ISSN 2072-8387 (print)
ISSN 2310-7251 (online)

Вестник

Московского государственного областного университета

Серия

Физика-математика

Экспериментальное исследование структуры ударных волн в прессованном порошке из наночастиц никеля

Системы двухатомных полярных молекул в одномерной геометрии оптических и магнито-оптических ловушек

Квантовая электронная плазма и взаимодействие S-волны с металлическим полупространством

2021 / № 4

ВЕСТНИК
МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
ОБЛАСТНОГО УНИВЕРСИТЕТА

ISSN 2072-8387 (print) 2021 / № 4 ISSN 2310-7251 (online)

серия
ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА

Рецензируемый научный журнал. Основан в 1998 г.

Журнал «Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика» включён в «Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание учёной степени кандидата наук, на соискание учёной степени доктора наук» Высшей аттестационной комиссии при Министерстве науки и высшего образования Российской Федерации (См.: Список журналов на сайте ВАК при Минобрнауки России) по следующим научным специальностям: 01.04.02 – Теоретическая физика (физико-математические науки); 01.04.07 – Физика конденсированного состояния (физико-математические науки).

The peer-reviewed journal was founded in 1998

«Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics» is included by the Supreme Certifying Commission of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation into “the List of reviewed academic journals and periodicals recommended for publishing in corresponding series basic research thesis results for a Ph.D. Candidate or Doctorate Degree” (See: the online List of journals at the site of the Supreme Certifying Commission of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation) on the following scientific specialities: 01.04.02 – Theoretical physics (physical-mathematical sciences); 01.04.07 – Physics of the condensed state (physical-mathematical sciences) (See: the online List of journals at the site of the Supreme Certifying Commission of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation).

ISSN 2072-8387 (print) 2021 / № 4 ISSN 2310-7251 (online)

series
PHYSICS AND MATHEMATICS

BULLETIN OF THE MOSCOW REGION
STATE UNIVERSITY

Учредитель журнала
«Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика»
Государственное образовательное учреждение высшего образования Московской области
Московский государственный областной университет
Выходит 4 раза в год

ISSN 2072-8387 (print)
ISSN 2310-7251 (online)

Рецензируемый научный журнал «Вестник московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика» публикует статьи по математическим проблемам термодинамики, кинетики и статистической физики; теории конденсированного состояния классических и квантовых, макроскопических и микроскопических систем; изучению различных состояний вещества и физических явлений в них; статистической физике и кинетической теории равновесных и неравновесных систем; теоретическому и экспериментальному исследованию физических свойств неупорядоченных неорганических систем; изучению экспериментального состояния конденсированных веществ и фазовых переходов в них. Журнал адресован ученым, докторантам, аспирантам и всем, интересующимся достижениями физико-математических наук.

Журнал «Вестник Московского государственного областного университета. Серия «Физика-математика» зарегистрирован в Федеральной службе по надзору за соблюдением законодательства в сфере массовых коммуникаций и охране культурного наследия. Регистрационное свидетельство ПИ № ФС 77-73344.

Индекс серии «Физика-математика» по Объединенному каталогу «Пресса России» 40723

Журнал включён в базу данных Российского индекса научного цитирования (РИНЦ), имеет полнотекстовую сетевую версию в Интернете на платформе Научной электронной библиотеки (www.elibrary.ru), с августа 2017 г. на платформе Научной электронной библиотеки «КиберЛенинка» (https://cyberleninka.ru), а также на сайте Московского государственного областного университета (www.vestnik-mgou.ru).

Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. – 2021. – № 4. – 112 с.

Адрес редакции:
г. Москва, ул. Радио, д.10А, офис 98
тел.: (495) 780-09-42 (доб. 6101)
e-mail: info@vestnik-mgou.ru; сайт: www.vestnik-mgou.ru

Founder of journal
«Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics»
Moscow Region State University

Issued 4 times a year

ISSN 2072-8387 (print)
ISSN 2310-7251 (online)

The reviewed scientific journal “Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics” publishes articles on mathematical problems of thermodynamics, kinetics and statistical physics; the theory of the condensed state of classical and quantum, macroscopic and microscopic systems; the study of various states of substance and physical phenomena in them; statistical physics and the kinetic theory of equilibrium and non-equilibrium systems; theoretical and experimental research of physical features of disordered inorganic systems; the study of the experimental state of condensed substances and phase transitions in them. The journal is addressed to scientists, doctoral students, PhD students and everyone interested in the achievements of physical and mathematical sciences.

The series “Physics and Mathematics” of the Bulletin of the Moscow Region State University is registered in Federal service on supervision of legislation observance in sphere of mass communications and cultural heritage protection. The registration certificate ПИ № ФС 77 – 73344.

Index series «Physics and Mathematics» according to the union catalog «Press of Russia» 40723

The journal is included into the database of the Russian Science Citation Index, has a full text network version on the Internet on the platform of Scientific Electronic Library (www.elibrary.ru), and from August 2017 on the platform of the Scientific Electronic Library “CyberLeninka” (https://cyberleninka.ru), as well as at the site of the Moscow Region State University (www.vestnik-mgou.ru)

Bulletin of the Moscow State Regional University. Series: Physics and Mathematics. – 2021. – № 4. – 112 p.

The Editorial Board address:
10A Radio st., office 98, Moscow, Russia
Phone: (495) 780-09-42 (add. 6101)
e-mail: info@vestnik-mgou.ru; site: www.vestnik-mgou.ru

СОДЕРЖАНИЕ

РАЗДЕЛ I. ФИЗИКА

CONTENTS

SECTION I. PHYSICS

РАЗДЕЛ I.
ФИЗИКА

УДК 52-54
DOI: 10.18384/2310-7251-2021-4-6-21

К ВОПРОСУ О ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ЛИНИЯХ В МЕТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ ШВАРЦШИЛЬДА ПРИ УЧЁТЕ ВНЕШНЕГО НЕ ГРАВИТАЦИОННОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ

Гладков С. О.

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4, Российская Федерация

Аннотация
Цель: показать, что под горизонтом Шварцшильда решение для геодезической линии допускает корневую особенность при достижении радиусом тела критического значения $R_{cr} = \frac{c}{2\sqrt{\pi\rho G}}$. В рамках пространственно-временной метрики Шварцшильда исследовать решение уравнений геодезических линий в сферически симметричном случае при учёте внешних (не гравитационных) сил. Привести аналитическое решение к виду квадратур, как над горизонтом Шварцшильда, так и под ним.
Процедура и методы. Метод исследования основан на анализе решения уравнения геодезической линии при учёте внешних не гравитационных полей.
Результаты. В результате проведённых вычислений показано, что под горизонтом Шварцшильда решение допускает корневую особенность.
Теоретическая и практическая значимость. Полученный в статье результат говорит о том, что при движении пробных тел в сильных гравитационных полях в метрике появляется корневая особенность, физическая природа которой не гравитационная и её происхождение обязано другим физическим полям.
Ключевые слова: геодезическая линия, символы Кристоффеля, метрика Шварцшильда, критический радиус

GEODESIC LINES IN THE SCHWARZSCHILD METRIC SPACE WITH ACCOUNT FOR THE EXTERNAL NON-GRAVITATIONAL EFFECT

S. Gladkov

Moscow Aviation Institute (National Research University)
4 Volokolamskoe shosse, Moscow 125993, Russian Federation

Abstract

Aim: To show that under the Schwarzschild horizon, the solution for the geodetic line allows for a root feature when the radius of the body reaches a critical value $R_{cr} = \dfrac{c}{2\sqrt{\pi\rho G}}$. Within the framework of the space-time Schwarzschild metric, the solution of the equations of geodesic lines in the spherically symmetric case is investigated, taking into account external (non-gravitational) forces.

Methodology. The research method is based on the analysis of the solution of the geodetic equation when taking into account external non-gravitational fields.

Results. As a result of the calculations, it is shown that under the Schwarzschild horizon, the solution allows for a root feature.

Research implications. The result obtained in the article suggests that when the test bodies move in strong gravitational fields, a root feature appears in the metric, the physical nature of which is not gravitational and its origin is due to other physical fields.

Keywords: geodetic line, Christoffel symbols, Schwarzschild metric, critical radius

Введение

Любые вопросы, так или иначе связанные с анализом пространственно-временного поведения тел, как под горизонтом Шварцшильда, так и над ним при условии существования сингулярной особенности пространственной компоненты метрического тензора в настоящее время считаются весьма актуальными.

В этой связи, на наш взгляд, довольно любопытным представляется исследование движения тел по геодезическим пространственно-временным линиям, которого ни в одной из известных нам оригинальных публикаций мы не обнаружили. Оно может быть аналитически строго описано в рамках решений, впервые полученных Шварцшильдом ещё в начале прошлого века [1–3].

Действительно, как мы сейчас в этом убедимся, анализ движения вдоль пространственно-временной геодезической линии поддаётся строго математическому решению, которое позволяет предсказать довольно любопытные особенности перемещений в псевдоортогональных $t - r$ (где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$) координатах. Этот сферически симметричный случай представляет, на наш взгляд, наибольший интерес, поскольку опирается на сингулярное решение Шварцшильда для метрики, впервые найденной им из уравнений Гильберта-Эйнштейна [4; 5].

Как было показано в работе [6] (см. также [7; 8]), сингулярность пространственно-временной метрики вызывает некоторые сомнения. Это связано с тем фактом, что для любых плотностей материи, которыми характеризуются все известные в настоящее время космические тела, в том числе и нейтронные Звёзды, всегда «работает» условие $R \gg r_g$ (в крайнем случае $R > r_g$ для нейтронной Звезды), где $r_g = \dfrac{2MG}{c^2}$ – гравитационный радиус тела, M – масса, R – его радиус, G – гравитационная постоянная, c – скорость света.

Подобная дуальность разных точек зрения говорит лишь о том, что существует некоторая проблема аналитического свойства, характерная для многих задач космологии и теоретической астрофизики, экспериментальная проверка которых чрезвычайно сложна, но позволяет в ряде случаев разрешить научный спор.

Поскольку другого решения, описывающего сингулярность, найденную Шварцшильдом, в настоящее время не существует, то она представляется единственным обоснованием существования чёрной дыры и, как следствие этого, порождает массу задач, касающихся кротовых нор.

Несмотря на приведённые в работе [6] аргументы, указывающие на отсутствие сингулярности в решении Шварцшильда, далее мы будем использовать именно сингулярное решение, как это изложено в [1; 2], а также в [9; 10], поскольку оно имеет одно существенное преимущество, приводящее к точному (а не приближенному) выражению для определителя метрического тензора вида $g = g_{00}g_{11} = -1$, свойственного псевдоевклидовой метрике Минковского. Ещё раз подчеркнём, что это решение мы используем исходя только из соображений удобства, чтобы избежать приближенных выражений типа g ≈ –1 или $\left(1-\dfrac{r_g}{r}\right)\left(1+\dfrac{r_g}{r}\right) \approx 1$. После нахождения окончательного решения, которое получается в результате использования точного решения Шварцшильда, будут учтены приближенные разложения.

Стоит также заметить, что ни в [2], ни в [9] и [10] задача о влиянии на форму геодезической линии внешней сторонней силы (не гравитационной природы) не рассматривалась. Именно поэтому интерес к данной проблеме является вполне актуальным и, на наш взгляд, представляется несомненным. Надо сказать, что тот подход, о котором речь пойдёт ниже, носит в некотором смысле обратный характер по отношению к решению Керра-Ньюмена, под которым мы подразумеваем следующее.

В метрике, обусловленной только гравитационными силами, начинает действовать другая сторонняя сила иной физической природы, не влияющая на метрику, как это приведено в решении Керра-Ньюмена, однако приводящая к естественной деформации пространственно-временной траектории пробной частицы, движущейся по геодезической линии, форма которой уже заранее продиктована гравитацией.

Подобный подход позволит нам понять, к каким качественно новым результатам это может привести и какие выводы будут из этого следовать (см. ниже).

1. Решение под горизонтом Шварцшильда

В том случае, если выполняется неравенство $0 \le r < r_g < R$, формально должна быть решена внутренняя задача математической физики, означающая, что уравнение Пуассона, описывающее квазистатическое гравитационное поле

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho G$$

в случае $0 \le r \le R$ имеет решение:

$$\varphi(r) = 2\pi\rho G\left(R^2 - \frac{r^2}{3}\right). \qquad (1)$$

А потому, компоненты метрического тензора должны определяться формулами (см. [2]):

$$g_{00} = 1 - \frac{2\varphi}{c^2}, \quad g_{11} = 1 + \frac{2\varphi}{c^2} \approx \frac{1}{1 - \frac{2\varphi}{c^2}}.$$

Согласно (1) при $r = 0$ они дают

$$g_{00} = 1 - \frac{3r_g}{2R}, \quad g_{11} = \frac{1}{1 - \frac{3r_g}{2R}} \approx 1 + \frac{3r_g}{2R}. \qquad (2)$$

Отсюда видно, что для абсолютно любой Планеты, в том числе и для нейтронной Звезды, плотность которой составляет около $10^{12}\ \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$, а примерный радиус $R = 10 - 20$ км, всегда выполняется неравенство $r_g \ll R$. То есть, никакой особенности не возникает, и внутри чёрной дыры в квазистатическом приближении всегда следует использовать решения (1) и (2).

2. Метрика Шварцшильда и уравнения геодезических линий

С помощью решения Шварцшильда (см. [1; 2]) в случае «ортогональных» пространственно-временных координат при сферически-симметричном распределении материи метрика записывается в виде:

$$ds^2 = g_{00}c^2dt^2 - g_{11}dr^2 - dl^2, \qquad (3)$$

где c – скорость света, а компоненты метрического тензора при $r \ge R$ есть

$$g_{00} = 1 - \frac{r_g}{r}, \quad g_{11} = \frac{1}{1 - \frac{r_g}{r}} \approx \left(1 + \frac{r_g}{r}\right), \qquad (4)$$

где угловой элемент пространственной длины в сферических координатах определён как

$$dl^2 = r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2. \qquad (5)$$

Далее будет рассмотрен только изотропный случай, когда можно положить $dl = 0$, но подчеркнём, что это делается лишь из соображений большей наглядности последующей интерпретации найденного решения.

В результате из (3) следует, что

$$ds^2 = g_{00}c^2dt^2 - g_{11}dr^2. \qquad (6)$$

Согласно основной идее ОТО движение в пространственно-временном континууме можно описать, как движение по геодезической линии [11; 12] (но только в гравитационном поле, а не в каком-либо другом), согласно уравнению:

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{kl}\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^l}{ds} = 0, \qquad (7)$$

где роль силы играет слагаемое $F^i = -\Gamma^i_{kl}\dfrac{dx^k}{ds}\dfrac{dx^l}{ds}$, в котором символы Кристоффеля второго рода определены стандартным образом, как

$$\Gamma^i_{kl} = \frac{g^{is}}{2}\left(\frac{\partial g_{sk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{sl}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^s}\right), \qquad (8)$$

(g^{ik} – контравариантный метрический тензор). Ковариантный, согласно (6), есть:

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} g_{00} & 0 \\ 0 & -g_{11} \end{pmatrix}. \qquad (9)$$

Следуя решению Шварцшильда в случае метрики (6) для радиальной проекции силы F^r имеем $F^r = -\Gamma^r_{00}\left(\dfrac{dx^0}{ds}\right)^2$ в нерелятивистском приближении. Используя решения (4), можно легко прийти к выражению $F^r = -\dfrac{GM}{r^2}$, что приводит к традиционному уравнению движения в статическом гравитационном поле $\ddot{r} = -\dfrac{GM}{r^2}$, первый интеграл которого представляет собой обычный закон сохранения энергии, как и должно быть.

Поскольку в соответствии с (4) определитель метрического тензора $g = -1$, то контравариантный метрический тензор имеет также простой вид:

$$g^{ik} = \begin{pmatrix} -g_{11} & 0 \\ 0 & g_{00} \end{pmatrix}. \qquad (10)$$

Перепишем метрику (6) в соответствии с алгоритмом, подробно описанным в работах [13; 14], в виде:

$$ds^2 = \left(dx^0\right)^2 - \left(dx^1\right)^2, \qquad (11)$$

где

$$dx^0 = \sqrt{1-\frac{r_g}{r}}cdt, \quad dx^1 = \frac{dr}{\sqrt{1-\frac{r_g}{r}}}. \tag{12}$$

Такой подход позволяет аккуратно, но, главное, соблюдая правильную размерность всех компонент символов Кристоффеля, корректно проводить любые вычисления (см. [13–15]) без введения коэффициентов Ламе.

Очевидно, что отличными от нуля будут только три символа Кристоффеля, которые легко вычислить. При решении внешней задачи, то есть, когда выполняется условие $r \geq R$, согласно (9) – (12) они будут выглядеть следующим образом:

$$\Gamma^0_{01} = \Gamma^0_{10} = \frac{1}{2\sqrt{q}}\frac{r_g}{r^2}, \quad \Gamma^1_{00} = \frac{q\sqrt{q}}{2}\frac{r_g}{r^2}, \quad \Gamma^1_{11} = -\frac{1}{2\sqrt{q}}\frac{r_g}{r^2}, \tag{13}$$

где $q = 1-\frac{r_g}{r}$.

Заметим, что благодаря условию $r_g \ll R$ соотношения (13) всегда можно писать в виде:

$$\Gamma^0_{01} = \Gamma^0_{10} = \Gamma^1_{00} = -\Gamma^1_{11} \approx \frac{r_g}{2r^2}.$$

Поэтому в соответствии с уравнением (7) мы приходим к искомой системе нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих геодезические линии для метрики Шварцшильда:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2t}{ds^2} + \dfrac{1}{q}\dfrac{r_g}{r^2}\dfrac{dt}{ds}\dfrac{dr}{ds} = 0, \\ \dfrac{d^2r}{ds^2} - \dfrac{1}{q}\dfrac{r_g}{r^2}\left(\dfrac{dr}{ds}\right)^2 + \dfrac{q^3}{2}\dfrac{r_g}{r^2}\left(\dfrac{dt}{ds}\right)^2 = 0. \end{cases} \tag{14}$$

Стоит лишний раз подчеркнуть, что в оригинальных источниках и монографиях, посвящённых исследованию вопросов, связанных с кротовыми норами и близкими к этой теме, мы не обнаружили решений, в которых проводился бы анализ уравнений типа (14), описывающих движение по геодезической линии, но с учётом внешних сил, имеющих не гравитационную природу.

В этой связи кажется весьма любопытным тот случай (который сейчас подробно рассмотрим), когда на тело, движущееся по геодезической линии, действует какая-то иная по физической природе сторонняя сила.

Стоит лишний раз отметить, что основным постулатом ОТО является искривление пространственно-временного континуума, обусловленное именно силами сугубо гравитационного происхождения. Все остальные физические поля должны быть учтены в рамках уравнений движения по геодезическим линиям, поскольку влиять на метрику они не должны, если (повторимся) следовать основной идее ОТО.

Например, в работе [8] был предложен другой альтернативный подход, позволяющий вычислять взаимодействия между разными по физической природе полями, чего в рамках ОТО сделать нельзя.

Даже если предположить, что в правую часть уравнения Гильберта-Эйнштейна мы можем аддитивно добавить к материальному тензору энергии – импульса тензор энергии – импульса любого другого физического поля, то это должно привести к парадоксу чисто физического свойства. Действительно, в этом случае (например, в условиях невесомости) метрику должны будут изменять ядерные силы или электромагнитные, что довольно трудно себе представить.

Поскольку целью нашей работы является исследование влияния на движение по геодезической линии какого–либо внешнего (не гравитационного) поля, то с этой целью чисто формально введём в правую часть уравнений (14) некоторую внешнюю силу F^i.

Роль этой силы может играть, например, электромагнитное взаимодействие или «тёмная материя», а ниже будет приведено строгое решение неоднородных уравнений (14) в этом случае.

Заметим, к слову, что в работе [16] была рассмотрена трёхмерная задача (а не четырёхмерная). Поэтому сторонняя сила чисто формально была введена в правую часть уравнения геодезической линии без оговорки её природы. Естественно, что это не противоречит основным постулатам ОТО, поскольку в отличие от пространственно-временного решения, о котором чуть выше говорилось, в трёхмерном случае [16] компонента символа Кристоффеля Γ^r_{00} не фигурирует (она тождественно равна нулю).

3. Движение под действием сторонней силы (случай $r \geq R$)

В свете всего вышесказанного проанализируем уравнение (7) (или (14)) с учётом стороннего воздействия, которое в качестве примера мы определим в виде кулоновской силы F_i. В результате имеем (ср., с работой [16]):

$$mg_{in}\left(\frac{d^2x^n}{ds^2}+\Gamma^n_{kl}\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^l}{ds}\right)=\frac{F_i}{c^2}, \tag{15}$$

где m – масса движущегося тела.

В результате уравнения (14) приводятся к уравнениям вида:

$$\begin{cases} mg_{00}\left(\dfrac{d^2t}{ds^2}+\dfrac{1}{q}\dfrac{r_g}{r^2}\dfrac{dt}{ds}\dfrac{dr}{ds}\right)=\dfrac{F_0}{c^2}, \\ mg_{11}\left[\dfrac{d^2r}{ds^2}-\dfrac{1}{q}\dfrac{r_g}{r^2}\left(\dfrac{dr}{ds}\right)^2+\dfrac{q^3}{2}\dfrac{r_g}{r^2}\left(\dfrac{dt}{ds}\right)^2\right]=\dfrac{F_1}{c^2}. \end{cases} \tag{16}$$

Согласно определению

$$F_i = -\frac{\partial U}{\partial x^i}, \qquad (17)$$

где U – потенциальная энергия взаимодействия.

Поскольку U от времени не зависит, то можно считать, что $F_0 = 0$, а вот проекция силы $F_1 = F_r = -\sqrt{q}\,\frac{\partial U}{\partial r}$ нулю не равна.

Поскольку в рассматриваемом случае $U = \frac{Q_1 Q_2}{r}$, то вместо уравнений (16) при $r \geq R$, получаем:

$$\begin{cases} t'' + \dfrac{r_g}{qr^2} t' r' = 0, \\ r'' - \dfrac{r_g}{qr^2} r'^2 + \dfrac{q^3}{2}\dfrac{r_g}{r^2} t'^2 = q^2 \dfrac{Q_1 Q_2}{mc^2 r^2}, \end{cases} \qquad (18)$$

где «штрихи» указывают на дифференцирование по параметру s.

Как видно из уравнений (18), они поддаются анализу в общем виде. В самом деле, из верхнего уравнения следует, что:

$$\frac{t''}{t'} = -\frac{r_g r'}{qr^2}.$$

Интегрируя его, находим

$$t' = \frac{C_1}{cq}, \qquad (19)$$

где C_1 – положительная константа интегрирования, и из соображений удобства явно введена скорость света.

Подставляя (19) в нижнее уравнение системы (18), будем в результате иметь

$$r'' - \frac{r_g}{qr^2} r'^2 = \frac{bq}{2r^2}\left(q - \frac{C_1^2}{\lambda}\right), \qquad (20)$$

где безразмерный параметр $\lambda = \frac{b}{r_g}$, а параметр длины определён, как $b = \frac{2Q_1 Q_2}{mc^2}$.

Уравнение (20) сводится к линейному дифференциальному уравнению с помощью подстановки $r' = u,\quad r'' = \frac{du}{dr}u.$ Вводя далее новую функцию

$$y = u^2 \qquad (21)$$

и новый безразмерный аргумент $x = \frac{r}{r_g}$, получаем:

$$y' - \frac{2y}{x(x-1)} = \frac{b}{2x^2}\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{C_1^2}{\lambda}-\frac{1}{x}\right). \qquad (22)$$

Уравнение (22) легко решается методом вариации постоянных, что в результате простых преобразований приводит нас к следующему окончательному решению:

$$y = \frac{C_2 x e^{-\frac{1}{x}}}{2|1-x|} + \frac{bx}{2|1-x|}\left[\frac{5C_1^2}{\lambda} - 16 - \frac{2}{x}\left(\frac{2C_1^2}{\lambda}-3\right) + \frac{1}{x^2}\left(\frac{C_1^2}{\lambda}-6\right) + \frac{1}{x^3}\right], \qquad (23)$$

где C_2 – положительная константа интегрирования, а множитель «2» в знаменателе введён ради удобства.

Таким образом, с учётом решения (19) и подстановки (21), а также предшествующих ей, находим следующую систему параметрических уравнений:

$$\begin{cases} r' = \pm\sqrt{\dfrac{C_2 x e^{-\frac{1}{x}}}{|1-x|} + \dfrac{bx}{2|1-x|}\left[\dfrac{5C_1^2}{\lambda} - 16 - \dfrac{2}{x}\left(\dfrac{2C_1^2}{\lambda}-3\right) + \dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{C_1^2}{\lambda}-6\right) + \dfrac{1}{x^3}\right]}, \\ t' = \dfrac{C_1 x}{c(x-1)}. \end{cases} \qquad (24)$$

После деления нижнего уравнения на верхнее будем иметь:

$$t = C_1\frac{r_g}{c}\int \frac{\sqrt{2x}dx}{\sqrt{|x-1|}\sqrt{C_2 e^{-\frac{1}{x}} + b\left[\frac{5C_1^2}{\lambda} - 16 - \frac{2}{x}\left(\frac{2C_1^2}{\lambda}-3\right) + \frac{1}{x^2}\left(\frac{C_1^2}{\lambda}-6\right) + \frac{1}{x^3}\right]}} + C_3, \qquad (25)$$

где C_3 – ещё одна константа интегрирования.

Поскольку в реальности всегда выполняется условие $R \gg r_g$, то есть $x \gg 1$, то точное решение (25) в случае $r \geq R$ можно представить в виде линейной зависимости:

$$c(t-t_0) \approx Ar, \qquad (26)$$

где $A = \dfrac{\sqrt{2}C_1}{\sqrt{5C_1^2 + \lambda C_2}}$, $t_0 = C_3$ – некоторый момент времени.

Если, скажем, C_1 мало, а C_2 любое, то $A \ll 1$. А если $C_1 \to \infty$, то для любого C_2 $A = \sqrt{\dfrac{2}{5}}$. Таким образом, константа A должна принадлежать сегменту

$$0 \leq A \leq \sqrt{\frac{2}{5}}.$$

Если $A = 0$, то для любого расстояния r время будет «заморожено».

Из найденных решений геодезических уравнений мы показали, что $A < 1$. Такая особенность указывает на возможное возникновение довольно любопытной ситуации, когда объект, казалось бы, может двигаться со скоростью, превышающей скорость света в пустоте. Действительно, как видно из (26), $v = \dfrac{c}{A} > c$.

То есть по геодезической линии, как будто, возможно передвижение со сверхсветовой скоростью. Однако с точки зрения физики это означает, что в пренебрежении силой гравитации тело приобретает сверхсветовую скорость просто из ниоткуда. На наш взгляд разумным объяснением этого парадокса вполне может служить введение в рассмотрение гипотетической «тёмной материи», которая неявно присутствует в уравнениях (15) наряду с кулоновской силой, и выполняет роль тормозящего фактора, благодаря которому скорость тела не будет выходить за рамки условия $v > c$.

4. Анализ решения в случае $0 \le r \le R$

Подчеркнём, что решение (25) справедливо, если $r \ge R$. При выполнении противоположного неравенства $r \le R$ следует иметь в виду решение (1), которое приведёт нас к качественно другой зависимости.

Действительно, для решения (1), если расстояния удовлетворяют условию $0 \le r \le R$, метрика должна быть такой:

$$ds^2 = g_{00}c^2dt^2 - g_{11}dr^2 - dl^2, \tag{27}$$

где, теперь уже в отличие от известных решений (3), (4), имеем:

$$g_{00} = 1 - \frac{2\varphi}{c^2} = 1 - \frac{4\pi\rho G}{c^2}\left(R^2 - \frac{r^2}{3}\right), \quad g_{11} = -\frac{1}{1 - \dfrac{4\pi\rho G}{c^2}\left(R^2 - \dfrac{r^2}{3}\right)} \tag{28}$$

($g = -1$). Следуя опять-таки алгоритму работы [13], введём дифференциалы

$$dx^0 = cpdt, \quad dx^1 = \frac{dr}{p}, \tag{29}$$

где функциональный параметр $p = \sqrt{1 - \dfrac{4\pi\rho G}{c^2}\left(R^2 - \dfrac{r^2}{3}\right)}$.

То есть вместо (27) имеем:

$$ds^2 = \left(dx^0\right)^2 - \left(dx^1\right)^2, \tag{30}$$

где dx^0 и dx^1 определены в (29).

Поскольку электрический потенциал внутри области $0 \le r \le R$ постоянен, то, согласно определению (17), находим, что

$$F_0 = 0, \quad F_r = 0, \tag{31}$$

В результате из уравнений (15) следует тогда два таких уравнения:

$$\begin{cases} pt'' + \dfrac{dp}{dr} r't' + \Gamma^0_{01} t'r' = 0, \\ pr'' + \dfrac{dp}{dr} r'^2 + \Gamma^1_{00} t'^2 + \Gamma^1_{11} r'^2 = 0, \end{cases} \tag{32}$$

где отличные от нуля символы Кристоффеля благодаря их чисто гравитационному происхождению в соответствии с формулами (28) и (29) таковы:

$$\begin{cases} \Gamma^0_{01} = \dfrac{g^{00}}{2} \dfrac{\partial g_{00}}{\partial x^1} = -\dfrac{g_{11}}{2} \dfrac{\partial g_{00}}{\partial x^1} = \dfrac{1}{2p^2} \dfrac{\partial}{\partial x^1} p^2 = \dfrac{\partial p}{\partial r} = \dfrac{4\pi\rho G r}{3pc^2}, \\ \Gamma^1_{00} = -\dfrac{g^{11}}{2} \dfrac{\partial g_{00}}{\partial x^1} = \dfrac{g_{00}}{2} \dfrac{\partial g_{00}}{\partial x^1} = \dfrac{p^2}{2} \dfrac{\partial}{\partial x^1} p^2 = p^3 \dfrac{4\pi\rho G r}{3c^2}, \\ \Gamma^1_{11} = \dfrac{g^{11}}{2} \dfrac{\partial g_{11}}{\partial x^1} = -\dfrac{g_{00}}{2} \dfrac{\partial g_{11}}{\partial x^1} = \dfrac{p^2}{2} \dfrac{\partial}{\partial x^1} \left(\dfrac{1}{p^2} \right) = -\dfrac{4\pi\rho G r}{3pc^2}. \end{cases} \tag{33}$$

Заметим, кстати, что выражений вида (33) мы ни в одном из упомянутых литературных источников не обнаружили.

С помощью этих выражений уравнения (32) приобретут в результате довольно простой и компактный вид:

$$\begin{cases} t'' + \dfrac{8\pi\rho G r}{3p^2c^2} r't' = 0, \\ r'' + p^2 \dfrac{4\pi\rho G r}{3} t'^2 = 0. \end{cases} \tag{34}$$

Элементарное интегрирование верхнего уравнения приводит к такой зависимости:

$$t' = \frac{C_6}{cp}, \tag{35}$$

где C_6 – безразмерная положительная константа интегрирования.

Подставляя (35) в нижнее уравнение системы (34), находим:

$$r'' - \kappa^2 r = 0, \tag{36}$$

где $\kappa^2 = \dfrac{4\pi C_6^2}{3c^2} \rho G.$

Решение уравнения (36) очевидно

$$r = C_7 e^{\kappa s} + C_8 e^{-\kappa s}, \tag{37}$$

где C_7, C_8 – константы интегрирования.

Следовательно, $r' = \kappa\left(C_7 e^{\kappa s} - C_8 e^{-\kappa s}\right).$ Полагая здесь $p \approx 1$, $C_6 = 1$ то есть $s \approx ct$, согласно (35) приходим к следующей зависимости, которая не приводится ни в [2], и ни в [9; 10]:

$$r = C_7 e^{\kappa ct} + C_8 e^{-\kappa ct}. \tag{38}$$

Зависимость (38) описывает свободную геодезическую линию под горизонтом Шварцшильда.

5. Анализ решений (25) и (38)

Проанализируем теперь найденные решения вблизи гравитационного радиуса, то есть предположим, что $r = r_g + \varepsilon$, где $\varepsilon \ll r_g$. Тогда общее решение (25) сводится к такому:

$$c\left(t-t_0\right) = C_1 r_g \int \frac{\sqrt{2x}dx}{\sqrt{|x-1|}\sqrt{C_2 e^{-\frac{1}{x}} + \left[5C_1^2 - 16 - \frac{2}{x}\left(2C_1^2-3\right) + \frac{1}{x^2}\left(C_1^2-6\right) + \frac{1}{x^3}\right]}} \approx$$

$$\approx \frac{C_1\sqrt{2}}{\sqrt{C_2 e^{-1} + 2\frac{C_1^2}{\lambda} - 15}} r_g \int \frac{dx}{\sqrt{|x-1|}} = \frac{2C_1\sqrt{2}}{\sqrt{C_2 e^{-1} + \frac{2C_1^2}{\lambda} - 15}} r_g \sqrt{|x-1|}.$$

Откуда

$$c\left(t-t_0\right) = 2B\sqrt{r_g\left|r-r_g\right|}. \tag{39}$$

где постоянная $B = \dfrac{C_1\sqrt{2}}{\sqrt{C_2 e^{-1} + \frac{2C_1^2}{\lambda} - 15}}$.

Если подставить (39) в выражение для пространственно-временного интервала (11), то получим:

$$ds^2 = \left(dx^0\right)^2 - \left(dx^1\right)^2 = B^2 \frac{r_g}{r}\frac{dr^2}{1-\frac{r_g}{r}} - \frac{dr^2}{1-\frac{r_g}{r}} = \left(B^2\frac{r_g}{r} - 1\right)\frac{dr^2}{1-\frac{r_g}{r}} > 0.$$

В результате немедленно приходим к неравенству:

$$r_g < r < B^2 r_g, \tag{40}$$

из которого следует такое соотношение:

$$\frac{C_1\sqrt{2}}{\sqrt{C_2 e^{-1} + \frac{2C_1^2}{\lambda} - 15}} > 1.$$

И, следовательно,

$$0 < C_2 < e\left(15 + 2C_1^2\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)\right). \tag{41}$$

Что касается решения (39), то его легко проанализировать благодаря условию $\frac{4\pi\rho G r^2}{3c^2} \ll 1$.

В результате имеем:

$$t \approx \bar{t}_0 \pm \frac{C_6}{c\sqrt{C_7}} \int \frac{dr}{p^2} = \bar{t}_0 \pm \frac{C_6 r}{c\sqrt{C_7\left(1 - \frac{4\pi\rho G R^2}{c^2}\right)}}. \tag{42}$$

Как следует из (42), найденное решение имеет сингулярность, но не типа сингулярности Шварцшильда, а корневую.

Действительно, если радиус тела приближается к значению:

$$R = R_{cr} = \frac{c}{2\sqrt{\pi\rho G}}, \tag{43}$$

то происходит разрыв пространственно-временного континуума, то есть при любых значениях r время раздваивается и уходит на $\pm$ бесконечность.

Если плотность материи составляет $\rho = 10\,\frac{\text{г}}{\text{см}^3}$, то численное значение, когда это возможно, соответствует очень большому объекту с радиусом $R_{cr} \approx 3 \cdot 10^{13}$ см. При этом масса тела будет составлять примерно

$$M_{cr} = \frac{c^3}{6G\sqrt{\pi\rho G}} \approx 10^8\, M_\Theta. \tag{44}$$

Полученная оценка указывает нам на ту массу чёрной дыры, когда происходит разрыв времени под горизонтом Шварцшильда. В случае нейтронной Звезды оценка (44) приводит к значению $M_{cr} \approx M_\Theta$, но с плотностью $\rho = 10^{12}\,\frac{\text{г}}{\text{см}^3}$. То есть согласно закону $M_{cr}\sqrt{\rho} = \text{const}$.

Как видно из общего выражения (39), существует и ещё одно более общее решение. В самом деле,

$$t \approx \bar{t}_0 \pm \frac{C_6}{c\sqrt{C_7}} \int \frac{dr}{p^2} = \bar{t}_0 \pm \frac{C_6}{\sqrt{C_7}} \frac{3c}{4\pi\rho G a} \begin{cases} arctg\,\frac{r}{a} \\ -arctg\,\frac{a}{r} \end{cases}, \tag{45}$$

где параметр «фазовой длины»

$$a = \frac{c\sqrt{3}}{2\sqrt{\pi\rho G}} \sqrt{1 - \frac{R^2}{R_{cr}^2}}. \tag{46}$$

Отсюда следует простой вывод. Если мы находимся на больших расстояниях от чёрной дыры, то время ведёт себя в соответствии с законом (42).

Если же мы находимся внутри чёрной дыры, то при $R \to R_{cr}$, и при любых r время ведёт себя как $t = \overline{t}_0 \pm \frac{C_6}{\sqrt{C_7}} \frac{3cr}{4\pi\rho G a^2} \to \pm\infty$, то есть может вести себя как временной туннель. Подобное течение времени внутри чёрной дыры представляется нам вполне разумным, поскольку не противоречит основным постулатам ОТО.

Заключение

Заканчивая настоящее сообщение, стоит обратить внимание на ряд важных моментов.

1. Найдены решения уравнений геодезической линии в сферически-симметричном случае, как под горизонтом Шварцшильда, так и над ним при учёте влияния на пространственно-временную траекторию внешней (не гравитационной) силы.
2. Получены общие решения задачи в квадратурах согласно (25) и (39).
3. Приведена численная оценка аналитически найденного значения критического радиуса массивного тела, при достижении которого тело будет работать как переключатель из прошлого в будущее, что неминуемо должно приводить к разрыву всего того, что попадает внутрь.
4. Показано, что внутри чёрной дыры течение времени имеет точку бифуркации и может уходить как в «прошлое» на –∞, так и в будущее – на +∞.

