



ISSN 2072-8387 (print)
ISSN 2310-7251 (online)



Вестник

МОСКОВСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
ОБЛАСТНОГО
УНИВЕРСИТЕТА

Серия

*Физика-
Математика*

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО
УРАВНЕНИЯ СО СТЕПЕННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ЗНАЧЕНИЕ ЭФФЕКТА
ВЫСОКОСКОРОСТНОГО ПЕРЕХЛЕСТА В УДАРНО-СЖАТОЙ
СМЕСИ ГАЗОВ

ТЕРАГЕРЦОВЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК РАССЕИВАЮЩЕЙ
И ПОГЛОЩАЮЩЕЙ СТРУКТУРЫ



2021/ № 3

ВЕСТНИК
МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
ОБЛАСТНОГО УНИВЕРСИТЕТА

ISSN 2072-8387 (print)

2021 / № 3

ISSN 2310-7251 (online)

серия

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА

Рецензируемый научный журнал. Основан в 1998 г.

Журнал «Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика» включён в «Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание учёной степени кандидата наук, на соискание учёной степени доктора наук» Высшей аттестационной комиссии при Министерстве науки и высшего образования Российской Федерации (См.: Список журналов на сайте ВАК при Минобрнауки России) по следующим научным специальностям: 01.04.02 – Теоретическая физика (физико-математические науки); 01.04.07 – Физика конденсированного состояния (физико-математические науки).

The peer-reviewed journal was founded in 1998

«Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics» is included by the Supreme Certifying Commission of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation into “the List of reviewed academic journals and periodicals recommended for publishing in corresponding series basic research thesis results for a Ph.D. Candidate or Doctorate Degree” (See: the online List of journals at the site of the Supreme Certifying Commission of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation) on the following scientific specialities: 01.04.02 – Theoretical physics (physical-mathematical sciences); 01.04.07 – Physics of the condensed state (physical-mathematical sciences) (See: the online List of journals at the site of the Supreme Certifying Commission of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation).

ISSN 2072-8387 (print)

2021 / № 3

ISSN 2310-7251 (online)

series

PHYSICS AND MATHEMATICS

BULLETIN OF THE MOSCOW REGION
STATE UNIVERSITY

Учредитель журнала

«Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика»

Государственное образовательное учреждение высшего образования Московской области

Московский государственный областной университет

Выходит 4 раза в год

Редакционная коллегия

Главный редактор:

Бугаев А. С. — д. ф.-м. н., академик РАН, Московский физико-технический институт (Государственный университет)

Заместитель главного редактора:

Жачкин В. А. — д. ф.-м. н., проф., Московский государственный областной университет

Ответственный секретарь:

Васильчикова Е. Н. — к. ф.-м. н., доц., Московский государственный областной университет

Члены редакционной коллегии:

Беляев В. В. — д. т. н., проф., Московский государственный областной университет;

Боголюбов Н. Н. — д. ф.-м. н., проф., Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова;

Бугримов А. Л. — д. т. н., проф., Российский государственный университет имени А.Н. Косыгина (Технологии. Дизайн. Искусство);

Гладков С. О. — д. ф.-м. н., проф., Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет);

Емельяненко А. В. — д. ф.-м. н., проф., Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова;

Калашников Е. В. — д. ф.-м. н., проф., Московский государственный областной университет;

Осипов М. А. — д. ф.-м. н., проф., Университет Стратклайд (Великобритания);

Рыбаков Ю. П. — д. ф.-м. н., проф., Российский университет дружбы народов;

Чаругин В. М. — д. ф.-м. н., проф., Московский педагогический государственный университет;

Чигринов В. Г. — д. ф.-м. н., проф., Гонконгский университет науки и технологий (Китай)

ISSN 2072-8387 (print)

ISSN 2310-7251 (online)

Рецензируемый научный журнал «Вестник московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика» публикует статьи по математическим проблемам термодинамики, кинетики и статистической физики; теории конденсированного состояния классических и квантовых, макроскопических и микроскопических систем; изучению различных состояний вещества и физических явлений в них; статистической физике и кинетической теории равновесных и неравновесных систем; теоретическому и экспериментальному исследованию физических свойств неупорядоченных неорганических систем; изучению экспериментального состояния конденсированных веществ и фазовых переходов в них. Журнал адресован ученым, докторантам, аспирантам и всем, интересующимся достижениями физико-математических наук.

Журнал «Вестник Московского государственного областного университета. Серия «Физика-математика» зарегистрирован в Федеральной службе по надзору за соблюдением законодательства в сфере массовых коммуникаций и охране культурного наследия. Регистрационное свидетельство ПИ № ФС 77-73344.

Индекс серии «Физика-математика» по Объединенному каталогу «Пресса России» 40723

Журнал включён в базу данных Российского индекса научного цитирования (РИНЦ), имеет полнотекстовую сетевую версию в Интернете на платформе Научной электронной библиотеки (www.elibrary.ru), с августа 2017 г. на платформе Научной электронной библиотеки «КиберЛенинка» (<https://cyberleninka.ru>), а также на сайте Московского государственного областного университета (www.vestnik-mgou.ru).

При цитировании ссылка на конкретную серию «Вестника Московского государственного областного университета» обязательна. Публикация материалов осуществляется в соответствии с лицензией Creative Commons Attribution 4.0 (CC-BY).

Ответственность за содержание статей несут авторы. Мнение автора может не совпадать с точкой зрения редколлегии серии. Рукописи не возвращаются.

Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. — 2021. — № 3. — 82 с.

© МГОУ, 2021.

Адрес редакции:

г. Москва, ул. Радио, д.10А, офис 98

тел.: (495) 780-09-42 (доб. 6101)

e-mail: info@vestnik-mgou.ru; сайт: www.vestnik-mgou.ru

Founder of journal
«Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics»
Moscow Region State University

————— Issued 4 times a year —————

Editorial board

Editor-in-chief:

A. S. Bugaev – Doctor of Physics and Mathematics, Academician of RAS, Moscow Institute of Physics and Technology (State University)

Deputy editor-in-chief:

V. A. Zhachkin – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Moscow Region State University

Executive secretary:

E. N. Vasilchikova – Ph.D. in Physics and Mathematics, Associate Professor, Moscow Region State University

Members of Editorial Board:

V. V. Belyaev – Doctor of Technical Sciences, Professor, Moscow Region State University;

N. N. Bogolyubov – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Lomonosov Moscow State University;

A. L. Bugrimov – Doctor of Technical Sciences, Professor, Kosygin State University of Russia;

S. O. Gladkov – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Moscow Aviation Institute (National Research University);

A. V. Emelyanenko – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Lomonosov Moscow State University;

E. V. Kalashnikov – Doctor of Physics and Mathematics, Moscow Region State University;

M. A. Osipov – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Strathclyde University (Glasgow, UK);

Yu. P. Rybakov – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, RUDN University;

V. M. Charugin – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Moscow State Pedagogical University;

V. G. Chigrinov – Hong Kong University of Science and Technology (China)

ISSN 2072-8387 (print)

ISSN 2310-7251 (online)

The reviewed scientific journal “Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics” publishes articles on mathematical problems of thermodynamics, kinetics and statistical physics; the theory of the condensed state of classical and quantum, macroscopic and microscopic systems; the study of various states of substance and physical phenomena in them; statistical physics and the kinetic theory of equilibrium and non-equilibrium systems; theoretical and experimental research of physical features of disordered inorganic systems; the study of the experimental state of condensed substances and phase transitions in them. The journal is addressed to scientists, doctoral students, PhD students and everyone interested in the achievements of physical and mathematical sciences.

The series “Physics and Mathematics” of the Bulletin of the Moscow Region State University is registered in Federal service on supervision of legislation observance in sphere of mass communications and cultural heritage protection. The registration certificate ПИ № 0С 77 – 73344.

Index series «Physics and Mathematics» according to the union catalog «Press of Russia» 40723

The journal is included into the database of the Russian Science Citation Index, has a full text network version on the Internet on the platform of Scientific Electronic Library (www.elibrary.ru), and from August 2017 on the platform of the Scientific Electronic Library “CyberLeninka” (<https://cyberleninka.ru>), as well as at the site of the Moscow Region State University (www.vestnik-mgou.ru)

At citing the reference to a particular series of «Bulletin of the Moscow Region State University» is obligatory. Scientific publication of materials is carried out in accordance with the license of Creative Commons Attribution 4.0 (CC-BY).

The authors bear all responsibility for the content of their papers. The opinion of the Editorial Board of the series does not necessarily coincide with that of the author Manuscripts are not returned.

Bulletin of the Moscow State Regional University. Series: Physics and Mathematics. – 2021. – № 3. – 82 p.

© MRSU, 2021.

The Editorial Board address:

10A Radio st., office 98, Moscow, Russia

Phone: (495) 780-09-42 (add. 6101)

e-mail: info@vestnik-mgou.ru; site: www.vestnik-mgou.ru

СОДЕРЖАНИЕ

РАЗДЕЛ I. МАТЕМАТИКА

Алгазин О. Д. Краевые задачи для уравнения Пуассона в полупространстве с полиномиальными данными и задача Коши6

Бозиев О. Л. Об одном методе приближенного решения параболического уравнения со степенной нелинейностью18

РАЗДЕЛ II. ФИЗИКА

Сидоров А. В., Зайцев А. А., Кузнецов Д. В. Увеличение термоэлектрической ЭДС коллоидных растворов в результате диализной очистки.29

Кузнецов М. М., Кулешова Ю. Д. Асимптотическое значение эффекта высокоскоростного перехлёста в ударно-сжатой смеси газов39

Шампаров Е. Ю., Бугримов А. Л., Родэ С. В., Жагрина И. Н. Терагерцовые измерения характеристик рассеивающей и поглощающей структуры57

Гладков С. О., Гордин А. А. К вопросу резонансного нагрева поверхностей тепловым лучистым излучением70

CONTENTS

SECTION I. MATHEMATICS

O. Algazin. Boundary value problems for the Poisson equation in a half-space with polynomial data and the Cauchy problem7

O. Boziev. A method for an approximate solution to a parabolic equation with a power-law nonlinearity.19

SECTION II. PHYSICS

A. Sidorov, A. Zaitsev, D. Kuznetsov. Increase in the thermoelectric EMF of colloidal solutions as a result of dialysis purification.30

M. Kuznetsov, Ju. Kuleshova. Asymptotic high-speed overshoot effect value in a shock-compressed gas mixture39

E. Shamparov, A. Bugrimov, S. Rode, I. Zhagrina. Terahertz measurements of scattering and absorbing structure characteristics.57

S. Gladkov, A. Godin. To the question of resonance heating of surfaces thermal raying radiation70

РАЗДЕЛ I. МАТЕМАТИКА

УДК 517.958

DOI: 10.18384/2310-7251-2021-3-6-17

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ С ПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ И ЗАДАЧА КОШИ

Алгазин О. Д.

*Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)*

105005, г. Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, корп. 1, Российская Федерация

Аннотация

Цель исследования – получить точные решения задачи Коши и краевых задач для уравнения Пуассона в полупространстве с полиномиальными данными.

Процедура и методы. В статье рассмотрены краевые задачи Дирихле и Неймана в полупространстве и задача Коши с полиномиальными данными для уравнения Пуассона. Для решения этих задач применяется преобразование Фурье обобщённых функций медленного роста.

Результаты. Показано, что задача Коши с полиномиальными данными для уравнения Пуассона имеет решение, являющееся полиномом. Это решение является единственным в классе функций медленного роста в гиперплоскостях, параллельных гиперплоскости, на которой задаются начальные условия. Полиномиальное решение получено в явном виде. Каждое решение из бесконечного множества решений задачи Дирихле или Неймана является решением некоторой задачи Коши.

Теоретическая и / или практическая значимость заключается в получении точных решений краевых задач и задачи Коши с полиномиальными данными для уравнения Пуассона.

Ключевые слова: уравнение Пуассона, краевая задача, задача Коши, преобразование Фурье, обобщенные функции медленного роста

BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR THE POISSON EQUATION IN A HALF-SPACE WITH POLYNOMIAL DATA AND THE CAUCHY PROBLEM

O. Algazin

Bauman Moscow State Technical University

Vtoraya Baumanskaya ul. 5, korpus 1, Moscow 105005, Russian Federation

Abstract

Aim. The purpose is to find exact solutions of boundary value problems and the Cauchy problem for the Poisson equation in a half-space with polynomial data.

Methodology. The paper considers the Dirichlet and Neumann boundary value problems in a half-space and the Cauchy problem with polynomial data for the Poisson equation. These problems are solved using the Fourier transform of generalized functions of slow growth.

Results. It is shown that the Cauchy problem with polynomial data for the Poisson equation has a solution that is a polynomial. This solution is the only one in the class of functions of slow growth in hyperplanes parallel to the hyperplane on which the initial conditions are specified. The polynomial solution is obtained explicitly. Each solution from an infinite set of solutions to the Dirichlet or Neumann problem is a solution to some Cauchy problem.

Research implications. We have obtained exact solutions to boundary value problems and the Cauchy problem with polynomial data for the Poisson equation.

Keywords: Poisson equation, boundary value problem, Cauchy problem, Fourier transform, generalized functions of slow growth

Введение

Хорошо известно [1], что для заданной непрерывной ограниченной функции $\varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ решение задачи Дирихле для полупространства:

$$\Delta u(x, y) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y > 0, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2)$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)$, Δ – оператор Лапласа

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

даётся интегралом Пуассона:

$$u(x, y) = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\pi^{(n+1)/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{y \varphi(t)}{(|x-t|^2 + y^2)^{(n+1)/2}} dt, \quad (3)$$

$$|x| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}, \quad dt = dt_1 \dots dt_n.$$

Это решение будет единственным в классе функций, ограниченных при $y \rightarrow +\infty$.

Для неограниченных непрерывных функций $\varphi(x)$ интеграл (3) будет, вообще говоря, расходящимся. Он сходится, если

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\varphi(t)|}{(|t|^2 + 1)^{(n+1)/2}} dt < \infty. \quad (4)$$

Однако, решение задачи Дирихле (1), (2) существует для любой непрерывной функции $\varphi(x)$, но если условие (4) не выполняется, то его нельзя представить интегралом Пуассона (3).

Задача Дирихле разрешима для любой непрерывной функции $\varphi(x)$ в случае полуплоскости ($n = 1$), что впервые показал Р. Неванлинна [2] (см. также [3]), и решение представляется интегралом:

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} [P(x, y, t) - Q(x, y, t)] \varphi(t) dt$$

с модифицированным ядром Пуассона:

$$P(x, y, t) - Q(x, y, t) = \frac{1}{\pi} \frac{y}{(x-t)^2 + y^2} - Q(x, y, t),$$

где $Q(x, y, t)$ – гармонический полином от x и y , равный нулю при $y = 0$, который определяется по функции $\varphi(x)$ в зависимости от её роста. Универсального ядра не существует. Решение не единственное.

