ВЕСТНИК
МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
ОБЛАСТНОГО УНИВЕРСИТЕТА

ISSN 2072-8387 (print) 2022 / № 2 ISSN 2310-7251 (online)

серия

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА

Рецензируемый научный журнал. Основан в 1998 г.

Журнал «Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика» включён в «Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание учёной степени кандидата наук, на соискание учёной степени доктора наук» Высшей аттестационной комиссии при Министерстве науки и высшего образования Российской Федерации (См.: Список журналов на сайте ВАК при Минобрнауки России) по следующим научным специальностям: 01.04.02 – Теоретическая физика (физико-математические науки); 01.04.07 – Физика конденсированного состояния (физико-математические науки).

The peer-reviewed journal was founded in 1998

«Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics» is included by the Supreme Certifying Commission of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation into "the List of reviewed academic journals and periodicals recommended for publishing in corresponding series basic research thesis results for a Ph.D. Candidate or Doctorate Degree" (See: the online List of journals at the site of the Supreme Certifying Commission of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation) on the following scientific specialities: 01.04.02 – Theoretical physics (physical-mathematical sciences); 01.04.07 – Physics of the condensed state (physical-mathematical sciences) (See: the online List of journals at the site of the Supreme Certifying Commission of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation).

ISSN 2072-8387 (print) 2022 / № 2 ISSN 2310-7251 (online)

series

PHYSICS AND MATHEMATICS

BULLETIN OF THE MOSCOW REGION
STATE UNIVERSITY

Учредитель журнала
«Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика»
Государственное образовательное учреждение высшего образования Московской области
Московский государственный областной университет
Выходит 4 раза в год

ISSN 2072-8387 (print)
ISSN 2310-7251 (online)

Рецензируемый научный журнал «Вестник московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика» публикует статьи по математическим проблемам термодинамики, кинетики и статистической физики; теории конденсированного состояния классических и квантовых, макроскопических и микроскопических систем; изучению различных состояний вещества и физических явлений в них; статистической физике и кинетической теории равновесных и неравновесных систем; теоретическому и экспериментальному исследованию физических свойств неупорядоченных неорганических систем; изучению экспериментального состояния конденсированных веществ и фазовых переходов в них. Журнал адресован ученым, докторантам, аспирантам и всем, интересующимся достижениями физико-математических наук.

Журнал «Вестник Московского государственного областного университета. Серия «Физика-математика» зарегистрирован в Федеральной службе по надзору за соблюдением законодательства в сфере массовых коммуникаций и охране культурного наследия. Регистрационное свидетельство ПИ № ФС 77-73344.

Индекс серии «Физика-математика» по Объединенному каталогу «Пресса России» 40723

Журнал включён в базу данных Российского индекса научного цитирования (РИНЦ), имеет полнотекстовую сетевую версию в Интернете на платформе Научной электронной библиотеки (www.elibrary.ru), с августа 2017 г. на платформе Научной электронной библиотеки «КиберЛенинка» (https://cyberleninka.ru), а также на сайте Московского государственного областного университета (www.vestnik-mgou.ru).

Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. – 2022. – № 2. – 70 с.

Адрес редакции:
г. Москва, ул. Радио, д.10А, офис 98
тел.: (495) 780-09-42 (доб. 6101)
e-mail: info@vestnik-mgou.ru; сайт: www.vestnik-mgou.ru

Founder of journal
«Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics»
Moscow Region State University

Issued 4 times a year

ISSN 2072-8387 (print)
ISSN 2310-7251 (online)

The reviewed scientific journal "Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics" publishes articles on mathematical problems of thermodynamics, kinetics and statistical physics; the theory of the condensed state of classical and quantum, macroscopic and microscopic systems; the study of various states of substance and physical phenomena in them; statistical physics and the kinetic theory of equilibrium and non-equilibrium systems; theoretical and experimental research of physical features of disordered inorganic systems; the study of the experimental state of condensed substances and phase transitions in them. The journal is addressed to scientists, doctoral students, PhD students and everyone interested in the achievements of physical and mathematical sciences.

The series "Physics and Mathematics" of the Bulletin of the Moscow Region State University is registered in Federal service on supervision of legislation observance in sphere of mass communications and cultural heritage protection. The registration certificate ПИ № ФС 77 – 73344.

Index series «Physics and Mathematics» according to the union catalog «Press of Russia» 40723

The journal is included into the database of the Russian Science Citation Index, has a full text network version on the Internet on the platform of Scientific Electronic Library (www.elibrary.ru), and from August 2017 on the platform of the Scientific Electronic Library "CyberLeninka" (https://cyberleninka.ru), as well as at the site of the Moscow Region State University (www.vestnik-mgou.ru)

Bulletin of the Moscow State Regional University. Series: Physics and Mathematics. – 2022. – № 2. – 70 p.

The Editorial Board address:
10A Radio st., office 98, Moscow, Russia
Phone: (495) 780-09-42 (add. 6101)
e-mail: info@vestnik-mgou.ru; site: www.vestnik-mgou.ru

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

ФИЗИКА

CONTENTS

MATHEMATICS

PHYSICS

МАТЕМАТИКА

УДК 517.95
DOI: 10.18384/2310-7251-2022-2-6-16

РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ МОИСИЛА-ТЕОДОРЕСКУ В БЕСКОНЕЧНОМ СЛОЕ

Алгазин О. Д., Копаев А. В.

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет)
105005, г. Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, Российская Федерация

Аннотация
Цель: найти точные решения смешанной краевой задачи для системы уравнений Моисила-Теодореску в бесконечном слое.
Процедура и методы. В статье рассмотрены смешанные краевые задачи для системы уравнений Моисила-Теодореску в слое и для системы Коши-Римана в полосе. Эти задачи сводятся к смешанным краевым задачам Дирихле-Неймана для уравнения Лапласа в слое и в полосе, соответственно, явные решения которых получены авторами ранее с помощью преобразования Фурье обобщённых функций медленного роста.
Результаты. Получены точные решения смешанных краевых задач для системы Моисила-Теодореску и для системы Коши-Римана, которые записываются в виде свёрток быстро убывающих, бесконечно дифференцируемых функций (ядер) с граничными функциями, которые считаются обобщёнными функциями медленного роста. Если граничные функции являются обычными функциями медленного роста, то решения записываются интегральными формулами, которые можно считать аналогом формул Келдыша-Седова. В частности, если граничные функции являются полиномами, то решения также являются полиномами.
Теоретическая и/или практическая значимость работы заключается в получении точных решений смешанных краевых задач для системы Моисила-Теодореску и для системы Коши-Римана.
Ключевые слова: Система уравнений Моисила-Теодореску, система уравнений Коши-Римана, краевая задача Римана-Гильберта, краевая задача Шварца, смешанная краевая задача, обобщённые функции медленного роста

SOLUTION OF A MIXED BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE MOISIL–TEODORESKU SYSTEM IN AN INFINITE LAYER

O. Algazin, A. Kopaev
Bauman Moscow State Technical University
ul. 2-ya Baumanskaya 5, stroenie 1, Moscow 105005, Russian Federation

Abstract
Aim. The purpose of the paper is to find exact solutions of a mixed boundary value problem for a system of Moisil–Teodorescu equations in an infinite layer.
Methodology. The paper considers mixed boundary value problems for the Moisil–Teodorescu system of equations in a layer and for the Cauchy–Riemann system in a strip. These problems are reduced to mixed Dirichlet–Neumann boundary value problems for the Laplace equation in a layer and in a strip, respectively, whose explicit solutions were previously obtained by the authors using the Fourier transform of generalized functions of slow growth.
Results. Exact solutions of mixed boundary value problems for the Moisil–Teodorescu system and for the Cauchy–Riemann system are obtained, which are written as convolutions of rapidly decreasing, infinitely differentiable functions (kernels) with boundary functions that are considered to be generalized functions of slow growth. If the boundary functions are ordinary functions of slow growth, then the solutions are written using integral formulas, which can be considered analogous to the Keldysh–Sedov formulas. In particular, if the boundary functions are polynomials, then the solutions are also polynomials.
Research implications. Exact solutions of mixed boundary value problems for the Moisil–Teodorescu system and for the Cauchy–Riemann system are obtained.
Keywords: Moisil–Teodorescu system of equations, Cauchy–Riemann system of equations, Riemann–Hilbert boundary value problem, Schwartz boundary value problem, mixed boundary value problem, generalized functions of slow growth

Введение

Система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial q_2}{\partial x_1} + \dfrac{\partial q_3}{\partial x_2} + \dfrac{\partial q_4}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial q_1}{\partial x_1} - \dfrac{\partial q_3}{\partial y} + \dfrac{\partial q_4}{\partial x_2} = 0 \\ \dfrac{\partial q_1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial q_2}{\partial y} - \dfrac{\partial q_4}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial q_1}{\partial y} - \dfrac{\partial q_2}{\partial x_2} + \dfrac{\partial q_3}{\partial x_1} = 0 \end{cases} \tag{1}$$

где $q_1(x,y),\ q_2(x,y),\ q_3(x,y),\ q_4(x,y),\ x=(x_1,x_2)$ функции трёх переменных, введена румынскими математиками Г. Моисилом и Н. Теодореску [1] как обобщение на случай трёх переменных системы уравнений Коши-Римана для функций двух переменных $u(x,y), v(x,y)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

В случае системы Коши-Римана (2) функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ являются гармоническими, а функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ является аналитической (голоморфной).

В случае системы Моисила-Теодореску (1) четырёхкомпонентный вектор $q = (q_1, q_2, q_3, q_4)$ называется голоморфным, а его компоненты являются гармоническими функциями трёх переменных.

Теория краевых задач для аналитических функций (для системы Коши-Римана) изложена в книгах [2; 3]. Задачей Гильберта (Римана-Гильберта) называется задача отыскания аналитической функции (решения системы (2)) в области D, если на границе области ∂D задана линейная комбинация функций u и v:

$$au + bv = c$$

или

$$\mathrm{Re}\big((a - ib)f\big) = c,$$

где a, b, c — заданные функции.

Частный случай, если $a \equiv 1, b \equiv 0$, называется задачей Шварца.

В случае кусочно-постоянных коэффициентов a и b, если на одной части границы $a = 1, b = 0$, а на оставшейся части границы $a = 0, b = 1$, то есть на одной части границы задана функция u, а на оставшейся части границы задана функция v, мы имеем смешанную краевую задачу [2, с. 472; 3, с. 308]. Для случая полуплоскости решение этой задачи даётся формулой Келдыша-Седова [2–4].

Основные факты теории аналитических функций переносятся на голоморфные векторы [5, с. 222; 6, с. 164]. Например, в [6, с. 179] рассмотрен один из аналогов задачи Римана-Гильберта для полупространства. Другие аналоги задачи Римана-Гильберта для ограниченных областей в $\mathbb{R}^3$ рассмотрены в [7; 8].

В данной работе мы рассматриваем смешанную краевую задачу для системы уравнений Моисила-Теодореску в бесконечном слое

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{R}^2, 0 < y < a\},$$

в которой требуется найти решение системы (1), удовлетворяющее граничным условиям:

$$q_1(x, 0) = k(x), q_2(x, a) = l(x), q_3(x, a) = m(x), q_4(x, 0) = n(x).$$

Предварительно мы решаем смешанную краевую задачу для системы уравнений Коши-Римана в полосе.

Полученные интегральные формулы, представляющие решение, можно рассматривать как аналог формул Келдыша-Седова.

1. Смешанная краевая задача для системы Коши-Римана в полосе

Требуется решить краевую задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases}, \qquad -\infty < x < \infty,\ \ 0 < y < a, \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ \ v(x,a) = \psi(x),\ \ -\infty < x < \infty. \ (3)$$

Эта задача сводится к двум смешанным краевым задачам Дирихле-Неймана для уравнения Лапласа в полосе для функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$:

$$\Delta u(x,y) = 0, \qquad -\infty < x < \infty,\ \ 0 < y < a, \tag{4}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad u_y(x,a) = -\psi'(x), \tag{5}$$

$$\Delta v(x,y) = 0, \qquad -\infty < x < \infty,\ \ 0 < y < a, \tag{6}$$

$$v_y(x,0) = \varphi'(x), \qquad v(x,a) = \psi(x). \tag{7}$$

Эти задачи решены в [9]. Их решения записываются в виде свёрток

$$u(x,y) = \varphi(x) * r(x,y) - \psi'(x) * s(x,y)\,, \tag{9}$$

$$v(x,y) = \psi(x) * r(x,a-y) - \varphi'(x) * s(x,a-y)\,, \tag{10}$$

где для ядер введены обозначения ($\mathcal{F}_t^{-1}$ — обратное преобразование Фурье)

$$r(x,y) = \mathcal{F}_t^{-1}[R](x,y), \qquad R(t,y) = \frac{\operatorname{ch}\big(t(a-y)\big)}{\operatorname{ch}(ta)}, \qquad t \in \mathbb{R}\ ,$$

$$s(x,y) = \mathcal{F}_t^{-1}[S](x,y), \qquad S(t,y) = \frac{\operatorname{sh}(ty)}{t\operatorname{ch}(ta)}, \qquad t \in \mathbb{R}\ ,$$

$$r(x,y) = \frac{1}{a}\,\frac{\sin\left(\frac{\pi y}{2a}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{\pi x}{2a}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi x}{a}\right) - \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)}, s(x,y) = \frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi x}{2a}\right) + \sin\left(\frac{\pi y}{2a}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi x}{2a}\right) - \sin\left(\frac{\pi y}{2a}\right)}\right).$$

Заданные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ можно считать обобщёнными функциями медленного роста, $\varphi(x), \psi(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ [10]. В этом случае решения системы Коши-Римана $u(x,y)$ и $v(x,y)$ имеют граничные значения в смысле теории обобщенных функций:

$$\lim_{y\to 0+} u(x,y) = \varphi(x) \ \text{ в } \ \mathcal{S}'(\mathbb{R}), \qquad \lim_{y\to a-} v(x,y) = \psi(x) \ \text{ в } \ \mathcal{S}'(\mathbb{R}),$$

то есть для каждой основной функции $\alpha(x) \in \mathcal{S}\ (\mathbb{R})$ имеют место равенства:

$$\lim_{y\to 0+}\big(u(x,y), \alpha(x)\big) = \big(\varphi(x), \alpha(x)\big), \qquad \lim_{y\to a-}\big(v(x,y), \alpha(x)\big) = \big(\psi(x), \alpha(x)\big).$$

Замечание 1. По свойствам свёртки

$$\psi'(x) * s(x,y) = \psi(x) * \frac{\partial}{\partial x}s(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\big(\psi(x) * s(x,y)\big)$$

$$\varphi'(x) * s(x,a-y) = \varphi(x) * \frac{\partial}{\partial x}s(x,a-y) = \frac{\partial}{\partial x}\big(\varphi(x) * s(x,a-y)\big),$$

и формулы (9), (10) можно менять в соответствии с этими равенствами.

Если $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — обычные функции медленного роста, то граничные значения функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$ существуют в обычном смысле, то есть в каждой точке непрерывности функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ имеют место равенства:

$$\lim_{y\to 0+} u(x,y) = \varphi(x), \qquad \lim_{y\to a-} v(x,y) = \psi(x).$$

Эти же равенства имеют место в некотором интервале в том случае, когда обобщённая функция $\varphi(x)$ $\big(\psi(x)\big)$ совпадает в этом интервале с непрерывной функцией.

Когда $\varphi(x), \varphi'(x)$ и $\psi(x), \psi'(x)$ – обычные функции медленного роста, свёртки (9), (10) записываются интегральными формулами:

$$u(x,y) = \frac{1}{a}\sin\left(\frac{\pi y}{2a}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\ \frac{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi(x-t)}{2a}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi(x-t)}{a}\right)-\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)}dt -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\psi'(t)\ln\left(\frac{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi(x-t)}{2a}\right)+\sin\left(\frac{\pi y}{2a}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi(x-t)}{2a}\right)-\sin\left(\frac{\pi y}{2a}\right)}\right)dt\,,$$

$$v(x,y) = \frac{1}{a}\cos\left(\frac{\pi y}{2a}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\psi\,(t)\ \frac{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi(x-t)}{2a}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi(x-t)}{a}\right)+\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)}dt -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi'(t)\ln\left(\frac{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi(x-t)}{2a}\right)+\cos\left(\frac{\pi y}{2a}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi(x-t)}{2a}\right)-\cos\left(\frac{\pi y}{2a}\right)}\right)dt.$$

Если $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – полиномы, то $u(x,y)$ и $v(x,y)$ тоже являются полиномами и явные формулы для них получены в [11].

Решение смешанной краевой задачи (2), (3) единственно в классе функций $f(x,y)$ медленного роста по x:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x,y)|\,(1+|x|)^{-m}dx < C\ ,$$

для некоторого $m \geq 0$ и для каждого $y \in (0,a)$.

Пример 1. $\varphi(x) = H(x),\ \psi(x) = 0.$

Здесь $H(x)$ – функция Хевисайда, её производная $H'(x) = \delta(x)$ – дельта-функция Дирака. Решение смешанной задачи (2), (3) получаем по формулам (9), (10):

$$u(x,y) = \varphi(x) * r(x,y) - \psi'(x) * s(x,y) = H(x) * r(x,y) =$$

$$= \frac{1}{a}\sin\left(\frac{\pi y}{2a}\right)\int_{0}^{\infty}\ \frac{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi(x-t)}{2a}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi(x-t)}{a}\right)-\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)}dt = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{\pi x}{2a}\right)}{\sin\left(\frac{\pi y}{2a}\right)}\right)+\frac{1}{2}.$$

$$v(x,y) = \psi(x) * r(x,a-y) - \varphi'(x) * s(x,a-y) = -\delta(x) * s(x,a-y) =$$

$$= -s(x,a-y) = \frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi x}{2a}\right)-\cos\left(\frac{\pi y}{2a}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi x}{2a}\right)+\cos\left(\frac{\pi y}{2a}\right)}\right).$$

Легко проверить, что $u(x,y)$ и $v(x,y)$ удовлетворяют системе Коши-Римана (2) и выполняются граничные условия:

$\lim\limits_{y\to 0+} u(x,y) = 1$, если $x > 0$, $\lim\limits_{y\to 0+} u(x,y) = 0$, если $x < 0$, $\lim\limits_{y\to a-} v(x,y) = 0.$

В точке разрыва функции $H(x)$ $\lim\limits_{y\to 0+} u(0,y) = 1/2$.

Пример 2. $\varphi(x) = \delta(x)$, $\psi(x) = 0$.

По формулам (9), (10):

$$u(x,y) = \varphi(x) * r(x,y) - \psi'(x) * s(x,y) = \delta(x) * r(x,y) = r(x,y) =$$
$$= \frac{1}{a}\,\frac{\sin\left(\frac{\pi y}{2a}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{\pi x}{2a}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi x}{a}\right) - \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)}.$$

$$v(x,y) = \psi(x) * r(x,a-y) - \varphi'(x) * s(x,a-y) = -\delta'(x) * s(x,a-y) =$$
$$= -\frac{\partial}{\partial x}\big(\delta(x) * s(x,a-y)\big) = -\frac{\partial}{\partial x} s(x,a-y) =$$
$$= -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi x}{2a}\right)+\cos\left(\frac{\pi y}{2a}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi x}{2a}\right)-\cos\left(\frac{\pi y}{2a}\right)}\right)\right) = \frac{1}{a}\,\frac{\cos\left(\frac{\pi y}{2a}\right)\operatorname{sh}\left(\frac{\pi x}{2a}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi x}{a}\right) - \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)}$$

Легко проверить, что $u(x,y)$ и $v(x,y)$ удовлетворяют системе Коши-Римана (2) и выполняются граничные условия в следующем смысле:

$$\lim_{y\to 0+} u(x,y) = \delta(x) \ \text{ в } \ \mathcal{S}'(\mathbb{R}),$$

то есть для каждой функции $\alpha(x) \in \mathcal{S}\ (\mathbb{R})$, имеет место равенство

$$\lim_{y\to 0+}\frac{1}{a}\sin\left(\frac{\pi y}{2a}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\alpha(x)\ \frac{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi x}{2a}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi x}{a}\right) - \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)}\,dt = \alpha(0).$$

В интервалах $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$ обобщённая функция $\delta(x)$ совпадает с непрерывной функцией тождественно равной нулю, поэтому

$$\lim_{y\to 0+} u(x,y) = 0 \text{ для } x \neq 0.$$

Также

$$\lim_{y\to a-} v(x,y) = 0.$$

Пример 3. $\varphi(x) = x^2$, $\psi(x) = x^3$.

По формулам, приведённым в [11], получим решение смешанной краевой задачи:

$$u(x,y) = x^2 - y^2 + 2ay - 3x^2y + y^3 - 3a^2y,$$
$$v(x,y) = 3a^2x + x^3 - 3xy^2 - 2ax + 2xy.$$

Аналитическая функция, дающая решение задачи Римана-Гильберта:

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = iz^3 + z^2 + (3ia^2 - 2ia)z,$$
$$\operatorname{Re} f(x) = x^2, \qquad \operatorname{Im} f(x+ia) = x^3.$$

2. Смешанная краевая задача для системы Моисила-Теодореску в слое

Требуется решить краевую задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial q_2}{\partial x_1}+\dfrac{\partial q_3}{\partial x_2}+\dfrac{\partial q_4}{\partial y}=0 \\ \dfrac{\partial q_1}{\partial x_1}-\dfrac{\partial q_3}{\partial y}+\dfrac{\partial q_4}{\partial x_2}=0 \\ \dfrac{\partial q_1}{\partial x_2}+\dfrac{\partial q_2}{\partial y}-\dfrac{\partial q_4}{\partial x_1}=0 \\ \dfrac{\partial q_1}{\partial y}-\dfrac{\partial q_2}{\partial x_2}+\dfrac{\partial q_3}{\partial x_1}=0 \end{cases} \quad (x_1,x_2)=x\in\mathbb{R}^2, 0<y<a, \qquad (11)$$

$$q_1(x,0)=k(x), q_2(x,a)=l(x), q_3(x,a)=m(x), q_4(x,0)=n(x) \qquad (12)$$

Задача (11), (12) сводится к четырём смешанным краевым задачам Дирихле-Неймана для уравнения Лапласа в слое:

$$\Delta q_1(x,y)=0, \quad x\in\mathbb{R}^2, \quad 0<y<a,$$
$$q_1(x,0)=k(x), \quad \frac{\partial q_1}{\partial y}(x,a)=\frac{\partial l}{\partial x_2}(x)-\frac{\partial m}{\partial x_1}(x), \qquad (13)$$

$$\Delta q_2(x,y)=0, \quad x\in\mathbb{R}^2, \quad 0<y<a,$$
$$q_2(x,a)=l(x), \quad \frac{\partial q_2}{\partial y}(x,0)=-\frac{\partial k}{\partial x_2}(x)+\frac{\partial n}{\partial x_1}(x), \qquad (14)$$

$$\Delta q_3(x,y)=0, \quad x\in\mathbb{R}^2, \quad 0<y<a,$$
$$q_3(x,a)=m(x), \quad \frac{\partial q_3}{\partial y}(x,0)=\frac{\partial k}{\partial x_1}(x)+\frac{\partial n}{\partial x_2}(x), \qquad (15)$$

$$\Delta q_4(x,y)=0, \quad x\in\mathbb{R}^2, \quad 0<y<a,$$
$$q_4(x,0)=n(x), \quad \frac{\partial q_4}{\partial y}(x,a)=-\frac{\partial l}{\partial x_1}(x)-\frac{\partial m}{\partial x_2}(x). \qquad (16)$$

Эти задачи решены в [9]. Их решения записываются в виде свёрток

$$q_1(x,y)=k(x)*r_2(x,y)+\left(\frac{\partial l}{\partial x_2}(x)-\frac{\partial m}{\partial x_1}(x)\right)*s_2(x,y), \qquad (17)$$

$$q_2(x,y)=l(x)*r_2(x,a-y)+\left(\frac{\partial k}{\partial x_2}(x)-\frac{\partial n}{\partial x_1}(x)\right)*s_2(x,a-y), \qquad (18)$$

$$q_3(x,y)=m(x)*r_2(x,a-y)-\left(\frac{\partial k}{\partial x_1}(x)+\frac{\partial n}{\partial x_2}(x)\right)*s_2(x,a-y), \qquad (19)$$

$$q_4(x,y)=n(x)*r_2(x,y)-\left(\frac{\partial l}{\partial x_1}(x)+\frac{\partial m}{\partial x_2}(x)\right)*s_2(x,y). \qquad (20)$$

где для ядер введены обозначения ($\mathcal{F}_t^{-1}$ — обратное преобразование Фурье)

$$r_2(x,y)=\mathcal{F}_t^{-1}[R_2](x,y), \quad R_2(t,y)=\frac{ch\big(|t|(a-y)\big)}{ch(|t|a)}, \quad t\in\mathbb{R}^2,$$

$$s_2(x,y)=\mathcal{F}_t^{-1}[S_2](x,y), \quad S_2(t,y)=\frac{sh(|t|y)}{|t|\,ch(|t|a)}, \quad t\in\mathbb{R}^2,$$

Ядра $r_2(x,y)$ и $s_2(x,y)$ не выражаются через элементарные функции:

$$r_2(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{ch(\rho(a-y))}{ch(a\rho)}\rho\, J_0(\rho|x|)d\rho\ ,$$
$$s_2(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{sh(\rho y)}{ch(a\rho)} J_0(\rho|x|)d\rho\ ,$$
где $J_0(\rho|x|)$ − функция Бесселя 1-го рода нулевого порядка.