Статья поступила в редакцию 11.10.2021 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Schwarzschild K. Ьber das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einstein’schen Theorie // Sitzungsberichte der Kцniglich Preussischen Akademie der Wissenschaften. 1916. No. 1. S. 189–196.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. Т. 2. М.: Наука, 1988. 512 с.
3. Гинзбург В. Л. Теоретическая физика и астрофизика. Дополнительные главы. М.: URSS, 2020. 488 с.
4. Логунов А. А., Местверишвили М. А. Релятивистская теория гравитации // Теоретическая и математическая физика. 1984. Т. 61. № 3. С. 327–346.
5. Логунов А. А., Местверишвили М. А., Петров В. А. Как были открыты уравнения Гильберта–Эйнштейна. Протвино: Препринт Института физики высоких энергий, 2004. 24 с.
6. Логунов А. А., Местверишвили М. А. Невозможность гравитационного коллапса // Теоретическая и математическая физика. 2013. Т. 174. № 2. С. 292–302. DOI: 10.4213/tmf8347.
7. Гладков С. О. К вопросу о линеаризации основного уравнения ОТО // Инженерная физика. 2017. № 10. С. 19–27.
8. Gladkov S. O. To the question of a common field theory // Journal of Physics: Conference series. 2018. Vol. 1051: XX International Meeting “Physical Interpretations of Relativity Theory 2017” (3–6 July 2017, Moscow, Russian Federation). P. 012029. DOI: 10.1088/1742-6596/1051/1/012029.

9. Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. Гравитация. Т. 2 / пер. с англ. М.: Мир, 1977. 525 с.
10. Новиков И. Д., Фролов В. П., Физика черных дыр. М.: Наука, 1986. 328 с.
11. McConnell A. J. Application of Tensor Analysis. New York: Dover Publications, Inc, 1957. 411 p.
12. Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука. 1967. 664 с.
13. Гладков С. О. Об альтернативном вычислении ковариантных производных с приложением к проблемам механики, физики и геометрии // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2019. № 1. С. 16–45. DOI: 10.18384/2310-7251-2019-1-16-45.
14. Гладков С. О. К вопросу приложения второй ковариантной производной от векторной функции к задачам гидродинамики и теории упругости // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2019. № 3. С. 42–67. DOI: 10.18384/2310-7251-2019-3-42-67.
15. Gladkov S. O. About one method of calculation in the arbitrary curvilinear basis of the Laplace operator and curl from the vector function // Applied Mathematics and Nonlinear Sciences. 2021. Vol. 7. No. 2. P. 1–9. DOI: https://doi.org/10.2478/amns.2021.2.00002.
16. Гладков С. О., Богданова С. Б. О классе двухмерных геодезических кривых в поле силы тяжести // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2019. № 58. С. 5–13. DOI: 10.17223/19988621/58/1.

REFERENCES

1. Schwarzschild K. Ьber das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einstein'schen Theorie. In: *Sitzungsberichte der Kцniglich Preussischen Akademie der Wissenschaften*, 1916, no. 1, S. 189–196.
2. Landau L. D., Lifshits E. M. *Teoriya polya. T. 2* [Field theory. Vol. 2]. Moscow, Nauka Publ., 1988. 512 p.
3. Ginzburg V. L. *Teoreticheskaya fizika i astrofizika. Dopolnitel'nye glavy* [Theoretical physics and astrophysics. Additional chapters]. Moscow, URSS Publ., 2020. 488 p.
4. Logunov A. A., Mestverishvili M. A. [Relativistic theory of gravitation]. In: *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika* [Theoretical and Mathematical Physics], 1984, vol. 61, no. 3, pp. 327–346.
5. Logunov A. A., Mestverishvili M. A., Petrov V. A. *Kak byli otkryty uravneniya Gil'berta–Einshteina* [How the Hilbert – Einstein equations were discovered]. Protvino, Preprint of the Institute of High Energy Physics Publ., 2004. 24 p.
6. Logunov A. A., Mestverishvili M. A. [Impossibility of gravitational collapse]. In: *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika* [Theoretical and Mathematical Physics], 2013, vol. 174, no. 2, pp. 292–302. DOI: 10.4213/tmf8347.
7. Gladkov S. O. [To the question of linearization basic equation of RTG]. In: *Inzhenernaya fizika* [Engineering Physics], 2017, no. 10, pp. 19–27.
8. Gladkov S. O. To the question of a common field theory. In: *Journal of Physics: Conference series*, 2018, Vol. 1051: XX International Meeting "Physical Interpretations of Relativity Theory 2017" (3–6 July 2017, Moscow, Russian Federation), pp. 012029. DOI: 10.1088/1742-6596/1051/1/012029.
9. Misner Ch., Thorne K. Wheeler J. *Gravitatsiya. T. 2* [Gravitation]. Moscow, Mir Publ., 1977. 525 p.
10. Novikov I. D., Frolov V. P. *Fizika chernykh dyr* [Physics of black holes]. Moscow, Nauka Publ., 1986. 328 p.
11. McConnell A. J. Application of Tensor Analysis. New York, Dover Publications, Inc, 1957. 411 p.

12. Rashevskii P. K. *Rimanova geometriya i tenzornyi analiz* [Riemannian geometry and tensor analysis]. Moscow, Nauka Publ., 1967. 664 p.
13. Gladkov S. O. [Alternative calculation of covariant derivatives with an application to the problems of mechanics, physics and geometry]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-Matematika* [Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics-Mathematics], 2019, no. 1, pp. 16–45. DOI: 10.18384/2310-7251-2019-1-16-45.
14. Gladkov S. O. [Application of the second covariant derivative from the vector function to the problems of hydrodynamics and elasticity theory]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-Matematika* [Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics-Mathematics], 2019, no. 3, pp. 42–67. DOI: 10.18384/2310-7251-2019-3-42-67.
15. Gladkov S. O. About one method of calculation in the arbitrary curvilinear basis of the Laplace operator and curl from the vector function. In: *Applied Mathematics and Nonlinear Sciences*, 2021, vol. 7, no. 2, pp. 1–9. DOI: https://doi.org/10.2478/amns.2021.2.00002.
16. Gladkov S. O., Bogdanova S. B. [On the class of two-dimensional geodesic curves in the field of the gravity force]. In: *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University. Journal of Mathematics and Mechanics], 2019, no. 58, pp. 5–13. DOI: 10.17223/19988621/58/1.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Гладков Сергей Октябринович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры № 311 «Прикладные программные средства и математические методы» Московского авиационного института (национального исследовательского университета);
e-mail: sglad51@mail.ru;

INFORMATIONS ABOUT THE AUTHOR

Sergey O. Gladkov – Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Department No. 311 “Applied software and mathematical methods”, Moscow Aviation Institute (National Research University);
e-mail: sglad51@mail.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Гладков С. О. К вопросу о геодезических линиях в метрическом пространстве Шварцшильда при учёте внешнего не гравитационного воздействия // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2021. № 4. С. 6–21.
DOI: 10.18384/2310-7251-2021-4-6-21

FOR CITATION

Gladkov S. O. Geodesic lines in the Schwarzschild metric space with account for the external non-gravitational effect. In: *Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics-Mathematics*, 2021, no. 4, pp. 6-21.
DOI: 10.18384/2310-7251-2021-4-6-21

УДК 541.182.022:532.135
DOI: 10.18384/2310-7251-2021-4-22-31

НЕНЬЮТОНОВСКОЕ ТЕЧЕНИЕ ЛИОТРОПНОГО ЖИДКОКРИСТАЛЛИЧЕСКОГО ПОЛИМЕРА

Вековищев М. П., Кирсанов Е. А.

Государственный социально-гуманитарный университет
140411, Московская обл., г. Коломна, ул. Зелёная, д. 30, Российская Федерация

Аннотация

Цель: рассмотреть реологическое поведение раствора жесткоцепного полимера, который образует при высоких концентрациях лиотропный нематический кристалл.

Процедура и методы. Проведена аппроксимация экспериментальных данных неньютоновского течения на отдельных интервалах скорости сдвига.

Результаты. Представлены уравнения структурной реологической модели, которые связывают реологические свойства со структурой полимерного раствора.

Теоретическая и/или практическая значимость. Предложены уравнения, которые способны аппроксимировать экспериментальные данные на отдельных интервалах скорости сдвига, соответствующих определённому структурному состоянию полимерного раствора.

Ключевые слова: раствор жесткоцепного полимера, структурная реологическая модель, коэффициенты сдвиговой вязкости, обобщённое уравнение течения, реологические кривые

NON-NEWTONIAN FLOW OF A LYOTROPIC LIQUID CRYSTAL POLYMER

M. Vekovishchev, E. Kirsanov

State University of Humanities and Social Studies
30 ulitsa Zelyonaya, Kolomna 14041, Moscow region, Russian Federation

Abstract

Aim. We consider the rheological behavior of a rigid-chain polymer solution, which forms a lyotropic nematic crystal at high concentrations.

Methodology. An approximation of the experimental data of the non-Newtonian flow is carried out on separate intervals of the shear rate.

Results. We present the equations of the structural rheological model that relate rheological properties to the structure of the polymer solution.

Research implications. Equations are proposed that can approximate the experimental data on separate intervals of the shear rate corresponding to a certain structural state of the polymer solution.

Keywords: rigid-chain polymer solution, structural rheological model, shear viscosity coefficients, generalized flow equation, rheological curves

Введение

Жесткоцепные полимеры в растворах при достаточно высоких концентрациях образуют лиотропные жидкие кристаллы. Стержнеобразные макромолекулы ориентируются параллельно друг другу, образуя анизотропную фазу с характерным двулучепреломлением. Способность жесткоцепных полимеров к ориентации в процессе течения используется в технологических процессах получения высокопрочных полимерных волокон. Реологическое поведение подобных систем имеет характерные особенности. Вязкость жидкости увеличивается с ростом концентрации С полимера в изотропной фазе вплоть до образования двухфазного раствора, а затем начинает уменьшаться с переходом системы в жидкокристаллическую фазу. При заданной концентрации с увеличением скорости сдвига $\dot{\gamma}$ сдвиговая вязкость η уменьшается, при одновременном увеличении напряжения сдвига τ [1].

Реологические характеристики некоторых систем с жесткоцепными полимерами описаны в книге [1] и в обзоре [2]. Реологические кривые для жидкокристаллических систем приведены в публикациях [3; 4], но без использования каких-либо реологических уравнений.

Согласно гипотезе Оноги и Осада в нематической фазе кривую зависимости $\eta(\dot{\gamma})$ можно разделить на три части: сдвиговое разжижение (уменьшение вязкости) на участках I и III на интервалах низких и высоких скоростей, ньютоновское течение с постоянной вязкостью на участке II средних скоростей сдвига. Предполагается, что в образце лиотропного кристалла имеется множество областей-доменов, где макромолекулы расположены параллельно в одном направлении. С увеличением скорости размеры доменов уменьшаются, макромолекулы всё более ориентируются в направлении течения, что приводит к уменьшению вязкости.

Эти вопросы также рассмотрены в монографии [5], где реология жидкокристаллических систем описывается в рамках структурной реологической модели, а кривые течения описываются с помощью обобщённого уравнения течения. Более подробно структурная реологическая модель представлена в монографии [6].

В этой статье с точки зрения структурного подхода рассмотрено реологическое поведение раствора полимера поли(1,4-фенилен-2,6-бензобистиазол), сокращённо PBZT, в метансульфоновой кислоте, сокращённо MSA. Экспериментальные зависимости вязкости от скорости сдвига раствора PBZT приведены в книге [7].

Уравнения структурной реологической модели для стационарного течения

В рамках структурной реологической модели [6] величина вязкости полностью определяется состоянием структуры текущего вещества. В случае суспензий твёрдых частиц будем понимать под структурой совокупность индивидуальных частиц и агрегатов частиц, которые некоторое время могут двигаться как единое целое в сдвиговом течении. Разрушение таких агрегатов приводит к уменьшению вязкости структурированной системы.

Расплавы и растворы полимеров можно считать структурированными системами или структурированными жидкостями, поскольку зацепления между макромолекулами образуют ассоциаты макромолекул, способные некоторое время двигаться как единое целое. Разрыв контактов и разрушение агрегатов можно сопоставить с разрывом зацеплений между соседними макромолекулами.

Аппроксимацию экспериментальных результатов для структурированных систем можно осуществить с помощью уравнений структурной реологической модели [6].

В случае стационарного сдвигового течения на участке сдвигового разжижения используется обобщённое уравнение течения:

$$\tau^{1/2} = \frac{\tau_c^{\ 1/2}\dot{\gamma}^{1/2}}{\dot{\gamma}^{1/2}+\chi} + \eta_c^{\ 1/2}\dot{\gamma}^{1/2}. \qquad (1)$$

Первое слагаемое относится к потерям энергии вязкого течения при движении агрегатов частиц или ассоциатов макромолекул, т. е. групп макромолекул, связанных зацеплениями. Второе слагаемое описывает потери энергии при движении отдельных частиц или макромолекул, не связанных зацеплениями.

Коэффициент χ указывает на тенденцию к образованию бесконечно большого объединения частиц или макромолекул (сплошная сетка контактов или зацеплений) при $\dot{\gamma} \to 0$. Значение коэффициента χ определяет пластичное ($\chi = 0$) или псевдопластичное ($\chi > 0$) поведение структурированной системы. Коэффициент агрегации $\tau_c^{1/2}$ характеризует величину агрегации частиц (или степень прочности контактов). Коэффициент вязкости Кэссона η_c равен вязкости дисперсной или полимерной системы при полном отсутствии контактов или зацеплений, т. е. вязкий раствор рассматривается как обычная ньютоновская жидкость.

Сдвиговая вязкость описывается уравнением:

$$\eta^{1/2} = \frac{\tau_c^{1/2}}{\dot{\gamma}^{1/2}+\chi} + \eta_c^{1/2}. \qquad (2)$$

Если $\dot{\gamma} \to 0,\ \ \eta^{1/2} \to \eta^{1/2}(0)$ и $\eta^{1/2}(0) = \dfrac{\tau_c^{1/2}}{\chi} + \eta_c^{\ 1/2}$.

Если $\dot{\gamma} \to \infty,\ \ \eta^{1/2} \to \eta_\infty^{1/2}$ и $\eta_\infty^{1/2} = \eta_c^{1/2}$.

Тогда, уравнение (2) можно представить в виде:

$$\eta^{1/2} = \eta_\infty^{1/2} + \frac{\eta_{(0)}^{1/2} - \eta_\infty^{1/2}}{1+\left(1/\chi\right)\dot{\gamma}^{1/2}}. \qquad (3)$$

Учитывая эти соотношения, можно ввести понятия структурной вязкости $\eta^{1/2}_c/\chi$ и нулевой вязкости $\eta^{1/2}(0)$.

Уравнение (1) справедливо на участке сдвигового разжижения, то есть на участке достаточно больших скоростей сдвига. На участке низких скоростей сдвига часто наблюдается ньютоновское течение с постоянной вязкостью. При очень высоких скоростях возможен «срыв течения», т. е. быстрое снижение вязкости с выходом значения напряжения сдвига τ на некоторую постоянную величину.

Аппроксимация экспериментальных данных проводится с помощью минимизации суммы квадратов разностей $\text{СКР} = \sum(\tau_i^{1/2} - \tau_{i\,\text{расч}}^{1/2})^2$.

Структурная реологическая модель [6] рассматривает полимерные растворы как дисперсные системы, где роль частиц играют макромолекулы, а роль контактов между частицами выполняют зацепления или прямое взаимодействие между химическими группами, входящими в состав макромолекул. Для разрыва таких контактирующих макромолекул необходимо приложить определённые силы, например гидродинамические силы, обусловленные сдвиговым течением.

Аппроксимация экспериментальных данных и обсуждение результатов

Раствор жесткоцепного полимера PBZT в кислоте MSA образует лиотропные жидкие кристаллы нематического типа, т. е. домены с практически параллельной ориентацией макромолекул. Типичная длина макромолекул 20 нм, типичный диаметр 0,6 нм. Данный образец полимера имеет молекулярную массу 37400 и молекулярную длину 170 нм. Эти размеры близки к размерам наночастиц или нановолокон и намного превышают размеры молекул растворителя. Экспериментальные данные [7] представлены на рис. 1: для изотропной фазы (заполненные символы), для нематической фазы (открытые символы), для двухфазной системы – ромб.

Рассмотрим зависимости $\eta(\dot{\gamma})$ на графике (рис. 1, *а*). Для изотропной фазы характерно ньютоновское поведение при низких скоростях сдвига и сдвиговое разжижение при высоких скоростях. При высоких концентрациях полимера точнее говорить о тенденции перехода к ньютоновскому течению по мере уменьшения скорости. В двухфазной системе ньютоновский участок течения отсутствует. Зависимость $\eta(\dot{\gamma})$ для лиотропной нематической фазы можно условно разделить на три участка (I, II, III), хотя отчётливого «плато» на среднем участке скоростей не наблюдается.

Для лучшего анализа кривых вязкости будем рассматривать отдельно разные состояния полимерного раствора. Аппроксимация обобщённым уравнением течения проводится на разных участках кривых вязкости $\eta(\dot{\gamma})$ и кривых течения $\tau(\dot{\gamma})$. Наиболее наглядно результаты аппроксимации видны на кривых в корневых координатах (рис. 2, *б*). Показанное на рис. 2 реологическое поведение типично для суспензий и растворов полимеров.

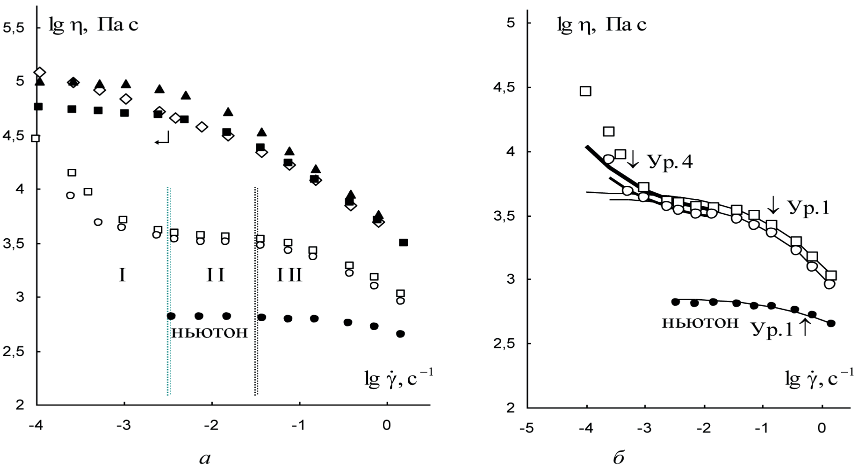

Рис. 1 / Fig. 1. Зависимость сдвиговой вязкости от скорости сдвига раствора жесткоцепного полимера PBZT в кислоте MSA в двойных логарифмических координатах для различной концентрации полимера С масс. % – 1,5 (точка); 2,52 (квадрат); 3,0 (треугольник); 3,43 (ромб); 6,11 (открытый квадрат); 8,2 (круг): *а* – экспериментальные данные для всех концентраций; *б* – аппроксимация для концентраций 6,11% (открытый квадрат); 8,2% (круг); 1,5% (точка) / Dependence of shear viscosity on the shear rate of a solution of rigid-chain polymer PBZT in acid MSA in double logarithmic coordinates for various polymer concentrations C mass. % – 1.5 (point); 2.52 (square); 3.0 (triangle); 3.43 (diamond); 6.11 (open square); 8.2 (circle): a – experimental data for all concentrations; b – approximation for concentrations of 6.11% (open square); 8.2% (circle); 1.5% (point).

Источник: [7].

При очень низких скоростях сдвига гидродинамические силы малы; процессы разрушения и формирования агрегатов частиц уравновешены и структура, в среднем, не изменяется. Это обстоятельство приводит к постоянной вязкости ньютоновского течения. По мере увеличения скорости сдвига разрушение структуры становится доминирующим. На интервале высоких скоростей происходит закономерный разрыв контактов под действием сдвига, который описывается обобщённым уравнением течения (1). Значения коэффициентов уравнения (1) и другие реологические параметры приведены в табл. 1.

Рассмотрим реологическое поведение раствора в нематической фазе (рис. 3).

В области высоких скоростей сдвига (рис. 3, *а*) справедливо обобщённое уравнение течения (1). В районе низких скоростей аппроксимация с достаточной точностью соответствует прямолинейной зависимости в корневых координатах (рис. 3, *б*). Разброс точек ниже скорости $4 \cdot 10^{-4}$ $с^{-1}$ может быть связан с неравновесным состоянием течения при столь низких скоростях. В логарифмических координатах результаты этой аппроксимации показаны на рис. 1, *б*. Таким образом, участок (II) может быть связан с переходом от одного режима течения к другому. Реологическое уравнение для участка (I) запишем в виде:

$$\tau^{1/2} = \tau_{cV}^{1/2} + \eta_{cV}^{1/2}\dot{\gamma}^{1/2}. \qquad (4)$$

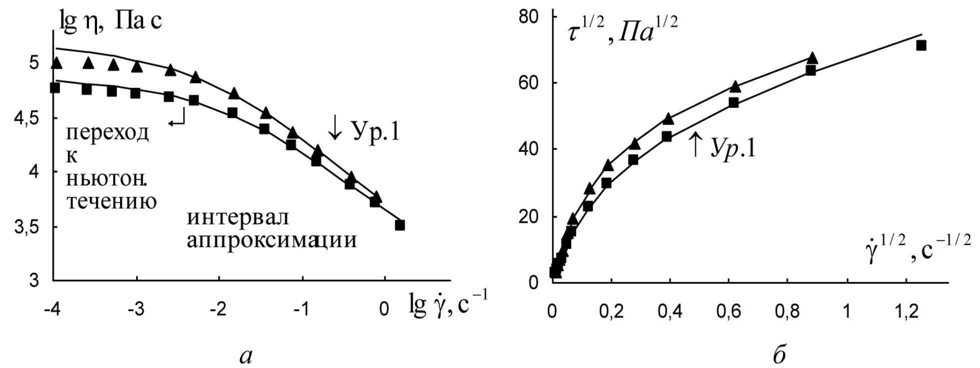

Рис. 2 / Fig. 2. Реологические кривые раствора жесткоцепного полимера PBZT в кислоте MSA для концентрации полимера C масс. % 2,52 (квадрат); 3,0 (треугольник) в изотропной фазе: *а* – в двойных логарифмических координатах; *б* – в корневых координатах / Rheological curves of a solution of rigid-chain polymer PBZT in acid MSA for polymer concentration C mass. % 2.52 (square); 3.0 (triangle) in isotropic phase: a – in double logarithmic coordinates; b – in root coordinates

Источник: [7].

По форме это уравнение совпадает с уравнением (1) при условии $\chi = 0$. Однако, значения коэффициента $\eta_{cV}^{1/2}$ намного больше значения коэффициента $\tau_{cV}^{1/2}$ (рис. 3, *б*).

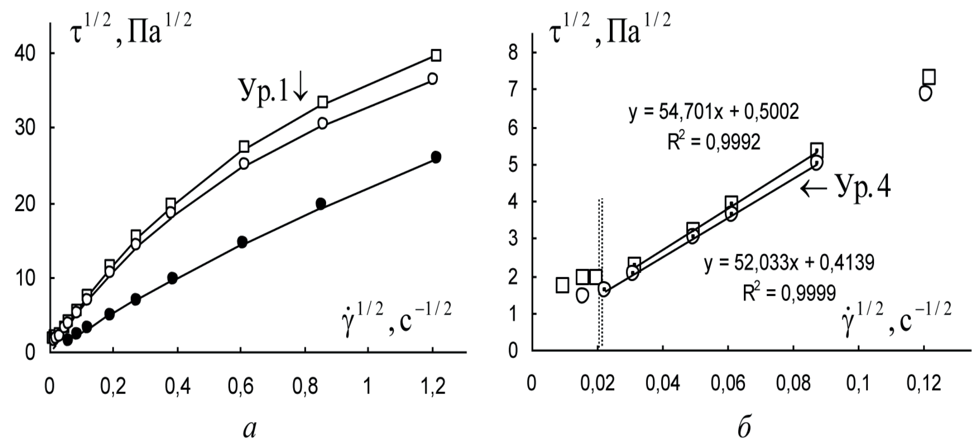

Рис. 3 / Fig. 3. Кривые течения в корневых координатах для раствора жесткоцепного полимера PBZT в кислоте MSA при концентрации полимера 6,11 (квадрат); 8,2 (треугольник) в нематической фазе; 1,5 (точка) в изотропной фазе: *а* – на полном интервале скоростей сдвига; *б* – на интервале низких скоростей сдвига / Root flow curves for a solution of rigid-chain PBZT polymer in MSA at a polymer concentration of 6.11 (square); 8.2 (triangle) in the nematic phase; 1.5 (point) in the isotropic phase: a – over the full range of shear rates; b – in the interval of low shear rates

Источник: [7].

Таблица 1 / Table 1

Коэффициенты обобщённого уравнения течения для раствора полимера PBZT в кислоте MSA при температуре 60 °C при различных массовых концентрациях, значения корня предельной нулевой вязкости и корня структурной вязкости /

Coefficients of the generalized flow equation for a PBZT polymer solution in MSA acid at a temperature of 60 °C at various mass concentrations, values of the root of the limiting zero viscosity and the root of the structural viscosity

Состояние	Изотропная фаза			2 фазы	Нематическая фаза		2 фазы
С, масс. %	1,5	2,52	3,0	3,43	6,11	8,2	3,43*
$\tau_c^{1/2}$, Па$^{1/2}$	69,6	52,6	55,7	51,7	70,7	58,5	7,94
$\eta_c^{1/2}$, (Па · с)$^{1/2}$	5,81	23,4	22,8	22,9	1,25	2,55	124,8
χ, с$^{-1/2}$	3,29	0,210	0,151	0,210	1,03	0,921	0,025
$\tau_c^{1/2}/\chi$	21,2	250,2	368,3	246,0	68,6	63,5	311,8
$\eta^{1/2}(0)$, (Па · с)1/2	27,0	273,5	391,0	268,9	69,9	66,1	436,6
Символ	точка	квадр	треуг	ромб	квадрат	круг	ромб

Примечание: звёздочкой отмечен столбец, где приведены коэффициенты для участка низких скоростей сдвига.

Источник: по данным авторов.

В табл. 1 значения коэффициентов, полученных для высоких скоростей в нематической фазе, ведут себя прямо противоположным образом. Таким образом, режим течения в области (I) не идентичен режиму в районе (III).

Рассмотрим реологическое поведение раствора в двухфазной системе (рис. 4).

На участке высоких скоростей сдвига справедливо уравнение (1). На участке низких скоростей сдвига можно также использовать уравнение (1), но, как и в ранее описанном случае, здесь $\eta_c^{1/2} >> \tau_c^{1/2}$, в отличие от участка высоких скоростей, где $\eta_c^{1/2} << \tau_c^{1/2}$.

Поскольку в двухфазном образце присутствуют домены с нематической упорядоченностью и домены с изотропной упорядоченностью, то такое сложное реологическое поведение представляется закономерным. Тем не менее, в корневых координатах на участке низких скоростей кривые течения достаточно близки друг к другу (рис. 5, *а*).

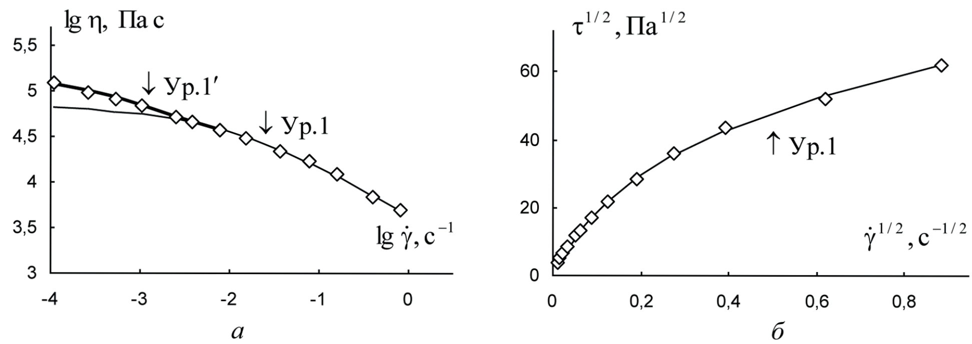

Рис. 4 / Fig. 4. Реологические кривые раствора жесткоцепного полимера PBZT в кислоте MSA для концентрации полимера C масс. % 3,43 (ромб) в двухфазной системе: *а* – в двойных логарифмических координатах; *б* – в корневых координатах / Rheological curves of a solution of rigid-chain polymer PBZT in acid MSA for polymer concentration C mass. % 3.43 (diamond) in a two-phase system: a – in double logarithmic coordinates; b – in root coordinates

Источник: [7].

Удобно сравнивать реологическое поведение при разных концентрациях и в различных фазовых состояниях с помощью рассчитанной величины корня нулевой сдвиговой вязкости $\{\eta^{1/2}(0)\}$, поскольку она включает в себя структурную часть вязкости и вязкость, связанную с движением индивидуальных макромолекул (рис. 5, *б*).

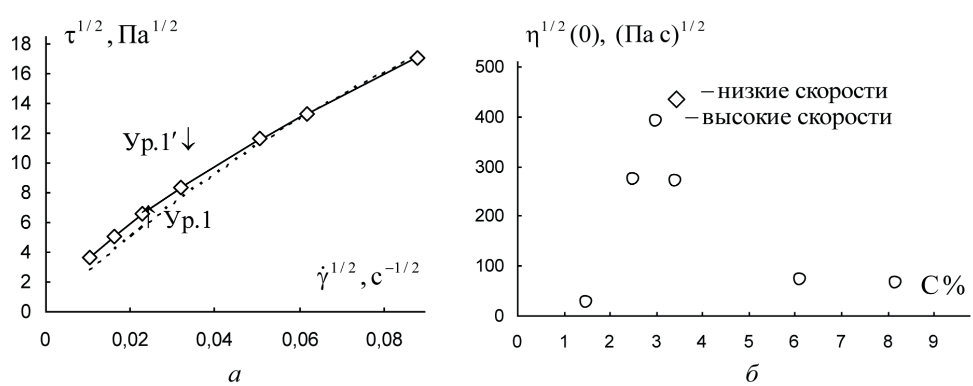

Рис. 5 / Fig. 5. Реологическое поведение раствора жесткоцепного полимера PBZT в кислоте MSA: *а* – кривая течения в корневых координатах при концентрации 3,43% при низких скоростях сдвига в двухфазной системе; *б* – зависимость рассчитанной нулевой вязкости $\eta^{1/2}(0)$ от концентрации полимера C масс. % / Rheological behavior of a solution of rigid-chain PBZT polymer in MSA acid: a – flow curve in root coordinates at a concentration of 3.43% at low shear rates in a two-phase system; b – the dependence of the calculated zero viscosity $\eta^{1/2}(0)$ on the concentration of the polymer C mass. %

Источник: [7].

Зависимость коэффициента $\eta^{1/2}(0)$ от концентрации C аналогична хорошо известной зависимости вязкости от концентрации, полученной для фиксированной скорости сдвига. В изотропной фазе вязкость возрастает с концентрацией, после перехода в жидкокристаллическое состояние вязкость резко уменьшается с концентрацией. Такое поведение объясняют уменьшением размеров «нематических» доменов по сравнению с «изотропными» доменами в образце полимерного раствора.

Выводы

Рассмотрено реологическое поведение раствора жесткоцепного полимера с точки зрения структурной реологической модели. Полимерные растворы находятся в изотропной фазе при низких концентрациях и в анизотропном нематическом состоянии при высоких концентрациях. Роль агрегатов частиц или ассоциатов макромолекул играют домены – области с хорошей параллельной ориентацией макромолекул-стержней. Реологическое поведение связано с процессами разрушения и формирования доменов под действием гидродинамических сил в сдвиговом течении.

Представлены уравнения, которые способны аппроксимировать экспериментальные данные на отдельных интервалах скорости сдвига, соответствующих определённому структурному состоянию полимерного раствора.

Статья поступила в редакцию 14.09.2021 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Папков С. П., Куличихин В. Г. Жидкокристаллическое состояние полимеров. М.: Химия, 1977. 240 с.
2. Wissbrun K. F. Rheology of Rod-Like Polymers in the Liquid Crystalline State // Journal of Rheology. 1981. Vol. 25. Iss. 6. P. 619–662. DOI: 10.1122/1.549634.
3. Rheological studies in p-n-Alkoxy Benzoic Acid Liquid Crystals / Sreehari Sastry S., Bindu Madhavi A., Vishwam T., Ha Sie Tiong // International Journal of Engineering Research & Technology (IJERT). 2017. Vol. 6. Iss. 2. P. 563–568. DOI: 10.17577/IJERTV6IS020390.
4. Shear-Thinning Characteristics of Nematic Liquid Crystals Doped with Nanoparticles / Munehiro Kimura, Zur Ain Binti Hanafi, Tatsuya Takagi, Ryosuke Sawara, Shuji Fujii // Crystals. 2016. Vol. 6. Iss. 11. P. 145–154. DOI: 10.3390/cryst6110145.
5. Кирсанов Е. А. Течение дисперсных и жидкокристаллических систем. Иваново: Ивановский государственный университет, 2006. 232 с.
6. Кирсанов Е. А., Матвеенко В. Н. Неньютоновское течение дисперсных, полимерных и жидкокристаллических систем. Структурный подход: монография М.: Техносфера, 2016. 384 с.
7. Larson R. G. The Structure and Rheology of Complex Fluids. New York, Oxford: Oxford University Press, 1999. 668 p.

REFERENCES

1. Papkov S. P., Kulichikhin V. G. *Zhidkokristallicheskoe sostoyanie polimerov* [Liquid crystalline state of polymers]. Moscow, Khimiya Publ., 1977. 240 p.
2. Wissbrun K. F. Rheology of Rod-Like Polymers in the Liquid Crystalline State. In: *Journal of Rheology*, 1981, vol. 25, iss. 6, pp. 619–662. DOI: 10.1122/1.549634.

3. Sreehari Sastry S., Bindu Madhavi A., Vishwam T., Ha Sie Tiong. Rheological studies in p-n-Alkoxy Benzoic Acid Liquid Crystals. In: *International Journal of Engineering Research & Technology (IJERT)*, 2017, vol. 6, iss. 2, pp. 563–568. DOI: 10.17577/IJERTV6IS020390.
4. Munehiro Kimura, Zur Ain Binti Hanafi, Tatsuya Takagi, Ryosuke Sawara, Shuji Fujii Shear-Thinning Characteristics of Nematic Liquid Crystals Doped with Nanoparticles. In: *Crystals*, 2016, vol. 6, iss. 11, pp. 145–154. DOI: 10.3390/cryst6110145.
5. Kirsanov E. A. *Techenie dispersnykh i zhidkokristallicheskikh sistem* [Disperse and liquid crystal systems flow]. Ivanovo, Ivanovo State University Publ., 2006. 232 p.
6. Kirsanov E. A., Matveenko V. N. *Nen'yutonovskoe techenie dispersnykh, polimernykh i zhidkokristallicheskikh system. Strukturnyi podkhod* [Non-Newtonian flow of dispersed, polymer and liquid crystal systems. Structural approach] Moscow, Tekhnosfera Publ., 2016. 384 p.
7. Larson R. G. The Structure and Rheology of Complex Fluids. New York, Oxford, Oxford University Press, 1999. 668 p.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Вековищев Михаил Петрович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физики и химии Государственного социально-гуманитарного университета;
e-mail: mpv.71@mail.ru;

Кирсанов Евгений Александрович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физики и химии Государственного социально-гуманитарного университета;
e-mail: Kirsanov47@mail.ru.

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Mikhail P. Vekovishchev – Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Prof., State University of Humanities and Social Studies;
e-mail: mpv.71@mail.ru;

Evgeny A. Kirsanov – Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Prof., State University of Humanities and Social Studies;
e-mail: Kirsanov47@mail.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Вековищев М. П., Кирсанов Е. А. Неньютоновское течение лиотропного жидкокристаллического полимера // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2021. № 4. С. 22–31.
DOI: 10.18384/2310-7251-2021-4-22-31.

FOR CITATION

Vekovishchev M. P., Kirsanov E. A. Non-Newtonian flow of a lyotropic liquid crystal polymer. In*: Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*, 2021, no. 4, pp. 22–31.
DOI: 10.18384/2310-7251-2021-4-22-31.

УДК 538.931
DOI: 10.18384/2310-7251-2021-4-32-42

ИЗМЕРЕНИЕ ВКЛАДОВ РАЗЛИЧНЫХ МЕХАНИЗМОВ ПЕРЕДАЧИ В РАДИАЦИОННО-КОНДУКТИВНЫЙ ПЕРЕНОС ТЕПЛА В ВОЗДУХОНАПОЛНЕННЫХ СЛУЧАЙНО РАССЕИВАЮЩИХ СТРУКТУРАХ

Шампаров Е. Ю., Бугримов А. Л., Родэ С. В., Жагрина И. Н.

Российский государственный университет имени А. Н. Косыгина
(Технологии. Дизайн. Искусство)
117997, г. Москва, ул. Садовническая, д. 33, стр. 1, Российская Федерация

Аннотация

Цель. Изучение взаимосвязи структуры и свойств материалов с их способностью различным образом передавать тепло.

Процедура и методы. Сопоставление теории и результатов практических измерений компонент теплопроводности случайной рассеивающей структуры с применением двух методик эксперимента и с модификацией радиационных свойств образцов.

Результаты. Описана методика измерения толщины радиационно-кондуктивной релаксации и температурного скачка в среде возле экрана излучения, а также радиационной и кондуктивной компонент и суммарной теплопроводности среды. Определён вид зависимости и измерены компоненты теплопроводности в широком диапазоне толщин при сжатии волокнистого холста, включая кондуктивные вклады, обусловленные движением тепла через воздух и по волокнам. Оценено изменение радиационного вклада в теплопроводность вследствие металлизации поверхности волокон.

Теоретическая и/или практическая значимость. Подтверждено, что разные способы измерения вкладов компонент теплопроводности материалов дают одинаковый результат. Определены условия минимума теплопроводности структуры в зависимости от её плотности. Продемонстрирован эффект от металлизации волокон на компоненты теплопроводности структуры.

Ключевые слова: радиационно-кондуктивный перенос тепла, случайная рассеивающая структура

MEASUREMENT OF CONTRIBUTIONS OF VARIOUS TRANSMISSION TYPES TO RADIATIVE-CONDUCTIVE HEAT TRANSFER IN AIR-FILLED RANDOMLY SCATTERING STRUCTURES

E. Shamparov, A. Bugrimov, S. Rode, I. Zhagrina

The Kosygin State University of Russia
33 build. 1 ulitsa Sadovnicheskaya, Moscow 117997, Russian Federation

Abstract

Aim. We study the relationship of the structure and properties of materials with their ability to transfer heat in various ways.