Обобщение этого результата на полупространство ($n > 1$) дано С. Дж. Гардинером [4]. Им также доказана в этой работе разрешимость задачи Неймана для произвольной непрерывной функции $\psi(x)$ в граничном условии:

$$\Delta u(x, y) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y > 0, \quad (5)$$

$$u_y(x, 0) = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (6)$$

Решение задач Дирихле и Неймана не единственно, оно определяется с точностью до слагаемого, являющегося решением соответствующей однородной задачи. Ограничение на рост решения сужает множество решений, но не приводит к единственности. Например, если искать решение задачи Дирихле в классе функций полиномиального роста, то оно определяется с точностью до слагаемого, являющегося гармоническим полиномом, обращающимся в нуль при $y = 0$ [5]. О множестве решений задач Дирихле и Неймана дают представление следующие теоремы (Н. У. Аракелян [6]):

1) пусть $\varphi(x)$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция, тогда среди решений задачи Дирихле (1), (2) существует «приближенное» решение $u(x, y)$ задачи Неймана (5), (6) для произвольной непрерывной функции $\psi(x)$, то есть существует такая непрерывная функция $\varepsilon(x)$, $\varepsilon(\mathbb{R}^n) \subset (0, 1]$, что

$$|u_y(x, 0) - \psi(x)| < \varepsilon(x);$$

2) пусть $\psi(x)$ – непрерывная функция, тогда среди решений задачи Неймана (5), (6) существует «приближенное» решение задачи Дирихле (1), (2) для произвольной непрерывной функции $\varphi(x)$.

Чтобы решение задачи Дирихле и задачи Неймана было единственным надо задать на границе и значение искомой функции, и значение нормальной производной, то есть рассмотреть задачу Коши.

Мы рассмотрим задачу Коши для уравнения Пуассона (неоднородного уравнения Лапласа) с полиномиальными данными:

$$\Delta u(x, y) = P(x, y), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R}, \quad (7)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (8)$$

$$u_y(x, 0) = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (9)$$

где $P(x, y)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ – полиномы.

В классе аналитических функций решение задачи Коши существует и единственно в силу теоремы Коши-Ковалевской [7]. Покажем, что существует единственное решение задачи Коши (7), (8), (9) в классе функций медленного роста по x , и это решение является полиномом. При этом любое решение задачи Дирихле (1), (2) с заданным полиномом $\varphi(x)$ будет решением задачи Коши для некоторого полинома $\psi(x)$, то есть среди бесконечного множества решений задачи Дирихле содержатся все решения задачи Неймана (5), (6) с полиномиальными данными и любое решение задачи Неймана (5), (6) с заданным полиномом $\psi(x)$ будет решением задачи Коши для некоторого полинома $\varphi(x)$, то есть среди бесконечного множества решений задачи Неймана содержатся все решения задачи Дирихле (1), (2) с полиномиальными данными.

Поиску решений уравнений с частными производными в виде полиномов или квазиполиномов посвящены работы многих авторов [8–12], см. также [13–15].

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу Коши для уравнения Пуассона (неоднородного уравнения Лапласа) с полиномиальными данными (7), (8), (9).

Решение задачи будем искать в классе функций медленного роста по переменной x при каждом фиксированном y , то есть при $\forall y \in \mathbb{R}$ найдётся такое $m \geq 0$ что

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x, y)| (1 + |x|^2)^{-m} dx < \infty, \quad |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}. \quad (10)$$

Поэтому можно применять преобразование Фурье для обобщённых функций медленного роста по переменной x [16].

Покажем, что существует единственное решение этой задачи, которое является полиномом и выведем явные формулы для получения этого решения.

Уравнение Пуассона (7) с полиномиальной правой частью имеет полиномиальные решения. В разделе 2 приведена формула для получения одного из таких решений.

Обозначим через $\tilde{u}(x, y)$ некоторое полиномиальное решение уравнения Пуассона (7), тогда решением задачи Коши для уравнения Пуассона (7)-(9) будет функция:

$$u(x, y) = v(x, y) + \tilde{u}(x, y),$$

где $v(x, y)$ – решение задачи Коши для уравнения Лапласа

$$\Delta v(x, y) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R}, \quad (11)$$

$$v(x, 0) = \varphi(x) - \tilde{u}(x, 0) = \tilde{\varphi}(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (12)$$

$$v_y(x, 0) = \psi(x) - \tilde{u}_y(x, 0) = \tilde{\psi}(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (13)$$

$\tilde{\varphi}(x), \tilde{\psi}(x)$ – полиномы.

2. Формула для полиномиального решения уравнения Пуассона

Формулу для полиномиального решения уравнения Пуассона (7) с полиномиальной правой частью $P(x, y)$,

$$\Delta u(x, y) = P(x, y), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R},$$

достаточно привести для случая монома

$$P(x, y) = x^k y^m.$$

Здесь $k = (k_1, \dots, k_n)$ – мультииндекс, $x^k = x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$,

$|k| = k_1 + \dots + k_n$ – степень монома x^k .

Одним из полиномиальных решений уравнения Пуассона с правой частью $P(x, y) = x^k y^m$ будет [15]:

$$u(x, y) = \sum_{j=0}^{\lfloor |k|/2 \rfloor} (-1)^j \frac{m!}{(m+2j+2)!} y^{m+2j+2} \Delta_x^j x^k, \quad (14)$$

где $\Delta_x^j = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \right)^j$, $\lfloor |k|/2 \rfloor$ – целая часть числа $|k|/2$.

Например, одним из полиномиальных решений уравнения

$$u(x, y) = x^{(3,2,1)} y^3, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad y \in \mathbb{R}$$

будет полином:

$$u(x, y) = \frac{1}{20} x^{(3,2,1)} y^5 - \frac{1}{420} x^{(3,0,1)} y^7 - \frac{1}{140} x^{(1,2,1)} y^7 + \frac{1}{2520} x^{(1,0,1)} y^9.$$

3. Задача Коши для уравнения Лапласа с полиномиальными начальными данными

Поскольку решение задачи Коши для уравнения Пуассона с полиномиальными данными сводится к решению задачи Коши для уравнения Лапласа, то мы рассмотрим следующую задачу:

$$\Delta u(x, y) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R},$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

$$u_y(x, 0) = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$ – полиномы. В силу линейности задачи достаточно рассмотреть случай, когда $\varphi(x)$, $\psi(x)$ – мономы.

$$1) \quad \varphi(x) = x^k, \quad \psi(x) = 0, \quad k = (k_1, \dots, k_n).$$

Применим преобразование Фурье по x [16], обозначив $\mathcal{F}_x[u(x, y)](t, y) = U(t, y)$. Получим задачу Коши для ОДУ второго порядка:

$$U_{yy}(t, y) - |t|^2 U(t, y) = 0, \quad t \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R},$$

$$U(t, 0) = (2\pi)^n (-i)^{|k|} \partial^k \delta(t), \quad t \in \mathbb{R}^n,$$

$$U_y(t, 0) = 0, \quad t \in \mathbb{R}^n,$$

где $\delta(t)$ – дельта-функция Дирака, $\partial^k = \frac{\partial^{|k|}}{\partial t_1^{k_1} \dots \partial t_n^{k_n}}$.

Единственным решением этой задачи Коши будет обобщённая функция

$$U_k(t, y) = (2\pi)^n (-i)^{|k|} \operatorname{ch}(|t|y) \partial^k \delta(t),$$

которую можно представить в виде:

$$U_k(t, y) = \sum_{m=0}^{[k/2]} \frac{k! |m|!}{(k-2m)! |2m|! m!} y^{2|m|} (2\pi)^n (-i)^{|k|-2|m|} (-1)^{|m|} \partial^{k-2m} \delta(t),$$

где $k! = k_1! \dots k_n!$, $[k/2] = ([k_1/2], \dots, [k_n/2])$.

Докажем последнюю формулу. Поскольку

$$\operatorname{ch}(|t|y) = \sum_{|m|=0}^{\infty} \frac{(t_1^2 + \dots + t_n^2)^{|m|}}{|2m|!} y^{2|m|} = \sum_{m \geq 0} \frac{|m|!}{|2m|! m!} t^{2m} y^{2|m|},$$

то

$$\partial^{2m} \operatorname{ch}(|t|y) \Big|_{t=0} = \frac{(2m)! |m|!}{|2m|! m} y^{2|m|}$$

и обобщённая функция $(2\pi)^n (-i)^{|k|} \text{ch}(|t|y) \partial^k \delta(t)$ действует на основные функции $\varphi(t)$ по правилу:

$$\begin{aligned}
 & \left((2\pi)^n (-i)^{|k|} \text{ch}(|t|y) \partial^k \delta(t), \varphi(t) \right) = (2\pi)^n (-i)^{|k|} \left(\partial^k \delta(t), \text{ch}(|t|y) \varphi(t) \right) = \\
 & = (2\pi)^n (i)^{|k|} \left(\delta(t), \partial^k (\text{ch}(|t|y) \varphi(t)) \right) = \\
 & = (2\pi)^n (i)^{|k|} \left(\delta(t), \sum_{m=0}^k C_k^m \partial^{k-m} \varphi(t) \partial^m \text{ch}(|t|y) \right) = \\
 & = (2\pi)^n (i)^{|k|} \sum_{m=0}^k C_k^m \left(\partial^{k-m} \varphi(t) \partial^m \text{ch}(|t|y) \right) \Big|_{t=0} = \\
 & = (2\pi)^n (i)^{|k|} \sum_{m=0}^{[k/2]} C_k^{2m} \left(\partial^{k-2m} \varphi(t) \right) \Big|_{t=0} \frac{(2m)! |m|!}{|2m|! m!} y^{2|m|} = \\
 & = (2\pi)^n (i)^{|k|} \sum_{m=0}^{[k/2]} \frac{k! |m|!}{(k-2m)! |2m|! m!} y^{2|m|} \left(\partial^{k-2m} \varphi(t) \right) \Big|_{t=0} = \\
 & = \sum_{m=0}^{[k/2]} \frac{k! |m|!}{(k-2m)! |2m|! m!} y^{2|m|} (2\pi)^n (i)^{|k|} (\delta(t), \partial^{k-2m} \varphi(t)) = \\
 & = \sum_{m=0}^{[k/2]} \frac{k! |m|!}{(k-2m)! |2m|! m!} y^{2|m|} (2\pi)^n (i)^{|k|} (-1)^{|k|-|2m|} (\partial^{k-2m} \delta(t), \varphi(t)) = \\
 & = \sum_{m=0}^{[k/2]} \frac{k! |m|!}{(k-2m)! |2m|! m!} y^{2|m|} (2\pi)^n (-i)^{|k|-|2m|} (-1)^{|m|} (\partial^{k-2m} \delta(t), \varphi(t)).
 \end{aligned}$$

Применяя обратное преобразование Фурье к $U_k(t, y)$ по переменной t , получим решение задачи Коши:

$$u_k(x, y) = \sum_{m=0}^{[k/2]} (-1)^{|m|} \frac{k! |m|!}{(k-2m)! |2m|! m!} x^{k-2m} y^{2|m|}. \quad (15)$$

В частности, при $n = 1$, получим:

$$u_k(x, y) = \sum_{m=0}^{[k/2]} (-1)^m C_k^{2m} x^{k-2m} y^{2m} = \text{Re} \left[(x + iy)^k \right].$$

$$2) \varphi(x) = 0, \psi(x) = x^k, \quad k = (k_1, \dots, k_n).$$

Обозначим решение задачи Коши с этими начальными условиями через $v_k(x, y)$. Пусть $u_k(x, y)$ – решение предыдущей задачи, которое даётся формулой (15). Тогда

$$v_k(x, y) = \int_0^y u_k(x, \xi) d\xi.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} v_k(x, 0) &= 0, \quad \partial_y v_k(x, 0) = u_k(x, 0) = x^k, \\ \Delta v_k(x, y) &= \int_0^y \Delta_x u_k(x, \xi) d\xi + \partial_y u_k(x, y) = \\ &= \int_0^y \Delta_x u_k(x, \xi) d\xi + \partial_y u_k(x, y) - \partial_y u_k(x, 0) = \\ &= \int_0^y \Delta_x u_k(x, \xi) d\xi + \int_0^y \partial_y^2 u_k(x, \xi) d\xi = \int_0^y \Delta u_k(x, \xi) d\xi = 0. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$v_k(x, y) = \sum_{m=0}^{[k/2]} (-1)^m \frac{k! |m|!}{(k-2m)!(2|m|+1)! m!} x^{k-2m} y^{2|m|+1}. \quad (16)$$

В частности, при $n = 1$

$$\begin{aligned} v_k(x, y) &= \sum_{m=0}^{[k/2]} (-1)^m \frac{k!}{(k-2m)!(2m+1)!} x^{k-2m} y^{2m+1} = \\ &= \frac{1}{k+1} \sum_{m=0}^{[k/2]} (-1)^m C_{k+1}^{2m+1} x^{k-2m} y^{2m+1} = \frac{1}{k+1} \operatorname{Im} \left[(x+iy)^{k+1} \right] = \\ &= \int_0^y \operatorname{Re} \left[(x+i\xi)^k \right] d\xi. \end{aligned}$$

Например, при $n = 2$, $k = (2, 2)$ имеем:

$$\begin{aligned} u_{(2,2)}(x, y) &= x^{(2,2)} - x^{(0,2)} y^2 - x^{(2,0)} y^2 + \frac{1}{3} y^4, \\ v_{(2,2)}(x, y) &= x^{(2,2)} y - \frac{1}{3} x^{(0,2)} y^3 - \frac{1}{3} x^{(2,0)} y^3 + \frac{1}{15} y^5. \end{aligned}$$

4. Решение задачи Коши, неограниченное в окрестности конечной точки

Если пополнить пространство $\mathbb{R}^n$ одной бесконечно удаленной точкой ∞ , то получим расширенное пространство $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\} = \bar{\mathbb{R}}^n$, гомеоморфное n -мерной сфере S_n . Полиномы $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ непрерывны на $\mathbb{R}^n$ и не ограничены в окрестности бесконечно удаленной точки ∞ . Можно рассмотреть задачу Коши, когда на-

чальные данные $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ непрерывны на $\overline{\mathbb{R}^n} \setminus \{x_0\}$ и не ограничены в окрестности конечной точки x_0 .

Применив к полиномам $u_k(x, y)$ и $v_m(x, y)$ преобразование Кельвина [17] в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$, получим функцию:

$$u(x, y) = \frac{u_k(x, y)}{(|x|^2 + y^2)^{k+(n-1)/2}} + \frac{v_m(x, y)}{(|x|^2 + y^2)^{m+(n+1)/2}},$$

которая является решением задачи Коши для уравнения Лапласа с начальными данными:

$$\varphi(x) = \frac{x^k}{|x|^{2k+n-1}}, \quad \psi(x) = \frac{x^m}{|x|^{2m+n+1}},$$

неограниченными в окрестности начала координат.