Заданные функции $k(x), l(x), m(x), n(x)$ можно считать обобщёнными функциями медленного роста, $k(x), l(x), m(x), n(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ [10]. В этом случае решения системы Моисила-Теодореску $q_1(x,y), q_2(x,y), q_3(x,y), q_4(x,y)$ имеют граничные значения в смысле теории обобщённых функций.

Замечание 2. Формулы (17), (18), (19), (20) можно изменить в соответствии со свойствами свёртки. Например,
$$\left(\frac{\partial l}{\partial x_2}(x) - \frac{\partial m}{\partial x_1}(x)\right) * s_2(x,y) = \big(l(x) - m(x)\big) * \left(\frac{\partial s_2}{\partial x_2}(x,y) - \frac{\partial s_2}{\partial x_1}(x,y)\right)$$
$$= \left(\frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_1}\right)\Big(\big(l(x) - m(x)\big) * s_2(x,y)\Big).$$

Если $k(x), l(x), m(x), n(x)$ – обычные функции медленного роста, то граничные значения функций $q_1(x,y), q_2(x,y), q_3(x,y), q_4(x,y)$ существуют в обычном смысле, то есть в каждой точке непрерывности функций $k(x), l(x), m(x), n(x)$ имеют место равенства
$$\lim_{y\to 0+} q_1(x,y) = k(x), \qquad \lim_{y\to a-} q_2(x,y) = l(x),$$
$$\lim_{y\to a-} q_3(x,y) = m(x), \qquad \lim_{y\to 0+} q_4(x,y) = n(x).$$

Эти же равенства имеют место в некоторой области $D \subset \mathbb{R}^2$ и в том случае, когда обобщённые функции $k(x), l(x), m(x), n(x)$ совпадают в этой области с непрерывными функциями.

Если $k(x), l(x), m(x), n(x)$ и их первые производные – обычные функции медленного роста, свёртки (17), (18), (19), (20) записываются интегральными формулами, например:
$$q_1(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} k(t)dt \int_0^\infty \frac{ch(\rho(a-y))}{ch(a\rho)}\rho\, J_0(\rho|x-t|)d\rho\ \ +$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\left(\frac{\partial l}{\partial t_2}(t) - \frac{\partial m}{\partial t_1}(t)\right)dt \int_0^\infty \frac{sh(\rho y)}{ch(a\rho)} J_0(\rho|x-t|)d\rho\ .$$
Если $k(x), l(x), m(x), n(x)$ – полиномы, то свёртки (17), (18), (19), (20) являются полиномами, и явные формулы для них получены в [11].

Решение смешанной краевой задачи (11), (12) единственно в классе функций $f(x,y)$ медленного роста по x:
$$\int_{\mathbb{R}^2} |f(x,y)|\,(1+|x|)^{-m}dx < C\ , \qquad |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\,,$$
для некоторого $m \geq 0$ и для каждого $y \in (0,a)$.

Пример 4.
$$k(x) = x_1^2 x_2, \qquad l(x) = x_1 x_2^2, \qquad m(x) = x_1^2 x_2^2, \qquad n(x) = x_1 x_2.$$

По формулам, приведённым в [11], получим решение смешанной краевой задачи:

$$q_1(x) = x_1^2x_2 * r_2(x,y) + (2x_1x_2 - 2x_1x_2^2) * s_2(x,y) =$$

$$= x_1^2x_2 + 2ax_2y - x_2y^2 + 2x_1x_2y - 2x_1x_2^2y + \frac{2}{3}x_1y^3 - 2a^2x_1y.$$

$$q_2(x,y) = x_1x_2^2 * r_2(x,a-y) + (x_1^2 - x_2) * s_2(x,a-y) =$$

$$= x_1x_2^2 - x_1y^2 + x_1a^2 + x_1^2a - ax_2 - x_1^2\,y + x_2y + \frac{2}{3}a^3 - ay^2 + \frac{1}{3}y^3.$$

$$q_3(x,y) = x_1^2x_2^2 * r_2(x,a-y) - (2x_1x_2 + x_1) * s_2(x,a-y) =$$

$$= x_1^2x_2^2 + x_1^2a^2 - x_1^2y^2 + x_2^2\,a^2 - x_2^2y^2 + \frac{1}{3}y^4 + \frac{5}{3}a^4 - 2a^2y^2 - 2ax_1x_2 -$$

$$-ax_1 + 2x_1x_2y + x_1y.$$

$$q_4(x,y) = x_1x_2 * r_2(x,y) - (x_2^2 + 2x_1^2x_2) * s_2(x,y) =$$

$$= x_1x_2 - x_2^2y - 2x_1^2x_2y + \frac{2}{3}x_2y^3 + \frac{1}{3}y^3 - 2a^2x_2y - ya^2.$$

Заключение

Получены точные решения смешанной краевой задачи для системы Моисила-Теодореску в бесконечном слое. В случае, когда заданные на границе слоя функции являются функциями медленного роста, решения задачи записываются интегральными формулами, которые можно считать аналогом формулы Келдыша-Седова для полуплоскости.

Статья поступила в редакцию 07.04.2022 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Moisil G. C., Theodorescu N. Fonctions holomorphes dans l'espace // Buletinul Societătii de Ştiinţe din Cluj. 1931. Tomul VI. P. 177–194.
2. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
3. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 512 с.
4. Келдыш М. В., Седов Л. И. Эффективное решение некоторых краевых задач для гармонических функций // Доклады АН СССР. 1937. Т. 16. № 1. С. 7–10.
5. Бицадзе А. В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного. М.: Наука, 1984. 320 с.
6. Бицадзе А. В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М.: Наука, 1966. 204 с.
7. Солдатов А. П. О задаче Шварца для системы Моисила-Теодореску // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2020. Т. 188. С. 3–13. DOI: 10.36535/0233-6723-2020-188-3-13.
8. Полковников А. Н., Тарханов Н. Задача Римана-Гильберта для системы Моисила-Теодореску // Математические труды. 2018. Т. 21. № 1. С. 155–192. DOI: 10.17377/mattrudy.2018.21.107.
9. Алгазин О. Д., Копаев А. В. Решение смешанной краевой задачи для уравнения Лапласа в многомерном бесконечном слое // Вестник Московского государственного

технического университета им. Н. Э. Баумана. Серия: Естественные науки. 2015. № 1. С. 3–13. DOI: 10.18698/1812-3368-2015-1-3-13.
10. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979. 320 с.
11. Алгазин О. Д. Полиномиальные решения краевых задач для уравнения Пуассона в слое // Математика и математическое моделирование. 2017. № 6. С. 1–18. DOI: 10.24108/mathm/0517.0000082.

REFERENCES

1. Moisil G. C., Theodorescu N. Fonctions holomorphes dans l'espace. In: *Buletinul Societătii de Ştiinţe din Cluj*, 1931, Tomul VI, pp. 177–194.
2. Gakhov F. D. *Kraevye zadachi* [Boundary value problems]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 640 p.
3. Muskhelishvili N. I. *Singulyarnye integral'nye uravneniya* [Singular integral equations]. Moscow, Nauka Publ., 1968. 512 p.
4. Keldysh M. V., Sedov L. I. [Efficient solution of some boundary value problems for harmonic functions]. In: *Doklady AN SSSR* [Reports of the Academy of Sciences of the USSR], 1937, vol. 16, no. 1, pp. 7–10.
5. Bitsadze A. V. *Osnovy teorii analiticheskikh funktsii kompleksnogo peremennogo* [Fundamentals of the theory of analytic functions of a complex variable]. Moscow, Nauka Publ., 1984. 320 p.
6. Bitsadze A. V. *Kraevye zadachi dlya ellipticheskikh uravnenii vtorogo poryadka* [Boundary value problems for second-order elliptic equations]. Moscow, Nauka Publ., 1966. 204 p.
7. Soldatov A. P. [On the Schwarz problem for the Moisil–Teodoresco system]. In: *Itogi nauki i tekhniki. Sovremennaya matematika i ee prilozheniya. Tematicheskie obzory* [Journal of Mathematical Sciences. Results of science and technology. Modern mathematics and its applications. Subject reviews], 2020, vol. 188, pp. 3–13. DOI: 10.36535/0233-6723-2020-188-3-13.
8. Polkovnikov A. N., Tarkhanov N. [A Riemann–Hilbert problem for the Moisil–Teodorescu system]. In: *Matematicheskie Trudy* [Siberian Advances in Mathematics], 2018, vol. 21, no. 1, pp. 155–192. DOI: 10.17377/mattrudy.2018.21.107.
9. Algazin O. D., Kopayev A. V. [Solution of the mixed boundary value problem for Laplace equation in a multidimensional infinite layer]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta im. N. E. Baumana. Seriya: Estestvennye nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences], 2015, no. 1, pp. 3–13. DOI 0.18698/1812-3368-2015-1-3-13.
10. Vladimirov V. S. *Obobshchennye funktsii v matematicheskoi fizike* [Generalized Functions in Mathematical Physics]. Moscow, Nauka Publ., 1979. 320 p.
11. Algazin O. D. [Polynomial Solutions of the Boundary Value Problems for the Poisson Equation in a Layer]. In: *Matematika i matematicheskoe modelirovanie* [Mathematics and Mathematical Modeling], 2017, no. 6, pp. 1–18. DOI: 10.24108/mathm/0517.0000082.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Алгазин Олег Дмитриевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры вычислительной математики и математической физики Московского государственного технического университета имени Н. Э. Баумана (национального исследовательского университета);
e-mail: mopi66@yandex.ru

Копаев Анатолий Владимирович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики Московского государственного технического университета имени Н. Э. Баумана (национального исследовательского университета);
e-mail: kopaev50@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Oleg D. Algazin – Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Prof., Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University;
e-mail: mopi66@yandex.ru

Anatoliy V. Kopaev – Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Prof., Department of Higher Mathematics, Bauman Moscow State Technical University;
e-mail: kopaev50@mail.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Алгазин О. Д., Копаев А. В. Решение смешанной краевой задачи для системы Моисила-Теодореску в бесконечном слое // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2022. № 2. С. 6–16.
DOI: 10.18384/2310-7251-2022-2-6-16.

FOR CITATION

Algazin O. D., Kopaev A. V. Solution of a mixed boundary value problem for the Moisil–Teodoresku system in an infinite layer. In: Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics, 2022, no. 2, pp. 6–16.
DOI: 10.18384/2310-7251-2022-2-6-16.

ФИЗИКА

УДК 620.111.3
DOI: 10.18384/2310-7251-2022-2-17-27

ВЛИЯНИЕ ДЕФЕКТНОСТИ СОТОВОЙ СТРУКТУРЫ В СИСТЕМЕ «СОТОВАЯ МАТРИЦА – КОМПОЗИТ» НА АКУСТИЧЕСКУЮ ЭМИССИЮ В ИЗМЕНЯЮЩЕМСЯ ТЕМПЕРАТУРНОМ ПОЛЕ

Асеев Е. М., Калашников Е. В.

Московский государственный областной университет
141014, Московская обл., г. Мытищи, ул. Веры Волошиной, д. 24, Российская Федерация

Аннотация
Цель статьи – экспериментальное изучение сложной системы, сочетающей в себе сотовую структуру, сопряжённую по нормали с композиционной структурой и имеющей дефектность.
Процедура и методы. Рассматривается влияние дефектности сотовой структуры на акустическую эмиссию в системе «сотовая матрица – композит», когда в роли внешнего возмущения выступает изменяющееся температурное поле. Используются методы акустической эмиссии. Вместо нагружения образца внешними силами используется температурное поле. Градиенты температурного поля генерируют механические напряжения в образце, возбуждая акустические поля в образце. Регистрировались акустические сигналы и температура образца.
Результаты. Получены зависимости амплитуд акустических сигналов от времени, в связи с нагреванием образцов с дефектом и без дефекта. А также обнаружено влияние размеров образца на акустическую эмиссию.
Теоретическая и/или практическая значимость. Амплитудные характеристики сигналов акустической эмиссии позволяют контролировать сложные системы при различных температурах и обнаруживать дефекты без использования механического нагружения изделий. Развиваемые методы акустической эмиссии в температурных полях применимы для анализа и контроля сложных инженерных конструкций.
Ключевые слова: структура пчелиных сот, акустическая эмиссия, пьезоэлектрический преобразователь, температура, амплитуда, композит, неразрушающий контроль

EFFECT OF DEFECTS ON HONEYCOMB STRUCTURE IN A 'HONEYCOMB – COMPOSITE MATRIX' SYSTEM ON ACOUSTIC EMISSION IN A CHANGING TEMPERATURE FIELD

E. Aseev, E. Kalashnikov

Moscow Region State University,
ul. Very Voloshinoi 24, Mytishchi 141014, Moscow Region, Russian Federation

Abstract

Aim. The purpose is an experimental study of a complex system that combines a honeycomb structure that is normal-conjugated with a compositional structure and has imperfections.

Methodology. The influence of the defectiveness of the honeycomb structure on acoustic emission in the '"honeycomb matrix – composite' system, when a changing temperature field acts as an external disturbance, is considered. Acoustic emission methods are used. Instead of loading the sample with external forces, a temperature field is used. Temperature field gradients generate mechanical stresses in the sample, exciting acoustic fields in the sample. Acoustic signals and sample temperature are recorded.

Results. Time dependences of the amplitudes of acoustic signals are obtained by heating samples with and without defects. It is also found that the sample size affects the acoustic emission.

Research implications. The amplitude characteristics of acoustic emission signals make it possible to control complex systems at different temperatures and detect defects without using mechanical loading of products. The developed methods of acoustic emission in temperature fields are applicable to the analysis and control of complex engineering structures.

Keywords: honeycombs structure, acoustic emission, piezoelectric transducer, temperature, amplitude, composite, non-destructive testing, technical diagnostics

Введение

Акустическая эмиссия (далее – АЭ) как вид технического диагностирования и контроля в своём современном виде является одним из эффективных методов исследования дефектности [4–7; 9–11] и качества изделий [14; 15] больших объёмов (ресиверы, шаровые резервуары, трубопроводы). Эти методы используют и для исследования сотовых структур наномасштабов, характерных, например, для растений [8]. Эти же методы применяются к исследованию специальных структур в виде пчелиных сот [12; 13]. Есть ограничения метода в виде влияния шумов на результат, а также необходимости «нагружать» объект контроля. Суть такого метода заключается в том, что при воздействии внешней нагрузки, например, изгибающей силы на исследуемый объект, его дефекты (поры, дислокации, трещины) внутри начнут излучать акустические волны в разных частотных диапазонах и с разными амплитудами становясь, таким образом, источником акустической эмиссии [1; 2]. Частотные зависимости АЭ позволяют идентифицировать типы дефектов. А амплитудные зависимости этих частотных характеристик определяют плотность дефектов определённого типа. Акустико-эмиссионный метод обладает свойствами стационарности и интегральности. Это предполагает установку нескольких (более трёх) преобразователей акустической эмиссии (далее – ПАЭ), которые могут быть задействованы в триангуляции для поиска и локализации координат источника АЭ [1; 2].

В случае же системы «сотовая матрица – внешний композит» (см. рис. 1) ситуация гораздо более сложная. Наличие многих границ сопряжения может вызывать плохо контролируемые напряжения и приводить к высокому затуханию УЗ либо к большому числу дополнительных источников УЗ-колебаний. Более того, сопряжение сот между собой, их изготовление и сопряжение с композиционной пластиной, нормальной к оси сотовой структуры, не исключает их неидиального исполнения (неидиальность исполнения предполагает неплотное прилегание стенок сот между собой – неоднородность такого прилегания, неоднородность сопряжения сотовой структуры с композиционной пластиной). Это создаёт трудность и неопределённость даже в определении понятия дефектности для такой структуры. Также в повседневных испытаниях нет возможности механически изгибать или сжимать такую конструкцию.

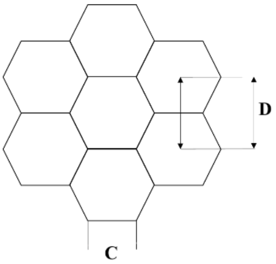
Между тем, известно [3], что изменение температурного поля и возникающие при этом температурные градиенты могут создавать напряжения в телах, возникновение которых будет вызывать акустические колебания. И таким образом манипуляции с температурой и контроль возникающей при этом акустической эмиссии могут служить независимым методом исследования очень сложной системы типа «сотовая матрица – внешний композит».

В таком случае цель настоящей работы состоит в том, чтобы выяснить, как сложная система типа «сотовая матрица – внешний композит» откликается только на температурные изменения.

1. Методика и схема эксперимента

Образцы получены путём распиливания сотовой конструкции с наполнителем из просмоленной бумаги, внешний слой представлял собой угольный композит под слоем краски (см. рис. 1). Этот внешний композит сопряжён с сотовой структурой (рис. 1*b*). Рассматривали два типа образцов. Первый образец (далее – образец «*a*») имеет размеры 100×53×30 mm^3, а второй является большим по размерам (образец «*b*»): 225×95×30 mm^3.

(*a*)



(*b*)

Рис. 1 / Fig. 1. Общий вид образца (*a*) и размеры сот (*b*). Сторона соты ***C* = *3mm*** и ***D* = *5,2mm*** / (a) General view of the sample and (b) dimensions of the cells. Honeycomb side ***C* = *3mm*** и ***D* = *5,2mm***

Источник: составлено авторами.

Изменяющееся температурное поле создаёт градиенты температуры, которые индуцируют внутренние напряжения. В результате в исследуемом образце (1) возникают локальные перестройки, которые становятся источниками дискретной акустической эмиссии (рис. 2).

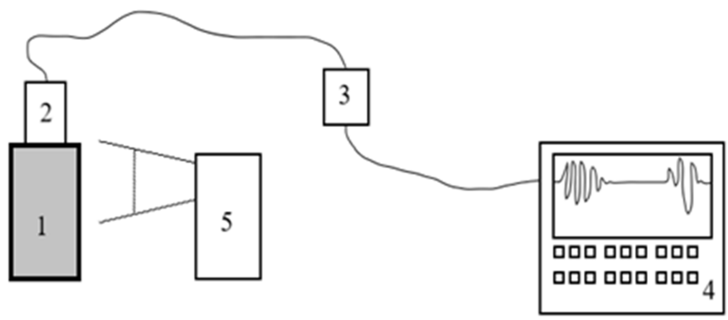


Рис. 2 / Fig. 2. Схема экспериментальной установки: (1) исследуемый образец; (2) пьезоэлектрический преобразователь акустической эмиссии; (3) предусилитель; (4) блок аналого-цифрового преобразователя системы детектирования и обработки сигналов; (5) тепловизор / Scheme of the experimental setup: (1) test sample; (2) piezoelectric acoustic emission transducer; (3) preamplifier; (4) analog-to-digital converter unit of the signal detection and processing system; (5) thermal imager

Источник: составлено авторами.

Сигналы АЭ поступают на вход ПАЭ (2), откуда сигнал в виде напряжения идёт на вход предусилителя (3) и далее на блок аналого-цифрового преобразователя системы детектирования и обработки сигналов (4). Параллельно с этим с помощью тепловизора (5) в режиме реального времени контролируется изменение температуры образца.

В процессе эксперимента использовались: низкочастотные пьезоэлектрический преобразователь акустической эмиссии GT-205, масляная контактная смазка для согласования акустических импедансов образцов и ПАЭ, предусилители ПАЭФ-014, комплекс акустико-эмиссионный измерительный A-Line 32D, тепловизор InfReC R550Pro-D.

В экспериментах образцы первоначально были помещены в морозильную камеру и охлаждались до температуры -10°С, после чего на внешний композитный слой каждого из них ставили по одному пьезоэлектрическому преобразователю акустической эмиссии. Параллельно с приёмом УЗ-волн регистрировалось изменение температурного поля образца. С помощью тепловизора производили измерение температурного поля с частотой 1 кадр в 10 секунд. Регистрировали распределение температурного поля в образцах (*a*) и (*b*) и релаксацию температуры.

2. Результаты экспериментов

Первое, на что указывают результаты экспериментов, – это сильная зависимость сигналов акустической эмиссии от размеров исследуемых образцов.

