развитой мотивационной сферы студента;

4) обеспечение прикладного характера методических знаний и методических умений.

В рамках курса студенты знакомятся с теоретическими основами профильного обучения в школе, с опытом его реализации, изучают индивидуальные психологические особенности учащихся различных групп. Много внимания уделяется научно- методическому анализу содержания математики в классах разных профилей. На лекциях могут рассматривать общие вопросы методики преподавания математики в профильных классах. На лабораторных работах могут разрабатываться программы различных курсов, изучаемых в старшей школе, строиться модели этих курсов.

Построение курса “ Теория и методика профильного обучения математике “ должно опираться на ранее изученные общие педагогические дисциплины и обязательно должно быть связано с курсами высшей математики, изучаемыми в цикле дисциплины общей предметной подготовки. В содержании курса целесообразно выделить несколько модулей. Один модуль базовый, рассматривающий общие вопросы преподавания математики в старшей школе, а другие - вариативные, рассматривающие методические особенности изучения математики в классах разных профилей. В рамках курса студенты готовятся к проведению различных элективных курсов. У них формируется умение выделить цели и задачи курсов составлять их программы, проводить отбор содержания, подбирать учебные материалы, составлять системы задач, анализировать другие программы. При проведении занятий по рассматриваемому курсу целесообразно использовать новые информационные и педагогические технологии. На наш взгляд, весьма эффективной является организация проектной деятельности студентов, проведение презентаций образовательных программ, разработанных студентами.

В.И. ЕГОРОВ, А.Ф. САЛИМОВА

ИЗЛОЖЕНИЕ ТЕМЫ «КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ» В ВЫСШЕМ УЧЕБНОМ ЗАВЕДЕНИИ ИНЖЕНЕРНОГО ПРОФИЛЯ

Предлагается оптимальный вариант изложения темы “Кратные интегралы”. Введение понятия двойного интеграла осуществляется в два этапа: сначала определяются понятия интегрируемости функции и двойного интеграла по области, ограниченной прямоугольником со сторонами, параллельными координатным осям, а затем эти понятия распространяются на области более общей природы.

Ключевые слова: стандартная область, интегрируемость и интеграл на стандартной области, формула перехода от двойного к повторному интегралу (формула Фубини).

Понятие интеграла является одним из основных в курсе математического анализа. Интеграл, формально определенный как предел последовательностей интегральных сумм, служит математической моделью многих понятий физики: интегралом вычисляется работа, путь, масса тела, заряд конденсатора и т.п. По этой причине при обучении математике будущих инженеров методический вариант интегрального исчисления, основой которого служит представление об интеграле как пределе суммы особого рода бесконечно малых величин, является предпочтительным. Сокращение часов на изучение математического анализа делает затруднительным изложение раздела “Кратные интегралы” для областей произвольной конфигурации, поэтому была поставлена задача построения полной теории кратных интегралов по так называемым стандартным областям, что обеспечивает ее краткость, логическую строгость и общность, достаточную для вузов, в которых математика не является профилирующей дисциплиной. При условии, когда на изложение материала по кратным, криволинейным и поверхностным интегралам отводится 18 лекционных часов, сформированы два варианта изучения темы: облегченный и полный. При облегченном варианте интегрируемость непрерывной функции приводится с обоснованием для случая стандартной прямоугольной области, т. е. области со сторонами, параллельными координатным осям. В полном варианте интегрируемость непрерывной функции доказывается для случая произвольной стандартной области.

1. Интегральные суммы функции двух переменных на прямоугольной области

Будем полагать, что на области определения функции двух переменных $f(x, y)$ задана область, ограниченная прямоугольником со сторонами, параллельными координатным осям. Обозначим её $[S^*]$ и назовём *стандартной прямоугольной областью.*

Определение интегральной суммы функции двух переменных состоит из следующих трёх частей.

1. Область $[S^*]$ разбивается на части – ячейки $[S_1]$, $[S_2]$, . . . , $[S_m]$.

2. В ячейках определяются опорные точки $M_k(x_k, y_k) \in [S_k]$, по одной в каждой ячейке, а также значения функции в этих точках: $f(M_k) = f(x_k, y_k)$, $k = 1, 2, \ldots, m$ (см. рис.1).

Определяющая формула интегральной суммы:

$$\sum_{k=1}^{m} f(M_k)S_k = \sum_{k=1}^{m} f(x_k, y_k)S_k.$$

Здесь S_k – площадь ячейки $[S_k]$, $k = 1, 2, \ldots, m$.

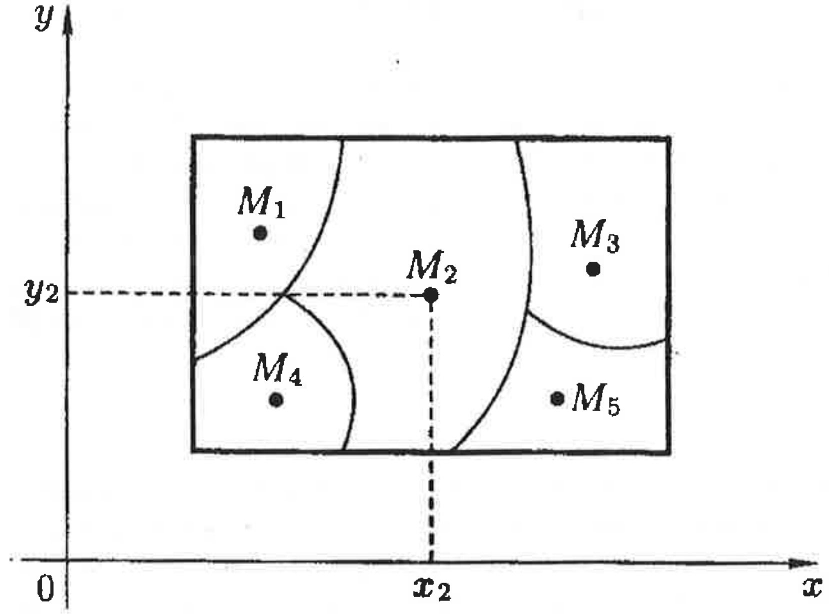


Рис.1

Нам понадобятся также суммы, которые определим для *ограниченной* функции:

$$\sum_{k=1}^{m} \underline{\mu_k} S_k, \quad \sum_{k=1}^{m} \overline{\mu_k} S_k,$$

где $\underline{\mu_k}$ - нижняя грань множества значений $f(x, y)$ на $[S_k]$, $\overline{\mu_k}$ - верхняя грань этого множества, $k = 1, 2, \ldots, m$.

Первую из этих сумм будем называть нижней, а вторую – верхней суммой функции. Если функция $f(x, y)$ непрерывна на $[S^*]$, то эти суммы являются *интегральными суммами*, так как в каждой ячейке $[S_k]$ найдутся точки, в которых функция принимает указанные значения.

Заметим, что, во-первых, при любом разбиении области произвольная интегральная сумма функции заключена между нижней и верхней суммами этой функции. Во-вторых, при дополнительных разбиениях имеющихся ячеек нижняя сумма может лишь возрасти, а верхняя – уменьшиться. В-третьих, даже при различных разбиениях нижняя сумма не превосходит верхней. И, наконец, в-четвёртых, множества нижних и верхних сумм имеют грани, причём верхняя грань нижних сумм не превосходит нижней грани верхних сумм.

Приведем условия, которым должны удовлетворять разбиения области.

1. Число m ячеек $[S_k]$, составляющих разбиение области $[S^*]$, конечно.

2. Площади ячеек определены (мы их обозначили S_k, $k = 1, 2, \ldots, m$).

3. Ячейки замкнуты, т.е. содержат свои границы.

4. Пересечения ячеек или пусты, или состоят лишь из общих граничных точек.

5. Границы ячеек не имеют толщины, точнее – их площадь равна нулю.

Таким образом, “паркет”, покрывающий область, может иметь любую конфигурацию.

2. Нормальная последовательность разбиений стандартной прямоугольной области и последовательность интегральных сумм определённой на этой области функции

Будем полагать, что стандартная прямоугольная область [S*] разбита на ячейки разными способами, число разбиений бесконечно, разбиения пронумерованы. Кроме того, в каждом из них выявлена ячейка с наибольшим диаметром Δ_n, где n – номер разбиения. Диаметром ячейки называется расстояние между наиболее отдалёнными друг от друга точками этой ячейки.

Будем говорить, что разбиения составляют нормальную последовательность, если при неограниченном росте номера максимальный диаметр ячейки стремится к нулю, т.е.

$$\Delta_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

Мы будем использовать только такие последовательности разбиений.

Теперь на каждом разбиении произвольно сформируем интегральную сумму данной функции f(x,y) и тем самым определим числовую последовательность произвольных интегральных сумм этой функции. Её общий член имеет вид:

In = $\sum\limits_{k=1}^{m_n} f(x_k, y_k)S_k$,

где mn – число ячеек, составляющих n – е разбиение.

3. Определение интегрируемости и двойного интеграла функции на прямоугольной области

Функцию будем называть *интегрируемой* на стандартной прямоугольной области, если при любой нормальной последовательности разбиений этой области все последовательности интегральных сумм данной функции сходятся.

Заметим, что все такие последовательности имеют общий предел, что можно доказать методом от противного.

Двойным интегралом интегрируемой на прямоугольной области функции двух переменных будем называть предел любой последовательности интегральных сумм этой функции при произвольной нормальной последовательности разбиений области.

Введем обозначение и повторим *определение двойного интеграла:*

$$\iint\limits_{[S^*]} f(x,y)dxdy = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{m_n} f(x_k, y_k)S_k .$$

В условии предельного перехода мы сознательно не написали $\Delta_n \to 0$, поскольку соблюдение этого условия оговорено.

4. Интегрируемость и двойной интеграл функций на ограниченных областях произвольной конфигурации

Положим, что функция $f(x, y)$ определена на некотором ограниченном множестве D. Будем считать, что это множество находится в некоторой стандартной прямоугольной области $[S^*]$ (см. рис. 2).

Продлим функцию $f(x, y)$ на всю прямоугольную область $[S^*]$ тождественным нулём. Точнее, введём функцию $f^*(x, y)$, равную $f(x, y)$ на множестве D и нулю в остальной части области $[S^*]$. Функцию $f^*(x, y)$ назовём *стандартным продолжением* данной функции $f(x, y)$ на область $[S^*]$.

Определение. Функция $f(x, y)$ называется *интегрируемой на множестве* D, если её стандартное продолжение на область $[S^*] \supseteq D$ интегрируемо на $[S^*]$. Определяется и соответствующий интеграл

$$\iint\limits_{D} f(x, y)\, dxdy = \iint\limits_{[S^*]} f^*(x, y)\, dxdy.$$

5. Интегрируемость непрерывной функции

Доказательство интегрируемости непрерывной на стандартной прямоугольной области функции двух переменных практически получается повторением доказательства соответствующей теоремы для функции одной переменной, непрерывной на отрезке. Отличие лишь в том, что разбиения отрезка заменяются разбиениями прямоугольной области, частичные отрезки – ячейками, длины – площадями и т.д. В таком доказательстве, естественно, используются свойства функций, непрерывных на ограниченных замкнутых множествах. Важным для нас частным случаем таких множеств является стандартная область. Напомним её определение. Фигуру $[S]$ в плоскости Oxy мы условились называть стандартной областью, если, во-первых, её проекция на Ox представляет собой отрезок, обозначим его $[a, b]$, во-вторых, всякая вертикальная прямая, пересекающая $[a, b]$, имеет с $[S]$ общий отрезок, в частности точку, и, наконец, в-третьих, фигура $[S]$ снизу и сверху ограничена графиками непрерывных на $[a, b]$ функций $y_1(x) \le y_2(x)$. Граница рассматривается как часть фигуры.

Область значений непрерывной на такой области функции представляет собой отрезок. К тому же непрерывная на стандартной области $[S]$ функция $f(x, y) = f(M)$ равномерно непрерывна на этой области, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ можно указать соответствующее число $\delta > 0$, такое что на $[S]$ выполняется:

$$\left|\tilde{M}\hat{M}\right| < \delta \Rightarrow \left|f(\tilde{M}) - f(\hat{M})\right| < \varepsilon.$$

Теорема. *Непрерывная на стандартной области функция интегрируема на этой области.*

Доказательство. Разделено на три части. Первая часть подготовительная. Если Вы помните первый пункт, где определены произвольная интегральная сумма, нижняя и верхняя суммы необязательно непрерывных функций, а также соотношения между ними, то эта часть для Вас практически очевидна.

Вторая часть основная. В ней оценивается разность между нижней и верхней суммами стандартного продолжения данной непрерывной функции с целью показать, что при любой нормальной последовательности разбиений прямоугольной области эта разность бесконечно мала.

В третьей, заключительной части, доказывается, что все последовательности интегральных сумм сходятся, причём их общий предел одновременно является верхней и нижней гранями множеств нижних и верхних сумм этого продолжения.

Итак, первая часть. По условию функция $f(x, y)$ непрерывна на стандартной области $[S] \subseteq [S^*]$; здесь, как и ранее, $[S^*]$ – стандартная прямоугольная область.

Будем считать, что на произвольно взятой нормальной последовательности разбиений области $[S^*]$ для функции $f^*(x, y)$ определены три последовательности сумм: $\{\underline{I_n}\}$, $\{\overline{I_n}\}$, $\{I_n\}$. Их общие члены: $\underline{I_n} = \sum\limits_{k=1}^{m_n} \underline{\mu_k} S_k$ – нижняя сумма, $\overline{I_n} = \sum\limits_{k=1}^{m_n} \overline{\mu_k} S_k$ – верхняя сумма, $I_n = \sum\limits_{k=1}^{m_n} f^*(x_k, y_k)\, S_k$ – произвольная интегральная сумма функции $f^*(x, y)$, здесь n – номер разбиения, а m_n – число составляющих его ячеек. Напомним, что $\underline{\mu_k} \le \overline{\mu_k}$ - грани множества значений $f^*(x, y)$ на множестве $[S_k]$, $k = 1, 2, \ldots, m_n$.

Поскольку $f^*(x, y)$ может оказаться разрывной на границе области $[S]$, нельзя утверждать, что $\underline{I_n}$ и $\overline{I_n}$ - интегральные суммы этой функции, однако приведённые ниже соотношения верны:

$$\underline{I_n} \le I_n \le \overline{I_n}\,,\ \underline{I_n} \le I_* \le I^* \le \overline{I_n}\,.$$

Здесь I_* – верхняя грань множества нижних сумм, I^* – нижняя грань множества верхних сумм функции $f^*(x, y)$.

Обращаем Ваше внимание на следующий факт: при $[S_k] \subset [S]$ функция $f^*(x, y) = f(x, y)$ непрерывна на $[S_k]$ и поэтому в соответствующих точках ячеек $[S_k]$ принимает значения $\underline{\mu_k}$ и $\overline{\mu_k}$.

Часть вторая. Здесь нам понадобятся следующие наблюдения, относящиеся к любому разбиению стандартной прямоугольной области. Пусть $[S^*]$ – такая область, отрезок $[a_1, b_1]$ – её проекция на ось Ox, а $[S_k]$, $k = 1, 2, \ldots, m$, – ячейки, составляющие разбиение этой области. Рассмотрим непрерывную на $[a_1, b_1]$ функцию $y(x)$, график которой содержится в $[S^*]$. Ячейки, имеющие с этим графиком хотя бы одну общую точку, составляют некую фигуру.

Л е м м а 1. *Суммарная площадь всех ячеек, имеющих с непрерывной дугой общие точки, не превосходит числа* $3\Delta(b_1 - a_1)$, *где* Δ – *наибольший из диаметров ячеек* $[S_k]$, $k = 1, 2, \ldots, m$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $y(x)$ равномерно непрерывна на отрезке $[a_1, b_1]$, по числу Δ определяем $\delta > 0$, такое, что на $[a_1, b_1]$ выполняется:

$$|\tilde{x} - \hat{x}| < \delta \Rightarrow |y(\tilde{x}) - y(\hat{x})| < \Delta.$$

Теперь разобьём отрезок $[a_1, b_1]$ точками на n_1 равных частей так, чтобы их длина оказалась меньше δ. Через указанные точки параллельно Oy проведём прямые, которые разобьют область $[S^*]$ на прямоугольные полоски. В пределах каждой такой полоски разность между наибольшим и наименьшим значениями $y(x)$ меньше Δ, отсюда следует, что площадь части полоски, покрытой пересекающимися с дугой ячейками меньше числа $3\Delta\ \dfrac{b_1 - a_1}{n_1}$. Следовательно, площадь всей фигуры, составленной из ячеек, имеющих общие точки с графиком $y(x)$, меньше чем

$$3\Delta\ \frac{b_1 - a_1}{n_1} \cdot n_1 = 3\Delta\,(b_1 - a_1).$$

Лемма доказана.

Л е м м а 2. Здесь мы возвращаемся к первоначальному разбиению на $[S_k]$ стандартной области $[S^*]$. Напоминаем, что Δ – наибольший из диаметров $[S_k]$, $k = 1, 2, \ldots, m$. *Площадь фигуры, составленной из ячеек, имеющих общие точки с любым вертикальным отрезком, находящимся в стандартной прямоугольной области* $[S^*]$, *меньше числа* $3\Delta\,(b_2 - a_2)$, *здесь* $b_2 - a_2$ *есть длина отрезка* $[a_2, b_2]$, *являющегося проекцией* $[S^*]$ *на* Oy (см. рис. 2).

На самом же деле, что видно из рисунка, площадь указанной фигуры ограничивается числом $2\Delta\,(b_2 - a_2)$. Указанное же выше ограничение $3\Delta\,(b_2 - a_2)$ в нашем случае несколько удобнее.

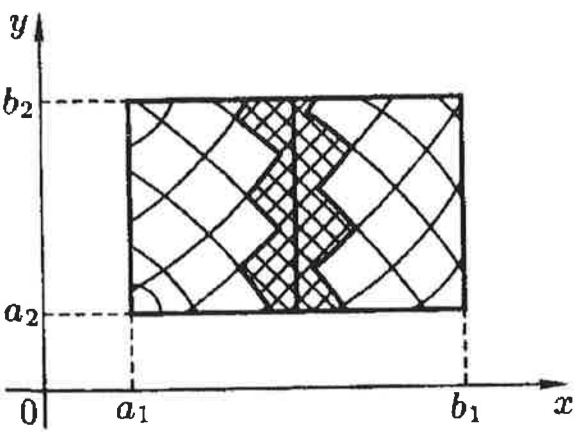
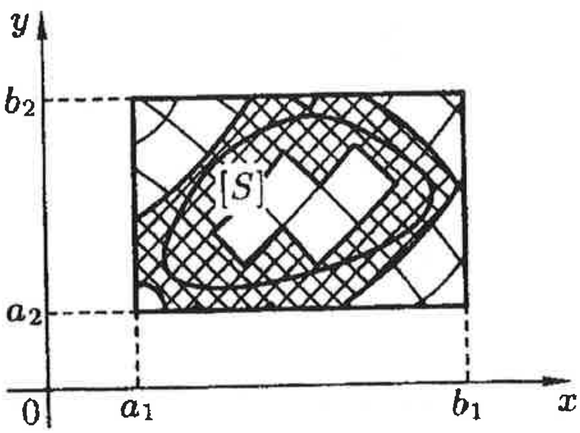


Рис.2



....Рис.3

Л е м м а 3 является простым следствием двух предыдущих.

Будем полагать, что некая стандартная область $[S]$ содержится в стандартной прямоугольной области $[S^*]$, которая в свою очередь разбита на ячейки $[S_k]$, $k = 1, 2, \ldots, m$.

Площадь фигуры, составленной из ячеек, имеющих общие точки с границей области $[S]$, меньше числа $3\Delta\,p$, где p – длина границы прямоугольной области $[S^*]$. Напомним, что Δ – наибольший из диаметров ячеек $[S_k]$ (см. рис. 3).

Теперь приступим к главной части. Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна на стандартной области $[S]$, включённой в стандартную прямоугольную область $[S^*]$. Покажем, что при любой нормальной последовательности разбиений области $[S^*]$ разность $\overline{I_n} - \underline{I_n}$

бесконечно мала. Условимся сразу, что в каждом разбиении ячейки, расположенные внутри области $[S]$, пронумерованы числами 1, 2, . . . , $\overset{*}{m}_n$. Остальным же ячейкам присвоены номера $\overset{*}{m}_n + 1$, $\overset{*}{m}_n + 2, \ldots, m_n$. На рис. 3 совокупность ячеек первого типа ограничена внутренней жирной линией. Забегая вперёд, можно сказать, что именно эти ячейки играют определяющую роль в предельном переходе $n \to +\infty$.

Итак, интересующая нас разность $\overline{I_n} - \underline{I_n}$ равна:

$$\overline{I_n} - \underline{I_n} = \sum_{k=1}^{m_n} \overline{\mu_k} S_k - \sum_{k=1}^{m_n} \underline{\mu_k} S_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{\overset{*}{m}_n} \overline{\mu_k} S_k + \sum_{k=\overset{*}{m}_n+1}^{m_n} \overline{\mu_k} S_k - \left(\sum_{k=1}^{\overset{*}{m}_n} \underline{\mu_k} S_k + \sum_{k=\overset{*}{m}_n+1}^{m_n} \underline{\mu_k} S_k \right).$$

Введём в действие равномерную непрерывность функции $f\ (x,\ y)$ на области $[S]$ и третью лемму, для чего перепишем разность следующим образом:

$$\overline{I_n} - \underline{I_n} = \sum_{k=1}^{\overset{*}{m}_n} \overline{\mu_k} S_k - \sum_{k=1}^{\overset{*}{m}_n} \underline{\mu_k} S_k + \sum_{k=\overset{*}{m}_n+1}^{m_n} \overline{\mu_k} S_k - \sum_{k=\overset{*}{m}_n+1}^{m_n} \underline{\mu_k} S_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{\overset{*}{m}_n} (\overline{\mu_k} - \underline{\mu_k}) S_k + \sum_{k=\overset{*}{m}_n+1}^{m_n} \overline{\mu_k} S_k - \sum_{k=\overset{*}{m}_n+1}^{m_n} \underline{\mu_k} S_k .$$

Перейдём к неравенству:

$$\overline{I_n} - \underline{I_n} \le \left| \sum_{k=1}^{\overset{*}{m}_n} (\overline{\mu_k} - \underline{\mu_k}) S_k \right| + \left| \sum_{k=\overset{*}{m}_n+1}^{m_n} \overline{\mu_k} S_k \right| + \left| \sum_{k=\overset{*}{m}_n+1}^{m_n} \underline{\mu_k} S_k \right|.$$

Покажем, что при неограниченном росте n каждое из трёх последних слагаемых стремится к нулю. Займёмся первым из них. Произвольно зафиксируем $\varepsilon > 0$ и по числу $\dfrac{\varepsilon}{S^*}$ определим $\delta > 0$, такое, что в области $[S]$ выполняется:

$$\left| \tilde{M}\hat{M} \right| < \delta \Rightarrow \left| f(\tilde{M}) - f(\hat{M}) \right| < \frac{\varepsilon}{S^*}.$$

После этого определим номер разбиения, начиная с которого диаметры всех ячеек меньше δ. При всех n, больших указанного номера, имеем:

$$\left| \sum_{k=1}^{\overset{*}{m}_n} (\overline{\mu_k} - \underline{\mu_k}) S_k \right| \le \sum_{k=1}^{\overset{*}{m}_n} \left| \overline{\mu_k} - \underline{\mu_k} \right| S_k \le$$

$$\leq \sum_{k=1}^{m_n^*} \frac{\varepsilon}{S^*} S_k = \varepsilon \frac{\sum_{k=1}^{m_n^*} S_k}{S^*} < \varepsilon.$$

Напоминаем, что в области $[S]$ функция $f(x, y)$ непрерывна и поэтому $\overline{\mu_k} = f(M_k')$, $\underline{\mu_k} = f(M_k'')$, причём точки M_k' и M_k'' находятся в общей ячейке $[S_k]$, диаметр которой меньше δ. Именно поэтому

$$|\overline{\mu_k} - \underline{\mu_k}| < \frac{\varepsilon}{S^*}.$$

Итак, установлено, что

$$\sum_{k=1}^{m_n^*} (\overline{\mu_k} - \underline{\mu_k}) S_k \to 0 \text{ при } n \to +\infty.$$

А теперь обратимся к двум оставшимся слагаемым. Для их оценки воспользуемся третьей леммой. Рекомендуем ещё раз рассмотреть соответствующий рисунок с целью понять, что в интересующих нас суммах фактически задействованы лишь ячейки, пересекающиеся с границей области $[S]$. Составленная из них фигура обведена жирными линиями.

Пользуясь непрерывностью $f(x, y)$ на $[S]$, из которой следует ограниченность функции $f^*(x, y)$ на $[S^*]$, определим число λ, такое, что на всей $[S^*]$ выполняется неравенство $|f^*(x, y)| < \lambda$. Из этого неравенства следуют нужные нам соотношения:

$$|\overline{\mu_k}| < \lambda \text{ и } |\underline{\mu_k}| < \lambda$$

при всех $k = 1, 2, \dots, m_n$; $n = 1, 2, 3, \dots$.

Теперь можно утверждать, что

$$\left| \sum_{k=m_n^*+1}^{m_n} \overline{\mu_k} S_k \right| \leq \sum_{k=m_n^*+1}^{m_n} |\overline{\mu_k}| S_k < \sum_{k=m_n^*+1}^{m_n} \lambda S_k \leq \lambda\, 3\Delta_n p.$$

Точно также оценивается и последняя сумма, а именно:

$$\left| \sum_{k=m_n^*+1}^{m_n} \underline{\mu_k} S_k \right| \leq \lambda\, 3\Delta_n p,$$

здесь p – длина границы области $[S^*]$, Δ_n – наибольший из диаметров ячеек $[S_k]$, $k = 1, 2, \dots, m_n$.

Теперь очевидно, что из условия $\Delta_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ следует:

$$\sum_{k=m_n^*+1}^{m_n} \overline{\mu_k} S_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \text{ а также } \sum_{k=m_n^*+1}^{m_n} \underline{\mu_k} S_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Вторую часть доказательства завершим уже обоснованным утверждением

$$\overline{I_n} - \underline{I_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Третья часть доказательства. Теперь можно сказать, что находящиеся между переменными $\overline{I_n}$ и $\underline{I_n}$ постоянные числа I_* и I^* на самом деле представляют собой одно число, равное $I_* = I^*$, к которому сходятся обе последовательности $\{\overline{I_n}\}$ и $\{\underline{I_n}\}$. Так как $\underline{I_n} \le I_n \le \overline{I_n}$, то к этому же числу сходится и последовательность $\{I_n\}$ произвольных интегральных сумм функции $f^*(x, y)$, а это означает, что $f^*(x, y)$ интегрируема на $[S^*]$, следовательно, $f(x, y)$ интегрируема на $[S] \subseteq [S^*]$, и мы вправе написать:

$$\iint\limits_{[S]} f(x, y)\,dxdy = \iint\limits_{[S^*]} f^*(x, y)\,dxdy.$$

При этом $[S]$ называется областью интегрирования функции $f(x, y)$. Теорема доказана.

Из теоремы и фактов, выявленных в процессе её доказательства, следует:

$$\iint\limits_{[S]} f(x, y)\,dxdy = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{m_n^*} f(x_k, y_k)\,S_k.$$

Здесь под знаком предела не вся интегральная сумма функции $f(x, y)$, а лишь её часть, соответствующая ячейкам, расположенным внутри области интегрирования. Следовательно, интеграл не зависит от значений функции на границе области $[S]$, т.е. интеграл не изменится, если подынтегральную функцию изменить на границе области интегрирования, но лишь так, чтобы преобразованная функция оставалась ограниченной. На этом основании можно сказать, что двойной интеграл непрерывной на стандартной области функции можно представлять пределом последовательности интегральных сумм этой функции на разбиениях самой области $[S]$ без её включения в прямоугольную область. При составлении сумм приграничные ячейки можно исключить.

Расширим понятие стандартной области следующим естественным добавлением к основному определению. Фигуру $[S]$ в плоскости Oxy мы также будем называть стандартной областью, если, во-первых, её проекция на ось Oy представляет собой отрезок $[a, b]$, во-вторых, каждая пересекающая её горизонтальная прямая имеет с $[S]$ общий отрезок или точку, и, в-третьих, фигура $[S]$ слева и справа ограничена графиками непрерывных на $[a, b]$ функций $x_1(y) \le x_2(y)$ (см. рис. 4).

Очевидно, что непрерывная на такой области $[S]$ функция $f(x, y)$ интегрируема.

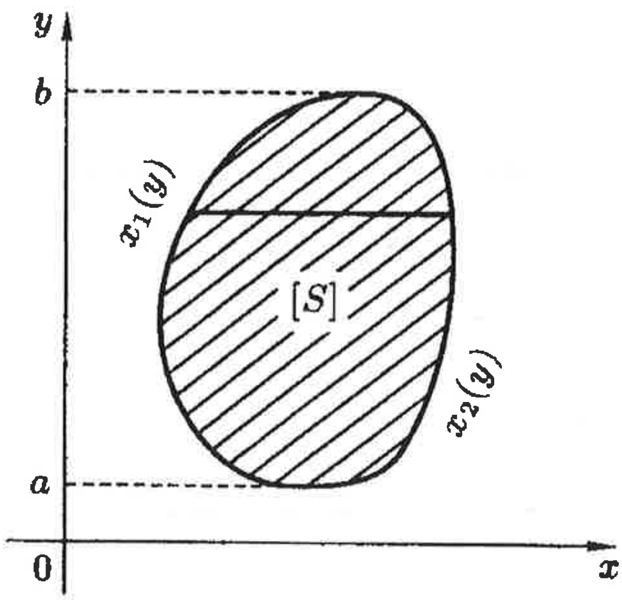


Рис.4

6. Теорема о среднем

Среднее интегральное значение множества значений функции на заданной области определяется как отношение интеграла к площади области интегрирования.

Т е о р е м а. Если функция $f(x, y)$ непрерывна на стандартной области $[S]$, то найдётся по меньшей мере одна точка $\widetilde{M} \in [S]$, такая, что

$$\frac{1}{S} \iint\limits_{[S]} f(x, y)\, dxdy = f(\widetilde{M}\,).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\underline{\mu} \leq$- $\overline{\mu}$ - крайние значения функции $f(x, y)$ на области $[S]$. Тогда на всей области $[S]$ имеем:

$$\underline{\mu} \leq f(x, y) \leq \overline{\mu}\,.$$

Перейдём к интегралам:

$$\iint\limits_{[S]} \underline{\mu}\, dxdy \leq \iint\limits_{[S]} f(x, y)\, dxdy \leq \iint\limits_{[S]} \overline{\mu}\, dxdy$$

Отсюда

$$\underline{\mu}\, S \leq \iint\limits_{[S]} f(x, y)\, dxdy \leq \overline{\mu}\, S.$$

Делением на S получаем:

$$\underline{\mu} \leq \frac{1}{S} \iint\limits_{[S]} f(x, y)\, dxdy \leq \overline{\mu}\,.$$

Видим, что среднее интегральное находится между крайними значениями функции. Т.к. значения $f(x, y)$ на $[S]$ сплошь заполняют отрезок $[\underline{\mu},\ \overline{\mu}]$, можно сказать, что среди них найдётся значение функции, равное указанному отношению. Это означает, что найдётся по меньшей мере одна точка $\widetilde{M} \in [S]$, такая, что

$$\frac{1}{S} \iint\limits_{[S]} f(x, y)\, dxdy = f(\widetilde{M}\,) \Rightarrow \iint\limits_{[S]} f(x, y)\, dxdy = f(\widetilde{M}\,)\, S.$$

Теорема доказана.

7. Двойной интеграл по обобщённой стандартной области

Фигуру $[S]$ будем называть обобщённой стандартной областью, если её вертикальными прямыми или графиками непрерывных функций можно разбить на конечное число стандартных частей (см. рис. 5).

Т е о р е м а. Непрерывная на обобщённой стандартной области функция интегрируема, и её интеграл по этой области равен сумме интегралов по всем стандартным частям.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна на обобщённой стандартной области $[S]$, и пусть эта область разбита на три стандартных части $[S_1]$, $[S_2]$, $[S_3]$ (см. рис. 5). Будем считать, что $[S]$ содержится в некоторой стандартной прямоугольной области $[S^*]$ и отдельно рассмотрим включённые в эту область стандартные составляющие $[S_1]$, $[S_2]$, $[S_3]$.

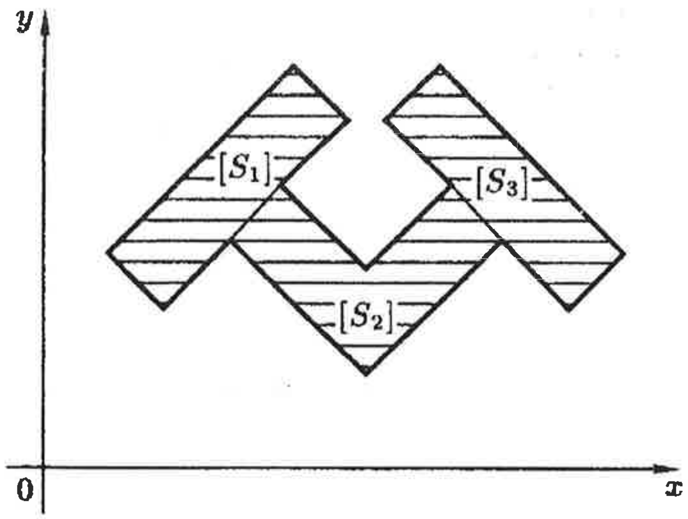


Рис.5

Согласно теореме об интегрируемости непрерывной функции $f(x, y)$ интегрируема на каждой из этих областей, т.е. соответствующие стандартные продолжения $f_1^*(x, y)$, $f_2^*(x, y)$, $f_3^*(x, y)$ нашей функции на область $[S^*]$ интегрируемы на этой области. Напоминаем, что по определению стандартного продолжения во всех точках области $[S_i]$ имеем $f_i^*(x, y) = f(x, y)$ и $f^*(x, y) \equiv 0$ на остальной части области $[S^*]$, $i = 1, 2, 3$. Интегрируемой является и сумма $f_1^*(x, y) + f_2^*(x, y) + f_3^*(x, y)$. Заметим, что эта сумма на области $[S]$, за исключением, быть может, общих границ стандартных частей совпадает с данной функцией $f(x, y)$. На остальной части прямоугольной области $[S^*]$ сумма тождественна нулю. Отсюда выводится, что данная непрерывная на обобщённой стандартной области $[S]$ функция $f(x, y)$ интегрируема на этой области и её двойной интеграл представляется в виде:

$$\iint\limits_{[S]} f(x, y)\,dxdy = \iint\limits_{[S^*]} f_1^*(x, y)\,dxdy + \iint\limits_{[S^*]} f_2^*(x, y)\,dxdy + \iint\limits_{[S^*]} f_3^*(x, y)\,dxdy =$$

$$= \iint\limits_{[S_1]} f(x, y)\,dxdy + \iint\limits_{[S_2]} f(x, y)\,dxdy + \iint\limits_{[S_3]} f(x, y)\,dxdy.$$

Заметим, что приведённые рассуждения по своей сути свободны от способа разбиения исходной области на стандартные части и от числа этих частей, поэтому можно полагать, что теорема доказана.

С л е д с т в и е. Если область интегрирования разбита на обобщённые стандартные части, то сумма интегралов по всем таким частям равна исходному интегралу.

8. Формула вычисления двойного интеграла по прямоугольной области

Будем полагать, что функция $f(x, y)$ непрерывна на прямоугольной стандартной области $[S^*]$ и что отрезки $[a_1, b_1]$ и $[a_2, b_2]$ служат проекциями области на соответствующие координатные оси. Двойной интеграл по прямоугольной стандартной области можно представить как результат двукратного интегрирования следующим образом:

$$\iint\limits_{[S^*]} f(x, y)\, dxdy = \int\limits_{a_1}^{b_1} dx \int\limits_{a_2}^{b_2} f(x, y)\, dy.$$

Выражение в правой части равенства называют двукратным или чаще повторным интегралом. Вычисляется повторный интеграл в два этапа. Сперва при фиксированном $x \in [a_1, b_1]$ вычисляется интеграл

$$\int\limits_{a_2}^{b_2} f(x, y)\, dy = g(x),$$

затем x освобождается от фиксации, и выполняется повторное интегрирование, уже по переменной x. Подынтегральной функцией служит $g(x)$. В итоге получается число

$$\int\limits_{a_1}^{b_1} g(x)\, dx = \int\limits_{a_1}^{b_1} dx \int\limits_{a_2}^{b_2} f(x, y)\, dy.$$

Заметим, что при фиксированном x функция $f(x, y)$ как функция переменной y непрерывна на отрезке $[a_2, b_2]$, чем мы воспользовались при первичном интегрировании. Кроме того, непрерывной является и функция

$$g(x) = \int\limits_{a_2}^{b_2} f(x, y)\, dy,$$

что мы использовали при повторном интегрировании.

Первое утверждение практически очевидно, второе доказывается на основании равномерной непрерывности $f(x, y)$ на $[S^*]$.

Итак, докажем, что

$$\int\limits_{a_1}^{b_1} dx \int\limits_{a_2}^{b_2} f(x, y)\, dy = \iint\limits_{[S^*]} f(x, y)\, dxdy.$$

Идея доказательства состоит в том, чтобы построить нормальную последовательность разбиений области $[S^*]$ и на каждом разбиении сформировать интегральную сумму функции $f(x, y)$, точно равную повторному интегралу. Реализуем замысел следующим образом.

Разобьём отрезок $[a_1, b_1]$ на n равных частей точками $x_0 = a_1, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = b_1$. Заметим сразу, что

$$x_k - x_{k-1} = \frac{b_1 - a_1}{n}$$

при всех $k = 1, 2, 3, \ldots, n$. Представим повторный интеграл в виде определённого, к которому применим теорему о разбиении отрезка интегрирования, а затем к каждому из интегралов по частичным отрезкам применим теорему о среднем.

$$\int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} f(x, y)\,dy = \int_{a_1}^{b_1} g(x)\,dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i) \frac{b_1 - a_1}{n}.$$

А теперь на n равных частей разобьём отрезок $[a_2, b_2]$ точками $y_0 = a_2, y_1, \dots, y_{n-1}, y_n = b_2$. Здесь

$$y_j - y_{j-1} = \frac{b_2 - a_2}{n},$$

$j = 1, 2, 3, \dots, n$. Соответственно преобразуем $g(\xi_i)$

$$g(\xi_i) = \int_{a_2}^{b_2} f(\xi_i, y)\,dy = \sum_{j=1}^{n} \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(\xi_i, y)\,dy =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} f(\xi_i, \eta_j) \cdot (y_j - y_{j-1}) = \sum_{j=1}^{n} f(\xi_i, \eta_j) \frac{b_2 - a_2}{n},$$

$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $\eta_j \in [y_{j-1}, y_j]$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$; $j = 1, 2, 3, \dots, n$. И здесь мы сначала применили теорему о разбиении, а потом к каждому из n получившихся интегралов – теорему о среднем.

Таким образом,

$$\int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} f(x, y)\,dy = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f(\xi_i, \eta_j) \frac{b_1 - a_1}{n} \frac{b_2 - a_2}{n}.$$

Можно сказать, что мы у цели. Действительно, при любом $n \in N$ прямые $x = x_i$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$; $y = y_j$, $j = 1, 2, 3, \dots, n$ разбивают $[S^*]$ на n^2

равных частей $[S_{ij}]$ с общей площадью

$$S_{ij} = \frac{b_1 - a_1}{n} \frac{b_2 - a_2}{n}.$$

Помимо разбиения указан принцип определения опорных точек (ξ_i, η_j) (см. рис. 6).

Двухиндексная система обозначений ячеек и соответствующих опорных точек в нашей конструкции возникла естественно, и, очевидно, нет причины вводить сквозную нумерацию.

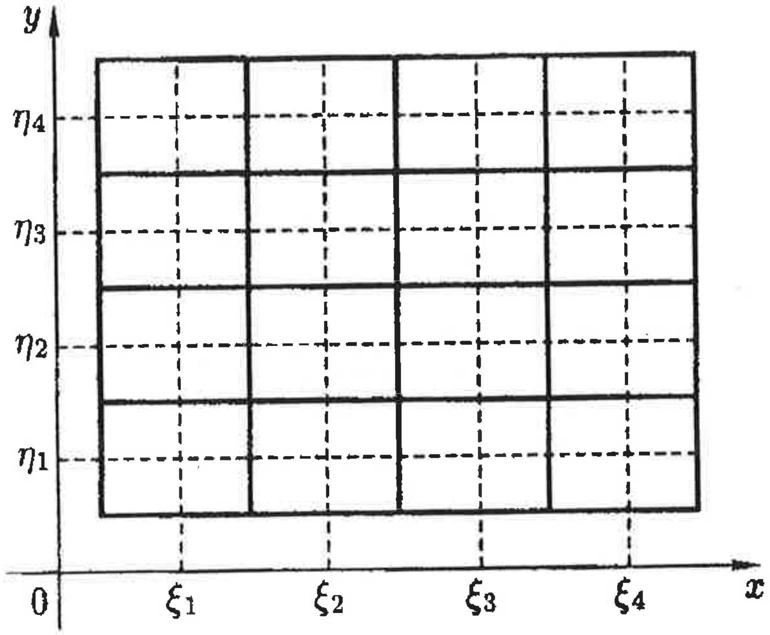


Рис.6

Итак, мы указали нормальную последовательность разбиений области $[S^*]$ и определили на ней последовательность $\{I_n\}$ специальных интегральных сумм функции $f(x, y)$, все члены которой равны повторному интегралу, т.е.

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f(\xi_i, \eta_j)\, S_{ij} = \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} f(x, y)\, dy,\ n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Исключительно формы ради выпишем:

$$I_n \underset{n\to\infty}{\to} \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} f(x, y)\, dy,$$

$$I_n \underset{n\to\infty}{\to} \iint_{[S]} f(x, y)\, dxdy \Rightarrow \iint_{[S^*]} f(x, y)\, dxdy = \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} f(x, y)\, dy.$$

Равенство двойного и повторного интегралов доказано.

Это равенство представляет собой частный случай так называемой формулы Фубини, которая приведена в следующем пункте.

9. Формула вычисления двойного интеграла по произвольной стандартной области (формула Фубини)

Предполагается, что функция $f(x, y)$ непрерывна на стандартной области $[S]$. Область ограничена отрезками прямых $x = a$, $x = b$, при $a < b$, а также графиками непрерывных на $[a, b]$ функций $y_1(x) \le y_2(x)$. Соответствующий двойной интеграл можно вычислить по формуле Фубини:

$$\iint\limits_{[S]} f(x, y)\,dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\,dy.$$

Выражение в правой части равенства называют повторным интегралом. Его вид указывает на следующий порядок действий. Сначала функция $f(x, y)$ при фиксированном $x \in [a, b]$ интегрируется по y в пределах от $y_1(x)$ до $y_2(x)$. После этого x освобождается от фиксации, и полученное выражение интегрируется по $[a, b]$. На этом этапе переменной интегрирования, естественно, является x. В итоге получается число, равное интересующему нас двойному интегралу.

Всё сказанное, разумеется, нуждается в обосновании. Сначала обращаем Ваше внимание на то, что функция

$$g(x) = \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\,dy$$

непрерывна на отрезке $[a, b]$. Действительно,

$$\Delta g(x) = g(x + \Delta x) - g(x) = \int\limits_{y_1(x+\Delta x)}^{y_2(x+\Delta x)} f(x + \Delta x, y)\,dy - \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\,dy.$$

К первому интегралу применяем теорему о разбиении отрезка интегрирования с целью представить приращение функции $g(x)$ в следующем виде

$$\Delta g(x) = \int\limits_{y_1(x+\Delta x)}^{y_1(x)} f(x + \Delta x, y)\,dy + \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x + \Delta x, y)\,dy +$$

$$+ \int\limits_{y_2(x)}^{y_2(x+\Delta x)} f(x + \Delta x, y)\,dy - \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\,dy =$$

$$= \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} (f(x + \Delta x, y) - f(x, y))\,dy + \int\limits_{y_1(x+\Delta x)}^{y_1(x)} f(x + \Delta x, y)\,dy +$$

$$+ \int\limits_{y_2(x)}^{y_2(x+\Delta x)} f(x + \Delta x, y)\,dy.$$

При бесконечно малом Δx эти интегралы бесконечно малы. При оценке первого интеграла нужно использовать равномерную непрерывность, а двух других – ограниченность функции $f(x, y)$ на области $[S]$.

Будем полагать теперь, что наша область $[S]$ включена в прямоугольную стандартную область $[S^*]$, ограниченную прямыми $x = a_1$, $x = b_1$, $y = a_2$, $y = b_2$. При этом будем считать, что $a_1 = a$, $b_1 = b$, т.е. проекции на ось Ox областей $[S]$ и $[S^*]$ совпадают. Введём также стандартное продолжение $f^*(x, y)$ данной функции $f(x, y)$ на указанную область $[S^*]$. Напоминаем, что $f^*(x, y)$ на области $[S]$ совпадает с $f(x, y)$, в остальной же части области $[S^*]$ она тождественно равна нулю.

Основная идея дальнейшего состоит в том, чтобы, как и в предыдущем пункте, построить нормальную последовательность разбиений области $[S^*]$ и определить на ней последовательность интегральных сумм функции $f^*(x, y)$, точно равных повторному интегралу:

$$\int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} f^*(x, y)\, dy.$$

Сначала вводится функция:

$$g(x) = \int_{a_2}^{b_2} f^*(x, y)\, dy.$$

Отрезок $[a_1, b_1]$ точками $x_0 = a_1, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = b_1$ разбивается на n равных частей. Затем к интегралу

$$\int_{a_1}^{b_1} g(x)\, dx$$

применяется теорема о разбиении отрезка интегрирования:

$$\int_{a_1}^{b_1} g(x)\, dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x)\, dx.$$

К каждому из n получившихся интегралов применяется теорема о среднем. В итоге имеем:

$$\int_{a_1}^{b_1} g(x)\, dx = \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\,(x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\, \frac{b_1 - a_1}{n}.$$

После этого отрезок $[a_2, b_2]$ разбивается на n равных частей точками $y_0 = a_2, y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n = b_2$, и выражение

$$g(\xi_i) = \int\limits_{a_2}^{b_2} f^*(\xi_i, y)\, dy,$$

опять же с помощью теоремы о разбиении, представляется в следующем виде:

$$g(\xi_i) = \int\limits_{a_2}^{b_2} f^*(\xi_i, y)\, dy = \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{y_{j-1}}^{y_j} f^*(\xi_i, y)\, dy.$$

Сейчас мы остановились перед некоторым осложнением, естественно возникающим при переходе от интеграла по прямоугольной области к интегралу по стандартной области произвольной конфигурации. Дело в том, что мы не можем безоглядно к получившимся интегралам применить теорему о среднем, поскольку в некоторых из них подынтегральная функция может оказаться разрывной. Чтобы снять проблему, через все точки с координатами $(\xi_i;\ y_1(\xi_i))$, $(\xi_i;\ y_2(\xi_i))$, $i = 1, 2, \ldots, n$, проведём горизонтальные прямые и рассмотрим точки их пересечения с осью Oy. Те из них, которые попадают внутрь уже имеющихся частичных отрезков $[y_{j-1}, y_j]$, задействуем как дополнительные разбивающие точки. После этого имеющиеся и новые точки заново перенумеруем и в порядке возрастания обозначим $\hat{y}_0 = a_2,\ \hat{y}_1, \ldots, \hat{y}_{n^*} = b_2$. На рис.7 изображена область $[S^*]$, включающая в себя $[S]$. Первоначально она разбита на 9 одинаковых частей. Затем через точки пересечения прямых $x = \xi_1$, $x = \xi_2$, $x = \xi_3$ с границей области $[S]$ проведены дополнительные горизонтали, которые разбивают область $[S^*]$ на ещё более мелкие части. Точки пересечения этих горизонталей с отрезком $[a_2, b_2]$ вместе с точками y_1 и y_2 определяют новое, более мелкое разбиение этого отрезка. Именно они заново пронумерованы и обозначены символом $\hat{y}_j$.

Вот теперь выражение $g(\xi_i)$ представим в виде:

$$g(\xi_i) = \int\limits_{a_2}^{b_2} f^*(\xi_i, y)\, dy = \sum_{j=1}^{n^*} \int\limits_{\hat{y}_{j-1}}^{\hat{y}_j} f^*(\xi_i, y)\, dy =$$

$$= \sum_{j=1}^{n^*} f^*(\xi_i, \eta_j)(\hat{y}_j - \hat{y}_{j-1}).$$

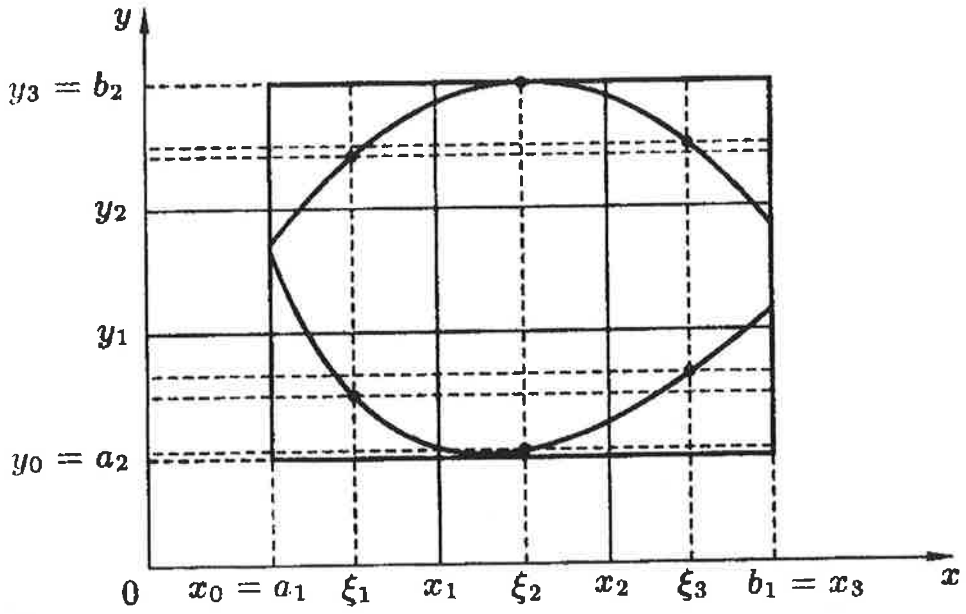


Рис.7

Как видим, и здесь мы сначала воспользовались теоремой о разбиении, а потом – теоремой о среднем для определённого интеграла.

Таким образом, повторный интеграл функции $f^*(x, y)$ по прямоугольной области $[S^*]$ записывается следующим образом:

$$\int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} f^*(x, y)\, dy = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n^*} f^*(\xi_i, \eta_j) \frac{b_1 - a_1}{n} (\hat{y}_j - \hat{y}_{j-1}).$$

Подведём некоторые итоги. Во-первых, прямые $x = x_i$, $y = \hat{y}_j$ разбивают область $[S^*]$ на прямоугольные ячейки $[S_{ij}]$ с площадями

$$S_{ij} = \frac{b_1 - a_1}{n} (\hat{y}_j - \hat{y}_{j-1}),$$

$i = 1, 2, 3, \ldots, n$; $j = 1, 2, 3, \ldots, n^*$. Число ячеек $m_n = n \cdot n^*$. Тем самым мы указали принцип, который при $n = 1, 2, 3, \ldots$ определяет нормальную последовательность разбиений данной области.

Во-вторых, двойная сумма

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n^*} f^*(\xi_i, \eta_j)\, S_{ij}$$

представляет собой n–й член последовательности $\{I_n\}$ специальных интегральных сумм функции $f^*(x, y)$, определённой на указанной последовательности разбиений.

В-третьих, все члены этой последовательности равны повторному интегралу, т.е.

$$I_n = \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} f^*(x, y)\, dy.$$

Ясно, что эта последовательность сходится к указанному повторному интегралу.

Так как $f^*(x, y)$ интегрируема на $[S^*]$, последовательность $\{I_n\}$ сходится и к двойному интегралу:

$$\iint_{[S^*]} f^*(x, y)\, dxdy.$$

Вывод. Двойной интеграл равен повторному, т.е.

$$\iint_{[S^*]} f^*(x, y)\, dxdy = \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} f^*(x, y)\, dy.$$

Обращаем Ваше внимание и на то, что при всех $x \in [a_1, b_1] = [a, b]$ функция $g(x)$ равна:

$$g(x) = \int_{a_2}^{b_2} f^*(\xi_i, y)\, dy = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\, dy.$$

Следовательно,

$$\int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} f^*(x, y)\, dy = \int_{a}^{b} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\, dy.$$

Таким образом, установлен факт:

$$\iint_{[S]} f(x, y)\, dxdy = \int_{a}^{b} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\, dy.$$

Это равенство будем называть **формулой Фубини.**

Н.А. ЕЛИЗАРОВА

ГУМАНИЗАЦИЯ ШКОЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ ЧЕРЕЗ ПРОФИЛЬНОЕ ОБУЧЕНИЕ

В условиях модернизации школьная система образования должна обеспечить решение трех задач:

сохранить физическое и моральное здоровье учащихся;

воспитать в духе патриотизма и признания общечеловеческих ценностей;

социально защитить, дав ученику возможность получить более высокое образование и достойную профессию, чтобы обеспечить наилучшие условия жизни.

С точки зрения указанных ценностей необходимо признать, что существующая система образования не справляется с этими задачами.

Молодежь стала более рациональной, они хотят по кратчайшему пути достичь цели. Демократизация общества позволяет им не делать то, что не нравится. Разнообразие учащихся по склонностям и инте ресам входит в противоречие с существующей системой образова ния, которая в полной мере не учитывает это разнообразие.

Выход: создать гибкую систему образования, способную развивать индивидуальные склонности и способности каждого ученика. Наиболее реальной и адекватной этим требованиям является система образования – воспитания, построенная на **профильном обучении.** Важнейшим вопросом организации профильного обучения является определение структуры и направлений профилизации, а также модели организации профильного обучения. При этом следует учитывать, с одной стороны, стремление наиболее полно учесть индивидуальные интересы, способности, склонности старшеклассников (это ведёт к созданию большого числа различных профилей), с другой – ряд факторов, сдерживающих процессы такой во многом стихийной дифференциации образования: введение единого государственного экзамена, утверждение стандарта общего образования, необходимость стабилизации федерального перечня учебников, обеспечение профильного обучения соответствующими педагогическими кадрами и др.

Очевидно, что любая форма профилизации обучения ведёт к сокращению инвариантного компонента. Реализация профильного обучения возможна только при условии относительного сокращения учебного материала непрофильных предметов, изучаемых с целью завершения базовой общеобразовательной подготовки учащихся. Модель общеобразовательного учреждения с профильным обучением на старшей ступени предусматривает возможность разнообразных комбинаций учебных предметов, что и будет обеспечивать гибкую систему профильного обучения. Эта система должна включать в себя следующие типы учебных предметов: базовые общеобразовательные, профильные и элективные.

Ниже укажем основные принципы, на которых, на наш взгляд, целесообразно построить технологию обучения по про фильным и непрофильным дисциплинам.