Например, решением задачи Коши:

$$\Delta u(x, y) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad y \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

$$u(x, 0) = \frac{x^{(3,2)}}{|x|^{11}} = \frac{x_1^3 x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^{11/2}}, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\},$$

$$u_y(x, 0) = \frac{x^{(3,2)}}{|x|^{13}} = \frac{x_1^3 x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^{13/2}}, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\},$$

будет функция:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{u_{(3,2)}(x, y)}{(|x|^2 + y^2)^{11/2}} + \frac{v_{(3,2)}(x, y)}{(|x|^2 + y^2)^{13/2}} = \\ &= \frac{x^{(3,2)} - x^{(3,0)}y^2 - 3x^{(1,2)}y^2 + x^{(1,0)}y^4}{(|x|^2 + y^2)^{11/2}} + \\ &+ \frac{x^{(3,2)}y - \frac{1}{3}x^{(3,0)}y^3 - x^{(1,2)}y^3 + \frac{1}{5}x^{(1,0)}y^5}{(|x|^2 + y^2)^{13/2}} = \\ &= \frac{x_1^3 x_2^2 - 3x_1 x_2^2 y^2 - x_1^3 y^2 + x_1 y^4}{(x_1^2 + x_2^2 + y^2)^{11/2}} + \\ &+ \frac{x_1^3 x_2^2 y - x_1 x_2^2 y^3 - \frac{1}{3}x_1^3 y^3 + \frac{1}{5}x_1 y^5}{(x_1^2 + x_2^2 + y^2)^{13/2}}. \end{aligned}$$

Заключение

Решение задачи Коши для уравнения Пуассона с полиномиальными данными сводится к решению задачи Коши для уравнения Лапласа с полиномиальными данными. Получено явное полиномиальное решение этой задачи (единственное). Любое решение из бесконечного множества решений задачи Дирихле или Неймана для уравнения Лапласа в полупространстве является решением некоторой задачи Коши. То есть среди решений задачи Дирихле с заданным полиномом в краевом условии содержатся все решения задачи Неймана с произвольным полиномом в граничном условии, а среди решений задачи Неймана с заданным полиномом в краевом условии содержатся все решения задачи Дирихле с произвольным полиномом в граничном условии. Применив к решению задачи Коши для уравнения Лапласа с полиномами в начальном условии, которые не ограничены в окрестности бесконечно удалённой точки, преобразование Кельвина, получим решение задачи Коши с начальными данными, неограниченными в окрестности конечной точки.

Статья поступила в редакцию 09.07.2021 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бицадзе А. В. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976. 296 с.
2. Nevanlinna R. Ueber eine Erweiterung des Poissonschen Integrals // *Annales Academiae Scientiarum Fennicae. Series A.* 1925. Vol. 24 (4). P. 1–15.
3. Finkelstein M., Scheinberg S. Kernels for solving problems of Dirichlet type in a half-plane // *Advances in Mathematics.* 1975. Vol. 18. Iss. 1 P. 108–113. DOI: 10.1016/0001-8708(75)90004-3.
4. Gardiner S. J. The Dirichlet and Neuman problems for Harmonic Functions in Half-Spaces // *Journal of the London Mathematical Society.* 1981. Vol. s2-24. Iss. 3. P. 502–512. DOI: 10.1112/jlms/s2-24.3.502.
5. Siegel D., Talvila E. O. Uniqueness for the n-dimensional half space Dirichlet problem // *Pacific Journal of Mathematics.* 1996. Vol. 175. No. 2. P. 571–587.
6. Аракелян Н. У. О задачах Дирихле и Неймана для гармонических функций // *Известия НАН Армении.* 2008. Т. 43. № 6. С. 21–38.
7. Петровский И. Г. Лекции об уравнениях с частными производными. М.: Физматгиз, 1961. 400 с.
8. Никольский С. М. Краевая задача для многочленов // *Труды математического института им. В. А. Стеклова.* 1999. Т. 227. С. 223–236.
9. Карачик В. В. Построение полиномиальных решений задачи Дирихле для полигармонического уравнения в шаре // *Журнал вычислительной математики и математической физики.* 2014. Т. 54. № 7. С. 1149–1170. DOI: 10.7868/S0044466914070072.
10. Волков Е. А. О разрешимости в классе многочленов задачи Дирихле для уравнения Лапласа на произвольном многоугольнике // *Труды математического института им. В. А. Стеклова.* 2001. Т. 232. С. 102–114.
11. Hayman W. K., Shanidze Z. G. Polynomial solutions of partial differential equations // *Methods and Applications of Analysis.* 1999. Vol. 6. Iss. 1. P. 97–108. DOI: 10.4310/MAA.1999.v6.n1.a7.
12. Differential-symbol method of constructing the quasipolynomial solutions of a two-point problem for a partial differential equation / Nytrebych Z. M., Il'kiv V. S., Malanchuk O. M.,

- Pukach P. Ya. // Journal of Mathematical Sciences. 2019. Vol. 239. Iss. 1. P. 62–74. DOI: 10.1007/s10958-019-04288-9.
13. Алгазин О. Д. Полиномиальные решения краевых задач для уравнения Пуассона в слое // Математика и математическое моделирование. 2017. № 6. С. 1–18. DOI: 10.24108/mathm/0517.0000082.
14. Алгазин О. Д. Полиномиальные решения задачи Дирихле для уравнения Трикоми в полосе // Математика и математическое моделирование. 2018. № 3. С. 1–12. DOI: 10.24108/mathm/0318.0000120.
15. Алгазин О. Д. Полиномиальные решения смешанной краевой задачи Дирихле-Неймана для уравнения Трикоми в полосе // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2018. № 3. С. 8–21. DOI: 10.18384/2310-7251-2018-3-8-21.
16. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979. 320 с.
17. Тиман А. Ф., Трофимов В. Н. Введение в теорию гармонических функций. М: Наука, 1968. 208 с.

REFERENCES

1. Bitsadze A. V. *Uravneniya matematicheskoi fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow, Nauka Publ., 1976. 296 p.
2. Nevanlinna R. Ueber eine Erweiterung des Poissonschen Integrals. In: *Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ. Series A*, 1925, vol. 24 (4), pp. 1–15.
3. Finkelstein M., Scheinberg S. Kernels for solving problems of Dirichlet type in a half-plane. In: *Advances in Mathematics*, 1975, vol. 18, iss. 1. pp. 108–113. DOI: 10.1016/0001-8708(75)90004-3.
4. Gardiner S. J. The Dirichlet and Neuman problems for Harmonic Functions in Half-Spaces. In: *Journal of the London Mathematical Society*, 1981, vol. s2-24, iss. 3, pp. 502–512. DOI: 10.1112/jlms/s2-24.3.502.
5. Siegel D., Talvila E. O. Uniqueness for the n-dimensional half space Dirichlet problem. In: *Pacific Journal of Mathematics*, 1996, vol. 175, no. 2, pp. 571–587.
6. Arakelyan N. U. [On the Dirichlet and Neumann problems for harmonic functions]. In: *Izvestiya NAN Armenii* [Proceedings of National Academy of Sciences (NAS) of Armenia], 2008, vol. 43, no. 6, pp. 21–38.
7. Petrovskii I. G. *Lektsii ob uravneniyakh s chastnymi proizvodnymi* [Lectures on Partial Differential Equations]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1961. 400 p.
8. Nikol'skii S. M. [A Boundary Value Problem for Polynomials]. In: *Trudy matematicheskogo instituta im. V. A. Steklova* [Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics], 1999, vol. 227, pp. 223–236.
9. Karachik V. V. [Construction of polynomial solutions of the Dirichlet problem for the polyharmonic equation in a ball]. In: *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki* [Computational Mathematics and Mathematical Physics], 2014, vol. 54, no. 7, pp. 1149–1170. DOI: 10.7868/S0044466914070072.
10. Volkov E. A. [On the Solvability, in the Class of Polynomials, of the Dirichlet Problem for the Laplace Equation on an Arbitrary Polygon]. In: *Trudy matematicheskogo instituta im. V. A. Steklova* [Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics], 2001, vol. 232, pp. 102–114.
11. Hayman W. K., Shanidze Z. G. Polynomial solutions of partial differential equations. In: *Methods and Applications of Analysis*, 1999, vol. 6, iss. 1, pp. 97–108. DOI: 10.4310/MAA.1999.v6.n1.a7.

12. Nytrebych Z. M., Il'kiv V. S., Malanchuk O. M., Pukach P. Ya. Differential-symbol method of constructing the quasipolynomial solutions of a two-point problem for a partial differential equation. In: *Journal of Mathematical Sciences*, 2019, vol. 239, iss. 1, pp. 62–74. DOI: 10.1007/s10958-019-04288-9.
13. Algazin O. D. [Polynomial Solutions of the Boundary Value Problems for the Poisson Equation in a Layer]. In: *Matematika i matematicheskoe modelirovanie* [Mathematics and Mathematical Modeling], 2017, no. 6, pp. 1–18. DOI: 10.24108/mathm/0517.0000082.
14. Algazin O. D. [Dirichlet Problem Polynomial Solutions for the Tricomi Equation in a Strip]. In: *Matematika i matematicheskoe modelirovanie* [Mathematics and Mathematical Modeling], 2018, no. 3, pp. 1–12. DOI: 10.24108/mathm/0318.0000120.
15. Algazin O. D. [Polynomial solutions to the mixed dirichlet-neumann boundary value problem for the tricomi equation in the strip]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblasnogo universiteta. Seriya: Fizika-Matematika* [Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics-Mathematics], 2018, no. 3, pp. 8–21. DOI: 10.18384/2310-7251-2018-3-8-21.
16. Vladimirov V. S. *Obobshchennye funktsii v matematicheskoi fizike* [Generalized functions in mathematical physics]. Moscow, Nauka Publ., 1979. 320 p.
17. Timan A. F., Trofimov V. N. *Vvedenie v teoriyu garmonicheskikh funktsii* [Introduction to the theory of harmonic functions]. Moscow, Nauka Publ., 1968. 208 p.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Алгазин Олег Дмитриевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры вычислительной математики и математической физики Московского государственного технического университета имени Н. Э. Баумана (национального исследовательского университета);
e-mail: mopi66@yandex.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Oleg D. Algazin – Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Prof., Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University;
e-mail: mopi66@yandex.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Алгазин О. Д. Краевые задачи для уравнения Пуассона в полупространстве с полиномиальными данными и задача Коши // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2021. № 3. С. 6–17.
DOI: 10.18384/2310-7251-2021-3-6-17

FOR CITATION

Algazin O. D. Boundary value problems for the Poisson equation in a half-space with polynomial data and the Cauchy problem. In: *Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics-Mathematics*, 2021, no. 3, pp. 6–17.
DOI: 10.18384/2310-7251-2021-3-6-17

УДК 517.956.4

DOI: 10.18384/2310-7251-2021-3-18-28

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ СО СТЕПЕННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Бозиев О. Л.^{1,2}

¹ Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова
360004, Кабардино-Балкарская Республика, г. Нальчик, ул. Чернышевского,
д. 173, Российская Федерация

² Институт информатики и проблем регионального управления Кабардино-
Балкарского научного центра РАН
360017, Кабардино-Балкарская Республика, г. Нальчик, ул. Арманд, д. 37А,
Российская Федерация

Аннотация

Целью работы является нахождение приближенного решения первой начально-краевой задачи для параболического уравнения, содержащего степенную нелинейность. Для этого используется приближенно-аналитический метод, основанный на применении априорной оценки решения задачи для линеаризации исходного уравнения.

Процедура и методы. На первом шаге метода производится редукция нелинейного уравнения к нагруженному уравнению путём замены нелинейного члена его интегралом по пространственной переменной. Затем устанавливается априорная оценка решения полученной задачи в подходящем функциональном пространстве. Посредством интегрирования нагруженного уравнения по пространственной переменной производится переход к ассоциированному с ним нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению. Последнее линеаризуется с помощью предварительно установленной априорной оценки нагруженной задачи, в которой выбирается верхняя граница неравенства. Приближение к точному решению исходного нелинейного уравнения предлагается производить с помощью итерационного процесса решения последовательности линейных задач.

Результаты. Получена формула, выражающая решение нагруженного уравнения через его норму и решение ассоциированного обыкновенного дифференциального уравнения. Приводится пример, иллюстрирующий применение метода к модельной задаче.

Теоретическая и/или практическая значимость. Применяемая процедура позволяет получить аналитическое выражение для приближенного решения нелинейной задачи. Метод может быть применён к дифференциальным уравнениям в частных производных любого типа и порядка, содержащих натуральную степень искомой функции или её производной.

Ключевые слова: нагруженное уравнение, априорная оценка, приближенное решение

A METHOD FOR AN APPROXIMATE SOLUTION TO A PARABOLIC EQUATION WITH A POWER-LAW NONLINEARITY

O. Boziev^{1,2}

¹ *Kabardino-Balkarian State University named after H. M. Berbekov
ul. Chernyshevskogo 173, Nalchik 360004, Kabardino-Balkarian Republic, Russian
Federation*

² *Institute of Computer Science and Problems of Regional Management of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences
ul. Armand 37A, Nalchik 360017, Kabardino-Balkarian Republic, Russian Federation*

Abstract

Aim. The purpose is to find an approximate solution to the first initial boundary value problem for a parabolic equation with a power-law nonlinearity. The problem is solved using an approximate analytical method based on the application of an a priori estimation of the solution to the problem for the linearization of the original equation.

Methodology. The first step in applying the method is to reduce the nonlinear equation to the loaded equation, by replacing the nonlinear member with its integral in the spatial variable. Following this, an a priori estimate of the obtained problem is established in a suitable functional space. By integrating the loaded equation with respect to the spatial variable, a transition is made to the nonlinear ordinary differential equation associated with it. The latter is linearized using the a priori estimate of the loaded problem, in which the upper bound of inequality is chosen.

Results. A formula is obtained that expresses the solution to the loaded equation in terms of its norm and the solution to the associated ordinary differential equation. Approximation of the solution to a nonlinear equation is proposed to be performed by using an iterative process for solving a sequence of linear problems. An example illustrating the application of the method to a model problem is presented.

Research implications. The applied procedure makes it possible to obtain an analytical expression for an approximate solution to a nonlinear problem. The described method can be applied to partial differential equations of any type and order, containing the natural degree of the desired function or its derivative.

Keywords: power nonlinearity, loaded partial differential equations, a priori estimates, approximate solutions

Введение

Необходимость математического моделирования разнообразных процессов, происходящие в физических, биологических, экологических и других сложных системах, во многих случаях приводит к начально-краевым задачам для одномерных уравнений в частных производных параболического типа со степенной нелинейностью. Широкое приложение имеет, например, уравнение Колмогорова-Петровского-Пискунова (КПП):

$$u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) = \sum_{i=1}^p a_i u^i(x, t).$$

Это связано с тем, что некоторые конкретные значения p и коэффициентов под знаком суммы приводят правую часть уравнения к видам, соответствующим некоторым известным соотношениям, таким как уравнение Ньюэлла-Уайтхеда, Зельдовича и некоторым другим [6].

