ISSN 2072-8387 (print)
ISSN 2310-7251 (online)

МГОУ

Вестник

Московского государственного областного университета

Серия

Физика-математика

ЭЛЕКТРОННАЯ ПЛАЗМА И ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ ОТ МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ И ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПЛЁНОК

ОБ АЛЬТЕРНАТИВНОМ ВЫЧИСЛЕНИИ КОВАРИАНТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С ПРИЛОЖЕНИЕМ К ПРОБЛЕМАМ МЕХАНИКИ, ФИЗИКИ И ГЕОМЕТРИИ

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА VISAR ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ФРОНТА УДАРНОЙ ВОЛНЫ В ГАЗЕ И ТВЁРДОЙ ПОВЕРХНОСТИ

2019/ № 1

ВЕСТНИК
МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
ОБЛАСТНОГО УНИВЕРСИТЕТА

ISSN 2072-8387 (print) 2019 / № 1 ISSN 2310-7251 (online)

серия
ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА

Рецензируемый научный журнал. Основан в 1998 г.

Журнал «Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика» включён Высшей аттестационной комиссией при Министерстве образования и науки Российской Федерации в «Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук» по следующим научным специальностям: 01.04.02 – Теоретическая физика (физико-математические науки); 01.04.07 – Физика конденсированного состояния (физико-математические науки) (См.: Список журналов на сайте ВАК при Минобрнауки России).

The peer-reviewed journal was founded in 1998

«Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics» is included by the Supreme Certifying Commission of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation into "the List of leading reviewed academic journals and periodicals recommended for publishing in corresponding series basic research thesis results for a Ph.D. Candidate or Doctorate Degree" on the following scientific specialities: 01.04.02 – Theoretical physics (physical-mathematical sciences); 01.04.07 – Physics of the condensed state (physical-mathematical sciences) (See: the online List of journals at the site of the Supreme Certifying Commission of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation).

ISSN 2072-8387 (print) 2019 / № 1 ISSN 2310-7251 (online)

series
PHYSICS AND MATHEMATICS

BULLETIN OF THE MOSCOW REGION
STATE UNIVERSITY

Учредитель журнала «Вестник Московского государственного областного университета»:
Государственное образовательное учреждение высшего образования Московской области
Московский государственный областной университет

Выходит 4 раза в год

ISSN 2072-8387 (print)
ISSN 2310-7251 (online)

Рецензируемый научный журнал «Вестник московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика» публикует статьи по математическим проблемам термодинамики, кинетики и статистической физики; теории конденсированного состояния классических и квантовых, макроскопических и микроскопических систем; изучению различных состояний вещества и физических явлений в них; статистической физике и кинетической теории равновесных и неравновесных систем; теоретическому и экспериментальному исследованию физических свойств неупорядоченных неорганических систем; изучению экспериментального состояния конденсированных веществ и фазовых переходов в них. Журнал адресован ученым, докторантам, аспирантам и всем, интересующимся достижениями физико-математических наук.

Журнал «Вестник Московского государственного областного университета. Серия «Физика-Математика» зарегистрирован в Федеральной службе по надзору за соблюдением законодательства в сфере массовых коммуникаций и охране культурного наследия. Регистрационное свидетельство ПИ № ФС 77-73344.

Индекс серии «Физика-Математика» по Объединенному каталогу «Пресса России» 40723

Журнал включён в базу данных Российского индекса научного цитирования (РИНЦ), имеет полнотекстовую сетевую версию в Интернете на платформе Научной электронной библиотеки (www.elibrary.ru), с августа 2017 г. на платформе Научной электронной библиотеки «КиберЛенинка» (https://cyberleninka.ru), а также на сайте Московского государственного областного университета (www.vestnik-mgou.ru).

Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. – 2019. – № 1. – 120 с.

Адрес Отдела по изданию научного журнала «Вестник Московского государственного областного университета»
г. Москва, ул. Радио, д.10А, офис 98
тел. (495) 723-56-31; (495) 780-09-42 (доб. 6101)
e-mail: vest_mgou@mail.ru; сайт: www.vestnik-mgou.ru

Founder of journal «Bulletin of the Moscow Region State University»:
Moscow Region State University

Issued 4 times a year

ISSN 2072-8387 (print)
ISSN 2310-7251 (online)

The reviewed scientific journal "Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics-Mathematics" publishes articles on mathematical problems of thermodynamics, kinetics and statistical physics; the theory of the condensed state of classical and quantum, macroscopic and microscopic systems; the study of various states of substance and physical phenomena in them; statistical physics and the kinetic theory of equilibrium and non-equilibrium systems; theoretical and experimental research of physical features of disordered inorganic systems; the study of the experimental state of condensed substances and phase transitions in them. The journal is addressed to scientists, doctoral students, PhD students and everyone interested in the achievements of physical and mathematical sciences.

The series «Russian Philology» of the Bulletin of the Moscow Region State University is registered in Federal service on supervision of legislation observance in sphere of mass communications and cultural heritage protection. The registration certificate ПИ № ФС 77 - 73348.

Index series «Russian Philology» according to the union catalog «Press of Russia» 40718

The journal is included into the database of the Russian Science Citation Index, has a full text network version on the Internet on the platform of Scientific Electronic Library (www.elibrary.ru), and from August 2017 on the platform of the Scientific Electronic Library "CyberLeninka" (https://cyberleninka.ru), as well as at the site of the Moscow Region State University (www.vestnik-mgou.ru)

Bulletin of the Moscow State Regional University. Series: Physics and Mathematics. – 2019. – № 1. – 120 p.

The Editorial Board address:
Moscow Region State University
10A Radio st., office 98, Moscow, Russia
Phones: (495) 723-56-31; (495) 780-09-42 (add. 6101)
e-mail: vest_mgou@mail.ru; site: www.vestnik-mgou.ru

СОДЕРЖАНИЕ

РАЗДЕЛ I. МАТЕМАТИКА

РАЗДЕЛ II. ФИЗИКА

РАЗДЕЛ III. ТЕОРИЯ И МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ И ВОСПИТАНИЯ

CONTENTS

SECTION I. MATHEMATICS

SECTION II. PHYSICS

SECTION III. THEORY AND METHODS OF TEACHING AND EDUCATION

РАЗДЕЛ I. МАТЕМАТИКА

УДК 519.683.5
DOI: 10.18384-2310-7251-2019-1-6-15

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ ГАММЕРШТЕЙНА ПЕРВОГО РОДА С ПРИБЛИЖЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ

Усенов И. А.[1], Кенжебаев М. К.[2]

[1] *Кыргызский Национальный Университет имени Ж. Баласагына*
720033, г. Бишкек, ул. Фрунзе, д. 547, Кыргызстан

[2] *Кыргызский Экономический Университет имени М. Рыскулбекова*
720033, г. Бишкек, ул. Т. Молдо, д. 58, Кыргызстан

Аннотация. В Гильбертовом пространстве исследован класс нелинейных операторных уравнений первого рода. Построено приближенное решение, устойчивое относительно исходных данных задачи. Доказана сходимость приближенного решения к точному решению исходного уравнения. Произведён выбор параметра регуляризации от погрешностей.

Ключевые слова: уравнение Гаммерштейна, регуляризация, сходимость, уравнение первого рода.

REGULARIZATION OF THE SOLUTION TO THE HAMMERSTEIN OPERATOR EQUATION OF THE FIRST KIND WITH AN APPROXIMATELY SPECIFIED OPERATOR

I. Usenov[1], M. Kenzhebaev[2]

[1] *Kyrgyz National University named after Jusup Balasagyn*
ul. Frunze 547, 720033 Bishkek, Kyrgyzstan

[2] *Kyrgyz Economic University named after M. Ryskulbekov*
ul. T. Moldo 58, 720033 Bishkek, Kyrgyzstan

Abstract. A class of nonlinear operator equations of the first kind is investigated in the Hilbert space. An approximate solution is constructed that is stable with respect to the initial data of the problems. The convergence of the approximate solution to the exact solution of the original equation is proved. The regularization parameters of the errors are selected.

Keywords: Hammerstein equation, regularization, convergence, equation of the first kind.

Регуляризации решения линейного и нелинейного операторного уравнения в гильбертовом пространстве посвящены работы авторов [1–7; 9; 10; 12].

В работе [11] для решения операторного уравнения первого рода Гаммерштейна, когда точно задан линейный оператор, построен регуляризирующий оператор.

Постановка задач

В данной работе исследовано операторное уравнение первого рода Гаммерштейна в гильбертовом пространстве H

$$AF(z)=u, \tag{1}$$

когда приближенно задан линейный оператор, то есть вместо оператора A известно его приближенное значение A_h такое, что

$$\|A_h-A\|_H\le h, \tag{2}$$

где $A:H\to H$ – линейный самосопряжённый положительный оператор,

$F:H\to H$ – нелинейный оператор, дифференцируемый по Фреше.

В интегральном случае AF(z) определяется как:

$$AF(z)=\int_0^1 K(t,s)M(s,z(s))ds, K(t,s)=K(s,t)\in L_2([0,1]\times[0,1]),$$

$$\int_0^1\int_0^1 K(t,s)z(s)z(t)dsdt>0, M(s,z(s))\in C_{[0,1]\times R},$$

$\|\cdot\|_H$ – норма гильбертового пространства.

Допустим, что при $u=u_0$ уравнение (1) имеет точное решение z_0, то есть

$$AF(z_0)=u_0 \tag{3}$$

и истокообразно представимо

$$z_0=\sigma A\vartheta_0, \tag{4}$$

где $\sigma>0$, $\sigma\in R$, $\vartheta_0\in H$.

Целью данной работы является построение регуляризирующего оператора для решения операторного уравнения Гаммерштейна первого рода в пространстве Гильберта.

Регуляризация

Наряду с уравнением (1) рассмотрим уравнение:

$$\alpha z+A_hF(z)=u, \tag{5}$$

где $\alpha>0$.

Пусть

$$F(z)=K(z)+\sigma z, \tag{6}$$

где K – нелинейный оператор.

В [11] относительно нелинейного оператора K доказано, что для любого $z_1, z_2 \in H$ он удовлетворяет условию Липшица, то есть:

$$\left\|K(z_1)-K(z_2)\right\|_H \le N\left\|z_1-z_2\right\|_H, N<\sigma, \tag{7}$$

где $\lambda_i < a \le b < \lambda_{i+1}$, $i = 1, 2, \dots$ $a \le F'(z) \le b$, $\sigma=\dfrac{a+b}{2}$, $\left\|K'(z)\right\|_H \le \dfrac{b-a}{2} \equiv N>0$, а также доказана обобщённая лемма Лаврентьева М. М., что при любом $\alpha > 0$ и $\sigma > 0$ имеет место неравенство:

$$\left\|(\alpha E+\sigma A)^{-1}\right\|_H \le \alpha^{-1}. \tag{8}$$

Из (8) следует, что оператор $(\alpha E + \sigma A)^{-1}A$ удовлетворяет неравенству:

$$\left\|(\alpha E+\sigma A)^{-1}A\right\|_H \le \sigma^{-1}. \tag{9}$$

В силу представления (6) из уравнения (5) имеем:

$$\alpha z+\sigma AL_h z+A_h K(z)=u. \tag{10}$$

Оператор $\alpha E + \sigma A_h$ представим в виде:

$$\alpha E+\sigma A_h=(\alpha E+\sigma A)+(\sigma A_h-\sigma A)=(\alpha E+\sigma A)\Big(E+(\alpha E+\sigma A)^{-1}\sigma(A_h-A)\Big).$$

Используя оценки (2) и (8), оценим норму оператора $(\alpha E + \sigma A)^{-1}\sigma(A_h - A)$:

$$\left\|(\alpha E+\sigma A)^{-1}\sigma(A_h-A)\right\|_H \le \sigma h\alpha^{-1}. \tag{11}$$

Пусть имеет место предельное соотношение:

$$\lim_{h\to 0} h\alpha^{-1}(h)=0. \tag{12}$$

Из условия (12) следует, что существует число $h_0 > 0$, такое, что:

$$q_1=\sigma h\alpha^{-1}<1, \tag{13}$$

при $h < h_0$.

При выборе $\alpha(h) = h^\beta$, $0 < \beta < 1$ условие (12) выполняется и $h_0=\left(1/\sigma\right)^{\frac{1}{1-\beta}}>0$.

Тогда в силу теоремы Банаха [8] оператор $E + (\alpha E + \sigma A)^{-1}\sigma(A_h - A)$ имеет обратный оператор, причём справедлива оценка:

$$\left\|\Big(E+(\alpha E+\sigma A)^{-1}\sigma(A_h-A)\Big)^{-1}\right\|_H \le (1-q_1)^{-1}. \tag{14}$$

Таким образом, оператор $\alpha E + \sigma A_h$ имеет обратный оператор, и этот оператор представим в виде:

$$L_{\alpha,h}=(\alpha E+\sigma A_h)^{-1}=\Big(E+(\alpha E+\sigma A)^{-1}\sigma(A_h-A)\Big)^{-1}(\alpha E+\sigma A)^{-1}. \tag{15}$$

Из (15), используя неравенства (8) и (14), получаем:

$$\left\|\left(\alpha E+\sigma A_h\right)^{-1}\right\|_H \le \left(1-q_1\right)^{-1}\alpha^{-1}. \tag{16}$$

Тогда из уравнения (10) переходим к уравнению:

$$z_{\alpha,h} = L_{\alpha,h}u - L_{\alpha,h}A_hK\left(z_{\alpha,h}\right). \tag{17}$$

Введём обозначение:

$$T_{\alpha,h}\left(z_{\alpha,h}\right) = L_{\alpha,h}A_hK\left(z_{\alpha,h}\right). \tag{18}$$

Норма оператора $(\alpha E + \sigma A_h)^{-1}A_h$ удовлетворяет оценке:

$$\left\|\left(\alpha E+\sigma A_h\right)^{-1}A_h\right\|_H \le \left(1-q_1\right)^{-1}\left(h\alpha^{-1}+\sigma^{-1}\right). \tag{19}$$

Оценим норму оператора $T_{\alpha,\mathrm{h},\sigma}(z)$:

$$\left\|T_{\alpha,h}\left(z_1\right)-T_{\alpha,h}\left(z_2\right)\right\|_H = \left\|L_{\alpha,h}A_h\left(K\left(z_1\right)-K\left(z_2\right)\right)\right\|_H. \tag{20}$$

Тогда из (20), используя оценки (7), (19), имеем:

$$\left\|T_{\alpha,h}(z_1)-T_{\alpha,h}(z_2)\right\|_H \le \left\|L_{\alpha,h}A_h\right\|_H\left\|K\left(z_1\right)-K\left(z_2\right)\right\|_H \le$$
$$\le \left(1-q_1\right)^{-1}\left(h\alpha^{-1}+\sigma^{-1}\right)N\left\|z_1-z_2\right\|. \tag{21}$$

Из условия (12) следует, что существует число $\tilde{h}_0>0$, такое, что

$$q_2 = \left(1-q_1\right)^{-1}\left(h\alpha^{-1}+\sigma^{-1}\right)N<1 \tag{22}$$

при $h<\tilde{h}_0 = \left(\left(\sigma-N\right)\left(\sigma\left(\sigma+N\right)\right)^{-1}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}>0.$

Таким образом, оператор $T_{\alpha,\mathrm{h},\sigma}(z)$ является оператором сжатия.

Уравнение (17) решаем методом последовательных приближений.

За нулевые приближения возьмём элемент

$$\tilde{z}_0 = L_{\alpha,h}u. \tag{23}$$

Остальные приближения определяются по формуле:

$$z_{k+1} = \tilde{z}_0 + L_{\alpha,h}A_hK\left(z_k\right) \quad k=0,1,2,\ldots \tag{24}$$

Покажем, что последовательность $\left\{z_\kappa\right\}_{\kappa=0}^{\infty}$ является сходящейся.

Сходимость последовательности $\left\{z_\kappa\right\}_{\kappa=0}^{\infty}$ и функционального ряда вида:

$$\tilde{z}_0+\left[z_1-\tilde{z}_0\right]+\left[z_2-z_1\right]+\ldots+\left[z_k-z_{k-1}\right]+\ldots \tag{25}$$

эквивалентны.

Нулевое приближение $\tilde{z}_0$ удовлетворяет неравенству

$$\left\|\tilde{z}_0\right\|_H \le \left(1-q_1\right)^{-1}\alpha^{-1}\left\|u\right\|. \tag{26}$$

Полагая $k = 0$, из (24), имеем:

$$\left\|z_1 - \tilde{z}_0\right\|_H = \left\|L_{\alpha,h} A_h K\left(\tilde{z}_0\right)\right\|_H \le \left\|L_{\alpha,h} A_h \left(K\left(\tilde{z}_0\right) - K(0)\right)\right\|_H + \\ + \left\|L_{\alpha,h} A_h K(0)\right\|_H \le q_2 \left(\left\|\tilde{z}_0\right\|_H + N^{-1}\left\|K(0)\right\|_H\right). \quad (27)$$

Полагая в (24) $k = 1$; $k = 0$ и вычитая из первого второе, получаем:

$$\left\|z_2 - z_1\right\|_H \le \left\|L_{\alpha,h} A_h \left(K\left(z_1\right) - K\left(\tilde{z}_0\right)\right)\right\|_H \le q_2 \left\|z_1 - \tilde{z}_0\right\|_H \le \\ \le q_2^2 \left(\left\|\tilde{z}_0\right\|_H + N^{-1}\left\|K(0)\right\|_H\right). \quad (28)$$

Далее по методу математической индукции можно доказать, что для любого натурального $k \ge 2$, справедливо неравенство:

$$\left\|z_k - z_{k-1}\right\|_H \le q_2^k \left(\left\|\tilde{z}_0\right\|_H + N^{-1}\left\|K(0)\right\|_H\right). \quad (29)$$

Таким образом, ряд (25) мажорируется следующим числовым рядом:

$$\sum_{k=1}^{\infty} q_2^k \left(\left\|\tilde{z}_0\right\|_H + N^{-1}\left\|K(0)\right\|_H\right). \quad (30)$$

Следовательно, условие $q_2 < 1$ при $h < \tilde{h}_0$ обеспечивает сходимость ряда (30), тогда ряд (25) также является сходящимся. Сумму ряда (25) обозначим через $z_{\alpha,h}$. В силу эквивалентности сходимости последовательности $\left\{z_\kappa\right\}_{\kappa=0}^{\infty}$ и ряда (25) имеем:

$$\lim_{k\to\infty} z_k = z_{\alpha,h} \quad (31)$$

Используя непрерывность оператора $L_{\alpha,h}A_hK$ при $k \to \infty$, переходим к пределу в (24) и, используя предельное соотношение (31), получим:

$$z_{\alpha,h} = \tilde{z}_0 + L_{\alpha,h} A_h K\left(z_{\alpha,h}\right). \quad (32)$$

Таким образом, сходимость ряда (25) доказана.

ТЕОРЕМА 1. Пусть: 1) задан оператор A_h, удовлетворяющий неравенству (2); 2) имеет место предельное соотношение (12). Тогда уравнение (17) при любом $u \in H$, $\alpha > 0$, $\sigma > 0$ и $h < \tilde{h}_0$ имеет единственное решение $z_{\alpha,h} \in H$.

Если решение уравнения (17) при $u = u_0$ обозначить через $z_{\alpha,h}^0$, тогда в силу формулы (32) оно представимо в виде:

$$z_{\alpha,h}^0 = L_{\alpha,h} u_0 - L_{\alpha,h} A_h K\left(z_{\alpha,h}^0\right). \quad (33)$$

Рассмотрим разность $z_{\alpha,h}^0 - z_0$

$$z_{\alpha,h}^0 - z_0 = L_{\alpha,h} u_0 - L_{\alpha,h} A_h K\left(z_{\alpha,h}^0\right) - z_0. \quad (34)$$

Полагая, что $u_0 = \sigma A z_0 + AK(z_0)$, переходим в норму разности $z^0_{\alpha,h} - z_0$

$$\left\|z^0_{\alpha,h} - z_0\right\|_H \le \left\|L_{\alpha,h}\left(\sigma A z_0 - \alpha z_0 - \sigma A_h z_0\right)\right\|_H + \left\|L_{\alpha,h} A_h\left(K\left(z^0_{\alpha,h}\right) - K\left(z_0\right)\right)\right\|_H + \\ + \left\|L_{\alpha,h}\left(A_h - A\right)\left(K\left(z_0\right) - K\left(0\right)\right)\right\|_H + \left\|L_{\alpha,h}\left(A_h - A\right)K\left(0\right)\right\|_H. \quad (35)$$

Используя (4), из (35) имеем:

$$\left\|z^0_{\alpha,h} - z_0\right\|_H \le \alpha\left(1-q_1\right)^{-1}\left(h\alpha^{-1} + \sigma^{-1}\right)\left\|v_0\right\|_H + h\alpha^{-1}\left(1-q_1\right)^{-1}\sigma M\left\|v_0\right\|_H\left(\sigma + N\right) + \\ + h\alpha^{-1}\left(1-q_1\right)^{-1}\left\|K(0)\right\|_H + q_2\left\|z^0_{\alpha,h} - z_0\right\|_H \le \alpha\left(\sigma N^{-1} + \left(1-q_1\right)^{-1}\right)\left\|v_0\right\| + \\ + h\alpha^{-1}\left(1-q_1\right)^{-1}\left(\sigma M\left\|v_0\right\|_H\left(\sigma+N\right) + \left\|K(0)\right\|_H\right) + q_2\left\|z^0_{\alpha,h} - z_0\right\|_H. \quad (36)$$

В силу условия (22) из (36) имеем оценку:

$$\left\|z^0_{\alpha,h} - z_0\right\|_H \le \alpha c_1 + h\alpha^{-1} c_2, \quad (37)$$

$$c_1 = c_3\left(\sigma N^{-1} + \left(1-q_1\right)^{-1}\right)\left\|v_0\right\|_H, \\ c_2 = c_3\left(1-q_1\right)^{-1}\left(\sigma M\left\|v_0\right\|_H\left(\sigma+N\right) + \left\|K(0)\right\|_H\right),\ c_3 = \left(1-q_2\right)^{-1}. \quad (38)$$

Минимизируя правую часть (37), имеем:

$$\alpha\left(h\right) = \sqrt{c_2 c_1^{-1} h}. \quad (39)$$

Подставляем (39) в правую часть (37), имеем:

$$\left\|z^\delta_{\alpha,h} - z_0\right\|_H \le 2\sqrt{c_1 c_2}\sqrt{h}. \quad (40)$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть: 1) выполнены все условия теоремы 1; 2) при $u = u_0$ уравнение (1) имеет точное решение, представимое в виде (4); 3) зависимость параметра регуляризации от погрешности линейного оператора определяется по формуле (39). Тогда решение $z^0_{\alpha,h}$ уравнения (17) при $h \to 0$ сходится к точному решению уравнения (1), а скорость сходимости удовлетворяет условию (40).

Пусть правая часть уравнения (1) задана с погрешностью δ, то есть:

$$\left\|u_\delta - u_0\right\|_H \le \delta. \quad (41)$$

Основная задача, подлежащая исследованию, заключается в построении по приближенным данным $\{A_h, u_\delta\}$ такой последовательности решений $z^\delta_{\alpha,h}$, которая сходится в пространстве H к точному решению z^* уравнения (1) при условии сходимости исходных данных при $\delta, h \to 0$.

Решение уравнения (17) при $u = u_\delta$ обозначим через $z^\delta_{\alpha,h}$. Тогда в силу формулы (32) решение $z^\delta_{\alpha,h}$ представимо в виде:

$$z_{\alpha,h}^{\delta} = L_{\alpha,h}u_{\delta} + L_{\alpha,h}A_h K\left(z_{\alpha,h}^{\delta}\right). \tag{42}$$

Оценим разность $z_{\alpha,h}^{\delta} - z_0$. Используя неравенство треугольника, имеем:

$$\left\|z_{\alpha,h}^{\delta} - z_0\right\|_H \le \left\|z_{\alpha,h}^{\delta} - z_{\alpha,h}^{0}\right\|_H + \left\|z_{\alpha,h}^{0} - z_0\right\|_H. \tag{43}$$

Второе слагаемое в (43) удовлетворяет оценке (37). Оценим первое слагаемое:

$$\left\|z_{\alpha,h}^{\delta} - z_{\alpha,h}^{0}\right\|_H \le \left\|L_{\alpha,h}\left(u_{\delta} - u_0\right)\right\|_H + \\ + \left\|L_{\alpha,h}A_h\right\|_H \left\|K\left(z_{\alpha,h}^{\delta}\right) - K\left(z_{\alpha,h}^{0}\right)\right\|_H \le \delta\alpha^{-1} + q_2 \left\|z_{\alpha,h}^{\delta} - z_{\alpha,h}^{0}\right\|_H. \tag{44}$$

Отсюда в силу (12) имеем:

$$\left\|z_{\alpha,h}^{\delta} - z_{\alpha,h}^{0}\right\|_H \le c_3\delta\alpha^{-1}. \tag{45}$$

Тогда из (43) имеем оценку:

$$\left\|z_{\alpha,h}^{\delta} - z_0\right\|_H \le \alpha c_1 + h\alpha^{-1}c_2 + c_3\delta\alpha^{-1}. \tag{46}$$

Минимизируя правую часть (46), имеем:

$$\alpha(\delta,h) = \sqrt{\left(c_3\delta + hc_2\right)c_1^{-1}}. \tag{47}$$

Подставляем (47) в правую часть (46) имеем:

$$\left\|z_{\alpha,h}^{\delta} - z_0\right\|_H \le 2\sqrt{c_1}\sqrt{c_3\delta + hc_2}. \tag{48}$$

Таким образом, доказана теорема, обобщающая теорему 2.

ТЕОРЕМА 3. Пусть: 1) выполнены все условия теоремы 2; 2) элемент u_{δ} удовлетворяет неравенству (41); 3) зависимость параметра регуляризации от погрешностей определяется по формуле (47). Тогда решение уравнения (17) при $\delta,\ h \to 0$ является приближенным решением уравнения (1). Скорость сходимости удовлетворяет условию (48).

Выводы и результаты исследования

В данной работе доказано, что решение операторного уравнения Гаммерштейна первого рода в пространстве Гильберта является регуляризируемым.

Обоснование регуляризируемости решения заключается в следующих результатах исследования:

1) построен регуляризирующий оператор для решения операторного уравнения первого рода в пространстве Гильберта;

2) доказана сходимость регуляризированного решения к точному решению исходного уравнения;

3) получен выбор параметра регуляризации в зависимости от погрешностей приближенно заданных исходных данных;

4) установленна сходимость и найдена оценка скорости сходимости регуляризированного решения к точному решению.

Статья поступила в редакцию 18.01.2019 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А. Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // Доклады Академии наук СССР. 1963. Т. 151. № 3. С. 501–504.
2. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1974. 223 с.
3. Лаврентьев М. М. О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск: Издательство Сибирского отделения Академии наук СССР, 1962. 96 с.
4. Иманалиев М. И. Методы решения нелинейных обратных задач и их приложение. Фрунзе: Илим, 1977. 231 с.
5. Танана В. П. Методы решения операторных уравнений. М.: Наука, 1981. 150 с.
6. Саадабаев А. Построение регуляризирующих операторов для решения нелинейных операторных и интегральных уравнений первого рода: автореф. дис. … докт. ф.-м. наук. Новосибирск, 1993. 26 с.
7. Саадабаев А. Приближенные методы решения нелинейных интегральных и операторных уравнений 1-го рода. Бишкек. 1997. 218 с.
8. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функции и функционального анализа. М.: Наука. 2004. 572 с.
9. Усенов И.А., Сабиров Я.А. Регуляризация решения нелинейного операторного уравнения первого рода с линейными сходными операторами // Известия Кыргызского государственного технического университета имени И. Раззакова. 2009. № 17. С. 201–205.
10. Santhosh G., Kunhanandan M. Iterative Regularization Methods for III-Posed Hammerstein Type Operator Equation with Monotone Nonlinear Part // International Journal of Mathematical Analysis. 2010. Vol. 4. No. 34. P. 1673–1685.
11. Усенов И. А. Регуляризация решения операторного уравнения Гаммерштейна первого рода // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям в Киргизии: сборник статей. Вып. 41. Бишкек: Илим, 2009. С. 63–67.
12. Усенов И. А. Построение приближенного решения нелинейного операторного уравнения первого рода в гильбертовом пространстве // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2016. № 1. С. 8–14.

REFERENCES

1. Tikhonov A. N. [On the solution of ill-posed problems and method of regularization]. In: *Doklady Akademii nauk SSSR* [Soviet Mathematics], 1963, vol. 151, no. 3, pp. 501–504.
2. Tikhonov A. N., Arsenin V. Ya. *Metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Methods for solving ill-posed problems]. Moscow, Nauka Publ., 1974. 223 p.
3. Lavrent'ev M. M. *O nekotorykh nekorrektnykh zadachakh matematicheskoi fiziki* [About some ill-posed problems of mathematical physics]. Novosibirsk, Izdatel'stvo Sibirskogo otdeleniya Akademii nauk SSSR Publ., 1962. 96 p.
4. Imanaliev M. I. *Metody resheniya nelineinykh obratnykh zadach i ikh prilozhenie* [Methods of solution of nonlinear inverse tasks and their application]. Frunze, Ilim Publ., 1977. 231 p.

5. Tanana V. P. Methods for solution of nonlinear operator equations. Berlin, De Gruyter, 1997. 248 p.
6. Saadabaev A. *Postroenie regulyariziruyushchikh operatorov dlya resheniya nelineinykh operatornykh i integral'nykh uravnenii pervogo roda: avtoref. dis. … dokt. f.-m. nauk* [The construction of regularizing operators for the solution of nonlinear operator and integral equations of the first kind: abstract of D. thesis in Physical and Mathematical sciences]. Novosibirsk, 1993. 26 p.
7. Saadabaev A. *Priblizhennye metody resheniya nelineinykh integral'nykh i operatornykh uravnenii 1-go roda* [Approximate methods for solving nonlinear integral and operator equations of the first kind]. Bishkek, 1997. 218 p.
8. Kolmogorov A. N., Fomin S. V. *Elementy teorii funktsii i funktsional'nogo analiza* [Elements of the theory of functions and functional analysis]. Moscow, Nauka Publ., 2004. 572 p.
9. Usenov I. A., Sabirov Ya. A. [Regularization of solutions of nonlinear operator equations of the first kind with similar linear operators]. In: *Izvestiya Kyrgyzskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta imeni I. Razzakova* [Proceedings of the Kyrgyz State Technical University named after I. Razzakov], 2009, no. 17, pp. 201–205.
10. Santhosh G., Kunhanandan M. [Iterative Regularization Methods for Ill-Posed Hammerstein Type Operator Equation with Monotone Nonlinear Part]. In: *International Journal of Mathematical Analysis*, 2010, vol. 4, no. 34, pp. 1673–1685.
11. Usenov I. A. [Regularization of the solution of the Hammerstein operator equation of the first kind]. In: *Issledovaniya po integro-differentsial'nym uravneniyam v Kirgizii: sbornik statei. Vip. 41* [Studies on integro-differential equations in Kyrgyzstan: a collection of articles. Iss. 41]. Bishkek, Ilim Publ., 2009. pp. 63–67.
12. Usenov I. A. [Construction of an approximate solution of nonlinear operator equations of the first kind in a Hilbert space]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-Matematika* [Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], 2016, no. 1, pp. 8–14.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Усенов Изат Абдраевич – кандидат физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений Кыргызского национального университета имени Ж. Баласагына;
e-mail: iausen@mail.ru

Кенжебаев Мирлан Курманалиевич – старший преподаватель кафедры математических методов в экономике Кыргызского экономического университета имени М. Рыскулбекова;
e-mail: kumir_1985@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Izat A. Usenov – PhD in Physical and Mathematical Sciences, Professor at the Department of Differential Equations, Kyrgyz National University named after Jusup Balasagyn;
e-mail: iausen@mail.ru

Mirlan K. Kenzhebaev – Senior Lecturer at the Department of Mathematical Methods in Economics, Kyrgyz Economic University named after M. Ryskulbekov;
e-mail: kumir_1985@mail.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Усенов И.А., Кенжебаев М. К. Регуляризация решения операторного уравнения Гаммерштейна первого рода с приближенным оператором // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2019. № 1. С. 6–15.
DOI: 10.18384-2310-7251-2019-1-6-15

FOR CITATION

Usenov I. A., Kenzhebaev M. K. Regularization of the solution to the Hammerstein operator equation of the first kind with an approximately specified operator In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*, 2019, no. 1, pp. 6–15.
DOI: 10.18384-2310-7251-2019-1-6-15

РАЗДЕЛ II. ФИЗИКА

УДК. 514.83
DOI: 10.18384-2310-7251-2019-1-16-45

ОБ АЛЬТЕРНАТИВНОМ ВЫЧИСЛЕНИИ КОВАРИАНТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С ПРИЛОЖЕНИЕМ К ПРОБЛЕМАМ МЕХАНИКИ, ФИЗИКИ И ГЕОМЕТРИИ

Гладков С. О.
Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
125997, г. Москва, Волоколамское ш., д. 4, Российская Федерация

Аннотация. С помощью предложенного в работе несложного математического подхода продемонстрировано строгое вычисление символов Кристоффеля, а также тензора Римана, заведомо имеющих правильную геометрическую размерность, что является чрезвычайно важным при решении огромного класса чисто физических задач. В качестве примеров рассмотрены четыре ортогональные системы координат, две из которых это сферическая и цилиндрическая, являющиеся стандартными при изложении любого курса тензорного анализа, а две другие представляют собой параболическую систему координат и ортогональную двухмерную, для которых также продемонстрировано вычисление символов Кристоффеля, оператора Лапласа и тензоров Римана и Риччи, все компоненты которых автоматически имеют правильные геометрические размерности. Продемонстрирован ряд физических приложений описываемого формализма. Рассмотрен пример не ортогональной двухмерной системы координат, с помощью которой приводится подробное вычисление символов Кристоффеля обоих родов и находится выражение для оператора Лапласа с приложением к задачам теории упругости и гидродинамики.

Ключевые слова: тензор деформаций, тензор напряжений, уравнение Навье-Стокса, метрический тензор, ковариантное дифференцирование, оператор Лапласа, ортогональная система координат, символ Кристоффеля, тензор Римана.

ALTERNATIVE CALCULATION OF COVARIANT DERIVATIVES WITH AN APPLICATION TO THE PROBLEMS OF MECHANICS, PHYSICS AND GEOMETRY

S. Gladkov
Moscow Aviation Institute (National Research University)
Volokolamskoe shosse 4, 125997 Moscow, Russian Federation

Abstract. Based on a simple mathematical approach proposed in the paper, we demonstrate a rigorous computation of the Christoffel symbols and the Riemann tensor that obviously have a regular geometric dimension, which is extremely important in solving a huge class of purely physical problems. As examples, we consider four orthogonal coordinate systems, two of which are spherical and cylindrical, i.e. standard for describing any course of tensor analysis, and the other two are parabolic and orthogonal two-dimensional coordinate systems, for which the Christoffel symbols, the Laplace operator, and Riemann and Ricci, whose all components automatically have the correct geometric dimensions, are calculated. A number of physical applications of the described mathematical formalism are demonstrated. An example of a nonorthogonal two-dimensional coordinate system is considered, with the help of which a detailed calculation of the Christoffel symbols of both kinds is given, and an expression is found for the Laplace operator with application to the problems of elasticity theory and hydrodynamics.

Keywords: strain tensor, stress tensor, Navier-Stokes equation, metric tensor, covariant differentiation, Laplace operator, orthogonal coordinate system, Christoffel symbol, Riemann tensor.

Введение

При внимательном знакомстве с теорией ковариантного дифференцирования (см., к примеру, монографии [1–4]) всё время возникает вопрос, связанный с обоснованием правильной размерности метрического тензора или символов Кристоффеля и тензора Римана. Этот момент является ключевым при решении огромного класса не только различных физических задач, но и чисто математических.

Действительно, если, к примеру, выбрать сферическую систему координат и записать её метрику в обычном виде, то имеем:

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2, \tag{1}$$

Для неё всегда вводятся обозначения компонент ковариантного метрического тензора в стандартном виде, как $g_{rr} = 1$, $g_{\theta\theta} = r^2$, $g_{\varphi\varphi} = r^2\sin^2\theta$, [1–3]. При рассмотрении общего случая ортогональной системы координат вместо (1) обычно используется выражение через коэффициенты Ламе h_i [2]. То есть

$$dl^2 = h_1^2 dx_1^2 + h_2^2 dx_2^2 + h_3^2 dx_3^2, \tag{2}$$

При сравнении (2) с (1) все компоненты h_1, h_2, h_3 легко написать.

Как известно [4; 5], метрику в самом общем виде можно представить, как:

$$dl^2 = g_{ik} dx^i dx^k = dx_i dx^i, \tag{3а}$$

где g_{ik} – компоненты ковариантного метрического тензора, dx^i – дифференциалы контравариантных координат, а dx_i – дифференциалы ковариантных координат. Напомним, что по повторяющимся индексам всегда подразумевается суммирование [1].

Если записать определение метрики в виде суммы квадратов, то есть как (см. соответствие на примере (9) и далее):

$$dl^2 = dx^{i2} = dx_i^2 \tag{3б}$$

и воспользоваться заданным законом преобразования к новым переменным, а именно:

$$x_i = x_i\left(x^k\right), \tag{4}$$

где соответственно x_i – это ковариантные координаты, а x^k – контравариантные, то, пользуясь определением элемента длины в виде (3б) и подставляя в него преобразования (4), приходим к соотношению, справедливому в любой системе координат:

$$dl^2 = dx_i^2 = dx^{i2} = \frac{\partial x_n}{\partial x^i}\frac{\partial x_n}{\partial x^k}dx^i dx^k = g_{ik}dx^i dx^k = g^{ik}dx_i dx_k = dx_i dx^i, \tag{5}$$

Надо заметить, что соотношение (5) имеет довольно важное значение и доказывает, что при написании различных типов преобразований, в знаменатели которых входят квадраты дифференциалов, ровным счётом не имеет никакого значения, каким образом мы будем писать соответствующие вторые производные, то есть должно иметь место ковариантное тождество (см., например, (9)):

$$\frac{\delta^2}{\delta x_i^2} = \frac{\delta^2}{\delta x^{i2}} = \frac{\delta^2}{\delta x_i \delta x^i}, \tag{6}$$

справедливое в любой ортогональной системе координат (сокращенно СК), доказательство которого на конкретных примерах будет приведено чуть ниже.

Возвращаясь к (5), заметим (см. [1]), что с помощью базиса $g_{n,i} = \dfrac{\partial x_n}{\partial x^i}$. Можно ввести ковариантный метрический тензор [5]:

$$g_{ik} = \frac{\partial x_n}{\partial x^i}\frac{\partial x_n}{\partial x^k}. \tag{7}$$

С его же помощью определяются и символы Кристоффеля первого рода [1].

$$\Gamma_{ikl} = \frac{\partial x_n}{\partial x^i}\frac{\partial^2 x_n}{\partial x^k \partial x^l}. \tag{8}$$

Как видим, символ Кристоффеля симметричен по индексам k, l и эта формула будет нами использоваться далее.