Methodology. The theory and the results of practical measurements of thermal conductivity components of a randomly scattering structure are compared using two experimental methods and the modification of the radiation properties of samples.

Results. The method for measuring the thickness of radiative-conductive relaxation and temperature jump in the medium near the radiation screen, as well as the radiant and conductive components and the total thermal conductivity of the medium, is described. The type of dependence is determined, and the components of thermal conductivity are measured in a wide range of thicknesses during compression of a fibrous canvas, including conductive contributions due to the movement of heat through the air and through the fibers. The change in the radiation contribution to the thermal conductivity due to the metallization of the fiber surface is estimated.

Research implications. It is confirmed that different methods for measuring the contributions of the thermal conductivity components of materials give the same result. The conditions of the minimum of the structure thermal conductivity depending on its density are determined. The effect of the metallization of fibers on the thermal conductivity components of the structure is demonstrated.

Keywords: radiant-conductive heat transfer, scattering random structure

Введение

Изучению известного явления диффузии теплового излучения как в отечественной [1], так и в зарубежной [2–5] теплофизике, уделяется пристальное внимание. Серьёзные трудности связаны с тем, что глубина проникновения теплового излучения в воздух [6; 7] очень велика по сравнению с размерами бытовых объектов, поэтому полагать излучение возле них диффузным неправильно. Однако есть целый класс материалов со случайно рассеивающей излучение структурой, в которых глубина проникновения излучения *a* невелика и диффузное приближение позволяет получить физически обоснованные результаты.

В работе [8] было показано, что вдали от границ (при большой оптической толщине) среды в соответствии с законом Эйнштейна для диффузии, когда градиент температуры достаточно мал

$$\nabla T \ll T / a, \qquad (1)$$

процесс распространения тепла имеет линейный характер. Плотность радиационного потока переноса тепла Φ_L прямо пропорциональна градиенту температуры:

$$\Phi_L = -L\nabla T. \qquad (2)$$

Коэффициент пропорциональности L [1–5; 8] называют лучистой теплопроводностью среды:

$$L = 16\sigma T^3 a / 3, \qquad (3)$$

где σ – постоянная Стефана-Больцмана.

Выбранные в качестве объекта исследования вспененные и волокнистые материалы имеют случайную неоднородную структуру, не только поглощающую, но и эффективно рассеивающую излучение. Так как размер неоднородностей много больше длины волны излучения, то глубина проникновения для всех длин волн примерно одинакова. В окружающих нас условиях температура образца T, как правило, много больше приложенной к нему разности температур. Поэтому при характерной для исследуемых материалов глубине проникновения a ~ 1 мм условие (1) обычно выполняется с высокой точностью.

Следует отметить, что при радиационной передаче тепла глубина проникновения излучения играет ту же роль, что и длина свободного пробега молекул при кондуктивной передаче. Оба процесса описываются одинаковыми уравнениями. В обоих случаях случайную неоднородную среду можно характеризовать средним значением теплопроводности, когда размеры образца много больше размеров неоднородностей. В такой среде при радиационно-кондуктивном переносе тепла вдали от границ выполняется уравнение Фурье в обобщённой форме:

$$\Phi = -\lambda \nabla T_{\infty}. \tag{4}$$

Суммарная теплопроводность среды λ складывается из радиационной L и кондуктивной D компонент:

$$\lambda = D + L. \tag{5}$$

В работе [8] аналитически была решена задача о стационарном радиационно-кондуктивном переносе тепла в серой среде возле плоской непрозрачной поверхности. При постоянной перпендикулярной поверхности плотности потока тепла Φ зависимость температуры среды от расстояния x до границы имеет вид:

$$T = T_0 + x\nabla T_{\infty} + \tau \cdot \exp\left(-x / b\right), \tag{6}$$

где b – глубина радиационно-кондуктивной релаксации, а τ – приповерхностный скачок температуры,

$$b = a / \gamma, \tag{7}$$

$$\gamma^2 = \lambda / D. \tag{8}$$

При полностью отражающей поверхности:

$$\tau = -a\Phi\left(\gamma^2 - 1\right) / \left(\lambda\gamma\right). \tag{9}$$

Удалённую поверхность характеризует вносимое ею дополнительное тепловое сопротивление:

$$R_{\infty} = \tau / \Phi. \tag{10}$$

Измерения с экраном излучения

В качестве объекта исследований для измерений был взят пласт вспененного полиэтилена толщиной 0,75 мм, из которого по размерам (85 × 85 мм^2) рабочей части установки [9] вырезаны образцы. Вес каждого образца 177 мг. Плотность 32,6 кг/м^3. Доля занятого полиэтиленом пространства 3,3%.

Установка, с помощью которой сделаны измерения, собрана так, чтобы практически полностью исключить конвективную передачу тепла. Для этого горизонтальный нагреватель помещён строго над холодильником. В контролируемый по толщине зазор между ними помещаем стопку образцов. Чтобы направить все выделяемое электрическим током в нагревателе тепло через образцы к холодильнику, с обратной стороны за нагревателем сделан тепловой экран. При измерении задавалась и стабилизировалась температура экрана, находилось такое подаваемое на нагреватель напряжение, при котором температура нагревателя не изменялась и была равна температуре экрана. При этом поток тепла от нагревателя к экрану мал сразу по двум причинам. Во-первых, из-за хорошей тепловой изоляции между ними, во-вторых, из-за того, что разность их температур мала. Поток тепла от нагревателя к холодильнику получался с достаточной степени точности стационарным. Плотность потока практически одинакова во всём рабочем объёме установки.

Длительность каждого измерения определялась, в частности, и временем релаксации температуры образца. На отдельное измерение уходило обычно от 10 минут до получаса. При достаточной длительности и тщательности с помощью установки вполне достижима точность измерений ~ 1%.

На рис. 1 представлены две зависимости теплового сопротивления R от толщины среды d (числа слоёв вспененного полиэтилена), отличающиеся тем, что во втором случае посередине стопки помещён экран из алюминиевой фольги.

Для первой зависимости $R_1(d)$ данные с хорошей точностью аппроксимируются ожидаемой прямой линией (4). По наклону прямой

$$dR_1 / dd = \lambda^{-1} \tag{11}$$

была рассчитана суммарная теплопроводность вспененного полиэтилена $\lambda = 0{,}0483$ Вт/(м · К).

Теоретически предсказываемый вид второй зависимости (6):

$$R_2 = d/\lambda + 2R_\infty\left(1 - \exp\left(-d/\left(2b\right)\right)\right). \tag{12}$$

Поэтому данные второй зависимости были преобразованы к виду:

$$A = R_2 - d/\lambda. \tag{13}$$

Посредством аппроксимации (рис. 1(а)) кривой вида:

$$A = 2R_\infty\left(1 - \exp\left(-d/\left(2b\right)\right)\right) \tag{14}$$

были найдены тепловое сопротивление удалённой поверхности $R_\infty = 0{,}0053$ м^2 · К/Вт и толщина радиационно-кондуктивной релаксации $b = 0{,}97$ мм. Так как (7) – (10)

$$L/D = \gamma^2 - 1 = R_\infty\lambda / b, \tag{15}$$

то полученные значения позволили рассчитать радиационную $L = 0{,}0101$ и кондуктивную $D = 0{,}0382$ Вт/(м · К) компоненты теплопроводности вспененного полиэтилена, а также $\gamma = 1{,}124$ и глубину проникновения теплового излучения – $a = 1{,}09$ мм. Точность измерений проверена по формуле (3) при средней температуре наших измерений $T = 312$ К. Тогда $L` = 0{,}0100$ Вт/(м · К). Сравнительно невысокая (~4%) точность измерения компонент теплопроводности обусловлена малой глубиной проникновения излучения, лишь в 1,5 раза большей толщины слоя материала. Тем не менее, нам удалось непосредственно наблюдать тепловое сопротивление удалённой поверхности и глубину радиационно-кондуктивной релаксации и оценить вклад каждой из компонент теплопроводности. Теоретические обоснования и результаты практических измерений показали глубокое согласие.

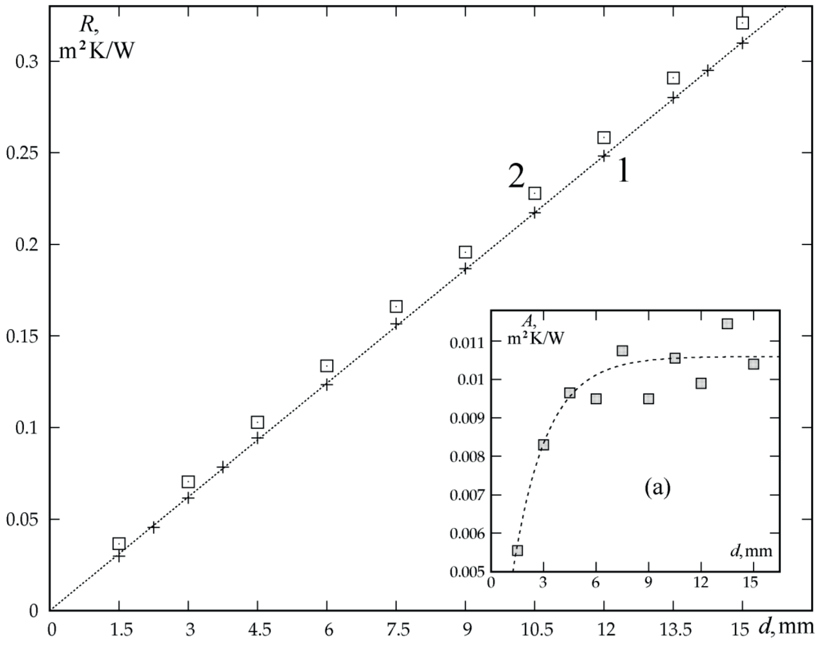

Рис. 1 / Fig. 1. Зависимости теплового сопротивления R от толщины d: 1 – стопок образцов вспененного полиэтилена и аппроксимирущая прямая $R = d/\lambda$, 2 – таких же стопок с алюминиевой фольгой посередине. На вставке (a) – зависимость $A(d)$ и аппроксимирующая кривая. / Thermal resistance R depending on the stack thickness d: 1 – for the stacks of samples of foamed polyethylene and the approximating straight line; 2 – for the same stacks with aluminum foil in the middle. On the insert (a) there is dependency $A(d)$ and the approximating curve.

Источник: по данным авторов.

Кондуктивная теплопроводность массивного полиэтилена 0,4 Вт/(м · К) во много раз больше теплопроводности воздуха при температуре измерений, равной $D_A = 0{,}026$ Вт/(м · К). Полиэтилен занимает 1/30 часть объёма, поэтому можно полагать, что вклад в кондуктивную теплопроводность материала, обусловленный движением тепла по полиэтилену, примерно в те же 30 раз меньше теплопроводности массивного полиэтилена. Соответственно, кондуктивная составляющая теплопроводности материала D = 0,038 сложена из долей, обусловленных движением тепла через воздух D_A = 0,026 и движением по полиэтилену D_S = 0,012 Вт/(м · К):

$$D = D_A + D_S. \tag{16}$$

Измерения со сжатием волокнистого холста

Вторая часть работы посвящена изучению трансформации вклада каждой из компонент теплопроводности при изменении плотности среды.

Для измерений было взято объёмное нетканое полотно с поверхностной плотностью 70 г/м^2, выпускаемое под маркой «холлофайбер» (в мире больше известен его близкий аналог, выпускаемый под маркой «тинсулейт»). Полотно состоит из полых термически спаянных лавсановых (полиэтилентерефталатных [10]) волокон толщиной ~30 мкм. Это самый тонкий вариант из выпускаемых в настоящее время полотен. Для второй серии измерений на полотно с обеих сторон посредством вакуумного термического распыления был нанесён алюминий с фронтальной толщиной слоя ~100 нм. Наши оценки показали, что глубина проникновения теплового излучения в такое полотно чуть больше половины его толщины. Распылённый металл должен проникать в полотно примерно на такую же глубину. Поэтому можно полагать, что алюминиевая металлизация нанесена достаточно равномерно по всей толщине материала.

Для обоих видов материала измерены зависимости суммарной теплопроводности λ материала от толщины d, до которой он сжат (рис. 2). Образцы сложены в два слоя с общей начальной толщиной 20 мм и весом 998 мг. Доля занятого полиэтилентерефталатом объёма при этом равна 0,5%.

При увеличении толщины материала радиационная компонента теплопроводности растёт, доля кондуктивной компоненты, обусловленная движением тепла по воздуху, практически постоянна и вклад, обусловленный движением тепла по твёрдому веществу, уменьшается обратно пропорционально толщине:

$$D = D_A + k_1 / d. \tag{17}$$

Радиационная компонента растёт, в первую очередь, прямо пропорционально толщине вследствие уменьшения оптической плотности среды, помимо этого, есть добавка, обусловленная изменением расположения волокон:

$$L = k_2 d - k_3 d^{3/2}. \tag{18}$$

Обе экспериментально полученные зависимости были аппроксимированы кривыми вида:

$$\lambda = 0,026 + k_1 / d + k_2 d - k_3 d^{3/2}. \tag{19}$$

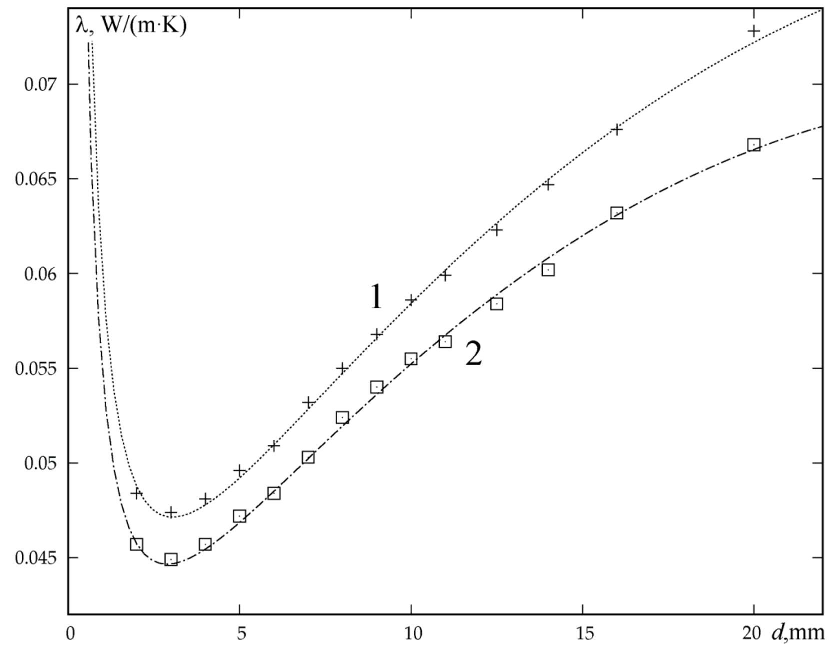

Рис. 2 / Fig. 2. Зависимости суммарной теплопроводности «холлофайбера» λ от толщины *d*, до которой он сжат, и аппроксимирующие кривые: 1 – без металлизации и 2 – с металлизацией / Dependences of the total thermal conductivity of the "hollowfiber" λ on the thickness *d* to which it is compressed, and the approximating curves: 1 – without metallization and 2 – with metallization.

Источник: по данным авторов.

Обсуждение результатов измерений

Совпадение результатов с физически осмысленными предсказаниями вполне удовлетворительно. Найденные коэффициенты для первой зависимости – $k_{11} = 0{,}030$, $k_{21} = 0{,}00465$, $k_{31} = 0{,}00054$ и для второй зависимости – $k_{12} = 0{,}025$, $k_{22} = 0{,}00438$, $k_{32} = 0{,}00054$ позволили оценить вклад каждой из компонент теплопроводности.

При $d \approx 3$ мм суммарная теплопроводность обеих модификаций минимальна, $\lambda_{1min} = 0{,}0474$ и $\lambda_{2min} = 0{,}0449$ Вт/(м · К). При этом вклад, обусловленный движением тепла по пластику, в обоих случаях около $D_S = 0{,}009$ Вт/(м · К), а радиационная компонента теплопроводности – $L_1 = 0{,}012$ и $L_2 = 0{,}010$ Вт/(м · К). Следует отметить, что при толщине «холлофайбера» 3 мм доля занятого твёрдым веществом объёма составляет те же 3,3%, что и у вспененного полиэтилена. Нетрудно заметить, что вклад каждой из компонент в теплопроводность того и другого материала тоже примерно одинаковый. Тот факт, что два по сути различных метода измерений дают сходные результаты, является весомым подтверждением правильности наших представлений.

Ничтожно малый по толщине слой металла кондуктивную теплопроводность материала практически не увеличил. Однако, несмотря на то, что среднее расстояние между волокнами (250 мкм при $d = 10$ мм) достаточно велико по сравнению с длиной волны излучения, радиационная компонента теплопроводности уменьшилась значительно. При толщине простого и металлизированного «холлофайбера» 7,5 мм она составила соответственно 0,024 и 0,021 Вт/(м · К), при 20 мм – 0,045 и 0,040 Вт/(м · К). При увеличении толщины материала эффект от металлизации по абсолютной величине растёт. Но относительное снижение радиационной компоненты теплопроводности уменьшается и при $d = 3$, 7,5 и 20 мм составляет 15, 12 и 11%. Поведение металлизированного материала при сжатии похоже на поведение пропускания излучения металлической решеткой, когда длина волны значительно больше и приближается к размеру ячейки. При приближении расстояния между волокнами к длине волны излучения радиационная компонента теплопроводности металлизированного материала должна резко снижаться.

Заключение

Металлизированное объёмное волокнистое полотно – это материал будущего. При одинаковом расстоянии между волокнами и, соответственно, примерно при той же лучистой теплопроводности плотность материала пропорциональна квадрату толщины волокон. Металлизация материалов с очень тонкими волокнами – это путь получения ультралёгких утепляющих материалов. В массовом производстве такие материалы пока слишком дороги, но в продуктах высоких технологий – в крио- или в космической технике целесообразность их использования вполне очевидна.

Таким образом, представлены две показавшие качественное и количественное согласие методики и проведены практические измерения компонент теплопроводности вспененного и волокнистого утепляющего материала. Установлен характер зависимости каждой из компонент от плотности среды. Описан вклад радиационной компоненты в перенос тепла и предложены способы её снижения. Предложен один из вариантов построения ультралёгких утепляющих материалов. Измерения радиационно-кондуктивного переноса тепла уникальны по информативности и крайне перспективны для исследования и понимания свойств материалов со сложной структурой, близкой к хаотической.

Статья поступила в редакцию 28.09.2021 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кутателадзе С. С. Основы теории теплообмена; изд. 5-е перераб. и доп. М.: Атомиздат, 1979. 416 с.
2. Зигель Р., Хауэлл Дж. Теплообмен излучением / пер. с англ. М.: Мир, 1975. 934 с.
3. Viskanta R., Grosh R. J. Heat transfer by simultaneous conduction and radiation in an absorbing medium // Journal of Heat Transfer. 1962. Vol. 84. Iss. 1. P. 63–72. DOI: 10.1115/1.3684294.
4. Doornink D. G., Hering R. G. Transient Combined Conductive and Radiative Heat Transfer // Journal of Heat Transfer. 1972. Vol. 94. Iss. 4. P. 473–478. DOI: 10.1115/1.3449970.

5. Moore T. J., Jones M. R. Analysis of the conduction–radiation problem in absorbing, emitting, non-gray planar media using an exact method // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2014. Vol. 73. P. 804–809. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2014.02.029.
6. Кондратьев К. Я. Перенос длинноволнового излучения в атмосфере. М., Л.: Гос. изд-во технико-теорет. лит., 1950. 287 с.
7. Cormier J. G., Ciurylo R., Drummond J. R. Cavity ringdown spectroscopy measurements of the infrared water vapor continuum // Journal of Chemical Physics. 2002. Vol. 116. Iss. 3. P. 1030–1034. DOI: 10.1063/1.1425825.
8. Шампаров Е. Ю. Тепловой перенос в полупрозрачной среде // Журнал технической физики. 2018. Т. 88. № 1. С. 133–140. DOI: 10.21883/JTF.2018.01.45497.2109.
9. Шампаров Е. Ю., Жагрина И. Н. Установка для прецизионных бесконвекционных измерений тепловой проницаемости материалов при температурах, близких к комнатной. Патент на полезную модель № 166709 РФ 17.11.2016, заявл. 01.04.2016 // Изобретения. Полезные модели: официальный бюллетень Федеральной службы по интеллектуальной собственности (Роспатент). 2016. № 34 [Электронный ресурс]. URL: https://www1.fips.ru/Archive/PAT/2016FULL/2016.12.10/INDEX_RU.HTM (дата обращения: 12.06.2021).
10. Ward I. M. The molecular structure and mechanical properties of polyethyleneterephthalate fibers // Textile Research Journal. 1961. Vol. 31. Iss. 7. P. 650–664. DOI: 10.1177/004051756103100711.

REFERENCES

1. Kutateladze S. S. *Osnovy teorii teploobmena* [Basics of the theory of heat transfer]. Moscow, Atomizdat Publ., 1979. 416 p.
2. Siegel R., Howell J. *Teploobmen izlucheniem* [Thermal radiation heat transfer]. Moscow, Mir Publ., 1975. 934 p.
3. Viskanta R., Grosh R. J. Heat transfer by simultaneous conduction and radiation in an absorbing mediumю In: *Journal of Heat Transfer*, 1962, vol. 84, iss. 1, pp. 63–72. DOI: 10.1115/1.3684294.
4. Doornink D. G., Hering R. G. Transient Combined Conductive and Radiative Heat Transfer. In: *Journal of Heat Transfer*, 1972, vol. 94, iss. 4, pp. 473–478. DOI: 10.1115/1.3449970.
5. Moore T. J., Jones M. R. Analysis of the conduction–radiation problem in absorbing, emitting, non-gray planar media using an exact method. In: *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2014, vol. 73, pp. 804–809. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2014.02.029.
6. Kondrat'ev K. Ya. *Perenos dlinnovolnovogo izlucheniya v atmosphere* [Long-wave radiation transport in the atmosphere]. Moscow, Leningrad, State publishing house of technical and theoretical literature, 1950. 287 p.
7. Cormier J. G., Ciurylo R., Drummond J. R. Cavity ringdown spectroscopy measurements of the infrared water vapor continuum. In: *Journal of Chemical Physics*, 2002, vol. 116, iss. 3, pp. 1030–1034. DOI: 10.1063/1.1425825.
8. Shamparov E. Yu. [Heat transfer in a semitransparent medium]. In: *Zhurnal tekhnicheskoi fiziki* [Technical Physics], 2018, vol. 88, no. 1, pp. 133–140. DOI: 10.21883/JTF.2018.01.45497.2109.
9. Shamparov E. Yu., Zhagrina I. N. [Installation for precision non-convection measurements of thermal permeability of materials at temperatures close to room temperature. Utility model patent No. 166709 RF 17.11.2016, Appl. 01.04.2016]. In: *Izobreteniya. Poleznye modeli: ofitsial'nyi byulleten' Federal'noi sluzhby po intellektual'noi sobstvennosti (Rospatent)*

[Inventions. Utility Models: Official Bulletin of the Federal Service for Intellectual Property (Rospatent)], 2016, no. 34. Available at: https://www1.fips.ru/Archive/PAT/2016FULL/2016.12.10/INDEX_RU.HTM (accessed: 12.06.2021).
10. Ward I. M. The molecular structure and mechanical properties of polyethyleneterephthalate fibers. In: *Textile Research Journal*, 1961, vol. 31, iss. 7, pp. 650–664. DOI: 10.1177/004051756103100711.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Шампаров Евгений Юрьевич – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры физики Российского государственного университета имени А. Н. Косыгина (Технологии. Дизайн. Искусство);
e-mail: shamparov-eu@rguk.ru;

Бугримов Анатолий Львович – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой физики Российского государственного университета имени А. Н. Косыгина (Технологии. Дизайн. Искусство);
e-mail: bugrimov-al@rguk.ru;

Родэ Сергей Витальевич – доктор технических наук, профессор, профессор кафедры физики Российского государственного университета имени А. Н. Косыгина (Технологии. Дизайн. Искусство);
e-mail: rode-s-v@mail.ru;

Жагрина Инна Николаевна – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры материаловедения Российского государственного университета имени А. Н. Косыгина (Технологии. Дизайн. Искусство);
e-mail: zhagrina-in@rguk.ru.

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Eugene Yu. Shamparov – Cand. Sci. (Engineering), Assoc. Prof., Department of Physics, The Kosygin State University of Russia;
e-mail: shamparov-eu@rguk.ru;

Anatoly L. Bugrimov – Dr. Sci. (Engineering), Prof., Departmental Head, Department of Physics, The Kosygin State University of Russia;
e-mail: bugrimov-al@rguk.ru;

Sergey V. Rode – Dr. Sci. (Engineering), Prof., Department of Physics, The Kosygin State University of Russia;
e-mail: rode-s-v@mail.ru;

Inna N. Zhagrina – Cand. Sci. (Engineering), Assoc. Prof., Department of Material Science, Kosygin State University of Russia;
e-mail: zhagrina-in@rguk.ru.

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Шампаров Е. Ю., Бугримов А. Л., Родэ С. В., Жагрина И. Н. Измерение вкладов различных механизмов передачи в радиационно-кондуктивный перенос тепла в воздухонаполненных случайно рассеивающих структурах // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2021. № 4. С. 32-42.
DOI: 10.18384/2310-7251-2021-4-32-42

FOR CITATION

Shamparov E. Ju., Bugrimov A. L., Rode S. V., Zhagrina I. N. Measurement of contributions of various transmission types to radiative-conductive heat transfer in air-filled randomly scattering structures. In: *Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics-Mathematics*, 2021, no. 4, pp. 32–42.
DOI: 10.18384/2310-7251-2021-4-32-42

УДК 533.6.011.8
DOI: 10.18384/2310-7251-2021-4-43-53

ТЕПЛОВОЙ ПОТОК В КРИТИЧЕСКОЙ ТОЧКЕ ОСЕСИММЕТРИЧЫХ ТЕЛ МИНИМАЛЬНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ

Горелов С. Л., Нгуен В. Л.

Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)
141701, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский переулок, д. 9, Российская Федерация

Аннотация
Цель. Для тела вращения со степенной образующей и сферическим затуплением вычислить тепловой поток в критической точке.
Процедура и методы. Решением вариационной задачи определяется степень в образующей тела минимального сопротивления и радиус затупления в критической точке в зависимости от удлинения в широком диапазоне чисел Рейнольдса.
Результаты. Для тела вращения со степенной образующей и сферическим затуплением вычисляется сила сопротивления и тепловой поток в критической точке в гиперзвуковом потоке разреженного газа на основе нескольких локальных моделей.
Теоретическая и практическая значимость. Результаты, полученные в данной работе, имеют большое значение для оптимизации тела и создания летательных аппаратов в области авиакосмической промышленности.
Ключевые слова: гиперзвуковой поток, локальные модели, аэродинамическое сопротивление тела вращения, вариационная задача, тепловой поток

Благодарности. Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 20-08-00790

HEAT FLUX AT A CRITICAL POINT OF AXISYMMETRIC BODIES OF MINIMUM RESISTANCE

S. Gorelov, V. Nguyen

Moscow Institute of Physics and Technology
9 Institutskii pereulok, Dolgoprudnyi 141701, Moscow Region, Russian Federation

Abstract
Aim. For a blunt body of revolution with a power generatrix and spherical bluntness, we calculate the heat flux at a critical point.
Methodology. By solving the variational problem, we determine the degree of minimum resistance and the bluntness radius in the generatrix of the body as functions of the elongation in a wide range of Reynolds numbers.
Results. For a blunt body of revolution with a power generatrix and spherical bluntness, the drag force and heat flux at the critical point in a hypersonic rarefied gas flow are calculated based on several local models.

Research implications. The results obtained in this work are more important for the optimization of the body and the creation of aircrafts in the aerospace industry.

Keywords: hypersonic flow, local models, aerodynamic drag of a body of revolution, variational problem, heat flow

Acknowledgments. This work was supported by Russian Foundation for Basic Research (Grant No. 20-08-00790).

Введение

Важнейшей задачей прикладной аэротермодинамики больших сверхзвуковых скоростей является исследование теплообмена в окрестности критической точки, где реализуются максимальные величины тепловых потоков. Для расчёта тепловых потоков в режиме разреженного газа используется метод прямого статистического моделирования решения кинетического уравнения Больцмана (Монте-Карло) [1], в режиме сплошной среды широко применяются расчёты в рамках модели тонкого вязкого ударного слоя [2]. Отметим, что численные решения крайне сложны и для оценок тепловых потоков широко используются различные приближенные зависимости.

Практически во всех приближенных методах расчёта теплового потока на затупленных осесимметричных телах необходимо иметь достаточно простые и надёжные формулы для определения числа Стантона или коэффициента теплопередачи в критической точке.

Теплообмен тела в критической точке выражается через число Стантона St и коэффициент теплопередачи Ch. Эти величины для больших скоростей и малых температурных факторов [3] определяются формулами:

$$St = \frac{q}{\rho_\infty U_\infty C p T_0 \left(1 - t_w\right)}, \quad Ch = \frac{2q}{\rho_\infty U_\infty^3} = St\left(1 - t_w\right), \tag{1}$$

где q – тепловой поток, ρ_∞, U_∞ – плотность и скорость набегающего потока газа, $t_w = T_w/T_0$ – температурный фактор, T_w, T_0 – температура поверхности и температура торможения, Cp – молярная теплоёмкость при постоянном давлении.

Для приближенной оценки коэффициента теплопередачи в критической точке осесимметричных тел используются эмпирические формулы [4], полученные на основе данных эксперимента и решения уравнений модели тонкого вязкого ударного слоя [2]:

$$St = \sqrt{\frac{\dfrac{St_{sm}^2 + \left(1 - St_{sm}^{0,1}\right)\mathrm{Re}_{rs}^{0,1}}{1 + a_0\,\mathrm{Re}_{rs}^{0,9}} + a_*^2\left(a_1\,\mathrm{Re}_{rs}^{1,5} + a_2\,\mathrm{Re}_{rs}^2\right)}{1 + a_2\,\mathrm{Re}_{rs}^3}}, \quad St_{sm} = \frac{1 - 2t_w\left(\gamma - 1\right)/\gamma}{1 - t_w} \tag{2}$$

где St_{sm} – значение числа Стантона в свободномолекулярном случае (при больших скоростях), – $a_0 = 0,3$, $a_1 = (2 - t_w) \times 10^{-5}$, $a_2 = 0,5(1 - t_w) \times 10^{-5}$, $a_* = 2$ – коэффициенты, подобранные таким образом, чтобы при значительном разбросе имеющихся данных в переходной области удовлетворить им в среднем и при этом учесть характерные особенности теплообмена. Число Re_{rs} вычислено по радиусу затупления r_s:

$$\mathrm{Re}_{rs} = \frac{\rho_\infty U_\infty r_s}{\mu_0} = \mathrm{Re}_0\, \hat{r}_s. \qquad (3)$$

Таким образом, одним из основных параметров для расчёта теплопередачи в критической точке осесимметричных тел является радиус затупления.

В данной работе оцениваются тепловые потоки в критической точке для осесимметричных тел минимального сопротивления в потоке разреженного газа. В классической аэродинамической задаче Ньютона осесимметричное тело минимального сопротивления имеет плоский торец [5; 6]. В этом случае радиус затупления бесконечен. Если образующая осесимметрического тела является степенной функцией [7; 8], радиус затупления в критической точке равен нулю. Для того, чтобы радиус затупления в критической точке был равен конечной величине предлагается тело вращения, образующая у которого состоит из двух частей: дуги окружности, плавно переходящей в степенную функцию.

Для оценочных расчётов сил, действующих на тело при его высокоскоростном движении в газе, широкое распространение получили формулы, найденные из локальных моделей. В основе этих моделей лежит предположение, что каждый элемент поверхности тела взаимодействует со средой независимо от других участков тела, и сила, действующая на него, зависит лишь от ориентации элемента относительно направления движения. Примерами такой зависимости является формула Ньютона, используемая в гиперзвуковой аэродинамике для оценочных расчётов распределения давления на поверхности тела, или зависимости, полученные из модели свободномолекулярного движения для сильно разреженных газов. Использование таких формул позволяет записать силы, действующие на тело, в виде интегралов по поверхности, которые методами вариационного исчисления могут быть исследованы на экстремум.

Классическая задача построения тела вращения минимального сопротивления с использованием формулы Ньютона решалась во многих работах [5–8]. Были разработаны эффективные численные методы решения таких задач [9]. В связи с развитием космической техники появился интерес к оптимальным задачам высокоскоростной аэродинамики на больших высотах в разреженном газе [10; 11]. Дальнейшее упрощение таких задач связано с использованием функций разного вида, зависящих от некоторого количества параметров, по которым и производится оптимизация. В частности, широкое распространение получила степенная функция [7; 8].

В данной работе использование образующей тела вращения в виде дуги сферы и степенной функции вместе с локальными методами [12; 13] – формулы свободно-молекулярной аэродинамики, формулы Ньютона, формулы локального метода гиперзвуковой аэродинамики (число Маха набегающего потока стремится к бесконечности) – позволило свести вариационную задачу минимизации функционала (сопротивление тела вращения) к задаче поиска экстремума функции от одной или двух переменных. Решаются задачи об определении формы затупленных тел вращения в гиперзвуковом потоке разреженного газа в широком диапазоне чисел Рейнольдса. Для тел вращения со сферическим затуплением определяется теплообмен в критической точке в широком диапазоне чисел Рейнольдса.

1. Локальный метод

Наибольшее распространения получила локальная модель из [12; 13], в которой коэффициенты давления и трения (отнесённые к скоростному напору $\rho_\infty V_\infty^2/2$) имеют вид:

$$Cp = p_0 \sin^2\theta + p_1 \sin\theta, \quad C\tau = \tau_0 \cos\theta \sin\theta. \tag{4}$$

Функции p_0, p_1, τ_0 зависят от числа Re_0, температурного фактора t_w и показателя степени адиабаты γ, θ – угол атаки элемента поверхности (в нашем случае угол между вектором скорости набегающего потока и касательной к образующей тела вращения, см. рис. 1). Здесь $t_w = T_w/T_0$ – температурный фактор, T_w – температура поверхности тела, T_0 – температура торможения, γ – показатель адиабаты, $\mathrm{Re}_0 = \rho_\infty V_\infty R/\mu(T_0)$, ρ_∞, V_∞, T_∞ – плотность, скорость и температура невозмущённого потока газа, R – радиус основания тела вращения, $\mu(T_0)$ – коэффициент вязкости в зависимости от температуры торможения.

Отличительной особенностью данной модели (кроме простоты) является то, что в предельных случаях изменения числа Рейнольдса она соответствует либо свободномолекулярной модели, либо модели Ньютона.

Так, для свободномолекулярной модели ($\mathrm{Re}_0 \to 0$) [3]:

$$p_0 = \tau_0 = 2, \quad p_1 = \sqrt{\pi t_w (\gamma - 1)/\gamma}. \tag{5}$$

В случае модели Ньютона ($\mathrm{Re}_0 \to 0$) [5]:

$$p_0 = 2, \quad p_1 = \tau_0 = 0. \tag{6}$$

В промежуточной области коэффициенты p_0, p_1, τ_0 аппроксимируются следующими формулами [13]:

$$p_0 = 2, \quad p_1 = z \exp\left[-(0{,}125 + 0{,}078 t_w)\mathrm{Re}_0\right], \quad z = \sqrt{\pi t_w (\gamma - 1)/\gamma}$$
$$\tau_0 = \frac{5{,}23}{\left[s + 6{,}88 \exp\left(0{,}0072 s - 0{,}000016 s^2\right)\right]^{1/2}}, \; s = \mathrm{Re}_0 \left(\frac{3}{4} t_w + \frac{1}{4}\right)^{-2/3}. \tag{7}$$

2. Тело вращения со сферическим затуплением

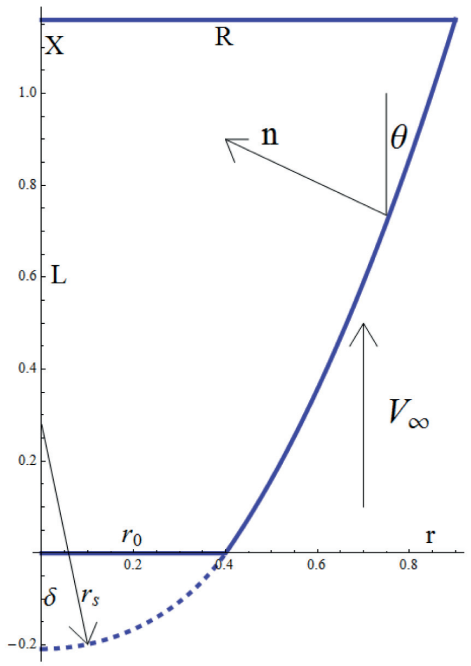

Рис. 1 / Fig. 1. Схема обтекания тела / Body streamline scheme.

Источник: по данным авторов.