Процедура нахождения точных или приближенных решений нелинейных уравнений любого типа при заданных условиях представляет значительную сложность. Одним из подходов к нахождению приближенных решений подобных уравнений является редукция нелинейного уравнения к структурно связанному с ним нагруженному дифференциальному уравнению [5, с. 12]. Этот подход используется, в частности, в [1] для нахождения решения гиперболического уравнения с натуральной степенной нелинейностью. В указанной работе предложен приближенно-аналитический метод, в основе которого лежит редукция исходного уравнения к ассоциированному с ним нагруженному дифференциальному уравнению и установление априорной оценки полученной задачи, которая впоследствии используется для нахождения некоторого приближенного решения исходной нелинейной задачи. В развитии метода это приближенное решение принимается за начальное приближение в итерационном процессе аппроксимации точного решения исходной задачи [2].

Переход от нелинейного уравнения к нагруженному можно совершить, в частности, путём замены нелинейного члена рассматриваемого уравнения его интегралом по пространственной переменной. Это приводит к ослаблению нелинейности, что позволяет сохранить некоторую адекватность нелинейного уравнения моделируемому процессу, в отличие от различных способов линеаризации нелинейного уравнения, при которых эта адекватность теряется. В случае уравнений со степенной нелинейностью нагруженный член может представлять собой норму искомой функции в некотором лебеговом пространстве. Априорная оценка решения нагруженного уравнения, установленная в этом пространстве, используется для линеаризации ассоциированного с нагруженным обыкновенного дифференциального уравнения. Последнее получается путём интегрирования нагруженного уравнения и применения аналога теоремы о среднем значении интеграла. Для нахождения начального приближенного решения необходимо проинтегрировать обыкновенное дифференциальное уравнение, решение которого позволяет записать начальное приближение в итерационном процессе последовательной аппроксимации решения исходного уравнения. Метод может быть применён к уравнениям любого типа и порядка, содержащим степенную нелинейность.

Описанная процедура демонстрируется в данной работе на простом модельном примере.

1. Постановка задачи

В одномерной области $Q = (0, T) \times \Omega$, $\Omega = [0, l]$, рассмотрим частный случай уравнения КПП, а именно уравнение Фишера:

$$u_t - u_{xx} - au + au^2 = 0, \quad (1)$$

которое является базовым модельным уравнением при решении задачи вытеснения одного биологического вида другим доминантным видом на некоторой территории [4, с. 294]. Здесь $u = u(x, t)$ – безразмерная концентрация (плотность) особей популяции, причём $0 \leq u \leq 1$; $a = \text{const} > 0$ – мальтузианским параметром популяции, а именно, мера мгновенной удельной скорости изменения размера популяции. Пусть для уравнения (1) заданы начальные и граничные условия:

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2)$$

$$u(0, t) = \psi_1(t), \quad u(l, t) = \psi_2(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

$$\varphi(x) \in C^1[0, l], \quad \psi_1(t), \quad \psi_2(t) \in C^1[0, T].$$

Заменяя нелинейный член (1) его средним значением на интервале изменения пространственной переменной, редуцируем (1) нагруженным уравнением:

$$u_t - u_{xx} - au + \frac{a}{l} \int_{\Omega} u^2 dx = 0 \quad (4)$$

при неизменных условиях (2) и (3). Заметим, что интегральный сомножитель в последнем слагаемом левой части можно рассматривать при любом t как квадрат нормы функции u в пространстве $L_2(\Omega)$:

$$\int_{\Omega} u^2 dx = \int_{\Omega} |u|^2 dx = \|u\|_{2, \Omega}^2.$$

2. Априорная оценка

Запишем скалярное произведение уравнения (4) и функции u :

$$(u_t, u) - (u_{xx}, u) - a(u, u) + \left(\frac{a}{l} \int_{\Omega} u^2 dx, u \right) = 0. \quad (5)$$

Каждое слагаемое по отдельности перепишем следующим образом:

$$(u_t, u) = \int_{\Omega} u_t u dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_{2, \Omega}^2, \quad a(u, u) = a \|u\|_{2, \Omega}^2, \quad \left(\frac{a}{l} \int_{\Omega} u^2 dx, u \right) = \frac{a}{l} \|u\|_{2, \Omega}^2 \int_{\Omega} u dx,$$

$$-(u_{xx}, u) = - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} (u_x u) dx + \int_{\Omega} u_x u_x dx = u_x(0, t) \psi_1(t) - u_x(l, t) \psi_2(t) + \int_{\Omega} |u_x|^2 dx.$$

После подстановки в (5) приходим к уравнению:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_{2, \Omega}^2 = a \|u\|_{2, \Omega}^2 + u_x(l, t) \psi_2(t) - u_x(0, t) \psi_1(t) - \int_{\Omega} |u_x|^2 dx - \frac{a}{l} \|u\|_{2, \Omega}^2 \int_{\Omega} u dx.$$

Правую часть оценим по модулю, предварительно опуская заведомо отрицательное слагаемое, что приводит к неравенству:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_{2,\Omega}^2 \leq a \|u\|_{2,\Omega}^2 + \frac{a}{l} \|u\|_{2,\Omega}^2 \int_{\Omega} |u| dx + |u_x(l, t)| |\psi_2(t)| + |u_x(0, t)| |\psi_1(t)|.$$

Проинтегрируем обе его части по t с учётом вложения $L_2(\Omega) \subset L_1(\Omega)$, что позволяет получить соотношение:

$$\|u\|_{2,\Omega}^2 \leq 2a \int_0^t \|u\|_{2,\Omega}^2 dt + \frac{2a}{\sqrt{l}} \int_0^t \|u\|_{2,\Omega}^3 dt + K,$$

в котором

$$K = \|\varphi(x)\|_{2,\Omega}^2 + \max_{t \in [0, T]} \int_0^t (|u_x(l, \tau)| |\psi_2(\tau)| + |u_x(0, \tau)| |\psi_1(\tau)|) d\tau.$$

К последнему неравенству применим один из нелинейных аналогов неравенства Гронуолла-Беллмана [7, с. 22], что приводит к оценке:

$$\|u\|_{2,\Omega}^2 \leq C(t) \quad (6)$$

с правой частью

$$C(t) = K e^{2at} \left(1 + \sqrt{\frac{K}{l}} (e^{at} - 1) \right)^{-2}. \quad (7)$$

При этом константа K должна удовлетворять неравенству

$$K < \frac{l}{a^2 T^2} e^{-2aT}. \quad (8)$$

Таким образом, доказана **теорема**: пусть при любом t функция $u \in H^1(\Omega)$ является решением задачи (1) – (3). Тогда, функция $\|u\|_{2,\Omega}^2$ ограничена константой, зависящей только от t .

3. Начальное приближенное решение

Для нахождения начального приближенного решения задачи (1) – (3) перейдём от (1) к ассоциированному с ним обыкновенному дифференциальному уравнению. Для этого сначала проинтегрируем (1) по пространственной переменной, затем применим аналог теоремы о среднем значении интеграла, для чего устремим верхнюю границу интеграла к l и разделим его на l . В результате получим:

$$u_x = \frac{x}{l} \int_{\Omega} (u_t - au + au^2) dx + u_x(0, t).$$

После повторного интегрирования по x и удовлетворения граничных условий (3) придём к выражению:

$$u(x, t) = \frac{x(x-l)}{2} \left(\bar{u}'(t) - a\bar{u}(t) + \frac{a}{l} \|u\|_{2,\Omega}^2 \right) + \frac{x}{l} (\psi_2(t) - \psi_1(t)) + \psi_1(t), \quad (9)$$

в котором

$$\bar{u}(t) = \frac{1}{l} \int_{\Omega} u(x, t) dx. \quad (10)$$

Применяя к (9) преобразование (10) получим нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\bar{u}' + \left(\frac{12}{l^2} - a \right) \bar{u} + \frac{a}{l} \|u\|_{2,\Omega}^2 = \frac{12}{l^3} (\psi_1 + \psi_2). \quad (11)$$

Для его линеаризации воспользуемся априорной оценкой (6), в которой выберем знак равенства и получим:

$$\bar{u}' + \left(\frac{12}{l^2} - a \right) \bar{u} = \frac{12}{l^3} (\psi_1 + \psi_2) - \frac{a}{l} C(t). \quad (12)$$

Необходимое для интегрирования (12) начальное условие легко получить из (2) с помощью преобразования (10):

$$\bar{u}(0) = \frac{1}{l} \int_{\Omega} u(x, 0) dx = \frac{1}{l} \int_{\Omega} \varphi(x) dx. \quad (13)$$

Как известно, задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения имеет единственное решение при условии непрерывности коэффициентов и правых частей (12) и (13). После нахождения решения этой задачи, его необходимо подставить вместо $\bar{u}$ в формулу (9). Сюда же подставим $C(t)$ вместо $\|u\|_{2,\Omega}^2$ чтобы получить приближенное решение задачи (4), (2), (3), принимаемое за начальное приближенное решение исходной задачи (1) – (3).

4. Итерационный процесс

Определённую указанным способом функцию (9) примем за начальное приближение $u^{(0)}$ в итерационном процессе поиска решения исходной задачи, состоящем в последовательной аппроксимации точного решения задачи (1) – (3) решениями задач вида:

$$\left. \begin{aligned} u_t^{(k)} - u_{xx}^{(k)} - au^{(k)} &= -a(u^{(k-1)})^2, \\ u^{(k)}(x, 0) &= \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \\ u^{(k)}(0, t) &= \psi_1(t), \quad u^{(k)}(l, t) = \psi_2(t), \quad 0 \leq t \leq T, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

с итерационным индексом $k = 1, 2, \dots$, до выполнения задаваемого условия завершения процесса.

5. Пример

Пусть константы в задаче (1) – (3) имеют значения $a = 0,2$, $l = 1$, $T = 1$. Подставляя их в неравенство (8), находим, что $K < 16,756$. Положим $K = 16$. Тогда, согласно (7),

$$C(t) = 16e^{0,4t} (4e^{0,2t} - 3)^{-2}.$$

Потребуем равенство в (6), тогда оно примет вид

$$\|u\|_{2,\Omega}^2 = 16e^{0,4t} (4e^{0,2t} - 3)^{-2}. \quad (15)$$

Заметим, что знаменатель правой части отличен от нуля для всех $t \geq 0$.

В условиях (2), (3) выберем $\varphi(x) = x$, $\psi_1(t) = \psi_2(t) = t$, в силу чего уравнение (12) и условие (13) принимают, соответственно, вид:

$$\bar{u}' + 11,8\bar{u} = 24t - 3,2e^{0,4t} (4e^{0,2t} - 3)^{-2}, \quad (16)$$

$$\bar{u}(0) = 0,5.$$

Решение полученной задачи с учётом только значимых членов записывается в виде:

$$\bar{u}(t) \approx 2,034 - 0,029e^{-0,4t} - 0,029e^{-0,6t} + 0,022e^{-1,2t}.$$

Подстановка $\bar{u}(t)$ и правой части (15) в (9) приводит к функции:

$$u(x, t) \approx \frac{x(x-1)}{2} \times \\ \times \left(0,013e^{-0,4t} + 0,018e^{-0,6t} + 0,026e^{-1,2t} - 0,041 + 3,2e^{0,4t} (4e^{0,2t} - 3)^{-2} \right) + t, \quad (17)$$

которую необходимо принять за начальное приближение $u^{(0)}$ в итерационном процессе (14).

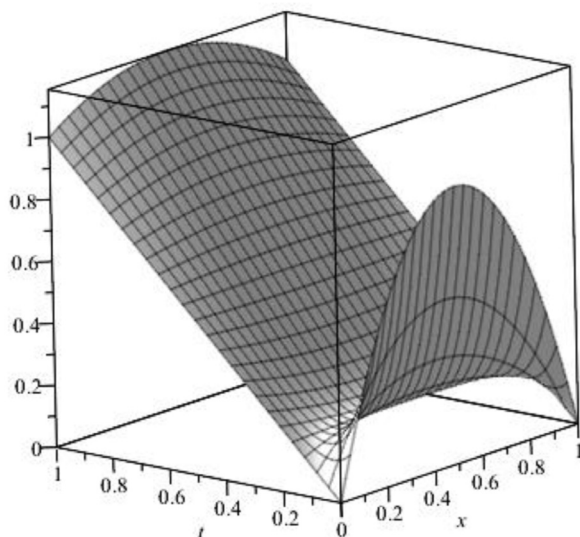


Рис. 1 / Fig. 1. График функции $u^{(0)}(x, t)$ / The graph of the function $u^{(0)}(x, t)$.

Источник: по данным автора.

На рис. 1, 2, 3 продемонстрированы, соответственно, график функции (17), т. е. $u^{(0)}(x, t)$ а также функции $u^{(1)}(x, t)$ и функции $u(x, t)$ – точного решения задачи (1) – (3) при выбранных значениях констант и начально-краевых условий, построенные средствами системы компьютерной математики Maple. В этой же системе получено численное решение задачи (14) при $k = 1$, которому соответствует поверхность на рис. 3.

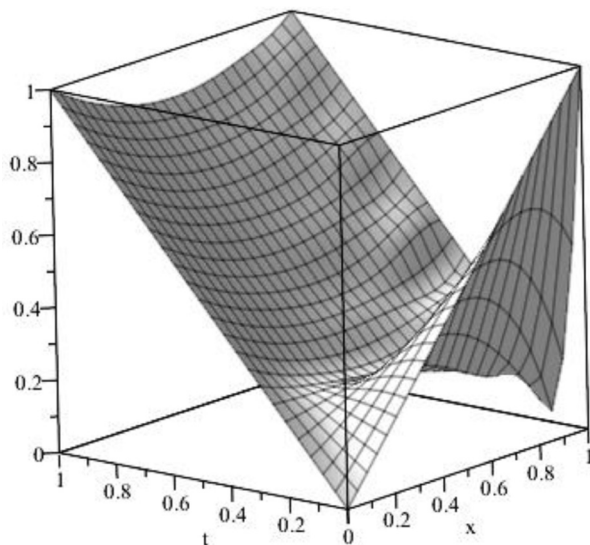


Рис. 2 / Fig. 2. График функции $u^{(1)}(x, t)$ / The graph of the function $u^{(1)}(x, t)$.

Источник: по данным автора.

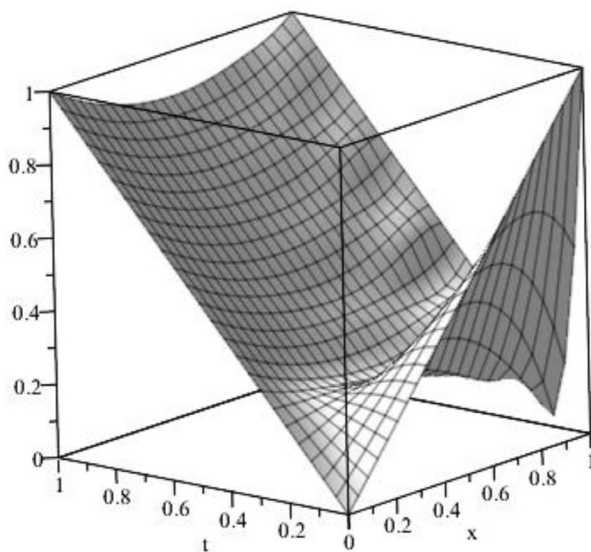


Рис. 3 / Fig. 3. График функции $u(x, t)$ / The graph of the function $u(x, t)$.