Схема 1

Принципы обучения в старших профильных классах

по профильным дисциплинам	по непрофильным дисциплинам
min max - 1 min max-2 Диалоговая система обучения: учитель-режиссер, ученик-соучастник собственного образования. Преобладание творческой деятельности ученика. Активное участие ученика в мероприятиях по профилю (олимпиады, конкурсы, конференции, посещение спецкурсов в школе, вузах и НИИ). Гуманизация образования.	1 . Обеспечение заинтересованности учащихся данной дисциплиной. 2. min max - 3 минимум домашних заданий, максимальное усвоение изучаемого материала на уроках. 3.Максимальное исключение конфликтных ситуаций. 4. Поощрение творческой деятельности без дополнительной нагрузки. 5. Гуманизация образования.

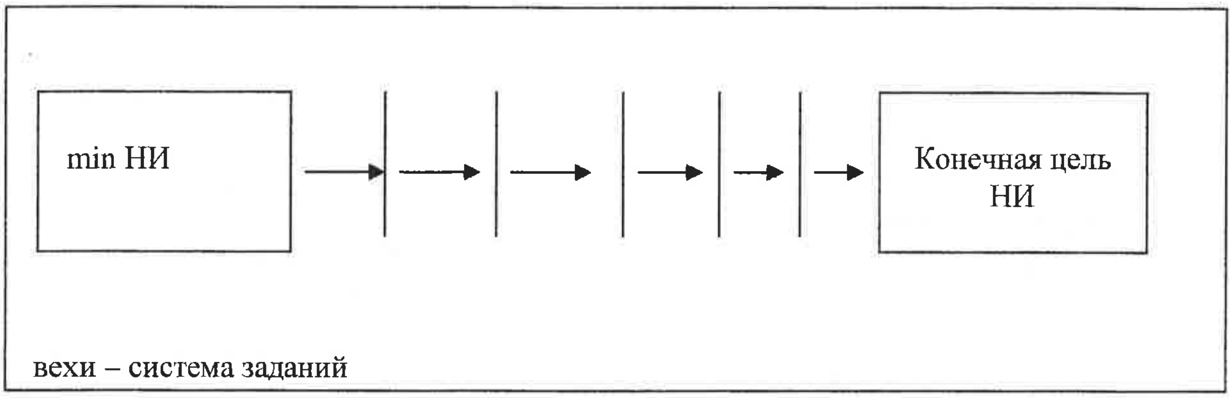
Коротко охарактеризуем эту схему.

Первый принцип – min max - 1 означает: существенно уменьшить объем минимума содержания образования, что позволяет уменьшить время на его изучение и увеличить время на образовательный процесс по профилю. В опубликованных базисных планах профильного обучения время на изучение только федерального компонента составляет 22 часа в неделю, т.е. минимум содержания образования слишком большой.

Второй принцип – min max - 2 определяет стратегию организации образовательного процесса по темам: учитель сообщает минимум научной информации по теме, ученик большей частью самостоятельно получает ту научно-практическую информацию, которая определена учителем в соответствии со стандартами и требованиями ПГЭ. Минимальный начальный объем информации (min НИ) и систему заданий (СЗ), раскрывающих содержание конечной цели, назовем вехами. Эти вехи указывают направление «дороги», обучаемый должен сам построить эту «дорогу», т.е. достичь конечной цели - получить максимум научной информации. Принцип min max - 2 можно изобразить в виде схемы 2.

Схема 2

min max - 2



Если система заданий слабая, то и система препятствий будет сла бой. В этом случае обучаемый выкладывается не в полной мере, по этому он остается «вечно в себе» как для окружающих, так и для себя самого. Если же система заданий недоступна большинству, то тоже нет никакой пользы. В указанных случаях особая роль отводится ре жиссеру (преподавателю - учителю). За счет индивидуализации обу чения опытный режиссер найдет золотую середину.

При оптимальном подходе к образовательному процессу раз виваются мышление и творчество, происходит обучение через деятель ность с максимально возможным уровнем самостоятельности обучае мого при высоком уровне режиссуры преподавателя - учителя. Иначе говоря, реализуется принцип min max - 2 минимум начальной инфор мации, достижение конечной цели при максимальном уровне само стоятельной и творческой работы ученика.

Третий принцип касается организации диалоговой системы обра зования, в которой учителю отводится роль режиссера, а ученику роль соучастника его же образования (см. схему 3).

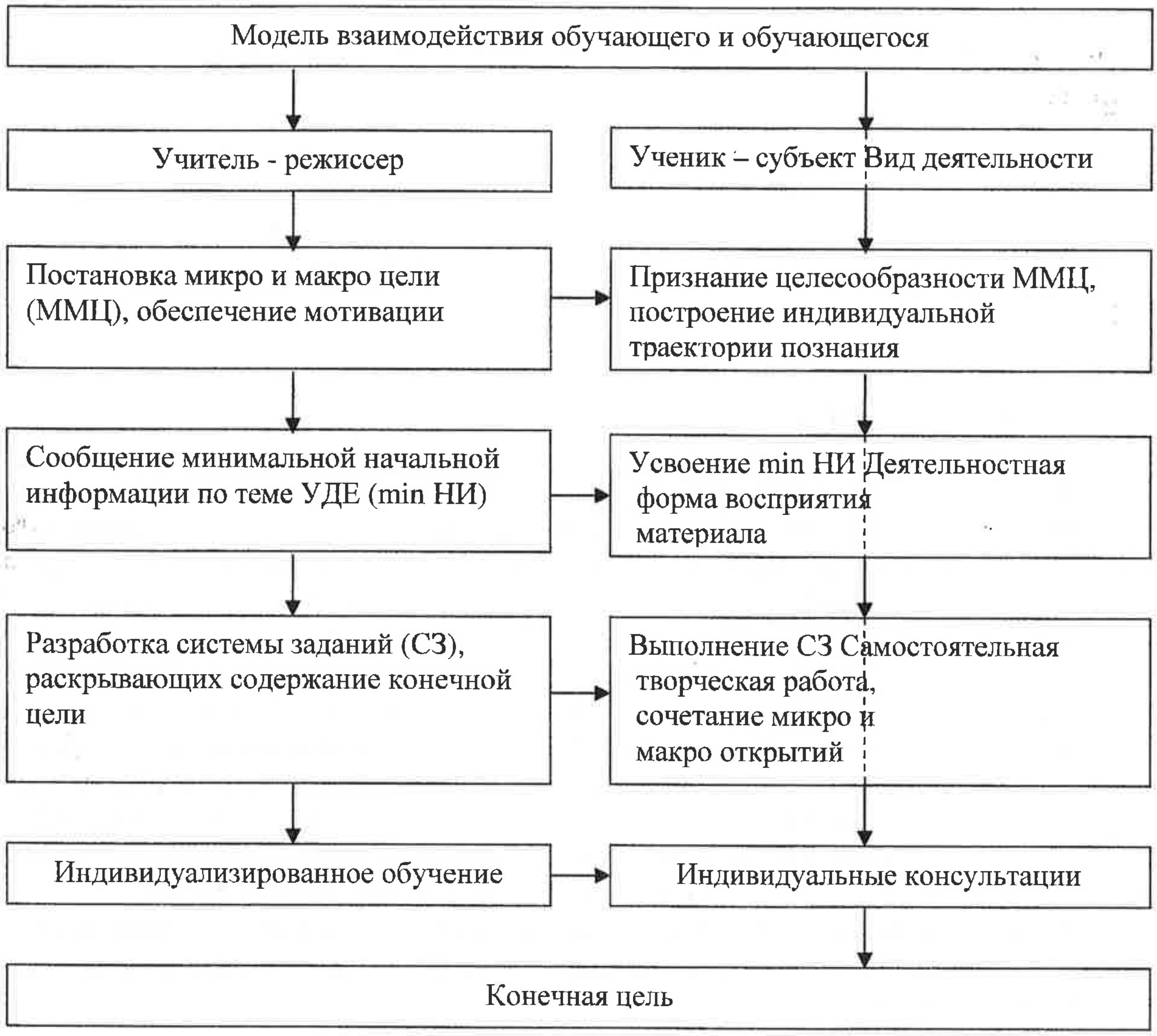
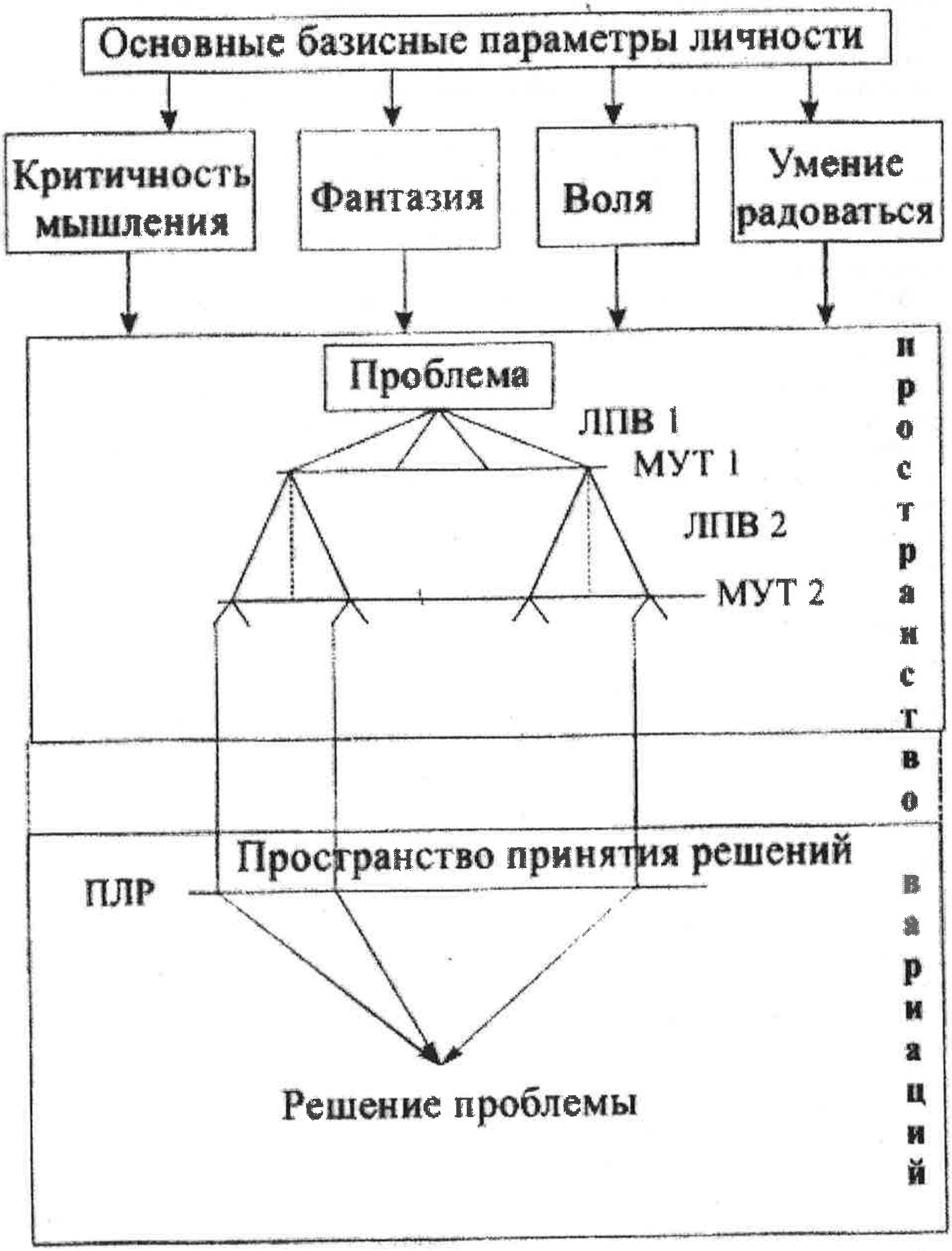

Модель взаимодействия обучающего и обучающегося
Учитель - режиссер
Ученик – субъект Вид деятельности
Постановка микро и макро цели (ММЦ), обеспечение мотивации
Признание целесообразности ММЦ, построение индивидуальной траектории познания
Сообщение минимальной начальной информации по теме УДЕ (min НИ)
Усвоение min НИ Деятельностная форма восприятия материала
Разработка системы заданий (СЗ), раскрывающих содержание конечной цели
Выполнение СЗ Самостоятельная творческая работа, сочетание микро и макро открытий
Индивидуализированное обучение
Индивидуальные консультации
Конечная цель

Схема 3

Четвертый принцип - преобладание творческой деятельности ученика.Постараемся «войти» во внутренний мир обучаемого, из которого мы хотим «выточить» творческую личность. Сразу укажем на не очень удачное слово «обучаемый», но здесь мы его применяем для кратнос ти характеристики системы «обучающий - обучаемый», а смысл при даем следующий: обучаемый - это не объект воздействия, а субъект, активный соучастник в его же обучении и воспитании. Эту попытку зададим в виде следующей модели (схема 4).

Схема 4

Модель развития творческой личности



Как функционирует эта модель? Все начинается с проблемы, ее назовем первой узловой точкой. Здесь мы опускаем описание изуче ния литературы, хоть в какой-то степени посвященной данной проблеме (хотя это подразумевается).

Первый этап. Строим версии решения этой проблемы. Множество всех таких версий назовем ЛПВ 1 - локальным пространством версий первого уровня. Созданию ЛПВ 1 содействует фантазия, уровень ком петентности и начитанности личности в данной проблеме и умение получать радость от исследовательской деятельности.

Второй этап. Ищем узловые точки на каждой версии множества ЛПВ 1. Множество всех, впервые найденных на версиях узловых точек, обозначим через МУТ 1 - многообразие узловых точек первого уровня. Далее строим множество версий относительно каждой узло вой точки МУТ 1. Объединение множества всех таких версий обозна чим через ЛПВ 2 - локальное пространство версий второго уровня.

Этот процесс продолжаем. Каждую сквозную версию, состоящую из узловых точек и локальных версий, назовем траекторией решения проблемы. Решение, найденное по каждой конкретной траектории, назовем локальным решением проблемы. Множество всех таких ре шений назовем пространством локальных решений (ПЛР).

Наилучшее решение (в соответствующем смысле) среди множества локальных решений является глобальным решением проблемы (про сто решением проблемы).

Заметим, что необходимы большое упорство и способность в постро ении логического дерева, особенно в нахождении локальных и глобаль ных решений.

Здесь можно четко проводить границу между талантом и гением. Талантливый человек, как правило, создает полное логическое дерево решения проблемы, находит системно локальные решения и т.д. А гений «чувствует» проблему, он строит только часть логического дерева, только для этой части находит решения, а, зачастую, сразу нахо дит верную траекторию и нужное решение проблемы.

Рассмотрим принцип построения учебного процесса по непрофильным дисциплинам.

Здесь требуется от учителя достичь невозможное: преподавание необходимо вести так, чтобы «нелюбимый» предмет стал любимым, или по крайней мере надо добиться интереса ученика к этому предме ту. Без этого обеспечить усвоение минимума содержания будет весьма затруднительным. Учитель должен показать высший пилотаж педаго гического мастерства, его доля по-особому тяжела. Тем более что он (учитель) не имеет права создавать конфликтные ситуации (третий принцип), загружать детей (второй принцип), кроме того, и поощрять творческую деятельность (четвертый принцип). В этом отличие дея тельности учителя непрофильных дисциплин.

Учителя профильных дисциплин должны знать в совершенстве свой предмет, уметь с учениками, как соучастниками, организовать в диа логовом режиме обучение через учебную деятельность, развивать твор чество и активность по выбранному профилю.

Поскольку выбор профиля является делом ответственным как для ученика, так и для его ближайшего окружения (родителей и учите лей), то в начальном и среднем звеньях школьной системы образова ния должны быть предприняты соответствующие шаги:

1. Желательно выделить день занятий по интересам. В этот день не должно быть обязательных занятий по обязательному минимуму, что бы исключить возможные дискомфортные ситуации. Скользящие круж ки и факультативы должны позволить учащемуся в этот день посе щать несколько видов занятий по интересам (например, 2 или 3).

2. Активизировать участие учащихся этих классов в олимпиадах и конкурсах разного уровня. Им полезно было бы посещение спецкур сов и курсов углубления для старшеклассников и в вузах.

Рассмотрим возможности профильного образования в гумани зации образования и общества. Таких возможностей, на наш взгляд, не менее четырех, в этом проявляется его многоаспектность.

Первое - профильное образование при правильной его организа ции снижает конфликтность в системе школьного образования по не профильным дисциплинам за счет щадящего режима.

Второе - профильное образование создает благоприятные условия для изучения профильных дисциплин, получения более глубоких тео ретических знаний и практических навыков, развития индивидуальных склонностей и способностей, которые заложены у учащегося природой.

Третье - профильное образование содействует самореализации и самопознанию.

Четвертое - профильное образование способствует преодолению интеллектуальной неразвитости и развитию творческих возможнос тей учащихся.

Итак, система образования - воспитания, построения на правиль ном профильном обучении, создает благоприятные условия для рас крытия и развития природных способностей ребенка, предлагает пси хологический комфорт и поиск собственной ниши и поля деятельнос ти. Формирует чувство собственного достоинства, состояния ра дости и других позитивных чувств. Такая система образова ния служит ученику и тем самым способствует гуманизации образо вания и общества в целом.

Ю.И. КАШИЦИНА

МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Математика — образовательная область, определяемая высоким об щекультурным потенциалом математической науки, имеющей в качестве объекта все элементы триады Человек — Природа — Общество.

Не подлежит сомнению важность изучения математики для формирования и развития мышления человека, прежде всего, абстрактного мышления, способности к абстрагированию и умения "работать" с абстрактными, "неосязаемыми" объектами. В процессе изучения математики в наиболее чистом виде может быть сформировано логическое мышление, алгоритмическое мышление, многие качества мышления -такие, как сила и гибкость, конструктивность и критичность и т.д.

Поэтому в качестве одной из ведущих для школьного математи ческого образования стала задача обще интеллектуального развития уча щихся, усиленное внимание к развивающей функции обучения математике образовательной, информационной функцией. Выдвижение этой задачи на первый план практически совпало по времени с новым подходом к школьному обучению математике.

В соответствии с приоритетом развивающей функции центром ме тодической системы обучения математике становится не только изучение основ математической науки как таковой, а познание окружающего человека мира средствами математики и, как следствие, динамичная адаптация человека к этому миру, социализация личности.

В этом плане цели математического образования определенно соот ветствуют целям школьного образования вообще, а обучение математике выполняет в этом процессе функции, имманентные самой математической науке, а именно развитие абстрактного мышления, логического мышления как дедуктивного, в том числе и аксиоматического, развитие продуктивно го, эвристического и алгоритмического мышления, формирование видения математических закономерностей в повседневной практике и их использо-зания на основе математического моделирования, освоение математиче ской символики и терминологии в качестве компоненты естественного языка.

Выдвигая в качестве приоритетных интересы личности, такое по нимание школьного математического образования ни в коей мере не при нижает "научно-технические" интересы общества. "Математика для всех" не сводится ни к "прогулкам по саду математики", ни к "сервисному" по строению школьного курса математики, свойственному некоторым запад ным методическим системам обучения.

Общекультурная ориентация обучения математике может быть выражена, таким образом, тезисом "не ученик для математики, а математика для ученика". Это означает, что новая методическая система обучения должна, прежде всего, учитывать, для чего конкретному ученику математика нужна сегодня и будет ему нужна в дальнейшем - при обучении и во-взрослой жизни, в каких пределах, и на каком уровне он может ее освоить. Поэтому она рассматривается как основной критерий для постановки целей математического образования, определения содержания обучения и распределения его по ступеням обучения в соответствии с принятой в настоящее время структурой школы: начальное, базовое и профилированное обучение.

Гуманитарная ориентация обучения математике приводит к не обходимости новой постановки классической проблемы межпредметных связей в общеобразовательном курсе и конструирования новых путей ее решения. Авторы новых учебно-методических комплектов указывают на математический язык, математические модели, посредством которых происходит обучение математическому содержанию. «Учащиеся начинают воспринимать математику не как набор разрозненных фактов, которые учитель излагает потому, что они есть в программе, а как цельная развивающаяся и в то же время развивающая дисциплина

общекультурного характера. Именно поэтому из традиционных для любого обучения вопросов: что? как? зачем? - в учебнике по алгебре для общеобразовательной школы на первое место ставится вопрос «зачем?» - считает А.Г.Мордкович, автор современного и широко использованного учебно - методического комплекта по алгебре

Наиболее близким этой концепции является и мнение М.В.Ломоносова, что "математику уже потому изучать нужно, что она ум в порядок приводит, в котором выделенные нами слова подчеркивают достаточность указанного аспекта для уделения максимального внимания изучению математики на протяжении всего периода школьного обучения -для "приведения ума в порядок" не может быть ограничений во времени.

Особое внимание молодым учителям имеет смысл уделить вопросу о способностях учащихся, в частности области математических способностей, знание которых позволит легче разобраться в обучении учащихся по математике, проведении математических олимпиад, всевозможных математических игр, позволит учитывать уровень упражнений в групповой работе, осуществлять дифференцированный подход.

Если оставить в стороне одаренных детей-математиков и иметь в виду обыкновенных ребят, способных к математике, то можно выделить ряд способностей, обеспечивающих успешное овладение математическими дисциплинами. Это, во-первых, явный, иногда даже острый интерес к математике, склонность без принуждения заниматься ею и получать от этого удовольствие (при условии, конечно, что были предприняты попытки заинтересовать ребенка, а не отпугнуть его от математики). Это, во-вторых, быстрое овладение математикой, позволяющее легко усваивать соответствующие навыки и умения и за одно и то же время при прочих равных условиях продвигаться гораздо дальше, чем продвигается ученик со средними способностями. Это, в-третьих, относительно высокий

уровень математического развития. Речь идет об относительно высоком уровне достижений, при котором необходимо принимать во внимание возраст ребенка. Например, сам по себе факт овладения дифференциальным исчислением ничего не говорит о математических способностях, если с этим справляется двадцатилетний юноша; позволяет предположить высокие математические способности, если оно доступно восьмикласснику, говорит о серьезной математической одаренности, если дифференциальное исчисление покоряется десятилетнему мальчику.

Просмотрев этот перечень, возможно, кто-нибудь возмущенно вос кликнет: «Позвольте, я не вижу главной математической способности, так сказать, станового хребта математического таланта — способности к быстрому вычислению!» Почему здесь не названа вычислительная способность? Это не результат забывчивости. Исследования психологов свидетельствуют, что вычислительные способности далеко не всегда связаны с формированием подлинных творческих способностей к математике. Психология располагает данными, которые говорят о том, что люди, способные производить в уме сложные математические вычисления («люди-счетчики»), нередко не только не умеют решать сложные (а иногда и простые) математические задачи, требующие смекалки и гибкого мышления, но и вообще не любят математики. «Люди-арифмометры», люди, способные соревноваться со счетно-электронной машиной (в газетах писали, что одно такое соревнование во Франции выиграл человек), но лишенные творческих склонностей, без которых немыслима никакая наука, не представляют образец математического таланта.

Правда, развитие математических способностей иногда (только иногда) начинается со способностей к вычислению, так как эта важная вспомогательная математическая операция раньше всего привлекает внимание ребенка и становится плацдармом его дальнейшего математического раз вития. Бывает, что способности к быстрому и точному вычислению остаются индивидуально-своеобразной математической способностью и в дальнейшем. Однако суть математических способностей отнюдь не в вычислениях. Недаром эти функции человек охотно и без сожалений уступает счетным машинам. Математические способности обнаруживаются в многообразии подходов к задаче, позволяющем легко и быстро переключаться с одной умственной операции на другую, отходить от шаблонного способа решения задачи, избрав не только простой, но и «изящ ный» путь решения. Математическое творчество - непременный продукт математических способностей - проявляется в сообразительности, находчивости при решении задачи, в логичности и обоснованности рассуждений, в легкости нахождения общего в задачах и математических выражениях, на первый взгляд ничуть друг на друга не похожих.

Вычислительные способности небесполезные, но и не решающие в математическом развитии. Как, впрочем, и память на числа, цифры, фор мулы. Подлинная «математическая память» — это хорошее, прочное запоминание и актуализация в нужный момент схем рассуждений и доказательств, способов решения задач, богатство математических ассоциаций и т.д.

Как и технические, математические способности развиваются в результате включения школьника в доступную ему специальную деятельность (кружки, участие в олимпиадах, самостоятельная работа с пособия ми типа книг Я. И. Перельмана «Занимательная арифметика», «Занимательная геометрия», «Занимательная алгебра», «Живая математика» и т.п.). Здесь речь опять идет о способных к математике детях. Пусть не о вундеркиндах, не о талантах, но о заведомо способных. А как быть с заведомо неспособными?

Специально изучающий этот вопрос В. А. Крутецкий считает: «Абсолютной неспособности к изучению математики, своего рода «математической слепоты» не существует». Каждый нормальный и здоровый в психическом отношении школьник способен при правильном обучении более или менее успешно овладеть школьным курсом математики приобрести знания и умения в объеме программы средней школы». Но, с другой стороны, неправильно было бы считать, что все дети одинаково способны к математике. Есть, конечно, среди них и такие, которые не могут рассчитывать на очень большие успехи в математической деятельности. Психолог особо предупреждает родителей и учителей не делать поспешного вывода о неспособности детей к математике на том основании, что они плохо успевают по этому предмету. Он предлагает сначала выяснить причину неудач и замечает, что чаще всего неуспех объясняется не отсутствием способностей, а пробелами в знаниях (из-за лени, пропусков по болезни и т. д.). Иногда ученик нуждается в специальной помощи, так как не может освоить переход к более высокому уровню математического мышления (при переходе от арифметики к алгебре и геометрии). Однако, получив помощь и разъяснения, учащиеся, математические способности которых не являются блестящими, своими хорошими оценками еще раз подтверждают, что школьный курс математики общедоступен.

Математические способности и умения формируются лишь в таких условиях, когда педагог активизирует творческую мысль человека. Это ещё раз подчёркиваем значимость развивающего, проблемного обучения и ещё раз подтверждает, что способности формируются в деятельности, которая не может осуществляться без наличия данной способности,

Важнейшее место в математических способностях занимает умение логически выстроить цепь операций, которые приведут к решению задачи. Казалось бы, это должно быть доступно любому способному логически мыслить человеку. Однако далеко не каждый оказывается способным оперировать математическими символами с той же лёгкостью, что и при решении логических задач. Для математика недостаточно иметь хорошую память и внимание. Людей способных к математике, отличает умение уловить порядок, в котором должны быть расположены элементы, необходимые для математического доказательства.

Наличие интуиции такого рода - есть основной элемент математического творчества.

А.Н.Леонтьев, исследуя способности, считает, что «одни люди не владеют этим тонким чувством и не обладают сильной памятью и вниманием и поэтому не способны понимать математику. Другие обладают слабой интуицией, но одарены хорошей памятью и поэтому могут понимать и применять математику. Третьи владеют такой особой интуицией и даже при отсутствии отличной памяти могут не только понимать математику, но и делать математические открытия». Здесь речь идёт о математическом творчестве, доступном немногим. Но, как писал Ж.Адамар, «между работой ученика, решающего задачу по алгебре или геометрии, и творческой работой разница лишь в уровне, в качестве, так как обе работы аналогичного характера».

Для того чтобы понять, какие ещё качества требуются для достижения успехов в математике, исследователями анализировалась математическая деятельность: процесс решения задач, способы доказательств, логичных рассуждений, особенности математической памяти. Этот анализ привёл к созданию различных вариантов структур математических способностей, сложных по своему компонентному составу. При этом мнения большинства исследователей сходились в одном - что нет, и не может быть единственной ярко выраженной математической способности -это совокупная характеристика, в которой отражаются особенности разных психических процессов: восприятия, мышления, памяти, воображения.

Среди наиболее важных компонентов математических способностей выделяются специфическая способность к обобщению математического

материала, способность к пространственным представлениям, способность к отвлечённому мышлению. Выделяют в качестве самостоятельного компонента математических способностей математическую память на умственную способность к усвоению знаний, стержень которой состав; обобщённость мыслительной деятельности, её направленность на абстра гирование и обобщение существенного в материале.

Математическое образование предполагает не только развитие личности соедствами математики, как часто молодым учителя подчёокивают методисты, но и, по нашему мнению, овладеть системой знаний, дающих представление о предмете математики, методах математического исследования, основных понятиях, способах обоснования

математических фактов, применении математики в исследованиях природы и общества. Относительно предмета математики на сегодняшний день существуют разные мнения, мы же, будем придерживаться мнению таких крупных учёных как В.И.Арнольд, Л.Д.Кудрявцев, М.М.Постников. По их мнению, предметом математики являются модели.

Л.Д.Кудрявцев отмечает, что математика- это область человеческого знания, в которой изучаются математические модели, математическая модель рассматривается как логическая структура, у которой описан ряд отношений между её элементами.

Одним из наиболее сложных вопросов для молодых учителей является вопрос методов обучения математике. Большинство учителей перечисляют все методы, идущие из дидактики, основанные на понимании методов, как способах взаимосвязанной деятельности учителя и учащихся, или в качестве методов перечисляли содержание соответствующего учебного предмета. Такое представление включено во многие учебные пособия по методике преподавания математики и в целом, конечно же используется при подготовке и проведении уроков математики, однако не стоит забывать, что математическое содержание учебного предметаразвивается главным образом посредством индукции, дедукции, аналогии, аксиоматический, обобщения, а способы взаимодействия учителя и ученика выражаются через репродукцию, эвристику и исследование. По характеру учебно-познавательной деятельности и организации содержания материала можно выделить следующие методы обучения: индуктивно- репродуктивный, индуктивно-эвристический, индуктивно- исследовательский, дедуктивно-репродуктивный, дедуктивно-эвристический, дедуктивно-исследовательский, обобщенно- репродуктивный, обобщенно-эвристический, обобщенно-исследовательский. В нашем исследовании при разработке дидактических учебных задач к урокам по математике мы использовали данную классификацию методов.

Однако не только методы обучения математике, но и вся математическая деятельность в целом оказывает влияние на проведение уроков по математике.

Математическая деятельность приводит к развитию средствами математики особенностей интеллектуальной сферы личности во всех ее компонентах, что привело к появлению понятия «математическое развитие». Так, геометрии помогает обрести многомерность восприятия, умение мыслить в иных плоскостях и пространствах, постигать скрытое и запредельное; она демонстрирует соразмерность и гармонию мира, и связь человека с ним. Алгебра развивает способность человека к анализу, дает представление о формуле как концентрированном знании, о соподчинении отдельных элементов в природе.

Под учебной деятельностью понимают деятельность по усвоению накопленных обществом знаний о предмете изучения и общих приемов решения, связанных с ним задач; без нее невозможно овладеть другимивидами человеческой деятельности - производственным трудом, художественным творчеством, спортом и т.д. Это - особая форма активности учащегося, направленная на изменение самого себя как субъекта учения, основной вид деятельности школьников, формирующий не только знания, умения и навыки, но и способности, установки, волевые и эмоциональные качества, т.е. личность в целом. На основе анализа системы начального обучения Д.Б. Элькониным в 1961 г. была выдвинута гипотеза об учебной деятельности и ее строении, о необходимости организации особого рода деятельности учащихся и необходимости организации усвоения способов этой деятельности.

Концепция учебной деятельности, как теории учения, всесторонне ис следована в педагогической психологии Л.С. Выготским, В.В. Давыдовым, Б.Д. Элькониным, Д.Н. Богоявленским, А.К. Марковой, Е.Н. Кабановой-Меллер, Н.А. Менчинской, А.А. Люблинской, Н.Ф. Талызиной, Г.И. Щукиной, И.С. Якиманской, Л.М. Фридманом и другими. Здесь установлено, что особенностями учебной деятельности являются:

1) ее направленность на овладение определенными знаниями и умениями, на достижение целей образования;

2) направленность на усвоение общих способов действий;

3) изучение учебного материала строится по принципу - от результат

учебной деятельности - изменение самого ученика В научной литературе встречаются различные подходы к выявлению особенностей методики (А. Д. Александров В.Т. Болтянский А.Н. Колмогоров А.И. Маркушевич Д. Пойа и др.) и определению структуры (схемы) математической деятельности, которые отличаются названиями и числом выделенных в процессе анализа стадий (аспектов) этой деятельности.

А.А. Столяр на основе анализа и обобщения трактовок данного понятия объединяет разные его аспекты в три основные стадии математической деятельности:

1) накопление фактов с помощью наблюдения, опыта, индукции, аналогии, обобщения;

2) выделение из накопленного материала первоначальных понятий и системы аксиом и основанное на них дедуктивное построение теории;

3) приложения теории.

Дав название каждой из этих стадий, А.А. Столяр определяет математическую деятельность как мыслительную деятельности протекающую по следующей схеме:

1) математическая организация (математическое описание) эмпирического материала (математизация конкретных ситуаций) с помощью эмпирических и индуктивных методов - наблюдения, опыта, индукции, аналогии, обобщения и абстрагирования;

2) логическая организация математического материала (накопленного в результате первой стадии деятельности) с помощью методов логики;

3) применение математической теории (построенной в результате второй стадии деятельности) с помощью решения задач математического и межпредметного характера.

Кроме этой модели математической деятельности, в которой доминирует логика, можно говорить и о других специфических особенностях математической деятельности, отмечаемых математиками: интуиция и догадка (А. Пуанкаре); черты волевой деятельности, умозрительного рассуждения и стремления к эстетическому совершенству (Р. Курант); правдоподобные рассуждения наряду с доказательствами (Д. Пойа); связь бессознательного и сознательного в творческой математической деятельности (Ж. Адамар); взаимосвязь логики и интуиции (А.Д. Александров, П.С. Александров, Я.С. Дубнов)

В научном исследовании О.В. Епишевой, мнение которого мы разделяем, классификация приемов учебной деятельности учащихся в обучении математике выполнена по двум основаниям:

1) характер (тип) учебной деятельности учащихся по усвоению изучаемого материала и

2) этапы полного цикла УПД учащихся по усвоению знаний и способов деятельности.

Первое отражает связь приемов учебной деятельности с содержанием учебного предмета и типами его учебных задач, второе - с организацией реального учебного процесса.

По первому основанию выделяются в школьном курсе математики следующие четыре группы приемов учебной деятельности учащихся:

1) Общеучебные приемы, не зависящие от специфики предмета математики и используемые (и формируемые) поэтому во всех учебных предметах (приёмы слушания, наблюдения, работа с учебником, пересказ информации, внимание, запоминание, описание, формулировка гипотез, постановка проблемы, и др.)

2) Общие приемы учебной деятельности поматематике (общематематические приемы), во всех математическихдисциплинах, которые, можно разделить на две группы. Это, например,приемы работы с математической книгой и математическими таблицами,организации самостоятельной работы по математике, ведения тетрадипо математике, приемы заучивания и воспроизведенияматематического материала и т.д. Они незначительно отличаютсяот соответствующих общеучебных приемов, но все-таки имеют своиособенности, связанные со спецификой математики; приемы познавательнойдеятельности в сфере математических объектов - приемы оперированияматематическими понятиями, суждениями (аксиомами и теоремамиразных видов), умозаключениями (индуктивными и дедуктивными доказательствами теорем), приемы характерных для математики мыслительных операций (анализа, абстрагирования, обобщения и другие) в их специфической форме и т.д.

3) Специальные приемы учебной деятельности по отдельным математическим дисциплинам (арифметике, алгебре, геометрии, началам математического анализа) - это такие общематематические приемы деятельности, которые принимают свою особую форму в соответствии со спецификой содержания курса и особенностями его задач; они используются (информируются) во всех темах этого курса. Например, в школьном курсе алгебры это приемы тождественных преобразований выражений, приемы рационализации вычислений с использованием тождественных преобразований выражений, приемы решения уравнений, приемы решения задач с помощью уравнений и т.д.; в курсе геометрии - это приемы построения геометрических фигур, выполнения чертежа по условию задачи, чтения чертежа и т.д. В каждом из специальных приемов можно выделить подгруппы более узких приемов, соответствующих более конкретным задачам и даже отдельным действиям по их решению. Например, из группы приемов тождественных преобразований выражений можно выделить приемы упрощения выражений, разложения выражений на множители, доказательства тождеств и неравенств, приведения подобных слагаемых и т.п. Без усвоения специальных приемов учебной деятельности невозможна выработка сознательных умений и навыков, которые, с точки зрения теории учебной деятельности, формируются только на основе усвоенных приемов.

Частные приемы учебной деятельности - это такие специальные приемы, которые конкретизированы для решения самых узких (частных) задач, они используются (и формируются) только в определенных темах.

Таким образом, особенности методики преподавания математики, по нашему мнению, характеризуются знаниями о математических методахобучения, опирающихся на индукцию, дедукцию, обобщение, аналогию, и др., которые свойственны изучению математических объектов, усилением роли математической деятельности, как, особой формой активности учащегося, направленной на изменение самого себя как субъекта учения, являющейся основным видом деятельности школьников, формирующая не только знания, умения и навыки, но и способности, установки, волевые и эмоциональные качества, т.е. личность в целом.

Ю.Н. КАШИЦИНА

ИННОВАЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ В ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ МОЛОДОГО УЧИТЕЛЯ

Проблема обновления педагогической системы является очень важной и актуальной, требует надлежащего профессионального анализа. Многое изменилось в отечественной педагогической системе последнего десятилетия. Новые парадигмы и концепции, государственный стандарт и альтернативные учебные планы, школы нового типа и перемещение России с первой в четвёртую десятку стран по образовательному индексу ЮНЕСКО.

Сегодня в нашей стране происходит становление науки о педагогических нововведениях, выделение которой в самостоятельную отрасль началось с возникновения противоречия между имеющейся потребностью в быстром развитии школы и неумением педагогов её реализовать на практике.

Возрастная динамика инновационных процессов в обществе требует системного, целостного изучения их с учётом факторов, касающихся как собственно нововведений, так и их социокультурной среды.

Инноватика – наука о нововведениях – возникла как отражение стремительно возросшей потребности по разработке и внедрению новых услуг, идей, которые в последнее время тщательно разработаны в научных исследованиях

Внедрение более продуманных методов, использование активных форм учебно-воспитательного процесса, новых технологий обучения, новых методических разработок, элементов проектировочной деятельности в работе учителя – лежат в основе постоянных разработок инновационных идей целого ряда авторов таких как: В.П.Беспалько, М.Б.Волович, В.В.Давыдова, Г.Д.Дорофеев, Л.В.Занков, М.И.Зайкин, Г.Л.Луканкина, В.Ф.Любичевой, Н.В.Метельского, В.М.Монахова, А.Г.Мордковича, О.А.Оганесяна, Л.Г.Петерсон, И.В.Столяровой, Г.И.Саранцева, Н.Л.Стефановой и многих других.

Инновации - это изменения внутри системы. В педагогической интерпретации в самом общем смысле инновации подразумевают нововведения в педагогической системе, улучшающие течение и результаты учебно-воспитательного процесса.

Проблемы, оказывающиеся объектами инноваций, очевидны: как повысить мотивацию учебно-воспитательной деятельности; как устранить потери времени, как разнообразить виды деятельности учащихся на уроке, как повысить уровень понимания, изучаемого материала, как обусловить качество знаний учащихся, как методически грамотно организовать урок и провести его анализ, как готовиться к уроку, так, чтобы не возникало проблемных ситуаций в течении урока для молодого учителя и т.д.

Главные направления инновационных преобразований в педагогической системе можно классифицировать по следующим направлениям:

-педагогическая система в целом
-учебные заведения
-педагогические теории
-деятельность учителя
-процесс обучения учащихся
-педагогические технологии
-содержание учебного предмета
-формы обучения

-методы
-управление
-цели и результаты

По глубине преобразований в этих подсистемах можно судить о сущности, качестве и целесообразности инновационных нововведений. Последнее время наиболее актуальными оказались идеи разработки и внедрения в практику различных педагогических технологий, являющихся представителями инновационного обучения. Будем понимать под этим такое обучение, которое обеспечивает не просто задачи гуманизации образования, преодоления формализма, поворачиваясь к личности обучаемого, а создаёт условия для раскрытия творческого потенциала каждого ученика, с предоставлением вариативной методики и новых способах деятельности учащихся.

Понятие "технология обучения" получило широкое распростра нение в педагогике и частных методиках, особенно в последнее время. Зарождение этого понятия в педагогике свя зано с развитием техногенной цивилизации и относится к началу XX века, когда в странах Европы и США само понятие "технология" и связанные с ним проблемы стали предметом специального из учения. Термин technoligy education широко используемый в работах, написанных на английском языке, может быть переведен и как "технология обучения", и как "технология образования", и как "технология учебного процесса", ибо, в конечном счете, речь дей ствительно идет об организации и управлении учебно-воспитательным процессом.

В 20-е годы нашего столетия в рамках педологии возник тер мин <<педагогическая технология>>. В это же время широ ко пользуются и понятием «педагогическая техника». Как это нередко бывало в истории любой науки, одновременно возникало несколько других понятий и терминов, часто получав ших разную трактовку в работах разных авторов и школ. От техно логии в образовании к технологии образования, а затем и к педа гогической технологии - так характеризуют путь эволюции этого понятия в истории педагогики (В. И. Богомолов, Т. А. Ильина) .

Термин технология в образовании получает широкое использо вание в 40-50-е годы, что связано с применением технических средств обучения (ТСО), а затем при рассмотрении вопросов ме тодики применения ТСО и технических средств контроля начинают широко пользоваться термином технология образования (50-60-годы), а также педагогические технологии. До 60-х годов под ПТ понимали использование средств обуче ния. В 60-е годы формируется представление о том, что ПТ должна основываться на научно обоснованном использовании какого-либо метода, например, программированное обучение. В 70-е годы си стемный подход в различных областях знания нашел применение в педагогике в идеи: педагогические технологии должны решать ди дактические задачи, направленные на управление учебным про цессом, происходит расширение базы педагогических технологий (программированное и проблемное обучение, разнооб разный арсенал технических средств), и в 70-80-е годы все чаще используют термин технология обучения (ТО) и технология учебно го процесса (ТУП).

В 80-х годах эта идея получает дальнейшее развитие и реали зуется в создании компьютерных классов, дисплейных классов, си стем интерактивного видео, в разработке новых программных средств.

В последние годы понятие ПТ осмысливается как совокупность средств и процессов управления и проектирования учебно-воспитательной системой; ее целями и задачами, содержанием, способами, методами, средствами и приемами организации учебной деятельности в рамках новой парадигмы образования, основанной на идеях гуманистической психологии и педагогики. При этом большое внимание уделяется вариативному образованию, индивидуализации обучения, новым формам организации учебного процесса, оценке его результативности, реализации задач деятельностного подхода, интерактивного компонента.

Любая со временная педагогическая технология основывается на творческом пере осмыслении педагогического опыта, искусного, мастерского его воплоще ния в практику (с учетом новейших достижений в области образования) в виде инноваций. В свою очередь, некоторые из них в дальнейшем оформ ляются в концептуальные идеи, становятся целостными педагогическими системами и внедряются в практику как технологии.

Итак, некоторые зарубежные специалисты технологию в образовании отождествляют с насыщенностью учебного процесса средствами обучения, и прежде всего техническими средствами и устройствами. Другой же подход в трактовке этого понятия состоит в том, что за понятие «технология» принимают, то, что позволяет получить продукт деятельности

Среди отечественных дидактов и педагогов на сегодняшний день нет единства в толковании этого базового понятия. Так одни коллеги трактуют технологию в педагогической деятельности как технику действий и операций при решении конкретных педагогических задач. Другие же это понятие рассматривают как совокупность методов и средств обработки, представления, измерения, и предъявления учебной информации, как способы воздействия учителя на ученика в процессе обучения с использованием различных технических и информационных средств.

Для нас привычно, что методика - это закономерности, принципы, методы, приемы и виды упражнений, с помощью сочетания которых детям передаются знания, вырабатываются умения и навыки. Иными словами, методика - это путь к знанию, теория преподавания предмета.

Для нас непривычно слово "технология", ассоциирующееся с производством. Толковый словарь Ожегова приводит следующие форму лировки понятия "технология":

1. Совокупность знаний способах обработки материала, изделий, методах осуществления каких -либо производственных процессов; 2. Совокупность операций, осуществляемых определенным способом в определенной последовательности, из которых складывается процесс обработки материала.

Представляется необходимым обратить внимание на встречающееся в обеих формулировках слово "способ" и заострить на той семе слова "технология", которая отражает буквальный перевод с греческого как "искусство, мастерство учения" (texvi и legos).

Как созвучны понятия<<искусство >> и <<творчество>> к неразделимы понятия <<инновационная технология>> и <<творческая самостоятельная личность>>.

Инноватика даёт возможность разрабатывать инновационную методику, главной задачей которой является устранение противоречия между целью обучения и организацией учебного процесса обучения. Применительно к повышению уровня образования инноватика призвана рассматривать организационную, материально-дидактическую и структурные стороны педагогического внедрения, обеспечивая теоретическое осмысление инновационного процесса, учитывая его специфику, разрабатывая технологию применения.

Мы рассматриваем понятие «технология» в педагогической деятельности как синтез теоретического, прикладного и процессуального, поэтому технология, в частности педагогическая технология, трактуется нами как единство теоретических положений в некоторой области (в частности в педагогике), прикладных положений в этой же области их реализация во времени и пространстве. Основанием для такой интерпретации ведущего понятия нданной статьи послужило различие в целях педагогической науки и педагогической технологии.

Главной и специфической целью педагогической науки, педагогиче ской теории являются знания, а целью педагогической технологии - осуществление педагогического процесса и получение соответствующих результатов, или, как сейчас принято говорить, продуктов деятельнос ти. Применительно к учителю - это, прежде всего, развитие его твор ческого потенциала, формирование личной инициативы, здорового критицизма и духовной раскрепощенности. Педагогическая наука стремится познать природу педагогического процесса, педагогическая технология призвана производить продукты этого процесса

Чтобы выявить сущностные характеристики педагогической технологии необходимо установить корреляцию между педагогической наукой и педагогическими инновациями. Достигнуть этого возможно следую щим образом: во-первых, научно-педагогические исследования объясняет причины, по которым определенные педагогические действия, учебные операции и весь процесс обучения оказывается успешным; во-вторых, развитие средств обучения, в том числе активных и интерактивных, компьютерных систем, педагогической техники учителя, которая позволяет ему целенаправленно проектировать и изготовлять инструментарий учебно-воспитательного про цесса, без которого невозможно было бы получить те или иные ожидаемые результаты деятельности – это и выступает, по нашему мнению, как отличительная особенность педагогической технологии.

Среди многообразия различных педагогических технологий мы выделяем те, которые способствуют совершенствованию деятельности учителя независимо от предмета, развитию творческого потенциала молодого специалиста, модернизируют уроки более опытных учителей, а именно: технологию проблемного и развивающего обучения и технологию проектирования.

Особенностью перечисленных технологий является их универсальность:

-они применимы не только к урокам математики, но и к использованию учителями разных предметов;

- возможность применения каждой технологии в рамках классно-урочной системы;

- каждая из технологий усиливает нагрузку на одну, а то и несколько профессионально-педагогических функций учителя, сформулированных нами в предыдущем параграфе;

-первые две технологии имеют исторически сложившуюся научную основу, последняя же есть результат научных наработок большого количества исследователей.

Трудности в методической работе молодого учителя зачастую являются результатом отсутствия применения тех или иных приёмов педагогической техники, которые позволяют осуществлять технологию развивающего обучения; разработок так называемых ,,учебных задач'', предметное содержание которых позволяет осуществлять технологию проблемного обучения; использования технологии проектирования, как наиболее целостного представления об учебном процессе, интерактивной предварительной подготовки к процессу обучения определённому тематическому содержанию; применения технологии деятельностного подхода, позволяющего организовывать процесс активного, интерактивного, личностно-ориентированного взаимодействия учащихся, и учителя в процессе обучения

Основной задачей нашего исследования является возможность применение этих технологий в практике работы молодого учителя математики. Для решения поставленных задач мы разработали курс лекций, семинарских и практических занятий по теме ,,Педагогические технологии в методической работе учителя математики,, который экспериментально рассматривался при Департаменте Народного Образования г.Ногинска Московской Области и имел значительный интерес не только у молодых, но и более опытных учителей.

Ю.Н. КАШИЦИНА

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К ОТДЕЛЬНЫМ ЭТАПАМ УРОКА МАТЕМАТИКИ В ТЕХНОЛОГИИ РАЗВИВАЮЩЕГО ОБУЧЕНИЯ

Особые трудности, в технологии развивающего обучения появляются на разных этапах непосредственно самого урока математики. Как создать проблемную ситуацию на уроке, как помочь учащимся получить необходимое знание, в какой форме необходимо осуществлять этапы актуализации знаний, обобщения и систематизации, проверки и контроля знаний, самостоятельную работу учащихся, в контексте развивающего урока — проблемы не только молодых, но и весьма опытных учителей. Мы считаем, необходимым дать некоторые методические рекомендации по данным вопросам, которые, возможно, станут ориентиром для учителей, постоянно стремящихся к развитию современного урока математики.

В технологии развивающего обучения не всегда урок начинается однотипно - с проверки домашнего задания. Начало урока может быть неожиданным, сразу включающим учеников в активную умственную деятельность, захватывающим их эмоционально.

Домашнее задание не отменяется, однако формы проверки и виды деятельности дома могут быть весьма разнообразными. Проверка домашней работы может происходить в парах, тройках и даже четвёрках учащихся, и чем больше вопросов возникнет, тем больше возникнет проблемных ситуаций, можно записать на доске упражнение из домашней работы с пробелами и указать на их заполнение, или предложить то же задание с ошибками, или разные варианты одного и того же задания, бывают полезны карточки с индивидуальными примерами и проверкой в виде эстафеты, др. Относительно способов деятельности, то домашняя работа на ряду с типовыми номерами из задачника в контексте развивающего обучения может включать составление упражнений самим учащимся с подробным ключевым решением, или закончить цепочку упражнений, начатых на уроке, провести лабораторно - практическую работу, провести работу с учебником, составив план наиболее важных математических понятий и др.

Отсутствие соблюдения определенной, застывшей схемы в уроке, гибкость форм работы не означает хаоса в учебном процессе, всё зависит от целей урока и особенностей классного коллектива.

Актуализация знаний - этап урока, на котором планируется воспроизведение учащимися знаний, умений и навыков, необходимых и достаточных для «открытия» нового знания. На этом же этапе осуществляется выход на задание, вызывающее познавательное затруднение.

Этап актуализации знаний знаком каждому учителю из методики традиционного урока. И, с одной стороны, это помогает в проведении данного этапа в технологии развивающего обучения, а с другой стороны, это же и мешает. Мешает потому, что теперь акценты расставлены по-новому, и годами сложившиеся привычки требуют коррекции.

Остановимся на некоторых особенностях проведения этапа актуализации знаний в сопоставлении с традиционным уроком.

Во-первых, в технологии развивающего обучения особенно важно соблюдать временные рамки этого этапа урока, не затягивать его, не выходить по времени за 5 - 7 минут. Если в традиционном уроке в случае задержки учитель всегда может сэкономить время на более лаконичном объяснении - ведь он делает это сам, то в развивающем обучении новое знание «открывают» дети, а они не могут это сделать быстрее, чем они реально могут. Значит, задержка по времени на этапе актуализации знаний приведет к тому, что дети не освоят полноценно новый материал, и тем более, не продвинутся вперед в своем развитии - нарушится нормальный цикл рефлексии. Поэтому здесь следует сконцентрироваться, прежде всего, на том материале, который необходим для этапа «открытия» нового знания.

Следующим требованием к этапу актуализации знаний является создание затруднения в индивидуальной деятельности каждого учащегося. Важно, чтобы ребенок эмоционально пережил возникшее затруднение, воспринял его не формально, а на личностном уровне. А для того, чтобы затруднение в деятельности стало для него личностно значимым, необходимо, чтобы он столкнулся с этим затруднением лично сам, а не просто наблюдал, как это происходит у других. Наш опыт убеждает: усилия при подготовке урока, затраченные на создание личностно значимой для детей мотивации, затем многократно окупаются повышением увовня и: интереса к изучаемому предмету, к изучаемому на данный момент материалу, и качеством его усвоения.

Этап актуализации знаний, помимо прочего, необходимо использовать для проведения «мыслительной гимнастики». На следующем этапе урока - этапе «открытия» нового знания - детям предстоит активная мыслительная деятельность: анализ возникшего затруднения, выявление его причины, создание собственного проекта выхода из затруднения. Поэтому мышление необходимо привести «в форму». Это легко достигается подбором заданий: они должны быть удобны для, организации мыслительных операций -анализа, сравнения, обобщения, классификации, аналогии, для развития вариативного мышления, внимания, памяти и т.д. Завершение этапа актуализации знаний связано с фиксацией затруднения в деятельности, но это уже следующий этап урока - этап введения новых знаний по математике.

Следующим не менее важным является этап введения нового материала. Известно, что изучение нового материала в методике преподавания математики занимает особое место и зачастую традиционно сообщается учащимся в готовом виде. В контексте развивающего обучения знания учащиеся „открывают сами,, учитель организует проблемное введение знаний на уроке. Вопрос относительно постановки проблемы и способов её разрешения представляет определённую трудность не только молодыми учителями, но и тех, кто работает в школе достаточно долго.

Подготовка уроков изучения нового материала по курсу математики в контексте развивающего обучения облегчается для молодых учителей тем обстоятельством, что в основе применения положен деятельностный подход, который задает четкую структуру урока, которому подчинена разработка учебных задач, и математическое содержание школьного учебника, и подробное описание хода урока в приложении нашего исследования.

Однако анализ открытых уроков и видеоматериалов убеждает в том, что молодые учителя испытывают определенные трудности при подготовке уроков изучения нового материала, допускают некоторые типичные ошибки. Это позволяет сформулировать ряд методических рекомендаций, относящихся к этапу введения знаний, включающему звенья постановки учебной проблемы и «открытия» знания.

Первая рекомендация касается распределения времени на уроке изучения нового материала. Поскольку этап введения знаний является не только основным, но и наиболее трудоемким, он не должен приходиться на вторую половину урока, когда накапливается усталость, и внимание учеников снижается. Введение знаний желательно начинать не позднее десятой минуты урока, такое распределение времени не только способствует наилучшему пониманию школьниками нового материала. но > позволяет учителю «дойти» до остальных этапов развивающего урока, из которых на уроках особенно «западает» звено самостоятельной работы с проверкой в классе. Из сказанного следует, что учитель не должен перегружать предшествующий введению нового материала этап урока, тщательно отобрав для него действительно необходимые учебные задания на актуализацию знаний.

Основным требованием к уроку изучения нового материала в технологии проблемного обучения является проблемное введение знаний на основе реализации деятелъностного подхода.

Учебная проблема существует в двух основных формах: как тема урока, и как не совпадающий с темой урока вопрос, ответом на которые будет новое знание, являющееся темой урока.

Следовательно, поставить учебную проблему - значит помочь ученикам самим сформулировать либо тему урока, либо не сходный с темой вопрос, исследование ответа на который выведет на тему урока. Существуют три возможности поставки учебной проблемы на уроке: создание проблемной ситуации, подводящий диалог, сообщение учителем темы урока в готовом виде, но с применением мотивирующего приема.

