ISSN 2072-8387 (print)
ISSN 2310-7251 (online)

Вестник

Московского государственного областного университета

Серия Физика-математика

НЕНЬЮТОНОВСКОЕ ТЕЧЕНИЕ НАНОЖИДКОСТИ НА ОСНОВЕ ОКСИДА ТИТАНА

2022/№ 4

ВЕСТНИК
МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
ОБЛАСТНОГО УНИВЕРСИТЕТА

ISSN 2072-8387 (print) 2022 / № 4 ISSN 2310-7251 (online)

серия
ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА

Рецензируемый научный журнал. Основан в 1998 г.

Журнал «Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика» включён в «Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание учёной степени кандидата наук, на соискание учёной степени доктора наук» Высшей аттестационной комиссии при Министерстве науки и высшего образования Российской Федерации (См.: Список журналов на сайте ВАК при Минобрнауки России) по следующим научным специальностям: 1.3.3. – Теоретическая физика (физико-математические науки); 1.3.8. – Физика конденсированного состояния (физико-математические науки).

The peer-reviewed journal was founded in 1998

«Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics» is included by the Supreme Certifying Commission of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation into "the List of reviewed academic journals and periodicals recommended for publishing in corresponding series basic research thesis results for a Ph.D. Candidate or Doctorate Degree" (See: the online List of journals at the site of the Supreme Certifying Commission of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation) on the following scientific specialities: 1.3.3. – Theoretical physics (physical-mathematical sciences); 1.3.8. – Physics of the condensed state (physical-mathematical sciences) (See: the online List of journals at the site of the Supreme Certifying Commission of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation).

ISSN 2072-8387 (print) 2022 / № 4 ISSN 2310-7251 (online)

series
PHYSICS AND MATHEMATICS

BULLETIN OF THE MOSCOW REGION
STATE UNIVERSITY

Учредитель журнала
«Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика»
Государственное образовательное учреждение высшего образования Московской области
Московский государственный областной университет
Выходит 4 раза в год

ISSN 2072-8387 (print)
ISSN 2310-7251 (online)

Рецензируемый научный журнал «Вестник московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика» публикует статьи по математическим проблемам термодинамики, кинетики и статистической физики; теории конденсированного состояния классических и квантовых, макроскопических и микроскопических систем; изучению различных состояний вещества и физических явлений в них; статистической физике и кинетической теории равновесных и неравновесных систем; теоретическому и экспериментальному исследованию физических свойств неупорядоченных неорганических систем; изучению экспериментального состояния конденсированных веществ и фазовых переходов в них. Журнал адресован ученым, докторантам, аспирантам и всем, интересующимся достижениями физико-математических наук.

Журнал «Вестник Московского государственного областного университета. Серия «Физика-математика» зарегистрирован в Федеральной службе по надзору за соблюдением законодательства в сфере массовых коммуникаций и охране культурного наследия. Регистрационное свидетельство ПИ № ФС 77-73344.

Индекс серии «Физика-математика» по Объединенному каталогу «Пресса России» 40723

Журнал включён в базу данных Российского индекса научного цитирования (РИНЦ), имеет полнотекстовую сетевую версию в Интернете на платформе Научной электронной библиотеки (www.elibrary.ru), с августа 2017 г. на платформе Научной электронной библиотеки «КиберЛенинка» (www.cyberleninka.ru), а также на сайте Московского государственного областного университета (www.vestnik-mgou.ru).

Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. – 2022. – № 4. – 68 с.

Адрес редакции:
г. Москва, ул. Радио, д.10А, офис 98
тел.: (495) 780-09-42 (доб. 6101)
e-mail: info@vestnik-mgou.ru; сайты: www.physmathmgou.ru; www.vestnik-mgou.ru

Founder of journal
«Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics»
Moscow Region State University

Issued 4 times a year

ISSN 2072-8387 (print)
ISSN 2310-7251 (online)

The reviewed scientific journal “Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics” publishes articles on mathematical problems of thermodynamics, kinetics and statistical physics; the theory of the condensed state of classical and quantum, macroscopic and microscopic systems; the study of various states of substance and physical phenomena in them; statistical physics and the kinetic theory of equilibrium and non-equilibrium systems; theoretical and experimental research of physical features of disordered inorganic systems; the study of the experimental state of condensed substances and phase transitions in them. The journal is addressed to scientists, doctoral students, PhD students and everyone interested in the achievements of physical and mathematical sciences.

The series “Physics and Mathematics” of the Bulletin of the Moscow Region State University is registered in Federal service on supervision of legislation observance in sphere of mass communications and cultural heritage protection. The registration certificate ПИ № ФС 77 – 73344.

Index series «Physics and Mathematics» according to the union catalog «Press of Russia» 40723

The journal is included into the database of the Russian Science Citation Index, has a full text network version on the Internet on the platform of Scientific Electronic Library (www.elibrary.ru), and from August 2017 on the platform of the Scientific Electronic Library “CyberLeninka” (www.cyberleninka.ru), as well as at the site of the Moscow Region State University (www.vestnik-mgou.ru)

Bulletin of the Moscow State Regional University. Series: Physics and Mathematics. – 2022. – № 4. – 68 p.

The Editorial Board address:
10A Radio st., office 98, Moscow, Russia
Phone: (495) 780-09-42 (add. 6101)
e-mail: info@vestnik-mgou.ru; sites: www.physmathmgou.ru; www.vestnik-mgou.ru

СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКА

НАУЧНАЯ ЖИЗНЬ

CONTENTS

PHYSICS

ACADEMIC LIFE

ФИЗИКА

УДК 541. 182. 022: 532. 135
DOI: 10.18384/2310-7251-2022-4-6-16

НЕНЬЮТОНОВСКОЕ ТЕЧЕНИЕ НАНОЖИДКОСТИ НА ОСНОВЕ ОКСИДА ТИТАНА

Вековищев М. П., Кирсанов Е. А.

Государственный социально-гуманитарный университет
140411, Московская обл., г. Коломна, ул. Зелёная, д. 30, Российская Федерация

Аннотация
Цель: рассмотреть реологическое поведение наножидкости, полученной на основе наночастиц оксида титана в воде и этиленгликоле.
Процедура и методы. Проведена аппроксимация экспериментальных данных уравнениями структурной реологической модели на отдельных интервалах скорости сдвига.
Результаты. Показана связь коэффициентов реологических уравнений с характером изменения структуры наножидкости, а именно формирования и разрушения агрегатов наночастиц.
Теоретическая и/или практическая значимость. Предложены уравнения, которые способны аппроксимировать экспериментальные данные на отдельных интервалах скорости сдвига, соответствующих определённому структурному состоянию наножидкости.
Ключевые слова: наножидкость, наночастицы оксида титана, структурная реологическая модель, реологические кривые

NON-NEWTONIAN FLOW OF A NANOFLUID BASED ON TITANIUM OXIDE

M. Vekovishchev, E. Kirsanov.

State University of Humanities and Social Studies
ul. Zelenaya 30, Kolomna 140411, Moscow Region, Russian Federation

Abstract
Aim. We consider the rheological behavior of a nanofluid obtained on the basis of titanium oxide nanoparticles in water and ethylene glycol.
Methodology. The experimental data are approximated using equations of the structural rheological model on separate intervals of the shear rate.

Results. A relationship is obtained between the coefficients of rheological equations and the nature of changes in the structure of the nanofluid, namely, the formation and destruction of nanoparticle aggregates.
Research implications. Equations are derived that make it possible to approximate experimental data at individual shear rate intervals corresponding to a certain structural state of the nanofluid.
Keywords: nanofluid, titanium oxide nanoparticles, structural rheological model, rheological curves

Введение

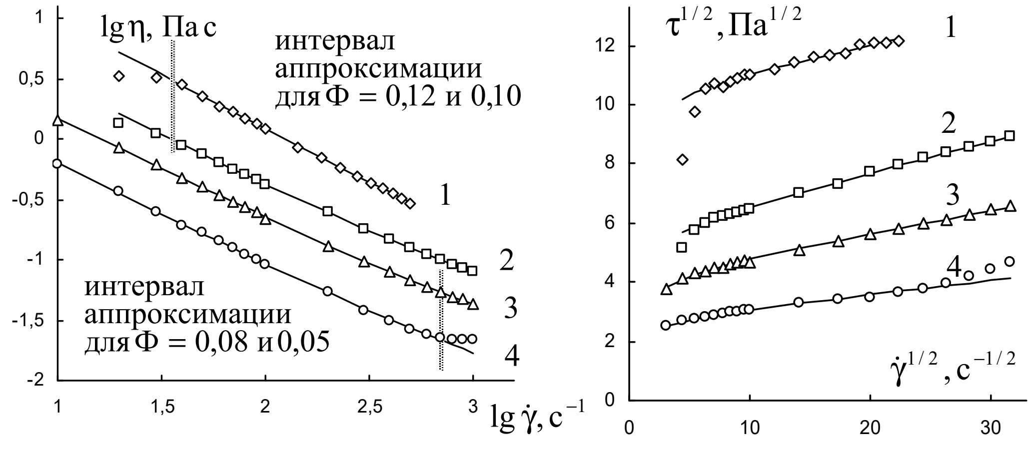
Наножидкости представляют собой ультрадисперсные системы с жидкой дисперсионной средой [1–4]. В случае твёрдых наночастиц систему часто называют золем или коллоидным раствором наночастиц. Некоторые исследователи [2] считают такие наножидкости особым объектом, отличным от традиционных систем коллоидной химии. Одним из важных применений наножидкости является увеличение теплопередачи в жидких средах.

При получении наножидкостей обычно используют высокодисперсные порошки стабильных металлов, их оксидов с характерными размерами частиц от 1 до 100 нм. В качестве жидкой фазы чаще всего выступают водные растворы, содержащие различные органические добавки и соли, препятствующие слипанию частиц. После смешивания нанопорошка с несущей жидкостью образец наножидкости подвергают длительному воздействию ультразвука [5–8].

Наибольшее внимание исследователей направлено на зависимость вязкости наножидкости от концентрации и размера наночастиц, а также от температуры. Однако при достаточно высокой концентрации наночастиц наножидкости демонстрируют неньютоновское поведение [5; 7–10]. Поэтому имеет смысл рассмотреть реологическое поведение наножидкостей с точки зрения структурной реологической модели [11; 12].

Наножидкость на основе оксида титана в воде

В работе [8] исследовано стационарное течение наножидкости на основе наночастиц оксида титана в воде (рис. 1, *а*). Наночастицы имеют размеры от 7 до 20 нм и диспергированы в деионизированной воде.



а *б*

Рис. 1 / Fig. 1. Реологические кривые наножидкости на основе наночастиц оксида титана в воде при температуре 25° С и объёмных концентрациях
Φ= 0,12 (1), 0,10 (2), 0,08 (3), 0,05 (4):
а – кривые вязкости в двойных логарифмических координатах; *б* – кривые течения в корневых координатах / Curves of nanofluids based on titanium oxide nanoparticles in water at a temperature of 25° C and volumetric concentrations
Φ= 0.12 (1), 0.10 (2), 0.08 (3), and 0.05 (4):
(a) viscosity curves in double logarithmic coordinates; (b) flow curves in root coordinates
Источник: [8].

По существующим представлениям [5] присутствие частиц в несущей «ньютоновской» жидкости увеличивает вязкость системы в результате возмущения сдвигового течения вращающимися частицами, а в особенности агрегатами частиц. В теории наножидкостей принято наименование – нанокластеры. Поэтому вязкость наножидкостей увеличивается с ростом концентрации дисперсной фазы. Значительное уменьшение сдвиговой вязкости при увеличении скорости сдвига (сдвиговое разжижение) объясняют разрушением нанокластеров при высоких напряжениях сдвига. Обычно полагают, что при достаточно низких концентрациях зависимость вязкости от скорости сдвига описывается степенным законом (уравнением Оствальда).

В рамках структурной реологической модели [11] вязкость увеличивается пропорционально количеству агрегированных частиц, т. е. возрастает с концентрацией. Разрушение агрегатов частиц объясняется действием разрывающих гидродинамических сил, сходных по природе с силами Стокса. Судя по виду кривых вязкости (рис. 1, *а*), степенной закон не выполняется достаточно строго при всех рассмотренных концентрациях, кроме того, имеются «ньютоновские» участки при низких или при очень высоких скоростях сдвига.

Аппроксимация на выделенных интервалах скоростей сдвига проводилась нами с помощью обобщённого уравнения течения [11].

$$\tau^{1/2} = \frac{\tau_c{}^{1/2}\dot{\gamma}^{1/2}}{\dot{\gamma}^{1/2} + \chi} + \eta_c{}^{1/2}\dot{\gamma}^{1/2}. \quad (1)$$

Физический смысл коэффициента компактности χ, коэффициента агрегации $\tau_c^{1/2}$ и коэффициента вязкости Кэссона $\eta^{1/2}{}_c$ описан в работе [11]. Результаты аппроксимации удобно представить в корневых координатах (рис. 1, *б*), поскольку рассчитанная кривая переходит в прямолинейную зависимость при высоких скоростях сдвига. Коэффициенты реологического уравнения представлены в табл. 1.

Суммарная вязкость неагрегированной системы описывается коэффициентом η_c, и, в целом, уменьшается с уменьшением концентрации, т. е. количества частиц в единице объёма. Структурная часть вязкости $\tau_c^{1/2}/\chi$ обусловлена количеством и величиной агрегатов и также уменьшается с уменьшением концентрации. Ньютоновское поведение соответствует динамическому равновесию структуры, при котором количество агрегированных частиц не зависит от скорости сдвига.

Таблица 1 / Table 1

Коэффициенты обобщённого уравнения течения, величина корня предельной нулевой вязкости, корень из структурной вязкости, рассчитанные для наножидкости на основе наночастиц оксида титана в воде при температуре 25° С и различных объёмных концентрациях / Coefficients of the generalized flow equation, the value of the root of the limiting zero viscosity, and the root of the structural viscosity calculated for an aqueous nanofluid based on titanium oxide nanoparticules at a temperature of 25° C and various volume fractions

концентрация	0,12	0,10	0,08	0,05	0,018
$\tau_c^{1/2}$, **Па**$^{1/2}$	10,41	5,63	4,24	2,70	0,125
$\eta_c^{1/2}, (\text{Па с})^{1/2}$	0,088	0,107	0,075	0,047	0,030
χ, **с**$^{-1/2}$	0,265	0,371	0,567	0,451	0
$\tau_c^{1/2}/\chi$	39,35	15,18	7,48	5,98	-
$\eta^{1/2}(0)$, **(Па с)**$^{1/2}$	39,44	15,29	7,55	6,03	-

Источник: по данным авторов.

При очень низких концентрациях наночастиц ньютоновское поведение при высоких скоростях более выражено (рис. 2, *а*). В работе [9] использовались наночастицы TiO_2 размером около 20 нм, диспергированные в воде при объёмной концентрации 1,18 об.%.

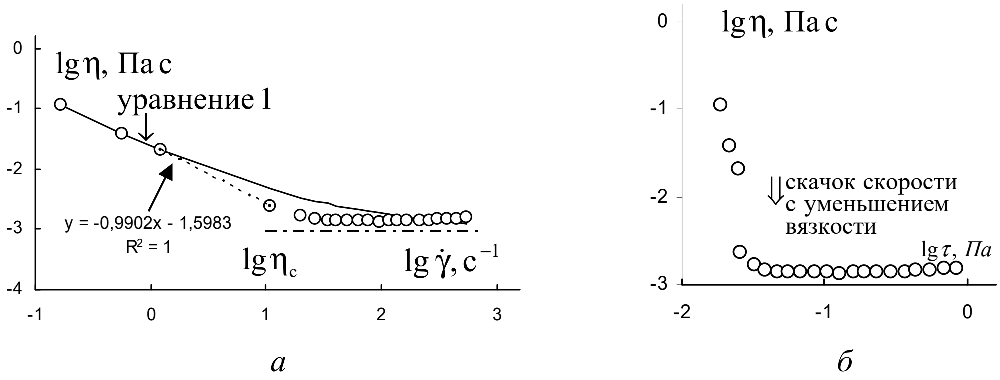


Рис. 2 / Fig. 2. Реологические кривые наножидкости на основе наночастиц оксида титана в воде при объёмной концентрациях Φ= 0,018:
а – зависимость вязкости от скорости сдвига; *б* – зависимость вязкости от напряжения сдвига / Rheological curves of a nanofluid based on titanium oxide nanoparticles in water at volume concentrations Φ= 0.018:
(*a*) dependence of viscosity on shear rate; (*b*) dependence of viscosity on shear stress

Источник: [9].

При такой низкой концентрации уравнение (1) можно использовать только на малом интервале низких скоростей сдвига. В дальнейшем, при крайне малом увеличении напряжения сдвига τ происходит резкое увеличение скорости сдвига $\dot{\gamma}$ (и соответствующее резкое уменьшение вязкости), которое связывают со сдвиговым расслоением вещества. Этот эффект хорошо виден на кривой $\eta(\tau)$ в двойных логарифмических координатах (рис. 2, *б*) и на кривой $\tau(\dot{\gamma})$ в корневых координатах (рис. 3). Скачкообразный переход от одного режима течения к другому показан на рис. 2, *а* пунктирной линией ($\eta \sim 1/\dot{\gamma}$). Участок высоких скоростей сдвига можно считать «ньютоновским», поскольку зависимости $\eta(\tau)$ и $\eta(\dot{\gamma})$ примерно параллельны оси абсцисс. Экспериментально полученные значения вязкости η превышают рассчитанную предельную вязкость η_c максимально разрушенной структуры (штрихпунктирная прямая на рис. 2, *а*).

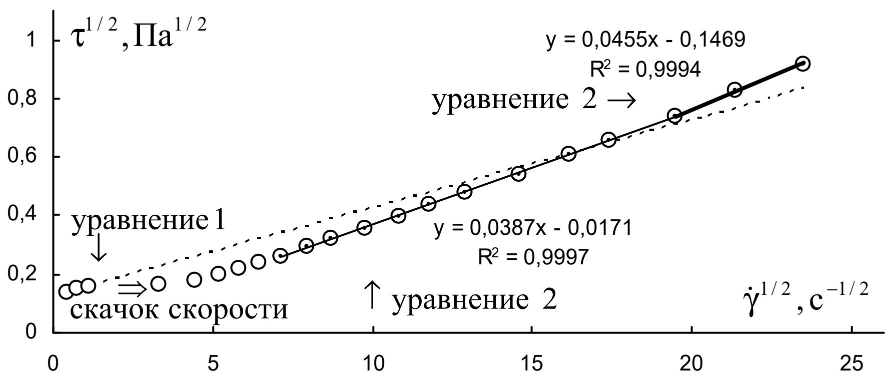


Рис. 3 / Fig. 3. Кривая течения в корневых координатах для наножидкости на основе наночастиц оксида титана в воде при объёмной концентрациях Ф= 0,018 / Flow curve in root coordinates for a nanofluid based on titanium oxide nanoparticles in water at volume concentrations Ф= 0.018

Источник: [9].

Однако, на рис. 3 можно видеть, что в корневых координатах с достаточно хорошей точностью выполняется линейная зависимость вида

$$\tau^{1/2} = \eta_{cv}^{1/2}\dot{\gamma}^{1/2} - \tau_{cv}^{1/2}. \quad (2)$$

В рамках структурной реологической модели [12] коэффициенты этого реологического уравнения имеют следующий вид: $\eta_{cv}^{1/2} = \eta_{\infty}^{1/2} + B\tilde{N}\tilde{k}_3 / (\tilde{k}_3 + \tilde{k}_1)$;

$$\tau_{cv}^{1/2} = B\tilde{N}(\tilde{k}_0 - \tilde{k}_2) / (\tilde{k}_3 + \tilde{k}_1). \quad (3)$$

В модели предполагается, что агрегаты и индивидуальные частицы являются элементами структуры, которые обеспечивают вязкость при сдвиговом течении. Если в единице объёма содержится N частиц, то количество агрегированных частиц обозначим как N_2, а количество индивидуальных частиц как N_1.

Выражение (3) содержит следующие коэффициенты: k_2 – константа скорости формирования агрегатов при случайных столкновениях частиц; k_0 – константа скорости спонтанного разрушения агрегатов, например, в результате теплового движения; k_1 – константа скорости разрушения агрегата под действием растягивающих гидродинамических сил, k_3 – константа скорости формирования агрегатов частиц из одиночных частиц под действием сдвига. Коэффициент B не зависит от скорости сдвига.

Коэффициент $\tau_{cv}^{1/2}$ является положительным, если $k_0 > k_2$, и отрицательным, если $k_0 < k_2$. Поэтому на данном интервале скоростей возможны три вида реологического поведения. В первом случае ($k_0 > k_2$,) вязкость увеличивается с ростом скорости сдвига (явление сдвигового затвердевания). Во втором случае ($k_0 < k_2$) вязкость уменьшается с ростом скорости сдвига, причём коэффициент $\tau_{cv}^{1/2}$ меньше или сравним по величине с коэффициентом $\eta_{cv}^{1/2}$. В третьем случае коэффициент $\tau_{cv}^{1/2}$ близок к нулю при условии $k_0 \approx k_2$, тогда реологическое поведение похоже на «ньютоновское» течение с практически постоянным значением сдвиговой вязкости η_{cv} .

Наножидкость на основе оксида титана в этиленгликоле

Реологическое поведение наножидкости на основе оксида титана в этиленгликоле рассмотрено в работе [10]. Реологические кривые несколько отличаются по виду от тех, что получены для водной наножидкости. Однако, на графиках (рис. 4, 5) имеются аналогичные участки кривых: режим, близкий к «ньютоновскому»; участок снижение вязкости за счёт разрушения агрегатов (уравнение 1). Кроме того, на рис. 4 жирной линией выделено реологическое поведение, описанное уравнением (2). Штриховая горизонтальная линия изображает вязкость этиленгликоля.