Образующая тела вращения $x(r)$ (ось x – ось вращения) состоит из двух частей (см. рис. 1): 1) окружность радиуса r_s при $0 < r < r_0$; 2) степенная функция с показателем степени β при $r_0 < r < R$ (R – радиус основания). Расположим это тело таким образом, что $x(r) = 0$. Расстояние от оси r до основания тела обозначим L, а расстояние от оси r до критической точки обозначим δ. Введём безразмерные переменные:

$$\hat{r} = r / R;\quad \hat{r}_0 = r_0 / R;\quad \hat{r}_s = r_s / R;\quad \hat{\delta} = \delta / R;\quad \lambda = L / R.$$

Тогда уравнение для образующей будет иметь вид:

$$x(\hat{r}) = \begin{cases} x_1(\hat{r}) = \sqrt{\hat{r}_s^2 - \hat{r}_0^2} - \sqrt{\hat{r}_s^2 - \hat{r}^2}, & 0 < \hat{r} < \hat{r}_0 \\ x_2(\hat{r}) = \lambda \dfrac{\hat{r}^\beta - \hat{r}_0^\beta}{1 - \hat{r}_0^\beta}, & \hat{r}_0 < \hat{r} < 1. \end{cases} \tag{8}$$

Здесь, учитывая равенство производных в точке $\hat{r} = \hat{r}_0$, имеем:

$$\hat{r}_s = \frac{1}{\lambda \cdot \beta} \sqrt{\hat{r}_0^4 + \hat{r}_0^{4-2\beta} - 2\hat{r}_0^{4-\beta} + \hat{r}_0^2 \lambda^2 \beta^2};\quad \hat{\delta} = \hat{r}_s - \sqrt{\hat{r}_s^2 - \hat{r}_0^2};\quad \lambda_1 = \lambda + \hat{\delta}. \tag{9}$$

3. Коэффициент сопротивления, действующий на тело вращения

Коэффициент сопротивления тела Cx складывается из сопротивления сферического затупления Cx_1 и поверхности вращения Cx_2. Имея в виду формулы (4) – (7) и то, что площадь элемента поверхности равна $ds = \hat{r}\sqrt{1+x'^2}\,d\hat{r}d\varphi$ (φ – угол вращения вокруг оси, $x' = dx/dr$), получаем:

$$Cx_1 = \tau_0 \cdot \hat{r}_0^2 + 2\left(p_0 - \tau_0\right)\int_0^{\hat{r}_0} \frac{\hat{r}d\hat{r}}{1+x_1'^2} + 2p_1\int_0^{\hat{r}_0} \frac{\hat{r}d\hat{r}}{\sqrt{1+x_1'^2}}$$

$$Cx_2 = \tau_0 \cdot \left(1-\hat{r}_0^2\right) + 2\left(p_0 - \tau_0\right)\int_{\hat{r}_0}^{1} \frac{\hat{r}d\hat{r}}{1+x_2'^2} + 2p_1\int_{\hat{r}_0}^{1} \frac{\hat{r}d\hat{r}}{\sqrt{1+x_2'^2}}. \qquad (10)$$

Используя гипергеометрическую функцию F[a, b, c, d], можно записать:

$$Cx = Cx_1 + Cx_2 = \tau_0 + \left(p_0 - \tau_0\right)\frac{2\hat{r}_0^2\hat{r}_s^2 - \hat{r}_0^4}{2\hat{r}_s^2} + p_1\frac{2}{3\hat{r}_s}\left[\hat{r}_s^3 - \left(\hat{r}_s^2 - \hat{r}_0^2\right)^{3/2}\right] +$$

$$+\left(p_0 - \tau_0\right)\left\{F\left(1, \frac{1}{\beta-1}, \frac{\beta}{\beta-1}, -\left(\frac{\lambda\cdot\beta}{1-\hat{r}_0^\beta}\right)^2\right) - \hat{r}_0^2 F\left(1, \frac{1}{\beta-1}, \frac{\beta}{\beta-1}, -\left(\hat{r}_0^{\beta-1}\frac{\lambda\cdot\beta}{1-\hat{r}_0^\beta}\right)^2\right)\right\} +$$

$$+ p_1\left\{F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\beta-1}, \frac{\beta}{\beta-1}, -\left(\frac{\lambda\cdot\beta}{1-\hat{r}_0^\beta}\right)^2\right) - \hat{r}_0^2 F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\beta-1}, \frac{\beta}{\beta-1}, -\left(\hat{r}_0^{\beta-1}\frac{\lambda\cdot\beta}{1-\hat{r}_0^\beta}\right)^2\right)\right\}. \qquad (11)$$

Таким образом, вариационная задача отыскания образующей тела вращения минимального сопротивления со сферическим затуплением в гиперзвуковом потоке разреженного газа сводится к решению задачи об отыскании минимума функции от двух переменных – степени в степенной образующей β и радиуса сферического затупления $\hat{r}_s$, если в качестве образующей тела вращения выбрать функцию (8). Будем считать, что свободномолекулярный случай реализуется при $Re_0 \to 0$, а случай $Re_0 \to \infty$ описывается формулой Ньютона. В табл. 1 представлены результаты решения такой задачи, то есть величины радиуса сферического затупления $\hat{r}_s$ и степени β в зависимости от отношения высоты тела к радиусу основания λ_1 для разных чисел Re_0. Расчёты производились при температурном факторе t_w = 0,1 и отношении теплоёмкостей γ = 1,4. В табл. 1 также помещены величины коэффициентов сопротивления Cx.

При всех числах Re_0 показатель степени в образующей тела вращения минимального сопротивления увеличивается от величин порядка единицы (то есть конической поверхности) при малых удлинениях к своим предельным значениям в случаях больших удлинений. Так в свободномолекулярном случае (Re_0 = 0) показатель степени при больших удлинениях стремится к величине β = 1,5, а в ньютоновском случае ($Re_0 = \infty$) к β = 1,333 [8]. Значения радиуса сферического затупления уменьшается от сравнительно больших величин (0,3 ÷ 0,5) при малых удлинениях (λ_1 = 2) до нуля при больших λ_1 для всех Re_0.

Таблица 1 / Table 1

Величина радиуса сферического затупления $\hat{r}_s$, степени β и коэффициентов сопротивления тела вращения минимального сопротивления в зависимости от отношения высоты тела к радиусу основания λ_1 для разных чисел Re_0 / The value of the radius of spherical bluntness $\hat{r}_s$, the degree β and coefficients of resistance of the body of rotation of the minimum resistance, depending on the ratio of the height of the body to the radius of the base λ_1 for different numbers Re_0

λ_1	2	3	4	5	6	10	20	50	100
				$Re_0 = 0$					
β	1,01	1,412	1,471	1,499	1,49	1,5	1,5	1,5	1,5
$\hat{r}_s$	0,5334	0,3102	0,1929	0,1303	0,09295	0,03474	0,008937	0,001441	0,000361
Cx	2,119	2,084	2,064	2,052	2,044	2,027	2,013	2,005	2,003
				$Re_0 = 1$					
β	1,119	1,386	1,457	1,47	1,467	1,465	1,476	1,488	1,493
$\hat{r}_s$	0,4468	0,222	0,1261	0,07899	0,05371	0,0182	0,004237	0,000643	0,000158
Cx	1,887	1,834	1,807	1,792	1,782	1,763	1,75	1,743	1,74
				$Re_0 = 10$					
β	1,168	1,345	1,385	1,386	1,378	1,372	1,385	1,417	1,443
$\hat{r}_s$	0,3676	0,1538	0,07314	0,03922	0,0243	0,006721	0,00108	0,000116	0,000026
Cx	1,178	1,079	1,037	1,016	1,005	0,9864	0,9763	0,9724	0,9714
				$Re_0 = 100$					
β	1,173	1,336	1,37	1,368	1,357	1,341	1,335	1,334	1,333
$\hat{r}_s$	0,3552	0,144	0,06612	0,03411	0,02055	0,005071	0,000649	0,0000042	0,0
Cx	0,6287	0,4858	0,4267	0,3985	0,3836	0,3604	0,3501	0,3472	0,3467
				$Re_0 = \infty$					
β	1,173	1,378	1,379	1,351	1,348	1,341	1,335	1,334	1,333
$\hat{r}_s$	0,3548	0,1469	0,06966	0,0372	0,02253	0,005005	0,0000891	0,000058	0,0
Cx	0,341	0,1666	0,09748	0,06465	0,04562	0,01668	0,004206	0,000675	0,000169

Источник: составлено авторами.

4. Тепловой поток в критической точке

На рис. 2 нанесены зависимости коэффициентов теплопередачи *Ch* в критической точке для затупленных по сфере тел вращения минимального сопротивления к значению в свободномолекулярном случае Ch_0, полученных из формул (1) и (2) и табл. 1.

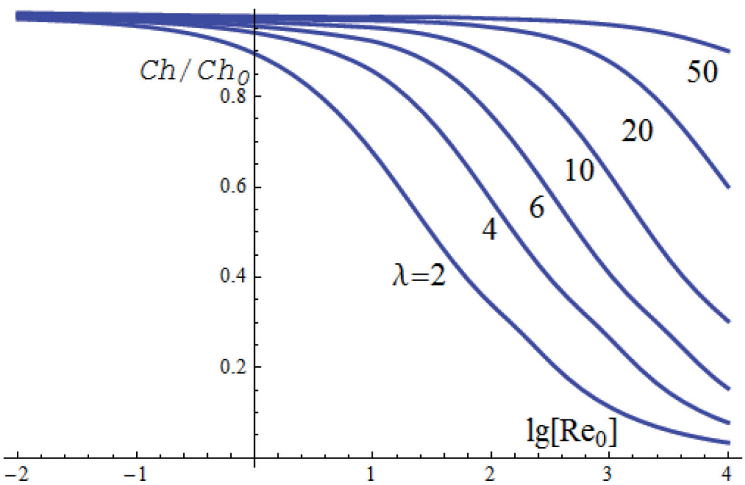

Рис. 2 / Fig. 2. Отношение коэффициента теплопередачи к его свободномолекулярному значению в зависимости от числа Рейнольдса для разных удлинений λ_1, $t_w = 0{,}1$, $\gamma = 1{,}4$ / The ratio of the coefficient of heat transfer to its free-molecular value depending on the number of Reynolds for different elongations λ_1, $t_w = 0{,}1$, $\gamma = 1{,}4$.

Источник: по данным авторов.

Отметим монотонное уменьшение коэффициента теплопередачи по числам Re_0 для любого удлинения. Причём для малых удлинений ($\lambda_1 = 2$ соответствует случаю, когда длина тела равна диаметру основания) коэффициент теплопередачи уменьшается существенно быстрее по сравнению с большими удлинениями.

Этот момент интересен тем, что при больших удлинениях величина коэффициента теплопередачи остаётся близкой к его значению в свободномолекулярном течении в широком диапазоне чисел Рейнольдса. Так, при $\lambda_1 = 50$ коэффициент теплопередачи остаётся близким к свободномолекулярному значению вплоть до чисел $Re_0 \approx 10^3$.

Заключение

Для тела вращения со степенной образующей и сферическим затуплением вычисляется сила сопротивления и тепловой поток в критической точке в гиперзвуковом потоке разреженного газа на основе нескольких локальных моделей.

Решением вариационной задачи определяется степень в образующей тела минимального сопротивления и радиус затупления в критической точке в зависимости от удлинения в широком диапазоне чисел Рейнольдса.

Отметим монотонное уменьшение коэффициента теплопередачи с увеличением числа Рейнольса Re_0 по радиусу основания тела вращения для любого удлинения. Особенно, при $\lambda_1 = 2$, коэффициент теплопередачи уменьшается существенно быстрее по сравнению со случаем больших удлинений. Более того, при $\lambda_1 = 50$ коэффициент теплопередачи остаётся близким к свободномолекулярному значению вплоть до чисел $Re_0 \approx 10^3$.

Статья поступила в редакцию 10.12.2021 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горелов С. Л., Русаков С. В. Физико-химическая модель гиперзвукового обтекания тел разреженным газом // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2002. № 3. С. 131–144.
2. Теплообмен в окрестности пространственной критической точки неравновесного вязкого ударного слоя при произвольной каталитической активности поверхности / Ботин А. В., Провоторов В. П., Рябов В. В., Степанов Э. А. // Труды ЦАГИ. 1999. Вып. 2514. С. 13–22.
3. Коган М. Н. Динамика разреженного газа. М: Наука, 1967. 440 с.
4. Провоторов В. П., Степанов Э. А. Приближенные зависимости для расчета теплообмена на теле, обтекаемом гиперзвуковым потоком газа // Ученые записки ЦАГИ. 1992. Т. 23. № 2. С. 25–29.
5. Ньютон И. Математические начала натуральной философии. М: Наука, 1989. 688 с.
6. Черный Г. Г. Течение газа с большой сверхзвуковой скоростью. М: Физматгиз, 1959. 220 с.
7. Благосклонов В. И., Гродзовский Г. Л. Осесимметричное обтекание тел вращения степенной формы при сверхзвуковых скоростях набегающего потока // Ученые записки ЦАГИ. 1974. Т. 5. № 6. С. 16–22.
8. Горелов С. Л., Нгуен Ван Лам. Тело вращения минимального аэродинамического сопротивления в гиперзвуковом потоке разреженного газа // Труды МАИ (сетевое научное издание). 2020. № 113. URL: http://www.trudymai.ru/published.php?ID=117962 (дата обращения: 06.07.2021). DOI: 10.34759/trd-2020-113-4.
9. Черноусько Ф. Л., Баничук Н. В. Вариационные задачи механики и управления. М: Наука, 1973. 240 с.
10. Бунимович А. И., Якунина Г. Е. Исследование форм поперечного контура конического пространственного тела минимального сопротивления, движущегося в разреженном газе // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1986. № 5. С. 112–117.
11. Перминов В. Д., Солодкин Е. Е. Осесимметричные тела с минимальным сопротивлением при заданном тепловом потоке к поверхности // Ученые записки ЦАГИ. 1971. Т. 2. № 6. С. 32–40.
12. Теоретические и экспериментальные исследования обтекания тел простой формы гиперзвуковым потоком разреженного газа / Гусев В. Н., Ерофеев А. И., Климова Т. В., Перепухов В. А., Рябов В. В., Толстых А. И. // Труды ЦАГИ. 1977. Вып. 1855. С. 43.
13. Галкин В. С., Ерофеев А. И., Толстых А. И. Приближенный метод расчета аэродинамических характеристик тел в гиперзвуковом потоке разреженного газа // Труды ЦАГИ. 1977. Вып. 1833. С. 6–10.

REFERENCES

1. Gorelov S. L., Rusakov S. V. [Physico-chemical model of hypersonic flow of bodies rarefied gas]. In: *Izvestiya Rossiiskoi akademii nauk. Mekhanika zhidkosti i gaza* [Fluid Dynamics], 2002, no. 3, pp. 131–144.
2. Botin A. V., Provotorov V. P., Ryabov V. V., Stepanov E. A. [Heat exchange in the vicinity of the spatial critical point of a nonequilibrium viscous shock layer with arbitrary catalytic surface activity]. In: *Trudy TSAGI* [Proceedings of Central Aerohydrodynamic Institute], 1999, no. 2514, pp. 13–22.
3. Kogan M. N. *Dinamika razrezhennogo gaza* [Rarefied gas dynamics]. Moscow, Nauka Publ., 1967. 440 p.
4. Provotorov V. P., Stepanov E. A. [Approximate dependences for calculating the heat transfer on the body, a flowing hypersonic flow of gas]. In: *Uchenye zapiski TSAGI* [Scientific Notes of Central Aerohydrodynamic Institute], 1992, vol. 23, no. 2, pp. 25–29.
5. Newton I. *Matematicheskie nachala natural'noi filosofii* [Mathematical principles of natural philosophy]. Moscow, Nauka Publ., 1989. 688 p.
6. Chernyi G. G. *Techenie gaza s bol'shoi sverkhzvukovoi skorost'yu* [Gas flow at high supersonic speed]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1959. 220 p.
7. Blagosklonov V. I., Grodzovskii G. L. [Oximetrating flow of power of the power of a power form with supersonic raw flow rates]. In: *Uchenye zapiski TSAGI* [Scientific Notes of Central Aerohydrodynamic Institute], 1974, vol. 5, no. 6, pp. 16–22.
8. Gorelov S. L., Nguyen Van Lam [Rotation body of minimal aerodynamic drag in hypersonic rarefied gas flow]. In: *Trudy MAI (setevoe nauchnoe izdanie)* [Trudy MAI (Network scientific periodic publication)], 2020, no. 113. Available at: http://www.trudymai.ru/published.php?ID=117962 (accessed: 06.07.2021). DOI: 10.34759 / trd-2020-113-4.
9. Chernous'ko F. L., *Banichuk N. V. Variatsionnye zadachi mekhaniki i upravleniya* [Variational problems of mechanics and control]. Moscow, Nauka Publ., 1973. 240 p.
10. Bunimovich A. I., Yakunina G. E. [Investigation of the forms of the transverse contour of the conical spatial body of the minimum resistance moving in a sparse gas]. In: *Izvestiya AN SSSR. Mekhanika zhidkosti i gaza* [Fluid Dynamics], 1986, no. 5, pp. 112–117.
11. Perminov V. D., Solodkin E. E. [Oxisymmetric bodies with minimal resistance at a given thermal stream to the surface]. In: *Uchenye zapiski TSAGI* [Scientific Notes of Central Aerohydrodynamic Institute], 1971, vol. 2, no. 6, pp. 32–40.
12. Gusev V. N., Erofeev A. I., Klimova T. V., Perepukhov V. A., Ryabov V. V., Tolstykh A. I. [Theoretical and experimental studies of a hypersonic rarefied gas flow around bodies of simple shape]. In: *Trudy TSAGI* [Proceedings of Central Aerohydrodynamic Institute], 1977, no. 1855, P. 43.
13. Galkin V. S., Erofeev A. I., Tolstykh A. I. [Approximate method for calculating the aerodynamic characteristics of the bodies in the hypersonic stream of sparse gas]. In: *Trudy TSAGI* [Proceedings of Central Aerohydrodynamic Institute], 1977, no. 1833, pp. 6–10.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Горелов Сергей Львович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры компьютерного моделирования МФТИ Московского физико-технического института (национального исследовательского университета);
e-mail: gorelovsl@yandex.ru

Нгуен Ван Лам – аспирант кафедры компьютерного моделирования МФТИ Московского физико-технического института (национального исследовательского университета);
e-mail: lamvqtc1990@gmail.com

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Sergey L. Gorelov – Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Department of Computer Modeling of MIPT, Moscow Institute of Physics and Technology;
e-mail: gorelovsl@yandex.ru;
Van Lam Nguyen – Postgraduate Student, Department of Computer Modeling of MIPT, Moscow Institute of Physics and Technology;
e-mail: lamvqtc1990@gmail.com.

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Горелов С. Л., Нгуен В. Л. Тепловой поток в критической точке осесимметричых тел минимального сопротивления // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2021. № 4. С. 43–53.
DOI: 10.18384/2310-7251-2021-4-43-53.

FOR CITATION

Gorelov S. L., Nguyen V. L. Heat flux at a critical point of axisymmetric bodies of minimum resistance. In: *Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics.* 2021. no. 4. pp. 43–53.
DOI: 10.18384/2310-7251-2021-4-43-53.

УДК 533.951, 535.393, 538.958
DOI: 10.18384/2310-7251-2021-4-54-65

КВАНТОВАЯ ЭЛЕКТРОННАЯ ПЛАЗМА И ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ S-ВОЛНЫ С МЕТАЛЛИЧЕСКИМ ПОЛУПРОСТРАНСТВОМ

Бедрикова Е. А., Зверев Н. В., Парёнкина В. И., Юшканов А. А.

Московский государственный областной университет
141014, Московская область, г. Мытищи, ул. Веры Волошиной, д. 24, Российская Федерация

Аннотация

Цель: исследование влияния кинетических и квантовых волновых свойств вырожденной электронной плазмы на взаимодействие S-волны с металлическим полупространством.

Процедура и методы. Зависимость энергетического коэффициента поглощения S-волн металлическим полупространством от частоты излучения, не превосходящей плазменную частоту, изучается и анализируется с помощью теоретических соотношений, учитывающих поперечную диэлектрическую проницаемость плазмы электронов проводимости.

Результаты. Показано, что при обычных значениях частоты столкновений электронов проводимости результаты для квантовой электронной плазмы отличаются от результатов для классической электронной плазмы и классического электронного газа. А в случае малых значений частоты столкновений электронов результаты для квантовой и классической электронной плазмы практически совпадают при частотах, меньших плазменной частоты, и отличаются при частотах вблизи этой частоты.

Теоретическая/практическая значимость. Полученные результаты целесообразно использовать при теоретическом исследовании взаимодействия излучения с металлами, а также при создании оптических устройств, использующих металлические детекторы излучения.

Ключевые слова: оптические коэффициенты, металл, полупространство, электронная плазма

Благодарности. Авторы выражают благодарность профессору Беляеву В. В. (зав. кафедрой теоретической физики МГОУ) за полезные замечания и активную поддержку. Работа выполнена при финансовой поддержке фонда РФФИ, грант № 19-07-00537 А.

QUANTUM ELECTRON PLASMA AND S-WAVE INTERACTION WITH METAL HALF-SPACE

E. Bedrikova, N. Zverev, V. Paryonkina, A. Yushkanov

Moscow Region State University
24 ulitsa Very Voloshinoi, Mytishchi 141014, Moscow Region, Russian Federation

Abstract
Aim. We study the influence of kinetic and quantum wave properties of degenerate electron plasma on the S-wave interaction with metal half-space.
Methodology. The dependence of the energy absorption coefficient of S-waves by metal half-space on the radiation frequency not exceeding the plasma frequency is studied and analyzed using theoretical formulae that take into account the transverse dielectric permittivity of the plasma of conduction electrons.
Results. It is shown that at the usual values of the collision frequency of conduction electrons, the results for quantum electron plasma differ from the results for classical electron plasma and for classical electron gas. In the case of small values of the collision frequency of electrons, the results for quantum and classical electron plasmas almost coincide at the frequencies less than the plasma frequency, and differ at frequencies near this frequency.
Research implications. The obtained results can be used in the theoretical study of interaction of radiation with metals, as well as in the development of optical devices using metal radiation detectors.
Keywords: optical coefficients, metal, half-space, electronic plasma

Acknowledgments. The authors are grateful to Professor V. V. Belyaev (Head of the Department of Theoretical Physics, Moscow Region State University) for useful comments and active support. This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (Grant No. 19-07-00537 A).

Введение

В настоящее время большое внимание уделяется исследованию взаимодействия электромагнитного излучения с проводящими объектами, в том числе с теми из них, которые имеют достаточно малые размеры [1–8]. Интерес к такому исследованию вызван, с одной стороны, развитием нанотехнологий и связанным с ним созданием оптических устройств, обладающих тонкими характеристиками. С другой стороны, данное исследование имеет фундаментальное значение, направленное на развитие теоретической и прикладной физики.

Для теоретического исследования взаимодействия излучения с проводящими веществами обычно используют кинетическое уравнение Больцмана для функции распределения электронов проводимости [9; 10]. Как правило, это уравнение рассматривают в приближении времени релаксации. В данном подходе учитываются кинетические свойства электронов проводимости. Этот подход приводит к неплохому согласию с экспериментальными данными при частотах излучения, много меньших плазменной частоты [7].

Однако при частотах порядка плазменной частоты необходимо учитывать квантовые волновые свойства электронов проводимости [6]. Для этого вместо кинетического уравнения Больцмана необходимо рассматривать уравнение Лиувилля-Шрёдингера с матрицей плотности проводящих электронов [11]. В то же время исследования с использованием данного подхода сталкиваются с определённой трудностью. Проблема состоит в том, что при рассмотрении тел малых размеров необходимо принимать во внимание граничные эффекты электронов проводимости. А описание этих эффектов не переносится напрямую с классической функции распределения к матрице плотности электронов вследствие волновых свойств и наличия принципа неопределённости (о выборе граничных условий для электронов проводимости в квантовом подходе см. [12]). Поэтому исследования квантовой плазмы электронов проводимости ведутся достаточно слабо (электронная плазма с учётом квантовых волновых свойств рассматривается в работе [13]).

Настоящая работа направлена на восполнение пробела в изучении волновых свойств электронов проводимости в электронной плазме. В данной работе численно исследуется влияние кинетических и квантовых волновых свойств вырожденной электронной плазмы на взаимодействие S-волн с металлическим полупространством. При этом выполняется сравнение результатов для квантовой вырожденной электронной плазмы с результатами для классической вырожденной плазмы и классического электронного газа в случае энергетического коэффициента поглощения излучения при частотах излучения, не превосходящих плазменную частоту.

1. Модель и диэлектрические проницаемости вырожденной электронной плазмы

Мы предполагаем, что в одной части полупространства с $z < 0$ находится прозрачная диэлектрическая среда с постоянной диэлектрической проницаемостью ε, а другую часть полупространства с $z > 0$ занимает металлическая среда (рис. 1). Металлическую среду будем считать изотропной, т. е. поверхность Ферми электронов проводимости имеет сферическую форму. Пусть со стороны диэлектрической среды на поверхность металлической среды под углом θ падает электромагнитная волна. Мы рассматриваем S-волну, вектор **H** которой лежит в плоскости падения XZ (см. рис. 1).

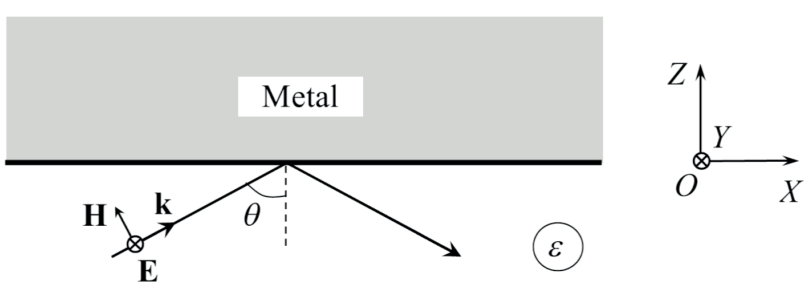

Рис. 1 / Fig. 1. Схема распространения электромагнитного излучения / Scheme of propagation of electromagnetic radiation

Источник: по данным авторов.

При низких частотах поля задача может быть рассмотрена в рамках макроскопической электродинамики. При этом электромагнитное поле проникает вглубь металла на глубину скин-слоя. Это описывается в теории скин-эффекта. При низких частотах электромагнитного поля мы имеем дело с нормальным скин-эффектом. При этом диэлектрическую проницаемость металла можно считать не зависящей от частоты поля. Можно пренебречь временной и пространственной дисперсией. По мере роста частоты поля глубина скин-слоя уменьшается. Когда толщина скин-слоя становится сравнимой с длиной пробега электронов в металле, предположение о постоянстве диэлектрической проницаемости становится неприменимым. Мы переходим в область аномального скин-эффекта. В этом случае необходимо учитывать зависимость диэлектрической проницаемости металла от частоты и волнового вектора. Свой вклад вносит зависимость характера взаимодействия электронов с электромагнитным излучением от квантовых эффектов. Учёт этой зависимости будет предметом изучения в данной работе.

В данной работе мы изучаем безразмерный энергетический коэффициент поглощения A. Для металлического полупространства в случае S-волны этот коэффициент имеет вид [14; 15]:

$$A = 1 - R, \quad R = \left| \frac{Z\sqrt{\varepsilon}\cos\theta + 1}{Z\sqrt{\varepsilon}\cos\theta - 1} \right|^2, \tag{1}$$

где Z – безразмерный поверхностный импеданс S-волны для металлического полупространства:

$$Z = \frac{1}{Z_0} \frac{E_y}{H_x}\bigg|_{z=0} = \frac{2c\omega}{\pi i} \int\limits_0^{+\infty} \frac{dk_z}{\omega^2 \varepsilon_{tr}(\omega, k) - (ck)^2}. \tag{2}$$

Данный импеданс получен в предположении зеркального отражения электронов от поверхности металла. Здесь Z_0 – волновое сопротивление вакуума в системе СИ, E_y и H_x – проекции векторов **E** и **H** волны на оси Y и X соответственно (рис. 1), ω – частота излучения, c – скорость света, $\varepsilon_{tr}(\omega,k)$ – поперечная диэлектрическая проницаемость электронной плазмы, k – волновое число. В формуле (2) оно равно

$$k = \sqrt{k_x^2 + k_z^2}, \tag{3}$$

где k_x – проекция волнового вектора $\mathbf{k}$ падающей S-волны на ось X (рис. 1):

$$k_x = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon}\sin\theta. \tag{4}$$

В данной работе рассматривается поперечная диэлектрическая проницаемость $\varepsilon_{tr}^{(qu)}(\omega, k)$ квантовой вырожденной электронной плазмы при нулевой температуре с постоянной частотой столкновений, полученная в подходе Мермина с использованием матрицы плотности [11]:

$$\varepsilon_{tr}^{(qu)}(\omega, k) = 1 - \frac{1}{\Omega^2}\left(1 + \frac{\Omega F(\Omega + i\gamma, Q) + i\gamma F(0, Q)}{\Omega + i\gamma}\right). \tag{5}$$

Здесь функция

$$F(\Omega+i\gamma,Q)=B(\Omega_{+}+i\gamma,Q)-B(\Omega_{-}+i\gamma,Q)+$$
$$+\frac{9}{8}\left(\frac{\Omega+i\gamma}{Q}\right)^{2}+\frac{3}{32}(rQ)^{2}-\frac{5}{8}, \tag{6}$$

где

$$B\left(\Omega+i\gamma,Q\right)=\frac{3}{16rQ^{5}}\left[\left(\Omega+i\gamma\right)^{2}-Q^{2}\right]^{2}\ln\frac{\Omega+i\gamma-Q}{\Omega+i\gamma+Q}, \tag{7}$$

а также

$$\Omega=\frac{\omega}{\omega_{p}},\quad \Omega_{\pm}=\Omega\pm\frac{1}{2}rQ^{2},\quad \gamma=\frac{\nu}{\omega_{p}},\quad Q=\frac{\upsilon_{F}k}{\omega_{p}},\quad r=\frac{\hbar\omega_{p}}{m_{e}\upsilon_{F}^{2}}. \tag{8}$$

В этих обозначениях ω_p – плазменная частота электронной плазмы, ν – частота столкновений электронов в плазме, m_e – эффективная масса электронов проводимости, υ_F – скорость Ферми электронов вырожденной плазмы, $\hbar$ – постоянная Планка.

В диэлектрической проницаемости (5) учитываются как кинетические, так и квантовые волновые свойства вырожденной электронной плазмы. В классическом пределе $\hbar \to 0$ проницаемость $\varepsilon_{tr}^{(qu)}(\omega, k)$ переходит в поперечную диэлектрическую проницаемость $\varepsilon_{tr}^{(cl)}(\omega, k)$ классической вырожденной электронной плазмы [9]:

$$\varepsilon_{tr}^{(cl)}(\omega,k)=1-\frac{3}{4\Omega Q^{3}}\left\{2(\Omega+i\gamma)Q+\left[(\Omega+i\gamma)^{2}-Q^{2}\right]\ln\frac{\Omega+i\gamma-Q}{\Omega+i\gamma+Q}\right\}. \tag{9}$$

Эта проницаемость учитывает только кинетические свойства электронов. А в длинноволновом пределе $k \to 0$ обе проницаемости $\varepsilon_{tr}^{(qu)}(\omega, k)$ и $\varepsilon_{tr}^{(cl)}(\omega, k)$ переходят в поперечную диэлектрическую проницаемость $\varepsilon_{tr}^{(DL)}(\omega)$ классического электронного газа в подходе Друде-Лоренца [1; 9; 14; 15]:

$$\varepsilon_{tr}^{(DL)}(\omega)=1-\frac{1}{\Omega(\Omega+i\gamma)}. \tag{10}$$

Последняя диэлектрическая проницаемость не описывает ни кинетических, ни квантовых волновых свойств электронной плазмы.

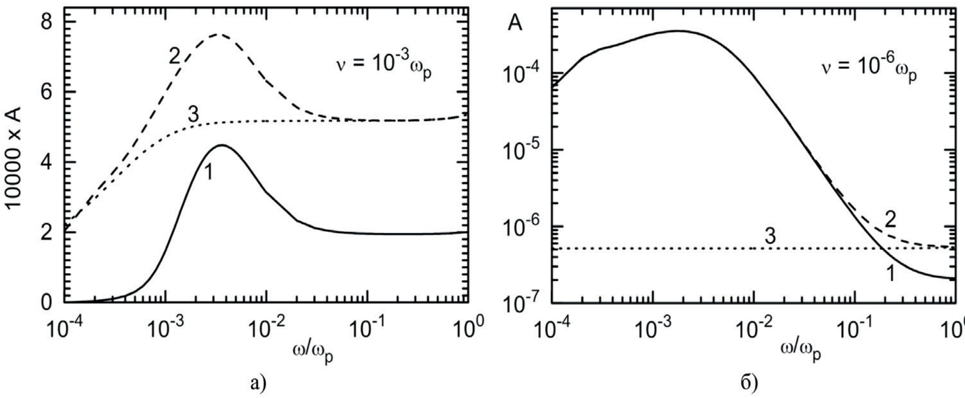

Рис. 2 / Fig. 2. Зависимость коэффициента поглощения *A* S-волны от частоты ω для угла падения θ = 75° в случае частоты столкновений $\nu = 10^{-3}\omega_p$ (рис. 2а) и $\nu = 10^{-6}\omega_p$ (рис. 2б): 1 – квантовая электронная плазма (сплошная линия); 2 – классическая электронная плазма (пунктирная линия); 3 – классический электронный газ (точечная линия) / Dependence of the absorption coefficient A of the S-wave on the frequency ω for the angle of incidence θ = 75° in the case of the collision frequency $\nu = 10^{-3}\omega_p$ (fig. 2a) and $\nu = 10^{-6}\omega_p$ (fig. 2б): 1 – quantum electron plasma (solid line); 2 – classical electron plasma (dashed line); 3 – classical electron gas (dotted line).

Источник: [16].

2. Результаты исследования

Нами по формулам (1) – (10) выполнены численные исследования энергетического коэффициента поглощения *A* электромагнитной S-волны в металлическом полупространстве в зависимости от частоты излучения ω при различных углах падения θ. При этом данный коэффициент был рассчитан для квантовой вырожденной плазмы, классической вырожденной плазмы и классического электронного газа. Данным случаям соответствуют диэлектрические проницаемости (5), (9) и (10) в поверхностном импедансе (2).

В качестве вещества металлического полупространства нами выбран алюминий. Плазменная частота, эффективная масса и скорость Ферми электронов проводимости в вырожденной электронной плазме алюминия при обычных температурах равны, соответственно, $\omega_p = 1{,}93\cdot10^{16}$ с$^{-1}$, $m_e = 1{,}35\cdot10^{-30}$ кг и $\upsilon_F = 1{,}34\cdot10^{6}$ м/с [14]. Рассмотрены различные частоты столкновений электронов проводимости алюминия [1; 14]: обычная частота столкновений $\nu = 10^{-3}\omega_p$ при нормальных температурах и пониженная частота столкновений $\nu = 10^{-6}\omega_p$ при достаточно низких температурах. В качестве прозрачного диэлектрика мы рассматриваем воздух с диэлектрической проницаемостью ε = 1. Рассматриваемые нами частоты излучения лежат в диапазоне $\omega = (10^{-4} \div 1)\omega_p$.

Типичные результаты численного исследования коэффициента поглощения *A* в зависимости от частоты излучения ω представлены на рис. 2 [16]. Видно, что в случае обычной для алюминия частоты столкновений электронов $\nu = 10^{-3}\omega_p$ коэффициент поглощения квантовой вырожденной электронной плазмы отличается от коэффициентов поглощения классической вырожденной плазмы и классического электронного газа при всех частотах из рассматриваемого диапазона $\omega = (10^{-4} \div 1)\omega_p$ (рис. 2а). При этом коэффициент поглощения в случае классической вырожденной плазмы отличается от данного коэффициента для классического электронного газа при частотах $\omega << \omega_p$, причём $\omega \sim 3 \cdot 10^{-3}\omega_p$. Но при частотах излучения $\omega \sim 10^{-4}\omega_p$ и $\omega \sim (0,1 \div 1)\omega_p$ коэффициенты поглощения классической плазмы и классического электронного газа практически совпадают.

Ситуация существенно меняется при значительном уменьшении частоты столкновений электронов (рис. 2б). В случае пониженной частоты столкновений $\nu = 10^{-6}\omega_p$ происходит совпадение значений коэффициента поглощения A квантовой и классической вырожденной электронной плазмы при частотах $\omega << \omega_p$. При этих частотах коэффициент поглощения квантовой и классической электронной плазмы значительно превосходит данный коэффициент в случае классического электронного газа. Однако при частотах $\omega \sim (0,1 \div 1)\omega_p$ коэффициент поглощения квантовой вырожденной плазмы отличается от данного коэффициента классической вырожденной плазмы. А коэффициент поглощения классической плазмы при частотах $\omega \sim (0,5 \div 1)\omega_p$ почти совпадает с коэффициентом поглощения классического электронного газа.

3. Обсуждение

Полученные результаты численного исследования коэффициента поглощения излучения металлическим полупространством можно истолковать следующим образом.

Из формулы (5) для поперечной диэлектрической проницаемости квантовой вырожденной электронной плазмы $\varepsilon_{tr}^{(qu)}(\omega, k)$ с функциями (6), (7) и обозначениями (8) видно, что существенный вклад в диэлектрическую проницаемость этой плазмы даёт слагаемое $F(0,Q)$, причём данный вклад не исчезает даже при малых значениях волнового числа k. Из-за этого вклада при обычных значениях частоты столкновений электронов проводимости $\nu = 10^{-3}\omega_p$ результаты для коэффициента поглощения A квантовой вырожденной электронной плазмы отличаются от результатов данного коэффициента как классической электронной плазмы, так и классического электронного газа. Отличие коэффициента поглощения классической плазмы от классического электронного газа при $\omega \sim 3 \cdot 10^{-3}\omega_p$ наблюдалось в работах [1; 14; 15]. Для плазменного полупространства в случае классической вырожденной электронной плазмы данное отличие имеет место при частотах излучения $\omega \sim (\upsilon_F/c)\omega_p$; метод оценки представлен в [10]. Такое поведение соответствует результатам расчётов, поскольку в случае алюминия $\upsilon_F / c \cong 4,47 \cdot 10^{-3}$. При этих же частотах наблюдается максимум коэффициента поглощения квантовой вырожденной плазмы (рис. 2а). А при других частотах излучения, в том числе при $\omega \geq 0,1\omega_p$, существенный вклад в импеданс (2) дают малые волновые числа k, для которых согласно (9) и (10) $\varepsilon_{tr}^{(qu)}(\omega, k) \approx \varepsilon_{tr}^{(DL)}(\omega)$ в случае обычных значений частоты столкновений ν. Этим можно объяснить согласие при данных частотах коэффициентов поглощения классической вырожденной электронной плазмы и классического электронного газа.