Первый путь лежит через проблемную ситуацию. Напомним, что создать проблемную ситуацию означает ввести противоречие, столкновение с которым вызывает у учеников эмоциональную реакцию удивления, ощущение творческого затруднения.

В методическом аспекте мы выделяем три принципиально разных способа разрешения проблемной ситуации: учитель лично заостряет противоречие и сообщает учебную проблему, учащиеся совершенно самостоятельно осознают противоречие и
формулируют проблему; учитель в диалоге побуждает учеников осознать противоречие и сформулировать учебную проблему.

Каждый из предлагаемых способов реализуется по-разному, так в первом случае учитель не создавая предварительной учебной задачи вынужден , сообщив тему урока указать новизну, второй вариант удачен при предварительной подготовке, подаче такой учебной задачи, которая привела бы к необходимости нового знания, третий случай необходим для выхода из создавшейся проблемной ситуации.

Из указанных способов выхода из проблемной ситуации наиболее эффективным как выше отмечалось, является побуждающий диалог. Рассмотрим конкретные приемы создания и диалогического выхода из проблемной ситуации.

Наиболее характерной для уроков математики (как в начальном, так и среднем звене) является проблемная ситуация «с затруднением». В ее основе лежит противоречие между необходимостью выполнить практическое задание учителя и невозможностью это сделать без сегодняшнего нового материала.

Проблемная ситуация «с затруднением» возникает, когда учитель дает ученикам практическое задание: а) невыполнимое вообще на актуальном, на начало урока уровне знаний; б) невыполнимое из-за непохожести на предыдущие задания; в) невыполнимое, но сходное с предыдущими заданиями. В первых двух случаях ученики, не справившись с заданием, испытывают явное затруднение. В третьем случае школьники, не замечая подвоха, применяют уже известный им способ, и затруднение возникает лишь после того, как учитель доказывает, что задание ими все - таки не выполнено. На уроках математики возможно, создание проблемной ситуации «с удивлением» (г). Она возникает, когда учитель одновременно предъявляет ребятам противоречивые факты или сталкивает взаимоисключающие мнения учеников.

Для вывода учеников из проблемной ситуации учитель разворачивает диалог, побуждающий их к осознанию противоречия и формулированию проблемы. Поскольку проблемные ситуации создаются разными приемами, то на шаге осознания противоречия текст диалога будет разным. Осознание сути затруднения, возникшего после предъявления того или иного невыполнимого практического задания, стимулируется соответственно фразами:

«Вы можете выполнить это задание? В чем затруднение?»;

«Почему не получается выполнить задание? Чем это задание не похоже на предыдущие?»;

«Что вы хотели сделать? Какие знания применили? Задание выполнено?».

Осознания учениками противоречивости двух фактов или мнений можно добиться репликами:

«Что вас удивляет? Какие видите факты? Сколько же есть мнений? ».

Следующий шаг побуждающего диалога подводит к формулированию учебной проблемы. Поскольку мы укзали о её существовании в двух формах, то текст диалога представляет собой одну из двух фраз:

«Какова же будет тема урока?».

«Какой возникает вопрос? ».

При использовании задания, непохожего на предыдущие, обычно формулируется тема урока. Во всех остальных случаях возможно появление и вопроса для исследования.

Таким образом, первый путь постановки учебной проблемы заключается в создании учителем проблемной ситуации и побуждении учеников к осознанию ее противоречия и формулированию темы урока или вопроса для исследования.

Второй путь постановки учебной проблемы на уроке -подводящий диалог. Его суть заключается в том, что учитель постепенно, через систему посильных ученикам вопросов и заданий подводит ребят к формулированию темы урока. В структуру подводящего диалога могут входить и репродуктивные учебные задания и мыслительные (проанализируй, сравни). Но последний вопрос учителя обязательно будет на обобщение, а ответом на него станет формулировка темы урока.

Значительную часть содержания математики начальной школы составляют правила (способы действия, вычислительные приемы) и понятия. В средней школе весьма широко представлены также и закономерности (теоремы). Чем более четко учитель осознает, с каким типом знаний работать на конкретном уроке, тем легче ему управлять и самим процессом «открытия».

Суть этого этапа развивающего урока очень проста: учитель помогает ученикам «открыть» новое для него знание, то есть в дальнейшем нужно наметить деятельность учащихся. Существуют три возможности обеспечить такое «открытие» на уроке.

Первый путь лежит через гипотезы и включает два разных шага.

Первый шаг - выдвижение гипотезы. Выдвинуть гипотезу -значит высказать предположение, истинность или ложность которого должна установить проверка. Гипотеза, которая выдержит проверку и обоснованность - станет искомым знанием, является решающей, остальные ошибочными.

Второй шаг- проверка гипотезы. Смысл проверки состоит в приведении аргумента в пользу решающей гипотезы («это так, потому что») или контр аргумента к ошибочной («это не так. потому что»).

Есть два принципиально разных способа выдвижения и проверки гипотезы на уроке: любой из шагов делает учитель по своему выбору: учащиеся совершенно самостоятельно выдвигают или проверяют гипотезу, или учитель в диалоге побуждает учеников к выдвижению или проверке гипотезы.

Из указанных способов наиболее эффективным является побуждающий диалог. Он имеет «сужающуюся» структуру: начинается с общего побуждения, продолжается подсказкой и заканчивается сообщением нужной мысли самим учителем. На шаге выдвижения гипотезы побуждающий диалог выглядит следующим образом. Сначала дается общее побуждение: «Ребята, какие у вас есть гипотезы?». Если побуждение не срабатывает и класс молчит, вводится подсказка к решающей гипотезе. Если подсказка не приводит к ожидаемому результату, учитель сам предлагает решающую гипотезу.

На шаге проверки диалог начинается с реплики: «Вы согласны с гипотезой?» или «Как проверить эту гипотезу?» Если ученики молчат, вводится подсказка. Если подсказка не срабатывает, учитель сам проверяет гипотезу.

После того как ученики сформулировали тему урока, учитель разворачивает диалог, побуждающий ребят к выдвижению и проверке гипотез.

Таким образом, возможны два пути «открытия» нового знания. Первый лежит через выдвижение и проверку гипотез, в педагогической литературе часто встречается понятие „мозговой штурм,, который и предполагает многочисленность мнений с аргументированным конечным результатом. Второй - через подводящий диалог, разворачивающийся от или без сформулированной учебной проблемы.

Учителям, хорошо освоившим и регулярно применяющим деятельностный метод, можно посоветовать время от времени разнообразить пути введения нового способа действия: заменить проблемную ситуацию подводящим к теме диалогом

Возможны случаи, когда ученики справляются с заданием, проблемная ситуация вроде бы не возникает, что вызывает замешательство даже у опытных педагогов. Но задача учителя остается прежней: развернуть побуждающий диалог и помочь ученикам сформулировать тему урока. Просто в диалоге учителя с классом появится новая «связующая» реплика. Если практическое задание давалось классу фронтально и с ним справилось несколько человек, разумен выход: «Что ж, чуть позднее мы посмотрим, как вы это сделали. Но остальные, почему не решили? Чем этот пример отличается от предыдущих?». Если задание выполнила значительная часть класса, можно сказать: «Неужели решили? А я и не ожидала! Ведь примеры-то были новыми! А чем эти примеры не похожи на предыдущие?. Если же с практическим заданием справился ученик у доски, можно спросить класс: «Вы с ним согласны? А у кого получилось иначе? Почему у них разные мнения? Чего мы не знаем?».

Во-вторых, при побуждении учеников к формулированию учебной проблемы возможно появление неточных, и даже совершенно ошибочных ученических формулировок. Молодые педагоги нередко реагируют на них отрицательно («Нет, не так», «Неправильно!»), тем самым убивая у детей желание включаться в столь небезопасный для них диалог. Из сказанного следует, что на неожиданную формулировку проблемы лучше откликнуться поддерживающим кивком головы

и словами: «Так, а какие еще есть версии?», «Кто еще хочет сказать?». Еще более импровизационным является путь через гипотезы.
Остановимся лишь на некоторых сложных его моментах.

Во-первых, при выдвижении ошибочной гипотезы педагоги нередко оставляют ее без внимания, а иногда даже приходят в полное замешательство. Задача учителя заключается в том, чтобы любая гипотеза (не только решающая, но и ошибочная) была проверена. Для этого при подготовке урока педагогу следует попытаться спрогнозировать ошибочные гипотезы учеников и заранее заготовить контраргументы. Если же на уроке все-таки появляется неожиданная гипотеза, надо сразу разворачивать побуждающий к проверке диалог(-Ребята, вы согласны с этой идеей?» пока ученики соображают, учитель успеет придумать контраргумент.

Во-вторых, детские гипотезы, как правило, неотчетливо сформулированы, и учитель не сразу понимает, какая именно идея высказывается учеником. В этом случае следует побудить ребенка к переформулированию репликой: «А что ты имеешь ввиду? Можешь свою мысль выразить иначе?». Такая работа особенно важна, когда учеником выдвигается решающая гипотеза.

В-третьих, при выдвижении гипотезы учитель не всегда удерживается от оценивания, реагируя на ошибочную гипотезу репликой - нет, не та, а на решающую - «молодец! верно!». Однако педагогу следует помнить, что оценочная реакция на гипотезу лишает шаг проверки всякого смысла. Поэтому реагировать на гипотезы учеников нужно эмоционально неокрашенно: словом -«так» и поддерживающим кивком головы. Подобная реакция не означает согласия. Она лишь показывает, что мысль ученика услышана и принята к сведению. Таким образом, открытие учащимися нового знания, осуществляется наиболее эффективно, однако учителя не должны посвящать этому этапу весь урок, всё должно быть продуманно и логически завершено.

Другим не менее важным этапом в технологии развивающего обучения является этап первичного закрепления открытого знания.

Первичное закрепление предполагает вербальное фиксирование построенного алгоритма или понятия с параллельной их записью.

Чтобы новое знание не стало для учащегося проходящим, оно должно перейти в его сознание и сохраниться там в некоторой форме. Мы рекомендуем новое знание, прежде всего, фиксировать в форме алгоритма, схемы.

Структурное оформление новой информации - это сугубо индивидуальный процесс, в котором выбор инструмента, создающего сенсорный образ, всегда остается за обучающимся. На важную роль языковых средств и символики в процессе оформления теоретических знаний указывал В.В. Давыдов в своей монографии «Теория развивающего обучения». Так. в разделе, посвященном проблемам происхождения и развития личности, В.В. Давыдов писал: «Символы, на наш взгляд, служат основанием для создания человеком различных моделей предметов (эти модели могут иметь вещественную, графическую и словесную формы). Модели - это форма абстракции особого рода, в которой существенные отношения предметов выражены в наглядно воспринимаемых и представляемых связях и отношениях знаковых элементов». Поэтому на этапе «открытия» нового знания оформление полученной информации должно производиться С помощью всех известных инструментов: рисунков, схем, вербально, с помощью языковых символов, используемых в изучаемой науке, и Т.д. Иначе говоря, на этапе первичного закрепления должны использоваться все возможные средства структурирования нового знания.

Использование различных инструментов для оформления мыслительных образов требует сопоставления получаемых при этом структур. Следовательно, на этапе первичного закрепления структуры, полученные разными средствами -

рисунки, схемы, знаковые записи, тексты и т.д., - должны сопоставляться как между собой, таки с их выражением в громкой речи.

Таким образом, несмотря на небольшую продолжительность, этап первичного закрепления играет ведущую роль в процессе усвоения нового знания, то есть преобразования новой информации в мыслительный образ.

Л. Ю. КОВАЛЁВА

ВОЗРАСТНЫЕ ОСОБЕННОСТИ В РАЗВИТИИ ВЕРОЯТНОСТНОГО МЫШЛЕНИЯ

Как формируются понятия случайности и вероятности? Имеется ли у человека некое интуитивное представление о вероятности? Могут ли они возникать в результате подсчета событий в ходе повседневных наблюдений, то есть чисто эмпирически?

В самом деле, большинство наших действий заключает в себе непосредственную оценку более или менее вероятного характера ожидаемых событий. Наблюдение за тем, как взрослый человек переходит дорогу, показывает, что он ведет себя так, как будто непременно оценивает возможность столкновения с учетом частоты и скорости движения транспорта. В отношении детей возникает впечатление, что они практически адаптированы к этой ситуации.

В повседневной жизни мы постоянно имеем дело с тесным переплетением причин и следствий различных событий. С объективной точки зрения, наша жизнь состоит в основном из сложно детерминированных событий и ситуаций и событий, исход которых не может быть предсказуем однозначно.

В течение всей жизни мы вынуждены действовать и принимать решения, учитывая известную из опыта частоту повторяемости тех или иных событий.

Точно так же и для ребенка жизнь полна неожиданностей, опасений, причудливых перемен. Психолог Б. Инельдер сделала предположение, что случайности и вероятности событий расходятся с доступными им формами практического поведения, осуществляемого без осознания его на понятийном уровне, не являются прямым отражением наблюдаемых событий.

В качестве основы вероятностного мышления, по мнению психолога Ж.Пиаже, детям необходимо формирование логико-математических операций, которые затем в отношении событий будут выполнять функции причинного объяснения. Поэтому понимание вероятности и случайности появляется достаточно поздно.

Учитывая опыт работ Пиаже и Инельдер, операции мышления (логические, математические и другие) берут свое начало в сенсомоторной активности ребенка, а завершают свое развитие в виде систем замкнутого типа. Логические и математические операции представляют собой структурированные системы взаимосвязанных действий, обеспечивающих в результате общую обратимость и способность к строгой дедукции.

Рассмотрим все этапы умственного развития ребенка предложенные Ж. Пиаже и в соответствии с каждым периодом формирование понятий случайности и вероятности.

В течение первого периода (4-7 лет), называемого периодом дооперациональной мысли, у ребенка отсутствует обратимые операции. В мышлении ребенка не разделяются возможные и необходимые события, мышление развивается в сфере непосредственной деятельности, оставаясь далеким от понятий случайности, часто колеблется между предсказуемым и непредсказуемым.

Эксперименты, проведенные психологами, направленные на изучение представления у детей этого возраста понятия случайной совокупности элементов на примере перемешивания шариков двух различных цветов, показали, что в мыслительном процессе ребенка доминирует операциональная необратимость (неспособность мысленно вернутся к исходному состоянию преобразования и учесть его в анализе наблюдаемой картины). Отсутствие такой системы операций объясняет, почему ребенок на первой стадии не может необратимость, внутренне свойственную случайным событиям. Также из-за отсутствия операционального мышления ребенок воспринимает чудеса в порядке вещей. Это происходит потому, что он не может связать какое-либо редкое событие, имеющее малую вероятность, как с естественными закономерностями его появления, так и с его случайными колебаниями.Вполне очевидно, что у ребенка-дошкольника отсутствует вероятностное мышление, так как нет связи между благоприятными и всевозможными исходами.

Также детям на стадии дооперациональной мысли не доступна ни сама идея случайности какого-либо события и вероятностном характере их распределения, ни мысль о постоянном и неслучайном соотношении событий. Это подтверждает эксперимент, когда элементы распределяются равномерно или группируются по причинам, неизвестным ребенку, поскольку именно способность уловить различие между тем, что происходит случайно, а что нет, и образует одну из наиболее важных составляющих интуитивного представления о вероятности.

Дети дошкольного возраста считают, что вполне могут предвидеть и объяснить весь ход эксперимента, состоящем во вращении диска со стрелкой, разделенного на равные сегменты и окрашенные в разные цвета. На протяжении целого ряда лет ребенок пребывает в убеждении, что все дело в том, что стрелка притягивается к сегменту определенного цвета, а сегментам других цветов просто «не везет». По мысли ребенка в основе физических явлений лежит нечто вроде моральных норм. Невозможность постижения ребенком как случайных, так и закономерных процессов объясняет, с точки зрения логики, его неспособность понять дизъюнкцию: «либо А, либо В». На этой стадии все воспринимается как смесь каприза и моральной детерминации. Что касается представления у детей соотношения между благоприятными и возможными исходами события, то интересен такой пример: в закрытых ладонях перемешаны две черных и одна белая фишки, спрашивается, фишка какого цвета будет выбрана с большей вероятностью? Ребенок дошкольного возраста полагает, что чаще других будет выпадать единственная белая фишка из имеющихся трех. Этот факт объясняется отсутствием понимания логических отношений между частью и целым: « Дети не способны выполнить операцию двух подклассов: $A + A^1 = B$. При этом они никогда не говорят, что В может быть А или A^1, и что А более вероятно в этой случае, поскольку здесь на два элемента А приходится только один элемент A^1».(1,273).

Вторая стадия конкретных операций характеризуется появлением начальных интуитивных представлений о случайности и вероятности события. Представление о случайном проявляются в детском скептицизме: «Нельзя узнать заранее, куда покатится шарик: каждый шарик может покатиться и в ту, и в другую сторону».

Здесь уже ребенок начинает понимать случайный характер явлений. Формирующееся представление о перемешивании элементов, а значит о случайной совокупности, носит смутный характер, ему не сопутствует четкий анализ. На этой стадии конкретных операций различные типы мыслительной деятельности, возникшие в течение предшествующего периода, становятся обратимыми. Оказывается возможным возвращение к начальному положению или к исходной точке.

Логические операции, таким образом, вырастают как продукт координации действий соединения, упорядочивания и установления соответствий, обретших форму обратимых систем. С помощью конкретных операций можно классифицировать, упорядочивать серии, получать равенства и устанавливать соответствия между объектами. Можно наблюдать первые признаки осознания понятия случайного распределения и начало постепенного установления между последовательными случайными событиями. Ребенок высказывает некоторые предложения и сомнения, начинает отличать определенность от возможности. Понятие случайного распределения хорошо усваивается детьми в ходе игр, основанных на случайном выборе элементов, образующих некоторое множество. Игры такого рода важны для ребенка тем, что в них игрок сам совершает действие выбора того или иного элемента, а не просто наблюдает за случайным распределением исходов.

Участвуя в таких играх. Дети, прежде всего, открывают для себя чисто качественное понятие случайности, определенной как недостоверное событие, наступление которого нельзя с несомненностью вывести дедуктивно. Эти открытия, по мнению психолога Дж. Брунера, ребенок способен сделать еще до того, как он овладеет техникой вычисления вероятности. Интерес ребенка к проблемам вероятностного характера легко пробудить и развить задолго до системного изложения статистических процессов и овладения соответствующими вычислительными приемами: «Статистические суждения и расчеты есть только инструменты, к использованию которых следует приступать лишь, после того как установлено их непосредственное понимание».(2,368).

По словам М.Глемана и Т.Варга «...все, что требуется, - это искусно связать теорию вероятностей с миром ребенка. Вокруг нас легко найти множество ситуаций, которые могут послужить толчком к глубоким размышлениям. Нужно обратить внимание ребенка на то, что слова «случай», «случайность», «случайно» очень часто нами употребляются в повседневной речи. Что же значит случайно произошедшее событие? Очень важно, чтобы дети как можно раньше познакомились с идеей, что событие **может быть, возможно, но не обязательно** - это понятие промежуточное между достоверностью и невозможность. ».(3,8).

Поэтому, чем раньше ребенок начнет активно вмешиваться в ход случайных событий, тем больше вероятность раннего формирования у него вероятностного мышления.

В свете сказанного, небезынтересно было бы посвятить первые два года школьного обучения сери упражнений по манипулированию предметами, их классификации, упорядочиванию, с тем, чтобы дети уяснили логические операции сложения, умножения, включения, а также линейного упорядочивания и тому подобные. Так как не подлежит сомнению, что эти операции являются логической базой для более конкретных операций и понятий теории вероятностей.Анализируя известные нам подходы к изучению элементов теории вероятностей и статистики в средних школах различных стран, можно сделать следующий вывод:

В подавляющем большинстве стран с понятиями случайности и вероятности случайных событий детей знакомят уже в начальной школе. «В действительности, подобная предпрограмма значительно приблизит ребенка к построению такого рода непосредственного понимания вещей, которое в дальнейшем войдет в систематический курс»(1,278).

Итак, на второй стадии, стадии конкретных операций, у детей появляется понятие случайности, притом, что у них еще отсутствует представление об определенной частоте событий при большом числе последовательных испытаний: на вопрос: «Могут ли подброшенные все фишки упасть только одной стороной» ребенок отвечает, что нет, так как они падают то на одну, то на другую сторону, они не могут все упасть на одну и ту же сторону, поскольку они вращаются во время броска»(1,280).

Однако дети все еще отказываются оценивать относительную частоту выпадения то одной стороны, то другой с точки зрения вероятности этих событий, при этом они уверены в том, что сотня бросков не более показательна, чем десяток.

Последний, третий, период операционального развития начинается с 11-12 лет и приходит в состояние равновесия в 14-15 лет, когда у ребенка формируется логика взрослого. Наблюдается появление нового свойства -способности мыслить гипотезами. Такое гипотетико-дедуктивное рассуждение является характерным для вербального мышления, потому что создает возможность принять любые данные как нечто гипотетическое и строить рассуждение относительно них. Построение пропозициональных операций является характерной особенностью этого периода. При анализе этого уровня возникают интереснейшие психологические проблемы, которые связаны с появлением новой группы операций или «операциональных схем».(4,77).

К одной из этих операциональных схем относятся комбинаторные операции. Дети, начиная с 12 лет способны строить всевозможные комбинации в эксперименте с вытаскиванием наугад цветных фишек из мешка. В эксперименте с перемешиванием шариков двух цветов ребенок сначала прогнозирует путь каждого шарика в соответствии с правильной моделью движения, при которой шарики как будто бы никогда не сталкиваются. Однако впоследствии рассматривает конечную комбинацию как случайный результат некоторого числа незапрограммированных столкновений. Подросток уже не приписывает перемешиванию шариков непредсказуемого и непостижимого характера, а переводит это явление в мыслительные операции. Перемешивание понимается, наконец, как процесс, происходящий благодаря проникновению независимых причинно-следственных последовательностей событий, а такое понимание уже есть большой прогресс в формировании вероятностного мышления ребенка.

Очень важен момент того, что на третьей стадии развития подросток открывает для себя формальные операции исключающей дизъюнкции и начинает размышлять над отношением частоты событий в больших рядах последовательных испытаний: «...чем больше испытаний, тем больше шансов, что распределение результатов будет регулярным...».

В основе этих объяснений лежит растущее понимание факта уравновешивания между сериями последовательных событий. Но даже на третьей стадии у ребенка отсутствует само представление об ожидаемой частоте выпадения определенных результатов - представление, которое обычно возникает в итоге продолжительного ряда испытаний. На примере эксперимента с вращающимся диском видно, что развитие суждений о вероятности и вероятностного мышления тесно связано с прогрессом формально-операционального подхода, предполагающего систематического варьирования различных факторов.

Для численной оценки вероятности события ребенком, находящемся на третьей стадии развития психологом Б.Инельдер использовалась следующая игра: брались примерно 20 белых фишек, на одной стороне которых был нарисован крест, а на другой - круг. В процессе игры по типу «орел или решка» ребенка просили пронаблюдать за 20 бросками, затем без ведома ребенка фишки подменялись другими - с крестом на обеих сторонах. Эксперимент повторялся, пока ребенка не догадывался о подмене.

Рассуждения детей имеют такой характер: «для одной фишки случай является решающим фактором. Но чем их больше, тем больше вероятность, что можно узнать, перемешаны ли они. В обычных играх, где фишек много, половина падает на одну сторону и половина - на другую» (1,271). Когда ребенок обнаруживает подмену, то делает вывод, что необходимы большие серии испытаний для точного установления числа благоприятных случаев.

Итак, оценки показывают, что ребенок существенно приближается к пониманию вероятности как функции многократных испытаний. Наиболее вероятный результат крестов и кругов - половина на половину. Такое соотношение становится наиболее вероятным по мере увеличения количества бросков. Точно также ребенок понимает, что наименее вероятна такая ситуация, когда выпадают только кресты или только круги, и такая ситуация становится все менее вероятной по мере роста числа бросков.

Таким образом, анализируя все выше сказанное, можно сделать следующие выводы:

Первые представления о случайности, еще весьма существенно ограниченные, появляются лишь к 7 годам и зависят от овладения конкретными логическими операциями. Более того, возможно, именно позднее появление операций и объясняет постепенный, длительный характер формирования вероятностного мышления.

В течение первого периода 4-7 лет в мышлении ребенка не нет разделения на необходимые и возможные события, развивается в сфере непосредственной деятельности и далеко от понятия случайности.

В течение второго периода (примерно с 7 до 11 лет) ребенок открывает случайные события в их самой наивной форме - как непредсказуемые, в противоположность таким событиям, которые определенным образом детерминированы и, которые можно предвидеть на основе логических операций. Это открытие происходит вместе с развитием и вступлением в действие конкретных операций, связанных с классификацией, сериацией, установлением отношений между элементами. В этот период дети начинают осознавать случайность как противоположность логической (дедуктивной) необходимости, так как они теперь способны дедуктивно рассуждать и поэтому могут заметить разницу между детерминированными и случайно происходящими событиями.

На протяжении третьего периода, когда появляются формальные операции и, в частности, комбинаторные, подросток приобретает способность оценивать общее число возможностей и осознавать отношения между благоприятными случаями и всей совокупностью, рассматриваемой как сумма сочетаний всех возможных случаев. Оценивание вероятности, таким образом, является результатом сравнения совместимых обратимых событий, с одной стороны, и необратимых случайных событий, с другой, в то время как лишь малая часть универсума возможных событий реализуется в действительности.

Открытие случайного распределения как функции «большого числа испытаний» в психологическом плане образует подлинную основу понимания вероятности.

На предшествующей (второй) стадии ребенок мыслит только частными событиями и ведет себя так, как если бы он невольно следовал высказыванию Дж. Бертрана: «Случай не имеет ни совести, ни памяти».(1, 276).

Позднее он начинает вести себя в соответствии с иным принципом: «Частота события стремится к его вероятности». Таким образом, именно в рамках операциональной системы развиваются представления о случайности и вероятностное мышление. Умственные операции постепенно достигают той степени развития, которая необходима для понимания случайных событий.

Опираясь на исследования психологов о формировании и развитии вероятностного мышления детей, следует отметить, что человек изначально плохо приспособлен к вероятностной оценке, к осознанию и верной интерпретации вероятностно-статистической информации. В возрасте начальных классов еще многое в представлениях ученика о мире недостаточно сформировано. В то же время основы описательной статистики, таблицы, столбчатые диаграммы, а также основы комбинаторики, систематический перебор вариантов на небольшом множестве предметов возможно и даже необходимо вводить в курс начальной школы.

Работы психологов, на которые мы уже ссылались, также утверждают, что наиболее благоприятен для формирования вероятностных представлений возраст 11-14 лет, что примерно соответствует 5-7 классу российской школы.

Работа по пропедевтике вероятностных представлений, проведению экспериментов со случайными исходами и обсуждению на качественном уровне их результатов дают хорошее развитие вероятностной интуиции и вероятностного мышления именно в этом, не закрепленном формальными "обязательными результатами" возрасте.

Г.Л. ЛУКАНКИН, А.Г. ЛУКАНКИН

О ПРОБЛЕМАХ ПОДГОТОВКИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ КАДРОВ В УСЛОВИЯХ МОДЕРНИЗАЦИИ СИСТЕМЫ ОБРАЗОВАНИЯ

Современное общество ставит перед системой образования задачи, связанные с разработкой педагогической стратегии в условиях массовой компьютеризации и информатизации. Одной из важнейших задач высших педагогических учебных заведений является подготовка педагогических кадров, в частности учителей математики, в соответствии с Концепцией модернизации российского образования на период до 2010 года, утвержденной постановлением Правительства Российской Федерации. В настоящее время Министерством образования и науки РФ в соответствии с данной Концепцией разрабатываются Программы модернизации педагогического образования с учетом новых социальных требований к системе образования, внутренних закономерностей развития педагогического образования, а также необходимостью реализации Болонской декларации.

Модернизация педагогического образования тесно связана с задачами совершенствования структуры и содержания общего среднего образования. В связи с переходом старшей общеобразовательной школы на профильное обучение на первый план выдвигается задача двух-многоуровневой системы подготовки будущего учителя на основе реализации концепции профессионально-педагогической направленности обучения. Современный учитель должен быть готов к работе в школах различного профиля и к самостоятельному приобретению знаний.

Педагогическое образование является приоритетной и системообразующей областью в сфере образования России. В настоящее время педагогические кадры в системе непрерывного педагогического образования проходят подготовку, переподготовку и повышение квалификации в более 670 образовательных учреждениях, в их числе около 350 педагогических колледжей и училищ; 55 профессионально-педагогических и индустриально-педагогических колледжей и техникумов; 160 государственных высших учебных заведений; 94 образовательных учреждения повышения квалификации и профессиональной переподготовки работников образования. В систему непрерывного педагогического образования входят филиалы вузов, а также негосударственные учебные заведения, в которых ведется подготовка учительских кадров. Составной частью указанной системы являются научно-исследовательские институты и организации Минобрнауки РФ и РАО.

Для современной системы непрерывного педагогического образования является характерным ее построения на принципах открытости, доступности, многоступенчатости, многоуровневости, многофункциональности, гибкости и динамичности, с учетом необходимости широкого использования педагогических, информационных и коммуникационных технологий.

Россия, вместе со всеми странами мира, вступила в XXI век – век образования. В условиях современной научно-технической и информационной революции образование превратилось в сложный социально-экономический организм, играющий определяющую роль в общественном процессе человечества. Образование становится ключевым фактором социально - экономического развития любого государства, в том числе и России. В своем выступлении в августе 2001 года на заседании Государственного Совета Российской Федерации

Президент Российской Федерации В. В. Путин сказал: «Развитие образования в стране – это далеко не только вопрос престижа нашего государства, хотя и это важно. Развитие образования – это задача общенациональной значимости. Мы всегда держали здесь высокую планку, и высота эта нужна не сама по себе. Она – залог успешного развития государства и общества». Именно по этой причине образование признается приоритетной областью жизни нашего государства. Последнее получило свое законодательное закрепление в принятой Государственной Думой Национальной доктрине образования в РФ. Этим документом определяется стратегия и тактика реформирования российского образования на ближайшие 25 лет XXI столетия. Как отмечалось на VI и VII съездах Российского Союза ректоров высших учебных заведений, на которых обсуждалась стратегия развития высшей школы, педагогические университеты и институты смогли интегрироваться в общую систему образования и занять в ней одно из ведущих мест, тем самым, подтвердив свою конкурентоспособность в решении образовательных, научных и общекультурных задач, наряду с классическими университетами. Подтверждением этого является разработка указанной Программы, которая дополняет Программу развития системы непрерывного педагогического образования в России на 2001-2010 годы.

В настоящее время от педагогической науки требуется разработка теоретических основ современной образовательной системы России, в частности, основ совершенствования математического образования во всех звеньях системы непрерывного образования.

По оценке аналитиков, дальнейшее совершенствование системы образования в России будет осуществляться по следующим направлениям:

включение российской системы образования в мировую систему в рамках Болонского процесса;

сохранение единого образовательного пространства в странах СНГ;

реализация непрерывной системы образования, начиная от дошкольного образования и кончая послевузовским;

организация многоступенчатой, моноуровневой и многоуровневой подготовки преподавателей; поддержка кадрового потенциала;

научно-методическая перестройка всех видов обучения с учетом внедрения новых образовательных стандартов и программ, новых и передовых технологий обучения, включая дистанционное обучение;

приоритетное внедрение в сферу образования последних достижений науки и техники;

совершенствование управления и финансирования системы непрерывного образования.

Структурное преобразование системы педагогического образования на принципах непрерывности развития личности педагога и преемственности различных звеньев его подготовки, повышения квалификации и переподготовки предусматривает создание инновационных комплексов учебных заведений. В них могут входить: педагогический лицей – педагогически профилированная старшая школа, педагогический колледж – первая ступень высшего образования, педагогический университет (или институт) – вторая ступень высшего образования, университет педагогического мастерства – ступень послевузовского образования.

Как показывает практика, уровень профессиональной подготовки педагогов сегодня не в полной мере отвечает потребностям практики и требованиям Государственного стандарта общего и высшего образования. Так, например, студенты и выпускники вузов оказываются неспособными в основной массе к реализации различных методик (в том числе, в условиях сельской малокомплектной школы), применительно к многообразным ситуациям в обучении в современной, развивающей и профильной школе (связанных, например, с реализацией индивидуализации, уровневой и профильной дифференциации, информационно-категориального подхода в обучении). Они недостаточно (для конструирования учебного материала с целью достижения конкретных образовательных целей, достижения обязательных результатов в обучении) владеют содержанием образовательной области. Они также весьма консервативны в вопросах внедрения инноваций (например, новых информационных, коммуникативных и педагогических технологий) в процесс обучения школьников.

Таким образом, на современном этапе реформирования системы образования по-прежнему остается актуальным для педагогической науки, представленной наряду с вузовской наукой, научными и прикладными исследованиями Российской Академии образования, поиск путей ее теоретического обоснования. Первейшим из них является разработка теоретических основ профессиональной подготовки учителя в условиях модернизации педагогического образования.

В рамках модернизации высшей школы, ориентированной на необходимость усиления фундаментализации, диверсификации и информатизации высшего образования, на реализацию дифференциация обучения как составной части и необходимого условия гуманизации и демократизации образования, возрождения культуросозидающей функции образования, в нашем университете разработана концепция основ профессиональной подготовки учителей, в частности учителей математики. На ее основе построена теоретическая модель обучения студентов в высшем педагогическом учебном заведении, включающая базовую компоненту, инвариантную к получаемой в вузе специальности преподавателя, и вариативную компоненту, зависящую от специализации выпускника вуза, а также методическая система обучения.

Основным звеном в системе непрерывного образования является средняя общеобразовательная школа, а ведущей фигурой в ней - учитель, прежде всего, учитель математики, так как математика является одной из основных фундаментальных, базовых дисциплин. В связи с принятием Концепции 12-летнего общего среднего образования необходимо пересмотреть содержание образования и формы организации учебно-воспитательного процесса. Следует провести работу по совершенствованию базисного учебного плана, по разработке вариативных учебных программ образовательных областей (или учебных предметов), стандарта общего среднего образования, по подготовке учебно-методической литературы (учебники и пособия) для различных типов средних общеобразовательных учебных учреждений: гимназий (учреждений гуманитарного направления), лицеев (учреждений физико-математического, естественно-научного, экономического и др. направлений), реальных училищ (учреждений технического, сельскохозяйственного и др. направлений).

В целях кардинального улучшения положения дел с математическим образованием необходимо пересмотреть методическую систему подготовки учителей математике на основе деятельностного подхода, с учетом региональной направленности и культурной деятельности школы:

определить цели математического образования как компоненты готовности обучаемых к учебной математической деятельности, обеспечивающие полный цикл учебно-познавательной деятельности;

представить содержание учебной информации по математике на основе приемов учебной математической деятельности;

разработать приемы учебной деятельности в формах, методах и средствах обучения математике и подготовки специалиста;

разработать технологические процедуры деятельности обучаемых в учебном процессе по математике;

спроектировать технологические процедуры и методический инструментарий управляющей деятельности преподавателя, обеспечивающие учебную деятельность обучаемых.

Указанная методическая система может быть использована как при обучении математике в средней школе, так и при подготовке педагогических кадров, учителей математики, в частности.

Заметим, что вузовский этап в системе подготовки педагогических кадров является центральным. При подготовке специалиста в вузе необходимо реализовать диверсификацию и гибкость высшего образования, фундаментализацию и профессиональную направленность обучения, оптимальный выбор методов и форм обучения, включая дистанционное, использовать в обучении новые информационные, педагогические и коммуникационные технологии. На всех этапах подготовки специалиста, включая довузовский, преемственность должна выступать как системообразующий фактор.

В настоящее время активно идет процесс информатизации сферы образования. Процесс информатизации образования развивается на основе возможностей использования информационных и коммуникационных технологий. Этот процесс предполагает, прежде всего, овладение обучающимися современными методами представления и извлечения информации, современными технологиями информационного взаимодействия с моделями объектов, процессов и явлений, представленных в предметных сферах, и их имитациями, умение использовать банк педагогических данных.

Важное место в работе вуза должна занимать подготовка УМК по профильным дисциплинам специальности (направления) на основе новых информационных технологий (НИТ). В условиях НИТ учебный материал в той или иной ТКО чаще всего оформляется в виде обучающей программы (в них описываются подлежащие усвоению знания, умения и навыки, а также алгоритмы овладения ими); это могут быть семантические сети (ориентированный граф, в котором вершины соответствуют отдельным категориям предметной области, а ребра – отношениям между понятиями); процедурные модели (совокупность процедур, хранящихся в базе данных и вырабатывающих в случае их активизации ответ, используемый для сравнения с ответом обучаемого).

Мы отдаем предпочтение рассмотрению представления учебного материала, а также самого процесса обучения в одной из ТКО, в виде семантической сети (СС). Представление учебного процесса в виде семантической сети позволяет: учитывать учебные ситуации; связывать новые понятия с существующими понятиями и представлениями, что улучшает понимание; осуществлять глубокую обработку знаний, что повышает способность применять знания в новых ситуациях; обеспечивать индивидуальный темп обучения; реализовать деятельностный подход и осуществлять обратную связь. С другой стороны, все формы обучения представляют собой не что иное, как один из видов информирования, а обучение с помощью ЭВМ представляет собой семантический диалог такой информационной системы как человек - ЭВМ. Использование семантических сетей в процессе обучения позволяет, с одной стороны, представить сам процесс обучения в виде СС, что означает формализацию процесса информирования, с другой стороны, в виде СС можно представить знания, т.е. учебный материал. Т.о., представив в виде СС сам процесс обучения и непосредственно учебный материал, решаем проблему формализации семантического диалога системы человек - ЭВМ, что обеспечивает, как упоминалось выше, значительное повышение эффективности ее функционирования. Начата работа по созданию таких УМК для дистанционного обучения.

Опыт перестройки в подготовке учителей математики накоплен в нашем педагогическом университете. В НМ Центре новых педагогических технологий университета разработана концепция основ профессиональной подготовки учителей. Основными составляющими концепции являются следующие структурные элементы: профессионально-педагогическая направленность общекультурного блока дисциплин; профессионально-предметная направленность психолого-педагогических дисциплин; фундаментализация и педагогизация блока специальных дисциплин; вооружение специалистов современными педагогическими, информационными и коммуникационными технологиями; создание учебно-научно-производственно-педагогических комплексов и др. Структура модели теоретических основ будущих педагогов представлена в виде 6 блоков. Определяющим блоком модели является социальный заказ общества высшей школе на подготовку специалиста, определяемый Госстандартом высшего образования. В структуру модели входит также профессиональная деятельность специалиста (четыре блока функций – целеполагающий, мотивационный, содержательный и контрольно-корректирующий), модель выпускника вуза, методическая система обучения студентов в вузе. Модель содержит характеристику учебной деятельности студента. За итоговый блок модели принимается готовность специалиста к педагогической деятельности.

Предлагаемая модель специалиста позволяет готовить педагогические кадры, способные к работе в условиях современной профильной школы, вооружив их информационными и образовательными технологиями, в частности технологиями индивидуализации и дифференциации обучения, методологией дистанционных форм образования.

И это подтверждается успешной практикой подготовки учителей математики в нашем университете.

Г.Л. ЛУКАНКИН, И.Г. ТАБАКОВА

ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ РИМАНА ДЛЯ ЗАДАННОЙ ОПРЕДЕЛЯЮЩЕЙ ОБЛАСТИ

Введение.

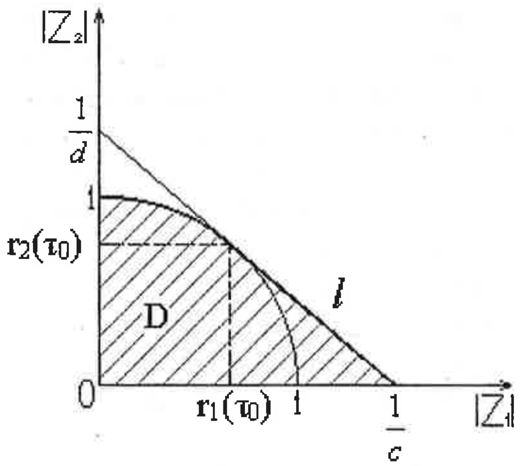
В настоящей статье для заданной определяющей области D, которая параметрически задаётся следующим образом:

$D = \{(Z_1,Z_2) : |Z_1|<r_1(\tau), |Z_2|<r_2(\tau), 0\le\tau\le1\}$, а её граница

$\partial D = \{(Z_1,Z_2) : |Z_1|=r_1(\tau), |Z_2|=r_2(\tau), 0\le\tau\le1\}$, где

$$r_1(\tau)=\begin{cases}\sqrt{\tau}, & при \quad 0\le\tau<\tau_0\\ w_0\tau, & при \quad \tau_0\le\tau\le1\end{cases} \qquad r_2(\tau)=\begin{cases}\sqrt{1-\tau}, & при \quad 0\le\tau<\tau_0\\ \dfrac{w_0}{2\sqrt{1-\tau_0}}(1-\tau), & при \quad \tau_0\le\tau\le1\end{cases}$$

$w_0=\sqrt{\tau_0}-2\tau_0+2$,



$0\le\tau\le1;\ 0\le|Z_1|\le r_1(1);\ 0\le|Z_2|\le r_2(1)$,

ставится и решается задача линейного сопряжения, а именно:

п. 1. задача Римана частного вида (задача о скачке);

п. 2. однородная задача Римана.

Эти задачи рассматриваются на окружности особенностей

$$B_{-1,1} = \{(Z_1^{(0)},\ Z_2^{(0)}) : |Z_1^{(0)}|=0, |Z_2^{(0)}|=\frac{w_0}{2\sqrt{1-\tau_0}}\}.$$

п1. Задача о скачке.

Постановка:

Пусть в пространстве C^2 задана область D типа A. *Требуется* найти функцию $p(Z_1, Z_2)$ из класса (T), исчезающую на бесконечности и испытывающую при переходе через границу ∂D, области D скачок $g(\xi_0)$, т.е. удовлетворяющую краевому условию: $P^+(0, \frac{\xi_0 \omega_0}{2\sqrt{1-\tau_0}}) - P^-(0, \frac{\xi_0 \omega_0}{2\sqrt{1-\tau_0}}) = g(\xi_0)$

Решение:

Заданную на области D произвольную функцию $g(\xi_0)$, удовлетворяющую условию Гёльдера, можно единственным образом представить в виде разности функций $P^+(z_1^0, z_2^0), P^-(z_1^0, z_2^0)$ являющихся предельными значениями функции $P(z_1, z_2)$.

Предельные значения для нашего случая задаются по следующим формулам:

1.

$$p_{S,1}^+\left(Z_1^{(0)}, Z_2^{(0)}\right) = \frac{1}{4\pi^2 i}\int_0^{\tau_0} d\tau \int_0^{2\pi} dt \int_{|\eta|=1} \frac{f\left(\sqrt{\tau}\eta, \sqrt{1-\tau}\eta e^{-it}\right)}{\eta - u_0} d\eta +$$

$$+\frac{1}{4\pi^2 i}\int_{\tau_0}^{1} d\tau \int_0^{2\pi} dt \int_{|\eta|=1} \frac{f\left(\omega_0 \tau\eta, \frac{\omega_0}{2\sqrt{1-\tau_0}}(1-\tau)\eta e^{-it}\right)}{\eta - u_0} d\eta + \qquad (1)$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_{\tau_0}^{1} d\tau \int_0^{2\pi} f(\tau, t, u_0) dt;$$

2.

$$p_{S,1}^-\left(Z_1^{(0)}, Z_2^{(0)}\right) = \frac{1}{4\pi^2 i}\int_0^{\tau_0} d\tau \int_0^{2\pi} dt \int_{|\eta|=1} \frac{f\left(\sqrt{\tau}\eta, \sqrt{1-\tau}\eta e^{-it}\right)}{\eta - u_0} d\eta +$$

$$+\frac{1}{4\pi^2 i}\int_{\tau_0}^{1} d\tau \int_0^{2\pi} dt \int_{|\eta|=1} \frac{f\left(\omega_0 \tau\eta, \frac{\omega_0}{2\sqrt{1-\tau_0}}(1-\tau)\eta e^{-it}\right)}{\eta - u_0} d\eta - \qquad (2)$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int_{\tau_0}^{1} d\tau \int_0^{2\pi} f(\tau, t, u_0) dt.$$

Мы рассматриваем нашу задачу сопряжения на окружности особенностей:

$$B_{-1,1}=\left\{\left(Z_1^{(0)},Z_2^{(0)}\right):\ \left|Z_1^{(0)}\right|=0,\quad \left|Z_2^{(0)}\right|=\frac{\omega_0}{2\sqrt{1-\tau_0}}\right\},$$ с условием сопряжения:

$$p^+\left(0,\frac{\xi_0\omega_0}{2\sqrt{1-\tau_0}}\right)-p^-\left(0,\frac{\xi_0\omega_0}{2\sqrt{1-\tau_0}}\right)=g(\xi_0).$$

Тогда

$$u=\begin{cases}\sqrt{\tau}Z_1+\sqrt{1-\tau}Z_2e^{it}, & 0\le\tau<\tau_0\\ \dfrac{1}{\omega_0}Z_1+\dfrac{2\sqrt{1-\tau_0}}{\omega_0}Z_2e^{it}, & \tau_0\le\tau\le1\end{cases};$$

$$u_0=\begin{cases}\sqrt{1-\tau}\,\dfrac{\xi_0\omega_0}{2\sqrt{1-\tau_0}}e^{it}, & 0\le\tau<\tau_0\\ \exp i\left[\arg\dfrac{\xi_0\omega_0}{2\sqrt{1-\tau_0}}+t\right], & \tau_0\le\tau\le1.\end{cases}$$

Введем **обозначения** функций, которые участвуют в задании предельных значений:

$$f\left(\sqrt{\tau}\eta,\sqrt{1-\tau}\eta e^{-it}\right)=A,$$

$$f\left(\omega_0\tau\eta,\frac{\omega_0}{2\sqrt{1-\tau_0}}(1-\tau)\eta e^{-it}\right)=B,$$

$$f(\tau,t,u_0)=C,\quad \text{т.е.}$$

$$\frac{1}{4\pi^2 i}\int_0^{\tau_0}d\tau\int_0^{2\pi}dt\int_{|\eta|=1}\frac{f\left(\sqrt{\tau}\eta,\sqrt{1-\tau}\eta e^{-it}\right)}{\eta-u_0}d\eta=\frac{1}{4\pi^2 i}\int_0^{\tau_0}d\tau\int_0^{2\pi}dt\int_{|\eta|=1}\frac{A}{\eta-u_0}d\eta,$$

$$\frac{1}{4\pi^2 i}\int_{\tau_0}^{1}d\tau\int_0^{2\pi}dt\int_{|\eta|=1}\frac{f\left(\omega_0\tau\eta,\dfrac{\omega_0}{2\sqrt{1-\tau_0}}(1-\tau)\eta e^{-it}\right)}{\eta-u_0}d\eta=\frac{1}{4\pi^2 i}\int_{\tau_0}^{1}d\tau\int_0^{2\pi}dt\int_{|\eta|=1}\frac{B}{\eta-u_0}d\eta,$$

$$\frac{1}{4\pi}\int_{\tau_0}^{1}d\tau\int_0^{2\pi}f(\tau,t,u_0)dt=\frac{1}{4\pi}\int_{\tau_0}^{1}d\tau\int_0^{2\pi}Cdt.$$

Рассмотрим разность:

$$p^+\left(0,\frac{\xi_0\omega_0}{2\sqrt{1-\tau_0}}\right)-p^-\left(0,\frac{\xi_0\omega_0}{2\sqrt{1-\tau_0}}\right)=g(\xi_0).$$

$$\frac{1}{4\pi^2 i}\int_0^{\tau_0}d\tau\int_0^{2\pi}dt\int_{|\eta|=1}\frac{A}{\eta-u_0}d\eta+\frac{1}{4\pi^2 i}\int_{\tau_0}^{1}d\tau\int_0^{2\pi}dt\int_{|\eta|=1}\frac{B}{\eta-u_0}d\eta+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_{\tau_0}^{1}d\tau\int_0^{2\pi}Cdt-\frac{1}{4\pi^2 i}\int_0^{\tau_0}d\tau\int_0^{2\pi}dt\int_{|\eta|=1}\frac{A}{\eta-u_0}d\eta-$$

$$-\frac{1}{4\pi^2 i}\int_{\tau_0}^{1}d\tau\int_0^{2\pi}dt\int_{|\eta|=1}\frac{B}{\eta-u_0}d\eta+\frac{1}{4\pi}\int_{\tau_0}^{1}d\tau\int_0^{2\pi}Cdt=g(\xi_0)$$

Приводя подобные слагаемые и учитывая ранее введённые обозначения, получаем:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\tau_0}^{1}d\tau\int_0^{2\pi}f(\tau,t,u_0)dt=g(\xi_0)$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\int_{\tau_0}^{1}f(\tau,t,u_0)d\tau-2g(\xi_0)\right]dt=0$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[P_{[\tau_0,1]}(\tau,t,u_0)-2g(\xi_0)\right]dt=0$$

$$P_{[\tau_0,1]}(\tau,t,u_0)=2(g(\xi_0)+\varphi(t,\xi_0)),\quad \textit{где}$$

$\int_0^{2\pi}\varphi(t,\xi_0)dt=0$, $\varphi(t,\xi_0)$ - некоторая функция непрерывная по $t\in[0,2\pi]$ и

удовлетворяющая условию $Lip\,\tau_0$ $(0<\tau_0\le 1)$ независимому от **t**.

$P_{[\tau_0,1]}(\tau,t,u_0)=\int_{\tau_0}^{1}f(\tau,t,u_0)dt$, где $f(\tau,t,u_0)$ - плотность интеграла типа

Темлякова.

п.2. Однородная задача.

Постановка.

Пусть в пространстве C^2 задана область D типа A. *Требуется* найти функцию $p(Z_1,Z_2)$ из класса (T), исчезающую на двумерном многообразии бесконечно удалённых точек, удовлетворяющую в точках окружности особенностей

$$B_{-1,1}=\left\{\left(Z_1^{(0)},Z_2^{(0)}\right):\left|Z_1^{(0)}\right|=0,\ Z_2^{(0)}=\frac{\xi_0\omega_0}{2\sqrt{1-\tau_0}},\ \left|\xi_0\right|=1\right\}$$

краевому условию:

$$p^+\left(0,\frac{\xi_0\omega_0}{2\sqrt{1-\tau_0}}\right)=G(\xi_0)\ p^-\left(0,\frac{\xi_0\omega_0}{2\sqrt{1-\tau_0}}\right),\text{ где }\left(0,\frac{\xi_0\omega_0}{2\sqrt{1-\tau_0}}\right)\in B_{-1,1};$$

$$p^+\left(0,\frac{\xi_0\omega_0}{2\sqrt{1-\tau_0}}\right)=\underset{\substack{(Z_1,Z_2)\to\left(0,\frac{\xi_0}{d}\right)\\ (Z_1,Z_2)\in D}}{Lim}\quad p(Z_1,Z_2);$$

$$p^-\left(0,\frac{\xi_0\omega_0}{2\sqrt{1-\tau_0}}\right)=\underset{\substack{(Z_1,Z_2)\to\left(0,\frac{\xi_0}{d}\right)\\ (Z_1,Z_2)\in E_2}}{Lim}\quad p(Z_1,Z_2);$$

функция $G(\xi_0)$ задана на окружности особенностей $B_{-1,1}$ и удовлетворяет условию Гёльдера, причем ж $=\mathrm{Ind}\ G(\xi_0)$ 0[*] ($G(\xi_0)$ не обращается в нуль на $B_{-1,1}$).

Решение:

Решение поставленной краевой задачи будем искать в виде интеграла типа Темлякова 1-ого рода с заданной определяющей областью.

Предельные значения $p^+\left(0,\frac{\xi_0\omega_0}{2\sqrt{1-\tau_0}}\right)$, $p^-\left(0,\frac{\xi_0\omega_0}{2\sqrt{1-\tau_0}}\right)$ задаются, соответственно, по формулам (1) и (2).

Мы рассматриваем задачу сопряжения на окружности особенностей:

$B_{-1,1}=\left\{\left(Z_1^{(0)},Z_2^{(0)}\right):\left|Z_1^{(0)}\right|=0,\left|Z_2^{(0)}\right|=\frac{\omega_0}{2\sqrt{1-\tau_0}}\right\}$ с условием сопряжения:

$$p^+\left(0,\frac{\xi_0\omega_0}{2\sqrt{1-\tau_0}}\right)=G(\xi_0)\ p^-\left(0,\frac{\xi_0\omega_0}{2\sqrt{1-\tau_0}}\right).\tag{3}$$

Введем **обозначения** функций, которые участвуют в задании предельных значений:

---

[*] Индексом æ краевой задачи Римана называется разделённое на 2π приращение аргумента коэффициента G при однократном обходе окружности особенностей $B_{-1,1}$ в положительном направлении.

$$f\left(\sqrt{\tau\eta},\sqrt{1-\tau}\eta e^{-it}\right)=A,$$

$$f\left(\omega_0\tau\eta,\frac{\omega_0}{2\sqrt{1-\tau_0}}(1-\tau)\eta e^{-it}\right)=B,$$

$$f(\tau,t,u_0)=C.$$

Рассмотрим равенство (3):

$$\frac{1}{4\pi^2 i}\int_0^{\tau_0}d\tau\int_0^{2\pi}dt\int_{|\eta|=1}\frac{A}{\eta-u_0}d\eta+\frac{1}{4\pi^2 i}\int_{\tau_0}^{1}d\tau\int_0^{2\pi}dt\int_{|\eta|=1}\frac{B}{\eta-u_0}d\eta+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_{\tau_0}^{1}d\tau\int_0^{2\pi}Cdt=G(\xi_0)\left[\frac{1}{4\pi^2 i}\int_0^{\tau_0}d\tau\int_0^{2\pi}dt\int_{|\eta|=1}\frac{A}{\eta-u_0}d\eta+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4\pi^2 i}\int_{\tau_0}^{1}d\tau\int_0^{2\pi}dt\int_{|\eta|=1}\frac{B}{\eta-u_0}d\eta-\frac{1}{4\pi}\int_{\tau_0}^{1}d\tau\int_0^{2\pi}Cdt\right].$$

Раскроем скобки и приведём подобные слагаемые:

$$\frac{1}{4\pi}\left[\frac{1-G(\xi_0)}{\pi i}\int_0^{\tau_0}d\tau\int_0^{2\pi}dt\int_{|\eta|=1}\frac{A}{\eta-u_0}d\eta+\frac{1-G(\xi_0)}{\pi i}\times\right.$$

$$\left.\times\int_{\tau_0}^{1}d\tau\int_0^{2\pi}dt\int_{|\eta|=1}\frac{B}{\eta-u_0}d\eta+(1+G(\xi_0))\int_{\tau_0}^{1}d\tau\int_0^{2\pi}Cdt\right]=0;$$

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left[(1+G(\xi_0))\int_{\tau_0}^{1}Cd\tau+\frac{1-G(\xi_0)}{\pi i}\int_{|\eta|=1}\int_0^{\tau_0}\frac{A}{\eta-u_0}d\eta+\right.$$

$$\left.+\frac{1-G(\xi_0)}{\pi i}\int_{|\eta|=1}\int_{\tau_0}^{1}\frac{B}{\eta-u_0}d\eta\right]dt=0;$$

$$
(1+G(\xi_0))P_{[\tau_0,1]}(\tau,t,u_0)+\frac{1-G(\xi_0)}{\pi i}\times\left[\int\limits_{|\eta|=1}\frac{\int\limits_0^{\tau_0}f\left(\sqrt{\tau}\eta,\sqrt{1-\tau}\eta e^{-it}\right)}{\eta-u_0}d\eta+\right.
$$

$$
\left.+\int\limits_{|\eta|=1}\frac{\int\limits_{\tau_0}^{1}f\left(\omega_0\tau\eta,\frac{\omega_0}{2\sqrt{1-\tau_0}}(1-\tau)\eta e^{-it}\right)}{\eta-u_0}d\eta\right]=\varphi(t,\xi_0),
$$

где $G(\xi_0)$, задана на окружности особенностей $B_{-1,1}$ $\left(G(\xi_0)\neq 0\ \textit{на}\ B_{-1,1}\right)$ и удовлетворяет условию Гёльдера; $\int\limits_0^{2\pi}\varphi(t,\xi_0)dt=0$, $\varphi(t,\xi_0)$ - некоторая функция непрерывная по $t\in[0,2\pi]$ и удовлетворяющая условию $Lip\,\tau_0$ $(0<\tau_0\leq 1)$ независимому от t.

$$
P_{[\tau_0,1]}(\tau,t,u_0)=\int\limits_{\tau_0}^{1}f(\tau,t,u_0)d\tau,\quad \textit{где}\quad f(\tau,t,u_0)
$$
- плотность интеграла типа Темлякова.