Мы не станем применять выражение для символа Кристоффеля через линейные производные от метрического тензора, как это приводится, например, в [1–5], а будем пользоваться только определением (7), как наиболее понятным и информативным с точки зрения размерности (см. ниже). Действительно, поскольку x_i и x^k – это координаты, имеющие размерность единицы длины [см], то символ Кристоффеля, как видим из (7), должен иметь размерность обратной длины, то есть:

$$\left[\Gamma_{ikl}\right] = \frac{1}{L}\left(\frac{1}{\text{см}}\right).$$

Причём подчеркнём, что это относится ко всем его двадцати семи компонентам, если говорить о трёхмерном пространстве. Действительно, если буква Г одна для всех компонент, то и размерность у всех должна быть одинакова. В противном случае имеет место довольно странная ситуация. В самом деле, если, к примеру, взять силу $\mathbf{F}$ с компонентами F_i, то можно было бы сказать, что F_1 имеет одну размерность, а, скажем, F_3 – другую. Это утверждение относится и к компонентам метрического тензора (6), для которого все его компоненты должны быть безразмерны. Точно такое же утверждение имеет место и в отношении тензора Римана, размерность всех компонент которого есть $\frac{1}{L^2}$. Фактически, прозвучавший сейчас тезис и заставил нас взяться за написание настоящей статьи для того, чтобы продемонстрировать здесь простой и понятный алгоритм вычисления любой физической или геометрической величины с заведомо правильной размерностью, не используя при этом коэффициенты Ламе.

Масса примеров, рассмотренных далее и приводящих в итоге к правильным результатам, позволяет с уверенностью констатировать, что предложенный подход является корректным.

Ниже в качестве этих примеров будет приведено вычисление символов Кристоффеля и компонент тензора Римана в сферической (стандартной) системе координат, цилиндрической, и в более сложных случаях параболической системы координат, и двухмерной ортогональной и не ортогональной системах криволинейных координат. Также будут приведены некоторые примеры из теории упругости, и при этом автоматически будет строго доказана полная ненужность коэффициентов Ламе.

Основная часть

В любой ортогональной системе координат ковариантные и контравариантные компоненты символов Кристоффеля и тензора Римана тождественно равны [5], то есть:

$$\Gamma_{ikl} = \Gamma^i_{kl} \text{ и } R_{iklm} = R^i_{klm}.$$

В качестве наглядного примера рассмотрим классическую сферическую СК и, согласно (1), введём следующие соответствия:

$$dx^1 = dr, \quad dx^2 = rd\theta, \quad dx^3 = r\sin\theta d\varphi. \tag{9}$$

При этом напомним, что переход от ковариантных декартовых координат к контравариантным сферическим имеет обычный вид:

$$x_1 = x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad x_2 = y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad x_3 = z = r\cos\theta. \tag{10}$$

Это значит, что базис $g_{n,i} = \frac{\partial x_n}{\partial x^i}$ в общем виде можно представить как:

$$\mathbf{g}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{g}_3 \end{pmatrix}, \qquad (11)$$

где, например, единичный вектор $\mathbf{g}_1$ есть:

$$\mathbf{g}_1 = \left(\frac{\partial x_1}{\partial x^1}, \frac{\partial x_1}{\partial x^2}, \frac{\partial x_1}{\partial x^3} \right). \qquad (12)$$

Аналогично для $\mathbf{g}_2$ и $\mathbf{g}_3$. Все они, что вполне очевидно, образуют матрицу преобразований. Для нашего конкретного примера с помощью (9) и (10) легко получаем из (12)

$$\mathbf{g}_1 = (\sin\theta\cos\varphi, \cos\theta\cos\varphi, -\sin\varphi)$$

и, аналогично,

$$\mathbf{g}_2 = (\sin\theta\sin\varphi, \cos\theta\sin\varphi, \cos\varphi), \;\; \mathbf{g}_3 = (\cos\theta, -\sin\theta, 0).$$

Подставив их в (11), находим ортонормированную матрицу преобразований:

$$\hat{\mathbf{g}} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{pmatrix}. \qquad (13)$$

Как видно, её определитель

$$\|\hat{\mathbf{g}}\| = 1. \qquad (14)$$

По определению метрического тензора, согласно (6), имеем:

$$\hat{g} = \hat{\mathbf{g}}\hat{\mathbf{g}}^T.$$

Перемножая матрицу (13) на свою транспонированную, находим в результате метрический тензор в виде единичной матрицы:

$$\hat{g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (15)$$

А потому $\Gamma_{ikl} = g_{is}\Gamma^s_{kl} = \Gamma^i_{kl}$ и $R_{iklm} = g_{is}R^s_{klm} = R^i_{klm}$. Что и требовалось доказать.

Совершенно понятно, что приведённое доказательство является общим для любой ортогональной системы координат (сокращённо ОСК). Что касается не ортогональной системы координат (сокращённо НСК), то с ней дело обстоит несколько сложнее, однако алгоритм доказательства остаётся тем же, но только в этом случае ковариантные и контравариантные компоненты будут не равны, то есть

$$\Gamma^i_{kl} \neq \Gamma_{ikl}, \;\; R^i_{klm} \neq R_{iklm}.$$

С помощью описанного простого правила вычислим теперь все компоненты символа Кристоффеля и начнём со сферических координат.

Как легко видеть, отличными от нуля будут только девять символов Кристоффеля. Это $\Gamma_{r\theta\theta}$, $\Gamma_{r\varphi\varphi}$, $\Gamma_{\theta\varphi\varphi}$, $\Gamma_{\theta r\theta} = \Gamma_{\theta\theta r}$, $\Gamma_{\varphi r\varphi} = \Gamma_{\varphi\varphi r}$ и $\Gamma_{\varphi\theta\varphi} = \Gamma_{\varphi\varphi\theta}$. Все остальные равны нулю. В качестве простого примера покажем, как следует правильно применять формулу (7). Для этого стоит подчеркнуть, что для метрического тензора, записанного в виде матрицы (15), применение общепринятой формулы для символов Кристоффеля второго рода, а именно

$$\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2} g^{is}\left(\frac{\partial g_{sk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{sl}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^s}\right),$$

(см. [1]) вызовет определённые затруднения (как видно, они просто равны нулю). Именно поэтому мы будем использовать общее выражение (7), согласно которому:

$$\Gamma_{ikl} = \frac{\partial x_n}{\partial x^i}\frac{\partial^2 x_n}{\partial x^k \partial x^l}.$$

Вычисление символов Кристоффеля

В соответствии с определениями (9) получаем:

$$\Gamma_{122} = \Gamma^1_{22} = \Gamma_{r\theta\theta} = \Gamma^r_{\theta\theta} = \frac{\partial x_n}{\partial x^1}\frac{\partial^2 x_n}{\left(\partial x^2\right)^2} = \frac{\partial x_1}{\partial x^1}\frac{\partial^2 x_1}{\left(\partial x^2\right)^2} + \frac{\partial x_2}{\partial x^1}\frac{\partial^2 x_2}{\left(\partial x^2\right)^2} + \frac{\partial x_3}{\partial x^1}\frac{\partial^2 x_3}{\left(\partial x^2\right)^2}.$$

Подставляя сюда преобразования (10), а в знаменатель подставляя просто дифференциалы (9), находим в результате, что:

$$\begin{aligned}\Gamma_{r\theta\theta} = \Gamma^r_{\theta\theta} &= \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial^2 x}{\left(r\partial\theta\right)^2} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial^2 y}{\left(r\partial\theta\right)^2} + \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial^2 z}{\left(r\partial\theta\right)^2} = \\ &= \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial^2 x}{\partial\theta^2} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial^2 y}{\partial\theta^2} + \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2}\right) = \\ &= \frac{1}{r^2}\left(-r\sin^2\theta\cos^2\varphi - r\sin^2\theta\sin^2\varphi - r\cos^2\theta\right) = -\frac{1}{r}. \end{aligned} \qquad (16)$$

С помощью этого нехитрого приёма можно легко найти и остальные компоненты символов Кристоффеля. Заметим здесь, что все они в результате применения преобразований (9) для дифференциалов и (10) для координат будут автоматически иметь правильную размерность. В итоге мы приходим к следующей таблице отличных от нуля правильных символов Кристоффеля, которые, как и должно быть, автоматически все имеют размерность $\frac{1}{L}$, где L – размерность длины (см. табл. 1).

Таблица 1. Символы Кристоффеля

$\Gamma_{r\theta\theta}=\Gamma^{r}_{\theta\theta}=-\frac{1}{r}$	$\Gamma_{r\theta\theta}=\Gamma^{r}_{\theta\theta}=-\frac{1}{r}$	$\Gamma_{\theta\varphi\varphi}=\Gamma^{\theta}_{\varphi\varphi}=-\frac{ctg\theta}{r}$
$\Gamma_{\theta r\theta}=\Gamma_{\theta\theta r}=\Gamma^{\theta}_{r\theta}=\Gamma^{\theta}_{\theta r}=\frac{1}{r}$	$\Gamma_{\varphi r\varphi}=\Gamma_{\varphi\varphi r}=\Gamma^{\varphi}_{\varphi r}=\Gamma^{\varphi}_{r\varphi}=\frac{1}{r}$	
$\Gamma_{\varphi\theta\varphi}=\Gamma_{\varphi\varphi\theta}=\Gamma^{\varphi}_{\varphi\theta}=\Gamma^{\varphi}_{\theta\varphi}=\frac{ctg\theta}{r}$		

(17)

Тензор деформации

В качестве ещё одного примера применения описанного приёма вычислим компоненты тензора деформаций:

$$u_{ik}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x^k}+\frac{\partial u_k}{\partial x^i}\right), \tag{18}$$

где вектор деформаций в декартовой системе координат есть $\mathbf{u}=(u_1,u_2,u_3)$.

При переходе к любой криволинейной системе координат формула (18) уже не будет представлять собой тензор, а потому следует вспомнить, что тензором в криволинейной системе координат является ковариантная производная от вектора [1]. Это означает, что обобщение формулы (18) на кривое пространство в инвариантном виде следует записать как следующее симметричное выражение:

$$u_{ik}=\frac{1}{2}\Big(\left(g_{is}u^s\right)_{,k}+\left(g_{ks}u^s\right)_{,i}\Big), \tag{19}$$

где запятая перед индексом традиционно означает ковариантную производную, а метрический тензор по своим свойствам позволяет проводить поднимание и опускание соответствующих индексов. Напомним, что контравариантный метрический тензор g^{ik} является обратным к ковариантному g_{ik} и подчиняется в случае произвольной криволинейной СК соотношению [1; 4]:

$$g_{is}g^{sk}=\delta_i^k, \tag{20}$$

где δ_i^k – единичная матрица, или просто символ Кронекера в смешанных инвариантных компонентах. В связи с равенством (20) подчеркнём ещё раз, что когда речь идёт об ОСК, его можно писать, не различая ковариантных и контравариантных компонент, то есть в виде:

$$g_{is}g^{sk}=g_{is}g_{sk}=g^{is}g^{sk}=\delta_i^k=\delta_{ik}=\delta^{ik}.$$

Для осуществления ковариантного дифференцирования в (19) следует вспомнить [1], что ковариантная производная от метрического тензора равна нулю, то есть $g_{ik,s}=0$ (теорема Риччи), поэтому из (19) сразу же следует, что:

$$u_{ik}=\frac{1}{2}\left(g_{is}u^s_{,k}+g_{ks}u^s_{,i}\right), \qquad (21)$$

а потому, с помощью правила вычисления ковариантной производной согласно [1], имеем:

$$u^k_{,i}=\frac{\partial u^k}{\partial x^i}+\Gamma^k_{is}u^s. \qquad (22)$$

Для ковариантного тензора деформаций тогда получаем:

$$u_{ik}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x^k}-\Gamma^s_{ik}u_s\right)+\left(\frac{\partial u_k}{\partial x^i}-\Gamma^s_{ik}u_s\right)\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x^k}+\frac{\partial u_k}{\partial x^i}\right)-\Gamma^s_{ik}u_s. \qquad (23)$$

Из определения (23) видно, что тензор деформаций, во-первых, является симметричным по индексам, то есть $u_{ik}=u_{ki}$, а во-вторых, величиной безразмерной, как и должно быть. С помощью (23) для всех шести отличных от нуля его компонент имеем:

$$u_{11}=\frac{\partial u_1}{\partial x^1}+\Gamma_{11l}u_l=\frac{\partial u_1}{\partial x^1}-\Gamma^1_{11}u_1-\Gamma^2_{11}u_2-\Gamma^3_{11}u_3=\frac{\partial u_r}{\partial r}-\Gamma_{rrr}u_r-\Gamma_{\theta rr}u_\theta-\Gamma_{\varphi rr}u_\varphi.$$

Согласно же таблице 1 видим, что все символы Кристоффеля здесь равны нулю. Поэтому

$$u_{rr}=\frac{\partial u_r}{\partial r}. \qquad (24)$$

Далее:

$$u_{22}=u_{\theta\theta}=\frac{\partial u_2}{\partial x^2}-\Gamma^l_{22}u_l=\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}-\Gamma_{r\theta\theta}u_r-\Gamma_{\theta\theta\theta}u_\theta-\Gamma_{\varphi\theta\theta}u_\varphi.$$

Согласно таблице 1:

$$u_{\theta\theta}=\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\Gamma_{\theta\theta r}u_r=\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{u_r}{r}. \qquad (25)$$

Следующий диагональный элемент:

$$u_{\varphi\varphi}=\frac{\partial u_\varphi}{\partial x^3}-\Gamma^l_{\varphi\varphi}u_l=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}-\Gamma_{r\varphi\varphi}u_r-\Gamma_{\theta\varphi\varphi}u_\theta-\Gamma_{\varphi\varphi\varphi}u_\varphi.$$

Благодаря таблице 1, получаем отсюда:

$$u_{\varphi\varphi}=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{u_r}{r}+\frac{ctg\theta}{r}u_\theta. \qquad (26)$$

Теперь найдём недиагональные элементы тензора деформаций. Согласно (23) имеем:

$$u_{12}=u_{r\theta}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x^2}+\frac{\partial u_2}{\partial x^1}\right)-\Gamma^l_{r\theta}u_l=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}+\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right)-\Gamma_{rr\theta}u_r-\Gamma_{\theta\theta r}u_\theta-\Gamma_{\varphi\theta r}u_\varphi.$$

Из таблицы 1 находим, следовательно,

$$u_{r\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right) - \frac{u_\theta}{r}. \qquad (27)$$

Далее

$$u_{23} = u_{\theta\varphi} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x^3} + \frac{\partial u_3}{\partial x^2}\right) - \Gamma^l_{\theta\varphi} u_i = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta}\right) - \Gamma_{\theta\varphi\theta} u_\theta - \Gamma_{\varphi\theta\varphi} u_\varphi - \Gamma_{r\varphi\theta} u_r$$

и, благодаря таблице 1,

$$u_{\theta\varphi} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta}\right) - \frac{u_\varphi ctg\theta}{r}. \qquad (28)$$

Наконец,

$$u_{13} = u_{r\varphi} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x^3} + \frac{\partial u_3}{\partial x^1}\right) - \Gamma^l_{r\varphi} u_l = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r}\right) - \Gamma_{rr\varphi} u_r - \Gamma_{\theta r\varphi} u_\theta - \Gamma_{\varphi\varphi r} u_\varphi.$$

Подставляя сюда отличные от нуля символы Кристоффеля, имеем в итоге:

$$u_{r\varphi} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r}\right) - \frac{u_\varphi}{r}. \qquad (29)$$

Объединяя, таким образом, формулы (24) – (29) в таблицу, получаем (см. табл. 2):

Таблица 2. Тензор деформаций

$u_{r\theta} = u_{\theta r} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right) - \frac{u_\theta}{r}$		$u_{r\varphi} = u_{\varphi r} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r}\right) - \frac{u_\varphi}{r}$
$u_{\theta\varphi} = u_{\varphi\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta}\right) - \frac{u_\varphi ctg\theta}{r}$		
$u_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}$	$u_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}$	$u_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r\cdot\sin\theta}\cdot\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} + \frac{ctg\theta}{r}\cdot u_\theta$

Тензор напряжений

Остановимся ещё на одном физическом примере из теории упругости и вычислим компоненты тензора напряжений $\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$ в сферической системе координат. По определению, приведённому, например, в [2], имеем для него:

$$\sigma_{ik} = 2\mu\left(u_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik} u_{ll}\right) + K\delta_{ik} u_{ll}, \qquad (30)$$

где μ – модуль сдвига, а K – коэффициент всестороннего сжатия. Все остальные обозначения известны. Замечательным в этой формуле является то, что согласно (23), мы сразу же можем приступить к вычислению всех шести отличных от нуля его компонент. Если ввести здесь более привычные обозначения $\mu = \frac{E}{2(1+\sigma)}$ и $K = \frac{E}{3(1-2\sigma)}$, где E – модуль Юнга, а σ – коэффициент Пуассона, то из (30) легко получаем:

$$\sigma_{11} = \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}\left[(1-\sigma)u_{11} + \sigma(u_{22}+u_{33})\right],$$

$$\sigma_{22} = \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}\left[(1-\sigma)u_{22} + \sigma(u_{11}+u_{33})\right],$$

$$\sigma_{33} = \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}\left[(1-\sigma)u_{33} + \sigma(u_{11}+u_{22})\right].$$

В сферических обозначениях с учётом таблицы 2 находим:

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}\left[(1-\sigma)\frac{\partial u_r}{\partial r} + \sigma\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} + \frac{1}{r\cdot\sin\theta}\cdot\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{2u_r}{r} + \frac{ctg\theta}{r}\cdot u_\theta\right)\right], \quad (31)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}\left[\frac{u_r}{r} + (1-\sigma)\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} + \sigma\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r\cdot\sin\theta}\cdot\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{ctg\theta}{r}\cdot u_\theta\right)\right], \quad (32)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}\left[\frac{u_r}{r} + (1-\sigma)\left(\frac{1}{r\cdot\sin\theta}\cdot\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{ctg\theta}{r}\cdot u_\theta\right) + \sigma\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}\right)\right]. \quad (33)$$

Аналогично для недиагональных элементов тензора напряжений получим:

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = 2\mu u_{12},\ \sigma_{23} = \sigma_{32} = 2\mu u_{23},\ \sigma_{13} = \sigma_{31} = 2\mu u_{13}.$$

В сферических обозначениях тогда с учётом таблицы 2 будет:

$$\sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta r} = \frac{E}{2(1+\sigma)}\left[\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right) - \frac{u_\theta}{r}\right],$$

$$\sigma_{\theta\varphi} = \sigma_{\varphi\theta} = \frac{E}{2(1+\sigma)}\left[\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial\varphi} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\theta}\right) - \frac{u_\varphi ctg\theta}{r}\right],$$

$$\sigma_{r\varphi} = \sigma_{\varphi r} = \frac{E}{2(1+\sigma)}\left[\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial\varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r}\right) - \frac{u_\varphi}{r}\right]. \quad (34)$$

Собирая (31) – (34) в общую таблицу, имеем (см. табл. 3):

Таблица 3. Тензор напряжений

$\sigma_{r\theta}=\sigma_{\theta r}=\frac{E}{2(1+\sigma)}\left[\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}+\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right)-\frac{u_\theta}{r}\right],$ $\sigma_{\theta\varphi}=\sigma_{\varphi\theta}=\frac{E}{2(1+\sigma)}\left[\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial\varphi}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\theta}\right)-\frac{u_\varphi ctg\theta}{r}\right],$ $\sigma_{r\varphi}=\sigma_{\varphi r}=\frac{E}{2(1+\sigma)}\left[\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial\varphi}+\frac{\partial u_\varphi}{\partial r}\right)-\frac{u_\varphi}{r}\right].$
$\sigma_{rr}=\frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}\cdot\left((1-\sigma)\frac{\partial u_r}{\partial r}+\sigma\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+2\frac{u_r}{r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{ctg\theta}{r}u_\theta\right)\right)$
$\sigma_{\theta\theta}=\frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}\cdot\left(\frac{u_r}{r}+\frac{1-\sigma}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\sigma\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{ctg\theta}{r}u_\theta\right)\right)$

На этом примере мы пока что остановимся и поговорим теперь об операторе Лапласа Δ, имеющем чрезвычайно важное значение для всего аппарата теоретической физики.

Оператор Лапласа

Для его вычисления в любых криволинейных координатах можно воспользоваться компактной и очень красивой формулой, приведённой в [1], а именно:

$$\Delta=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g}\,g^{ik}\frac{\partial}{\partial x^k}\right), \tag{35а}$$

где g – определитель ковариантного метрического тензора.

В классической же монографии [2] оператор Лапласа приводится в другом виде, а именно,

$$\Delta=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g}\frac{\partial}{\partial x^i}\right). \tag{35б}$$

Попробуем теперь разобраться с этими двумя формулами (35а) и (35б) более подробно. Если исходить из выражения (35а), то при его применении для любой ортогональной системы координат из него получается стандартная формула, которую все записывают через коэффициенты Ламе h_i, где индекс i = 1, 2, 3, то есть как:

$$\Delta=\frac{1}{h_1h_2h_3}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\right)\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{1}{h_1h_2h_3}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{h_1h_3}{h_2}\right)\frac{\partial}{\partial x_2}+\frac{1}{h_1h_2h_3}\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{h_2h_1}{h_3}\right)\frac{\partial}{\partial x_3}, \tag{35в}$$

Что касается выражения (35б), то оно даёт правильный ответ лишь в двух случаях, а именно, только для сферических и цилиндрических координат. Покажем это.

Действительно, в случае сферических координат имеем для элемента метрики:

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2.$$

Поэтому определитель метрического тензора $g = r^4 \sin^2\theta$, и вводя по уже знакомому правилу частные дифференциалы

$$dx_r = dr,\ \ dx_\theta = rd\theta,\ \ dx_\varphi = r\sin\theta d\varphi,$$

перепишем (35б) в виде:

$$\Delta = \frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial^2}{\left(\partial x^i\right)^2}. \tag{35г}$$

После подстановки сюда частных дифференциалов и определителя находим:

$$\Delta = \frac{1}{2r^4\sin^2\theta}\frac{\partial r^4\sin^2\theta}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial^2}{\left(\partial x^i\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2r^4\sin^2\theta}\frac{\partial r^4\sin^2\theta}{\partial r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{2r^4\sin^2\theta}\frac{\partial r^4\sin^2\theta}{r^2\partial\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{r^2\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{r^2\sin^2\theta\partial\varphi^2} =$$

$$= \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{ctg\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\partial^2}{r^2\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{r^2\sin^2\theta\partial\varphi^2} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r} +$$

$$+ \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.$$

То есть, хорошо всем известное выражение:

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}. \tag{36}$$

Аналогично можно показать, что в цилиндрической системе координат

$$\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{37}$$

А вот теперь давайте рассмотрим другой, но тоже относительно простой пример, когда имеется лишь ортогональное двухмерное многообразие, характеризуемое преобразованиями вида:

$$\begin{cases} x = \xi\eta, \\ y = \dfrac{\xi^2 - \eta^2}{2}. \end{cases} \tag{38}$$

Как легко видеть, эти преобразования действительно являются ортогональными, а его метрика даётся выражением:

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 = \left(\xi^2+\eta^2\right)d\xi^2 + \left(\xi^2+\eta^2\right)d\eta^2. \qquad (39)$$

Из (38) и (39) элементарно следует, что размерность новых «координат» ξ, η есть $\sqrt{L}$, где L – длина.

Согласно (39) определитель ковариантного двухмерного метрического тензора, который даётся ортогональной матрицей

$$\hat{g}_{ik} = \begin{pmatrix} \xi^2+\eta^2 & 0 \\ 0 & \xi^2+\eta^2 \end{pmatrix}, \qquad (40)$$

будет равен:

$$g = \left(\xi^2+\eta^2\right)^2. \qquad (41)$$

И значит, якобиан перехода есть:

$$I = \sqrt{g} = \xi^2+\eta^2. \qquad (42)$$

Поэтому, в соответствии с (35б) и с помощью простого алгоритма получения (36), казалось бы, что оператор Лапласа с учётом нашего правила замены частных дифференциалов должен иметь вид:

$$\Delta = \frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial^2}{\left(\partial x^i\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2\left(\xi^2+\eta^2\right)^2}\frac{1}{\left(\xi^2+\eta^2\right)}\frac{\partial\left(\xi^2+\eta^2\right)^2}{\partial\xi}\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{1}{2\left(\xi^2+\eta^2\right)^2}\frac{1}{\left(\xi^2+\eta^2\right)}\frac{\partial\left(\xi^2+\eta^2\right)^2}{\partial\eta}\frac{\partial}{\partial\eta} +$$

$$+ \frac{1}{\left(\xi^2+\eta^2\right)}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{1}{\left(\xi^2+\eta^2\right)}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} =$$

$$= \frac{2\xi}{\left(\xi^2+\eta^2\right)^2}\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{2\eta}{\left(\xi^2+\eta^2\right)^2}\frac{\partial}{\partial\eta} + \frac{1}{\left(\xi^2+\eta^2\right)}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{1}{\left(\xi^2+\eta^2\right)}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} =$$

$$= \frac{1}{\left(\xi^2+\eta^2\right)^2}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi^2+\eta^2\right)\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\xi^2+\eta^2\right)\frac{\partial}{\partial\eta}\right].$$

То есть

$$\Delta = \frac{1}{\left(\xi^2+\eta^2\right)^2}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi^2+\eta^2\right)\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\xi^2+\eta^2\right)\frac{\partial}{\partial\eta}\right]. \qquad (43)$$

Однако надо сказать, что выражение (43) является неверным. Чтобы в этом убедиться, найдём оператор Δ при помощи прямого дифференцирования, или, как говорится, вычислением прямо «в лоб». Эта процедура совсем несложная, но требует внимания. Действительно, в двухмерном случае, как легко показать, будет иметь место следующая общая формула для оператора Лапласа Δ_2:

$$\tilde{\Delta}_2=\left[\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\left[\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}+\Delta_2\xi\frac{\partial}{\partial\xi}+\Delta_2\eta\frac{\partial}{\partial\eta}+$$
$$+2\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}, \qquad (44)$$

где $\Delta_2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$, а преобразования от декартовых координат x, y к новым координатам ξ,η имеют совершенно произвольный вид:

$$x=x(\xi,\eta),\ \ y=y(\xi,\eta), \qquad (45)$$

но при котором имеет место и изоморфное (обратное) преобразование вида

$$\xi=\xi(x,y),\ \ \eta=\eta(x,y). \qquad (46)$$

В трёхмерном (и вообще в любом n-мерном) случае формула (44) легко обобщается на любое изоморфное преобразование:

$$x=x(\xi,\eta,\varphi),\ \ y=y(\xi,\eta,\varphi),\ \ z=z(\xi,\eta,\varphi),$$
$$\xi=\xi(x,y,z),\ \ \eta=\eta(x,y,z),\ \ \varphi=\varphi(x,y,z), \qquad (47)$$

которое позволяет, согласно алгоритму получения (44), представить оператор Лапласа в виде:

$$\tilde{\Delta}_3=\left[\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\xi}{\partial z}\right)^2\right]\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\left[\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial z}\right)^2\right]\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}+$$
$$+\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\Delta_3\xi\frac{\partial}{\partial\xi}+\Delta_3\eta\frac{\partial}{\partial\eta}+\Delta_3\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}+$$
$$+2\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\xi}{\partial z}\frac{\partial\eta}{\partial z}\right)\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}+2\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial\xi}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\varphi}+$$
$$+2\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial\eta}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\frac{\partial^2}{\partial\varphi\partial\eta}. \qquad (48)$$

Здесь $\Delta_3=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}-$ трёхмерный оператор Лапласа. Заметим, что для любых ортогональных преобразований слагаемые, пропорциональные смешанным производным по аргументам ξ, η, ξ, φ и η, φ, в (44) и в (48) исчезнут и, соответственно, получатся два совсем простых выражения

$$\tilde{\Delta}_2=\left[\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\left[\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}+\Delta_2\xi\frac{\partial}{\partial\xi}+\Delta_2\eta\frac{\partial}{\partial\eta}. \qquad (49)$$

$$\tilde{\Delta}_3 = \left[\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\xi}{\partial z}\right)^2\right]\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \left[\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial z}\right)^2\right]\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} +$$
$$+\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \Delta_3\xi\frac{\partial}{\partial\xi} + \Delta_3\eta\frac{\partial}{\partial\eta} + \Delta_3\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}. \qquad (50)$$

Чтобы вычислить теперь правильный лапласиан, применим формулу (49) к нашим преобразованиям (38), для которых обратное преобразование будет иметь вид:

$$\xi = \sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} + y},$$
$$\eta = \sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} - y}. \qquad (51)$$

В результате найдём, что $\frac{\partial\xi}{\partial x} = \frac{1}{2\xi}\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $\frac{\partial\xi}{\partial y} = \frac{\xi}{2\sqrt{x^2 + y^2}}$ и поэтому

$$\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2 = \frac{x^2 + \xi^4}{4\left(x^2 + y^2\right)\xi^2} = \frac{\xi^2\eta^2 + \xi^4}{4\xi^2\left(\frac{\xi^2 + \eta^2}{4}\right)^2} = \frac{1}{\xi^2 + \eta^2}.$$

Аналогично $\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{\xi^2 + \eta^2}$. Можно также легко проверить, что обе функции (51) являются гармоническими, то есть они обе удовлетворяют уравнениям:

$$\Delta_2\xi = \Delta_2\eta = 0.$$

Таким образом, с учётом всех этих формул мы строго доказали, что для ортогональных преобразований (38) оператор Лапласа должен иметь следующий правильный вид:

$$\tilde{\Delta}_2 = \frac{1}{\xi^2 + \eta^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\right), \qquad (52)$$

который, заметим, получается и из общего также правильного выражения (35а)!

Таким образом, мы убедились, что формула (35б) действительно «работает» только в случае сферических и цилиндрических координат.

Рассмотрим теперь более сложный трёхмерный случай, и введём в рассмотрение весьма удобные при решении ряда задач (см., к примеру, [6, с. 159] параболические координаты по формулам:

$$x = \sqrt{\xi\eta}\cos\varphi, \;\; y = \sqrt{\xi\eta}\sin\varphi, \;\; z = \frac{\xi - \eta}{2}. \qquad (53)$$

Обратное преобразование от (53) будет иметь вид:

$$\xi = \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + z\right), \ \eta = \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - z\right), \ tg\varphi = \frac{y}{x}. \tag{54}$$

Как видно из (54), новые переменные ξ, η могут быть одновременно либо положительными, либо отрицательными. В решениях (54) они выбраны положительными. Элемент метрики согласно (54) тогда будет иметь вид:

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \left(\frac{1}{2\sqrt{\xi\eta}}(\eta d\xi + \xi d\eta)\cos\varphi - \sqrt{\xi\eta}\sin\varphi d\varphi\right)^2 +$$

$$+\left(\frac{1}{2\sqrt{\xi\eta}}(\eta d\xi + \xi d\eta)\sin\varphi + \sqrt{\xi\eta}\cos\varphi d\varphi\right)^2 + \frac{1}{4}(d\xi - d\eta)^2 =$$

$$= \frac{1}{4\xi\eta}(\eta d\xi + \xi d\eta)^2 + \xi\eta d\varphi^2 + \frac{1}{4}(d\xi - d\eta)^2 = \frac{\xi+\eta}{4\xi}d\xi^2 + \frac{\xi+\eta}{4\eta}d\eta^2 + \xi\eta d\varphi^2. \tag{55}$$

А, значит, частные дифференциалы есть:

$$dx_\xi = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\xi+\eta}{\xi}}d\xi, \ dx_\eta = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\xi+\eta}{\eta}}d\eta, \ dx_\varphi = \sqrt{\xi\eta}d\varphi. \tag{56}$$

Как видно из (55), определитель метрического тензора равен

$$g = \frac{(\xi+\eta)^2}{4}, \tag{57}$$

а, потому, якобиан перехода равен

$$I = \sqrt{g} = \frac{\xi+\eta}{2}. \tag{58}$$

Эти формулы понадобятся нам позднее, когда будут вычисляться символы Кристоффеля. Согласно общей формуле (50) находим необходимые нам производные:

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} = \frac{\partial\eta}{\partial x} = \frac{x}{r}, \ \frac{\partial\xi}{\partial y} = \frac{\partial\eta}{\partial y} = \frac{y}{r}, \ \frac{\partial\xi}{\partial z} = \frac{z}{r} + 1, \ \frac{\partial\eta}{\partial z} = \frac{z}{r} - 1,$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Поэтому $\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\xi}{\partial z}\right)^2 = \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} + \left(1 + \frac{z}{r}\right)^2 = \frac{4\xi}{\xi+\eta}$.

Аналогично $\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial z}\right)^2 = \frac{4\eta}{\xi+\eta}$.

Далее $\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}, \ \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} = \frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3}, \ \frac{\partial^2\xi}{\partial z^2} = \frac{1}{r} - \frac{z^2}{r^3}$.

А потому $\Delta_3\xi = \frac{3}{r} - \frac{1}{r} = \frac{2}{r} = \frac{4}{\xi+\eta}$.

Аналогично получим $\Delta_3\eta = \frac{4}{\xi+\eta}$.

Подставляя все найденные формулы в общую формулу (50), будем иметь в результате:

$$\tilde{\Delta}_3 = \frac{4\xi}{\xi+\eta}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{4\eta}{\xi+\eta}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} + \frac{4}{\xi+\eta}\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{4}{\xi+\eta}\frac{\partial}{\partial\eta} + \frac{1}{\xi\eta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} =$$
$$= \frac{4}{\xi+\eta}\frac{\partial}{\partial\xi}\xi\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{4}{\xi+\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\eta\frac{\partial}{\partial\eta} + \frac{1}{\xi\eta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}. \qquad (59)$$

Как и следовало ожидать, этот оператор Лапласа совпадает с приведённым в [5, с. 159], а потому в нашем распоряжении имеются проверенные и правильные результаты (52) и (59), которые будем считать «эталоном» для дальнейших доказательств.

Как видим из сравнения «эталонного» решения (52) с решением (43), полученному из формулы (35б), решение (43) является неверным, хотя, как мы обращали уже внимание, в сферических и цилиндрических координатах формула (35б) приводит к правильному ответу! Подобное совпадение, как известно, называется исключением из правил.

Вместо формулы (35б) приведём сейчас простую формулу, которая имеет правильный вид и приводит к корректным результатам в любой ортогональной системе координат.

Для начала надо вспомнить, что вектор градиента, определяемый как

$$\mathbf{u} = \nabla\psi,$$

является ковариантным вектором.

Действительно, в компонентах имеем для него:

$$u_i = \frac{\partial\psi}{\partial x^i}. \qquad (60)$$

Это означает, что ковариантная производная для него должна быть записана в виде [1]:

$$u_{i,k} = \frac{\partial u_i}{\partial x^k} - u_s\Gamma^s_{ik}. \qquad (61)$$

Поэтому свёртка по индексам *i*, *k* даёт:

$$u_{i,i} = \frac{\partial u_i}{\partial x^i} - u_k\Gamma^k_{ii}. \qquad (62)$$

Подставив сюда (60), находим искомое выражение для правильного оператора Лапласа в любых ортогональных координатах:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\left(\partial x^i\right)^2} - \Gamma^k_{ii}\frac{\partial}{\partial x^k}. \quad (63)$$

В качестве примеров, иллюстрирующих корректность формулы (63), снова разберём всё те же рассмотренные выше криволинейные системы координат.

Сферические координаты

Для сферических координат с преобразованиями (10) используем уже готовые результаты вычислений символа Кристоффеля (17), а именно:

$$\Gamma_{r\theta\theta} = \Gamma^r_{\theta\theta} = -\frac{1}{r},\ \ \Gamma_{r\varphi\varphi} = \Gamma^r_{\varphi\varphi} = -\frac{1}{r},\ \ \Gamma_{\theta\varphi\varphi} = \Gamma^\theta_{\varphi\varphi} = -\frac{ctg\theta}{r}.$$

Тогда из (63) имеем:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\left(\partial x^i\right)^2} - \Gamma^k_{ii}\frac{\partial}{\partial x^k} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} - \Gamma^r_{ii}\frac{\partial}{\partial r} -$$

$$-\Gamma^\theta_{ii}\frac{\partial}{r\partial\theta} - \Gamma^\varphi_{ii}\frac{\partial}{r\sin\theta\partial\varphi} =$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} - \left(\Gamma^r_{\theta\theta} + \Gamma^r_{\varphi\varphi}\right)\frac{\partial}{\partial r} - \left(\Gamma^\theta_{\varphi\varphi}\right)\frac{\partial}{r\partial\theta} =$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{ctg\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta} =$$

$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}. \quad (64)$$

Как видим, получилось правильное выражение для оператора Лапласа в сферических координатах обычного дивергентного вида.

Двухмерные ортогональные координаты

Для преобразований (38) с метрикой (39) частные дифференциалы есть:

$$dx^1 = dx_\xi = \sqrt{\xi^2+\eta^2}\,d\xi,\ \ dx^2 = dx_\eta = \sqrt{\xi^2+\eta^2}\,d\eta. \quad (65)$$

Поэтому нужные нам символы Γ^k_{ii} будут иметь вид:

$$\Gamma^\xi_{\xi\xi} = \frac{1}{\left(\xi^2+\eta^2\right)^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial x_n}{\partial\xi}\frac{\partial^2 x_n}{\partial\xi^2} =$$

$$= \frac{1}{\left(\xi^2+\eta^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{\partial}{\partial\xi}(\xi\eta)\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}(\xi\eta) + \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi^2-\eta^2\right)\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left(\xi^2-\eta^2\right)\right) =$$

$$= \frac{\xi}{\left(\xi^2+\eta^2\right)^{\frac{3}{2}}},\ \Gamma^\eta_{\eta\eta} = \frac{1}{\left(\xi^2+\eta^2\right)^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial x_n}{\partial\eta}\frac{\partial^2 x_n}{\partial\eta^2} = \frac{\eta}{\left(\xi^2+\eta^2\right)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\Gamma^{\eta}_{\xi\xi}=\frac{1}{\left(\xi^2+\eta^2\right)^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial x_n}{\partial\eta}\frac{\partial^2 x_n}{\partial\xi^2}=-\frac{\eta}{\left(\xi^2+\eta^2\right)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\Gamma^{\xi}_{\eta\eta}=\frac{1}{\left(\xi^2+\eta^2\right)^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial x_n}{\partial\xi}\frac{\partial^2 x_n}{\partial\eta^2}=-\frac{\xi}{\left(\xi^2+\eta^2\right)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\Gamma^{\xi}_{\xi\eta}=\Gamma^{\xi}_{\xi\eta}=\frac{\eta}{\left(\xi^2+\eta^2\right)^{\frac{3}{2}}},\ \Gamma^{\eta}_{\xi\eta}=\Gamma^{\eta}_{\xi\eta}=\frac{\xi}{\left(\xi^2+\eta^2\right)^{\frac{3}{2}}}. \tag{66}$$

А потому, согласно (63) и (66) имеем:

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\left(\partial x^i\right)^2}-\Gamma^k_{ii}\frac{\partial}{\partial x^k}=\frac{1}{\xi^2+\eta^2}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{1}{\xi^2+\eta^2}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}-$$

$$-\left(\Gamma^{\xi}_{\xi\xi}+\Gamma^{\xi}_{\eta\eta}\right)\frac{\partial}{\partial\xi}-\left(\Gamma^{\eta}_{\xi\xi}+\Gamma^{\eta}_{\eta\eta}\right)\frac{\partial}{\partial\eta}=$$

$$=\frac{1}{\xi^2+\eta^2}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{1}{\xi^2+\eta^2}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}. \tag{67}$$

Сравнивая (67) с (52), убеждаемся в их полной эквивалентности.