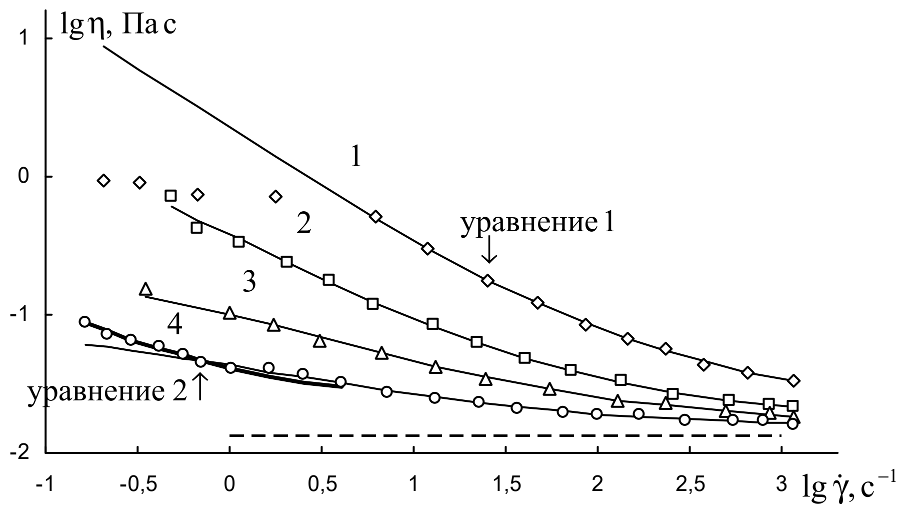
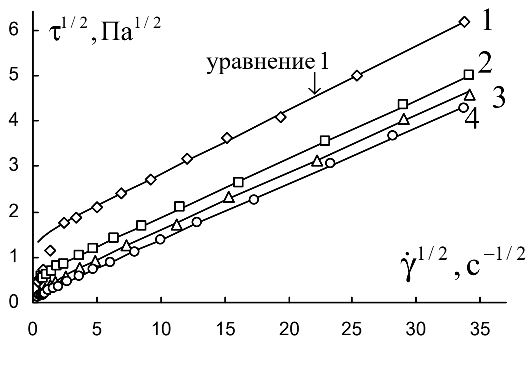


Рис. 4 / Fig. 4. Кривые вязкости в двойных логарифмических координатах для наножидкости на основе наночастиц оксида титана в этиленгликоле при массовых концентрациях 25% (1), 15% (2), 10% (3), 5% (4) / Viscosity curves in double logarithmic coordinates for a nanofluid based on titanium oxide nanoparticles in ethylene glycol at mass concentrations of 25% (1), 15% (2), 10% (3), 5% (4)

Источник: [10].

Результаты аппроксимации более ясно выражены на графиках в корневых координатах (рис. 5). Рассчитанная по уравнению (1) зависимость асимптотически приближается к прямой при высоких скоростях сдвига (рис. 5, *а*). Структура наножидкости постепенно разрушается при увеличении скорости сдвига ($k_1>0$, $k_3=0$). Коэффициенты обобщённого уравнения течения приведены в табл. 2.

Прямая, соответствующая уравнению (2), пересекает ось ординат при положительных значениях (рис. 5, *б*). Вязкость уменьшается с ростом скорости сдвига; коэффициент $\tau_{cv}^{1/2}$ меньше коэффициента $\eta_{cv}^{1/2}$. В этом случае одновременно происходят два процесса: формирование агрегатов под действием сдвига и разрушение агрегатов под действием сдвига, но доминирует процесс разрушения ($k_0 < k_2$, $k_1 > 0$, $k_3 > 0$).



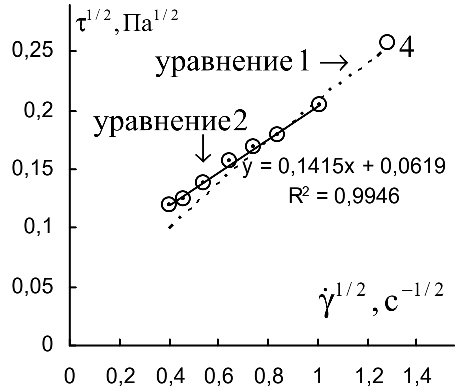


Рис. 5 / Fig. 5. Кривые течения в корневых координатах для наножидкости на основе наночастиц оксида титана в этиленгликоле при массовых концентрациях 25% (1), 15% (2), 10% (3), 5% (4):
а – кривые течения на полном интервале скоростей сдвига; *б* – кривая течения для массовой концентрации 5% на интервале низких скоростей / Flow curves in root coordinates for a nanofluid based on titanium oxide nanoparticles in ethylene glycol at mass concentrations of 25% (1), 15% (2), 10% (3), 5% (4):
(*a*) flow curves over the full range of shear rates; (b) flow curve for 5% mass concentration in the low velocity range

Источник: [10].

Таблица 2 / Table 2

Коэффициенты обобщённого уравнения течения, величина корня предельной нулевой вязкости, корень из структурной вязкости, рассчитанные для наножидкости на основе наночастиц оксида титана в этиленгликоле при различных массовых концентрациях / Coefficients of the generalized flow equation, the value of the root of the limiting zero viscosity, and the root of the structural viscosity calculated for an aqueous nanofluid based on titanium oxide nanoparticules at various weight concentrations

концентрация	25%	15%	10%	5%
$\tau_c^{1/2}$, **Па$^{1/2}$**	1,430	0,603	0,371	0,162
$\eta_c^{1/2}, (Па\, с)^{1/2}$	0,140	0,128	0,125	0,123
χ, **с$^{-1/2}$**	0,055	0,239	0,945	0,917

концентрация	25%	15%	10%	5%
$\tau_c^{1/2}/\chi$	26,10	2,52	0,393	0,176
$\eta^{1/2}(0)$, **(Па с)$^{1/2}$**	26,24	2,65	0,518	0,299

Источник: по данным авторов.

Выводы

Рассмотрено реологическое поведение наножидкостей на основе наночастиц оксида титана в воде и в этиленгликоле. Аппроксимация реологических кривых в случае стационарного сдвигового течения проведена с помощью уравнений структурной реологической модели. Обнаружены характерные особенности реологического поведения, которые встречаются в других структурированных жидкостях: участок ньютоновского течения; сдвиговое разжижение; сдвиговое затвердевание, эффект резкого увеличения скорости сдвига при незначительном увеличении напряжения сдвига.

Статья поступила в редакцию 14.10.2022 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mahbubul I. M., Saidur R., Amalina M. A. Latest developments on the viscosity of nanofluids // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2012. Vol. 55. Iss. 4. P. 874–885. DOI: 10.1016/J.IJHEATMASSTRANSFER.2011.10.021.
2. Рудяк В. Я. Современное состояние исследований вязкости наножидкостей // Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Физика. 2015. Т. 10. № 1. С. 5–22.
3. Haisheng Chen, Yulong Ding, Chunqing Tan. Rheological behaviour of nanofluids // New Journal of Physics. 2007. Vol. 9. P. 367–391. doi:10.1088/1367-2630/9/10/367.
4. Investigation of thermal conductivity and rheological properties of nanofluids containing graphene nanoplatelets / Mehrali M., Sadeghinezhad E., Tahan Latibari S., Kazi S. N., Mehrali M., Zubir M. N., Metselaar H. S. C. // Nanoscale Research Letters. 2014. Vol. 9. P. 15–24. DOI: 10.1186/1556-276X-9-15.
5. Hasan S. M. Non-Newtonian rheological characteristics of oil-based metal oxide nanofluids: a thesis for the degree master of science. Department of Mechanical Engineering, Northern Illinois University. De Kalb, Illinois, 2017. 55 p.
6. Saeedi A. H., Akbari M., Toghraie D. An experimental study on rheological behavior of a nanofluid containing oxide nanoparticle and proposing a new correlation // Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures. 2018. Vol. 99. P. 285–293. DOI: 10.1016/j.physe.2018.02.018.
7. Rheological non-Newtonian behaviour of ethylene glycol-based Fe_2O_3 nanofluids / Pastoriza-Gallego M. J., Lugo L., Legido J. L., Piñeiro M. M. // Nanoscale Research Letters. 2011. Vol. 6. P. 560–566. DOI: 10.1186/1556-276X-6-560.
8. Tseng W. J., Lin K. Rheology and colloidal structure of aqueous TiO_2 nanoparticle suspensions // Materials Science and Engineering: A. 2003. Vol. 355. Iss. 1–2. P. 186–192. DOI: 10.1016/S0921-5093(03)00063-7.
9. Heat transfer and flow behavior of aqueous suspensions of TiO_2 nanoparticles (nanofluids) flowing through a vertical pipe / He Y., Chen H., Ding Y., Cang D., Lu H. // International

Journal of Heat and Mass Transfer. 2007. Vol. 50. Iss. 11–12. P. 2272–2281. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2006.10.024.
10. Rheological and volumetric properties of TiO_2-ethylene glycol nanofluids / Cabaleiro D., Pastoriza-Gallego M. J., Gracia-Fernandez C., Pineiro M. M., Lugo L. // Nanofluids. Nanoscale Research Letters. 2013. Vol. 8. Article number: 286. DOI: 10.1186/1556-276X-8-286.
11. Кирсанов Е. А., Матвеенко В. Н. Неньютоновское течение дисперсных, полимерных и жидкокристаллических систем. Структурный подход. М.: Техносфера, 2016. 384 с.
12. Кирсанов Е. А., Матвеенко В. Н. Вязкость и упругость структурированных жидкостей. М.: Техносфера, 2022. 284 с.

REFERENCES

1. Mahbubul I. M., Saidur R., Amalina M. A. Latest developments on the viscosity of nanofluids. In: *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2012, vol. 55, iss. 4, pp. 874–885. DOI: 10.1016/J.IJHEATMASSTRANSFER.2011.10.021.
2. Rudyak V. Ya. [State-of-the-art study of nanofluid viscosity]. In: *Vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika* [Vestnik NSU. Series: Physics], 2015, vol. 10, no. 1, pp. 5–22.
3. Haisheng Chen, Yulong Ding, Chunqing Tan. Rheological behaviour of nanofluids. In: *New Journal of Physics*, 2007, vol. 9, pp. 367–391. DOI: 10.1088/1367-2630/9/10/367.
4. Mehrali M., Sadeghinezhad E., Tahan Latibari S., Kazi S. N., Mehrali M., Zubir M. N., Metselaar H. S. C. Investigation of thermal conductivity and rheological properties of nanofluids containing graphene nanoplatelets. In: *Nanoscale Research Letters*, 2014, vol. 9, pp. 15–24. DOI: 10.1186/1556-276X-9-15.
5. Hasan S. M. Non-Newtonian rheological characteristics of oil-based metal oxide nanofluids: a thesis for the degree master of science. Department of Mechanical Engineering, Northern Illinois University. De Kalb, Illinois, 2017. 55 p.
6. Saeedi A. H., Akbari M., Toghraie D. An experimental study on rheological behavior of a nanofluid containing oxide nanoparticle and proposing a new correlation. In: *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 2018, vol. 99, pp. 285–293. DOI: 10.1016/j.physe.2018.02.018.
7. Pastoriza-Gallego M. J., Lugo L., Legido J. L., Piñeiro M. M. Rheological non-Newtonian behaviour of ethylene glycol-based Fe_2O_3 nanofluids. In: *Nanoscale Research Letters*, 2011, vol. 6, pp. 560–566. DOI: 10.1186/1556-276X-6-560.
8. Tseng W. J., Lin K. Rheology and colloidal structure of aqueous TiO_2 nanoparticle suspensions. In: *Materials Science and Engineering: A*, 2003, vol. 355, iss. 1–2, pp. 186–192. DOI: 10.1016/S0921-5093(03)00063-7.
9. He Y., Chen H., Ding Y., Cang D., Lu H. Heat transfer and flow behavior of aqueous suspensions of TiO_2 nanoparticles (nanofluids) flowing through a vertical pipe. In: *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2007, vol. 50, iss. 11–12, pp. 2272–2281. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2006.10.024.
10. Cabaleiro D., Pastoriza-Gallego M. J., Gracia-Fernandez C., Pineiro M. M., Lugo L. Rheological and volumetric properties of TiO_2-ethylene glycol nanofluids. In: *Nanofluids. Nanoscale Research Letters*, 2013, vol. 8, article number: 286. DOI: 10.1186/1556-276X-8-286.
11. Kirsanov Ye. A., Matveenko V. N. *Nen'yutonovskoe techenie dispersnykh, polimernykh i zhidkokristallicheskikh sistem. Strukturnyi podkhod* [Non-Newtonian flow of dispersed, polymeric and liquid crystal systems]. Moscow, Tekhnosfera Publ., 2016. 384 p.

12. Kirsanov Ye. A., Matveyenko V. N. *Vyazkost' i uprugost' strukturirovannykh zhidkostey* [Viscosity and elasticity of structured liquids]. Moscow, Tekhnosfera Publ., 284 p.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Вековищев Михаил Петрович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физики и химии Государственного социально-гуманитарного университета;
e-mail: mpv.71@mail.ru;
Кирсанов Евгений Александрович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физики и химии Государственного социально-гуманитарного университета;
e-mail: Kirsanov47@mail.ru.

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Mikhail P. Vekovishchev – Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Prof., State University of Humanities and Social Studies;
e-mail: mpv.71@mail.ru;
Evgeny A. Kirsanov – Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Prof., State University of Humanities and Social Studies;
e-mail: Kirsanov47@mail.ru.

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Вековищев М. П., Кирсанов Е. А. Неньютоновское течение наножидкости на основе оксида титана // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2022. № 4. С. 6–16.
DOI: 10.18384/2310-7251-2022-4-6-16.

FOR CITATION

Vekovishchev M. P., Kirsanov E. A. Non-Newtonian flow of a nanofluid based on titanium oxide. In: *Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*, 2022, no. 4, pp. 6–16.
DOI: 10.18384/2310-7251-2022-4-6-16.

УДК 533.6.011.8
DOI: 10.18384/2310-7251-2022-4-17-34

СТЕПЕННЫЕ ТЕЛА МИНИМАЛЬНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ В ГАЗОВОМ ПОТОКЕ

Горелов С. Л., Нгуен В. Л.

Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)
141701, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский пер., д. 9,
Российская Федерация

Аннотация
Цель. Для тела вращения со степенной образующей и сферическим, параболическим и гиперболическим затуплениями вычисляется сила сопротивления в газовом потоке.
Процедуры и методы. Определяется степень в образующей тела минимального сопротивления и радиус затупления в критической точке в зависимости от удлинения в широком диапазоне чисел Рейнольдса.
Результаты. Для тела вращения со степенной образующей и сферическим, параболическим и гиперболическим затуплениями вычисляется сила сопротивления в высокоскоростном потоке разреженного газа на основе нескольких локальных моделей течения газа.
Теоретическая и практическая значимость. Результаты, полученные в данной работе, имеют большое значение для оптимизации геометрии летательных аппаратов.
Ключевые слова: высокоскоростной поток, локальные модели, аэродинамическое сопротивление тела вращения, вариационная задача
Благодарности. Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 20-08-00790

POWER BODIES OF MINIMUM RESISTANCE IN A GAS FLOW

S. Gorelov, V. L. Nguyen

Moscow Institute of Physics and Technology
Institutskii per. 9, Dolgoprudnyi 141701, Moscow Region, Russian Federation

Abstract
Aim. For a blunt body of revolution with a power generatrix and spherical, parabolic, and hyperbolic bluntnesses, we calculate the drag force in a gas flow.
Methodology. We determine the degree of minimum resistance and the bluntness radius in the generatrix of the body as functions of the elongation in a wide range of Reynolds numbers.
Results. For a blunt body of revolution with a power generatrix and spherical, parabolic, and hyperbolic bluntnesses, the drag force in a high-speed rarefied gas flow is calculated based on several local gas flow models.

Research implications. The results obtained in this work are of great importance for optimizing the aircraft geometry.
Keywords: high-speed flow, local models, aerodynamic drag of a body of revolution, variational problem
Acknowledgments. This work was supported by Russian Foundation for Basic Research (Grant No. 20-08-00790).

Введение

Задача построения геометрии тела – необходимая и существенная проблема в развитии аэрокосмической науки и техники, а также авиационной техники. В процессе движения с высокой скоростью в газе тело всегда находится под воздействием аэродинамических сил, которые определяются из локальных моделей, главное предположение этих моделей состоит в том, что каждый элемент поверхности тела взаимодействует со средой независимо от других участков тела и сила, действующая на него, зависит лишь от ориентации элемента относительно направления движения.

Классическая задача построения тела вращения минимального сопротивления с использованием формулы Ньютона решалась во многих работах [1–6]. Были разработаны эффективные численные методы решения таких задач [7]. В связи с развитием космической техники появился интерес к оптимальным задачам высокоскоростной аэродинамики на больших высотах в разреженном газе [8]. Дальнейшее упрощение таких задач связано с использованием целевых функций разного вида, зависящих от некоторого количества параметров, по которым и производится оптимизация [9; 10]. В частности, широкое распространение получила степенная целевая функция [11; 12].

В работе используется целевая степенная функция вместе с локальными методами (формулы свободномолекулярной аэродинамики, формула гиперзвуковой аэродинамики Ньютона), что позволило свести вариационную задачу минимизации функционала (сопротивление тела вращения) к задаче поиска экстремума функции от одной, двух или трёх переменных. Решаются задачи об определении формы тел вращения с затуплением в гиперзвуковом потоке в случае газа Ньютона и свободномолекулярной модели.

1. Локальный метод

Для вычисления аэродинамических сил, действующих на тело, движущегося в газе, необходимо знать поток импульса $\mathbf{p}$ на поверхности тела. Существующие результаты аэродинамики разреженных газов показывают, что для не очень сложных тел при больших скоростях обтекания функция $\mathbf{p}$ определяется, главным образом, локальными свойствами поверхности в данной точке [13]. В сильно разреженном газе на выпуклых телах это предположение оправдывается полностью (даже для малых скоростей), в континуальном режиме в его пользу говорит успех эмпирических обобщений формулы Ньютона.

Наибольшее распространение получила локальная модель из [14], в которой коэффициенты давления и трения равны (отнесённые к скоростному напору $\rho_\infty V_\infty^2 / 2$)

$$p = p_0 \cos^2\theta + p_1 \cos\theta, \quad \tau = \tau_0 \cos\theta \sin\theta \tag{1}$$

Функции p_0, p_1, τ_0 зависят от числа Re_0, температурного фактора t_w и показателя степени адиабаты γ, θ – угол между внутренней нормалью к поверхности и направлением скорости газа (см. рис. 1).

Отличительной особенностью данной модели (кроме простоты) является то, что в предельных случаях она соответствует, либо свободномолекулярной модели, либо модели Ньютона.

Так, для свободномолекулярной модели ($\mathrm{Re}_0 \to 0$) [15]:

$$p_0 = \tau_0 = 2, \quad p_1 = \sqrt{\pi t_w (\gamma - 1)/\gamma} \tag{2}$$

В случае модели Ньютона ($\mathrm{Re}_0 \to \infty$) [1]:

$$p_0 = 2, \; p_1 = \tau_0 = 0 \tag{3}$$

Рассмотрим два случая применения локальных методов: формула Ньютона и свободномолекулярная модель.

2. Формула Ньютона

2.1. Степенные тела вращения

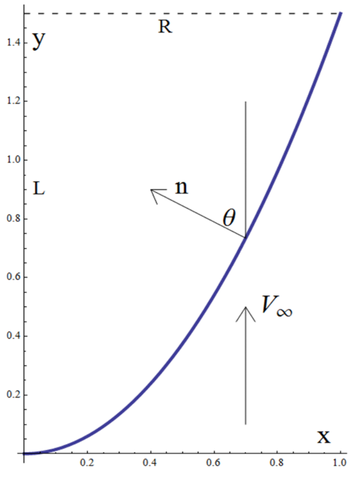


Рис. 1 / Fig. 1. Схема обтекания тела вращения / Scheme of flow around a body of revolution

Источник: составлено авторами.

Задано тело вращения длиной *L* и радиусом основания *R*. Требуется определить форму образующей *y(x)* такую, при которой это тело имеет минимальное сопротивление в гиперзвуковом потоке газа. Причём давление на элемент поверхности определяется формулой Ньютона.

Коэффициент сопротивления C_x (аэродинамическая сила, действующая на тело вдоль вектора скорости, отнесённая к скоростному напору и характерной площади, в данном случае – это площадь основания, то есть πR^2) будет равен:

$$c_x = \frac{2}{R^2}\int_0^R \left(c_p \cdot \cos\theta + c_\tau \cdot \sin\theta\right) x \sqrt{1+\left(dy/dx\right)^2}\, dx \tag{4}$$

Здесь c_p и c_τ нормальная и касательная аэродинамические силы, действующие на элемент поверхности ds, $\cos\theta = \left(1+\left(dy/dx\right)^2\right)^{-1/2}$ (5)

Для формула Ньютона:

$$c_p = 2\cos^2\theta, \quad c_\tau = 0 \tag{6}$$

Тогда выражение (4) запишется (линейные размеры отнесены к R)

$$c_x = 4\int_0^1 \frac{x}{1+(dy/dx)^2} dx \tag{7}$$

в случае, если образующая тела вращения – степенная функция: $y = Lz^\beta$, $z = x/R$, $\lambda = L/R$, уравнение коэффициента сопротивления (7) запишется в виде гипергеометрической функции *F[a,b,c,d]*

$$c_x = 4\int_0^1 \frac{z}{1+\left(\lambda\beta z^{\beta-1}\right)^2} dz = 2F\left(1, \frac{1}{\beta-1}, \frac{\beta}{\beta-1}, -\beta^2\lambda^2\right) \tag{8}$$

В этом случае задачу можно сформулировать так: найти величину β такую, чтобы коэффициент сопротивления был минимален при заданной величине λ.