ЛИТЕРАТУРА.

1. Айзенберг Л.А. О граничных свойствах функций, аналитических в двоякокруговых областях //Ученые записки МОПИ им. Н.К. Крупской, т.96, 1960.
2. Боганов В.И. Некоторые свойства интегралов типа Темлякова //Ученые записки МОПИ им Крупской, т.188, в.11, 1967.
3. Виноградова И.Н. О решении краевых задач. Теория функций, функциональный анализ и их приложения //Ученые записки МОПИ им Крупской, в.15, ч2, М.1972.
4. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М., Физматгиз, 1963.

5. Луканкин Г.Л. О задачах линейного сопряжения функций двух комплексных переменных //Математический анализ и теория функций /сб.тр./МОПИ им. Н.К.Крупской, в.1, М.,1973.
6. Луканкин Г.Л. Задачи линейного сопряжения в пространстве C^2 //Многомерный комплексный анализ и его приложения. Деп. в ВИНИТИ, № 4899, в.91., М., 1991.
7. Луканкин Г.Л., Латышев А.В., Рындина С.В. Граничная задача для одного класса линейных релаксационных нестационарных уравнений //Известия МАН ВШ № 2(16), 2001.

А. В. Нелаев

К ТЕОРИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ В $\mathbf{C}^n$

Светлой памяти профессора
Алексея Александровича Темлякова

Введение

Первая половина данной работы посвящена преобразованиям установленных автором ранее (см., напр., [29], [55], [56], [107]) интегральных представлений функций многих комплексных переменных, голоморфных в круговых областях D класса Λ пространства $\mathbf{C}^n$ $(n \geq 2)$. Актуальность исследования обусловлена тем, что в приложениях интегральных представлений нередко наиболее удобным оказывается использование тех или иных модификаций этих представлений, наиболее полно приспособленных к специфике решаемых задач.

Вторая половина — библиографический список работ автора и его учеников — ответ на поступившие просьбы заинтересованных читателей. К сожалению, еще не увидела свет монография по развиваемому направлению комплексного анализа, включающему вопросы интегральных представлений голоморфных функций в $\mathbf{C}^n$, теорию обобщенных голоморфных функций одного и многих комплексных переменных, постановку и решение многомерных краевых задач.

И еще.

Темляков не случайно припомнился —
Память чувству дает разбег.
Этим мартом ему б исполнилась
Юбилейная сотня лет.

Ну и что ж, что давно в могиле —
Он заметный оставил след:
В математике создал имя,
А какой он был человек …

Сколько такта, вниманья, участья
Он к коллегам своим проявлял.
Скольких выручил в пору ненастья,
О себе только лишь забывал.

Завещал быть скромнее и проще,
Не спешить, видя трудности, прочь:
Если ближний нуждается в помощи —
Благом будет ему помочь.

Вот таким Алексей Александрович
В памяти и остался навек …
И с годами полней понимаешь,

Сколь он праведный был человек.

21.03.2003 Александр Нелаев

§ 1. Исходные данные

В пространстве $\mathbf{R}^n$ вещественных переменных $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$ рассмотрим (n – 1)-мерный симплекс

$$\Delta = \{\tau : \tau_1 + \ldots + \tau_n = 1, \quad \tau_1 > 0, \ldots, \tau_n > 0\}.$$

Переменное τ_1 здесь можно линейно выразить через остальные: $\tau_1 = 1 - \tau_2 - \ldots - \tau_n$. Так и будем понимать далее τ_1. Отметим, что Δ можно представить в виде

$$\Delta = \{\tau : \tau_1 = 1 - \tau_2 - \ldots - \tau_n, \ (\tau_2, \ldots, \tau_n) \in \Delta^*\},$$

где $\Delta^* = \{(\tau_2, \ldots, \tau_n) : 0 < \tau_2 < 1, \ 0 < \tau_3 < 1 - \tau_2, \ldots, 0 < \tau_n < 1 - \tau_2 - \ldots - \tau_{n-1}\}$.

Пусть D — область пространства $\mathbf{C}^n$, удовлетворяющая следующим двум условиям:

1. D ограничена гладкой гиперповерхностью Γ (граница Шилова области D), задающейся параметрически в виде

$$\Gamma = \{\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \in \mathbf{C}^n : \quad \zeta_\mu = \sum_{\nu=1}^{n} R_{\mu\nu}(\tau)\,\xi_\nu, \ \tau \in \Delta, \ \xi \in \mathbf{T}^n, \ \mu = \overline{1, n}\} \tag{1}$$

(кратко $\zeta = R(\tau)\,\xi$), где определённые на замыкании $\overline{\Delta}$ функции $R_{\mu\nu}(\tau) \in C^1(\Delta) \cap C(\overline{\Delta})$, $\mu, \nu = \overline{1, n}$, причем

$$\det_{\tau \in \Delta} R(\tau) = \det_{\tau \in \Delta} \left\| R_{\mu\nu}(\tau) \right\| \neq 0,$$

а

$$\mathbf{T}^n = \{\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n\} \in \mathbf{C}^n : |\xi_1| = 1, \ldots, |\xi_n| = 1\}.$$

2. D представима в виде

$$D = \operatorname{int} \bigcap_{\tau \in \Delta} \{z \in \mathbf{C}^n : \sum_{\mu=1}^{n} \tau_\mu \left| r_{\mu 1}(\tau)\, z_1 + \ldots + r_{\mu n}(\tau)\, z_n \right| < 1\} \tag{2}$$

где $\left\| r_{\mu\nu}(\tau) \right\| \equiv r(\tau) = R^{-1}(\tau)$ (обратная матрица).

Следствие 1.1. Условие (2), кратко записываемое в виде $D = \operatorname{int} \bigcap_{\tau \in \Delta} D_\tau$, свидетельствует о выпуклости области D (это вытекает из выпуклости D_τ).

Следствие 1.2. Выражая из системы (1) параметры ξ_μ, получаем

$$\xi_\mu = r_{\mu 1}(\tau)\ \xi_1 + \ldots + r_{\mu n}(\tau)\ \xi_n, \quad \mu = \overline{1,\ n}.$$

Отсюда, учитывая условие $\xi \in \mathbf{T}^n$, заключаем, что область D может быть представлена в виде

$$D = \bigcup_{\tau \in \Delta} \{z \in \mathbf{C}^n\ :\ \left| r_{\mu 1}(\tau)\, z_1 + \ldots + r_{\mu n}(\tau)\, z_n \right| < 1,\ \ \mu = \overline{1,\ n}\}. \qquad (3)$$

Из (3) видно, что если точка $z \in D$, то и множество точек вида $(\chi z_1, \ldots, \chi z_n) \in D$, где $|\chi| \le 1$, $\chi \in \mathbf{C}$, т. е. D является ограниченной полной круговой областью с центром в начале координат.

Класс определяемых указанным способом круговых областей D было принято ([29], [55]) обозначать Λ (кратко $D \in \Lambda$).

Замечание 1.1. Проведенный в [29], [55] анализ показал, что для ограниченной гиперповерхностью (1) (или задаваемой в виде (3)) области D необходимым условием выполнимости условия (2) (т. е. принадлежности D классу Λ) является выполнимость для параметризующих эту область функций $R_{\mu\nu}(\tau)$ при $\tau \in \Delta$ системы дифференциальных соотношений

$$\begin{cases} \sum\limits_{\mu=1}^{n} \tau_\mu \,(\mathrm{Re} \sum\limits_{\nu=1}^{n} r_{\mu\nu}(\tau)\ \dfrac{\partial r_{\nu\mu}(\tau)}{\partial \tau_p}) = 0, \quad p = \overline{2,\ n}, \\ \sum\limits_{j=1}^{n} (\tau_\mu \overline{r_{\mu j}(\tau)} \dfrac{\partial R_{j\nu}(\tau)}{\partial \tau_p} + \tau_\nu\, r_{\nu j}(\tau) \dfrac{\partial R_{j\mu}(\tau)}{\partial \tau_p}) = 0, \quad \mu, \nu = \overline{1,\ n},\ \mu > \nu,\ \ p = \overline{2,\ n}. \end{cases}$$

Там же было установлено и достаточное условие принадлежности D классу Λ, а также (при дополнительном требовании $R_{\mu\nu}(\tau) \in C^2(\Delta)$) необходимое и достаточное. Это, кстати, означает, что, зная параметризующие область D функции $R_{\mu\nu}(\tau)$ из (1), мы можем установить факт выпуклости этой области.

В записи гиперповерхности (1) условимся параметр ξ_1 обозначать через η, вместо ξ_ν, $\nu = \overline{2,\ n}$, введём новые (вещественные) параметры t_ν по формулам $\xi_\nu = \eta e^{-it_\nu}$ и введём формальный параметр $t_1 \equiv 0$. Тогда в (1)

$$\zeta_\mu = \zeta_\mu(\tau, t, \eta) = \sum_{\nu=1}^{n} R_{\mu\nu}(\tau)\, \eta\, e^{-it_\nu}.$$

Подчеркнём, что здесь и в дальнейшем $(\tau, t) \in \{\tau \in \Delta,\ 0 \le t_\nu \le 2\pi,\ \nu = \overline{2,\ n}\}$.

Введём следующие обозначения:

$$u = u\,(\tau, t, \eta) = \sum_{\mu=1}^{n} \tau_\mu (r_{\mu 1}(\tau)\, z_1 + \ldots + r_{\mu n}(\tau)\, z_n)\, e^{it_\mu}, \qquad (4)$$

$$\hat{\zeta}_\mu = \hat{\zeta}_\mu(\tau, t) = \sum_{\nu=1}^{n} R_{\mu\nu}(\tau)\, e^{-it_\nu}, \quad \hat{\lambda}_\nu = \hat{\lambda}_\nu(\tau, t) = \sum_{\mu=1}^{n} \tau_\mu r_{\mu\nu}(\tau)\, e^{it_\mu},$$

$$v = v(\tau, t) =$$

$$= i^{n-1} \begin{vmatrix} \hat{\lambda}_1 & \frac{\partial\hat{\lambda}_1}{\partial\tau_2} & \dots & \frac{\partial\hat{\lambda}_1}{\partial\tau_n} & -\hat{\lambda}_1 & \frac{\partial\hat{\lambda}_1}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial\hat{\lambda}_1}{\partial t_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hat{\lambda}_n & \frac{\partial\hat{\lambda}_n}{\partial\tau_2} & \dots & \frac{\partial\hat{\lambda}_n}{\partial\tau_n} & -\hat{\lambda}_n & \frac{\partial\hat{\lambda}_n}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial\hat{\lambda}_n}{\partial t_n} \\ 0 & \frac{\partial\hat{\zeta}_1}{\partial\tau_2} & \dots & \frac{\partial\hat{\zeta}_1}{\partial\tau_n} & \hat{\zeta}_1 & \frac{\partial\hat{\zeta}_1}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial\hat{\zeta}_1}{\partial t_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \frac{\partial\hat{\zeta}_n}{\partial\tau_2} & \dots & \frac{\partial\hat{\zeta}_n}{\partial\tau_n} & \hat{\zeta}_n & \frac{\partial\hat{\zeta}_n}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial\hat{\zeta}_n}{\partial t_n} \end{vmatrix}. \qquad (5)$$

Теорема 1.1. ([29], [55]). Пусть функция $f(z)$ голоморфна в области $D \in \Lambda$ и μ раз $(0 \le \mu \le n-1)$ непрерывно дифференцируема в $D \cup \Gamma$. Тогда для $k = 0, 1, \dots, \mu$ и $z \in D$

$$f(z) = \frac{(n-k-1)!}{(2\pi)^n\, i} \int_{\Delta^*} d\tau \int_0^{2\pi} \nu\, dt \int_{|\eta|=1} \frac{\eta^{n-k-1} f_k(\zeta)}{(\eta-u)^{n-k}}\, d\eta, \qquad (6)$$

где $f_k(\zeta) \equiv L^{(k)}_{n-k,\, n-1}[f(\zeta)] \equiv L_{n-1}[L_{n-2} \dots L_{n-k}[f(\zeta)]\dots]$ — суперпозиция линейных дифференциальных операторов первого порядка вида

$$L_p[f(z)] = p\, f(z) + \sum_{j=1}^{n} z_j \frac{\partial f(z)}{\partial z_j}, \qquad (7)$$

при $k = 0$ $L^{(0)}_{n,\, n-1}[f(z)] \equiv f(z)$, при $k = 1$ $L^{(1)}_{n-1,\, n-1}[f(z)] \equiv\ \equiv L_{n-1}[f(z)]$,

$$\int_{\Delta^*} d\tau = \int_{\Delta^*} d\tau_2 \dots d\tau_n, \quad \int_0^{2\pi} dt = \int_0^{2\pi} dt_2 \dots \int_0^{2\pi} dt_n.$$

Замечание 1.2. Формула (6) включает в себя n интегральных представлений, соответствующих различным значениям k. Отметим два из них. В случае $k = 0$ имеем формулу

$$f(z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi)^n\, i} \int_{\Delta^*} d\tau \int_0^{2\pi} v\, dt \int_{|\eta|=1} \frac{\eta^{n-1} f(\zeta)}{(\eta-u)^n}\, d\eta, \qquad (A)$$

где $f(z)\in A(D)\cap C(D\cup\Gamma)$, названную в [29], [55] *основной интегральной формулой* (А) для областей класса Λ. В случае $k=n-1$ получаем формулу

$$f(z)=\frac{1}{(2\pi)^n i}\int\limits_{\Delta^*} d\tau \int\limits_0^{2\pi} \nu\, dt \int\limits_{|\eta|=1} \frac{f_{n-1}(\zeta)}{\eta-u}\, d\eta, \qquad (8)$$

примечательную тем, что последний внутренний интеграл в ней имеет ядро Коши относительно комплексного переменного u.

Замечание 1.3. Выбор круговой области $D\in\Lambda$ однозначно пре-до-пределяется заданием *определяющей матрицы*

$$R(\tau)=\begin{Vmatrix} R_{11}(\tau) & R_{12}(\tau) & \dots & R_{1n}(\tau) \\ R_{21}(\tau) & R_{22}(\tau) & \dots & R_{2n}(\tau) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{n1}(\tau) & R_{n2}(\tau) & \dots & R_{nn}(\tau) \end{Vmatrix}.$$

В том случае, когда все элементы матрицы, кроме стоящих на главной диагонали, равны нулю, т. е. (обозначая $r_\nu(\tau)\equiv R_{\nu\nu}(\tau),\ \nu=\overline{1,\ n}$)

$$R(\tau)=\begin{Vmatrix} r_1(\tau) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r_2(\tau) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & r_n(\tau) \end{Vmatrix},$$

получаем n-круговые области типа (Т), введённые З. Опиалем и Й. Сичаком [6]. В случае $n=2$ эти области совпадают с двояко-круговыми областями А. А. Темлякова (см., напр., [2], [3]), а фор-мула (6) дает интегральные представления Темлякова I рода (при $k=1$) и II рода (при $k=0$).

Замечание 1.4. В формуле (6) условие $f(z)\in A(D)\cap C^k(D\cup\Gamma)$ можно заменить на $f_k(z)\in A(D)\cap C(D\cup\Gamma)$.

Замечание 1.5. Используя суперпозиции операторов вида (7) и устанавливаемое индукцией по k тождество

$$(n-k-1)!\frac{\eta^{n-k-1}}{(\eta-u)^{n-k}}=L^{(n-k-1)}_{1,\,n-k-1}\left[\frac{1}{\eta-u}\right]\overset{\text{def}}{=}\left(\frac{1}{\eta-u}\right)_{n-k-1},$$

формулу (6) можно переписать в виде

$$f(z)=\frac{1}{(2\pi)^n i}\int\limits_{\Delta^*} d\tau \int\limits_0^{2\pi} \nu\, dt \int\limits_{|\eta|=1} \left(\frac{1}{\eta-u}\right)_{n-k-1} f_k(\zeta)\, d\eta. \qquad (6+)$$

Замечание 1.6. Ядра интегралов (6) голоморфны, а их знаменатели представляют собой натуральную степень линейного относительно переменных $z_1,\dots,z_n$ многочлена.

Замечание 1.7. Последний внутренний интеграл в (6) является либо интегралом Коши одного комплексного переменного u (при $k=n-1$, что соответствует интегралу (8)), либо (в остальных случаях) дифференциальным оператором интеграла Коши. Действительно, в (6+)

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\eta|=1}\left(\frac{1}{\eta-u}\right)_{n-k-1} f_k(\zeta)\,d\eta=\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\eta|=1}\frac{1}{\eta-u}\,f_k(\zeta)\,d\eta\right)_{n-k-1}.$$

Кроме того, в силу условия (2) заключаем, что если $z\in D$, то $|u|<1$ (в случае $z\in\overline{D}$ имеем $|u|\le 1$) и, следовательно, точки вида

$$\tilde{z}=\Big(\sum_{\nu=1}^{n}R_{1\nu}(\tau)\,u\,e^{-it_\nu},\ldots,\sum_{\nu=1}^{n}R_{n\nu}(\tau)\,u\,e^{-it_\nu}\Big)\in D.$$

Поэтому функция $f_k(\tilde{z})$ при любых фиксированных τ и t является голоморфной функцией переменного u в круге $|u|<1$, непрерывной в $|u|\le 1$.

Из сказанного вытекает, что интегралы (6) тесно связаны с интегралом Коши одного комплексного переменного. Это делает их и строящиеся на их основе интегралы типа удобными в приложениях, позволяя применять хорошо развитый математический аппарат интеграла типа Коши (например, при постановке и решении многомерных краевых задач линейного сопряжения).

§ 2. Переход в интегральных представлениях к ядрам Шварца и Пуассона

2.1°. Переход к ядру Шварца.

Перепишем формулу (6+) в виде

$$f(z)=\frac{1}{(2\pi)^{n-1}}\int\limits_{\Delta^*}d\tau\int\limits_{0}^{2\pi}v\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\eta|=1}\frac{1}{\eta-u}\,f_k(\zeta)\,d\eta\right)_{n-k-1}dt \qquad (9)$$

и произведём в последнем внутреннем интеграле переход к интегралу Шварца.

В силу интегральной формулы Шварца для одного комплексного переменного имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\eta|=1}\frac{1}{\eta-u}\,f_k(\zeta)\,d\eta=i\,\mathrm{Im}\,f_k(0)+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{e^{i\theta}+u}{e^{i\theta}-u}\,\mathrm{Re}\,f_k(\tilde{\zeta})\,d\theta,$$

где $\tilde{\zeta}$ означает, что в правой части в ζ вместо η входит $e^{i\theta}$. Здесь мы воспользовались тем, что $\zeta|_{\eta=0}=0$ и, следовательно, $f_k(\zeta)|_{\eta=0}= \ =f_k(0)$.

Заметим также, что

$$f_k(\zeta)|_{\eta=0}=(n-1)(n-2)\ldots(n-k)\,f(0)$$

и

$$(i\,\mathrm{Im}\, f_k(0)_{n-k-1} = i\,(n-1)\dots(n-k)\,(\mathrm{Im}\, f\,(0))_{n-k-1} =$$
$$= i\,(n-1)\dots(n-k)\,(n-k-1)\dots 2\cdot 1\,\mathrm{Im}\, f\,(0) = i\,(n-1)!\,\mathrm{Im}\, f\,(0).$$

Производя подстановку в (9) выражения

$$\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\eta|=1}\frac{1}{\eta-u}f_k(\zeta)\,d\eta\right)_{n-k-1} = (i\,\mathrm{Im}\, f_k(0)_{n-k-1} +$$
$$+\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{e^{i\theta}+u}{e^{i\theta}-u}\,\mathrm{Re}\, f_k(\tilde{\zeta})\,d\theta\right)_{n-k-1} =$$
$$= i\,(n-1)!\,\mathrm{Im}\, f\,(0) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{e^{i\theta}+u}{e^{i\theta}-u}\right)_{n-k-1}\mathrm{Re}\, f_k(\tilde{\zeta})\,d\theta,$$

получим

$$f\,(z) = i\,A\,\mathrm{Im}\, f\,(0) +$$
$$+\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\Delta^*}d\tau\int\limits_0^{2\pi}v\,dt\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{e^{i\theta}+u}{e^{i\theta}-u}\right)_{n-k-1}\mathrm{Re}\, f_k(\tilde{\zeta})\,d\theta, \tag{10}$$

где $A = \frac{(n-1)!}{(2\pi)^n}\int\limits_{\Delta^*}d\tau\int\limits_0^{2\pi}v\,dt.$

Производя соответствующие вычисления, устанавливаем

$$\left(\frac{e^{i\theta}+u}{e^{i\theta}-u}\right)_{n-k-1} = (n-k-1)!\left[2\left(\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta}-u}\right)^{n-k}-1\right]. \tag{11}$$

Интегральное представление (10) принимает вид

$$f\,(z) = i\,A\,\mathrm{Im}\, f\,(0) +$$
$$+\frac{(n-k-1)!}{(2\pi)^n}\int\limits_{\Delta^*}d\tau\int\limits_0^{2\pi}v\,dt\int\limits_0^{2\pi}\left[2\left(\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta}-u}\right)^{n-k}-1\right]\mathrm{Re}\, f_k(\tilde{\zeta})\,d\theta. \tag{12}$$

2.2°. Переход к ядру Пуассона.

Обозначим $u = \rho\, e^{i\varphi}$ и, используя интегральную формулу Пуассона для одного комплексного переменного, заменим в (9) интеграл Коши на интеграл Пуассона:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\eta|=1}\frac{1}{\eta-u}f_k(\zeta)\,d\eta = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-2\rho\cos(\theta-\varphi)}f_k(\tilde{\zeta})\,d\theta.$$

В итоге получим

$$f(z)=\frac{1}{(2\pi)^{n-1}}\int\limits_{\Delta^*}d\tau\int\limits_0^{2\pi}v\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-2\rho\cos(\theta-\varphi)}f_k(\tilde{\zeta})\,d\theta\right)_{n-k-1}dt,$$

или

$$f(z)=\frac{1}{(2\pi)^{n}}\int\limits_{\Delta^*}d\tau\int\limits_0^{2\pi}v\,dt\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-2\rho\cos(\theta-\varphi)}\right)_{n-k-1}f_k(\tilde{\zeta})\,d\theta. \quad (13)$$

Заметим, что при переходе к показательной форме записи комплексных чисел $z_j=\rho_j e^{i\varphi_j}$, $j=\overline{1,\ n}$, входящие в суперпозицию $(...)_{n-k-1}$ операторы (7) принимают вид [3]:

$$L_p[f]\equiv J_p[f]=p\,f+\sum_{j=1}^{n}\rho_j\,f'_{\rho_j}\,.$$

Используя равенство

$$\left(\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-2\rho\cos(\theta-\varphi)}\right)_{n-k-1}=(n-k-1)!\,\times$$

$$\times\left[\frac{2\,(n-k)!\sum\limits_{m=0}^{n-k}(-1)^m\,\frac{\rho^m\cos m(\theta-\varphi)}{m!(n-k-m)!}}{(1+\rho^2-2\rho\cos(\theta-\varphi))^{n-k}}-1\right]\overset{\text{def}}{=}(n-k-1)!\,\lambda_k(\rho,\ \theta,\ \varphi), \quad (14)$$

интегральному представлению (13) можно придать вид

$$f(z)=\frac{(n-k-1)!}{(2\pi)^n}\int\limits_{\Delta^*}d\tau\int\limits_0^{2\pi}v\,dt\int\limits_0^{2\pi}\lambda_k(\rho,\ \theta,\ \varphi)\,f_k(\tilde{\zeta})\,d\theta. \quad (15)$$

Замечание 2.1. Для случая n-круговых областей типа (T) формула, аналогичная равенству (11), была ранее установлена И.И. Бавриным ([3], §15).

Следствие 2.1. Из формул (12), (15), путём отделения их вещественных и мнимых частей, получаем интегральные представления для плюригармонических в круговой области $D\in\Lambda$ функций $\operatorname{Re} f(z)$ и $\operatorname{Im} f(z)$. Например, из (15) следует формула

$$\operatorname{Re} f(z)=\frac{(n-k-1)!}{(2\pi)^n}\int\limits_{\Delta^*}d\tau\int\limits_0^{2\pi}dt\int\limits_0^{2\pi}\lambda_k(\rho,\ \theta,\ \varphi)\operatorname{Re}\,[v\,f_k(\tilde{\zeta})]\,d\theta. \quad (16)$$

§ 3. Степенное и биголоморфное преобразования основной интегральной формулы (A)

3.1°. Степенное преобразование.

Пусть $m\in\mathbf{N}$. Обозначим $\Lambda(m)$ класс круговых областей D_m, представимых параметрически в виде

$$D_m = \operatorname{int} \bigcap_{\tau \in \Delta} \{z \in \mathbf{C}^n : \sum_{\mu=1}^{n} \tau_\mu \left| r_{\mu 1}^m(\tau)\, z_1 + \ldots + r_{\mu n}^m(\tau)\, z_n \right| < 1\} =$$
$$= \bigcup_{\tau \in \Delta} \{z \in \mathbf{C}^n : \left| r_{\mu 1}^m(\tau)\, z_1 + \ldots + r_{\mu n}^m(\tau)\, z_n \right| < 1, \qquad \mu = \overline{1,\ n}\}, \tag{17}$$

где $r_{\mu\nu}(\tau)$ — функции из определения области D класса Λ.

Класс $\Lambda(m)$ является прямым обобщением класса Λ: $\Lambda(m) \supset \Lambda$ и $\Lambda(m) = \Lambda$ при $m = 1$. Будем далее считать $m > 1$.

Установим обобщение основной интегральной формулы (А) на класс $\Lambda(m)$. Обозначим Γ_m образ ограничивающей область $D \in \Lambda$ гиперповерхности Γ при отображении D на D_m. Область D рас-смотрим в пространстве комплексных переменных $w = (w_1, \ldots, w_n)$.

Пусть $f(z) \in A(D_m) \bigcap C(D_m \bigcup \Gamma_m)$. Тогда $f(w^m) = f(w_1^m, \ldots, w_n^m) \in A(D) \bigcap C(D \bigcup \Gamma)$ и на основании формулы (А) имеем

$$f(w^m) = \frac{(n-1)!}{(2\pi)^n i} \int_{\Delta^*} d\tau \int_0^{2\pi} v\, dt \int_{|\eta|=1} \frac{\eta^{n-1} f(\zeta^m)}{(\eta - u)^n}\, d\eta.$$

Здесь $\zeta^m = (\zeta_1^m, \ldots, \zeta_n^m)$, $\zeta_\mu = \sum_{\nu=1}^{n} R_{\mu\nu}(\tau)\, \eta\, e^{-it_\nu}$, $u = \sum_{\mu=1}^{n} \tau_\mu \exp(it_\mu) \cdot$ $\cdot \sum_{\nu=1}^{n} r_{\mu\nu}(\tau)\, w_\nu$.

Возвращаясь к старым переменным z, получаем интегральное представление

$$\underset{z \in D_m}{f(z)} = \frac{(n-1)!}{(2\pi)^n i} \int_{\Delta^*} d\tau \int_0^{2\pi} v\, dt \int_{|\eta|=1} \frac{\eta^{n-1} f(\zeta^m)}{(\eta - u(m))^n}\, d\eta, \tag{18}$$

где $u(m) = \sum_{\mu=1}^{n} \tau_\mu \exp(it_\mu) \cdot \sum_{\nu=1}^{n} r_{\mu\nu}(\tau)\, z_\nu^{1/m}$.

Замечание 3.1. Отметим, что области класса $\Lambda(m)$ не являются, вообще говоря, выпуклыми. Так, например, в $\Lambda(m)$ содержится область $\{z \in \mathbf{C}^n : |z_1|^{1/m} + \ldots + |z_n|^{1/m} < 1\}$ (соответствующая единичному гиперконусу из класса Λ), не обладающая при $m > 1$ свойством выпуклости.

Таким образом, *степенное преобразование основной интегральной формулы* (А) *расширяет границы её применения за рамки выпуклых областей.*

3.2°. Биголоморфное преобразование.

Рассмотрим биголоморфное преобразование формулы (А), которое выведет границы её применения за рамки областей кругообразной природы.

Пусть в круговой области $D \in \Lambda$ (D задана в пространстве переменных w) определена сложная функций $f[\varphi(w)] = f[\varphi_1(w), \quad ..., \varphi_n(w)]$, причём $f[\varphi(w)] \in A(D) \cap C(D \cup \Gamma)$, $\varphi_j(w) \in A(D) \cap \cap C(D \cup \Gamma)$, $j = \overline{1, n}$, якобиан

$$\frac{\partial \varphi}{\partial w} \neq 0, \qquad w \in D \cup \Gamma, \tag{19}$$

и $f(z) \in A(D^*) \cap C(D^* \cup \Gamma^*)$, где область D^* ограничена гиперповерхностью Γ^* (Γ^* — часть границы D^* — образ ограничивающей область D гиперповерхности Γ при отображении D на D^*):

$$\Gamma^* = \{(\chi_1, ..., \chi_n) : \chi_j = \varphi_j(\zeta_1, ..., \zeta_n),\ \zeta \in \Gamma,\ j = \overline{1, n}\}.$$

На основании формулы (A) для $w \in D$ имеем

$$f[\varphi(w)] = \frac{(n-1)!}{(2\pi)^n i} \int\limits_{\Delta^*} d\tau \int\limits_0^{2\pi} v\, dt \int\limits_{|\eta|=1} \frac{\eta^{n-1} f[\varphi(\zeta)]}{(\eta-u)^n} d\eta.$$

Переходя здесь к переменным z по формулам $z_j = \varphi_j(w)$, $j = \overline{1, n}$, получим

$$\underset{z \in D^*}{f(z)} = \frac{(n-1)!}{(2\pi)^n i} \int\limits_{\Delta^*} d\tau \int\limits_0^{2\pi} v\, dt \int\limits_{|\eta|=1} \frac{\eta^{n-1} f[\varphi(\zeta)]}{(\eta-u^*)^n} d\eta, \tag{20}$$

где $u^* = \sum\limits_{\mu=1}^{n} \tau_\mu \exp(it_\mu) \cdot \sum\limits_{\nu=1}^{n} r_{\mu\nu}(\tau) \psi_\nu(z)$, $\psi_j[\varphi(w)] = w_j$, $j = \overline{1, n}$.

Таким образом, оказывается справедливой следующая теорема

Теорема 3.1. Если функция $f(z) \in A(D^*) \cap C(D^* \cup \Gamma^*)$, выполнено условие (19) и функции $\varphi_j(w) \in A(D) \cap C(D \cup \Gamma)$, $j = \overline{1, n}$, то для $z \in D^*$ имеет место интегральное представление (20).

Формула (20) решает задачу восстановления голоморфной функции $f(z)$, аналогичную решаемой формулой (A), и в простейшем случае $z_j = \varphi_j(w) \equiv w_j$, $j = \overline{1, n}$, совпадает с (A).

Замечание 3.2. Проведённые выше в данном параграфе степенное и биголоморфное преобразования основной интегральной формулы (A) можно, разумеется, произвести и над интегральной формулой (6). В итоге получим соответственно формулы

$$\underset{z \in D_m}{f(z)} = \frac{(n-k-1)!}{(2\pi)^n i} \int\limits_{\Delta^*} d\tau \int\limits_0^{2\pi} v\, dt \int\limits_{|\eta|=1} \frac{\eta^{n-k-1} f_k(\zeta^m)}{(\eta-u(m))^{n-k}} d\eta, \tag{21}$$

$$\underset{z \in D^*}{f(z)} = \frac{(n-k-1)!}{(2\pi)^n i} \int\limits_{\Delta^*} d\tau \int\limits_0^{2\pi} v\, dt \int\limits_{|\eta|=1} \frac{\eta^{n-k-1} f_k[\varphi(\zeta)]}{(\eta-u^*)^{n-k}} d\eta, \tag{22}$$

где входящие в операторную суперпозицию f_k операторы имеют соответственно вид

$$L_p[f(z^m)] = p\,f(z^m) + \sum_{j=1}^{n} z_j\, f'_{z_j}(z^m),$$

$$L_p[f[\varphi(z)]] = p\,f[\varphi(z)] + \sum_{j=1}^{n} z_j\, f'_{z_j}[\varphi(z)],\quad p = \overline{n-k,\ n-1}.$$

§ 4. Прибавление

Замечание 4.1. Основной интегральной формуле (А) (аналогично и всем её модификациям) несложно придать и несколько более общий вид. Именно:

Пусть $s_2(y_2)$, ..., $s_n(y_n)$ — определенные соответственно на отрезках $[a_2, b_2]$, ..., $[a_n, b_n]$ монотонно возрастающие непрерывно дифференцируемые функции, причём $s_j(b_j) - s_j(a_j) = 2\pi$, $j = \overline{2,\ n}$. Будем также предполагать, что $s_j(a_j) = 0$. Производя в формуле (А) замену переменных $t_2 = s_2(y_2)$, ..., $t_n = s_n(y_n)$ и переобозначая затем переменные интегрирования через $t_2, \ldots, t_n$, получим интегральное представление

$$\underset{z\in D}{f(z)} = \frac{(n-1)!}{(2\pi)^n\, i} \int_{\Delta^*} d\tau \int_a^b v_s\, ds(t) \int_{|\eta|=1} \frac{\eta^{n-1} f(\zeta_s)}{(\eta - u_s)^n}\, d\eta, \qquad (23)$$

где $\zeta_s = (\zeta_{1_s}, \ldots, \zeta_{n_s})$, $\zeta_{\mu_s} = R_{\mu 1}(\tau)\,\eta + \sum\limits_{\nu=2}^{n} R_{\mu\nu}(\tau)\,\eta\, e^{-is_\nu(t_\nu)}$,

$$u_s = \tau_1 \sum_{\nu=1}^{n} r_{1\nu}(\tau)\, z_\nu + \sum_{\mu=2}^{n} \tau_\mu \exp(is_\mu(t_\mu)) \cdot \sum_{\nu=1}^{n} r_{\mu\nu}(\tau)\, z_\nu,$$

$$\int_a^b ds(t) = \int_{a_2}^{b_2} s'_2(t_2)\, dt_2 \ldots \int_{a_n}^{b_n} s'_n(t_n)\, dt_n,$$

форма v_s образуется из v, задаваемой определителем (5), при замене в последней t_j на $s_j(t_j)$, $j = \overline{2,\ n}$.

Отметим, что для интегральных представлений в n-круговых областях типа (Т) указанное преобразование было ранее применено И. И. Бавриным в [5].

Замечание 4.2. Число различных модификаций основной интегральной формулы (А) может быть значительно увеличено за счёт перехода от описанных выше приёмов к их комбинациям. Например, можно взять одно из интегральных представлений, содержащихся в интегральной формуле (6), совершить в нём переход к ядру Пуассона, произвести биголоморфное отображение образованной формулы, полученный интеграл обобщить в духе замечания 4.1 и, отделяя мнимую часть итогового результата, получить интегральное представление для плюригармонической функции.

Замечание 4.3. Рассматриваемые круговые области $D \in \Lambda$ являются областями голоморфности функций, представимых рядами однородных полиномов. Пусть функция $f(z)$ есть произвольный однородный полином степени m. Полагая в формулах (6), (12) и (13) $k = n - 1$, с учётом тождества

$$f_{n-1}(z) = \frac{(m+n-1)!}{m!} f(z)$$

(при рассмотрении n-круговых областей типа (T) аналогичное тождество было ранее указано в [4]), получим интегральные представления

$$f(z) = \frac{(m+n-1)!}{m!\,(2\pi)^n\, i} \int\limits_{\Delta^*} d\tau \int\limits_0^{2\pi} v\, dt \int\limits_{|\eta|=1} \frac{f(\zeta)}{\eta - u}\, d\eta, \tag{24}$$

$$f(z) = \frac{(m+n-1)!}{m!(2\pi)^n} \int\limits_{\Delta^*} d\tau \int\limits_0^{2\pi} v\, dt \int\limits_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}+u}{e^{i\theta}-u} \operatorname{Re} f(\tilde{\zeta})\, d\theta \tag{25}$$

(в этой формуле считаем $m > 0$) и

$$f(z) = \frac{(m+n-1)!}{m!(2\pi)^n} \int\limits_{\Delta^*} d\tau \int\limits_0^{2\pi} v\, dt \int\limits_0^{2\pi} \frac{1-\rho^2}{1+\rho^2 - 2\rho\cos(\theta-\varphi)} f(\tilde{\zeta})\, d\theta. \tag{26}$$

Структура этих интегральных представлений наиболее близка одномерным классическим формулам: последний внутренний интеграл в них есть, соответственно, интеграл Коши, интеграл Шварца и интеграл Пуассона одного комплексного переменного, а значения функции $f(z)$ внутри области D выражаются через значения самой этой функции (или её вещественной части) на ограничивающей область D гиперповерхности Г.

Литература

I. Литература к §§ 1 – 4.

1. История отечественной математики. – Киев: Наукова думка, 1970. – Т. 4. – Кн. 1. – С. 193 – 210.
2. Темляков А. А. Интегральные представления // Учёные записки МОПИ. – М., 1960. – Т. 96. – С. 3 – 14.
3. Баврин И. И. Операторный метод в комплексном анализе. – М.: изд-во МПГУ «Прометей». – 1991. – 200 с.
4. Баврин И. И. К интегральным представлениям голоморфных функций // Учёные записки МОПИ. – М., 1967. – Т. 188. – С. 3 – 28.
5. Баврин И. И. К интегральным представлениям голоморфных функций многих комплексных переменных // Математический анализ и теория

функций: Респ. сб. трудов. – М.: изд-во МОПИ. – Вып. 6. – 1976. – С. 17 – 22.

6. O p i a l Z., S i c i a k J. Integral formulas for functions holomorphic in convex *n*-circular domains // Zesz. Nauk. Univ. Jagiell. – 1963. – V. 9, № 77. – P. 67 – 75.

II. Работы автора.

7. Н е л а е в А. В. Дифференциальные свойства функций, определяемых интегралами типа Темлякова – Баврина // Математический анализ и теория функций: Респуб. сб. трудов. – М.: изд-во МОПИ. – В. 1. – 1973. – С. 154 – 163.

8. Н е л а е в А. В. Об аналитичности в пространстве $\mathbf{C}^2$ функций, определяемых интегралами типа Темлякова – Баврина // Математический анализ и теория функций: Респуб. сб. трудов. – М.: изд-во МОПИ. – В. 1. – 1973. – С. 164 – 168.

9. Н е л а е в А. В. Операторная связь между некоторыми интегралами // Математический анализ и теория функций: Респуб. сб. трудов. – М.: изд-во МОПИ. – В. 1. – 1973. – С. 169 – 178.

10. Н е л а е в А. В. Об интегральных формулах для функций нескольких комплексных переменных, аналитических в круговых областях, и свойствах некоторых интегралов // Математический анализ и теория функций: Респуб. сб. трудов. – М.: изд-во МОПИ. – В. 1. – 1973. – С. 179 – 193.

11. Н е л а е в А. В. Интегралы типа Темлякова – Баврина с неограниченными двоякокруговыми определяющими областями // Математический анализ и теория функций: Респуб. сб. трудов. – М.: изд-во МОПИ. – В. 2. – 1973. – С. 91 – 98.

12. Н е л а е в А. В. Об одном операторном методе // Математический анализ и теория функций: Респуб. сб. трудов. – М.: изд-во МОПИ. – В. 2. – 1973. – С. 99 – 106.

13. Н е л а е в А. В. О поведении интеграла типа Темлякова – Баврина произвольного порядка вне определяющей области // Математический анализ и теория функций: Респуб. сб. трудов. – М.: изд-во МОПИ. – В. 3. – 1974. – С. 68 – 84.

14. Н е л а е в А. В. К теории интегральных представлений голоморфных функций // Математический анализ и теория функций: Респуб. сб. трудов. – М.: изд-во МОПИ. – В. 3. – 1974. – С. 85 – 94.

15. Н е л а е в А. В. Разложение интегралов типа Темлякова в обобщенно-степенные ряды // Математический анализ и теория функций: Респуб. сб. трудов. – М.: изд-во МОПИ. – В. 3. – 1974. – С. 95 – 116.

16. Н е л а е в А. В. Об одном классе квазианалитических функций // Математический анализ и теория функций: Респуб. сб. трудов. – М.: изд-во МОПИ. – В. 3. – 1974. – С. 117 – 124.

17. Нелаев А. В. К теории квазианалитических функций // Математический анализ и теория функций: Респуб. сб. трудов. – М.: изд-во МОПИ. – В. 4. – 1974. – С. 49 – 55.
18. Нелаев А. В. О применении метода линейных дифференциальных операторов в теории функций комплексных переменных // Математический анализ и теория функций: Респуб. сб. трудов. – М.: изд-во МОПИ. – В. 4. – 1974. – С. 56 – 64.
19. Нелаев А. В. Исследование класса интегральных представлений Коши – Баврина // Математический анализ и теория функций: Респуб. сб. трудов. – М.: изд-во МОПИ. – В. 5. – 1975. – С. 66 – 74.
20. Нелаев А. В. Исследование поведения интегралов типа Темлякова и интегралов типа Темлякова – Баврина в пространстве $\mathbf{C}^n$ // Математический анализ и теория функций: Респуб. сб. трудов. – М.: изд-во МОПИ. – В. 5. – 1975. – С. 75 – 86.
21. Нелаев А. В. Исследование интегральных представлений функций двух комплексных переменных // Математический анализ и теория функций: Респуб. сб. трудов. – М.: изд-во МОПИ. – В. 5. – 1975. – С. 87 – 101.
22. Нелаев А. В. Интегральные представления голоморфных функций // Математический анализ и теория функций: Респуб. сб. трудов. – М.: изд-во МОПИ. – В. 9. – 1978. – С. 22 – 27.
23. Нелаев А. В. Интегральные представления для некоторых классов мероморфных функций многих комплексных переменных // М. – 1982. – Деп. в ВИНИТИ 15.02.82, № 697-82Деп. – 20 с.
24. Нелаев А. В. Об интегральном представлении функций двух комплексных переменных, голоморфных в круговых областях // М. – 1982. – Деп. в ВИНИТИ 10.08.82, № 4418-82Деп. – 14 с.
25. Нелаев А. В. Интегральное представление для класса параметрически заданных выпуклых областей пространства $\mathbf{C}^n$ // Избранные задачи комплексного анализа: Сб. научн. трудов. – М. – 1982. – Деп. в ВИНИТИ 15.118.82, № 5592-82Деп. – С. 132 – 137.
26. Нелаев А. В. Исследование интегрального представления функций двух комплексных переменных, голоморфных в круговых областях // Сборник трудов научного семинара «Представление аналитических функций функциональными рядами и интегралами». – М. – 1983. – Деп. в ВИНИТИ 30.08.83, № 4832-83Деп. – С. 40 – 54.
27. Нелаев А. В. Интегральные представления в круговых областях и некоторые их приложения. – М. – 1983. – Деп. в ВИНИТИ 10.10.83, № 5525-83Деп. – 33 с.
28. Нелаев А. В. О параметризации кратнокруговых областей // Избранные проблемы комплексного анализа: Сб. научн. трудов. – М. – 1985. – Деп. в ВИНИТИ 28.06.85, № 4677-85Деп. – С. 36 – 69.
29. Нелаев А. В. Интегральные представления голоморфных функций многих комплексных переменных в круговых областях и некоторые их

приложения. – М. – 1985. – Деп. в ВИНИТИ 20.08.85, № 6123-85Деп. – 107 с. – Монография.

30. Нелаев А. В. О параметризации неограниченных кратногруговых областей // Избранные задачи математического анализа: Сб. научн. трудов. – М. – 1986. – Деп. в ВИНИТИ 14.07.86, № 5032-86Деп. – С. 54 – 93.
31. Нелаев А. В. Об одной экстремальной задаче для функций, голоморфных в полных кратнокруговых областях // Аппроксимационные задачи комплексного анализа: Сб. научн. трудов. – М. – 1986. – Деп. в ВИНИТИ 05.12.86, № 8295-В86. – С. 45 – 50.
32. Нелаев А. В. Об обобщенном операторном аналоге интеграла типа Коши // Современные проблемы математического анализа: Сб. научн. трудов. – М. – 1987. – Деп. в ВИНИТИ 22.06.87, № 4489-В87. – С. 28 – 72.
33. Нелаев А. В. Интегралы и операторные методы: Методическая разработка по спецкурсу. – М.: изд-во МОПИ. – 1987. – 32 с.
34. Нелаев А. В. Интегралы и квазианалитические функции: Методическая разработка по спецкурсу. – М.: изд-во МОПИ. – 1987. – 40 с.
35. Нелаев А. В. Интегралы и их применения: Методическая разработка по спецкурсу. – М.: изд-во МОПИ. – 1987. – 32 с.
36. Нелаев А. В. Интегралы Темлякова в случае гиперконуса: Методическая разработка по спецкурсу. – М.: изд-во МОПИ. – 1987. – 40 с.
37. Нелаев А. В. К теории операторных аналогов интегралов типа Коши. I // Комплексный анализ и его приложения: Сб. научн. трудов. – М. – 1988. – Деп. в ВИНИТИ 11.05.88, № 3728-В88. – С. 53 – 94.
38. Нелаев А. В. Интегральное представление функций, голоморфных в выпуклых круговых областях с параметрически заданной границей // Современные проблемы комплексного анализа и его приложения: Сб. научн. трудов. – М. – 1988. – Деп. в ВИНИТИ 24.11.88, № 8308-В88. – С. 17 – 45.
39. Нелаев А. В. Об одном преобразовании интегральной формулы Темлякова – Опиаля – Сичака // Комлексный анализ: Сб. научн. трудов. – М. – 1989. – Деп. в ВИНИТИ 07.06.89, № 3776-В89. – С. 64 – 72.
40. Нелаев А. В. Интегралы типа Темлякова: Методическая разработка по спецкурсу. – М.: изд-во МОПИ. – 1989. – 40 с.
41. Нелаев А. В. Метод линейных дифференциальных операторов: Методическая разработка по спецкурсу. – М.: изд-во МОПИ. – 1989. – 40 с.
42. Нелаев А. В. К теории операторных аналогов интегралов типа Коши. II // Многомерный комплексный анализ: Сб. научн. трудов. – М. – 1989. – Деп. в ВИНИТИ 28.12.89, № 7714-В89. – С. 48 – 73.
43. Нелаев А. В. О классе функций двух комплексных переменных, представимых интегралом с двоякокруговой определяющей областью // Многомерный комплексный анализ: Сб. научн. трудов. – М. – 1989. – Деп. в ВИНИТИ 28.12.89, № 7714-В89. – С. 74 – 93. (В соавт. с Л. Ю. Пестрецовой.)

44. Нелаев А. В. Интегралы Темлякова: Методическая разработка по спецкурсу. – М.: изд-во МОПИ. – 1990. – 40 с.
45. Нелаев А. В. Операторные аналоги интеграла типа Коши: Методическая разработка по спецкурсу. – М.: изд-во МОПИ. – 1990. – 48 с.
46. Нелаев А. В. Интегральные представления в круговых областях: Методическая разработка по спецкурсу. – М.: изд-во МОПИ. – 1990. – 48 с.
47. Нелаев А. В. Интегральные представления в неограниченных областях: Методическая разработка по спецкурсу. – М.: изд-во МОПИ. – 1990. – 40 с.
48. Нелаев А. В. О классе функций, представимых параметрическим интегралом с неограниченной двоякогруговой определяющей областью // Теория функций и приложения: Сб. научн. трудов. – М. – 1990. – Деп. в ВИНИТИ 06.06.91, № 2390-В91. – С. 109 – 130. (В соавт. с О. В. Елющевым.)
49. Нелаев А. В. Многомерные аналоги формулы Карлемана для класса параметрически заданных круговых областей // Многомерный комплексный анализ и его приложения: Сб. научн. трудов. – М. – 1991. – Деп. в ВИНИТИ 29.12.91, № 4899-В91. – С. 20 – 40.
50. Нелаев А. В. Аналоги формулы Карлемана с голоморфными ядрами для n-круговых областей // Многомерный комплексный анализ и его приложения: Сб. научн. трудов. – М. – 1991. – Деп. в ВИНИТИ 29.12.91, № 4899-В91. – С. 41 – 53.
51. Нелаев А. В. Об обобщенном аналоге двойного интеграла типа Коши и некоторых его квазианалитических свойствах вне бикруга // Избранные проблемы многомерного комплексного анализа: Сб. научн. трудов. – М. – 1992. – Деп. в ВИНИТИ 15.12.92, № 3544-В92. – С. 55 – 73.
52. Нелаев А. В. Дифференциальные уравнения второго порядка и некоторые их физические приложения: Методическая разработка. – М.: изд-во МПУ. – 1993. – 44 с.
53. Нелаев А. В. О квазианалитических свойствах функций, определяемых обобщенным аналогом интеграла типа Коши в области U^{--} // Многомерный комплексный анализ и приложения: Сб. научн. трудов. – М. – 1995. – Деп. в ВИНИТИ 31.03.95, № 885-В95. – С. 31 – 39.
54. Нелаев А. В. Обобщенные условия Коши – Римана для одного класса функций вне бикруга // Многомерный комплексный анализ и приложения: Сб. научн. трудов. – М. – 1995. – Деп. в ВИНИТИ 31.03.95, № 885-В95. – С. 40 – 48.
55. Нелаев А. В. Интегральные представления в круговых областях // Комплексный анализ и его приложения: Межвузовский сб. научн. трудов. – М.: изд-во МПГУ «Прометей». – 1996. – С. 75 – 92.
56. Нелаев А. В. Интегральные представления и порождаемые ими классы квазианалитических функций // Вестник МПУ. Серия “математика – физика”. – 1998. - № 3 – 4. – С. 16 – 28.

57. Н е л а е в А. В. Об одном классе параметрически задаваемых кратнокруговых областей голоморфности // Вестник МПУ. Серия "математика – физика". – 1998. - № 3 – 4. – С. 29 – 40. (В соавт. с А. Е. Луковниковым.)
58. Н е л а е в А. В. Многомерный аналог формулы Карлемана для круговых областей из $\mathbf{C}^n$ // Математический анализ: Межвузовский сб. научн. трудов. – М.: Прометей. – 1998. – С. 89 – 105.
59. Н е л а е в А. В. Дифференциальные соотношения для функции, параметризующих один класс кратнокруговых областей // Математический анализ: Межвузовский сб. научн. трудов. – М.: Прометей. – 1998. – С. 86 – 88. (В соавт. с А. Е. Луковниковым.)
60. Н е л а е в А. В. Формула Карлемана для круговых областей $\mathbf{C}^n$ // Многомерный комплексный анализ: Сб. научн. трудов. – М. – 1999. – Деп. в ВИНИТИ 27.12.99, № 3850-В99. – С. 37 – 49.
61. Н е л а е в А. В. К теории квазианалитических функций в $\mathbf{C}^n$ // Многомерный комплексный анализ: Сб. научн. трудов. – М. – 1999. – Деп. в ВИНИТИ 27.12.99, № 3850-В99. – С. 50 – 65.
62. Н е л а е в А. В. О параметризации кратнокруговых областей голоморфности // Многомерный комплексный анализ: Сб. научн. трудов. – М. – 1999. – Деп. в ВИНИТИ 27.12.99, № 3850-В99. – С. 74 – 81. (В соавт. с А. Е. Луковниковым.)
63. Н е л а е в А. В. Интегральное представление функций, голоморфных в выпуклых и линейно выпуклых областях $\mathbf{C}^n$ с параметрически заданной границей // Многомерный комплексный анализ: Сб. научн. трудов. – М. – 1999. – Деп. в ВИНИТИ 27.12.99, № 3850-В99. – С. 142 – 147.
64. Н е л а е в А. В. Об одном классе параметрически задаваемых кратнокруговых областей // Тезисы докладов VI Междунар. конф. «Математика. Компьютер. Образование» (Пущино, 24 – 31 января 1999 г.). – М. – 1999. – С. 175. (В соавт. с А. Е. Луковниковым.)
65. Н е л а е в А. В. Интегральные представления в обобщенно-выпуклых областях $\mathbf{C}^n$ $(n > 1)$ с параметрически заданной границей // Тезисы докладов VI Междунар. конф. «Математика. Компьютер. Образование» (Пущино, 24 – 31 января 1999 г.). – М. – 1999. – С. 201.
66. Н е л а е в А. В. Интегральные представления в круговых областях $\mathbf{C}^n$ и их приложения // VII Междунар. конф. «Математика. Экономика. Экология. Образование». Междунар. симпозиум «Ряды Фурье и их приложения». Тезисы докладов (Дюрсо, 26 мая – 1 мая 1999 г.). – Ростов-на-Дону. – 1999. С. 65 – 66.
67. Н е л а е в А. В. О методе линейных дифференциальных операторов в $\mathbf{C}^n$ // Тезисы докладов IV Междунар. конф. серии НЕЛИНЕЙНЫЙ МИР «Языки науки – языки искусства» (Суздаль, 7 – 12 июня 1999 г.). – М. – 1999. – С. 68.