Параболические координаты

Для преобразований (54) и метрики (56) частные дифференциалы имеют вид:

$$dx_{\xi}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\xi+\eta}{\xi}}d\xi,\ dx_{\eta}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\xi+\eta}{\eta}}d\eta,\ dx_{\varphi}=\sqrt{\xi\eta}d\varphi. \tag{68}$$

а потому интересующие нас символы Кристоффеля будут равны:

$$\Gamma^{\xi}_{kl}=\Gamma_{\xi kl}=2\sqrt{\frac{\xi}{\xi+\eta}}\frac{\partial x_n}{\partial\xi}\frac{\partial^2 x_n}{\partial x^k\partial x^l}=$$

$$=\frac{\sqrt{\eta}}{\xi+\eta}\cos\varphi\frac{\partial^2}{\partial x^k\partial x^l}\sqrt{\xi\eta}\cos\varphi+\frac{\sqrt{\eta}}{\xi+\eta}\sin\varphi\frac{\partial^2}{\partial x^k\partial x^l}\sqrt{\xi\eta}\sin\varphi+$$

$$+\sqrt{\frac{\xi}{\xi+\eta}}\frac{\partial^2}{\partial x^k\partial x^l}\left(\xi-\eta\right),\ \Gamma^{\eta}_{kl}=\Gamma_{\eta kl}=2\sqrt{\frac{\eta}{\xi+\eta}}\frac{\partial x_n}{\partial\eta}\frac{\partial^2 x_n}{\partial x^k\partial x^l}=$$

$$=\frac{\sqrt{\xi}}{\xi+\eta}\cos\varphi\frac{\partial^2}{\partial x^k\partial x^l}\sqrt{\xi\eta}\cos\varphi+\frac{\sqrt{\xi}}{\xi+\eta}\sin\varphi\frac{\partial^2}{\partial x^k\partial x^l}\sqrt{\xi\eta}\sin\varphi+$$

$$+\sqrt{\frac{\eta}{\xi+\eta}}\frac{\partial^2}{\partial x^k\partial x^l}\left(\xi-\eta\right),\ \Gamma^{\varphi}_{kl}=\Gamma_{\varphi kl}=\frac{1}{\sqrt{\xi\eta}}\frac{\partial x_n}{\partial\varphi}\frac{\partial^2 x_n}{\partial x^k\partial x^l}=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{\xi\eta}}\sin\varphi\frac{\partial^2}{\partial x^k\partial x^l}\sqrt{\xi\eta}\cos\varphi+\frac{1}{\sqrt{\xi\eta}}\cos\varphi\frac{\partial^2}{\partial x^k\partial x^l}\sqrt{\xi\eta}\sin\varphi+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{\xi\eta}}\frac{\partial^2}{\partial x^k\partial x^l}\left(\xi-\eta\right). \tag{69}$$

Как отсюда видно, во всех трёх выражениях последнее слагаемое тождественно обращается в нуль, так же как и компоненты символа Кристоффеля Γ^{φ}_{kl} для любых k, l. Поэтому для двух верхних символов будем иметь:

$$\Gamma^{\xi}_{\xi\xi}=4\frac{\xi\eta}{(\xi+\eta)^{\frac{3}{2}}}\cos\varphi\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\sqrt{\xi}\cos\varphi+4\frac{\xi\eta}{(\xi+\eta)^{\frac{3}{2}}}\sin\varphi\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\sqrt{\xi}\sin\varphi=$$

$$=4\frac{\xi\eta}{(\xi+\eta)^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\sqrt{\xi}=-\frac{\eta}{(\xi+\eta)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\xi}},$$

$$\Gamma^{\xi}_{\varphi\varphi}=\frac{\sqrt{\eta}}{\xi\eta\sqrt{\xi+\eta}}\cos\varphi\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\sqrt{\xi\eta}\cos\varphi+\frac{\sqrt{\eta}}{\xi\eta\sqrt{\xi+\eta}}\sin\varphi\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\sqrt{\xi\eta}\sin\varphi=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{\xi(\xi+\eta)}},\ \Gamma^{\xi}_{\eta\eta}=\frac{4\eta\sqrt{\eta}}{(\xi+\eta)^{\frac{3}{2}}}\cos\varphi\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\sqrt{\xi\eta}\cos\varphi+$$

$$+\frac{4\eta\sqrt{\eta}}{(\xi+\eta)^{\frac{3}{2}}}\sin\varphi\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\sqrt{\xi\eta}\sin\varphi=\frac{4\eta\sqrt{\xi\eta}}{(\xi+\eta)^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\sqrt{\eta}=-\frac{\sqrt{\xi}}{(\xi+\eta)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\Gamma^{\eta}_{\eta\eta}=4\frac{\eta\sqrt{\xi}}{(\xi+\eta)^{\frac{3}{2}}}\cos\varphi\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\sqrt{\xi\eta}\cos\varphi+4\frac{\eta\sqrt{\xi}}{(\xi+\eta)^{\frac{3}{2}}}\sin\varphi\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\sqrt{\xi\eta}\sin\varphi=$$

$$=4\frac{\eta\sqrt{\xi}}{(\xi+\eta)^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\sqrt{\xi\eta}=-\frac{\xi}{(\xi+\eta)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\eta}}$$

$$\Gamma^{\eta}_{\varphi\varphi}=\frac{\sqrt{\xi}}{\xi\eta\sqrt{\xi+\eta}}\cos\varphi\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\sqrt{\xi\eta}\cos\varphi+\frac{\sqrt{\xi}}{\xi\eta\sqrt{\xi+\eta}}\sin\varphi\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\sqrt{\xi\eta}\sin\varphi=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{\eta(\xi+\eta)}},\ \Gamma^{\eta}_{\xi\xi}=-\frac{\sqrt{\eta}}{(\xi+\eta)^{\frac{3}{2}}}. \tag{70}$$

Подставляя (70) в общее выражение (63) с учётом частных дифференциалов (68), найдём:

$$\Delta=\frac{\partial^2}{(\partial x^i)^2}-\Gamma^k_{ii}\frac{\partial}{\partial x^k}=\frac{4\xi}{\xi+\eta}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{4\eta}{\xi+\eta}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}+\frac{1}{\xi\eta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}-$$

$$-2\sqrt{\frac{\xi}{\xi+\eta}}\left(\Gamma^{\xi}_{\xi\xi}+\Gamma^{\xi}_{\eta\eta}+\Gamma^{\xi}_{\varphi\varphi}\right)\frac{\partial}{\partial\xi}-2\sqrt{\frac{\eta}{\xi+\eta}}\left(\Gamma^{\eta}_{\xi\xi}+\Gamma^{\eta}_{\eta\eta}+\Gamma^{\eta}_{\varphi\varphi}\right)\frac{\partial}{\partial\eta}=$$

$$=\frac{4\xi}{\xi+\eta}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{4\eta}{\xi+\eta}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}+\frac{1}{\xi\eta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}-$$

$$-2\sqrt{\frac{\xi}{\xi+\eta}}\left(-\frac{\eta}{(\xi+\eta)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\xi}}-\frac{1}{\sqrt{\xi(\xi+\eta)}}-\frac{\sqrt{\xi}}{(\xi+\eta)^{\frac{3}{2}}}\right)\frac{\partial}{\partial\xi}-$$

$$-2\sqrt{\frac{\eta}{\xi+\eta}}\left(-\frac{\sqrt{\xi}}{(\xi+\eta)^{\frac{3}{2}}}-\frac{\xi}{(\xi+\eta)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\eta}}-\frac{1}{\sqrt{\eta(\xi+\eta)}}\right)\frac{\partial}{\partial\eta}=$$

$$=\frac{4\xi}{\xi+\eta}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{4\eta}{\xi+\eta}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}+\frac{1}{\xi\eta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{4}{\xi+\eta}\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{4}{\xi+\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}=$$

$$=\frac{4}{\xi+\eta}\frac{\partial}{\partial\xi}\xi\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{4}{\xi+\eta}\frac{\partial}{\partial\xi}\eta\frac{\partial}{\partial\eta}+\frac{1}{\xi\eta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}. \qquad (71)$$

Как видим, полученный ответ, так же, как и предыдущие, для оператора Лапласа полностью совпадает с приведённым выше «эталонным» выражением (59). Для цилиндрических координат все получается также.

Таким образом, абсолютно понятно, что общая формула (63) позволяет нам находить правильные выражения для оператора Лапласа в любой ортогональной криволинейной системе координат.

Как мы это доказали на конкретных примерах, продемонстрированный выше способ показывает полную корректность предложенного подхода. Действительно, с его помощью можно находить правильные по размерности любые ковариантные производные и геометрические характеристики в произвольной криволинейной системе координат (символы Кристоффеля, тензор Римана, тензор Риччи, скорость, ускорение, направляющие косинусы и др.). Подчеркнём, что вычисления по формуле $\Gamma^i_{kl}=\frac{1}{2}g^{is}\left(\frac{\partial g_{sk}}{\partial x^l}+\frac{\partial g_{sl}}{\partial x^k}-\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^s}\right)$, приводимой в каждом учебнике по тензорному исчислению, сразу же заводят в тупик, поскольку все они тождественно обращаются в нуль благодаря отмеченному выше факту, что метрический тензор в ортогональной системе координат представляет собой просто символ Кронекера, поскольку метрика всегда может быть представлена в виде:

$$dl^2=\left(\partial x^1\right)^2+\left(\partial x^2\right)^2+\left(\partial x^3\right)^2+\left(\partial x^4\right)^2+\ldots \qquad (72)$$

Заметим, что во всех вычислениях, которые были приведены выше, нигде не использовалось такое понятие, как коэффициенты Ламе, о которых также подробно написано в учебниках по тензорному исчислению. По большому счету, эти коэффициенты, вообще говоря, и не нужны вовсе, поскольку приводят только к путанице в размерностях.

В качестве ещё одного показательно примера вычислим компоненты тензора Римана для двухмерной ортогональной системы координат, выбрав в качестве контравариантных преобразования (38) с метрикой (39) и с частными дифференциалами (65):

$$dx^1 = dx_\xi = \sqrt{\xi^2+\eta^2}\,d\xi,\ \ dx^2 = dx_\eta = \sqrt{\xi^2+\eta^2}\,d\eta.$$

Согласно общему определению для тензора Римана [1; 4], имеем для него

$$R^i_{klm} = \frac{\partial \Gamma^i_{km}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial x^m} + \Gamma^i_{nl}\Gamma^n_{km} - \Gamma^i_{nm}\Gamma^n_{kl}. \qquad (73)$$

Поскольку каждый индекс пробегает всего два значения, то всего компонент тензора Римана будет $2^4 = 16$. По индексам l, m он антисимметричен, а потому для двух координат ξ, η будет $R^i_{k\xi\eta} = -R^i_{k\eta\xi}$. Эти компоненты будут отличны от нуля, а все остальные, а именно $R^\xi_{\xi\xi\xi}, R^\xi_{\eta\eta\eta}, R^\eta_{\xi\xi\xi}, R^\eta_{\eta\eta\eta}, R^\xi_{\eta\xi\xi}, R^\xi_{\xi\eta\eta}, R^\eta_{\eta\xi\xi}, R^\eta_{\xi\eta\eta}$, будут равны нулю.

В самом деле, для них имеем:

$$R^\xi_{\xi\xi\xi} = \Gamma^\xi_{n\xi}\Gamma^n_{\xi\xi} - \Gamma^\xi_{n\xi}\Gamma^n_{\xi\xi} = 0,\ \ R^\eta_{\eta\eta\eta} = \Gamma^\eta_{n\eta}\Gamma^n_{\eta\eta} - \Gamma^\eta_{n\eta}\Gamma^n_{\eta\eta} = 0,\ \ R^\xi_{\eta\eta\eta} = \Gamma^\xi_{n\eta}\Gamma^n_{\eta\eta} - \Gamma^\xi_{n\eta}\Gamma^n_{\eta\eta} = 0,$$

$$R^\eta_{\xi\xi\xi} = 0,\ \ R^\xi_{\eta\xi\xi} = R^\eta_{\xi\eta\eta} = 0,\ \ R^\xi_{\xi\eta\eta} = R^\eta_{\eta\xi\xi} = \Gamma^\xi_{n\eta}\Gamma^n_{\xi\eta} - \Gamma^\xi_{n\eta}\Gamma^n_{\xi\eta} = 0.$$

Для отличных же от нуля, то есть для

$$R^\xi_{\xi\xi\eta} = -R^\xi_{\xi\eta\xi}, R^\xi_{\eta\xi\eta} = -R^\xi_{\eta\eta\xi}, R^\eta_{\xi\xi\eta} = -R^\eta_{\xi\eta\xi}, R^\eta_{\eta\xi\eta} = -R^\eta_{\eta\eta\xi}$$

получаем:

$$R^\xi_{\xi\xi\eta} = -R^\xi_{\xi\eta\xi} = \frac{\partial \Gamma^\xi_{\xi\eta}}{\partial x^\xi} - \frac{\partial \Gamma^\xi_{\xi\xi}}{\partial x^\eta} + \Gamma^\xi_{\eta\xi}\Gamma^\eta_{\xi\eta} - \Gamma^\xi_{\eta\eta}\Gamma^\eta_{\xi\xi},$$

$$R^\xi_{\eta\xi\eta} = -R^\xi_{\eta\eta\xi} = \frac{\partial \Gamma^\xi_{\eta\eta}}{\partial x^\xi} - \frac{\partial \Gamma^\xi_{\eta\xi}}{\partial x^\eta} + \Gamma^\xi_{\xi\xi}\Gamma^\xi_{\eta\eta} - \Gamma^\xi_{\xi\eta}\Gamma^\xi_{\eta\xi} + \Gamma^\xi_{\eta\xi}\Gamma^\eta_{\eta\eta} - \Gamma^\xi_{\eta\eta}\Gamma^\eta_{\eta\xi},$$

$$R^\eta_{\xi\xi\eta} = -R^\eta_{\xi\eta\xi} = \frac{\partial \Gamma^\eta_{\xi\eta}}{\partial x^\xi} - \frac{\partial \Gamma^\eta_{\xi\xi}}{\partial x^\eta} + \Gamma^\eta_{\xi\xi}\Gamma^\xi_{\xi\eta} - \Gamma^\eta_{\xi\eta}\Gamma^\xi_{\xi\xi} + \Gamma^\eta_{\eta\xi}\Gamma^\eta_{\xi\eta} - \Gamma^\eta_{\eta\eta}\Gamma^\eta_{\xi\xi},$$

$$R^\eta_{\eta\xi\eta} = -R^\eta_{\eta\eta\xi} = \frac{\partial \Gamma^\eta_{\eta\eta}}{\partial x^\xi} - \frac{\partial \Gamma^\eta_{\eta\xi}}{\partial x^\eta} + \Gamma^\eta_{\xi\xi}\Gamma^\xi_{\eta\eta} - \Gamma^\eta_{\xi\eta}\Gamma^\xi_{\eta\xi}.$$

Отсюда, согласно проведённым выше вычислениям (66) имеем:

$$R^\xi_{\xi\xi\eta} = -R^\xi_{\xi\eta\xi} = \frac{\partial \Gamma^\xi_{\xi\eta}}{\partial x^\xi} - \frac{\partial \Gamma^\xi_{\xi\xi}}{\partial x^\eta} + \Gamma^\xi_{\eta\xi}\Gamma^\eta_{\xi\eta} - \Gamma^\xi_{\eta\eta}\Gamma^\eta_{\xi\xi} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{\eta}{\left(\xi^2+\eta^2\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}\frac{\partial}{\partial\eta}\frac{\xi}{\left(\xi^2+\eta^2\right)^{\frac{3}{2}}} +$$

$$+ \frac{\eta}{\left(\xi^2+\eta^2\right)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{\xi}{\left(\xi^2+\eta^2\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\eta}{\left(\xi^2+\eta^2\right)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{\xi}{\left(\xi^2+\eta^2\right)^{\frac{3}{2}}} = 0,$$

$$R^\xi_{\eta\xi\eta} = -R^\xi_{\eta\eta\xi} = \frac{\partial \Gamma^\xi_{\eta\eta}}{\partial x^\xi} - \frac{\partial \Gamma^\xi_{\eta\xi}}{\partial x^\eta} + \Gamma^\xi_{\xi\xi}\Gamma^\xi_{\eta\eta} - \Gamma^\xi_{\xi\eta}\Gamma^\xi_{\eta\xi} + \Gamma^\xi_{\eta\xi}\Gamma^\eta_{\eta\eta} - \Gamma^\xi_{\eta\eta}\Gamma^\eta_{\eta\xi} =$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{\xi}{\left(\xi^2+\eta^2\right)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}\frac{\partial}{\partial\eta}\frac{\eta}{\left(\xi^2+\eta^2\right)^{\frac{3}{2}}}-\left(\frac{\xi}{\left(\xi^2+\eta^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right)^2-$$

$$-\left(\frac{\eta}{\left(\xi^2+\eta^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right)^2+\left(\frac{\eta}{\left(\xi^2+\eta^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right)^2+\left(\frac{\xi}{\left(\xi^2+\eta^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right)^2=-\frac{1}{\left(\xi^2+\eta^2\right)^2},$$

$$R^{\eta}_{\xi\xi\eta}=-R^{\eta}_{\xi\eta\xi}=\frac{\partial\Gamma^{\eta}_{\xi\eta}}{\partial x^{\xi}}-\frac{\partial\Gamma^{\eta}_{\xi\xi}}{\partial x^{\eta}}+\Gamma^{\eta}_{\xi\xi}\Gamma^{\xi}_{\xi\eta}-\Gamma^{\eta}_{\xi\eta}\Gamma^{\xi}_{\xi\xi}+\Gamma^{\eta}_{\eta\xi}\Gamma^{\eta}_{\xi\eta}-\Gamma^{\eta}_{\eta\eta}\Gamma^{\eta}_{\xi\xi}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{\xi}{\left(\xi^2+\eta^2\right)^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}\frac{\partial}{\partial\eta}\frac{\eta}{\left(\xi^2+\eta^2\right)^{\frac{3}{2}}}-\left(\frac{\eta}{\left(\xi^2+\eta^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right)^2$$

$$-\left(\frac{\xi}{\left(\xi^2+\eta^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right)^2+\left(\frac{\xi}{\left(\xi^2+\eta^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right)^2+\left(\frac{\eta}{\left(\xi^2+\eta^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right)^2=\frac{1}{\left(\xi^2+\eta^2\right)^2},$$

$$R^{\eta}_{\eta\xi\eta}=-R^{\eta}_{\eta\eta\xi}=\frac{\partial\Gamma^{\eta}_{\eta\eta}}{\partial x^{\xi}}-\frac{\partial\Gamma^{\eta}_{\eta\xi}}{\partial x^{\eta}}+\Gamma^{\eta}_{\xi\xi}\Gamma^{\xi}_{\eta\eta}-\Gamma^{\eta}_{\xi\eta}\Gamma^{\xi}_{\eta\xi}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{\eta}{\left(\xi^2+\eta^2\right)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}\frac{\partial}{\partial\eta}\frac{\xi}{\left(\xi^2+\eta^2\right)^{\frac{3}{2}}}+$$

$$+\frac{\eta}{\left(\xi^2+\eta^2\right)^{\frac{3}{2}}}\frac{\xi}{\left(\xi^2+\eta^2\right)^{\frac{3}{2}}}-\frac{\eta}{\left(\xi^2+\eta^2\right)^{\frac{3}{2}}}\frac{\xi}{\left(\xi^2+\eta^2\right)^{\frac{3}{2}}}=0.$$

Итак, мы нашли, что отличны от нуля лишь четыре компоненты тензора Римана, а именно:

$$R^{\xi}_{\eta\xi\eta}=-R^{\xi}_{\eta\eta\xi}=-\frac{1}{\left(\xi^2+\eta^2\right)^2},$$

$$R^{\eta}_{\xi\xi\eta}=-R^{\eta}_{\xi\eta\xi}=\frac{1}{\left(\xi^2+\eta^2\right)^2}. \tag{74}$$

Зная отличные от нуля компоненты, легко получить теперь скалярную кривизну в рассматриваемом двухмерном случае, как свёртку тензора Римана:

$$R=R^{i}_{kki}=R^{i}_{\xi\xi i}+R^{i}_{\eta\eta i}=R^{\xi}_{\xi\xi\xi}+R^{\xi}_{\eta\eta\xi}+R^{\eta}_{\xi\xi\eta}+R^{\eta}_{\eta\eta\eta}=\frac{2}{\left(\xi^2+\eta^2\right)^2}. \tag{75}$$

Тензор Риччи, согласно определению, есть тензор второго ранга, определяемый как $R_{ik}=g_{is}R^{s}_{ppk}$, а потому он будет представлять собой матрицу 2×2, то есть:

$$\hat{R}_{ik}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\left(\xi^2+\eta^2\right)^2} & 0\\ 0 & \dfrac{1}{\left(\xi^2+\eta^2\right)^2}\end{pmatrix}. \qquad (76)$$

Аналогично можно вычислить кривизну и в любой другой системе координат, однако, это будут уже значительно более громоздкие вычисления. Заметим, что описанный выше подход был применён и в статьях [7–9].

Не ортогональная криволинейная система координат

В качестве заключительной части этого сообщения рассмотрим теперь не ортогональную криволинейную СК, и продемонстрируем «работу» нашего метода на примере преобразований вида:

$$x=\mathrm{uv},$$
$$y=\frac{\mathrm{u}^2+\mathrm{v}^2}{2}. \qquad (77)$$

После абсолютно понятных простых вычислений можно прийти к следующему выражению для элемента метрики:

$$dl^2=\left(\mathrm{u}^2+\mathrm{v}^2\right)d\,\mathrm{u}^2+4\,\mathrm{uv}\,d\,\mathrm{u}\,d\,\mathrm{v}+\left(\mathrm{u}^2+\mathrm{v}^2\right)d\,\mathrm{v}^2. \qquad (78)$$

В соответствии с намеченным выше алгоритмом вычислений полагаем, что

$$dx^1=\sqrt{\mathrm{u}^2+\mathrm{v}^2}\,d\,\mathrm{u},$$
$$dx^2=\sqrt{\mathrm{u}^2+\mathrm{v}^2}\,d\,\mathrm{v}. \qquad (79)$$

Поэтому из (78) следует, что

$$dl^2=\left(dx^1\right)^2+\frac{4\,\mathrm{uv}}{\mathrm{u}^2+\mathrm{v}^2}dx^1dx^2+\left(dx^2\right)^2. \qquad (80)$$

Из (80) видно, что метрический тензор, как и должно быть, автоматически оказывается безразмерным, и имеет вид:

$$g_{ik}=\begin{pmatrix}1 & \dfrac{2\,\mathrm{uv}}{\mathrm{u}^2+\mathrm{v}^2}\\ \dfrac{2\,\mathrm{uv}}{\mathrm{u}^2+\mathrm{v}^2} & 1\end{pmatrix}. \qquad (81)$$

Его безразмерный определитель есть:

$$g=\left(\frac{\mathrm{u}^2-\mathrm{v}^2}{\mathrm{u}^2+\mathrm{v}^2}\right)^2, \qquad (82)$$

где $\mathrm{u}\neq\mathrm{v}$.

Поэтому контравариантный метрический тензор $\hat{g}^{ik}=\hat{g}_{ik}^{-1}$ будет таким:

$$g^{ik}=\left(\frac{u^2+v^2}{u^2-v^2}\right)^2\begin{pmatrix}1 & -\frac{2uv}{u^2+v^2}\\ -\frac{2uv}{u^2+v^2} & 1\end{pmatrix}. \tag{83}$$

Элементарное вычисление символов Кристоффеля первого рода в соответствии с изложенным выше алгоритмом с использованием формулы (8) приводит нас к следующим выражениям:

$$\Gamma_{vvv}=\frac{v}{q^3},\ \Gamma_{vuv}=\Gamma_{vvu}=\frac{\partial x_n}{\partial x^2}\frac{\partial^2 x_n}{\partial x^1\partial x^2}=\frac{u}{q^3},\ \Gamma_{vuu}=\frac{v}{q^3},$$
$$\Gamma_{uvv}=\frac{u}{q^3},\ \Gamma_{uuv}=\Gamma_{uvu}=\frac{\partial x_n}{\partial x^1}\frac{\partial^2 x_n}{x^1\partial x^2}=\frac{v}{q^3},\ \Gamma_{uuu}=\frac{u}{q^3}, \tag{84}$$

где $q=\sqrt{u^2+v^2}$.

Следовательно, контравариантные компоненты символа Кристоффеля второго рода определяются, как:

$$\Gamma^{v}_{vv}=g^{vv}\Gamma_{vvv}+g^{vu}\Gamma_{uvv}=\left(g^{vv}\,v+g^{vu}\,u\right)\frac{1}{q^3}=$$
$$=\left(\frac{u^2+v^2}{u^2-v^2}\right)^2\frac{1}{\left(u^2+v^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(v-\frac{2u^2v}{u^2+v^2}\right)=-\frac{v}{\left(u^2-v^2\right)\sqrt{u^2+v^2}},$$

$$\Gamma^{u}_{vv}=g^{uv}\Gamma_{vvv}+g^{uu}\Gamma_{uvv}=\left(g^{uv}\,v+g^{uu}\,u\right)\frac{1}{q^3}=$$
$$=\left(\frac{u^2+v^2}{u^2-v^2}\right)^2\frac{1}{\left(u^2+v^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(u-\frac{2uv^2}{u^2+v^2}\right)=\frac{u}{\left(u^2-v^2\right)\sqrt{u^2+v^2}},$$

$$\Gamma^{v}_{uu}=g^{vv}\Gamma_{vuu}+g^{vu}\Gamma_{uuu}=\left(g^{vv}\,v+g^{vu}\,u\right)\frac{1}{q^3}=$$
$$=\left(\frac{u^2+v^2}{u^2-v^2}\right)^2\frac{1}{\left(u^2+v^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(v-\frac{2u^2v}{u^2+v^2}\right)=-\frac{v}{\left(u^2-v^2\right)\sqrt{u^2+v^2}},$$

$$\Gamma^{u}_{uu}=g^{uv}\Gamma_{vuu}+g^{uu}\Gamma_{uuu}=\left(g^{uv}\,v+g^{uu}\,u\right)\frac{1}{q^3}=\frac{u}{\left(u^2-v^2\right)\sqrt{u^2+v^2}},$$

$$\Gamma^{v}_{vu}=g^{vv}\Gamma_{vvu}+g^{vu}\Gamma_{uvu}=\left(g^{vv}\,u+g^{vu}v\right)\frac{1}{q^3}=$$
$$=\frac{1}{\left(u^2+v^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{u^2+v^2}{u^2-v^2}\right)^2\left(u-\frac{2v^2u}{u^2+v^2}\right)=\frac{u}{\left(u^2-v^2\right)\sqrt{u^2+v^2}},$$

$$\Gamma^{u}_{vu}=g^{uv}\Gamma_{vvu}+g^{uu}\Gamma_{uvu}=\left(g^{uv}\,u+g^{uu}v\right)\frac{1}{q^3}=$$

$$=\frac{1}{q^3}\left(\frac{u^2+v^2}{u^2-v^2}\right)^2\left(v-\frac{2vu^2}{u^2+v^2}\right)=-\frac{v}{\left(u^2-v^2\right)\sqrt{u^2+v^2}}. \qquad (85)$$

В соответствии с формулой (63), тривиальное обобщение которой на произвольную криволинейную СК имеет вид:

$$\tilde{\Delta}=g^{ik}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^i\partial x^k}-\Gamma^p_{ik}\frac{\partial}{\partial x^p}\right), \qquad (86)$$

позволяет нам привести следующую цепочку вычислений:

$$\tilde{\Delta}_2=g^{ik}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^i\partial x^k}-\Gamma^p_{ik}\frac{\partial}{\partial x^p}\right)=$$

$$=g^{uu}\left(\frac{\partial^2}{\left(\partial x^1\right)^2}-\Gamma^p_{uu}\frac{\partial}{\partial x^p}\right)+2g^{uv}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^1\partial x^2}-\Gamma^p_{uv}\frac{\partial}{\partial x^p}\right)+g^{vv}\left(\frac{\partial^2}{\left(\partial x^2\right)^2}-\Gamma^p_{vv}\frac{\partial}{\partial x^p}\right). \qquad (87)$$

Подставляя сюда найденные выражения для символов Кристоффеля из (85) и недиагональные компоненты метрического тензора из (83), получаем:

$$\tilde{\Delta}_2=\frac{u^2+v^2}{\left(u^2-v^2\right)^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2}+\frac{\partial^2}{\partial v^2}\right)-\frac{4uv}{\left(u^2-v^2\right)^2}\frac{\partial^2}{\partial u\partial v}-D,$$

где

$$D=\left(g^{uu}\Gamma^p_{uu}+2g^{uv}\Gamma^p_{uv}+g^{vv}\Gamma^p_{vv}\right)\frac{\partial}{\partial x^p}=$$

$$=\left(g^{uu}\Gamma^u_{uu}+2g^{uv}\Gamma^u_{uv}+g^{vv}\Gamma^u_{vv}\right)\frac{\partial}{\partial x^1}+\left(g^{uu}\Gamma^v_{uu}+2g^{uv}\Gamma^v_{uv}+g^{vv}\Gamma^v_{vv}\right)\frac{\partial}{\partial x^2}=\frac{1}{q}\left(\frac{u^2+v^2}{u^2-v^2}\right)^2\times$$

$$\times\left(\frac{u}{\left(u^2-v^2\right)\sqrt{u^2+v^2}}+\frac{4uv}{u^2+v^2}\frac{v}{\left(u^2-v^2\right)\sqrt{u^2+v^2}}+\frac{u}{\left(u^2-v^2\right)\sqrt{u^2+v^2}}\right)\frac{\partial}{\partial u}+\frac{1}{q}\left(\frac{u^2+v^2}{u^2-v^2}\right)^2\times$$

$$\times\left(-\frac{v}{\left(u^2-v^2\right)\sqrt{u^2+v^2}}-\frac{4uv}{u^2+v^2}\frac{u}{\left(u^2-v^2\right)\sqrt{u^2+v^2}}-\frac{v}{\left(u^2-v^2\right)\sqrt{u^2+v^2}}\right)\frac{\partial}{\partial v}=$$

$$=\frac{2u\left(u^2+3v^2\right)}{\left(u^2-v^2\right)^3}\frac{\partial}{\partial u}-\frac{2v\left(v^2+3u^2\right)}{\left(u^2-v^2\right)^3}\frac{\partial}{\partial v}.$$

В итоге получаем:

$$\tilde{\Delta}_2 = \frac{u^2+v^2}{\left(u^2-v^2\right)^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2}+\frac{\partial^2}{\partial v^2}\right)-\frac{4uv}{\left(u^2-v^2\right)^2}\frac{\partial^2}{\partial u\partial v}-$$
$$-\frac{2u\left(u^2+3v^2\right)}{\left(u^2-v^2\right)^3}\frac{\partial}{\partial u}+\frac{2v\left(v^2+3u^2\right)}{\left(u^2-v^2\right)^3}\frac{\partial}{\partial v}. \qquad (88)$$

Чтобы убедиться в корректности формулы (88), воспользуемся теперь эталонным выражением (49), которое в наших переменных можно записать как:

$$\tilde{\Delta}_2 = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial^2}{\partial u^2}+\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial^2}{\partial v^2}+\Delta_2 u\frac{\partial}{\partial u}+\Delta_2 v\frac{\partial}{\partial v}+$$
$$+2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial^2}{\partial u\partial v}. \qquad (89)$$

Из (77) обратное преобразование имеет вид

$$\begin{cases} u+v=\sqrt{2(x+y)}, \\ u-v=\sqrt{2(y-x)}. \end{cases} \qquad (90)$$

Откуда:

$$\begin{cases} u=\dfrac{\sqrt{x+y}+\sqrt{y-x}}{\sqrt{2}}, \\ v=\dfrac{\sqrt{x+y}-\sqrt{y-x}}{\sqrt{2}}. \end{cases} \qquad (91)$$

Поэтому:

$$\Delta_2 u = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\sqrt{x+y}+\sqrt{y-x}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\sqrt{x+y}+\sqrt{y-x}\right)=$$
$$=-\frac{1}{4\sqrt{2}(x+y)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{4\sqrt{2}(y-x)^{\frac{3}{2}}}-$$
$$-\frac{1}{4\sqrt{2}(x+y)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{4\sqrt{2}(y-x)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{1}{2\sqrt{2}(x+y)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{2\sqrt{2}(y-x)^{\frac{3}{2}}}.$$

Аналогично:

$$\Delta_2\,\mathrm{v}=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\sqrt{x+y}-\sqrt{y-x}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\sqrt{x+y}-\sqrt{y-x}\right)=$$

$$=-\frac{1}{4\sqrt{2}\left(x+y\right)^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{4\sqrt{2}\left(y-x\right)^{\frac{3}{2}}}-$$

$$-\frac{1}{4\sqrt{2}\left(x+y\right)^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{4\sqrt{2}\left(y-x\right)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{1}{2\sqrt{2}\left(x+y\right)^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{2\sqrt{2}\left(y-x\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Согласно (90):

$$\Delta_2\,\mathrm{u}=-\frac{1}{\left(\mathrm{u}+\mathrm{v}\right)^3}-\frac{1}{\left(\mathrm{u}-\mathrm{v}\right)^3}=-\frac{2\mathrm{u}\left(\mathrm{u}^2+3\mathrm{v}^2\right)}{\left(\mathrm{u}^2-\mathrm{v}^2\right)^3},$$

$$\Delta_2\,\mathrm{v}=-\frac{1}{\left(\mathrm{u}+\mathrm{v}\right)^3}+\frac{1}{\left(\mathrm{u}-\mathrm{v}\right)^3}=\frac{2\mathrm{v}\left(\mathrm{v}^2+3\mathrm{u}^2\right)}{\left(\mathrm{u}^2-\mathrm{v}^2\right)^3}. \tag{91}$$

$$\left(\frac{\partial\mathrm{u}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathrm{u}}{\partial y}\right)^2=\frac{1}{8}\left[\left(\frac{1}{\sqrt{x+y}}-\frac{1}{\sqrt{y-x}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{x+y}}+\frac{1}{\sqrt{y-x}}\right)^2\right]=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y-x}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\left(\mathrm{u}+\mathrm{v}\right)^2}+\frac{1}{\left(\mathrm{u}-\mathrm{v}\right)^2}\right)=\frac{\mathrm{u}^2+\mathrm{v}^2}{\left(\mathrm{u}^2-\mathrm{v}^2\right)^2},$$

$$\left(\frac{\partial\mathrm{v}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathrm{v}}{\partial y}\right)^2=\frac{\mathrm{u}^2+\mathrm{v}^2}{\left(\mathrm{u}^2-\mathrm{v}^2\right)^2},$$

$$\frac{\partial\mathrm{u}}{\partial x}\frac{\partial\mathrm{v}}{\partial x}+\frac{\partial\mathrm{u}}{\partial y}\frac{\partial\mathrm{v}}{\partial y}=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{\sqrt{x+y}}-\frac{1}{\sqrt{y-x}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x+y}}+\frac{1}{\sqrt{y-x}}\right)+$$

$$+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{\sqrt{x+y}}-\frac{1}{\sqrt{y-x}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x+y}}+\frac{1}{\sqrt{y-x}}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x+y}-\frac{1}{y-x}\right)=-\frac{2\mathrm{uv}}{\left(\mathrm{u}^2-\mathrm{v}^2\right)^2}.$$

Согласно (89) имеем:

$$\tilde{\Delta}_2=\frac{\mathrm{u}^2+\mathrm{v}^2}{\left(\mathrm{u}^2-\mathrm{v}^2\right)^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\mathrm{u}^2}+\frac{\partial^2}{\partial\mathrm{v}^2}\right)-\frac{4\mathrm{uv}}{\left(\mathrm{u}^2-\mathrm{v}^2\right)^2}\frac{\partial^2}{\partial\mathrm{u}\,\partial\mathrm{v}}-$$

$$-\frac{2\mathrm{u}\left(\mathrm{u}^2+3\mathrm{v}^2\right)}{\left(\mathrm{u}^2-\mathrm{v}^2\right)^3}\frac{\partial}{\partial\mathrm{u}}+\frac{2\mathrm{v}\left(\mathrm{v}^2+3\mathrm{u}^2\right)}{\left(\mathrm{u}^2-\mathrm{v}^2\right)^3}\frac{\partial}{\partial\mathrm{v}}. \tag{92}$$

Сравнивая (92) и (88), убеждаемся в их полной эквивалентности. Таким образом, наше утверждение, сформулированное несколько выше, может считаться доказанным.

Стоит ещё раз подчеркнуть, что предлагаемый подход вычисления является, на наш взгляд, значительно более рациональным, чем использование коэффициентов Ламе, поскольку автоматически приводит в результате к физически правильным размерностям, что является чрезвычайно важным именно при решении различных физических задач.

Заключение

В заключение стоит отметить несколько основных моментов, дающих краткую характеристику описанного выше подхода.

1. Предложен простой формализм, позволяющий правильно вычислять любые тензорные физические характеристики, в частности, из гидродинамики и теории упругости, в криволинейном пространстве с заведомо правильной физической размерностью.

2. Доказано, что коэффициенты Ламе, часто используемые в теории упругости и гидродинамике, не имеют никакого значения и приводят только к путанице в размерностях. Продемонстрированный выше подход не связан с подобного рода проблемой.

3. Приведено правильное выражение для оператора Лапласа (63), справедливое в любой ортогональной криволинейной системе координат, и его обобщение (86) для произвольной СК.

4. Рассмотрены физические и геометрические примеры, иллюстрирующие корректность описанного выше подхода.

Статья поступила в редакцию 24.12.2018 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мак-Коннел А. Дж. Введение в тензорный анализ с приложениями к геометрии, механике и физике: пер. с англ. / под ред. Г. В. Коренева. М.: Физматлит, 1963. 411 с.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости. Т. 7. М.: Наука, 2004. 246 с.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. Т. 1. М.: Наука, 2001. 189 с.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. Т. 2. М.: Наука, 2002. 502 с.
5. Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1967. 664 с.
6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. Т. 3. М.: Наука, 2004. 752 с.
7. Гладков С. О. К вопросу о линеаризации основного уравнения ОТО // Инженерная физика. 2017. Т. 19. № 10. С. 19–27.
8. Гладков С. О. К вопросу о взаимодействии полей разной физической природы // Инженерная физика. 2018. Т. 20. № 3. С. 17–31.
9. Gladkov S. O. To the question of a common field theory // Journal of Physics: Conference series. 2018. Vol. 1051: XX International Meeting “Physical Interpretations of Relativity Theory 2017”. P. 012029.