Источник: по данным автора.

Анализ этих поверхностей и результатов вычислений показывает, что уже на первой итерации при $t \leq 0,5$ значения функций $u^{(0)}(x, t)$ и $u(x, t)$ практически совпадают, а их графики неразличимы. При увеличении t происходит рост относительной погрешности вычислений, которая не превышает 10%. На основе полученных результатов можно полагать, что продолжение итерационного процесса приведёт к её уменьшению.

Заключение

Таким образом, процедура нахождения приближенного решения исходной нелинейной задачи вида (1) – (3) описанным приближенно-аналитическим методом состоит из следующих этапов:

- 1) замена (1) нагруженным уравнением (4) при неизменных условиях (2), (3);
- 2) получение априорной оценки вида (6) нагруженной задачи с применением известных интегральных неравенств и теорем вложения и определение входящих в неё констант;
- 3) переход от нагруженного уравнения к ассоциированному с ним нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению вида (11), а от него к линейному обыкновенному дифференциальному уравнению вида (12) с помощью оценки (6);
- 4) его решение при условии (13);
- 5) подстановка вместе с верхней границей нормы в (9), что даёт $u^{(0)}$ вида (17);
- 6) запуск итерационного процесса (14) и его выполнение для нахождения приближенного решения задачи (1) – (3) с нужной точностью.

Среди перечисленных этапов сложными являются вывод необходимой априорной оценки и определение входящих в неё констант (этап 2), а также последовательное решение задач вида (14) (этап 6).

Предложенный приближенно-аналитический метод был опробован на уравнениях различного типа и разных типах нелинейностей. В частности, рассматривались гиперболическое уравнение [2] с натуральной степенью нелинейности и параболическое уравнение [3] с рациональной степенью нелинейности $p \in (0,1)$. Второй случай нелинейности представляет большую сложность, так как при этом нагруженный член не образует норму функции, в силу чего приходится прибегать к более тонким рассуждениям для получения априорных неравенств.

Очевидно, что направление дальнейшего развития метода состоит в установлении сходимости последовательных приближенных решений задач вида (14) к точному решению исходной нелинейной задачи.

Статья поступила в редакцию 15.06.2021 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бозиев О. Л. Приближенное решение нагруженного гиперболического уравнения с однородными начальными условиями // Вестник Тверского государственного университета. Серия: Прикладная математика. 2017. № 2. С. 49–58. DOI: 10.26456/vtrpmk108.
2. Бозиев О. Л. О приближенно-аналитическом методе решения нелинейного гиперболического уравнения с однородными начальными условиями // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2017. № 3. С. 43–52. DOI: 10.18384/2310-7251-2017-3-43-52.
3. Бозиев О. Л. Аппроксимация решений нелинейных параболических уравнений решениями ассоциированных нагруженных уравнений // Нелинейный мир. 2018. Т. 16. № 4. С. 3–10. DOI: 10.18127/j20700970-201804-01.
4. Мартинсон Л. К., Малов Ю. И. Дифференциальные уравнения математической физики. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2002. 368 с.
5. Нахушев А. М. Нагруженные уравнения и их применение. М.: Наука, 2012. 232 с.
6. Полосков И. Е. Анализ поведения распределенных систем, описываемых стохастическими уравнениями типа КПП // Вестник Пермского университета. Серия: Математика. Информатика. Механика. 2009. № 7 (33). С. 61–65.
7. Филатов А. Н., Шарова Л. В. Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний. М.: Наука, 1976. 152 с.

REFERENCES

1. Boziev O. L. [An approximate solution of loaded hyperbolic equation with homogenios initial conditions]. In: *Vestnik Tverskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Prikladnaya matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2017, no. 2, pp. 49–58. DOI: 10.26456/vtrpmk108.
2. Boziev O. L. [On the approximate-analytic method of solving a nonlinear hyperbolic equation with homogeneous initial conditions]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-Matematika* [Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics-Mathematics], 2017, no. 3, pp. 43–52. DOI: 10.18384/2310-7251-2017-3-43-52.
3. Boziev O. L. [Approximation of nonlinear parabolic equations solutions by solutions of associated loaded equations]. In: *Nelineinyi mir* [2018, vol. 16, no. 4, pp. 3–10. DOI: 10.18127/j20700970-201804-01.
4. Martinson L. K., Malov Yu. I. *Differentsial'nye uravneniya matematicheskoi fiziki* [Differential equations of mathematical physics]. Moscow, Bauman Moscow State Technical University Publ., 2002. 368 p.
5. Nakhushev A. M. *Nagruzhennye uravneniya i ikh primeneniye* [Loaded equations and their applications]. Moscow, Nauka Publ., 2012. 232 p.
6. Poloskov I. E. [Analysis of distributed systems described by stochastic equations of KPP-type]. In: *Vestnik Permskogo universiteta. Seriya: Matematika. Informatika. Mekhanika* [Perm University Bulletin. Series: Mathematics. Computer science. Mechanics], 2009, no. 7 (33), pp. 61–65.
7. Filatov A. N., Sharova L. V. *Integral'nye neravenstva i teoriya nelineinykh kolebaniy* [Integral inequalities and the theory of nonlinear oscillations]. Moscow, Nauka Publ., 1976. 152 p.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Бозиев Олег Людинович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры компьютерных технологий и информационной безопасности Института информатики, электроники и робототехники Кабардино-Балкарского государственного университета им. Х. М. Бербекова; старший научный сотрудник института информатики и проблем регионального управления Кабардино-Балкарского научного центра РАН;
e-mail: boziev@yandex.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Oleg L. Boziev – Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Prof., Department of Computer Technologies and Information Security, Institute of Informatics, Electronics and Computer Technologies, Kabardino-Balkarian State University named after H. M. Berbekov; Senior Researcher, Institute of Computer Science and Problems of Regional Management of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences;
e-mail: boziev@yandex.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Бозиев О. Л. Об одном методе приближенного решения параболического уравнения со степенной нелинейностью // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2021. № 3. С. 18–28.
DOI: 10.18384/2310-7251-2021-3-18-28

FOR CITATION

Boziev O. L. A method for an approximate solution to a parabolic equation with a power-law nonlinearity. In: *Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics-Mathematics*, 2021, no. 3, pp. 18–28.
DOI: 10.18384/2310-7251-2021-3-18-28

РАЗДЕЛ II. ФИЗИКА

УДК 536, 538.9, 544

DOI: 10.18384/2310-7251-2021-3-29-38

УВЕЛИЧЕНИЕ ТЕРМОЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЭДС КОЛЛОИДНЫХ РАСТВОРОВ В РЕЗУЛЬТАТЕ ДИАЛИЗНОЙ ОЧИСТКИ

Сидоров А. В., Зайцев А. А., Кузнецов Д. В.

*Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина
399770, Липецкая область, г. Елец, ул. Коммунаров, д. 28, Российская Федерация*

Аннотация

Цель. В работе проводится экспериментальное исследование термоэлектрических свойств коллоидных растворов и влияния на эти свойства диализной очистки на примере коллоидных растворов иодида серебра.

Процедура и методы. Используются стандартные методы измерения коэффициента термоэлектрической ЭДС и коэффициента электропроводности, применяемые для растворов электролитов и коллоидных растворов. Для очистки коллоидных растворов от присутствующих в них ионов используется метод диализной очистки с помощью полупроницаемых мембран.

Результаты. Показано, что в процессе удаления ионов из коллоидных растворов их термоэлектрическая ЭДС увеличивается по абсолютному значению, в то время как коэффициент электропроводности уменьшается. Наблюдаемое увеличение не может быть объяснено только эффектом увеличения термоэлектрической силы раствора ионного электролита при уменьшении его концентрации. Полученные результаты могут быть объяснены в рамках термодинамики необратимых процессов как следствие увеличения чисел переноса крупных коллоидных частиц, имеющих изначально более высокие значения теплоты переноса по сравнению с ионами.

Теоретическая и/или практическая значимость. Результаты исследования вносят вклад в теорию явлений переноса в дисперсных коллоидных системах.

Ключевые слова: термоэлектрический эффект, коллоидные растворы, диализ, термодиффузия, теплота переноса

Благодарности. Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и администрации Липецкой области в рамках научного проекта 19-42-480001.

INCREASE IN THE THERMOELECTRIC EMF OF COLLOIDAL SOLUTIONS AS A RESULT OF DIALYSIS PURIFICATION

A. Sidorov, A. Zaitsev, D. Kuznetsov

Bunin Yelets State University

ul. Kommunarov 26, Yelets 399770, Lipetsk region, Russian Federation

Abstract

Aim. The paper presents an experimental study of thermoelectric properties of colloidal solutions and the effect of dialysis purification on these properties, using the example of colloidal solutions of silver iodide.

Methodology. The paper uses standard methods for measuring the coefficient of thermoelectric EMF and the coefficient of electrical conductivity used for electrolyte and colloidal solutions. To purify colloidal solutions from the ions present in them, the method of dialysis purification using semipermeable membranes is used.

Results. It is shown that during the removal of ions from colloidal solutions, their thermoelectric EMF increases in absolute value, while the coefficient of electrical conductivity decreases. The observed increase cannot be explained only by the effect of an increase in the thermoelectric strength of the ionic electrolyte solution with a decrease in its concentration. The results obtained can be explained in the framework of the thermodynamics of irreversible processes as a consequence of an increase in the transfer numbers of large colloidal particles, which, unlike ions, have initially high values of the transfer heat.

Research implications. The results of the study contribute to the theory of transport phenomena in dispersed colloidal systems.

Keywords: thermoelectric effect, colloidal solutions, dialysis, thermal diffusion, heat transfer

Acknowledgments. The study was supported by the Russian Foundation for Basic Research and the administration of the Lipetsk region in the framework of the scientific project 19-42-480001.

Введение

Коллоидные растворы представляют собой дисперсные системы, в которых частицы твёрдой фазы с размерами от 10^{-9} м до 10^{-7} м находятся в жидкой дисперсионной среде. В стабильном состоянии такие системы существуют из-за их электростатического отталкивания, которое возникает вследствие избирательной адсорбции поверхностью коллоидных частиц одноименно заряженных ионов. Поэтому в коллоидных растворах заряженные коллоидные частицы всегда сосуществуют с ионами и вследствие этого вносят вклад в электрические явления переноса: электропроводность, диффузионный потенциал, потенциал седиментации, термоэлектрический и термоэлектрокинетический эффект [9] совместно с ионами.

Вклады в указанные явления определяются соответствующими парциальными коэффициентами. Например, электропроводность раствора электролита определяется числами переноса его заряженных частиц [4].

$$t_k = \frac{|z_k| c_k u_k}{\sum_k |z_k| c_k u_k}, \quad (1)$$

которые зависят от их заряда $-z_k$, объёмной концентрации $-c_k$ и подвижности $-u_k$. Процесс диффузии зависит от коэффициентов диффузии D_k частиц вида k , которые, согласно уравнению Эйнштейна, обратно пропорциональны радиусу частиц. Наконец, как следует из уравнения Эйнштейна-Смолуховского [2], $D_k \sim u_k$. Вследствие этого подвижности коллоидных частиц оказываются ниже подвижностей ионов, так же как и их концентрация, поэтому вклад коллоидных частиц в коэффициент электропроводности раствора оказывается крайне малым по сравнению с ионным вкладом, что подтверждается экспериментально [3].

С другой стороны, парциальные термоЭДС заряженных частиц раствора в начальном состоянии, как следует из теории необратимых процессов [4], определяются произведениями чисел переноса частиц на их теплоты переноса Q_k^* :

$$\alpha = -\frac{1}{F} \sum_k \frac{t_k Q_k^*}{z_k T}. \quad (2)$$

Теплоты переноса являются характеристиками частиц, которые определяют величину и направление термодиффузионного эффекта, то есть явления, при котором приложение температурного градиента к раствору приводит к формированию градиента концентрации его компонентов и их частичному разделению. Как показали многочисленные эксперименты [6; 7; 8; 10], величина данного эффекта в коллоидных растворах различной природы весьма значительна, а значения теплоты переноса коллоидных частиц превышают аналогичные значения для ионов. Поэтому, если вклад коллоидных частиц в суммарную электропроводность растворов крайне мал по сравнению с ионами, то из-за экстремальных значений теплоты переноса коллоидные частицы могут конкурировать с ионами при формировании итоговой величины коэффициента термоэлектрической ЭДС α .

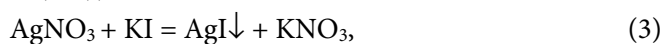
Термоэлектрический эффект в коллоидных растворах не находит пока широкого применения в технических приложениях. С другой стороны, он может играть совместно с термоэлектрокинетическим эффектом важную роль в формировании электрических потенциалов живых организмов [5]. Кроме того, в последние годы появились работы, в которых предполагается, что коллоидные частицы в растворах электролитов термоэлектрохимических ячеек могут увеличивать их термоэлектрическую эффективность [8]. Поэтому исследование термоэлектрических явлений в коллоидных растворах является актуальной задачей.

Как видно из соотношения (2), коэффициент термоэлектрической ЭДС коллоидного раствора определяется суммой вкладов всех электрически заряженных частиц, присутствующих в растворе. Данными частицами являются крупные коллоидные частицы и ионы. Коллоидные частицы обладают, как правило, вы-

сокими значениями теплоты переноса Q_k^* , однако это нивелируется крайне низкими значениями чисел переноса t_k . Как следует из соотношения (1), числа переноса зависят от подвижности частицы u_k и их концентрации c_k . Поэтому самый простой способ изменить числа переноса частиц коллоидных растворов – изменить соотношение между концентрациями ионов и коллоидных частиц. Один из способов сделать это – уменьшить концентрацию ионов в приготовленном коллоидном растворе в результате его диализной очистки. Соответственно, целью данной работы является исследование влияния процесса диализной очистки коллоидных растворов на величину термоэлектрической ЭДС раствора.

Методика эксперимента

В работе исследования проводились с коллоидным раствором AgI, который получался в результате реакции двойного обмена



проводимой с избытком одного из компонентов [1]. Как следует из уравнения реакции, в итоговом растворе помимо коллоидных частиц иодида серебра будут присутствовать ионы K^+ , NO_3^- и I^- или Ag^+ в зависимости от того, был ли в начале реакции в избытке KI или AgNO_3 .

Полученный коллоидный раствор далее подвергался диализной очистке от избытка присутствующих в нём ионов. Метод диализа коллоидных растворов основан на свойстве полупроницаемых мембран пропускать небольшие ионы и задерживать крупные коллоидные частицы [1]. В качестве мембраны в работе использовалась оболочка из целлюлозной плёнки, в которую заливался очищаемый раствор. Далее оболочка с раствором помещалась в сосуд с дистиллированной водой. Степень очистки контролировалась по измерению электропроводности очищаемого раствора и воды и проводилась в несколько этапов. На каждом следующем этапе исследуемый раствор заливался в новую оболочку, которая помещалась в сосуд с новой порцией дистиллированной воды. Данная процедура проводилась после того, как коэффициенты электропроводности очищаемого раствора и воды сравнивались с течением времени.