68. Н е л а е в А. В. Интегральные представления в обобщенно-выпуклых областях $\mathbf{C}^n$ $(n > 1)$ с параметрически заданной границей // Математика. Компьютер. Образование: Сб. научн. трудов / Под ред. Г. Ю. Ризниченко. – М.: Прогресс-Традиция. – 1999. – Вып. 6. – Ч. 2. – С. 237 – 241.
69. Н е л а е в А. В. Метод мажорирующей плотности в разложении интегралов в обобщенные степенные ряды // Тезисы докладов VII Междунар. конф. «Математика. Компьютер. Образование» (Дубна, 23 – 30 января 2000 г.). – М.: Прогресс-Традиция – 2000. – С. 244.
70. Н е л а е в А. В. Об одном методе решения дифференциальных операторных задач в $\mathbf{C}^n$ // Современные проблемы теории функций и их приложения. Тезисы докладов 10-й Саратовской зимней школы (27 января – 2 февраля 2000 г.). – Саратов: из-во Саратовского университета. – 2000. – С. 98 – 99.
71. Н е л а е в А. В. Метод линейных дифференциальных операторов с переменными коэффициентами в исследовании комплексных интегралов в $\mathbf{C}^n$ // Математика. Компьютер. Образование: Сб. научн. трудов / Под ред. Г. Ю. Ризниченко. – М.: Прогресс-Традиция. – 2000. – Вып. 7. – Ч. 2. – С. 444 – 451.
72. Н е л а е в А. В. О параметрическом задании кратнокруговых областей голоморфности // Математика. Образование. Экология. Гендерные проблемы (Воронеж, 22 – 27 мая 2000 г.). Материалы междунар. конф. Том 1. – Воронеж. – 2000. – С. 198.
73. Н е л а е в А. В. Исследование свойств кратнокруговых областей голоморфности // Математика. Компьютер. Образование: Сб. научн. трудов / Под ред. Г. Ю. Ризниченко. – М.: Прогресс-Традиция. – 2000. – Вып. 7. – Ч. 2. – С. 452 – 459. (В соавт. с А. Е. Луковниковым.)
74. Н е л а е в А. В. К теории краевых задач линейного сопряжения в $\mathbf{C}^n$ для функций, голоморфных в кратнокруговых областях. – М. – 2000. – Деп. в ВИНИТИ 04.10.2000, № 2541-В00. – 13 с.
75. Н е л а е в А. В. О задачах линейного сопряжения голоморфных функций двух комплексных переменных. – М. – 2000. – Деп. в ВИНИТИ 04.10.2000, № 2543-В00. – 22 с. (В соавт. с А. Е. Луковниковым.)
76. Н е л а е в А. В. Краевые задачи линейного линейного сопряжения в $\mathbf{C}^n$ для функций, голоморфных в кратнокруговых областях. – М. – 2000. – Деп. в ВИНИТИ 04.10.2000, № 2542-В00. – 19 с. (В соавт. с А. Е. Луковниковым.)
77. Н е л а е в А. В. Исследование свойств одного класса функций двух комплексных переменных. – М. – 2000. – Деп. в ВИНИТИ 20.11.2000, № 2938-В00. – 16 с. (В соавт. с А. С. Якшиной.)
78. Н е л а е в А. В. Задачи линейного сопряжения функций многих комплексных переменных, голоморфных в кратнокруговых областях // Тезисы докладов VIII Междунар. конф. «Математика. Компьютер. Образование» (Пущино, 29 января – 4 февраля 2001 г.). – М.: Прогресс-Традиция – 2001. – С. 207.

79. Нелаев А. В. Неоднородная краевая задача линейного сопряжения голоморфных функций двух комплексных переменных // Тезисы докладов VIII Междунар. конф. «Математика. Компьютер. Образование» (Пущино, 29 января – 4 февраля 2001 г.). – М.: Прогресс-Традиция – 2001. – С. 192. (В соавт. с А. Е. Луковниковым.)
80. Нелаев А. В. Однородная задача Римана для функций двух комплексных переменных, голоморфных в двоякокруговых областях // Тезисы докладов VIII Междунар. конф. «Математика. Компьютер. Образование» (Пущино, 29 января – 4 февраля 2001 г.). – М.: Прогресс-Традиция – 2001. – С. 206. (В соавт. с А. С. Якшиной.)
81. Нелаев А. В. Однородная краевая задача линейного сопряжения в $\mathbf{C}^n$ для функций, голоморфных в кратнокруговых областях // Современные методы теории функций и смежные проблемы. Тезисы докладов Воронежской зимней математической школы (27 января – 4 февраля 2001 года). – Воронеж: ВГУ. – 2001. – С. 174 – 175. (В соавт. с А. Е. Луковниковым.)
82. Нелаев А. В. Задача линейного сопряжения для функций, голоморфных в круговых областях из $\mathbf{C}^n$ // Современные методы теории функций и смежные проблемы. Тезисы докладов Воронежской зимней математической школы (27 января – 4 февраля 2001 года). – Воронеж: ВГУ. – 2001. – С. 198 – 199.
83. Нелаев А. В. Пространственная краевая задача линейного сопряжения функций, голоморфных в двоякокруговых областях // Тезисы докладов IX Междунар. конф. «Математика. Образование. Экономика. Экология» (Чебоксары, 28 мая – 2 июня 2001). – 2001. – С. 17. (В соавт. с А. Е. Луковниковым.)
84. Нелаев А. В. Неоднородная краевая задача линейного сопряжения голоморфных функций для случая кратнокруговых областей $\mathbf{C}^n$ // Тезисы докладов IX Междунар. конф. «Математика. Образование. Экономика. Экология» (Чебоксары, 28 мая – 2 июня 2001). – 2001. – С. 19.
85. Нелаев А. В. Пространственная краевая задача линейного сопряжения для функций, голоморфных в кратнокруговых областях $\mathbf{C}^n$ // Математика. Компьютер. Образования: Сб. научн. трудов / Под ред. Г. Ю. Ризниченко. – М.: Прогресс-Традиция. – 2001. – В. 8. – Ч. 2. – С. 406 – 414.
86. Нелаев А. В. О неоднородной краевой задаче Римана для функций многих комплексных переменных, голоморфных в кратнокруговых областях // Математика. Компьютер. Образования: Сб. научн. трудов / Под ред. Г. Ю. Ризниченко. – М.: Прогресс-Традиция. – 2001. – В. 8. – Ч. 2. – С. 415– 423. (В соавт. с А. С. Якшиной.)
87. Нелаев А. В. Об организации НИР студентов в системе фундаментальной подготовки специалистов // Тезисы научн. докладов. Междун. юбил. нучно-практич. конф. «Народное образование в XXI веке» 6 – 7 июня 2001 г., посвященной 70-летию МПУ (физ.-мат. секция, вып. 2). – М.: изд-во МПУ «Народный учитель». – 2001. – С. 40 – 41.

88. Н е л а е в А. В. Пространственная неоднородная краевая задача Римана для функций, голоморфных в n-круговых областях // Тезисы научн. докладов. Междун. юбил. нучно-практич. конф. «Народное образование в XXI веке» 6 – 7 июня 2001 г., посвященной 70-летию МПУ (физ.-мат. секция, вып. 2). – М.: изд-во МПУ «Народный учитель». – 2001. – С. 42 – 43. (В соавт. с А. С. Якшиной.)
89. Н е л а е в А. В. Преобразования интегральных представлений функций, голоморфных в круговых областях $\mathbf{C}^n$, и краевая задача линейного сопряжения функций // Тезисы VI Междунар. конф. «Экология и здоровье человека. Экологическое образование. Математические модели и информационные технологии» (Криница, 7 – 12 сентября 2001 г.). – Краснодар. – 2001. – С. 298.
90. Н е л а е в А. В. О решении пространственной задачи Римана в некотором классе функций, голоморфных в n-круговых областях // Тезисы VI Междунар. конф. «Экология и здоровье человека. Экологическое образование. Математические модели и информационные технологии» (Криница, 7 – 12 сентября 2001 г.). – Краснодар. – 2001. – С. 299. (В соавт. с А. С. Якшиной.)
91. Н е л а е в А. В. О краевой задаче линейного сопряжения голоморфных функций в $\mathbf{C}^n$ // Актуальные проблемы математики и методики ее преподавания: Межвузовский сб. научн. трудов. – Пенза: изд-во ПГПУ. – 2001. – С. 68 – 76.
92. Н е л а е в А. В. Об однородной краевой задаче Римана для функций многих комплексных переменных, голоморфных в кратнокруговых областях // Актуальные проблемы математики и методики ее преподавания: Межвузовский сб. научн. трудов. – Пенза: изд-во ПГПУ. – 2001. – С. 80 – 88. (В соавт. с А. С. Якшиной.)
93. Н е л а е в А. В. Преобразование интегральных представлений функций, голоморфных в круговых областях $\mathbf{C}^n$, и задача линейного сопряжения функций // IV Научная конф. МГТУ «Станкин» и «Учебно-научного центра математ. моделирования МГТУ «Станкин – ИММ РАН» 23 – 24 апреля 2001 г. Тезисы докладов. – М.: изд-во «Станкин». – 2001. – С. 29.
94. Н е л а е в А. В. Интегральные представления и классы Харди функций многих комплексных переменных, голоморфных в кратнокруговых областях // Тезисы докладов IX Междунар. конф. «Математика. Компьютер. Образование» (Дубна, 28 января – 2 февраля 2002 г.). – М.: Прогресс-Традиция. – 2002. – С. 169.
95. Н е л а е в А. В. О краевой задаче линейного сопряжения в $\mathbf{C}^n$ // Тезисы докладов IX Междунар. конф. «Математика. Компьютер. Образование» (Дубна, 28 января – 2 февраля 2002 г.). – М.: Прогресс-Традиция. – 2002. – С. 170. (В соавт. с А. Е. Луковниковым и А. С. Якшиной.)
96. Н е л а е в А. В. Интегральные представления и классы Харди функций, голоморфных в круговых областях $\mathbf{C}^n$ // Современные проблемы теории

функций и их приложения: Тезисы докладов 11-й Саратовской зимней школы (28 января – 4 февраля 2002 г.). – Саратов: изд-во Саратовского ун-та. – 2002. – С. 145 – 147.

97. Нелаев А. В. Об ассоциированном с бикругом классе функций двух комплексных переменных // X Междунар. конф. «Математика. Экономика. Образование» (Дюрсо, 27 мая – 2 июня 2002 г.). – Ростов-на-Дону: изд-во РГУ. – 2002. – С. 100 – 101.

98. Нелаев А. В. О пространственной краевой задаче Римана в $\mathbf{C}^n$ // X Междунар. конф. «Математика. Экономика. Образование» (Дюрсо, 27 мая – 2 июня 2002 г.). – Ростов-на-Дону: изд-во РГУ. – 2002. – С. 99 – 100. (В соавт. с А. Е. Луковниковым и А. С. Якшиной.)

99. Нелаев А. В. Преобразования интегральных представлений голоморфных функций многих комплексных переменных // Математика. Компьютер. Образование: Сб. научн. трудов / Под ред. Г. Ю. Ризниченко. – Москва – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». – 2002. – Вып. 9. – Ч. 2. – С. 584 – 596.

100. Нелаев А. В. О краевой задаче Римана для функций многих комплексных переменных, голоморфных в кратнокруговых областях $\mathbf{C}^n$ // Владикавказский математический журнал. – Октябрь – декабрь 2002. – Т. 4. – В. 4. – С. 4.47. – 4.58.

101. Нелаев А. В. Хаджумар Петрович Дзебисов // Владикавказский математический журнал. – Октябрь, декабрь 2002. – Т. 4. – В. 4. – С. 4.5. – 4.7. (В соавт. с О. Д. Олгазиным, В. И. Богановым, А. Г. Кусраевым, А. В. Латышевым, Г. Л Луканкиным).

102. Нелаев А. В. О голоморфности и обобщенной голоморфности вне поликруга одного класса функций многих комплексных переменных // Сб. тезисов X Междунар. конф. «Математика. Компьютер. Образование» (Пущино, 20 – 25 января 2003 г.). – Москва – Ижевск: «Регулярная и хаотическая динамика». – 2003. – Вып. 10. – С. 133. (В соавт. с А. Е. Луковниковым.)

103. Нелаев А. В. О группе интегродифференциальных операторов голоморфных функций, специфических для поликруга // Сб. тезисов X Международ. конф. «Математика. Компьютер. Образование» (Пущино, 20 – 25 января 2003 г.). – Москва – Ижевск: «Регулярная и хаотическая динамика». – 2003. – Вып. 10. – С. 145. (В соавт. с А. С. Якшиной.)

104. Нелаев А. В. Применение интегродифференциальных операторов голоморфных функций к решению функциональных уравнений // Сб. тезисов X Междунар. конф. «Математика. Компьютер. Образование» (Пущино, 20 – 25 января 2003 г.). – Москва – Ижевск: «Регулярная и хаотическая динамика». – 2003. – Вып. 10. – С. 146. (В соавт. с А. С. Якшиной.)

105. Нелаев А. В. О группе интегродифференциальных операторов, специфических для поликруга // Современные методы теории функций и смежные вопросы. Тезисы докладов Воронежской зимней математ. школы

(26 января – 2 февраля 2003 г.). – Воронеж: изд-во ВГУ. – 2003. – С. 167 – 168. (В соавт. с А. С. Якшиной.)

106. Нелаев А. В. Интегральные представления, классы Харди и аналог формулы Карлемана для функций, голоморфных в круговых областях $\mathbf{C}^n$ // Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Проблемы математического образования: Тезисы докладов второй Междунар. конф., посвященной 80-летию чл.-корр. РАН проф. Л. Д. Кудрявцева. – М.: Физматлит. – 2003. – С. 82 – 84.

107. Нелаев А. В. Интегралы Темлякова в $\mathbf{C}^n$: развитие и применение к исследованию краевых задач линейного сопряжения // Комлексный анализ и математическая физика: Сб. научн. трудов, посвященный 100-летию со дня рожд. проф. А. А. Темлякова. – М.: изд-во МГОУ «Народный учитель». – 2003. – С. 205 – 235.

108. Нелаев А. В. Слово об ученом, учителе, человеке (к 100-летию со дня рождения проф. Алексея Александровича Темлякова) // Комлексный анализ и математическая физика: Сб. научн. трудов, посвященный 100-летию со дня рожд. Проф. А. А. Темлякова. – М.: изд-во МГОУ «Народный учитель». – 2003. – С. 7 – 21. (в соавт. с И. И. Бавриным, В. И. Богановым, А. В. Латышевым, Г. Л. Луканкиным.)

109. Нелаев А. В. К теории краевых задач линейного сопряжения функций, голоморфных в кратнокруговых областях // Комлексный анализ и математическая физика: Сб. научн. трудов, посвященный 100-летию со дня рожд. проф. А. А. Темлякова. – М.: изд-во МГОУ «Народный учитель». – 2003. – С. 183 – 197. (В соавт. с А. Е. Луковниковым и А. С. Якшиной.)

110. Нелаев А. В. Об интегральных представлениях и граничных свойствах функций многих комплексных переменных, голоморфных в круговых областях $\mathbf{C}^n$ // Математика. Компьютер. Образование: Сб. научн. трудов / Под ред. Г. Ю. Ризниченко. – Москва – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». – 2003. – Вып. 10. – Ч. 2. – С. 116 – 126.

111. Нелаев А. В. Исследование свойств параметрически задаваемых кратнокруговых областей голоморфности // Сб. тезисов XI Междунар. конф. «Математика. Компьютер. Образование» (Дубна, 26 – 31 января 2004 г.). – Москва – Ижевск: «Регулярная и хаотическая динамика». – 2004. – Вып. 11. – С. 127. (В соавт. с А. Е. Луковниковым.)

112. Нелаев А. В. Об инвариантной области обобщенной аналитичности вне поликруга одного класса функций // Сб. тезисов XI Междунар. конф. «Математика. Компьютер. Образование» (Дубна, 26 – 31 января 2004 г.). – Москва – Ижевск: «Регулярная и хаотическая динамика». – 2004. – Вып. 11. – С. 133.

113. Нелаев А. В. Об обобщенной аналитичности вне поликруга одного класса функций многих комплексных переменных // Сб. тезисов XII Междунар. конф. «Математика. Компьютер. Образование» (Пущино, 17 – 22 января

2005 г.). – Москва – Ижевск: «Регулярная и хаотическая динамика». – 2005. – Вып. 12. – С. 138.

III. Работы учеников автора.

114. Круглова М. Е., Стоякина Е. Е. Об интегралах Темлякова и порождаемых ими классах квазибигармонических функций // // Избранные проблемы комплексного анализа: Сб. научн. трудов. – М. – 1985. – Деп. в ВИНИТИ 28.06.85, № 4677-85Деп. – С. 129 – 144.

115. Гусева Г. В., Кузенкова И. А. Интегральные представления функций двух комплексных переменных, голоморфных в некотором классе неограниченных круговых областей // Избранные задачи математического анализа: Сб. научн. трудов. – М. – 1986. – Деп. в ВИНИТИ 14.07.86, № 5032-86Деп. – С. 144 – 154.

116. Цыганкова С. В. К теории интегральных представлений в полных кратнокруговых областях // Аппроксимационные задачи комплексного анализа: Сб. научн. трудов. – М. – 1986. – Деп. в ВИНИТИ 05.12.86, № 8295-В86. – С. 92 – 99.

117. Полевая Л. А. Об одном классе квазигармонических функций // Современные проблемы математического анализа: Сб. научн. трудов. – М. – 1987. – Деп. в ВИНИТИ 22.06.87, № 4489-В87. – С. 144 – 152.

118. Золотова С. В. О квазианалитических свойствах функций, определяемых операторным аналогом интеграла типа Коши второго порядка // Комплексный анализ и его приложения: Сб. научн. трудов. – М. – 1988. – Деп. в ВИНИТИ 16.05.88, № 3728-В88. – С. 143 – 157.

119. Васильева О. В. О дифференциальных свойствах обобщенного операторного аналога интеграла типа Коши и некоторых его применениях // Комплексный анализ и его приложения: Сб. научн. трудов. – М. – 1988. – Деп. в ВИНИТИ 16.05.88, № 3728-В88. – С. 158 – 170.

120. Пелевина Т. А. Вторая формула дифференциальной связи интегралов Темлякова I и II рода вне области аналитичности // Современные проблемы комплексного анализа и его приложения: Сб. научн. трудов. – М. – 1988. – Деп. в ВИНИТИ 24.11.88, № 8308-В88. – С. 89 – 101.

121. Чернова М. И. О дифференциальных свойствах интегралов типа Темлякова в случае гиперконуса // Современные проблемы комплексного анализа и его приложения: Сб. научн. трудов. – М. – 1988. – Деп. в ВИНИТИ 24.11.88, № 8308-В88. – С. 102 – 109.

122. Попова Ю. Н. О квазианалитических свойствах операторного аналога интеграла типа Коши специального вида // Современные проблемы комплексного анализа и его приложения: Сб. научн. трудов. – М. – 1988. – Деп. в ВИНИТИ 24.11.88, № 8308-В88. – С. 110 – 123.

123. Левченкова О. В. Специальное интегральное представление в круговых областях и его применение к решению задачи с дифференциальным оператором бесконечного порядка // Комплексный анализ: Сб. научн.

трудов. – М. – 1989. – Деп. в ВИНИТИ 07.06.89, № 3776-В89. – С. 119 – 126.

124. Ярушина О. А. О некоторых свойствах функций, определяемых интегралами типа Темлякова вне гипершара // Комплексный анализ: Сб. научн. трудов. – М. – 1989. – Деп. в ВИНИТИ 07.06.89, № 3776-В89. – С. 127 – 148.

125. Байкова Н. В. О квазигармонических свойствах функций, определяемых операторным аналогом интеграла типа Коши специального вида // Комлексный анализ: Сб. научн. трудов. – М. – 1989. – Деп. в ВИНИТИ 07.06.89, № 3776-В89. – С. 149 – 158.

126. Кубышкина Е. В. О свойствах функций, определяемых обобщенным аналогом интеграла типа Коши // Многомерный комплексный анализ: Сб. научн. трудов. – М. – 1989. – Деп. в ВИНИТИ 28.12.89, № 7714-В89. – С. 116 – 126.

127. Замотаева А. С. О некоторых применениях операторного аналога интеграла типа Коши // Многомерный комплексный анализ: Сб. научн. трудов. – М. – 1989. – Деп. в ВИНИТИ 28.12.89, № 7714-В89. – С. 147 – 159.

128. Соловьева О. В. О плюрализме в выборе интегралов типа Темлякова с неограниченными двоякокруговыми определяющими областями и некоторых квазибигармонических эффектах в поведении определяемых ими функций // Теория функций и приложения: Сб. научн. трудов. – М. – 1990. – Деп. в ВИНИТИ 06.06.91, № 2390-В91. – С. 131 – 146.

129. Панкова О. И. О дифференциальных свойствах интегралов типа Темлякова в случае логарифмического гиперконуса // Теория функций и приложения: Сб. научн. трудов. – М. – 1990. – Деп. в ВИНИТИ 06.06.91, № 2390-В91. – С. 147 – 156.

130. Андрющенкова Е. Н., Леднева Т. В. Об одном операторном обобщении интегральной формулы Коши для круга и квазианалитических свойствах соответствующих аналогов интеграла типа Коши // Теория функций и приложения: Сб. научн. трудов. – М. – 1990. – Деп. в ВИНИТИ 06.06.91, № 2390-В91. – С. 157 – 184.

131. Якушева Г. А. О квазигармонических свойствах и применениях операторного аналога интеграла типа Коши для круга // Теория функций и приложения: Сб. научн. трудов. – М. – 1990. – Деп. в ВИНИТИ 06.06.91, № 2390-В91. – С. 185 – 204.

132. Белозерова И. В., Лисицына Н. В., Мясоедова Н. Н., Шилова Н. Н. О квазианалитических свойствах и некоторых применениях обобщенного операторного аналога интеграла типа Коши для круга // Многомерный комплексный анализ и его приложения: Сб. научн. трудов. – М. – 1991. – Деп. в ВИНИТИ 29.12.91, № 4899-В91. – С. 129 – 177.

133. Лисицына Н. В. Обобщенный операторный аналог интеграла типа Коши второго порядка для круга и некоторые его квазианалитические свойства // Многомерный комплексный анализ и его приложения: Сб. научн. трудов. – М. – 1991. – Деп. в ВИНИТИ 29.12.91, № 4899-В91. – С. 178 – 201.

134. Луковников А. Е. О квазианалитических свойствах одного класса интегралов в $\mathbf{C}^n$ // Вестник МПУ. Серия "математика – физика". – 1998. - № 3 – 4. – С. 54 – 61.
135. Луковников А. Е. Об одном классе квазианалитических функций в $\mathbf{C}^n$ // Тезисы докладов VI Междунар. конф. «Математика. Компьютер. Образование» (Пущино, 24 – 31 января 1999 г.). – М. – 1999. – С. 174.
136. Луковников А. Е. О решении некоторых многомерных краевых задач в $\mathbf{C}^n$ // VII Междунар. конф. «Математика. Экономика. Экология. Образование». Междунар. симпозиум «Ряды Фурье и их приложения». Тезисы докладов (Дюрсо, 26 мая – 1 мая 1999 г.). – Ростов-на-Дону: изд-во РГУ. – 1999. С. 62 – 63.
137. Луковников А. Е. О решении операторнообобщенной задачи Дирихле с краевым условием на остове поликруга // Тезисы докладов IV Междунар. конф. серии НЕЛИНЕЙНЫЙ МИР «Языки науки – языки искусства» (Суздаль, 7 – 12 июня 1999 г.). – М. – 1999. – С. 60.
138. Луковников А. Е. К проблеме параметрического задания кратнокруговых областей // Многомерный комплексный анализ: Сб. научн. трудов. – М. – 1999. – Деп. в ВИНИТИ 27.12.99, № 3850-В99. – С. 82 – 88.
139. Луковников А. Е. Исследование поведения некоторых интегралов вне области аналитьичности в $\mathbf{C}^n$ // Многомерный комплексный анализ: Сб. научн. трудов. – М. – 1999. – Деп. в ВИНИТИ 27.12.99, № 3850-В99. – С. 89 – 100.
140. Луковников А. Е. Разложение одного класса функций вне поликруга в обобщенный степенной ряд // Многомерный комплексный анализ: Сб. научн. трудов. – М. – 1999. – Деп. в ВИНИТИ 27.12.99, № 3850-В99. – С. 101 – 108.
141. Луковников А. Е. Обобщенные условия Коши – Римана для одного класса интегралов вне поликруга // Многомерный комплексный анализ: Сб. научн. трудов. – М. – 1999. – Деп. в ВИНИТИ 27.12.99, № 3850-В99. – С. 148 – 154.
142. Луковников А. Е. Об одном классе квазианалитических функций в $\mathbf{C}^n$ // Математика. Компьютер. Образование: Сб. научн. трудов / Под ред. Г. Ю. Ризниченко. – М.: Прогресс-Традиция. – 1999. – Вып. 6. – Ч. 2. – С. 242 – 248.
143. Луковников А. Е. О решении некоторых дифференциальных уравнений с формальными производными в классе квазианалитических функций в $\mathbf{C}^n$ // Тезисы докладов VII Междунар. конф. «Математика. Компьютер. Образование» (Дубна, 23 – 30 января 2000 г.). – М.: Прогресс-Традиция – 2000. – С. 211.
144. Луковников А. Е. О квазиплюригармоничности одного класса функций в $\mathbf{C}^n$ // Математика. Образование. Экология. Гендерные проблемы (Во-

ронеж, 22 – 27 мая 2000 г.). Материалы междунар. конф. Том 1. – Воронеж. – 2000. – С. 177.

145. Луковников А. Е. О дифференциальных свойствах одного класса функций в $\mathbf{C}^n$ и некоторых их приложениях // Тезисы научн. докладов. Междун. юбил. нучно-практич. конф. «Народное образование в XXI веке» 6 – 7 июня 2001 г., посвященной 70-летию МПУ (физ.-мат. секция, вып. 2). – М.: изд-во МПУ «Народный учитель». – 2001. – С. 39 – 40.

146. Луковников А. Е. Об обобщенной голоморфности вне поликруга одного класса функций многих комплексных переменных // Комлексный анализ и математическая физика: Сб. научн. трудов, посвященный 100-летию со дня рожд. проф. А. А. Темлякова. – М.: изд-во МГОУ «Народный учитель». – 2003. – С. 176 – 182.

147. Якшина А. С. Дифференциальная операторная связь в $\mathbf{C}^2$ между некоторыми интегралами. – М. – 2000. – Деп. в ВИНИТИ 20.11.2000, № 2939-В00. – 12 с.

148. Якшина А. С. О дифференциальных свойствах одного класса интегралов в $\mathbf{C}^2$ и некоторых их приложениях. – М. – 2000. – Деп. в ВИНИТИ 20.11.2000, № 2940-В00. – 10 с.

149. Якшина А. С. Дифференциальные свойства некоторых классов функций двух комплексных переменных // Тезисы докладов IX Междунар. конф. «Математика. Образование. Экономика. Экология» (Чебоксары, 28 мая – 2 июня 2001). – 2001. – С. 27.

150. Якшина А. С. Исследование дифференциальных свойств некоторых классов интегралов в $\mathbf{C}^2$ // Математика. Компьютер. Образования: Сб. научн. трудов / Под ред. Г. Ю. Ризниченко. – М.: Прогресс-Традиция. – 2001. – В. 8. – Ч. 2. – С. 424 – 432.

151. Якшина А. С. Исследование поведения одного класса интегралов в $\mathbf{C}^2$ // Тезисы докладов VIII Междунар. конф. «Математика. Компьютер. Образование» (Пущино, 29 января – 4 февраля 2001 г.). – М.: Прогресс-Традиция – 2001. – С. 256.

152. Якшина А. С. Об одном классе ассоциированных с бикругом квазианалитических функций // Современные методы теории функций и смежные проблемы. Тезисы докладов Воронежской зимней математической школы (27 января – 4 февраля 2001 года). – Воронеж: изд-во ВГУ. – 2001. – С. 293 – 294.

153. Якшина А. С. Об одном классе функций, квазианалитических вне бикруга // Научные труды МПГУ, Серия: Естественные науки. – М.: Прометей. – 2001. – С. 65 – 67.

154. Якшина А. С. Дифференциальные свойства некоторых классов интегралов в $\mathbf{C}^2$ // Научные труды математического факультета МПГУ: Юбил. сб., посвященый 100-летию факультета. – М.: Прометей. – 2000. – С. 113 – 117.

155. Я к ш и н а А. С. О дифференциальных свойствах некоторых классов интегралов, ассоциированных с двоякокруговой областью D типа A // Актуальные проблемы математики и методики ее преподавания: Межвузовский сб. научн. трудов. – Пенза: изд-во ПГПУ. – 2001. – С. 137 – 142.

156. Я к ш и н а А. С. О свойствах одного класса интегралов в $\mathbf{C}^2$ // IV научная конф. МГТУ «Станкин» и «Учебно-научного центра математ. моделирования МГТУ «Станкин – ИММ РАН» 23 – 24 апреля 2001 г. Тезисы докладов. – М.: изд-во «Станкин». – 2001. – С. 30.

157. Я к ш и н а А. С. О свойствах и применениях классов функций многих комплексных переменных // Современные проблемы теории функций и их приложения: Тезисы докладов 11-й Саратовской зимней школы (28 января – 4 февраля 2002 г.). – Саратов: изд-во Саратовского ун-та. – 2002. – С. 234 – 235.

158. Я к ш и н а А. С. Об одном классе функций в $\mathbf{C}^2$ // X Междунар. конф. «Математика. Экономика. Образование» (Дюрсо, 27 мая – 2 июня 2002 г.). – Ростов-на-Дону: изд-во РГУ. – 2002. – С. 109.

159. Я к ш и н а А. С. Дифференциальная связь одного класса интегралов с интегралом типа Коши // Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Проблемы математического образования: Тезисы докладов второй Междунар. конф., посвященной 80-летию чл.-корр. РАН, проф. Л. Д. Кудрявцева. – М.: Физматлит. – 2003. – С. 126 – 127.

160. Я к ш и н а А. С. Об интегродифференциальных операторах, специфических для поликруга и их применениях // Комлексный анализ и математическая физика: Сб. научн. трудов, посвященный 100-летию со дня рожд. проф. А. А. Темлякова. – М.: изд-во МГОУ «Народный учитель». – 2003. – С. 257 – 265.

161. Я к ш и н а А. С. Об интегродифференциальных операторах И. И. Баврина и их приложении к решению функциональных уравнений // Сибирский математический журнал. – 2003. – Т. 44. - № 5. – С. 1189 – 1194.

162. Я к ш и н а А. С. О дифференциальных свойствах интегралов типа Темлякова и типа Темлякова – Баврина // Сибирский математический журнал. – 2003. – Т. 44. - № 6. – С. 1432 – 1435.

Р.А. ОГАНЯН

КОМБИНАТОРНЫЕ МНОЖЕСТВА

Множества, полученные в результате разбиения какого-нибудь множества и порождающие комбинаторные числа мы называем **комбинаторными.** Конкретные комбинаторные множества мы будем называть именами соответствующих им комбинаторных чисел. Например, множества, порождающие биномиальные коэффициенты мы будем называть – биномиальными.

Существуют ли формулы для комбинаторных множеств, из которых – при переходе к мощностям – следовали бы известные тождества для соответствующих комбинаторных чисел?

Здесь мы рассматриваем, в основном, биномиальные множества и более подробно останавливаемся на блоках разбиения булева куба. Для этих множеств мы приводим формулы, из которых следуют основные тождества для биномиальных коэффициентов. И применяем их для получения формул и алгоритмов перечисления.

1. Необходимые сведения

1.1. Из теории множеств. Как известно [1]:

$$\prod_{i=1}^{n} A_i = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, \ldots a_n) : a_i \in A_i\} \qquad \text{(декартово произведение)}$$

$$A \times \varnothing = \varnothing \times A = \varnothing \tag{1}$$

$$A \bigcup B = B \bigcup A \qquad \text{(коммутативность),}$$

$$A \times (B \bigcup C) = (A \times B) \bigcup (A \times C) \tag{2}$$

(дистрибутивность),

$$(A \bigcup B) \times C = (A \times C) \bigcup (B \times C) \tag{3}$$

$$A \times \left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i \right) = \bigcup_{i=1}^{n} (A \times B_i), \tag{4}$$

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right) \times B = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \times B). \tag{5}$$

1.2. Основные правила комбинаторики. Пусть $|M|$ – мощность множества M, $A \sim B$ – означает эквивалентность множеств A и B (т.е. существование взаимно однозначного соответствия между ними). Тогда [2]:

$$A_i \bigcap A_j = \varnothing,\ i \neq j \ \rightarrow \left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| \qquad \text{(правило суммы),} \tag{6}$$

$$B \subseteq A \rightarrow |A \setminus B| = |A| - |B| \qquad \text{(правило разности),} \tag{7}$$

$$\left| \prod_{i=1}^{n} A_i \right| = \prod_{i=1}^{n} |A_i| \qquad \text{(правило произведения),} \tag{8}$$

$$A \sim B \to |A| = |B| \qquad \text{(правило равенства).} \qquad (9)$$

2. Биномиальные множества

2.1. Разбиение булеана. Пусть $A_n = \{a_1, \ldots, a_n\}$,

S^n – булеан множества A_n, т.е. множество всех его подмножеств:

$$S^n = \{e : e \subseteq A_n\},$$

S_k^n – множество всех k-подмножеств A_n:

$$S_k^n = \{e : e \subseteq A_n, |e| = k\}, \;\; k = \overline{0,n}$$

$$S_k^n = \varnothing, \quad \forall k \notin \{0,1,\ldots,n\} \qquad (10)$$

Легко видеть, что

$$S^n = \bigcup_{k=0}^{n} S_k^n, \quad S_i^n \bigcap S_j^n = \varnothing, \quad i \neq j, \qquad (11)$$

$$\left|S_k^n\right| = \binom{n}{k}, \qquad (12)$$

$$\left|S^n\right| = 2^n \qquad (13)$$

Здесь мы считаем, что

$$\left|S_0^n\right| = 1 \qquad (14)$$

Из (11), (12) и (14) следует, что S_k^n $\left(k = \overline{0,n}\right)$ – биномиальные множества. Очевидно

$$S^0 = \{\underbrace{\varnothing}_{S_0^0}\}, \qquad S^1 = \{\underbrace{\varnothing}_{S_0^1}, \underbrace{\{a_1\}}_{S_1^1}\}, \qquad S^2 = \{\underbrace{\varnothing}_{S_0^2}, \underbrace{\{a_1\},\{a_2\}}_{S_1^2}, \underbrace{\{a_1,a_2\}}_{S_2^2}\},$$

$$S^3 = \{\underbrace{\varnothing}_{S_0^3}, \underbrace{\{a_1\},\{a_2\},\{a_3\}}_{S_1^3}, \underbrace{\{a_1,a_2\},\{a_1,a_3\},\{a_2,a_3\}}_{S_2^3}, \underbrace{\{a_1,a_2,a_3\}}_{S_3^3}\},$$

$$S^0 = S_0^0 = \varnothing, \quad S_0^n = \varnothing, \quad S_n^n = \{a_1, \ldots, a_n\}, \quad S_{n+p}^n = \varnothing \;\; (p \in N),$$

$$S_{n-k}^n = \{A_n \setminus e : e \in S_k^n\}, \qquad S_{n-k}^n \sim S_k^n.$$

Составим аналог треугольника Паскаля для множеств S_k^n, откуда – перейдя к мощностям – мы получим треугольник Паскаля для чисел $\binom{n}{k}$:

n \ k	0	1	2	3	…	$\bigcup_{k=0}^{n} S_k^n$
0	S_0^0					S^0
1	S_0^1	S_1^1		$\varnothing$		S^1
2	S_0^2	S_1^2	S_2^2			S^2
3	S_0^3	S_1^3	S_2^3	S_3^3		S^3
…	…	…	…	…	…	…

Подставив вместо S_k^n конкретные значения получим

k / n	0	1	2	3	…	$\bigcup_{k=0}^{n} S_k^n$
0	$\varnothing$					S^0
1	$\varnothing$	$\{\{a_1\}\}$		$\varnothing$		S^1
2	$\varnothing$	$\{\{a_1\},\{a_2\}\}$	$\{\{a_1,a_2\}\}$			S^2
3	$\varnothing$	$\{\{a_1\},\{a_2\},\{a_3\}\}$	$\{\{a_1,a_2\},\{a_1,a_3\},\{a_2,a_3\}\}$	$\{\{a_1,a_2,a_3\}\}$		S^3
…	…	…	…	…	…	…

Легко видеть, что

$$S_k^n = \left(\bigcup_{e\in S_{k-1}^{n-1}} \{e\bigcup\{a_n\}\}\right)\bigcup S_k^{n-1} \tag{15}$$

Примеры

$$S_1^1 = \left(\bigcup_{e\in S_0^0} \{e\bigcup\{a_1\}\}\right)\bigcup S_1^0 = \{\varnothing\bigcup\{a_1\}\}\bigcup\varnothing = \{\{a_1\}\},$$

$$S_2^2 = \left(\bigcup_{e\in S_1^1} \{e\bigcup\{a_2\}\}\right)\bigcup S_2^1 = \{\{a_1\}\bigcup\{a_2\}\}\bigcup\varnothing = \{\{a_1,a_2\}\},$$

$$S_2^3 = \left(\bigcup_{e\in S_1^2} \{e\bigcup\{a_3\}\}\right)\bigcup S_2^2 = \{\{a_1\}\bigcup\{a_3\}\}\bigcup\{\{a_2\}\bigcup\{a_3\}\}\bigcup\{\{a_1,a_2\}\} =$$
$$= \{\{a_1,a_3\}\}\bigcup\{\{a_2,a_3\}\}\bigcup\{\{a_1,a_2\}\} = \{\{a_1,a_2\},\{a_1,a_3\},\{a_2,a_3\}\}.$$

2.2. Булев куб. Пусть B^n – булев куб, т.е. множество всех n-мерных 2-ичных векторов:

$$B^n = \{(x_1,\dots,x_n): x_i = 0,1\},$$

B_k^n – k-тый слой булева куба B^n, т.е. множество всех векторов (вершин) куба B^n, содержащих ровно k единиц:

$$B_k^n = \left\{(x_1,\dots,x_n): x_i = 0,1, \sum_{i=1}^{n} x_i = k\right\}, \quad k=\overline{0,n}$$
$$B_k^n = \varnothing,\ \forall k \notin \{0,1,\dots,n\} \tag{16}$$

Легко видеть, что

$$B^n = \bigcup_{k=0}^{n} B_k^n, \quad B_i^n \bigcap B_j^n = \varnothing,\ i\neq j \tag{17}$$

$$B^n \sim S^n, \quad B_k^n \sim S_k^n, \tag{18}$$

отсюда

$$\left|B^n\right| \overset{(13)}{=} 2^n, \qquad B_k^n \overset{(12)}{=} \binom{n}{k}. \tag{19}$$

Из (17), (19) следует, что B_k^n $\left(k=\overline{0,n}\right)$ – биномиальные множества.

2.3. Двоичные коды. Пусть T^n – множество всех чисел, порожденных 2-ичными кодами длины n:

$$T^n = \left\{ m : m = \sum_{i=1}^{n} 2^{n-i} x_i ,\ \ x_i = 0,1 \right\},\ n \in \{0\} \bigcup N$$

Очевидно

$$T^n = \{0,1,2,\ldots,2^n - 1\} = \{m\}_0^{2^n-1}, \qquad \left| T^n \right| = 2^n .$$

$$T^0 = \{0\}, \quad T^1 = \{0,1\}, \quad T^2 = \{0,1,2,3\}, \quad T^3 = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}, \ \ldots$$

Нетрудно угадать рекуррентную формулу

$$T^n = T^{n-1} \bigcup \left(\bigcup_{m \in T^{n-1}} \{m + 2^{n-1}\} \right) = \{m\}_0^{2^{n-1}-1} \bigcup \{m + 2^{n-1}\}_{m=0}^{2^{n-1}-1} \tag{20}$$

Например

$$T^3 = T^2 \bigcup \left(\bigcup_{m \in T^2} \{m + 2^2\} \right) = \{0,1,2,3\} \bigcup \{4,5,6,7\} = \{0,1,\ldots,7\}$$

Пусть T_k^n – множество всех тех чисел из T^n, порождающие двоичные коды которых содержат ровно k единиц:

$$T_k^n = \left\{ m : m = \sum_{i=1}^{n} 2^{n-i} x_i , x_i = 0,1, \sum_{i=1}^{n} x_i = k \right\},\ k = \overline{0,n},$$

$$T_k^n = \varnothing, \quad \forall k \notin \{0,1,\ldots,n\}.$$

Отсюда, в частности,

$$T_{n+p}^n = \varnothing, p \in N.$$

Легко видеть, что

$$T^n = \bigcup_{k=0}^{n} T_k^n , \quad T_i^n \bigcap T_j^n = \varnothing, \quad i \neq j .$$

$$T_k^n \sim B_k^n, \quad \left| T_k^n \right| = \binom{n}{k}.$$

т.е. $T_k^n \left(k = \overline{0,n} \right)$ – биномиальные множества.

Примеры.

$$\underbrace{T^0 = \{0\}}_{T_0^0}, \qquad T^1 = \{\overbrace{0}^{T_0^1},\ \overbrace{1}^{T_1^1}\}, \qquad T^2 = \{\overbrace{0}^{T_0^2},\ \overbrace{1,\ 2}^{T_1^2},\ \overbrace{3}^{T_2^2}\}, \qquad T^3 = \{\overbrace{0}^{T_0^3}, \overbrace{1, 2, 4}^{T_1^3}, \overbrace{3, 5, 6}^{T_2^3}, \overbrace{7}^{T_3^3}\}$$

$$B^1 = \{0,\ 1\}, \quad B^2 = \left\{ \begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{matrix} \right\} \begin{matrix} 2^1 \\ 2^0 \end{matrix}, \quad B^3 = \left\{ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{matrix} \right\} \begin{matrix} 2^2 \\ 2^1 \\ 2^0 \end{matrix}$$

Очевидно

$$T_0^0 = T^0 = \{0\}, \quad T_0^n = \{0\}, \quad T_n^n = \{2^n - 1\}.$$

$$T_{n-k}^n = \{2^n - 1 - m : m \in T_k^n\}, \quad T_{n-k}^n \sim T_k^n .$$

Построим аналог треугольника Паскаля для множеств T_k^n, откуда при переходе к мощностям – мы получим треугольник Паскаля для чисел $\binom{n}{k}$:

n \ k	0	1	2	3	4	…	$\bigcup_{k=0}^{n} T_k^n$
0	T_0^0						T^0
1	T_0^1	T_1^1			$\varnothing$		T^1
2	T_0^2	T_1^2	T_2^2				T^2
3	T_0^3	T_1^3	T_2^3	T_3^3			T^3
4	T_0^4	T_1^4	T_2^4	T_3^4	T_4^4		T^4
…	…	…	…	…	…	…	…

Подставив вместо T_k^n конкретные значения получим

n \ k	0	1	2	3	4	…	$\bigcup_{k=0}^{n} T_k^n$
0	$\{0\}$						T^0
1	$\{0\}$	$\{1\}$			$\varnothing$		T^1
2	$\{0\}$	$\boxed{\{1,2\}}$	$\boxed{\{3\}}$				T^2
3	$\{0\}$	$\{1,2,4\}$	$\boxed{\{3,5,6\}}$	$\{7\}$			T^3
4	$\{0\}$	$\{1,2,4,8\}$	$\{3,5,6,9,10,12\}$	$\{7,11,13,14\}$	$\{15\}$		T^4
…	…	…	…	…	…	…	…

Легко видеть, что

$$T_k^n = T_k^{n-1} \bigcup \left(\bigcup_{m \in T_{k-1}^{n-1}} \{m + 2^{n-1}\} \right) = \left(\bigcup_{m \in T_{k-1}^{n-1}} \{m + 2^{n-1}\} \right) \bigcup T_k^{n-1} \qquad (21)$$

Примеры.

$$T_1^1 = \left(\bigcup_{m \in T_0^0} \{m + 2^0\} \right) \bigcup T_1^1 = \{0+1\} \bigcup \varnothing = \{1\},$$

$$T_1^2 = \left(\bigcup_{m \in T_0^1} \{m + 2\} \right) \bigcup T_1^1 = \{0+2\} \bigcup \{1\} = \{1,2\}.$$

Далее, построим отображение $\varphi : T^n \to B^n$ по формуле:

$$\varphi(m) = (x_1(m), \ldots, x_n(m)),\ m \in T^n, \qquad (22)$$

где

$$x_k(m) = \begin{cases} 0, [m/2^{n-k}] \text{- четное}, \\ 1, [m/2^{n-k}] \text{- нечетное}. \end{cases} \quad k = \overline{1,n}$$

Пример: $n = 5, m = 23$

k:	1	2	3	4	5
$m/2^{n-k}$:	$23/2^4$	$23/2^3$	$23/2^2$	$23/2^1$	$23/2^0$
$[m/2^{n-k}]$:	1	2	5	11	23
$x_k(m)$:	1	0	1	1	1

Отсюда

$$\varphi(23) = (1,0,1,1,1) \in B^5$$

Обратное отображение $\varphi^{-1} : B^n \to T^n$ определяется по формуле:

$$\varphi^{-1}(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{k=1}^{n} 2^{n-k} x_k \,, \; (x_1,\ldots,x_n) \in B^n$$

Проверка: $\varphi^{-1}(1,0,1,1,1) = 1\cdot 2^4 + 0\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 = 23$.

3. Формулы для булева куба

3.1. Множество булевых кубов. Пусть B – множество всех булевых кубов: $B = \{B^n\}_0^\infty$.

Для компактности записи формул мы будем считать, что

$$B^0 \times B^n = B^n \times B^0 = B^n \,, \; \left|B^0\right| = 1 \tag{23}$$

Легко видеть, что $\forall m,n \in \{0\} \bigcup N$:

$$B^m \times B^n = B^{m+n} \in B \qquad \text{(замкнутость)} \tag{24}$$

$$B^m \times B^n = B^n \times B^m \qquad \text{(коммутативность)} \tag{25}$$

$$\left(B^m \times B^n\right) \times B^p = B^m \times \left(B^n \times B^p\right) \qquad \text{(ассоциативность)} \tag{26}$$

$$\left(B^m\right)^n = B^{mn}.$$

Из (23) – (26) следует

Утверждение 1. Множество всех булевых кубов с операцией декартова произведения $\langle B, X\rangle$ – коммутативная полугруппа с единицей.

Из (24) следует

$$B^n = \underbrace{B^1 \times \ldots \times B^1}_{n} = \left(B^1\right)^n = \{0,1\}^n = \left(B_0^1 \bigcup B_1^1\right)^n \tag{27}$$

3.2. Рекуррентная формула для B^n. Очевидно

$$B^n = B^1 \times B^{n-1} = \{0,1\} \times B^{n-1} = \left(\{0\} \bigcup \{1\}\right) \times B^{n-1} = \left(\{0\} \times B^{n-1}\right) \bigcup \left(\{1\} \times B^{n-1}\right),$$

поэтому

$$B^n = \bigcup_{i=0}^{1} \left(\{i\} \times B^{n-1}\right) \overset{(25)}{=} \bigcup_{i=0}^{1} \left(B^{n-1} \times \{i\}\right)$$

или

$$B^n = \bigcup_{i=0}^{1} \left(B_i^1 \times B^{n-1}\right) = \bigcup_{i=0}^{1} \left(B^{n-1} \times B_i^1\right) \tag{28}$$

Отсюда следуют **формулы перечисления** векторов B^n и простой алгоритм перехода от B^{n-1} к B^n:

$$B^n = \left\{ \begin{array}{c} \overbrace{\boxed{0\ldots0}}^{2^{n-1}} \\ \boxed{B^{n-1}} \end{array} \; \begin{array}{c} \overbrace{\boxed{1\ldots1}}^{2^{n-1}} \\ \boxed{B^{n-1}} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \boxed{B^{n-1}} \\ \underbrace{0\ldots0} \end{array} \; \begin{array}{c} \boxed{B^{n-1}} \\ \underbrace{1\ldots1} \end{array} \right\} \tag{29}$$

$2^{n-1} \qquad 2^{n-1}$

причем, если в первой из этих формул векторы в B^{n-1} расположены в лексикографическом порядке, тогда и в B^n они будут в том же порядке. (Говорят, что вектор $x=(x_1,\ldots,x_n)$ **лексикографически** предшествует вектору $y=(y_1,\ldots y_n)$ и пишут $x \prec y$, если $x_1 < y_1$ или $x_i = y_i, i=\overline{1,k-1}$ и $x_k < y_k$ $(k=\overline{2,n})$ [3].)

Например, при $n=2,3$:

$$B^2 = \begin{Bmatrix} 0 \; 0 & 1 \; 1 \\ \boxed{B^1} & \boxed{B^1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \; 0 & 1 \; 1 \\ \boxed{0}\,1 & \boxed{0}\,1 \end{Bmatrix},$$

$$B^3 = \begin{Bmatrix} 0\;0\;0\;0 & 1\;1\;1\;1 \\ \boxed{\quad B^2 \quad} & \boxed{\quad B^2 \quad} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0\;0\;0\;0 & 1\;1\;1\;1 \\ \boxed{\begin{matrix} 0\;0\;1 \\ 0\;1\;0 \end{matrix}}\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 0\;0\;1 \\ 0\;1\;0 \end{matrix}}\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \end{Bmatrix}$$

3.3. Схема перехода от T^n к B^n. Он осуществляется по формуле (22):

$$T^n = \{0 \quad 1 \quad \ldots \quad 2^n - 1\}$$

$$\downarrow \quad \downarrow \qquad\quad \downarrow$$

$$B^n = \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ n \end{array} \begin{Bmatrix} 0 & 0 & & 1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 1 & & 1 \end{Bmatrix} \begin{array}{c} 2^{n-1} \\ \vdots \\ 2^0 \end{array}$$

Если в T^n числа возрастают, то в B^n будет лексикографический порядок.

4. Формулы для слоев булева куба

4.1. Крайние слои булева куба. Очевидно

$$B_0^n = \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ n \end{array} \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}, \qquad B_n^n = \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ n \end{array} \begin{Bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{30}$$

отсюда, ввиду (19)

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

Заметим так же, что

$$B_1^n = \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ n \end{array} \begin{Bmatrix} 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 \\ \vdots & \ldots & 1 & \ldots & \vdots \\ 1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \end{Bmatrix}, \qquad B_{n-1}^n = \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ n \end{array} \begin{Bmatrix} 1 & \ldots & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ldots & 0 & \ldots & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 & \ldots & 1 \end{Bmatrix} \tag{31}$$

отсюда, ввиду (19),

$$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

4.2. Аналог бинома Ньютона. Из (17) и (27)

$$\left(B_0^1 \bigcup B_1^1\right)^n = \bigcup_{k=0}^{n} B_k^n \tag{32}$$

отсюда

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

4.3. Упорядочение элементов в B_k^n. Пусть b_{ki}^n – i-тый n-мерный вектор из множества B_k^n, упорядоченного в лексикографическом порядке. Примеры

$$\begin{array}{cc} b_{01}^1 & b_{11}^1 \end{array} \qquad \qquad \begin{array}{cccc} b_{01}^2 & b_{11}^2 & b_{12}^2 & b_{21}^2 \end{array}$$

$$B^1 = \{\ \underset{B_0^1}{0},\ \underset{B_1^1}{1}\ \}, \qquad B^2 = \left\{\begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ \underbrace{0}_{B_0^2} & \underbrace{1 \quad 0}_{B_1^2} & & \underbrace{1}_{B_2^2} \end{matrix}\right\},$$

$$\begin{array}{cccccccc} b_{01}^3 & b_{11}^3 & b_{12}^3 & b_{13}^3 & b_{21}^3 & b_{22}^3 & b_{23}^3 & b_{31}^3 \end{array}$$

$$B^3 = \left\{\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \underbrace{0}_{B_0^3} & \underbrace{1 \quad 0 \quad 0}_{B_1^3} & & & \underbrace{1 \quad 1 \quad 0}_{B_2^3} & & & \underbrace{1}_{B_3^3} \end{matrix}\right\} \tag{33}$$

Очевидно

$$B_k^n = \left\{b_{k1}^n, b_{k2}^n, \ldots b_{k,\binom{n}{k}}^n\right\} = \left\{b_{ki}^n\right\}_{i=1}^{\binom{n}{k}} = \bigcup_{i=1}^{\binom{n}{k}} b_{ki}^n \tag{34}$$

Далее, легко видеть

$$B_0^m \times B_0^n = B_0^n \times B_0^m = B_0^{m+n} = b_{01}^{m+n}, \tag{35}$$

$$B_m^m \times B_n^n = B_n^n \times B_m^m = B_{m+n}^{m+n} = b_{m+n,1}^{m+n}, \tag{36}$$

$$\left(B_0^m\right)^n = B_0^{mn} = b_{01}^{mn}, \qquad \left(B_m^m\right)^n = B_{mn}^{mn} = b_{mn,1}^{mn},$$

$$B_0^m \times B_n^n = b_{n1}^{m+n}, \qquad B_n^n \times B_0^m = b_{n,\binom{m+n}{n}}^{m+n}.$$

По аналогии с (23) мы будем считать, что

$$B_0^0 \times B_k^n = B_k^n \times B_0^0 = B_k^n, \qquad \left|B_0^0\right| = 1 \tag{37}$$

А из (17) и (32) следует

$$B^0 = B_0^0, \qquad \left(B_0^1 \bigcup B_1^1\right)^0 = B_0^0. \tag{38}$$

4.4. Эквивалентность симметрично расположенных слоев булева куба. Пусть

$$\overline{x_i} = 1 - x_i, \qquad \overline{x} = \left(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}\right), \quad \psi x = \overline{x},$$

тогда

$$\psi B_k^n = \overline{B_k^n} = \left\{\overline{b_{ki}^n}\right\}_{i=1}^{\binom{n}{k}} = \left\{b^n_{n-k,\binom{n}{k}-i+1}\right\}_{i=1}^{\binom{n}{k}} = \left\{b^n_{n-k,j}\right\}_{j=1}^{\binom{n}{k}} = B_{n-k} \tag{39}$$

Ясно, что отображение ψ - взаимно однозначное, поэтому

$$B_k^n \sim B_{n-k}^n, \quad k = \overline{0,n} \tag{40}$$

отсюда

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \ k = \overline{0,n}. \tag{41}$$

Заметим, также, что

$$\overline{B^n} = B^n \tag{42}$$

Действительно

$$\overline{B^n} \overset{(17)}{=} \bigcup_{k=0}^{n} \overline{B_k^n} \overset{(39)}{=} \bigcup_{k=0}^{n} B_{n-k}^n = \bigcup_{i=0}^{n} B_i^n \overset{(17)}{=} B^n.$$

Пример

$$B_1^3 = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix}, \quad B_2^3 = \overline{B_1^3} = \begin{Bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{Bmatrix}. \tag{43}$$

4.5. Рекуррентная формула для слоев булева куба. Легко видеть, что

$$B_k^n = \left(\{0\} \times B_k^{n-1}\right) \bigcup \left(\{1\} \times B_{k-1}^{n-1}\right) = \bigcup_{i=0}^{1} \left(\{i\} \times B_{k-i}^{n-i}\right) \tag{44}$$

иначе

$$B_k^n = \left(B_0^1 \times B_k^{n-1}\right) \bigcup \left(B_1^1 \times B_{k-1}^{n-1}\right) = \bigcup_{i=0}^{1} \left(B_i^1 \times B_{k-i}^{n-1}\right) \tag{45}$$

отсюда, ввиду (19), (6) и (8):

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Теперь, используя формулы (29), (38) и (45), можно составить треугольник Паскаля для множеств B_k^n; откуда – при переходе к мощностям и учтя (37) – мы получим треугольник Паскаля для $\binom{n}{k}$.