(2*а*) ***Поведение бездефектных образцов***

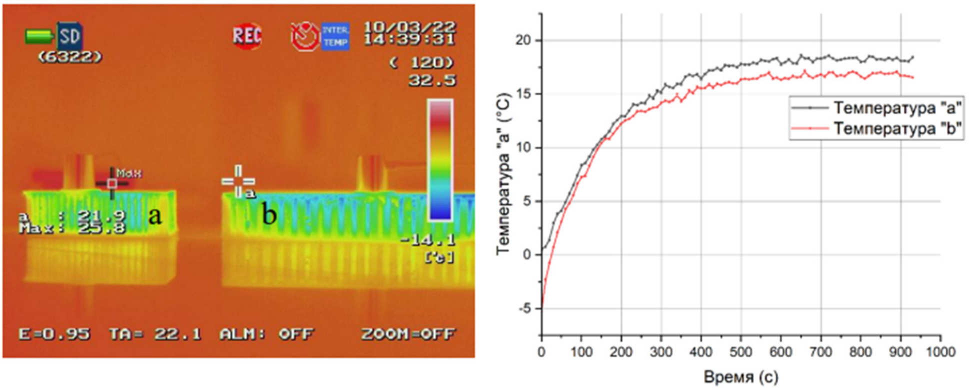


Рис. 3 / Fig. 3. Распределение температурного поля в образцах «*a*» и «*b*» (левый рисунок). Искусственных дефектов нет. Релаксация температуры для образцов «*a*» и «*b*» (правый рисунок). «*a*» – малые размеры. «*b*» – большие размеры / Temperature field distribution in samples “a” and “b” (left figure). There are no artificial defects. Temperature relaxation for samples “a” and “b” (right figure). “a” – small sizes. “b” – large sizes

Источник: составлено авторами

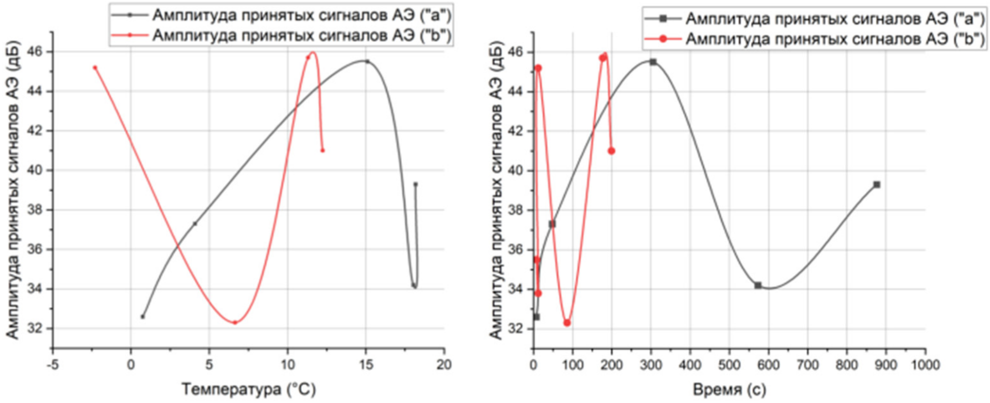


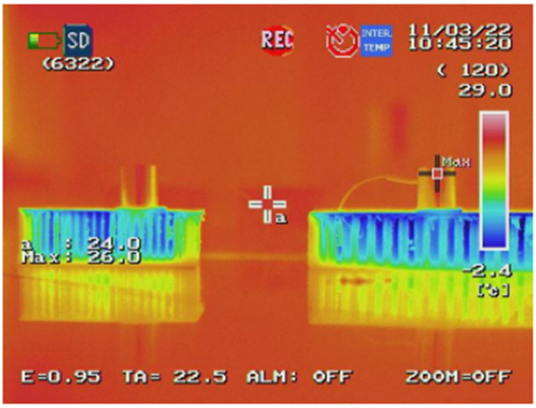
Рис. 4 / Fig. 4. Зависимости амплитуды пришедших на ПАЭ сигналов АЭ от температуры и от времени (до создания искусственных дефектов) / Dependences of the amplitude of the acoustic emission signals that arrived at the acoustic emission transducer on temperature and time (before the creation of artificial defects)

Источник: составлено авторами

Из сопоставления рис. 3 и рис. 4 следует, что большая часть пришедших импульсов лежит в области наибольшей скорости изменения температуры, при этом практически все они пришлись на температурный диапазон 2,5÷15,0 °С, а далее при переходе температуры в насыщение акустическая активность падает.

(2*b*) ***Поведение образцов с дефектами***

После измерений в каждом образце на одной из бумажных сот с помощью бритвы был введён искусственный дефект – сделан вертикальный надрез (параллельный бумажной соте), и проведены эксперименты по той же схеме. При этом характер распределения температурного поля (см. рис. 5) остался практически таким же. Но зависимости амплитуд пришедших сигналов на преобразователь акустической эмиссии (ПАЭ) изменился коренным образом (рис. 6). Это изменение проявляется в изменении формы сигнала (для малого образца), а для большого образца сигнал выродился в точку (см. рис. 6).



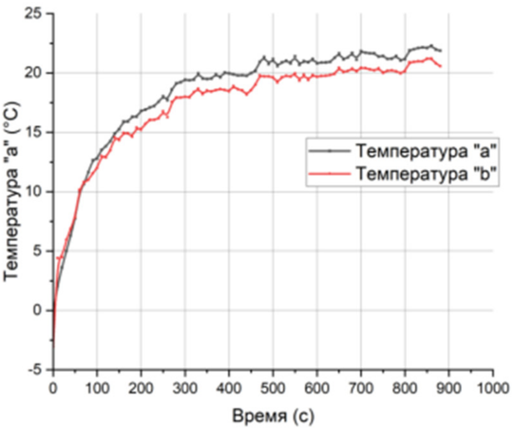


Рис. 5 / Fig. 5. Распределение температурного поля в образцах «*a*» и «*b*» (левый рисунок). Введены искусственные дефекты / Temperature field distribution in samples “a” and “b” (left figure). Artificial defects are introduced

Источник: составлено авторами

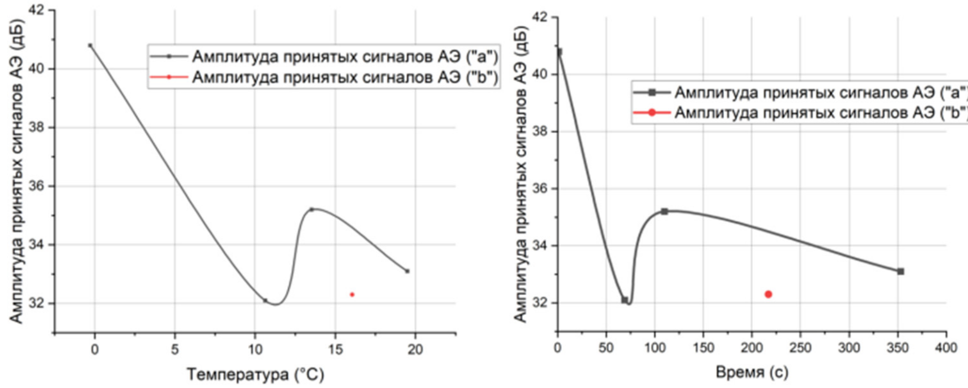


Рис. 6 / Fig. 6. Зависимости амплитуды пришедших на ПАЭ сигналов АЭ от температуры и от времени (после создания искусственного дефекта). Сигнал для большого образца (*b*) вырождается в точку (красная точка) / Dependences of the amplitude of the acoustic emission signals that arrived at the acoustic emission transducer on temperature and time (after the creation of an artificial defect). Signal for large sample (b) degenerates to a point (red dot)

Источник: Составлено авторами.

3. Результаты и их обсуждение

Сравнение зависимостей акустического сигнала от температуры на рис. 4 и рис. 6 и от времени обнаруживает несколько важных результатов:

1) Амплитуда принятых сигналов акустической эмиссии очень сильно зависит от размеров испытуемых образцов.

2) Амплитуда принятых сигналов акустической эмиссии (зависимости от температуры и времени) проявляет сильно нелинейный характер.

3) В отсутствии искусственно созданных дефектов формы сигналов акустической эмиссии на начальных этапах (в интервалах температуры от $0\ ^0C$ до $20\ ^0C$, рис. 4) ведут себя противоположным образом. Для малых образцов «*a*» амплитуда сигналов нарастает с минимальных её значений. В то же самое время для больших образцов «*b*» амплитуда сигналов начинается с максимальных значений и резко падает. При этом для малых образцов «*a*» начальная часть числа сигналов акустической эмиссии «растянута». А для больших образцов «*b*» начальная часть числа сигналов акустической эмиссии «сжата».

4) Возникновение дефекта (рис. 6) меняет картину зависимостей. В частности, число сигналов акустической эмиссии для больших образцов теперь вырождается в точку. А для малых образцов начальный участок зависимости амплитуды принятых сигналов, можно сказать, «переворачивается», сохраняя нелинейность, и начинается с максимального своего значения, переходя к минимальному своему значению, затем имеет «горб» возрастания.

Заключение

Установлено, что амплитудные характеристики сигналов акустической эмиссии позволяют контролировать сложные системы при различных температурах и обнаруживать дефекты без использования механического нагружения изделий.

Статья поступила в редакцию 14.03.2022 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бехер С. А., Бобров А. Л. Основы неразрушающего контроля методом акустической эмиссии. Новосибирск: Изд-во СГУПСа, 2013. 145 с.
2. Буйло С. И. Физико-механические, статистические и химические аспекты акустико-эмиссионной диагностики. Таганрог: Издательство Южного федерального университета, 2017. 184 с.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости. Т. 7. М.: Наука, 1987. 248 с.
4. Acoustic Emission and Ultrasound for Damage Characterization of Concrete Elements / Aggelis D. G., Shiotani T., Momoki S., Hirama A. // ACI Materials Journal. 2009. Vol. 106. No. 6. P. 509–514. DOI: 10.14359/51663333.
5. Evaluation of the characterization of acoustic emission of brittle rocks from the experiment to numerical simulation / Bu F., Xue L., Zhai M., Huang X., Dong J., Liang N., Xu C. // Scientific Reports. 2022. Vol. 12. P. 498–514. DOI: 10.1038/s41598-021-03910-8.
6. Acoustic Emission from Porous Collapse and Moving Dislocations in Granular Mg-Ho Alloys under Compression and Tension / Chen Y., Ding X., Fang D., Sun J., Salje E. K. H. // Scientific Reports. 2019. Vol. 9. P. 1–12: DOI: 10.1038/s41598-018-37604-5.
7. Chen Z., Qu J. Dislocation-induced acoustic nonlinearity parameter in crystalline solids // Journal of Applied Physics. 2013. Vol. 114. Iss. 16. P. 164906–164921. DOI: 10.1063/1.4826523.
8. Cybulska J., Pieczywek P. M., Zdunek A. The effect of Ca2+ and cellular structure on apple firmness and acoustic emission // European Food Research and Technology. 2012. Vol. 235. P. 119–128. DOI: 10.1007/s00217-012-1743-6.
9. Acoustic emission source location method and experimental verification for structures containing unknown empty areas / Dong L., Tao Q., Hu Q., Deng S., Chen Y., Luo Q., Zhang X. // International Journal of Mining Science and Technology. 2022. Vol. 32. Iss. 3. P. 487–497. DOI: 10.1016/j.ijmst.2022.01.002.
10. Huang Y., Li K. M. The Effect of Honeycomb Cavity: Acoustic Performance of a Double-leaf Micro Perforated Panel // The Summer Undergraduate Research Fellowship (SURF) Symposium (4 August, 2016, Purdue University, West Lafayette, Indiana, USA) [Электронный ресурс]. URL: https://docs.lib.purdue.edu/surf/2016/presentations/56/ (дата обращения: 01.02.2022).
11. Kim C. S., Kwun S. I., Lissenden C. J. Influence of Precipitates and Dislocations on the Acoustic Nonlinearity in Metallic Materials // Journal of the Korean Physical Society. 2009. Vol. 55. No. 2. P. 528–532.
12. Acoustic emission analysis of full-scale honeycomb sandwich composite curved fuselage panels / Leone F. A. Jr., Ozevin D., Godinez V., Mosinyi B., Bakuckas J. G. Jr., Awerbuche J., Lau A., Tan T.-M. // 15th International Symposium on Smart Structures and Materials & Nondestructive Evaluation and Health Monitoring. Vol. 6934, Nondestructive Characterization for Composite Materials, Aerospace Engineering, Civil Infrastructure, and

Homeland Security. (San Diego, CA, March, 2008) [Электронный ресурс]. URL: https://clck.ru/rf7fX (дата обращения: 01.02.2022). DOI: 10.1117/12.776146.
13. Modal acoustic emission based location method in honeycomb core sandwich structure / Liu Y., Pang B. J., Jia B., Chang Z. Z. // 6th European Conference on Space Debris (Darmstadt, Germany, 22–25 April 2013) [Электронный ресурс]. URL: https://conference.sdo.esoc.esa.int/proceedings/sdc6/paper/18/SDC6-paper18.pdf (дата обращения: 01.02.2022).
14. Acoustic emission diagnosis system and wireless monitoring for damage assessment of concrete structures / Yoon D.-J., Lee S., Kim C. Y, Seo D.-C. // Proceedings of NDT for Safety (November 07–09, 2007, Prague, Czech Republic). P. 301–308.
15. Acoustic Emission Analysis method for solving problems of damage mechanisms in concrete structures / Zejli A., Khamlichi A., Attajkani S., Ameziane K. // 24ème Congrès Français de Mécanique (Brest, 26 au 30 Août 2019) [Электронный ресурс]. URL: https://cfm2019.sciencesconf.org/245076/document (дата обращения: 01.02.2022).

REFERENCES

1. Bekher S. A., Bobrov A. L. *Osnovy nerazrushayushchego kontrolya metodom akusticheskoi emissii* [Fundamentals of non-destructive testing by acoustic emission]. Novosibirsk, Siberian Transport University Publ., 2013. 145 p.
2. Buylo S. I. *Fiziko-mekhanicheskie, statisticheskie i khimicheskie aspekty akustiko-emissionnoi diagnostiki* [Physico-mechanical, statistical and chemical aspects of acoustic emission diagnostics]. Taganrog, Southern Federal University Publ., 2017. 184 p.
3. Landau L. D., Lifshitz E. M. Theory of Elasticity, Vol. 7. Oxford, Butterworth-Heinemann, 1986. 195 p.
4. Aggelis D. G., Shiotani T., Momoki S., Hirama A. Acoustic Emission and Ultrasound for Damage Characterization of Concrete Elements. In: *ACI Materials Journal*, 2009, vol. 106, no. 6, pp. 509–514. DOI: 10.14359/51663333.
5. Bu F., Xue L., Zhai M., Huang X., Dong J., Liang N., Xu C. Evaluation of the characterization of acoustic emission of brittle rocks from the experiment to numerical simulation. In: *Scientific Reports*, 2022, vol. 12, pp. 498–514. DOI: 10.1038/s41598-021-03910-8.
6. Chen Y., Ding X., Fang D., Sun J., Salje E. K. H. Acoustic Emission from Porous Collapse and Moving Dislocations in Granular Mg-Ho Alloys under Compression and Tension. In: *Scientific Reports*, 2019, vol. 9, pp. 1–12: DOI: 10.1038/s41598-018-37604-5.
7. Chen Z., Qu J. Dislocation-induced acoustic nonlinearity parameter in crystalline solids. In: *Journal of Applied Physics*, 2013, vol. 114, iss. 16, pp. 164906–164921. DOI: 10.1063/1.4826523.
8. Cybulska J., Pieczywek P. M., Zdunek A. The effect of Ca2+ and cellular structure on apple firmness and acoustic emission. In: *European Food Research and Technology*, 2012, vol. 235, pp. 119–128. DOI: 10.1007/s00217-012-1743-6.
9. Dong L., Tao Q., Hu Q., Deng S., Chen Y., Luo Q., Zhang X. Acoustic emission source location method and experimental verification for structures containing unknown empty areas. In: *International Journal of Mining Science and Technology*, 2022, vol. 32, iss. 3, pp. 487–497. DOI: 10.1016/j.ijmst.2022.01.002.
10. Huang Y., Li K. M. The Effect of Honeycomb Cavity: Acoustic Performance of a Double-leaf Micro Perforated Panel. In: *The Summer Undergraduate Research Fellowship (SURF) Symposium (4 August, 2016, Purdue University, West Lafayette, Indiana, USA)*. Available at: https://docs.lib.purdue.edu/surf/2016/presentations/56/ (accessed: 01.02.2022).

11. Kim C. S., Kwun S. I., Lissenden C. J. Influence of Precipitates and Dislocations on the Acoustic Nonlinearity in Metallic Materials. In: *Journal of the Korean Physical Society*, 2009, vol. 55, no. 2, pp. 528–532.
12. Leone F. A. Jr., Ozevin D., Godinez V., Mosinyi B., Bakuckas J. G. Jr., Awerbuche J., Lau A., Tan T.-M. Acoustic emission analysis of full-scale honeycomb sandwich composite curved fuselage panels. In: *15th International Symposium on Smart Structures and Materials & Nondestructive Evaluation and Health Monitoring. Vol. 6934, Nondestructive Characterization for Composite Materials, Aerospace Engineering, Civil Infrastructure, and Homeland Security. (San Diego, CA, March, 2008)*. Available at: https://clck.ru/rf7fX (accessed: 01.02.2022). DOI: 10.1117/12.776146.
13. Liu Y., Pang B. J., Jia B., Chang Z. Z. Modal acoustic emission based location method in honeycomb core sandwich structure. In: *6th European Conference on Space Debris (Darmstadt, Germany, 22–25 April 2013)*. Available at: https://conference.sdo.esoc.esa.int/proceedings/sdc6/paper/18/SDC6-paper18.pdf (accessed: 01.02.2022).
14. Yoon D.-J., Lee S., Kim C. Y, Seo D.-C. Acoustic emission diagnosis system and wireless monitoring for damage assessment of concrete structures. In: *Proceedings of NDT for Safety (November 07–09, 2007, Prague, Czech Republic)*, pp. 301–308.
15. Zejli A., Khamlichi A., Attajkani S., Ameziane K. Acoustic Emission Analysis method for solving problems of damage mechanisms in concrete structures. In: *24ème Congrès Français de Mécanique (Brest, 26 au 30 Août 2019)*. Available at: https://cfm2019.sciencesconf.org/245076/document (accessed: 01.02.2022).

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Асеев Евгений Михайлович – аспирант кафедры общей физики Московского государственного областного университета;
e-mail: aseevgenij@yandex.ru

Калашников Евгений Владимирович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительной математики и информационных технологий Московского государственного областного университета;
e-mail: ekevkalashnikov1@gmail.com

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Evgenii M. Aseev – Postgraduate Student, Department of General Physics, Moscow Region State University;
e-mail: aseevgenij@yandex.ru

Evgenii V. Kalashnikov – Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Department of Computational Mathematics and Information Technology, Moscow Region State University;
e-mail: ekevkalashnikov1@gmail.com

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Асеев Е. М., Калашников Е. В. Влияние дефектности сотовой структуры в системе «сотовая матрица – композит» на акустическую эмиссию в изменяющемся температурном поле // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2022. № 2. С. 17–27.
DOI: 10.18384/2310-7251-2022-1-17-27.

FOR CITATION

Aseev E. M., Kalashnikov E. V. Effect of defects on the honeycomb structure in a ‘honeycomb – composite matrix’ system on acoustic emission in a changing temperature field. In*: Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*, 2022, no. 2, pp. 17–27.
DOI: 10.18384/2310-7251-2022-1-17-27.

01.04.02 «Теоретическая физика»
УДК 537.632
DOI: 10.18384/2310-7251-2022-2-28-41

ВРЕМЕННАЯ ЭВОЛЮЦИЯ БОЗЕ-КОНДЕНСИРОВАННЫХ АТОМОВ В ТРЁХЪЯМНОЙ ЛОВУШКЕ, ПРИ УСЛОВИИ ОТЛИЧНОЙ ОТ НУЛЯ НАЧАЛЬНОЙ ЗАСЕЛЁННОСТИ ПЕРВОЙ ЯМЫ

Васильева О. Ф., Зинган А. П.

Приднестровский государственный университет имени Т. Г. Шевченко
МД 3300, г. Тирасполь, ул. 25 лет Октября, д. 128, Молдова

Аннотация.
Целью работы является исследование кинетики бозе-конденсированных атомов в трёхъямной ловушке
Процедура и методы исследования. Проведены теоретические исследования временной эволюции популяции атомов в ямах трёхъямной ловушки.
Результаты. Показаны осцилляционные режимы эволюции атомов, а также проявление режима квантового самозахвата системы.
Теоретическая значимость. Кинетика туннелированная бозе-конденсированных атомов в трёхъямной ловушке обусловливается параметрами ловушки.
Ключевые слова: бозе-конденсированные атомы, трёхъямный потенциал, осцилляционный режим эволюции, самозахват

TIME EVOLUTION OF BOSEC-CONDENSED ATOMS IN A THREE-WELL TRAP UNDER THE CONDITION OF A NON-ZERO INITIAL POPULATION OF THE FIRST WELL

O. Vasilieva, A. Zingan

Pridnestrovian State University
128 ulitsa 25 Oktyabrya, Tiraspol MD3300, Moldova

Abstract.
Aim. The purpose is to study the kinetics of Bose-condensed atoms in a three-well trap.
Methodology. Temporal evolution of the population of atoms in the wells of a three-well trap is investigated theoretically.
Results. Oscillatory modes of atomic evolution and the manifestation of quantum self-capture of the system are demonstrated.
Research implications. The tunneling kinetics of Bose-condensed atoms in a three-well trap is determined by the parameters of the trap.
Keywords: Bose-condensed atoms, three-well potential, oscillatory mode of evolution, self-capture.

Введение

С момента первой реализации атомных бозе-конденсатов начинается новая эра в исследовании их динамических свойств с помощью уравнения Гросса-Питаевского и приближения среднего поля [1–5]. В [6] установлены способы детерминированного создания тёмных солитонов в отталкивающих взаимодействующих атомных бозе-эйнштейновских конденсатах, позволяющие заполучить постоянные солитонные вихри в сигарообразной (эллипсоподобной) системе БЭК. В [7; 8] была теоретически изучена временная эволюция атомов в двухъямной ловушке при учёте линейных и нелинейных взаимодействий. Получены всевозможные режимы эволюции, в том числе и самозахват атомов одной из ловушек. Управление БЭК возможно, как регулировкой геометрией потенциала взаимодействия, так и межатомным взаимодействием между атомами конденсата в ловушках, а также задавая исходную разность фаз. В [9–11] было предложено, что бозе-конденсированные атомы, захваченные оптическими ловушками, могут применяться для проведения квантовых вычислений. Недавно в [12] экспериментально была реализована бозе-эйнштейновская конденсация метастабильных атомов гелия с применением магнитной ловушки и оптической дипольной ловушки со скрещёнными лучами. Новая четырёхполюсная магнитная ловушка, сделанная из полых медных трубок, гарантирует быстрое время переключения без ущерба для оптического доступа.

В последние десятилетия начинается изучение квантового туннелирования атомов в тройной яме [13–17]. Кинетика туннелирования атомов в тройной яме обнаруживает более увлекательное действие атомов, чем в двухъямных ловушках. В [13] были получены периодические режимы эволюции, отмечались джозефсоноские колебания, а также самозахват либо в одной, либо в двух ловушках. В [18] изучена нелинейная кинетика ридберговских конденсатов Бозе-Эйнштейна, захваченных трёхъямным потенциалом в полуклассическом пределе в режиме сильного взаимодействия между атомами ловушек. Получен самозахват в одной, двух или трёх ямах. Используя уравнение Гросса-Питаевского и приближение среднего поля, показано, что нижние ветви собственных спектров обнаруживают петли и пересечения уровней при сильном взаимодействии, что приводит к нарушению адиабатической теоремы.

Самозахват атомов в ловушках позволяет экспериментально реализовать ряд атомных оптических устройств, таких как атомные волноводы, светоделители [13; 19–21], интерферометры [22; 23], атомный транзистор в трёхъямной оптической ловушке [24; 25], позволяющий управлять огромным количеством атомов с помощью меньшей численности атомов. Отдельные ямы можно идентифицировать как исток, затвор и сток, потенциально создавая строительный блок в области атомной электроники. Атомный транзистор демонстрирует переключение, а также дифференциальное и абсолютное усиление, сходное действию электронного транзистора.

В [15] изучена кинетика бозе-конденсата в симметричном трёхъямном потенциале в трёхмодовом приближении, причём ямы связаны таким образом, что представляют собой простейший потенциал захвата, в котором можно наблюдать вращение конденсата. В [26] показано, что, меняя исходные параметры системы атомов в симметричном трёхъямном потенциале возможно получить модулированную эволюцию населённостей атомов в первой и третьей ямах в пределах одного периода. В [27] рассмотрено управление процессом туннелирования бозе-конденсированных бозонов в трёхъямной ловушке. Показано, что поток бозонов между первой и второй ямами можно контролировать с помощью повышения или уменьшения населённости в третьей яме, таким образом, незначительная популяция бозонов, закаченная в третью яму, гарантирует управление дисбалансом между населённостями бозонов в первой и во второй ямах. Недавно в [28] была изучена кинетика диполярных БЭК в тройных ямах. Показано, что нелокальные взаимодействия допускают как когерентные, так и некогерентные колебания, причём заселённость атомов в средней яме практически не меняется.