Также, после каждого этапа очистки производилось измерение коэффициента термоэлектрической ЭДС очищаемого раствора. Кроме этого, были проведены измерения коэффициентов термоЭДС растворов различной концентрации соли KNO_3 , которая образуется в результате реакции. Измерения коэффициента термоэлектрической ЭДС растворов электролитов производились по методике, описанной в работе [9].

Результаты эксперимента и их обсуждение

Первоначально реакция двойного обмена (3) была проведена с избытком KI, который составлял $c_{\text{KI}}/c_{\text{AgNO}_3} = 1,25$. В этом случае, согласно правилу Фаянса-Панета [2], образующиеся коллоидные частицы AgI будут адсорбировать на своей поверхности отрицательные ионы I^- . В результате была получена электролитная смесь, которая содержала KI в количестве $c_{\text{AgI}}/c_{\text{KNO}_3} = 0,0022$ моль/л и остаток

не прореагировавшего AgI в количестве $c_{\text{KI}} = 0,0006$ моль/л. При этом часть ионов I^- адсорбировалась на поверхности коллоидных частиц, образуя отрицательно заряженную мицеллу, а часть ионов K^+ образовывали слой противоионов.

Далее были проведены измерения коэффициента термоэлектрической ЭДС полученного коллоидного раствора, который составил $\alpha = -38,0 \pm 4,0$ мкВ/К, и коэффициента электропроводности $\sigma = 1,39 \pm 0,03$ мкСм/см. Коэффициент термоЭДС беспримесного раствора KNO_3 концентрацией 0,002 моль/л по результатам измерений составляет $\alpha = -44,0 \pm 4,0$ мкВ/К, а его электропроводность $\sigma = 0,89 \pm 0,03$ мкСм/см. Коэффициент термоэлектрической силы раствора KI концентрацией 0,0006 моль/л составил $\alpha = -29,0 \pm 3,0$ мкВ/К. Таким образом, из результатов измерений видно, что коэффициент термоЭДС коллоидного раствора достаточно близок к коэффициенту термоэлектрической ЭДС беспримесного раствора KNO_3 , в то время как их электропроводности отличаются весьма значительно.

Часть полученного раствора далее была подвергнута диализной очистке, после первого этапа которой электропроводность очищаемого раствора снизилась до величины $\sigma = 0,64 \pm 0,03$ мкСм/см, а коэффициент термоЭДС вырос до $\alpha = -55,0 \pm 4,0$ мкВ/К. После следующего этапа очистки электропроводность коллоидного раствора упала вдвое до $\sigma = 0,33 \pm 0,03$ мкСм/см, а коэффициент термоэлектрической ЭДС вырос до $\alpha = -67,0 \pm 5,0$ мкВ/К.

Таким образом, по мере удаления ионов из коллоидного раствора наблюдалось, наряду со снижением его электропроводности, увеличение коэффициента термоэлектрической ЭДС. Для того чтобы выяснить, было ли связано это увеличение с эффектом увеличения термоэлектрической ЭДС ионного раствора соли при уменьшении её концентрации, либо с увеличивающимся вкладом в суммарную величину коэффициента термоэлектрической силы коллоидных частиц по сравнению с ионами, были проведены измерения коэффициента термоЭДС раствора KNO_3 для различных значений её концентраций. На рис. 1 представлена данная зависимость. Также на рис. 2 показана зависимость коэффициента электропроводности водного раствора KNO_3 от концентрации.

Как следует из графика (рис. 1), коэффициент термоэлектрической ЭДС раствора KNO_3 увеличивается по абсолютному значению с уменьшением его концентрации до значения $57 \pm 4,0$ мкВ/К при концентрации 0,0005 моль/л, коэффициент электропроводности раствора данной концентрации составляет $0,29 \pm 0,03$ мкСм/см. Из сравнения данных значений с аналогичными значениями для коллоидного раствора следует, что увеличение коэффициента термоэлектрической силы коллоидного раствора AgI с увеличением его степени очистки не может быть объяснено одним лишь эффектом увеличения термоЭДС ионного компонента раствора KNO_3 при уменьшении его концентрации. Очевидно, что помимо вышеназванного вклада увеличение термоэлектрической силы коллоидного раствора может быть также обусловлено увеличением парциального вклада в коэффициент термоЭДС от коллоидных частиц иодида серебра (2) $\frac{t_k Q_k^*}{z_k}$. В

данном соотношении при уменьшении в коллоидном растворе доли свободных ионов при фиксированном значении концентрации коллоидных частиц будут соответственным образом меняться и числа переноса. Числа переноса свободных ионов раствора будут уменьшаться, а коллоидных частиц – увеличиваться в соответствии с выражением (1).

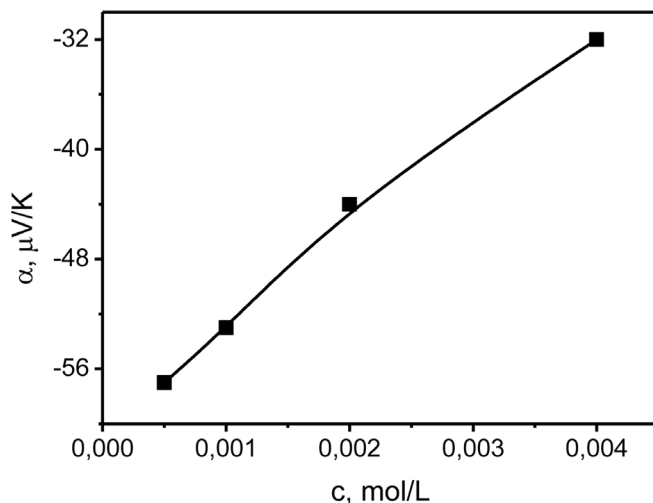


Рис. 1 / Fig. 1. Концентрационная зависимость коэффициента термоЭДС водного раствора KNO_3 / Concentration dependence of the coefficient of thermoelectric EMF of an aqueous solution of KNO_3 .

Источник: по данным авторов.

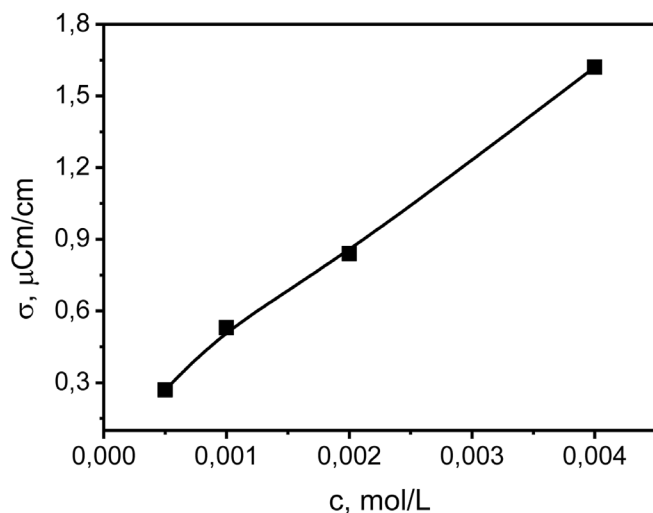


Рис. 2 / Fig. 2. Концентрационная зависимость коэффициента электропроводности водного раствора KNO_3 / Concentration dependence of the electrical conductivity coefficient of an aqueous solution of KNO_3 .

Источник: по данным авторов.

Аналогичные измерения были проведены для коллоидного раствора AgI, при приготовлении которого концентрации исходных компонентов относились, как $c_{KI}/c_{AgNO_3} = 1,11$. Концентрации коллоидных частиц иодида серебра и нитрата калия по сравнению с предыдущим случаем увеличились до $c_{AgI}/c_{KNO_3} = 0,0024$ моль/л, а не прореагировавшего иодида калия уменьшилась до $c_{KI} = 0,0003$ моль/л. Далее проводилась процедура диализной очистки данного раствора, после каждого этапа которой производились измерения коэффициентов термоЭДС и электропроводности. На рис. 3 показана зависимость коэффициента термоЭДС от коэффициента электропроводности для данного раствора. Также для сравнения показаны аналогичные графики для коллоидного раствора AgI концентрацией $c_{AgI}/c_{KNO_3} = 0,0022$ моль/л и для беспримесного раствора KNO_3 .

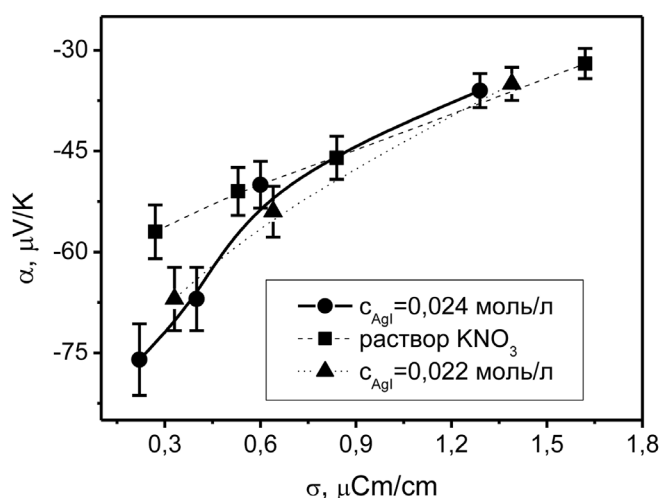


Рис. 3. / Fig. 3. Зависимость коэффициента термоэлектрической ЭДС от коэффициента электропроводности для коллоидных растворов AgI и беспримесного раствора KNO_3 /
The dependence of the coefficient of thermoelectric EMF on the coefficient of electrical conductivity for colloidal solutions of AgI and an unalloyed solution of KNO_3 .

Источник: по данным авторов.

Результаты экспериментов (см. рис. 3) подтверждают ранее высказанные предположения. Действительно, по мере удаления свободных ионов из коллоидного раствора уменьшается его электропроводность и вместе с тем растёт по абсолютному значению коэффициент термоЭДС. При этом в коллоидных растворах AgI коэффициент $|\alpha|$ увеличивается значительно, чем в растворе нитрата калия.

Заключение

Итак, из вышеизложенного исследования можно сделать следующие выводы.

1. Коэффициент термоэлектрической ЭДС коллоидного раствора AgI с отрицательным зарядом мицелл в пределах погрешности эксперимента совпадает

с коэффициентом термоэлектрической ЭДС беспримесного раствора KNO_3 той концентрации, которая должна присутствовать в коллоидном растворе, полученном в результате реакции двойного обмена.

2. По мере диализной очистки коллоидного раствора от ионного электролита KNO_3 происходит увеличение по абсолютному значению его коэффициента термоЭДС α . Подобный эффект наблюдается и в беспримесном растворе нитрата калия при уменьшении его концентрации. Однако в очищаемом коллоидном растворе наблюдается более значительное увеличение коэффициента термоЭДС.

3. Таким образом, увеличение модуля коэффициента термоэлектрической силы очищаемого коллоидного раствора обусловлено ростом парциальной термоЭДС коллоидных частиц иодида серебра по сравнению со свободными ионами. Этот рост обусловлен, с одной стороны, изначально большим значением теплоты переноса коллоидных частиц Q_{AgI}^* , а с другой – увеличением их чисел переноса с уменьшением концентрации свободных ионов в очищаемом коллоидном растворе.

Статья поступила в редакцию 28.06.2021 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Воюцкий С. С. Курс коллоидной химии. М.: Химия, 1974. 512 с.
2. Гельфман М. И., Ковалевич О. В., Юстратов В. П. Коллоидная химия. СПб.: Лань, 2003. 336 с.
3. Духин С. С. Электропроводность и электрокинетические свойства коллоидных систем. Киев: Наукова думка, 1975. 249 с.
4. Хаазе Р. Термодинамика необратимых процессов. М.: Мир, 1967. 544 с.
5. Thermoelectric and Thermoelectrokinetic Phenomena in Liquid Biological Systems / Grabov V. M., Zaitsev A. A., Kuznetsov D. V., Sidorov A. V. // Technical Physics. 2018. Vol. 63 (10). P. 1415–1419. DOI: 10.1134/S1063784218100122.
6. Iacopini S., Rusconi R., Piazza R. The “macromolecular tourist”: Universal temperature dependence of thermal diffusion in aqueous colloidal suspension // The European Physical Journal E. 2006. Vol. 19 (1). P. 59–67. DOI: 10.1140/epje/e2006-00012-9.
7. Majee A., Würger A. Collective Thermoelectrophoresis of Charged Colloids // Physical Review E. 2011. Vol. 83. Iss. 6. P. 061403. DOI: 10.1103/PhysRevE.83.061403.
8. Can charged colloidal particles increase the thermoelectric energy conversion efficiency? / Salez T. J., Bo Tao Huang, Rietjens M., Bonetti M., Wiertel-Gasquet C., Roger M., Filomeno C. L., Dubois E., Perzynski R., Nakamae S. // Physical Chemistry Chemical Physics. 2017. Vol. 19. Iss. 14. P. 9409–9416. DOI: 10.1039/C7CP01023K.
9. Thermoelectric and Thermoelectrokinetic Phenomena in Colloidal Solutions / Sidorov A. V., Grabov V. M., Zaitsev A. A., Kuznetsov D. V. // Semiconductors. 2019. Vol. 53. P. 756–760. DOI: 10.1134/S1063782619060228.
10. Stadelmaier D., Köhler W. From Small Molecules to High Polymers: Investigation of the Crossover of Thermal Diffusion in Dilute Polystyrene Solutions // Macromolecules. 2008. Vol. 41. Iss. 16. P. 6205–6209. DOI: 10.1021/ma800891p.