Однако при пониженных значениях частоты столкновений электронов ν, таких как $\nu = 10^{-6}\omega_p$, становится заметным влияние кинетических свойств электронной плазмы. При этом влияние слагаемого $F(0,Q)$ в поперечной диэлектрической проницаемости квантовой вырожденной электронной плазмы $\varepsilon_{tr}^{(qu)}(\omega, k)$ согласно (5) с обозначениями (8) становится достаточно малым. Вследствие этого при частотах $\omega \le 0{,}1\omega_p$ коэффициент поглощения A квантовой вырожденной электронной плазмы практически совпадает с коэффициентом поглощения классической вырожденной электронной плазмы. Отличие коэффициентов поглощения классической вырожденной электронной плазмы от классического электронного газа при малых значениях частоты столкновений электронов ν объясняется наличием затухания Ландау в плазме [1; 5; 9; 10]. Данное затухание имеет место даже в случае отсутствия столкновений электронов в плазме, когда $\nu \to 0$. Поэтому коэффициенты поглощения квантовой и классической электронной плазмы при малых ν в области частот $\omega << \omega_p$ превосходят коэффициент поглощения классического электронного газа. В то же время, согласно формулам (6) – (8), при частотах $\omega \sim \omega_p$ ($\omega \le \omega_p$) происходит вклад в диэлектрическую проницаемость выражений, содержащих коэффициент r. Данные слагаемые отвечают за квантовые волновые свойства электронов плазмы. Поэтому в области частот $\omega > 0{,}1\omega_p$ проявляются квантовые волновые свойства электронов вырожденной плазмы, что приводит к отличию коэффициентов поглощения A квантовой и классической вырожденной электронной плазмы.

Заключение

В данной работе численно исследовано влияние кинетических и квантовых волновых свойств вырожденной плазмы электронов проводимости на взаимодействие электромагнитного излучения с металлическим полупространством. Изучен энергетический коэффициент поглощения электромагнитной S-волны металлическим полупространством методом диэлектрической проницаемости электронной плазмы в предположении зеркального отражения электронов от поверхности металла. Рассмотрены диэлектрические проницаемости квантовой электронной плазмы с учётом её кинетических и квантовых свойств, классической плазмы с учётом только кинетических свойств и, наконец, классического электронного газа без учёта кинетических и квантовых свойств. Исследования выполнены при частотах излучения, не превышающих плазменную частоту, при двух значениях частоты столкновений электронов плазмы.

Численными исследованиями показано, что в случае обычной частоты столкновений электронов при частотах излучения, не превосходящих плазменную частоту, коэффициент поглощения электромагнитной S-волны для квантовой плазмы отличается от коэффициентов поглощения для классической плазмы и для классического электронного газа. При этом коэффициент поглощения для классической плазмы отличается от коэффициента поглощения для классического электронного газа в области частот, много меньших плазменной частоты. А в случае пониженной частоты столкновений электронов происходит совпадение значений коэффициентов поглощения для квантовой и классической вырожденной электронной плазмы при малых частотах излучения по сравнению с плазменной частотой. В этом случае данные коэффициенты поглощения значительно превышают значение коэффициента поглощения для классического электронного газа. Однако при частотах излучения порядка плазменной частоты коэффициент поглощения для квантовой плазмы отличается от коэффициента для классической плазмы.

На основе материалов используемой литературы предложено качественное объяснение полученных численных результатов. Данные результаты следует учитывать при теоретическом исследовании взаимодействия излучения с металлами, а также при создании оптических устройств, использующих металлические детекторы излучения.

Статья поступила в редакцию 01.10.2021 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нелокальные эффекты в электродинамике металлических пластин / Парадес-Хуарес А., Диас-Монхе С., Макаров Н. М., Перес-Родригес Ф. // Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики. 2009. Т. 90. № 9. С. 687–692.
2. Manzanares-Martinez J. Analytic expression for the effective plasma frequency in one-dimensional metallic-dielectric photonic crystal // Progress in Electromagnetics Research M. 2010. Vol. 13. P. 189–202. DOI: 10.2528/PIERM10061905.
3. Using metallic photonic crystals as visible light sources / Belousov S., Bogdanova M., Deinega A. etc. // Physical Review B. 2012. Vol. 86. Iss. 17. P. 174201.
4. Электромагнитные экраны инфракрасного диапазона на основе наноразмерных слоёв металла, SiO_2 и SiO / Давидович М. В., Яфаров Р. К., Доронин Д. М., Шиловский П. А. // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2012. Т. 15. № 2. С. 19–21.
5. Landau damping of electromagnetic transport via dielectric-metal superlattices / Paredes-Juarez A., Iakushev D. A., Flores-Desirena B., Makarov N. M., Perez-Rodriguez F. // Optics Letters. 2015. Vol. 40. Iss. 15. P. 3588–3591. DOI: 10.1364/OL.40.003588
6. Yushkanov A. A., Zverev N. V. Quantum Electron Plasma, Visible and Ultraviolet P-wave and Thin Metallic Film // Physics Letters A. 2017. Vol. 381. Iss. 6. P. 679–684. DOI: 10.1016/j.physleta.2016.12.012.
7. Расчёт высокочастотной электропроводности тонкого полупроводникового слоя в случае различных коэффициентов зеркальности его поверхностей / Кузнецова И. А., Романов Д. Н., Савенко О. В., Юшканов А. А. // Микроэлектроника. 2017. Т. 46. № 4. С. 275–283. DOI: 10.7868/S0544126917040032.
8. Castillo-Lopez S. G., Makarov N. M., Perez-Rodriguez F. Quantum resonances of Landau damping in the electromagnetic response of metallic nanoslabs // Optics Letters. 2018. Vol. 43. Iss. 10. P. 2410–2413. DOI: 10.1364/OL.43.002410.
9. Александров А. Ф., Богданкевич Л. С., Рухадзе А. А. Основы электродинамики плазмы: учебное пособие для вузов. М.: Высшая школа, 1978. 407 с.
10. Кондратенко А. Н. Проникновение поля в плазму. М.: Атомиздат, 1979. 232 с.

11. Латышев А. В., Юшканов А. А. Поперечная электрическая проводимость квантовой столкновительной плазмы в подходе Мермина // Теоретическая и математическая физика. 2013. Т. 175. № 1. С. 132–143. DOI: 10.4213/tmf8422.
12. Frensley W. R. Wigner-function model of a resonant-tunneling semiconductor device // Physical Review B. 1987. Vol. 36. Iss. 3. P. 1570–1580. DOI: 10.1103/PhysRevB.36.1570.
13. Kuznetsova I. A., Savenko O. V., Romanov D. N. The influence of Fermi surface anisotropy and the charge carrier surface scattering kinetics on the electrical conductivity of a thin metal film in the view of the quantum size effect // Journal of Physics: Conference Series. 2021. Vol. 2056. International Conference "Advanced Element Base of Micro- and Nano-Electronics with Using of ToDate Achievements of Theoretical Physics" (MRSU 2021, 20–23 April 2021, Moscow, Russia). P. 012018. DOI: 10.1088/1742-6596/2056/1/012018.
14. Kliewer K. L., Fuchs R. Anomalous Skin Effect for Specular Electron Scattering and Optical Experiments at Non-Normal Angles of Incidence // Physical Review. 1968. Vol. 172. Iss. 3. P. 607–624. DOI: 10.1103/PhysRev.172.607.
15. Fuchs R., Kliewer K. L. Optical Properties of an Electron Gas: Further Studies of a Nonlocal Description // Physical Review. 1969. Vol. 185. Iss. 3. P. 905–913. DOI: 10.1103/PhysRev.185.905.
16. Зверев Н. В., Юшканов А. А. Квантовый эффект поглощения Н-волн в металлическом полупространстве // Труды 62-й Всероссийской научной конференции МФТИ (18–24 ноября 2019 года). Фундаментальная и прикладная физика: сборник тезисов. М.: МФТИ, 2019. С. 228–230.

REFERENCES

1. Parades-Khuares A., Dias-Monkhe S., Makarov N. M., Peres-Rodriges F. [Nonlocal effects in the electrodynamics of metallic slabs]. In: *Pis'ma v Zhurnal eksperimental'noi i teoreticheskoi fiziki* [Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters], 2009, Vol. 90, no. 9, pp. 687–692.
2. Manzanares-Martinez J. Analytic expression for the effective plasma frequency in one-dimensional metallic-dielectric photonic crystal. In: *Progress in Electromagnetics Research M*, 2010, vol. 13, pp. 189–202. DOI: 10.2528/PIERM10061905.
3. Belousov S., Bogdanova M., Deinega A. etc. Using metallic photonic crystals as visible light sources. In: *Physical Review B*, 2012, vol. 86, iss. 17, pp. 174201.
4. Davidovich M. V., Yafarov R. K., Doronin D. M., Shilovskii P. A. [Electromagnetic hot screens based on nanodimensional metall -SiO_2 -SiO layers]. In: *Fizika volnovykh protsessov i radiotekhnicheskie sistemy* [Physics of Wave Processes and Radio Systems], 2012, vol. 15, no. 2, pp. 19–21.
5. Paredes-Juarez A., Iakushev D. A., Flores-Desirena B., Makarov N. M., Perez-Rodriguez F. Landau damping of electromagnetic transport via dielectric-metal superlattices. In: *Optics Letters*, 2015, vol. 40, iss. 15, pp. 3588–3591. DOI: 10.1364/OL.40.003588
6. Yushkanov A. A., Zverev N. V. Quantum Electron Plasma, Visible and Ultraviolet P-wave and Thin Metallic Film. In: *Physics Letters A*, 2017, vol. 381, iss. 6, pp. 679–684. DOI: 10.1016/j.physleta.2016.12.012.
7. Kuznetsova I. A., Romanov D. N., Savenko O. V., Yushkanov A. A. [Calculating the high-frequency electrical conductivity of a thin semiconductor film for different specular reflection coefficients of its surface]. In: *Mikroelektronika* [Russian Microelectronics], 2017, vol. 46, no 4, pp. 275–283. DOI: 10.7868/S0544126917040032.
8. Castillo-Lopez S. G., Makarov N. M., Perez-Rodriguez F. Quantum resonances of Landau damping in the electromagnetic response of metallic nanoslabs. In: *Optics Letters*, 2018, vol. 43, iss. 10, pp. 2410–2413. DOI: 10.1364/OL.43.002410.

9. Aleksandrov A. F., Bogdankevich L. S., Rukhadze A. A. Osnovy elektrodinamiki plazmy [Foundations of electrodynamics of plasma]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1978. 407 p.
10. Kondratenko A. N. *Proniknovenie polya v plazmu* [The penetration of the field into the plasma]. Moscow, Atomizdat Publ., 1979. 232 p.
11. Latyshev A. V., Yushkanov A. A. [Transverse electrical conductivity of a quantum collisional plasma in the Mermin approach]. In: *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika* [Theoretical and Mathematical Physics], 2013 vol. 175, no. 1, pp. 132–143. DOI: 10.4213/tmf8422.
12. Frensley W. R. Wigner-function model of a resonant-tunneling semiconductor device. In: *Physical Review B*, 1987, vol. 36, iss. 3, pp. 1570–1580. DOI: 10.1103/PhysRevB.36.1570.
13. Kuznetsova I. A., Savenko O. V., Romanov D. N. The influence of Fermi surface anisotropy and the charge carrier surface scattering kinetics on the electrical conductivity of a thin metal film in the view of the quantum size effect. In: *Journal of Physics: Conference Series*, 2021, vol. 2056. International Conference "Advanced Element Base of Micro- and Nano-Electronics with Using of ToDate Achievements of Theoretical Physics" (MRSU 2021, 20–23 April 2021, Moscow, Russia), pp. 012018. DOI: 10.1088/1742-6596/2056/1/012018.
14. Kliewer K. L., Fuchs R. Anomalous Skin Effect for Specular Electron Scattering and Optical Experiments at Non-Normal Angles of Incidence. In: *Physical Review*, 1968, vol. 172, iss. 3, pp. 607–624. DOI: 10.1103/PhysRev.172.607.
15. Fuchs R., Kliewer K. L. Optical Properties of an Electron Gas: Further Studies of a Nonlocal Description. In: *Physical Review*, 1969, vol. 185, iss. 3, pp. 905–913. DOI: 10.1103/PhysRev.185.905.
16. Zverev N. V., Yushkanov A. A. [Quantum Effect of H-wave Absorption in a Metal Half-space] In: *Trudy 62-y Vserossiiskoi nauchnoy konferentsii MFTI (18–24 noyabrya 2019 g.). Fundamental'naya i prikladnaya fizika.* [Fundamental and Applied Physics: Proceedings of 62-th All-Russian Scientific MIPT Conference (November 18–24, 2019).] Moscow, Moscow Institute of Physics and Technology Publ., 2019, pp. 228–230.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Бедрикова Екатерина Алексеевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа и геометрии Московского государственного областного университета;
e-mail: bedrikova@mail.ru;

Зверев Николай Витальевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа и геометрии Московского государственного областного университета;
e-mail: zverev_nv@mail.ru;

Парёнкина Виктория Игоревна – ассистент кафедры математического анализа и геометрии Московского государственного областного университета;
e-mail: vi.parenkina@mgou.ru;

Юшканов Александр Алексеевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической физики Московского государственного областного университета;
e-mail: yushkanov@inbox.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Nikolai V. Zverev – Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Prof., Department of Mathematical Analysis and Geometry, Moscow Region State University;
e-mail: zverev_nv@mail.ru;

Ekaterina A. Bedrikova – Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Prof., Department of Mathematical Analysis and Geometry, Moscow Region State University;
e-mail: bedrikova@mail.ru;

Victoria I. Paryonkina – Assistant Lecturer, Department of Mathematical Analysis and Geometry, Moscow Region State University;
e-mail: vi.parenkina@mgou.ru;

Aleksandr A. Yushkanov – Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Department of Theoretical Physics, Moscow Region State University;
e-mail: yushkanov@inbox.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Бедрикова Е. А., Зверев Н. В., Парёнкина В. И., Юшканов А. А. Квантовая электронная плазма и взаимодействие S-волны с металлическим полупространством // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2021. №4. С. 54–65.
DOI: 10.18384/2310-7251-2021-4-54-65.

FOR CITATION

Bedrikova E. A., Zverev N. V., Paryonkina V. I., Yushkanov A. A. Quantum electron plasma and S-wave interaction with metal half-space. In: *Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics-Mathematics*, 2021, no. 4, pp. 54–65.
DOI: 10.18384/2310-7251-2021-4-54-65.

УДК 53.092
DOI: 10.18384/2310-7251-2021-4-66-74

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СТРУКТУРЫ УДАРНЫХ ВОЛН В ПРЕССОВАННОМ ПОРОШКЕ ИЗ НАНОЧАСТИЦ НИКЕЛЯ

Ростилов Т. А., Зиборов В. С., Долгобородов А. Ю.

Объединённый институт высоких температур Российской академии наук
125412, г. Москова, ул. Ижорская, д. 13, стр. 2, Российская Федерация

Аннотация

Цель: экспериментальное исследование особенностей распространения волн ударного сжатия в образцах из спрессованных наночастиц никеля (pnNi), получение данных по ударной адиабате вещества и анализ профилей ударных волн в заданном диапазоне давлений.

Процедура и методы. Методом лазерной интерферометрии в условиях одноосного нагружения впервые исследованы особенности распространения волн ударного сжатия в образцах из спрессованных наночастиц никеля при относительно малых давлениях – 1,7 и 4,1 ГПа.

Результаты. Для исследованного вещества получены профили ударных волны и точки на ударной адиабате. Определён предел упругости Гюгонио – 0,48 ГПа.

Теоретическая и/или практическая значимость. Обнаружено, что профили ударных волн в прессованном порошке из наночастиц никеля имеют сложную многоступенчатую структуру, в которой чётко выделяется волна-предвестник. Показано, что профиль волны сжатия можно описать многократным отражением волны-предвестника от исследуемой поверхности образца и следующей за ним пластической волны сжатия. Установлено, что в диапазоне исследованных давлений толщина образца и режим нагружения определяют процесс ударного сжатия. Показано, что разница между состояниями вещества за фронтом пластической ударной волны до первого отражения предвестника и после последнего отражения существенна.

Ключевые слова: ударная волна, предвестник, ударная адиабата, пористость, профиль скорости, VISAR, спрессованный порошок, наноникель

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (соглашение с ОИВТ РАН № 075-15-2020-785 от 23 сентября 2020 г.)

EXPERIMENTAL STUDY OF THE STRUCTURE OF SHOCK WAVES IN A COMPRESSED POWDER OF NIKEL NANOPARTICLES

T. Rostilov, V. Ziborov, A. Dolgoborodov

Joint Institute for High Temperatures of the Russian Academy of Science
13 build. 2 ulitsa Ijorskaia, Moscow 125412, Russian Federation

Abstract
Aim. Features of propagation of shock compression waves in samples of compressed nickel nanoparticles have been studied for the first time by laser interferometry under uniaxial loading conditions at relatively low pressures of 1.7 and 4.1 GPa.
Methodology. Shock wave profiles of a compressed nickel nanopowder loaded by a one-dimensional shock compression wave are measured by a laser interferometry method.
Results. Shock wave profiles and points of the shock Hugoniot of the material are obtained. The Hugoniot elastic limit is determined to be 0.48 GPa.
Research implications. It is found that shock wave profiles of pressed nickel nanoparticles have a complex multi-stage structure in which the precursor wave is clearly distinguished. It is shown that the compression wave profile can be described by multiple reflection of the precursor wave from a sample surface and an oncoming plastic shock wave. It is established that in the range of studied pressures, the sample thickness and the loading regime determine the process of shock compression. It is demonstrated that the difference between the states of matter behind the plastic shock wave front before the first precursor reflection and after the last reflection is significant.
Keywords: shock wave, precursor, shock Hugoniot, porosity, velocity profile, VISAR, compressed powder, nanonickel

Acknowledgments. This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Agreement with the JIHT RAS No. 075-15-2020-785 of September 23, 2020)

Введение

Широкое применение пористых материалов в современных технологиях требует изучения их свойств в условиях ударных нагрузок [1-4]. В последнее время вырос интерес к материалам из спрессованного нанопорошка, параметры которых отличаются от хорошо изученных веществ с микропорами. Это обстоятельство также указывает на необходимость в надёжных данных об их свойствах при ударном сжатии.

Полученные экспериментально ударные адиабаты необходимы для создания уравнений состояния вещества, на базе которых разрабатываются численные модели свойств материалов в широком диапазоне параметров.

Площадь поверхностей пор в материалах из нанопорошков на три порядка величины и более превышает площадь поверхности пор в материалах из микрочастиц. Известно, что схлопывание пор при ударном сжатии сопровождается тепловым эффектом, вызванным скольжением частей внутренних поверхностей, который тем сильнее, чем больше площадь поверхности пор [5; 6]. В этой связи определение ударных адиабат приобретает особое значение.

Метод лазерной интерферометрии в условиях одноосного нагружения позволяет измерить профиль скорости исследуемой поверхности образца при выходе на неё ударной волны. Форма профиля скорости содержит информацию о вязких свойствах материала и механизме процесса сжатия, влиянии пористости и теплового эффекта на него, в частности.

Профили ударных волн в неоднородных материалах имеют сложную структуру [7; 8]. Выделяют волну-предвестник и волну пластической деформации (пластическую ударную волну).

Целью данной работы было экспериментальное исследование особенностей распространения волн ударного сжатия в образцах из спрессованных наночастиц никеля (pnNi), получение данных по ударной адиабате вещества и анализ профилей ударных волн в заданном диапазоне давлений.

Эксперимент

Образцы были изготовлены из порошка наночастиц никеля размером 35 × 55 нм путём прессования в атмосфере аргона. Через сутки пребывания на воздухе масса образца увеличивалась на 2% и далее не менялась. Вероятно, это связано с окислением образцов кислородом из атмосферы. Образцы имели плотность 4,72 г/см^3, пористость (k = 1,98).

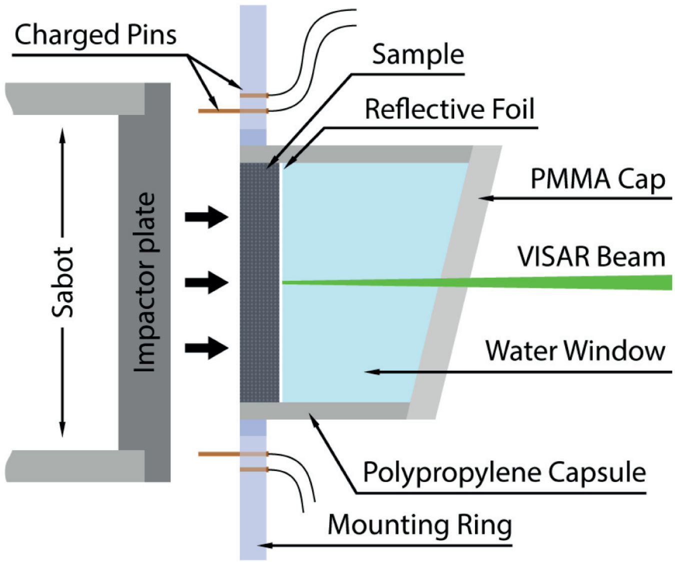

Рис. 1 / Fig. 1. Схема эксперимента / Experiment scheme.

Источник: по данным авторов.

Эксперименты проведены на метательной установке Стрела-2М, оснащённой интерферометром VISAR [7; 8]. Плоский ударник известной толщины из заданного материала ускорялся в одномерном канале. Его скорость при выходе из канала и отклонение его нормали к поверхности от оси движения измерялись с точностью 1% четырьмя игольчатыми контактными датчиками, установленными на сборке, содержащей образец (рис. 1). Интерферометрические измерения проводились на границе образец – водяное окно. В эксперименте 1 использован медный ударник, в эксперименте 2 ударник из сплава Д16Т (см. табл. 1). Существенная толщина ударника ~10 мм обеспечивала необходимую задержку прихода волны разгрузки, чтобы надёжно определить ширину фронта волны ударного сжатия.

Таблица 1 / Table 1

Параметры ударного сжатия pnNi / Shock compression parameters pnNi.

№	V_i, м/с	h_s, мм	Предвестник			Пластическая ударная волна			
			D_1, км/с	p_1, ГПа	u_{p1}, км/с	D_2, км/с	$\bar{D}_2$, км/с	p_2, ГПа	u_{p2}, км/с
1	296	2,10	2,441	0,463	0,040	-	1,249	1,672	0,249
2	837	2,06	2,604	0,490	0,040	1,486	1,442	4,108	0,579

Источник: по данным авторов

Временное разрешение в измерениях профилей скорости интерферометром было порядка ~1 нс. В табл. 1 приведена толщина образцов и условия экспериментов. Погрешность измерений скоростей волн составила несколько процентов.

Профили скорости границы образец – водяное окно в экспериментах показаны на рис. 2. На начальной стадии хорошо виден быстрый рост скорости, который можно связать с волной-предвестником. В обоих экспериментах темп нарастания скорости предвестников практически совпал. Следующая за предвестником заметная фаза нарастания скорости связана с выходом пластической ударной волны на исследуемую поверхность (особенно заметно в эксперименте 2 на рис. 2). Её фронт в эксперименте 1 имеет ярко выраженную волнообразную форму.

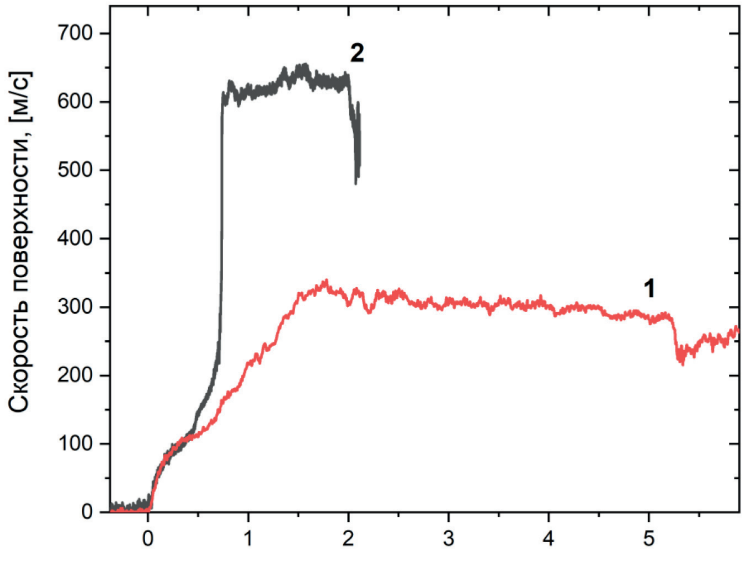

Рис. 2 / Fig. 2. Профили скорости границы образец – водяное окно в экспериментах с pnNi. В качестве начала отсчёта выбрано первое появление предвестника на исследуемой границе / Velocity profiles of the sample – water window interface in experiments with pnNi. The first appearance of the precursor at the studied boundary was chosen as the starting point.

Источник: по данным авторов.

Анализ профилей скорости и обсуждение

В основе анализа сложной многоволновой формы пластической ударной волны лежит тот факт, что упругая часть ударной адиабаты pnNi сильно отличается от ударной адиабаты материала окна – воды (рис. 3в). Из-за их различия переотражения предвестника весьма существенно влияют на форму измеряемого профиля. Предвестник достигает границы образец – вода, частично от неё отражается в виде волны разрежения и движется навстречу фронту пластической ударной волны, отражается от него в виде волны сжатия и вновь движется к свободной поверхности (рис. 3 а, б). Такие реверберации происходят до тех пор, пока фронт пластической волны не достигнет исследуемой границы.

Монотонное возрастание скорости на профиле после точек A и B (рис. 3б) можно связать с прочностными свойствами среды [9] или же с тем, что неоднороден отклик частиц разного размера (образующих, в свою очередь, поры разного размера) на упругое сжатие в предвестнике, из-за чего предвестник имеет «дисперсный» вид.

Для оценки скорости пластической УВ до её первого взаимодействия с предвестником будем полагать, что скорость первых отражений предвестника внутрь образца и от фронта пластической УВ обратно на исследуемую поверхность равны: $D_{-1} = D_1 - u_{p1}$ и $D_{1'} = D_1 + \overline{u}_{i1}$, соответственно [10]. Определив по профилю времена первого и второго появлений предвестника на исследуемой поверхности, проведём из соответствующих мест на xt-диаграмме траектории волн, двигающихся со скоростями – D_{-1} и $D_{1'}$ (рис. 3а). На этой диаграмме пересечение этих линий даст точку первого взаимодействия пластической УВ с первым отражением предвестника. Линия, проведённая от начала отсчёта до этой точки, позволяет оценить истинную скорость пластической ударной волны D_2. В эксперименте 2 она равна 1,486 км/с, что больше на 3% наблюдаемой скорости пластической волны $\overline{D}_2$, определённой по формуле:

$$\overline{D}_2 = \frac{h_s + \overline{u}_i\left(t_2 - t_1\right)}{\left(t_2 - t_0\right)}.$$

В этом соотношении учитывается, что пластической УВ необходимо догнать границу образец – вода, движущуюся со средней скоростью $\overline{u}_i$.

Первое взаимодействие предвестника и пластической УВ происходит на расстоянии порядка 1,5 мм от плоскости соударения. Это означает, что ударное нагружение образца не однородно – до 1,5 мм оно должно быть более сильным. Такое нагружение может приводить к тому, что при определённых режимах нагружения остаточная пористость образца будет различна на разной толщине образца [11].

Для определения предела упругости Гюгонио (точка A′ на рис. 3в) необходимо задать среднее значение скорости предвестника на профиле u_{i1} (точка A на рис. 3б). Среднее значение скорости определялось как точка пересечения прямых, которыми можно описать участок резкого роста и следующий за ним участок монотонного роста скорости.

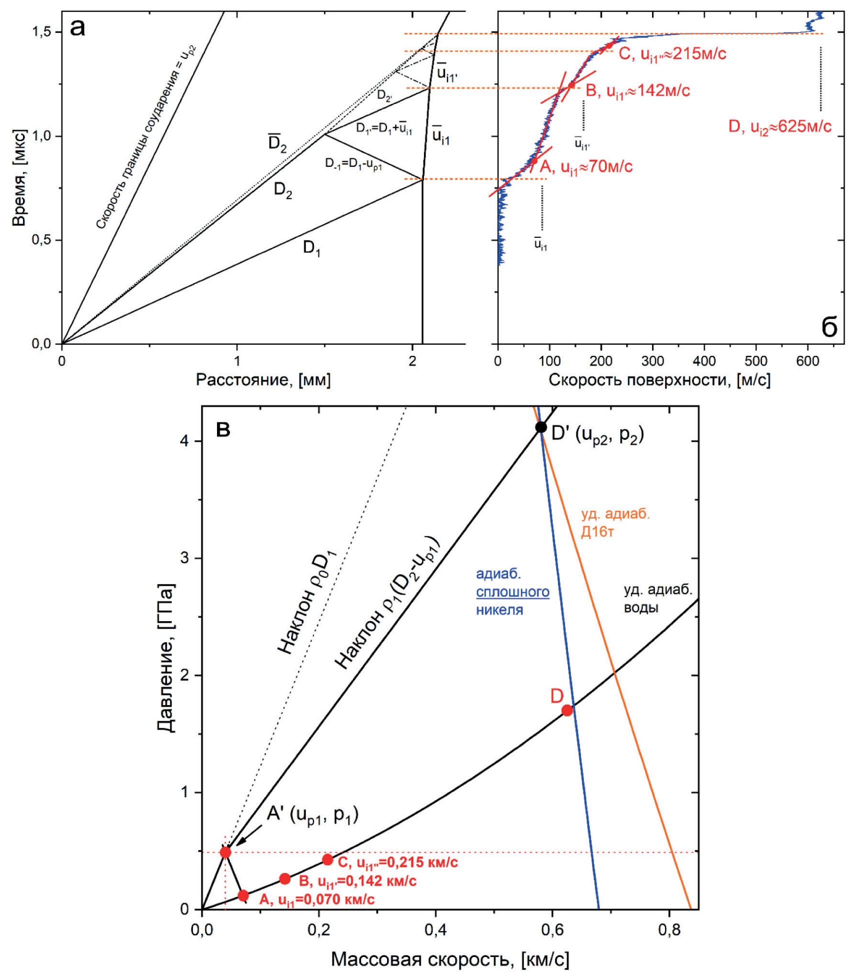

Рис. 3 / Fig. 3. Иллюстрация к анализу волновой структуры в pnNi на примере эксперимента 2: (а) *xt*-диаграмма, совмещённая с профилем скорости (б); (в) pu_p-диаграмма. Обозначения на (б) и (в) не равнозначны / Illustration for the analysis of the wave structure in pnNi using the example of experiment 2: (a) *xt*-diagram combined with the velocity profile (б); (в) pu_p-diagram. The designations for (б) and (в) are not equivalent.

Источник: по данным авторов.

На *xt*-диаграмме скорости предвестника на втором и третьем цикле реверберации полагались равными D_{-1} и $D_{1'}$ в зависимости от направления движения волны (рис. 3а). Времена второго и третьего появлений предвестника на исследуемой поверхности, полученные с использованием такого приближения, несколько не соответствовали времени, измеренному по профилю скорости. Третье появление предвестника различимо очень слабо на фоне последующего выхода пластической УВ. Для дальнейшего анализа необходимы более точные оценки для скоростей предвестника на каждом этапе его реверберации.

Заключение

Исследована структура ударной волны в 1,7 и 4,1 ГПа в прессованном порошке из наночастиц никеля. Сложная структура профиля ударной волны, наблюдаемая в экспериментах, объяснена с помощью рассмотрения реверберраций волны-предвестника между исследуемой поверхностью и фронтом пластической ударной волны. Из-за этих реверберраций ударное нагружение образца неоднородно, поскольку скорость ударной волны понижается при каждом взаимодействии с отражённым предвестником. Таким образом, ударное сжатие pnNi в области давлений, при которых формируется двух-волновая конфигурация, определяется не только свойствами материала и режимом нагружения, но и толщиной образца, которая напрямую задаёт количество реверберраций. Определён предел упругости Гюгонио для прессованного наноникеля – 0,48 ГПа.

Статья поступила в редакцию 27.09.2021 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Медведев А. Б., Трунин Р. Ф. Ударное сжатие пористых металлов и силикатов // Успехи физических наук. 2012. Т. 182. № 8. С. 829–846. DOI: 10.3367/UFNr.0182.201208b.0829.
2. Dattelbaum D. M., Coe J. D. Shock-driven decomposition of polymers and polymeric foams // Polymers. 2019. Vol. 11. Iss. 3. P. 493. DOI: 10.3390/polym11030493.
3. Davison L. Shock-wave structure in porous solids // Journal of Applied Physics. 1971. Vol. 42. Iss. 13. P. 5503–5512. DOI: 10.1063/1.1659971.
4. Linde R. K., Schmidt D. N. Shock propagation in nonreactive porous solids // Journal of Applied Physics. 1966. Vol. 37. Iss. 8. P. 3259–3271. DOI: 10.1063/1.1703192.
5. Ударная сжимаемость смесей микро- и наноразмерных порошков никеля и алюминия / Якушев В. В., Ананьев С. Ю., Уткин А. В., Жуков А. Н., Долгобородов А. Ю. // Физика горения и взрыва. 2018. Т. 54. № 5. С. 45–50. DOI: 10.15372/FGV20180506.
6. Скорость звука в ударно-сжатых образцах из смеси микро- и нанодисперсных порошков никеля и алюминия / Якушев В. В., Ананьев С. Ю., Уткин А. В., Жуков А. Н., Долгобородов А. Ю. // Физика горения и взрыва. 2019. Т. 55. № 6. С. 108–114. DOI: 10.15372/FGV20190615.
7. Зиборов В. С., Канель Г. И., Ростилов Т. А. Экспериментальное исследование характера деформации сферопластиков при ударном сжатии // Физика горения и взрыва. 2020. Т. 56. № 2. С. 124–129. DOI: 10.15372/FGV20200215.
8. Rostilov T. A., Ziborov V. S. Experimental study of shock wave structure in syntactic foams under high-velocity impact // Acta Astronautica. 2021. Vol. 178. P. 900–907. DOI: 10.1016/j.actaastro.2020.10.022.
9. Bonnan S., Hereil P. L., Collombet F. Experimental characterization of quasi static and shock wave behavior of porous aluminum // Journal of Applied Physics. 1998. Vol. 83. Iss. 11. P. 5741–5749. DOI: 10.1063/1.367430.
10. Ahrens T. J, Gust W. H., Royce E. B. Material Strength Effect in the Shock Compression of Alumina // Journal of Applied Physics. 1968. Vol. 39. Iss. 10. P. 4610–4616. DOI: 10.1063/1.1655810.
11. Butcher B. M., Karnes C. H. Dynamic compaction of Porous Iron // Journal of Applied Physics. 1969. Vol. 40. Iss. 7. P. 2967–2976. DOI: 10.1063/1.1658109.

REFERENCES

1. Medvedev A. B., Trunin R. F. [Shock compression of porous metals and silicates]. In: *Uspekhi fizicheskikh nauk* [Physics-Uspekhi], 2012, vol. 182, no. 8, pp. 829–846. DOI: 10.3367/UFNr.0182.201208b.0829.
2. Dattelbaum D. M., Coe J. D. Shock-driven decomposition of polymers and polymeric foams. In: *Polymers*, 2019, vol. 11, iss. 3, p. 493. DOI: 10.3390/polym11030493.
3. Davison L. Shock-wave structure in porous solids. In: *Journal of Applied Physics*, 1971, vol. 42, iss. 13, pp. 5503–5512. DOI: 10.1063/1.1659971.
4. Linde R. K., Schmidt D. N. Shock propagation in nonreactive porous solids. In: *Journal of Applied Physics*, 1966, vol. 37, iss. 8, pp. 3259–3271. DOI: 10.1063/1.1703192.
5. Yakushev V. V., Anan'ev S. Yu., Utkin A. V., Zhukov A. N., Dolgoborodov A. Yu. [Shock compressibility of mixtures of micro- and nano-sized nickel and aluminum powders]. In: *Fizika goreniya i vzryva* [Combustion, Explosion and Shock Waves], 2018, vol. 54, no. 5, pp. 45–50. DOI: 10.15372/FGV20180506.
6. Yakushev V. V., Anan'ev S. Yu., Utkin A. V., Zhukov A. N., Dolgoborodov A. Yu. [Sound velocity in shock-compressed samples from a mixture of micro- and nanodispersed nickel and aluminum powders]. In: *Fizika goreniya i vzryva* [Combustion, Explosion and Shock Waves], 2019, vol. 55, no. 6, pp. 108–114. DOI: 10.15372/FGV20190615.
7. Ziborov V. S., Kanel' G. I., Rostilov T. A. [Experimental study of deformation of spheroplastics under shock compression]. In: *Fizika goreniya i vzryva* [Combustion, Explosion and Shock Waves], 2020, vo. 56, no. 2, pp. 124–129. DOI: 10.15372/FGV20200215.
8. Rostilov T. A., Ziborov V. S. Experimental study of shock wave structure in syntactic foams under high-velocity impact. In: *Acta Astronautica*, 2021, vol. 178, pp. 900–907. DOI: 10.1016/j.actaastro.2020.10.022.
9. Bonnan S., Hereil P. L., Collombet F. Experimental characterization of quasi static and shock wave behavior of porous aluminum. In: *Journal of Applied Physics*, 1998, vol. 83, iss. 11, pp. 5741–5749. DOI: 10.1063/1.367430.
10. Ahrens T. J, Gust W. H., Royce E. B. Material Strength Effect in the Shock Compression of Alumina. In: *Journal of Applied Physics*, 1968, vol. 39, iss. 10, pp. 4610–4616. DOI: 10.1063/1.1655810.
11. Butcher B. M., Karnes C. H. Dynamic compaction of Porous Iron. In: *Journal of Applied Physics*, 1969, vol. 40, iss. 7, pp. 2967–2976. DOI: 10.1063/1.1658109.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Ростилов Тимофей Андреевич – младший научный сотрудник лаборатории №6.2. – ударно-волновых воздействий Объединённого института высоких температур Российской академии наук;
e-mail: t.rostilov@ihed.ras.ru;

Зиборов Вадим Серафимович – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории №6.2. – ударно-волновых воздействий Объединённого института высоких температур Российской академии наук;
e-mail: ziborov.vs@yandex.ru

Долгобородов Александр Юрьевич – доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, заведующий лабораторией №6.2. – ударно-волновых воздействий Объединённого института высоких температур Российской академии наук;
e-mail: aldol@mail.ihed.ras.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Timofei A. Rostilov – Research Assistant, Laboratory №6.2. – shock-wave effects, Joint Institute for High Temperatures of the Russian Academy of Science;
e-mail: t.rostilov@ihed.ras.ru;

Vadim S. Ziborov – Cand. Sci. (Phys.-Math.), Senior Researcher, Laboratory №6.2. – shock-wave effects, Joint Institute for High Temperatures of the Russian Academy of Science;
e-mail: ziborov.vs@yandex.ru;

Aleksandr Ju. Dolgoborodov – Dr. Sci. (Phys.-Math.), Leading Researcher, Laboratory №6.2. – shock-wave effects, Joint Institute for High Temperatures of the Russian Academy of Science;
e-mail: aldol@mail.ihed.ras.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Ростилов Т. А., Зиборов В. С., Долгобородов А. Ю. Экспериментальное исследование структуры ударных волн в прессованном порошке из наночастиц никеля // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2021. № 4. С. 66–74.
DOI: 10.18384/2310-7251-2021-4-66-74.