$\left(B_0^1 \bigcup B_1^1\right)^n$	$n \backslash k$	0	1	2	3	…	$k-1$	k	…	$n-1$	n	…	$\bigcup_{k=0}^{n} B_k^n$
$\left(B_0^1 \bigcup B_1^1\right)^0$	0	B_0^0											B^0
$\left(B_0^1 \bigcup B_1^1\right)^1$	1	B_0^1	B_1^1										B^1
$\left(B_0^1 \bigcup B_1^1\right)^2$	2	B_0^2	$\boxed{B_1^2}$	$\boxed{B_2^2}$				$\varnothing$					B^2

$\left(B_0^1 \bigcup B_1^1\right)^3$	3	B_0^3	B_1^3	$\boxed{B_2^3}$	B_3^3							B^3
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$			$\ldots$
$\left(B_0^1 \bigcup B_1^1\right)^{n-1}$	$n-1$	B_0^{n-1}	B_1^{n-1}	B_2^{n-1}	B_3^{n-1}	$\ldots$	B_{k-1}^{n-1}	B_k^{n-1}	$\ldots$	B_{n-1}^{n-1}		B^{n-1}
$\left(B_0^1 \bigcup B_1^1\right)^n$	n	B_0^n	B_1^n	B_2^n	B_3^n	$\ldots$	B_{k-1}^n	B_k^n	$\ldots$	B_{n-1}^n	B_n^n	B^n
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$ $\ldots$	$\ldots$

Подставляя вместо B_k^n конкретные значения получим:

$\left(B_0^1 \bigcup B_1^1\right)^n$	$n \backslash k$	0	1	2	3	$\ldots$	$\bigcup\limits_{k=0}^{n} B_k^n$
$\left(B_0^1 \bigcup B_1^1\right)^0$	0	B_0^0					B^0
$\left(\{0\} \bigcup \{1\}\right)^1$	1	$\{0\}$	$\{1\}$			$\varnothing$	B^1
$\left(\{0\} \bigcup \{1\}\right)^2$	2	$\left\{\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right\}$	$\boxed{\left\{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}\right\}}$	$\boxed{\left\{\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}\right\}}$			B^2
$\left(\{0\} \bigcup \{1\}\right)^3$	3	$\left\{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right\}$	$\left\{\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix}\right\}$	$\boxed{\left\{\begin{matrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{matrix}\right\}}$	$\left\{\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}\right\}$		B^3
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$

Примеры:

$$B_1^1 \overset{(44)}{=} \left(\{0\} \times B_1^0\right) \bigcup \left(\{1\} \times B_0^0\right) \overset{(16)}{=} \left(\{0\} \times \varnothing\right) \bigcup \{1\} \overset{(1)}{=} \varnothing \bigcup \{1\} = \{1\}$$

$$B_2^3 \overset{(44)}{=} \left(\{0\} \times \left\{\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}\right\}\right) \bigcup \left(\{1\} \times \left\{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}\right\}\right) = \left\{\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}\right\} \bigcup \left\{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{matrix}\right\}$$

4.6. Свёртка Вандермонда. Случай $m = 1$, $n = 2$.

$$B^1 \times B^2 \overset{(17)}{=} B^1 \times \left(\bigcup_{i=0}^{2} B_i^2\right) \overset{(4)}{=} \bigcup_{i=0}^{2} \left(B^1 \times B_i^2\right) \overset{(17)}{=} \bigcup_{i=0}^{2} \left[\left(B_0^1 \bigcup B_1^1\right) \times B_i^2\right] \overset{(3)}{=} \bigcup_{i=0}^{2} \left[\left(B_0^1 \times B_i^2\right) \bigcup \left(B_1^1 \times B_i^2\right)\right] =$$

$$= \left[\left(B_0^1 \times B_0^2\right) \bigcup \left(B_1^1 \times B_0^2\right)\right] \bigcup \left[\left(B_0^1 \times B_1^2\right) \bigcup \left(B_1^1 \times B_1^2\right)\right] \bigcup \left[\left(B_0^1 \times B_2^2\right) \bigcup \left(B_1^1 \times B_2^2\right)\right] \overset{(35),(45),(36)}{=}$$

$$= \underbrace{\left(B_0^1 \times B_0^2\right)}_{B_0^3} \bigcup \underbrace{\left[\left(B_1^1 \times B_0^2\right) \bigcup \left(B_0^1 \times B_1^2\right)\right]}_{B_1^3} \bigcup \underbrace{\left[\left(B_1^1 \times B_1^2\right) \bigcup \left(B_0^1 \times B_2^2\right)\right]}_{B_2^3} \bigcup \underbrace{\left(B_1^1 \times B_2^2\right)}_{B_3^3} \overset{(16),(1)}{=}$$

$$= \left[\bigcup_{i=0}^{0} \left(B_i^1 \times B_{0-i}^2\right)\right] \bigcup \left[\bigcup_{i=1}^{1} \left(B_i^1 \times B_{1-i}^2\right)\right] \bigcup \left[\bigcup_{i=0}^{2} \left(B_i^1 \times B_{2-i}^2\right)\right] \bigcup \left[\bigcup_{i=0}^{3} \left(B_i^1 \times B_{3-i}^2\right)\right]$$

Отсюда следуют 4 формулы, которые можно объединить в одну:

$$B_k^3 = \bigcup_{i=0}^{k}\left(B_i^1 \times B_{k-i}^2\right),\ k = \overline{0,3},$$

а в общем случае

$$B_k^{m+n} = \bigcup_{i=0}^{k}\left(B_i^m \times B_{k-i}^n\right),\ k = \overline{0,m+n} \tag{46}$$

или, что то же самое,

$$B_k^{m+n} = \bigcup_{i+j=k}\left(B_i^m \times B_j^n\right),\ k = \overline{0,m+n}.$$

Из (46), в силу (19), (6) и (8)

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{i=0}^{k}\binom{m}{i}\binom{n}{k-i},\ k = \overline{0,m+n}$$

Формулу (46) можно записать и так

$$B_k^n = \bigcup_{i=0}^{k}\left(B_i^m \times B_{k-i}^{n-m}\right),\ k = \overline{0,n}. \tag{47}$$

4.6.1. Следствие. Из (46) при $m = k = n$ получим

$$B_n^{2n} = \bigcup_{i=0}^{n}\left(B_i^n \times B_{n-i}^n\right). \tag{48}$$

отсюда, ввиду (6), (8), (19) и (4):

$$\binom{2n}{n} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2$$

4.6.2. Модификация. Заметим, что

$$B_i^m \times B_{k-i}^{n-m} \overset{(34)}{=} \left(\bigcup_{j=1}^{\binom{m}{i}} b_{ij}^m\right) \times B_{k-i}^{n-m} \overset{(5)}{=} \bigcup_{j=1}^{\binom{m}{i}}\left(b_{ij}^m \times B_{k-i}^{n-m}\right)$$

отсюда, ввиду (47), следует модификация аналога свертки Вандермонда:

$$B_k^n = \bigcup_{i=0}^{k}\bigcup_{j=1}^{\binom{m}{i}}\left(b_{ij}^m \times B_{k-i}^{n-m}\right) \tag{49}$$

4.7. Формула суммирования по верхнему индексу. Очевидно

$$B_k^k \overset{(45)}{=} \left(B_1^1 \times B_{k-1}^{k-1}\right) \bigcup \left(B_0^1 \times B_k^{k-1}\right) \overset{(16),(1),(37)}{=} \bigcup_{i=0}^{0}\left(B_0^i \times B_1^1 \times B_{k-1}^{k-1-i}\right), \tag{50}$$

$$B_k^{k+1} \overset{(45)}{=} \left(B_0^1 \times B_k^k\right) \bigcup \left(B_1^1 \times B_{k-1}^k\right) \overset{(50),(2),(35)}{=} \left(B_0^1 \times B_1^1 \times B_{k-1}^{k-1}\right) \bigcup \left(B_1^1 \times B_{k-1}^k\right) = \bigcup_{i=0}^{1}\left(B_0^i \times B_1^1 \times B_{k-1}^{k-i}\right), \tag{51}$$

$$B_k^{k+2} \overset{(45)}{=} \left(B_0^1 \times B_k^{k+1}\right) \bigcup \left(B_1^1 \times B_{k-1}^{k+1}\right) \overset{(51),(2),(35)}{=} \left(B_0^2 \times B_1^1 \times B_{k-1}^{k-1}\right) \bigcup \left(B_0^1 \times B_1^1 \times B_{k-1}^k\right) \bigcup \left(B_0^0 \times B_1^1 \times B_{k-1}^{k+1}\right) =$$

$$= \bigcup_{i=0}^{2}\left(B_0^i \times B_1^1 \times B_{k-1}^{k+1-i}\right),$$

а в общем случае

$$B_k^{k+p} = \bigcup_{i=0}^{p}\left(B_0^i \times B_1^1 \times B_{k-1}^{k+p-1-i}\right),$$

и при $k+p=n$

$$B_k^n=\bigcup_{i=0}^{n-k}\left(B_0^i\times B_1^1\times B_{k-1}^{n-1-i}\right)=\bigcup_{i=0}^{n-k}\left(\{0\}^i\times\{1\}\times B_{k-1}^{n-1-i}\right), \tag{52}$$

отсюда, переходя к мощностям, получим

$$\binom{n}{k}=\sum_{i=0}^{n-k}\binom{n-1-i}{k-1}$$

или, как легко видеть

$$\binom{n}{k}=\sum_{i=0}^{n-k}\binom{k-1+i}{k-1}.$$

4.8. Аналог формулы суммирования по обоим индексам. Из (52) при $k:=n-k$, получим

$$B_{n-k}^n=\bigcup_{i=0}^{k}\left(B_0^i\times B_1^1\times B_{n-1-k}^{n-1-i}\right). \tag{53}$$

а переходя к мощностям

$$\binom{n}{n-k}=\sum_{i=0}^{k}\binom{n-1-i}{n-1-k}$$

и, учтя (41), получим

$$\binom{n}{n-k}=\sum_{i=0}^{k}\binom{n-1-i}{k-i}$$

5. Формулы перечисления векторов множества B_k^n.

5.1. Алгоритм перехода от B_{k-1}^{n-1} и B_k^{n-1} к B_k^n. Легко видеть, что

$$B_k^n\overset{(41)}{=}\begin{array}{c}1\\ \vdots\\ n\end{array}\left\{\begin{array}{cc}\overbrace{0\ldots0}^{\binom{n-1}{k}} & \overbrace{1\ldots1}^{\binom{n-1}{k-1}}\\ \boxed{B_k^{n-1}} & \boxed{B_{k-1}^{n-1}}\end{array}\right\} \tag{54}$$

причем, если в B_k^{n-1} и B_{k-1}^{n-1} векторы расположены в лексикографическом порядке, то и в B_k^n они будут в том же порядке.

Пример.

$$B_2^4\overset{(54)}{=}\begin{array}{c}1\\2\\3\\4\end{array}\left\{\begin{array}{cc}\overbrace{0\ldots0}^{\binom{3}{2}} & \overbrace{1\ldots1}^{\binom{3}{1}}\\ \boxed{B_2^3} & \boxed{B_1^3}\end{array}\right\}\overset{(43)}{=}\left\{\begin{array}{cc}0\ 0\ 0 & 1\ 1\ 1\\ \boxed{\begin{array}{ccc}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{array}} & \boxed{\begin{array}{ccc}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{array}}\end{array}\right\} \tag{54*}$$

5.2. Алгоритм перехода от B_{k-2}^{n-2}, B_{k-1}^{n-2}, B_k^{n-2} к B_k^n. Из (54), ввиду (33), легко перейти к формуле отсюда при $m = 1{,}2$ следуют формулы (54), (55).

Пример.

$$
B_2^5 \overset{(56)}{\underset{m=3}{=}}
\begin{array}{c}
1\\ 2\\ 3\\ 4\\ 5
\end{array}
\left\{
\begin{array}{ccccccc}
\binom{2}{2} & \binom{2}{1} & \binom{2}{1} & \binom{2}{1} & \binom{2}{0} & \binom{2}{0} & \binom{2}{0} \\
b_{01}^3 & b_{11}^3\ b_{11}^3 & b_{12}^3\ b_{12}^3 & b_{13}^3\ b_{13}^3 & b_{21}^3 & b_{22}^3 & b_{23}^3 \\
B_2^2 & \boxed{B_1^2} & \boxed{B_1^2} & \boxed{B_1^2} & B_0^2 & B_0^2 & B_0^2 \\
\binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & & \binom{3}{2} &
\end{array}
\right\} =
$$

$$
\overset{(33)}{=}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc}
1 & & & & & & 7 & 8 & & \end{array}\\
\left\{
\begin{array}{cccccccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
\right\}
\end{array}
\qquad (57)
$$

Заметим, что в B_2^5 векторы 7 и 8 расположены **не в лексикографическом порядке,** это связано с тем, что b_{13}^3 и b_{21}^3 – нарушают этот порядок.

5.4. Алгоритм перехода от B_i^n $\left(i = \overline{0, n}\right)$ к B_n^{2n}. Из (56) при $n := 2n,\ k := n,\ m := n$ получим

$$
B_n^{2n} =
\begin{array}{c}
1\\ \vdots\\ n\\ n+1\\ \vdots\\ 2n
\end{array}
\left\{
\begin{array}{ccccccc}
\binom{n}{n} & \overbrace{\binom{n}{n-1}}^{} & & \overbrace{\binom{n}{n-1}}^{} & & \binom{n}{0} \\
b_{01}^n & b_{11}^n \ldots b_{11}^n & \ldots & b_{1n}^n \ldots b_{1n}^n & \ldots & b_{n1}^n \\
B_n^n & \boxed{B_{n-1}^n} & \ldots & \boxed{B_{n-1}^n} & \ldots & B_0^n \\
\binom{n}{0} & & \binom{n}{1} & & & \binom{n}{n}
\end{array}
\right\}
\qquad (58)
$$

$$B_k^n = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n \end{array} \left\{ \begin{array}{cccc} \overbrace{b_{01}^2 \ldots b_{01}^2}^{\binom{n-2}{k}} & \overbrace{b_{11}^2 \ldots b_{11}^2}^{\binom{n-2}{k-1}} & \overbrace{b_{12}^2 \ldots b_{12}^2}^{\binom{n-2}{k-1}} & \overbrace{b_{21}^2 \ldots b_{21}^2}^{\binom{n-2}{k-2}} \\ \boxed{B_k^{n-2}} & \boxed{B_{k-1}^{n-2}} & \boxed{B_{k-1}^{n-2}} & \boxed{B_{k-2}^{n-2}} \\ \binom{2}{0} & \multicolumn{2}{c}{\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\binom{2}{1}}} & \binom{2}{2} \end{array} \right\} \qquad (55)$$

причем, если в B_{k-i}^{n-2} $(i = 0,1,2)$ векторы расположены в лексикографическом порядке, то и в B_k^n они будут в том же порядке.

Пример.

$$B_2^4 \overset{(55)}{=} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \left\{ \begin{array}{cccc} \overset{\binom{2}{2}}{b_{01}^2} & \overset{\binom{2}{1}}{b_{11}^2\ b_{11}^2} & \overset{\binom{2}{1}}{b_{12}^2\ b_{12}^2} & \overset{\binom{2}{0}}{b_{21}^2} \\ B_2^2 & \boxed{B_1^2} & \boxed{B_1^2} & B_0^2 \end{array} \right\} \overset{(33)}{=} \left\{ \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right\}$$

5.3. Алгоритм перехода от B_{k-i}^{n-m} $\left(i = \overline{0,m}\right)$ **к** B_k^n. Легко видеть, что

$$\bigcup_{j=1}^{\binom{m}{i}} \left(b_{ij}^m \times B_{k-i}^{n-m}\right) = \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ m \\ m+1 \\ \vdots \\ n \end{array} \left\{ \begin{array}{ccc} \overbrace{b_{i1}^m \ldots b_{i1}^m}^{\binom{n-m}{k-i}} & \ldots & \overbrace{b_{i\binom{m}{i}}^m \ldots b_{i\binom{m}{i}}^m}^{\binom{n-m}{k-i}} \\ \boxed{B_{k-i}^{n-m}} & \ldots & \boxed{B_{k-i}^{n-m}} \\ \multicolumn{3}{c}{\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\binom{m}{i}}} \end{array} \right\}$$

Поэтому

$$B_k^n \overset{(49)}{=} \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ m \\ m+1 \\ \vdots \\ n \end{array} \left\{ \begin{array}{ccccccc} \overbrace{b_{01}^m \ldots b_{01}^m}^{\binom{n-m}{k}} & \overbrace{b_{11}^m \ldots b_{11}^m}^{\binom{n-m}{k-1}} & \ldots & \overbrace{b_{1m}^m \ldots b_{1m}^m}^{\binom{n-m}{k-1}} & \ldots & \overbrace{b_{m1}^m \ldots b_{m1}^m}^{\binom{n-m}{k-m}} \\ \boxed{B_k^{n-m}} & \boxed{B_{k-1}^{n-m}} & \ldots & \boxed{B_{k-1}^{n-m}} & \ldots & \boxed{B_{k-m}^{n-m}} \\ \binom{m}{0} & \multicolumn{3}{c}{\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\binom{m}{1}}} & & \binom{m}{m} \end{array} \right\} \qquad (56)$$

$$B_k^n = \left\{ \begin{array}{ccc} 0\ldots0 & 0\ldots0 & 1\ldots1 \\ 0\ldots0 & 1\ldots1 & \\ \boxed{B_k^{n-2}} & \boxed{B_{k-1}^{n-2}} & \boxed{B_{k-1}^{n-2}} \end{array} \right\}.$$

продолжая этот процесс, получим искомую формулу перечисления:

$$B_k^n = \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ \\ \\ \\ n \end{array} \left\{ \begin{array}{cccccc} \binom{k-1}{k-1} & \binom{k}{k-1} & & \binom{n-2}{k-1} & \binom{n-1}{k-1} \\ 0 & \overbrace{0\ldots0} & \ldots & \overbrace{0\ldots0} & \overbrace{1\ldots1} \\ \vdots & \vdots\quad\vdots & & 1\ldots1 & \\ 0 & 0\quad 0 & & & \\ 0 & 1\ldots1 & & \boxed{B_{k-1}^{n-2}} & \boxed{B_{k-1}^{n-1}} \\ 1 & & & & \\ \boxed{B_{k-1}^{k-1}} & \boxed{B_{k-1}^{k}} & \ldots & & \end{array} \right\}, \quad k = \overline{2,n} \qquad (60)$$

Пример.

$$B_2^5 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \left\{ \begin{array}{cccc} \binom{1}{1} & \binom{2}{1} & \binom{3}{1} & \binom{4}{1} \\ 0 & 00 & 000 & 1111 \\ 0 & 00 & 111 & \\ 0 & 11 & & \boxed{B_1^4} \\ 1 & & \boxed{B_1^3} & \\ \boxed{B_1^1} & \boxed{B_1^2} & & \end{array} \right\} \overset{(27)}{=} \left\{ \begin{array}{cccc} 0 & 00 & 000 & 1111 \\ 0 & 00 & 111 & \boxed{\begin{array}{c}0001\\0010\\0100\\1000\end{array}} \\ 0 & 11 & \boxed{\begin{array}{c}001\\010\\100\end{array}} & \\ 1 & \boxed{\begin{array}{c}01\\10\end{array}} & & \\ \boxed{1} & & & \end{array} \right\} \qquad (61)$$

В этом случае, в отличие от (57), мы получили лексикографический порядок.

Утверждение 2. Если в формуле перечисления (60) векторы в множествах B_{k-1}^{k-1+i} $\left(i = \overline{0, n-k}\right)$ расположены в лексикографическом порядке, то и в B_k^n – они будут в том же порядке.

Приведем еще один пример.

$$B_3^6 \overset{(60)}{=} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \left\{ \begin{array}{cccc} \binom{2}{2} & \binom{3}{2} & \binom{4}{2} & \binom{5}{2} \\ 0 & 000 & 000000 & 11\ 11\ 1\ 1111\ 1 \\ 0 & 000 & 1\ 11\ 11\ 1 & \\ 0 & 11\ 1 & & \boxed{B_2^5} \\ 1 & & \boxed{B_2^4} & \\ & \boxed{B_2^3} & & \\ \boxed{B_2^2} & & & \end{array} \right\} \overset{(33),(54^*),(61)}{=}$$

Пример

$$
B_3^6=\left\{\begin{array}{cccccccc}
\binom{3}{3} & \binom{3}{2} & \binom{3}{2} & \binom{3}{2} & \binom{3}{1} & \binom{3}{1} & \binom{3}{1} & \binom{3}{0}\\
b_{01}^3 & b_{11}^3b_{11}^3b_{11}^3 & b_{12}^3b_{12}^3b_{12}^3 & b_{13}^3b_{13}^3b_{13}^3 & b_{21}^3b_{21}^3b_{21}^3 & b_{22}^3b_{22}^3b_{22}^3 & b_{23}^3b_{23}^3b_{23}^3 & b_{31}^3\\
\underbrace{B_3^3}_{\binom{3}{0}} & \multicolumn{3}{c}{\underbrace{\boxed{B_2^3}\;\boxed{B_2^3}\;\boxed{B_2^3}}_{\binom{3}{1}}} & \multicolumn{3}{c}{\underbrace{\boxed{B_1^3}\;\boxed{B_1^3}\;\boxed{B_1^3}}_{\binom{3}{2}}} & \underbrace{B_0^3}_{\binom{3}{3}}
\end{array}\right\}\overset{(33)}{=}
$$

$$
=\left\{\begin{array}{c|ccc|ccc|ccc|ccc|ccc|ccc|c}
\overset{1}{0} & 0&0&0 & 0&0&0 & 1&1&\overset{10}{1} & \overset{11}{0}&0&0 & 1&1&1 & 1&1&1 & \overset{20}{1}\\
0 & 0&0&0 & 1&1&1 & 0&0&0 & 1&1&1 & 0&0&0 & 1&1&1 & 1\\
0 & 1&1&1 & 0&0&0 & 0&0&0 & 1&1&1 & 1&1&1 & 0&0&0 & 1\\
1 & 0&1&1 & 0&1&1 & 0&1&1 & 0&0&1 & 0&0&1 & 0&0&1 & 0\\
1 & 1&0&1 & 1&0&1 & 1&0&1 & 0&1&0 & 0&1&0 & 0&1&0 & 0\\
1 & 1&1&0 & 1&1&0 & 1&1&0 & 1&0&0 & 1&0&0 & 1&0&0 & 0
\end{array}\right\} \qquad (59)
$$

Заметим, что в B_3^6 векторы 10 и 11 **нарушают лексикографический порядок**, это связано с тем, что b_{13}^3 и b_{21}^3 – нарушают этот порядок.

5.5. Алгоритм перехода от B_{k-1}^{k-1+i} $\left(i=\overline{0,n-k}\right)$ к B_k^n. Из (54)

$$
B_k^{n-1}=\left\{\begin{array}{cc}
\overbrace{0\ldots0}^{\binom{n-2}{k}} & \overbrace{1\ldots1}^{\binom{n-2}{k-1}}\\
\boxed{B_k^{n-2}} & \boxed{B_{k-1}^{n-2}}
\end{array}\right\},
$$

подставив эту формулу в (54) получим

$$
\overbrace{}^{\binom{n-2}{k}}\ \overbrace{}^{\binom{n-2}{k-1}}\ \overbrace{}^{\binom{n-2}{k-1}}
$$

$$
= \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \left\{ \begin{array}{llll}
0 & 000 & 000000 & 11\,11\,1\,1111\,1 \\
0 & 000 & 1\,111\,11 & 000000111\,1 \\
0 & 111 & 0001\,11 & 0001\,1\,1000\,1 \\
1 & 01\,1 & 01\,1001 & 01\,100\,1001\,0 \\
1 & 10\,1 & 10\,1010 & 10\,101\,0010\,0 \\
1 & 11\,0 & 11\,0100 & 11\,010\,0100\,0
\end{array} \right. \right\}.
$$

В этом примере, в отличие от (59), векторы расположены в лексикографическом порядке.

5.6. Алгоритм перехода от T_k^n к B_k^n. Чтобы построить B_k^n нужно по треугольнику найти множество T_k^n и по формуле (22) перейти к соответствующим двоичным кодам.

Пример. Построить B_2^3 и B_3^4.
Из треугольника в п. 2.3. находим $T_2^3 = \{3, 5, 6\}$, $T_3^4 = \{7, 11, 13, 14\}$. Легко видеть, что

$$
B_2^3 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 3 & 5 & 6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right\} \end{array} \begin{array}{l} \\ 2^2 \\ 2^1 \\ 2^0 \end{array}, \qquad
B_3^4 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 7 & 11 & 13 & 14 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \left\{ \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right\} \end{array} \begin{array}{l} \\ 2^3 \\ 2^2 \\ 2^1 \\ 2^0 \end{array}
$$

Если в T_k^n числа возрастают, то в B_k^n они будут в лексикографическом порядке.

6. Множества размещений, перестановок и сочетаний

6.1. Размещения. Пусть S_n – множество всех подстановок степени n: $\pi = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ \pi(1) & \cdots & \pi(n) \end{pmatrix}$, т.е. – всех взаимно однозначных отображений $N_n = \{1, \dots, n\}$ на себя.

$\hat{\mathrm{A}}_k^n (\mathrm{A}_k^n)$ – множество (число) всех вариантов размещений n элементов из $\mathrm{A}_n = \{a_1, \dots, a_n\}$ по k местам (без повторений):

$$
\hat{\mathrm{A}}_k^n = \{(a_{\pi(1)}, \dots, a_{\pi(k)}) : a_{\pi(i)} \in A_n,\ \pi \in S_n\},\ k = \overline{1,n} \qquad (62)
$$

$$
\mathrm{A}_k^n = \left| \hat{\mathrm{A}}_k^n \right|
$$

Например, пусть $n = 5$, $k = 3$, $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$,

тогда $(a_{\pi(1)}, a_{\pi(2)}, a_{\pi(3)}) = (a_2, a_1, a_4) \in \hat{\mathrm{A}}_3^5$. Заметим, что подстановке $\pi^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ соответствует то же размещение.

С другой стороны $\hat{\mathrm{A}}_k^n$ можно представить и так:

$$
\hat{\mathrm{A}}_k^n = \{(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots a_{i_k}) : a_{i_1} \in \mathrm{A}_n, a_{i_2} \in \mathrm{A}_n \setminus \{a_{i_1}\}, \dots, a_{i_k} \in \mathrm{A}_n \setminus \{a_{i_1}, \dots, a_{i_{k-1}}\}\}
$$

отсюда

$$\hat{\mathrm{A}}_k^n = \mathrm{A}_n \times \left(\mathrm{A}_n \setminus \{a_{i_1}\}\right) \times \ldots \times \left(\mathrm{A}_n \setminus \{a_{i_1}, \ldots, a_{i_{n-1}}\}\right)$$

и, согласно правилам произведения (8) и разности (7).

$$\mathrm{A}_k^n = |\mathrm{A}_n| \cdot \left|\mathrm{A}_n \setminus \{a_{i_1}\}\right| \cdot \ldots \cdot \left|\mathrm{A}_n \setminus \{a_{i_1}, \ldots, a_{i_{k-1}}\}\right| = n(n-1)\ldots(n-k+1)$$

отсюда

$$\mathrm{A}_k^n = \frac{n!}{(n-k)!} \tag{63}$$

6.2. Перестановки. Пусть $\hat{P}_n$ (P_n) – множество (число) всех возможных перестановок элементов множества $\mathrm{A}_n = \{a_1, \ldots, a_n\}$:

$$\hat{P}_n = \left\{\left(a_{\pi(1)}, \ldots, a_{\pi(n)}\right) : a_{\pi(i)} \in \mathrm{A}_n,\ \pi \in S_n\right\}.$$

Очевидно

$$\hat{P}_n \overset{(62)}{=} \hat{\mathrm{A}}_n^n, \qquad \hat{P}_n \sim S_n, \tag{64}$$

поэтому, перейдя к мощностям, ввиду (63):

$$\mathrm{P}_n = n! \tag{65}$$

6.3. Сочетания. Пусть $\hat{S}_k^n$ – множество всех k-сочетаний из элементов множества $\mathrm{A}_n = \{a_1, \ldots, a_n\}$:

$$\hat{S}_k^n = \left\{\left(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}\right) : a_{ir} \in \mathrm{A}_n,\ r = \overline{1,k},\ 1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n\right\},\ k = \overline{0,n}$$

$$\hat{S}_k^n = \varnothing,\ \mathrm{k} \notin \{0, 1, \ldots, \mathrm{n}\}$$

Легко видеть, что

$$\hat{S}_k^n \sim S_k^n \to \left|\hat{S}_k^n\right| = \binom{n}{k}$$

Здесь мы считаем, что

$$\left|\hat{S}_0^n\right| = 1$$

Пусть $\hat{S}_{kp}^n$ – p-тое сочетание из множества $\hat{S}_k^n$, упорядоченного в лексикографическом порядке:

$$\hat{S}_{kp}^n = \left(a_{p_1}, \ldots, a_{p_k}\right) \tag{66}$$

тогда

$$\hat{S}_k^n = \left\{\hat{S}_{k1}^n, \ldots, \hat{S}_{k,\binom{n}{k}}^n\right\} = \left\{\hat{S}_{kp}^n\right\}_{p=1}^{\binom{n}{k}} = \bigcup_{p=1}^{\binom{n}{k}} \hat{S}_{kp}^n \tag{67}$$

6.4. Формула, связывающая множества $\hat{\mathrm{A}}_k^n$, $\hat{P}_k$ и $\hat{S}_k^n$. Пусть J_{kp}^n – множество индексов элементов в сочетании $\hat{S}_{kp}^n$:

$$J_{kp}^n = \{p_1, \ldots, p_k\},$$

τ_p – p-тое взаимно однозначное отображение J_{kp}^n на $N_k = \{1, \ldots, k\}$:

$$\tau_p = \begin{pmatrix} p_1 \dots p_k \\ 1 \dots k \end{pmatrix} \to \tau_p^{-1} = \begin{pmatrix} 1 \dots k \\ p_1 \dots p_k \end{pmatrix}.$$

σ – сопряженная с π (посредством τ_p) подстановка:

$$\sigma = \tau_p^{-1}\pi\tau_p, \quad \sigma = \begin{pmatrix} p_1 & \cdots & p_k \\ \sigma(p_1) & \dots & \sigma(p_k) \end{pmatrix}, \qquad \sigma : J_{kp}^n \to J_{kp}^n ,$$

$\left(\hat{S}_{kp}^n, \pi\right)$ – перестановка сочетания $\hat{S}_{kp}^n$ посредством постановки $\pi \in S_n$:

$$\left(\hat{S}_{kp}^n, \pi\right) \overset{(66)}{=} \left(a_{p_1}, \quad \dots, \quad a_{p_k}, \ \pi \right) = \left(a_{\sigma(p_1)}, \dots, a_{\sigma(p_n)}\right) \tag{68}$$

$\hat{A}_{kp}^n$ – множество всех размещений, полученных перестановками сочетания S_{kp}^n:

$$\hat{A}_{kp}^n = \left\{\left(a_{\tau_p^{-1}\pi\tau_p(p_1)}, \dots, a_{\tau_p^{-1}\pi\tau_p(p_k)} \right) : \pi \in S_k \right\} \tag{69}$$

Очевидно

$$\hat{A}_k^n = \bigcup_{p=1}^{\binom{n}{k}} \hat{A}_{kp}^n \tag{70}$$

Легко видеть, что

$$\hat{S}_{kp}^n \times S_k = \left\{\left(\hat{S}_{kp}^n, \pi\right) : \pi \in S_k\right\} \overset{(68)}{=} \left\{\left(a_{\tau_p^{-1}\pi\tau_p(p_1)}, \dots, a_{\tau_p^{-1}\pi\tau_p(p_k)}\right) : \pi \in S_k\right\} \overset{(68)}{=} \hat{A}_{kp}^n \tag{71}$$

и

$$\hat{S}_{kp}^n \times S_k \overset{(67)}{=} \left(\bigcup_{p=1}^{\binom{n}{k}} \hat{S}_{kp}^n \right) \times S_k \overset{(5)}{=} \bigcup_{p=1}^{\binom{n}{k}} \left(\hat{S}_{kp}^n \times S_k\right) \overset{(71)}{=} \bigcup_{p=1}^{\binom{n}{k}} \hat{A}_{kp}^n ,$$

поэтому, ввиду (70)

$$\hat{A}_k^n = \hat{S}_k^n \times S_k \tag{72}$$

отсюда, переходя к мощностям и ввиду (63)-(65):

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} .$$

7. Заключение

Развитие теории комбинаторных множеств поможет: глубже понять природу комбинаторных чисел (ведь до сих пор нет определения комбинаторных чисел!); дать их классификацию; построить **единую теорию** для каждого класса комбинаторных чисел; открыть новые методы решения задач перечисления.

Литература

1. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. Мир. М. 1970. Стр 71.
2. Айгнер М. Комбинаторная теория. Мир. М. 1982.

3. Андерсон Дж. Дискретная математика и комбинаторика. М. С.-П. К. 2003.
4. Грехем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. Мир. М. 1998.
5. Оганян Р.А. Взвешивание сочетания.// Труды II Международной конференции «Дискретные модели в теории управляющих систем». Диалог – МГУ. М. 1997.
6. Оганян Р.А. Сочетания из n элементов по k с весом p.// Комплексный анализ и математическая физика. МГОУ. М. 2003.

А.Ф. САЛИМОВА

О МЕТОДИЧЕСКИХ ПОДХОДАХ К ПРЕПОДАВАНИЮ В ТЕХНИЧЕСКИХ ВУЗАХ РАЗДЕЛОВ «ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ», «КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ»

Мир стремительно меняется. Чему и как учиться и соответственно учить в условиях, когда наша деловая, и не только деловая, жизнь погрузилась во всемирную информационную паутину, и какова при этом значимость фундаментальных наук? Эти вопросы побуждают к поиску и активизации новых возможностей учебного процесса. На кафедре высшей математики Военно-воздушной инженерной академии им. проф. Н.Е.Жуковского была предпринята энергичная попытка модернизации курса математического анализа. Особенно трудно поддавалось реформированию интегральное исчисление. Интеграл – одно из основных понятий современной математики. Выбор варианта определения диктует логику и величину соответствующей главы курса. Ситуация, вынуждающая преподавателя вводить в действие самый краткий вариант теории с определения интеграла как приращения на отрезке интегрирования первообразной подынтегральной функции (формула Ньютона-Лейбница), воспринимается как следствие крайнего дефицита времени. Указанная методическая версия отличается краткостью и простотой. Существует и иной методический вариант интегрального исчисления. Интеграл при этом формально определяется как предел последовательности интегральных сумм. Объясняется это тем, что, во-первых, именно так определяемое понятие определённого интеграла служит математической моделью соответствующих понятий физики: работы, пути, массы тела, заряда конденсатора и т.д., во-вторых, теория определённого интеграла в курсе высшей математики имеет продолжение в виде теории кратных интегралов.

Предлагается унифицировать понятие интеграла. Определённый, двойной и тройной интегралы по существу представляют собой один и тот же интеграл, т.к. каждый определяется как предел последовательности соответствующих интегральных сумм. Различаются они числом измерений пространств, содержащих области интегрирования, и соответственно числом аргументов подынтегральных функций. Перенос теории определённого интеграла на двойной, а затем и тройной, вызывает значительные методические трудности, т.к. для такого переноса требуется полноценный математический аппарат, опирающийся лишь на те элементы теории пределов, которые предусматриваются программой высшего технического учебного заведения по дисциплине «Математический анализ». Понятие интеграла переносится с отрезка сначала на прямоугольную, а затем на произвольную ограниченную область. В дальнейшем перенос теории двойного интеграла на тройной происходит существенно проще, т.к. представляет собой преобразование теории двойного интеграла для случая трёхмерного пространства. Результатом должна быть единая полноценная теория интегралов, выстраиваемая для интегралов по так называемым стандартным областям, этим обеспечивается её краткость, логическая строгость и общность, достаточная для вузов, в которых математика не является профилирующей дисциплиной.

С.А. САМСОНОВА

МЕЖПРЕДМЕТНОСТЬ КУРСА СТОХАСТИКИ В УСЛОВИЯХ ИНФОРМАТИЗАЦИИ ОБРАЗОВАНИЯ

На современном этапе развития научного знания особую актуальность приобрел вопрос о взаимодействии наук, который ставится как коренное, качественное изменение в самой структуре современного теоретического знания, зарождение интегративного подхода в науке в целом. Требование формирования самостоятельно мыслящего, творческого профессионала в процессе обучения в высшей школе не будет выполнено, если у дипломированного специалиста отсутствует способность применять полученные знания в комплексе, которая вырабатывается в процессе интеграции изучаемых студентами дисциплин.

Интеграция дисциплин на основе системного подхода к обучению, междисциплинарного синтеза содействует формированию целостных профессиональных знаний студентов, укреплению профессиональной информационной емкости. Интеграция происходит в разных формах, в частности, в виде взаимопроникновения, взаимосвязи, единства научных идей, принципов, понятий, законов и теорий, входящих в состав той или иной дисциплины. Теоретические основы и способы такой интеграции изучаются в педагогике в рамках проблемы *межпредметных связей* (*МПС*).

Исходя из вышесказанного, возникла необходимость внесения изменений в сложившуюся систему преподавания дисциплин. Основную роль здесь должны играть интеграционные процессы в форме дисциплинарных и междисциплинарных курсов, содержащих наиболее фундаментальные знания, являющиеся базой для формирования общей и профессиональной культуры, быстрой адаптации к профессиональной деятельности. Следовательно, речь идет о таких знаниях, которые, во-первых, способны формировать широкий, целостный взгляд на современный мир и место человека в этом мире; во-вторых, позволяют преодолеть предметную разобщенность и изолированность.

В отечественной и мировой педагогике имеется достаточно богатый опыт исследования вопросов интеграции в обучении. Данной проблемой педагогическая наука занималась с начала становления образовательной системы. В ряде работ ученых педагогов, психологов, методистов Н.Ф. Борисенко, И.Д. Зверева, Н.А. Лошкаревой, В.Н. Максимовой, В.М. Монахова, М.Н. Скаткина, Н.В. Федоровой, О.В. Федоровой и других по исследованию междисциплинарных связей установлено, что в результате отражения в обучении процессов дифференциации и интеграции наук *принцип межпредметности* стал одним из ведущих диалектико-методологических принципов, обеспечивающим системность в организации учебно-воспитательного процесса в предметной системе обучения, взаимодействие разных видов дидактических связей между учебными темами, курсами, предметами, их циклами.

Вопросам межпредметных связей в последнее время уделяется все большее внимание ученых. По мнению А.В. Усовой, это обусловлено двумя факторами: с одной стороны, явным повышением научного уровня содержания обучения, увеличением объема информации, подлежащей усвоению в период обучения, с другой - повышением требований к роли школы в воспитании обучаемых и их подготовке к жизни [3, 13]. Она отмечает, что в современных условиях возникает необходимость в формировании у обучаемых не частных, а обобщенных умений, обладающих свойством широкого переноса. Такие умения могут свободно использоваться обучаемыми при изучении различных предметов, в практической и профессиональной деятельности. Обобщенные умения должны формироваться в условиях осуществления межпредметных связей. А.В. Усова определяет межпредметные связи как отражение связей между науками, в содержании учебного материала, в его структуре и методах преподавания [4, с. 115].

И.Д. Зверев под межпредметными связями понимает взаимную согласованность содержания образования по различным учебным предметам, построение и отбор материала, которые определяются как общими целями образования, так и оптимальным учетом учебно-воспитательных задач, обусловленных спецификой каждого учебного предмета [2]. В нашем исследовании такое понимание межпредметных связей мы принимаем за основу при проектировании курса стохастики.

Однако, согласно педагогическим исследованиям В.Е. Медведева, межпредметные связи в вузе традиционно продолжают устанавливаться в основном на эмпирическом уровне. Учебный материал одного предмета используется преподавателем другого предмета только в качестве иллюстративного, прикладного, в виде исторической справки и т.п. При таком подходе к обучению студентов их знания и умения в будущей профессиональной деятельности будут реализовываться как чисто предметные. Между тем, одной из основных тенденций современного этапа научно-технического прогресса является интеграция естественнонаучного, математического и технического знания.

В нашем конкретном случае речь идет о совершенствовании стохастической подготовки студентов университета к будущей профессиональной деятельности в условиях информатизации общества путем усиления межпредметных связей стохастики с другими дисциплинами.

Применение межпредметных связей в процессе обучения стохастике в университете дает возможность достигнуть:

формирования целостного научного мировоззрения;

обеспечения интеграции смежных учебных дисциплин, и, прежде всего специальных и общепрофессиональных курсов, в целях дальнейшей фундаментализации образования;

формирования самостоятельного научного и профессионального мышления;

выработки у студентов учебных, исследовательских, коммуникативных, гностических, конструктивных и других умений.

Говоря о стохастической подготовке студентов, отметим, что в теоретическом плане межпредметные связи заложены уже в самой научной дисциплине: стохастика, имея собственный предмет изучения, в то же время опирается на данные смежных наук. В педагогическом плане эти связи проявляются в том, что данные смежных наук являются составной частью системы знаний и умений, необходимых студентам для решения различных задач. В соответствии с системным подходом весь процесс стохастической подготовки следует рассматривать как некую систему, в которой происходят, с одной стороны, дифференциация содержания обучения в рамках отдельного курса, а с другой – интеграция содержания обучения в рамках всей системы.

В процессе изучения стохастики необходимо дать студентам не только сведения о присущих ей закономерностях, но и указать на всевозможные связи ее с другими областями. К сожалению, в настоящее время при изложении предмета мы часто боимся потерять время на общие рассуждения, на попытку выявить истоки самой дисциплины и на связи, имеющиеся между стохастикой и задачами практики. При изучении курса теории вероятностей и математической статистики студенты зачастую не получают представления об исходных задачах, приведших к ее формированию. Чисто формальное изложение математической статистики, без установления связей с реальными задачами, с обработкой данных наблюдений, с проверкой соответствия математической модели реальным наблюдениям - такие вопросы постоянно возникают во всех естественных, инженерных и социальных науках и отвечать на них нужно математикам [1].

Межпредметные связи, реализующиеся в лекционных курсах, на семинарских, практических и лабораторных занятиях, проявляются при выполнении студентами учебных действий, направленных на овладение соответствующими знаниями. Их применение обогащает приемы, методы и формы организации обучения в процессе обучения студентов вуза, позволяет обеспечить интеграцию смежных учебных дисциплин, что способствует выработке у студентов учебных, исследовательских, конструктивных, гностических, коммуникативных и других умений.

Применение методов теории вероятностей и математической статистики способствует закреплению знаний, полученных студентами в школьном и вузовском курсах математического анализа, алгебры, геометрии и т.п. Так, решая задачи, связанные с вычислением интегральной и дифференциальной функций распределения, студенты переходят к новому осмыслению и применению имеющихся знаний, закрепляют умения и навыки работы с интегралами. Это позволяет продемонстрировать студентам межпредметные связи курсов теории вероятностей и математического анализа.

Большое значение для формирования понятия и свойств плотности распределения и функции распределения имеет их геометрическая интерпретация. Геометрический материал обеспечивает, главным образом, развивающую функцию обучения, умственную активность и самостоятельность студентов - будущих специалистов.

Рассматривая законы распределений (биномиального, пуассоновского, равномерного и нормального), важно показать студентам смысл вводимых понятий на конкретных примерах: с равномерным распределением мы встречаемся в измерительной практике при округлении отсчетов измерительных приборов до целых делений шкал; с показательным (экспоненциальным) - в теории массового обслуживания, физике, биологии и др.

При изучении системы случайных величин, функции распределения, плотности распределения и всех их свойств следует использовать геометрическую интерпретацию. В частности, систему двух случайных величин (X,Y) можно рассматривать, как случайную точку на плоскости с координатами X и Y или как случайный вектор на плоскости со случайными составляющими X и Y. Аналогично, систему n случайных величин (X, Y,..., Z) как случайную точку в n - мерном пространстве или как n - мерный случайный вектор, что демонстрирует связь между курсами геометрии и теории вероятностей.

Стохастический характер окружающих явлений не может быть раскрыт без понимания степени изменчивости. Отсюда возникает необходимость в количественной оценке разброса статистических данных, которая способствует более глубокому пониманию сущности явлений и процессов, дает возможность сравнивать статистические совокупности по степени их вариации.

Прежде чем ввести понятие корреляционной зависимости, целесообразно привести примеры наиболее простого вида связи между величинами - функциональной зависимости:

$S = \pi \cdot R^2$ - зависимость между площадью и радиусом круга;

$V = \pi \cdot R^2 \cdot H$ - зависимость между объемом цилиндра, с одной стороны, и радиусом основания и высотой цилиндра, с другой стороны.

Использование метода наибольшего правдоподобия для точечной оценки неизвестных параметров распределения требует от студентов знаний свойств логарифмической функции, умений находить производные первого и второго порядков, точки максимума. Применение метода наименьших квадратов, позволяющего находить функциональную зависимость между переменными, требует от студентов умений находить частные производные, решать системы уравнений и др.

Профессионально-значимыми для будущих специалистов, на наш взгляд, являются умения выдвигать статистические гипотезы и проверять их, используя различные критерии. Эти умения, с одной стороны, необходимы им для обработки результатов педагогических экспериментов. С другой стороны, решение подобных задач требует от студентов умений производить сложные арифметические вычисления, пользоваться таблицами, сравнивать полученные значения. Все перечисленные умения необходимы будущему специалисту.

Поскольку наши исследования связаны с внедрением компьютерных технологий в стохастику, то считаем необходимым вернуться к принципу информатизации обучения, предполагающему использование современных информационных технологий в обучении. Компьютер на разных этапах обучения стохастике способен осуществлять функции контроля, тренировки, анализа, синтеза и т.д. В частности, он может быть использован: для обеспечения доступа к информации для генерации случайных данных; для хранения, представления и обработки статистической информации; при построении графов, диаграмм, гистограмм, графиков функции распределения и функции плотности; при вычислении значений функции Лапласа и т. д. К составлению программ целесообразно привлекать самих студентов, что позволит им приобрести навыки, представляющие практическую ценность для их будущей работы.

Будущий специалист должен быть обучен работе со специальными пакетами, которые могут понадобиться им как при изучении тех или иных вузовских курсов, так и в будущей профессиональной деятельности. Например, специальные инструментальные программные средства, предназначенные, для проведения математических расчётов типа решения систем уравнений, интегрирования, статистической обработки информации и т.п. (MathCad, Reduce, Maple, Derive и т.д.).

Требованием, которое важно соблюдать при осуществлении межпредметных связей в информационной подготовке студентов является связь теории с практикой. Другим важным требованием является строгая профессиональная направленность курса стохастики с учетом профиля факультета.

Исходя из вышесказанного, мы в своем исследовании выделяем следующие *способы реализации межпредметных связей* в процессе стохастической подготовки студентов в условиях информатизации образования:

через опору на знания и умения решения учебных задач, полученные в процессе изучения других предметов;

через решение комплексных межпредметных задач, требующих применения знаний разных образовательных циклов;

через раскрытие структурных связей между технологиями решения стохастических задач с помощью компьютера и методами решения задач, применяемыми при изучении других предметов без использования ЭВМ;

применение компьютера как средства вычисления;

применение компьютера как объекта изучения: использование в обучении программирования;

использование в обучении пакетов общего и специального назначения: использование компьютерных обучающих программ.

Межпредметность стохастики на современном этапе выступает как важный компонент формирования современной научной картины мира, как дисциплина, обогатившая науку новыми методами познания. Использование компьютера при изучении стохастики, а также освоение компьютерных технологий в органической взаимосвязи с другими научными областями способствует появлению нового знания, возможности синтеза, интеграции предметов различных областей знаний, формированию гармоничного человека, обладающего высокой стохастической и информационной культурой.

Литература

Гнеденко Б.В. Об образовании преподавателя математики в средней школе // Математика в школе, 1989. - № 3. – С. 19-22.

Зверев И.Д. Взаимная связь учебных предметов. - М.: Педагогика, 1977.-64с.

Усова А.В. Роль межпредметных связей в развитии познавательных способностей у учащихся. - В кн.: Межпредметные связи в преподавании основ наук в средней школе. - Челябинск: ЧГПИ, 1972. -с. 10-20.

Усова А.В. Формирование у школьников научных понятий в процессе обучения. - М.: Педагогика, 1986. - 176 с.

Н.А.СЕМЕНОВ

ОПТИМИЗАЦИЯ АЛГОРИТМА ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ. ПЕРВЫЙ ЭТАП

Численные методы интегрирования универсальны, эффективны и позволяют получить результат быстро и с высокой точностью. Оценка точности результата интегрирования может производиться двояким образом, априорно либо апостериорно. Априорная оценка точности интегрирования требует довольно сложного анализа для каждого конкретного случая и обычно дает весьма завышенные результаты; в ряде случаев она невыполнима.

Значительно эффективнее апостериорное определение погрешности, проводимое в процессе вычисления интеграла. Оно делается одинаково для любого интеграла и включается в алгоритм интегрирования. Процесс интегрирования автоматически прерывается при достижении заданной точности результата.

Наилучшим способом такой оценки является применение критерия Рунге [1]-[3]. Прогноз точности расчета основан на сравнении интегральных сумм при разном числе N разбиений интервала интегрирования (a,b). Желательно при этом, чтобы этот контроль не приводил к излишней затрате времени счета, т.е. все сделанные расчеты значений подынтегральной функции использовались в конечном результате.

Такой оптимальный алгоритм с автоматическим контролем точности результата и 100% использованием всех сделанных расчетов реализуется при последовательным удвоением числа делений, так как в этом случае при каждой последующей итерации с N делениями интервала интегрирования (a,b) все четные узлы этой дискретизации совпадают с такими же узлами предшествующей с числом делений N/2, для которых значения подынтег-ральной функции F(x) уже рассчитаны. Требуется вычислить ее значения только в N/2 новых точках. Этот алгоритм позволяет проводить интегрирование в минимальное время. Очевидно, что такой алгоритм неприменим к методу Гаусса, но вполне реализуем в методах трапеций и Симпсона при равномерном расположении узлов. По-видимому, применение оптимального алгоритма интегрирования методами трапеций и Симпсона в большинстве случаев приводит к более быстрому процессу интегрирования, чем метод Гаусса (не говоря уже сравнительной сложности алгоритма последнего). Каждое новое поколение компьютеров с большей разрядностью и скоростью сужает область рационального применения метода Гаусса.

Процесс интегрирования с последовательным удвоением числа N логично начать с N=2, что обеспечивает единство алгоритма для всех итераций. Чтобы избежать досрочного выхода из процесса при некоторых периодических подынтегральных функциях следует запретить его окончание при S=0. Критерий Рунге R_N, его относительное значение DR_N и уточненное значение интеграла I_N для N делений

$$R_N = (S_N - S_{N/2}) / L ; DR_N = R_N / S_N ; I_N = S_N + R_N , \qquad (1.1)$$

где S_N - интегральная сумма, которая включает сумму всех нечетных ординат V и модифицированную сумму четных W. Если задана относительная погрешность метода Del. то при выполнении условия $|DR_N|<Del$ процесс завершается.

При N=2_ W=[F(a)+F(b)]/2, а V=F(x_1); x_1=(a+b)/2.

В последующих итерациях $W_N=W_{N/2}+V_{N/2}$, а вновь вычисляются и суммируются только нечетные ординаты $V_N=F(x_1)+F(x_3)+...+F(x_{N-1})$. Для метода трапеций $S_N=H(W_N+V_N)$, L = 3. Для метода Симпсона $S_N=2H(W_N+2V_N)/3$, L=15. Шаг дискретизации $H=|b-a|/N$.

Нами замечено, что общепринятое определение критерия Рунге DR_N- приводит в большинстве случаев к запоздалому завершению процесса, объем и время вычислений превышают необходимые; поэтому точность результата может получиться значительно выше заданной, а иногда, наоборот, ниже

Поэтому следует сделать еще один логически обоснованный шаг и ввести улучшенный критерий Рунге DS, основанный на сравнении уточненных значений интеграла в последовательных итерациях I_N и $I_{N/2}$:

$$DS_N = (I_N - I_{N/2}) / (L\, I_N). \qquad (1.2)$$

Наши эксперименты показали, что завершение интегрирования по критерию $|DS_N| <$ Del более точно определяет нужный момент. Алгоритм численного интегрирования реализован в виде учебной демонстрационной программы на языке Power Basic, позволяющей наблюдать процесс интегрирования методами трапеций и Симпсона (Приложение 1.1). Её можно также оформить в виде подпрограммы – процедуры.

Подробный сравнительный анализ возможных вариантов интегрирования проделан с помощью специальной экспертной программы , выдающей итоговые оценки для каждого случая (Приложение 1.2). Если активизировать несколько строк, начинающихся оператором REM (т,е, снять эту ремарку), то можно наблюдать поэтапно за ходом интегрирования и объяснить некоторые неожиданные результаты.

Было протестировано 15 вариантов интегралов с различными подынтегральными выражениями и пределами интегрирования (строки J=1...15 листинга в приложении 2). Результаты сравнивались с эталоном - точным значением этих интегралов. Это позволило оценить реальное качество двух вышеуказанных критериев при интегрировании методами трапеций и Симпсона. Во всех случаях задавалась относительная погрешность $Del=10^{-12}$. Хотя для ее достижения достаточно проводить вычисления с двойной точностью (Double Precision), однако тогда из-за погрешностей округления порядка 10^{-15} не полностью виден эффект излишнего повышения точности результата при запаздывании выхода из цикла интегрирования. Поэтому применялась расширенная точность (Extended Precision), для которой погрешности округления в 10^3 раз меньше.

Перейдем к выводам из проведенного эксперимента. Заметим, что когда мы говорим о порядке численных величин, имеется в виду двоичная система счисления, естественная для предложенного алгоритма.

1. При одинаковой заданной погрешности программа завершала счет при существенно разном числе необходимых узлов N в диапазоне от N=4 (вариант J=7) до $N=2^{26}=6.71\ 10^7$ (вариант J=13). Время счета пропорционально величине N. Это показывает, что априорное задание числа узлов "на глазок" совершенно неправомерно.

2. Показано преимущество метода Симпсона при использовании критерия завершения процесса **DS**. В 13 случаях из 15 он дал наилучший прогноз оптимального значения N: заданная точность достигается без избыточности. В

остальных двух случаях этот критерий потребовал лишь незначительного увеличения числа узлов по сравнению с альтернативными способами: для вар.2 N=128 вместо 64 при критерии DR и методе Симпсона; для вар.15 N=128 вместо 32 при критерии DR и методе трапеций.

3. Подтверждено известное свойство, что интегрирование периодических функций (вар.15) проводится быстрее методом трапеций (N=32); в этом случае лучший прогноз дает критерий DR. Метод Симпсона с критерием DS увеличивает нужное число узлов до 128.

4. В 5 вариантах из 15 при методе Симпсона критерии DR и DS дали одинаковые прогнозы необходимого числа узлов; в остальных вариантах критерий DR потребовал 4-х кратного увеличения N и привел к увеличению точности результата на 4...5 порядков выше заданной. Если обратиться к неоптимальному почти во всех случаях методу трапеций, то критерий DR потребовал чаще всего проведения от 8 до 11 лишних по сравнению с DS циклов интегрирования, т.е. увеличения числа узлов в 256...2048 раз и такого же увеличения затраты времени счета; при этом точность результатов получается на 5...6 порядков большей, чем требуется.