В табл. 1 представлены величины β и c_x в зависимости от удлинения λ. Заметим, что во многих работах ось вращения – это ось *Ox*. В этом случае величина показателя степени в степенной функции $\alpha = \beta^{-1}$. В табл. 1 также представлена величина α.

На рис. 2. показана зависимость $\alpha = \beta^{-1}$ от удлинения λ. При больших удлинениях эта зависимость стремится к α = ¾ = 0.75, соответственно [4].

Таблица 1 / Table 1

Величины β *и* C_x в зависимости от удлинения λ /
Values of β *and* C_x as functions of elongation λ

λ	β	α	C_x
2	1.54	0.6493	0.3305
4	1.386	0.7215	0.0986
6	1.357	0.7369	0.0455
8	1.347	0.7424	0.0259
10	1.342	0.7451	0.0167

Источник: составлено авторами.

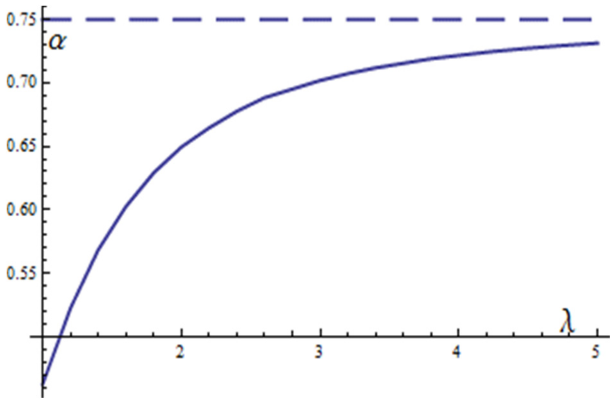


Рис. 2 / Fig. 2. Зависимость $\alpha = \beta^{-1}$ от величины удлинения λ /
Dependence of $\alpha = \beta^{-1}$ on the magnitude of elongation λ

Источник: составлено авторами.

2.2. Степенные тела вращения с плоским затуплением

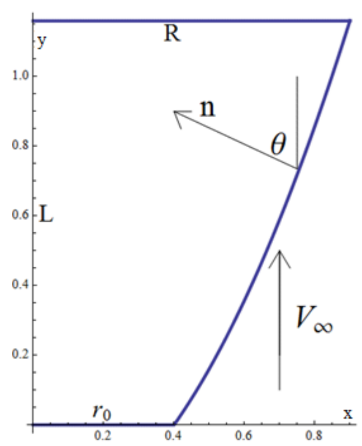


Рис. 3 / Fig. 3. Схема обтекания тела с плоским затуплением /
Scheme of body flow with a flat blunt

Источник: составлено авторами.

Задано тело вращения (рис. 3) длиной L, радиусом основания R и плоским торцом с радиусом r_0. Требуется определить форму образующей $y(x)$ и величину r_0 такие, при которых это тело имеет минимальное сопротивления в гиперзвуковом потоке газа.

В случае формулы Ньютона для торца c_p=2, а для образующей $c_p=2\cos^2\theta$. Уравнение для величины коэффициента сопротивления запишется (линейные размеры отнесены к R):

$$c_x = 2r_0^2 + 4\int_{r_0}^{1} \frac{x}{1+\left(dy/dx\right)^2}dx \tag{9}$$

Для затупленного степенного тела образующая имеет вид [16]

$$y(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < r_0 \\ \lambda \dfrac{x^\beta - r_0^\beta}{1 - r_0^\beta}, & r_0 < x < 1 \end{cases} \tag{10}$$

Тогда для модели Ньютона запишем уравнение (9) в виде

$$\begin{aligned} c_x &= 2r_0^2 + 4\int_0^1 \frac{x}{1+\left(\dfrac{\lambda\beta}{1-r_0^\beta}x^{\beta-1}\right)^2}dx - 4r_0^2\int_0^1 \frac{x}{1+\left(\dfrac{\lambda\beta r_0^{\beta-1}}{1-r_0^\beta}x^{\beta-1}\right)^2}dx = \\ &= 2r_0^2 + 2F\left(1, \frac{1}{\beta-1}, \frac{\beta}{\beta-1}, -\left(\frac{\lambda\beta}{1-r_0^\beta}\right)^2\right) - 2r_0^2 F\left(1, \frac{1}{\beta-1}, \frac{\beta}{\beta-1}, -\left(\frac{\lambda\beta r_0^{\beta-1}}{1-r_0^\beta}\right)^2\right) \end{aligned} \tag{11}$$

Вариационная задача свелась к поиску минимума функции (11) по двум переменным β и r_o при заданном удлинении λ. В Таблице 2 представлены результаты расчётов величин β, $\alpha = \beta^{-1}$ и r_0 в зависимости от удлинения λ, при которых достигается минимум c_x и, для сравнения, величины c_{x0} при тех же удлинениях, но без затупления (r_0=0).

Таблица 2 / Table 2

Величины β, α, r_0, C_x, C_{x0} **в зависимости от удлинения** λ **/**
Values of β, α, r_0, C_x, C_{x0} **as functions of elongation** λ

λ	β	α	r_0	c_x	c_{x0}
2	1.448	0.691	0.123	0.321	0.3305
4	1.375	0.727	0.0293	0.0982	0.0986
6	1.355	0.738	0.00786	0.0454	0.0455
8	1.346	0.743	0.00346	0.0259	0.0259
10	1.342	0.745	0.00181	0.0167	0.0167

Источник: по данным авторов.

При малых удлинениях величина радиуса затупления велика а коэффициент сопротивления существенно меньше, чем без затупления. Начиная с λ=8, несмотря на затупление коэффициент сопротивления становится практически одинаковым в обоих случаях.

2.3. Степенные тела вращения с параболическим, гиперболическим, сферическим затуплениями

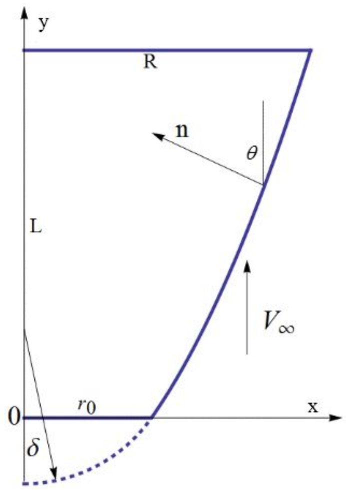


Рис. 4 / Fig. 4 Схема образующей осесимметричного степенного тела с затуплением / Scheme of forming a suspicimetric degree body with a blunt

Источник: составлено авторами

Образующая осесимметричная степенная тела вращения *y(x)* (ось *y* – ось вращения) содержит 2 части: 1) парабола радиуса затупления R_p, либо гипербола радиуса затупления R_h, либо окружности радиуса R_s при 0<x< r_0; 2) степенная функция при $r_0<x<R$ (*R* – радиус основания). Расположим это тело таким образом, что $y(r_0)=0$. Расстояние от оси *x* до основания тела обозначим *L*, а расстояние от оси *x*до критической точки обозначим δ.

Тогда уравнение для образующей тела вращения с параболическим затуплением будет иметь вид:

$$y(x)=\begin{cases} y_s(x)=\delta\left(\dfrac{x^2}{r_0^2}-1\right), & 0<x<r_0 \\ y_p(x)=(\lambda-\delta)\dfrac{x^\beta-r_0^\beta}{1-r_0^\beta}, & r_0<x<1 \end{cases} \tag{12}$$

Здесь, учитывая равенство производных в точке $x=r_0$, имеем:

$$R_p=\frac{1}{2\lambda\beta\dfrac{r_0^{\beta-2}}{2-(2-\beta)r_0^\beta}};\delta=\frac{\lambda\beta r_0^\beta}{2-(2-\beta)r_0^\beta};\lambda=\frac{L+\delta}{R} \tag{13}$$

Коэффициент сопротивления такого тела (сила, действующая на тело, отнесённая к скоростному напору и площади основания) состоит из суммы сил, действующих на параболическое затупление и степенную часть. $Cx_p=c_{xs}+c_{xp}$.

Подставляя выражения (12), (13) в (7) и вычисляя интегралы, получаем:

$$Cx_p = \frac{2\lg\left(1+A^2 r_0^2\right)}{A^2} + 2F\left(1,\frac{1}{\beta-1},\frac{\beta}{\beta-1},-B^2\right) - 2r_0^2 F\left(1,\frac{1}{\beta-1},\frac{\beta}{\beta-1},-C^2\right)$$

$$A^2 = \left(2\frac{\delta}{r_0^2}\right)^2, \quad B^2 = \left(\frac{(\lambda-\delta)\beta}{1-r_0^\beta}\right)^2, \quad C^2 = \left(\frac{(\lambda-\delta)\beta r_0^{\beta-1}}{1-r_0^\beta}\right)^2 \tag{14}$$

В табл. 3 показаны результаты расчётов величин β и r_0, зависящие от удлинения λ, при которых достигается минимум коэффициента сопротивления тела вращения с параболическим затуплением Cx_p. В табл. 3 также сравнение значений Cx_p для тел с затуплением и значений c_{x0} без затупления.

Таблица 3 / Table 3

Величины β, r_0, R_0, C_{xp}, C_{x0} **в зависимости от удлинения λ /**
Values of β, r_0, R_0, C_{xp}, C_{x0} *as* **functions of elongation λ**

λ	2	4	6	8	10
β	1.42818	1.36994	1.35267	1.34529	1.34146
r_0	0.23404	0.04950	0.01752	0.00809	0.00437
R_p	0.14711	0.02732	0.00897	0.00396	0.00208
C_{xp}	0.32648	0.09836	0.04543	0.025908	0.01668
C_{x0}	0.3305	0.0986	0.0455	0.02591	0.0167

Источник: по данным авторов.

Видно, что значения коэффициента сопротивления параболического затупления тела вращения меньше чем в случае отсутствия затупления (хотя разница не очень большая).

Аналогично для уравнения образующей тела вращения с гиперболическим затуплением будет вид (все размеры отнесены к R)

$$y(x) = \begin{cases} y_s(x) = -a + a\sqrt{1+\dfrac{x^2}{b^2}}, & 0 < x < r_0 \\ y_p(x) = \lambda - a_1(1-x^\beta), & r_0 < x < 1 \end{cases} \tag{15}$$

Здесь, учитывая равенство производных в точке $x = r_0$, имеем:

$$a = \frac{b^2\lambda\beta r_0^\beta\sqrt{1+\dfrac{r_0^2}{b^2}}}{r_0^2 + r_0^{2+\beta}(\beta-1) - b^2\beta r_0^\beta\left(-1+\sqrt{1+\dfrac{r_0^2}{b^2}}\right)}; \quad R_h = \frac{b^2}{a}$$

$$a_1 = \frac{\lambda r_0^2}{r_0^2 + r_0^{2+\beta}(\beta-1) - b^2\beta r_0^\beta\left(-1+\sqrt{1+\dfrac{r_0^2}{b^2}}\right)} \tag{16}$$

Тогда коэффициент сопротивления тела складывается из сопротивления гиперболического затупления c_{xs} и поверхности вращения c_{xp}

Имея в виду (15), (16), (7) и вычисляя интегралы, получаем:

$$c_{xs}=\frac{2b^2}{\left(a^2+b^2\right)^2}\left[\left(a^2+b^2\right)r_0^2+a^2b^2Log\left(1+\frac{a^2r_0^2}{b^4}+\frac{r_0^2}{b^2}\right)\right]$$
$$c_{xp}=2F\left(1,\frac{1}{\beta-1},\frac{\beta}{\beta-1},-a_1^2\beta^2\right)-2r_0^2F\left(1,\frac{1}{\beta-1},\frac{\beta}{\beta-1},-a_1^2\beta^2r_0^{2\beta-2}\right) \tag{17}$$
$$Cx_h=c_{xs}+c_{xp}$$

Таблица 4 / Table 4

Величины β, r_0, b, R_h, R_p, C_{xh}, C_{xp} **в зависимости от удлинения** λ **/**
Values of β, r_0, b, R_h, R_p, C_{xh}, C_{xp} **as functions of elongation** λ

λ	2	4	6	8	10
β	1.42818	1.36993	1.35267	1.34529	1.34146
r_0	0.23404	0.04950	0.01752	0.00809	0.00437
b	60.1069	6.07575	3.50101	4.49887	0.90306
R_h	0.14711	0.02732	0.00897	0.003964	0.00208
R_p	0.14711	0.02732	0.00897	0.003964	0.00208
C_{xh}	0.32648	0.09836	0.04543	0.025908	0.016686
C_{xp}	0.32648	0.09836	0.04543	0.025908	0.016686

Источник: по данным авторов.

В табл. 4 даны значения β, r_0, b, c_{xh} – коэффициент сопротивления с гиперболическим затуплением и c_{xp} в зависимости от удлинения λ. Там также положены радиусы затупления R_h, R_p.

Аналогично для уравнения образующей тела вращения со сферическим затуплением будет вид (все размеры отнесены к R):

$$y(x)=\begin{cases} y_s(x)=\sqrt{R_s^2-r_0^2}-\sqrt{R_s^2-x^2}, & 0<x<r_0 \\ y_p(x)=\lambda_1\dfrac{x^\beta-r_0^\beta}{1-r_0^\beta}, & r_0<x<1 \end{cases} \tag{18}$$

Здесь, учитывая равенство производных в точке $x=r_0$, имеем:

$$R_s=\frac{1}{\lambda_1\beta}\sqrt{r_0^4+r_0^{4-2\beta}-2r_0^{4-\beta}+r_0^2\lambda_1^2\beta^2}\,;\ \delta=R_s-\sqrt{R_s^2-r_0^2}\,;\lambda=\lambda_1+\delta \tag{19}$$

Тогда подставляя выражения (18), (19) в (7) и вычисляя интегралы, получаем коэффициент сопротивления по формуле Ньютона:

$$Cx_s=2\left(r_0^2-\frac{r_0^4}{2R_s^2}\right)+2F\left(1,\frac{1}{\beta-1},\frac{\beta}{\beta-1},-\left(\frac{\lambda_1\beta}{1-r_0^\beta}\right)^2\right)-2r_0^2F\left(1,\frac{1}{\beta-1},\frac{\beta}{\beta-1},-\left(\frac{\lambda_1\beta r_0^{\beta-1}}{1-r_0^\beta}\right)^2\right) \tag{20}$$

Таблица 5 /Table 5

Величины β, r_0, R_s, R_h, R_p, C_{xs}, C_{xh}, C_{xp} **в зависимости от удлинения** λ/
Values of β, r_0, R_s, R_h, R_p, C_{xs}, C_{xh}, C_{xp} **as functions of elongation** λ

λ	2	4	6	8	10
β	1.183	1.3524	1.3487	1.3439	1.3408
r_0	0.3271	0.0613	0.020	0.00876	0.004578
R_s	0.3556	0.0682	0.0222	0.0097	0.0050
R_h	0.14711	0.02732	0.00897	0.003964	0.00208
R_p	0.14711	0.02732	0.00897	0.003964	0.00208
C_{xs}	0.3409	0.0984	0.04549	0.02591	0.016689
C_{xh}	0.32648	0.09836	0.04543	0.025908	0.016686
C_{xp}	0.32648	0.09836	0.04543	0.025908	0.016686

Источник: по данным авторов.

В табл. 5 представлены аналогично величины β, r_0, R_s в зависимости от удлинения λ, при которых достигается минимум C_{xs} – коэффициент сопротивления со сферическим затуплением и для сравнения C_{xh}, C_{xp} при тех же удлинениях. В табл. 5 также проведено сравнение радиуса затупления для различных случаев.

3. Свободномолекулярная модель

3.1. Степенные тела вращения

В случае свободномолекулярного модели в гиперзвуковом потоке газа можно записать (2)

$$c_p = 2\cos^2\theta + z\cos\theta, \quad z = \sqrt{\pi t_w (\gamma - 1)/\gamma}$$
$$c_\tau = 2\cos\theta\sin\theta \qquad (21)$$

Здесь t_w– температурный фактор, γ– показатель адиабаты, θ– угол между внутренней нормалью к поверхности и направлением скорости газа.

Задача ставится также как и в п. 2.1. Уравнение (4) запишется:

$$c_x = 2 + 2z\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+(dy/dx)^2}}dx \qquad (22)$$

Пусть образующая – степенная функция: $y = L\left(x/R\right)^\beta$.

Тогда уравнение (22) запишется:

$$c_x = 2 + 2z\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+\left(\lambda\beta x^{\beta-1}\right)^2}}dx = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\beta-1}, \frac{\beta}{\beta-1}, -\beta^2\lambda^2\right) \qquad (23)$$

В табл. 6 показаны величины β, α, и $\mathbf{c_x}$ в зависимости от удлинения λ.

На рис. 5. изображена зависимость $\alpha = \beta^{-1}$ от удлинения λ . При больших удлинениях эта зависимость стремится к α = 2/3=0.667, соответственно [12].

Таблица 6 / Table 6

Величины β, α, c_x в зависимости от удлинения λ /
Values of β, α, c_x as functions of elongation λ

λ	β	α	c_x
2	1.8895	0.52924	2.1168
4	1.6067	0.62239	2.06417
6	1.5511	0.6447	2.04364
8	1.5305	0.6534	2.03297
10	1.5204	0.65772	2.02646

Источник: по данным авторов.

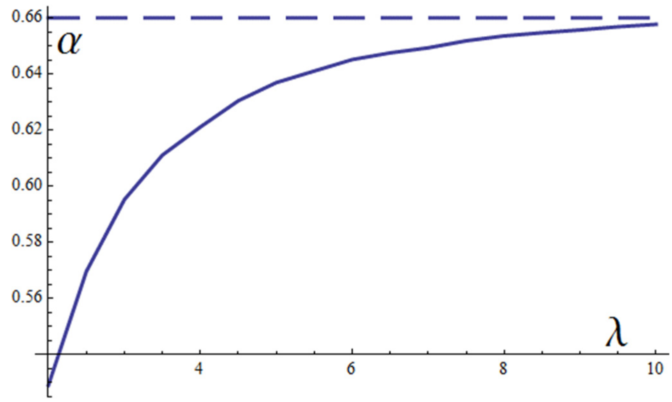


Рис. 5 / Fig. 5. Зависимость $\alpha = \beta^{-1}$ от величины удлинения λ, $t_w = 0.1$, $\gamma = 1.4$ /
Dependence of $\alpha = \beta^{-1}$ on elongation λ, $t_w = 0.1$, $\gamma = 1.4$

Источник: составлено авторами.

3.2. Степенные тела вращения с плоским затуплением

Задача ставится также как и в п. 2.2. Используя уравнение (4), (21), (22) получим:

$$c_x = 2 + zr_0^2 + 2z\int_{r_0}^{1} \frac{x}{\sqrt{1+(dy/dx)^2}}dx \tag{24}$$

Подставляя выражения (10) в (24) и вычисляя интегралы, получаем:

$$c_x = 2 + zr_0^2 + zF\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{\beta-1}, \frac{\beta}{\beta-1}, -\left(\frac{\lambda\beta}{1-r_0^{\beta}}\right)^2\right] - zr_0^2 F\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{\beta-1}, \frac{\beta}{\beta-1}, -\left(\frac{\lambda\beta r_0^{\beta-1}}{1-r_0^{\beta}}\right)^2\right] \tag{25}$$

Таблица 7 / Table 7

Величины β, r_0, c_x, c_{x0} в зависимости от удлинения λ /
Values of β, r_0, c_x, c_{x0} as functions of elongation λ

λ	2	4	6	8	10
β	1.6447	1.5621	1.53494	1.52262	1.5161
r_0	0.23526	0.08243	0.03985	0.02319	0.01510
c_x	2.11388	2.06372	2.04353	2.03293	2.02645
c_{x0}	2.1168	2.06417	2.04364	2.03297	2.02646

Источник: по данным авторов.

В табл. 7 показаны результаты расчётов величин β и r_0 в зависимости от удлинения λ, при которых достигается минимум c_x в случае свободномолекуляной модели и сравнение с величиной c_{x0} при тех же удлинениях, но без затупления ($r_0=0$).

3.3. Степенные тела вращения с параболическим, гиперболическим, сферическим затуплениями

Постановка задачи такая же, как и в п. 2.3. Используя уравнения (12), (13), (22), получим коэффициент сопротивления в свободномолекулярном случае:

$$Cx_p=2+2z\frac{\left(-1+\sqrt{1+A^2r_0^2}\right)}{A^2}+zF\left[\frac{1}{2},\frac{1}{\beta-1},\frac{\beta}{\beta-1},-B^2\right]-zr_0^2F\left[\frac{1}{2},\frac{1}{\beta-1},\frac{\beta}{\beta-1},-C^2\right] \quad (26)$$

$$A^2=\left(2\frac{\delta}{r_0^2}\right)^2;\ B^2=\left(\frac{(\lambda-\delta)\beta}{1-r_0^\beta}\right)^2;\ C^2=\left(\frac{(\lambda-\delta)\beta r_0^{\beta-1}}{1-r_0^\beta}\right)^2$$

Таблица 8 / Table 8

Величины β, r_0, $R_p c_{xp}$, c_x в зависимости от удлинения λ /
Values of β, r_0, $R_p c_{xp}$, c_x as functions of elongation λ

λ	2	4	6	8	10
β	1.60196	1.54591	1.52687	1.51794	1.51295
r_0	0.4977	0.17611	0.08855	0.053177	0.03546
R_p	0.22104	0.0723584	0.034466	0.019960	0.012977
c_{xp}	2.11634	2.06399	2.04359	2.03295	2.02645
c_x	2.11388	2.06372	2.04353	2.03293	2.02645

Источник: по данным авторов

В табл. 8 представлены величины степени β и радиуса параболического затупления R_p в зависимости от удлинения λ в свободномолекулярном случае. В табл. 8 также помещены значения коэффициента сопротивления с плоским торцом.