Постановка задачи. Основные уравнения

Цель этой работы – детализированное исследование динамики туннелирования бозе-конденсированных атомов в трёхъямной ловушке. На рис. 1 схематично представлен график трёхъямного потенциала ловушки, в трёх ямах которой могут локализоваться бозе-конденсированные атомы. Ямы разделены потенциальным барьером, допускающим возможность туннелирования атомов между ямами. Гамильтониан взаимодействия тогда имеет вид:

$$\hat{H}_{int} = \hbar\chi_{12}(\hat{a}_1^+\hat{a}_2^+ + \hat{a}_1\hat{a}_2) + \hbar\chi_{13}(\hat{a}_1^+\hat{a}_3^+ + \hat{a}_3\hat{a}_1) + \hbar\chi_{23}(\hat{a}_2^+\hat{a}_3^+ + \hat{a}_3\hat{a}_2), \qquad (1)$$

где χ_{12}, χ_{13} и χ_{23} – постоянные взаимодействия между атомами в первой и второй, первой и третьей, и второй и третьей ямах соответственно.

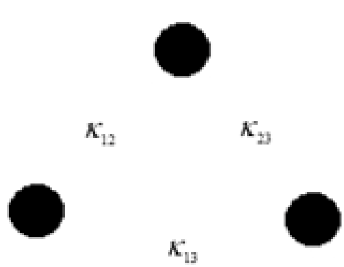


Рис. 1 / Fig. 1. Схема трёхъямного потенциала / Scheme of a three-well potential
Источник: составлено авторами

Из (1) пользуясь приближением среднего поля, в условиях точного резонанса, получим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$i\dot{a}_1 = \chi_{12}a_2 + \chi_{13}a_3,$$
$$i\dot{a}_2 = \chi_{12}a_1 + \chi_{23}a_3,$$
$$i\dot{a}_3 = \chi_{13}a_1 + \chi_{23}a_2. \qquad (2)$$

В данной работе будем рассматривать динамику системы в условиях начального заселения одной из ям ловушки, например, первой.

Рассмотрим вначале решение системы уравнений (2) при равных константах взаимодействия бозе-конденсированных атомов в ямах $\chi_{12} = \chi_{13} = \chi_{23} = \chi$. Будем искать решение системы уравнений (2) в виде:

$$a_j \sim e^{-i\lambda t}, \tag{3}$$

и в результате получим выражения для a_1 и a_2:

$$a_1 = \frac{a_{10}}{3}\left(2e^{i\tau} + e^{-2i\tau}\right),$$
$$a_2 = a_3 = \frac{a_{10}}{3}\left(-e^{i\tau} + e^{-2i\tau}\right), \tag{4}$$

где $\tau = \chi t$.

Используя (4), легко получить временную зависимость для плотностей атомов в трёхъямной ловушке:

$$n_1 = \frac{n_{10}}{9}\left(1 + 8cos^2\left(\frac{3}{2}\tau\right)\right),$$
$$n_2 = n_3 = \frac{n_{10}}{9}sin^2\left(\frac{3}{2}\tau\right). \tag{5}$$

В этом случае, как видно из (5), кинетика системы является периодической: атомы периодически туннелируют из одной ямы в другую, при этом не возникает абсолютного истощения атомов в первой яме. В моменты времени $\tau_n = \frac{2\pi(3n\pm1)}{9}$ $(n = 0,1, \ldots)$ ямы становятся равнонаселёнными (см. рис. 2).

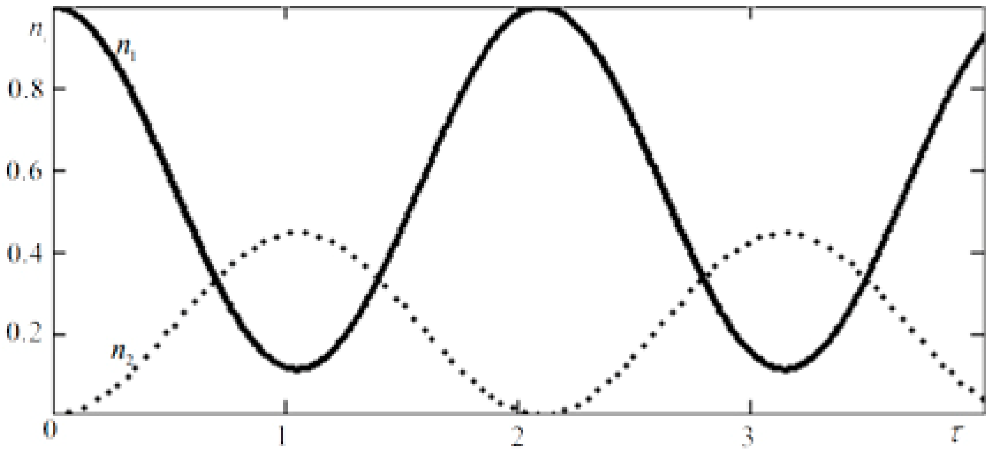


Рис. 2 / Fig. 2. Временная эволюция населённостей атомов в трёхъямной ловушке при условии, что нормированная плотность атомов в первой яме равна **1** /
The time evolution of atomic populations in a three-well trap provided that the normalized density of atoms in the first well is equal to unity

Источник: по данным авторов

Если рассматривать случай, когда между константами взаимодействия выполняются следующие соотношения: $\chi_{12} = \chi_{13} = \chi$ и $\chi_{23} = \alpha\chi$, то можно получить следующие выражения для плотностей атомов в ямах:

$$n_1 = n_{10}cos^2\left(\frac{\sqrt{\alpha^2+8}}{2}\chi t\right) + \frac{\alpha^2}{\alpha^2+8}n_{10}sin^2\left(\frac{\sqrt{\alpha^2+8}}{2}\chi t\right),$$
$$n_2 = n_3 = \frac{4}{\alpha^2+8}n_{10}sin^2\left(\frac{\sqrt{\alpha^2+8}}{2}\chi t\right). \quad (6)$$

Атомы туннелируют периодически с одной ямы в другую с периодом $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha^2+8}}$ (см. рис. 3). При этом наименьшая доля атомов, которая туннелирует в остальные ямы, определяется выражением: $n_{1min} = \frac{\alpha^2}{\alpha^2+8}n_{10}$. А максимально вероятная популяция атомов во второй и третьей ямах – $n_{2max} = n_{3max} = \frac{4}{\alpha^2+8}n_{10}$. С увеличением α наименьшее значение плотности атомов в первой яме n_{1min} увеличивается, а максимальные значения плотностей $n_{2max} = n_{3max}$ – уменьшаются. При $\alpha = 2$ наименьшее значение популяции атомов в первой яме n_{1min} равно наибольшему значению популяций атомов во второй и третьей ямах ловушки (рис. 3c). При $\alpha < 2$ в моменты времени равные $t = \frac{2}{\sqrt{\alpha^2+8}}arctg\left(\frac{\alpha^2+8}{4-\alpha^2}\right)$ ямы становятся равнонаселёнными (рис. 3a, b).

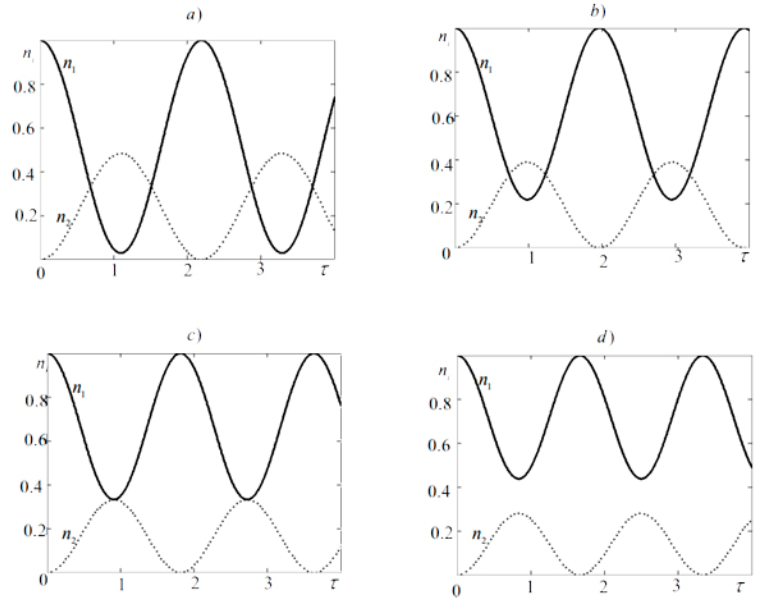


Рис. 3 / Fig. 3. Временная эволюция населённостей атомов в трёхъямной ловушке при $\boldsymbol{n_{10} = 1}$ и различных значениях $\boldsymbol{\alpha}$: 0.5 (a), 1.5 (b), 2 (c) и 2.5 (d) /
Time evolution of populations of atoms in a three-well trap for $\boldsymbol{n_{10} = 1}$ and different values of $\boldsymbol{\alpha}$: (a) 0.5, (b) 1.5, (c) 2 and (d) 2.5

Источник: по данным авторов

В более общем случае, при произвольных константах взаимодействия, снова будем искать решение системы уравнений (2) в виде $a_j \sim e^{-i\lambda t}$, тогда получим уравнение третьей степени для коэффициентов λ:

$$\lambda^3 - \lambda(\chi_{12}^2 + \chi_{13}^2 + \chi_{23}^2) + 2\chi_{12}\chi_{13}\chi_{23} = 0. \quad (7)$$

Из (7) получим аналитические выражения для трёх действительных корней уравнения:

$$\lambda_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\chi_{12}^2 + \chi_{13}^2 + \chi_{23}^2}\cos\frac{\alpha}{3},$$
$$\lambda_{2,3} = -\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\chi_{12}^2 + \chi_{13}^2 + \chi_{23}^2}\cos\left(\frac{\alpha}{3} \pm \frac{2\pi}{3}\right),$$
$$\cos\alpha = -\frac{3\sqrt{3}\chi_{12}\chi_{13}\chi_{23}}{(\chi_{12}^2+\chi_{13}^2+\chi_{23}^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (8)$$

Тогда, из (8) следует, что

$$a_1 = A_{11}e^{i\lambda_1 t} + A_{12}e^{i\lambda_2 t} + A_{13}e^{i\lambda_3 t},$$
$$a_2 = A_{21}e^{i\lambda_1 t} + A_{22}e^{i\lambda_2 t} + A_{23}e^{i\lambda_3 t},$$
$$a_3 = A_{31}e^{i\lambda_1 t} + A_{32}e^{i\lambda_2 t} + A_{33}e^{i\lambda_3 t}. \quad (9)$$

Если в начальный момент времени заселена только первая яма, то

$$A_{11} = \frac{\chi_{12}^2+\chi_{13}^2+\lambda_2\lambda_3}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}a_{10},$$
$$A_{12} = \frac{\chi_{12}^2+\chi_{13}^2+\lambda_1\lambda_3}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_2)}a_{10},$$
$$A_{13} = \frac{\chi_{12}^2+\chi_{13}^2+\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_3)}a_{10},$$
$$A_{21} = \frac{\chi_{23}\chi_{13}a_{10}-\lambda_2^2A_{22}-\lambda_3^2A_{23}}{\lambda_1^2},$$
$$A_{22} = \frac{\chi_{23}\chi_{13}(\lambda_1\lambda_2-\lambda_3^2)+\chi_{13}(\lambda_1+\lambda_2)\lambda_3(\lambda_1-\lambda_2)+\chi_{13}\lambda_1^2(\lambda_2-\lambda_3)}{\lambda_1\lambda_2(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_1)}a_{10},$$
$$A_{23} = \frac{\chi_{23}\chi_{13}+\chi_{13}(\lambda_1+\lambda_2)}{\lambda_1\lambda_2-\lambda_3(\lambda_2+\lambda_1)+\lambda_3^2}a_{10},$$
$$A_{31} = \frac{\chi_{23}\chi_{12}a_{10}-\lambda_2^2A_{32}-\lambda_3^2A_{33}}{\lambda_1^2},$$
$$A_{32} = \frac{A_{33}\lambda_3(\lambda_1-\lambda_3)+a_{10}\chi_{13}(\chi_{23}+\lambda_1)}{\lambda_2(\lambda_2-\lambda_1)},$$
$$A_{33} = A_{23}. \quad (10)$$

Используя (9) и (10), получим выражения для плотностей атомов в ямах:

$$n_1 = A_{11}^2 + A_{12}^2 + A_{13}^2 + 2A_{11}A_{12}\cos(\lambda_1 - \lambda_2)t + 2A_{11}A_{13}\cos(\lambda_1 - \lambda_3)t + 2A_{12}A_{13}\cos(\lambda_2 - \lambda_3)t,$$
$$n_2 = A_{21}^2 + A_{22}^2 + A_{23}^2 + 2A_{21}A_{22}\cos(\lambda_1 - \lambda_2)t + 2A_{21}A_{23}\cos(\lambda_1 - \lambda_3)t + 2A_{22}A_{23}\cos(\lambda_2 - \lambda_3)t,$$
$$n_3 = A_{31}^2 + A_{32}^2 + A_{33}^2 + 2A_{31}A_{32}\cos(\lambda_1 - \lambda_2)t + 2A_{31}A_{33}\cos(\lambda_1 - \lambda_3)t + 2A_{32}A_{33}\cos(\lambda_2 - \lambda_3)t. \quad (11)$$

Как видно из рис. 4 и системы уравнений (11), колебания плотностей атомов в первой, второй и третьей ямах являются амплитудно-модулированными во времени. Частота осцилляций тем больше, чем больше постоянные взаимодействий: χ_{12}, χ_{13} и χ_{23}. Из рис. 4c видно, что чем больше χ_{12}, тем меньше амплитуда колебаний атомов в третьей яме.

Однако, если $\chi_{12}^2 + \chi_{13}^2 = -\lambda_2\lambda_3$ в (11), то проявляется резкое ослабление амплитуды колебаний плотности атомов в первой яме при равенстве констант взаимодействия $\chi_{12} = \chi_{13} = \chi_{23}$, и отмечается явление самозахвата (локализации) атомов в перовой яме (см. рис. 5). Таким образом с увеличением взаимодействия между атомами в ямах колебания блокируются и возникает локализация атомов в первой яме. Если же константы взаимодействия не равны друг другу и $\chi_{23} > \chi_{13}$, то наблюдается осцилляционный переход атомов из первой ямы во вторую и третью, причём максимум амплитуды колебаний возникает при $\chi_{12} = \chi_{13}$ (см. рис. 6). Частота осцилляций тем больше, чем больше χ_{12}. Если $\chi_{23} < \chi_{13}$ в системе бозе-конденсированных атомов в трёхъямной ловушке наблюдается покой системы.

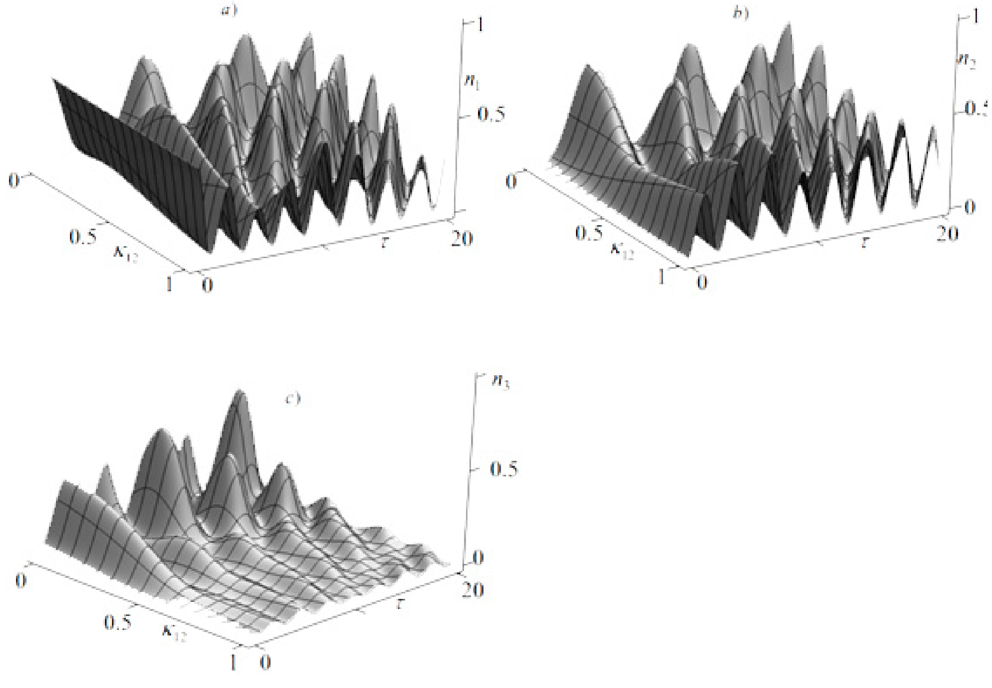


Рис. 4 / Fig. 4. Временная эволюция населённостей атомов в трёхъямной ловушке в зависимости от константы взаимодействия атомов в первой и второй ямах в ловушке $\boldsymbol{\chi_{12}}$ при фиксированных значениях $\boldsymbol{n_{10} = 0.5}$, $\boldsymbol{\chi_{13} = 0.5}$, $\boldsymbol{\chi_{23} = 0.6}$, где a) населённость атомов в первой яме, b) населённость атомов во второй яме, c) населённость атомов в третьей яме / Time evolution of the populations of atoms in a three-well trap as a function of the interaction constant of atoms in the first and second wells in the trap $\boldsymbol{\chi_{12}}$ at fixed values $\boldsymbol{n_{10} = 0.5}$, $\boldsymbol{\chi_{13} = 0.5}$, and $\boldsymbol{\chi_{23} = 0.6}$, where (a) the population of atoms in the first well, (b) the population of atoms in the second well, and (c) the population of atoms in the third well

Источник: по данным авторов

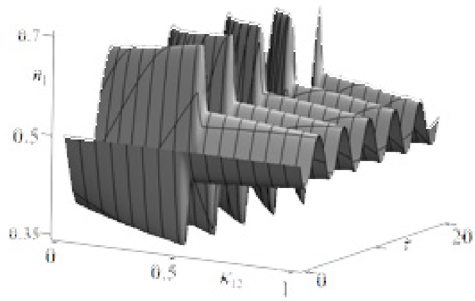


Рис. 5. / Fig. 5. Временная эволюция населённостей атомов в первой яме трёхъямной ловушки в зависимости от константы взаимодействия атомов в первой и второй ямах в ловушке $\boldsymbol{\chi_{12}}$ при фиксированных значениях $\boldsymbol{n_{10} = 0.5}$, $\boldsymbol{\chi_{13} = 0.5}$, $\boldsymbol{\chi_{23} = 0.5}$, в условиях когда $\boldsymbol{\chi_{12}^2 + \chi_{13}^2 = -\lambda_2\lambda_3}$ и $\boldsymbol{\chi_{12} = \chi_{13}}$ / Time evolution of the populations of atoms in the first well of a three-well trap as a function of the interaction constant of atoms in the first and second wells in the $\boldsymbol{\chi_{12}}$ trap at fixed values $\boldsymbol{n_{10} = 0.5}$, $\boldsymbol{\chi_{13} = 0.5}$, and $\boldsymbol{\chi_{23} = 0.5}$ under conditions when $\boldsymbol{\chi_{12}^2 + \chi_{13}^2 = -\lambda_2\lambda_3}$ and $\boldsymbol{\chi_{12} = \chi_{13}}$

Источник: по данным авторов

Если $\chi_{12}^2 + \chi_{13}^2 = -\lambda_1\lambda_2$ в (11), то при $\chi_{12} = \chi_{13} = \chi_{23}$ наблюдается резкое увеличение амплитуды колебаний атомов в первой яме, т. е. снова наблюдается явление самозахвата атомов в перовой яме (см. рис. 7). А при $\chi_{12} = \chi_{13}$ либо $\chi_{12} = \chi_{23}$ и выполнения условия, что $\chi_{23} > \chi_{13}$, в системе возникает режим покоя, населённость атомов в первой яме не изменяется с течением времени (см. рис. 8). Если $\chi_{23} < \chi_{13}$, в системе бозе-конденсированных атомов наблюдается осцилляционный туннельный переход атомов из одной ямы в другую.

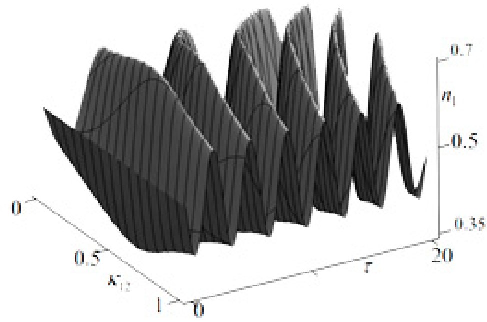


Рис. 6 / Fig. 6. Временная эволюция населённостей атомов в первой яме трёхъямной ловушки в зависимости от константы взаимодействия атомов в первой и второй ямах в ловушке $\boldsymbol{\chi_{12}}$ при фиксированных значениях $\boldsymbol{n_{10} = 0.5}$, $\boldsymbol{\chi_{13} = 0.5}$, $\boldsymbol{\chi_{23} = 0.8}$, в условиях когда $\boldsymbol{\chi_{12}^2 + \chi_{13}^2 = -\lambda_2\lambda_3}$ и $\boldsymbol{\chi_{23} > \chi_{13}}$./ Time evolution of populations of atoms in the first well of a three-well trap as a function of the interaction constant of atoms in the first and second wells in the trap $\boldsymbol{\chi_{12}}$ at fixed values $\boldsymbol{n_{10} = 0.5}$, $\boldsymbol{\chi_{13} = 0.5}$, and $\boldsymbol{\chi_{23} = 0.8}$ under conditions when $\boldsymbol{\chi_{12}^2 + \chi_{13}^2 = -\lambda_2\lambda_3}$ and $\boldsymbol{\chi_{23} > \chi_{13}}$

Источник: по данным авторов

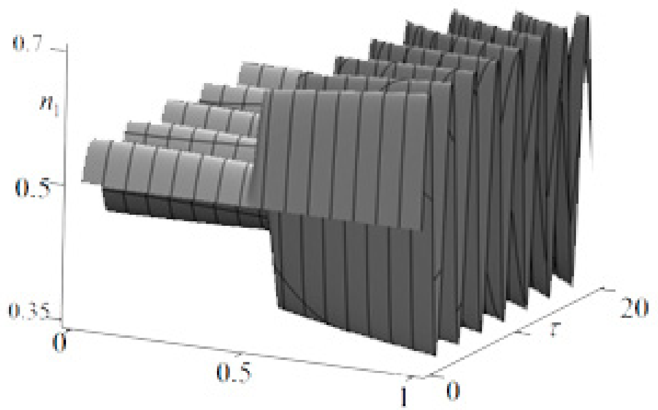


Рис. 7 /Fig. 7. Временная эволюция населённостей атомов в первой яме трёхъямной ловушки в зависимости от константы взаимодействия атомов в первой и второй ямах в ловушке χ_{12} при фиксированных значениях $n_{10} = 0.5$, $\chi_{13} = 0.5$, $\chi_{23} = 0.5$, в условиях когда $\chi_{12}^2 + \chi_{13}^2 = -\lambda_1\lambda_2$ и $\chi_{12} = \chi_{13}$./ Time evolution of populations of atoms in the first well of a three-well trap as a functions of the interaction constant of atoms in the first and second wells in the trap χ_{12} at fixed values $n_{10} = 0.5$, $\chi_{13} = 0.5$, and $\chi_{23} = 0.5$ under conditions when $\chi_{12}^2 + \chi_{13}^2 = -\lambda_1\lambda_2$ and $\chi_{12} = \chi_{13}$

Источник: по данным авторов

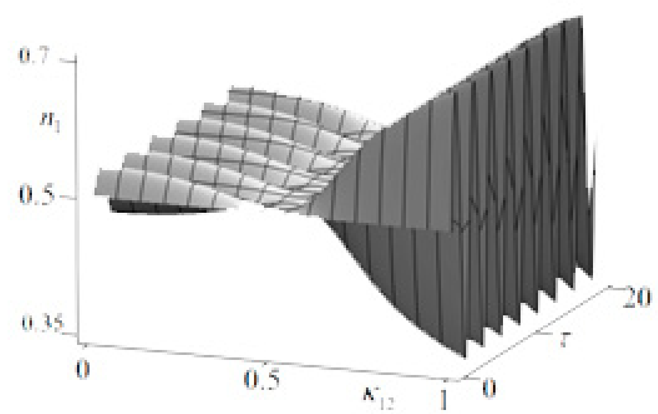


Рис. 8 / Fig. 8. Временная эволюция населённостей атомов в первой яме трёхъямной ловушки в зависимости от константы взаимодействия атомов в первой и второй ямах в ловушке χ_{12} при фиксированных значениях $n_{10} = 0.5$, $\chi_{13} = 0.5$, $\chi_{23} = 0.7$, в условиях когда $\chi_{12}^2 + \chi_{13}^2 = -\lambda_1\lambda_2$ и $\chi_{23} > \chi_{13}$./ Time evolution of populations of atoms in the first well of a three-well trap as a function ofthe interaction constant of atoms in the first and second wells in the trap χ_{12} at fixed values $n_{10} = 0.5$, $\chi_{13} = 0.5$, and $\chi_{23} = 0.7$ under conditions when χ$\chi_{12}^2 + \chi_{13}^2 = -\lambda_1\lambda_2$ and $\chi_{23} > \chi_{13}$

Источник: по данным авторов

Заключение

Таким образом, при начальном заселении атомов в одну из ям трёхъямной ловушки, например первой, атомы конденсатов могут быть захвачены (локализованы) одной из ям ловушки, куда они изначально загружаются при определённых параметрах системы. В зависимости от соотношения между постоянными взаимодействия атомных конденсатов в ямах возникают переходы от осцилляционного режима эволюции к самозахвату и, наоборот, переход к периодическому колебательному режиму эволюции атомов. Возможны случаи равнозаселения конденсированных атомов в ямах ловушки, а также покой системы.