FOR CITATION

Rostilov T. A., Ziborov V. S., Dolgoborodov A. Yu. Experimental study of the structure of shock waves in a compressed powder of nikel nanoparticles. In: *Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*, 2021, no. 4, pp. 66–74.
DOI: 10.18384/2310-7251-2021-4-66-74.

УДК 533.6
DOI: 10.18384/2310-7251-2021-4-75-85

ТУРБУЛЕНТНАЯ СТАТИСТИКА С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ КОГЕРЕНТНОЙ СТРУКТУРЫ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

Селим Р. С.[1,2]

[1] *Московский физико-технический институт(национальный исследовательский университет)*
141701, г. Долгопрудный, Московская область, Институтский пер., д. 9, Российская Федерация

[2] *Университет Танта, факультет естественных наук, математический факультет Танта 31512, улица Аль-Гейш, г. Танта, Египет*

Аннотация

Цель *работы:* исследование эргодичности динамической системы уравнений для амплитуд набора волн Толлмина–Шлихтинга, с помощью которых аппроксимируется стохастическое поведение турбулентных пульсаций, и проведение сравнения с экспериментом пульсационных характеристик развитого турбулентного пограничного слоя при нулевом градиенте давления в рамках волноводной модели.

***Процедура и методы*.** В работе использована машинная аналитика и комплекс прикладных программ MATHEMATICA. Ряд результатов получен на основе теории динамических систем.

Результаты. Показана сходимость временных средних и средних по пространству. Кроме того, продемонстрирована хорошая сходимость теоретических результатов, обусловленных когерентной составляющей, с экспериментальными.

Теоретическая и практическая значимость. Показана применимость волноводной модели для изучения статистики пульсаций скорости потока в пограничном слое для несжимаемой жидкости при нулевом градиенте давления.

Ключевые слова: вязкая несжимаемая жидкость, когерентные структуры, турбулентный пограничный слой, волноводнаямодель.

***Благодарность*.** Исследователь Р. С. Селим финансируется за счет частичной стипендии Министерства высшего образования Арабской Республики Египет и стипендии Правительства Российской Федерации с приложением №. EGY-6177/17.

TURBULENT STATISTICS IN TERMS OF COHERENT STRUCTURE IN THE BOUNDARY LAYER

R. S.Selim[1, 2]

[1] *Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University)*
9 Institutskypereulok, Dolgoprudny141701, Moscow region, Russian Federation

[2] *Tanta University, Faculty of Science, Mathematics Department,*
Al-Geish Street, Tanta 31512, Egypt

Abstract

Aim *of study:* investigation the ergodicity of a dynamical system for a set equations of amplitudes Tollmien-Schlichting waves, with the help of approximation stochastic behavior of turbulent pulsations, and comparison the pulsation characteristics of a developed turbulent boundary layer in terms of the waveguide model with experiment at zero pressure gradient.

Methodology. The paper uses machine analytics and a complex of MATHEMATICA application programs. A number of results are obtained on the basis of dynamical systems theory.

Results. The convergence of time averages and phase averages is shown. In addition, a good convergence of the theoretical results due to the coherent component with the experimental results has been demonstrated.

Research implication. The applicability of the waveguide model for studying the statistics of flow velocity pulsations in the turbulent boundary layer for an incompressible fluid at zero pressure gradient is shown.

Keywords: Viscous incompressible fluid, coherent structures, turbulent boundary layer, waveguide model.

Acknowledgments. The researcher R. S. Selim is funded by a partial scholarship from the Ministry of Higher Education of the Arab Republic of Egypt, and by scholarship from Russian government scholarship with application no. EGY – 6177/17.

1. Introduction

In [1] Navier-Stokes equations is formulated to obtain a waveguide model [2-4] that is stochastically closed relative to the pulsation characteristics of a turbulent boundary layer. This model contains a small parameter that allowed using the method of multiple scales (the method of singular perturbations). According to the triple decomposition [5], the velocity field is divided into three components: average, coherent and stochastic. As a result, equations for the coherent component are obtained [1]:

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial T}+\bar{U}\frac{\partial \bar{U}}{\partial X}+\bar{V}\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}}=\frac{\partial}{\partial \bar{y}}\left(-\overline{u'v'}+\frac{1}{\varepsilon^2 R}\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}}\right). \tag{1}$$

$$\frac{da_1}{dt_1}=\sum_{s=1}^{n}\Lambda_1^s a_2^s a_3^s,\quad \frac{da_2^s}{dt_1}=\Lambda_2^s a_1 a_3^{s*},\quad \frac{da_3^s}{dt_1}=\Lambda_3^s a_1 a_2^{s*}. \tag{2}$$

Solutions of the dynamical system (2) obey the invariant

$$I^{(n)}\left(t_1\right)=\left|\tilde{a}_1\right|^2+\sum_s\left(q_{12}^s\left|\tilde{a}_2^s\right|^2+q_{13}^s\left|\tilde{a}_3^s\right|^2\right)=\text{const}. \tag{3}$$

Then, after using the following transformation

$$b_2^s=\sqrt{q_{1j}^s}\,a_j^s,\quad j=2,3,\quad a_i\left(t_1,t_2\right)=\varphi\left(t_2\right)\tilde{a}_i\left(\varphi\left(t_2\right)\tilde{t}_1,t_2\right). \tag{4}$$

It can be represented as:

$$I^{(n)}\left(t_1\right)=\left|b_1\right|^2+\sum_s\left(\left|b_2^s\right|^2+\left|b_3^s\right|^2\right)=1,\quad s=1,2,\dots,n. \tag{5}$$

Here $\left(\bar{U}, \bar{V}\right)$ – average longitudinal and transverse velocity components, u_∞ – the velocity of free stream flow, ν – kinematic viscosity, ε – small parameter, Λ^s_j, $j = 1, 2, 3$, $s = 1, 2, ..., n$ coefficients determined by integral characteristics of the eigenfunctions of the Orr-Sommerfeld equation [1], a_1, a^s_j – amplitudes of Tollmien-Schlichting waves in the state of multiple 3-wave resonance, $\mathrm{I}^{(n)}(t_1)$ – invariant [6] of system equations (2), q^s_{12}, q^s_{12} are determined through coefficients Λ^s_1, Λ^s_2 и Λ^s_3, s = 1, 2, ..., n, n – the number of subharmonics considered, φ – coefficient in equation (4) represents proportionality in the law of similarity [2], и $\overline{u'v'}$ is defined as the time average of the velocity components:

$$\overline{u'v'} = \lim_{t_1\to\infty}\frac{1}{t_1}\int_0^{t_1}\left(\lim_{t_0\to\infty}\frac{1}{t_0}\int_0^{t_0}\dot{u}\dot{v}dt_0\right)dt_1, \tag{6}$$

$$\tau_0 = \frac{tu_\infty}{d}, \quad \tau_1 = \varepsilon\tau_0, \quad \varepsilon^2 = \frac{d}{L}.$$

On the basis of the waveguide model, the coefficients Λ^s_1, Λ^s_2 and Λ^s_3 in equation (2) describing the dynamics of Tollmien-Schlichting waves and their dynamics determine the unsteady behaviour of turbulent pulsations in the boundary layer. In this paper, the average characteristics of pulsations are determined by averaging non-stationary solutions over time. In addition to, the Birkhoff-Khinchin theorem [7] in the representation of A.N. Kolmogorov is applied, due to normalization of invariant to unity. The structure of the dynamical system corresponds to the Birkhoff – Khinchin theorem allowed us to ensure that the dynamical system is ergodic, since the time average is equal to the phase average, on the surface of unit sphere. As a result, the elements of the pulsation tensor are calculated and compared with numerical and experimental data.

2. Statement problem

Using the Fourier representation of the continuity equation and the normal vorticity component, which are expressed by:

$$u'_{\omega k} = \frac{i}{k^2}\left(\alpha\frac{dv'_{\omega k}}{dy} - \beta\eta'_{\omega k}\right),$$

$$\left(-\omega(\mathbf{k}) + \alpha\bar{U}\right)\eta'_{\omega k} + \beta\frac{d\bar{U}}{dy}v'_{\omega k} = 0,$$

Also an expression for the vertical component of the velocity is formulated as:

$$\mathrm{v}'_{\omega k}\left(t_0, t_1\right) = A_{\omega k}\left(t_1\right)\delta\left(\omega - \omega_{T-S}\left(k\right)\right)e^{i\omega t_0 - ik.r}\varphi^{(0)}{}_{T-S}\left(\mathbf{k}, y\right),$$

$$A = A^c + A', \quad \left\langle A\right\rangle = A^c, \quad \left\langle A'\right\rangle = 0,$$

$$A_{\omega k}\left(t_1\right)=a_1\left(t_1\right)\delta\left(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1\right)+a_1^*\left(t_1\right)\delta\left(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1\right)+$$
$$+\sum_s a_2^s\left(t_1\right)\delta\left(\mathbf{k}-\mathbf{k}_2^s\right)+a_2^{s*}\left(t_1\right)\delta\left(\mathbf{k}+\mathbf{k}_2^s\right)+$$
$$\sum_s a_3^s\left(t_1\right)\delta\left(\mathbf{k}-\mathbf{k}_3^s\right)+a_3^{s*}\left(t_1\right)\delta\left(\mathbf{k}+\mathbf{k}_3^s\right),$$

where $\varphi^{(0)}$ is the least damping mode eigenfunction, $A_{\omega k}(t_1)$ is the amplitude Tollmien-Schlichting, and A^c, A' are the coherent and stochastic parts respectively. Here, for simplicity, we dropped the mark (′) of pulsation variables to avoid the confuse with the derivative to the normal component y. By determining the time average (6), we obtain the distribution of pulsations of the longitudinal velocity:

$$\overline{u}^2=\frac{\varphi^2}{\left(2\pi\right)^6}\left(g_1\left(\mathbf{k}_1,y\right)+2\,g_2\left(\mathbf{k}_l^s,y\right)\frac{dU}{dy}+2\,g_3\left(\mathbf{k}_l^s,y\right)\left(\frac{dU}{dy}\right)^2\right),\qquad(7)$$

$$g_1\left(\mathbf{k}_1,y\right)=-\frac{\left|a_1\right|^2\alpha_1^2}{\left|k_1\right|^4}\left|\dot{\varphi}'_1\left(\mathbf{k}_1,y\right)\right|^2-2\sum_{s=1}^{n}\sum_{l=2}^{3}\frac{\left|a_l^s\right|^2}{q_{1,l}^s}\alpha_l^{s2}\frac{\left|\dot{\varphi}'_l\left(\mathbf{k}_l^s,y\right)\right|^2}{\left|k_l^s\right|^4},$$

$$g_2\left(\mathbf{k}_l^s,y\right)=-\frac{\left|a_1\right|^2\alpha_1\beta_1^2}{\left|k_1\right|^4}\left(\frac{\dot{\varphi}'^*_1\left(\mathbf{k}_1,y\right)\varphi_1\left(\mathbf{k}_1,y\right)}{\omega_r\left(\mathbf{k}_1\right)-\alpha_1U\left(y\right)+i\,\omega_i\left(\mathbf{k}_1\right)}+\frac{\dot{\varphi}'_1\left(\mathbf{k}_1,y\right)\varphi_1^*\left(\mathbf{k}_1,y\right)}{\omega_r\left(\mathbf{k}_1\right)-\alpha_1U\left(y\right)-i\,\omega_i\left(\mathbf{k}_1\right)}\right)-$$

$$-\sum_{s=1}^{n}\sum_{l=2}^{3}\frac{\left|a_l^s\right|^2}{q_{1,l}^s}\frac{\alpha_l^s\beta_l^{s2}}{\left|\mathbf{k}_l^s\right|^4}\left(\frac{\dot{\varphi}'^*_l\left(\mathbf{k}_l^s,y\right)\varphi_l\left(\mathbf{k}_l^s,y\right)}{\omega_r\left(\mathbf{k}_l^s\right)-a_l^sU\left(y\right)+i\omega_i\left(\mathbf{k}_l^s\right)}+\frac{\dot{\varphi}'_l\left(\mathbf{k}_l^s,y\right)\varphi_l^*\left(\mathbf{k}_l^s,y\right)}{\omega_r\left(\mathbf{k}_l^s\right)-a_l^sU\left(y\right)-i\omega_i\left(\mathbf{k}_l^s\right)}\right),$$

$$g_3\left(\mathbf{k}_l^s,y\right)=-\frac{\left|a_1\right|^2\beta_1^4}{\left|\mathbf{k}_1\right|^4\left(\left(\omega_r\left(\mathbf{k}_1\right)-\alpha_1U\left(y\right)\right)^2+\omega_i\left(\mathbf{k}_1\right)^2\right)}\left|\varphi_1\left(\mathbf{k}_1,y\right)\right|^2-$$
$$-\sum_{s=1}^{n}\sum_{l=2}^{3}\frac{\left|a_l^s\right|^2}{q_{1,l}^s}\beta_l^{s4}\frac{\left|\varphi_l\left(\mathbf{k}_l^s,y\right)\right|^2}{\left|\mathbf{k}_l^s\right|^4\left(\left(\omega_r\left(\mathbf{k}_l^s\right)-a_l^sU\left(y\right)\right)^2+\omega_i^2\left(\mathbf{k}_l^s\right)\right)},$$

where $\varphi'_1=\dfrac{d\varphi_1}{dy}$, U – average longitudinal velocity [8], $q_{12}^{(j)}(\beta)$ – represent the weight factors in formula (5), as displayed in Fig. 1 [6], $\langle|a_j^s|^2\rangle$, j = 1, 2, 3, s = 1, 2, ... n – the phase average values of the squares harmonics and subharmonics amplitudes, that defined on the surface of the unit sphere.

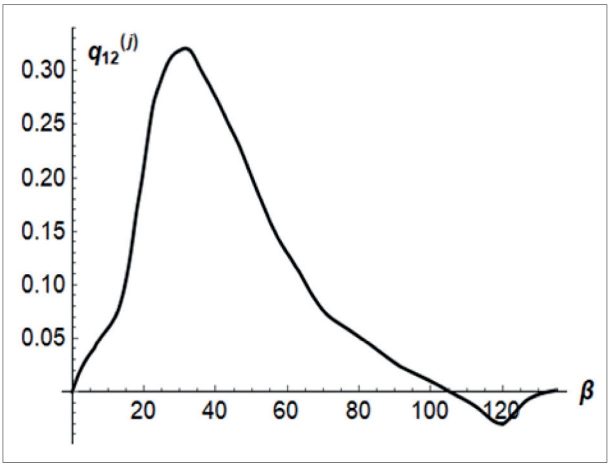

Fig. 1. Behavior of multipliers $q_{12}^{(j)}(\beta)$ depending on the transverse component of the wave vector [6].

In addition, (ω_r, ω_i) – are the real and imaginary parts of the least damping mode, which are obtained from the solution of the spectral Orr-Sommerfeld problem [9] on the profile of the average longitudinal velocity in the developed turbulent boundary layer [8]. Normalization of invariant (5), to unity, is contributed to apply Birkhoff-Khinchin theorem [7]. As a result, a good agreement is noticed between the time, and phase averages of the dynamical system (2). Thus, the real and imaginary part of the amplitude (b) in equation (5) are further written in terms of the spherical coordinates x_i, $i = 1, 2, \ldots n$, in n–dimensional space [10]:

$$I = |x_1|^2 + |x_2|^2 + \ldots + |x_{41}|^2 + |x_{42}|^2 = 1,$$

where

$$x_1 = \sin\theta_1 \sin\theta_2 \ldots \sin\theta_{n-1},$$

$$x_m = \cos\theta_{m-1} \prod_{k=m}^{n-1} \sin\theta_k, \quad m = 2, 3, \ldots, n-1,$$

$$x_n = \cos\theta_{n-1},$$

where $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots \theta_{n-1}$ are the spherical angles, that changed as $0 \le \theta_1 < 2\pi$, $0 \le \theta_m \le \pi$ at $m = 1, 2, \ldots n - 1$, on the surface of the sphere S_n:

$$S_n = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi_1=0}^{\pi} \int_{\varphi_2=0}^{\pi} \cdots \int_{\varphi_{n-2}=0}^{\pi} J_n d\theta d\varphi_1 d\varphi_2 \ldots d\varphi_{n-2} =$$
$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \prod_{k=1}^{n-2} \int_{\varphi_k=0}^{\pi} \sin^{n-1-k} \varphi_k d\varphi_k. \qquad (8)$$

Calculating the phase average value over the surface of unit sphere, for the first amplitude

$$
\begin{aligned}
&|b_1|^2 = \frac{1}{s}\int\left(|x_1|^2 + |x_2|^2\right)ds = \\
&= \int_0^{2\pi} \sin^2\theta_1 d\theta_1 \int_0^{\pi} \prod_{k=1}^{40} \sin^{k+2}\theta_{k+1} d\theta_{k+1} = 0{,}047619,
\end{aligned} \tag{9}
$$

where the integral is calculated by using the Nest function in Mathematica Wolfram[1]. We found that the phase average value for the first amplitude equals (0,047619), whilst the time average over a representative set of initial data (100 points) is (0.0519488). It is found that they are close to each other. The relative error $\Delta = \dfrac{|\overline{a}_s|^2 - |b_1|^2}{|b_1|^2} = 9\%$. In the case of increasing the number of subharmonics, the accuracy of the solution will be increased.

Table 1

A comparison between the time average and the phase averaged is formulated for five subharmonics

S	$\|\mathbf{a}_s\|2$, $\mathbf{a}(t=0)=\mathbf{x}^0$	$\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100}\|\overline{a}_s^i\|^2$, $\mathbf{a}_s^i(t=0)=\mathbf{x}_i^0$	Δ
$s = 1$	0,0529904	0,0519488	9%
$s = 2$	0,0423804	0,0436673	8%
$s = 3$	0,0510327	0,0505745	6,2%
$s = 4$	0,049629	0,0505255	5,1%
$s = 5$	0,046456	0,0461685	3%

3. Numerical results

Reynolds stresses are almost always normalized by internal scales, viscous wall distance – y^+ and wall friction velocity – u_τ.

However, the behavior of the square longitudinal pulsation and its root-mean-square value are studied here when they are normalized to the average velocity $U(y^+)$. Figure 2 shows the behavior of the square longitudinal pulsation (7) related to the average velocity in a turbulent boundary layer for four different Reynolds numbers from $Re_\theta = 900$ to $Re_\theta = 1800$. Numerical results of this work show that the position of the maximum value increases with the growth of Reynolds number. Relation u^2 with respect to the average flow velocity, near the wall, at different values of Reynolds number, tends to zero as shown in Figure 2. The limit value of $\sqrt{\overline{u^2}}/U$ at the wall is approximately ranged from 0,38 to 0,43, over range of Reynolds number ($900 < Re_\theta < 1800$). As shown in Fig. 3, a good agreement with numerical [11] and experimental results [12], is noticed. Figure 4 shows the root mean square pulsations of the longitudinal velocity $u^+_{rms} = \sqrt{\overline{(u^+)^2}}$ in a turbulent boundary layer at $Re_\theta = 1840$.

[1] Mathematica Wolfram Research 5.0

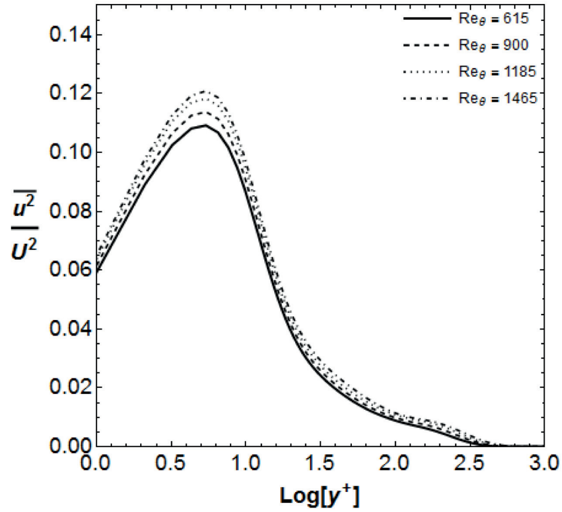

Fig. 2. Behaviour of turbulence intensity $\overline{\left(u\left(y^+\right)\right)^2 / \left(U\left(y^+\right)\right)^2}$ at Re$_\theta$ = 900 – 1800, $U(y^+)$ – the profile of the average longitudinal velocity in the turbulent boundary layer.

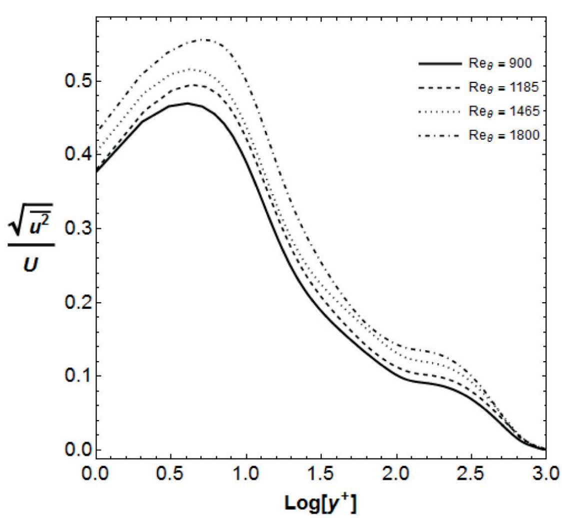

Fig. 3. Distribution of turbulence intensity along the flow when scaling to the average velocity, at Re$_\theta$ = 900 – 1800.

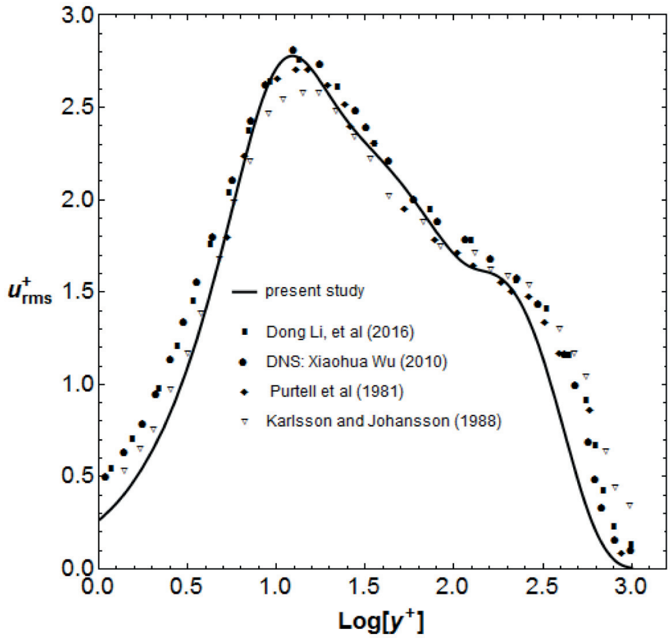

Fig. 4. u^+_{rms} is a function of y^+, at Re_θ = 1840. Solid line (—) – present study ; ("■") – DNS [13]; ("●") – [14]; Experimental results ("◆") – [15], ("▼") – [16].

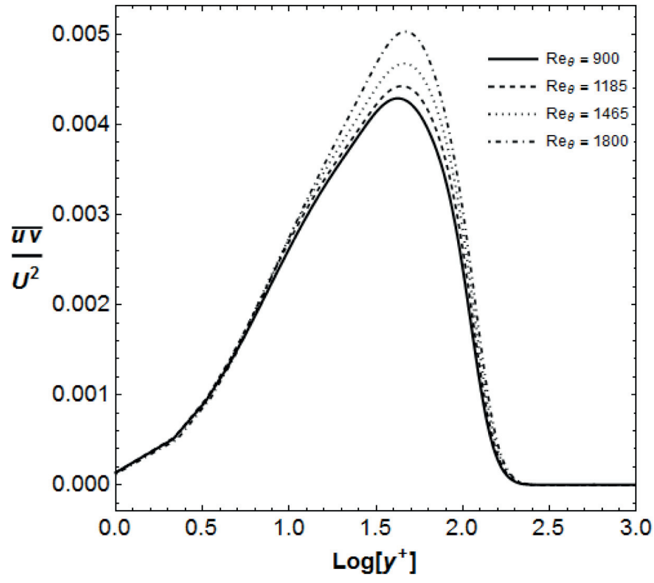

Fig. 5. Distribution of the Reynolds shear stress at different values of the Reynolds number Re_θ = 900 – 1800

It is found that results obtained using the waveguide model are quantitatively and qualitatively consistent with numerical [13, 14] and experimental [15, 16] results. In terms of the waveguide model [17], a good comparison with Klebanov'a experimental data [18] is deduced, that investigated the behavior of the turbulent shear stress as a function of the normal *y* coordinate. So that, the behavior of the Reynolds stresses related to the average velocity $U(y^+)$ is studied at different values of the Reynolds number in Fig.5. It is noticed that Reynolds number has weak effect in the viscous layer, but after that the maximum value are increased with increasing Reynolds number.

4. Conclusion

In this paper, the behavior of turbulence intensity and shear stress at different Reynolds numbers is investigated. The study is carried out for the incompressible fluid flow in the case of a zero longitudinal pressure gradient. The average values can be determined by averaging over space (the surface of a unit sphere), due to the ergodic behavior of the dynamic system. Turbulence statistics are normalized by the average velocity *U*. The results obtained for the coherent component using a waveguide model are quantitatively and qualitatively consistent with numerical and experimental results.

Статья поступила в редакцию 20.10.2021 г.

REFERENCES

1. Zharov, V.A. Model representation of a coherent structure in a developed turbulent boundary layer // Scientific Notes of TsAGI. 2014. v. XLV, issue №5.
2. Kadomtsev B.B. Plasma turbulence. In the book: Questions of plasma theory, issue 4. – M.: Atomizdat. – 1964. – pp. 188–339.
3. Landahl M.T. A wave-guide model for turbulent shear flow // J. Fluid Mech. – 1967. –V. 29, pt. 3. – P. 441 – 459.
4. Davidson R.C. Methods in nonlinear plasma theory. N.Y.; L.: Acad. Press, 1972. – 356 p. (Pure and applied physics; V. 37.)
5. Hussain A.K.M.F. Coherent structures – reality and myth // Phys. Fluids. –1983. – V. 26. N 10. – P. 2816 – 2863.
6. Zharov, V.A., Lipatov I.I., Selim, R.S. Spectral characteristics of incompressible fluid flow in a turbulent boundary layer// Bulletin of the Moscow State Regional University. Series: Physics-Mathematics. 2020. No. 4. pp. 12-27.
7. Колмогоров А. Н. Избранные труды. Математика и механика. М: Наука, 1985. 470 с.
8. Musker, A.J. Explicit expression for the smooth wall velocity distribution in turbulent boundary layer // AIAA Journal. 1979, V. 17 (6), p. 655-657.
9. Selim, R. S. Eigenmodes of the Orr-Sommerfeld equation in a developed turbulent boundary layer // Proceedings of May 2019. No. 109. DOI:10.34759/trd-2019-109-5.
10. Madelung. E. Mathematical apparatus of physics. Reference manual. M.: Fizmatlit, 1961 – 618 s.
11. Antonia, R. A., Kim, J. Low Reynolds number effects on near-wall turbulence // J. Fluid Mech. 1994. v. 276, 61–90.
12. Alfredsson. P. J., Johansson, A. V., Haritonidis, J. H. and Eckelmann, H. The fluctuation B wall-shear stress and the velocity field in the viscous sublayer // Phys. Fluids. 1988. v. 31, 1026–1033.

13. Dong. L, Kun. L, and Jianren. F. Direct numerical simulation of heat transfer in a spatially developing turbulent boundary layer // Physics of Fluids. 2016. v. 28, 105104.
14. Wu. X. and Moin P., Transitional and turbulent boundary layer with heat transfer // Phys. Fluids. 2010.v. 22, 085105
15. Purtell. L. P. Turbulent boundary layer at low Reynolds number // Phys. Fluids. 1981. v. 24, 802.
16. Karlsson. R. I. and. Johansson .T, "LDV measurements of higher order moments of velocity fluctuations in a turbulent boundary layer", in Laser Anemometry in Fluid Mechanics, edited by R. J. Adrian (Lisbou, Portugal, 1988), pp. 273–289.
17. Selim. R.S. Determination of Reynolds shear stress from the turbulent mean velocity profile and spectral characteristics of Orr-Sommerfeld -Squire equations // Journal of Physics: Conference series.2021. v. 2056 012017.
18. Klebanoff P S. Characteristics of turbulence in a boundary layer with zero pressure gradients. // NACA. 1955. Rep. 1247.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙСПИСОК

1. Жаров, В.А. Модельное представление когерентной структуры в развитом турбулентном пограничном слое // Учёные записки ЦАГИ.2014.том XLV, вып №5.
2. Кадомцев Б.Б. Турбулентность плазмы. В кн.: Вопросы теории плазмы, вып. 4. – М.: Атомиздат. – 1964. –С. 188–339.
3. Landahl M.T. A wave-guide model for turbulent shear flow // J. Fluid Mech. – 1967. – V. 29, pt. 3. – P. 441 – 459.
4. Davidson R.C. Methods in nonlinear plasma theory. N.Y.; L.: Acad. Press, 1972. – 356p. (Pure and applied physics; V. 37.)
5. Hussain A.K.M.F. Coherent structures – reality and myth // Phys. Fluids. – 1983. – V. 26. N 10. – P. 2816 – 2863.
6. Жаров В.А., Липатов И.И., Селим Р.С. Спектральные характеристики течения несжимаемой жидкости в турбулентном пограничном слое// Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2020. № 4. С. 12–27.
7. Kolmogorov A. N. Selected works. Mathematics and mechanics. M: Nauka, 1985. 470 p.
8. Musker, A J. Explicit expression for the smooth wall velocity distribution in turbulent boundary layer // AIAA Journal.1979, V.17 (6), p. 655–657.
9. Селим, Р. С. Собственные моды уравнения Орра-Зоммерфельда в развитом турбулентном пограничном слое // труды Маи.2019. № 109. DOI: 10.34759/trd-2019-109-5.
10. Маделунг. Э. Математический аппарат физики. Справочное руководство. М.: Физматлит, 1961 – 618 с
11. Antonia, R. A., Kim, J. Low Reynolds number effects on near-wall turbulence // J. Fluid Mech. 1994. v. 276, 61–90.
12. Alfredsson. P. J., Johansson, A. V., Haritonidis, J. H. and Eckelmann, H. The fluctuation B wall-shear stress and the velocity field in the viscous sublayer // Phys. Fluids. 1988. v. 31, 1026–1033.
13. Dong. L, Kun. L, and Jianren. F. Direct numerical simulation of heat transfer in a spatially developing turbulent boundary layer // Physics of Fluids. 2016. v. 28, 105104.
14. Wu. X. and Moin P., Transitional and turbulent boundary layer with heat transfer // Phys. Fluids. 2010.v. 22, 085105.
15. Purtell. L. P. Turbulent boundary layer at low Reynolds number // Phys. Fluids. 1981. v. 24, 802.

16. Karlsson. R. I. Johansson T., "LDV measurements of higher order moments of velocity fluctuations in a turbulent boundary layer," in Laser Anemometry in Fluid Mechanics, edited by R. J. Adrian (Lisbou, Portugal, 1988), pp. 273–289.
17. Selim. R.S. Determination of Reynolds shear stress from the turbulent mean velocity profile and spectral characteristics of Orr-Sommerfeld -Squire equations // Journal of Physics: Conference series.2021. v. 2056 012017.
18. Klebanoff P S. Characteristics of turbulence in a boundary layer with zero pressure gradients. //NACA. 1955. Rep. 1247.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Селим Рами Салах Сабер – аспирант кафедры компьютерного моделирования Московского физико-технического института (национального исследовательского университета); Ассистент преподавателя на факультете Естественных наук Университета г. Танта.
e-mail: selim.rs@phystech.edu.

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Ramy Salah Saber Selim – Postgraduate Student, Department of computer Modeling, Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University); Teaching assistant at the Faculty of Natural Sciences of the University of Tanta.
e-mail: selim.rs@phystech.edu

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Селим Р. С. Турбулентная статистика с точки зрения когерентной структуры в пограничном слое // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2021. № 4. С. 75–85.
DOI: 10.18384/2310-7251-2021-4-75-85

FOR CITATION

Selim R. S. Turbulent statistics in terms of coherent structure in the boundary layer In: *Bulletin of the Moscow Region State University*. *Series: Physics-Mathematics*, 2021, no. 4, pp. 75–85.
DOI: 10.18384/2310-7251-2021-4-75-85

УДК 539.22
DOI: 10.18384/2310-7251-2021-4-86-95

СИСТЕМЫ ДВУХАТОМНЫХ ПОЛЯРНЫХ МОЛЕКУЛ В ОДНОМЕРНОЙ ГЕОМЕТРИИ ОПТИЧЕСКИХ И МАГНИТО-ОПТИЧЕСКИХ ЛОВУШЕК

Доловова О. А.[1], Горбунов М. Е.[1,2]

[1] *Институт физики атмосферы им. А. М. Обухова Российской академии наук 119017, г. Москва, Пыжевский пер., 3, Российская Федерация*

[2] *ФГБУ «ГИДРОМЕТЦЕНТР РОССИИ» 123376, г. Москва, Большой Предтеченский переулок, д.13, стр. 1, Российская Федерация*

Аннотация

Целью настоящей статьи является обзор современных теоретических и экспериментальных исследований в работах различных авторов в области физики дипольных бозонных и фермионных квантовых ультрахолодных газов.

Процедура и методы. Кратко сопоставлены и проанализированы процедуры и методы исследования двумерного и трёхмерного взаимодействия диполей.

Результаты. Рассмотрено рассеяние полярных молекул в зависимости от параметров их взаимодействия: энергии диполей, их взаимного расположения, влияние внешних полей, параметров короткодействующего взаимодействия.

Теоретическая и/или практическая значимость. Продемонстрирована актуальность разработки теоретического описания планарных систем двухатомных полярных молекул.

Ключевые слова: ультрахолодные полярные газы, оптические ловушки

Благодарности. Статья подготовлена при финансовой поддержке гранта Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 20-05-00189 А).

SYSTEMS OF DIATOMIC POLAR MOLECULES IN ONE-DIMENSIONAL GEOMETRY OF OPTICAL AND MAGNETO-OPTICAL TRAPS

O. Dolovova[1], M. Gorbunov[1,2]

[1] *A. M. Obukhov Institute of Atmospheric Physics of Russian Academy of Sciences 3 Pyzhevsky pereulok, Moscow 119017, Russian Federation*

[2] *Hydrometcenter of Russia 13 build. 1 Bolshoy Predtechensky pereulok, Moscow 123376, Russian Federation*

Abstract

Aim. The paper reviews modern theoretical and experimental studies by various authors in the field of the physics of dipole bosonic and fermionic quantum ultracold gases.

Methodology. The procedures and methods for studying the two-dimensional and three-dimensional interaction of dipoles are briefly compared and analyzed.
Results. We analyze the scattering of polar molecules depending on the parameters of their interaction: the energies of the dipoles, their mutual arrangement, the influence of external fields, and the parameters of the short-range interaction.
Research implications. The urgency of developing a theoretical description of planar systems of diatomic polar molecules is demonstrated.
Keywords: ultracold polar gases, optical traps

Acknowledgments. This research was supported by the Russian Foundation for Basic Research (Grant No. 20-05-00189 A).

Введение

Основы для исследований захвата и охлаждения атомов и молекул в оптических и магнитных полях были заложены в ряде работ, отмеченных Нобелевскими премиями 1997 г. (Стивен Чу, Клод Коэн-Таннуджи и Уильям Филлипс «За создание методов охлаждения и удержания атомов с помощью лазерного света»), 2012 г. (Серж Арош и Дэвид Уайнленд «За создание прорывных технологий манипулирования квантовыми системами, которые сделали возможными измерение отдельных квантовых систем и управление ими») и 2018 г. (Артур Эшкин «За изобретение оптического пинцета и его применение в биологических системах»). Охлажденные дипольные газы в настоящее время являются важным объектом теоретических [5–11] и экспериментальных [5; 12–15] исследований. В ходе этих исследований были предсказаны, а затем обнаружены экспериментально такие эффекты, как анизотропная сверхтекучесть [16], экзотические самостабилизирующиеся квантовые капли [17; 18] и состояния со свойствами сверхтекучего твёрдого тела [19; 20]. К настоящему времени существуют технологии охлаждения атомов до сверхнизких температур с помощью доплеровского (до мК) и «сизифова» охлаждения (до нК). Атомы удерживаются в оптических ловушках (в узлах стоячей волны лазерного излучения) и в магнито-оптических ловушках, где дополнительно используется неоднородное магнитное поле. Технология охлаждения нейтральных атомов позволила достигнуть состояний Бозе-Эйнштейновской конденсации и двумерного вырожденного ферми-газа. Минимальная температура, достигнутая при помощи лазерного охлаждения и выпаривания в магнитной ловушке, составляет 350 пК [21].

Перспективы использования систем двухатомных полярных молекул

Использование дипольного взаимодействия открывает ряд интересных возможностей [18; 19]. Его анизотропные свойства приводят к проявлениям квантового хаоса в ультрахолодном дипольном рассеянии [20–22]. В экспериментах величиной дипольного момента можно управлять с помощью внешних полей [18; 23; 24]. Охлажденные дипольные газы являются удобным объектом для исследований. В газах можно достичь низкого содержания примесей, охлаждать их до температур порядка нК, контролировать плотность и количество частиц.

Существуют конфигурации оптических ловушек, уменьшающие количество пространственных степеней свободы до двух или одной. Это позволяет решить проблему нестабильности трёхмерных дипольных газов из-за притяжения «голова к хвосту».