5. В большинстве случаев критерий DS обеспечивает заданную точность зезультатов с некоторым превышением. Однако в трех вариантах погрешность оказалась большей заданной, но не более, чем в 7 раз. . Заметим, что в этих случаях выход из цикла интегрирования по критериям DS и DR произошел одновременно и численное интегрирование происходило с трудом, потребовало для завершения от 2^{15} до 2^{24} узлов. Во всех остальных случаях необходимое число узлов не превышало $2^9 = 512$, а заданная точность была обеспечена.

Таким образом, **введенный нами критерий DS для управления процессом численного интегрирования получил экспериментальное подтверждение своей эффективности**. Он точнее, чем обычный критерий Рунге, определяет момент выхода из цикла интегрирования, что сокращает время счета до 8 раз при методе Симпсона и до 2000 раз при методе трапеций. Полагаем, что возможности оптимизации на этом не исчерпаны и исследование полезно продолжить.

Литература

Б.П.Демидович и И.А.Марон. Основы вычислительной математики. М.: Наука, 1970.

2. Н.С.Бахвалов. Численные методы -М.: Наука, 1973.

3. А.Е.Мудров. Численные методы для ПЭВМ на языках Бейсик, Фортран, Паскаль. -Томск: МП "Раско", 1991.

Статья поступила в редакцию 15.09.04

Приложение 1.1

УЧЕБНАЯ ДЕМОНСТРАЦИОННАЯ ПРОГРАММА ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

```
CLS: DEFDBL A-Z: DEFINT K-N : DEL=1E-12: A=0: B=1: T0=0
'DEF FNU(X)=2*SQR(X)/(1+X): IE=4-4*ATN(1)
'DEF FNU(X)=(SQR(X)-1/SQR(X))/(1+X): IE=2-4*ATN(1)
```

```
DEF FNU(X)=1/(2+X)^2: IE=1/6
FOR M=1 TO 2
? tab(20) "METHOD OF ";: IF M=1 THEN ? "TRAPEZIUM" ELSE ? "SIMPSON"
? "N" tab(10) "LN" tab(19) "S" tab(38) "I" tab(50) "DR" tab(60) "DS" tab(70) "DI"
MTIMER: N=1: LN=0: D=B-A: V=0: S=0.0123456789: I=S: W=(FNU(A)+FNU(B))/2
DO
N=2*N: Incr LN: Incr W,V: H=D/N: V=0: SP=S: IP=I
FOR K=1 TO N-1 STEP 2: X=A+K*H : Incr V,FNU(X): NEXT K
IF M=1 THEN S=H*(W+V) :L=3 ELSE S=2*H*(W+2*V)/3: L=15
R=(S-SP)/L: I=S+R : DR=R/S: DS=(I-IP)/(L*I): DI=(I-IE)/IE
? USING "######## ## ##.############### ##.##############";_
N LN S I;
? USING " ##.#^^^^"; DR DS DI
LOOP WHILE ABS(DS)>DEL
T=MTIMER/1000
? USING "T= #####.## ms I etalon = ##.##############"; T IE
IF M=1 THEN ?: DO: LOOP UNTIL INSTAT
NEXT M
END
```

Приложение 1.2

ЭКСПЕРТНАЯ ПРОГРАММА ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

```
CLS: DEFEXT A-I,O-Z: DEFINT J,L,M : DEFQUD K,N
DEL=1E-12 : PI=4*ATN(1): A=0: B=1: EP=1.e-99
'J=1: DEF FNU(X)=1/SQR(1-X*X): B=1/2: IE=PI/6
'J=2: DEF FNU(X)=1/(1+X*X): IE=PI/4
'J=3: DEF FNU(X)=1/(1+2*X)^3: IE=2/9
'J=4: DEF FNU(X)=1/(2+X)^2: IE=1/6
'J=5: DEF FNU(X)=X*X/(2+X)^4: IE=(1/2-1/3-4/27)/3
J=6: DEF FNU(X)=2*SQR(X)/(1+X): IE=4-PI
'J=7: DEF FNU(X)=X^3*(2-X)^2: B=2: IE=16/15
'J=8: DEF FNU(X)=1/(1-X*X): B=1/2: IE=LOG(3)/2
'J=9: DEF FNU(X)=1/(1+X*X)^2 : IE=PI/8+1/4
'J=10: DEF FNU(X)=1/(1-X*X)^2: B=1/2: IE=LOG(3)/4+1/3
'J=11: DEF FNU(X)=1/(X*(1+X^3)): A=1: B=2: IE=LOG(16/9)/3
'J=12: DEF FNU(X)=X*SQR((1-X*X)^3) : IE=1/5
'J=13: DEF FNU(X)=X*SQR(1-X*X): IE=1/3
'J=14: DEF FNU(X)=X*X*SQR((1-X*X)^3) : IE=PI/32
'J=15: DEF FNU(X)=COS(2*SIN(X)-3*X)/PI: B=PI: IE=0.12894324947440205l
?:?"DL/DI.R & DL/DI.S=DEL/DI-отношение погрешности DEL к истинной при"
? "завершении интегрирования по критерию Рунге DR и новому критерию DS"
? "DR/DI & DS/DI - отношение критериев при завершении интегрирования по "
? "DR&DS"
? USING "DEL =##.^^^^"; DEL;: ? tab(50) "DEFEXT A-I,O-Z": ?
FOR M=1 TO 2: ? " VAR = " J tab(15) "METHOD OF ";
IF M=1 THEN ? "TRAPEZIUM"; ELSE ? "SIMPSON";
?TAB(39) "TRUE VALUE=";: ? USING "##.###############^^^^"; IE
'?"N" tab(10) "LN" tab(19) "S" tab(38) "I" tab(50) "DR" tab(60) "DS" tab(70) "DI"
MTIMER: N=1: LN=0: D=B-A: V=0: S=0.0123456789: I=S: W=(FNU(A)+FNU(B))/2 MS=0:
MR=0: MI=0: TS=0: TR=0
DO: N=2*N: Incr W,V: H=D/N: V=0: SP=S: IP=I: Incr LN
FOR K=1 TO N-1 STEP 2: X=A+K*H : Incr V,FNU(X): NEXT K
IF M=1 THEN S=H*(W+V) : L=3 ELSE S=2*H*(W+2*V)/3: L=15
```

```
R=(S-SP)/L: I=S+R : DR=R/S: DS=(I-IP)/(L*I): DI=(I-IE)/IE
ADR=Abs(DR): ADS=Abs(DS): ADI=Abs(DI) ADM=MAX(ADR,ADS,ADI)
        if ADI<ep then DI=ep: if ADS<ep then DS=ep
'? USING "######## ## ##.############### ##.################";_ N LN
S I;
' ? USING " ##.#^^^^"; DR DS DI
IF ADI<DEL AND MI=0 THEN: MI=1: NI=N: LI=LN: DLDI.I=DEL/DI
? "NI = "NI tab(19)"= 2 ^" LI " $$" tab(47): ? USING "II =##.################^^^^";I
END IF
IF ADS<DEL AND MS=0 THEN: MS=1: NS=N: LS=LN: DL.DI.S=DEL/DI DS.DI=DS/DI
TS=MTIMER*0.001+TR: ?"NS = "NS tab(19)"= 2 ^" LS " !!"tab(47)
? USING "IS =##.################^^^^";I : MTIMER
END IF
IF ADR<DEL AND MR=0 THEN: MR=1: NR=N: LR=LN: DLDI.R=DEL/DI DR.DI=DR/DI:
TR=MTIMER*0.001+TS: ? "NR = " NR tab(19)"= 2 ^" LR " &&"_ tab(47)
?USING "IR =##.################^^^^"; I : MTIMER
END IF
LOOP UNTIL ADM<DEL AND S><0
IF M=1 THEN LS.T=LS: LR.T=LR: LI.T=LI ELSE LS.S=LS: LR.S=LR: LI.S=LI
? "LOG2( NS/NI NR/NI NR/NS) | DS/DI DR/DI DEL/DI:S DEL/DI:R"
? USING " #######"; LS-LI LR-LI LR-LS;: ? " |";
? USING " ##.##^^^^"; DS.DI DR.DI DLDI.S DLDI.R;
IF M=1 THEN ?: rem DO: LOOP UNTIL INSTAT
?: NEXT M
LN.M=MIN(LS.T,LR.T,LS.S,LR.S): N.M=EXP2(LN.M)
?: ? "ANALYSIS: NM = N min = " N.M " = 2 ^" LN.M
? " LOG2(*/*) FOR TRAPEZIUM | LOG2(*/*) FOR SIMPSON"
? " NI/NM NS/NM NR/NM | NI/NM NS/NM NR/NM
? USING " ##### "; LI.T-LN.M LS.T-LN.M LR.T-LN.M; : ? " |" ;
? USING " ##### "; LI.S-LN.M        LS.S-LN.M LR.S-LN.M
END
```

Н.А.СЕМЕНОВ

ОПТИМИЗАЦИЯ АЛГОРИТМА ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ. ВТОРОЙ ЭТАП

В предыдущей статье [1] в качестве исходного пункта оптимизации выбран итерационный процесс с удвоением числа узлов интегрирования в каждом последующем цикле при апостериорном управлении завершением процесса интегрирования по критерию Рунге DR (1.1) при достижении заданной относительной точности DEL. Автором предложена двухступенчатая обработка результатов каждого цикла. Критерий Рунге R служит для уточнения величины интегральной суммы S (1.1), а новый критерий DS (1.2) - для суждения об окончании либо продолжении итерационного процесса.

С помощью экспертной программы проведено сравнение результатов вычисления 15 произвольных интегралов методами трапеций и Симпсона при $Del=10^{-12}$ с фиксацией необходимого числа узлов по критериям DR, DS и по истинной погрешности DI. Точное значение интеграла в экспертной прог-рамме известны. Наилучшие результаты показал критерий DS в методе Симпсона ("DS-Си"). Только в двух случаях лучший прогноз давал критерий DR. Метод "DS-Си" в обоих случаях завершал интегрирование всего при 128 узлах, на 1..2 цикла больше необходимого.

Обнаружено, что все интегралы можно разделить на две категории по скорости численного интегрирования, определяемой по числу необходимых циклов LN, числу узлов $N = 2^{LN}$ и времени процесса, пропорциональной N. "***Легкие***" требуют от 2 до 8 циклов (4..256 узлов). "***Тяжелые***" потребовали от 15 до 24 циклов (от 33 тысяч до 67 миллионов узлов). Для *легких* интегралов "DS-Си" в 5 случаях допускал один лишний цикл интегрирования (перебор точности), а критерий DR почти всегда 1..3 избыточный цикл при методе Симпсона и 11..13 таких циклов при методе трапеций. Для *тяжелых* интегралов оба критерия в 3/4 случаев разрешали недобор 1..2 циклов, т.е. завышение заданной погрешности.

Первой целью второго этапа исследования является преобразование критерия DS в методе Симпсона для лучшего прогноза момента завершения процесса. Логично, сохраняя структуру ф-лы (1.2), ввести в нее вместо классического коэффициента L=15 некоторую функцию CS, зависящую от числа пройденных циклов LN. Очевидно, что алгоритм численного интегрирования не должен требовать какого либо внешнего управления процессом на основе предварительного анализа. Нужно обходиться исходными данными и параметрами, определяемыми в процессе расчетов.

Второй целью является установление зависимости оптимальной функции CS также от требуемой точности Del; на первом этапе была принята $Del=10^{-12}$. Теперь выбираем диапазон $Del=10^{-6}..10^{-14}$; достижение еще большей точности обычно не требуется, а ее реализация на общедоступных языках программирования и персональных компьютерах проблематична.

Критерий для управления процессом интегрирования представим в виде

$$DS_N = (I_N - I_{N/2}) / (I_N\, CS(N,Del)). \qquad (2.1)$$

Новая экспертная программа определила нужные значения CS для точного завершения процесса интегрирования 15 ранее выбранных интегралов при $Del=10^{-JD}$, где JD = 6, 8, 10, 12, 14. Обращает внимание совпадение результатов (с точностью до 3..4 знаков) для различных интегралов. В то же время для всего массива данных (75 точек) разброс значителен. Обнаружено качественное различие в функциональной зависимости CS от аргументов DEL и N для *легких* и *тяжелых* интегралов. Для *легких* функция CS зависит прежде всего от Del, а различие N обусловливает лишь некоторый разброс значений. У *тяжелых* интегралов ситуация интереснее. Конечно, с увеличением требуемой точности растет количество узлов, но оптимальное значение CS для данного интеграла почти одинаково, независимо от Del. Следовательно, каждому интегралу присуща определенная "***тяжесть***". Ее численный индикатор определён нами как нормированное число узлов CN при завершении интегрирования

$$CN = 14\ LN\ /\ JD \qquad (2.2)$$

Область CN=10...14 является нейтральной полосой, до которой *легкие* интегралы не доходят так как вычисляются раньше (CN<10), а *тяжелые* заведомо её переходят (CN>14) Нормированное число узлов CN является единственным аргументом функции CS для *тяжелых* интегралов.

Оптимальное значение функции CS определяется следующими условиями. Она должна обеспечивать правильный ответ на вопрос: "Продолжать ли процесс интегрирования?" в двух случаях. ДА - при завершении предпоследнего цикла; для этого |DSP|/Del>1, где DSP-значение DS на предпоследнем цикле. НЕТ - при завершении последнего цикла, когда достигнута нужная точность и |DS|/Del<1. Для этого значение DS и соответствующая величина CS должны удовлетворять обоим неравенствам одновременно. Экспертная программа позволила определить для всех вариантов два множества оптимальных точек CS, ограничивающих область существования оптимальной функции сверху (для DSP) и снизу (для DS).

Для построения функции применен графический компьютерный метод. Программа CURVE4S.BAS для нахождения CS(CN) в области *тяжелых* интегралов дана в приложении 2.1. Первоначально наносятся точки, ограничивающие фарватер оптимальной кривой сверху (зеленые) и снизу (желтые). В данном случае он оказался очень узким. Затем выбирается вид функции и подбираются ее параметры с многократным прогоном вариантов. В данном случае удалось выполнить оба граничных условия функцией

$$CS(CN) = 1 + 7.2\ EXP(-0.14(CN-14)). \qquad (2.3)$$

Значение CN=14 выбрано в данном случае в качестве граничного между *легкими* и *тяжелыми* интегралами.

Функция CS(JD) для *легких* интегралов определялась аналогичным способом. Пространство между верхней и нижней областями оказалось довольно широким, но при JD=8 произошла инверсия: "верхняя" точка находится на уровне 17.35, намного ниже "нижней" (45.14). Пришлось решать, какое из условий лучше нарушить. Мы предпочли возможный перебор, т.е. разрешение лишнего цикла для некоторых вариантов и, следовательно избыточную по сравнению с заданной точность результата; это относится к *легким* интегралам при JD=6..8. Кривая оптимальной функции для *легких* интегралов состоит по существу из трёх частей

$$CS(JD) = Min(\ 75,\ Max\ \{\ 17,\ 75\ [\ 1 - 0.025\ (11.3\text{-}JD)^3\ ]\ \}). \qquad (2.4)$$

Результат этого этапа исследования реализован в программе EXP76S.BAS оформленной в виде подпрограммы-функции и примера вызывающей программы (Приложение 2,2). Проверка работы программы проводилась для 15 вариантов интегралов при пяти значениях Del (JD=6..14). Два *легких* интеграла вели себя своеобразно, Один из них (вар.7), содержащий полином 5 степени, определяется абсолютно точно уже при LN=2. Критерий DS не успевал и во всех случаях останавливал работу после выполнения следующего цикла LN=3. Для сравнения скажем, что критерий Рунге DR доводит вычисление этого интеграла до LN=6..13. Другой интеграл (вар,15) для вычисления функции Бесселя содержит периодическую функцию; после LN=4 точность вычислений лавинообразно возрастает : в каждом из двух последующих циклов более, чем в 10^7 раз. Критерий DS в 4/5 случаев допустил один лишний цикл; критерий DR давал точный приказ для остановки.

В остальных 9 *легких* интегралов перебор точности на один цикл наблюдался только при JD=6 и 8 (8 случаев из 18). При JD=12 и 14 остановка работы происходила точно. Для четырех *тяжелых* интегралов критерий DS работал безукоризненно во всех случаях. Общее число циклов достигало 30. Критерий Рунге останавливает работу с этими интегралами досрочно, часто на 2 цикла, не доводя расчет до нужной точности.

Литература

1. Н.А.Семенов. Оптимизация алгоритма численного интегрирования. Первый этап. В этом номере Вестника.

Статья поступила в редакцию 25.12.04

Приложение 2.1

ГРАФИЧЕСКИЙ СПОСОБ НАХОЖДЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ CS(CN) ДЛЯ *ТЯЖЕЛЫХ* ИНТЕГРАЛОВ

```
'PROGRAM Curve from point Curve76.BAS 01.12.04
SCREEN 12:     DEFINT I-J: DIM P(9), R(9)
DATA 0.025, 3
DATA 62.70, 83.8, 61.82, 193, 61.82, 89.56, 58.32, 128.97, 58.32, 106.06
DATA 45.14, 71.66, 45.14, 17.35, 11.70, 69.55, 37.28, 121.97
VIEW (1,1)-(500,479),0: WINDOW (-1,130)-(10,-1)
LINE (0,125)-(0,0),14 : LINE (0,0)-(9,0),14
For i=1 to 8 : Line(i,1.5)-(i,-1.5),14: Next
READ K,CE: DEF FNEX(X)=MAX(17,(1-K*(X-2.7)^CE)*75)
FOR I=1 TO 9: READ R(I), P(I):NEXT
FOR I=1 TO 9: Z=I-1: CIRCLE(Z,R(I)),1,14:CIRCLE(Z,P(I)),1,10: NEXT
'FOR I=6 TO 7: CIRCLE (2*(I-3),R(I)),.5, 9: NEXT
PSET(0,75)
FOR X=0 TO 2.7 STEP .1: LINE -(X, 75),15: NEXT
FOR X=2.7 TO 9 STEP .1: LINE -(X, FNEX(X)),15: NEXT
LOCATE 1,58: ? "JD P_DOWN P_UP FNEX(X)
FOR I=1 TO 9 : LOCATE 2+I,58: JD=15-I: X=I-1:
if X<=2 then ? USING "##"; JD;: ? USING " ###.##"; R(I) P(I) 75 _
else ? USING "##"; JD;: ? USING " ###.##"; R(I) P(I) FNEX(X)
```

```
NEXT
LOCATE 13, 72: ? USING "K = #.###"; K
LOCATE 14, 72: ? USING "CE= #.##"; CE
 END
```

Приложение 2.2

ПОДПРОГРАММА-ФУНКЦИЯ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

```
 Rem Ведущий модуль с печатью результатов
CLS: DEFEXT A-I,O-Z: DEFINT J,L,M: DEFLNG K,N: DEL=1.E-14
'DEF FNU(X)=1/(1-X*X)^2: A=0: B=1/2: IE=LOG(3)/4+1/3
DEF FNU(X)=X*SQR((1-X*X)^3): A=0: B=1: IE=1/5
 INS=INTEGRAS(A,B,Del): DI=Abs((INS-IE)/IE): ?: PRINT " R E S A L T S "
PRINT USING " COMPUTED =##.#################"; INS
PRINT USING "TRUE DATA =##.#################"; IE
PRINT USING "DEL =##.###^^^^"; DEL
PRINT USING " DS =##.###^^^^ LN =###"; DS LN
PRINT USING " DI =##.###^^^^"; DI
END

FUNCTION INTEGRAS(A,B,Del)
SHARED DS, LN: JD=-LOG10(Del)
N=1: LN=0: D=B-A: V=0: S=0.0123456789I=S: W=(FNU(A)+FNU(B))/2
DO: N=2*N: Incr LN: Incr W,V: H=D/N: V=0: SP=S: IP=I
FOR K=1 TO N-1 STEP 2: X=A+K*H :INCR V,FNU(X): NEXT K
S=2*H*(W+2*V)/3: R=(S-SP)/15: I=S+R: CN=LN*14/JD
IF CN>14 THEN CS=1+7.2*EXP(-.14*(CN-14)) ELSE _
CS=MIN(75, MAX(17,(1-0.025*(11.3-JD)^3)*75))
DS=Abs((I-IP)/(I*CS))
LOOP UNTIL DS<DEL AND S><0
INTEGRAS=I
END FUNCTION
```

Т.Ю. СЕРЕДА

ВЕДУЩАЯ РОЛЬ МЕТОДОВ ТВОРЧЕСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ УЧАЩИХСЯ В УСЛОВИЯХ ИНФОРМАЦИОННО-РАЗВИВАЮЩЕГО ОБУЧЕНИЯ

Как известно, человек становится личностью тогда, когда начинает самостоятельно выполнять творческую деятельность. Умение созидать начинается с желания творить, создавать новое. Одного желания недостаточно, нужна система интеллектуальных и практических умений, с помощью которой личность творит. Человек творит в области своих интересов и на уровне своих возможностей. Реальное становление творческой личности происходит в процессе самообразования в течение всей жизни. Учащихся необходимо обучать основным приемам интеллектуальной деятельности: дополнение, изменение, сравнение, доказательство, опровержение, нахождение и исправление ошибок, самостоятельная работа с текстом, составление конспектов, выведение правил из фактов, выбор информации по определенным правилам, работа в паре, в группе, умение вести дискуссию. К сожалению, интерес к познавательной деятельности у многих учеников отсутствует. Мы не можем утверждать, что тексты и задания, которые учащиеся изучают и выполняют на уроках, интересны. Мотивация к познавательной деятельности не развивается или развивается недостаточно. Зачем выполняется огромное количество заданий по предмету учащимся чаще всего не сообщается, как и не объясняется их значимость. В реальной практике большинство заданий носит репродуктивный характер. Учитель при этом выступает в качестве передатчика готовой информации, знаний, а учащиеся – пассивных «запоминающих устройств». Чем точнее на последующих уроках ученик воспринимает полученные в готовом виде знания, тем он лучше успевает. Знания и умения даются учащимся как бы впрок, на будущее, хотя хорошо известно, что ребенок не осознает этого, он живет настоящим. Со временем у ученика вырабатывается не только стереотип такой деятельности, но и характер мышления. У человека, который не занимается творческой деятельностью, вырабатывается приверженность к общепринятым взглядам и мнениям. На его восприятие влияют привычные установки, оценки и т.д. Это приводит к тому, что в своей деятельности, работе и мышлении он не может выйти за пределы известного. Со временем стереотип такой деятельности закрепляется.

Как известно главный труд детей – учеба. Поэтому вполне очевидно, что для воспитания творческих черт личности у учащихся его нужно сделать творческим. Во многом это зависит от умения педагогов организовать творческую деятельность. Эпизодическая творческая деятельность малоэффективна, она не приводит к развитию творческих качеств личности, поэтому большое значение имеет непрерывность творческого процесса. Для эффективности руководства детским творчеством учитель должен знать методы и приемы развития познавательной активности, памяти, смекалки, наблюдательности. Долгое время творчество было уделом немногих и считалось привилегией одаренных личностей. Существуют суждения, что «все зависит от случайности», «от упорства», «от прирожденных способностей». Постепенно начало утверждаться мнение, что творческие задатки есть почти у всех людей. Выяснилось, что для творческой деятельности характерны определенные закономерности, на основе которых созданы достаточно эффективные методы решения творческих задач.

Метод проб и ошибок заключается в том, что учащийся при поиске решения задачи перебирает возможные варианты и среди них находит тот, который удовлетворяет постановленным требованиям. Этот метод трудоемок. Его недостатком является то, что нельзя разработать хотя бы приближенную методику его использования.

Нужны такие методы управления творческим процессом, которые способны резко уменьшить число «пустых» проб.

Методы активизации мышления – это «мозговой штурм», метод контрольных вопросов, синектика, метод фокальных объектов, морфологический анализ.

«Мозговой штурм» предполагает выполнение следующих этапов:

1. Прочитайте условие задания и предложите все возможные гипотезы его выполнения. Озвучивается любая идея, пришедшая в голову. Критиковать гипотезы при их выдвижении запрещается. Никаких выражений типа: «Это бесполезно; это глупая идея» и т.д. Идеи не должны быть представлены в негативной форме, например: «Возможно это не сработает, но...»

2. Проанализируйте предложенные гипотезы и выберите наиболее вероятные из них.

Приведем примеры применения этого метода при решении задач.

Задача 1. Как измерить (не используя вычисления) с помощью линейки длину пространственной диагонали кирпича?

Задача 2. Сосуд имеет форму параллелепипеда (цилиндра). Как, не имея никаких других емкостей и не делая никаких измерений, наполнить водой ровно половину объема этого сосуда?

Задача 3. Расставьте 24 человека в 6 рядов так, чтобы каждый ряд состоял из 5 человек.

По методу контрольных вопросов, как показывает само название, поиск направляется списками наводящих вопросов. Типичные вопросы: а если изменить форму объекта? А если сделать наоборот? А если заменить задачу другой?

Рассмотрим пример. (Геометрия, 8 класс). Дан прямоугольник ABCD, CD=5см, S_{ABCD}=60см; X – некоторая точка на отрезке CD. Найти S_{ABX}.

1. Прочитайте внимательно условие задачи и предложите все возможные ответы.

2. В процессе решения постарайтесь ответить на следующие вопросы:

О каких геометрических фигурах идет речь в задаче?

Что известно об этих фигурах? Есть ли у них общие элементы?

Что можно найти, зная площадь и сторону прямоугольника?

Как найти площадь треугольника?

Зависит ли длина высоты, проведенная к стороне AB, от расположения точки X на отрезке CD?

Можно ли вычислить длину высоты треугольника, проведенной из точки X к AB?

Можно ли вычислить S_{ABX}, если точка X будет принадлежать отрезку BC?

Вычислите площадь треугольника ABX, если точка X совпадет с точкой C (с точкой D). Сделайте вывод.

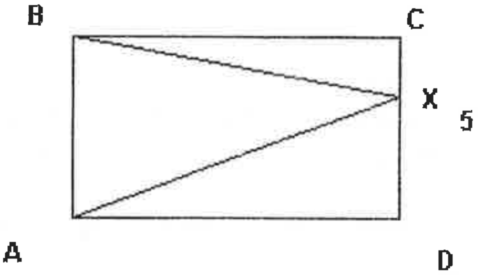


Рис.1.

Эту же задачу можно предложить для решения и в пятом классе. Список вопросов может выглядеть следующим образом:

1.Можно ли разбить прямоугольник ABCD на два прямоугольника так, чтобы у них была общая сторона XY? На какой стороне прямоугольника ABCD будет находиться точка Y?

2. Из каких треугольников состоит треугольник ABX? Прямоугольник ABCD?

3. Если среди них равные треугольники? Какие? Можно ли сравнить площади треугольника ABX и прямоугольника ABCD?

4. Есть ли в условии задачи лишние данные?

5. Изменится ли площадь треугольника ABX, если точка X совпадет с точкой D? Совпадет с точкой C?

При морфологическом анализе (предложен швейцарским астрофизиком Цвикки) сначала выделяют оси – главные характеристики объекта. Далее на каждой оси записывают элементы – всевозможные варианты. Имея запись элементов по всем осям и комбинируя сочетания различных элементов, можно получить очень большое число всевозможных вариантов. При этом в поле зрения могут попасть и неожиданные сочетания, которые вряд ли возникли бы «просто так».

Рассмотрим пример. В четырехугольнике ABCD диагонали взаимно перпендикулярны. Исследуйте свойства данного четырехугольника.

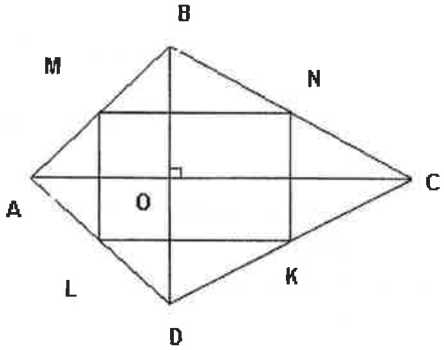


Рис.2.

	AC BD Точка O – точка пересечения диагоналей	Точки M, N, K, L – середины соответствующих сторон AB, BC,CD,DA
Полученные треугольники	∆AOB, ∆BOC, ∆COD, ∆DOA – прямоугольные	MN, NK, KL, LM – средние линии треугольников ABC, BCD, CDA, DAB

Стороны четырехугольника	$AB^2+CD^2=AD^2+BC^2$	OM, ON, OK, OL – медианы треугольников AOB, BOC, COD, DOA и соответственно равны половинам сторон AB, BC, CD, DA.
Площадь	$S_{ABCD}=\frac{1}{2}$ DB·AC	MNKL – прямоугольник $S_{MNKL}=\frac{1}{2}$ $BD\cdot\frac{1}{2}AC=$ $=\frac{1}{4}BD\cdot AC$ $S_{MNKL}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$

Выводы:

Суммы квадратов длин противоположных сторон равны.

Площадь четырехугольника равна половине произведения длин его диагоналей.

Середины сторон четырехугольника являются вершинами прямоугольника.

$\frac{S_{MNKL}}{S_{ABCD}}=\frac{1}{2}$.

Синектика – метод решения творческих задач, при котором допустимы элементы критики и предусмотрено использование приемов, основанных на аналогии:

прямой (как решаются задачи, похожие на данную);

личной (представьте себя в образе данного в задаче объекта и попробуйте рассуждать с этой точки зрения);

символической (изобразите условия задачи в виде схемы, рисунка, постарайтесь дать образное определение сути задачи в двух словах и проанализируйте возможности использования каждого элемента схемы для нахождения решения);

фантастической (как бы эту задачу решили сказочные персонажи; попробуйте применить приемы фантазирования; используйте приемы: уменьшение – увеличение; ускорение – замедление скорости, времени; сделайте наоборот; объединение – дробление и др.).

Метод фокальных объектов состоит в том, что признаки случайно выбранных объектов переносят на совершенствуемый объект. В результате могут получиться необычные сочетания, которые иногда приводят к оригинальным идеям.

Метод предполагает выполнение ряда этапов:

1. Выберите для преобразования систему.
2. Выберите несколько случайных объектов и зафиксируйте характерные для них признаки.
3. Попробуйте перенести признаки случайных объектов на выбранную для преобразования систему и дайте описание полученной новой системы.

Рассмотрим пример. Перенесите свойство точек окружности на две прямые.

Все точки одной прямой равноудалены от другой прямой. Прямые параллельны. Здесь надо обратить внимание детей на то, что расстояние между параллельными прямыми не изменяется, всегда постоянно и равно расстоянию от любой точки одной из прямых до другой прямой. В качестве примера можно рассмотреть рельсы и шпалы.

Таким образом, наше исследование позволяет выделить основные условия, при которых формируется творческая математическая деятельность учащихся:

необходима такая организация обучения, при которой ученик вовлекается в процесс самостоятельного поиска и «открытия» новых знаний, решает задачи проблемного характера;

учебный труд должен быть разнообразен;

необходимо понимание учеником нужности, важности, целесообразности изучаемого материала в целом и отдельных его разделов;

обучение должно быть трудным, но посильным;

чем чаще проверяется и оценивается работа школьника (в том числе им самим), тем интереснее ему работать;

яркость, эмоциональность учебного материала;

уместен «принцип Ходжи Насреддина»: «Пусть те, которые знают, расскажут тем, которые не знают».

А.А. СИНЯВИНА

ЭТАПЫ ФОРМИРОВАНИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ОБОБЩЕНИЙ ПО ФИЗИКЕ В ОСНОВНЫХ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ УЧРЕЖДЕНИЯХ

В настоящее время в соответствии со сложностью образовательных программ школьное образование подразделяется на уровни: начальное, базовое, полное [1, 7]. Основное школьное образование в течение 8-10 лет в большинстве стран законодательно является обязательным. Закон об образовании дает возможность коллективу школы самому выбрать учебный план и определить тип школы. Это может быть общеобразовательная школа общего типа, школа с углубленным изучением ряда предметов, гимназия, колледж, лицей, учебный центр, частное образовательное учреждение, школы – интернаты как для детей с выдающимися способностями (например, спортивные), так и для детей с ограниченными физиологическими способностями. Кроме того, в общеобразовательных учреждениях допускается открытие классов коррекции для ослабленных детей, отстающих в развитии. Министерством образования предоставлен широкий выбор вариантов для получения образования, им разработаны инструкции, правила получения сертификатов [5, 10]. В данной статье все образовательные учреждения, в которых осуществляется основное общее образование, названы основными общеобразовательными учреждениями. Ранее подобное принятое название таких учреждений – основная школа.

При формировании теоретических обобщений в курсе физики основных общеобразовательных учреждений можно выделить три этапа: изучение элементов физики в интегрированных курсах начальной школы, изучение физически явлений и некоторых понятий в пропедевтических курсах 5-6 классов, изучение системы знаний в виде понятий, законов, идей физической картины мира в систематическом курсе 7-9 классов.

Рассмотрим изучение элементов физики в интегрированных курсах начальной школы и их роль в овладении системой знаний и методом научного познания. В данной статье особое внимание уделено пропедевтическому этапу формирования знаний.

Приоритетной целью начального образования на современном этапе становится цель развития личности школьника на основе ведущей деятельности. Она направлена, например, на формирование способности младшего школьника к саморазвитию и самовоспитанию, общей культуры, подготовку к дальнейшему образованию. Это определяет принципы отбора и конструирования содержания обучения в начальной школе [1, с. 152].

Так, один из принципов отражает необходимость изменения всех компонентов методической системы – содержания, методов, средств, форм организации, - относительно приоритетной цели. При этом содержание знаний по каждой образовательной области должно учитывать его вклад не только в формирование конкретных знаний, но и в достижение цели развития тех сторон личности ребенка, которые определены как наиболее существенные для этого возрастного этапа.

Другой принцип предполагает теоретизацию отбора содержания начального образования. При этом предполагается, что проблема формирования ведущей (учебной) деятельности не может обсуждаться вне рассмотрения роли теоретических знаний в этом процессе. Теоретические знания должны рассматриваться не как дополнительный набор правил, теорем, формул и законов, которые ученик механически запоминает, а как основа, на которой формируются умственные действия и способы решения различных учебных задач. Реализация этого принципа обеспечит формирование учебной деятельности, включение ребенка в самостоятельный акт познания связей, закономерностей окружающего мира, подготовку школьников к использованию знаний в нестандартных ситуациях.

Третий принцип отражает демократическую основу конструирования учебного материала. Это выражается, прежде всего, в том, что корректировка целей начального образования позволила установить правильную зависимость между приоритетными целями, содержанием обучения и номенклатурой учебных предметов. При этом учебный план выступает не начальным, а конечным документом методической системы обучения. Это позволяет реализовать право образовательного учреждения строить авторские модели начальной школы и вариативные учебные планы.

Большой интерес представляет второй принцип отбора и конструирования содержания обучения в начальной школе – принцип теоретизации. Поскольку процесс формирования научного мышления достаточно долог, то и главное направление модернизации физического образования на современном этапе состоит в более раннем изучении физических явлений в рамках окружающего мира, природоведения, естествознания. Кроме того, одной из приоритетных воспитательных задач выступает развитие творческой личности, что также обосновывает формирование знаний на основе метода опытного познания, точнее, его элементов.

Изучение элементов физики в начальной школе имеет давнюю традицию. Впервые курс начального природоведения – или естествознания (мир неорганический) – был создан в конце XIX в. талантливым русским методистом – естественником А.Я.Гердом. Как описывает С.А. Павлович, такой курс преподавался в петербургских начальных городских школах под личным руководством автора [8]. В комплексных программах советской школы первой ступени (с 1924 по 1931 гг) сохранялись многие элементы этого курса, а при реформе школы в 1932 г. он был восстановлен в третьем классе почти по программе А.Я.Герда.

С 1902 г. неживая природа, как первый отдел начального курса естествознания, стала входить в программы первого класса средней школы разных учебных ведомств того времени. Появился ряд учебников по неживой природе. Профессор С.А. Павлович, автор методического пособия «Как преподавать начальные сведения о неживой природе», отмечает: «Необходимо, чтобы учащиеся лично наблюдали предметы и явления окружающего нас мира и осмысливали получаемые этим путем знания. Дети должны научиться ставить в связь наблюдаемые явления, находить взаимную зависимость их, где она имеется, устанавливать причину явления и те следствия, какие этими причинами вызываются. Из всех разделов школьного образования именно курс начального неорганического природоведения дает наиболее доступный, очень легко организуемый материал для этой необходимой гимнастики ума» [8, с. 7].

Говоря о воспитании подрастающего поколения, В.А.Сухомлинский указывал на необходимость раннего изучения элементов научного знания: «Мы живем в такое время, когда без овладения научными знаниями невозможны ни труд, ни элементарная культура человеческих отношений, ни выполнение гражданских обязанностей»[9, с. 13].

Особенности построения учебного плана начальной школы на современном этапе таковы:

1. Отказ от однообразной школы, создание разных ее типов, альтернативных, авторских программ и предметов, а отсюда – отказ от типового учебного плана.

2. Построение базисного учебного плана не по предметам, а по областям знаний, что обеспечивает вариативность начальной школы. Для первого этапа школьного образования выделяются следующие образовательные области: Язык. Математика. Окружающий мир. Искусство. Физическая культура. Технология (труд).

3. Введение школьного компонента, позволяющего индивидуализировать обучение в соответствии с местными условиями, особенностями контингента учащихся и их интересами [1].

Изучение элементов физики в начальной школе происходит в курсах «Окружающий мир», а также при обучении математике и труду. При изучении этих предметов закладываются основы научного мировоззрения и воспитания. У школьников начинает формироваться представление о собственном доме – Земле и ее месте в Солнечной системе, значении физических опытов в познании природы, важности логического мышления. Формирование мировоззрения требует длительного времени. Оно тесно связано с формированием физических и общенаучных понятий, с развитием логического и образного мышления, с освоением методов изучения природы (наблюдение, проведение опытов, обобщение), а также с овладением трудовыми и другими операциями в процессе деятельности.

В рамках кафедры методики преподавания физики Московского педагогического университета проводилось исследование по формированию элементов физических знаний у учащихся начальной школы. В связи с этим в 1997 году авторским коллективом кафедры были разработаны содержание физической компоненты и задания для учащихся в виде рабочих тетрадей и пособие для учителя с учетом требований образовательного стандарта.

Отбор содержания проводился на основе следующих положений:

- соответствие содержания учебного материала логике изучения предметов начальной школы;

- учет объема вводимой информации с целью не допустить перегрузку учащихся;

- содержание учебного материала должно носить направленный характер – содействовать развитию знаний по математике, природоведению и технологии на материале физики;

- соответствие знаний, привлекаемых из физики, уровню науки, трактовке физических понятий и возрастным особенностям школьников.

Содержание физической компоненты включает сведения о физических явлениях: механических, тепловых, световых, магнитных и электрических. Учебный материал об этих явлениях способствует изложению круговорота воды в природе, взаимного расположения земли и других планет Солнечной системы, образования ветра, облаков и осадков, агрегатных состояний воды в природе, распространения света.

Физическая компонента включает элементы понятий и физических величин, например, температуры, энергии, массы, промежутка времени, длины тела, пути, скорости, тела отсчета, теплопередачи, агрегатных состояний вещества, постоянного магнита, источников света, луча света.

К элементам понятий физических величин можно отнести их названия, единицы измерения, приборы для измерения, указание свойства тела или явления, характеризуемого физической величиной. В последующих классах происходит дальнейшее развитие знаний об этих понятиях и величинах.

В интегрированных курсах начальной школы учащиеся знакомятся с методами физики. На основе примеров показывается, что сведения о природе можно получить через слова с помощью наблюдений, рассказа учителя или книг.

На занятиях технологией учащиеся приобретают сведения о некоторых материалах, проводят практические работы на конструирование приборов, исследование физических явлений.

Для учащихся начальной школы были подготовлены рабочие тетради, отражающие учебный материал математики, природоведения, технологии и содержащие физическую компоненту. Условно компонента в курсе математики обозначена «Число. Физическая величина», в курсе природоведения – «Ознакомление с физическими явлениями», в технологии – «Конструируй, исследуй, размышляй» [11, 12, 13, 14, 15].

При работе с тетрадью «Число. Физическая величина», обращается внимание учащихся на то, что физическую величину можно измерить и выразить числом, что при этом используются единицы измерения, например, скорости, пути, массы. Решая задачи, связанные с движением тел (пешеходов, велосипедистов и др.), учащиеся учатся различать по рисунку прямолинейное и криволинейное движение. Причем основой такого различия служит понятие траектории – линии, по которой движется тело. На примерах многообразных задач учащиеся знакомятся с таким понятием, как перемещение – направленным отрезком, характеризующим движение тела из одной точки в другую, на примерах сравнивают путь и перемещение. Изучение механических явлений в начальной школе осуществляется на примерах равномерного движения. Учащиеся узнают, что особенностью такого движения служит постоянство скорости, которая в заданных условиях определяется делением перемещения на промежуток времени, за который произошло это перемещение.

Использование рабочей тетради позволяет познакомить учащихся с физическими эталонами, например, эталоном массы. Подбор и содержание задач отражают свойство аддитивности массы.

Учащиеся знакомятся с некоторыми физическими приборами. Они понимают, что весы – прибор для измерения массы, часы – прибор для измерения промежутков времени, а линейка – прибор для измерения длины, ширины, высоты объекта. Обращается внимание на то, что каждый из приборов имеет шкалу, по которой производится отсчет измеряемой величины.

В рабочей тетради предусмотрено выполнение учащимися практических работ, в ходе которых при изучении отдельных тем математики производится определение физических величин, например, определение пройденного телом пути, скорости равномерного движения. Учащиеся наблюдают различные явления, например, притяжение тел разной массы к Земле. Кроме этого, они конструируют приборы, к примеру, водяные часы.

Изучая «Окружающий мир», учащиеся знакомятся с различными физическими явлениями. В этом случае можно использовать рабочую тетрадь под названием «Ознакомление с физическими явлениями». В ней рассматриваются на примерах физические явления - механические, тепловые, магнитные, оптические. В рамках механических явлений учащиеся знакомятся с физическим телом, телом отсчета, относительностью движения – на примерах показано, что движение и покой относительны. Обращено внимание на то, что звук издают колеблющиеся тела, что он может передаваться на расстояния через воздух, воду и отражаться от преград.

Знакомство с тепловыми явлениями осуществляется на примере перехода воды из одного агрегатного состояния в другие. Использование этой рабочей тетради позволяет познакомить учащихся с общенаучным понятием энергии, с ее видами - кинетической и потенциальной, видами теплопередачи – теплопроводностью, конвекцией, излучением. Знакомясь с тепловыми явлениями, учащиеся узнают, что прибором для измерения температуры служит термометр, его шкала носит название шкалы Цельсия. Здесь закладываются основы изучения молекулярно-кинетической теории. На конкретных примерах учащиеся знакомятся с тем, что все тела состоят из частиц, между частицами есть промежутки, частицы всех тел непрерывно движутся.

С магнитными явлениями учащиеся знакомятся на примере прибора – компаса, содержащего магнит – магнитную стрелку. Обращается их внимание на то, что существуют естественные и постоянные магниты, которые имеют полюсы.

В рамках оптических явлений происходит знакомство учащихся с источниками света, одним из которых является Солнце. Они узнают, что существуют и другие тела, испускающие свет. Они наблюдают образование тени от непрозрачных предметов, а также отражение света – зеркальное и рассеянное.

Выполнение практических работ, включенных в рабочую тетрадь, помогает учащимся закрепить изученный материал. При этом они наблюдают явления и делают выводы, моделируют явления, конструируют приборы, например, термометр Галилея.

Рабочая тетрадь, предназначенная для включения в учебный процесс по технологии, под названием «Конструируй, исследуй, размышляй» содержит практические задания, сгруппированные по блокам: картонажные работы, работа с проволокой, работы из листового металла (фольги), электромонтаж, электрическая цепь. Выполняя их, учащиеся знакомятся с различными изделиями, материалами, инструментами, правилами безопасной работы с ними. Здесь впервые учащиеся смогут познакомиться с элементами простейшей электрической цепи, их условными обозначениями на схемах, что в дальнейшем им окажет помощь при изучении законов постоянно тока в курсе физики основной школы. Выполнение практических работ направлено на исследование свойств материалов, изготовление моделей, например, модели Земли, Солнечной системы, а также на конструирование физических приборов и исследование явлений с их помощью.

Комплект рабочих тетрадей для учащихся начальной школы с условным названием «Моя первая книга по физике» апробирован в московских школах, школах Московской области и других регионов.

Особенностью комплекта является то, что он не заменяет ранее изданных пособий для начальной школы. Он лишь дополняет их, систематизирует ранее представленный материал в учебниках для начальной школы по основным физическим явлениям. Это позволило, например, в технологию ввести практические работы на конструирование технических объектов и исследование физических явлений. Сведения о физических явлениях, получаемые при изучении природоведения, достаточны для объяснения действия конструируемых объектов.

Данный комплект, хотя и ориентирован на три предмета – математику, природоведение, технологию, - он может составить основу для авторского факультативного курса учителя начальной школы.

Следующим этапом формирования знаний по физике является изучение физической компоненты в пропедевтических курсах 5-6 классов. К таким курсам относятся «Физика и химия» Гуревича, «Физика» Г.Н. Степановой, «Естествознание» под редакцией Хрипковой и др.[2, 3, 4]. Например, в курсе естествознания физическая компонента раскрывает физические явления, некоторые понятия, способствует подготовке учащихся к изучению систематического курса физики.

Естественнонаучное образование представляет собой систему научных знаний. С позиций содержания в нем выделяются глобальные и локальные элементы содержания. Так, к глобальным элементам содержания относятся: система фундаментальных понятий, законов природы и современных научных теорий; различные уровни организации вещества – микроскопический, макроскопический, мегауровень; методы познания живой и неживой природы и др.

Среди целей обучения естествознанию в 5-6 классах выделены такие, как:

- ознакомление с объектами природы, их многообразием и единством;
- ознакомление с методами познания природы;
- формирование взаимосвязанных основных естественнонаучных понятий;
- формирование учебных и интеллектуальных умений;
- формирование основ экологических знаний, ценностного отношения к природной среде и человеку;
- создание условий для формирования интереса к естественным наукам [64].

Структура учебного материала по курсу предполагает формирование знаний учащихся на уровне физических явлений и элементов понятий, а также одного из законов – закона отражения света.

Физические явления представлены тепловыми, световыми, звуковыми, электрическими и магнитными явлениями. Развитие знаний учащихся о тепловых явлениях – нагревании, охлаждении, испарении, конденсации, кипении, плавлении, отвердевании, - происходит на конкретных примерах их проявления в природе и быту. Рассматриваются агрегатные состояния воды – лед, вода, водяной пар – и их роль в образовании облаком и осадков, круговорота воды в природе. Кроме того, учащиеся знакомятся с тепловым расширением тел, жидкостей и газов, особенностями теплового расширения воды, изменением температуры воздуха с высотой, температуры воды – с глубиной.

Световые явления в курсе естествознания представлены на уровне явлений и закона отражения света. Здесь происходит развитие знаний о прямолинейном распространении света, отражении света, преломлении света как явлении, разложении белого света в спектр. Учащиеся знакомятся с образованием тени и полутени, с различными оптическими приборами - перископом, линзой, фотоаппаратом, глазом человека и животных как оптической системой. Природное явление радуги изучается посредством эксперимента – разложения белого света в спектр.

Звуковые явления как один из видов механических явлений содержат характеристику звука – частоту, диапазоны частот – акустические колебания, инфразвук, ультразвук. Учащиеся знакомятся с процессом распространения звука, состоящего из источника звука, передающей среды и приемника звука. Учебный материал включает отражение звука, громкость звука, шум, схему гидролокации. Учебный материал содержит практические применения изучаемых элементов понятий.

Структура учебного материала по электрическим и магнитным явлениям включает электризацию тел, где отражены два вида зарядов и их взаимодействие. Учащиеся знакомятся со статическим электричеством и примерами его проявления на производстве, в быту и медицине. Развитие знаний об электрическом токе происходит на примерах его действий - тепловом, химическом, магнитном. Происходит ознакомление учащихся с электроизмерительными приборами и устройствами, лампой накаливания, электромагнитами.

Основными методами, с которыми учащиеся знакомятся при выполнении лабораторных работ, являются наблюдение, эксперимент и моделирование.

При изучении курса естествознания вводится понятие энергии как фундаментальной физической величины, ее обозначение, единица измерения, виды энергии, преобразование одного вида энергии в другой на примерах живой и неживой природы. Вводится понятие массы как характеристики тела, ее обозначение, эталон массы, единица, способ измерения.

В курсе естествознания начинает формироваться понятие силы как результата взаимодействия тел на конкретных примерах – сила тяжести, сила упругости, вес тела, сила трения, архимедова сила, - измерение силы с помощью прибора – динамометра, точка приложения, направление силы (на рисунках). Единица силы 1 Н вводится как утверждение, что на тело массой 102 г действует сила тяжести 1 Н.

Таким образом, в курсе естествознания у учащихся формируются знания о явлениях природы, элементы некоторых понятий и методов познания природы.

Курс физики 7-9 классов содержит системы знаний, входящие в физические теории – механику, термодинамику и молекулярную физику, электродинамику, квантовую физику. Системы знаний составляют понятия, законы, идеи физической картины мира. Система знаний формируется во взаимосвязи с методом познания [16, 17].

Изучение систематического курса физики в основных общеобразовательных учреждениях позволит сохранить преемственность в формировании теоретических обобщений в виде понятий, законов, идей физической картины мира при изучении профильного курса физики средней школы, в котором рассматриваются фундаментальные физические теории и их подсистемы – частные физические теории. В нем система знаний в рамках теории расширяется и усложняется в силу возможности использования более сложного математического аппарата. При его изучении у учащихся формируется физическая картина мира.

Ниже представлена таблица, в которой в качестве примеров отражены этапы формирования теоретических обобщений в курсах основной школы – интегрированных курсах начальной школы, пропедевтических курсах 5-6-классов и систематическом курсе физики. Примеры системы знаний в курсе физики основной школы и профильной школы показаны на примере механики. В качестве профильного курса рассмотрен учебник физики В.А. Касьянова [6].

Примеры теоретических обобщений школьного курса физики на разных этапах их формирования

Этапы изучения теоретических обобщений	**Физические явления как эмпирический базис теории**	**Примеры теоретических обобщений**			**Формирование знаний о методах познания**
		Понятия и элементы понятий	**Законы**	**Идеи физической картины мира**	
Интегрированные курсы начальной школы	Примеры физических явлений: механических, тепловых, электрических, магнитных, световых	Элементы понятий: единицы скорости, пути, массы, температуры, приборы для их измерения, способ определения	Прямолинейное распространение света как закономерность: за непрозрачными телами в яркий солнечный день образуются тени	Взаимодействие и элементы понятия энергии: падающая вода обладает энергией	Наблюдение, эксперимент, моделирование (элементы)
Пропедевтические курсы (5-6 кл.)	Тепловые, световые, звуковые, электромагнитные, механические	Тело, вещество. Единицы силы, массы, энергии, температуры, приборы для их измерения, способ определения	Прямолинейное распространение света, закон отражения света	Взаимодействие, элементы понятий энергии, массы	Наблюдение, эксперимент, моделирование (элементы)
Систематический курс физики основных общеобразовательных учреждений	Обобщение знание о физических явлениях: механических и др. Механическое движение. Равномерное прямолинейное движение. Равноускоренное прямолинейное	Система понятий, отражающая: - *механику Ньютона* - перемещение, скорость, ускорение, сила, масса, энергия, кинетическая энергия, потенциальная энергия, центр масс;	Первый, второй, третий законы Ньютона, закон всемирного тяготения, закон Гука, закон сохранения механической энергии.	Взаимодействие тел, гравитационное взаимодействие, понятия пространства, времени, энергии, сохранения механической энергии. Распростране	Эксперимент и моделирование, координатный метод, метод измерений, графический метод определения физических величин.

	движение. Свободное падение тел.	- *механику твердого тела*: плечо силы, момент силы, мощность, кпд; - *гидро- и аэростатику*: давление, давление жидкости, атмосферное давление;	Условия равновесия тел, «золотое правило механики». Закон Паскаля, закон Архимеда, правило сообщающихся сосудов.	ние закона сохранения энергии на механику твердого тела. Гравитационное взаимодействие	Эксперимент и моделирование. Эксперимент и моделирование.
Курс физики средней школы (учебник В.А. Касьянова) Естественно-научный профиль	Механическое движение. Равноускоренное, равнозамедленное, равнопеременное движения. Криволинейное баллистическое движение. Периодическое движение	*Кинематика материальной точки*: перемещение, скорость, ускорение (тангенциальное, нормальное), период, период вращения, угловая скорость. *Динамика материальной точки*: Сила, масса, виды сил (в том числе сила трения качения). *Законы сохранения*: импульса тела, системы тел, потенциальная сила, потенциальная энергия,	Закон равномерного прямолинейного движения. Закон равнопеременного движения. Преобразования Галилея. Закон сложения скоростей, принцип относительности Галилея. Принцип суперпозиции сил. Первый, второй, третий законы Ньютона, закон всемирного тяготения, закон Гука.	Материальность мира, понятия пространства и времени, их свойства. Механическое взаимодействие объектов. Сохранение физических величин.	Метод научного познания (эксперимент и моделирование). Графический (координаты

		кинетическая энергия, средняя мощность, мгновенная мощность, полная механическая энергия системы, абсолютно неупругий удар, абсолютно упругий удар. *Динамика периодического движения:* первая космическая скорость, вторая космическая скорость, свободные колебания, циклическая частота, период, амплитуда колебаний, затухающие колебания, вынужденные колебания, вынужденные колебания, резонанс. *Релятивистская механика:* скорость света, черная дыра, горизонт событий, собственное время, масса покоя, масса покоя фотона (кванта света).	Закон сохранения импульса. Принцип минимума потенциальной энергии. Теорема о кинетической энергии. Закон изменения полной механической энергии. Закон сохранения механической энергии. Используются законы движения, законы сохранения. Первый постулат СТО, второй постулат СТО. Релятивистский закон сложения скоростей	Универсальность законов сохранения. Связь между теориями. Единая механическая картина мира.	й) метод, динамический метод, релятивистский метод.