Статья поступила в редакцию 25.02.2022 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Li W., Haque M., Komineas S. Vortex dipole in a trapped two-dimensional Bose-Einstein condensate // Physical Review A. 2008. Vol. 77. Iss. 5. P. 053610. DOI: 10.1103/PhysRevA.77.053610.
2. Rogel-Salazar J. The Gross-Pitaevskii equation and Bose-Einstein condensate // European Journal of Physics. 2013. Vol. 34. No. 2. P. 247–257. DOI: 10.1088/0143-0807/34/2/247.
3. Complete Bose-Einstein condensation the Gross-Pitaevskii regime / Boccato C., Brennecke C., Cenatiempo S., Schbein B. // Communications in Mathematical Physics. 2018. Vol. 359. P. 975–1026. DOI: 10.1007/s00220-017-3016-5.
4. Metastable Bose-Einstein condensation in a strongly correlated optical lattice / McKay D., Ray U., Natu S. M., Russ P., Ceperley D., DeMarco B. // Physical Review A. 2015. Vol. 91. Iss. 2. P. 023625. DOI: 10.1103/PhysRevA.91.023625.
5. Rotation-symmetry-enforced coupling of spin and angular momentum for p-orbital bosons / Li Y., Yuan J., Hemmerich A., Li X. // Physical Review Letters. 2018. Vol. 121. Iss. 9. P. 93401. DOI: 10.1103/PhysRevLett.121.093401.
6. Creating solitons with controllable and near-zero velocity in Bose-Einstein condensates / Fritsch A. R., Lu M., Reid G. H., Pineiro A. M., Spielman I. B. // Physical Review A. 2020. Vol. 101. Iss. 5. P. 053629. DOI: 10.1103/PhysRevA.101.053629.
7. Васильева О. Ф., Зинган А. П. Динамика нелинейного туннелирования бозе-конденсированных атомов в двухъямной ловушке // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2019. № 2. С. 83–95. DOI: 10.18384-2310-7251-2019-2-83-95.
8. Khadzhi P. I., Vasilieva O. F. Coherent dynamics of Bose-condensed atoms in a double-well trap // Journal of Nanoelectronics and Optoelectronics. 2011. Vol. 6. No. 4. P. 433–451. DOI: 10.1166/jno.2011.1194.
9. Byrnes T., Wen K., Yamamoto Y. Macroscopic quantum computation using Bose-Einstein condensates // Physical Review A. 2012. Vol. 85. P. 040306(R). DOI: 10.1103/PhysRevA.85.040306.
10. Macroscopic quantum information processing using spin coherent states / Byrnes T., Rosseau D., Khosla M., Pyrkov A., Thomosen A., Mukai T., Koyama S., Abdelrahman A., Ilo-Okeke E. // Optics Communication. 2015. Vol. 337. P. 102–109. DOI: 10.1016/j.optcom.2014.08.017.

11. Quantum walk in momentum space with a Bose-Einstein condensate / Dadras S., Cresch A., Croiseau C., Wimberger S., Summy G. S. // Physical Review Letters. 2018. Vol. 121. Iss. 7. P. 70402. DOI: 10.1103/PhysRevLett.121.070402.
12. Rapid generation of metastable helium Bose-Einstein condensates / Abbas A. H., Meng X., Patil R. S., Ross J. A., Truscott A. C., Hodgman S. S. // Physical Review A. 2021. Vol. 103. Iss. 5. P. 053317. DOI: 10.1103/PhysRevA.103.053317.
13. Guiding neutral atoms on a chip / Dekker N. H., Lee C. S., Lorent V., Thywissen J. H., Smith S. P., Drndic M., Westervelt R. M., Prentiss M. // Physical Review Letters. 2000. Vol. 84. Iss. 6. P. 1124. DOI: 10.1103/PhysRevLett.84.1124.
14. Mossmann S., Jung C. Semiclassical approach to Bose-Einstein condensates in a triple well potential // Physical Review A. 2006. Vol. 74. Iss. 3. P. 033601. DOI: 10.1103/PhysRevA.74.033601.
15. Viscondi T. F., Furuya K. Dynamics of a Bose-Einstein condensate in a symmetric triple-well trap // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. 2011. Vol. 44. No. 17. P. 175301. DOI: 10.1088/1751-8113/44/17/175301.
16. Optimal conditions for spatial adiabatic passage of a Bose-Einstein condensate / Rubio J. L., Ahufinger V., Busch Th., Mompart J. // Physical Review A. 2016. Vol. 94. Iss. 5. P. 053606. DOI: 10.1103/PhysRevA.94.053606.
17. Self-trapping and tunneling of Bose-Einstein condensates in a cavity-mediated triple-well system / Wang B., Zhang H., Chen Y., Tan L. // The European Physical Journal D. 2017. Vol. 71. P. 56. DOI: 10.1140/epjd/e2017-70647-3.
18. McCormack G., Nath R., Li W. Nonlinear dynamics of Rydberg-dressed Bose-Einstein condensates in a triple-well potential // Physical Review A. 2020. Vol. 102. Iss. 6. P. 063329. DOI: 10.1103/PhysRevA.102.063329.
19. Guiding neutral atoms around curves with lithographically patterned current-carrying wires / Muller D., Anderson D. Z., Grow R. J., Schwindt P. D., Cornell E. A. // Physical Review Letters. 1999. Vol. 83. Iss. 25. P. 5194. DOI: 10.1103/PhysRevLett.83.5194.
20. Beam splitter for guided atoms / Cassettari D., Hessmo B., Folman R., Maier T., Schmiedmayer J. // Physical Review Letters. 2000. Vol. 85. Iss. 26. P. 5483. DOI: 10.1103/PhysRevLett.85.5483.
21. Propagation of Bose-Einstein condensates in magnetic waveguide / Leanhardt A. E., Chikkovtur A. P., Kielpinski D., Shin Y., Gustavson T. L., Ketterle W., Pritchard D. E. // Physical Review Letters. 2002. Vol. 89. Iss. 4. P. 040401. DOI: 10.1103/PhysRevLett.89.040401.
22. Atom Michelson interferometer on a chip using a Bose-Einstein condensate / Wang Y.-J., Anderson D. Z., Bright V. M., Cornell E. A., Diot Q., Kishimoto T., Prentiss M., Saravanan R. A., Segal S. R., Wu S. // Physical Review Letters. 2005. Vol. 94. Iss. 9. P. 090405. DOI: 10.1103/PhysRevLett.94.090405.
23. Atom interferometry with Bose-Einstein condensates in a double-well potential / Shin Y., Saba M., Pasquini T. A., Ketterle W., Pritchard D. E., Leanhardt A. E. // Physical Review Letters. 2004. Vol. 92. Iss. 5. P. 050405. DOI: 10.1103/PhysRevLett.92.050405.
24. Stickney J. A., Anderson D. Z., Zozulya A. A. Transistorlike behavior of a Bose-Einstein condensate in a triple-well potential // Physical Review Letters A. 2007. Vol. 75. Iss. 1. P. 013608. DOI: 10.1103/PhysRevA.75.013608.
25. Caliga S. C., Straatsma C. J. E., Anderson D. Z. Transport dynamics of ultracold atoms in a triple-well transistor-like potential // New Journal of Physics. 2016. Vol. 18. Iss. 2. P. 025010. DOI: 10.1088/1367-2630/18/2/025010.

26. Васильева О. Ф., Зинган А. П. Временная эволюция бозе-конденсированных атомов в трёхъямной симметричной цепочной ловушке // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2021. № 1. С. 27–38. DOI: 10.18384/2310-7251-2021-1-27-38.
27. Control of tunneling in a atomtronics switching device / Wilsmann K. W., Ymai L. H., Tonel A. P., Linkes J., Foerster A. // Communications Physics. 2018. Vol. 1. P. 91. DOI: 10.1038/s42005-018-0089-1.
28. Entangled states of dipolar bosons generated in a triple-well potential / Tonel A. P., Ymai L. H., Wittmann K., Foerster A., Links J. // SciPost Physics Core. 2020. Vol. 2. P. 003. DOI: 10.21468/SciPostPhysCore.2.1.003.

REFERENCES

1. Li W., Haque M., Komineas S. Vortex dipole in a trapped two-dimensional Bose-Einstein condensate. In: *Physical Review A*, 2008, vol. 77, iss. 5, pp. 053610. DOI: 10.1103/PhysRevA.77.053610.
2. Rogel-Salazar J. The Gross-Pitaevskii equation and Bose-Einstein condensate. In: *European Journal of Physics*, 2013, vol. 34, no. 2, pp. 247–257. DOI: 10.1088/0143-0807/34/2/247.
3. Boccato C., Brennecke C., Cenatiempo S., Schbein B. Complete Bose-Einstein condensation the Gross-Pitaevskii regime. In: *Communications in Mathematical Physics*, 2018, vol. 359, pp. 975–1026. DOI: 10.1007/s00220-017-3016-5.
4. McKay D., Ray U., Natu S. M., Russ P., Ceperley D., DeMarco B. Metastable Bose-Einstein condensation in a strongly correlated optical lattice. In: *Physical Review A*, 2015, vol. 91, iss. 2, pp. 023625. DOI: 10.1103/PhysRevA.91.023625.
5. Li Y., Yuan J., Hemmerich A., Li X. Rotation-symmetry-enforced coupling of spin and angular momentum for p-orbital bosons. In: *Physical Review Letters*, 2018, vol. 121, iss. 9, pp. 93401. DOI: 10.1103/PhysRevLett.121.093401.
6. Fritsch A. R., Lu M., Reid G. H., Pineiro A. M., Spielman I. B. Creating solitons with controllable and near-zero velocity in Bose-Einstein condensates. In: *Physical Review A*, 2020, vol. 101, iss. 5, pp. 053629. DOI: 10.1103/PhysRevA.101.053629.
7. Vasilieva O. F., Zingan A. P. Dynamics of nonlinear tunneling of Bose-condensed atoms in a double-well trap. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-Matematika* [Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], 2019, no. 2, pp. 83–95. DOI: 10.18384-2310-7251-2019-2-83-95.
8. Khadzhi P. I., Vasilieva O. F. Coherent dynamics of Bose-condensed atoms in a double-well trap. In: *Journal of Nanoelectronics and Optoelectronics*, 2011, vol. 6, no. 4, pp. 433–451. DOI: 10.1166/jno.2011.1194.
9. Byrnes T., Wen K., Yamamoto Y. Macroscopic quantum computation using Bose-Einstein condensates. In: *Physical Review A*, 2012, vol. 85, pp. 040306(R). DOI: 10.1103/PhysRevA.85.040306.
10. Byrnes T., Rosseau D., Khosla M., Pyrkov A., Thomosen A., Mukai T., Koyama S., Abdelrahman A., Ilo-Okeke E. Macroscopic quantum information processing using spin coherent states. In: *Optics Communication*, 2015, vol. 337, pp. 102–109. DOI: 10.1016/j.optcom.2014.08.017.
11. Dadras S., Cresch A., Croiseau C., Wimberger S., Summy G. S. Quantum walk in momentum space with a Bose-Einstein condensate. In: *Physical Review Letters*, 2018, vol. 121, iss. 7, pp. 70402. DOI: 10.1103/PhysRevLett.121.070402.

12. Abbas A. H., Meng X., Patil R. S., Ross J. A., Truscott A. C., Hodgman S. S. Rapid generation of metastable helium Bose-Einstein condensates. In: *Physical Review A*, 2021, vol. 103, iss. 5, pp. 053317. DOI: 10.1103/PhysRevA.103.053317.
13. Dekker N. H., Lee C. S., Lorent V., Thywissen J. H., Smith S. P., Drndic M., Westervelt R. M., Prentiss M. Guiding neutral atoms on a chip. In: *Physical Review Letters*, 2000, vol. 84, iss. 6, pp. 1124. DOI: 10.1103/PhysRevLett.84.1124.
14. Mossmann S., Jung C. Semiclassical approach to Bose-Einstein condensates in a triple well potential. In: *Physical Review A*, 2006, vol. 74, iss. 3, pp. 033601. DOI: 10.1103/PhysRevA.74.033601.
15. Viscondi T. F., Furuya K. Dynamics of a Bose-Einstein condensate in a symmetric triple-well trap. In: *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 2011, vol. 44, no. 17, pp. 175301. DOI: 10.1088/1751-8113/44/17/175301.
16. Rubio J. L., Ahufinger V., Busch Th., Mompart J. Optimal conditions for spatial adiabatic passage of a Bose-Einstein condensate. In: *Physical Review A*, 2016, vol. 94, iss. 5, pp. 053606. DOI: 10.1103/PhysRevA.94.053606.
17. Wang B., Zhang H., Chen Y., Tan L. Self-trapping and tunneling of Bose-Einstein condensates in a cavity-mediated triple-well system. In: *The European Physical Journal D*, 2017, vol. 71, pp. 56. DOI: 10.1140/epjd/e2017-70647-3.
18. McCormack G., Nath R., Li W. Nonlinear dynamics of Rydberg-dressed Bose-Einstein condensates in a triple-well potential. In: *Physical Review A*, 2020, vol. 102, iss. 6, pp. 063329. DOI: 10.1103/PhysRevA.102.063329.
19. Muller D., Anderson D. Z., Grow R. J., Schwindt P. D., Cornell E. A. Guiding neutral atoms around curves with lithographically patterned current-carrying wires. In: *Physical Review Letters*, 1999, vol. 83, iss. 25, pp. 5194. DOI: 10.1103/PhysRevLett.83.5194.
20. Cassettari D., Hessmo B., Folman R., Maier T., Schmiedmayer J. Beam splitter for guided atoms. In: *Physical Review Letters*, 2000, vol. 85, iss. 26. P. 5483. DOI: 10.1103/PhysRevLett.85.5483.
21. Leanhardt A. E., Chikkovtur A. P., Kielpinski D., Shin Y., Gustavson T. L., Ketterle W., Pritchard D. E. Propagation of Bose-Einstein condensates in magnetic waveguide. In: *Physical Review Letters*, 2002, vol. 89, iss. 4, pp. 040401. DOI: 10.1103/PhysRevLett.89.040401.
22. Wang Y.-J., Anderson D. Z., Bright V. M., Cornell E. A., Diot Q., Kishimoto T., Prentiss M., Saravanan R. A., Segal S. R., Wu S. Atom Michelson interferometer on a chip using a Bose-Einstein condensate. In: *Physical Review Letters*, 2005, vol. 94, iss. 9, pp. 090405. DOI: 10.1103/PhysRevLett.94.090405.
23. Shin Y., Saba M., Pasquini T. A., Ketterle W., Pritchard D. E., Leanhardt A. E. Atom interferometry with Bose-Einstein condensates in a double-well potential. In: *Physical Review Letters*, 2004, vol. 92, iss. 5, pp. 050405. DOI: 10.1103/PhysRevLett.92.050405.
24. Stickney J. A., Anderson D. Z., Zozulya A. A. Transistorlike behavior of a Bose-Einstein condensate in a triple-well potential. In: *Physical Review Letters A*, 2007, vol. 75, iss. 1, pp. 013608. DOI: 10.1103/PhysRevA.75.013608.
25. Caliga S. C., Straatsma C. J. E., Anderson D. Z. Transport dynamics of ultracold atoms in a triple-well transistor-like potential. In: *New Journal of Physics*, 2016, vol. 18, iss. 2, pp. 025010. DOI: 10.1088/1367-2630/18/2/025010.
26. Vasilieva O. F., Zingan A. P. [Temporary evolution of bose-condensed atoms in a three-well symmetric chain trap]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-Matematika* [Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], 2021, no. 1, pp. 27–38. DOI: 10.18384/2310-7251-2021-1-27-38.

27. Wilsmann K. W., Ymai L. H., Tonel A. P., Linkes J., Foerster A. Control of tunneling in a atomtronics switching device. In: *Communications Physics*, 2018, vol. 1, pp. 91. DOI: 10.1038/s42005-018-0089-1.
28. Tonel A. P., Ymai L. H., Wittmann K., Foerster A., Links J. Entangled states of dipolar bosons generated in a triple-well potential. In: *SciPost Physics Core*, 2020, vol. 2, pp. 003. DOI: 10.21468/SciPostPhysCore.2.1.003.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Васильева Ольга Федоровна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры квантовой радиофизики и систем связи Приднестровского государственного университета имени Т. Г. Шевченко;
e-mail: florina_of@mail.ru;

Зинган Анна Петровна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры квантовой радиофизики и систем связи Приднестровского государственного университета имени Т. Г. Шевченко;
e-mail: zingan.anna@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Olga F. Vasilieva – Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Prof., Department of Quantum Radiophysics and Communication Systems, Pridnestrovian State University;
e-mail: florina_of@mail.ru;

Anna P. Zingan – Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Prof., Department of Quantum Radiophysics and Communication Systems, Pridnestrovian State University;
e-mail: zingan.anna@mail.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Васильева О. Ф., Зинган А. П. Временная эволюция бозе-конденсированных атомов в трёхъямной ловушке, при условии отличной от нуля начальной заселённости первой ямы // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2022. № 2. С. 28–41.
DOI: 10.18384/2310-7251-2022-2-28-41.

FOR CITATION

Vasilieva O. F., Zingan A. P. Time evolution of Bose-condensed atoms in a three-well trap under the condition of a non-zero initial population of the first well. In*: Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*, 2022, no. 2, pp. 28–41.
DOI: 10.18384/2310-7251-2022-2-28-41.

УДК 533.6.011.8
DOI: 10.18384/2310-7251-2022-2-42-50

ЭФФЕКТ ИЗМЕНЕНИЯ ЗНАКА ПОДЪЁМНОЙ СИЛЫ ДЛЯ СТЕПЕННЫХ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ

Горелов С. Л., Дорофеев Ф. Е.

Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)
141701, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский пер., д. 9, Российская Федерация

Аннотация
Цель. Для тела вращения со степенной образующей исследовать эффект Галкина – изменения знака подъёмной силы при изменении угла атаки в высокоскоростных плоских течениях.
Процедура и методы. Используется метод вычисления аэродинамических сил и моментов, основанный на гипотезе локальности. С помощью этого метода вычисляются аэродинамические характеристики численным интегрированием по триангуляции тела с учётом эффектов затенения.
Результаты. Вычислены критическое удлинение степенного тела вращения в зависимости от степени образующей в широком диапазоне чисел Рейнольдса и для разных температурных факторов.
Теоретическая и практическая значимость. Результаты, полученные в данной работе, имеют большое значение для создания летательных аппаратов в области авиакосмической промышленности.
Ключевые слова: гиперзвуковой поток, локальные модели, аэродинамическое силы, действующие на тела вращения, триангуляция, тепловой поток

EFFECT OF A CHANGE IN THE SIGN OF THE LIFTING FORCE FOR POWER-LAW BODIES OF REVOLUTION

S. Gorelov, F. Dorofeev

Moscow Institute of Physics and Technology
Institutskii per. 9, Dolgoprudnyi 141701, Moscow Region, Russian Federation

Abstract
Aim. For a body of revolution with a power-law generatrix, we investigate the Galkin effect – a change in the sign of the lifting force with a change in the angle of attack in high-speed flat flows.
Methodology. A method for calculating aerodynamic forces and moments based on the hypothesis of locality is used. Using this method, aerodynamic forces and moments are calculated by numerical integration over body triangulation, taking into account shading effects.

Results. The critical elongation of a power-law body of revolution is calculated as a function of the degree of generatrix in a wide range of Reynolds numbers and for various temperature factors.
Research implications. The obtained results are of great importance for the creation of aircrafts in the aerospace industry.
Keywords: hypersonic flow, local models, aerodynamic forces acting on bodies of revolution, triangulation, heat flow.

Введение

Эффект изменения знака подъёмной силы при изменении угла атаки в высокоскоростных плоских течениях впервые был обнаружен в [1]. В свободномолекулярном течении такой эффект был найден в [2]. В работе [3] показано, что при обтекании клина разреженным газом при определённом соотношении угла полураствора и угла атаки подъёмная сила клина может стать отрицательной. Причём этот эффект проявляется при любых скоростях газа и отношениях температур поверхности клина и газа. Более того, такой эффект есть и в случае гиперзвукового течения невязкого газа (модель Ньютона). Для высокоскоростных течений на основе локального метода [4] показано, что эффект изменения знака подъёмной силы при определённых значениях угла полураствора существует для затупленных конических тел при произвольном числе Рейнольдса. Данная работа посвящена изучению этого эффекта для тел в форме степенных фигур вращения в гиперзвуковом потоке разреженного газа без предположения о режиме свободномолекулярного обтекания.

Локальный метод

Для исследования эффекта смены знака подъёмной силы в высокоскоростном потоке возможно использовать метод, основанный на гипотезе локальности [5; 6], которая состоит в следующем: аэродинамические коэффициенты сил, действующие на элемент поверхности, зависят только от местного угла наклона θ этого элемента к вектору скорости набегающего потока V_∞, от характерного для всего тела числа Рейнольдса $Re_0 = \rho_0 V_\infty L/\mu_0$ и температурного фактора $t_w = T_w/T_0$, где $\mu_0 = \mu(T_0)$ – коэффициент вязкости, вычисляемый по температуре торможения; $T_0 = T_\infty[1 + S^2(\gamma - 1)/\gamma]$, T_w – температура торможения и температура элемента поверхности, соответственно; $S = \sqrt{\gamma/2}\ M_\infty$ –скоростное отношение; M_∞ – число Маха набегающего потока; γ – отношение удельных теплоёмкостей; L – характерный размер тела. В соответствие с гипотезой локальности предполагается, что для аэродинамических коэффициентов давления и трения (отнесённых к скоростному напору $\rho_\infty V_\infty^2/2$) справедливы соотношения [5; 6]:

$$C_p = p_0 \sin^2\theta + p_1 \sin\theta, \qquad C_\tau = \tau_0 \sin\theta\cos\theta. \qquad (1)$$

Коэффициенты $p_0,\ p_1,\ \tau_0$ являются функциями от числа Re_0, температурного фактора t_w и показателя степени адиабаты γ.

Отличительной особенностью данной модели (кроме простоты) является то, что в предельных случаях изменения числа Рейнольдса она соответствует либо свободномолекулярной модели, либо модели Ньютона.