REFERENCES

1. MacConnel A. J. Applications of Tensor Analysis. New York, Dover Publication, 2011. 352 p.
2. Landau L. D., Lifshits E. M. *Theory of Elasticity*, Course of Theoretical Physics, Vol. 7. London Elsevier, 2005.
3. Landau L. D., Lifshits E. M. Mechanics. Oxford, Pergamon Press, 2000. 170 p.
4. Landau L. D., Lifshits E. M. The Classical *Theory of Fields,* Course of Theoretical Physics, Vo. 2. Oxford, Pergamon Press, 1971.
5. Rashevskii P. K. *Rimanova geometriya i tenzornyi analiz* [Riemannian geometry and tensor analysis]. Moscow, Nauka Publ., 1967. 664 p.
6. Landau L. D., Lifshits E. M. Quantum mechanics*,* Course of Theoretical Physics, Vo. 3. Oxford, Pergamon Press, 1965.
7. Gladkov S. O. [To the problem of linearization of the basic equation of the general relativity]. In: *Inzhenernaya fizika* [Engineering Physics], 2017, vol. 19, no. 10, pp.19–27.
8. Gladkov S. O. [To the problem of the interaction between the fields of different physical nature]. In: *Inzhenernaya fizika* [Engineering Physics], 2018, vol. 20, no. 3, pp. 17–31.
9. Gladkov S. O. To the problem of a common field theory. In: *Journal of Physics: Conference series*, 2018, vol. 1051: XX International Meeting "Physical Interpretations of Relativity Theory 2017", pp. 012029.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Гладков Сергей Октябринович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математического моделирования № 311 Московского авиационного института (национального исследовательского университета);
e-mail: sglad51@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Sergey O. Gladkov – Doctor in Physical and Mathematical Sciences, professor, professor at the Department of Mathematical Modeling no. 311, Moscow Aviation Institute (National Research University);
e-mail: sglad51@mail.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Гладков С. О. Об альтернативном вычислении ковариантных производных с приложением к проблемам механики, физики и геометрии // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2019. № 1. С. 16–45.
DOI: 10.18384-2310-7251-2019-1-16-45

FOR CITATION

Gladkov S. O. Alternative calculation of covariant derivatives with an application to the problems of mechanics, physics and geometry. In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*, 2019, no. 1, pp. 16–45.
DOI: 10.18384-2310-7251-2019-1-16-45

УДК 535.412, 537.874
DOI: 10.18384-2310-7251-2019-1-46-56

ЭЛЕКТРОННАЯ ПЛАЗМА И ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ ОТ МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ И ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПЛЁНОК

Зверев Н. В., Юшканов А. А.
Московский государственный областной университет
141014, Московская область, г. Мытищи, ул. Веры Волошиной, д. 24, Российская Федерация

Аннотация. Исследовано влияние кинетических и квантовых свойств вырожденной электронной плазмы металла на интерференцию излучения от металлической и диэлектрической плёнок. Изучены энергетические коэффициенты отражения и прохождения лучей в результате интерференции, а также разности фаз интерферирующих лучей в зависимости от частоты излучения для случаев P- и S-волн. Установлено отличие результатов для квантовой электронной плазмы от результатов для классической электронной плазмы и для классического электронного газа в случаях частот порядка и много меньше плазменной частоты.

Ключевые слова: металлическая плёнка, интерференция, оптические коэффициенты, электронная плазма.

ELECTRON PLASMA AND INTERFERENCE OF RADIATION FROM METALLIC AND DIELECTRIC FILMS

N. Zverev, A. Yushkanov
Moscow Region State University
ul. Very Voloshinoi 24, 141014 Mytishchi, Moscow Region, Russian Federation

Abstract. An influence of kinetic and quantum properties of degenerate electron plasma on the interference of radiation from metallic and dielectric films is investigated. The reflection and transmission power coefficients as well as the phase differences of interfering beams as functions of the radiation frequency are studied in the cases of P- and S-waves. A difference of the results for the quantum electron plasma from the results for the classical electron plasma and for the classical electron gas is determined in cases of frequencies which are an order and much less than the plasma frequency.

Keywords: metallic film, interference, optical coefficients, electron plasma.

Введение

В последнее время огромное внимание уделяется исследованиям взаимодействия электромагнитного излучения с проводниками малых размеров от нанометра до микрометра и с композитными материалами, содержащими такие проводники [1–6][1]. Это внимание обусловлено не только теоретическим интересом, но также вызвано бурным развитием нанотехнологий и связанным с этим развитием созданием оптических устройств, имеющих узкие полосы пропускания, отражения или генерации излучения.

В этих исследованиях рассматриваются в основном амплитудные характеристики электромагнитного излучения. И зачастую не уделяется должного внимания исследованиям фазовых характеристик отражённого или проходящего излучений. В то же время фаза электромагнитных волн играет большую роль в ряде оптических устройств, таких как интерферометры, фильтры или слоистые структуры, например, одномерные фотонные кристаллы (см. [2; 3][2]). Кроме того, изучение фазы волн дополняет исследование амплитуды излучения при его взаимодействии с веществом, а также при возникновении и распространении излучения в различных средах. Поэтому исследование фазы электромагнитных волн при их взаимодействии с металлическими объектами представляет собой достаточно актуальную задачу.

Настоящая работа призвана восполнить пробел в непосредственном изучении фазовых характеристик электромагнитного излучения при его взаимодействии с металлами. В данной работе исследуется электромагнитное излучение, полученное в результате интерференции отражённых и проходящих лучей от тонких параллельных плёнок из металла и из прозрачного диэлектрика. Рассматриваются электромагнитные волны двух поляризаций: P- и S-волна. В работе изучается влияние кинетических и квантовых волновых свойств электронов проводимости металла на энергетические коэффициенты и разности фаз указанных интерферирующих излучений. Для этого результаты в случае квантовой вырожденной электронной плазмы сравниваются с данными, полученными для классической вырожденной плазмы, а также с результатами для классического электронного газа.

Модель, энергетические коэффициенты и разности фаз

Пусть плоские однородные и изотропные металлическая и диэлектрическая плёнки одинаковой малой толщины d расположены параллельно между двумя

---

[1] Также см. работы:

Завитаев Э. В., Русаков О. В., Юшканов А. А. Скин-эффект в тонкой цилиндрической проволоке из металла // Физика твёрдого тела. 2012. Т. 54. Вып. 6. С. 1041–1047;

Уткин А. И., Юшканов А. А. Влияние коэффициентов зеркальности на взаимодействие H-волны с тонкой металлической плёнкой // Оптика и спектроскопия. 2014. Т. 117. № 4. С. 650–654;

Зверев Н. В., Юшканов А. А. Квантовая электронная плазма, металлическая плёнка и электромагнитное излучение // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика–Математика. 2016. № 3. С. 18–29;

Зверев Н. В., Юшканов А. А. Квантовая электронная плазма в одномерном металло-диэлектрическом фотонном кристалле // Оптика и спектроскопия. 2017. Т. 122. № 2. С. 222–227;

Расчёт высокочастотной электропроводности тонкого полупроводникового слоя в случае различных коэффициентов зеркальности его поверхностей / Кузнецова И. А., Романов Д. Н., Савенко О. В., Юшканов А. А. // Микроэлектроника. 2017. Т. 46. № 4. С. 275–283.

[2] Также см.: Зверев Н. В., Юшканов А. А. Квантовая электронная плазма в одномерном металлодиэлектрическом фотонном кристалле // Оптика и спектроскопия. 2017. Т. 122. № 2. С. 222–227.

прозрачными однородными изотропными диэлектрическими средами с положительными диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2 (рис. 1).

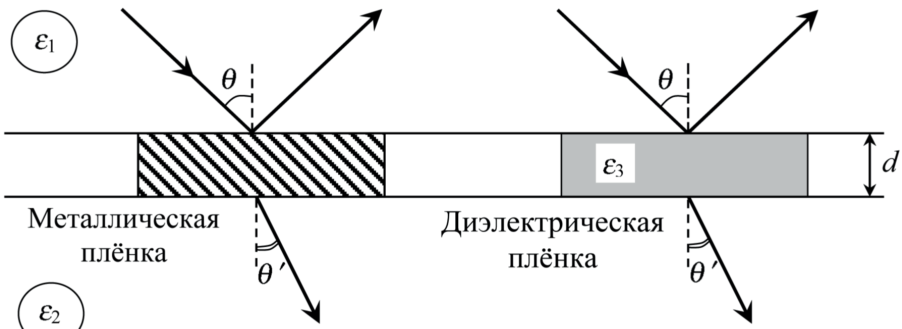

Рис. 1. Схема распространения излучения через металлическую и диэлектрическую плёнки.

Считаем, что диэлектрическая плёнка сделана также из прозрачного диэлектрика с положительной диэлектрической проницаемостью ε_3.

Пусть электромагнитное излучение с частотой ω падает со стороны среды с ε_1 на металлическую и диэлектрическую плёнки под углом θ (рис. 1). В результате отражения излучения от плёнок и прохождения через них излучения возникает интерференция волн. Тогда энергетические коэффициенты отражения и прохождения интерферирующих волн R_{itf} и T_{itf}, а также разности фаз этих волн $\Delta\varphi_R$ и $\Delta\varphi_T$ имеют вид (метод вывода описан в [4; 5; 7]):

$$R_{itf} = \frac{1}{4}\left|r_1 + r_2\right|^2, \quad T_{itf} = \frac{1}{4}\left|t_1 + t_2\right|^2 \mathrm{Re}\left(\frac{\cos\theta'}{\cos\theta}\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\right), \tag{1}$$

$$\Delta\varphi_R = \varphi_{r1} - \varphi_{r2}, \quad \Delta\varphi_T = \varphi_{t1} - \varphi_{t2}. \tag{2}$$

Здесь r_1 и t_1 – коэффициенты для металлической плёнки:

$$r_1 = \frac{U^{(1)} + U^{(2)}}{V^{(1)} + V^{(2)}}, \quad t_1 = \frac{U^{(1)}V^{(2)} - U^{(2)}V^{(1)}}{V^{(1)} + V^{(2)}}, \tag{3}$$

а r_2 и t_2 – соответственно коэффициенты для диэлектрической плёнки:

$$r_2 = \frac{\tilde{U}^{(1)} + \tilde{U}^{(2)}}{\tilde{V}^{(1)} + \tilde{V}^{(2)}}, \quad t_2 = \frac{\tilde{U}^{(1)}\tilde{V}^{(2)} - \tilde{U}^{(2)}\tilde{V}^{(1)}}{\tilde{V}^{(1)} + \tilde{V}^{(2)}}. \tag{4}$$

Из комплексного представления коэффициентов r_j и t_j (j = 1, 2) определяются фазы φ_{rj} и φ_{tj} отражённых и проходящих излучений от металлической и диэлектрической плёнок:

$$r_j = |r_j|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_{rj}}, \quad t_j = |t_j|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_{tj}}. \tag{5}$$

В формулах (3) величины $U^{(j)}$ и $V^{(j)}$ (j = 1, 2) в случае P-волны (вектор **E** волны лежит в плоскости падения) равны:

$$U^{(j)}=\frac{\cos\theta-Z_P^{(j)}\sqrt{\varepsilon_1}}{\cos\theta'+Z_P^{(j)}\sqrt{\varepsilon_2}},\quad V^{(j)}=\frac{\cos\theta+Z_P^{(j)}\sqrt{\varepsilon_1}}{\cos\theta'+Z_P^{(j)}\sqrt{\varepsilon_2}}. \tag{6}$$

А в случае S-волны (вектор **H** волны лежит в плоскости падения) эти величины выглядят следующим образом:

$$U^{(j)}=\frac{1+Z_S^{(j)}\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta}{1-Z_S^{(j)}\sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta'},\quad V^{(j)}=\frac{1-Z_S^{(j)}\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta}{1-Z_S^{(j)}\sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta'}. \tag{7}$$

В формулах (4) величины $\tilde{U}^{(j)}$ и $\tilde{V}^{(j)}$ определяются через $U^{(j)}$ и $V^{(j)}$ как для P-волны, так и для S-волны:

$$\tilde{U}^{(j)}=U^{(j)}[Z^{(j)}=\tilde{Z}^{(j)}],\quad \tilde{V}^{(j)}=V^{(j)}[Z^{(j)}=\tilde{Z}^{(j)}]. \tag{8}$$

В формулах (6) и (7) угол θ' – это угол преломления в среду с ε_2 (рис. 1), определяемый по закону преломления:

$$\sqrt{\varepsilon_1}\sin\theta=\sqrt{\varepsilon_2}\sin\theta'. \tag{9}$$

А $Z_P^{(j)}$ и $Z_S^{(j)}$ (j = 1, 2) – поверхностные импедансы металлической плёнки, найденные в предположении зеркального отражения электронов проводимости металла от границ плёнки [8] (см. также [9]):

$$Z_P^{(j)}=\frac{2\mathrm{i}c\omega}{d}\sum_n\frac{1}{k_n^2}\left(\frac{k_x^2}{\omega^2\varepsilon_l(\omega,k_n)}+\frac{(\pi n/d)^2}{\omega^2\varepsilon_{tr}(\omega,k_n)-(ck_n)^2}\right), \tag{10}$$

$$Z_S^{(j)}=-\frac{2\mathrm{i}c\omega}{d}\sum_n\frac{1}{\omega^2\varepsilon_{tr}(\omega,k_n)-(ck_n)^2}. \tag{11}$$

В формулах (8) поверхностные импедансы диэлектрической плёнки для P-волны и S-волны равны:

$$\tilde{Z}_{P,S}^{(j)}=Z_{P,S}^{(j)}[\varepsilon_l=\varepsilon_{tr}=\varepsilon_3]. \tag{12}$$

В формулах (10) и (11) обозначено:

$$k_n=\sqrt{(\pi n/d)^2+k_x^2},\quad k_x=\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_1}\sin\theta. \tag{13}$$

Здесь c – скорость света. Суммирование в (10) и (11) выполняется при j = 1 по всем нечётным n = ±1, ±3, ±5, ... и при j = 2 по всем чётным n = 0, ±2, ±4, ...

В формулах (10) и (11) $\varepsilon_l(\omega,k)$ и $\varepsilon_{tr}(\omega,k)$ – продольная и поперечная диэлектрические проницаемости электронной плазмы. Эти проницаемости зависят не только от частоты ω, но и от волнового числа k, то есть также имеет место пространственная дисперсия диэлектрических проницаемостей электронной плазмы.

Следует отметить, что коэффициенты (1) и разности фаз (2) с учётом (5) связаны между собой соотношениями:

$$R_{itf} = \frac{1}{4}\left(R_1 + R_2 + 2\sqrt{R_1 R_2}\cos\Delta\varphi_R\right),$$

$$T_{itf} = \frac{1}{4}\left(T_1 + T_2 + 2\sqrt{T_1 T_2}\cos\Delta\varphi_T\right), \tag{14}$$

где R_1 и R_2 – энергетические коэффициенты отражения от металлической и от диэлектрической плёнки соответственно, а T_1 и T_2 – энергетические коэффициенты прохождения через металлическую и диэлектрическую плёнки [4; 5]:

$$R_j = |r_j|^2, \quad T_j = |t_j|^2 \operatorname{Re}\left(\frac{\cos\theta'}{\cos\theta}\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\right) \quad (j = 1, 2). \tag{15}$$

Формулы (14) позволяют экспериментально определить косинусы разностей фаз отражённых и проходящих излучений $\cos\Delta\varphi_R$ и $\cos\Delta\varphi_T$ по измеренным значениям R_j, T_j, R_{itf} и T_{itf} $(j = 1, 2)$.

Диэлектрические проницаемости электронной плазмы

Диэлектрические проницаемости в случае квантовой вырожденной электронной плазмы при температуре $T = 0$ К, вычисленные в работах [10; 11] в рамках подхода Мермина, имеют следующий вид:

$$\varepsilon^{(qu)}(\omega,\ \ ) = 1 + \frac{3}{4Q}\frac{(\Omega + i\gamma)F(\Omega + i\gamma, Q)F(0, Q)}{\Omega F(0, Q) + i\gamma F(\Omega + i\gamma, Q)}, \tag{16}$$

$$\varepsilon_{tr}^{(qu)}(\omega, k) = 1 - \frac{1}{\Omega^2}\left(1 + \frac{\Omega G(\Omega + i\gamma, Q) + i\gamma G(0, Q)}{\Omega + i\gamma}\right). \tag{17}$$

Здесь обозначено:

$$F(\Omega + i\gamma, Q) = \frac{B_1(\Omega_+ + i\gamma, Q) - B_1(\Omega_- + i\gamma, Q)}{r} + 2, \tag{18}$$

$$G(\Omega + i\gamma, Q) = \frac{3\left[B_2(\Omega_+ + i\gamma, Q) - B_2(\Omega_- + i\gamma, Q)\right]}{16r} + $$
$$+ \frac{9}{8}\left(\frac{\Omega + i\gamma}{Q}\right)^2 + \frac{3}{32}Q^2 r^2 - \frac{5}{8}, \tag{19}$$

$$B_\alpha(\Omega + i\gamma, Q) = \frac{1}{Q^{2\alpha+1}}\left[(\Omega + i\gamma)^2 - Q^2\right]^\alpha \ln\frac{\Omega + i\gamma - Q}{\Omega + i\gamma + Q}, \tag{20}$$

где $\alpha = 1, 2$.

В формулах (16) – (20) введены безразмерные величины:

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_p}, \quad Q = \frac{\upsilon_F k}{\omega_p}, \quad \gamma = \frac{1}{\omega_p \tau},$$
$$r = \frac{\hbar\omega_p}{m_e \upsilon_F^2}, \quad \Omega_{\pm} = \Omega \pm \frac{1}{2} Q^2 r, \tag{21}$$

где ω_p – плазменная частота электронной плазмы, υ_F – скорость Ферми электронов плазмы, τ – время релаксации электронов из-за столкновений в плазме, $\hbar$ – постоянная Планка, m_e – эффективная масса электронов проводимости.

Результаты для проницаемостей (16) и (17) квантовой электронной плазмы будем сравнивать с результатами для проницаемостей классической вырожденной электронной плазмы при $T = 0$ К [12]:

$$\varepsilon_l^{(cl)}(\omega, k) = 1 + \frac{3}{Q^2} \frac{1 + \dfrac{\Omega + i\gamma}{2Q} \ln \dfrac{\Omega + i\gamma - Q}{\Omega + i\gamma + Q}}{1 + \dfrac{i\gamma}{2Q} \ln \dfrac{\Omega + i\gamma - Q}{\Omega + i\gamma + Q}}, \tag{22}$$

$$\varepsilon_{tr}^{(cl)}(\omega, k) = 1 - \frac{3}{4\Omega} \left(\frac{2(\Omega + i\gamma)}{Q^2} + B_1(\Omega + i\gamma, Q) \right), \tag{23}$$

а также с результатами для проницаемостей классического электронного газа в подходе Друде – Лоренца [8; 12]:

$$\varepsilon_l^{(DL)}(\omega) = \varepsilon_{tr}^{(DL)}(\omega) = 1 - \frac{1}{\Omega(\Omega + i\gamma)}. \tag{24}$$

Проницаемости (22) и (23) отражают кинетические свойства электронов вырожденной плазмы. А проницаемости (16) и (17) отражают и кинетические, и квантовые волновые свойства электронов плазмы. Проницаемости (16) и (17) в классическом пределе $r \to 0$ переходят в проницаемости (22) и (23), а в длинноволновом пределе $k \to 0$ как квантовые проницаемости (16) и (17), так и классические проницаемости (22) и (23) переходят в проницаемости (24).

Результаты исследования

При численном исследовании в качестве металла мы рассматриваем калий, для которого согласно [8] нами взяты значения $\omega_p = 6{,}61 \cdot 10^{15}$ с$^{-1}$, $\upsilon_F = 8{,}5 \cdot 10^5$ м/с, $\tau = 1{,}5 \cdot 10^{-13}$ с, $m_e = 9 \cdot 10^{-31}$ кг. В качестве окружающих диэлектриков нами выбраны либо воздух и кварц с $\varepsilon_1 = 1$ и $\varepsilon_2 = 2$, соответственно, либо наоборот, кварц и воздух с $\varepsilon_1 = 2$ и $\varepsilon_2 = 1$. Наконец, в качестве диэлектрика прозрачной плёнки мы рассматриваем гель с $\varepsilon_3 = 1{,}6$.

Численные расчёты, выполненные по формулам (1) – (13) и (15) – (24), показывают отличие результатов для случаев квантовой и классической вырожденной электронной плазмы и классического электронного газа (рис. 2; 3). Это отличие говорит о влиянии как кинетических, так и квантовых волновых свойств вырожденной электронной плазмы на интерференцию отражённых и проходящих P- и S-волн от металлической и от диэлектрической плёнок. Такое влияние на энергетические коэффициенты интерферирующих излучений и на их разности фаз наблюдается при тех же частотах, что и в случае энергетических коэффициентов R_1 и T_1 одной металлической плёнки без интерференции.

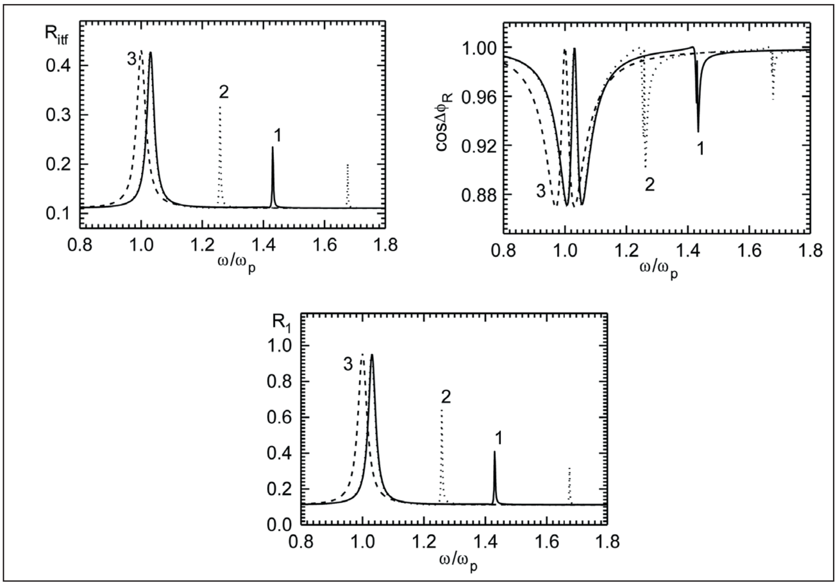

Рис. 2. Величины R_{itf}, $\cos\Delta\varphi_R$ и R_1 в зависимости от частоты ω, P-волна: *1* – квантовая электронная плазма, 2 – классическая электронная плазма, 3 – классический электронный газ. Значения $\theta = 75°$, $d = 1{,}28$ нм, $\varepsilon_1 = 1$ (воздух), $\varepsilon_2 = 2$ (кварц), $\varepsilon_3 = 1{,}6$ (гель).

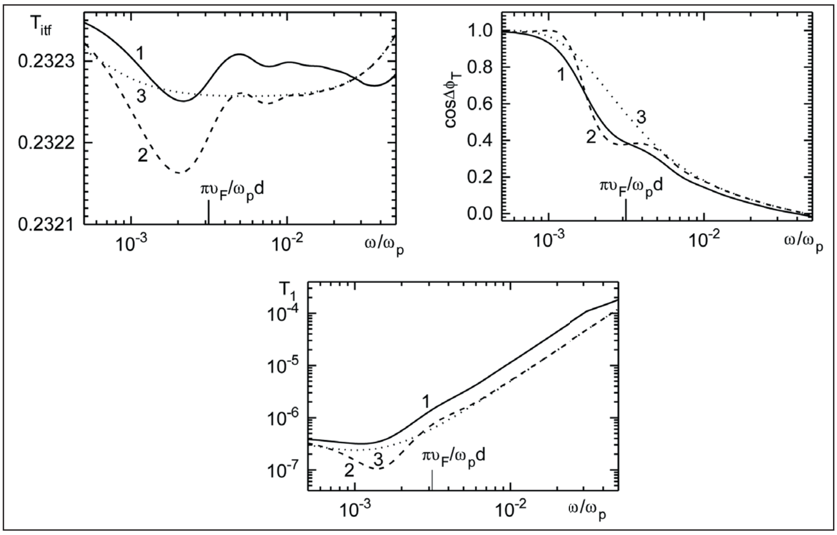

Рис. 3. Величины T_{itf}, $\cos\Delta\varphi_T$ и T_1 в зависимости от частоты ω, S-волна: 1 – квантовая электронная плазма, 2 – классическая электронная плазма, 3 – классический электронный газ. Значения $\theta = 30°$, $d = 128$ нм, $\varepsilon_1 = 2$ (кварц), $\varepsilon_2 = 1$ (воздух), $\varepsilon_3 = 1{,}6$ (гель).

Для P-волн (рис. 2) отличие энергетических коэффициентов и разностей фаз квантовой электронной плазмы от этих величин классической электронной плазмы и классического электронного газа наблюдается главным образом вблизи резонансных частот в области $\omega \gtrsim \omega_p$ при малых толщинах плёнок $d << c/\omega_p$ (толщина скин-слоя). Резонансные частоты наблюдаются для классической и для квантовой электронной плазмы, в то время как для классического электронного газа такой частотой является лишь частота вблизи плазменной частоты ω_p. Это отличие обусловлено влиянием продольных колебаний электронной плазмы внутри тонкой плёнки металла [8] (см. также [4]).

Расстояние между резонансными частотами имеет порядок $\Delta\omega \sim \pi\upsilon_F/d$. Однако квантовые волновые свойства электронной плазмы приводят к смещению и сглаживанию резонансных пиков энергетических коэффициентов и разностей фаз.

А в случае S-волн (рис. 3) энергетические коэффициенты и разности фаз для квантовой электронной плазмы отличаются от этих величин классической электронной плазмы и классического электронного газа при частотах $\omega \sim \pi\upsilon_F / d$. Такие частоты оказываются достаточно малыми по сравнению с плазменной частотой ω_p, поскольку при этом толщина плёнок должна быть больше или порядка толщины скин-слоя, т.е. $d \gtrsim c / \omega_p$. При этих частотах наблюдается также отличие указанных величин для классической электронной плазмы от величин для классического электронного газа. Такое отличие вызвано периодическим движением электронов между границами металлического слоя [13], частота которого равна как раз $\pi\upsilon_F/d$. А большая толщина d плёнок обеспечивает достаточную видимость эффекта на фоне заметного поглощения излучения в металлической плёнке [1; 5].

Заключение

В данной работе численно изучено влияние кинетических и квантовых волновых свойств электронной плазмы на интерференцию излучения от металлической и диэлектрической плёнок одинаковой толщины. Исследованы энергетические коэффициенты и разности фаз интерферирующих лучей в зависимости от частоты излучения для случаев P- и S-волн.

В результате исследования показано отличие результатов для случаев квантовой электронной плазмы, классической электронной плазмы и классического электронного газа. Это отличие для интерферирующих лучей выполняется при тех же частотах, что и в случае излучений от одной металлической плёнки, когда интерференция отсутствует. Тем самым доказывается влияние как кинетических, так и квантовых свойств электронной плазмы на интерференцию излучений от плёнок. В случае P-волн отличие величин наблюдается вблизи резонансных частот порядка плазменной частоты при толщинах плёнок много меньше толщины скин-слоя. А в случае S-волн вклад кинетических и квантовых свойств наблюдается вблизи частоты периодического движения электронов вырожденной плазмы между поверхностями металлического слоя при толщинах плёнок больше или порядка толщины скин-слоя.

Полученные результаты целесообразно учитывать при создании и использовании оптических интерференционных устройств с тонкими металлическими и диэлектрическими плёнками.

Статья поступила в редакцию 10.12.2018 г.

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа поддержана грантом РФФИ № 19-07-00537 А.

ACKNOWLEDGMENTS

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (Grant No. 19-07-00537 A).

ЛИТЕРАТУРА

1. Нелокальные эффекты в электродинамике металлических пластин / Парадес-Хуарес А., Диас-Монхе Ф., Макаров Н. М., Перес-Родригес Ф. // Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики. 2009. Т. 90. № 9. С. 687–692.
2. Using metallic photonic crystals as visible light sources / Belousov S., Bogdanova M., Deinega A., Eyderman S., Valuev I., Lozovik Yu., Polischuk I., Potapkin B., Ramamurthi B., Deng T., Midha V. // Physical Review B. 2012. Vol. 86. Iss. 17. No. 174201. P. 1–8.
3. Landau damping of electromagnetic transport via dielectric-metal superlattices / Paredes-Juárez A., Iakushev D. A., Flores-Desirena B., Makarov N. M., Pérez-Rodríguez F. // Optics Letters. 2015. Vol. 40. Iss. 15. P. 3588–3591.
4. Yushkanov A. A., Zverev N. V. Quantum Electron Plasma, Visible and Ultraviolet P-wave and Thin Metallic Film // Physics Letters A. 2017. Vol. 381. Iss. 6. P. 679–684.
5. Yushkanov A. A., Zverev N. V. Quantum Electron Plasma and Interaction of S-wave with Thin Metallic Film [Электронный ресурс] // arXiv : [сайт]. URL: https://arxiv.org/pdf/1709.02240v1.pdf (дата обращения: 11.12.2018).
6. Castillo-López S. G., Makarov N. M., Pérez-Rodríguez F. Quantum resonances of Landau damping in the electromagnetic response of metallic nanoslabs // Optics Letters. 2018. Vol. 43. Iss. 10. P. 2410–2413.
7. Dressler M., Gruener G. Electrodynamics of Solids: Optical Properties of Electrons in Matter. Cambridge: Cambridge University Press, 2002. 474 p.
8. Fuchs R., Kliewer K. L. Optical Properties of an Electron Gas: Further Studies of a Nonlocal Description // Physical Review. 1969. Vol. 185. Iss. 3. P. 905–913.
9. Зверев Н. В. Поверхностные импедансы плоского слоя среды с зеркально-симметричной функцией диэлектрического отклика // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика–Математика. 2018. № 1. С. 23–37.
10. Латышев А. В., Юшканов А. А. Поперечная электрическая проводимость квантовой столкновительной плазмы в подходе Мермина // Теоретическая и математическая физика. 2013. Т. 175. № 1. С. 132–143.
11. Латышев А. В., Юшканов А. А. Продольная электрическая проводимость в квантовой плазме с переменной частотой столкновений в рамках подхода Мермина // Теоретическая и математическая физика. 2014. Т. 178. № 1. С. 147–160.
12. Александров А. Ф., Богданкевич Л. С., Рухадзе А. А. Основы электродинамики плазмы: Учебное пособие для вузов. М.: Высшая школа, 1978. 407 с.

13. Kliewer K. L., Fuchs R. S-Polarized Optical Properties of Metals // Physical Review B. 1970. Vol. 2. Iss. 8. P. 2923–2936.

REFERENCES

1. Paredes-Juárez A., Díaz-Monge F., Makarov N. M., Pérez-Rodríguez F. [Nonlocal effects in the electrodynamics of metallic slabs]. In: *Pis'ma v Zhurnal Eksperimental'noi i Teoreticheskoi Fiziki* [Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters], 2009, vol. 90, no. 9, pp. 687–692.
2. Belousov S., Bogdanova M., Deinega A., Eyderman S., Valuev I., Lozovik Yu., Polischuk I., Potapkin B., Ramamurthi B., Deng T., Midha V. Using metallic photonic crystals as visible light sources. In: *Physical Review B*, 2012, vol. 86, iss. 17, No. 174201, pp. 1–8.
3. Paredes-Juárez A., Iakushev D. A., Flores-Desirena B., Makarov N. M., Pérez-Rodríguez F. Landau damping of electromagnetic transport via dielectric-metal superlattices. In: *Optics Letters*, 2015, vol. 40, iss. 15, pp. 3588–3591.
4. Yushkanov A. A., Zverev N. V. Quantum Electron Plasma, Visible and Ultraviolet P-wave and Thin Metallic Film. In: *Physics Letters A*, 2017, vol. 381, iss. 6, pp. 679–684.
5. Yushkanov A. A., Zverev N. V. Quantum Electron Plasma and Interaction of S-wave with Thin Metallic Film. In: *arXiv*. Available at: https://arxiv.org/pdf/1709.02240v1.pdf (accessed: 11.12.2018).
6. Castillo-López S. G., Makarov N. M., Pérez-Rodríguez F. Quantum resonances of Landau damping in the electromagnetic response of metallic nanoslabs. In: *Optics Letters*, 2018, vol. 43, iss. 10, pp. 2410–2413.
7. Dressler M., Gruener G. Electrodynamics of Solids: Optical Properties of Electrons in Matter. Cambridge, Cambridge University Press Publ., 2002. 474 p.
8. Fuchs R., Kliewer K. L. Optical Properties of an Electron Gas: Further Studies of a Nonlocal Description. In: *Physical Review*, 1969, vol. 185, iss. 3, pp. 905–913.
9. Zverev N. V. [Surface Impedances of a Flat Layer of a Medium with a Mirror-Symmetric Dielectric Response Function.]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika–Matematika* [Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], 2018, no. 1, pp. 23–37.
10. Latyshev A. V., Yushkanov A. A. [Transverse electrical conductivity of a quantum collisional plasma in the Mermin approach]. In: *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika* [Theoretical and Mathematical Physics], 2013, vol. 175, no. 1, pp. 132–143.
11. Latyshev A. V., Yushkanov A. A. [Longitudinal electric conductivity in a quantum plasma with a variable collision frequency in the framework of the Mermin approach]. In: *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika* [Theoretical and Mathematical Physics], 2014, vol. 178, no. 1, pp. 147–160.
12. Aleksandrov A. F., Bogdankevich L. S., Rukhadze A. A. *Osnovy elektrodinamiki plazmy* [Foundations of electrodynamics of plasma: textbook for universities]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1978. 407 p.
13. Kliewer K. L., Fuchs R. S-Polarized Optical Properties of Metals. In: *Physical Review B*, 1970, vol. 2, iss. 8, pp. 2923–2936.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Зверев Николай Витальевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической физики, Московский государственный областной университет;
e-mail: zverev_nv@mail.ru

Юшканов Александр Алексеевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической физики, Московский государственный областной университет;
e-mail: yushkanov@inbox.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Nikolai V. Zverev – PhD in Physical and Mathematical Sciences, Assistant Professor at the Department of Theoretical Physics, Moscow Region State University;
e-mail: zverev_nv@mail.ru

Aleksandr A. Yushkanov – Doctor in Physical and Mathematical Sciences, professor at the Department of Theoretical Physics, Moscow Region State University;
e-mail: yushkanov@inbox.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Зверев Н. В., Юшканов А. А. Электронная плазма и интерференция излучения от металлической и диэлектрической плёнок // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2019. № 1. С. 46–56.
DOI: 10.18384-2310-7251-2019-1-46-56

FOR CITATION

Zverev N. V., Yushkanov A. A. Electron plasma and interference of radiation from metallic and dielectric films In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*, 2019, no. 1, pp. 46–56.
DOI: 10.18384-2310-7251-2019-1-46-56.

УДК: 538.911
DOI: 10.18384-2310-7251-2019-1-57-67

НОВЫЕ ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩИЕ НАНОКОМПОЗИТЫ НА ОСНОВЕ СИЛОКСАНОВЫХ МАТЕРИАЛОВ

Мащенко В. И.[1], Константинов М. С.[1], Цебрук И. С.[1], Чаусова О. В.[2], Беляев В. В.[1]

[1] *Московский государственный областной университет*
141014, Московская область, г. Мытищи, ул. Веры Волошиной, д. 24, Российская Федерация

[2] *Технологический университет*
141070 Московская область, г. Королев, ул. Гагарина, д. 42, Российская Федерация

Аннотация. Целью данной работы являются разработка способа получения длинных агрегатов (более 1 см) многостенных углеродных нанотрубок (МУНТ), диспергированных в растворителе при помощи направленной агломерации электрической дугой в жидкой фазе, а также исследование процессов, сопровождающих формирование данных агрегатов. Был получен углеродный агломерат, ориентированный по полю и установлено, что в такой системе образуются слюдоподобные структуры с включениями аморфного углерода и агломератов нанотрубок. Методом перколяции установлено условие сшивания МУНТ в агломерат при разных значениях напряжения, определено, что при малых концентрациях вероятность сшивания частиц составляла не более 5%. Полученные результаты могут представлять практический интерес для предприятий энергетической промышленности при производстве современных типов электрооборудования.

Ключевые слова: многостенные углеродные нанотрубки; дуговой разряд, агломерат, фрактальный анализ.

NEW ELECTRICALLY CONDUCTIVE NANOCOMPOSITES BASED ON SILOXANE MATERIALS

V. Mashchenko[1], M. Konstantinov[1], I. Cebruk[1], O. Chausova[2], V. Belyaev[1]

[1] *Moscow Region State University*
ul. Very Voloshinoi 24, 141014 Mytishchi, Moscow Region, Russian Federation

[2] *University of Technology*
ul. Gagarina 42, 141070 Korolev, Moscow Region, Russian Federation

Abstract. We report the development of a method for producing long aggregates (more than 1 cm) of multi-walled carbon nanotubes (MWCNTs) dispersed in a solvent by means of directed agglomeration with an electric arc in the liquid phase, as well as study the processes accompanying the formation of these aggregates. A field-oriented carbon agglomerate is obtained and it is found that mica with inclusions of amorphous carbon and agglomerates of nanotubes are formed in such a system. By percolation, the condition of MWCNT crosslinking into the agglomerate at different stress values is established; it is determined that at low concentrations the probability of particle crosslinking is no more than 5%. The obtained results may be of practical interest for the enterprises of power industry in the production of modern types of electrical equipment.

Keywords: multi-walled carbon nanotubes, arc discharge, agglomerate, fractal analysis.

Введение

Углеродные нанотрубки с момента их открытия Сумио Ииджимой [1] в 1991 г. привлекают большое внимание исследователей благодаря их уникальным физическим и механическим свойствам. Для синтеза нанотрубок традиционно используют такие методы, как дуговой разряд в инертном газе [1; 2] или в атмосфере водорода [3], лазерная абляция [4; 5], каталитический пиролиз углеводородов [6–8] на железе, никеле или кобальте. Как правило, процессы ориентации молекул под действием внешних полей [9–11] в сложно структурированных структурах [12] кардинально влияют на физические свойства всей системы. Традиционный дуговой разряд требует сложной вакуумной системы и системы теплосъёма.

Дуговой разряд в жидких средах является сравнительно новым методом синтеза нанотрубок [13–17]. Для этого используется источник постоянного тока и сосуд, наполненный жидким азотом, деионизированной водой или солевым водным раствором. Этот метод не требует вакуумного оборудования, реакционных газов, высоких температур и системы теплообмена. Впервые многостенные углеродные нанотрубки (МУНТ) таким способом были получены в жидком азоте [13]. В работе [16] получены МУНТ в растворе NaCl. За счёт высокой проводимости солевого раствора удалось длительно поддерживать стабильную дугу при токе 50 А и напряжении 26 В.

Дуговой разряд в жидкой фазе используется также для химической модификации углеродных нанотрубок [18].

Целью данной работы являются разработка способа получения длинных агрегатов (более 1 см) МУНТ, диспергированных в растворителе при помощи направленной агломерации электрической дугой в жидкой фазе, а также исследование процессов, сопровождающих формирование данных агрегатов.

Такие материалы могут быть использованы при проектировании современных систем отображения информации [19; 20].

Экспериментальная часть

Для проведения экспериментов использована стеклянная ячейка специальной конструкции с впаянным конденсатором (рис. 1), подключенная к генератору высокого напряжения. В качестве обкладок использовали стальные электроды.

В качестве растворителя использована непроводящая жидкая органическая среда – негорючее силиконовое масло с высокой вязкостью.

В работе использовали МУНТ Baytubes® C 150 P (Bayer) (рис. 2). Их предварительно диспергировали в растворителе с использованием ультразвука (рис. 3) на ультразвуковой ванне «Сапфир» с частотой 35 кГц.

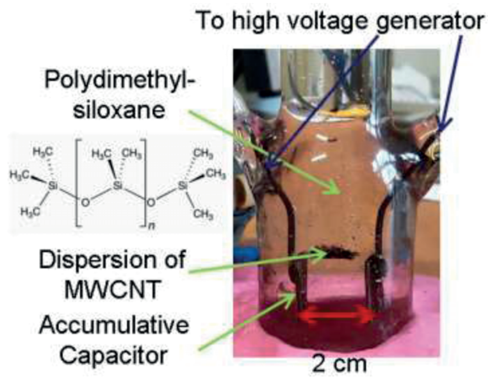

Рис. 1 Схема установки.