Расчёты проводились при температуре фактора $t_w = 0.1$ и отношения теплоёмкостей γ=1.4.

Аналогично, для гиперболического затупления, используя уравнение (15), (16), (22), получим:

$$
\begin{aligned}
c_{xs} &= 2 + \frac{zb^2}{\left(a^2+b^2\right)}\left(a_2\left(b^2+r_0^2\right) - b^2 + \frac{a^2 b}{2\sqrt{a^2+b^2}} Log\left[\frac{a^2\left(b^2+2r_0^2\right)+2b\left(b^2+r_0^2\right)\left(b+a_2\sqrt{a^2+b^2}\right)}{b^2\left(\sqrt{a^2+b^2}+b\right)^2}\right]\right) \\
c_{xp} &= zF\left(\frac{1}{2},\frac{1}{\beta-1},\frac{\beta}{\beta-1},-a_1^2\beta^2\right) - z\,r_0^2 F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{\beta-1},\frac{\beta}{\beta-1},-a_1^2\beta^2 r_0^{2\beta-2}\right) \qquad (27) \\
Cx_h &= c_{xs} + c_{xp}
\end{aligned}
$$

$$
a = \frac{b^2\lambda\beta r_0^{\beta}\sqrt{1+\dfrac{r_0^2}{b^2}}}{r_0^2 + r_0^{2+\beta}(\beta-1) - b^2\beta r_0^{\beta}\left(-1+\sqrt{1+\dfrac{r_0^2}{b^2}}\right)}; \quad R_h = \frac{b^2}{a}
$$

$$
a_1 = \frac{\lambda r_0^2}{r_0^2 + r_0^{2+\beta}(\beta-1) - b^2\beta r_0^{\beta}\left(-1+\sqrt{1+\dfrac{r_0^2}{b^2}}\right)}; \quad a_2 = \sqrt{1+\frac{a^2 r_0^2}{b^2\left(b^2+r_0^2\right)}}
$$

Таблица 9 / Table 9

Величины β, r_0, b, R_h, R_p, c_{xh}, c_{xp} **в зависимости от удлинения** λ **/**
Values of β, r_0, b, R_h, R_p, c_{xh}, c_{xp} **as functions of elongation** λ

λ	2	4	6	8	10
β	1.60136	1.54595	1.52687	1.51793	1.51294
r_0	0.49834	0.17594	0.088512	0.0531947	0.03547
b	168.282	10.2585	5.78814	2.51043	6.22285
R_h	0.221083	0.072322	0.034455	0.019958	0.012978
R_p	0.22104	0.072358	0.034466	0.019960	0.012977
c_{xh}	2.11634	2.06399	2.04359	2.03295	2.02645
c_{xp}	2.11634	2.06399	2.04359	2.03295	2.02645

Источник: по данным авторов.

В табл. 9 показаны зависимости величины β, r_0 и b от удлинения λ, при которых достигается минимум c_{xh}. В табл. 9 также проведено сравнение значений c_{xp}, c_{xh}. Кроме того, в Таблице также помещены величины радиусов затупления R_p и R_h. Заметим что коэффициенты сопротивления c_{xp}, c_{xh} и радиусы затупления в критической точке совпадают в обоих случаях.

Для случая сферического затупления используя уравнения (18), (19), (22), получим следующую формулу коэффициента сопротивления:

$$Cx_s = 2 + \frac{2z}{3R_s}\left[R_s^3 - \left(R_s^2 - r_0^2\right)^{3/2}\right] + \\ + zF\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\beta-1}, \frac{\beta}{\beta-1}, -\left(\frac{\lambda_1\beta}{1-r_0^\beta}\right)^2\right) - zr_0^2 F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\beta-1}, \frac{\beta}{\beta-1}, -\left(\frac{\lambda_1\beta r_0^{\beta-1}}{1-r_0^\beta}\right)^2\right) \quad (28)$$

Таблица 10 / Table 10

Величины β, r_0, R_s, R_h, R_p, c_{xs}, c_{xh}, c_{xp} в зависимости от удлинения λ /
Values of β, r_0, R_s, R_h, R_p, c_{xs}, c_{xh}, c_{xp} as functions of elongation λ

λ	2	4	6	8	10
β	1.1	1.4824	1.5078	1.50967	1.508
r_0	0.51122	0.1821	0.0874	0.0506	0.03283
R_s	0.5354	0.19382	0.09337	0.05406	0.03507
R_h	0.221083	0.072322	0.034455	0.019958	0.012978
R_p	0.22104	0.072358	0.034466	0.019960	0.012977
c_{xs}	2.11913	2.06439	2.04367	2.03298	2.02647
c_{xh}	2.11634	2.06399	2.04359	2.03295	2.02645
c_{xp}	2.11634	2.06399	2.04359	2.03295	2.02645

Источник: по данным авторов.

В табл. 10 показаны минимальные коэффициенты сопротивления c_{xs} для сферического затупления, полученные по формуле (28). В этой таблице проведено сравнение радиуса затупления между сферическим затуплением тела вращения и параболическим, гиперболическим случаями в свободномолекулярном режиме. Очевидно, что значения коэффициента сопротивления для сферического и параболического затуплений близки. А значения для гиперболического и параболического затуплений совпадают.

На рис. 6, 7 изображены зависимости R_s, R_p и R_h от удлинения тела λ для разных случаев.

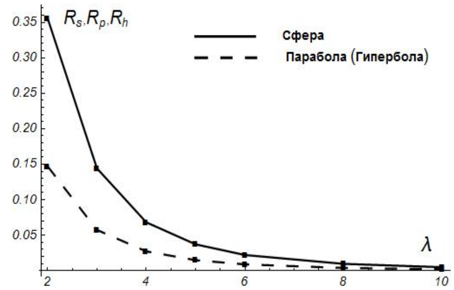


Рис. 6 / Fig. 6. Формула Ньютона / Newton's formula

Источник: составлено авторами

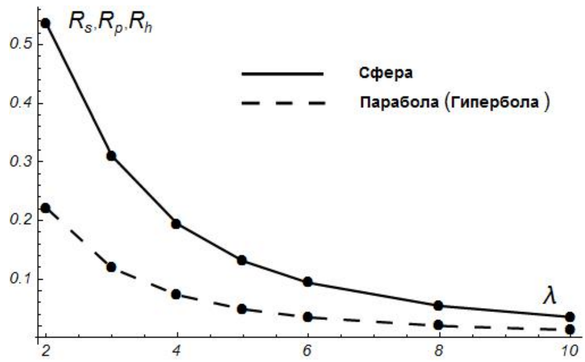


Рис. 7 / Fig. 7. Свободномолекулярная модель / Free molecular model

Источник: составлено авторами

Отметим что, радиусы затупления монотонно уменьшаются с увеличением λ для всех случаев (сферическое, параболическое, гиперболическое затупление). Более того, при увеличении удлинения λ радиус кривизны сферического затупления снижается существенно быстрее по сравнению с другими случаями. При больших удлинениях λ, радиус затупления стремится к нулю для всех случаев.

Заключение

В данной работе сравнивают силы минимальных сопротивлений для тела вращения со степенной образующей и для затупленных тел вращения в высокоскоростном потоке разреженного газа на основе нескольких локальных моделей. Решением вариационной задачи определяется степень в образующей тела минимального сопротивления и радиус затупления в критической точке в зависимости от удлинения.

Сравнение показывает, что во всех вариантах для случая гиперзвукового свободномолекулярного течения при больших удлинениях показатель степени β стремится к величине β=1.5, а в случае формулы Ньютона к β=1.333. Причём значения коэффициента минимального сопротивления для сферического и параболического затуплений близки. А значения для гиперболического и параболического затуплений совпадают.

Радиус затупления монотонно уменьшается с увеличением λ для всех случаев (сферическое, параболическое, гиперболическое затупление). Для одного и того же удлинения затупленные по сфере тела вращения минимального сопротивления имеют наибольший радиус затупления, что способствует уменьшению теплового потока в критической точке [17].

Статья поступила в редакцию 19.09.2022 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ньютон И. Математические начала натуральной философии. М.: Наука, 1989. 688 с.
2. Черный Г. Г. Течение газа с большой сверхзвуковой скоростью. М.: Физматгиз, 1959. 220 с.
3. Крайко А. Н., Пудовкин Д. Е., Якунина Г. Е. Теория аэродинамических форм, близких к оптимальным. М.: Янус-К, 2001. 132 с.
4. Миеле А. Теория оптимальных аэродинамических форм. М.: Мир, 1969. 508 с.
5. Лунев В. В. Гиперзвуковая аэродинамика. М.: Машиностроение, 1975. 328 с.
6. Остапенко Н. А., Якунина Г. Е. О телах наименьшего сопротивления, двигающихся в средах при наличии закона локальности // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 1992. № 1. С. 95–106.
7. Черноусько Ф. Л., Баничук Н. В. Вариационные задачи механики и управления. М.: Наука, 1973. 240 с.
8. Бунимович А. И., Якунина Г. Е. Исследование формы поперечного контура конического пространственного тела минимального сопротивления, движущегося в разреженном газе // Известия Академии наук СССР. Механика жидкости и газа. 1986. № 5. С. 112–117.
9. Якунина Г. Е. К построению оптимальных пространственных форм в рамках модели локального взаимодействия // Прикладная математика и механика. 2000. № 64. № 2. С. 299–310.
10. Таковицкий С. А. Аналитическое решение задачи минимизации волнового сопротивления осесимметричной носовой части в рамках локальной линеаризации // Прикладная математика и механика. 2018. Т. 82. № 6. С. 775–782. DOI: 10.31857/S003282350002741-5.
11. Благосклонов В. И., Гродзовский Г. Л. Осесимметричное обтекание тел вращения степенной формы при сверхзвуковых скоростях набегающего потока // Ученые записки ЦАГИ. 1974. Т. V. № 6. С. 6–22.
12. Горелов С. Л., Нгуен В. Л. Тело вращения минимального аэродинамического сопротивления в гиперзвуковом потоке разреженного газа // Труды МАИ (сетевое научное издание). 2020. № 113. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=117962 (дата обращения: 22.09.2022). DOI: 10.34759/trd-2020-113-4.
13. Баранцев Р. Г. Взаимодействие разреженных газов с обтекаемыми поверхностями. М.: Наука, 1975. 342 с.
14. Галкин В. С., Ерофеев А. И., Толстых А. И. Приближенный метод расчета аэродинамических характеристик тел в гиперзвуковом потоке разреженного газа // Труды ЦАГИ. 1977. Вып. 1833. С. 6–10.
15. Гусев В. Н., Коган М. Н., Перепухов В. А. О подобии и изменении аэродинамических характеристик в переходной области при гиперзвуковых скоростях потока // Ученые записки ЦАГИ. 1970. Т. 1. № 1. С. 24–33.
16. Горелов С. Л., Нгуен В. Л. Затупленное осесимметричное тело минимального сопротивления в гиперзвуковом потоке разреженного газа // Труды МФТИ. 2021. Т. 13. № 1 (49). С. 96–107. DOI: 10.53815/20726759_2021_13_1_96.
17. Горелов С. Л., Нгуен В. Л. Тепловой поток в критической точке осесимметричных тел минимального сопротивления // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2021. № 4. С. 43–53. DOI: 10.18384/2310-7251-2021-4-43-53.

REFERENCES

1. Newton I. *Matematicheskie nachala natural'noi filosofii* [Mathematical principles of natural philosophy]. Moscow, Nauka Publ., 1989. 688 p.
2. Chernyi G. G. *Techenie gaza s bol'shoi sverkhzvukovoi skorost'yu* [Course of gas with a high supersonic speed]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1959. 220 p.
3. Krayko A. N., Pudovkin D. E., Yakunina G. E. *Teoriya aerodinamicheskikh form, blizkikh k optimal'nym* [Theory of close-to-optimal aerodynamic forms]. Moscow, Yanus-K Publ., 2001. 132 p.
4. Miele A. *Teoriya optimal'nykh aerodinamicheskikh form* [Theory of optimum aerodynamic shapes]. Moscow, Mir Publ., 1969. 508 p.
5. Lunev V. V. *Giperzvukovaya aerodinamika* [Hypersonic aerodynamics]. Mosocw, Mashinostroyeniye Publ., 1975. 328 p.
6. Ostapenko N. A., Yakunina G. E. [Least-drag bodies moving in media subject to locality hypothesis]. In: *Izvestiya Rossiyskoi akademii nauk. Mekhanika zhidkosti i gaza* [Fluid Dynamics], 1992, no. 1, pp. 95–106.
7. Chernous'ko F. L., Banichuk N. V. *Variatsionnye zadachi mekhaniki i upravleniya* [Variational problems of mechanics and control]. Moscow, Nauka Publ., 1973. 240 p.
8. Bunimovich A. I., Yakunina G. E. [Investigation of the shape of the transverse contour of a conical spatial body of minimal resistance moving in a rarefied gas]. In: *Izvestiya Akademii nauk SSSR. Mekhanika zhidkosti i gaza* [Fluid Dynamics], 1986, no. 5, pp.112–117.
9. Yakunina G. E. [On the construction of optimal spatial forms within the framework of the local interaction model]. In: *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Journal of Applied Mathematics and Mechanics], 2000, no. 64, no. 2, pp. 299–310.
10. Takovitskiy S. A. [Analytical solution to the wave-drag minimization problem for an axisymmetric fore-body using local linearization]. In: *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Journal of Applied Mathematics and Mechanics], 2018, vol. 82, no. 6, pp. 775–788. DOI: 10.31857/S003282350002741-5.
11. Blagosklonov V. I., Grodzovskiy G. L. [Axisymmetric flow past power-law bodies of revolution at supersonic velocities of the oncoming flow]. In: *Uchenye zapiski TSAGI* [Scientific Notes of Central Aerohydrodynamic Institute], 1974, vol. V, no. 6, pp. 6–22.
12. Gorelov S. L., Nguyen V. L. [Rotation body of minimal aerodynamic drag in hypersonic rarefied gas flow]. In: *Trudy MAI (setevoe nauchnoe izdanie)* [Electronic journal “Trudy MAI”], 2020, no. 113. Available at: https://trudymai.ru/published.php?ID=117962 (accessed: 22.09.2022). DOI: 10.34759/trd-2020-113-4.
13. Barantsev R. G. *Vzaimodeistvie razrezhennykh gazov s obtekayemymi poverkhnostyami* [The interaction of sparse gases with streamlined surfaces]. Moscow, Nauka Publ., 1975. 342 p.
14. Galkin V. S., Erofeev A. I., Tolstykh A. I. [An approximate method for calculating the aerodynamic characteristics of bodies in a hypersonic rarefied gas flow]. In: *Trudy TSAGI* [Proceedings of Central Aerohydrodynamic Institute], 1977, Iss. 1833, pp. 6–10.
15. Gusev V. N., Kogan M. N., Perepukhov V. A. [On the similarity and change of aerodynamic characteristics in the transition region at hypersonic flow velocities]. In: *Uchenye zapiski TSAGI* [Scientific Notes of Central Aerohydrodynamic Institute], 1970, vol. 1, no. 1, pp. 24–33.
16. Gorelov S. L., Nguyen V. L. [Blunted axisymmetric body with a minimal resistance in a hypersonic rarefied gas flow]. In: *Trudy MFTI* [Proceedings of MIPT – Proceedings of Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University)], 2021, vol. 13, no. 1 (49), pp. 96–107. DOI: 10.53815/20726759_2021_13_1_96.

17. Gorelov S. L., Nguyen V. L. [Heat flux at a critical point of axisymmetric bodies of minimum resistance]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-Matematika* [Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics 2021], no. 4, pp. 43–53. DOI: 10.18384/2310-7251-2021-4-43-53.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Горелов Сергей Львович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры компьютерного моделирования Московского физико-технического института (национального исследовательского университета);
e-mail: gorelovsl@yandex.ru;
Нгуен Ван Лам – аспирант кафедры компьютерного моделирования Московского физико-технического института (национального исследовательского университета);
e-mail: lamvqtc1990@gmail.com

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Sergey L. Gorelov – Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Department of Computer Modeling, Moscow Institute of Physics and Technology;
e-mail: gorelovsl@yandex.ru;
Van Lam Nguyen – Postgraduate Student, Department of Computer Modeling, Moscow Institute of Physics and Technology;
e-mail: lamvqtc1990@gmail.com.

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Горелов С. Л., Нгуен В. Л. Степенные тела минимального сопротивления в газовом потоке // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2022. № 4. С. 17–34.
DOI: 10.18384/2310-7251-2022-4-17-34.

FOR CITATION

Gorelov S. L., Nguyen V. L. Power bodies of minimum resistance in a gas flow. In*: Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*, 2022, no. 4, pp. 17–34.
DOI: 10.18384/2310-7251-2022-4-17-34.

УДК 521
DOI: 10.18384/2310-7251-2022-4-35-44

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКОГО ТЕЛА В НЕОДНОРОДНОМ ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ

Антонов В. С., Калашников Е. В.

Московский государственный областной университет
141014, Московская область, г. Мытищи, ул. Веры Волошиной, д. 24, Российская Федерация

Аннотация
Цель. Моделирование поведения нескольких тел с ньютоновским потенциалом взаимодействия. Выделение в этой системе двух тел с целью изучения их сближения.
Процедура и методы исследования. Строится система дифференциальных уравнений второго порядка. Эти уравнения переводятся в систему алгебраических уравнений. В системе нескольких тел выделяются два тела. Исследуется взаимное поведение этих тел путём вариации масс остальных тел системы. Всё исследование строится на языке Python.
Результаты проведённого исследования. Найдены траектории движения тел в модели, в неоднородном гравитационном поле, сформированном самими этими телами. Найдены траектории сближения двух выделенных тел. Проведены исследования устойчивости такой траектории.
Теоретическая и/или практическая значимость. В системе нескольких тел, взаимодействующих через гравитационные потенциалы между собой, выделена подсистема двух тел. Рассмотрена устойчивость орбиты сближения двух тел в поле действия остальных тел выбранной системы. Практическая значимость выражена в исследовании безопасности Земли.
Ключевые слова: ньютоновский потенциал, моделирование системы нескольких тел, сближение двух тел

SIMULATION OF THE MOTION OF A COSMIC BODY IN AN INHOMOGENEOUS GRAVITATIONAL FIELD

V. Antonov, E. Kalashnikov

Moscow Region State University
ul. Very Voloshinoi 24, Mytishchi 141014, Moscow Region, Russian Federation

Abstract
Aim. We simulate the behavior of several bodies with Newtonian interaction potential and identify two bodies in this system in order to study their convergence.
Methodology. A system of second-order differential equations is constructed. These equations are translated into a system of algebraic equations. In a system of several bodies, two bodies are distinguished. The mutual behavior of these bodies is investigated by varying the masses of the remaining bodies of the system. All research is based on the Python language.

Results. The trajectories of motion of bodies in an inhomogeneous gravitational field formed by these bodies themselves are found. The approach trajectories of two selected bodies are obtained. The stability of such a trajectory is studied.
Research implications. In a system of several bodies interacting through gravitational potentials, a subsystem of two bodies is singled out. The stability of the orbit of rendezvous of two bodies in the field of action of other bodies of the chosen system is considered. The practical significance is expressed in the study of the security of the Earth.
Keywords: Newtonian potential, modeling of a system of several bodies, convergence of two bodies

Введение

Столкновение малых космических тел (комет, астероидов, метеоров) с планетами играет огромную роль в формировании на ранних стадиях самих этих планет [14; 15]. Особое место в задачах возможного столкновения с малыми космическими объектами занимают задачи безопасного существования планеты Земля [8; 10; 12; 13; 15; 16]. Все эти проблемы относятся к общим задачам небесной механики и являются хорошо разработанной многовековой областью знаний [1; 3–6]. Тем не менее, исследование взаимодействия многих тел и выделение из этой системы многих тел только двух тел, которые могут столкнуться, всегда будет представлять как познавательный, так и практический интерес.

В качестве модели системы многих тел рассматриваем некоторые планеты солнечной системы и само Солнце. В эту систему входит комета. Все эти тела формируют неоднородное гравитационное поле, в котором движутся они сами. Однако, из-за огромной разницы в массах Солнца и его планет (табл. 1), о моделировании влияния неоднородности гравитационного поля на остальные тела солнечной системы можно говорить только после перехода к системе отсчёта, связанной с Солнцем. Таким образом, целью нашей работы является исследование взаимодействия нескольких тел, массы которых равны массам планет солнечной системы, в которую входит комета. И наша задача состоит в том, чтобы из этой системы многих тел с разными массами, формирующими неоднородное гравитационное поле, выделить только два тела: планету Земля и комету, и выяснить, как они будут вести себя при учёте воздействия остальных тел.

1. Модель

Планеты солнечной системы обращаются относительно Солнца приблизительно в одной плоскости, называемой плоскостью эклиптики [7; 9; 11][2]. В качестве тел, формирующих неоднородное поле, рассматриваем Солнце, Землю, Марс, Юпитер, Сатурн (см. табл. 1). Поскольку все эти тела лежат в одной плоскости, то будем рассматривать двумерную задачу. Соответственно, при рассмотрении кометы, входящей в эту плоскость, будем рассматривать только проекции

[2] См. также: Солнце и солнечная система // Большая энциклопедия астрономии / Александрова О. В., Аюков С. В., Засов А. В. и др.; сост. Л. А. Феоктистов. М.: Росмэн-Пресс, 2009. С. 80–129..

её движения на эту плоскость. Декартова система отсчёта совмещена с Солнцем (все координаты тел даны в этой системе отсчёта).