Так в свободномолекулярном случае ($Re_0 \to 0$) [7]:

$$p_0 = \tau_0 = 2, \quad p_1 = \sqrt{\pi\, t_w \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma}\right)}, \tag{2}$$

а в случае невязкого высокоскоростного газа ($Re_0 \to \infty$) имеет место формула Ньютона [8]:

$$p_0 = 2, \quad p_1 = 0, \qquad \tau_0 = 0. \tag{3}$$

В промежуточной области коэффициенты p_0, p_1, τ_0 аппроксимируются следующими формулами [5; 6]:

$$p_0 = 2, \;\; p_1 = \sqrt{\pi\, t_w \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma}\right)}\;\; exp[-(0.125 + 0,078\, t_w)\, Re_0],$$

$$\tau_0 = \frac{5.2326}{\sqrt{Re + 6.88 \exp(0.0072\, Re - 0.000016\, Re^2)}}, \tag{4}$$

$$Re = Re_0[0,25 + 0.75\, t_w]^{-2/3}$$

Тела вращения со степенной образующей

Образующая линия степенного тела вращения имеет вид:

$$R(x) = R_0(x/L)^{\beta},$$

где $0 \le x \le L$, R_0 – радиус основания тела, а L – его длина. Удлинением тела будем называть величину $\lambda = L/R_0$, понятно, что тела с одинаковыми удлинением λ и степенью β подобны и при равных числах Рейнольдса и температурного фактора имеют одинаковые аэродинамические коэффициенты. Примеры образующих с удлинением $\lambda = 1$ для разных степеней β приведены на рис. 1.

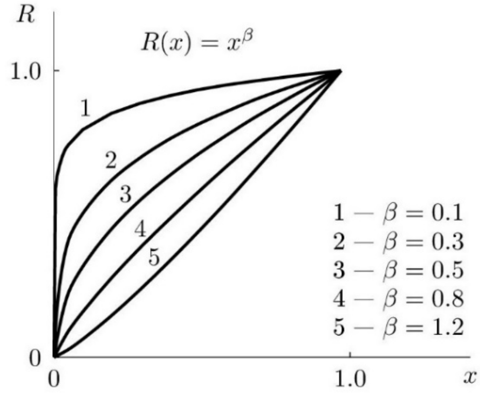


Рис. 1 / Fig. 1. Примеры образующих для степенных тел вращения / Examples of generators for power-law bodies of revolution

Источник: составлено авторами

Схема обтекания тела потоком с углом атаки α приведена на рис. 2, а примеры триангулированных тел вращения приведены на рис. 3.

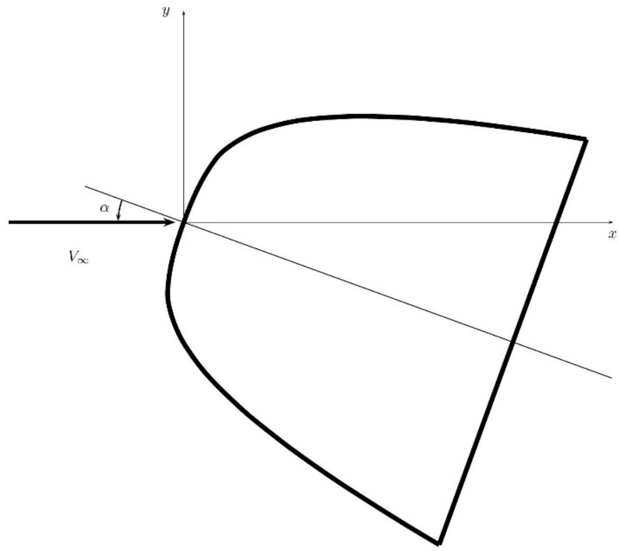


Рис. 2 / Fig. 2. Схема обтекания тела, $\boldsymbol{\alpha}$ – угол атаки, $\boldsymbol{V}_{\infty}$ – скорость набегающего потока / Scheme of flow around the body; $\boldsymbol{\alpha}$ is the angle of attack, and $\boldsymbol{V}_{\infty}$ is the velocity of the oncoming flow

Источник: составлено авторами

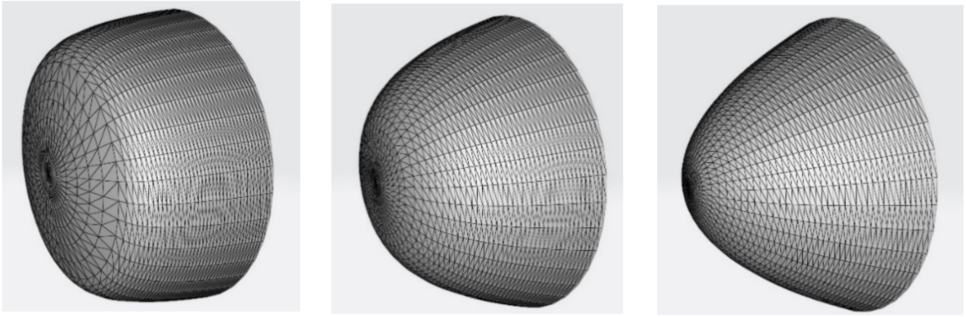


Рис. 3 / Fig. 3. Примеры степенных тел вращения для $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0.1}, \mathbf{0.3}, \mathbf{0.5}$ соответственно / Examples of power-law bodies of revolution for $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0.1}, \mathbf{0.3}$, **and** $\mathbf{0.5}$

Источник: составлено авторами

Эффект Галкина. Критическое удлинение

Таким образом рассматривается обтекание степенного тела вращения с удлинением λ и углом атаки $0 \leq \alpha \leq \pi/2$. Эффект Галкина состоит в том, что существует такое критическое значение удлинения λ_{cr}, что при $\lambda \leq \lambda_{cr}$ коэффициент подъёмной силы тела $C_y \leq 0$, и $0 \leq \alpha \leq \pi/2$, а при $\lambda > \lambda_{cr}$ имеем $C_y > 0$ в некотором интервале значений угла атаки α из множества $0 \leq \alpha \leq \pi/2$. На рис. 4 показан пример проведения функции $C_y(\alpha)$ при разных λ в окрестности λ_{cr} для степенного тела вращения

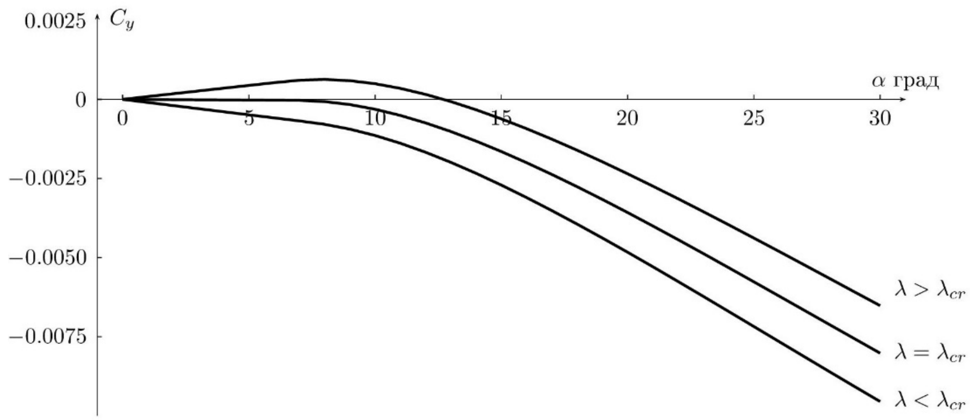


Рис. 4 / Fig. 4. Поведение коэффициента подъёмной силы $\boldsymbol{C_y}$ при удлинениях тела вблизи критического. При $\boldsymbol{\lambda < \lambda_{cr}}$ коэффициент отрицателен при всех углах атаки / Behavior of the lifting force coefficient $\boldsymbol{C_y}$ upon elongations of a body near the critical one. For $\boldsymbol{\lambda < \lambda_{cr}}$ the coefficient is negative for all angles of attack

Источник: составлено авторами

Значение λ_{cr} для тела с заданной степенью образующей β и при заданных параметрах Re_0 и t_w определяется с помощью следующей процедуры. Функция $C_y(\alpha)$ вычисляется на отрезке $0 \le \alpha \le \alpha_{max}$ в некотором количестве точек N. Вычисление состоит в суммировании проекций на заданную ось сил давления и трения (1) по всем тем треугольникам триангуляции, которые пересекаются потоком молекул потока. Треугольники, попадающие в тень потока, вклад в сумму не дают. После получения, таким способом N значений функции $C_y(\alpha)$, эта функция интерполируется сплайном. Используя этот сплайн, мгновенно находится максимум этой функции на отрезке $0 \le \alpha \le \alpha_{max}$.

Таким образом получаем функцию $C_y^{(max)}(\lambda)$. Численное исследование этой функции позволяет определить максимальное значение переменной λ, при которой $C_y^{(max)}(\lambda) \le 0$. Это максимальное значение и есть λ_{cr}, так как при $\lambda > \lambda_{cr}$ имеем $C_y^{(max)}(\lambda) > 0$. Проведённое исследование показало, что описанная процедура надёжно определяет критическое значение λ_{cr} при $\alpha_{max} = 10$ град, $N = 5$. Процедура была проверена на устойчивость относительно увеличения числа треугольников в триангуляции. Так увеличение количества треугольников вдвое изменяет значение λ_{cr} в четвёртом знаке.

С помощью описанной процедуры получены результаты, которые представлены на рис. 5 и 6. На рис. 5 представлена зависимость критического удлинения λ_{cr} от степени образующей β. Анализируя эти результаты, можно отметить не сильную зависимость λ_{cr} от температурного фактора t_w. Кроме того, существует точка на графике с координатами $\beta = 0.21,\ \lambda_{cr} = 0.89$ в окрестности которой проходят все линии зависимостей.

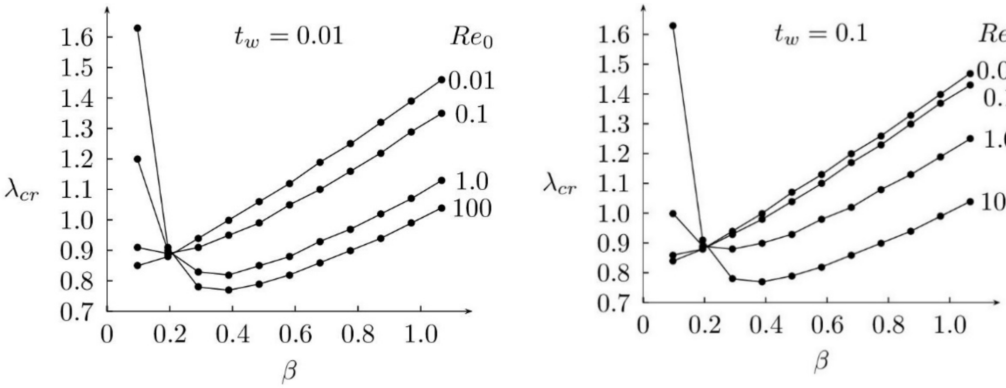


Рис. 5 / Fig. 5. Критическое удлинение степенного тела вращения как функция степени $\boldsymbol{\beta}$ при разных числах Рейнольдса ($\boldsymbol{Re_0}$) и температурном факторе $\boldsymbol{t_w = 0.01}$ и $\boldsymbol{t_w = 0.1}$ / Critical elongation of a power-law body of revolution as a function of the degree $\boldsymbol{\beta}$ at different Reynolds numbers $\boldsymbol{Re_0}$ and temperature factors $\boldsymbol{t_w = 0.01}$ and $\boldsymbol{t_w = 0.1}$

Источник: составлено авторами

Чтобы подробно рассмотреть это явление, на рис. 6 представлены зависимости λ_{cr} от числа Рейнольдса Re_0 при разных показателях степени β в интервале $0.18 \le \beta \le 0.26$.

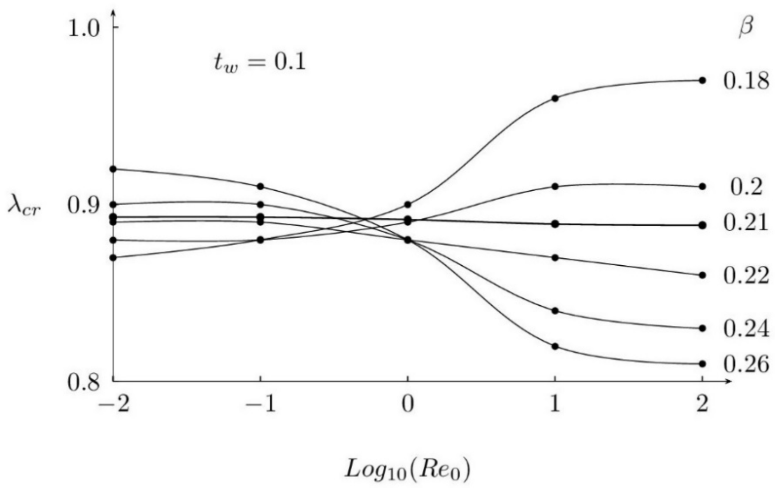


Рис. 6 / Fig. 6. Критическое удлинение степенного тела вращения как функция числа $\boldsymbol{Re_0}$ при степенях β равных 0.18–0.26 и температурном факторе $\boldsymbol{t_w = 0.1}$ / Critical elongation of a power-law body of revolution as a function of the number $\boldsymbol{Re_0}$ with powers of β equal to 0.18–0.26 and a temperature factor $\boldsymbol{t_w = 0.1}$

Источник: составлено авторами

На рис. 6 можно видеть некоторый кроссовер поведения функции $\lambda_{cr}(Re_0)$ при разных β. Она из возрастающей делается убывающей. Это происходит в окрестности $\beta \approx 0.21$. При этом значении критическое удлинение степенного тела вращения почти не зависит от числа Re_0. И при переходе через это значение функция $\lambda_{cr}(Re_0)$ из возрастающей превращается в убывающую.

Заключение

Для тел вращения со степенной образующей исследован эффект Галкина, который состоит в том, что существует критическое удлинение тела λ_{cr} такое, что при всех $\lambda < \lambda_{cr}$ подъёмная сила отрицательна при всех углах атаки α в интервале $(0, \pi/2)$. Исследована зависимость λ_{cr} от степени образующей β, числа Рейнольдса Re_0 и температурного фактора t_w. Обнаружено явление кроссовера в поведения функции $\lambda_{cr}(Re_0)$, при $\beta_c \approx 0.21$, так что при $\beta > \beta_c$ эта функция возрастающая, а при $\beta < \beta_c$ убывающая.

Соответственно, при $\beta = \beta_c$ критическое удлинение не зависит от числа Рейнольдса.

Статья поступила в редакцию 22.03.2022г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Галкин В. С., Гладков А. А. О подъемной силе при гиперзвуковых скоростях // Прикладная механика и математика. 1961. Т. 25. Вып. 6. С. 1138–1139.
2. Галкин В. С. О подъемной силе в свободномолекулярном потоке // Прикладная механика и математика. 1962. Т. 26. Вып. 3. С. 567.
3. Горелов С. Л., Могорычная А. В. О подъемной силе в потоке разреженного газа // Прикладная механика и математика. 2022. Т. 86. № 2. С. 216–222. DOI: 10.31857/S0032823522020060.
4. Василенко Д. А., Дорофеев Ф. Е., Дорофеев Е. А. Построение нейросетевого аппроксиматора для определения критического угла полураствора в эффекте смены знака коэффициента подъемной силы для затупленных конических тел // Труды МАИ (сетевое научное издание). 2021. № 119. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=159784# (дата обращения: 10.02.2022). DOI: 10.34759/TRD-2021-119-07.
5. Галкин В. С., Ерофеев А. И., Толстых А. И. Приближенный метод расчета аэродинамических характеристик тел в гиперзвуковом разреженном газе // Труды ЦАГИ. 1977. Вып. 1833. С. 6–10.
6. Теоретические и экспериментальные исследования обтекания тел простой формы гиперзвуковым потоком разреженного газа / Гусев В. Н., Ерофеев А. И., Климова Т. В. Перепухов В. А. Рябов В. В., Толстых А. И. // Труды ЦАГИ. 1977. Вып. 1855. С. 43.
7. Коган М. Н. Динамика разреженного газа. М.: Наука, 1967. 440 с.
8. Ньютон И. Математические начала натуральной философии. М.: Наука, 1989. 688 с.

REFERENCES

1. Galkin V. S., Gladkov A. A. [On the lifting force at hypersonic speeds]. In: *Prikladnaya mekhanika i matematika* [Journal of Applied Mathematics and Mechanics], 1961, vol. 25, iss. 6, pp. 1138–1139.

2. Galkin V. S. [On the lifting force in a free molecular flow]. In: *Prikladnaya mekhanika i matematika* [Journal of Applied Mathematics and Mechanics], 1962, vol. 26, iss. 3, p. 567.
3. Gorelov S. L., Mogorychnaya A. V. [On the lifting force in a rarefied gas flow]. In: *Prikladnaya mekhanika i matematika* [Journal of Applied Mathematics and Mechanics], 2022, vol. 86, no. 2, pp. 216–222. DOI: 10.31857/S0032823522020060.
4. Vasilenko D. A., Dorofeev F. Ye., Dorofeev Ye. A. [Construction of a neural network approximator to determine the critical half-angle in the effect of sign reversal of the lift coefficient for blunt conical bodies]. In: *Trudy MAI (setevoe nauchnoe izdanie)* [Proceedings of Moscow Aviation Institute (network scientific publication)], 2021, no. 119. Available at: https://trudymai.ru/published.php?ID=159784# (accessed: 10.02.2022). DOI: 10.34759/TRD-2021-119-07.
5. Galkin V. S., Erofeev A. I., Tolstykh A. I. [An approximate method for calculating the aerodynamic characteristics of bodies in a hypersonic rarefied gas]. In: *Trudy TsAGI* [Proceedings of Central Aerohydrodynamic Institute], 1977, iss. 1833, pp. 6–10.
6. Gusev V. N., Erofeev A. I., Klimova T. V. Perepukhov V. A. Ryabov V. V., Tolstykh A. I. [Theoretical and experimental studies of a hypersonic flow of rarefied gas around bodies of a simple shape]. In: *Trudy TsAGI* [Proceedings of Central Aerohydrodynamic Institute], 1977, iss. 1855, S. 43.
7. Kogan M. N. *Dinamika razrezhennogo gaza* [Dynamics of a rarefied gas]. Moscow, Nauka Publ., 1967. 440 p.
8. Newton I. *The mathematical principles of natural philosophy*. London, Flame Tree Publ., 202. 480 p.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Горелов Сергей Львович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры компьютерного моделирования Московского физико-технического института (национального исследовательского университета);
e-mail: gorelovsl@yandex.ru;

Дорофеев Федор Евгеньевич – аспирант кафедры компьютерного моделирования Московского физико-технического института (национального исследовательского университета);
e-mail: feodor.dorofeev@gmail.com, dorofeev.fe@phystech.edu.

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Sergey L. Gorelov – Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Department of Computer Modeling, Moscow Institute of Physics and Technology;
e-mail: gorelovsl@yandex.ru;

Fedor E. Dorofeev – Postgraduate Student, Department of Computer Modeling, Moscow Institute of Physics and Technology;
e-mail: feodor.dorofeev@gmail.com, dorofeev.fe@phystech.edu.

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Горелов С. Л., Дорофеев Ф. Е. Эффект изменения знака подъёмной силы для степенных тел вращения // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2022. № 2. С. 42–50.
DOI: 10.18384/2310-7251-2022-2-42-50.

FOR CITATION

Gorelov S. V., Dorofeev F. E. Effect of a change in the sign of the lifting force for power-law bodies of revolution. In: *Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*, 2022, no. 2, pp. 42–50.
DOI: 10.18384/2310-7251-2022-2-42-50.

УДК 530.1
DOI: 10.18384/2310-7251-2022-2-51-55

ПРИНЦИП УСТОЙЧИВОСТИ

Камалов Т. Ф.

Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)
141700, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский пер., д. 9, Российская Федерация
Московский государственный областной университет
141014, Московская обл., г. Мытищи, ул. Веры Волошиной, д. 24, Российская Федерация

Аннотация
Цель данной работы заключается в доказательстве того, что из принципа устойчивости следует принцип наименьшего действия.
Процедура и методы. В статье предложена формулировка принципа устойчивости физических систем, позволяющая подменить принцип наименьшего действия, т. к. из принципа устойчивости следует принцип наименьшего действия.
Результаты. В работе были доказаны две теоремы для достижения указанных целей.
Теоретическая и/или практическая значимость. Работа разъясняет происхождение одного из основных физических законов – принципа наименьшего действия – и позволяет другую формулировку устойчивости.
Ключевые слова: аксиоматика физики, принцип устойчивости
Благодарности. Автор искренне благодарен профессору Беляеву В. В. за правильное руководство и ценные советы, которые повлияли на написание этой работы

STABILITY PRINCIPLE

T. Kamalov

Moscow Institute of Physics and Technology
Institutskii per. 9, Dolgoprudnyi 141700, Moscow region, Russian Federation
Moscow Region State University
ul. Very Voloshinoi 24, Mytishchi 141014, Moscow Region, Russian Federation

Abstract
Aim. The purpose of the paper is to prove that the principle of least action follows from the principle of stability.
Methodology. The paper proposes a formulation of the principle of stability of physical systems, which makes it possible to replace the principle of least action, since from the principle of stability follows the principle of least action.
Results. Two theorems are proved to achieve these goals.
Research implications. The work clarifies the origin of one of the basic physical laws, the principle of least action, and allows a different formulation of stability.
Keywords: axiomatics of physics, stability principle

Acknowledgments. The author is sincerely grateful to Professor V. V. Belyaev for good guidance and valuable advice that influenced the writing of this work

Введение

В работе доказывается, что из принципа устойчивости следует принцип наименьшего действия. Это означает, что основные известные законы физики можно получить из требования устойчивости физической системы. Аксиома устойчивости устраняет необходимость введения сразу нескольких аксиом в физике. Это относится в механике, электромагнетизму, теории относительности, квантовой физике и др.

Согласно теоремы австрийского математика Гёделя, в любой теории существуют положения (аксиомы или постулаты), которые нельзя доказать в рамках данной теории, они угадываются из экспериментального и наблюдательного опыта и их должно быть минимальное количество для построения теории.

Принцип устойчивости может не только обобщать, но и логически объяснять основные законы природы. Принцип устойчивости позволяет использовать устойчивость физических объектов и их состояний для объяснения и обобщения таких фундаментальных законов природы, как принцип наименьшего действия, устойчивость атомов, стационарность возможных траекторий и др. Его можно использовать как обобщённый закон, объясняющий такой основной закон природы, как принцип наименьшего действия, а значит – он может быть распространён на все другие законы, вытекающие из принципа наименьшего действия, такие как законы Ньютона, уравнения Эйлера-Лагранжа, законы распространения света, электромагнитных волн и т. д.

Из устойчивости следуют основные законы физики.

Устойчивость по Ляпунову

Если дифференциальные уравнения возмущённого движения таковы, что можно найти знакоопределённую функцию V, производная которой V' в силу этих уравнений была бы либо знакопостоянной функцией противоположного знака относительно V, либо постоянной – знаковая функция противоположного знака с V, или тождественно равна нулю, то невозмущённое движение устойчиво [1].

Устойчивость по Пуанкаре

Пуанкаре ввёл коэффициенты устойчивости $\delta = \frac{d^2V}{dt^2}$. При $\delta > 0$ состояние системы устойчиво. В противном случае он нестабилен [2].

Устойчивость по Лагранжу

Если в положении равновесия потенциальная энергия V имеет изолированный минимум, то это положение равновесия устойчиво.

Принцип устойчивости

Применительно к нашему случаю сформулируем принцип устойчивости следующим образом: физическая система сохраняет состояние устойчивого поступательного, колебательного, вращательного движения в отсутствии внешнего возмущения.