Растворитель подбирали таким образом, чтобы он не смешивался с силиконовым маслом.

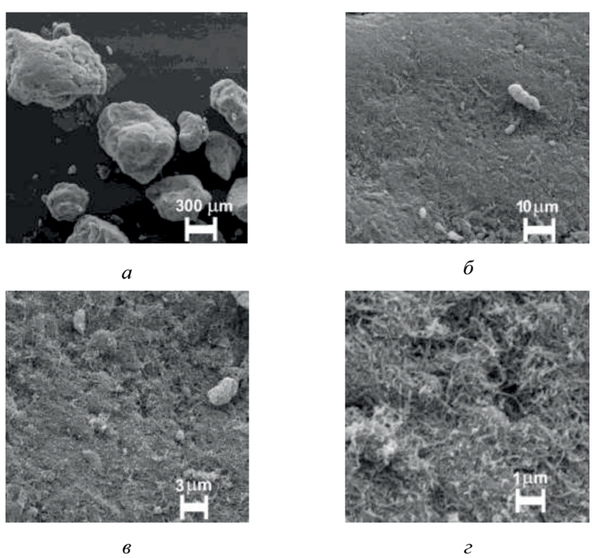

Рис. 2. Электронно-микроскопические снимки образцов МУНТ
(*а*, *б*, *в*, *г*: длина шкалы соответственно 300, 10, 3, 1 мкм).

Сшивание МУНТ проводили при помощи высоковольтного (15 кВ) дугового разряда.

Микроскопические снимки сделаны с использованием цифрового поляризационного микроскопа – Альтами Полар 3.

Электронно-микроскопические снимки получены с помощью электронной сканирующей микроскопии (прибор CamScan-S2).

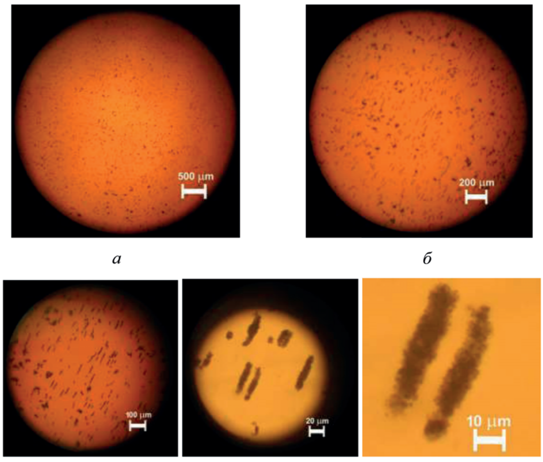

Рис. 3. Микроскопические снимки образцов МУНТ в растворителе после обработки ультразвуком (а, б, в, г, д.: длина шкалы соответственно 500, 200, 100, 20, 10 мкм).

Обсуждение результатов

Из представленных электронно-микроскопических снимков (рис. 2) видно, что исходные МУНТ представляют собой объёмные агломераты нанотрубок размером 300–600 мкм, состоящие из спутанных протяжённых волокнообразных наночастиц толщиной около 0,05 мкм.

При дроблении взвеси данных агломератов нанотрубок в ультразвуке эти клубки разбиваются на более мелкие агломераты. На рис. 3*а–г* видно, что МУНТ после обработки самопроизвольно образуют вытянутые легко разрушающиеся от механического воздействия агрегаты шириной около 10 мкм и длиной до 100 мкм. Эти агрегаты в свою очередь образуются из более мелких агломерированных частиц размером менее 1 мкм. Их можно обнаружить: они видны в виде точек, из которых состоят удлинённые объекты (рис. 3*г*).

При попадании капли дисперсии с нанотрубками в электрическое поле последовательно происходят следующие процессы (см. рис. 4).

• Капля растягивается от одной пластины до другой (рис. 4.1–4.6).

• Наступает момент полного вытягивания, когда агломераты нанотрубок выстраиваются в проводящую цепочку от одной пластины до другой.

• Происходит пробой по образовавшейся нити из агломератов нанотрубок (рис. 4.6–4.8).

• За счёт протекания тока высокой силы происходит короткое замыкание, сопровождаемое:

– образованием дуги (рис. 4.6–4.11);

– яркой вспышкой и хрустящим звуком разряда (рис. 4.9);

– резким повышением температуры;

– разложением окружающих дугу веществ (растворитель, нанотрубки, силикон) с выделением газов (продукты разложения, газообразный растворитель) и образованием слюдоподобных слоёв и обуглившихся включений;

– разложением силикона (По-видимому, происходит с образованием различных полупродуктов и выделением диоксида кремния SiO_2 и аморфного углерода. Можно предположить, что в таких условиях образуется целый ряд газообразных продуктов, таких как вода, водород, кислород, углекислый и угарный газы);

– микровзрывом вследствие мгновенного выделения газообразных продуктов, сопровождаемым образованием «гриба», содержащего газообразные вещества (рис. 4.8–4.11).

• Через образовавшуюся дугу начинает течь ток. Так как измеренное сопротивление дуги составляет около 700 Ом, течение тока сопровождается разогреванием и свечением дуги жёлтым цветом, а также продолжающимся разложением веществ с выделением газообразных продуктов (рис. 4.11).

Образовавшаяся дуга (рис. 4.12) является довольно хрупкой, при раздавливании издаёт характерный хруст подобно хрусту раздавливаемого битого стекла, что, по-видимому, указывает на её слюдоподобную структуру.

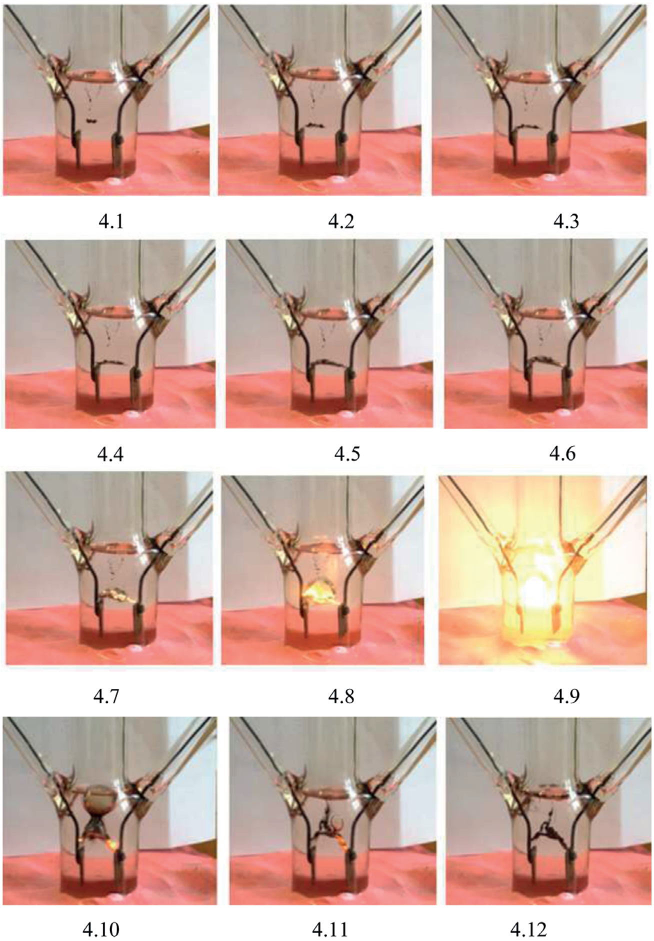

Рис. 4. Покадровая съёмка процесса формирования агломерата из нанотрубок.

Цвет образовавшихся пластин – от жёлто-коричневого до тёмно-коричневого с чёрными вкраплениями. По-видимому, пластины представляют собой слюду с включениями аморфного углерода и агломератов нанотрубок (рис. 5).

Исходя из изложенного и анализа микрофотографий дуги (рис. 5), можно предположить, что структура получаемой дуги представляет собой покрытые слоями слюды ветви из агломератов МУНТ. Прочность связи между агломератами нанотрубок представляет особый интерес для дальнейшего исследования.

Была проведена серия экспериментов по определению вероятности сшивания МУНТ при различной концентрации в капле. В камеру с электрическим полем помещались капли при постоянной концентрации углеродных нанотрубок и фиксировалась вероятность сшивания. Число испытаний при каждой концентрации составляло 150 измерений при напряжении поля 5 кВ и 10 кВ.

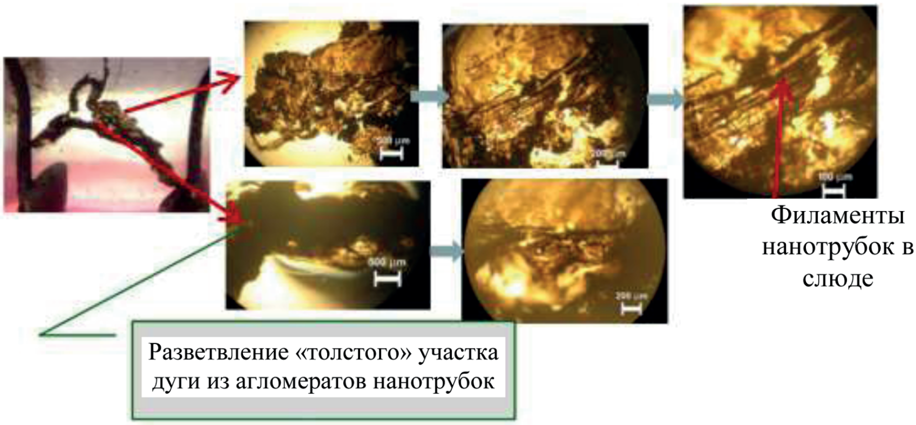

Рис. 5. Фотография и микрофотографии с разным увеличением полученного агломерата.

В первом приближении распределение МУНТ в пространстве можно описать решёточной моделью (рис. 6*а*). Пространство между электродами разбивалось на сектора размером, сравнимым с размерами МУНТ ~10 мкм. Заполнение с вероятностью иметь пустой узел решётки, равной $P = 0{,}15$, показано на рис. 5, при этом при повторении экспериментов всегда получались новые конфигурации агломератов. Перколяционные агломераты [21], простирающиеся по всей решётке, начинают возникать при $P \approx 0{,}59$.

Результаты протекания процесса показаны на рисунке 6*б*. При малых концентрациях вероятность P_N сшивания частиц составляла не более 5%. При повышении концентрации МУНТ вероятность сшивания растёт нелинейно и резко возрастает при $P \approx 0{,}59$.

Перколяционная кривая рассматриваемого процесса свидетельствует о фрактальной природе вероятности сшивания МУНТ.

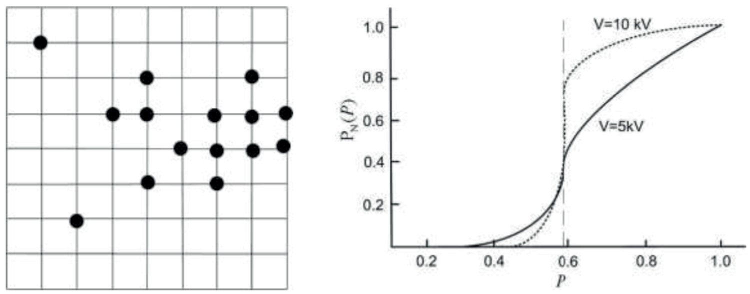

Рис. 6. а) Квадратная решётка, частично заполненная МУНТ. *б)* Вероятность P_N сшивания агломерата как функция вероятности P того, что узел не заполнен.

Выводы

В жидкой органической среде проведены исследования сшивания МУНТ при помощи высоковольтного (15 кВ) дугового разряда. Был получен углеродный агломерат, ориентированный по полю и исследована его структура методами электронной и оптической микроскопии.

Исследована фрактальная природа вероятности сшивания МУНТ высоковольтным дуговым разрядом от концентрации углеродных трубок, установлен перколяционный порог протекания процесса.

Предполагается, что полученные результаты могут представлять практический интерес для модификации нанотрубок, получения волокон, а также новых источников светового излучения.

Статья поступила в редакцию 10.01.2019 г.

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа поддержана грантами РФФИ № 18-29-18095мк, 19-07-01005 А.

ACKNOWLEDGEMENTS

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (Grant Nos. 18-29-18095mk and 19-07-01005 A).

ЛИТЕРАТУРА

1. Iijima S. Helical microtubules of graphitic carbon // Nature. 1991. Vol. 354. Iss. 6348. P. 56–58.
2. Large-scale production of single-walled carbon nanotubes by the electric-arc technique / Journet C., Maser W. K., Bernier P., Loiseau A., Lamy de la Chapelle M., Lefrant S., et al. // Nature. 1997. Vol. 388. Iss. 6644. P. 756–758.
3. Morphology of carbon allotropes prepared by hydrogen arc discharge / Zhao X., Ohkohchi M., Shimoyama H., Ando Y. // Journal of Crystal Growth. 1999. Vol. 198–199. Part 2. P. 934–938.
4. Large-scale purification of single-wall carbon nanotubes: process, product, and character-

ization / Rinzler A. G., Liu J., Dai H., Nikolaev P., Huffman C. B., Rodrнguez-Macнas F. J., et al. // Applied Physics A. 1998. Vol. 67. Iss. 1. P. 29–37.
5. The effect of laser power on the formation of carbon nanotubes prepared in CO_2 continuous wave laser ablation at room temperature / Zhang H., Ding Y., Wu C., Chen Y., Zhu Y., et al. // Physica B: Condensed Matter. 2003. Vol. 325. P. 224–229.
6. Gas-phase catalytic growth of single-walled carbon nanotubes from carbon monoxide / Nikolaev P., Bronikowski M. J., Bradley R. K., Rohmund F., Colbert D. T., Smith K. A., et al. // Chemical Physics Letters. 1999. Vol. 313. Iss. 1–2. P. 91–97.
7. Large scale and low-cost synthesis of single-walled carbon nanotubes by the catalytic pyrolysis of hydrocarbons / Cheng H. M., Li F., Su G., Pan H. Y., He L. L., Sun X., et al. // Applied Physics Letters. 1998. Vol. 72. Iss. 25. P. 3282–3284.
8. Continuous production of aligned carbon nanotubes: a step closer to commercial realization / Andrews R., Jacques D., Rao A. M., Derbyshire F., Qian D., Fan X., et al. // Chemical Physics Letters. 1999. Vol. 303. Iss. 5–6. P. 467–474.
9. Anchoring energy of liquid crystals / Dadivanyan A. K., Pashinina Y. M., Belyaev V. V., Chausov D. N., Noah O. V., Chigrinov V. G. // Molecular Crystals and Liquid Crystals. 2012. Vol. 560. P. 108–114.
10. Моделирование ориентации молекул жидкокристаллического октилцианбифенила на поверхности кристаллов / Дадиванян А. К., Чаусов Д. Н., Пашинина Ю. М., Беляев В. В. // Жидкие кристаллы и их практическое использование. 2010. № 4 (34). С. 61–69.
11. Orientation of mesogen and hydrocarbon molecules on graphite and polyethylene crystal surfaces / Belyaev V. V., Dadivanyan A. K., Pashinina Y. M., Chausov D. N., Solomatin A. S. // Molecular Crystals and Liquid Crystals Science and Technology. Section A. Molecular Crystals and Liquid Crystals. 2011. Vol. 545. Iss. 1. P. 159–167.
12. Nanomesh Aluminum Films for LC Alignment. Theoretical and Experimental Modeling / Dadivanyan A. K., Belyaev V. V., Chausov D. N., Stepanov A. A., Smirnov A. G., Tsybin A. G., Osipov M. A. // Molecular Crystals and Liquid Crystals. 2015. Vol. 611. Iss. 1. P. 117–122.
13. A simple method for the continuous production of carbon nanotubes / Ishigami M., Cumings J., Zettl A., Chen S. // Chemical Physics Letters. 2000. Vol. 319. Iss. 5–6. P. 457–459.
14. Production and in-situ metal filling of carbon nanotubes in water / Hsin Y. L., Hwang K. C., Chen F.–R., Kai J.–J. // Advanced Materials. 2001. Vol. 13. Iss. 11. P. 830–833.
15. Formation of carbon nanotubes in water by the electric-arc technique / Zhu H. W, Li X. S, Jiang B., Xu C. L., Zhu Y. F., Wu D. H., et al. // Chemical Physics Letters. 2002. Vol. 366. Iss. 5–6. P. 664–669.
16. Behabtu N., Green M. J., Pasquali M. Carbon nanotube-based neat fibers // Nanotoday. 2008. Vol. 3. Iss. 5–6. P. 24–34.
17. Debasis Bera. Arc-discharge in solution: a novel synthesis method for carbon nanotubes and in situ decoration of carbon nanotubes with nanoparticles: A dissertation submitted in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy. Orlando, Florida, 2005. 155 p.
18. Effect of Barrier Discharge on Homogeneous Dispersion of Carbon Nanotubes in Octylalcohols / Ishibashi Y., Hanaoka R., Osawa N., Takata S., Kanamaru Y., Anzai H. // International Journal of Plasma Environmental Science & Technology. 2011. Vol. 5. No. 1. P. 62–67.
19. Программно-аппаратный комплекс оценки эффективности деятельности опе-

раторов / Чаусов Д. Н., Петухов И. В., Беляев В. В., Богачев К. А., Курасов П. А. // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2014. № 2. С. 80–86.

20. Петухов И.В., Чаусов Д. Н., Беляев В. В., Курасов П. А., Танрывердиев И. О. Зрительное утомление человека-оператора в процессе восприятия информации с электронных дисплеев // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2014. № 2. С. 87–94.
21. Feder J. Fractals. New York, London: Plenum Press, 1991. 254 p.

REFERENCES

1. Iijima S. Helical microtubules of graphitic carbon. In: *Nature*, 1991, vol. 354, iss. 6348, pp. 56–58.
2. Journet C., Maser W. K., Bernier P., Loiseau A., Lamy de la Chapelle M., Lefrant S., et al. Large-scale production of single-walled carbon nanotubes by the electric-arc technique. In: *Nature*, 1997, vol. 388, iss. 6644, pp. 756–758.
3. Zhao X., Ohkohchi M., Shimoyama H., Ando Y. Morphology of carbon allotropes prepared by hydrogen arc discharge. In: *Journal of Crystal Growth*, 1999, vol. 198–199, part 2, pp. 934–938.
4. Rinzler A. G., Liu J., Dai H., Nikolaev P., Huffman C. B., Rodrнguez-Macнas F. J., et al. Large-scale purification of single-wall carbon nanotubes: process, product, and characterization. In: *Applied Physics A*, 1998, vol. 67, iss. 1, pp. 29–37.
5. Zhang H., Ding Y., Wu C., Chen Y., Zhu Y., et al. The effect of laser power on the formation of carbon nanotubes prepared in CO_2 continuous wave laser ablation at room temperature. In: *Physica B: Condensed Matter*, 2003, vol. 325, pp. 224–229.
6. Nikolaev P., Bronikowski M. J., Bradley R. K., Rohmund F., Colbert D. T., Smith K. A., et al. Gas-phase catalytic growth of single-walled carbon nanotubes from carbon monoxide. In: *Chemical Physics Letters*, 1999, vol. 313, iss. 1–2, pp. 91–97.
7. Cheng H. M., Li F., Su G., Pan H. Y., He L. L., Sun X., et al. Large scale and low-cost synthesis of single-walled carbon nanotubes by the catalytic pyrolysis of hydrocarbons. In: *Applied Physics Letters*, 1998, vol. 72, iss. 25, pp. 3282–3284.
8. Andrews R., Jacques D., Rao A. M., Derbyshire F., Qian D., Fan X., et al. Continuous production of aligned carbon nanotubes: a step closer to commercial realization. In: *Chemical Physics Letters*, 1999, vol. 303, iss. 5–6, pp. 467–474.
9. Dadivanyan A. K., Pashinina Y. M., Belyaev V. V., Chausov D. N., Noah O. V., Chigrinov V. G. Anchoring energy of liquid crystals. In: *Molecular Crystals and Liquid Crystals,* 2012, vol. 560, pp. 108–114.
10. Dadivanyan A. K., Chausov D. N., Pashinina Yu. M., Belyaev V. V. [Simulation of LC octylcyanobiphenyl molecules orientation on crystals surface]. In: *Zhidkie Kristally i Ikh Prakticheskoe Ispol'zovanie* [Liquid Crystals and their Application. Russian Journal], 2010, no. 4 (34), pp. 61–69.
11. Belyaev V. V., Dadivanyan A. K., Pashinina Y. M., Chausov D. N., Solomatin A. S. Orientation of mesogen and hydrocarbon molecules on graphite and polyethylene crystal surfaces. In: *Molecular Crystals and Liquid Crystals Science and Technology. Section A. Molecular Crystals and Liquid Crystals*, 2011, vol. 545, iss. 1, p. 159–167.
12. Dadivanyan A. K., Belyaev V. V., Chausov D. N., Stepanov A. A., Smirnov A. G., Tsybin A. G., Osipov M. A. Nanomesh Aluminum Films for LC Alignment. Theoretical and Experimental Modeling. In: *Molecular Crystals and Liquid Crystals*, 2015, vol. 611, iss. 1, pp. 117–122.

13. Ishigami M., Cumings J., Zettl A., Chen S. A simple method for the continuous production of carbon nanotubes. In: *Chemical Physics Letters*, 2000, vol. 319, iss. 5–6, pp. 457–459.
14. Hsin Y. L., Hwang K. C., Chen F.–R., Kai J.–J. Production and *in-situ* metal filling of carbon nanotubes in water. In: *Advanced Materials*, 2001, vol. 13, iss. 11, pp. 830–833.
15. Zhu H. W, Li X. S, Jiang B., Xu C. L., Zhu Y. F., Wu D. H., et al. Formation of carbon nanotubes in water by the electric-arc technique. In: *Chemical Physics Letters*, 2002, vol. 366, iss. 5–6, pp. 664–669.
16. Behabtu N., Green M. J., Pasquali M. Carbon nanotube-based neat fibers. In: *Nanotoday*, 2008, vol. 3, iss. 5–6, pp. 24–34.
17. Debasis Bera. Arc-discharge in solution: a novel synthesis method for carbon nanotubes and in situ decoration of carbon nanotubes with nanoparticles: A dissertation submitted in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy. Orlando, Florida, 2005. 155 p.
18. Ishibashi Y., Hanaoka R., Osawa N., Takata S., Kanamaru Y., Anzai H. Effect of barrier discharge on homogeneous dispersion of carbon nanotubes in octylalcohols. In: *International Journal of Plasma Environmental Science & Technology*, 2011, vol. 5, no. 1, pp. 62–67.
19. Chausov D. N., Petukhov I. V., Belyaev V. V., Bogachev K. A., Kurasov P. A. [Hardware-software complex for evaluation of the operator's activity]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika* [Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], 2014, no. 2, pp. 80–86.
20. Petukhov I. V., Chausov D. N., Belyaev V. V., Kurasov P. A., Tanryverdiev I. O. [Visual fatigue of the human operator in the information perception from electronic displays]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika* [Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], 2014, no. 2, pp. 87–94.
21. Feder J. Fractals. New York, London, Plenum Press Publ., 1991. 254 p.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Мащенко Владимир Игоревич – кандидат химических наук, старший научный сотрудник учебно-научной лаборатории теоретической и прикладной нанотехнологии Московского государственного областного университета;
e-mail: mashchenko@belozersky.msu.ru

Константинов Михаил Сергеевич – мастер производственного обучения учебно-научной лаборатории теоретической и прикладной нанотехнологии Московского государственного областного университета;
e-mail: jawa-m.k.s@mail.ru

Цебрук Иван Сергеевич – студент физико-математического факультета Московского государственного областного университета;
e-mail: 19962015ivan@gmail.com

Чаусова Ольга Владимировна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и естественнонаучных дисциплин Технологического университета;
e-mail: Chausova.ov@ut-mo.ru

Беляев Виктор Васильевич – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической физики Московского государственного областного университета;
e-mail: vic_belyaev@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Vladimir I. Mashchenko – PhD in Chemical Sciences, senior researcher of the Educational and Scientific Laboratory of Theoretical and Applied Nanotechnology, Moscow Region State University;
e-mail: mashchenko@belozersky.msu.ru

Mihail S. Konstantinov – master of Industrial Training at the Educational and Scientific Laboratory of Theoretical and Applied Nanotechnology, Moscow Region State University;
e-mail: jawa-m.k.s@mail.ru

Ivan S. Cebruk – student at Physical and Mathematical Faculty, Moscow Region State University;
e-mail: 19962015ivan@gmail.com

Olga V. Chausova – PhD in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor at the Department of Mathematics and Natural Sciences, Moscow Region State University;
e-mail: Chausova.ov@ut-mo.ru

Victor V. Belyaev – Doctor in Engineering Sciences, professor, Head of the Department of Theoretical Physics, Moscow Region State University;
e-mail: vic_belyaev@mail.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Мащенко В. И., Константинов М. С., Цебрук И. С., Чаусова О. В., Беляев В. В. Новые электропроводящие нанокомпозиты на основе силоксановых материалов // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2019. № 1. С. 57–67.
DOI: 10.18384-2310-7251-2019-1-57-67

FOR CITATION

Mashchenko V. I., Konstantinov M. S., Cebruk I. S., Chausova O. V., Belyaev V. V. New electrically conductive nanocomposites based on siloxane materials. In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics,* 2019, no. 1, pp. 57–67.
DOI: 10.18384-2310-7251-2019-1-57-67.

УДК 81.23
DOI: 10.18384-2310-7251-2019-1-68-73

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА VISAR ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ФРОНТА УДАРНОЙ ВОЛНЫ В ГАЗЕ И ТВЁРДОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Зиборов В. С., Ростилов Т. А.
Объединённый институт высоких температур Российской академии наук
125412, г. Москва, ул. Ижорская, д. 13, стр. 2, Российская Федерация

Аннотация. Статья посвящена развитию экспериментальных методов исследования физико-химических процессов в ударных волнах. Метод лазерной интерферометрии VISAR применён для измерения скорости свободной поверхности твёрдого тела при взаимодействии с фронтом газовой ударной волны. Впервые получены профили скорости поверхности при воздействии ударной волны в лёгком и относительно тяжёлом газе. Показано, что метод позволяет обеспечить более высокое временное разрешение, чем лазерный шлирен метод применительно к ударным волнам, что делает его перспективным для измерений структуры фронта ударных волн в газах.

Ключевые слова: ударная волна, метод лазерной интерферометрии, структура фронта, профиль скорости.

APPLICATION OF THE VISAR METHOD TO STUDY THE INTERACTION OF THE SHOCK FRONT IN THE GAS AND SOLID SURFACE

V. Ziborov, T. Rostilov
Joint Institute for High Temperatures of the Russian Academy of Sciences
ul. Izhorskaya 13, stroenie 2, 125412 Moscow, Russian Federation

Abstract. The paper considers the development of experimental methods for the study of physical and chemical processes in shock waves. The VISAR laser interferometry method is used to measure the velocity of a free surface of a solid body interacting with the front of a gas shock wave. For the first time, free surface velocity profiles are obtained in interaction with a shock wave in a light and a relatively heavy gas. It is shown that the method provides a higher temporal resolution than the laser schlieren method applied to shock waves, which makes it promising for measuring the structure of the shock wave front in gases.

Keywords: shock wave, method of laser interferometry, wavefront structure, velocity profile.

Введение

Физико-химические процессы во фронте ударных волн остаются наиболее сложным объектом для экспериментального исследования ввиду объективных причин [1]. На треке в 10÷100 парных соударений в условиях даже относительно слабых ударных волн наблюдаются возбуждение сверх равновесного излучения, ионизация [2; 3]. Присутствие малых концентраций тяжёлого инертного газа оказывает влияние на сдвиг порогов детонации, что связывают с увеличением толщины фронта ударной волны [4]. Существующие численные модели описывают эти явления лишь качественно, требуются надёжные экспериментальные данные для верификации.

Экспериментальный подход

Одним из наиболее информативных является лазерный шлирен метод. Он был применён авторами [5] для исследования структуры фронта УВ в гелии с малой добавкой ксенона. Относительно большая толщина фронта, связанная с наличием ксенона в смеси, позволила выявить ряд закономерностей, но примерно 80 нс начального участка профиля плотности оказались нечувствительны к любым изменениям параметров ударной волны, что рационально отнести к влиянию пограничного слоя. Более высокое временное и пространственное разрешение было достигнуто при диагностике предпробойных состояний в газе [6; 7]. Однако это достигнуто в условиях, когда газ изначально покоился относительно оптических окон, сквозь которые вводится лазерный луч. Движение фронта ударной волны вызывает появление пограничного слоя, который имеет конечную толщину и изгибает фронт волны, делая его трёхмерным. Появляется так называемая дуга прогиба, радиус которой как, правило, соизмерим с толщиной фронта ударной волны. В данной работе предпринята попытка обойти эту трудность.

В рамках развития экспериментальных методов исследования физико-химических процессов в ударных волнах метод лазерной интерферометрии VISAR [8; 9] применён для измерения профиля скорости свободной поверхности серебряной фольги, взаимодействующей с ударной волной в инертных газах гелии и аргоне. На данном этапе была поставлена задача убедиться, что тип газа, его атомарный вес влияют на результаты измерений данным методом.

Эксперимент

Генератором ударных волн в газе служила высоковакуумная ударная труба калибром 100 мм (стенд Яшма). Лазерный луч от VISAR попадал на мишень, установленную перпендикулярно нормали к фронту ударной волны, через окно в торце ударной трубы. Схема измерений показана на рис. 1. Вплоть до достижения ударной волной торца ударной трубы исследуемый газ перед оптическим окном для ввода лазерного излучения покоился. Фото измерительной секции установки показано на рис. 2. Использован непрерывный одноволновой лазер «Моцарт» с длиной когерентности луча более 100 м. Схема интерферометра взята из [6]. Полученные профили скорости движения свободной поверхности фольги из серебра толщиной 1 мкм показаны на рис. 3 и 4.

Хорошо видно, что метод позволяет «видеть» нарастание скорости в течение нескольких сотен наносекунд, далее, вероятно, фольга разрушается. Также видно, что темпы увеличения скорости свободной поверхности фольги в гелии (кривая (1) на рис. 3 и рис. 4) и в аргоне заметно различаются (кривые (2), (3)), что говорит о чувствительности профилей к атомному весу газа. Также в не-

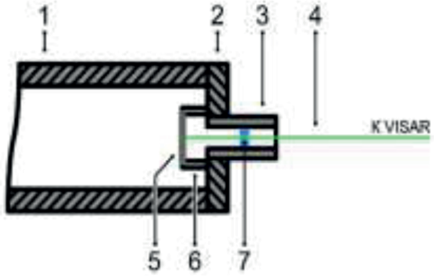

Рис. 1. Схема эксперимента: 1 – ударная труба, 2 – торец УТ, 3 – окно, 4 – луч лазера VISAR, 5 – кольцо, 6 – фольга Ag 1 мкм.

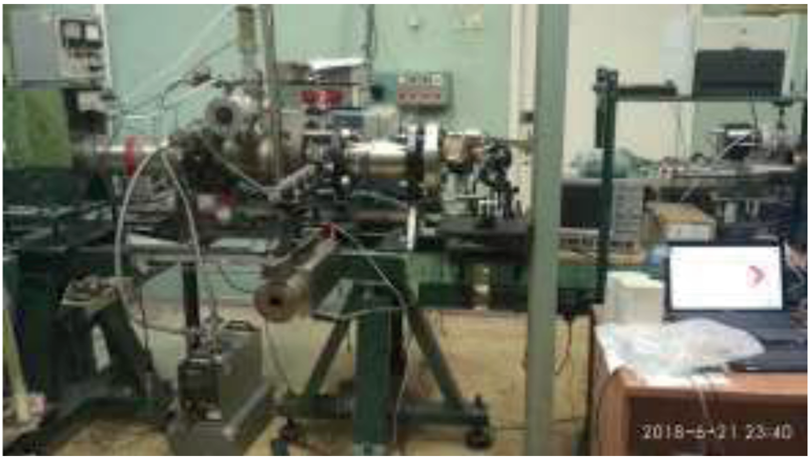

Рис. 2. Измерительная секция УТ Яшма.

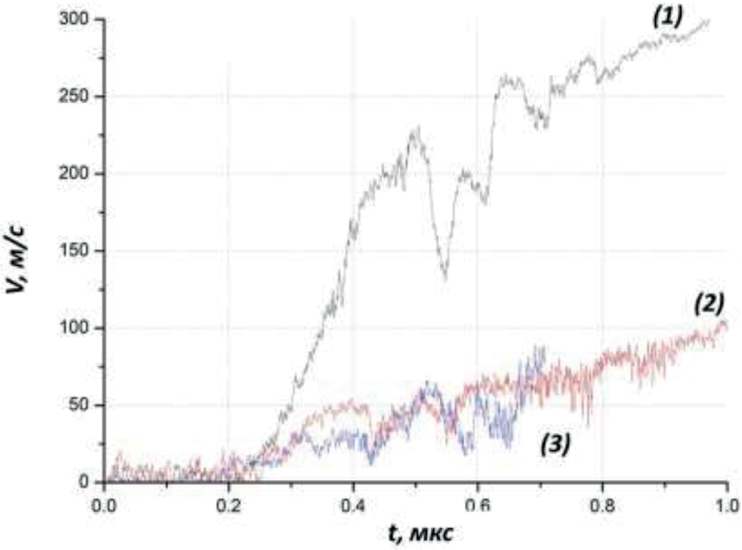

Рис. 3. Профили скорости свободной поверхности фольги из Ag 1 мкм: (1) – He 2760 м/с, (2) – Ar 2510 м/с, (3) – Ar 2400 м/с.

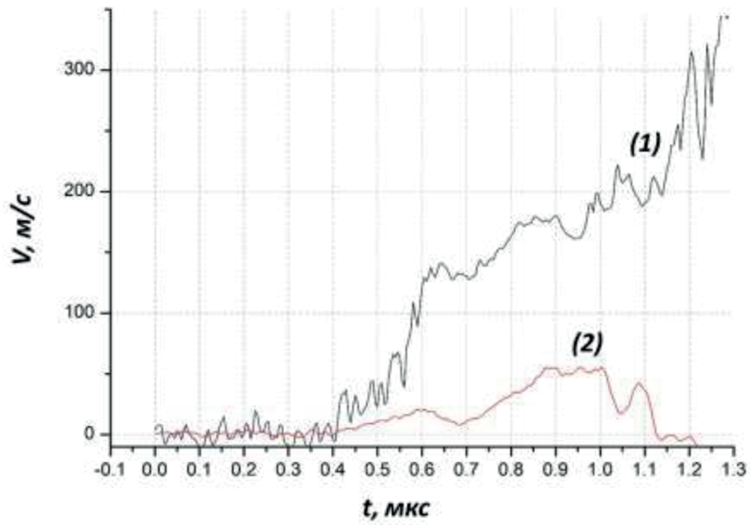

Рис. 4. Профили скорости свободной поверхности фольги Ag 1 мкм:
(1) – He 2900 м/с, (2) – Ar 2200 м/с.

которых режимах наблюдаются участки профилей с резким изменением темпа роста скорости (за ~ 10 нс на 20% и более), что даёт основания полагать, что метод применим для определения структуры фронта ударной волны с точностью, более чем на порядок величины, превышающей достигнутую в более ранних работах.

Заключение

Экспериментально показана принципиальная возможность применения метода VISAR для измерений во фронте ударной волны в газах. Требуется расширение экспериментальных условий, чтобы оценить диапазон его применения и точность.

Статья поступила в редакцию 10.01.2019 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука, 1966, 686 с.
2. Зиборов В. С., Ефремов В. П., Фортов В. Е. Эффект ионизации во фронте слабой ударной волны, распространяющейся в инертном газе, разбавленном малой концентрацией $Mo(CO)_6$ // Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики. 2007. Т. 86. № 3. С. 211–215.
3. The structure of shock wave front in helium containing the small concentration of the heavy molecules $Mo(CO)_6$ / Ziborov V. S., Efremov V. P., Shumova V. V., Fortov V. E. // ISIS 18: 18th International Shock Interaction Symposium. Rouen, 15–18 July 2008. P. 165–169.
4. Куликов С. В., Червонная Н. А. О влиянии малых добавок Xe на порог детонации смеси O_2–H_2–He // Химическая физика. 2018. Т. 37. № 1. С. 66–70.

5. Применение лазерного шлирен метода для измерений структуры фронта ударной волны в гелии с малой примесью тяжёлых молекул / Зиборов В. С., Галиуллин Р. А., Ефремов В. П., Шумова В. В., Фортов В. Е. // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2014. № 4. С. 106–109.
6. Barker L. M., Hollenbach R. E. Laser interferometer for measuring high velocities of any reflecting surface // Journal of Applied Physics. 1972. Vol. 43(11). P. 4669–4675.
7. Daniel H. Dolan Foundations of VISAR analysis. Technical Report № SAND2006-1950. USA: Sandia National Laboratories, 2006. 90 p.
8. Паркевич Е. В. Установка для исследования предпробойной стадии газового разряда с помощью лазерного зондирования // Приборы и техника эксперимента. 2017. № 3. С. 81–87.
9. Особенности формирования прианодной плазмы на ранней стадии наносекундного разряда / Паркевич Е. В., Хирьянова А. И., Агафонов А. В, Ткаченко С. И., Мингалеев А. Р., Шелковенко Т. А., Огинов А. В., Пикуз С. А. // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 2018. Т. 153. Вып. 3. С. 504–513.