Таблица 1 / Table 1

Параметры k – ых тел, их начальные положения (x_{0k}, y_{0k}) и начальные скорости (V_{0kx}, V_{0ky}) / Parameters of kth bodies, as well as their initial positions (x_{0k}, y_{0k}) and initial velocities (V_{0kx}, V_{0ky}).

k	Тела	$m, kg \times 10^{28}$	x_{0k}, $km \times 10^6$	y_{0k}, $km \times 10^6$	V_{0kx}, km/s	V_{0ky}, km/s
1	Солнце	200	0	0	0	0
2	Земля	0.0006	-14	133	29	2
3	Марс	0.001	-194	-159	-9	23
4	Юпитер	0.2	13	536	12	-6
5	Сатурн	0.1	31	1230	8	-3
6	Комета	2.2×10^{-14}	2100	-1600	-0.02	0.015

Источник: составлено авторами на основе [2; 4; 9; 11].

Вся задача по влиянию неоднородного гравитационного поля на тела (планеты солнечной системы) распадается на две части. В первой части рассматривается движение выбранных планет и кометы в системе отсчёта, связанной с Солнцем. А вторая часть задачи связана с рассмотрением движения кометы относительно Земли в неоднородном гравитационном поле, созданном Солнцем и остальными планетами, используемыми в модели.

2 *a*. Движение тел относительно Солнца

Для решения первой части задачи рассматриваем движение выбранных планет и кометы в системе отсчёта, связанной с Солнцем. Используем второй закон Ньютона и закон Всемирного тяготения. В системе отсчёта связанной с Солнцем для проекции на ось x для i-го тела уравнение движения выглядит так:

$$\begin{cases} M_i \, {d^2x_i}/{dt^2} = -\gamma_{i1} \, {M_iM_1}/{(x_i - x_1)^2} - \gamma_{i2} \, {M_iM_2}/{(x_i - x_2)^2} - \cdots - \gamma_{ik} \, {M_iM_k}/{(x_i - x_k)^2} \\ M_i \, {d^2y_i}/{dt^2} = -\gamma_{i1} \, {M_iM_1}/{(y_i - y_1)^2} - \gamma_{i2} \, {M_iM_2}/{(y_i - y_2)^2} - \cdots - \gamma_{ik} \, {M_iM_k}/{(y_i - y_k)^2} \\ M_i \neq M_k \\ \gamma_{ik} = {F_{ik}(x_i - x_k)^2}/{M_iM_k} = {F_{ik}{r_{ik}}^2}/{M_iM_k} \end{cases} \quad (1)$$

γ_{ik} – гравитационная постоянная взаимодействия i-го тела тела с k-ым телом. Начальные условия для системы уравнений (1) приведены в табл. 1. Для планет начальные условия находили из условий, что они обращаются относительно Солнца по эллипсоидам [2; 4; 6; 9; 11].

Интегральные кривые, полученные из (1) и начальных условий (табл. 1), образуют в нашем случае систему из 12 уравнений.

$$\begin{cases} x_i = x_{i0} + \int_0^t v_{i0}dt + \int_0^t dt \int_0^t d\tau \sum_k^N \gamma_{ik} M_k (x_i - x_k)({r_{ik}}^{-3}) \\ y_i = y_{i0} + \int_0^t v_{i0}dt + \int_0^t dt \int_0^t d\tau \sum_k^N \gamma_{ik} M_k (y_i - y_k)({r_{ik}}^{-3}) \end{cases} \quad (2)$$

Эта система уравнений позволяет найти траектории объектов – положение, скорость и ускорение каждого тела в любой момент времени. Чтобы найти эти траектории и их визуализировать, нужно перейти от системы (2) к дискретной форме этой системы:

$$\begin{cases} x_i = x_{0i} + \sum_{i=0}^k \frac{x_i}{t_i} + \sum_{i=0}^k \sum_{i=0}^k (\frac{x_i}{\tau_i})/t_i \\ y_i = y_{0i} + \sum_{i=0}^k \frac{y_i}{t_i} + \sum_{i=0}^k \sum_{i=0}^k (\frac{y_i}{\tau_i})/t_i \end{cases} \quad (3)$$

Минимальный временной интервал равен $\frac{1}{50}s$, а число итераций равно $n = 15000$. На рис. 1 приведены фрагменты траекторий в произвольный момент времени $t\ + 4320$ часов. При этом начальному (выбранному) моменту времени t соответствуют положения тел с индексом «1». Положение тел через 4320 часа обозначены индексом «2». В качестве тел выбраны планеты солнечной системы, а легчайшее тело соответствует комете Галлея (см. табл. 1).

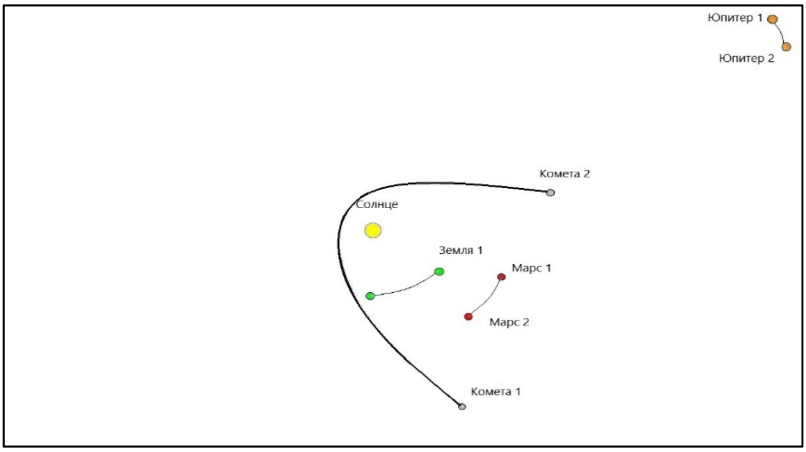


Рис. 1 / Fig. 1. Положение тел в момент времени t и $t\ + 4320$ часов. Индексы «1» и «2» соответствуют начальному и конечному положению тел. Фрагменты траектории кометы относительно Солнца соответствуют интервалу времени, равному 4320 часам (180 дням) / Position of the bodies at time t and $t\ + 4320$ hours. Indices 1 and 2 correspond to the initial and final positions of the bodies. Fragments of the comet's trajectory relative to the Sun correspond to a time interval equal to 4320 hours (180 $days$).

Источник: составлено авторами.

2 *b*. Движение кометы относительно Земли

Как следует из рис. 1 комета очень близко (визуально) проходит около Земли. В таком случае возникает необходимость выяснить близость этих двух тел, т. е. определить скорость данной кометы и её положение относительно Земли. Для этого необходимо перейти к системе отсчёта, связанной с Землёй (рис. 2).

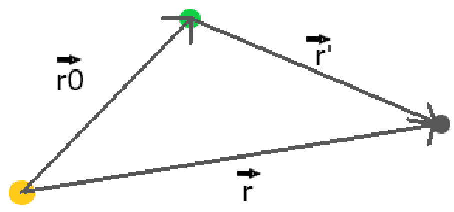


Рис. 2 / Fig. 2. Переход от гелиоцентрической системы к геоцентрической системе.

Здесь r – радиус-вектор кометы относительно Солнца, r_0 – радиус-вектор Земли относительно Солнца и r'– радиус вектор кометы относительно Земли / Transition from a heliocentric system to a geocentric system. Here r is the radius vector of the comet relative to the Sun, r_0 is the radius vector of the Earth relative to the Sun, and r' is the radius vector of the comet relative to the Earth.

Источник: составлено авторами

Поскольку все положения зависят от времени, то мы переходим к интегральной форме для геоцентрической системы координат и получаем:

$$x'_i = x'_{i_0} + \int_0^t v'_{i_0} dt + \int_0^t \int_0^t \left(\left(\frac{d^2 x'_i}{d\tau^2} \right) d\tau \right) dt \tag{4}$$

Здесь v_x – скорость кометы относительно Солнца, v_{x0}– скорость Земли относительно Солнца и v'_x – скорость кометы относительно Земли.

Далее, для построения программы и получения вида траектории сближения кометы с Землёй переведём выражение (4) к дискретной форме в системе отсчёта, связанной с Землёй:

$$\begin{cases} x'_i = x'_{i0} + \sum_{i=0}^{k} \frac{x'_i}{t_i} + \sum_{i=0}^{k} \sum_{i=0}^{k} (\frac{x'_i}{\tau_i})/t_i \\ y'_i = y'_{i0} + \sum_{i=0}^{k} \frac{y'_i}{t_i} + \sum_{i=0}^{k} \sum_{i=0}^{k} (\frac{y'_i}{\tau_i})/t_i \end{cases} \tag{5}$$

Здесь также минимальный временной интервал равен $\frac{1}{50}s$, а число итераций равно $n = 15000$. Зависимость расстояния «Земля – комета» от времени приведена на рис. 3.

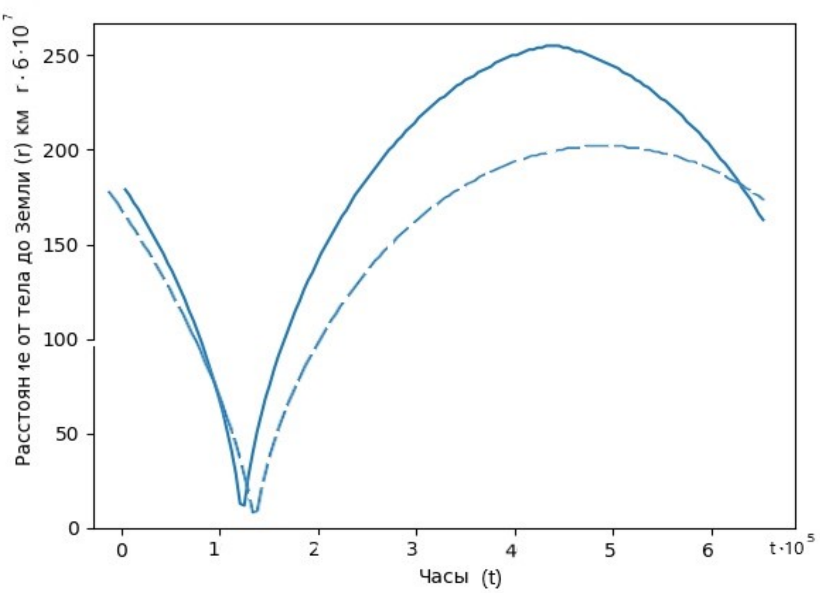


Рис. 3 / Fig. 3. Траектория сближения кометы с Землёй. Сплошная линия соответствует реальным массам из табл. 1. Штриховая линия соответствует изменённым массам (масса Солнца уменьшена в 2 раза, масса Земли увеличена в 200 раз) / Trajectory of the comet's approach to the Earth. The solid curve corresponds to the real masses from Table 1. The dashed curve corresponds to the changed masses (the mass of the Sun is reduced by 2 times, and the mass of the Earth is increased by 200 times).

Источник: составлено авторами

Траектория сближения кометы с Землёй оказывается достаточно устойчивой. Это означает, что влияние вариации масс планет, создающих неоднородное гравитационное поле, действующее на комету, оказывается не очень значительным. Чтобы добиться «видимого» изменения траектории кометы относительно Земли пришлось существенно варьировать массы тел, включённых в саму систему многих тел, заданную в табл. 1. Оказалось, что при уменьшении массы Солнца в 2 раза и увеличении массы Земли в 200 раз возникла возможность увидеть существенное изменение траектории сближения кометы с Землёй. При этом, конечно же, изменяется и общая картина поведения тел, соответствующая рис. 1. Рассматривая движение кометы вблизи Земли, получаем скорость 65,6 км/с. Данная скорость соотносится с экспериментальной [2; 6; 10; 12] с точностью в 7 процентов.

Приложение

Все вычисления велись на языке Python. Основные части программного кода, позволяющие проводить данные операции, представлены на рис. 4. и рис. 5. В первых пяти строчках (рис. 4) происходит расчёт расстояния от данного тела до планет по формуле эллипса, а в последних двух происходит нахождение ускорения в данный момент времени.

```
r4 = sqrt((x - X7) ** 2 + (y - Y7) ** 2)
r = sqrt((x - X0) ** 2 + (y - Y0) ** 2)
r1 = sqrt((x - a) ** 2 + (y - b) ** 2)
r2 = sqrt((x - X5) ** 2 + (y - Y5) ** 2)
r3 = sqrt((x - X6) ** 2 + (y - Y6) ** 2)
ax = (M0 * (X0 - x) / r ** 3)+(M1 * (a - x) / r1 ** 3)+(M3 * (X5 - x) / r2 ** 3)+(M4 * (X6 - x) / r3 ** 3)+(M5 * (X7 - x) / r4 ** 3)
ay = (M0 * (Y0 - y) / r ** 3)+(M1 * (b - y) / r1 ** 3)+(M3 * (Y5 - y) / r2 ** 3)+(M4 * (Y6 - y) / r3 ** 3)+(M5 * (Y7 - y) / r4 ** 3)
```

Рис. 4 / Fig. 4. Фрагмент программы для вычисления расстояния от тела до планеты и расчёт ускорения тела в данный момент времени / Fragment of a program for calculating the distance from a body to a planet and calculating the acceleration of a body at a given time

Источник: составлено авторами

На рис. 5 представлено задание движения планет.

```
draw.circle(planet5, Color(Saturn), (X2, Y2), 5)
if h <= 360*(192*2):
    angle2 = (h * (3.14 / (360*192))+80)  #
    X6 = 770 * numpy.cos(angle2) + X0
    Y6 = 700 * numpy.sin(angle2) + Y0 - 20
    h += 3
else:
    h = 0
```

Рис. 5 / Fig. 5. Фрагмент программы для вычисления движения одной из планет (Сатурн). Здесь h – масштаб периода, numpy.cos/sin – расчёт косинуса и синуса / Fragment of a program for calculating the motion of one of the planets (Saturn). Here h is the period scale, and numpy.cos/sin is the calculation of cosine and sine

Источник: составлено авторами

Заключение

Моделирование поведения нескольких (шести) тел в неоднородном гравитационном поле, которое эти тела сами формируют, представляет интерес хотя бы из-за существенной разницы масс самих этих тел. В качестве модели системы многих тел, взаимодействующих между собой через ньютоновский потенциал, мы рассматривали лишь некоторые планеты солнечной системы, комету и само Солнце. Все эти тела формируют неоднородное гравитационное поле, в котором движутся они сами. Однако огромная разница в массах Солнца и его планет (табл. 1) сразу же заставляет перейти к системе отсчёта, связанной с Солнцем. И только после такого перехода открывается возможность анализировать влияние неоднородности гравитационного поля, созданного планетами, на сами эти планеты. Оказалось, что траектории планет и тел, входящих в систему «со стороны» являются достаточно устойчивыми объектами. Эти траектории оказались настолько устойчивыми, что для того, чтобы изменить траекторию кометы потребовалось изменить (уменьшить в два раза) массу Солнца и (увеличить в 200 раз) массу Земли. Такие вариации масс лишний раз доказывают, что определяющим воздействием на все тела в солнечной системе является Солнце с его огромной массой (табл. 1).

Статья поступила в редакцию 28.10.2022 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Авдюшев В. А. Численное моделирование орбит небесных тел. Томск: Издательский Дом Томского государственного университета, 2015. 335 с.
2. Беляев Н. А., Чурюмов К. И. Комета Галлея и её наблюдение. М.: Наука, 1985. 272 с.
3. Бутиков Е. И. Компьютерное моделирование движений космических тел. СПб.: СПбГУ, 2016. 303 с.
4. Лукьянов Л. Г., Ширмин Г. И. Лекции по небесной механике. Алматы: Эверо, 2009. 227 с.
5. Поляхова Е. Н. Небесная механика в трудах русских ученых: от М. В. Остроградского до А. Н. Крылова; изд. 2-е, испр. и доп. М.: ЛЕНАНД, 2019. 224 с.
6. Поляхова Е. Н., Вьюга А. А., Титов В. Б. Орбитальный космический полет в задачах с подробными решениями и в числах. М.: ЛЕНАНД, 2016. 256 с.
7. Calvert J. B. Celestial Mechanics. University of Denver, 2003 [Электронный ресурс]. URL: https://web.archive.org/web/20060907120741/http://www.du.edu/~jcalvert/phys/orbits.htm (дата обращения: 07.09.2022).
8. Chirikov B. V., Vecheslavov V. V. Chaotic dynamics of Halley comet // Astronomy Astrophysics. 1989. Vol. 221. No. 1. P. 146–154.
9. Fitzpatrick R. An Introduction to Celestial Mechanics. Cambridge: Cambridge University Press, 2012. 216 p.
10. Ipatov S. I., Mather J. C. Comet and asteroid hazard to the terrestrial planets // Advances in Space Research. 2004. Vol. 33. Iss. 9. P. 1524–1533. DOI: 10.1016/S0273-1177(03)00451-4.
11. Morbidelli A. Modern Celestial Mechanics. Aspects of Solar System Dynamics; 1st edition. Boca Raton, FL: CRC Press, 2011. 355 p.
12. Post-perihelion observations of comet 1P/Halley / Hainaut O. R., Delsanti A., Meech K. J., West R. M. // Astronomy and Astrophysics. EDP Sciences, 2004. Vol. 417. P. 1159–1164. DOI: 10.1051/0004-6361:20035658.
13. Protecting the Earth against Collisions with Asteroids and Comet Nuclei. Proceedings of the International Conference “Asteroid-Comet Hazard-2009” / eds. Finkelstein A. M., Huebner W. F., Shor V. A. Saint Petersburg: Nauka, 2010. 427 p.
14. Tolstikhin I., Kramers J. The Evolution of Matter. From the Big Bang to the Present Day Earth. Cambridge: Cambridge University Press, 2008. 521 p.

15. Worlds in Interaction: Small Bodies and Planets of the Solar System: Proceedings of the Meeting “Small Bodies in the Solar System and their Interactions with the Planets” (Mariehamn, Finland, August 8-12, 1994) / eds. H. Rickman, M. J. Valtonen. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1996. 508 p.
16. Zheng J. Q., Valtonen M. J. On the probability that a comet that has escaped from another solar system will collide with the Earth // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 1999. Vol. 304. Iss. 3. P. 579–582. DOI: 10.1046/j.1365-8711.1999.02337.x.

REFERENCES

1. Avdyushev V. A. *Chislennoe modelirovanie orbit nebesnykh tel* [Numerical modeling of the orbits of celestial bodies]. Tomsk, Tomsk State University Publ., 2015. 335 p.
2. Belyayev N. A., Churyumov K. I. *Kometa Galleya i ee nablyudenie* [Halley’s Comet and its observation]. Moscow, Nauka publ., 1985. 272 p.
3. Butikov Ye. I. *Komp'yuternoe modelirovanie dvizhenii kosmicheskikh tel* [Computer simulation of motions of space bodies]. St. Petersburg, St. Petersburg State University Publ., 2016. 303 p.
4. Luk'yanov L. G., Shirmin G. I. *Lektsii po nebesnoi mekhanike* [Lectures on Celestial Mechanics]. Almaty, Evero Publ., 2009. 227 p.
5. Polyakhova Ye. N. *Nebesnaya mekhanika v trudakh russkikh uchenykh: ot M. V. Ostrogradskogo do A. N. Krylova* [Celestial mechanics in the works of Russian scientists: from M. V. Ostrogradsky to A. N. Krylov]. Moscow, LENAND Publ., 2019. 224 p.
6. Polyakhova E. N., V'yuga A. A., Titov V. B. *Orbital'nyi kosmicheskii polet v zadachakh s podrobnymi resheniyami i v chislakh* [Orbital space flight in problems with detailed solutions and in numbers]. Moscow, LENAND Publ., 2016. 256 p.
7. Calvert J. B. Celestial Mechanics. University of Denver, 2003. Available at: https://web.archive.org/web/20060907120741/http://www.du.edu/~jcalvert/phys/orbits.htm (accessed: 07.09.2022).
8. Chirikov B. V., Vecheslavov V. V. Chaotic dynamics of Halley comet. In: *Astronomy Astrophysics*, 1989, vol. 221, no. 1, pp. 146–154.
9. Fitzpatrick R. An Introduction to Celestial Mechanics. Cambridge, Cambridge University Press, 2012. 216 p.
10. Ipatov S. I., Mather J. C. Comet and asteroid hazard to the terrestrial planets. In: *Advances in Space Research*, 2004, vol. 33, iss. 9, pp. 1524–1533. DOI: 10.1016/S0273-1177(03)00451-4.
11. Morbidelli A. Modern Celestial Mechanics. Aspects of Solar System Dynamics. Boca Raton, FL, CRC Press, 2011. 355 p.
12. Hainaut O. R., Delsanti A., Meech K. J., West R. M. Post-perihelion observations of comet 1P/Halley. In: *Astronomy and Astrophysics. EDP Sciences*, 2004, vol. 417, pp. 1159–1164. DOI: 10.1051/0004-6361:20035658.
13. Finkelstein A. M., Huebner W. F., Shor V. A., eds. Protecting the Earth against Collisions with Asteroids and Comet Nuclei. Proceedings of the International Conference “Asteroid-Comet Hazard-2009”. St. Petersburg, Nauka Publ., 2010. 427 p.
14. Tolstikhin I., Kramers J. The Evolution of Matter. From the Big Bang to the Present Day Earth. Cambridge, Cambridge University Press, 2008. 521 p.
15. Rickman H., Valtonen M. J., eds. Worlds in Interaction: Small Bodies and Planets of the Solar System: Proceedings of the Meeting “Small Bodies in the Solar System and their Interactions with the Planets” (Mariehamn, Finland, August 8-12, 1994). The Netherlands, Kluwer Academic Publishers, 1996. 508 p.