Уравнения Эйлера-Лагранжа описывают устойчивые состояния физической системы. Уравнения Остроградского с высшими производными – это уравнения Эйлера-Лагранжа с дополнительными слагаемыми с высшими производными, описывающие также неустойчивые состояния этой физической системы.

Заметим, что законы Ньютона, описывающие устойчивую динамику физических систем, являются дифференциальными уравнениями второго порядка. Дополнительные слагаемые к классической механике в виде высших производных описывают неустойчивые реальные движения с учётом случайных воздействий.

Теорема 1

Если физическая система устойчива в инерциальной системе отсчёта, то для неё справедлив принцип наименьшего действия.

Доказательство теоремы

Согласно устойчивости по Лагранжу, физическая система устойчива тогда, когда потенциальная энергия V имеет изолированный минимум, т. е. $V^{\cdot}(q(t)) = 0, V^{\cdot\cdot}(q(t)) > 0$.

В инерциальной системе отсчёта для изолированной физической системы без действия внешних сил скорость постоянна $\dot{q}(t) = const$, что следует из первого закона Ньютона. Это означает, что его кинетическая энергия также постоянна $T(\dot{q}(t)) = const$, потому что кинетическая энергия является квадратичной функцией скорости.

Тогда функция Лагранжа $L(q(t), \dot{q}(t)) = T(\dot{q}(t)) - V(q(t)$, равная разности между потенциальной энергией $V(q(t))$ и кинетической энергией $T(q^{\cdot}(t))$, также имеет изолированный минимум $L^{\cdot}(q(t), q^{\cdot}(t)) = 0, L^{\cdot\cdot}(q(t), q^{\cdot}(t)) > 0$.

Функция действия определяется как:

$$S = \int L(q(t), \dot{q}(t))dt = \int (T(\dot{q}(t)) - V(q(t)))dt$$

Тогда вариация функции действия равна нулю, а это выражает принцип наименьшего действия:

$$\delta S(q(t), \dot{q}(t)) = 0.$$

Теорема доказана.

Теорема 2

Если состояние физической системы неустойчиво в неинерциальной системе отсчёта, то вариация функции действия этой системы не равно нулю.

Доказательство

Если физическая система неустойчива, значит, она не имеет изолированного минимума потенциальной энергии. Тогда функция Лагранжа, а следовательно и функция действия этой системы также не имеет изолированного минимума, т. к. кинетическая энергия в инерциальной системе постоянна $T(\dot{q}(t)) = const$. Тогда вариация функции действия не равна нулю $\delta S(q(t), \dot{q}(t)) \neq 0$.

Теорема доказана.

Заключение

Доказано, что из требования устойчивости следует принцип наименьшего действия. Это ставит устойчивость в ряд первоопределяющих принципов физики [3].

Статья поступила в редакцию 11.04.2022г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lyapunov A. M. The general problem of the stability of motion // International Journal of Control. 1992. Vol. 55. Iss. 3. P. 531–534, DOI: 10.1080/00207179208934253.
2. Poincaré H. Sur les courbes définies par les équations différentielles (IV) // Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. 1886. Vol. 2. P. 151–218.
3. Kamalov T. F. Instability states and Ostrogradsky formalism // Journal of Physics: Conference Series. 2018. Vol. 1051(1): XX International Meeting "Physical Interpretations of Relativity Theory 2017" (3–6 July 2017, Moscow, Russian Federation). P. 012033. DOI: 10.1088/1742-6596/1051/1/012033.

REFERENCES

1. Lyapunov A. M. The general problem of the stability of motion. In: *International Journal of Control*, 1992, vol. 55, iss. 3, pp. 531–534, DOI: 10.1080/00207179208934253.
2. Poincaré H. Sur les courbes définies par les équations différentielles (IV). In: Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 1886, vol. 2, pp. 151–218.
3. Kamalov T. F. Instability states and Ostrogradsky formalism. In: *Journal of Physics: Conference Series*, 2018, vol. 1051(1): XX International Meeting "Physical Interpretations of Relativity Theory 2017" (3–6 July 2017, Moscow, Russian Federation), pp. 012033. DOI: 10.1088/1742-6596/1051/1/012033.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Камалов Тимур Фянович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической физики Московского физико-технического института (национального исследовательского университета); доцент кафедры теоретической физики Московского государственного областного университета;
e-mail: timkamalov@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Timur F. Kamalov – Cand Sci (Phys.-Math.), Assoc. Prof., Department of Theoretical Physics, Moscow Institute of Physics and Technology; Assoc. Prof., Department of Theoretical Physics, Moscow Region State University;
e-mail: timkamalov@mail.ru.

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Камалов Т. Ф. Принцип устойчивости // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2022. № 2. С. 51–55.
DOI: 10.18384/2310-7251-2022-2-51-55.

FOR CITATION

Kamalov T. F. Stability principle. In: Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics, 2022, no. 2, pp. 51–55.
DOI: 10.18384/2310-7251-2022-2-51-55.

УДК 533.73
DOI: 10.18384/2310-7251-2022-2-56-69

О ФОРМУЛЕ, ПРИЕМЛЕМОЙ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ВРЕМЕНИ ПОЛНОГО ИСПАРЕНИЯ КАК МЕЛКИХ, ТАК И КРУПНЫХ СФЕРИЧЕСКИХ КАПЕЛЬ ВОДЫ

Кузнецов М. М., Кузьмин М. К., Кулешова Ю. Д.

Московский государственный областной университет
141014, Московская обл., г. Мытищи, ул. Веры Волошиной, д. 24, Российская Федерация

Аннотация

Цель. В работе ставится и решается задача получения аналитических формул для вычисления времени испарения мелких и крупных капель сферической формы.

Процедура и методы. В работе использованы аналитические методы математической физики при решении задачи о нестационарном испарении капель. Использованы также численные композитные методы для составления общей формулы для всех режимов испарения капель.

Результаты. Получено единое аналитическое выражение, связывающее времена жизни как мелких, так и крупных сферических капель воды. Упомянутые случаи больших и малых капель соответствуют различным асимптотикам. Найдены отдельные формулы для вычисления времени испарения мелких и крупных аэрозольных капель сферической формы. В результате численного анализа этих формул в нестационарном процессе испарения капель воды построена одна более простая формула, приемлемая для вычисления времени жизни как мелких, так и крупных сферических капель воды. Проведено сравнение построенных по этой формуле графиков зависимости времени жизни капли от её начального радиуса при различных значениях температуры среды с результатами, полученными другими авторами.

Теоретическая и/или практическая значимость. Статья представляет большой интерес как для теории нестационарного испарения капель, так и для использования полученных результатов в многочисленных практических приложениях.

Ключевые слова: нестационарный процесс испарения аэрозольных капель, мелкие и крупные капли воды, время полного испарения, учёт кривизны поверхности капли, анализ формул, графиков

ON THE FORMULA ACCEPTABLE FOR CALCULATING THE TIME OF COMPLETE EVAPORATION OF BOTH SMALL AND LARGE SPHERICAL WATER DROPLETS

M. Kuznetsov, M. Kuzmin

Moscow Region State University
ul. Very Voloshinoi 24, Mytishchi 141014, Moscow Region, Russian Federation

Abstract
Aim. The paper formulates and solves the problem of obtaining analytical formulae for calculating the evaporation time of small and large droplets of spherical shape.
Methodology. The paper relies on analytical methods of mathematical physics in solving the problem of non-stationary evaporation of droplets. Use is also made of numerical composite methods to construct a general formula for all regimes of evaporation of droplets.
Results. A unified analytical expression linking the lifetimes of both small and large spherical water droplets is obtained. The mentioned cases of large and small droplets correspond to different asymptotics. Separate formulae for calculating the evaporation time of small and large spherical aerosol droplets are found. As a result of the numerical analysis of these formulae in the non-stationary process of evaporation of water droplets, a simpler formula acceptable for calculating the lifetime of both small and large spherical water droplets is derived. Formula-built graphs of the dependence of the lifetime of the drop on its initial radius at different values of the ambient temperature are compared with those obtained by other authors.
Research implications. The paper is of great interest both for the theory of non-stationary evaporation of droplets, and for the use of the obtained results in numerous practical applications.
Keywords: non-stationary process of evaporation of aerosol droplets, small and large drops of water, time of complete evaporation, accounting for the curvature of the surface of the droplet, analysis of formulas, graphs

Введение

Теоретические и экспериментальные исследования процесса испарения и конденсационного роста аэрозольных капель имеют давнюю историю [1; 2] и различные аспекты этой тематики продолжают интересовать учёных по сей день [3–12]. В связи с широким применением капельных аэрозолей во многих областях науки и техники часто возникает необходимость оценить время образования или полного испарения такого аэрозоля. Весьма подробный анализ большого числа факторов по-разному, влияющих на скорость протекания процесса испарения единичной капли жидкости, проведён в работе [3], при этом отмечены и недостатки хорошо известной в теории испарения капель формулы Максвелла [1]. Задача максимально полно охватить основные факторы, влияющие на скорость процесса испарения капельных аэрозолей, и при этом получить наиболее простую и удобную для инженерных расчётов формулу для времени жизни таких капель до сих пор остаётся актуальной.

В предлагаемой статье для получения указанной в её названии формулы будут использованы результаты работы [13]. В ней рассмотрен нестационарный процесс испарения неподвижной аэрозольной капли сферической формы, находящейся в бинарной газовой смеси, первый компонент которой образован молекулами вещества капли, а второй компонент – молекулами несущего газа, то есть парогазовой смеси. При этом имеет место диффузионный режим [1; 2] испарения.

Как известно, к числу важнейших характеристик нестационарного процесса испарения сферических капель относятся: скорость изменения их радиуса, время полного испарения (по-другому – «время высыхания» или «время жизни») капли при учёте существенных факторов, влияющих на процесс. В работе [13], учитывая влияние слоя Кнудсена [1; 2] вокруг капли в виде скачков концентрации и температуры у её поверхности, а также кривизну поверхности, коэффициент поверхностного натяжения, найдены начальное и конечное предельные выражения для скорости изменения радиуса R аэрозольной капли. В обозначениях указанной работы они имеют вид:

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)_0 = \frac{\varepsilon_{cT} D n m_1 \kappa}{\rho_i g_\chi} \ (t \to 0), \tag{1}$$

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)_\infty = \frac{\varepsilon_{cT} D n m_1 \kappa}{\rho_i \left[g_\chi + R\left(k_{q\sigma} + \kappa\right)\right]} \ (t \to \infty). \tag{2}$$

Настоящая статья посвящена получению формул для времени полного испарения аэрозольных капель, исходя из соотношений (1) и (2). На основе численного анализа двух полученных формул в применении к нестационарному процессу испарения капель воды в воздушную среду определённой влажности составлена одна формула, приемлемая для вычисления времени жизни как мелких, так и крупных сферических капель воды. Проведено сравнение построенных по этой формуле графиков зависимости времени жизни капли от её начального радиуса с результатами, полученными авторами работы [3].

Формулы для вычисления времени полного испарения сферической аэрозольной капли

Выбор системы координат, относительно которой записаны основные уравнение поставленной в [13] задачи, был определён тем, что процесс испарения протекает сферически симметрично. Такому процессу наилучшим образом подходит сферическая система координат с началом в центре испаряющейся капли.

Из принятых в работе [13] обозначений приведём необходимые для понимания дальнейшего изложения. $c_1(r,t)$, $T(r,t)$ обозначают соответственно распределение относительной концентрации пара и поля температуры парогазовой смеси вне слоя Кнудсена, где r – радиальная координата сферической системы координат (здесь $r \geq R$), t – время. Приведём для них начальные и граничные условия:

$$c_1(r,t)_{|t=0} = c_1(r,t)_{|r\to\infty} = c_{10},\ T(r,t)_{|t=0} = \mathrm{T}(r,t)_{|r\to\infty} = T_0.$$

Далее, $c_{1s}(t) = c_1(T_s)$ – относительная концентрация насыщенных паров вещества капли при температуре её поверхности $T_s(t)$,

$$c_{1s}(t)_{|t=0} = c_{1s0}, T_s(t)_{|t=0} = T_{s0}.$$

Для обозначения относительной концентрации насыщенных паров вещества капли при температуре её поверхности, имеющей пренебрежимо малую кривизну, используем черту над буквой; например, $\overline{c}_{1s}(t)_{|t=0} = \overline{c}_{1s0}$. В выражения (1) и (2) входят $D = nm_2D_{12}/\rho_e$, где D_{12} – коэффициент взаимной диффузии компонентов бинарной (парогазовой) смеси; $n = n_1 + n_2$; n_1, m_1 и n_2, m_2 – концентрация и масса молекул первого и второго компонентов соответственно; $\kappa -$ коэффициент теплопроводности парогазовой смеси. ρ_i и ρ_e – соответственно плотности вещества капли и бинарной смеси.

Для описания оставшихся величин $\varepsilon_{cT}, k_{q\sigma}, g_\chi$, входящих в выражения (1) и (2), использованы обозначения: k – постоянная Больцмана, q – удельная теплота испарения вещества капли, $\sigma -$ коэффициент поверхностного натяжения и χ_c, χ_T – составные коэффициенты скачков концентрации и температуры [14]. Имеют место соотношения:

$$\varepsilon_{cT} = \varepsilon_c - c_{1s0}k_q\varepsilon_T, g_\chi = k_{q\sigma}\chi_T + \kappa\chi_c\ , k_{q\sigma} = \gamma k_q\overline{c}_{1s0}\left(1 + \frac{k_\sigma}{R}\right),$$

$$\varepsilon_c = c_{10} - \overline{c}_{1s0}\left(1 + \frac{k_\sigma}{R}\right),\ \ \varepsilon_T = T_0 - T_{s0}\ , k_q = \frac{qm_1 - kT_{s0}}{kT_{s0}^2},$$

$$k_\sigma = \frac{2m_1\sigma}{kT_{s0}\rho_i}, \gamma = Dnm_1q\ .$$

Будем рассматривать соотношения (1), (2) как обыкновенные дифференциальные уравнения, в которых только радиус капли R зависит от времени t. Такое допущение правомерно в предположении, что рассматривается процесс медленного испарения, концентрация молекул пара вещества капли остаётся много меньше концентрации молекул несущей газовой среды и характерное время изменения радиуса капли намного больше отношения квадрата радиуса к коэффициенту диффузии среды. Как отмечено в [3], эти предположения хорошо отражают реальную ситуацию для давлений газа порядка атмосферного.

Итак, в соотношениях (1) и (2) $R = R(t)$ выступает в качестве искомой функции. Разделением переменных R и t уравнения (1) и (2) приводятся к виду:

$$(dt)_0 = -\frac{a_{00}}{b}\left(1 + \frac{a_{01} - c}{R + c}\right)dR, \tag{3}$$

$$(dt)_\infty = -\frac{a_{\infty 0}}{b}\left[R + a_{\infty 1} - c + \frac{a_{\infty 2} - c(a_{\infty 1} - c)}{R + c}\right]dR, \tag{4}$$

где

$$a_{00} = \frac{\kappa\chi_c + \kappa_q\chi_T}{\overline{c}_{qT} - c_{10}}, \kappa_q = \gamma k_q\overline{c}_{1s0}, \overline{c}_{qT} = \overline{c}_{1s0}(1 + k_q\varepsilon_T);$$

$$a_{01} = \frac{\kappa_\sigma\kappa_q\chi_T}{\kappa\chi_c + \kappa_q\chi_T}, b = \frac{Dnm_1\kappa}{\rho_i}, c = \frac{k_\sigma\overline{c}_{qT}}{\overline{c}_{qT} - c_{10}};$$

$$a_{\infty 0}=\frac{\kappa+\kappa_q}{\bar{c}_{qT}-c_{10}},\ a_{\infty 1}=\frac{\kappa\chi_c+\kappa_q(\chi_T+k_\sigma)}{\kappa+\kappa_q},\ a_{\infty 2}=\frac{k_\sigma\kappa_q\chi_T}{\kappa+\kappa_q}.$$

Проинтегрируем уравнения (3) и (4) при выполнении начального условия

$$R(t)_{|t=0}=R_0.$$

Опуская несложные преобразования, приведём вытекающие из этих уравнений формулы для вычисления времени θ полного испарения аэрозольных капель:

$$\theta_0=\frac{a_{00}}{b}\left[R_0+(a_{01}-c)\ln\left|1+\frac{R_0}{c}\right|\right], \tag{5}$$

$$\theta_\infty=\frac{a_{\infty 0}}{b}\left\{\frac{R_0^2}{2}+(a_{\infty 1}-c)R_0+\left[a_{\infty 2}-c(a_{\infty 1}-c)\ln\left|1+\frac{R_0}{c}\right|\right]\right\}. \tag{6}$$

Заметим, что используемые в обозначении времени полного испарения капли индексы 0 и ∞ указывают не только на то, что их правые части получены из соотношений (3) и (4), снабжённых соответствующими индексами, они указывают и на «малое» и «большое» значения времени полного испарения соответственно «мелких» и «крупных» капель.

Анализ формул для вычисления времени полного испарения аэрозольных капель

Обратим внимание на то, что выражение (5) и часть выражения (6) состоят из членов, линейно зависящих от R_0 и $\ln\left|1+\frac{R_0}{c}\right|$. Выделив эту часть, формулу (6) представим в виде

$$\theta_\infty=t_{\infty 1}+t_{\infty 2}, \tag{7}$$

где

$$t_{\infty 1}=\frac{a_{\infty 0}(a_{\infty 1}-c)}{b}\left[R_0+\left(\frac{a_{\infty 2}}{a_{\infty 1}-c}-c\right)\ln\left|1+\frac{R_0}{c}\right|\right], \tag{8}$$

$$t_{\infty 2}=\frac{a_{\infty 0}}{2b}R_0^2. \tag{9}$$

Формула (5), полученная для малых значений времени, служит для вычисления времени полного испарения более мелких аэрозольных капель. Можно предположить, что имеющая аналогичное с ней строение формула (8) пригодна для той же цели, а слагаемое (9) будет вносить наиболее существенную часть времени полного испарения для более крупных капель.

Если такое предположение верно, то заменив в формуле (7) довольно громоздкое выражение (8) более простым выражением (5), получим более удобную для инженерных расчётов формулу, приемлемую для вычисления времени жизни аэрозольных капель с широким диапазоном начальных радиусов.

Выясним правомерность замены в формуле (7) выражения (8) на более простое выражение (5). Коэффициенты при R_0 и $\ln\left|1+\frac{R_0}{c}\right|$ в этих выражениях зависят как от физических свойств вещества испаряющейся капли, так и от условий окружающей ее среды. Рассмотрим наиболее часто встречающийся случай нестационарного испарения капель воды в воздушную среду 50%

влажности, когда давление этой среды $P = 0{,}1$ *МПа*. Для сравнения возьмём два различных значения температуры среды 293 *К,* 323 *К*, которым, как известно [13], соответствуют значения коэффициента испарения воды α, равные 0,034 и 0,026.

Поскольку мы рассматриваем процесс только испарения капель, то при $\varepsilon_c < 0$ величина $\varepsilon_{cT} = \varepsilon_c - c_{1s0}k_q\varepsilon_T$, входящая в выражения (1) и (2), должна быть отрицательной, а это возможно только при выполнении условия:

$$\varepsilon_T > -k_q^{-1}\left(1 - \frac{c_{10}}{\varepsilon_c}\right)^{-1}. \tag{10}$$

Откуда получаем [13], что если за основу брать фиксированную температуру среды, то температура поверхности капли не может быть намного выше температуры среды. Для простоты ограничиваемся случаем, когда температура поверхности испаряющейся капли

$$T_s(t) = T_s(t)_{|t=0} = T_{s0} = T_0.$$

В таком случае обеспечивается выполнение условия (10) на все время жизни испаряющейся капли.

Рассматриваемые выражения (5) и (8) включают в себя один и тот же множитель b^{-1}, поэтому для их сравнения достаточно знать численные значения пар величин:

$$a_{00}, a_{\infty 0}(a_{\infty 1} - c), \tag{11}$$

и

$$a_{00}(a_{01} - c), a_{\infty 0}[a_{\infty 2} - c(a_{\infty 1} - c)]. \tag{12}$$

Вычислив их при двух указанных выше значениях температуры среды, представим для наглядности таблицей.

Таблица 1 / Table 1

Численные значения величин (11) и (12) в зависимости от температуры среды T_0 / Numerical values of quantities (11) and (12) depending on the medium temperature T_0

T_0	**293 *К***	**323 *К***
a_{00} $a_{\infty 0}(a_{\infty 1} - c)$	$1{,}2074\cdot 10^{-5}$ $1{,}2062\cdot 10^{-5}$	$0{,}5593\cdot 10^{-5}$ $0{,}5587\cdot 10^{-5}$
$a_{00}(a_{01} - c)$ $a_{\infty 0}[a_{\infty 2} - c(a_{\infty 1} - c)]$	$-2{,}4848\cdot 10^{-14}$ $-2{,}4828\cdot 10^{-14}$	$-0{,}9189\cdot 10^{-14}$ $-0{,}9178\cdot 10^{-14}$

Источник: составлено авторами

Полученные численные значения в табл. 1 показывают, что как выражения (11), так и выражения (12) при обоих значениях температуры среды являются величинами одного порядка, то есть

$$a_{00} \sim a_{\infty 0}(a_{\infty 1} - c),\, a_{00}(a_{01} - c) \sim a_{\infty 0}[a_{\infty 2} - c(a_{\infty 1} - c)],$$

причём относительная погрешность при замене одного числа на другое из одной и той же клетки табл. 1 не превышает 0,0012 для всех четырёх пар чисел.

Таким образом, замена в формуле (7) выражения (8) на более простое выражение (5) вполне допустима, в рассматриваемых нами условиях эта процедура не приводит к большим ошибкам. В результате такой замены приходим к следующей формуле для вычисления времени полного испарения капель воды при указанных выше указанных условиях окружающей среды

$$\theta_{0\infty}(R_0) = t_{01}(R_0) + t_{02}(R_0) + t_{\infty 2}(R_0), \quad (13)$$

где

$$t_{01}(R_0) = \frac{a_{00}}{b} R_0, \quad (14)$$

$$t_{02}(R_0) = \frac{a_{00}(a_{01} - c)}{b} \ln\left|1 + \frac{R_0}{c}\right|, \quad (15)$$

$$t_{\infty 2}(R_0) = \frac{a_{\infty 0}}{2b} R_0^2. \quad (16)$$

Численные значения выражения (13) зависят не только от начального радиуса R_0 испаряющейся капли, но и большого числа учитываемых в рассматриваемом процессе факторов. Легко заметить, что в выражении (13) имеется множитель $b^{-1} = \rho_i \ (Dnm_1\kappa)^{-1}$. Отметим, что учёт скачков концентрации и температуры вблизи поверхности испаряющейся капли может сказываться лишь на величину выражений (14) и (15), а в выражение (16) коэффициенты скачков концентрации и температуры не входят. Учёт кривизны испаряющейся капли и коэффициента поверхностного натяжения может сказываться только на значения выражения (15).

Для оценки вклада каждого из выражений (14) – (16) на время жизни испаряющейся капли $\theta_{0\infty}(R_0)$ в зависимости от её начального радиуса вычислим их значения для капель воды с начальными радиусами: 10^{-8} *м*, 10^{-7} *м*, 10^{-6} *м*, 10^{-5} *м*, 10^{-4} *м*. Выбор таких значений R_0 продиктован тем, чтобы капли воды имели сферическую форму и при этом охватить часто рассматриваемые классы аэрозольных частиц (мелкие частицы, частицы с промежуточными размерами, умеренно крупные частицы, крупные частицы [15]). Полученные при двух различных значениях температуры T_0 окружающей среды 293 *К*, 323 *К* численные значения выражений (14) – (16) и (12) представим в табл. 2 и 3.