REFERENCES

1. Zel'dovich Ya. B., Raizer Yu. P. Physics of Shock Waves and High-temperature Hydrodynamic Phenomena. Mineola, N.Y., Dover Publ., 2002.
2. Ziborov V. S., Efremov V. P., Fortov V. E. [Ionization effect in the front of a weak shock wave propagating in an inert gas diluted by a small amount of Mo(CO)6]. In: *Pis'ma v Zhurnal Eksperimental'noi i Teoreticheskoi Fiziki* [Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters], 2007, vol. 86, no. 3, pp. 211–215.
3. Ziborov V. S., Efremov V. P., Shumova V. V., Fortov V. E. The structure of shock wave front in helium containing the small concentration of the heavy molecules Mo(CO)6. In: *ISIS 18: 18th International Shock Interaction Symposium*. *Rouen, 15–18 July 2008*. pp. 165–169.
4. Kulikov S. V., Chervonnaya N. A. [Influence of small Xe additives on the detonation threshold for O2–H2–He mixtures]. In: *Khimicheskaya fizika* [Russian Journal of Physical Chemistry B], 2018, vol. 37, no. 1, pp. 66–70.
5. Ziborov V. S., Galiullin R. A., Efremov V. P., Shumova V. V., Fortov V. E. [Application of laser shlieren method for measurment of shock front structure in helium with small admixture of heavy molecules]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika* [Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], 2014, no. 4, pp. 106–109.
6. Barker L. M., Hollenbach R. E. Laser interferometer for measuring high velocities of any reflecting surface. In: *Journal of Applied Physics*, 1972, vol. 43(11), pp. 4669–4675.
7. Daniel H. Dolan Foundations of VISAR analysis. Technical Report № SAND2006-1950. USA, Sandia National Laboratories Publ., 2006. 90 p.
8. Parkevich E. V. [The installation to study the prebreakdown stage of a gas discharge by laser probing]. In: *Pribory i Tekhnika Eksperimenta* [Instruments and Experimental Techniques], 2017, no. 3, pp. 81–87.
9. Parkevich E. V., Khirianova A. I., Agafonov A. V., Tkachenko S. I. Mingaleev A. R., Shelkovenko T. A., Oginov A. V., Pikuz S. A. [Anode plasma formation at the initial stage of a nanosecond air discharge]. In: *Zhurnal Eksperimental'noi i Teoreticheskoi Fiziki* [Journal of Experimental and Theoretical Physics], 2018, vol. 153, no. 3, pp. 504–513.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Зиборов Вадим Серафимович – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Лаборатории ударно-волновых воздействий Объединённого института высоких температур Российской академии наук;
e-mail: ziborov.vs@yandex.ru

Ростилов Тимофей Андреевич – стажёр-исследователь Лаборатории ударно-волновых воздействий Объединённого института высоких температур Российской академии наук;
e-mail: t.rostilov@yandex.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Ziborov Vadim Serafimovich – PhD in Physical and Mathematical Sciences, Senior researcher at the Laboratory of Shock Wave Effects, Joint Institute for High Temperatures of the Russian Academy of Sciences;
e-mail: ziborov.vs@yandex.ru

Rostilov Timofey Andreevich – trainee researcher at the Laboratory of Shock Wave Effects, Joint Institute for High Temperatures of the Russian Academy of Sciences;
e-mail: t.rostilov@yandex.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Зиборов В. С., Ростилов Т. А. Применение метода VISAR для исследования взаимодействия фронта ударной волны в газе и твёрдой поверхности // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2019. № 1. С. 68–73.
DOI: 10.18384-2310-7251-2019-1-68-73

FOR CITATION

Ziborov V. S., Rostilov T. A. Application of the VISAR method to study the interaction of the shock front in the gas and solid surface In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics,* 2019, no. 1, pp. 68–73.
DOI: 10.18384-2310-7251-2019-1-68-73

УДК 621.3.032.27
DOI: 10.18384-2310-7251-2019-1-74-82

МЕТОДЫ СОВЕРШЕНСТВОВАНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК ПРОЗРАЧНЫХ ЭЛЕКТРОДОВ НА ОСНОВЕ ОКСИДА ЦИНКА

Абдуев А. Х.[1], Асваров А. Ш.[1], Ахмедов А. К.[1], Беляев В. В.[2,3], Скворцов А. Ю.[2], Пленцова Д. С.[2]

[1] *Институт физики имени Х. И. Амирханова Дагестанского научного центра РАН 367015, г. Махачкала, ул. Магомеда Ярагского, д. 94, Ресупублика Дагестан, Российская Федерация*

[2] *Московский государственный областной университет 141014, Московская область, г. Мытищи, ул. Веры Волошиной, д. 24, Российская Федерация*

[3] *Российский университет дружбы народов 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 8, Российская Федерация*

Аннотация. Изучено влияние состава потока реагентов на условия формирования и структуру слоёв на основе ZnO. Показано, что ключевым резервом в увеличении электропроводности и подвижности носителей заряда прозрачных электродов на основе ZnO:Ga является повышение структурного совершенства слоёв. Анализ полученных результатов исследований показывает, что увеличение парциального давления паров металла в газовой фазе влечёт за собой соответствующее увеличение подвижности компонентов и увеличение кристаллического совершенства синтезируемых поликристаллических слоёв.

Ключевые слова: физика твёрдого тела, прозрачный электрод, сопротивление, температура, синтез.

IMPROVING CHARACTERISTICS OF ZINC OXIDE TRANSPARENT ELECTRODES

A. Abduev[1], A. Asvarov[1], A. Ahmedov[1], V. Belyaev[2, 3], A. Skvortsov[2], D. Plentsova[2]

[1] *Institute of Physics of the Dagestan Science Center of the Russian Academy of Sciences ul. Magomeda Yaragskogo 94, 367015 Makhachkala, Republic of Dagestan, Russian Federation*

[2] *Moscow Region State University ul. Very Voloshinoi 24, 141014 Mytishchi, Moscow Region, Russian Federation*

[3] *RUDN University ul. Miklukho-Maklaya 6, 117198 Moscow, Russian Federation*

Abstract. The influence of the composition of the reagent flow on the formation conditions and the structure of ZnO-based layers is studied. It is shown that a key reserve in increasing the electrical conductivity and mobility of charge carriers of Ga-doped ZnO transparent electrodes is to increase the structural perfection of the layers. Analysis of the obtained results shows that an increase in the partial pressure of metal vapors in the gas phase entails a corresponding increase in the mobility of the components and an increase in the crystalline perfection of the synthesized polycrystalline layers.

Keywords: solid-state physics, transparent electrode, resistance, temperature, synthesis.

Введение

Поиски путей создания новых материалов для формирования прозрачных электродов в дисплеях на основе жидких кристаллов и органических светодиодов (ЖК и OLED, соответственно), в тонкоплёночных солнечных преобразователях, светодиодах, а также в многочисленных иных приложениях ведутся длительное время в исследовательских центрах и в подразделениях R&D ведущих мировых производителей электронных устройств. Истоком этих работ явилось открытие К. Бедекером электропроводности в тонких слоях CdO [1]. Запатентованный в 1951 г фирмой Corning [2] прозрачный электрод на основе системы In_2O_3-SnO_2 (ITO) пока остаётся безальтернативным материалом в плоскопанельных устройствах. Высокая стоимость индия вынуждает исследователей искать новые материалы для прозрачных электродов. Исследования Т. Минами положили начало успешному применению слоёв на основе оксида цинка в тонкоплёночных солнечных панелях, в антистатических покрытиях [3]. Широкое применение слоям на основе ZnO обеспечила большая доступность сырья и, как следствие, коммерческая привлекательность созданных электродов AZO (ZnO:Al), GZO (ZnO:Ga) и др.

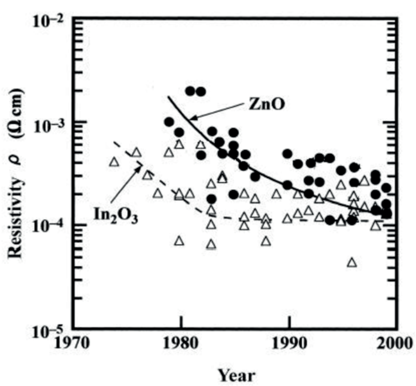

Рис. 1. Динамика изменения величины достигнутых удельных сопротивлений слоев TCO в период 1970–2000 гг. (Рисунок из статьи T. Minami New n-type transparent conducting oxides) [3, p. 38]

К 2000 г. в работе Минами на основе статистического анализа было показано, что резервы уменьшения сопротивления слоёв на основе ITO истощены (рис. 1). В отличие от ITO слои TCO на основе ZnO сохраняли тенденцию к улучшению величин электропроводности. Последующие годы, однако, не привели к использованию слоёв TCO на основе ZnO в ЖК индустрии. Новые надежды в создании альтернативного материала для замены ITO были связаны со слоями графена [4; 5], а также с неупорядоченными структурами на основе нанонитей серебра. Это нашло отражение и в содержании материалов маркетинговых исследований: слои TCO на основе оксидов утратили позиции перспективных альтернативных материалов [6].

Вопрос о перспективах создания альтернативных слоёв TCO на основе оксида цинка заслуживает специального рассмотрения, как с точки зрения практики, так и фундаментальной науки. Так, в статье [7] указывается, что основным резервом улучшения электропроводности в слоях TCO является совершенствование структуры слоёв, обеспечивающее увеличение подвижности носителей заряда. Достижение этого резерва затруднительно при относительно низких температурах синтеза. Малая длина миграции атомов на поверхности роста, как показывает моделирование методом Монте Карло, и как свидетельствуют данные электронной микроскопии, приводит к формированию столбчатых структур и формированию потенциальных барьеров на границах столбов [8].

Ранее было установлено, что доставка к поверхности роста сверхстехиометрического цинка приводит при температурах около 450 °С к формированию на поверхности роста легкоплавкой фазы ZnO_{1-x} и увеличению длины миграции атомов по поверхности [9; 10]. В связи с вышеизложенным авторами были изучены условия синтеза поликристаллических слоёв ZnO, их электрические и оптические характеристики, а также их структурное совершенство. Слои были синтезированы при магнетронном распылении металлокерамических композитных мишеней на основе CZO с высоким содержанием цинка.

Условия эксперимента

Синтез мишеней для настоящих исследований был выполнен методом плазменного спекания (SPS) исходных пресс-порошков. Распыление синтезированных мишеней на основе GZO (3ат.% Ga) с содержанием цинка в диапазоне от 0 до 30 весовых % осуществлялось методом dc магнетронного распыления.

Магнетронное распыление выполнялось в среде аргона. Температура роста слоёв изменялась от от 50 °С до 300 °С.

Синтез слоёв проводился в среде Ar методом магнетронного распыления керамической мишени ZnO:Ga с 3 атомными % Ga (GZO) и металло-керамических мишеней GZO (3 ат.% Ga) – Zn с содержанием металлической фазы Zn до 30 вес.% при постоянном токе. Температура синтеза слоёв составляла от 50 °С до 300 °С. Осаждение проводилось в установке «Магнетрон» (г. Воткинск). Слои были осаждены на подложки из кремния с окисленной поверхностью и на подложки из стекла. Расстояние мишень–подложка составляло 100 мм. Для электронной микроскопии поверхностей и поперечных сколов синтезированных слоёв использован микроскоп Leo-1450 (Карл Цейсс, Германия). Дифрактограммы слоёв получены с помощью дифрактометра Shimadzu XRD-7000. (Япония). Оптическое пропускание слоёв исследовано с применением спектрофотометра UV-3600 Shimadzu, Япония.

Результаты исследований

Изучение дифрактограмм было выполнено для слоёв, осаждённых при температурах подложек от 50 до 280 °C. Как показано на рис. 2, синтезированные слои имеют типичную структуру (002)ZnO с нормальной ориентацией оси с к поверхности. Можно видеть, что увеличение содержания цинка в распыляемых мишенях приводит к увеличению интенсивности базисного рефлекса. При температурах выше 100 °C увеличение содержания цинка приводит к заметному росту размеров зёрен (рис. 2b). Рост интенсивностей рефлексов и размеров зёрен находится с хорошем согласии с уменьшением полуширины рефлекса (002)ZnO.

Можно констатировать, что различия в рентгеноструктурных параметрах, наблюдаемые при распылении стехиометричной мишени GZO и мишеней GZO-Zn, минимальны при температурах ниже 100 °C, максимальны при 200 °C и постепенно нивелируются при дальнейшем увеличении температуры. Это позволяет предполагать, что при температурах ниже 100 °C сверхстехиометричный цинк на поверхности роста препятствует упорядочению структуры слоёв. При достижении температуры 200 °C заметно возрастает длина миграции атомов цинка и, соответственно, возрастают интенсивности рефлекса (002)ZnO, размеры зёрен, и снижается полуширина рефлекса.

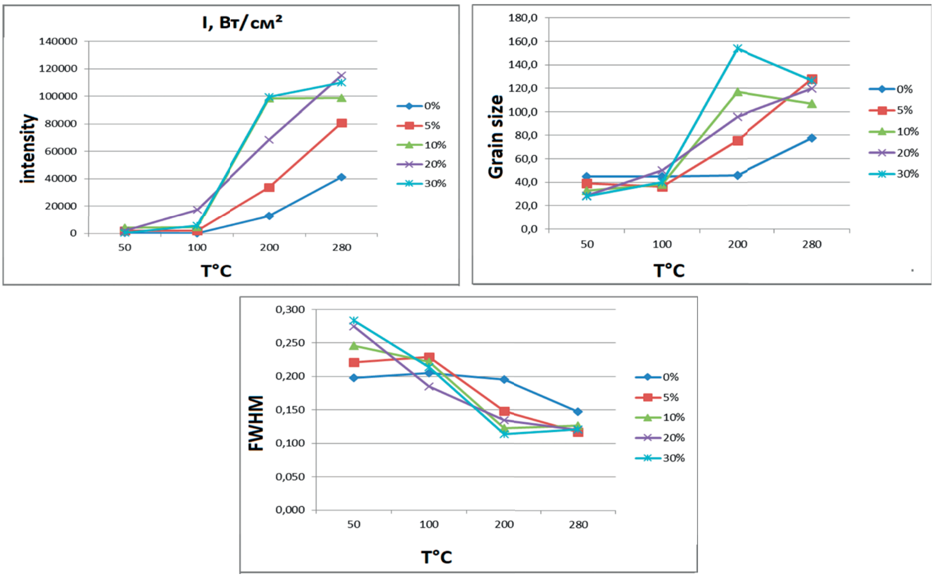

Рис. 2. Данные обработки результатов рентгеноструктурных исследований слоев GZO, синтезированных при распылении мишеней с различным содержанием металлической фазы цинка.

Можно видеть, что по мере роста температуры размеры зёрен и полуширины слоёв стягиваются к единым значениям. Слои, синтезированные из мишеней с содержанием фазы цинка 5–20% в температурном створе 150÷300 °C, имеют относительно высокие подвижности.

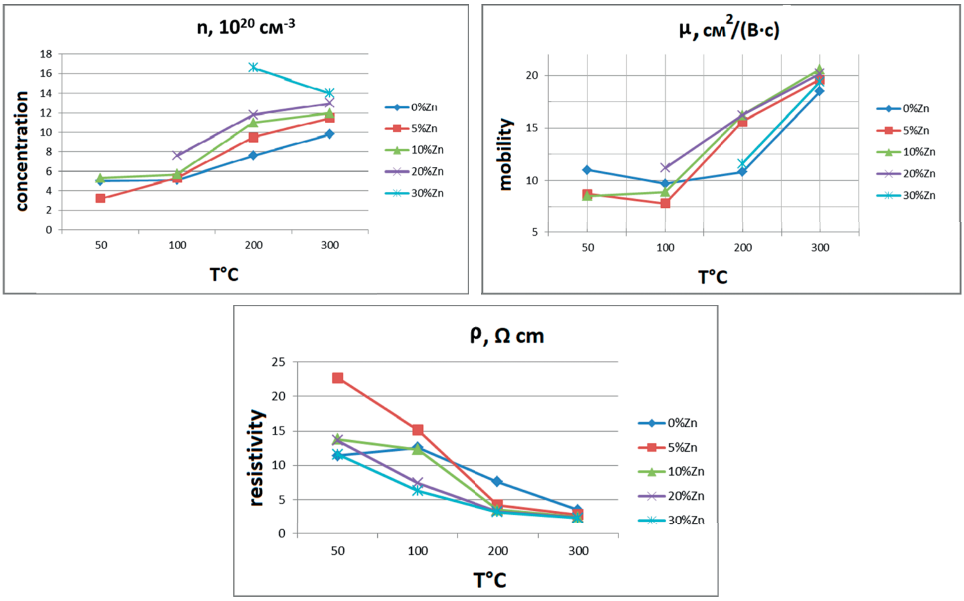

Рис. 3. Зависимость холловских параметров слоёв, синтезированных при распылении мишеней с различным содержанием металлической фазы цинка, от температуры синтеза.

На рис. 3 приведены данные измерения холловских параметров слоёв. Здесь также по мере роста температуры все кривые стягиваются к близким значениям.

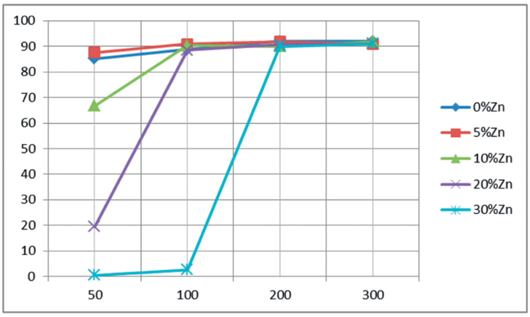

Рис. 4. Зависимость средних величин оптического пропускания в диапазоне 400÷750 нм слоёв GZO, синтезированных при распылении мишеней с различным содержанием фазы цинка, от температуры синтеза.

Зависимости средних величин оптического пропускания в диапазоне 400÷750 нм слоёв, синтезированных при температурах 50÷3000 °С, показаны на рис. 4. Характерно, что с увеличением содержания цинка в составе потока реагентов к подложке кривые пропускания сливаются с контрольной кривой (0% Zn) при более высоких температурах. Таким образом, спектры пропускания позволяют определить температуры, при которых избыточный цинк десорбирует в процессе синтеза. Данные рентгеноструктурных и холловских исследований показывают, что в процессе роста слоёв присутствующая на поверхности роста динамическая фаза цинка приводит к увеличению длины миграции атомов на поверхности роста, ведущей к структурному совершенствованию и росту электропроводности слоёв.

Заключение

Полученные результаты позволяют заключить, что при синтезе слоёв из потока реагентов с избыточным содержанием паров цинка на поверхности роста формируется динамическая легкоплавкая фаза ZnO_{1-x}, которая в створе температур роста 150÷300 °С обеспечивает квазиравновесный синтез слоёв с участием динамической легкоплавкой фазы. При прекращении подачи реагентов к поверхности роста эта динамическая фаза десорбирует с поверхности.

Выполненные исследования показывают, что температура десорбции с поверхности роста избыточного цинка протекает уже при температурах около 100 °С. Столь невысокая температура десорбции Zn нуждается в обосновании. Мы полагаем, что реальная температура поверхности роста может существенно превышать температуру, которую фиксирует термопара. Это связано с тем, что ионная бомбардировка поверхности отрицательными ионами кислорода, а также излучение плазмы магнетронного разряда может приводить к заметному увеличению температуры поверхности. Выяснение механизмов низкотемпературной десорбции цинка с поверхности роста требует дополнительных исследований.

Вывод

В настоящей работе показано, что магнетронный синтез из потока реагентов с увеличенным содержанием паров цинка приводит к росту структурного совершенства и улучшению электрических характеристик прозрачных электродов GZO.

Статья поступила в редакцию 18.01.2019 г.

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты №19-07-00537_а и 19-07-00602_а.

ACKNOWLEDGMENTS

The work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (Project Nos. 19-07-00537_a and 19-07-00602_a).

ЛИТЕРАТУРА

1. Flexible Electronics: Materials and Applications / W. S. Wong, A. Salleo, eds. US: Springer, P. 473–442.
2. Mochel J. M. Electrically conducting coating on glass and other ceramic bodies / Patent USA 2564987A. Printed 08.21.1951.

3. Minami T. New n-type transparent conducting oxides // MRS Bulletin. 2000. Vol. 25. Iss. 8. P. 38–44.
4. Ren W., Cheng H.-M. The global growth of graphene // Nature Nanotechnology. 2014. Vol. 9. P. 726–730.
5. The Potential of Graphene as an ITO Replacement in Organic Solar Cells: An Optical Perspective / Koh W. S., Gan C. H., Phua W. K., Akimov Y. A., Bai P. // IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics. 2014. Vol. 20. Iss. 1. P. 36–42.
6. Transparent Conductive Films (TCF) Market Research Report [Электронный ресурс] // IndustryARC: [сайт]. https://industryarc.com/Report/16335/transparent-conductive-films-market.html?gclid=EAIaIQobChMI4I7h7on44AIVBs yCh3paQBfEAAYAiAAEgI8w_D_BwE (дата обращения: 15.12.2018).
7. Ellmer K. Resistivity of polycrystalline zinc oxide films: current status and physical limit // Journal of Physics D: Applied Physics. 2001. Vol. 34. No. 21. P. 3097–3108.
8. Microstructural evolution during film growth / Petrov I., Barna P. B., Hultman L., Greene J. E. // Journal of Vacuum Science and Technology A. 2003. Vol. 21. Iss. 5. P. 117.
9. ZnO layers growth mechanism / Abduev A. Kh., Asvarov A. Sh., Achmedov A. K., Kamilov I. K., Suljanov S. N. // NATO Science Series II: Mathematics, Physics and Chemistry. 2005. Vol. 194. P. 15.
10. Процессы газофазной кластеризации при магнетронном распылении цинка / Абдуев А. Х., Ахмедов А. К., Асваров А. Ш., Алиханов Н. М., Эмиров Р. М., Муслимов А. Э., Беляев В. В. // Кристаллография. 2017. Т. 62. № 1. С. 130–136.

REFERENCES

1. Wong W. S., Salleo A., eds. Flexible Electronics: Materials and Applications. US, Springer Publ., pp. 473–442.
2. Mochel J. M. Electrically conducting coating on glass and other ceramic bodies / Patent USA 2564987A. Printed 08.21.1951.
3. Minami T. New n-type transparent conducting oxides. In: *MRS Bulletin*, 2000, vol. 25, iss. 8, pp. 38–44.
4. Ren W., Cheng H.-M. The global growth of graphene. In: *Nature Nanotechnology*, 2014, vol. 9, pp. 726–730.
5. Koh W. S., Gan C. H., Phua W. K., Akimov Y. A., Bai P. The Potential of Graphene as an ITO Replacement in Organic Solar Cells: An Optical Perspective. In: *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics*, 2014, vol. 20, iss. 1, pp. 36–42.
6. Transparent Conductive Films (TCF) Market Research Report. In: *IndustryARC*. URL: https://industryarc.com/Report/16335/transparent-conductive-films-market.html?gclid=EAIaIQobChMI4I7h7on44AIVBs yCh3paQBfEAAYAiAAEgI8w_D_BwE (accessed: 15.12.2018).
7. Ellmer K. Resistivity of polycrystalline zinc oxide films: current status and physical limit. In: *Journal of Physics D: Applied Physics*, 2001, vol. 34, no. 21, pp. 3097–3108.
8. Petrov I., Barna P. B., Hultman L., Greene J. E. Microstructural evolution during film growth. In: *Journal of Vacuum Science and Technology A*, 2003, vol. 21, iss. 5, pp. 117.
9. Abduev A. Kh., Asvarov A. Sh., Achmedov A. K., Kamilov I. K., Suljanov S. N. ZnO layers growth mechanism. In: *NATO Science Series II: Mathematics, Physics and Chemistry*, 2005, vol. 194, p. 15.
10. Abduev A. Kh., Akhmedov A. K., Asvarov A. Sh., Alikhanov N. M., Emirov R. M., Muslimov A. E., Belyaev V. V. [Gas-phase clusterization of zinc during magnetron sputtering]. In: *Kristallografiya* [Crystallography Reports], 2017,vol. 62, no. 1, pp. 130–136.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Абдуев Аслан Хаджимуратович – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Института физики имени Х. И. Амирханова Дагестанского научного центра РАН;
e-mail: a_abduev@mail.ru

Асваров Абил Шамсудинович – кандидат физико-математических наук, заведующий центром высоких технологий Института физики имени Х. И. Амирханова Дагестанского научного центра РАН;
e-mail: abil-as@list.ru

Ахмедов Ахмед Кадиевич – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник имени Х. И. Амирханова Дагестанского научного центра РАН;
e-mail: cht-if-ran@mail.ru

Беляев Виктор Васильевич – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической физики Московского государственного областного университета; профессор департамента механики и мехатроники Института космических технологий Инженерной академии Российского университета дружбы народов;
e-mail: vic_belyaev@mail.ru

Скворцов Алексей Юрьевич – студент физико-математического факультета Московского государственного областного университета;
e-mail: vic_belyaev@mail.ru

Пленцова Дарья Сергеевна – студент физико-математического факультета Московского государственного областного университета;
e-mail: vic_belyaev@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Aslan Kh. Abduev – PhD in Physical and Mathematical Sciences, leading researcher, Institute of Physics of the Dagestan Science Center of the Russian Academy of Sciences;
e-mail: a_abduev@mail.ru

Abil Sh. Asvarov – PhD in Physical and Mathematical Sciences, head of the Center of High Technology, Institute of Physics of the Dagestan Science Center of the Russian Academy of Sciences
e-mail: abil-as@list.ru

Ahmed K. Ahmedov – PhD in Physical and Mathematical Sciences, leading researcher, Institute of Physics of the Dagestan Science Center of the Russian Academy of Sciences;
e-mail: cht-if-ran@mail.ru

Victor V. Belyaev – Doctor in Engineering Sciences, professor, Head of the Department of Theoretical Physics, Moscow Region State University; professor at the Department of Mechanics and Mechatronics of the Institute of Space Technologies of the Engineering Academy, RUDN University;
e-mail: vic_belyaev@mail.ru

Aleksey Y. Skvortsov – student at the Faculty of Physics and Mathematics, Moscow Region State University;
e-mail: vic_belyaev@mail.ru

Darya S. Plentsova – student at the Faculty of Physics and Mathematics, Moscow Region State University;
e-mail: vic_belyaev@mail.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Абдуев А. Х., Асваров А. Ш., Ахмедов А. К., Беляев В. В., Скворцов А. Ю., Пленцова Д. С. Методы совершенствования характеристик прозрачных электродов на основе оксида цинка // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2019. № 1. С. 74–82.
DOI: 10.18384-2310-7251-2019-1-74-82

FOR CITATION

Abduev A. Kh., Asvarov A. Sh., Ahmedov A. K., Belyaev V. V., Skvortsov A. Y., Plentsova D. S. Improving characteristics of zinc oxide transparent electrodes. In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*, 2019, no. 1, pp. 74–82.
DOI: 10.18384-2310-7251-2019-1-74-82

УДК 538.956, 537.226.5
DOI: 10.18384-2310-7251-2019-1-83-96

АНИЗОТРОПИЯ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ 1-(4-ГЕКСИЛЦИКЛОГЕКСИЛ)-4-ИЗОТИОЦИАНАТ-БЕНЗОЛА

Курилов А. Д.[1,2], Волосникова Н. И.[1]

[1] *Московский государственный областной университет*
141014, Московская область, г. Мытищи, ул. Веры Волошиной, д. 24, Российская Федерация

[2] *МИРЭА – Российский технологический университет*
119454, г. Москва, пр-т Вернадского, д. 78, Российская Федерация

Аннотация. Проведены исследования диэлектрических свойств нематического жидкого кристалла 6CHBT с полярной концевой –NCS группой. Используя методы диэлектрической спектроскопии, с учётом паразитных вкладов измерительной системы определены главные значения диэлектрической проницаемости при варьировании температуры образца, угла между директором и напряжённостью электрического поля и частоты тест-сигнала. Рассчитаны характерные времена диэлектрической релаксации τ вращения молекул 6CHBT вокруг их короткой оси как в нематической, так и изотропной фазах, а также соответствующие им энтальпии активации. На основе полученных данных и теории Майера-Заупе построена температурная зависимость параметра ориентационного порядка во всём диапазоне существования нематической фазы.

Ключевые слова: жидкие кристаллы, диэлектрическая спектроскопия, анизотропия, диэлектрическая релаксация.

ANISOTROPY OF DIELECTRIC PERMITTIVITY IN 1-(4-HEXYLCYCLOHEXYL)-4-ISOTHIOCYANATOBENZENE

A. Kurilov[1,2], N. Volosnikova[1]

[1] *Moscow Region State University*
ul. Very Voloshinoi 24, 141014 Mytishchi, Moscow Region, Russian Federation

[2] *MIREA – Russian Technological University*
prosp. Vernadskogo 78, 119454 Moscow, Russian Federation

Abstract. Dielectric properties of the 6CHBT nematic liquid crystal with a polar –NCS end group are studied. The principal values of the dielectric permittivity are determined using the methods of dielectric spectroscopy by varying the sample temperature, the angle between the director and electric field strength vector, and the frequency of the test signal. We use a modified dielectric spectroscopy method that takes into account the parasitic contributions of the measuring system. The characteristic dielectric relaxation times τ of rotation of 6CHBT molecules around their short axis in both the nematic and isotropic phases and the corresponding activation enthalpies are calculated. The temperature dependence of the orientational order parameter over the entire range of the nematic phase existence is constructed using the obtained data and the Maier-Saupe theory.

Keywords: liquid crystals, dielectric spectroscopy, anisotropy, dielectric relaxation.

Введение

Нематические жидкие кристаллы (НЖК) с высокой анизотропией показателя преломления Δn и низкой вязкостью особенно привлекательны для дисплейных, инфракрасных и микроволновых приложений [1–4]. Двойное лучепреломление НЖК в основном определяется длиной π-сопряжения, молекулярной формой, функциональной группой и концевыми группами. Бензольные кольца и системы двойных и тройных связей приводят к высокосопряжённым соединениям [5; 6]. Основные недостатки таких сильно сопряжённых структур для практического применения обычно наблюдаются в виде высокой температуры плавления и сильной смектогенности. Жидкие кристаллы с полярной концевой группой проявляют высокие значения анизотропии диэлектрической проницаемости и коэффициента преломления [7]. Добавка концевой азотсодержащей группы позволяет достигать сверхвысоких значений анизотропии коэффициента преломления, наивысшие значения которого ($\Delta n = 0{,}8$) наблюдаются у изотиоцинатов (соединения с полярными –NCS концевыми группами) [8]. Кроме того, измерения с использованием ультрафиолетовой и флуоресцентной спектроскопии показывают их хорошие фотолюминесцентные свойства и высокую квантовую эффективность 0,4÷1,0. Изотиоцианаты в виде соединений с высоким Δn кажутся более подходящими для применений, чем другие полярные НЖК, из-за более низких объёмной и вращательной вязкостей. Последняя ниже (до 35%), чем у структурно сопоставимых соединений с концевой руппой –CN [9].

Также известно, что воздействие ультрафиолетового излучения негативно влияет на эксплуатационные параметры жидкокристаллических материалов: температуру просветления, двулучепреломление, диэлектрические постоянные, а также вязкостные и упругие коэффициенты. Однако добавление азотсодержащих групп увеличивает устойчивость к ультрафиолетовому излучению, а изотиоцианаты показывают наилучшую стабильность среди соответствующих других типичных полярных групп [10].

С точки зрения применения эти соединения используются в качестве легирующей добавки для улучшения качества коммерческих смесей для дисплейных приложений [11; 12].

Объект исследования и методы

В данной работе проводятся исследования анизотропии диэлектрической проницаемости нематического жидкого кристалла 1-(4-гексилциклогексил)-4-изотиоцианат-бензола (6CHBT) с полярной –NCS концевой группой. Структурная формула 6CHBT показана на рис. 1.

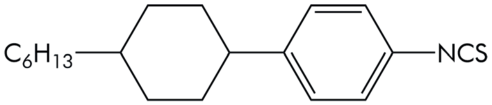

Рис. 1. Структурная формула 6CHBT.

Согласно литературным данным 6CHBT имеет температуру просветления $T_{N\text{-}Iso} = 316{,}7$ К [13]. С помощью методов дифференциальной сканирующей калориметрии (Mettler Toledo DSC 3) и поляризационной оптической микроскопии (Альтами Полар 3) установлено, что температуры фазовых превращений исследуемого образца соответствуют этим данным. Измерения проводились как при нагревании, так и охлаждении исследуемого образца со скоростью ± 33 мК/с. Перед каждым измерением образец выдерживался при постоянной температуре не менее 30 минут. Полученная таким образом термограмма представлена на рис. 2.

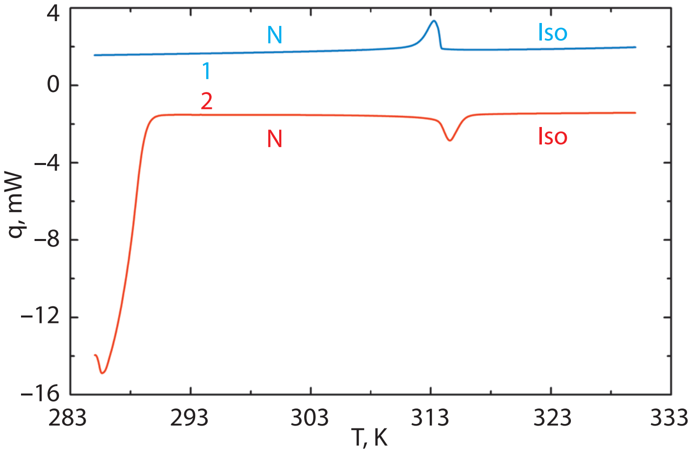

Рис. 2. Термограмма 6CHBT: 1 – охлаждение; 2 – нагревание.

Измерения диэлектрических свойств исследуемого объекта проводились ёмкостным методом [14; 15] с использованием прецизионного анализатора импеданса WK 65120P в диапазоне частот тест-сигнала от 20 Гц до 40 МГц. Напряжение приложенного электрического тест-сигнала составляло 0,5 В. Измерительная ячейка представляет собой ёмкость с плоским конденсатором. Поддержание заданной температуры производилось путём циркулирования жидкости-теплоносителя во внешнем контуре измерительной ячейки. Температура образца регулировалась жидкостным криостатом LOIP FT-316-25 в диапазоне от 285 К до 330 К со стабилизацией температуры не хуже ±0,5 К. Ориентация нематического жидкого кристалла задавалась постоянным магнитом с индукцией $B = 0{,}245$ Тл, между полюсов которого жёстко закреплена измерительная ячейка.

При измерениях диэлектрических свойств ёмкостным методом в широком частотном диапазоне важно учитывать паразитные эффекты системы, сильно искажающие измеряемые параметры как в низко-, так и в высокочастотной областях. В настоящей работе производился учёт и компенсация паразитной ёмкости системы C_P [16], ёмкости двойного электрического слоя [17], а также частоты среза f_C и резонансной частоты f_R, связанных с наличием индуктивности проводов и сопротивлением электродов [18]. Для выделения паразитной ёмкости системы плоский конденсатор калибровался на эталонном диэлектрике: толуоле класса «ос.ч.».

Обсуждение результатов

Полученные значения продольной и поперечной компонент статической диэлектрической проницаемости ε_S в нематической и изотропной фазах представлены на рис. 3. Нематический жидкий кристалл 6CHBT обладает положительной анизотропией диэлектрической проницаемости ввиду наличия сильного электрического дипольного момента концевой –NCS группы, направленного параллельно длинной оси молекулы. В области фазового перехода диэлектрическая проницаемость меняется скачкообразно. При этом в изотропной фазе главные компоненты тензора диэлектрической проницаемости 6CHBT практически не изменяются с температурой.

Рассчитаны значения усреднённой диэлектрической проницаемости $\langle\varepsilon\rangle = (\varepsilon_\| + 2\varepsilon_\perp)/3$, которые также представлены на графике. В области фазового перехода N-Iso наблюдается небольшой скачок усреднённой диэлектрической проницаемости, который объясняется образованием димеров из антипараллельных молекул, уменьшающих среднюю диэлектрическую проницаемость системы. Такое поведение полярных жидких кристаллов подтверждено рентгеноструктурным анализом [19].

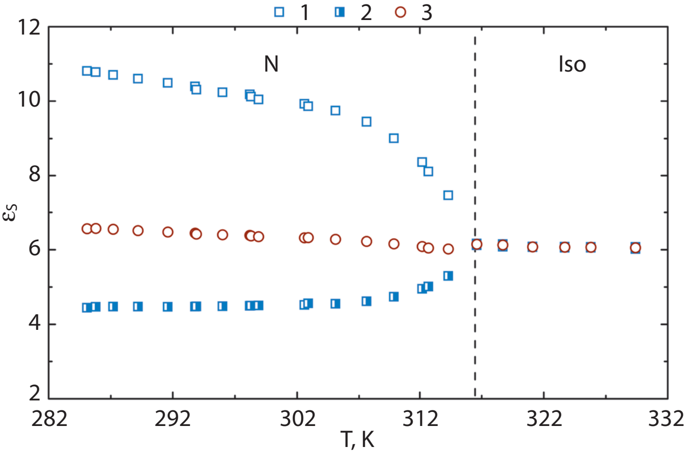

Рис. 3. Температурная зависимость компонент статической диэлектрической проницаемости ε_S 6CHBT: 1 – продольная компонента $\varepsilon_\|$, 2 – поперечная компонента $\varepsilon_\perp$, 3 – усреднённая диэлектрическая проницаемость $\langle\varepsilon\rangle$.

Путём вращения плоского конденсатора относительно магнитного поля получена зависимость статической диэлектрической проницаемости ε_S от угла между директором и вектором напряжённости электрического поля с шагом в 10 градусов при различных значениях температуры образца. С ростом температуры анизотропия статической диэлектрической проницаемости уменьшается с сохранением качественного характера угловой зависимости. Полученные зависимости хорошо описываются известным эмпирическим выражением [20]:

$$\varepsilon_S = \varepsilon_\perp + \Delta\varepsilon \cos^2 \varphi, \tag{1}$$

где φ – угол между директором и вектором напряжённости электрического поля, $\Delta\varepsilon = \varepsilon_\parallel - \varepsilon_\perp$ – анизотропия диэлектрической проницаемости. Аппроксимирующие кривые представлены сплошными линиями на рис. 4.

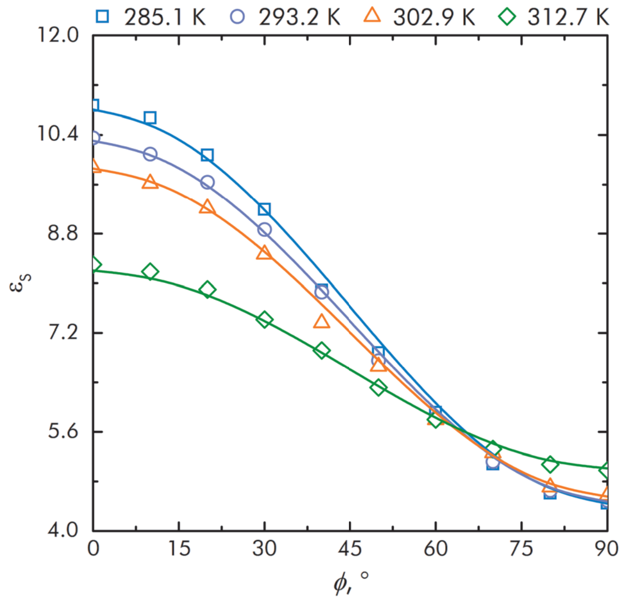

Рис. 4. Анизотропия статической диэлектрической проницаемости ε_S для различных температур 6CHBT.

Во всём диапазоне существования мезофазы наблюдается дисперсия как продольной, так и поперечной компоненты действительной части диэлектрической проницаемости со сменой знака анизотропии диэлектрической проницаемости на соответствующей частоте перехода. Причём частота перехода уменьшается с понижением температуры. Такое поведение связано с релаксацией вращения молекул НЖК вокруг их короткой оси, когда вследствие внутреннего трения диполи уже не успевают поворачиваться вслед за электрическим полем и основной вклад в ориентационную поляризуемость системы вносит поперечная компонента дипольного момента. С дальнейшим уменьшением температуры молекулы НЖК перестают вращаться и вокруг своих длинных осей, поэтому в высокочастотной области спектра механизм ориентационной поляризуемости в полярных диэлектриках не учитывается.

Для 6CHBT также обнаружена дисперсия диэлектрической проницаемости в изотропной фазе, что отражено на рис. 5.

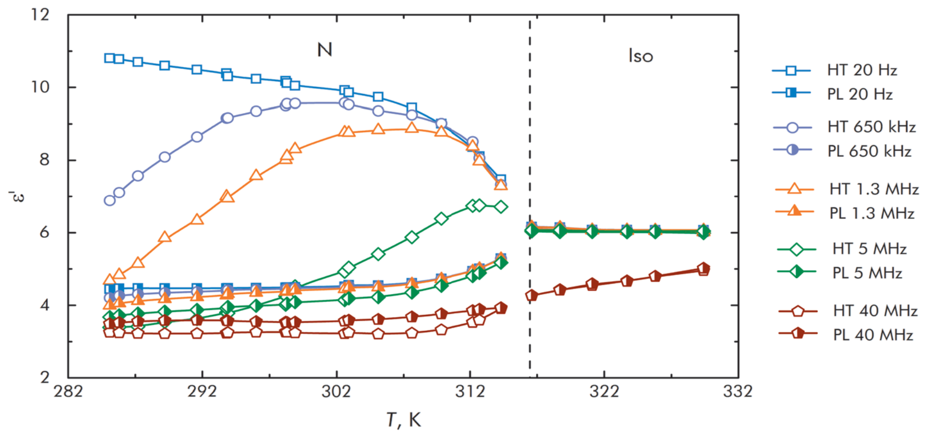

Рис. 5. Температурные зависимости продольной $\varepsilon_{\parallel}$ (HT) и поперечной $\varepsilon_{\perp}$ (PL) компонент диэлектрической проницаемости 6CHBT при различных частотах приложенного тест-сигнала.