ЛИТЕРАТУРА

1. 12-летняя школа. Проблемы и перспективы развития общего среднего образования/ Под ред. В.С. Леднева, Ю.И. Дика, А.В. Хуторского. –М.: ИОСО РАО, 1999. – 264 с.
2. Гуревич А.Е., Исаев Д.А., Понтак Л.С. Физика. Химия. 5-6 кл.: Учеб. для общеобразоват. учеб. заведений. – 4-е изд. –М.: Дрофа, 2001. – 192с.
3. Естествозание: Учеб. для 5 кл. общеобразоват. учреждений/ Под ред. А.Г. Хрипковой. 4-е. –М.: Просвещение, 1998. – 240 с.
4. Естествознание: Учеб. для 6 кл. общеобразоват. учреждений/ Под ред. А.Г. Хрипковой. 4-е. –М.: Просвещение, 1994. – 224 с.
5. Закон Российской Федерации «Об образовании» /Информационно-методический журнал/ М.: Частная школа, 1995. К 1 – 45. – 87 с.
6. Касьянов В.А. Физика. 10 кл.: Учебн. для общеобразоват. учеб. заведений. – М.: Дрофа, 2000. – 416 с.
7. Настольная книга учителя физики/ Сост. В.А. Коровин. –М.: ООО «Издательство АСТ»: ООО «Издательство Астрель», 2004. – 412 с.
8. Павлович С.А. Как преподавать начальные сведения о неживой природе. – С-Пб, 1925. - 180 с.
9. Сухомлинский В.А. Сердце отдаю детям. Киев, 1974. – 288 с.
10. Терра-Лексикон: Иллюстрированный энциклопедический словарь. – М.: Терра, 1998. – 672 с.
11. Хижнякова Л.С., Синявина А.А., Шилова С.Ф. Конструируй, исследуй, размышляй. Моя первая книга по физике. Рабочая тетрадь к урокам технологии в начальной школе. –М.: МПУ, 1997. – 54 с.
12. Хижнякова Л.С., Синявина А.А. Знакомство с физическими явлениями. Моя первая книга по физике. Рабочая тетрадь к курсам «Природоведение» или «Окружающий мир» для учащихся начальной школы. – М.: МПУ, 1997. – 42 с.
13. Хижнякова Л.С., Синявина А.А. Число. Физическая величина. Моя первая книга по физике. Рабочая тетрадь № 1 к урокам математики в начальной школе. – М.: МПУ, 1997. – 44 с.
14. Хижнякова Л.С., Синявина А.А. Число. Физическая величина. Моя первая книга по физике. Рабочая тетрадь № 2 к урокам математики в начальной школе. – М.: МПУ, 1997. – 47 с.
15. Хижнякова Л.С. и др. Методические рекомендации к работе с комплектом тетрадей для начальной школы. Моя первая книга по физике. -М.: МПУ, 1997. – 27 с.
16. Хижнякова Л.С., Синявина А.А. Физика: Механика. Термодинамика и молекулярная физика: Учеб. для 7-8 кл. общеобразоват. учрежд. –М.: Вита Пресс, 2000. – 256 с.
17. Хижнякова Л.С., Синявина А.А. Физика: Основы электродинамики. Элементы квантовой физики: Учеб. для 9 кл. общеобразоват. учрежд. –М.: Вита Пресс, 2001. – 288 с.

И.И. ТОПИЛИНА

ИНФОРМАТИЗАЦИЯ В ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ПЕДАГОГА- ГУМАНИТАРИЯ

Можно ли считать сферой образования человека ту сферу массового производства, продуктом которой является добротный профессионал? То есть человек, который многое знает, многое умеет, но не всегда задумывается над пониманием смысла того, что он знает. Ведь если нет понимания, то его дефицит восполняется верой, например, верой в науку, поскольку все наше образование ориентировано на интеллектуальное овладение достоянием наук. Но вера в безграничную силу науки – это «вера - подчинение», причем в сфере рассудочной деятельности она не осознается, так как возникает в результате отсутствия понимания, по недомыслию. Таким образом, продукт такой сферы производства добротных профессионалов — это человек, обученный подчинению, приспособленный для манипулирования собой, раб иллюзий во всем: и в жизни, и в науке. Особенно опасен для развития общества такой педагог- гуманитарий: при наличии более или менее убедительного для него обоснования он становится транслятором практически любой точки зрения.

В современной ситуации нужна новая образовательная модель, закладывающая такой *«механизм» воспроизводства и саморазвития культуры , который* программирует в учительстве, а затем, в учениках, в массовой школе определенный тип социркультурного наследования, специфические способы мышления, поведения, деятельности и общения людей, их отношение к природе, обществу, культуре, человеку, самому себе, смыслу жизни, которые и определяют его развитие и творческие возможности, формирует культурные «клетки» общества.

Для наступившего 21 века характерен возрастающий поток информации, в том числе, в гуманитарной сфере. Согласно научным прогнозам именно в результате интердисциплинарных исследований следует ожидать новых важных научно-технических достижений. С точки зрения развития информатизации общества, очевидной является необходимость научно обоснованного обновления концепции отечественного гуманитарного образования. Для этого необходимо четко сформулировать не только ее основные цели, но и параметры подходов к качеству информационной составляющей в наполнении цикла гуманитарных дисциплин, что потребует развития адекватной информационной культуры при подготовке школьных специалистов гуманитарного профиля.

Необходимо приложить усилия для того, чтобы педагогически раскрыть смысл и преимущества использования теории информации для гуманитарных наук, образования, культуры и искусства. Учитывая следующее:

– модель должна позволять мысленному взору охватывать совокупность любого предметного знания как целого, который превращает задачу организации большого количества предметной информации в легко обозримую систему *смыслов* (Именно смыслов, а не форм, как это делается сейчас во всех науках. Это есть «человеческое значение» любого предметного знания и открыто оно может быть только благодаря собственной и напряженной мыслительной работе.);

– необходимость гуманитаризации образовательной сферы и отсутствие разработанных принципов осуществления данного процесса с учетом условий информационного общества;

– значительные изменения в способах получения, обработки, хранения и воспроизведения информации дисциплин гуманитарно-эстетического направления, появившиеся в связи с развитием информационно-коммуникативных технологий, и отсутствием представленности этих изменений в содержании традиционного школьного образования и профессиональной педагогической подготовки;

– значительно возросшими возможностями воздействия на личность средств массовой информации и отсутствием профессиональной готовности педагога гуманитарно-эстетического цикла нейтрализовывать это негативное воздействие;

– значительно возросшие требования к информационной составляющей профессиональной культуры педагога гуманитарно-эстетического цикла и отсутствие научно-обоснованных концепций её информационного компонента.

Многими исследователями отмечается непосредственное воздействие новых информационных технологий на сознание человека: за счет значительного расширения его когнитивных и коммуникативных возможностей(Д.Белл, М. Кастельс[1], А.И. Ракитов[2], О. Тоффлер, А.Е. Щадрин и т.д.); и воздействие на социальную организацию: за счет использования новых средств коммуникации, принципиально снижающих издержки передачи информации, упрощения и стремительного ускорения процесса создания географически распределенных социальных групп (сетей), характеризующихся преобладанием неиерархических "горизонтальных" коммуникаций, возможностью общения "всех со всеми". Все это не могло неотразиться на образовательной сфере. А.В. Толстых характеризует изменения в сфере образования следующим образом: «Новую ситуацию в мире, в том числе и в мире образования, составляют сегодня два фактора: неопределенность и ориентация на будущее: наша традиционно постфигуративная (в терминологии Маргарет Мид) культура, ориентированная на передачу опыта от старших к младшим, сменяется конфигуративным и даже префигуративным типом культурной организации, ориентированным на будущее. В более широком историческом контексте эти перемены связаны с переходом от техногенной к антропогенной цивилизации[3]». Комплекс личностных качеств, который будет востребован современным обществом, по мнению ряда исследователей, представлен не суммой знаний, умений и навыков, не идеалом всесторонне и гармонично развитой личности (В.П. Зинченко, А.В. Толстых, А.С. Запесоцкий[4] и т.д.). Так А.В. Толстых пишет: «начинают востребоваться люди, умеющие быстро приспосабливаться к любым изменениям, гибкие, способные работать больше, чем в одной профессиональной позиции, в том числе и в роли руководителя, любознательные пытливые, стремящиеся выяснить, что происходит, и оказывать влияние на происходящее, способные сохранять самообладание в условиях неопределенности (вплоть до полного беспорядка и абсолютной неясности), способные, не имея навыка в какой –то пожизненной специальности вместе с тем, обладать опытом сразу в нескольких областях, способные перемещать идеи из одной области в другую»[5].

Поэтому концепция модернизированного Российского образования базируется на таких гуманистических принципах, как личностно ориентированный подход к организации всего образовательного процесса, системность и целостность учебного процесса в сочетании с достаточно высоким

[1] М. Кастельс. Информационная эпоха. Экономика, общество и культура. М.:2000
[2] 5. Ракитов А.И. Философия компьютерной революции.– М.1991. – С.32-33.
[3] Толстых А.В. Грядущая культура: гримасы идентичности // Вопросы философии 1997. №2.– С.6
[4] Запесоцкий А.С. "О развитии гуманитарного образования в университете". Магистр № 6 1996.- с. 42-47.
[5] Толстых А.В. Грядущая культура: гримасы идентичности // Вопросы философии 1997. №2.– С.7

уровнем развития информационной культуры личности, позволяющей оперативно и оптимально добывать, обрабатывать и использовать необходимую информацию. В наши дни гуманитарное образование требует сосредоточить внимание на совершенствовании методики отбора предлагаемой для изучения информации. Системность изложения, качество фактологического материала должны быть и достоверными и в наименьшей степени подвластными конъюктурным соображениям. В связи с этим пришло время научно обоснованного подхода к проблемам отечественного гуманитарного образования, и для этого необходимо четко сформулировать не только его основные цели, но и параметры, определяющие требования к качеству информационной составляющей наполнения цикла гуманитарных дисциплин, что требует формирования адекватной культуры при подготовке школьных специалистов гуманитарного профиля.

С одной стороны, это должно активизировать подготовку и распространение качественных учебных и методических средств, предназначенных для средней и высшей школы, в том числе, учебных фильмов, компьютерных программ, наглядных пособий. С другой стороны, - обеспечить повышенный уровень требований к издаваемым учебникам. Также необходимо оказать помощь и самим преподавателям в непростом для них деле ориентации, в безграничном океане информации, заполонившей страницы учебных, методических и научно-популярных изданий, и лавиной прорывающейся сквозь сайты Internet.

Главная же цель - активизация познавательной самостоятельности студентов в ходе диалога «преподаватель - студент», в ситуации «рождения мысли».

Именно на это необходимо нацелить преподавателей гуманитарных дисциплин, и особую здесь роль все больше приобретают информационные образовательные технологии, компьютерные обучающие программы, Интер-нет и т.д. Все это, действительно, открывает широкие образовательные пер-спективы. Но все же добиться качественных результатов можно лишь на ос-нове соответствующего содержания, его информационной составляющей, а в этом плане преподавание гуманитарных дисциплин, особенно в высшей школе, страдает недостатками. Два из них проступают явственнее всего.

Во-первых, оно жестко предметно и регламентировано.

Во-вторых, - строго нормативно ввиду слабого представления об ин-формационной составляющей гуманитарного блока дисциплин и его потенциальных творческих возможностях. Отчасти, поэтому, наши студенты чаще побеждают на международных олимпиадах, когда речь идет о демонстрации фундаментальных знаний, и проигрывают, когда речь заходит о раскрытии их творческих навыков.

Поэтому в ходе профессиональной переподготовки следует уделять большое внимание вопросам методологии, позволяющим приобрести навыки самостоятельного анализа и оценки поступающей информации, оценки социальных явлений и процессов, выработке определенных алгоритмов, которым можно затем обучить студентов. Преподаватель-гуманитарий должен обладать способностью к рефлексивной деятельности и знать современные подходы к изучению социальной действительности, которых придерживаются представители различных направлений, течений и школ в современной науке и философии. И здесь обнаруживается еще одна проблема, связанная с информативностью образовательного процесса, с тем, что в последние годы студенты и преподаватели высших учебных заведений получили возможность познакомиться с новейшими достижениями в области социально-гуманитарных наук, с наиболее популярными на Западе теориями социального развития и разнообразными, порой альтернативными, методологиями социального познания. Тем самым была заложена основа для перехода нашего образования и науки от монистической интерпретации социальной реальности к плюралистической. И это важно, в плане расширения приобщения к общечеловеческим ценностям, т.к. овладение ими является залогом взаимопонимания, сотрудничества, взаимовыгодного диалога с другими странами и народами.

Однако механистическое распространение этих теоретических, методологических и информационных новаций в сфере образования, без осознания того, что эти теории и методологии возникли в иной социокультурной и языковой среде, что они предназначены для описания и объяснения западных экономических, социальных и политических вариантов развития, значительно снижают образовательный эффект в наших условиях. Учебная информация, поэтому часто носит настолько абстрактный характер, что ее усвоение студентами лишается в дальнейшем какой-либо практической значимости. Информация, утверждал Эшби, не может передаваться в количестве большем, чем это позволяет количество разнообразия. По значимости, широте применимости и общности это один из наиболее фундаментальных принципов информационного описания любых объектов, явлений и процессов. Особую роль принцип необходимого разнообразия играет в гуманитарных областях, в культуре. Сама возможность восприятия каких-либо идей, произведений искусства требует определенной подготовленности, создания необходимых каналов связи и способов кодирования.

Таким образом, преодоление «новых веяний нормативизма» в процессе преподавания гуманитарных дисциплин - первоочередная задача, в преобразовании качества педагогического образования.

Т.А. ШАШКОВА

РАЗВИТИЕ ПОЗНАВАТЕЛЬНОГО ИНТЕРЕСА НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ С ПОМОЩЬЮ МАТЕРИАЛА ПРИКЛАДНОГО ХАРАКТЕРА

Проблема интереса в педагогике и психологии была и остается актуальной. Интерес как очень сложное и значимое для личности образование имеет большое количество трактовок, однако наиболее удачным представляется определение интереса, встречающееся в работах Щукиной Г.И.: «*Интерес выступает как*

избирательная направленность человека на объекты и явления окружающей действительности;

тенденция, стремление, потребность человека заниматься именно данной областью явлений, данной деятельностью, приносящей удовлетворение;

мощный побудитель активности человека, под влиянием которого психические процессы протекают интенсивно, а деятельность становится увлекательной и продуктивной;

особое, избирательное, наполненное активными замыслами, сильными эмоциями, волевыми устремлениями отношение личности к окружающему миру, к его объектам, явлениям, процессам».

Такое определение, синтезируя в себе различные подходы к проблеме интереса, позволяет рассматривать интерес не однобоко, а в целостной структуре личности.

Психологи отмечают связь между наличием у ученика интереса на уроке и продуктивностью его работы.

Общеизвестно, что обучение невозможно при отсутствии внимания. А внимание возникает тогда, когда появляется интерес, поэтому одна из задач учителя – заинтересовать школьников, увлечь их учебным материалом. Не менее важную роль играет наличие интереса при восприятии учебного материала, его запоминании и последующем воспроизведении. Только при наличии интереса мыслительная деятельность будет протекать особенно активно.

Рассмотрим более подробно, как можно использовать материал прикладного характера на уроках математики для формирования познавательного интереса. Начнем с рассмотрения тех методических приемов, которые способствуют *возникновению интереса* на уроке.

Каждый учитель хорошо понимает, какую важную роль в учебном процессе играет грамотно подготовленная вступительная часть урока. Начало урока, если оно глубоко продумано учителем, обычно вызывает у учащихся интерес к теме урока, к содержанию учебного материала или к процессу своей работы.

Если, сообщая тему урока, учитель сможет раскрыть перед учениками практическую ценность получаемых знаний, убедить учеников, что эти знания обязательно пригодятся им в жизни, то это может способствовать возникновению познавательного интереса на уроке. В школьном курсе математики есть много тем, имеющих непосредственное отношение к жизни человека. Например «Пропорция», «Площади фигур», «Масштаб» и др.

Пример. Очень часто на практике нам приходится встречаться с процентами: в медицине они указывают на концентрацию лекарства в растворе, в торговле – на скидки от стоимости товара, предлагаемые магазином в рекламных целях, в банковском деле – размер суммы, которые берет банк за предоставление услуг. Таких примеров можно привести достаточно много, и все *они показывают, насколько широка область применения процентов в реальной жизни.*

Вряд ли оставит учеников равнодушными сообщение о том, что за самыми обычными, неприметными на первый взгляд жизненными фактами стоят строгие математические утверждения. Например, чтобы заинтересовать учеников изучаемым материалом, тема урока «Неравенство треугольника» может быть преподнесена следующим образом.

Учитель, не объявляя тему урока, задает ученикам простой вопрос:

- *Приходилось ли вам когда-нибудь видеть протоптанные на газонах дорожки, словно кто-то «срезал» уголки?*

- *Конечно, и очень часто,* - отвечают ученики.

- *А почему люди так делают?* - спрашивает учитель

- *Потому что так короче,* - отвечают дети.

- *Совершенно верно, но только никто из них даже не догадывается, что этим обычным поступком скрывается теорема, которая носит название «Неравенство треугольника», говорящая о том, что любая сторона треугольника всегда меньше суммы дух других его сторон. Изучению этой теоремы и будет посвящен наш сегодняшний урок.*

Такая яркая форма сообщения темы урока невольно заставит детей включиться в работу.

На этом примере продемонстрирован еще один прием, возбуждающий у учеников интерес на уроке. Заключается он в том, что интерес на уроке может возникнуть, если учитель сможет сообщить тему урока так, что вызовет у детей эмоции, переживания. Это заставит детей активно размышлять, находить сходства в различных жизненных явлениях.

Однако не следует думать, что только демонстрация связи математики с жизнью может пробудить интерес школьников к изучаемому материалу. Опора на имеющиеся знания, полученные при изучении других предметов, тоже очень важна. Ученики с удовольствием рассказывают, что они изучали раньше, сравнивают имеющиеся знания с только что приобретенными, узнают, как можно использовать полученные знания при изучении других предметов. Это делает учеников более активными.

Пример. Изучение темы «Масштаб» дает ученикам возможность продемонстрировать на уроке математики знания, приобретенные при изучении географии. Эта тема не является для учащихся совершенно новой, поэтому они могут решить некоторые задачи по математике по теме «Масштаб» и без объяснений учителя. Но вместе с тем у них появляется возможность сравнить, как решаются предложенные задачи с точки зрения математики, опираясь на тему «Пропорции». Полученные знания позволяют решить также ряд задач из области черчения. Несмотря на то, что эти знания могут пригодиться ученикам несколько позже, они дают возможность показать применение пройденного материала при изучении других предметов.

В начале урока учитель может создать проблемную ситуацию, имеющую место в жизни человека, для решения которой пригодятся полученные на уроках знания. Объявление проблемы настраивает учащихся на активные поиски ее решения, на отыскание зависимости между различными явлениями и причин их возникновения. Например, урок, посвященный знакомству с прямой и обратной пропорциональными зависимостями, можно начать с рассмотрения следующих задач.

Пример. Чтобы приготовить тесто для яблочного пирога на 0,5 кг яблок надо взять 3 яйца, 1 стакан сахара, 1 стакан муки и S чайной ложки соды. Сколько надо взять продуктов, чтобы приготовить пирог, имея 1 кг яблок?

Пример. Расстояние от дома до школы ученик преодолевает за 20 минут. Сколько времени ему потребуется, чтобы вернуться обратно той же дорогой, но со скоростью в два раза большей?

Эти задачи решаются учениками на интуитивном уровне и позволяют ответить на вопрос: что происходит с каждой из искомых величин при изменении заданной величины в несколько раз в каждой из предложенных задач? Ответ позволяет сформулировать определения прямо и обратно пропорциональных величин.

Таким образом, хорошо продуманная учителем вступительная часть урока стимулирует появление познавательного интереса. Дальнейшее развитие интереса происходит в ходе всего процесса обучения, каждый урок вкладывает свою частицу в то, чтобы укрепить интерес к изучаемому предмету. Прикладная направленность является мощным средством достижения этой цели.

Познавательная ценность хорошего урока состоит в том, что он обогащает учащихся знаниями, умениями, навыками. Хорош тот урок, который расширяет кругозор учащихся, сообщает им неизвестные факты и сведения, вооружает школьников практическими умениями, необходимыми им в жизни, дает возможность использовать полученные знания для изучения смежных дисциплин. Живой интерес, любознательность детей на уроке вызывают, прежде всего, те сведения и факты, которые являются для них новыми и необычными. Поражая учеников своей необычностью, они обогащают знания учащихся или существенно меняет их прежние представления.

Пример. Отработка навыков устного счета в 5-6 классах является одной из важнейших задач любого урока математики. Приемы быстрого устного счета всегда интересны детям, поскольку позволяют сэкономить время, затрачиваемое на вычисления. Полученные знания могут пригодиться ученикам не только на уроках математики, но и на других уроках, а также в различных жизненных ситуациях.

Однако познавательный интерес не может все время поддерживаться только новым и неизвестным. Новое и неизвестное всегда рассматривается в сравнении со старым, уже известным: оно потому и поражает, что выделяется на обычном фоне новизной и неожиданностью. Использование прошлого опыта учеников, опора на уже известное, поиск нового в знакомом, является еще одной особенностью уроков, направленных на развитие познавательного интереса.

Пример. При изучении темы «Координаты на плоскости» в 6 классе можно сообщить учащимся, что в жизни им не раз приходилось сталкиваться с координатами на плоскости. Чтобы найти в кинозале место, указанное в билете, сначала вы должны найти нужный ряд, а затем на этом ряду указанное место. И только тогда вы можете быть уверены, что сели на свое место. Заметим, что для того, чтобы сориентироваться в зале вы должны обязательно знать два числа. Похожая ситуация наблюдается и в математике: место точки на плоскости определяется двумя числами – координатами.

Большой вклад в укрепление и развитие познавательного интереса вносит присутствие на уроке заданий, позволяющих учащимся использовать приобретенные знания для познания нового, неизвестного, а также нестандартные формы работы, применяемые учителем на уроке. Среди таких форм работы важную роль играют практические работы по математике, которые позволяют ученикам самостоятельно убедиться в необходимости полученных знаний на практике. Особенно ценными являются практические работы, которые носят измерительный и вычислительный характер.

Таким образом, проблема развития познавательного интереса на уроках математики по-прежнему остается одной из важнейших проблем, которая стоит перед учителем. Интерес является одним из основных и наиболее важных мотивов учебной деятельности, формирование которого есть не только средство, обеспечивающее успешное усвоение учебного материала, но и цель обучения. Разнообразие форм работы на урокс и умело подобранный учителем материал, подчеркивающий связь математики с жизнью и другими науками, являются залогом успеха в решении этой важной методической проблемы.

Т.А. ШАШКОВА

МЕТОДИКА РЕАЛИЗАЦИИ ПРИКЛАДНОЙ НАПРАВЛЕННОСТИ ОБУЧЕНИЯ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ В ОСНОВНОЙ ШКОЛЕ

Пути реализации прикладной направленности обучения математике – чрезвычайно широкая методическая проблема. Существуют различные способы реализации прикладной направленности обучения математике, которые используются учителями как на уроках, так и во внеклассной работе.

Рассмотрим средства, которые позволяют реализовать принцип прикладной направленности обучения на уроках математики.

Одним из основных средств, применение которого создает хорошие условия для достижения поставленной цели, являются *прикладные задачи*, которые могут быть использованы на различных этапах урока в соответствии с их целями и особенностями.

Использование задач как средства мотивации знаний, умений и методов в процессе введения нового материала создает благоприятные условия для реализации связи обучения математике с жизнью и другими науками. Прикладные задачи, призванные мотивировать введение математических понятий, играют важную роль в учебном процессе и представляют собой несомненную ценность. Эти задачи должны быть подобраны так, чтобы их постановка привела к необходимости приобретения учащимися новых знаний по математике, а приобретенные знания позволили решить не только поставленную, но и ряд других задач. Для постановки проблемы перед изложением нового учебного материала следует использовать задачи прикладного характера, которые ясны и понятны школьникам и отличаются простотой решения. Приведем в качестве примера задачи, которые позволяют ввести понятие линейной функции.

Пример 1. Для отправки телеграммы необходимо оплатить услуги связи в размере 10 рублей и заплатить за каждое слово 1 рубль 90 копеек. Выразите зависимость общей стоимости телеграммы от количества слов в ней.

Пример 2. Длина горящей свечи каждый час уменьшается на 2,5 см. Выразите зависимость длины горящей свечи от времени, если длина целой свечи 23 см.

Решение этих задач и рассмотрение еще несколько практических примеров позволяет дать определение линейной функции и познакомиться с ее свойствами.

На этапе закрепления и углубления знаний можно использовать прикладные задачи как при работе со всем классом, так и для индивидуальной работы с отдельными учениками. Эти задачи позволят не только отработать приобретенные умения, но и будут способствовать поддержанию интереса на уроке. Более того, в систему упражнений, предназначенных для закрепления знаний учеников, целесообразно включить прикладные задачи с недостающими или лишними данными, поскольку в реальной жизни редко возникают задачи, в которых присутствуют все необходимые данные и в нужном количестве. Гораздо чаще встречаются задачи, для разрешения которых не хватает данных и приходится пользоваться справочниками и таблицами, или задачи, математическая основа которых заслоняется посторонними элементами и приходится выбирать необходимые для ее решения данные. Такие задачи ставят ученика в роль исследователя, перед которым стоит либо проблема нахождения недостающих для решения задачи данных, либо наоборот, проблема выделения нужной для решения информации из всего объема предложенной.

Пример 3. В комнате, размер которой 3×4×2,5 м, решили покрасить пол. Расход масляной краски 150 г на 1м². Сколько нужно купить банок краски массой 1 кг?

Эта задача является примером прикладной задачи, содержащей лишние данные. После анализа условия следует ответить на вопрос: все ли данные, предложенные в задаче необходимы для ее решения? Дети без труда ответят, что для нахождения площади пола высоту комнаты знать необязательно. Кроме того, надо учесть, что, если в ответе получилось дробное число, его надо округлить до целых, поскольку краска продается только полными банками.

Еще одним важным аспектом использования прикладных задач является применение таких задач для иллюстрации учебного материала. Предложенные ученикам задачи позволяют раскрыть практическую значимость математики, широту применения математических знаний в различных областях человеческой деятельности.

Пример 4. В сберкассе надо было оплатить квитанцию на сумму 25 рублей. За услуги банк берет 3% с оплачиваемой суммы. Сколько денег заплатили в сберкассу?

В работе по закреплению знаний большое значение имеет творческая работа учеников по составлению ими задач с практическим содержанием, для чего может быть использован жизненный опыт учащихся. Это также будет способствовать формированию интереса на уроках математики. Кроме того, составление таких задач может являться одной из форм организации самостоятельной работы учащихся на уроках математики.

Таким образом, прикладные задачи могут быть использованы на различных этапах урока и в домашней работе, служить средством мотивации изучаемого материала и средством развития интереса к предмету, быть темой творческого задания и средством демонстрации применения математических знаний на практике.

Еще одним средством реализации прикладной направленности в обучении математике школьников является использование *информационных текстов*, иллюстрирующих связь математики с жизнью и другими науками. Эти сведения могут быть преподнесены на уроке в форме рассказа, дидактических стихов или сказок как с целью поддержания интереса на уроках математики, так и в качестве эмоциональных разрядок.

Пример 5. Все мы помним, как в детстве мы выбирали водящего в игре с помощью считалочки. И тогда никто не знал, что в основе этого лежит деление с остатком. Если число слов в считалочке разделить на количество участников игры, то без труда можно узнать, кто выйдет из игры.

Этот пример поражает своей неожиданностью и простотой. Он иллюстрирует связь математики с жизнью. А опора на жизненный опыт учеников позволяет привлечь их внимание.

Материал прикладного характера, предлагаемый ученикам на уроках, также может рассказывать им об использовании математических знаний в смежных дисциплинах. В этом случае необходимо затронуть такую важную методическую проблему как реализация межпредметных связей на уроках математики.

Межпредметные связи в обучении математике являются важным средством достижения прикладной направленности обучения математике. Реализация межпредметных связей может быть осуществлена различными путями. Одним из наиболее эффективных способов достижения данной цели является решение прикладных задач из смежных дисциплин, позволяющих продемонстрировать учащимся применение математических методов для решения задач из других предметных областей.

Другой способ реализации межпредметных связей заключается в том, что учитель приводит примеры из других учебных предметов, показывая, таким образом, ученикам, где еще можно встретить изучаемый материал.

Пример 6. Неравенства можно встретить не только в математике. В курсе физики учащиеся знакомятся с понятием силы Архимеда. Условия, при которых тело плавает на поверхности жидкости или тонет, записывается с помощью следующих неравенств:

$F_A > mg$ *(тело плавает)*

$F_A < mg$ *(тело тонет),*

где F_A *- сила Архимеда,*

mg *– сила тяжести.*

Приведенный пример показывает связь математики с физикой, но это не означает, что невозможно осуществить связь математики с другими предметами, в частности, с предметами общественно-гуманитарного цикла: историей, литературой и русским языком.

Одна из важнейших целей, присутствующих на любом уроке – научить детей правильно говорить и грамотно писать. На уроках математики необходимо обратить особое внимание на реализацию этой цели. Следует требовать от учеников правильного написания математических терминов, четкого обоснования выполняемых действий, постоянного повторения правил и формулировок теорем, грамотной речи при устной работе.

Использование на уроках математики материала из художественных произведений, имеющего отношение к предмету, цитат известных людей о необходимости изучения математики позволяет внести в урок элементы занимательности и продемонстрировать связь математики с таким важным школьным предметом, как литература.

Сведения из истории математики способствуют возникновению и поддержанию интереса на уроке, а некоторые могут даже содержать в себе математические задачи, которые ученикам предлагается решить.

Лабораторные и практические работы по математике также являются одним из средств реализации прикладной направленности. Эти формы работы используются на уроках на так часто как прикладные задачи, но имеют не менее важное значение для формирования практических навыков и демонстрации связи математики с жизнью. Отличаясь по содержанию и ведущей учебной целевой направленности, практические и лабораторные работы по математике позволяют не только разнообразить работу учеников на уроках, но и заинтересовать их изучаемым материалом, приобрести необходимые в жизни вычислительные и измерительные навыки,

Таким образом, подводя итог вышесказанному, отметим, что существует огромное количество средств реализации прикладной направленности обучения математики на уроках, при рациональном выборе и использовании которых учебный процесс станет более эффективным и будет способствовать всестороннему развитию личности детей.

Литература:

Фоминых Ю.Ф. Прикладные задачи по алгебре для 7-9 классов: Кн. для учителя. – М.: Просвещение, 1999. – 112 с.

Шапиро И.М. Использование задач с практическим содержанием в преподавании математики: Кн. для учителя. – М.: Просвещение, 1990. – 96 с.

Т.А. ШАШКОВА

РАЗВИТИЕ ПОЗНАВАТЕЛЬНОГО ИНТЕРЕСА И ФОРМИРОВАНИЕ ПРЕДМЕТНОЙ МОТИВАЦИИ УЧАЩИХСЯ В ПРОЦЕССЕ РЕАЛИЗАЦИИ ПРИКЛАДНОЙ НАПРАВЛЕННОСТИ КУРСА МАТЕМАТИКИ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

Вопросы развития познавательного интереса на уроках математики и формирования мотивации изучения данного предмета являются одной из важнейших проблем, которые встают перед учителем математики, заинтересованным в том, чтобы знания, полученные его учениками на уроках математики, не носили формальный характер. Для более эффективной организации учебного процесса учителю необходимо знать, что является для детей наиболее значимым, что может заинтересовать их, что будет способствовать активной работе учеников на уроке. Для выяснения этой информации были опрошены учащиеся среднего звена самой обычной общеобразовательной школы. В анкетировании приняли участие 260 человек, обучающиеся в 6-9 классах. Им предлагалось ответить на 5 вопросов, к каждому из которых прилагалось по 6 вариантов ответа. Более того, если ни один из предложенных вариантов не устраивал ученика, то он мог написать свой ответ. Некоторые ученики воспользовались этим правом, хотя подавляющее большинство учеников довольствовалось предложенными ответами. Вопросы анкеты имели непосредственное отношение к математике и были призваны выяснить два основных момента:

исследовать мотивы, побуждающие детей изучать математику;

выяснить, что вызывает их интерес при изучении математики.

Анкеты было предложено заполнить анонимно, от детей требовалась лишь честность при выборе ответов. Текст анкеты приводится ниже.

I.Что может убедить вас в необходимости изучения математики?

уверенность в том, что полученные знания пригодятся вам в жизни

уверенность в том, что полученные знания пригодятся вам при изучении других предметов

уверенность в том, что математика вам пригодится в будущей профессии

желание получить хорошую оценку за четверть, за год

математика – элемент общечеловеческой культуры и каждый образованный человек обязан ее знать

математика – гимнастика для ума

II. Почему вы учите математику?

пригодится в жизни

пригодится на других уроках

пригодится в будущей профессии

интересно

хочу иметь хорошую оценку по математике

приходится, т.к. не хочу получать плохие оценки

III. Вы активно работаете на уроке:

если материал вам интересен;

если у вас все получается

если вас хвалят за работу

если надо исправить оценку

чтобы не получить двойку

свой ответ

IV. Чтобы урок математики был интересным, учитель должен:
показывать связь математики с жизнью
показывать связь математики с другими школьными предметами
предлагать для решения нестандартные задачи, задачи на смекалку
рассказывать историю математики
давать творческие задания
предлагать больше заданий для самостоятельного решения
V. Какие виды работы вам интересны на уроке?
рассказ учителя о том, где в жизни встречается математика
примеры, подтверждающие, что математика нужна для изучения других предметов
исторические справки
творческие задания
решение задач с необычным содержанием (на смекалку, исторические, жизненные)
подготовка докладов о великих математиках и их открытиях

Результаты опроса приведены в следующей таблице. Стоит отметить, что ученики имели возможность выбора нескольких вариантов ответа, поэтому цифры, приведенные ниже, отражают частоту выбора того или иного ответа.

Варианты ответа	1	2	3	4	5	6
I вопрос	64%	25%	51%	27%	24%	16%
II вопрос	62%	18%	52%	35%	14%	16%
III вопрос	71%	51%	38%	14%	28%	5%
IVвопрос	34%	26%	34%	24%	26%	24%
Vвопрос	33%	28%	19%	24%	31%	14%

Анализ ответов, выбранных учениками разного возраста, позволяет сделать вывод о том, что для учеников наиболее важно быть уверенными в том, что полученные на уроках математики знания пригодятся им в жизни и, в частности, в их будущей профессиональной деятельности. Такие ответы были наиболее предпочтительными во всех параллелях. Среди причин, заставляющих ребят учить математику, именно они занимают первые два места. Третьей, не менее важной причиной является интерес к предмету. Ученики, независимо от возраста отмечают, что они активно работают на уроках, если им интересно, а также когда у них получается справиться с заданием. Таким образом, налицо основные мотивы, побуждающие детей к изучению математики.

Если посмотреть на проблему развития познавательного интереса глазами детей, то наибольший интерес у детей вызывают нестандартные формы работы: решение задач (на смекалку, жизненных и исторических), примеры из жизни, где встречается математики.

Анализ ответов по параллелям позволил отметить некоторые особенности. Ученики 6-х классов очень редко говорили об использовании математических знаний при изучении других предметов, в то время как учащиеся 9-х классов такой ответ выбирали достаточно часто. Это обусловлено тем, что учащиеся младших классов практически не испытывали потребности в математических знаниях на других уроках, эти случаи носили единичный характер. Совсем иная картина наблюдалась в старших классах. Ученики 8-9-х классов, особенно физико-математического профиля, испытывали острую нехватку математических знаний, решая задачи по физике и химии, поэтому для них демонстрация применения математических знаний в смежных дисциплинах была более значима, чем для учеников младших классов.

После того, как учащиеся ответили на все вопросы анкеты, им было предложено выполнить два задания, к которым не было вариантов ответа:

Рассказать о том, какое самое яркое впечатление связано у них с изучением математики в школе.

Вспомнить, пригодились ли им где-нибудь в жизни знания, полученные на уроках математики и написать, где именно.

Наиболее распространенные ответы, данные учениками по первому

вопросу, можно было разделить на следующие группы:

впечатления, полученные от успехов или неудач (первая двойка или пятерка) – 15%

впечатления от открытых уроков межпредметного содержания –10%

впечатления от участия в математических конкурсах, олимпиадах – 7%

впечатления от внеклассных мероприятий по математике – 3%

впечатления от выполнения творческих заданий – 4%

впечатления от изучения конкретных тем – 3%

впечатления от общения с учителем – 3%

ничего не смогли вспомнить – 26%

Анализ ответов на второй вопрос также позволил выделить группы наиболее часто встречавшихся ответов:

всего лишь 5% учащихся смогли привести конкретные примеры, подтверждающие, что математика пригодилась им в жизни

5% учащихся отметили, что математика нужна им для изучения других предметов

43% учащихся связывают использование математических знаний в жизни только со счетом денег при покупке товара в магазине

27% учащихся вообще ничего не смогли ответить на этот вопрос.

остальные ученики писали просто «да» или «нет», не приводя конкретных примеров.

Ответы учеников показывают, что в большинстве случаев у детей не остается ярких впечатлений от уроков математики, которые чаще всего проходят традиционно, не оставляя в памяти ничего, кроме решения стандартных задач и примеров. Отметим, что ни один ребенок не написал в анкете о своем желании оставить на уроках математики все, как есть. Это еще раз должно заставить учителя задуматься о том, как сделать уроки эмоционально насыщенными, яркими, запоминающимися. Дети испытывают необходимость в новых впечатлениях, в новых знаниях, расширяющих их кругозор. Ученикам интересно, где могут пригодиться полученные на уроках математики знания, особенно за пределами школы. Так почему бы ни пойти им навстречу и ни дать им возможность самим убедиться в том, какие огромные возможностях открываются перед человеком, обладающим запасом знаний в области математики.

Т.Ш. ШИХНАБИЕВА

ОДИН ИЗ СПОСОБОВ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ УЧЕБНОЙ ИНФОРМАЦИИ ПРИ ДИСТАНЦИОННОЙ ФОРМЕ ОБУЧЕНИЯ

В настоящее время в нашей стране накоплен значительный опыт по дистанционному образованию. Учебный процесс при дистанционной форме обучения протекает в информационной среде, которая имеет ряд составляющих. К ним относятся: компьютер, программное обеспечение, линия связи, правила и умения работать в среде и т.д. Одной из главных составляющих информационной среды является электронное представление собственно учебного материала, отличительной чертой которого является наличие в его структуре определенной модели.

Вашему вниманию предлагаю некоторые свои соображения по организации технологий обучения в вузе, т.к. непосредственно занимаюсь вопросами представления (моделирования) учебной информации и самого процесса обучения по дистанционной форме. Известно, что учебный материал с использованием информационных и коммуникационных технологий можно представить в виде: обучающей программы (в них описываются подлежащие усвоению знания, умения и навыки, а также алгоритмы овладения ими); семантических сетей; процедурных моделей (совокупность процедур, хранящихся в базе данных и вырабатывающих в случае их активизации ответ, используемый для сравнения с ответом обучаемого) и т.д.

Кроме того, целесообразно использовать компьютерные технологии как инструменты построения знаний обучаемых, а не в качестве обучающей среды. Эти инструменты включают в себя (но не ограничивают ими): базы данных, крупноформатные таблицы, семантические сети, экспертные системы, средства мультимедиа/гипермедиа. Необходимо также иметь обучающие системы, которые позволили бы получать учебную информацию на полиэкране (обучаемому важно видеть всю панораму излагаемого материала и взаимосвязи его понятий, а не отдельные его элементы). Информацию по теме лекции должна представляться в естественной форме.

Для моделирования учебного материала по дистанционной форме обучения необходим способ, позволяющий придать логической структуре учебной информации наглядный и то же время, достаточно строгий характер. Таковым, на наш взгляд, является представление учебного материала в одной из форм представления знаний – семантической сети. Семантическую сеть можно изобразить в виде ориентированного графа, вершины которого означают понятия изучаемой предметной области. Соединение двух вершин графа символизируют наличие между понятиями учебного материала определенного отношения или связи. Именно, это и позволяет использовать семантические сети в качестве моделей, которые объединяют в себе черты и знака и объекта. Это преимущество семантических моделей позволяет легче выявить и показать логические отношения в учебном материале.

Для описания семантических сетей существует семантический язык (СЯ), с помощью которого выделяются объекты {Ai} и отношения {Ri}. Здесь {Ai} и {Ri} входят в множество компонент {SOk}. В данном случае под компонентами понимают не только объекты и отношения, но и составленные из них комплексные объекты и различные ситуации. Компонентами могут быть и логические составляющие: истинность и ложь. Компонентам сопоставляются элементы одного и того же набора – вершины. Следует отметить, что деление компонент на объекты и отношения является условным. Отношения могут рассматриваться как объекты, связанные своими отношениями. Объекты могут указывать на тип отношения.

Основанием для разработки компьютерных семантических сетей выступает система традиционных дидактических материалов и современных форм представления знаний.

Большие выразительные возможности, естественность и наглядность данной системы представления учебной информации, близость структуры сети к структуре фраз естественного языка является достоинством семантических сетей, позволяющих применять их для представления знаний с помощью компьютерных технологий по дистанционной форме обучения.

Известно, что при традиционной форме обучения преподаватель для учета личных и индивидуальных особенностей обучаемого корректирует процесс обучения, используя для этого субъективно осознанную модель обучаемого, а в случае ДФО такой возможности у преподавателя нет. Поэтому предложенную нами модель можно использовать и для представления непосредственно самого процесса обучения при дистанционной форме, где преобладает самостоятельная интерактивная работа обучаемых с учебным материалом.

Семантические модели также можно использовать и при контроле знаний обучаемых, в качестве инструмента построения знаний. В процессе создания семантических сетей обучаемые должны анализировать структуру своих собственных знаний, что помогает им включать новые знания в структуру уже имеющихся знаний. Результатом такого обучения является эффективное использование приобретенных знаний.

Итак, представление учебного процесса в виде семантической модели при дистанционной форме обучения позволяет: учитывать учебные ситуации; связывать новые понятия с существующими понятиями и представлениями, что улучшает понимание; осуществлять глубокую реорганизацию знаний, что повышает способность применять знания в новых ситуациях; при логическом выводе дойти от обобщенных понятий к конкретным понятиям изучаемой предметной области; реализовать деятельностный подход и осуществлять обратную связь.

Е.И.ЩУКИН

ОПТИМАЛЬНАЯ СИСТЕМА МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ СТУДЕНТОВ I КУРСА ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНЫХ ФАКУЛЬТЕТОВ КЛАССИЧЕСКИХ УНИВЕРСИТЕТОВ

В основу указанной системы математического образования положен принцип единства трех линий математического анализа явлений действительности -стохастической, детерминистической и компьютерной - в сочетании с принципом мотивации учебной деятельности изучающих, дисциплину «Математика - общий курс». В дисциплине изучаются:

Теория вероятностей (случайные события; дискретные и непрерывные случайные величины; предельные теоремы).

Математический анализ (функции; пределы; производные; дифференциалы; интегралы; дифференциальные уравнения и их системы).

Указанные разделы изучаются на I курсе естественнонаучных факультетов классических университетов, где - в соответствии с учебными планами - I семестр составляет 18 учебных недель, II семестр 15 недель и каждую неделю проводятся одна двухчасовая лекция и один двухчасовой семинар (практическое занятие).

Оптимальный учебный план (рабочий план) выглядит следующим образом:

I семестр (18 недель) Теория вероятностей событий (ч. 1 - «Случайные события»)

1. Классификация событий. Определения вероятности (классическое; статистическое; геометрическое). 2/2

2. Математическое и компьютерное моделирование ряда реальных задач. 2/2

3. Метод математической индукции. Элементы комбинаторики. 2/2

4. Сумма и произведение событий. Теоремы о нахождении вероятности суммы событий. 2/2

5. Зависимые и независимые события. Условная вероятность события. Теоремы о нахождении вероятности произведения событий. 2/2

6. Полная вероятность события. Теорема о переоценке вероятностей гипотез (формула Байеса) 2/2

Математический анализ (дифференциальное и интегральное исчисления)

7. Основные числовые множества. Координаты точки на плоскости. 2/2

8. Функция. Взаимо-обратные функции. 2/2

9. Основные элементарные функции. 2/2

10. Числовые последовательности; их сходимость или расходимость. 2/2

11. Предел функции непрерывного аргумента. Теоремы о пределах. 2/2

12. Первый и второй замечательные пределы. 2/2

13. Непрерывность. Понятие производной. 2/2

14. Основные правила дифференцирования. Производные основных элементарных функций. 2/2

15. Общая схема исследования функции. 2/2

16. Дифференциал функции. 2/2

17. Уравнения Мальтуса и Ферхюльста-Перла (логистическое). 2/2

18. Резерв.

II семестр (15 недель)

19. Первообразная функция и неопределенный интеграл. Основные методы интегрирования. 2/2

20. Определенный интеграл. Теорема Ньютона-Лейбница. 2/2

21. Аналитические и численные методы нахождения определенных интегралов. 2/2

22. Несобственные интегралы I и II рода. 2/2

Теория вероятностей событий (ч. II)

23. Дискретные случайные величины (ДСВ). Закон распределения ДСВ. 2/2 Числовые характеристики ДСВ.

24. Равномерное дискретное распределение. Теорема о повторении опытов. 2/2 Формулы Бернулли и Пуассона.

25. Распределение Бернулли, Пуассона и геометрическое. 2/2

26. Непрерывная случайная величина (НСВ). Интегральная и 2/2 дифференциальная функции распределения; их свойства и графики.

27. Числовые характеристики НСВ. Равномерное непрерывное и 2/2 экспоненциальное распределения.

28. Нормальное распределение. Правило «трех сигм». 2/2

29. Неравенство и теорема Чебышева. 2/2

30. Теорема Ляпунова (центральная предельная теорема) и 2/2 следствие из нее.

Дифференциальные уравнения и их системы

31. Основные понятия и определения. Уравнения с разделенными 2/2 и разделяющими переменными. Линейные уравнения I порядка и решение их методом Лагранжа.

32. Линейные уравнения II порядка и их решение методом Лагранжа. 2/2

33. Нормальные линейные системы дифференциальных уравнений 2/2 I порядка.

Основой методического обеспечения математического образования являются материалы лекций и семинаров, где — наряду с традиционными формами обучения - широко используются компьютерные программы, составляющие т.н. «Библиотеку стандартных программ». Эти программы - двух основных видов: программы - компьютерные модели реальных задач и программы-иллюстраторы тех или иных математических методов. Укажем схему применения этих программ, рассмотрев следующие 2 задачи (обе они решаются методом статистических испытаний на одной из первых лекций по теории вероятностей).

Задача 1. Случайным образом (наудачу) взяты 2 числа: $0 < x < 2$; $0 < y < 2$. Найти x* y и y/x и сравнить x*y? 1; y/x? 2.

Каждый из участников эксперимента выбирает свою пару чисел (x; y), выступая тем самым в роли «датчика случайных чисел», и сравнивает указанные выше произведение и отношение с 1 и 2. Проводящий эксперимент дает прогноз: примерно 4 человека из 10 выбрали пару (x; y) таким образом, что у них: x*y<1; y/x<2. Простым подсчетом узнаем реальную относительную частоту указанного выше события (выбор такой пары (x; y), что: x*y<1; y/x<2) и сравним с предсказанием. Обсуждая с участниками эксперимента его ход и результаты, приходим к выводу, что мы методом статистических испытаний на небольшой, как правило, выборке, вычислили и это мы уже указали - относительную частоту этого события. Как изменится результат, если объем выборки увеличить и - главное - как это сделать? Откуда проводящий эксперимент узнал число 0,4, к которому -в определенный, конечно, степени - сходится результат и по весьма большой выборке.

Ответами на эти вопросы являются следующие соображения: 1) можно решить задачу на основе геометрического определения вероятности события (используя для вычисления площади некоторой фигуры понятие определенного интеграла); 2) можно оставить - на языке Бейсик, например, - компьютерную программу (и даже не одну!), осуществляющие весьма большую выборку. Результаты счета по программам ВМР 11 и ВМР 12 (Случайная пара чисел) и сами программы приводятся ниже:

ВМР II

```
10 REM СЛУЧАЙНАЯ ПАРА ЧИСЕЛ
20 INPUT «ВВЕДИТЕ ЧИСЛО N»; N
30 A = 0
40 M = 0
50 FOR I = 1 TO N
60XI = 2*RND(1)
70YI = 2*RND(1)
80TI = XI*YI
85 LI = YI/XI
90 IF TK-1 AND LI<=2 THEN 100 ELSE 110
100M=M+1
110A=A+1
120 NEXT I
*
130W=M/N
140 PRINT "W=";W
150 END
```

Результаты:

N=100 W=0,4

N=1000 W=0,396

N=1000000 W-0,384264

N=10000000 W=0,3849506

BMP 12

```
INPUT "enter N " , n
T=0
FORa=lTOn
X=RND*2
Y=RND*2
IF (x*y<=l) AND (y/x<=2) THEN t-t+1
NEXT a
PRINT "it is"; t/n
```

Результаты:

N=100t=0,4

N=1000 t=0,396

N=1000000 t=0,384264

N=10000000 1=0,3849506

Задача 2. Наудачу (случайным образом) выбраны два целых числа (1; т): -4<1<4; -4<т<-4; которые затем используются для составления «случайного» квадратного уравнения x + 21x + m = 0. Какова вероятность того, что составленное таким образом уравнение не имеет действительных (вещественных) корней?

Как и в предыдущем случае, проведем эксперимент: предложим выбрать указанную пару целых чисел (1, т) группе студентов и затем подсчитаем - как и в предыдущем случае - относительную частоту события А, под которым понимается выбор такой пары

л

(1; т), что дискриминант указанного выше квадратного уравнения меньше нуля (1 - т<0). Аналогично предыдущему обсуждается вопрос о том, как увеличить объем выборки для уточнения полученных результатов и как другим способом отыскать указанную выше характеристику события А.В результате приходим к следующим соображениям: 1) можно

- по существу на основе классического определения вероятности события - определить указанную вероятность события А, используя целочисленную решетку (квадрат, в котором

9*9=81 точка, в том числе 10 точек таких, где т>1 - это ясно каждому, кто представляет расположение параболы т=1 , в указанном целочисленном квадрате:

-4< 1 < 4; -4 < m < 4; 2) можно составить на языке Бейсик компьютерную программу - и опять-таки даже не одну, которые осуществляют большие по объему выборки. Две таких программы входят в составленную, как уже указывалось, «Библиотеку стандартных программ», где - наряду с программами указанного типа, т.е. осуществляющими компьютерное моделирование различных задач - имеются программы, которые просто иллюстрируют, например, вычисление определенных интегралов методом трапеций (ВМР30) или методом Монте-Карло (ВМР31).

Приведем и эти программы и результаты их работы:

BMP30

(Метод трапеций)

```
5  CLS
10 DATA 10, 0. 1,1e-06
20 DEFfnf(x) = sqr(l+x 2)
30 GOSUB 1000
40 STOP
1000REM
1010 READ n, a, b, e
1020 GOSUB 1100
1030 n=2*n
1040 yl=y
1050 GOSUB 1100
1060 y=y*h
1070 IF ABS(y-yl) > e THEN 1030
1080 PRINT "y="; y
1090 RETURN
1100h=(b-a)/n
1110y=.5*(fnf(a)+fhf(b))
1120FORk=lTOn-l
1130y=y+fhf(a+k*h)
1140NEXTk
1150 RETURN
1160 END
```

Результат: y = 1,147793

BMP31

```
10 REM МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО
20 PRINT «Подинтегральная функция задается оператором 30»
30DEFFNI(X)=SQR(1+X 2)
40 INPUT «введите пределы интегрирования А, В»; A,B
50 INPUT «введите число случайных испытаний N"; N
60 S=O:D=B-A
70 FOR 1=1 TON
80 X=A+D*RND(1):S=S+FNI(X)
90 NEXT I
100 I=S*D/N
110 PRINT "!=";!
120 END
```

Результаты:

N=100 1=1,150524

N=10001=1,148811

N = 100000 1=1,147307

N=1000000 1=1,146735

Таким образом, в «Библиотеке стандартных программ» действительно рассматриваются компьютерные программы двух основных видов: программы - компьютерные модели реальных задач и программы - иллюстраторы тех или иных математических методов. Всего в «Библиотеке стандартных программ» «30 программ, список которых постоянно пересматривается и пополняется. Кроме того, помимо программ, составленных на Бейсике, в «Библиотеку стандартных программ» включаются теперь и программы, составленные на Паскале. Приведем 2 такие программы, составленные студентками экономического факультета ЯрГУ им. П.Г.Демидова Сашей Субботиной и Верой Бондаренко.

```
Program puasson;
Function st (a:real:; b:integer):real;
Var c:real; i: integer;
Begin
If (b=0) then st:=l else begin
Р.—о
\^. л
For I:=2 to b do C:=c*a; St:=c; End; end;
function Fact (n:integer):longint; var Irinteger; clongint; begin c:=l;
if (n=l) or (n=0) then Fact:=l else begin
for I:=2 to n do c~c*I; Fact:=c; End; End;
Var p,a:real; N,m:longint;
Begin
Write ('Введите n (n очень велико) - число испытаний:');
Readln (n);
Writeln ('Введите p (p очень мало) - вероятность');
Writeln (появления события в каждом из n испытаний:');
Readln (p);
Repeat
Writeln ('Введите m - число появлений события');
Writeln ('во всех испытаниях:');
Readln (m);
If (m>n) then \vriteln ('Думай!');
Until (m<=n);
A:=n*p;
Writeln ('Вероятность того, что при n испытаниях'); Writeln ('число появлений события равно т',); Writeln ('т.е. Р(т;п):', St(a,m)* Exp(-a)/Faet(m): 5 : 4); Writeln ('Ожидаемое значение т:', а : 3 : 2); Writeln ('Дисперсия d:', а : 3 : 2); Writeln ('Стандартное отклонение er:',sqrt(a) :3 : 2); Readen; End.
```

Программа предназначена для нахождения числовых характеристик распределения Пуассона.

Результаты:

N = 500 п=100 п = 200 п-300

Р = 0,01 р = 0,05 р = 0,002 р-0,05

М = 2 т = 3 т = 2 т=10

Р = 0,0842 Р = 0,1404 Р = 0,0536 Р = 0,0486

М=5 т=5 т=0,4 т=15

D=5 d=5 d=0,4 d=15

a=2,24 a=2,24 a=0,63 a=3,87

```
program bernulli;
uses crt;
var
m, n, I: longint;
p, s, si, pi: real;
function f (a: longint): longint;
(считает факториал числа)
var
I, fl: longint; Begin
Ifa=0thenf:=l else Begin
Fl:=l;
For I:=l to a do
Fl:=fl*I;
F:=fl; End; End; Begin Clrscr;
Write ('Введите m, n, p:'); Readln (m, n, p); If m>n then writeln ('m>n') else Begin
If p=l then pl:=0 else
Pl:= (f(n) / f(m) / f(n-m)* exp (m*ln (p) )* exp ((n-m)* In (1-p)); Writeln('P=',pi : 6 : 5); Writeln ('Мат. Ожидание M=', n*p : 5 : 4); Writeln ('Дисперсия D=', (n*p* (1-p) ) : 5 : 4);
Writeln ('Среднее квадратическое отклонение Q=', (sqrt (n*p* (1-p))): 5 : 4); End;
End.
```

[=5	9	=7	=1
=20	10	=14	=
=0,5	0,3	=0,3	=
=	0.0001	=	=

M=10

D=2.1Q=1.4391

D=2.94Q=1.7146

D=2.5Q=1.5811

ВЕСТНИК

Московского государственного областного университета

№ 7

Серия "ФИЗИКА - МАТЕМАТИКА"

Верстка и оформление: Силантьев Д.А.

Подписано в печать: 09.11.2005г.
Формат бумаги 60x86 $/_8$. Бумага офсетная. Гарнитура "SchoolBookC".
Усл.п.л. 13. Тираж 500 экз. Заказ №310.

Издательство МГОУ
105005, г. Москва, Радио, д. 10а,
т. 2564163, факс 2654162.