Таблица 2 / Table 2

Численные значения выражений (14)–(16) и (12) (в секундах) в зависимости от R_0 при температуре окружающей среды $T_0 = 293$ *К* /
Numerical values of expressions (14)–(16) and (12) (in seconds) depending on R_0 at ambient temperature $T_0 = 293$ *K*

R_0, м	$t_{01}(R_0)$	$t_{02}(R_0)$	$t_{\infty 2}(R_0)$	$\theta_{0\infty}(R_0)$
10^{-8}	$2{,}4479 \cdot 10^{-4}$	$-0{,}8702 \cdot 10^{-4}$	$0{,}7873 \cdot 10^{-6}$	$1{,}5856 \cdot 10^{-4}$
10^{-7}	$2{,}4479 \cdot 10^{-3}$	$-1{,}9425 \cdot 10^{-4}$	$0{,}7873 \cdot 10^{-4}$	$2{,}3323 \cdot 10^{-3}$

R_0, м	$t_{01}(R_0)$	$t_{02}(R_0)$	$t_{\infty 2}(R_0)$	$\theta_{0\infty}(R_0)$
10^{-6}	$2{,}4479 \cdot 10^{-2}$	$-3{,}0928 \cdot 10^{-4}$	$0{,}7873 \cdot 10^{-2}$	$3{,}2043 \cdot 10^{-2}$
10^{-5}	$2{,}4479 \cdot 10^{-1}$	$-4{,}2518 \cdot 10^{-4}$	0,7873	$10{,}3171 \cdot 10^{-1}$
10^{-4}	2,4479	$-5{,}4117 \cdot 10^{-4}$	$0{,}7873 \cdot 10^{2}$	81,1823

Источник: составлено авторами

Таблица 3 / Table 3

Численные значения выражений (14)–(16) и (12) (в секундах) в зависимости от R_0 при температуре окружающей среды $T_0 = 323$ К /
Numerical values of expressions (14)–(16) and (12) (in seconds) depending on R_0 at ambient temperature $T_0 = 323$ K

R_0, м	$t_{01}(R_0)$	$t_{02}(R_0)$	$t_{\infty 2}(R_0)$	$\theta_{0\infty}(R_0)$
10^{-8}	$0{,}8271 \cdot 10^{-4}$	$-0{,}2528 \cdot 10^{-4}$	$0{,}4234 \cdot 10^{-6}$	$0{,}5785 \cdot 10^{-4}$
10^{-7}	$0{,}8271 \cdot 10^{-3}$	$-0{,}5452 \cdot 10^{-4}$	$0{,}4234 \cdot 10^{-4}$	$0{,}8149 \cdot 10^{-3}$
10^{-6}	$0{,}8271 \cdot 10^{-2}$	$-0{,}8559 \cdot 10^{-4}$	$0{,}4234 \cdot 10^{-2}$	$1{,}2419 \cdot 10^{-2}$
10^{-5}	$0{,}8271 \cdot 10^{-1}$	$-1{,}1684 \cdot 10^{-4}$	0,4234	$5{,}0598 \cdot 10^{-1}$
10^{-4}	0,8271	$-1{,}4814 \cdot 10^{-4}$	$0{,}4234 \cdot 10^{2}$	43,1658

Источник: составлено авторами

Обратим внимание на то, что выражение (15) принимает только отрицательные значения, а значения выражений (14) и (16) положительны. Следовательно, выражение (15) служит уменьшению времени жизни испаряющейся капли. Это объясняется тем, что появление выражения (15) связано с учётом кривизны поверхности капли, которая приводит к повышению величины давления насыщенных паров у поверхности капли, тем самым увеличивается скорость испарения капли.

Приведённые в табл. 2 и 3 численные значения выражений $t_{01}(R_0)$ и $t_{\infty 2}(R_0)$ для нестационарного процесса испарения сферических капель воды вполне согласуются с выводами, сделанными авторами работы [3] по полученными ими выражению для вычисления времени жизни капли: «в пределе больших капель наблюдается хорошо известная зависимость времени испарения капли от квадрата радиуса, а в пределе малых капель время испарения линейно зависит от начального радиуса» [3, с. 770]. К этому в рассматриваемом нами случае можно добавить, что выражения (14) и (16) при $R_0 \approx 10^{-6}$ *м* являются величинами одного порядка, а для мелких и крупных капель их порядки могут отличаться почти на две единицы.

Численные значения выражения $t_{02}(R_0)$ этих таблиц дают и количественную характеристику вклада на время жизни капли, вызванного с учётом кривизны её поверхности. При $R_0 \geq 10^{-7}$ *м* $|t_{02}(R_0)|$ является величиной меньшего порядка чем $t_{01}(R_0)$, а при $R_0 \geq 10^{-8}$ *м* они окажутся величинами одного порядка. Следовательно, для мелких капель при вычислении времени их полного испарения важен учёт кривизны поверхности таких капель.

Сравнением соответствующих численных значений табл. 2 и 3 нетрудно оценить влияние температуры окружающей среды на время жизни капли. Сравним сначала соответствующие численные значения выражений (14)–(16). Для окружающей среды с более высокой температурой значения $t_{01}(R_0)$ и $t_{\infty 2}(R_0)$ меньше соответствующих значений в 2,96 и 1,86 раза (независимо от значения R_0). Значения выражения $|t_{02}(R_0)|$ не имеют столь определённый характер изменения. Можно лишь сказать, что они возрастают с увеличением размера рассматриваемых капель и повышение температуры окружающей среды приводит к уменьшению соответствующих его значений.

Отмеченные свойства функций $t_{01}(R_0)$, $t_{\infty 2}(R_0)$, $|t_{02}(R_0)|$ недостаточны для установления характера изменения значений функции $\theta_{0\infty}(R_0)$, особенно, если учесть, что $t_{02}(R_0) < 0$. Естественно, что функция $\theta_{0\infty}(R_0)$ убывает на промежутке $[10^{-8}\ м,\ 10^{-4}\ м]$ и для окружающей среды с более высокой температурой имеет соответствующие меньшие значения.

Интересно отметить, что по полученным в табл. 2 и 3 значениям функции $\theta_{0\infty}(R_0)$ можно обнаружить эффект учёта кривизны поверхности испаряющейся капли. Для этого достаточно изучить характер изменения значений выражения

$$\tau(R_0) = [\theta_{0\infty}(R_0)]_{|T_0=293\,K} / [\theta_{0\infty}(R_0)]_{|T_0=323\,K} \tag{17}$$

в зависимости от R_0. По численным значениям последних столбцов табл. 2 и 3 получаем следующую табл. 4.

Таблица 4 / Table 4

Значения функции (17) (в секундах) в зависимости от начального радиуса R_0./ Function values (17) (in seconds) depending on the initial radius R_0

R_0, м	10^{-8}	10^{-7}	10^{-6}	10^{-5}	10^{-4}
$\tau(R_0)$	2,74	2,86	2,58	2,04	1,88

Источник: составлено авторами

В этой таблице особняком стоит значение, соответствующее начальному радиусу $R_0 = 10^{-8}\ м$, а далее значения $\tau(R_0)$ убывают на промежутке $[10^{-7}\ м,\ 10^{-4}\ м]$. Причина того, что значение функции $\tau(R_0)$ при $R_0 = 10^{-8}\ м$ оказалось меньше её значения при $R_0 = 10^{-7}\ м$, состоит в относительно особом характере возрастающего влияния значений $t_{02}(R_0)$ на время полного испарения более мелких капель.

Перейдём от численного анализа значений составленной в этой статье функции (13), позволяющей вычислять время жизни капель воды, начальный радиус которых находится в диапазоне от $10^{-8}\ м$ до $10^{-4}\ м$, к её графическому изображению. Приведём более развёрнутое выражение этой функции:

$$\theta_{0\infty}(R_0) = b^{-1}\{a_{00}[R_0 - (c - a_{01})\ln|1 + c^{-1}R_0|] + 2^{-1}a_{\infty 0}R_0^2\}. \tag{18}$$

При построении графика функции (18) в целях наглядности используем удобную для изображения полученных численных значений так называемую «логарифмическую бумагу». На осях прямоугольной системы координат (см. рис. 1) будем откладывать $x = lg(R_0 \cdot 10^8)$ (ось абсцисс), y= $lg[\theta_{0\infty}(R_0) \cdot 10^6]$ (ось ординат). На одном и том же рисунке будем строить графики функции (18) при T_0 =293 K и T_0 =323 K. Туда же перенесём график зависимости времени полного испарения водяных капель от начального радиуса, построенный авторами статьи [7], когда испарение происходит в среду 50% влажности при температуре 300 K, коэффициент испарения воды α при этом считается равным 0,04.

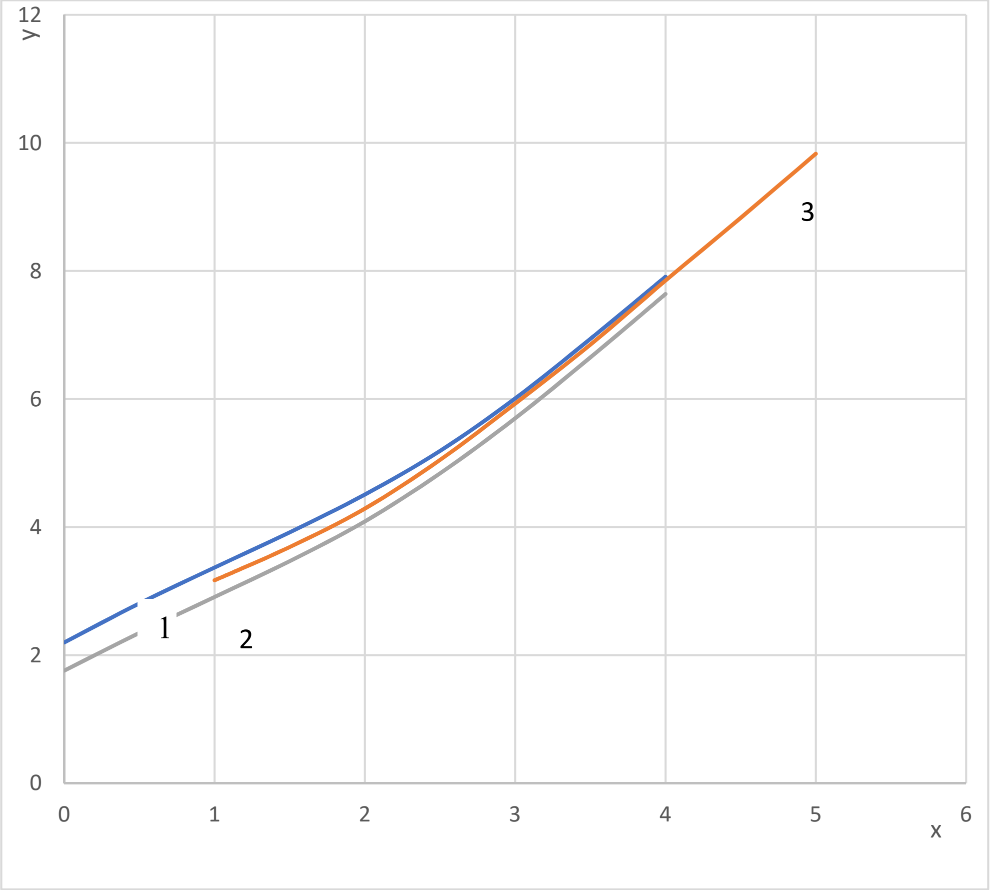


Рис. 1 / Fig. 1. Графики зависимости времени полного испарения капель воды от начального радиуса: 1 – по формуле (18) при $\boldsymbol{T_0 = 293\ K, \alpha = 0,034}$; 2 – по формуле (18) при $\boldsymbol{T_0 = 323\ K, \alpha = 0,026}$; 3 – по формуле, полученной в работе [3] при $\boldsymbol{T_0 = 300\ K, \alpha = 0,04}$ /

Graphs of the dependence of the time of complete evaporation of water drops on the initial radius: 1 - according to formula (18) at T_(0)=293 K,α=0.034; 2 – according to formula (18) at T_(0)=323 K,α=0.026; 3 - according to the formula obtained in [3] at T_(0)=300 K,α=0.04

Источник: составлено авторами

Заключение

Проведённый численный анализ различных выражений при составлении формулы (18) и сходство графиков этой функции с графиком функции, полученной авторами работы [3] для вычисления времени жизни капель, позволяет считать, что предложенная нами формула (18) пригодна для вычисления времени полного испарения неподвижных сферических капель воды, начальные радиусы которых $R_0 \in [10^{-8}\ м,\ 10^{-4}\ м]$ и температура окружающей среды $T_0 \in [293\ K, 323\ K]$.

Статья поступила в редакцию 04.04.2022 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фукс Н. А. Испарение и рост капель в газообразной среде. М.: Издательство АН СССР, 1958. 91 с.
2. Щукин Е. Р., Яламов Ю. И., Шулиманова З. Л. Избранные вопросы физики аэрозолей: учебное пособие. Москва: Московский педагогический университет, 1992. 297 с.
3. Козырев А. В., Ситников А. Г. Испарение сферической капли в газе среднего давления // Успехи физических наук. 2001. Т. 171. № 7. С. 765–774. DOI: 10.3367/UFNr.0171.200107c.0765.
4. Азанов Г. М., Осипцов А. Н. Влияние мелких испаряющихся капель на температуру адиабатической стенки в сжимаемом двухфазном пограничном слое // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2016. № 4. С. 67–76. DOI: 10.7868/S0568528116040034.
5. Прогностическая модель исследования процессов испарения капель воды / Антонов Д. В., Высокоморная О. В., Кузнецов Г. В., Пискунов М. В. // Инженерно-физический журнал. 2019. Т. 92. № 4. С. 936–944.
6. Особенности методики исследования процесса испарения подвешенных капель жидкости / Бочкарева Е. М., Лей М. К., Терехов В. В., Терехов В. И. // Инженерно-физический журнал. 2019. Т. 92. № 5. С. 2208–2217.
7. Высокоморная О. В., Кузнецов Г. В., Стрижак П. А. Прогностическое определение интегральных характеристик испарения капель воды в газовых средах с различной температурой // Инженерно-физический журнал. 2017. Т. 90. № 3. С. 648–657.
8. Герасимов Д. Н., Юрин Е. И. Параметры, определяющие кинетические процессы на поверхности испарения // Теплофизика высоких температур. 2015. Т. 53. № 4. С. 530–537. DOI: 10.7868/S0040364415040110.
9. Кузнецов Г. В., Стрижак П. А. Испарение капель воды при движении через высокотемпературные газы // Инженерно-физический журнал. 2018. Т. 91. № 1. С. 104–111.
10. Экспериментальное и численное исследования нестационарного испарения капель жидкости / Терехов В. И., Терехов В. В., Шишкин Н. Е., Би К. Ч. // Инженерно-физический журнал. 2010. Т. 83. № 5. С. 829–836.
11. Хасанов А. С. Решение задачи об испарении двух капель операторными методами для любых радиусов капель и любых расстояний между ними // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2018. № 2. С. 51–60. DOI: 10.18384-2310-7251-2018-2-51-60.

12. О диффузионном испарении (сублимации) крупной аэрозольной частицы при значительных перепадах температуры в ее окрестности / Щукин Е. Р., Малай Н. В., Шулиманова З. Л., Уварова Л. А. // Теплофизика высоких температур. 2015. Т. 53. № 4. С. 561–568. DOI: 10.7868/S004036441503014X.
13. Корнеева Е. Е., Кузьмин М. К. Начальное и конечное предельные выражения для скорости изменения радиуса нестационарно испаряющейся аэрозольной капли // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2018. № 4. С. 167–177. DOI: 10.18384/2310-7251-2018-4-167-177.
14. Яламов Ю. И., Кузьмин М. К. Скорость нестационарного испарения сферической капли с учетом скачков концентрации и температуры вблизи ее поверхности // Журнал технической физики. 2005. Т. 75. Вып. 3. С. 30–35.
15. Галоян В. С., Яламов Ю. И. Динамика капель в неоднородных вязких средах. Ереван: Луйс, 1985. 208 с.

REFERENCES

1. Fuks N. A. *Isparenie i rost kapel' v gazoobraznoy srede* [Evaporation and growth of drops in a gaseous medium]. Moscow, Academy of Sciences of the USSR Publ., 1958. 91 p.
2. Shchukin E. R., Yalamov Yu. I., Shulimanova Z. L. *Izbrannye voprosy fiziki aerozolei* [Selected Issues of Aerosol Physics]. Moscow, Moscow Pedagogical University Publ., 1992. 297 p.
3. Kozyrev A. V., Sitnikov A. G. [Evaporation of a spherical droplet in a moderate-pressure gas]. In: *Uspekhi fizicheskikh nauk* [Advances in Physical Sciences], 2001, vol. 171, no. 7, pp. 765–774. DOI: 10.3367/UFNr.0171.200107c.0765.
4. Azanov G. M., Osiptsov A. N. [The effect of fine evaporating droplets on the adiabatic-wall temperature in a compressible two-phase boundary layer]. In: *Izvestiya Rossiyskoi akademii nauk. Mekhanika zhidkosti i gaza* [Fluid Dynamics], 2016, no. 4, pp. 67–76. DOI: 10.7868/S0568528116040034.
5. Antonov D. V., Vysokomornaya O. V., Kuznetsov G. V., Piskunov M. V. [Prognosis model for investigating the evaporation of water droplets]. In: *Inzhenerno-fizicheskii zhurnal* [Journal of Engineering Physics and Thermophysics], 2019, vol. 92, no. 4, pp. 936–944.
6. Bochkareva Ye. M., Lei M. K., Terekhov V. V., Terekhov V. I. [Methodological characteristics of an experimental investigation of the process of evaporation of suspended liquid droplets]. In: *Inzhenerno-fizicheskii zhurnal* [Journal of Engineering Physics and Thermophysics], 2019, vol. 92, no. 5, pp. 2208–2217.
7. Vysokomornaya O. V., Kuznetsov G. V., Strizhak P. A. [Predictive determination of the integral characteristics of evaporation of water droplets in gas media with a varying temperature]. In: *Inzhenerno-fizicheskii zhurnal* [Journal of Engineering Physics and Thermophysics], 2017, vol. 90, no. 3, pp. 648–657.
8. Gerasimov D. N., Yurin E. I. [Parameters determining kinetic processes on an evaporation surface]. In: *Teplofizika vysokikh temperature* [High Temperature], 2015, vol. 53, no. 4, pp. 530–537. DOI: 10.7868/S0040364415040110.
9. Kuznetsov G. V., Strizhak P. A. [Evaporation of water droplets moving through high-temperature gases]. In: *Inzhenerno-fizicheskii zhurnal* [Journal of Engineering Physics and Thermophysics], 2018, vol. 91, no. 1, pp. 104–111.
10. Terekhov V. I., Terekhov V. V., Shishkin N. E., Bi K. Ch. [Heat and mass transfer in disperse and porous media experimental and numerical investigations of nonstationary

evaporation of liquid droplets]. In: *Inzhenerno-fizicheskii zhurnal* [Journal of Engineering Physics and Thermophysics], 2010, vol. 83, no. 5, pp. 829–836.
11. Khasanov A. S. [The solution of the evaporation problem of two drops by operator methods for arbitrary radii of drops and arbitrary distances between them]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika* [Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], 2018, no. 2, pp. 51–60. DOI: 10.18384-2310-7251-2018-2-51-60.
12. Shchukin E. R., Malay N. V., Shulimanova Z. L., Uvarova L. A. [Diffuse vaporization (sublimation) of a large aerosol particle under precipitous changes in the ambient temperature]. In: *Teplofizika vysokikh temperature* [High Temperature], 2015, vol. 53, no. 4, pp. 561–568. DOI: 10.7868/S004036441503014X.
13. Korneeva E. E., Kuz′min M. K. [Initial and finite limit expression for the rate of change in the radius of an unsteady evaporating aerosol droplet]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika* [Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], 2018, no. 4, pp. 167–177. DOI: 10.18384/2310-7251-2018-4-167-177.
14. Yalamov Yu. I., Kuz′min M. K. [Rate of unsteady of a spherical drop with regard to concentration and temperature discontinuities at its surface]. In: *Zhurnal tekhnicheskoi fiziki* [Technical Physics], 2005, vol. 75, iss. 3, pp. 30–35.
15. Galoyan V. S., Yalamo Yu. I. *Dinamika kapel′ v neodnorodnykh vyazkikh sredakh* [Dynamics of drops in inhomogeneous viscous media]. Yerevan, Luys Publ., 1985. 208 p.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Кузнецов Михаил Михайлович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической физики Московского государственного областного университета;
e-mail: kuznets-omn@yandex.ru;

Кузьмин Михаил Кузьмич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа и геометрии Московского государственного областного университета;
e-mail: m.kuzmin48@yandex.ru.

Кулешова Юлия Дмитриевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей алгебры, элементарной математики и методики преподавания математики Московского государственного областного университета;
e-mail: juliaybogdanova@mail.ru.

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Mikchail M. Kuznetsov – Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Department of Theoretical Physics, Moscow Region State University;
e-mail: Kuznets-omn@yandex.ru;

Mikhail K. Kuzmin – Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Department of Mathematical Analysis and Geometry, Moscow Region State University;
e-mail: m.kuzmin48@yandex.ru.

Yuliya D. Kuleshova – Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Prof., Department of Higher Algebra, Elementary Mathematics and Methods of Teaching Mathematics, Moscow Region State University;
e-mail: juliaybogdanova@mail.ru.

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Кузнецов М. М., Кузьмин М. К., Кулешова Ю. Д. О формуле, приемлемой для вычисления времени полного испарения как мелких, так и крупных сферических капель воды // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2022. № 2. С. 56–69.
DOI: 10.18384/2310-7251-2022-2-56-69.

FOR CITATION

Kuznetsov M. M., Kuzmin M. K. Kuleshova Y. D. On the formula acceptable for calculating the time of complete evaporation of both small and large spherical water droplets. In*: Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics,* 2022, no. 2, pp. 56–69.
DOI: 10.18384/2310-7251-2022-2-56-69.

ВЕСТНИК МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ОБЛАСТНОГО УНИВЕРСИТЕТА

Рецензируемый научный журнал «Вестник Московского государственного областного университета» основан в 1998 г.

Сегодня Московским государственным областным университетом выпускается десять научных журналов по разным отраслям науки. Журналы включены в Перечень ВАК (составленный Высшей аттестационной комиссией при Минобрнауки РФ Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание учёной степени кандидата наук, на соискание учёной степени доктора наук). Журналы включены в базу данных Российского индекса научного цитирования (РИНЦ).

Печатные версии журналов зарегистрированы в Федеральной службе по надзору за соблюдением законодательства в сфере массовых коммуникаций и охране культурного наследия.

Полнотекстовые версии журналов доступны в интернете на сайте Вестника Московского государственного областного университета (www.vestnik-mgou.ru), а также на платформах Научной электронной библиотеки (www.elibrary.ru) и Научной электронной библиотеки «КиберЛенинка» (https://cyberleninka.ru).

ВЕСТНИК

МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ОБЛАСТНОГО УНИВЕРСИТЕТА

СЕРИЯ: ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА

2022. № 2

Над номером работали:

Литературный редактор М. С. Тарасова

Переводчик И. А. Улиткин

Корректор М. С. Тарасова

Компьютерная вёрстка Д. А. Заботина

Адрес редакции:

105005, г. Москва, ул. Радио, д. 10А, офис 98

тел.: (495) 780-09-42 (доб. 6101)

e-mail: info@vestnik-mgou.ru

сайт: www.vestnik-mgou.ru

Формат 70x108/16. Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура «Minion Pro».

Тираж 500 экз. Усл. п. л. 4,5, уч.-изд. л. 5.

Подписано в печать: 30.06.2022. Дата выхода в свет: 12.07.2022. Заказ № 2022/06-7.

Отпечатано в МГОУ

105005, г. Москва, ул. Радио, 10А