Для характеристики наблюдаемых релаксационных процессов необходимо проводить анализ спектров как действительной ε', так и мнимой ε'' компонент диэлектрической проницаемости. Соответствующие дисперсионные кривые представлены на рис. 6. Мнимая компонента диэлектрической проницаемости характеризует потери в диэлектрике и поэтому называется коэффициентом диэлектрических потерь. Расчёт мнимой компоненты производился из значений ёмкости C и проводимости G системы по формуле $\varepsilon'' = G/(\omega C)$.

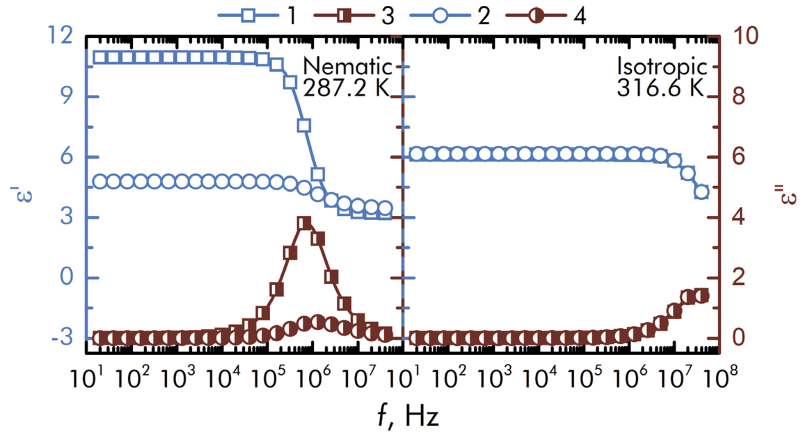

Рис. 6. Частотные зависимости действительной и мнимой частей диэлектрической проницаемости 6CHBT в нематической и изотропной фазах:
1 – продольная компонента ε′; 2 – поперечная компонента ε′;
3 – продольная компонента ε″; 4 – поперечная компонента ε″.

Для описания дисперсионных кривых, из которых вычтены паразитные эффекты системы, используется релаксационная модель Гаврильяк-Негами [21], учитывающая асимметричность распределения времён релаксации:

$$\varepsilon' - i\varepsilon'' = \varepsilon_\infty + \frac{\delta\varepsilon}{\left[1+(i\omega\tau)^\alpha\right]^\beta}, \qquad (2)$$

где ε_∞ – высокочастотный предел диэлектрической проницаемости, τ – время диэлектрической релаксации, $\omega = 2\pi f$ – циклическая частота, $\delta\varepsilon$ – сила релаксационного процесса, α – параметр распределения τ, отвечающий за ширину дисперсионной кривой, β – параметр частотной асимметричности распределения τ.

Используя численные методы оптимизации, была получена аппроксимирующая кривая, соответствующая выражению (2), а также найдены все неизвестные параметры, входящие в него. Дисперсия компонент диэлектрической проницаемости наблюдается в диапазоне $10^5 \div 10^7$ Гц для нематической фазы и $10^7 \div 10^9$ Гц для изотропной фазы. С повышением температуры область релаксационных процессов смещается в высокочастотную часть спектра. Это объясняется уменьшением внутреннего трения среды с ростом температуры, вследствие чего молекулы НЖК успевают поворачиваться вслед за электрическим полем на более высоких частотах.

Рассчитаны характерные времена диэлектрической релаксации вращения молекул вокруг их короткой оси как в нематической, так и изотропной фазах. Полученная температурная зависимость представлена на рис. 7.

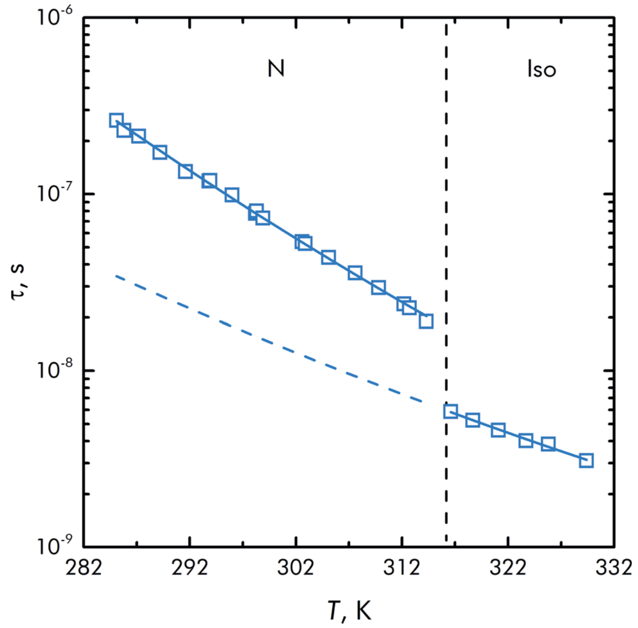

Рис. 7. Температурная зависимость времени релаксации τ вращения молекул 6CHBT вокруг их короткой оси.

В области фазового перехода из нематической фазы в изотропную наблюдается скачкообразное уменьшение значений времени релаксации. Температурная зависимость времён релаксации удовлетворительно описывается законом Аррениуса:

$$\tau = \tau_\infty \exp\left(\frac{\Delta^{\#} H}{RT}\right), \tag{3}$$

где τ_∞ – высокотемпературный предел времени релаксации, $\Delta^{\#}H$ – энтальпия активации релаксационного процесса, R – универсальная газовая постоянная, T – температура.

Из рис. 7 видно, что температурная зависимость времени релаксации хорошо описывается постоянной энтальпией активации молекулярного вращения во всём диапазоне существования мезофазы. Значения энтальпий активации в соответствующих фазах были рассчитаны при построении аппроксимирующей кривой и составляют $\Delta^{\#}H_N = 65{,}0$ кДж/моль и $\Delta^{\#}H_{Iso} = 42{,}2$ кДж/моль.

Скачкообразное уменьшение времени релаксации при переходе из нематической фазы в изотропную хорошо описывается теорией Майера-Заупе в рамках концепции теории среднего поля и фактора замедления g. Параметр потенциального барьера НЖК определяется как $\sigma = q/kT$, где q – высота барьера, препятствующего переориентации молекул вокруг их коротких осей. Отсюда время релаксации в мезофазе должно быть больше, чем в изотропной фазе. Фактор замедления $g = \tau/\tau_0$ определяется как отношение времени релаксации в мезофазе к времени релаксации при нулевом нематическом потенциальном барьере $q = 0$. Данное отношение можно определить из экспериментальных данных путём экстраполяции полученных значений времени релаксации в изотропной фазе в область нематической фазы в соответствии с выражением . Кривая экстраполяции показана пунктирной линией на рис. 7.

Выражение, связывающее фактор замедления g и высоту потенциального барьера q, впервые получили Мейер и Заупе, используя ряд упрощений. Позже в работе [21] была получена в строгом виде точная формула, дающая более высокие значения, чем решение Мейера и Заупе. Приближённая формула, близкая к точному решению выглядит следующим образом:

$$g = \frac{\tau}{\tau_0} = \frac{e^{\sigma} - 1}{\sigma}\left(\frac{2\sigma}{1+\sigma}\sqrt{\frac{\sigma}{\pi}} + 2^{-\sigma}\right)^{-1}. \tag{4}$$

Кроме того, авторами работы [21] определена зависимость параметра потенциального барьера σ и параметра ориентационного порядка S. Полученная ими аналитическая зависимость хорошо описывается приближённым выражением

$$\sigma \approx \frac{3S(5 - \pi S)}{2(1 - S^2)}. \tag{5}$$

Используя выражения (4) и (5), а также данные экстраполяции по выражению (3) нами рассчитаны значения параметра ориентационного порядка S. Полученная таким образом температурная зависимость $S(T)$ из диэлектрических измерений показана на рис. 8. Зависимости, полученные данным методом, близки к результатам прямых измерений параметра ориентационного порядка [22].

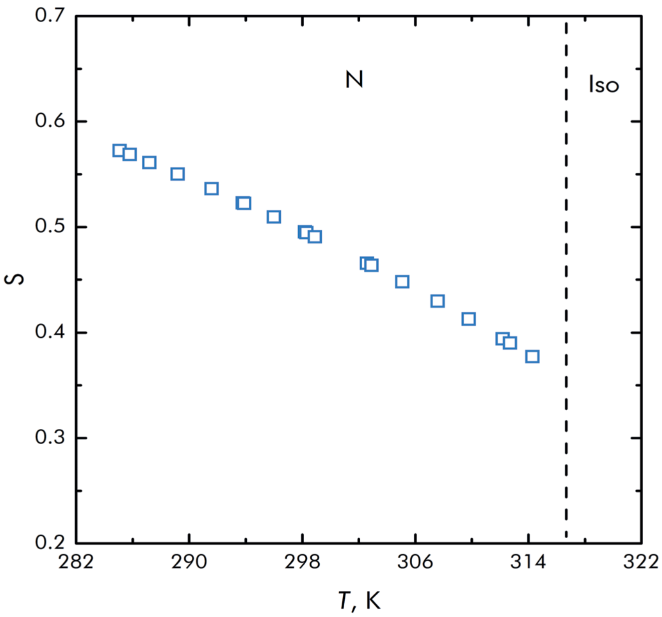

Рис. 8. Температурная зависимость параметра ориентационного порядка *S* для 6CHBT.

Заключение

В нашей работе используется модифицированный метод диэлектрической спектроскопии, позволяющий отделять паразитные вклады измерительной системы и существенно расширить доступный для ёмкостного метода частотный диапазон измерений. Благодаря этому удалось обнаружить дисперсию компонент диэлектрической проницаемости нематического жидкого кристалла 6CHBT, вызванную релаксационным процессом вращения молекул вокруг их короткой оси, как во всём диапазоне существования нематической фазы, так и в изотропной фазе, используя лишь один метод. Экспериментально получены частотные, температурные и угловые зависимости главных значений диэлектрической проницаемости исследуемого образца. На основе полученных данных и теоретической модели Майера и Заупе рассчитаны значения параметра ориентационного порядка в исследуемом температурном интервале. Показано хорошее согласие между экспериментальными данными и используемыми теоретическими моделями.

Высокоточный метод диэлектрической спектроскопии даёт возможность расчёта значений молекулярных параметров и подробного изучения процессов молекулярной динамики жидкокристаллических материалов, что необходимо при моделировании сложных систем на их основе, в частности, ориентационного воздействия наноматериалов и поверхностей на структуру жидких кристаллов [23–26]. Другое приложение полученные результаты могут найти при конструировании современных электрооптических и фотонных жидкокристаллических устройств [27–30].

Статья поступила в редакцию 25.12.2018 г.

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 18-07-00727 А, и Министерства образования и науки РФ, грант Президента Российской Федерации МК-3120.2018.9.

ACKNOWLEDGMENTS

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (Grant No. 18-07-00727 A), and the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (The RF President's Grants Council, State Support Young Russian Scientists Program, Grant No. MK-3120.2018.9).

ЛИТЕРАТУРА

1. Highly birefringent, low-loss liquid crystals for terahertz applications / Reuter M., Vieweg N., Fischer B. M., Mikulicz M., Koch M., Garbat K., Dąbrowski R. // APL Materials. 2013. Vol. 1. Iss. 1. P. 012107.
2. The design of liquid crystalline bistolane-based materials with extremely high birefringence / Arakawa Y., Kang S., Tsuji H., Watanabe J., Konishi G. I. // RSC Advances. 2016. Vol. 6. Iss. 95. P. 92845–92851.
3. Dielectric Properties of Compounds Creating Dual-Frequency Nematic Liquid Crystals / Mrukiewicz M., Perkowski P., Garbat K., Dąbrowski R., Parka J. // Acta Physica Polonica A. 2013. Vol. 124. No. 6. P. 940–945.
4. Dąbrowski R., Kula P., Herman J. High birefringence liquid crystals // Crystals. 2013. Vol. 3. Iss. 3. P. 443–482.
5. New fluorinated terphenyl isothiocyanate liquid crystal single compounds and mixtures / Parish A., Gauza S., Wu S. T., Dziaduszek J., Dąbrowski R. // Molecular Crystals and Liquid Crystals. 2008. Vol. 489. Iss. 1. P. 22–39.
6. Lee J. H., Liu D. N., Wu S. T. Introduction to flat panel displays. UK: John Wiley & Sons Ltd, 2008. 280 p.
7. Amide as Terminal Groups: Synthesis and Properties as New Tolane-Type Liquid Crystals / Zhang H., Hong F., Zhu D., Xia Z., Wu H., Wang H., Zeng Z. // Chinese Journal of Chemistry. 2015. Vol. 33. Iss. 7. P. 771–776.
8. Synthesis and properties of novel liquid crystalline materials with super high birefringence: styrene monomers bearing diacetylenes, naphthyl, and nitrogen-containing groups / Guan X. L., Zhang L. Y., Zhang Z. L., Shen Z., Chen X. F., Fan X. H., Zhou Q. F. // Tetrahedron. 2009. Vol. 65. Iss. 18. P. 3728–3732.
9. Low viscosity, high birefringence liquid crystalline compounds and mixtures / Dąbrowski R., Dziaduszek J., Ziółek A., Stolarz Z., Sasnouski G., Bezborodov V., Lapanik W., Gauza S., Wu S. // Opto-Electronics Review. 2007. Vol. 15. Iss. 1. P. 47–51.
10. Wen C. H., Gauza S., Wu S. T. Ultraviolet stability of liquid crystals containing cyano and isothiocyanato terminal groups // Liquid Crystals. 2004. Vol. 31. Iss. 11. P. 1479–1485.
11. Electrooptical properties of new type fluorinated phenyl-tolane isothiocyanate liquid crystal compounds / Peng Z., Wang Q., Liu Y., Mu Q., Cao Z., Xu H., Zhang P., Yang C., Yao L., Xuan L., Zhang Z. // Liquid Crystals. 2016. Vol. 43. Iss. 2. P. 276–284.
12. Catanescu C. O., Wu S. T., Chien L. C. Tailoring the physical properties of some high birefringence isothiocyanato-based liquid crystals // Liquid Crystals. 2004. Vol. 31. Iss. 4. P. 541–555.

13. Interaction potential in nematogenic 6CHBT / Bogoslovov R. B., Roland C. M., Czub J., Urban S. // The Journal of Physical Chemistry B. 2008. Vol. 112. Iss. 50. P. 16008–16011.
14. Barsoukov E., Macdonald J. R. Impedance spectroscopy: Theory, Experiment, and Applications. Hoboken: Wiley, 2018. 528 p.
15. Raju G. G. Dielectrics in electric fields: Tables, Atoms, and Molecules; second edition. Boca Raton: CRC Press, 2016. 751 p.
16. Parameters of LC molecule's movement measured by dielectric spectroscopy in wide temperature range / Chausov D. N., Kurilov A. D., Belyaev V. V., Kumar S. // Opto-Electronics Review. 2018. Vol. 26. Iss. 1. P. 44–49.
17. Electrode polarization in dielectric measurements: a review / Ishai P. B., Talary M. S., Caduff A., Levy E., Feldman Y. // Measurement Science and Technology. 2013. Vol. 24. No. 10. P. 102001.
18. Perkowski P. Dielectric spectroscopy of liquid crystals. Electrodes resistivity and connecting wires inductance influence on dielectric measurements // Opto-Electronics Review. 2012. Vol. 20. Iss. 1. P. 79–86.
19. Ahmed Z., Welch C., Mehl G. H. The design and investigation of the self-assembly of dimers with two nematic phases // RSC Advances. 2015. Vol. 5. Iss. 113. P. 93513–93521.
20. Garrappa R., Mainardi F., Guido M. Models of dielectric relaxation based on completely monotone functions // Fractional Calculus and Applied Analysis. 2016. Vol. 19. No. 5. P. 1105–1160.
21. Kalmykov Y. P., Coffey W. T. Analytical solutions for rotational diffusion in the mean field potential: application to the theory of dielectric relaxation in nematic liquid crystals // Liquid Crystals. 1998. Vol. 25. Iss. 3. P. 329–339.
22. Nematic order parameter as determined from dielectric relaxation data and other methods / Urban S., Gestblom B., Kuczyński W., Pawlus S., Wьrflinger A. // Physical Chemistry Chemical Physics. 2003. Iss. 5. P. 924–928.
23. Anchoring energy of liquid crystals / Dadivanyan A. K., Pashinina Y. M., Belyaev V. V., Chausov D. N., Noah O. V., Chigrinov V. G. // Molecular Crystals and Liquid Crystals. 2012. Vol. 560. Iss. 1. P. 108–114.
24. Моделирование ориентации молекул жидкокристаллического октилцианбифенила на поверхности кристаллов / Дадиванян А. К., Чаусов Д. Н., Пашинина Ю. М., Беляев В. В. // Жидкие кристаллы и их практическое использование. 2010. № 4 (34). С. 61–69.
25. Nanomesh aluminum films for LC alignment. Theoretical and experimental modeling / Dadivanyan A. K., Belyaev V. V., Chausov D. N., Stepanov A. A., Smirnov A. G., Tsybin A. G., Osipov M. A. // Molecular Crystals and Liquid Crystals. 2015. Vol. 611. Iss. 1. P. 117–122.
26. Molecules Orientation on Crystal Surfaces / Dadivanyan A. K., Pashinina Y. M., Chausov D. N., Belyaev V. V. Mesogen // Molecular Crystals and Liquid Crystals. 2011. Vol. 545. Iss. 1. P. 159–167.
27. Schadt M. Nematic liquid crystals and twisted-nematic LCDs // Liquid Crystals. 2015. Vol. 42. Iss. 5–6. P. 646–652.
28. Photosensitive self-assembling materials as functional dopants for organic photovoltaic cells / Bubnov A., Iwan A., Cigl M., Boharewicz B., Tazbir I., Wyjcik K., Sikora A., Hamplovб V. // RSC Advances. 2016. Vol. 6. Iss. 14. P. 11577–11590.
29. Srivastava A. K., Chigrinov V. G., Kwok H. S. Ferroelectric liquid crystals: Excellent tool for modern displays and photonics // Journal of the Society for Information Display. 2015. Vol. 23. Iss. 6. P. 253–272.

30. Программно-аппаратный комплекс оценки эффективности деятельности операторов / Чаусов Д. Н., Петухов И. В., Беляев В. В., Богачев А. К., Курасов П. А. // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2014. № 2. С. 80–86.

REFERENCES

1. Reuter M., Vieweg N., Fischer B. M., Mikulicz M., Koch M., Garbat K., Dąbrowski R. Highly birefringent, low-loss liquid crystals for terahertz applications. In: *APL Materials*, 2013, vol. 1, iss. 1, pp. 012107.
2. Arakawa Y., Kang S., Tsuji H., Watanabe J., Konishi G. I. The design of liquid crystalline bistolane-based materials with extremely high birefringence. In: *RSC Advances*, 2016, vol. 6, iss. 95, pp. 92845–92851.
3. Mrukiewicz M., Perkowski P., Garbat K., Dąbrowski R., Parka J. Dielectric Properties of Compounds Creating Dual-Frequency Nematic Liquid Crystals. In: *Acta Physica Polonica A*, 2013, vol. 124, no. 6, pp. 940–945.
4. Dąbrowski R., Kula P., Herman J. High birefringence liquid crystals. In: *Crystals*, 2013, vol. 3, iss. 3, pp. 443–482.
5. Parish A., Gauza S., Wu S. T., Dziaduszek J., Dąbrowski R. New fluorinated terphenyl isothiocyanate liquid crystal single compounds and mixtures. In: *Molecular Crystals and Liquid Crystals*, 2008, vol. 489, iss. 1, pp. 22–39.
6. Lee J. H., Liu D. N., Wu S. T. Introduction to flat panel displays. UK, John Wiley & Sons Ltd Publ., 2008. 280 p.
7. Zhang H., Hong F., Zhu D., Xia Z., Wu H., Wang H., Zeng Z. Amide as Terminal Groups: Synthesis and Properties as New Tolane-Type Liquid Crystals. In: *Chinese Journal of Chemistry*, 2015, vol. 33, iss. 7, pp. 771–776.
8. Guan X. L., Zhang L. Y., Zhang Z. L., Shen Z., Chen X. F., Fan X. H., Zhou Q. F. Synthesis and properties of novel liquid crystalline materials with super high birefringence: styrene monomers bearing diacetylenes, naphthyl, and nitrogen-containing groups. In: *Tetrahedron*, 2009, vol. 65, iss. 18, pp. 3728–3732.
9. Dąbrowski R., Dziaduszek J., Ziółek A., Stolarz Z., Sasnouski G., Bezborodov V., Lapanik W., Gauza S., Wu S. Low viscosity, high birefringence liquid crystalline compounds and mixtures. In: *Opto-Electronics Review*, 2007, vol. 15, iss. 1, pp. 47–51.
10. Wen C. H., Gauza S., Wu S. T. Ultraviolet stability of liquid crystals containing cyano and isothiocyanato terminal groups. In: *Liquid Crystals*, 2004, vol. 31, iss. 11, pp. 1479–1485.
11. Peng Z., Wang Q., Liu Y., Mu Q., Cao Z., Xu H., Zhang P., Yang C., Yao L., Xuan L., Zhang Z. Electrooptical properties of new type fluorinated phenyl-tolane isothiocyanate liquid crystal compounds. In: *Liquid Crystals*, 2016, vol. 43, iss. 2, pp. 276–284.
12. Catanescu C. O., Wu S. T., Chien L. C. Tailoring the physical properties of some high birefringence isothiocyanato-based liquid crystals. In: *Liquid Crystals*, 2004, vol. 31, iss. 4, pp. 541–555.
13. Bogoslovov R. B., Roland C. M., Czub J., Urban S. Interaction potential in nematogenic 6CHBT. In: *The Journal of Physical Chemistry B*, 2008, vol. 112, iss. 50, pp. 16008–16011.
14. Barsoukov E., Macdonald J. R. Impedance spectroscopy: Theory, Experiment, and Applications. Hoboken, Wiley Publ., 2018. 528 p.
15. Raju G. G. Dielectrics in electric fields: Tables, Atoms, and Molecules; second edition. Boca Raton, CRC Press Publ., 2016. 751 p.

16. Chausov D. N., Kurilov A. D., Belyaev V. V., Kumar S. Parameters of LC molecule's movement measured by dielectric spectroscopy in wide temperature range. In: *Opto-Electronics Review*, 2018, vol. 26, iss. 1, pp. 44–49.
17. Ishai P. B., Talary M. S., Caduff A., Levy E., Feldman Y. Electrode polarization in dielectric measurements: a review. In: *Measurement Science and Technology*, 2013, vol. 24, no. 10, pp. 102001.
18. Perkowski P. Dielectric spectroscopy of liquid crystals. Electrodes resistivity and connecting wires inductance influence on dielectric measurements. In: *Opto-Electronics Review*, 2012, vol. 20, iss. 1, pp. 79–86.
19. Ahmed Z., Welch C., Mehl G. H. The design and investigation of the self-assembly of dimers with two nematic phases. In: *RSC Advances*, 2015, vol. 5, iss. 113, pp. 93513–93521.
20. Garrappa R., Mainardi F., Guido M. Models of dielectric relaxation based on completely monotone functions. In: *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 2016, vol. 19, no. 5, pp. 1105–1160.
21. Kalmykov Y. P., Coffey W. T. Analytical solutions for rotational diffusion in the mean field potential: application to the theory of dielectric relaxation in nematic liquid crystals. In: *Liquid Crystals*, 1998, vol. 25, iss. 3, pp. 329–339.
22. Urban S., Gestblom B., Kuczyński W., Pawlus S., Wьrflinger A. Nematic order parameter as determined from dielectric relaxation data and other methods. In: *Physical Chemistry Chemical Physics*, 2003, iss. 5, pp. 924–928.
23. Dadivanyan A. K., Pashinina Y. M., Belyaev V. V., Chausov D. N., Noah O. V., Chigrinov V. G. Anchoring energy of liquid crystals. In: *Molecular Crystals and Liquid Crystals*, 2012, vol. 560, iss. 1, pp. 108–114.
24. Dadivanyan A. K., Chausov D. N., Pashinina Yu. M., Belyaev V. V. [Simulation of LC octylcyanobiphenyl molecules orientation on crystals surface]. In: *Zhidkie kristally i ikh prakticheskoe ispol'zovanie* [Liquid Crystals and their Application. Russian Journal], 2010, no. 4 (34), pp. 61–69.
25. Dadivanyan A. K., Belyaev V. V., Chausov D. N., Stepanov A. A., Smirnov A. G., Tsybin A. G., Osipov M. A. Nanomesh aluminum films for LC alignment. Theoretical and experimental modeling. In: *Molecular Crystals and Liquid Crystals*, 2015, vol. 611, iss. 1, pp. 117–122.
26. Dadivanyan A. K., Pashinina Y. M., Chausov D. N., Belyaev V. V. Mesogen Molecules Orientation on Crystal Surfaces. In: *Molecular Crystals and Liquid Crystals*, 2011, vol. 545, iss. 1, pp. 159–167.
27. Schadt M. Nematic liquid crystals and twisted-nematic LCDs. In: *Liquid Crystals*, 2015, vol. 42, iss. 5–6, pp. 646–652.
28. Bubnov A., Iwan A., Cigl M., Boharewicz B., Tazbir I., Wyjcik K., Sikora A., Hamplovб V. Photosensitive self-assembling materials as functional dopants for organic photovoltaic cells. In: *RSC Advances*, 2016, vol. 6, iss. 14, pp. 11577–11590.
29. Srivastava A. K., Chigrinov V. G., Kwok H. S. Ferroelectric liquid crystals: Excellent tool for modern displays and photonics. In: *Journal of the Society for Information Display*, 2015, vol. 23, iss. 6, pp. 253–272.
30. Chausov D. N., Petukhov I. V., Belyaev V. V., Bogachev A. K., Kurasov P. A. [Hardware-software complex for evaluation of the operator's activity]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-Matematika* [Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], 2014, no. 2, pp. 80–86.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Курилов Александр Дмитриевич – мастер производственного обучения учебно-научной лаборатории теоретической и прикладной нанотехнологии Московского государственного областного университета; аспирант кафедры высшей математики МИРЭА – Российского технологического университета;
e-mail: ad.kurilov@gmail.com

Волосникова Наталья Ильинична – студент Московского государственного областного университета;
e-mail: 27nata97@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Alexander D. Kurilov – master of industrial training at the Educational and Research Laboratory of Theoretical and Applied Nanotechnology, Moscow Region State University; postgraduate student at the Department of Higher Mathematics, MIREA – Russian Technological University;
e-mail: ad.kurilov@gmail.com

Natalia I. Volosnikova – student, Moscow Region State University;
e-mail: 27nata97@mail.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Курилов А. Д., Волосникова Н. И. Анизотропия диэлектрической проницаемости 1-(4-гексилциклогексил)-4-изотиоцианат-бензола // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2019. № 1. С. 83–96.
DOI: 10.18384-2310-7251-2019-1-83-96

FOR CITATION

Kurilov A. D., Volosnikova N. I. Anisotropy of dielectric permittivity in 1-(4-hexylcyclohexyl)-4-isothiocyanatobenzene In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*, 2019, no. 1, pp. 83–96.
DOI: 10.18384-2310-7251-2019-1-83-96

РАЗДЕЛ III.
ТЕОРИЯ И МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ И ВОСПИТАНИЯ

УДК 37.016:51
DOI: 10.18384-2310-7251-2019-1-97-106

МЕТОД ВСПОМОГАТЕЛЬНОЙ ОКРУЖНОСТИ В ПЛАНИМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ ЕГЭ

Казаков Н. А.[1], Кузнецова Т. И.[2]

[1] *Московский государственный областной университет*
141014, Московская область, г. Мытищи, ул. Веры Волошиной, д. 24, Российская Федерация

[2] *Институт русского языка и культуры Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова*
117218, г. Москва, ул. Кржижановского, д. 24/35, корп. 1,Российская Федерация

Аннотация. Одной из важнейших образовательных целей современной школы является подготовка учащихся к успешной сдаче выпускных экзаменов. В структуру выпускного экзамена ЕГЭ по математике профильного уровня входит геометрическая задача на доказательство повышенной сложности, требующая от обучающихся всестороннего знания планиметрии. Важнейшей особенностью является отсутствие единых алгоритмов решения таких задач, успех во многом зависит от накопленного учащимися опыта решения комбинированных планиметрических задач. Тем не менее, практика решения позволила выделить некоторые геометрические структуры, являющиеся вспомогательными ключами к поиску правильного решения. Одним из таких ключей стал метод вспомогательной окружности, который авторы хотели бы представить в рамках данной статьи. В статье описывается суть метода, условия его применения, рассмотрены задачи на доказательство, взятые из реальных контрольно-измерительных материалов экзамена, и приведены их решения в рамках описанного метода.

Ключевые слова: вспомогательная окружность, планиметрическая задача, доказательство, дополнительное построение, вписанный четырёхугольник, вписанные углы.

AUXILIARY CIRCLE METHOD IN PLANIMETRIC PROBLEMS OF THE UNIFIED STATE EXAM

***N. Kazakov*[1], *T. Kuznetsova*[2]**

[1] *Moscow Region State University*
ul. Very Voloshinoi 24, 141014 Mytishchi, Moscow Region, Russian Federation

[2] *Institute of the Russian Language and Culture, Lomonosov Moscow State University*
ul. Krzhizhanovskogo 24/35, stroenie 1, 117218 Moscow, Russian Federation

Abstract. One of the most important educational goals of modern school is to prepare students for the successful completion of final exams. The structure of the Unified Sate Exam in profile-level mathematics includes the proof of increased complexity for geometric problems, requiring students to have a comprehensive knowledge of planimetry. The most important feature is the lack of unified algorithms for solving such problems; the success largely depends on the students' experience in solving combined planimetric problems. Nevertheless, the practice of solution allowed us to identify some geometric structures that are auxiliary keys to finding the right solution. One of these keys was the auxiliary circle method, which is presented in this paper. The paper describes the essence of the method and the conditions of its application, examines the proofs for the problems taken from real test and measurement materials of the exam, and considers the solutions of the problems in the framework of the described method.

Keywords: auxiliary circle, planimetric problem, proof, additional construction, inscribed quadrilateral, inscribed angles.

Федеральный государственный образовательный стандарт среднего общего образования выделяет результаты сдачи государственной (итоговой) аттестации выпускников в качестве показателя уровня достижения планируемых результатов[1]. Одним из содержательных компонентов выпускного экзамена ЕГЭ профильного уровня по математике является геометрическая задача повышенной сложности, включённая в письменную часть под номером 16[2]. Спецификой данной задачи является следующее:

– задача состоит из двух частей, первая из которых посвящается доказательству геометрического высказывания или установлению справедливости приведённого геометрического соотношения;

– задача является комбинированной и, следовательно, требует от выпускника всестороннего и, более того, полного знания курса школьной геометрии.

Статистика сдачи выпускного экзамена по математике, как и практика работы со школьниками, показала, что решение данных задач представляет для обуча-

[1] Приказ Минобрнауки России от 17 мая 2012 года № 413 «Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта среднего общего образования» // Электронный фонд правовой и нормативно-технической документации. URL: http://docs.cntd.ru/document/902350579 (дата обращения: 9.11.2018).

[2] Спецификация контрольных измерительных материалов для проведения в 2019 году единого государственного экзамена по математике. Профильный уровень. М.: Федеральный институт педагогических измерений, 2019. 10 с.

ющихся особую сложность. Это обстоятельство можно связать со следующими причинами:

– в рамках урочной деятельности решению комбинированных задач повышенной сложности чаще всего уделяется недостаточное внимание;

– отсутствие строго выделенных приёмов в решении данного класса задач и отсутствие единой методической системы подготовки к решению задач;

– изучение курса планиметрии часто завершается уже в 9 классе, а в старших классах на первое место выходит подготовка к решению стереометрических задач; как следствие, материал забывается и теряет актуальность.

Сами по себе задачи на доказательство являются неотъемлемой частью курса планиметрии. Помимо образовательной, они имеют важную дидактическую функцию и связаны с развитием качеств мышления, творчеством и формированием универсальных учебных действий [1; 2]. Задача на доказательство представляется в сознании обучающегося как небольшое исследование, успех которого заключается в доказательстве требуемого суждения. Так, в рамках образовательного процесса задачи на доказательство являются широким полем для создания проблемных ситуаций и ситуаций успеха для каждого обучающегося [4].

В связи с выделенными проблемами и имеющимся опытом решения планиметрических задач целью данной статьи является демонстрация одного из сложившихся в учебной практике метода решения задач на доказательство – метода вспомогательной окружности.

Критерием применимости метода вспомогательной окружности служит возможность использования в задаче следующих утверждений:

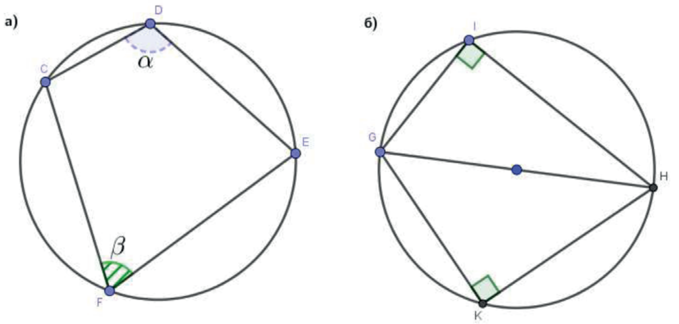

Рис. 1. Первое условие использования метода вспомогательной окружности: вписанный четырёхугольник.

– если у четырёхугольника сумма противоположных углов равна 180°, то около него можно описать окружность (рис. 1, а): $\alpha + \beta = 180°$;

– частным случаем является ситуация, в которой два противоположных угла равны 90° (рис. 1, б).

– если из двух различных точек, не лежащих на данном отрезке, концы этого отрезка видны под одним и тем же углом, то через данные точки и концы данного отрезка можно провести окружность (рис. 2, а);

– частным случаем является ситуация, когда концы отрезка видны под прямым углом (рис. 2, б).

Заметим, что рассмотренные частные случаи можно объединить в конструкцию с общим названием: «прямоугольные треугольники с общей гипотенузой». В данных условиях явно определяется положение центра вспомогательной окружности – он лежит в середине гипотенузы.

Чертёж, как модель, является ключевым элементом на пути решения задачи и, следовательно, его незаменимой частью, поэтому качество выполнения чертежа играет значимую роль. С целью повышения качества чертежа, классических средств, мы рекомендуем использовать интерактивные геометрические среды: их преимущества и возможности в построении чертежей показаны в работе [3].

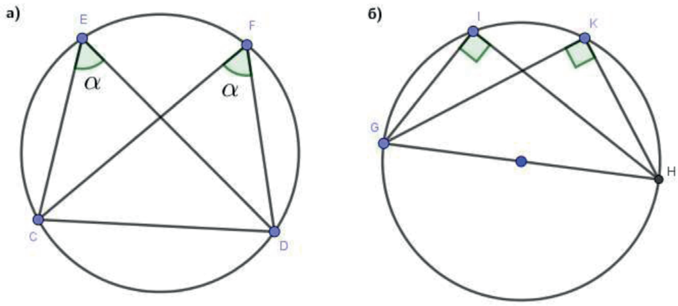

Рис. 2. Второе условие использования метода вспомогательной окружности: вписанные углы.

С методической точки зрения работа по решению задач может быть организована в несколько этапов.

1. Анализ условия («первый взгляд на задачу»). Ещё при анализе условия обучающиеся могут задумываться о возможности применить метод вспомогательной окружности. В качестве «сигналов» могут выступать следующие фразы: «опущены перпендикуляры…», «проведены высоты…», «стороны (или прямые) перпендикулярны…». Как правило, в задачах идёт речь о двух перпендикулярностях. В контексте условия речь также может идти о двух углах, сумма заданных градусных мер которых равна 180°.

2. Построение чертежа («конкретизация»). На данном этапе обучающиеся выполняют построение в соответствии с условием, одновременно конкретизируя и подводя под чертёж свои догадки относительно применения метода вспомогательной окружности. Педагог контролирует правильность выполнения чертежа.

3. Анализ чертежа и выбор метода. На данном этапе происходит выявление соответствующей ситуации (общей или частной из описанных выше), позволяющей обоснованно применить метод вспомогательной окружности. Педагог контролирует правильность выбора метода.

4. Обоснование метода. После выбора конкретного случая проводится его теоретическое обоснование, опираясь на общую возможность построения окружности по двум вписанным равным углам или же по вписанному в неё четырёхугольнику.

5. Дополнительное построение. Здесь обучающиеся непосредственно строят вспомогательную окружность.

6. Цепочка следствий. Окружность, как новый элемент позволяет расширить область возможных умозаключений, привнося видимость новых особенностей чертежа. Работая далее с углами в окружности в связи со всем чертежом задачи, выполняя поиск новых отношений, обучающиеся приходят к истинности доказываемого суждения. Педагог выполняет роль проводника в поиске новых отношений, наводит учащихся на ключевые моменты, создавая тем самым проблемность в процессе обучения.

Рассмотрим применение данного метода при решении задач ЕГЭ на доказательство, предлагаемых в открытом банке заданий[3], а также сборниках типовых задач [5]. К каждой задаче мы предложим два чертежа: первый, который строит сам обучающийся – после первичного понимания условия задачи, и второй, который получается из первого чертежа – после применения метода вспомогательной окружности.

Задача 1 (2017 г.) В трапеции *ABCD* боковая сторона *AB* перпендикулярна основаниям. Из точки *A* на сторону *CD* опустили перпендикуляр *AH*. Точка *E* принадлежит стороне *AB*, прямые *CD* и *CE* перпендикулярны. Докажите, что прямая *BH* параллельна прямой *ED*.

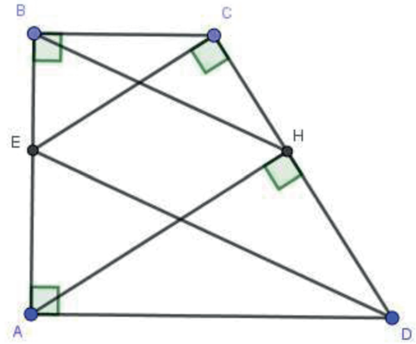

Рис. 3. Чертёж к условию задачи № 1.

<u>Доказательство</u>.

1) В четырёхугольнике *ABCH* два противолежащих угла – прямые, $\angle ABC + \angle AHC = 180°$, значит, четырёхугольник – вписанный, точки *A, B, C, H* лежат на одной окружности. Построим эту вспомогательную окружность. Её центр – середина *AC*.

2) $\angle ABH = \angle ACH$ как вписанные, опирающиеся на дугу $\overset{\frown}{AH}$.

3) Аналогично, четырёхугольник *AECD* – вписанный. Центр окружности – середина *ED*.

[3] См.: Открытый банк заданий ЕГЭ: Математика. Профильный уровень [Электронный ресурс] // Федеральный институт педагогических измерений : [сайт]. http://ege.fipi.ru/os11/xmodules/qprint/index.php?proj=AC437B34557F88EA4115D2F374B0A07B (дата обращения: 9.11.2018)

4) $\angle AED = \angle ACD$ как вписанные, опирающиеся на дугу $\overset{\frown}{AD}$.