REFERENCES

1. Voyutskii S. S. *Kurs kolloidnoi khimii* [Colloidal chemistry course]. Moscow, Khimiya Publ., 1974. 512 p.
2. Gelfman M. I., Kovalevich O. V., Yustratov V. P. *Kolloidnaya khimiya* [Colloidal chemistry]. St. Petersburg, Lan' Publ., 2003. 336 p.
3. Dukhin S. S. *Elektroprovodnost' i elektrokineticheskie svoistva kolloidnykh sistem* [Electrical conductivity and electrokinetic properties of colloidal systems]. Kiev, Naukova dumka Publ., 1975. 249 p.
4. Khaaze R. *Termodinamika neobratimyykh protsessov* [Thermodynamics of irreversible processes]. Moscow, Mir Publ., 1967. 544 p.
5. Grabov V. M., Zaitsev A. A., Kuznetsov D. V., Sidorov A. V. Thermoelectric and Thermoelectrokinetic Phenomena in Liquid Biological Systems. In: *Technical Physics*, 2018, vol. 63 (10), pp. 1415–1419. DOI: 10.1134/S1063784218100122.
6. Iacopini S., Rusconi R., Piazza R. The “macromolecular tourist”: Universal temperature dependence of thermal diffusion in aqueous colloidal suspension. In: *The European Physical Journal E*, 2006, vol. 19 (1), pp. 59–67. DOI: 10.1140/epje/e2006-00012-9.
7. Majee A., Würger A. Collective Thermoelectrophoresis of Charged Colloids. In: *Physical Review E*, 2011, vol. 83, iss. 6, pp. 061403. DOI: 10.1103/PhysRevE.83.061403.
8. Salez T. J., Bo Tao Huang, Rietjens M., Bonetti M., Wiertel-Gasquet C., Roger M., Filomeno C. L., Dubois E., Perzynski R., Nakamae S. Can charged colloidal particles increase the thermoelectric energy conversion efficiency? In: *Physical Chemistry Chemical Physics*, 2017, vol. 19, iss. 14, pp. 9409–9416. DOI: 10.1039/C7CP01023K.
9. Sidorov A. V., Grabov V. M., Zaitsev A. A., Kuznetsov D. V. Thermoelectric and Thermoelectrokinetic Phenomena in Colloidal Solutions. In: *Semiconductors*, 2019, vol. 53, pp. 756–760. DOI: 10.1134/S1063782619060228.
10. Stadelmaier D., Köhler W. From Small Molecules to High Polymers: Investigation of the Crossover of Thermal Diffusion in Dilute Polystyrene Solutions. In: *Macromolecules*, 2008, vol. 41, iss. 16, pp. 6205–6209. DOI: 10.1021/ma800891p.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Сидоров Александр Валентинович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физики, радиотехники и электроники Елецкого государственного университета им. И. А. Бунина;
e-mail: dirnusr@mail.ru;

Зайцев Андрей Анатольевич – кандидат физико-математических наук, доцент, директор агропромышленного института Елецкого государственного университета им. И. А. Бунина;
e-mail: zaitsev@elsu.ru;

Кузнецов Денис Владимирович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физики, радиотехники и электроники Елецкого государственного университета им. И. А. Бунина;
e-mail: kuznetcovdv007@mail.ru.

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Alexander V. Sidorov – Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Prof., Department of Physics, Radio Engineering and Electronics, Bunin Yelets State University;
e-mail: dirnusr@mail.ru;

Andrey A. Zaitsev – Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Prof., Director of the Agro-Industrial Institute, Bunin Yelets State University;
e-mail: zaitsev@elsu.ru;

Denis V. Kuznetsov – Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Prof., Department of Physics, Radio Engineering and Electronics, Bunin Yelets State University;
e-mail: kuznetcovdv007@mail.ru.

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Сидоров А. В., Зайцев А. А., Кузнецов Д. В. Увеличение термоэлектрической ЭДС коллоидных растворов в результате диализной очистки // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2021. № 3. С. 29–38.
DOI: 10.18384/2310-7251-2021-3-29-38

FOR CITATION

Sidorov A. V., Zaitsev A. A., Kuznetsov D. V. Increase in the thermoelectric emf of colloidal solutions as a result of dialysis purification. In: *Bulletin of the Moscow state regional University. Series: Physics-Mathematics*, 2021, no. 3, pp. 29–38.
DOI: 10.18384/2310-7251-2021-3-29-38

УДК 533.6.011

DOI: 10.18384/2310-7251-2021-3-39-56

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ЗНАЧЕНИЕ ЭФФЕКТА ВЫСОКОСКОРОСТНОГО ПЕРЕХЛЁСТА В УДАРНО-СЖАТОЙ СМЕСИ ГАЗОВ

Кузнецов М. М., Кулешова Ю. Д.

Московский государственный областной университет

141014, Московская область, г. Мытищи, ул. Веры Волошиной, д. 24, Российская Федерация

Аннотация

Цель: найти асимптотически точные значения для функции распределения пар молекул в ударно-сжатой бинарной смеси газов с сильным отличием по концентрациям и молекулярным массам её компонентов.

Процедура и методы. Применялись математические методы теоретической физики, связанные с вычислением пороговой частоты соударений на основе кинетического уравнения Больцмана.

Результаты. Найдены асимптотически точные аналитические выражения для функций распределения пар молекул по абсолютным значениям их относительных скоростей. Определены также максимумы этих функций в парах: лёгкий-лёгкий, лёгкий-тяжёлый и тяжёлый-тяжёлый компоненты. Эти максимумы и соответствуют наибольшим интенсивностям эффектов высокоскоростного перехлёста в компонентах ударно-сжатой смеси газов.

Теоретическая и практическая значимость. Исследуемый в статье эффект высокоскоростного перехлёста в компонентах ударно-сжатой смеси газов реализуется при экспериментальном моделировании его в ударных трубах (например, в процессах пиролиза углеродных и углеродно-водородных соединений). Результаты, полученные в работе, существенны для оптимального проведения таких экспериментов.

Ключевые слова: кинетический, уравнение, неравновесный, смесь газов, ударная волна.

Благодарности. Работа выполнена в рамках гранта РФФИ 20-07-00740 А. Исследование выполнено в рамках гранта Президента РФ для молодых учёных-кандидатов наук МК-1330.2020.9.

ASYMPTOTIC HIGH-SPEED OVERSHOOT EFFECT VALUE IN A SHOCK-COMPRESSED GAS MIXTURE

M. Kuznetsov, Ju. Kuleshova

Moscow State Region University

ul. Very Voloshinoy 24, Mytishchi 141014, Moscow region, Russian Federation

Abstract

Aim. We have found asymptotically exact values for the distribution function of pairs of molecules in a shock-compressed, binary mixture of gases with a strong difference in the concentrations and molecular weights of its components.

Methodology. The research relies on the mathematical methods of theoretical physics related to the calculation of the threshold frequency of collisions based on the kinetic Boltzmann equation.

Results. Asymptotically exact analytical expressions are found for the distribution functions of pairs of molecules by the absolute values of their relative velocities. The maxima of these functions are also determined in pairs: light–light, light–heavy and heavy–heavy components. These maxima correspond to the greatest intensities of the effects of high-speed overshoot in the components of the shock-compressed gas mixture.

Research implication. The effect of high-speed overshoot in the components of a shock-compressed gas mixture is realized by experimentally modeling it in shock pipes (for example, in the processes of pyrolysis of carbon and carbon-hydrogen compounds). The results obtained in this work are essential for the optimal performance of such experiments.

Keywords: kinetic, equation, nonequilibrium, gas mixture, shock wave

Acknowledgments. This work is supported by Russian Science Foundation (Grant No. 20-07-00740A) and by the RF President's Grants Council (State Support of Young Scientists – Candidates of Sciences Program, Grant No. MK-1330.2020.9).

Введение

В предыдущей работе авторов [1], фактически был начат новый этап аналитических исследований эффекта высокоскоростной неравновесности (или, иначе, эффекта высокоскоростного перехлёста), не требующий традиционного априорного задания [2–4] одночастичных функций распределения молекул по их собственным тепловым скоростям.

Напомним, что априорное задание одночастичных функций распределения по тепловым скоростям молекул в ударной волне сводится, как правило, к следующим аппроксимациям:

- приближение Тамма – Мотт-Смита [2; 3];
- эллипсоидальное распределение [5, 6];
- распределение Холвея [7].

На основе каждого из этих априорных приближений авторами были найдены аналитические представления функций распределения пар молекул по модулю их относительной скорости. Формулы для функций распределения пар молекул были получены как для однокомпонентных идеальных газов, так и для их бинарных смесей [8–11].

Аналитическое представление функций распределения пар молекул позволило авторам выделить и записать в виде формул выражения для четырёх основных физических факторов, от которых зависит величина эффекта высокоскоростного перехлёста.

Важно отметить, что наблюдение эффекта перехлёста перед проведением соответствующего эксперимента требует, прежде всего, оценки порядка его величины.

Как показали численные расчёты [12], минимальное значение величины эффекта, существенное для его учёта, составляет не менее, чем 10^4 .

Это обстоятельство свидетельствует в пользу использования авторами ранее соответствующих априорных аппроксимаций. Дело в том, что они не требуют точного численного исследования структуры ударной волны, но дают при этом правильную оценку порядка эффекта.

Однако преимущество такого качественного подхода к исследованию рассматриваемого явления может в ряде случаев обернуться и существенными недостатками.

Прежде всего, это касается влияния сечения столкновения молекул на возможность существования эффекта вообще [13].

Кроме того, учёт сечений столкновений молекул влияет и на точный аналитический вид функций распределения пар молекул.

Влияние сечения молекул на величину эффекта высокоскоростной неравновесности можно рассматривать и как пятый основной физический фактор.

1. Специфика процессов релаксации лёгкого и тяжёлого компонентов рэлеевской смеси газов

В предыдущей работе авторов [1] было найдено локально-точное асимптотическое представление функции распределения пар молекул рэлеевской смеси газов. Для его построения не требовалось определение точного решения уравнения Больцмана в полной области ударного сжатия.

Возможность такого локально-точного решения проблемы обусловлена асимптотическим состоянием потока, в котором действие рассматриваемого эффекта является наиболее сильным.

Как показали численные расчёты [12, 13], такое состояние потока реализуется в так называемом рэлеевском газе, когда, с одной стороны, имеет место сильное преобладание концентраций лёгкого компонента над тяжёлым ($n_l \gg n_h$), а с другой, наоборот, – сильное преобладание массы тяжёлого компонента над лёгким ($m_h \gg m_l$).

В сущности, сечение, в котором реализуется указанное асимптотическое состояние потока, является как бы начальным для всего последующего течения с непрерывным сжатием внутри фронта ударной волны. Заметим, что термин «сечение» является качественным. На самом деле, под этим термином понимается короткая область релаксации лёгкого компонента, протяжённость которой зависит от точности расчётов. В результате релаксации лёгкий компонент меняет температуру от «холодной» равновесной на входе в волну до «горячей» равновесной после прохождения зоны релаксации.

В то же самое время, с тяжёлым компонентом, в главном приближении, ничего не происходит. Это обусловлено тем, что его нагрев происходит на значительно большей длине релаксации λ_h , чем длина релаксации лёгкого компонента

λ_l . Как показано в работе [14], отношение длин $\frac{\lambda_h}{\lambda_l}$ пропорционально $b = \frac{m_h}{m_l}$,

причём в рэлеевском газе это отношение является очень большим, $b \gg 1$. Таким образом, в ударно-сжатом рэлеевском газе реализуются как бы две ударные волны. Первая – в результате сжатия лёгкого компонента, вторая – после сжатия тяжёлого.

После сжатия лёгкий компонент сопровождает тяжёлый, двигаясь с дозвуковой скоростью. Напротив, тяжёлый компонент движется со сверхзвуковой скоростью, «подстраивая» её в результате торможения к скорости лёгкого.

2. Асимптотически точные выражения для функций распределения пар молекул в рэлеевской смеси газов

С момента входа в ударную волну к поступательно-равновесному состоянию приходит только лёгкий компонент. При этом он оказывается сжатым и нагретым. Тяжёлая же фракция смеси (один или несколько тяжёлых компонентов) не участвует в поступательной релаксации и находится по-прежнему в «холодном» поступательно-равновесном состоянии, как и перед фронтом волны.

Такое стационарное состояние газовой среды является в целом, конечно, неравновесным. При этом оно является асимптотически точным, поскольку исходно «холодное» и сжатое «горячее» максвелловские распределения являются точными решениями кинетического уравнения Больцмана (точнее системы таких уравнений для смеси газов).

Таким образом, вследствие релаксации, лёгкий компонент приходит в поступательно-равновесное состояние сжатым и нагретым. Напротив, тяжёлая фракция смеси не претерпевает никаких изменений и остаётся в том же «холодном» равновесном состоянии, что и перед ударной волной.

Найдём функции распределения по относительной скорости пар молекул, отличающихся составом: лёгкий-лёгкий компоненты, тяжёлый-тяжёлый и лёгкий-тяжёлый.

Введём **основную количественную характеристику рассматриваемого эффекта высокоскоростного перехлёста:**

$$\Delta \tilde{G}^{(\alpha, \beta)} = [G_{neq}^{(\alpha, \beta)} - G_{eq}^{(\alpha, \beta)}] / G_{eq}^{(\alpha, \beta)}. \quad (1)$$

Здесь $G_{eq}^{(\alpha, \beta)}$, $G_{neq}^{(\alpha, \beta)}$ – соответственно поступательно-равновесная и поступательно-неравновесная функции распределения по модулю относительной скорости молекул g в парах (α, β) , где каждый из индексов α и β принимают значения l и h .

Заметим, что функции пар молекул $G_{neq}^{(\alpha, \beta)}$ и $G_{eq}^{(\alpha, \beta)}$ берутся в различных сечениях потока смеси газов, сжимаемой в ударной волне.

Первая из них: $G_{neq}^{(\alpha, \beta)}$ – берётся в конце зоны релаксации лёгкого компонента в некотором асимптотическом сечении, фиксирующем конец этой релаксации. Вторая же: $G_{eq}^{(\alpha, \beta)}$ – берётся в конце зоны релаксации тяжёлого компонента, со-

впадающим, по существу, с началом зоны поступательно-равновесного состояния всей смеси газов, сжатой в ударной волне.

В случае, когда выполняется строгое неравенство $\Delta \tilde{G}^{(\alpha,\beta)} > 0$, эффект высокоскоростного перехлеста существует, в противоположном случае: $\Delta \tilde{G}^{(\alpha,\beta)} \leq 0$ эффект отсутствует.

Пара лёгкий-лёгкий компоненты

$$G_{neq}^{(l,l)} \rightarrow G_{eq}^{(l,l)} \rightarrow \Delta \tilde{G}^{(l,l)} \rightarrow 0. \quad (2)$$

Формула (2) выполняется естественным образом, поскольку лёгкий компонент достигает состояния поступательного равновесия в конце зоны своей релаксации. В течение последующей релаксации тяжёлого компонента к общему равновесию вместе с лёгким компонентом, лёгкий компонент по-прежнему будет находиться в состоянии поступательного равновесия.

Однако макроскопические параметры этого локально-равновесного состояния могут оставаться неизменными или же меняться, отслеживая влияние релаксации тяжёлого компонента. В последнем случае влияние тяжёлого компонента на равновесные параметры лёгкого будет осуществляться через законы сохранения (потоков массы, импульса, энергии), в которых участвуют они оба.

Этим двум случаям математически соответствуют предельные асимптотические переходы двух разных типов:

$$1) \quad v = \frac{n_h}{n_l} \rightarrow 0, \quad \frac{m_h}{m_l} = b \rightarrow \infty, \quad \frac{n_h m_h}{n_l m_l} = vb \equiv \tilde{\rho} = \text{const} \ll 1 \quad (3)$$

$$2) \quad v = \frac{n_h}{n_l} \rightarrow 0, \quad \frac{m_h}{m_l} = b \rightarrow \infty, \quad \frac{n_h m_h}{n_l m_l} = vb \equiv \tilde{\rho} = \text{const} \cong 1. \quad (4)$$

Видно, что различие этих переходов обусловлено разными значениями безразмерного параметра $\tilde{\rho}$, введённого в работе [15].

В случае 1) макроскопические параметры равновесного состояния лёгкого компонента остаются неизменными и равными тем, которые были достигнуты в результате его быстрой релаксации.

В случае 2) макроскопические параметры равновесного состояния лёгкого компонента будут переменными. Переменность параметров обусловлена влиянием релаксации тяжёлого компонента.