В системах с дипольным взаимодействием, помещённых в ловушки, понижающие число степеней свободы, возможно получение новых квантовых фаз [25; 26]. Примерами являются Бозе-Эйнштеновский конденсат (БЭК) атомов ^{52}Cr [27] и самостабилизирующиеся квантовые капли в холодном дипольном Бозе-газе ^{164}Dy в одномерной оптической решётке [13], считавшиеся нестабильными из-за притягивающего взаимодействия. Достигнут значительный прогресс в получении холодных газов полярных молекул [28; 29] и магнитных атомов [13; 14]. Это делает оптические и магнитооптические ловушки с планарной геометрией наиболее перспективным кандидатом для стабилизации и удержания дипольных газов.

Взаимодействие между магнитными дипольными моментами атомов слабее, чем между электрическими дипольными моментами полярных молекул. Это позволяет в большинстве случаев ограничиться рассмотрением электрических дипольных моментов.

Малые размеры ячеек оптических ловушек и низкие температуры приводят к тому, что описание дипольных газов возможно лишь с привлечением квантовой динамики. Для описания двухчастичного рассеяния идентичных полярных молекул необходим учёт бозонной или фермионной статистики. Аналитические оценки для описания столкновений холодных атомов, использующие потенциалы нулевого радиуса, неприменимы для описания дипольного взаимодействия [7]. Задача разработки квантовых теоретических моделей дипольных газов остаётся актуальной. Поскольку большинство модельных уравнений не имеют аналитических решений, необходимо развитие численных методов [28; 29].

В настоящее время активно развиваются квантовые вычисления, и особую актуальность приобретает создание масштабируемого квантового компьютера. Одним из возможных решений является использование в качестве кубитов ультрахолодных атомов и полярных молекул, удерживаемых в планарных оптических решётках [30–32].

Для использования нецентральности дипольного взаимодействия в одномерных/двумерных геометриях угол наклона диполей по отношению оси или плоскости их движения регулирется внешним полем. При увеличении углов наклона для рассеяния диполей [33; 34] в сечениях рассеяния появляются резонансы, что в реальных условиях соответствует потерям частиц из оптических ловушек. Для создания малочастичной системы с временем жизни, достаточным для организации квантовых вычислений, необходимы теоретические оценки по определению условий стабильности динамических дипольных систем.

Дальнодействие диполь-дипольного взаимодействия позволяет добиться большей масштабируемости по сравнению с взаимодействием нейтральных атомов [31; 32; 35]. Практическая реализуемость таких кубитов рассматривается в [35].

Проведение экспериментов требует дальнейшего анализа влияния короткодействующего взаимодействия на дипольное рассеяние в плоскости [28; 33]. С экспериментальной точки зрения контроль короткодействующей части взаимодействия диполей возможен с помощью внешних полей и резонансов Фешбаха [36; 7]. Имеется ряд принципиальных отличий свойств дипольного рассеяния в плоскости от свойств трёхмерного рассеяния, например, расходимость s – волны в низкоэнергетическом пределе и существование слабосвязанного состояния для любого притягивающего потенциала [37].

Зависимости резонансов сечения рассеяния от радиуса короткодействующего взаимодействия для трёхмерного случая [38], неприменимы в двумерном случае [33; 34]. *Оценка влияния короткодействующего взаимодействия на процессы дипольного рассеяния в плоскости при различных ориентациях дипольных моментов является нерешённой, а потому актуальной задачей теоретической физики.*

В ряде работ рассматривалось рассеяние *сонаправленных* диполей [7; 33; 38–41], однако в [42] проведён анализ рассеяния *произвольно направленных* диполей в плоскости. Экспериментальное исследование рассеяния в случае произвольной ориентации возможно с использованием столкновения дипольных Бозе-Эйнштейновских конденсатов, полученных с помощью различно направленных внешних электрических полей [43] или столкновения медленных полярных молекул, приготовленных в «криофуге» [44]. В [42] обнаружена сильная угловая зависимость дифференциальных сечений в резонансных и нерезонансных точках при рассеянии ферми- и бозе- дипольных газов в плоскости.

Заключение

Сопоставлены и проанализированы процедуры и методы исследования двумерного и трёхмерного взаимодействия диполей. Разработка теоретического описания планарных систем двухатомных полярных молекул важна, в частности, для прикладной задачи создания кубитов на их основе.

Статья поступила в редакцию 17.09.2021 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bohn J. L., Rey A. M., Ye J. Cold molecules: Progress in quantum engineering of chemistry and quantum matter // Science. 2017. Vol. 357. No. 6355. P. 1002–1010. DOI: 10.1126/science.aam6299.
2. Cold polar molecules in two-dimensional traps: Tailoring interactions with external fields for novel quantum phases / Micheli A., Pupillo G. Büchler H. P., Zoller P. // Physical Review A. 2007. Vol. 76. Iss. 4. P. 043604. DOI: 10.1103/PhysRevA.76.043604.
3. Baranov M. A. Theoretical progress in many-body physics with ultracold dipolar gases // Physics Reports. 2008. Vol. 464. Iss. 3. P. 71–111. DOI: 10.1016/j.physrep.2008.04.007.
4. Bloch I., Dalibard J., Zwerger W. Many-body physics with ultracold gases // Reviews of Modern Physics. 2008. Vol. 80. Iss. 3. P. 885–964. DOI: 10.1103/RevModPhys.80.885
5. Micheli A., Brennen G. K., Zoller P. A toolbox for lattice-spin models with polar molecules // Nature Physics. 2006. Vol. 2. Iss. 5. P. 341–347. DOI: 10.1038/nphys287.
6. Condensed matter theory of dipolar quantum gases / Baranov M. A., Dalmonte M., Pupillo G., Zoller P. // Chemical Reviews. 2012. Vol. 112. No. 9. P. 5012–5061. DOI: 10.1021/cr2003568.

7. The physics of dipolar bosonic quantum gases / Lahaye T., Menotti C., Santos L., Lewenstein M., Pfau T. // Reports on Progress in Physics. 2009. Vol. 72. No. 12. P. 126401. DOI: 10.1088/0034-4885/72/12/126401.
8. Controlling the quantum stereodynamics of ultracold bimolecular reactions / De Miranda M. H. G., Chotia A., Neyenhuis B., Wang D., Quéméner G. Ospelkaus S., Bohn J. L., Ye J., Jin D. S. // Nature Physics. 2011. Vol. 7. Iss. 6. P. 502–507. DOI: 10.1038/nphys1939.
9. Collisions of ultracold 23Na87Rb molecules with controlled chemical reactivities / Ye X., Guo M., González-Martínez M. L., Quéméner G., Wang D. // Science advances. 2018. Vol. 4. No. 1. P. eaaq0083. DOI: 10.1126/sciadv.aaq0083.
10. Górecki W., Rzążewski K. Electric dipoles vs. magnetic dipoles – For two molecules in a harmonic trap // EPL (Europhysics Letters). 2017. Vol. 118. No. 6. P. 66002. DOI: 10.1209/0295-5075/118/66002.
11. Reaching Fermi degeneracy via universal dipolar scattering / Aikawa K., Frisch A., Mark M., Baier S., Grimm R., Ferlaino F. // Physical Review Letters. 2014. Vol. 112. Iss. 1. P. 010404. DOI: 10.1103/PhysRevLett.112.010404.
12. Anisotropic superfluid behavior of a dipolar Bose–Einstein condensate / Wenzel M., Böttcher F., Schmidt J.-N., Eisenmann M., Langen T., Pfau T., Ferrier-Barbut I. // Physical Review Letters. 2018. Vol. 121. Iss. 3. P. 030401. DOI: 10.1103/PhysRevLett.121.030401.
13. Observation of Quantum Droplets in a Strongly Dipolar Bose Gas / Ferrier-Barbut I., Kadau H., Schmitt M., Wenzel M., Pfau T. // Physical Review Letters. 2016. Vol. 116. Iss. 21. P. 215301. DOI: 10.1103/PhysRevLett.116.215301.
14. Self-bound droplets of a dilute magnetic quantum liquid / Schmitt M., Wenzel M., Böttcher F., Ferrier-Barbut I., Pfau T. // Nature. 2016. Vol. 539. No. 7628. P. 259–262. DOI: 10.1038/nature20126.
15. Long-lived and transient supersolid behaviors in dipolar quantum gases / Chomaz L., Petter D., Ilzhöfer P., Natale G., Trautmann A., Politi C., Durastante G., et al. // Physical Review X. 2019. Vol. 9. Iss. 2. P. 021012. DOI: 10.1103/PhysRevX.9.021012.
16. Observation of a dipolar quantum gas with metastable supersolid properties / Tanzi L., Lucioni E., Famà F., Catani J., Fioretti A., Gabbanini C., Bisset R. N., Santos L., Modugno G. // Physical Review Letters. 2019. Vol. 122. Iss. 13. P. 130405. DOI: 10.1103/PhysRevLett.122.130405.
17. Spin gradient demagnetization cooling of ultracold atoms / Medley P., Weld D. M., Miyake H., Pritchard D. E., Ketterle W. // Physical Review Letters. 2011. Vol. 106. Iss. 19. P. 195301. DOI: 10.1103/PhysRevLett.106.195301.
18. Strongly correlated 2D quantum phases with cold polar molecules: controlling the shape of the interaction potential / Büchler H. P., Demler E., Lukin M., Micheli A., Prokof'ev N., Pupillo G., Zoller P. // Physical Review Letters. 2007. Vol. 98. Iss. 6. P. 060404. DOI: 10.1103/PhysRevLett.98.060404.
19. New frontiers for quantum gases of polar molecules / Moses S. A., Covey J. P., Miecnikowski M. T., Jin D. S., Ye J. // Nature Physics. 2017. Vol. 13. Iss. 1. P. 13–20. DOI: 10.1038/nphys3985.
20. Quantum chaos in ultracold collisions of gas-phase erbium atoms / Frisch A., Mark M., Aikawa K., Ferlaino F., Bohn J. L, Makrides C., Petrov A., Kotochigova S. // Nature. 2014. Vol. 507. No. 7493. P. 475–479. DOI: 10.1038/nature13137.
21. Emergence of chaotic scattering in ultracold Er and Dy / Maier T., Kadau H., Schmitt M., Wenzel M., Ferrier-B. I., Pfau T., Frisch A., Baier S., et al. // Physical Review X. 2015. Vol. 5. Iss. 4. P. 041029. DOI: 10.1103/PhysRevX.5.041029.
22. Yang B. C., Pérez-Ríos J., Robicheaux F. Classical fractals and quantum chaos in ultracold dipolar collisions // Physical Review Letters. 2017. Vol. 118. Iss. 15. P. 154101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.118.154101.

23. Giovanazzi S., Görlitz A., Pfau T. Tuning the dipolar interaction in quantum gases // Physical Review Letters. 2002. Vol. 89. Iss. 13. P. 130401. DOI: 10.1103/PhysRevLett.89.130401.
24. Tuning the dipole-dipole interaction in a quantum gas with a rotating magnetic field / Tang Y., Kao W., Li K.-Yu., Lev B. L. // Physical Review Letters. 2018. Vol. 120. Iss. 23. P. 230401. DOI: 10.1103/PhysRevLett.120.230401.
25. Interlayer superfluidity in bilayer systems of fermionic polar molecules / Pikovski A., Klawunn M., Shlyapnikov G. V., Santos L. // Physical Review Letters. 2010. Vol. 105. Iss. 21. P. 215302. DOI: 10.1103/PhysRevLett.105.215302.
26. Clustered Wigner-crystal phases of cold polar molecules in arrays of one-dimensional tubes / Knap M., Berg E., Ganahl M., Demler E. // Physical Review B. 2012. Vol. 86. Iss. 6. P. 064501. DOI: 10.1103/PhysRevB.86.064501.
27. Observation of dipole-dipole interaction in a degenerate quantum gas / Stuhler J, Griesmaier A., Koch T., Fattori M., Pfau T., Giovanazzi S., Pedri P., Santos L. // Physical Review Letters. 2005. Vol. 95. Iss. 15. P. 150406. DOI: 10.1103/PhysRevLett.95.150406.
28. Dipolar collisions of ultracold ground-state bosonic molecules / Guo M., Ye X., He J., González-Martínez M. L., Vexiau R., Quéméner G., Wang D. // Physical Review X. 2018. Vol. 8. Iss. 4. P. 041044. DOI: 10.1103/PhysRevX.8.041044.
29. Creation of an Ultracold Gas of Ground-State Dipolar 23Na87Rb Molecules / Guo M., Zhu B., Lu B., Ye X., Wang F., Vexiau R., Bouloufa-Maafa N., et al. // Physical Review Letters. 2016. Vol. 116. Iss. 20. P. 205303. DOI: 10.1103/PhysRevLett.116.205303.
30. Quantum logic gates in optical lattices / Brennen G. K., Caves C. M., Jessen P. S., Deutsch I. H. // Physical Review Letters. 1999. Vol. 82. Iss. 5. P. 1060. DOI: 10.1103/PhysRevLett.82.1060.
31. DeMille D. Quantum computation with trapped polar molecules // Physical Review Letters. 2002. Vol. 88. Iss. 6. P. 067901. DOI: 10.1103/PhysRevLett.88.067901.
32. Ni K.-K., Rosenband T., Grimes D. D. Dipolar exchange quantum logic gate with polar molecules // Chemical science. 2018. Vol. 9. Iss. 33. P. 6830–6838. DOI: 10.1039/C8SC02355G.
33. Ticknor C. Two-dimensional dipolar scattering with a tilt // Physical Review A. 2011. Vol. 84. Iss. 3. P. 032702. DOI: 10.1103/PhysRevA.84.032702.
34. Koval E. A., Koval O. A., Melezhik V. S. Anisotropic quantum scattering in two dimensions // Physical Review A. 2014. Vol. 89. Iss. 5. P. 052710. DOI: 10.1103/PhysRevA.89.052710.
35. Hudson E. R., Campbell W. C. Dipolar quantum logic for freely rotating trapped molecular ions // Physical Review A. 2018. Vol. 98. Iss. 4. P. 040302(R). DOI: 10.1103/PhysRevA.98.040302.
36. Stabilization of a purely dipolar quantum gas against collapse / Koch T., Lahaye T., Metz J., Frohlich B., Griesmaier A., Pfau T. // Nature physics. 2008. Vol. 4. Iss. 3. P. 218–222. DOI: 10.1038/nphys887.
37. Simon B. The bound state of weakly coupled Schrodinger operators in one and two dimensions // Annals of Physics. 1976. Vol. 97. Iss. 2. P. 279–288. DOI: 10.1016/0003-4916(76)90038-5.
38. Roudnev V., Cavagnero M. Resonance phenomena in ultracold dipole-dipole scattering // Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics. 2009. Vol. 42. No. 4. P. 044017. DOI: 10.1088/0953-4075/42/4/044017.
39. Dipolar Bose-Einstein condensates with dipole-dependent scattering length / Ronen S., Bortolotti D. C., Blume D., Bohn J. L. // Physical Review A. 2006. Vol. 74. Iss. 3. P. 033611. DOI: 10.1103/PhysRevA.74.033611.
40. Kanjilal K., Blume D. Coupled-channel pseudopotential description of the Feshbach resonance in two dimensions // Physical Review A. 2006. Vol. 73. Iss. 6. P. 060701(R). DOI: 10.1103/PhysRevA.73.060701.

41. Resonant control of polar molecules in individual sites of an optical lattice / Hanna T. M., Tiesinga E., Mitchell W. F., Julienne P. S. // Physical Review A. 2012. Vol. 85. Iss. 2. P. 022703. DOI: 10.1103/PhysRevA.85.022703.
42. Koval E. A., Koval O. A. Aspects of arbitrarily oriented dipoles scattering in a plane: Short-range interaction influence // Physical Review A. 2020. Vol. 102. Iss. 4. P. 042815. DOI: 10.1103/PhysRevA.102.042815.
43. Anisotropic collisions of dipolar Bose-Einstein condensates in the universal regime / Burdick N. Q., Sykes A. G., Tang Y., Lev B. L. // New Journal of Physics. 2016. Vol. 18. No. 11. P. 113004. DOI: 10.1088/1367-2630/18/11/113004.
44. A cryofuge for cold-collision experiments with slow polar molecules / Wu X., Gantner T., Koller M., Zeppenfeld M., Chervenkov S., Rempe G. // Science. 2017. Vol. 358. Iss. 6363. P. 645–648. DOI: 10.1126/science.aan3029.

REFERENCES

1. Bohn J. L., Rey A. M., Ye J. Cold molecules: Progress in quantum engineering of chemistry and quantum matter. In: Science, 2017, vol. 357, no. 6355, pp. 1002–1010. DOI: 10.1126/science.aam6299.
2. Micheli A., Pupillo G. Büchler H. P., Zoller P. Cold polar molecules in two-dimensional traps: Tailoring interactions with external fields for novel quantum phases. In: Physical Review A, 2007, vol. 76, iss. 4, pp. 043604. DOI: 10.1103/PhysRevA.76.043604.
3. Baranov M. A. Theoretical progress in many-body physics with ultracold dipolar gases. In: Physics Reports, 2008, vol. 464, iss. 3, pp. 71–111. DOI: 10.1016/j.physrep.2008.04.007.
4. Bloch I., Dalibard J., Zwerger W. Many-body physics with ultracold gases. In: Reviews of Modern Physics, 2008, vol. 80, iss. 3, pp. 885–964. DOI: 10.1103/RevModPhys.80.885
5. Micheli A., Brennen G. K., Zoller P. A toolbox for lattice-spin models with polar molecules. In: Nature Physics, 2006, vol. 2, iss. 5, pp. 341–347. DOI: 10.1038/nphys287.
6. Baranov M. A., Dalmonte M., Pupillo G., Zoller P. Condensed matter theory of dipolar quantum gases. In: Chemical Reviews, 2012, vol. 112, no. 9, pp. 5012–5061. DOI: 10.1021/cr2003568.
7. Lahaye T., Menotti C., Santos L., Lewenstein M., Pfau T. The physics of dipolar bosonic quantum gases. In: Reports on Progress in Physics, 2009, vol. 72, no. 12, pp. 126401. DOI: 10.1088/0034-4885/72/12/126401.
8. De Miranda M. H. G., Chotia A., Neyenhuis B., Wang D., Quéméner G. Ospelkaus S., Bohn J. L., Ye J., Jin D. S. Controlling the quantum stereodynamics of ultracold bimolecular reactions. In: Nature Physics, 2011, vol. 7, iss. 6, pp. 502–507. DOI: 10.1038/nphys1939.
9. Ye X., Guo M., González-Martínez M. L., Quéméner G., Wang D. Collisions of ultracold 23Na87Rb molecules with controlled chemical reactivities. In: Science advances, 2018, vol. 4, no. 1, pp. eaaq0083. DOI: 10.1126/sciadv.aaq0083.
10. Górecki W., Rzążewski K. Electric dipoles vs. magnetic dipoles – For two molecules in a harmonic trap. In: EPL (Europhysics Letters), 2017, vol. 118, no. 6, pp. 66002. DOI: 10.1209/0295-5075/118/66002.
11. Aikawa K., Frisch A., Mark M., Baier S., Grimm R., Ferlaino F. Reaching Fermi degeneracy via universal dipolar scattering. In: Physical Review Letters, 2014, vol. 112, iss. 1, pp. 010404. DOI: 10.1103/PhysRevLett.112.010404.
12. Wenzel M., Böttcher F., Schmidt J.-N., Eisenmann M., Langen T., Pfau T., Ferrier-Barbut I. Anisotropic superfluid behavior of a dipolar Bose–Einstein condensate. In: Physical Review Letters, 2018, vol. 121, iss. 3, pp. 030401. DOI: 10.1103/PhysRevLett.121.030401.

13. Ferrier-Barbut I., Kadau H., Schmitt M., Wenzel M., Pfau T. Observation of Quantum Droplets in a Strongly Dipolar Bose Gas. In: Physical Review Letters, 2016, vol. 116, iss. 21, pp. 215301. DOI: 10.1103/PhysRevLett.116.215301.
14. Schmitt M., Wenzel M., Böttcher F., Ferrier-Barbut I., Pfau T. Self-bound droplets of a dilute magnetic quantum liquid. In: Nature, 2016, vol. 539, no. 7628, pp. 259–262. DOI: 10.1038/nature20126.
15. Chomaz L., Petter D., Ilzhöfer P., Natale G., Trautmann A., Politi C., Durastante G., et al. Long-lived and transient supersolid behaviors in dipolar quantum gases. In: Physical Review X, 2019, vol. 9, iss. 2, pp. 021012. DOI: 10.1103/PhysRevX.9.021012.
16. Tanzi L., Lucioni E., Famà F., Catani J., Fioretti A., Gabbanini C., Bisset R. N., Santos L., Modugno G. Observation of a dipolar quantum gas with metastable supersolid properties. In: Physical Review Letters, 2019, vol. 122, iss. 13, pp. 130405. DOI: 10.1103/PhysRevLett.122.130405.
17. Medley P., Weld D. M., Miyake H., Pritchard D. E., Ketterle W. Spin gradient demagnetization cooling of ultracold atoms. In: Physical Review Letters, 2011, vol. 106, iss. 19, pp. 195301. DOI: 10.1103/PhysRevLett.106.195301.
18. Büchler H. P., Demler E., Lukin M., Micheli A., Prokof'ev N., Pupillo G., Zoller P. Strongly correlated 2D quantum phases with cold polar molecules: controlling the shape of the interaction potential. In: Physical Review Letters, 2007, vol. 98, iss. 6, pp. 060404. DOI: 10.1103/PhysRevLett.98.060404.
19. Moses S. A., Covey J. P., Miecnikowski M. T., Jin D. S., Ye J. New frontiers for quantum gases of polar molecules. In: Nature Physics, 2017, vol. 13, iss. 1, pp. 13–20. DOI: 10.1038/nphys3985.
20. Frisch A., Mark M., Aikawa K., Ferlaino F., Bohn J. L, Makrides C., Petrov A., Kotochigova S. In: Quantum chaos in ultracold collisions of gas-phase erbium atoms Nature, 2014, vol. 507, no. 7493, pp. 475–479. DOI: 10.1038/nature13137.
21. Maier T., Kadau H., Schmitt M., Wenzel M., Ferrier-B. I., Pfau T., Frisch A., Baier S., et al. Emergence of chaotic scattering in ultracold Er and Dy. In: Physical Review X, 2015, vol. 5, iss. 4, pp. 041029. DOI: 10.1103/PhysRevX.5.041029.
22. Yang B. C., Pérez-Ríos J., Robicheaux F. Classical fractals and quantum chaos in ultracold dipolar collisions. In: Physical Review Letters, 2017, vol. 118, iss. 15, pp. 154101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.118.154101.
23. Giovanazzi S., Görlitz A., Pfau T. Tuning the dipolar interaction in quantum gases. In: Physical Review Letters, 2002, vol. 89, iss. 13, pp. 130401. DOI: 10.1103/PhysRevLett.89.130401.
24. Tang Y., Kao W., Li K.-Yu., Lev B. L. Tuning the dipole-dipole interaction in a quantum gas with a rotating magnetic field. In: Physical Review Letters, 2018, vol. 120, iss. 23, pp. 230401. DOI: 10.1103/PhysRevLett.120.230401.
25. Pikovski A., Klawunn M., Shlyapnikov G. V., Santos L. Interlayer superfluidity in bilayer systems of fermionic polar molecules. In: Physical Review Letters, 2010, vol. 105, iss. 21, pp. 215302. DOI: 10.1103/PhysRevLett.105.215302.
26. Knap M., Berg E., Ganahl M., Demler E. Clustered Wigner-crystal phases of cold polar molecules in arrays of one-dimensional tubes. In: Physical Review B, 2012, vol. 86, iss. 6, pp. 064501. DOI: 10.1103/PhysRevB.86.064501.
27. Stuhler J, Griesmaier A., Koch T., Fattori M., Pfau T., Giovanazzi S., Pedri P., Santos L. Observation of dipole-dipole interaction in a degenerate quantum gas. In: Physical Review Letters, 2005, vol. 95, iss. 15, pp. 150406. DOI: 10.1103/PhysRevLett.95.150406.

28. Guo M., Ye X., He J., González-Martínez M. L., Vexiau R., Quéméner G., Wang D. Dipolar collisions of ultracold ground-state bosonic molecules. In: Physical Review X, 2018, vol. 8, iss. 4, pp. 041044. DOI: 10.1103/PhysRevX.8.041044.
29. Guo M., Zhu B., Lu B., Ye X., Wang F., Vexiau R., Bouloufa-Maafa N., et al. Creation of an Ultracold Gas of Ground-State Dipolar 23Na87Rb Molecules. In: Physical Review Letters, 2016, vol. 116, iss. 20, pp. 205303. DOI: 10.1103/PhysRevLett.116.205303.
30. Brennen G. K., Caves C. M., Jessen P. S., Deutsch I. H. Quantum logic gates in optical lattices. In: Physical Review Letters, 1999, vol. 82, iss. 5, pp. 1060. DOI: 10.1103/PhysRevLett.82.1060.
31. DeMille D. Quantum computation with trapped polar molecules. In: Physical Review Letters, 2002, vol. 88, iss. 6, pp. 067901. DOI: 10.1103/PhysRevLett.88.067901.
32. Ni K.-K., Rosenband T., Grimes D. D. Dipolar exchange quantum logic gate with polar molecules. In: Chemical science, 2018, vol. 9, iss. 33, pp. 6830–6838. DOI: 10.1039/C8SC02355G.
33. Ticknor C. Two-dimensional dipolar scattering with a tilt. In: Physical Review A, 2011, vol. 84, iss. 3, pp. 032702. DOI: 10.1103/PhysRevA.84.032702.
34. Koval E. A., Koval O. A., Melezhik V. S. Anisotropic quantum scattering in two dimensions. In: Physical Review A, 2014, vol. 89, iss. 5, pp. 052710. DOI: 10.1103/PhysRevA.89.052710.
35. Hudson E. R., Campbell W. C. Dipolar quantum logic for freely rotating trapped molecular ions. In: Physical Review A, 2018, vol. 98, iss. 4, pp. 040302(R). DOI: 10.1103/PhysRevA.98.040302.
36. Koch T., Lahaye T., Metz J., Frohlich B., Griesmaier A., Pfau T. Stabilization of a purely dipolar quantum gas against collapse. In: Nature physics, 2008, vol. 4, iss. 3, pp. 218–222. DOI: 10.1038/nphys887.
37. Simon B. The bound state of weakly coupled Schrodinger operators in one and two dimensions. In: Annals of Physics, 1976, vol. 97, iss. 2, pp. 279–288. DOI: 10.1016/0003-4916(76)90038-5.
38. Roudnev V., Cavagnero M. Resonance phenomena in ultracold dipole-dipole scattering. In: Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics, 2009, vol. 42, no. 4, p. 044017. DOI: 10.1088/0953-4075/42/4/044017.
39. Ronen S., Bortolotti D. C., Blume D., Bohn J. L. Dipolar Bose-Einstein condensates with dipole-dependent scattering length. In: Physical Review A, 2006, vol. 74, iss. 3, pp. 033611. DOI: 10.1103/PhysRevA.74.033611.
40. Kanjilal K., Blume D. Coupled-channel pseudopotential description of the Feshbach resonance in two dimensions. In: Physical Review A, 2006, vol. 73. iss. 6. pp. 060701(R). DOI: 10.1103/PhysRevA.73.060701.
41. Hanna T. M., Tiesinga E., Mitchell W. F., Julienne P. S. Resonant control of polar molecules in individual sites of an optical lattice. In: Physical Review A, 2012, vol. 85, iss. 2, pp. 022703. DOI: 10.1103/PhysRevA.85.022703.
42. Koval E. A., Koval O. A. Aspects of arbitrarily oriented dipoles scattering in a plane: Short-range interaction influence. In: Physical Review A, 2020, vol. 102, iss. 4, pp. 042815. DOI: 10.1103/PhysRevA.102.042815.
43. Burdick N. Q., Sykes A. G., Tang Y., Lev B. L. Anisotropic collisions of dipolar Bose-Einstein condensates in the universal regime. In: New Journal of Physics, 2016, vol. 18, no. 11, pp. 113004. DOI: 10.1088/1367-2630/18/11/113004.
44. Wu X., Gantner T., Koller M., Zeppenfeld M., Chervenkov S., Rempe G. A cryofuge for cold-collision experiments with slow polar molecules. In: Science, 2017, vol. 358, iss. 6363, pp. 645–648. DOI: 10.1126/science.aan3029.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Доловова Оксана Александровна – младший научный сотрудник лаборатории турбулентности и распространения волн Института физики атмосферы им. А. М. Обухова Российской академии наук;
e-mail: kov.oksana20@gmail.com;

Горбунов Михаил Евгеньевич – доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией турбулентности и распространения Института физики атмосферы им. А. М. Обухова Российской академии наук; ведущий научный сотрудник Гидрометцентра России;
e-mail: gorbunov@ifaran.ru.

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Oksana A. Dolovova – Junior Researcher, Laboratory of Turbulence and Wave Propagation, A. M. Obukhov Institute of Atmospheric Physics of Russian Academy of Sciences;
e-mail: kov.oksana20@gmail.com;

Michael E. Gorbunov – Dr. Sci. (Phys.-Math.), Head of Laboratory of Turbulence and Wave Propagation, A. M. Obukhov Institute of Atmospheric Physics of Russian Academy of Sciences; Leading Researcher, Hydrometcenter of Russia;
e-mail: gorbunov@ifaran.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Доловова О. А., Горбунов М. Е. Системы двухатомных полярных молекул в одномерной геометрии оптических и магнито-оптических ловушках // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2021. №4. С. 86–95.
DOI: 10.18384/2310-7251-2021-4-86-95

FOR CITATION

Dolovova O. A., Gorbunov M. E. Systems of diatomic polar molecules in one-dimensional geometry of optical and magneto-optical traps. In: *Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*, 2021. no. 4, pp. 86–95.
DOI: 10.18384/2310-7251-2021-4-86-95

УДК 533.6.011
DOI: 10.18384/2310-7251-2021-4-96-111

РАСЧЁТ ПОЛЯ ТЕЧЕНИЯ ВБЛИЗИ ПОГЛОЩАЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ С ПРИМЕНЕНИЕМ КИНЕТИКО-ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ И ПОВЫШЕНИЕ ЕЁ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ЭКОНОМИЧНОСТИ

Никитченко Ю. А., Тихоновец А. В.

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4, Российская Федерация

Аннотация

Целью работы является разработка физико-математической модели, объединяющей кинетическое и гидродинамическое описание течения, и повышение её вычислительной экономичности.

Процедура и методы. В работе применялся аналитический метод исследования. Для изучения свойств полученной модели использовался метод численного эксперимента.

Результаты. Результаты расчётов показывают, что комбинированная кинетико-гидродинамическая модель (КГМ) позволяет физически адекватно описывать процессы, протекающие в переходной области течения газовой среды. В области сшивания компонент модели отсутствуют разрывы производных параметров газа. Модель КГМ позволяет выставлять граничные условия на поглощающих поверхностях. Значения такой интегральной характеристики, как $c_x(\alpha)$, рассчитанные по КГМ, удовлетворительно согласуются с результатами расчётов по МКУ.

Теоретическая и практическая значимость. При расчёте относительно плотных газов (Kn = 0,01) КГМ позволяет сократить потребляемый объём памяти вычислительного устройства примерно на три порядка и процессорное время на два порядка по сравнению с модельным кинетическим уравнением (МКУ). Разработанная модель КГМ может быть использована в широком интервале чисел Кнудсена.

Ключевые слова: комбинированная модель, модель Навье-Стокса-Фурье, кинетическая модель, поглощающая поверхность, вычислительная эффективность

Благодарности. Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, номер темы FSFF-2020-0013.

CALCULATION OF THE FLOW FIELD NEAR THE ABSORBING SURFACE USING THE KINETIC-HYDRODYNAMIC MODEL AND INCREASING ITS COMPUTATIONAL EFFICIENCY

Yu. Nikitchenko, A. Tikhonovets

Moscow Aviation Institute (National Research University)
4 Volokolamskoe shosse, Moscow 125993, Russian Federation

Abstract
Aim of the work is to develop a physical and mathematical model that combines the kinetic and hydrodynamic description of the flow, and to increase its computational efficiency.
Methodology. An analytical research method was used in the work. To study the properties of the resulting model, the method of a numerical experiment was used.
Results. The calculation results show that the combined kinetic-hydrodynamic model (KHM) makes it possible to physically adequately describe the processes occurring in the transition region of the gas medium flow. There are no discontinuities in the derivatives of the gas parameters in the region where the model components are stitched together. The KHM model allows setting boundary conditions on absorbing surfaces. The values of such an integral characteristic as $c_x(\alpha)$, calculated by the KGM, are in satisfactory agreement with the results of calculations by the model kinetic equation.
Research implications. When calculating relatively dense gases (Kn = 0,01), the model allows to reduce the memory consumption of the computing device by about three orders of magnitude and the processor time by two orders of magnitude compared to the model kinetic equation. The developed model can be used in a wide range of Knudsen numbers.
Keywords: combined model, Navier-Stokes-Fourier model, kinetic model, absorbing surface, computational efficiency

Acknowledgments. The work was carried out within the framework of the state task of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, subject number FSFF-2020-0013.

Введение

Модели механики сплошной среды (гидродинамические модели) не позволяют физически адекватно описывать процесс взаимодействия газовой среды с активной поверхностью. Некоторые приближенные соотношения для этого процесса можно найти в работах [1; 2]. Модели молекулярно-кинетической теории (кинетические модели) справляются с этой задачей относительно просто [2]. Потоки массы, импульса и энергии на поверхность определяются из решения кинетического уравнения. По этим параметрам и с учётом свойств обтекаемой поверхности восстанавливается весовая функция (функции распределения молекул по скоростям) отражённых от поверхности молекул. Совокупность весовых функций падающих и отражённых поверхностью молекул позволяет определить любой параметр газовой среды в граничной точке.

Вместе с тем кинетические модели не представляют практического интереса для описания течений плотных (Kn < 0,1) газов, ввиду огромного объёма вычислительных операций и оперативной памяти вычислительного устройства. На сегодняшний день разработан целый ряд гибридных и комбинированных моделей, использующих кинетическое описание течения в сильнонеравновесных (высоко градиентных) областях и гидродинамическое описание в остальных областях. Краткий обзор таких моделей представлен в [3]. В этой же работе, а также в [4], представлена кинетико-гидродинамическая модель (КГМ), позволяющая получать гладкие решения в условиях высокой неравновесности. При расчёте профилей ударных волн и пристеночных течений КГМ давала результаты, удовлетворительно согласующиеся с экспериментальными и расчётными данными.

В [5] рассматривалась задача сверхзвукового обтекания тонкой пластины, установленной поперёк потока. Лобовая поверхность пластины поглощала газ. Задача решалась на базе модельного кинетического уравнения (МКУ). Был показан эффект качественного изменения зависимости лобового сопротивления пластины от коэффициента поглощения поверхности при изменении числа Кнудсена. В настоящей работе эта задача решается с использованием КГМ. Результаты сравниваются с решением МКУ. Основное внимание уделяется повышению вычислительной эффективности КГМ по отношению к МКУ. Оценивается точность определения коэффициента лобового сопротивления.

В работе приняты следующие допущения и обозначения. Рассматриваются течения однокомпонентных совершенных газов. Все выражения записаны для многоатомных газов. В случае одноатомных газов выражения остаются справедливы после очевидных преобразований.

Интеграл по пространству скоростей обозначен, как:

$$\int \ldots d\mathbf{c} = \int_{-\infty}^{+\infty} dc_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dc_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \ldots dc_3.$$

Основные символы:

δ_{ij} – символ Кронекера;

t, x_i, – время и геометрическая координата;

ξ_i, ε – молекулярная скорость и энергия вращения молекулы;

L, λ_∞ – высота пластины и средняя длина свободного пробега молекулы в невозмущенном потоке;

m_0, n, $\rho = m_0$, n – масса молекулы, концентрация молекул и плотность газа;

u_i, $c_i = \xi_i - u_i$ – групповая (макроскопическая) и тепловая скорости молекул;

f – весовая функция (функция распределения молекул по скоростям);

μ, γ, k, $R = k/m_0$ – коэффициент вязкости, показатель адиабаты, постоянная Больцмана, удельная газовая постоянная;

T_t, T_r, $T = 1{,}5(\gamma - 1)T_t + 0{,}5(5 - 3\gamma)T_r$ – температуры поступательных и вращательных степеней свободы молекул, термодинамическая температура;

P_{ij}, $p_{ij} = P_{ij} - \delta_{ij} R\rho T_t$ – полные и неравновесные напряжения;

$p^m = (P_{xx} + P_{yy} + P_{zz})/3 = R\rho T_t$ – **механическое** давление;

$p = R\rho T$ – **термодинамическое** давление;

φ_i, ω_i – тепловые потоки, обусловленные переносом энергии теплового движения на поступательных и вращательных степенях свободы молекул;

$q_i = \varphi_i + \omega_i$ – полный тепловой поток;

c_x, α – коэффициент сопротивления и коэффициент поглощения пластины;

M, Kn, Pr – числа Маха, Кнудсена и Прандтля. В рассматриваемых моделях принято: $Pr = 4\gamma/(9\gamma - 5)$.

1. Задача обтекания пластины с поглощающей поверхностью

Задача рассматривалась в прямоугольных декартовых координатах *0XY*. Невозмущённый поток двигался в направлении оси *0X* через левую границу вычислительной области. Схема задачи показана на рис. 1.

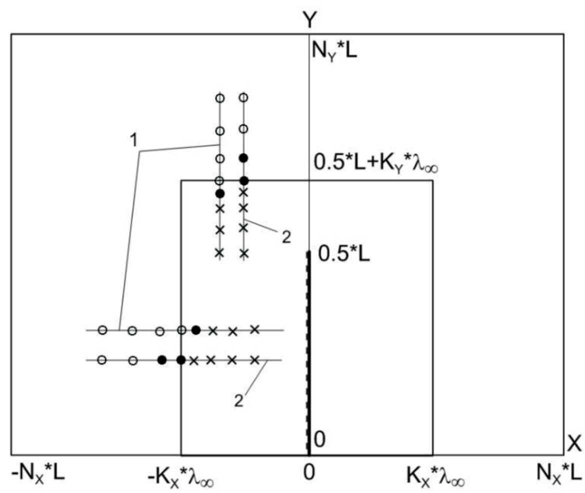

Рис. 1 / Fig. 1. Схема вычислительной области. Жирная линия – пластина, поглощающая поверхность обозначена пунктиром; прямоугольники – границы гидродинамической области; K_X – ширина кинетической полуобласти в длинах пробега молекулы; N_X – ширина гидродинамической полуобласти единицах высоты пластины; N_Y – высота гидродинамической полуобласти в единицах высоты пластины; 1 – схема расположения узлов сшивания для гидродинамической области; 2 – схема расположения узлов сшивания для кинетической области; ● – узлы сшивания; ● – узлы гидродинамической сетки; × – узлы кинетической сетки / Scheme of the computational area. The thick line is the plate, the absorbing surface is indicated by a dotted line; rectangles are the boundaries of the hydrodynamic region; K_X – the width of the kinetic semi-region in the lengths of the molecular path; N_X – the width of the hydrodynamic semi-region in units of plate height; N_Y – the height of the hydrodynamic semi-domain in units of the plate height; 1 – layout of stitching nodes for the hydrodynamic region; 2 – layout of crosslinking nodes for the kinetic region; ● – stitching nodes; ● – hydrodynamic mesh nodes; × – nodes of the kinetic grid.