16. Zheng J. Q., Valtonen M. J. On the probability that a comet that has escaped from another solar system will collide with the Earth. In: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 1999, vol. 304, iss. 3, pp. 579–582. DOI: 10.1046/j.1365-8711.1999.02337.x.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Антонов Владислав Сергеевич – студент второго курса физико-математического факультета Московского государственного областного университета;
e-mail: vlad230805566@mail.ru;
Калашников Евгений Владимирович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительной математики и информационных технологий Московского государственного областного университета;
e-mail: ekevkalashnikov1@gmail.com

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Vladislav S. Antonov – Second-year student, Faculty of Physics and Mathematics, Moscow Region State University;
e-mail: vlad230805566@mail.ru;
Evgenii V. Kalashnikov – Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Department of Computational Mathematics and Information Technology, Moscow Region State University;
e-mail: ekevkalashnikov1@gmail.com

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Антонов В. С., Калашников Е. В. Моделирование движения космического тела в неоднородном гравитационном поле // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2022. № 4. С. 35–44.
DOI: 10.18384/2310-7251-2022-4-35-44.

FOR CITATION

Antonov V. S., Kalashnikov E. V. Simulation of the motion of a cosmic body in an inhomogeneous gravitational field. In: *Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*, 2022, no. 4, pp. 35–44.
DOI: 10.18384/2310-7251-2022-4-35-44.

УДК 534. 213.4
DOI: 10.18384/2310-7251-2022-4-45-55

ЭФФЕКТИВНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О РАСПРОСТРАНЕНИИ УЛЬТРАЗВУКА В ПОРАХ ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ, ЗАПОЛНЕННЫХ ГАЗОМ НИЗКОЙ ПЛОТНОСТИ

Козлов В. Ф.

Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)
140187, Московская обл., г. Жуковский, ул. Гагарина, д. 16, Российская Федерация

Аннотация

Целью работы является построение эффективного в практическом применении решения задачи о распространении ультразвуковых волн в порах прямоугольного сечения, заполненных разреженным газом.

Процедура и методы. Решение нестационарных двумерных уравнений газовой динамики в приближении ползущих течений строится в виде бесконечных рядов по собственным функциям, в которых нулевые члены разложений – заранее определённые функции. Число Кнудсена, определяемое как отношение длины свободного пробега в газе к характерному поперечному размеру поры, предполагается меньше либо порядка 1. Поэтому на внутренних поверхностях пор используются граничные условия, учитывающие эффекты скольжения и скачок температуры.

Результаты. Представлено модифицированное решение задачи о распространении ультразвуковых волн в порах прямоугольного сечения, заполненных разреженным газом. В отличие от ранее опубликованных результатов решение представлено быстро сходящимися рядами по собственным функциям. Проверка численными методами показала, что достаточно взять два члена разложений, чтобы обеспечить относительную точность расчётов, не превышающую 1%. Получены приближенные соотношения для собственных значений и коэффициентов двухчленных разложений, удобные для компьютерных вычислений. Также получено несколько математических результатов общего характера.

Теоретическая и/или практическая значимость. Результаты работы могут быть использованы для инженерных оценок акустических характеристик пористых материалов, эксплуатируемых при низких давлениях, а так же представляют основу для дальнейших теоретических исследований акустических свойств пористых материалов.

Ключевые слова: пора, длина свободного пробега, течение со скольжением, монохроматическая волна, частота, собственная функция, собственное значение, динамическая плотность, динамическая сжимаемость, характеристический импеданс

EFFECTIVE SOLUTION FOR ULTRASOUND PROPAGATION IN RECTANGULAR PORES FILLED WITH A RAREFIED GAS

V. Kozlov

Moscow Institute of Physics and Technology
ul. Gagarina 16, Zhukovsky 140187, Moscow Region, Russian Federation

Abstract
Aim. The aim of the paper is to construct an effective solution in practical application to the problem of ultrasonic wave propagation in rectangular-section pores filled with a rarefied gas.
Methodology. The solution to unsteady two-dimensional gas dynamics equations in the creeping flow approach is constructed in the form of infinite series of eigenfunctions, in which zero terms of expansions are predefined functions. The Knudsen number, defined as the ratio of the free path length in a gas to the characteristic transverse pore size, is assumed to be less than or on the order of unity. Therefore, boundary conditions taking into account the effects of sliding and temperature jump on the inner surfaces of the pores are used.
Results. A modified solution to the problem of ultrasonic wave propagation in rectangular-section pores filled with a rarefied gas is presented. In contrast to the previously published results, the solution is represented by rapidly converging series of eigenfunctions. Verification by numerical methods shows that only two terms of expansions are needed to ensure a relative accuracy of calculations not exceeding 1%. Approximate relations for eigenvalues and coefficients of two-term expansions convenient for computer calculations are obtained. Several general mathematical results are also presented.
Research implications. The results of the work can be used for engineering assessments of the acoustic characteristics of porous materials operated at low pressures, as well as provide a basis for further theoretical studies of the acoustic properties of porous materials.
Keywords: pore, mean free pass, slip-flow, monochromatic wave, frequency, eigenfunction, eigenvalue, dynamic density, dynamic compressibility, characteristic impedance

Введение

Задачам экспериментального и теоретического определения акустических свойств пористых материалов и сред в связи с их огромным практическим значением в современной акустике уделяется большое внимание (см., например, обзор [1]). На рубеже XX–XXI веков сначала теоретическим путём [2; 3], а затем и экспериментальными методами [4, p. 481] было показано, что пористое покрытие определённой микроструктуры может существенно увеличить протяжённость ламинарного обтекания аэродинамических поверхностей в высокоскоростных потоках воздуха. По условиям практического применения такие покрытия должны оставаться работоспособными при низких давлениях в окружающей среде, когда характерные поперечные размеры пор должны хотя бы в пределах одного порядка превышать длину свободного пробега молекул газовой фазы. Последнее означает, что в соответствующих теоретических моделях должны учитываться корпускулярные свойства газа, заполняющего поры. Решения о распространении ультразвуковых волн в порах простых геометрий, учитывающие это требование, были построены в работе [5]. В них, в частности, обобщались результаты работ [6; 7; 8], полученные ранее в приближении сплошной среды.

Для указанных выше условий газ может рассматриваться как сплошная среда за исключением тонких слоёв Кнудсена на твёрдых поверхностях. Число Кнудсена для таких режимов мало, но конечно. Для пор треугольного и прямоугольного сечений решения в [5, p. 3402] были представлены рядами по собственным функциям. Однако на практике было обнаружено, что в случае пор прямоугольного сечения такие ряды сходятся очень медленно. Чтобы достичь требуемой точности, необходимо численно решать системы, состоящие из сотен линейных алгебраических и трансцендентных уравнений. В данной статье предложена новая форма решения задачи. В ней решение представлено бесконечными, но быстро сходящимися рядами и требует существенно меньших компьютерных ресурсов. Кроме того, получены приближенные аналитические выражения для наиболее важных собственных значений и коэффициентов разложений, что при практическом использовании требует минимальных усилий.

Статья состоит из введения, четырёх разделов и заключения. В первом разделе кратко изложена постановка задачи, во втором – описывается способ представления решения быстро сходящимися рядами. В третьем разделе показано, как использовать такие ряды для расчёта акустических характеристик пор прямоугольного сечения. В четвёртом приведены результаты численного тестирования приближенных соотношений. В заключении представлено краткое резюме результатов работы.

I. Постановка задачи и предыдущее решение

В указанной выше работе [5] была рассмотрена следующая задача. Монохроматическая акустическая волна круговой частоты ω распространяется внутри бесконечной однородной поры, заполненной газом низкой плотности. Число Кнудсена, определяемое как отношение длины свободного пробега молекул газа λ к характерному поперечному размеру поры L_p $\left(\mathrm{Kn}=\lambda/L_p\right)$, предполагается малым, но конечным. Длина свободного пробега при этом определяется с помощью известного в кинетической теории разреженного газа приближенного соотношения для модели твёрдых шаров $\lambda=2\eta(\rho_0 c)$, где η – динамическая вязкость, $\overline{c}=\sqrt{8R_g T_0/\pi}$ – средняя молекулярная скорость, R_g – удельная газовая постоянная, ρ_0 и T_0 – плотность и равновесная температура газа, соответственно.

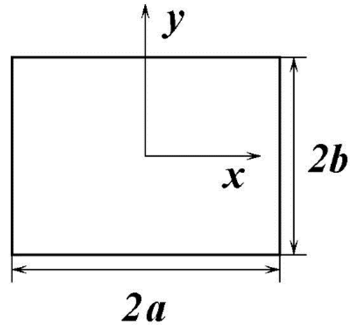


Рис. 1 / Fig. 1. Геометрия поперечного сечения поры: a – полуширина, b – полувысота прямоугольника / Geometry of the pore cross section: (a) half-width and (b) half-height of the rectangle.

Источник: подготовлено автором

Для поры прямоугольного поперечного сечения (рис. 1) точное решение [5] можно представить для удобства в несимметричной по переменным x и y форме как:

$$\tilde{u}(x,y,z) = 2\frac{\Lambda^2}{i\omega\rho_0}\frac{d\tilde{p}}{dz}\sum_{m=0}^{\infty} a_m \Psi_m\left(x,y,B_u,\Lambda\right), \tag{1a}$$

$$\tilde{T}(x,y,z) = -2\frac{\tilde{\Lambda}^2\tilde{p}}{\rho_0 C_p}\sum_{m=0}^{\infty}\tilde{a}_m\tilde{\Psi}_m\left(x,y,B_E,\tilde{\Lambda}\right), \tag{1b}$$

где $\tilde{u}(x,y,z)$ и $\tilde{T}(x,y,z)$ – комплексные амплитуды колебательной скорости и пульсаций температуры в выражениях $u(x,y,z,t)=\tilde{u}(x,y,z)\exp\left(i\omega t\right)$ и $T'(x,y,z,t)=\tilde{T}(x,y,z)\exp\left(i\omega t\right)$; $\Psi_m(x,y,B_u,\Lambda)=\dfrac{(-1)^m}{\gamma_m\beta_m^2}\left(1-\dfrac{\mathrm{ch}(\beta_m x)}{Q_m\,\mathrm{ch}\left(\beta_m/q\right)}\right)\cos(\gamma_m y)$ и $\tilde{\Psi}_m(x,y,B_E,\tilde{\Lambda})=\dfrac{(-1)^m}{\tilde{\gamma}_m\tilde{\beta}_m^2}\left(1-\dfrac{\mathrm{ch}(\tilde{\beta}_m x)}{\tilde{Q}_m\,\mathrm{ch}\left(\tilde{\beta}_m/q\right)}\right)\cos(\tilde{\gamma}_m y)$ – собственные функции.

В выражениях для собственных функций использованы следующие обозначения безразмерных параметров: $q=b/a$, $\beta_m=\sqrt{\gamma_m^2-\Lambda^2}$, $\tilde{\beta}_m=\sqrt{\tilde{\gamma}_m^2-\tilde{\Lambda}^2}$, $\Lambda=\sqrt{-i\omega\rho_0 b^2/\eta}$, $\tilde{\Lambda}=\sqrt{\mathrm{Pr}}\,\Lambda$, $Q_m=1+B_u\beta_m\,\mathrm{th}\left(\beta_m/q\right)$, $\tilde{Q}_m=1+B_E\tilde{\beta}_m\,\mathrm{th}\left(\tilde{\beta}_m/q\right)$, где Pr – число Прандтля ($\mathrm{Pr}=\eta C_p/\kappa$), C_p – удельная теплоёмкость при постоянном давлении, κ – коэффициент теплопроводности.

Неизвестные константы интегрирования a_m и $\tilde{a}_m$ в (1) удовлетворяют двум не связанным друг с другом бесконечным системам алгебраических уравнений:

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m\frac{(-1)^m\cos\gamma_m}{\gamma_m\left(\alpha_n^2-\gamma_m^2\right)}=\frac{1}{2\alpha_n^2} \quad \text{and} \quad \sum_{m=0}^{\infty}\tilde{a}_m\frac{(-1)^m\cos\tilde{\gamma}_m}{\tilde{\gamma}_m\left(\alpha_n^2-\tilde{\gamma}_m^2\right)}=\frac{1}{2\alpha_n^2} \quad (\alpha_n=(n+0.5)\pi,\ n=0,1,2,\ldots), \tag{3}$$

следующим из условий [5]

$$2\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m a_m\gamma_m^{-1}\cos(\gamma_m y)=1;\ 2\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \tilde{a}_m\tilde{\gamma}_m^{-1}\cos(\tilde{\gamma}_m y)=1. \quad (4)$$

В отличие от исходной работы [5] координаты x и y в (1) – (2) отнесены к полувысоте поперечного сечения поры b. По этой причине введено несколько новых обозначений. Обезразмеривание продольной координаты z, а также амплитуд $\tilde{p}$, $\tilde{u}$ и $\tilde{T}$ в силу линейности исходных уравнений газодинамики в приближении ползущего течения не требуется. Полуширина поперечного сечения поры a (см. рис. 1) предполагается больше его полувысоты b, что, очевидно, не ограничивает общности полученных результатов. Собственные значения γ_m и $\tilde{\gamma}_m$, где $m\pi<\left(\gamma_m,\tilde{\gamma}_m\right)<(m+0.5)\pi$, $m=0,1,2,\ldots$, – это корни трансцендентных уравнений:

$$\cos\gamma_m = B_u\gamma_m\sin\gamma_m;\ \cos\tilde{\gamma}_m = B_E\tilde{\gamma}_m\sin\tilde{\gamma}_m, \quad (5)$$

являющихся следствием граничных условий (7) при $y=\pm 1$. Функции (1) удовлетворяют системе из двух, не связанных между собой двумерных линейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases}\Delta\tilde{u}+\Lambda^2\tilde{u}=\Lambda^2 G,\\ \Delta\tilde{T}+\tilde{\Lambda}^2\tilde{T}=\tilde{\Lambda}^2\tilde{G}\end{cases} \quad (6)$$

и граничным условиям на стенках поры:

$$\tilde{u}_w = B_u\left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial N}\right)_w,\ \tilde{T}_w = B_E\left(\frac{\partial\tilde{T}}{\partial N}\right)_w, \quad (7)$$

где $G=-\dfrac{1}{i\omega\rho_0}\dfrac{d\tilde{p}}{dz}$, $\tilde{G}=\dfrac{1}{\rho_0 C_p}\tilde{p}$, $\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ – лапласиан, $\partial/\partial N$ – производная вдоль внутренней единичной нормали к стенке поры, индексом “w” обозначены значения параметров на поверхностях поры. Безразмерные множители B_u и B_E введены для краткости и выражаются через коэффициенты аккомодации тангенциального импульса α_u и энергии α_E как:

$$B_u=\left(2\alpha_u^{-1}-1\right)\mathrm{Kn},\ B_E=\left(2\gamma/(\gamma+1)\mathrm{Pr}\right)\left(2\alpha_E^{-1}-1\right)\mathrm{Kn}, \quad (8)$$

где γ – показатель адиабаты. Подробности постановки задачи можно найти в [5].

II. Новая форма точного решения

При практическом использовании было обнаружено, что ряды типа (1) сходятся очень медленно. Чтобы достичь требуемой точности, необходимо численно решать системы из нескольких сотен линейных и трансцендентных уравнений. Что ведёт к неоправданно высоким затратам ресурсов ЭВМ. В данной работе предложена новая форма решения сформулированной задачи (6) – (8), позволяющая избежать указанных затруднений. Оно состоит из двух частей:

$$\tilde{u}(x,y,z)=\tilde{u}_0(x,y,z)+\tilde{u}_1(x,y,z), \quad (9)$$

$$\tilde{T}(x,y,z)=\tilde{T}_0(x,y,z)+\tilde{T}_1(x,y,z), \quad (10)$$

где $\tilde{u}_0(x,y,z)$ и $\tilde{T}_0(x,y,z)$ – удовлетворяющие граничным условиям (7) заранее определённые функции:

$$\tilde{u}_0(x,y,z)=G\left(1-\frac{\operatorname{ch}(\beta_0 x)}{Q_0\operatorname{ch}(\beta_0/q)}\right)\left(1-\frac{\cos(\Lambda y)}{Q_\infty\cos\Lambda}\right), \tag{11}$$

$$\tilde{T}_0(x,y,z)=\tilde{G}\left(1-\frac{\operatorname{ch}(\tilde{\beta}_0 x)}{\tilde{Q}_0\operatorname{ch}(\tilde{\beta}_0/q)}\right)\left(1-\frac{\cos(\tilde{\Lambda} y)}{\tilde{Q}_\infty\cos\tilde{\Lambda}}\right), \tag{12}$$

где $Q_\infty=1-B_u\Lambda\operatorname{tg}\Lambda$, $\tilde{Q}_\infty=1-B_E\tilde{\Lambda}\operatorname{tg}\tilde{\Lambda}$. Другие параметры определены выше.

Поскольку уравнения системы (6) и соответствующие граничные условия (7) независимы и отличаются друг от друга лишь обозначениями, то целесообразно рассмотреть, например, только решение для амплитуды колебательной скорости. Решение для амплитуды пульсаций температуры $\tilde{T}(x,y,z)$ может быть получено из результатов для $\tilde{u}(x,y,z)$ простой заменой соответствующих параметров на помеченные тильдой.

Подстановка выражений (9) и (11) в первое соотношение системы (6) приводит к двухмерному неоднородному уравнению для неизвестной функции $\tilde{u}_1(x,y,z)$:

$$\Delta\tilde{u}_1+\Lambda^2\tilde{u}_1=G\left\{\Lambda^2+\beta_0^2\left(1-\frac{\cos\Lambda y}{Q_\infty\cos\Lambda}\right)\right\}\frac{\operatorname{ch}\beta_0 x}{Q_0\operatorname{ch}(\beta_0/q)}. \tag{13}$$

Прямая подстановка показывает, что ряд

$$\tilde{u}_1(x,y,z)=2\Lambda^2 G\sum_{m=1}^{\infty}a_m\frac{(-1)^m}{\gamma_m\beta_m^2}\left(\frac{\operatorname{ch}(\beta_m x)}{Q_m\operatorname{ch}(\beta_m/q)}-\frac{\operatorname{ch}(\beta_0 x)}{Q_0\operatorname{ch}(\beta_0/q)}\right)\cos(\gamma_m y) \tag{14}$$

удовлетворяет (13) и граничным условиям (7), если

$$\frac{\cos(\Lambda y)}{Q_\infty\cos\Lambda}-1=2\Lambda^2\sum_{m=0}^{\infty}a_m\frac{(-1)^m}{\gamma_m\beta_m^2}\cos(\gamma_m y), \tag{15}$$

где константы интегрирования a_m и другие параметры точно такие же, как и в решении (1). С другой стороны, если разложения (15) верны, то выражения (9), (11) и (14) (так же как (10) и (12)) совпадают с решением (1).

Справедливость соотношений (16) и (17) была проверена численно. В пределе $\Lambda\to 0$ и $B_u\to 0$ функция (9), объединённая с разложением (14), представляет точное решение (в наших обозначениях) задачи о стационарном ламинарном течении в приближении сплошной среды. Соответствующие результаты можно найти, например, в монографии [9, p. 55].