5) Из пунктов 2 и 4 следует равенство: $\angle AED = \angle ABH$. Значит, равны соответственные углы при прямых BH, ED и секущей AB. Следовательно, $BH \parallel ED$, что и требовалось доказать.

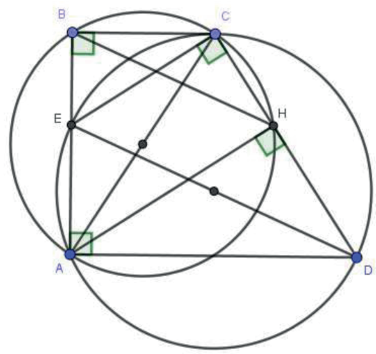

Рис. 4. Чертёж к решению задачи № 1.

Задача 2 (2018 г.) В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AK и CM. В треугольнике MKC из вершины K опущена высота KH на сторону MC. Аналогично, в треугольнике KMA из вершины M опущена высота ME на сторону AK. Докажите, что $EH \parallel AC$.

Доказательство.

1) ΔMEK, ΔMHK – прямоугольные, с общей гипотенузой MK. Значит, точки M, E, H, K – лежат на одной окружности, центр которой – середина MK.

2) $\angle MKE = \angle MHE$ как вписанные, опирающиеся на дугу $\overset{\frown}{ME}$.

3) ΔAMC, ΔAKC – прямоугольные, с общей гипотенузой AC. Значит, точки A, M, K, C – лежат на одной окружности, центр которой – середина AC.

4) $\angle AKM = \angle ACM$ как вписанные, опирающиеся на дугу $\overset{\frown}{AM}$.

5) Так как $\angle MKE = \angle MKA$, то из пунктов 2 и 4 следует равенство $\angle MHE = \angle MCA$, значит, равны соответственные углы при прямых EH, AC и секущей MC. Следовательно, $EH \parallel AC$, что и требовалось доказать.

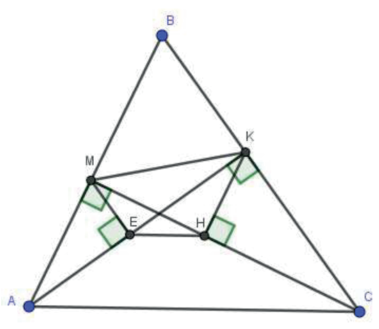

Рис. 5. Чертёж к условию задачи № 2.

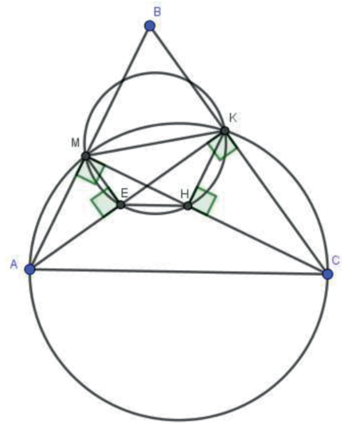

Рис. 6. Чертёж к решению задачи № 2.

Задача 3 (2018 г.) В равнобедренном треугольнике ABC, где угол B – тупой, на продолжение ВС опущена высота AH. Из точки H на стороны AB и AC опущены перпендикуляры HK и HM, соответственно. Докажите, что $AM = MK$.

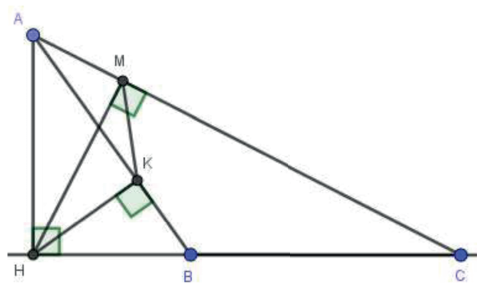

Рис. 7. Чертёж к условию задачи № 3.

Доказательство.

1) ΔAMH, ΔAKH – прямоугольные, с общей гипотенузой AH. Значит, точки A, M, K, H – лежат на одной окружности, центр которой – середина AH.

2) $\angle KAM = \angle KHM = \alpha$ как вписанные, опирающиеся на дугу $\overset{\frown}{MK}$.

3) $\angle BAC = \angle BCA = \alpha$ по свойству углов при основании равнобедренного треугольника ΔABC.

4) $\angle HBA = \angle BAC + \angle BCA = \alpha + \alpha = 2\alpha$ как внешний угол треугольника ΔABC.

5) Из прямоугольного треугольника ΔABH имеем: $\angle HAB = 90° - 2\alpha$.

6) Из прямоугольного треугольника ΔAKH имеем: $\angle AHK = 2\alpha$.

7) $\angle AHM = \angle AHK - \angle KHM = 2\alpha - \alpha = \alpha$.

8) $\angle AHM = \angle AKM = \alpha$ как вписанные, опирающиеся на дугу $\overset{\frown}{AM}$.

9) Из пунктов 2 и 8 имеем: $\angle KAM = \angle AKM = \alpha$, следовательно, ΔAMK – равнобедренный (по признаку), т. е. $AM = MK$ (по определению), что и требовалось доказать.

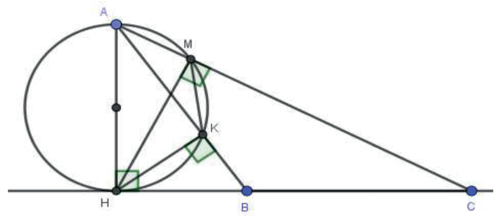

Рис. 8. Чертёж к решению задачи № 3.

Задача 4 (2019 г.) Диагональ *AC* прямоугольника *ABCD* с центром *O* образует со стороной *AB* угол 30°. Точка *E* лежит вне прямоугольника, причём угол *BEC* = 120°. Докажите равенство углов *CBE* и *COE*.

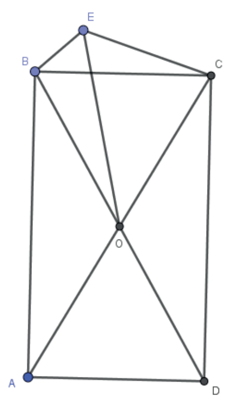

Рис. 9. Чертёж к условию задачи № 4.

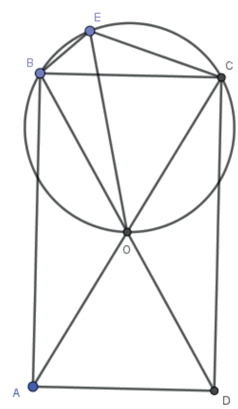

Рис. 10. Чертёж к решению задачи № 4.

Доказательство.

1) $\angle AHM = 30°$, $BO = OA$, тогда $\angle OBA = 30°$, $\angle OBC = 90° - 30° = 60°$. Значит, ΔBOC – равносторонний, поэтому $\angle BOC = 60°$.

2) Рассмотрим четырёхугольник *BECO*: $\angle BOC + \angle BEC = 120° + 60° = 180°$. Значит, около данного четырёхугольника можно описать окружность.

3) $\angle CBE = \angle COE$ как вписанные, опирающиеся на дугу $\overset{\frown}{EC}$, что и требовалось доказать.

Приведённые примеры показывают, что предлагаемая методика применения метода вспомогательной окружности при решении достаточно сложных задач на доказательство, сопровождаемая использованием современных интерактивных сред для построения соответствующего чертежа, выводит учебный процесс на боле высокий уровень, повышает математическую культуру обучаемых. Тот факт, что задачи взяты из предлагаемых на ЕГЭ, свидетельствует об актуальности рассматриваемой в настоящем исследовании проблемы.

Статья поступила в редакцию 03.12.2018 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Казаков Н. А. Роль мотивации в развитии субъектности обучающихся общеобразовательной организации [Электронный ресурс] // Наука на благо человечества – 2017: сборник научных статей магистрантов и бакалавров по итогам по итогам Международной научной конференции молодых учёных, аспирантов и студентов (МГОУ, г. Москва, 17–28 апреля 2017 г.). М.: ИИУ МГОУ, 2017. С. 294–298. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM)
2. Казаков Н. А., Забелина С. Б. Реализация творческого аспекта учебной деятельности обучающихся на уроках математики // Материалы ежегодной всероссийской научно-практической конференции преподавателей, аспирантов и студентов «Наука на благо человечества», посвящённой 85-летию МГОУ: Физико-математический факультет. М: ИИУ МГОУ, 2016. С. 35–41.
3. Казаков Н. А., Кузнецова Т. И. Из истории терминов «модель» и «моделирование». Часть 3. Чертежи – модели задач // Проблемы учебного процесса в инновационных школах: сборник научных трудов / под ред. О. В. Кузьмин. Вып. 21. Иркутск: Издательство Иркутского государственного университета, 2018. С. 54–58.
4. Катуржевская О. В. Методика преподавания математики: учебно-методическое пособие. Армавир: РИО АГПУ, 2016. 140 с.
5. ЕГЭ. Математика. Профильный уровень: типовые экзаменационные варианты: 36 вариантов / под ред. И. В. Ященко. М.: Издательство «Национальное образование». 2018. 256 с.

REFERENCES

1. Kazakov N. A. [The role of motivation in the development of subjectivity of students of general educational institutions]. In: *Nauka na blago chelovechestva – 2017: sbornik nauchnykh statei magistrantov i bakalavrov po itogam po itogam Mezhdunarodnoi nauchnoi konferentsii molodykh uchenykh, aspirantov i studentov (MGOU, g. Moskva, 17–28 aprelya 2017 g.)* [Science for the benefit of humanity – 2017: a collection of scientific papers of undergraduates and bachelors on the basis of the results of the International Scientific Conference of young scientists, graduate students and students (MRSU, Moscow, April 17–28, 2017)]. Moscow, MRSU Ed. off. Publ., 2017. pp. 294–298 (CD-ROM).
2. Kazakov N. A., Zabelina S. B. [The implementation of the creative aspect of learning activities in students at mathematics lessons]. In: *Materialy ezhegodnoi vserossiiskoi nauchno-prakticheskoi konferentsii prepodavatelei, aspirantov i studentov «Nauka na blago chelovechestva», posvyashchennoi 85-letiyu MGOU: Fiziko-matematicheskii fakul'tet* [The proceedings of the annual all-Russian scientific-practical conference of teachers, graduate students and students "Science for the benefit of humanity", dedicated to the 85th anniversary of MRSU: the Physics and Mathematics faculty]. Moscow, MRSU Ed. off. Publ., 2016. pp. 35–41.
3. Kazakov N. A., Kuznetsova T. I. [From the history of the terms "model" and "modeling". Part 3. Drawings – models of task]. In: Kuz'min O. V., chief ed. *Problemy uchebnogo protsessa v innovatsionnykh shkolakh: sbornik nauchnykh trudov. Vip. 21* [Problems of the educational process in innovative schools: a collection of scientific papers. Iss. 21]. Irkutsk, Irkutsk State University Publishing House, 2018. pp. 54–58.
4. Katurzhevskaya O. V. *Metodika prepodavaniya matematiki* [Methods of teaching mathematics]. Armavir, RIO ASPU Publ., 2016. 140 p.
5. Yashchenko I. V., ed. *EGE. Matematika. Profil'nyi uroven': tipovye ekzamenatsionnye varianty: 36 variantov* [Unified State Exam. Math. Profile level: typical exam tests: 36 options]. Moscow, "Natsional'noe obrazovanie" Publ., 2018. 256 p.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Казаков Никита Александрович – педагог дополнительного образования физико-математической школы № 2007, магистрант факультета психологии Московского государственного областного университета;
e-mail: alphan95@mail.ru

Кузнецова Татьяна Ивановна – доктор педагогических наук, профессор кафедры естественнонаучных и гуманитарных дисциплин Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова; академик Международной академии наук педагогического образования;
e-mail: kuzti45@gmail.com

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Nikita A. Kazakov – teacher of additional education at Physics and Mathematics School No. 2007, 1st year undergraduate student at the Department of Primary Education of the Faculty of Psychology, Moscow Region State University;
e-mail: alphan95@mail.ru

Tatiana I. Kuznetsova – Doctor in Pedagogical Sciences, Professor of the Department of Natural Sciences and Humanities, Lomonosov Moscow State University; academician of the International Teachers' Training Academy of Science;
e-mail: kuzti45@gmail.com

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Казаков Н. А., Кузнецова Т. И. Метод вспомогательной окружности в планиметрических задачах ЕГЭ // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2019. № 1. С. 97–106.
DOI: 10.18384-2310-7251-2019-1-97-106

FOR CITATION

Kazakov N. A., Kuznetsova T. I. Auxiliary circle method in planimetric problems of the Unified State Exam. In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics,* 2019, no. 1, pp. 97–106.
DOI: 10.18384-2310-7251-2019-1-97-106.

УДК 004.94
DOI: 10.18384-2310-7251-2019-1-107-118

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ОБЪЕКТА СЛОЖНОЙ НЕИЗМЕНЯЕМОЙ КОНФИГУРАЦИИ В ОГРАНИЧЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Акбаров Э. А., Калашников Е. В.
Московский государственный областной университет
141014, Московская область, г. Мытищи, ул. Веры Волошиной, д. 24
Российская Федерация

Аннотация. Анализируется задача перемещения и встраивания объекта неизменяемой конфигурации в ограниченном пространстве. Строится алгоритм и программа, имитирующая поведение такого объекта, на примере перемещения «коня» по шахматной доске. Находятся оптимальные пути перемещения объекта неизменяемой формы в нужную клетку доски и минимальное время для преодоления всего пути и встраивания в нужную точку.

Ключевые слова: имитационное моделирование, неизменяемая сложная конфигурация, ограниченное пространство, алгоритм перемещения.

SIMULATION OF MOTION OF AN OBJECT WITH IMMUTABLE COMPLEX CONFIGURATION IN A CONFINED SPACE

E. Akbarov, E. Kalashnikov
Moscow Region State University
ul. Very Voloshinoi 24, 141014 Mytishchi, Moscow Region, Russian Federation

Abstract. The problem of moving and embedding an object of immutable form in a confined space is analyzed. An algorithm and a program simulating the behavior of such an object are constructed on the example of moving a ‘knight’ on a chessboard. It is shown that there exist optimal ways to move an object of immutable form in the required chessboard cell and a minimum time to overcome all the way and embed it in the desired point.

Keywords: simulation modeling, immutable complex configuration, confined space, movement algorithm.

Введение

Задача транспорта объектов (тел) сложной неизменяемой конфигурации возникает в разных областях современной науки. В частности, в задачах редактирования ДНК молекулы [1; 2] необходимо доставлять в определённое место этой молекулы и в определённое время вполне определённого типа (определённой конфигурации и определённых размеров) молекулу белка. При этом транспортируемая молекула в процессе встраивания может поджиматься, вращаться, но, встроившись, принимает форму, допустимую молекулой ДНК. Другая такая проблема возникает в задачах выращивания (например, полупроводниковых) гетероструктур наномасштабов. Здесь важно, чтобы в процессе роста двумерной структуры в перемещающийся фронт вовремя подходили атомы определённой (электронной SP или SPD) конфигурации и могли встроиться в нужное место фронта для того, чтобы гарантировать требуемую зонную структуру [3]. Но приведённые задачи, кроме того, включают в себя ещё одну сложность. Она связана с тем, что в этих задачах необходимо перемещать и встраивать молекулы или атомы на ограниченном пространстве. Другими словами, выстраивание новой структуры (редактирование ДНК молекулы или рост гетероструктуры) связано с переносом молекулы или атома определённой конфигурации и размеров, имеющих неизменяемую (или мало изменяемую) форму в ограниченном пространстве, и их встраиванием в объекты с предписанной конфигурацией. Наконец, существует острая социальная проблема – адаптация личности в коллективе [4–7]. В этом случае вместо пространственной неизменяемой конфигурации возникает набор состояний или принципов отношения личности к окружению. Набор таких принципов для личности может служить аналогом неизменяемой конфигурации. Задачи сложные и требуют, на первый взгляд, всякий раз своего индивидуального подхода. Тем не менее, возможен общий подход к выше приведённой проблеме, основанный на имитационном моделировании.

Имитационное моделирование – это метод исследования, в ходе которого изучаемая система заменяется описывающей её моделью. Подобный подход является эффективным средством исследования сложных систем, параметры которых изменчивы во времени [8]. В данной работе рассматриваются системы, основным аспектом поведения в которых является перемещение в пространстве одного объекта, иные аспекты не рассматриваются.

Перемещение объекта сложной неизменяемой конфигурации в ограниченном пространстве – проблема, заключающаяся в том, что для расчёта наискорейшего достижения объектом заданной точки необходимо, помимо ограничений пространства, учитывать строго заданную конфигурацию объекта, накладывающую дополнительные ограничения на возможности его перемещения [9].

Моделирование объекта сложной неизменяемой конфигурации в ограниченном пространстве (ОСНКОП) будет рассмотрено на примере движения шахматного коня по шахматной доске из одной заданной точки (клетки) в другую. Доска выступит ограниченным пространством, а необходимость делать ход конём буквой «Г» – его неизменяемой конфигурацией. Задача перемещение коня по доске в заданную точку (клетку) оказывается более сложной задачей по сравнению с вышеперечисленными. Поскольку здесь рассматривается «жёсткая» двумерная задача: конь (его буква «Г») не может быть поджат, перевёрнут вокруг своей оси – то это сложная двумерная, неизменяемая фигура перемещается в ограниченном двумерном пространстве в заданную его клетку [10; 11]. Таким образом, задачей данной работы является исследование перемещения двумерного объекта сложной неизменяемой конфигурации из одной точки (клетки) в другую, предписанную точку (клетку) ограниченного двумерного пространства.

1.1. Постановка задачи

Для поиска решения поставленной задачи создаём программу, имитирующую движение коня по доске на языке программирования PascalABC.

Алгоритм действий:

Пользователем вводятся координаты начальной и конечной точек маршрута, а также координаты клетки, занятой другой фигурой:

- конь движется по доске, совершая ходы в случайном порядке;
- дойдя до указанной клетки, конь останавливается;
- конь не ходит на занятую другой фигурой клетку.

Функционал программы: вывод на экран условного шахматного поля с отметками точек, координаты которых вводит пользователь. Построение маршрута движения коня по доске.

Для написания кода используется PascalABC.Net.

1.2. Маршрут движения шахматного коня

Конь может пойти на одно из полей, ближайших к тому, на котором он стоит, но не на той же самой горизонтали, вертикали или диагонали, то есть он ходит кириллической буквой «Г» (или латинской «L»).

Всего конь имеет 8 различных вариантов хода [12] (рис. 1.2.1).

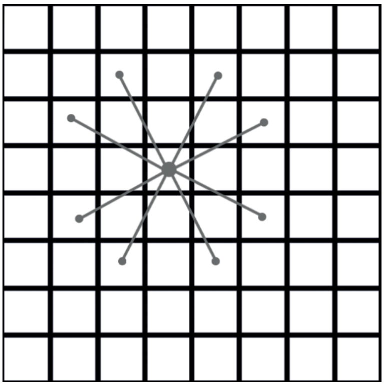

Рис. 1.2.1. Доступные шахматному коню варианты движения.

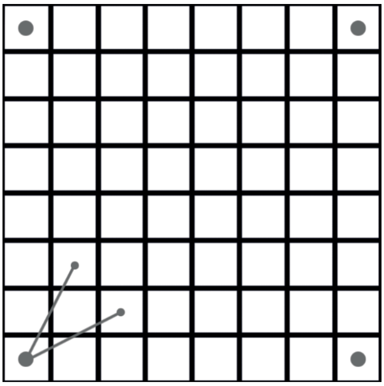

Рис. 1.2.2. Клетки с двумя вариантами движения.

Из угловых клеток ему доступно всего два варианта движения (рис. 1.2.2.).

Из клеток, прилегающих к одной из сторон и отстоящих от другой на одну клетку, – три варианта движения (рис. 1.2.3).

Из клеток, отступающих от обеих сторон на одну клетку, – четыре варианта движения (рис. 1.2.4).

Из клеток, отступающих от одной стороны на одну клетку и от другой на две, – шесть вариантов движения (рис. 1.2.5).

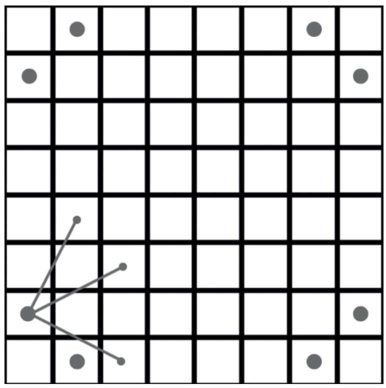

Рис. 1.2.3. Клетки с тремя вариантами движения.

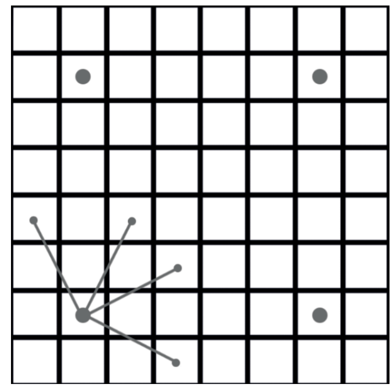

Рис. 1.2.4. Клетки с четырьмя вариантами движения.

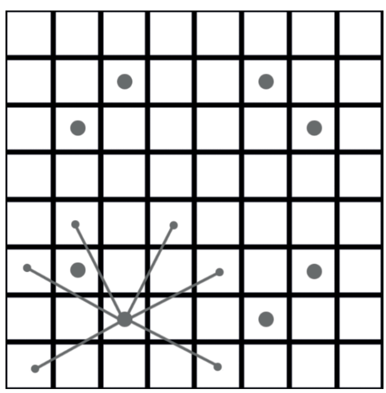

Рис. 1.2.5. Клетки с шестью вариантами движения.

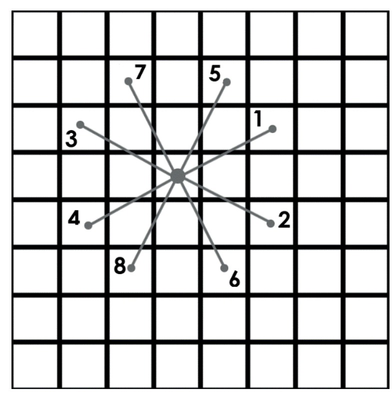

Рис. 2.1.1. Обозначение соотношений ходов коня.

Из всех остальных клеток доски доступно восемь вариантов движения.

2.1. Постановка условий движения

1. Движение коня происходит в случайном порядке, выбирается один из восьми вариантов движения.

2. Конь не должен выходить за границы «доски» (8x8 клеток).

3. Конь не может двигаться назад на ту клетку, с которой только что пришёл, чтобы избежать топтания на месте [13]. Соотношения ходов на одной линии (рис. 2.1.1):

1. 1-4, 4-1
2. 2-3, 3-2
3. 5-8, 8-5
4. 6-7, 7-6

4. Конь не должен останавливаться на клетке, которая занята другой фигурой. Если выбранная случайно клетка оказалась занята, конь выбирает новую.

5. Если необходимая клетка находится в пределах досягаемости одного хода, фигура сразу переходит на неё.

2.2. Написание кода программы

1. Подключается модуль *graphABC*, задаются все необходимые переменные.

```
usesgraphABC;
vari, n, m, wst, hst, lm:integer;
xS, yS, xs1, ys1, xs2, ys2, xs3, ys3, a, ci: real;
check: boolean;
```

2. Задаются размеры окна и одной клетки доски, создаётся само окно и его разметка.

```
begin
randomize;
wst:=600;
hst:=wst;
SetWindowSize(wst, hst);
setpencolor(clblack);
setpenwidth (1);
xS:=0;
yS:=0;
a:=wst/8;
ci:=0;
fori := 1 to 9 do
begin
line (round(xS), round(yS+(a*(i-1))), round(xS+a*8), round(yS+(a*(i-1))));
line (round(xS+a*(i-1)), round(yS), round(xS+a*(i-1)), round(yS+a*8));
end;
```

3. Пользователем вводятся координаты начальной и конечной точек, а также координаты занятой клетки. Программа не продолжит выполнение, пока введённые координаты не будут больше или равны 1 и меньше или равны 8. Результаты отображаются в созданном ранее окне.

```
setpencolor(clred);
setpenwidth (12);
repeat
writeln (‘Введите координаты начальной точки’);
readln (n, m);
until (n>=1) and (n<=8) and (m>=1) and (m<=8);
xs1:=a*n-a/2;
ys1:=yS+a*m-a/2;
```

```
Circle(round(xs1), round(yS1), 5);
Moveto(round(xs1), round(yS1));
setpencolor (clblue);
repeat
writeln ('Введите координаты конечной точки');
readln (n, m);
until (n>=1) and (n<=8) and (m>=1) and (m<=8);
xs2:=a*n-a/2;
ys2:=a*m-a/2;
Circle(round(xs2), round(yS2), 5);
repeat
writeln ('Введите координаты занятой клетки');
readln (n, m);
until (n>=1) and (n<=8) and (m>=1) and (m<=8);
xs3:=xS+a*n-a/2;
ys3:=yS+a*m-a/2;
FloodFill(round(xs3), round(ys3), clblue);
setpencolor(clblack);
setpenwidth (1);
```

4. Для построения пути фигуры используется цикл repeat, который будет выполняться до тех пор, пока координаты положения фигуры *(xs1,ys1)* не будут равны координатам конечной точки *(xs2,ys2)*. Задаётся значение переменной типа *boolean* для преждевременного выхода из цикла *while* при значении *false*. Для выбора одного из восьми возможных вариантов движения задаётся случайное значение переменной *lm*. В зависимости от её значения рассматривается один из условных операторов *if*.

Внутри каждого из операторов *if* задаётся дополнительный условный оператор для проверки выхода за границы поля, возвращения назад (*ci* = номер из соотношения в п. 2.1.3) и повторения хода (*ci=lm*). Если одно из этих условий выполняется – происходит выход из цикла. В противном случае задаются новые координаты (*xs1, ys1*) и *ci* присваивается значение *lm*.

```
repeat
check:=false;
while check = false do
begin
lm:=random(1,8);

if lm=1 then
begin
if ((xs1+a*2)>600) or ((ys1-a*1)<0) or (((xs1+a*2)=xs3) and ((ys1-a*1)=ys3)) or
(ci=4) or (ci=1) then
check:=false
```

```
else
begin
xs1:=xs1+a*2;
ys1:=ys1-a*1;
check:=true;
end;
end
else

if lm=2 then
begin
if ((xs1+a*2)>wst) or ((ys1+a*1)>hst) or (((xs1+a*2)=xs3) and ((ys1+a*1)=ys3))
or (ci=3) or (ci=2) then
check:=false
else
begin
xs1:=xs1+a*2;
ys1:=ys1+a*1;
check:=true;
end;
end
else

if lm=3 then
begin
if ((xs1-a*2)<0) or ((ys1-a*1)<0) or (((xs1-a*2)=xs3) and ((ys1-a*1)=ys3)) or
(ci=2) or (ci=3) then
check:=false
else
begin
xs1:=xs1-a*2;
ys1:=ys1-a*1;
check:=true;
end;
end
else

if lm=4 then
begin
if ((xs1-a*2)<0) or ((ys1+a*1)>hst) or (((xs1-a*2)=xs3) and ((ys1+a*1)=ys3)) or
(ci=1) or (ci=4) then
check:=false
else
begin
```

```
xs1:=xs1-a*2;
ys1:=ys1+a*1;
check:=true;
end;
end
else

if lm=5 then
begin
if ((xs1+a*1)>wst) or ((ys1-a*2)<0) or (((xs1+a*1)=xs3) and ((ys1-a*2)=ys3)) or
(ci=8) or (ci=5) then
check:=false
else
begin
xs1:=xs1+a*1;
ys1:=ys1-a*2;
check:=true;
end;
end
else

if lm=6 then
begin
if ((xs1+a*1)>wst) or ((ys1+a*2)>hst) or (((xs1+a*1)=xs3) and ((ys1+a*2)=ys3))
or (ci=7) or (ci=6) then
check:=false
else
begin
xs1:=xs1+a*1;
ys1:=ys1+a*2;
check:=true;
end;
end
else

if lm=7 then
begin
if ((xs1-a*1)<0) or ((ys1-a*2)<0) or (((xs1-a*1)=xs3) and ((ys1-a*2)=ys3)) or
(ci=6) or (ci=7) then
check:=false
else
begin
xs1:=xs1-a*1;
ys1:=ys1-a*2;
```

```
check:=true;
end;
end
else

if lm=8 then
begin
if ((xs1-a*1)<0) or ((ys1+a*2)>hst) or (((xs1-a*1)=xs3) and ((ys1+a*2)=ys3)) or
(ci=5) or (ci=8) then
check:=false
else
begin
xs1:=xs1-a*1;
ys1:=ys1+a*2;
check:=true;
end;
end;
end;
ci:=lm;
```

5. Происходит движение в точку с указанными координатами. Для наглядности в конце пути рисуется небольшая точка.

```
lineto(round(xS1), round(yS1));
moveto(round(xS1), round(yS1));
Circle(round(xS1), round(yS1), 3);
```

6. Проводится проверка нахождения конечной точки в пределах одного хода от последней точки пути. Если условие выполняется – фигура сразу перемещается на конечную точку.

```
if ((xs1+a*2=xs2) and (ys1-a=ys2)) or ((xs1+a*2=xs2) and (ys1+a=ys2)) or
((xs1-a*2=xs2) and (ys1-a=ys2)) or ((xs1-a*2=xs2) and (ys1+a=ys2)) or
((xs1+a=xs2) and (ys1-a*2=ys2)) or ((xs1+a=xs2) and (ys1+a*2=ys2)) or
((xs1-a=xs2) and (ys1-a*2=ys2)) or ((xs1-a=xs2) and (ys1+a*2=ys2)) then
begin
lineto(round(xS2), round(yS2));
xs1:=xs2;
ys1:=ys2;
end;

until (xs1=xs2) and (ys1=ys2);
end.
```

2.3. Анализ результатов

Приведённая задача позволяет понять принцип перемещения тела неизменяемой формы из одной заданной точки ограниченного пространства в другую, предписанную точку.

Для получения кратчайшего из всех возможных путей следует выполнить основной цикл программы число раз, равное количеству возможных комбинаций путей на шахматной доске, добавив счётчик совершенных ходов. После выполнения вывести на экран именно этот вариант.

Выводы

В данной работе был рассмотрен способ моделирования перемещения объекта сложной неизменяемой конфигурации в ограниченном пространстве на примере построения маршрута движения шахматного коня по доске. Такой маршрут предполагает переход из одной клетки доски в предписанную клетку при учёте, что на пути перемещения могут существовать препятствия (желаемые для «хода коня» клетки заняты). Это позволяет оценить минимальное время для прохождения маршрута и встраивания «коня» в предписанную клетку (конфигурацию). Это минимальное время является временем, контролирующим весь сложный процесс перемещения и встраивания объекта неизменяемой конфигурации в предписанную точку ограниченного пространства.

Полученная программа учитывает условия перемещения фигуры, а также не даёт ей выйти за пределы обозначенного поля 8x8 клеток.

Рассмотренный подход ориентирован не только на анализ поведения объекта сложной конфигурации в пространстве. Он позволяет анализировать поведение системы со сложным набором состояний в пространстве случайных событий и может быть использован при построении моделей других систем, основным аспектом поведения которых является встраивание объекта (или набора связанных состояний) в заранее предписанные структуры.

Статья поступила в редакцию 17.01.2019 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. An Introduction to Molecular Biology/DNA the unit of life [Электронный ресурс] // Wikibooks : [сайт]. URL: https://en.wikibooks.org/wiki/An_Introduction_to_Molecular_Biology/DNA_the_unit_of_life (дата обращения: 20.12.2018).
2. Xiaoyu Chen, Manuel A.F.V. Gonsalves. DNA, RNA, and Protein Tools for Editing the Genetic Information in Human Cells // iScience. 2018. Vol. 6. P. 247–263.
3. Калашников Е. В. Рост и физические свойства кристаллов. СПб.: Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, 2013. 117 с.
4. Кон И. С. Постоянство и изменчивость личности // Психологический журнал. 1987. Т. 8. № 4. С. 126–136.
5. Крайг Г. Психология развития. СПб.: Питер, 2000. 992 с.
6. Boon C., Den Hartog D. N. Human resource management, person-environment fit, and trust // Trust and human resource management. 2011. P. 109–121

7. Ben C. H. Kuo. Coping, acculturation, and psychological adaptation among migrants: a theoretical and empirical review and synthesis of the literature // Health Psychology and Behavioral Medicine. 2014. Vol. 2. No. 1. P. 16–33.
8. Шишаев М. Г., Елисеенко С. Ю. Имитационная модель пространственных перемещений объектов с квазислучайными параметрами маршрутов // Труды Кольского научного центра РАН. 2012. № 6(13). С. 106–114.
9. Космачев С. Н. Автоматизированные информационные системы [Электронный ресурс] // Пятифан : [сайт]. URL: http://5fan.ru/wievjob.php?id=39990 (дата обращения: 20.12.2018).
10. Lee C. Y. An Algorithm for Path Connections and Its Applications // IRE Transactions on Electronic Computers. 1961. Vol. EC-10. Iss. 3. P. 346–365.
11. Maze Router: Lee Algorithm [Электронный ресурс]. URL: http://users.eecs.northwestern.edu/~haizhou/357/lec6.pdf (дата обращения: 20.12.2018).
12. Loebbing M., Wegener I. The Number of Knight's Tours Equals 33,439,123,484,294 – Counting with Binary Decision Diagrams // The Electronic Journal of Combinatorics. 1996. Vol. 3. Iss. 1. P. 36–40.
13. Parberry I. An Efficient Algorithm for the Knight's Tour Problem // Discrete Applied Mathematics. 1997. Vol. 73. Iss. 3. P. 251–260.

REFERENCES

1. An Introduction to Molecular Biology/DNA the unit of life. In: *Wikibooks*. Available at: https://en.wikibooks.org/wiki/An_Introduction_to_Molecular_Biology/DNA_the_unit_of_life (accessed: 20.12.2018).
2. Chen X., Gonзalves M.A.F.V. DNA, RNA, and protein tools for editing the genetic information in human cells. In: *iScience*, 2018, vol. 6, pp. 247–263.
3. Kalashnikov E. V. *Rost i fizicheskie svoistva kristallov* [Growth and physical properties of crystals]. St. Petersburg, Saint-Petersburg National Research University of Information Technologies, Mechanics and Optics Publ., 2013. 117 p.
4. Kon I. S. [Constancy and changeability of personality]. In: *Psikhologicheskii zhurnal* [Psychological Journal], 1987, vol. 8, no. 4, pp. 126–136.
5. Craig G. J. Human Development. New York, Prentice Hall, 1992, 674 p.
6. Boon C., Den Hartog D. N. Human resource management, person-environment fit, and trust. In: *Trust and human resource management*, 2011, pp. 109–121
7. Ben C. H. Kuo. Coping, acculturation, and psychological adaptation among migrants: a theoretical and empirical review and synthesis of the literature. In: *Health Psychology and Behavioral Medicine*, 2014, vol. 2, no. 1, pp. 16–33.
8. Shishaev M. G., Eliseenko S. Yu. [Simulation model of spatial object movements with quasi-random routes]. In: *Trudy Kol'skogo nauchnogo tsentra RAN* [Works of the Kola Scientific Center of the Russian Academy of Sciences], 2012, no. 6 (13), pp. 106–114.
9. Kosmachev S. N. [Automated information systems]. In: *Pyatifan* [Pyatifan]. Available at: http://5fan.ru/wievjob.php?id=39990 (accessed: 20.12.2018).
10. Lee C. Y. An Algorithm for Path Connections and Its Applications. In: *IRE Transactions on Electronic Computers*, 1961, vol. EC-10, iss. 3, pp. 346–365.
11. Maze Router: Lee Algorithm. Available at: http://users.eecs.northwestern.edu/~haizhou/357/lec6.pdf (accessed: 20.12.2018).
12. Loebbing M., Wegener I. The Number of Knight's Tours Equals 33,439,123,484,294 – Counting with Binary Decision Diagrams. In: *The Electronic Journal of Combinatorics*, 1996, vol. 3, iss. 1, pp. 36–40.

13. Parberry I. An Efficient Algorithm for the Knight's Tour Problem. In: *Discrete Applied Mathematics*, 1997, vol. 73, iss. 3, pp. 251–260.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Акбаров Эльдар Алижонович – студент физико-математического факультета Московского государственного областного университета;
e-mail: melancholywaterhole@gmail.com

Калашников Евгений Владимирович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительной математики и методики преподавания информатики Московского государственного областного университета;
e-mail: ekevkalashnikov1@gmail.com

INFORMATIONABOUTTHEAUTHORS

Eldar A. Akbarov – student of the Faculty of Physics and Mathematics, Moscow Region State University;
e-mail: melancholywaterhole@gmail.com

Evgenii V. Kalashnikov – Doctor in Physical and Mathematical Sciences, Professor at the Department of Computational Mathematics and Informatics Teaching Methods, Moscow Region State University;
e-mail: ekevkalashnikov1@gmail.com

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Акбаров Э. А., Калашников Е. В. Моделирование перемещения объекта сложной неизменяемой конфигурации в ограниченном пространстве // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2019. № 1. С. 107–118.
DOI: 10.18384-2310-7251-2019-1-107-118

FOR CITATION

Akbarov E. A, Kalashnikov E. V. Simulation of motion of an object with immutable complex configuration in a confined space. In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*, 2019, no. 1, pp. 107–118.
DOI: 10.18384-2310-7251-2019-1-107-118

ВЕСТНИК
МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
ОБЛАСТНОГО УНИВЕРСИТЕТА

Научный журнал «Вестник Московского государственного областного университета» основан в 1998 г. Сегодня выпускается десять журналов (предметных серий) "Вестника Московского государственного областного университета": «История и политические науки», «Экономика», «Юриспруденция», «Философские науки», «Естественные науки», «Русская филология», «Физика-математика», «Лингвистика», «Психологические науки», «Педагогика». Журналы включены в составленный Высшей аттестационной комиссией Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание учёной степени кандидата наук, на соискание учёной степени доктора наук по наукам, соответствующим названию серии. Журнал включён в базу данных Российского индекса научного цитирования (РИНЦ).

Печатная версия журнала зарегистрирована в Федеральной службе по надзору за соблюдением законодательства в сфере массовых коммуникаций и охране культурного наследия. Полнотекстовая версия журнала доступна в Интернете на платформах Научных электронных библиотек (www.elibrary.ru, cyberleninka.ru), а также на сайте журнала (www.vestnik-mgou.ru).

ВЕСТНИК
МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ОБЛАСТНОГО УНИВЕРСИТЕТА

СЕРИЯ: ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА
2019. № 1

Над номером работали:

Литературный редактор М.С. Тарасова
Переводчик И.А. Улиткин
Корректор М.С. Тарасова
Компьютерная верстка Н.Н. Жильцов

Отдел по изданию научного журнала
«Вестник Московского государственного областного университета»
Информационно-издательского управления МГОУ
105005, г. Москва, ул. Радио, д. 10А, офис 98
тел. (495) 723-56-31; (495) 780-09-42 (доб. 6101)
e-mail: vest_mgou@mail.ru
сайт: www.vestnik-mgou.ru

Формат 70x108/$_{16}$. Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура «Minion Pro».
Тираж 500 экз. Уч.-изд. л. 6,75, усл. п. л. 7,5.
Подписано в печать: 22.03.2019. Дата выхода в свет: 25.03.2019. Заказ № 2019/03-04.
Отпечатано в ИИУ МГОУ
105005, г. Москва, ул. Радио, 10А