Источник: составлено авторами.

Размер всей вычислительной области, он же внешний размер гидродинамической области, составлял: $N_x = 3 \ldots 4$, $N_y = 2 \ldots 3$. Размер кинетической области, он же внутренний размер гидродинамической области, принимался равным $K_x = 10 \ldots 20$, $K_y = 10 \ldots 15$. Длина свободного пробега молекулы определена соотношением $\lambda_\infty = \mu_\infty (RT_\infty)^{-1/2}/\rho_\infty$.

Граничные условия на внешних границах вычислительной области выставлены следующим образом: в сечении $x = -N_x L$ – параметры невозмущённого потока, в сечении $y = -N_x L$ – принималось $\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\rho, u_x, u_y, T\right) = 0,$, в сечении $x = -N_x L$ – принималось $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\rho, u_x, u_y, T\right) = 0.$.

На лобовой поверхности пластины (пунктир на рис. 1) задавался коэффициент поглощения поверхности $\alpha = (J_{down} - J_{reflect})/J_{down}$, где

$$J_{down} = \int_{-\infty}^{+\infty} dc_y \int_{-\infty}^{+\infty} dc_z \int_{0}^{\infty} d\varepsilon \int_{0}^{+\infty} \xi_x f dc_x, \quad J_{reflect} = -\int_{-\infty}^{+\infty} dc_y \int_{-\infty}^{+\infty} dc_z \int_{0}^{\infty} d\varepsilon \int_{0}^{+\infty} \xi_x f dc_x$$ –

плотности падающего и отражённого молекулярного потока.

В качестве коэффициента сопротивления пластины рассматривается следующее соотношение:

$$c_x = \left(\int_{F1} \left(P_{xx} + \rho u_x^2\right) dF - \int_{F2} P_{xx} dF \right) / \left(p_\infty + \rho_\infty u_\infty^2\right) S,$$

где $F1, F2$ – лобовая и донная поверхности пластины; $S = L \times 1$ – площадь пластины единичного размаха. В отличие от коэффициента лобового сопротивления в традиционном понимании эта зависимость в качестве характерной величины использует поток импульса невозмущённого потока. Такая универсальная форма коэффициента лобового сопротивления позволяет, например, рассматривать задачи обтекания поглощающих поверхностей, расположенных в неподвижном газе. Эта позитивная особенность коэффициента и определила его выбор.

В настоящей работе температура всей пластины принимается равной температуре торможения газа.

2. Кинетико-гидродинамическая модель

Применительно к решаемой задаче КГМ [3] формулируется следующим образом. В гидродинамической области используется модель Навье-Стокса-Фурье (НСФ):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial \rho u_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \rho u_y}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \dfrac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \dfrac{\partial u_x}{\partial y} + \dfrac{1}{\rho}\left(\dfrac{\partial P_{xx}}{\partial x} + \dfrac{\partial P_{xy}}{\partial y} \right) = 0, \\ \dfrac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \dfrac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \dfrac{\partial u_y}{\partial y} + \dfrac{1}{\rho}\left(\dfrac{\partial P_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial P_{yy}}{\partial y} \right) = 0, \\ \dfrac{\partial T}{\partial t} + u_x \dfrac{\partial T}{\partial x} + u_y \dfrac{\partial T}{\partial y} + \dfrac{(\gamma - 1)}{\rho}\left(P_{xx} \dfrac{\partial u_x}{\partial x} + P_{xy}\left(\dfrac{\partial u_x}{\partial y} + \dfrac{\partial u_y}{\partial x} \right) + P_{yy} \dfrac{\partial u_y}{\partial y} \right) + \\ + \dfrac{1}{c_v \rho}\left(\dfrac{\partial q_x}{\partial y} + \dfrac{\partial q_y}{\partial y} \right) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где

$$P_{ij}=\delta_{ij}R\rho T-\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)+\delta_{ij}\frac{2}{3}\left(1-\frac{5-3\gamma}{2}Z\right)\mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}\right);$$

$$q_i=-\frac{c_p}{\Pr}\mu\frac{\partial T}{\partial x_i}.$$

Коэффициент вязкости и параметр Z определяются зависимостями, используемыми в модели МКУ [6], но с сохранением порядка приближения модели НСФ, т. е. $\mu=\mu(T_t=T)$, $Z=Z(T_t/T_r=1)$.

Для решения уравнения сохранения массы использовалась схема Лакса-Вендрофа [7]. Для остальных уравнений системы (1) применялся метод Томаса с нестационарным членом. Решение проводилось на трёх узлах сеток с переменным шагом, который изменялся от $2\lambda_\infty$ до $0{,}1L$.

В кинетической области применялось МКУ [6]:

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{vmatrix}f_t\\f_r\end{vmatrix}+\xi_x\frac{\partial}{\partial x}\begin{vmatrix}f_t\\f_r\end{vmatrix}+\xi_y\frac{\partial}{\partial y}\begin{vmatrix}f_t\\f_r\end{vmatrix}=\frac{p^m}{\mu}\begin{vmatrix}f_t^+-f_t\\f_r^+-f_r\end{vmatrix}, \tag{2}$$

где $f_t=\int fd\varepsilon,\quad f_r=\int\varepsilon fd\varepsilon,$

$$f^+=\frac{n}{\left(2\pi RT_t^+\right)^{3/2}}\exp\left(-\frac{c^2}{2RT_t^+}\right)\left(1+\frac{\left(\varphi_xc_x+\varphi_yc_y\right)}{3\rho\left(RT_t^+\right)^2}\left(\frac{c^2}{5RT_t^+}-1\right)\right),$$

$$f_r^+=\frac{5-3\gamma}{2(\gamma-1)}kT_r^+f_t^+;\; T_t^+=T+0{,}5(5-3\gamma)\left(1-\frac{1}{Z}\right)(T_t-T_r),$$

$$T_r^+=T-1{,}5(\gamma-1)\left(1-\frac{1}{Z}\right)(T_t-T_r);\; T_t=(3Rn)^{-1}\int c^2f_td\mathbf{c},$$

$$T_r=2(\gamma-1)\left((5-3\gamma)R\rho\right)^{-1}\int f_rd\mathbf{c},\quad \varphi_i=0{,}5m_0\int c_ic^2f_td\mathbf{c}.$$

В этом уравнении коэффициент вязкости и параметр Z соответствовали [6]: $\mu=\mu(T_t)$, $Z=Z(T_t,T_r)$.

Остальные необходимые для комбинированной модели моменты весовой функции, определены как:

$$n=\int f_td\mathbf{c},\quad u_i=n^{-1}\int\xi_if_td\mathbf{c},$$

$$P_{ij}=m_0\int c_ic_jf_td\mathbf{c},\quad \omega_i=\int c_if_rd\mathbf{c}.$$

Для решения системы (2) применялась конечно-разностная схема с односторонними разностями против молекулярного потока на трех узлах. Отметим, что направление потока в кинетических уравнениях определяется направлением молекулярной скорости. В данном случае это скорости ξ_x и ξ_y, имеющие два противоположных направления: $\xi_i > 0$ и $\xi_i < 0$. Использовались сетки с постоянным шагом (1 ... 2)λ_∞.

Принцип комбинирования моделей НСФ и МКУ в рамках рассматриваемой КГМ показан на схемах 1 и 2 рис. 1. Граничные условия гидродинамического решения (схема 1) формируются в узел сшивания, обозначенный чёрной точкой и принадлежащий области кинетического решения. Для выбранного разностного шаблона достаточно одного узла. Значения ρ, u_x, u_y, T в этом узле определяются как моменты весовой функции, вычисленной в кинетической области.

Граничные условия кинетического решения (схема 2) формируются в узлах сшивания, принадлежащих гидродинамической области (чёрные кружки). Так как для кинетического решения используются односторонние конечные разности на трёх узлах, для сшивания необходимо два узла.

Гидродинамическая модель менее информативна, чем кинетическая модель. Для восстановления весовой функции в узлах сшивания используется аппроксимирующая весовая функция f_A. С учётом порядка приближения гидродинамической модели в качестве аппроксимирующей весовой функции целесообразно принять разложение равновесной, максвелловой функции. Такое разложение используется в ряде работ, например [8], для одноатомных газов. В случае многоатомного газа для функций f_{At} и f_{Ar} аналогичные разложения приводят к выражениям [5; 6]:

$$f_{At} = f_M\left(1+\frac{1}{\rho\left(RT_t\right)^2}\left(\frac{1}{2}\left(p_{xx}c_x^2+p_{yy}c_y^2+p_{zz}c_z^2\right)+p_{xy}c_xc_y+\left(\frac{c^2}{5RT_t}-1\right)\left(\varphi_xc_x+\varphi_yc_y\right)\right)\right);$$

$$f_{Ar} = kT_r\left(\frac{5-3\gamma}{2\left(\gamma-1\right)}f_{At}+f_M\frac{\left(\omega_xc_x+\omega_yc_y\right)}{\rho R^2T_tT_r}\right),$$

$$f_M = \frac{n}{\left(2\pi RT_t\right)^{3/2}}\exp\left(-\frac{c^2}{2RT_t}\right).$$

Макропараметры этих выражений определяются гидродинамической моделью и определяются в соответствующем приближении: [5]:

$$T_t = T-\frac{5-3\gamma}{3}Z\frac{\mu}{R\rho}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}\right);\quad T_r = T+\left(\gamma-1\right)Z\frac{\mu}{R\rho}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}\right);$$

$$p_{ij} = -\mu\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right);$$

$$p_{zz} = -p_{xx}-p_{yy} = \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}\right);$$

$$\varphi_i = -\frac{15}{4} R\mu \frac{\partial T}{\partial x_i}; \quad \omega_i = -\frac{5-3\gamma}{2(\gamma-1)} R\mu \frac{\partial T}{\partial x_i}.$$

Для молекул, отражённых пластиной, принят диффузный закон отражения:

$$f_w = \frac{n_w}{\left(2\pi R T_w\right)^{3/2}} \exp\left(-\frac{c^2}{2RT_w}\right); \quad n_w = (1-\alpha)\sqrt{\frac{2\pi}{T_w}} J_{down},$$

где T_w – температура поверхности. На донной поверхности пластины $\alpha = 0$.

3. Методика численной реализации кинетической составляющей комбинированной модели

Бóльшую часть объёма памяти, потребляемого КГМ, занимает весовая функция f, так как размерность фазового пространства даже после формального интегрирования по координатам ξ_z и ε [5] вдвое превышает размерность геометрического пространства $0XY$. Вместе с тем, при решении стационарных задач нет необходимости хранить все значения f в памяти компьютера. В данной задаче при выбранных полупространствах молекулярных скоростей ξ_x и ξ_y достаточно рассматривать один квадрант пространства скоростей. На рис. 2 показан такой квадрант для полупространств $\xi_x \geq 0$ и $\xi_y \geq 0$.

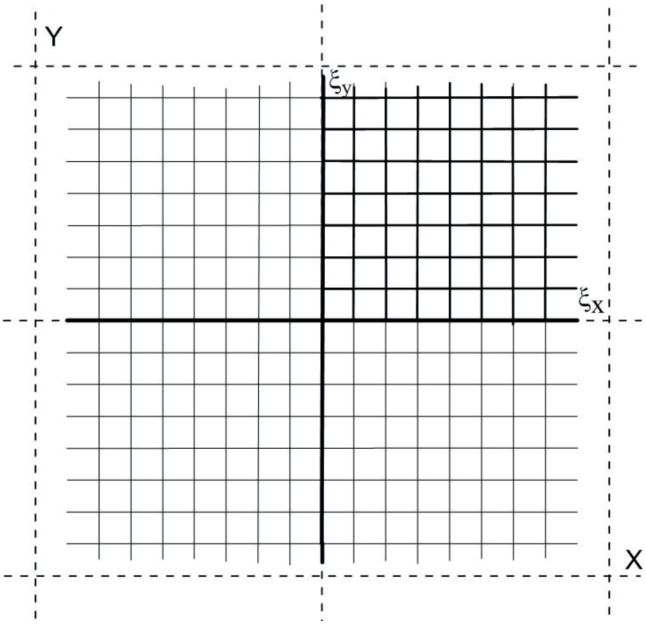

Рис. 2 / Fig. 2. Вычислительная сетка в пространстве скоростей. Пунктирные линии – геометрическая сетка, сплошные линии – скоростная сетка, утолщённые сплошные линии – рассчитываемый квадрант скоростной сетки ($\xi_x \geq 0$, $\xi_y \geq 0$) / Computational grid in velocity space. Dashed lines – geometric grid, solid lines – speed grid, thickened solid lines – calculated quadrant of the speed grid ($\xi_x \geq 0$, $\xi_y \geq 0$).

Источник: составлено авторами.

Если используется конечно-разностная схема на трёх узлах геометрической расчётной сетки, то для продвижения по координате Y достаточно значений f на трёх строках сетки с координатами y_n, y_{n-1}, y_{n-2}. На рис. 3 показаны строки, используемые для вычисления f на -ой и $(n + 1)$-ой строках. Продвижение по Y снизу-вверх, т. е. $\xi_y \geq 0$. Функция f записана в 4-мерный массив, в котором координата Y имеет три значения: 0, 1 и 2. Значения функции вычисляются в сечении массива $y = 0$ по значениям в сечениях $y = 1$ и $y = 2$.

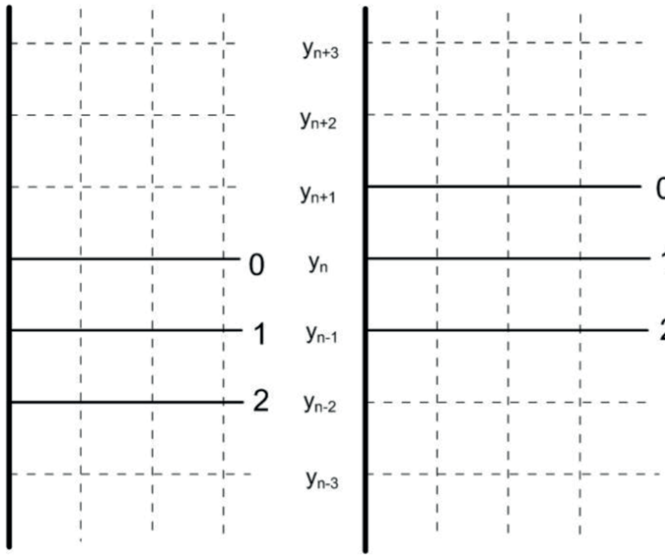

Рис. 3 / Fig. 3. Алгоритм вычисления весовой функции при -ом и $(n + 1)$-ом значениях координаты Y. Жирная линия – пластина / Algorithm for calculating the weight function for the n-th and (n + 1)-th values of the Y coordinate. The thick line is the plate.

Источник: составлено авторами.

После определения f во всех узлах выбранного квадранта (пространство скоростей) и во всех узлах сечения $y = 0$ (геометрическое пространство) вычисляются и записываются в память неполные моменты весовой функции. Неполные моменты вычисляются для молекулярных скоростей ξ_i. Например, для первого квадранта (рис. 2) момент второго порядка вычисляется как

$$M_{ij}^{(1)} = m_0 \int_0^\infty \int_0^\infty \xi_i \xi_j f_{z\varepsilon} d\xi_x d\xi_y, \quad i, j = x, y.$$

здесь $f_{z\varepsilon}$ – весовая функция, формально проинтегрированная по ξ_z и ε. Верхний индекс в скобках – номер квадранта.

При переходе на следующую, $(n + 1)$-ю строку основной геометрической сетки, сечение массива $y = 0$ перенумеровывается (но не перезаписывается) как $y = 1$, сечение $y = 1$ – как $y = 2$. Вычисление сечения $y = 0$ продолжается по описанной выше схеме.

После вычисления неполных моментов во всех квадрантах всех геометрических узлов определяются макропараметры газовой среды. Например, касательное напряжение

$$P_{xy} = \sum_{k=1}^{4} M_{xy}^{k} - \rho u_x u_y .$$

При решении задачи обтекания пластины с $Kn = 0{,}01$ описанная методика позволила сократить объём памяти примерно на два порядка.

4. Результаты расчётов

Расчёты проводились для двухатомного газа при $M = 2{,}31$ и $Kn = 0{,}1 \ldots 0{,}01$. Для выбранного числа Маха имеется достаточно большой набор экспериментальных и расчётных данных в переходной области течения, то есть для указанных чисел Кнудсена. Подборку данных для коэффициента лобового сопротивления пластин c_x можно найти в [9]. Результаты расчётов, включая поля течения, сравнивались с расчётами по МКУ [6], которые удовлетворительно согласуются с данными [9].

На рис. 4 показана зависимость $c_x(\alpha)$. При $Kn = 0{,}1$ расчёты по МКУ и КГМ совпадают, так как при этих числах Кнудсена практически вся вычислительная область находилась в кинетической подобласти КГМ, а её гидродинамическая подобласть выполняла функции граничных условий на внешней границе вычислительной области.

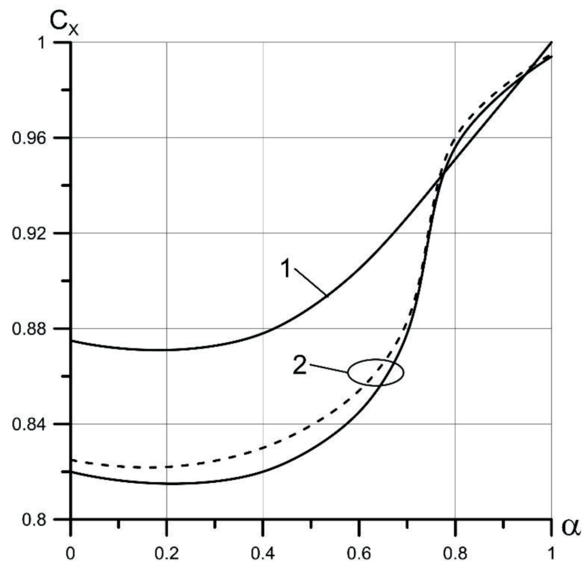

Рис. 4 / Fig. 4. Зависимость коэффициента лобового сопротивления пластины от коэффициента поглощения её лобовой поверхности. 1 – МКУ [6] и КГМ, $Kn = 0{,}1$; 2 – пунктир МКУ $Kn = 0{,}01$, 2 – сплошная КГМ / The dependence of the drag coefficient of the plate on the absorption coefficient of its frontal surface. 1 – MKE [6] and KHM, $Kn = 0{,}1$; 2 – dotted line MKE $Kn = 0{,}01$, 2 – solid KHM.

Источник: составлено авторами.

При $Kn = 0{,}01$ и $\alpha < 0{,}7$ имеет место некоторое расхождение между используемыми моделями. Как следует из представленных ниже графиков, при этих значениях параметров вся высокоградиентная область находится в гидродинамической подобласти КГМ. Методы механики сплошной среды существенно уступают в точности расчета высокоградиентных областей методам молекулярно-кинетической теории. Это, видимо, и является причиной расхождения результатов расчета.

На следующих графиках представлены распределения плотности, проекции скорости u_x и температуры вдоль оси X при $Kn = 0{,}01$. На рис.5 и рис. 6 $\alpha = 0{,}6$, а вся высокоградиентная область течения находится в гидродинамической подобласти КГМ (слева от области сшивания). Профили плотности, скорости и температуры смещены вниз по потоку относительно профилей МКУ. Наблюдается существенное различие в профилях плотности. Это особенно заметно на уровне верхней кромки пластины ($y = 0{,}5$), рис. 6.

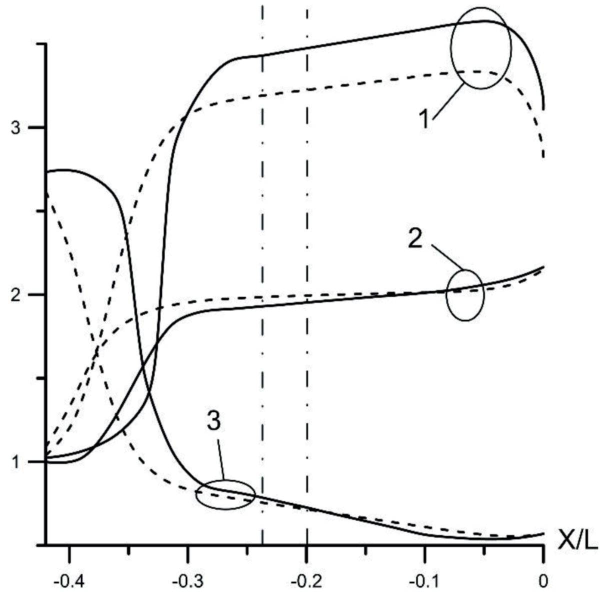

Рис. 5 / Fig. 5. Распределение плотности, скорости u_x и температуры перед лобовой поверхностью. $Kn = 0{,}01$, $\alpha = 0{,}6$, $y = 0{,}1$ – плотность; 2 – температура; 3 – u_x. Пунктирные линии – МКУ; сплошные линии – КГМ; вертикальные штрихпунктирные линии – границы области сшивания / Distribution of density, velocity u_x and temperature in front of the frontal surface. $Kn = 0{,}01$, $\alpha = 0{,}6$, $y = 0{,}1$ – density; 2 – temperature; 3 – u_x. Dashed lines – MKE; solid lines – KHM; vertical dash-dotted lines – borders of the stitching area.

Источник: составлено авторами.

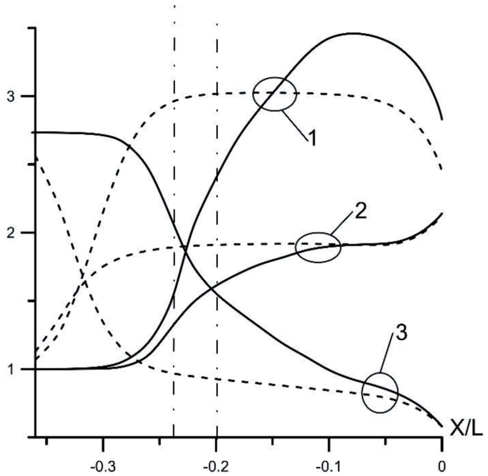

Рис. 6 / Fig. 6. Распределение плотности, скорости ux и температуры перед лобовой поверхностью. *Kn* = 0,01, α = 0,6, *y* = 0,5. 1 – плотность; 2 – температура; 3 – u_x. Пунктирные линии – МКУ; сплошные линии – КГМ; вертикальные штрихпунктирные линии – границы области сшивания / Distribution of density, velocity ux and temperature in front of the frontal surface. *Kn* = 0,01, α = 0,6, *y* = 0,5. 1 – density; 2 – temperature; 3 – u_x. Dashed lines – MKE; solid lines – KHM; vertical dash-dotted lines are the borders of the stitching area.

Источник: составлено авторами.

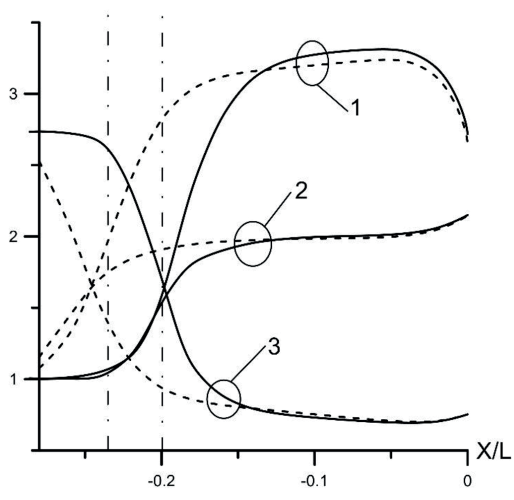

Рис. 7 / Fig. 7. Распределение плотности, скорости u_x и температуры перед лобовой поверхностью. *Kn* = 0,01, α = 0,7, *y* = 0,1 – плотность; 2 – температура; 3 – u_x. Пунктирные линии – МКУ; сплошные линии – КГМ; вертикальные штрихпунктирные линии – границы области сшивания / Distribution of density, velocity u_x and temperature in front of the frontal surface. *Kn* = 0,01, α = 0,7, *y* = 0,1 – density; 2 – temperature; 3 – u_x. Dashed lines – MKE; solid lines – KHM; vertical dash-dotted lines – borders of the stitching area.

Источник: составлено авторами.

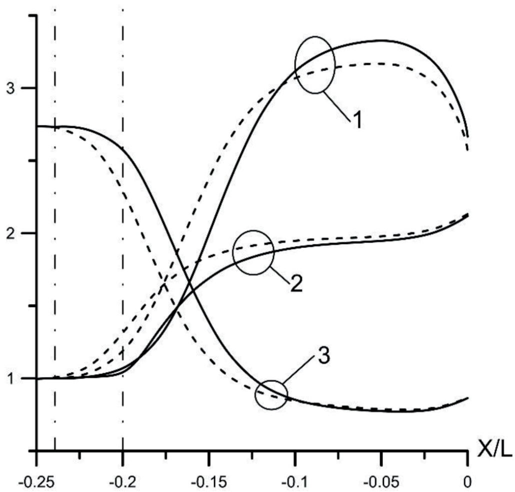

Рис. 8 / Fig. 8. Распределение плотности, скорости u_x и температуры перед лобовой поверхностью. Kn = 0,01, α = 0,75, y = 0,1 – плотность; 2 – температура; 3 – u_x. Пунктирные линии – МКУ; сплошные линии – КГМ; вертикальные штрихпунктирные линии – границы области сшивания / Distribution of density, velocity u_x and temperature in front of the frontal surface. Kn = 0,01, α = 0,75, y = 0,1 – density; 2 – temperature; 3 – u_x. Dashed lines – MKE; solid lines – KHM; vertical dash-dotted lines – borders of the stitching area.

Источник: составлено авторами.

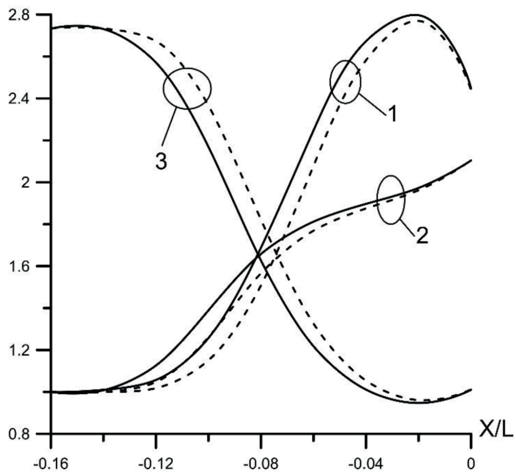

Рис. 9 / Fig 9. Распределение плотности, скорости u_x и температуры перед лобовой поверхностью. Kn = 0,01, α = 0,8, y = 0. 1 – плотность; 2 – температура; 3 – u_x. Пунктирные линии – МКУ; сплошные линии – КГМ / Distribution of density, velocity u_x and temperature in front of the frontal surface. Kn = 0,01, α = 0,8, y = 0. 1 – density; 2 – temperature; 3 – u_x. Dashed lines – MKE; solid lines – KHM.

Источник: составлено авторами.

По мере увеличения коэффициента поглощения высокоградиентная область течения всё больше смещается в кинетическую подобласть (справа от области сшивания). Профили МКУ и КГМ сближаются и в отношении расположения, и в отношении величин параметров, см. рис. 7 и рис. 8.

При $\alpha = 0{,}8$ (см. рис. 9) высокоградиентная область находится полностью в гидродинамической подобласти. Правая граница области сшивания имеет координату $x = -0{,}2$ и не попадает в поле рисунка. Профили КГМ и МКУ почти совпадают. Относительно небольшое различие связано, видимо, с тем, что для расчётов при $Kn = 0{,}01$ по МКУ использовалась геометрическая сетка с шагом $2\lambda_\infty$, а расчёты в кинетической подобласти КГМ выполнялись с вдвое меньшим шагом. Необходимость завышения шага в модели МКУ была связана с техническими возможностями используемых вычислительных средств.

Заключение

Результаты расчётов показывают, что комбинированная кинетико-гидродинамическая модель позволяет физически адекватно описывать процессы, протекающие в переходной области течения газовой среды. В области сшивания компонент модели отсутствуют разрывы производных параметров газа [10].

Модель КГМ позволяет выставлять граничные условия на поглощающих поверхностях. Значения такой интегральной характеристики как $c_x(\alpha)$, рассчитанные по КГМ, удовлетворительно согласуются с результатами расчетов по МКУ.

При расчёте относительно плотных газов ($Kn = 0{,}01$) КГМ позволяет сократить потребляемый объём памяти вычислительного устройства примерно на три порядка и процессорное время на два порядка по сравнению МКУ.

Разработанная модель КГМ может быть использована в широком интервале чисел Кнудсена.

В дальнейшем планируется провести исследование КГМ в области до- и гиперзвуковых течений, то есть в широком интервале чисел Маха.

Статья поступила в редакцию 06.10.2021 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Salbreux G., Jülicher F. Mechanics of active surfaces // Physical Review E. 2017. Vol. 96. Iss. 3. P. 032404. DOI: 10.1103/PhysRevE.96.032404.
2. Rioux R. W. The Rate of Fluid Absorption in Porous Media // Electronic Theses and Dissertations. 2003. Vol. 234. URL: https://digitalcommons.library.umaine.edu/etd/234 (дата обращения: 06.09.2021).
3. Никитченко Ю. А., Попов С. А., Тихоновец А. В. Комбинированная кинетико-гидродинамическая модель течения многоатомного газа // Математическое моделирование. 2019. Т. 31. № 2. С. 18–32. DOI: 10.1134/S0234087919020023.
4. Nikitchenko Y., Popov S., Tikhonovets A. Special Aspects of Hybrid Kinetic-Hydrodynamic Model When Describing the Shape of Shockwaves // Computational Science – ICCS 2019 (19th International Conference, Faro, Portugal, June 12–14, 2019). Proceedings, Part IV / eds. Rodrigues J. et al. Switzerland: Springer, Cham, 2019. P. 425–434 (Series: Lecture Notes in Computer Science. Vol. 11539). DOI: 10.1007/978-3-030-22747-0_32.

5. О коэффициенте лобового сопротивления сорбирующей пластины, установленной поперек потока / Глинкина В. С., Никитченко Ю. А., Попов С. А., Рыжов Ю. А. // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2016. № 6. С. 78–85. DOI: 10.7868/S0568528116060050.
6. Никитченко Ю. А. Модельное кинетическое уравнение многоатомных газов // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2017. Т. 57. № 11. С. 1882–1884. DOI: 10.7868/S0044466917110114.
7. Thompson M. J. An Introduction to Astrophysical Fluid Dynamics. London: Imperial College Press, 2006. 240 p.
8. Rovenskaya O. I., Croce G. Numerical simulation of gas flow in rough micro channels: hybrid kinetic-continuum approach versus Navier-Stokes // Microfluidics and Nanofluidics. 2016. Vol. 20. P. 81. DOI: 10.1007/s10404-016-1746-x.
9. Аэрогидромеханика / Бондарев Е. Н., Дубасов В. Т., Рыжов Ю. А., Свирщевский С. Б., Семенчиков Н. В. М.: Машиностроение, 1993. 608 с.
10. Тихоновец А. В. Разработка комбинированной физико-математической модели для описания течений высокой динамической неравновесности: дис. … канд. физ.-мат. наук. М., 2020. 108 с.

REFERENCES

1. Salbreux G., Jülicher F. Mechanics of active surfaces. In: *Physical Review E*, 2017, vol. 96, iss. 3, pp. 032404. DOI: 10.1103/PhysRevE.96.032404.
2. Rioux R. W. The Rate of Fluid Absorption in Porous Media. In: *Electronic Theses and Dissertations*, 2003, vol. 234. Available at: https://digitalcommons.library.umaine.edu/etd/234 (accessed: 06.09.2021).
3. Nikitchenko Yu. A., Popov S. A., Tikhonovets A. V. [Composed kinetic-hydrodynamic model of polyatomic gas flow]. In: *Matematicheskoe modelirovanie* [Mathematical Models and Computer Simulations], 2019, vol. 31, no. 2, pp. 18–32. DOI: 10.1134/S0234087919020023.
4. Nikitchenko Y., Popov S., Tikhonovets A. Special Aspects of Hybrid Kinetic-Hydrodynamic Model When Describing the Shape of Shockwaves. In: Rodrigues J. et al., eds. *Computational Science – ICCS 2019 (19th International Conference, Faro, Portugal, June 12–14, 2019). Proceedings, Part IV*. Switzerland, Springer, Cham, 2019, pp. 425–434 (Series: Lecture Notes in Computer Science. Vol. 11539). DOI: 10.1007/978-3-030-22747-0_32.
5. Glinkina V. S., Nikitchenko Yu. A., Popov S. A., Ryzhov Yu. A. [Drag coefficient of an absorbing plate set transverse to a flow]. In: *Izvestiya RAN. Mekhanika zhidkosti i gaza* [Fluid Dinamics], 2016, no 6, pp. 78–85. DOI: 10.7868/S0568528116060050.
6. Nikitchenko Yu. A. [Model kinetic equation for polyatomic gases]. In: *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki* [Computational Mathematics and Mathematical Physics], 2017, vol. 57, no 11, pp. 1882–1884. DOI: 10.7868/S0044466917110114.
7. Thompson M. J. An Introduction to Astrophysical Fluid Dynamics. London, Imperial College Press, 2006. 240 p.
8. Rovenskaya O. I., Croce G. Numerical simulation of gas flow in rough micro channels: hybrid kinetic-continuum approach versus Navier-Stokes. In: *Microfluidics and Nanofluidics*, 2016, vol. 20, p. 81. DOI: 10.1007/s10404-016-1746-x.
9. Bondarev E. N., Dubasov V. T., Ryzhov Yu. A., Svirshchevskii S. B., Semenchikov N. V *Aerogidromekhanika* [Aerohydromechanics]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1993. 608 p.
10. Tikhonovets A. V. *Razrabotka kombinirovannoi fiziko-matematicheskoi modeli dlya opisaniya techenii vysokoi dinamicheskoi neravnovesnosti: dis. … kand. fiz.-mat. nauk* [Development of a combined physical and mathematical model for describing flows of high dynamic non-equilibrium: PhD thesis in Physical and Mathematical Sciences]. Moscow, 2020. 108 p.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Никитченко Юрий Алексеевич – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры аэродинамики летательных аппаратов Московского авиационного института (национального исследовательского университета);
e-mail: nikitchenko7@yandex.ru;

Тихоновец Алена Васильевна – кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры аэродинамики летательных аппаратов Московского авиационного института (национального исследовательского университета);
e-mail: tikhonovets.a.v@gmail.com.

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Yurii A. Nikitchenko – Dr. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Prof., Prof., Department of of Aircraft Aerodynamics, Moscow Aviation Institute (National Research University);
e-mail: nikitchenko7@yandex.ru;

Alena V. Tikhonovets – Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assistant Lecturer, Department of Aircraft Aerodynamics, Moscow Aviation Institute (National Research University);
e-mail: tikhonovets.a.v@gmail.com.

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Никитченко Ю. А., Тихоновец А. В. Расчёт поля течения вблизи поглощающей поверхности с применением кинетико-гидродинамической модели и повышение ее вычислительной экономичности // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2021. № 4. С. 96–111.
DOI: 10.18384/2310-7251-2021-4-96-111.

FOR CITATION

Nikitchenko Yu. A., Tikhonovets A. V. Calculation of the flow field near the absorbing surface using the kinetic-hydrodynamic model and increasing its computational efficiency. In: *Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*, 2021, no. 4, pp. 96–111.
DOI: 10.18384/2310-7251-2021-4-96-111.

ВЕСТНИК
МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
ОБЛАСТНОГО УНИВЕРСИТЕТА

Рецензируемый научный журнал «Вестник Московского государственного областного университета» основан в 1998 г.

Сегодня Московским государственным областным университетом выпускается десять научных журналов по разным отраслям науки. Журналы включены в Перечень ВАК (составленный Высшей аттестационной комиссией при Минобрнауки РФ Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание учёной степени кандидата наук, на соискание учёной степени доктора наук). Журналы включены в базу данных Российского индекса научного цитирования (РИНЦ).

Печатные версии журналов зарегистрированы в Федеральной службе по надзору за соблюдением законодательства в сфере массовых коммуникаций и охране культурного наследия.

Полнотекстовые версии журналов доступны в интернете на на сайте Вестника Московского государственного областного университета (www.vestnik-mgou.ru), а также на платформах Научной электронной библиотеки (www.elibrary.ru) и Научной электронной библиотеки «КиберЛенинка» (https://cyberleninka.ru).

ВЕСТНИК
МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ОБЛАСТНОГО УНИВЕРСИТЕТА

СЕРИЯ: ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА
2021. № 4

Над номером работали:

Литературный редактор М.С. Тарасова
Переводчик И.А. Улиткин
Корректор М.С. Тарасова
Компьютерная верстка Н.Н. Жильцов

Адрес редакции:
105005, г. Москва, ул. Радио, д. 10А, офис 98
тел.: (495) 780-09-42 (доб. 6101)
e-mail: info@vestnik-mgou.ru
сайт: www.vestnik-mgou.ru

Формат 70x108/16. Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура «Minion Pro».
Тираж 500 экз. Усл. п. л. 7,25, уч.-изд. л. 7.
Подписано в печать: 30.12.2021. Дата выхода в свет: 28.01.2022. Заказ № 2021/12-10.
Отпечатано в МГОУ
105005, г. Москва, ул. Радио, 10А