III. Акустические свойства прямоугольной поры в приближении течения со скольжением

Как известно, акустические свойства длинного однородного канала полностью определяются динамической плотностью $\tilde{\rho}(B_u,\Lambda)$ и динамической сжимаемостью $\tilde{C}(B_E,\gamma,\tilde{\Lambda})$. В этих переменных комплексная константа распространения равна $k(B_u,B_E,\gamma,\mathrm{Pr},\Lambda)=i\omega\sqrt{\tilde{\rho}(B_u,\Lambda)\tilde{C}(B_E,\gamma,\tilde{\Lambda})}$, а характеристический импеданс $-Z_c(B_u,B_E,\gamma,\mathrm{Pr},\Lambda)=\sqrt{\tilde{\rho}(B_u,\Lambda)/\tilde{C}(B_E,\gamma,\tilde{\Lambda})}$, где зависимость от времени всюду определяется множителем $\exp(i\omega t)$. В случае однородных пор, поперечные размеры которых малы по сравнению с длиной волны, динамическая плотность и динамическая сжимаемость связаны с осреднёнными по площади поперечного сечения поры амплитудами колебательной скорости и пульсаций температуры как:

$$\tilde{\rho}(B_u, \Lambda) = -\frac{1}{i\omega\left\langle \tilde{u}(z)\right\rangle}\frac{d\tilde{p}}{dz}, \tag{16}$$

$$\tilde{C}(B_E, \gamma, \tilde{\Lambda}) = \rho_0^{-1}\left(\left\langle\tilde{\rho}\right\rangle/\tilde{p}\right) = \frac{1}{p_0} - \frac{\left\langle\tilde{T}\right\rangle}{T_0\tilde{p}} = \frac{1}{p_0}\left(1 - \frac{\rho_0 R\left\langle\tilde{T}\right\rangle}{\tilde{p}}\right), \tag{17}$$

где

$$\left\langle\tilde{u}(z)\right\rangle = -\frac{1}{i\omega\rho_0}\frac{d\tilde{p}}{dz}\left\{\left(1 - \frac{q\,\mathrm{th}\left(\beta_0/q\right)}{\beta_0 Q_0}\right)\left(1 - \frac{\mathrm{tg}\Lambda}{\Lambda Q_\infty}\right) + \right.$$

$$\left. +2q\Lambda^2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m}{\gamma_m^2\beta_m^2}\left(\frac{\mathrm{th}\left(\beta_m/q\right)}{\beta_m Q_m} - \frac{\mathrm{th}\left(\beta_0/q\right)}{\beta_0 Q_0}\right)\sin\left(\gamma_m - m\pi\right)\right\}, \tag{18}$$

$$\left\langle\tilde{T}(z)\right\rangle = \frac{\tilde{p}}{\rho_0 C_p}\left\{\left(1 - \frac{q\,\mathrm{th}\left(\tilde{\beta}_0/q\right)}{\tilde{\beta}_0\tilde{Q}_0}\right)\left(1 - \frac{\mathrm{tg}\tilde{\Lambda}}{\tilde{\Lambda}\tilde{Q}_\infty}\right) + \right.$$

$$\left. +2q\tilde{\Lambda}^2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\tilde{a}_m}{\tilde{\gamma}_m^2\tilde{\beta}_m^2}\left(\frac{\mathrm{th}\left(\tilde{\beta}_m/q\right)}{\tilde{\beta}_m\tilde{Q}_m} - \frac{\mathrm{th}\left(\tilde{\beta}_0/q\right)}{\tilde{\beta}_0\tilde{Q}_0}\right)\sin\left(\tilde{\gamma}_m - m\pi\right)\right\}. \tag{19}$$

IV. Численные результаты и приближенные формулы

С целью проверки эффективности новой формы решения был выполнен численный расчёт динамической плотности $\tilde{\rho}(B_u, \Lambda)$ и динамической сжимаемости $\tilde{C}(B_E, \gamma, \tilde{\Lambda})$ с использованием как соотношений (16) – (19), так и соответствующих результатов работы [5]. Обе теоретические модели дали одинаковые результаты. Было также обнаружено, что ряды (18) – (19) сходятся очень быстро. При этом учёт только нулевых членов в разложениях (18) – (19) обеспечивает относительную точность менее 3%. Учёт первых членов под знаком суммы в (18) – (19), т. е. аппроксимация средних амплитуд выражениями:

$$\left\langle\tilde{u}(z)\right\rangle \approx -\frac{1}{i\omega\rho_0}\frac{d\tilde{p}}{dz}\left\{\left(1 - \frac{q\,\mathrm{th}\left(\beta_0/q\right)}{\beta_0 Q_0}\right)\left(1 - \frac{\mathrm{tg}\Lambda}{\Lambda Q_\infty}\right) + \right.$$

$$+2q\Lambda^2\frac{a_1}{\gamma_1^2\beta_1^2}\left(\frac{\mathrm{th}\left(\beta_1/q\right)}{\beta_1 Q_1}-\frac{\mathrm{th}\left(\beta_0/q\right)}{\beta_0 Q_0}\right)\sin\left(\gamma_1-\pi\right)\Bigg\},\qquad(20)$$

$$\left\langle\tilde{T}(z)\right\rangle\approx\frac{\tilde{p}}{\rho_0 C_p}\left\{\left(1-\frac{q\,\mathrm{th}\left(\tilde{\beta}_0/q\right)}{\tilde{\beta}_0\tilde{Q}_0}\right)\left(1-\frac{\mathrm{tg}\tilde{\Lambda}}{\tilde{\Lambda}\tilde{Q}_\infty}\right)+\right.$$

$$+2q\tilde{\Lambda}^2\frac{\tilde{a}_1}{\tilde{\gamma}_1^2\tilde{\beta}_1^2}\left(\frac{\mathrm{th}\left(\tilde{\beta}_1/q\right)}{\tilde{\beta}_1\tilde{Q}_1}-\frac{\mathrm{th}\left(\tilde{\beta}_0/q\right)}{\tilde{\beta}_0\tilde{Q}_0}\right)\sin\left(\tilde{\gamma}_1-\pi\right)\Bigg\},\qquad(21)$$

обеспечивает относительную погрешность расчётов, не превышающую 1%.

Для практического использования может оказаться полезным приближенное аналитическое решение трансцендентных уравнений (5):

$$\gamma_m\approx\delta_m+\frac{(1+Z_m^2)\tau_m}{1+B_u+Z_m^2}\left\{1+\frac{B_u^2 Z_m\tau_m}{(1+B_u+Z_m^2)^2}+\ldots\right\},\qquad(22)$$

где $\delta_m=\left(m+0.25\right)\pi$, $Z_m=B_u\delta_m$, $\tau_m=\pi/4-\tan^{-1}(Z_m)$, $m=0,1,2,\ldots$. Путём численных расчётов было также установлено, что приближенное соотношение

$$\gamma_0\approx X_0\left\{1+\frac{1}{24}\cdot\frac{1+4B_u}{1+2B_u}X_0^2+\left[\frac{7}{1152}\cdot\left(\frac{1+4B_u}{1+2B_u}\right)^2-\frac{1}{720}\cdot\frac{1+6B_u}{1+2B_u}\right]X_0^4\right\},\qquad(23)$$

где $X_0=\left(0.5+B_u\right)^{-1/2}$, обеспечивает лучшую аппроксимацию при $m=0$ и $B_u\geq 2$, чем формула (22).

Коэффициент a_1 в (20) можно вычислить с помощью приближенной формулы:

$$a_1\approx 2\left(\gamma_1/\pi-1\right)/\left(1+Y_1\right),\qquad(24)$$

где $Y_1\approx 0.17927\left\{\frac{4}{\pi}\mathrm{ctg}\left(\frac{1-X_1}{1+X_1}\right)-1\right\}$, $X_1\approx B_u\gamma_1\left\{1.2+0.65\exp\left[3\left(\frac{\gamma_1-\alpha_1}{\gamma_1-\pi}\right)\right]\right\}$.

Приближенные формулы для $\tilde{\gamma}_0$, $\tilde{\gamma}_1$ и $\tilde{a}_1$ в (21) получаются из (22) – (24) формальными заменами: $B_u\to B_E$, $\gamma_0\to\tilde{\gamma}_0$, $\gamma_1\to\tilde{\gamma}_1$.

Заключение

Построен новый вариант решения, описывающего распространение ультразвуковых волн в длинных порах прямоугольного сечения, заполненных газами низкой плотности, и учитывающего эффекты скольжения и скачка температуры. Оно так же, как и решение из работы [5], представлено в виде разложений в ряды по собственным функциям. Однако эти ряды в отличие от рядов из [5] сходятся очень быстро. Проверка численными методами показала, что достаточно взять по два первых члена разложений, чтобы обеспечить относительную точность аппроксимации, не превышающую 1%. Получены приближенные выражения для собственных значений и коэффициентов 2-членных разложений. Кроме того, получено несколько математических результатов общего характера.

Результаты работы могут быть использованы для инженерных оценок акустических характеристик пористых материалов, эксплуатируемых при низких давлениях (см., например, [10]), а так же представляют основу для дальнейших теоретических исследований акустических свойств пористых материалов.

Статья поступила в редакцию 01.11.2022 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Horoshenkov K. V. A Review of Acoustical Methods for Porous Material Characterization // International Journal of Acoustics and Vibration. 2017. Vol. 22. No. 1. P. 92–103. DOI: 10.20855/ijav.2017.22.1455.
2. Problems in High Speed Flow Prediction Relevant to Control / Malmuth N. D., Fedorov A., Shalaev V., Cole J., Hites M., Williams D., Khokhlov A. // 2nd AIAA, Theoretical Fluid Mechanics Meeting (15 June 1998 – 18 June 1998, Albuquerque, NM, U.S.A.). Paper AIAA 98-2695. URL: https://doi.org/10.2514/6.1998-2695 (дата обращения: 23.04.2022).
3. Stabilization of Hypersonic Boundary Layers by Porous Coating / Fedorov A., Malmuth N., Rasheed A., Hornung H. G. // AIAA Journal. 2001. Vol. 39. Iss. 4. P. 605–610. DOI: 10.2514/2.1382.
4. Experiments on Passive Hypervelocity Boundary-Layer Control Using an Ultrasonically Absorptive Surface / Rasheed A., Hornung H. G., Fedorov A. V., Malmuth N. D. // AIAA Journal. 2002. Vol. 40. Iss. 3. P. 481–489.
5. Kozlov V. F., Fedorov A. V., Malmuth N. D. Acoustic properties of rarefied gases inside pores of simple geometries // The Journal of the Acoustical Society of America. 2005. Vol. 117. Iss. 6. P. 3402–3412. DOI: 10.1121/1.1893428.
6. Stinson M. R. The propagation of plane sound waves in narrow and wide circular tubes and generalization to uniform tubes of arbitrary cross-sectional shape // The Journal of the Acoustical Society of America. 1991. Vol. 89. Iss. 2. P. 550–558. DOI: 10.1121/1.400379.
7. Stinson M. R., Champoux Y. Assignment of shape factors for porous materials having simple pore geometries // The Journal of the Acoustical Society of America. 1990. Vol. 88. Iss. S. 1. Session 6PA: Physical Acoustics: Acoustics of Fluid-Filled Porous Materials I. P. S121. DOI: 10.1121/1.2028553.
8. Measurement and calculation of acoustic propagation constants in arrays of small air-filled rectangular tubes / Roh H.-S., Arnott W. P., Sabatier J. M., Raspet R. // The Journal of the Acoustical Society of America. 1991. Vol. 89. Iss. 6. P. 2617–2624. DOI: 10.1121/1.400700.
9. Happel J., Brenner H. Low Reynolds number hydrodynamics with special applications to particulate media. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1965. 553 p.
10. Stability of Hypersonic Boundary Layer on Porous Wall with Regular Microstruture / Fedorov A., Kozlov V., Shiplyuk A., Maslov A., Malmuth N. // AIAA Journal. 2006. Vol. 44. No. 8. P. 1866–1871. DOI: 10.2514/1.21013.

REFERENCES

1. Horoshenkov K. V. A Review of Acoustical Methods for Porous Material Characterization. In: *International Journal of Acoustics and Vibration*, 2017, vol. 22, no. 1, pp. 92–103. DOI: 10.20855/ijav.2017.22.1455.

2. Malmuth N. D., Fedorov A., Shalaev V., Cole J., Hites M., Williams D., Khokhlov A. Problems in High Speed Flow Prediction Relevant to Control. In: *2nd AIAA, Theoretical Fluid Mechanics Meeting (15 June 1998 – 18 June 1998, Albuquerque, NM, U.S.A.)*. Paper AIAA 98-2695. Available at: https://doi.org/10.2514/6.1998-2695 (accessed: 23.04.2022).
3. Fedorov A., Malmuth N., Rasheed A., Hornung H. G. Stabilization of Hypersonic Boundary Layers by Porous Coating. In: *AIAA Journal*, 2001, vol. 39, iss. 4, pp. 605–610. DOI: 10.2514/2.1382.
4. Rasheed A., Hornung H. G., Fedorov A. V., Malmuth N. D. Experiments on Passive Hypervelocity Boundary-Layer Control Using an Ultrasonically Absorptive Surface. In: *AIAA Journal*, 2002, vol. 40, iss. 3, pp. 481–489.
5. Kozlov V. F., Fedorov A. V., Malmuth N. D. Acoustic properties of rarefied gases inside pores of simple geometries. In: *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2005, vol. 117, iss. 6, pp. 3402–3412. DOI: 10.1121/1.1893428.
6. Stinson M. R. The propagation of plane sound waves in narrow and wide circular tubes and generalization to uniform tubes of arbitrary cross-sectional shape. In: *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1991, vol. 89, iss. 2, pp. 550–558. DOI: 10.1121/1.400379.
7. Stinson M. R., Champoux Y. Assignment of shape factors for porous materials having simple pore geometries. In: *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1990, vol. 88, iss. S. 1. Session 6PA: Physical Acoustics: Acoustics of Fluid-Filled Porous Materials I, pp. S121. DOI: 10.1121/1.2028553.
8. Roh H.-S., Arnott W. P., Sabatier J. M., Raspet R. Measurement and calculation of acoustic propagation constants in arrays of small air-filled rectangular tubes. In: The Journal of the Acoustical Society of America, 1991, vol. 89, iss. 6, pp. 2617–2624. DOI: 10.1121/1.400700.
9. Happel J., Brenner H. Low Reynolds number hydrodynamics with special applications to particulate media. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1965. 553 p.
10. Fedorov A., Kozlov V., Shiplyuk A., Maslov A., Malmuth N. Stability of Hypersonic Boundary Layer on Porous Wall with Regular Microstruture. In: *AIAA Journal*, 2006, vol. 44, no. 8, pp. 1866–1871. DOI: 10.2514/1.21013.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Козлов Виталий Федорович – кандидат физико-математических наук, заместитель заведующего кафедрой общей физики Института аэромеханики и летательной техники Московского физико-технического института (национального исследовательского университета), Почётный работник высшего профессионального образования Российской Федерации;

e-mail: vfkozlov@gmail.com

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Vitaly F. Kozlov – Cand. Sci. (Phys.-Math.), Deputy of Departmental Head, Department of General Physics, Institute of Aeromechanics and Flight Engineering, Moscow Institute of Physics and Technology; Honorary Worker of Higher Professional Education of the Russian Federation;

e-mail: vfkozlov@gmail.com

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Козлов В. Ф. Эффективное решение задачи о распространении ультразвука в порах прямоугольного сечения, заполненных газом низкой плотности // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2022. № 4. С. 45–55.
DOI: 10.18384/2310-7251-2022-4-45-55.

FOR CITATION

Kozlov V. F. Effective solution for ultrasound propagation in rectangular pores filled with a rarefied gas. In*: Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*, 2022, no. 4, pp. 45–55.
DOI: 10.18384/2310-7251-2022-4-45-55.

НАУЧНАЯ ЖИЗНЬ

УДК 530.145 (09)
DOI: 10.18384/2310-7251-2022-4-56-67

Л. БОЛЬЦМАН И ИСТОРИЯ ОТКРЫТИЯ ЗАКОНА ТЕПЛОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ СТЕФАНА-БОЛЬЦМАНА

Исаев В. И.

Независимый исследователь
г. Москва, Российская Федерация

Аннотация
Целью данной работы является рассмотрение исторических обстоятельств открытия закона теплового излучения Стефана-Больцмана.
Процедура и методы. Проведён контент-анализ исторических обстоятельств открытия закона теплового излучения Стефана-Больцмана.
Результаты. Показано, что открытие закона Стефана-Больцмана явилось одним из важных эпизодов в предыстории открытия универсальной функции Кирхгофа. Открытие этой функции М. Планком в декабре 1900 г. привело к постепенному становлению квантовой теории, и предопределило развитие основного направления теоретической физики XX века – квантовой механики, а следом и квантовой электродинамики, квантовой теории поля и т. д., что фактически явилось началом новой физической эпохи – эпохи квантовой физики.
Теоретическая значимость. Обобщение и дополнение сведений об историческом развитии теории теплового излучения, которые будут полезны как при изучении квантовой теории, так и для создания специального курса «История квантовой теории».
Ключевые слова: теория теплового излучения, Кирхгоф, Стефан, Больцман, Планк

L. BOLTZMANN AND THE HISTORY OF THE DISCOVERY OF THE STEFAN–BOLTZMANN LAW OF THERMAL RADIATION

V. Isaev

Independent researcher
Moscow, Russian Federation

Abstract
Aim. The purpose of this work is to consider the historical circumstances of the discovery of the Stefan-Boltzmann law of thermal radiation.
Methodology. Use is made of a content analysis of the historical circumstances of the discovery of the Stefan-Boltzmann law of thermal radiation.
Results. It is shown that the discovery of the Stefan-Boltzmann law was one of the important episodes in the prehistory of the discovery of the universal Kirchhoff function. The discovery of this function by M. Planck in December 1900 led to the gradual formation of quantum theory and predetermined the development of the main direction of theoretical physics of the twentieth century, namely, quantum mechanics, and then quantum electrodynamics, quantum field theory, etc., which actually was the beginning of a new physical era, i.e. the era of quantum physics.
Research implications. Generalization and addition of information about the theory of thermal radiation study will be useful in the study of quantum theory, including the creation of a special course “History of Quantum Theory”.
Keywords: theory of thermal radiation, Kirchhoff, Stefan, Boltzmann, Planck

Введение

Актуальность предложенной темы определяется теми приложениями, которые квантовая механика получила за последнее десятилетие – необходимостью создания квантовых компьютеров и развития систем квантовой связи, основанных на явлении квантового перепутывания связанных состояний. Без глубокого знания квантовой теории создание квантовых компьютеров и систем квантовой связи невозможно. Однако студенты при изучении квантовой теории зачастую испытывают трудности, поскольку многие сложные вопросы интерпретации квантовой механики невозможно понять, не обладая знаниями хотя бы элементарного курса истории квантовой теории, который мы предлагаем читать студентам одновременно с изучением теоретической базы.

1. Экспериментальное открытие интегрального закона теплового излучения Й. Стефаном

После открытия закона теплового излучения Кирхгофа следующее важное достижение в теории теплового излучения связано с исследованиями австрийских физиков Йозефа Стефана (1835–1893), профессора Венского университета, и Людвига Больцмана (1844–1906), в то время профессора университета в австрийском городе Граце.

Рис. 1 / Fig. 1. Й. Стефан / J. Stefan

Источник: Йозеф СТЕФАН [Электронный ресурс] // Элементы большой науки : [сайт]. URL: https://elementy.ru/biography/425903/Yozef_STEFAN (дата обращения: 20.05.2022)

Йозеф Стефан родился 24 марта 1835 г. в г. Санкт-Пельтен в Австрии (рис. 1). После окончания гимназии в г. Клагенфурте поступил в Венский университет, который окончил в 1857 г., и стал преподавать в нём, получив степень доктора физики в 1858 г. В 1863 г. стал профессором кафедры высшей математики и физики. В 1866 г. был назначен директором Института экспериментальной физики. В 1876–1877 гг. был ректором Венского университета и вице-президентом Австрийской академии наук. Имя Стефана носит Физический научно-исследовательский институт в Словении. Й. Стефан известен своими работами в различных областях физики: кинетической теории газов, оптике, акустике, теории теплового излучения. Изучал диффузию и теплопроводность газов, получил коэффициенты теплопроводности многих газов. В 1879 г. измеряя теплоотдачу платиновой проволоки при различных температурах установил пропорциональность излучаемой ею энергии четвёртой степени абсолютной температуры. Теоретическое обоснование этого закона было дано в 1884 г. учеником Стефана – Людвигом Больцманом.

В 1879 г. была опубликована работа Стефана «О связи между тепловым излучением и температурой» [1] в которой он, проанализировал ряд известных к тому времени экспериментальных исследований зависимости излучательной способности различных тел от температуры, выполненных ранее в 1817 г. французскими физиками П. Л. Дюлонгом и А. Т. Пти, в 1846 г. Ф. де ля Провостэ и П. Десеном, в 1847 г. Дж. Дрэпером и в 1864 г. Дж. Тиндалем, сформулировал закон пропорциональности интегральной излучательной способности тел (энергетической светимости) четвёртой степени температуры этих тел

$$\varepsilon(T) = \int_0^\infty \varepsilon(\lambda, T)\, d\lambda = \sigma T^4, \qquad (1)$$

где $\sigma = 5{,}67051 \cdot 10^{-8}$ Вт/($м^2 K^4$) – коэффициент пропорциональности, названный впоследствии постоянной Стефана-Больцмана. Стефан ошибочно предполагал, что этот закон справедлив для любых тел, однако последовавшие позже исследования Больцмана показали, что на самом деле открытый Стефаном закон (1) справедлив для связи интегральной излучательной способности $\varepsilon(T)$ и температуры T только для абсолютно чёрных тел.

2. Теоретическое обоснование и вывод закона Стефана Л. Больцманом

Л. Больцман родился 20 февраля 1844 г. в Вене (рис. 2). В 1866 г. он окончил Венский университет, где учился у Йозефа Стефана и получил докторскую степень. В 1867 г. стал приват-доцентом Венского университета и работал ассистентом Й. Стефана. По рекомендации Стефана в 1869 г. Больцман был утверждён профессором теоретической физики в университете австрийского города Граца.

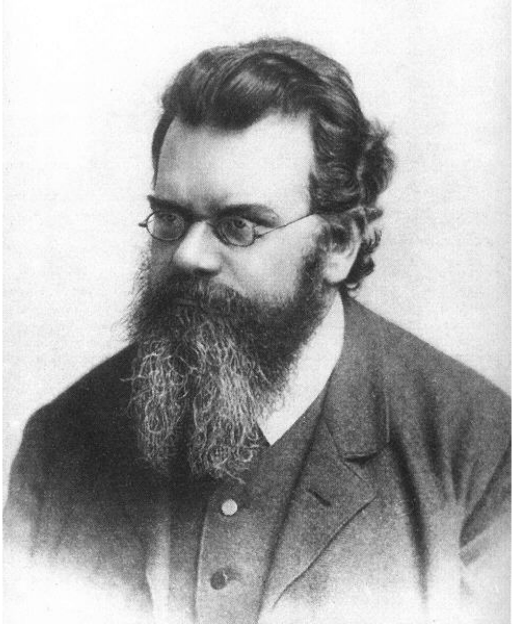


Рис. 2 / Fig. 2. Л. Больцман / L. Boltzmann

Источник: Больцман, Людвиг [Электронный ресурс] // Википедия : [сайт]. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Больцман,_Людвиг (дата обращения:20.05.2022)

В 1884 г. Больцман опубликовал две статьи в немецком физическом журнале “Annalen der Physic” под названием «О связи теплового излучения и второго начала термодинамики, открытой г. Бартоли» [2] и «Вывод закона Стефана о зависимости теплового излучения от температуры из электромагнитной теории света» [3].

В первой статье «О связи теплового излучения и второго начала термодинамики, открытой г. Бартоли» Больцман проанализировал работу итальянского физика А. Бартоли [4], посвящённую радиометру У. Крукса, в которой утверждалось, что можно представить идеальный насос с зеркально отражающими стенками, клапанами и поршнями, перемещениями поршней которого можно без затраты работы осуществить перевод некоторого количества тепла от менее нагретого тела к более нагретому, в противоречии со вторым законом термодинамики.

Проанализировав такой идеальный тепловой процесс, Бартоли пришёл к заключению, что избежать противоречия со вторым законом термодинамики можно, только предположив, что поршень всё же совершает работу, преодолевая силу, с которой тепловое излучение оказывает давление на поршень. Таким образом, Бартоли в 1876 г. путём термодинамических рассуждений, независимо от Максвелла, пришёл к выводу, что падающий свет оказывает давление на тела [5]. Однако Бартоли не смог вывести общую формулу, выражающую световое давление как функцию температуры [4; 5].

В первой статье [2], рассмотрев идеальный тепловой процесс, предложенный Бартоли, Больцман вывел общую интегральную формулу для зависимости светового давления от температуры T:

$$p(T) = \frac{\pi}{c} T \int \frac{\varepsilon(T)}{T^2} dT, \qquad (2)$$

где $p(T)$ – давление, $\varepsilon(T)$ – интегральная излучательная способность тела, c – скорость света.

Во второй статье «Вывод закона Стефана о зависимости теплового излучения от температуры из электромагнитной теории света» [3], в которой содержался термодинамический вывод закона Стефана, Больцман выводит закон Стефана (1), исходя из открытой в 1873 г. английским физиком Дж. К. Максвеллом, создателем электромагнитной теории (рис. 3), связи между давлением $p(T)$ и плотностью электромагнитного излучения $u(T)$, а именно $p(T) = \frac{u(T)}{3} = \frac{4\pi\varepsilon(T)}{3c}$. Внутренняя энергия излучательной полости есть:

$$U(T) = u(T\}V,$$

где V – объём цилиндра под поршнем. Используя известное термодинамическое соотношение $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_T - p$, подставляя в него значения $p(T)$ *и* $U(T)$ и интегрируя, окончательно получим:

$$\varepsilon(T) = \sigma T^4,$$

где $\sigma = 5{,}67051 \cdot 10^{-8}$ Вт/($м^2 K^4$). При выводе Больцман использовал общую формулу для светового давления (2), полученную им в предыдущей работе [2] из второго начала термодинамики, и показал, что закон Стефана (1) справедлив только для абсолютно чёрного тела.

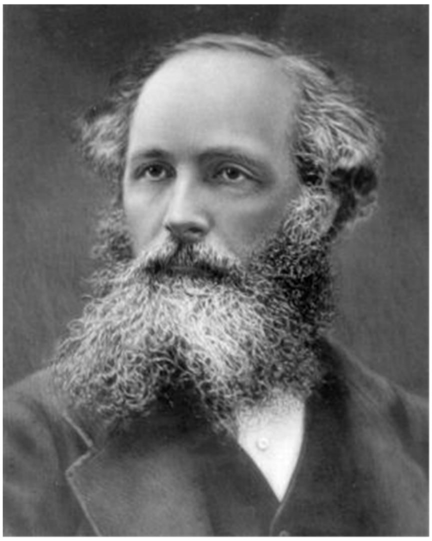


Рис. 3 / Fig. 3. Дж. Максвелл / J. Maxwell

Источник: Максвелл Джеймс Клерк [Электронный ресурс] // Публичная Библиотека : [сайт]. URL: http://publ.lib.ru/ARCHIVES/M/MAKSVELL_Djems_Klerk/_Maksvell_Dj.K..html (дата обращения: 20.05.2022)

Больцман пишет: «Таким образом, из электромагнитной теории света и второго начала непосредственно следует стефановский закон зависимости теплового излучения от температуры, что определённо представляет собой замечательный результат, особенно если учесть очевидно предварительный во многих местах характер приведённых вычислений»[3].

В этой статье Больцман обосновал и обратное утверждение о том, что если принять закон Стефана (1) как исходную предпосылку, то из этого закона и из второго начала термодинамики следует открытая ранее в 1873 г. Максвеллом связь $p(T) = \dfrac{u(T)}{3} = \dfrac{4\pi\varepsilon(T)}{3c}$, между давлением и плотностью электромагнитного излучения, что можно было рассматривать как дополнительное подтверждение правильности тогда ещё недавно созданной электромагнитной теории Максвелла.

Экспериментально существование светового давления пытались обнаружить многие физики, такие как А. Бартоли, Ф. Цельнер, А. Риги, У. Крукс и др., однако первым физиком, которому удалось это сделать, был русский физик Пётр Николаевич Лебедев (1866–1912) (рис. 4). Действие светового давления на твёрдые тела было доказано в 1899–1900 гг. в крайне сложных и искусных экспериментах П. Н. Лебедева [6–9], представленных им в августе 1900 г. в докладе «Максвелло-Бартолиевые силы давления лучистой энергии» [7] на Международном физическом конгрессе в Париже.

Рис. 4 /Fig. 4. П. Н. Лебедев / P. Lebedev

Источник: Лебедев Петр Николаевич [Электронный ресурс] // ФИАН : [сайт]. URL: https://www.lebedev.ru/ru/personalities/u-istokov/933 (дата обращения: 20.05.2022)

Доклад Лебедева на Международном физическом конгрессе в Париже произвёл большое впечатление на научную общественность. К. А. Тимирязев, профессор Московского университета, вспоминал: «Один из важнейших выводов теории Максвелла заключался в том, что свет, сверх своих обычных проявлений, должен оказывать механическое давление на тела, на которые он падает, но этот вывод оспаривался даже такими авторитетами, как лорд Кельвин. … Мне не раз приходилось упоминать о том, как лорд Кельвин в 1903 г. обратился ко мне со словами: “Вы знаете, что я не поддавался на аргументы Максвелла, а вот перед опытами Вашего Лебедева пришлось сдаться …”» [10].

Как отметил П. П. Лазарев, В. Вин в письме В. А. Михельсону сообщил, что Лебедев в 1912 г. «был предложен на Нобелевскую премию, но ему не удалось увидеть этого последнего признания его заслуг перед наукой и теперь остаётся только “память о гениальном физике, который владел искусством экспериментирования, как едва ли кто другой в наше время”» [11].

В статье «О связи теплового излкчения и второго начала термодинамики, открытой г. Бартоли» [2] Больцман призвал других физиков заняться проблемой теплового излучения, отметив, что он делает это для того, «чтобы побудить либо самого г-на Бартоли, либо других физиков к дальнейшему обсуждению этого предмета, который, как мне представляется, в любом случае заслуживает большего внимания, чем ему уделялось до сих пор ...». Призыв Больцмана о развитии теории теплового излучения был воспринят физиками, и впоследствии работы по тепловому излучению, развивающие взгляды

Больцмана, были выполнены российскими физиками В. А. Михельсоном и Б. Б. Голицыным, а также немецкими физиками В. Вином, М. Планком и английскими физиками Дж. У. Стреттом (Рэлеем) и Дж. Джинсом.

3. Значение закона Стефана-Больцмана в теории теплового излучения

Значимость теоретического вывода закона Стефана, выполненного Больцманом, была так оценена немецким физиком О. Люммером: «Закон излучения, установленный для различных тел Стефаном, приобрёл свой истинный смысл лишь после того, как Больцман теоретически доказал, что он применим только к абсолютно чёрным телам» [12].

В своей статье о Больцмане известный голландский физик Г. А. Лоренц, один из создателей электронной теории материи, назвал работы Больцмана [2; 3] «жемчужиной теоретической физики» [12]. Лоренц так оценил значение работ Больцмана: «Исследованиям Больцмана … я посвящу несколько слов, чтобы из большой сокровищницы выловить ещё одну найденную Больцманом жемчужину теоретической физики. Речь идёт о теории теплового излучения. Когда Бартоли высказал мнение, что некоторые явления лучеиспускания по-видимому противоречат второму закону термодинамики Больцман сразу же показал, каким образом можно опровергнуть данное заключение. Учтя вытекающее из теории Максвелла давление световых лучей, он не только достиг полного согласия со вторым законом, но и вывел из него открытый Стефаном закон, согласно которому полное излучение абсолютно чёрного тела пропорционально четвёртой степени его абсолютной температуры. Вывод закона Стефана явился первым крупным достижением в области теории излучения со времён Кирхгофа. Открытие девять лет спустя В. Вином закона смещения завершило тот этап развития теории излучения, на котором она продвинулась настолько, насколько это было возможно путём применения законов электродинамики и общей электромагнитной теории; для дальнейшего развития необходимо было уже привлечь специальные теории излучения, основывающиеся на определённых гипотезах о механизме явлений» [12], что и было сделано В. А. Михельсоном в 1887 г., В. Вином в 1896 г. и окончательно М. Планком в 1900 г. [14].

Открытие закона Стефана-Больцмана было одним из наиболее существенных достижений на долгом пути поисков универсальной функции Кирхгофа, однако в силу интегрального характера закона Стефана-Больцмана был получен только интегральный критерий для универсальной функции Кирхгофа, без какой-либо информации относительно конкретного вида спектральной функции $\varepsilon(\lambda, T)$.

Отметим также, что впоследствии Л. Больцман предпринял и осуществил целую программу важных научных исследований, имевших целью объяснить механическую теорию теплоты на основе молекулярно-атомистических представлений, став одним из основателей статистической механики и молекулярно-кинетической теории материи, однако эта тема выходит за рамки данной заметки (см. труды Больцмана [13]).

Наиболее интересные из последних исследований различных аспектов спектра теплового излучения содержатся в статьях Т. Бойера, Н. Нойберга, В. Поправски и других учёных [15–24].

ЛИТЕРАТУРА

1. Stefan J. Über die Beziehungen zwischen der Wärmestrahlung und der Temperatur // Sitzungsberichte der Akademie des Wissenschaften (Wien). Ableitung 2. 1879. Bd. 79. S. 391–428.
2. Boltzmann L. Über eine von Hrn Bartoli entdecte Beziehung der Wärmestrahlung zum zweiten Hauptsatze // Annalen der Physik. 1884. Bd. 22. S. 31–39.
3. Boltzmann L. Ableitung des Stefanschen Gesetzes, betreffend die Abhängigkeit der Wärmestrahlung von der Temperatur aus der electromagnetiscen Lichttheorie // Annalen der Physik. 1884. Bd. 22. S. 291–294.
4. Bartoli A. Sopra i movimente prodotti dalla luce e del calore e sopra il radiometro di Crookes. Firenze, Le Monnirt, 1876. 56 p.
5. Bartoli A. Il calorico raggiante e il secondo principio di termodynamica // Il Nuovo Cimento. 1884. Terza serie. Tomo XV. P. 193–202.
6. Лебедев П. Н. Максвелло-Бартолиевские силы давления лучистой энергии // Журнал Русского физико-химического общества. 1900. Т. XXXII, ч. физ., отд. 1, вып. 8. С. 211–217.
7. Lebedew P. Les forces de Maxwell-Bartoli dues a la Pression de la Lumière // Rapports Présentés au Congrès International de Physique. Paris: Gauthier-Villars, 1900. Vol. 2. P. 133–140.
8. Лебедев П. Н. Опытное исследование светового давления // Журнал Русского физико-химического общества. 1901. Т. XXXIII, ч. физ. С. 53–76.
9. Lebedew P. Untersuchungen uber die Druckkrafte des Lichtes // Annalen der Physik. 1901. Bd. 6. S. 433–458.
10. Тимирязев К. А. Петр Николаевич Лебедев // Тимирязев К. А. Сочинения. Т. 8. М.: Сельхозгиз, 1939. С. 313–319.
11. Лазарев П. П. П. Н. Лебедев и русская физика // Временник Общества им. Х. С. Леденцова. 1912. № 2. С. 65–78.
12. Lorentz H. A. Ludwig Boltzmann // Verchandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft. 1907. Bd. 9. S. 206–236.
13. Больцман Л. Молекулярно-кинетическая теория газов, термодинамика, статистическая механика // Больцман Л. Избранные труды. М.: Наука, 1984. С. 9–330.
14. Исаев В. И. М. Планк и история открытия квантов теплового излучения // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2018. № 1. С. 91–99. DOI: 10.18384/2310-7251-2018-1-91-99.
15. Calcaneo-Roldan C., Salcidone O., Santana D. A semy analytical approach to black body radiation // European Journal of Physics. 2017. Vol. 38. No. 5. P. 055807. DOI: 10.1088/1361-6404/aa7d1d.
16. Boyer T. H. Understanding the Planck black body spectrum // European Journal of Physics. 2016. Vol. 37. No. 6. P. 065102. DOI: 10.1088/0143-0807/37/6/065102.

17. Boyer T. H. Scaling. Scattering and black body radiation in classical physics // European Journal of Physics. 2017. Vol. 38. No. 4. P. 0451001. DOI: 10.1088/1361-6404/aa6c18.
18. Investigation of black body radiation with the aid of a self-made pyroelectric infrared detector / Poprawski W., Gnutek Z., Radojewska E. B., Poprawski R. // European Journal of Physics. 2015. Vol. 36. No. 6. P. 065025. DOI: 10.1088/0143-0807/36/6/065025.
19. Nauenberg M. Max Planck and the birth of the quantum mechanics // American Journal of Physics. 2016. Vol. 84. Iss. 9. P. 709–716. DOI: 10.1119/1.4955146.
20. Boyer T. H. Interference between source-free radiation and radiation from sources: Particle Boyer-like behavior for classical radiation // American Journal of Physics. 2017. Vol. 5. Iss. 9. P. 670–675. DOI: 10.1119/1.4991396.
21. Boyer T. H. The contrasting roles of Planck's constant in classical and quantum theories // American Journal of Physics. 2018. Vol. 86. Iss. 4. P. 280. DOI: 10.1119/1.5021355.
22. Boyer T. H. Blackbody radiation in classical physics: historical perspective // American Journal of Physics. 2018. Vol. 86. Iss. 7. P. 495. DOI: 10.1119/1.5034785.
23. Persson J. R Evolution of quasi-hystory of the Planck's blackbody radiation equation in a physics // American Journal of Physics. 2018. Vol. 86. Iss. 12. P. 887. DOI: 10.1119/1.5054005.
24. Jagannathan K. Anxiety and the equation: Understanding Boltzmann's Entropy // American Journal of Physics. 2019. Vol. 87. Iss. 9. P. 765. DOI: 10.1119/1.5116583.

REFERENCES

1. Stefan J. Über die Beziehungen zwischen der Wärmestrahlung und der Temperatur. In: *Sitzungsberichte der Akademie des Wissenschaften (Wien). Ableitung 2*, 1879, bd. 79, S. 391–428.
2. Boltzmann L. Über eine von Hrn Bartoli entdecte Beziehung der Wärmestrahlung zum zweiten Hauptsatze. In: *Annalen der Physik*, 1884, bd. 22, S. 31–39.
3. Boltzmann L. Ableitung des Stefanschen Gesetzes, betreffend die Abhängigkeit der Wärmestrahlung von der Temperatur aus der electromagnetiscen Lichttheorie. In: *Annalen der Physik*, 1884, bd. 22, S. 291–294.
4. Bartoli A. Sopra i movimente prodotti dalla luce e del calore e sopra il radiometro di Crookes. Firenze, Le Monnirt, 1876. 56 p.
5. Bartoli A. Il calorico raggiante e il secondo principio di termodynamica. In: *Il Nuovo Cimento*, 1884, Terza serie. Tomo XV, P. 193–202.
6. Lebedev P. N. [Maxwell-Bartoli pressure forces of radiant energy]. In: *Zhurnal Russkogo fiziko-khimicheskogo obshchestva* [Journal of the Russian Physical and Chemical Society], 1900, vol. XXXII, Part of the Physics, Dep. 1, no. 8, pp. 211–217.
7. Lebedew P. Les forces de Maxwell-Bartoli dues a la Pression de la Lumière. In: *Rapports Présentés au Congrès International de Physique*. Paris, Gauthier-Villars, 1900. Vol. 2, pp. 133–140.
8. Lebedev P. N. [Experimental study of light pressure]. In: *Zhurnal Russkogo fiziko-khimicheskogo obshchestva* [Journal of the Russian Physical and Chemical Society], 1901, vol. XXXIII, Part of Physics, pp. 53–76.
9. Lebedew P. Untersuchungen uber die Druckkrafte des Lichtes. In: *Annalen der Physik*, 1901, bd. 6, S. 433–458.
10. Timiryazev K. A. [Petr Nikolaevich Lebedev]. In: Timiryazev K. A. *Sochineniya. T. 8* [Works. Vol. 8]. Moscow, Selhozgiz Publ., 1939, pp. 313–319.

11. Lazarev P. P. [P. N. Lebedev and Russian physics]. In: *Vremennik Obshchestva im. Kh. S. Ledentsova* [Vremennik of the H. S. Ledentsov's Society], 1912, no. 2, pp. 65–78.
12. Lorentz H. A. Ludwig Boltzmann. In: *Verchandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft*, 1907, bd. 9, S. 206–236.
13. Boltzmann L. [Molecular-kinetic theory of gases, thermodynamics, statistical mechanics]. In: Boltzmann L. *Izbrannye Trudy* [Selected works]. Moscow, Nauka Publ., 1984, pp. 9–330.
14. Isaev V. I. [M. Planck and history of the discovery of the quanta of the heat radiation]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika* [Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics-Mathematics], 2018, no. 1, pp. 91–99. DOI: 10.18384/2310-7251-2018-1-91-99.
15. Calcaneo-Roldan C., Salcidone O., Santana D. A semi-analytical approach to black body radiation. In: *European Journal of Physics*, 2017, vol. 38, no. 5. pp. 055807. DOI: 10.1088/1361-6404/aa7d1d.
16. Boyer T. H. Understanding the Planck black body spectrum. In: *European Journal of Physics*, 2016, vol. 37, no. 6, pp. 065102. DOI: 10.1088/0143-0807/37/6/065102.
17. Boyer T. H. Scaling. Scattering and black body radiation in classical physics. In: *European Journal of Physics*, 2017, vol. 38, no. 4, pp. 0451001. DOI: 10.1088/1361-6404/aa6c18.
18. Poprawski W., Gnutek Z., Radojewska E. B., Poprawski R. Investigation of black body radiation with the aid of a self-made pyroelectric infrared detector. In: *European Journal of Physics*, 2015, vol. 36, no. 6, pp. 065025. DOI: 10.1088/0143-0807/36/6/065025.
19. Nauenberg M. Max Planck and the birth of the quantum mechanics. In: *American Journal of Physics*, 2016, vol. 84, iss. 9, pp. 709–716. DOI: 10.1119/1.4955146.
20. Boyer T. H. Interference between source-free radiation and radiation from sources: Particle Boyer-like behavior for classical radiation. In: *American Journal of Physics*, 2017, vol. 5, iss. 9, pp. 670–675. DOI: 10.1119/1.4991396.
21. Boyer T. H. The contrasting roles of Planck's constant in classical and quantum theories. In: *American Journal of Physics*, 2018, vol. 86, iss. 4, pp. 280. DOI: 10.1119/1.5021355.
22. Boyer T. H. Blackbody radiation in classical physics: historical perspective. In: *American Journal of Physics*, 2018, vol. 86, iss. 7, pp. 495. DOI: 10.1119/1.5034785.
23. Persson J. R Evolution of quasi-hystory of the Planck's blackbody radiation equation in a physics. In: *American Journal of Physics*, 2018, vol. 86, iss. 12, pp. 887. DOI: 10.1119/1.5054005.
24. Jagannathan K. Anxiety and the equation: Understanding Boltzmann's Entropy. In: *American Journal of Physics*, 2019, vol. 87, iss. 9, pp. 765. DOI: 10.1119/1.5116583.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Исаев Вячеслав Игоревич – кандидат физико-математических наук, независимый исследователь (г. Москва);
e-mail:vis961@yandex.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Vyacheslav I. Isaev – Cand. Sci. (Phys.-Math.), Independent Researcher (Moscow);
e-mail:vis961@yandex.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Исаев В. И. Л. Больцман и история открытия закона теплового излучения Стефана-Больцмана // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2022. № 4. С. 56–57.
DOI: 10.18384/2310-7251-2022-4-56-67.

FOR CITATION

Isaev V. I. L. Boltzmann and the history of the discovery of the Stefan-Boltzmann law of thermal radiation. In*: Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*, 2022, no. 4, pp. 56–57.
DOI: 10.18384/2310-7251-2022-4-56-67.

ВЕСТНИК
МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
ОБЛАСТНОГО УНИВЕРСИТЕТА

Рецензируемый научный журнал «Вестник Московского государственного областного университета» основан в 1998 г.

Сегодня Московским государственным областным университетом выпускается десять научных журналов по разным отраслям науки. Журналы включены в Перечень ВАК (составленный Высшей аттестационной комиссией при Минобрнауки РФ Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание учёной степени кандидата наук, на соискание учёной степени доктора наук). Журналы включены в базу данных Российского индекса научного цитирования (РИНЦ).

Печатные версии журналов зарегистрированы в Федеральной службе по надзору за соблюдением законодательства в сфере массовых коммуникаций и охране культурного наследия.

Полнотекстовые версии журналов доступны в интернете на сайтах Вестника Московского государственного областного университета (www.physmathmgou.ru; www.vestnik-mgou.ru), а также на платформах Научной электронной библиотеки (www.elibrary.ru) и Научной электронной библиотеки «КиберЛенинка» (www.cyberleninka.ru).

ВЕСТНИК
МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ОБЛАСТНОГО УНИВЕРСИТЕТА

СЕРИЯ: ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА
2022. № 4

Над номером работали:

Литературный редактор М. С. Тарасова
Переводчик И. А. Улиткин
Корректор М. С. Тарасова
Компьютерная вёрстка Д. А. Заботина

Адрес редакции:
105005, г. Москва, ул. Радио, д. 10А, офис 98
тел.: (495) 780-09-42 (доб. 6101)
e-mail: info@vestnik-mgou.ru
Сайты: www.physmathmgou.ru; www.vestnik-mgou.ru

Формат 70х108/16. Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура «Minion Pro».
Тираж 500 экз. Усл. п. л. 4,25, уч.-изд. л. 3,25.
Подписано в печать: 30.11.2022. Дата выхода в свет: 07.02.2023. Заказ № 2022/12-05.
Отпечатано в МГОУ
105005, г. Москва, ул. Радио, 10А