Пара из молекул тяжёлого компонента

Рассмотрим теперь пары молекул тяжёлого компонента. С момента входа в ударную волну и до конца зоны поступательной релаксации лёгкого компонента функция распределения пар молекул тяжёлого компонента сохраняет тот же поступательно-равновесный вид, что и перед входом в волну:

$$G_{neq}^{(h,h)} = \left(\frac{m_h}{4\pi k T_0} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{m_h}{4k T_0} \right), \quad (5)$$

где T_0 – общая равновесная температура обоих компонентов на входе в ударную волну.

Функция $G_{eq}^{(\alpha,\beta)}$, входящая в формулу (1) и равная для тяжёлого компонента $G_{eq}^{(h,h)}$, в отличие от функции $G_{neq}^{(h,h)}$, берётся не в конце зоны релаксации лёгкого компонента, а в другом сечении: в начале зоны полного термодинамического равновесия смеси газов за ударной волной.

По существу, сечения, в которых берутся сравниваемые функции $G_{neq}^{(h,h)}$ и $G_{eq}^{(h,h)}$, отделены длиной релаксации тяжёлого компонента, задающего основную часть толщины ударной волны.

Функция пар $G_{eq}^{(h,h)}$ почти полностью совпадает с функцией (5), с точностью до замены равновесной «холодной» температуры потока на входе в ударную волну T_0 на равновесную «горячую» температуру T_s на выходе из волны:

$$G_{eq}^{(h,h)} = \left(\frac{m_h}{4\pi k T_s} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{m_h}{4k T_s} \right). \quad (6)$$

Заметим, что «горячая» равновесная температура T_s смеси газов, нагретых в ударной волне, выше «холодной» температуры T_0 на входе в неё:

$$T_s > T_0. \quad (7)$$

Структура формулы для параметра T_s , то есть температуры «глобального» равновесия за ударной волной, когда оба компонента смеси и лёгкий, и тяжёлый релаксируют к равновесному состоянию, существенно зависит от типа асимптотического предельного перехода: (3) или (4).

В случае (3) температура T_s будет полностью совпадать с температурой равновесного состояния лёгкого компонента T_{sl} , причём:

$$\frac{T_s}{T_0} = \frac{T_{sl}}{T_0} = 1 + \frac{\gamma_l - 1}{2} M_l^2 \left[1 - \left(\frac{\rho_{l0}}{\rho_{ls}} \right)^2 \right]. \quad (8)$$

Здесь γ_l – отношение удельной теплоёмкости лёгкого компонента при постоянном давлении c_{pl} к его удельной теплоёмкости при постоянном объёме c_{vl} , то

есть $\gamma_l = \frac{c_{pl}}{c_{vl}}$; M_l – число Маха свободного потока, $M_l = \frac{u}{a_l}$, u – скорость смеси

газов на входе в ударную волну, a_l – скорость звука в лёгком газе, $a_l^2 = \gamma_l \frac{kT}{m_l}$, ρ_{l0}

и ρ_{ls} – плотности лёгкого компонента на входе и выходе из волны, соответственно.

В случае (4) равенство температур T_{sl} и T_s , имеющее место в предыдущем случае (3), выполняться не будет. Температура глобального равновесия T_s лёгкого и тяжёлого компонентов будет обязательно выше T_{sl} . Превосходство температуры T_s над T_{sl} обусловлено подогревом лёгкой фракции смеси релаксацией тяжёлой к общему равновесию. Как показывает анализ общих законов сохранения для смеси газов, в асимптотическом случае (3) влиянием релаксации тяжёлого компонента на макропараметры лёгкого можно пренебречь. В случае (4) этого сделать нельзя.

Подставив формулы (5) и (6) в формулу (1), получим:

$$\Delta \tilde{G}_{neq}^{(h,h)} = \left\{ \left(\frac{T_s}{T_0} \right)^{3/2} \exp \left[\frac{m_h g^2}{4k} \left(\frac{1}{T_s} - \frac{1}{T_0} \right) \right] - 1 \right\}. \quad (9)$$

Формулу (9) можно преобразовать к следующему виду:

$$\Delta \tilde{G}_{neq}^{(h,h)} = \left\{ \exp \left[\frac{3}{2} \ln \left(\frac{T_s}{T_0} \right) - \left(1 - \frac{T_0}{T_s} \right) \left(\frac{m_h g^2}{4k T_0} \right) \right] - 1 \right\}. \quad (10)$$

Из формулы (10) непосредственно следует, что эффект высокоскоростного перехлёста будет существовать только при положительной определённости показателя степени экспоненты:

$$\left[\frac{3}{2} \ln \left(\frac{T_s}{T_0} \right) - \left(1 - \frac{T_0}{T_s} \right) \left(\frac{m_h g^2}{4k T_0} \right) \right] > 0. \quad (11)$$

В противном случае эффект перехлёста не существует и будет действовать поступательно-равновесная кинетика.

Из соотношения (11), в свою очередь, видно, что наибольшее значение эффекта перехлёста будет достигаться при значении модуля относительной скорости, равного нулю, то есть

$$\Delta \tilde{G}_{neq}^{(h,h)} \Big|_{\max} = \left(\frac{T_s}{T_0} \right)^{3/2} - 1. \quad (12)$$

Однако этот случай практически мало полезен, поскольку при равенстве нулю модуля относительной скорости невозможно преодолеть энергетический барьер неупругих соударений.

«Перекрёстная» пара из молекул лёгкого и тяжёлого компонента

Функция распределения перекрёстной пары молекул в поступательно-равновесном состоянии за фронтом волны была ранее получена в работах авторов [8; 9].

$$G_{eq}^{(l,h)} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\mu}{2k T_s} \right)^{3/2} g^2 \exp \left(-\frac{\mu g^2}{2k T_s} \right). \quad (13)$$

Подобная же функция для поступательно-неравновесного состояния внутри ударного фронта была также получена в работах [8; 9] и имела более сложный вид:

$$G_{neg}^{(l,h)} = \left[\frac{\mu}{2\pi k T_3} \right]^{1/2} \frac{g}{u} \left\{ \exp \left[-\frac{\mu (g-u)^2}{2k T_3} \right] - \exp \left[-\frac{\mu (g+u)^2}{2k T_3} \right] \right\}. \quad (14)$$

Здесь величина T_3 , так называемая эффективная температура, равна:

$$T_3 = \frac{T_l m_h + T_h m_l}{m_h + m_l}, \quad (15)$$

причём в соответствии с асимптотическим переходом (3) температура T_l равна T_s , а температура T_h равна T_0 , то есть

$$T_3 = \frac{T_s m_h + T_0 m_l}{m_h + m_l}. \quad (16)$$

Для однокомпонентного газа формулы, подобные равенствам (13) и (14), были получены ранее в работах [16; 17].

Для последующего исследования выражение (14) необходимо несколько упростить:

$$G_{neg}^{(l,h)} = \left[\frac{\mu}{2\pi k T_3} \right]^{1/2} \frac{g}{u} \exp \left[-\frac{\mu (g-u)^2}{2k T_3} \right] \left\{ 1 - \exp \left[-\frac{2\mu g u}{k T_3} \right] \right\}. \quad (17)$$

Преобразуем равенство (17), введя в него множитель $Q(X)$:

$$Q(X) = \frac{1 - e^{-X}}{X} \leq \frac{1 - (1 - X)}{X} \leq 1, \quad (18)$$

где величина $X = \frac{2\mu g u}{k T_3}$.

В итоге этих преобразований исходная формула (14) запишется в виде:

$$G_{neg}^{(l,h)} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\mu}{2k T_3} \right)^{3/2} g^2 \exp \left[-\frac{\mu (g-u)^2}{2k T_3} \right] \Delta Q \left(\frac{2\mu g u}{k T_3} \right). \quad (19)$$

В дальнейших преобразованиях, ввиду неравенства (18), множитель $Q \left(\frac{2\mu g u}{k T_3} \right)$ будет опущен.

Вследствие равенств (13) и (19) выражение для величины $\Delta \tilde{G}_{neg}^{(l,h)}$, исследуемой на предмет существования эффекта перехлёста, то есть когда $\Delta \tilde{G}_{neg}^{(l,h)} > 0$, и определения его количественного значения, запишется в виде:

$$\Delta \tilde{G}_{neq}^{(l,h)} = \left\{ \left(\frac{T_s}{T_3} \right)^{3/2} \exp \left[\frac{\mu g^2}{2kT_s} - \frac{\mu (g-u)^2}{2kT_3} \right] - 1 \right\}. \quad (20)$$

**3. Область существования и максимальное значение
эффекта перехлёста ($\Delta \tilde{G}_{neq}^{(l,h)} > 0$) при заданной скорости смеси
газов перед фронтом ударной волны**

В формуле (20) можно выделить безразмерный параметр подобия θ_3^S :

$$\theta_3^S = \frac{T_s}{T_3}, \quad (21)$$

где, в соответствии с формулой (16), этот параметр будет иметь следующий структурный вид:

$$\theta_3^S = \frac{T_s}{T_3} = \frac{1 + \frac{1}{b}}{1 + \frac{1}{b}\theta_{0s}} = 1 + \frac{\frac{1}{b}(1 - \theta_{0s})}{1 + \frac{\theta_{0s}}{b}}. \quad (22)$$

$$\theta_{0s} = \frac{T_0}{T_s}. \quad (23)$$

$$\frac{T_0}{T_s} = \left[1 + \frac{\epsilon}{1 + \epsilon} M_l^2 (1 - \epsilon^2) \frac{1 + b\nu}{1 + \nu} \right]^{-1}. \quad (24)$$

$$\epsilon = \epsilon + (1 + \nu)(1 + b\nu)(1 - \epsilon)(M_l)^{-2}. \quad (25)$$

Из формулы (25) следует, что при большом числе Маха свободного потока смеси, совпадающем для случая предельного перехода (3) с числом Маха лёгкого компонента M_l , сжатие в ударной волне ϵ^{-1} будет совпадать с предельным сжатием $\epsilon^{-1} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}$, когда $M_l \gg 1$ (практически, когда $M_l > 3$).

Из формул (22)–(25) непосредственно следует, что безразмерный параметр θ_3^S , входящий в формулу (21), и входящий, таким образом, в формулу для эффекта перехлёста (20), сам непосредственно зависит от семи других безразмерных параметров, определяющих течение смеси газов, сжимаемой в ударной волне.

Заметим, что заранее предвидеть такую сложную конструкцию количественной меры (20) эффекта перехлёста или же получить её на основании экспериментов или численного моделирования просто невозможно.

Главное же в существовании аналитического представления такой меры заключается в том, что она позволяет связать в единое целое все многочислен-

ные безразмерные факторы (параметры подобия), определяющие исследуемое явление.

После выделения параметра θ_s^s в формуле (20), получим:

$$\Delta \tilde{G}_{neq}^{(l,h)} = \left\{ \left(\theta_s^s \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left[\left(\frac{\mu}{2kT_s} \right) \left(g^2 - \theta_s^s (g-u)^2 \right) \right] - 1 \right\}. \quad (26)$$

В обоих предельных асимптотических переходах (3) и (4) параметр $b \gg 1$, ($b \rightarrow \infty$). В силу этого из соотношений (22) – (25) будет следовать, что параметр θ_s^s равен $1 + \frac{1}{b}$. Поэтому формула (26) примет вид:

$$\Delta \tilde{G}_{neq}^{(l,h)} = \left\{ \left(\theta_s^s \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left[\left(\frac{\mu}{2kT_s} \right) \left(g^2 - \theta_s^s (g-u)^2 \right) \right] - 1 \right\}. \quad (27)$$

Из выражения (27) непосредственно видно, что неравенство $\Delta \tilde{G}_{neq}^{(l,h)} > 0$ будет всегда выполнено, если показатель степени экспоненты будет больше или равен нулю:

$$\left(g^2 - \left(1 + \frac{1}{b} \right) (g-u)^2 \right) \geq 0. \quad (28)$$

В случае выполнения равенства в нестрогом неравенстве (28) эффект перелёта будет иметь минимальное положительное значение:

$$\Delta \tilde{G}_{neq}^{(l,h)} = \left\{ \left(1 + \frac{1}{b} \right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right\} \approx \frac{3}{2b} = \frac{3m_l}{2m_h} \ll 1. \quad (29)$$

Найдём корни квадратичного выражения (28): $g = g_1$, $g = g_2$, соответствующего наличию нуля в его правой части:

$$\begin{aligned} & \left[g^2 - \left(1 + \frac{1}{b} \right) (g-u)^2 \right] = \\ & = \left[g_1 - \left(1 + \frac{1}{b} \right)^{\frac{1}{2}} (g_1 - u) \right] \cdot \left[g_2 + \left(1 + \frac{1}{b} \right)^{\frac{1}{2}} (g_2 - u) \right] = \\ & = \left\{ \left[1 - \left(1 + \frac{1}{b} \right)^{\frac{1}{2}} \right] g_1 + \left(1 + \frac{1}{b} \right)^{\frac{1}{2}} u \right\} \times \left\{ \left[1 + \left(1 + \frac{1}{b} \right)^{\frac{1}{2}} \right] g_2 - \left(1 + \frac{1}{b} \right)^{\frac{1}{2}} u \right\} = 0. \end{aligned}$$

$$g_1 = \frac{\left(1 + \frac{1}{b}\right)^{\frac{1}{2}} u}{\left(1 + \frac{1}{b}\right)^{\frac{1}{2}} - 1}; \quad \text{и} \quad g_2 = \frac{\left(1 + \frac{1}{b}\right)^{\frac{1}{2}} u}{\left(1 + \frac{1}{b}\right)^{\frac{1}{2}} + 1}. \quad (30)$$

Область существования эффекта перехлёста: $g_2 \leq g \leq g_1$.

Координата максимума этого эффекта: $g_{\max} = \frac{g_1 + g_2}{2} = (b+1)u$.

Величина показателя экспоненты (28) в точке $g = g_{\max}$:

$$\left(g_{\max}^2 - \left(1 + \frac{1}{b}\right)(g_{\max} - u)^2\right) = (b+1)u^2. \quad (31)$$

Величина максимума эффекта перехлёста $\Delta\tilde{G}_{\max}^{(l,h)}$, то есть значение функции (27) при $g = g_{\max}$, равно

$$\Delta\tilde{G}_{\max}^{(l,h)} = \left\{ \left(1 + \frac{1}{b}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left[\left(\frac{\mu}{2kT_s}\right)\left(g_{\max}^2 - \left(1 + \frac{1}{b}\right)(g_{\max} - u)^2\right)\right] - 1 \right\}. \quad (32)$$

Из параметров, входящих в формулу (32): $b, \mu, u, g_{\max}$ и T_s , первые четыре были определены выше.

Пятый параметр – температура равновесного состояния всей смеси газов за скачком T_s радикально различается в асимптотических случаях (3) и (4).

В случае (3) температура T_s равна T_{sl} и может быть определена по соотношению (8). Это соотношение, в целях получения окончательного аналитического выражения для величины (31), удобно преобразовать к виду:

$$\frac{T_0}{T_s} = \left[1 + \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} (1 - \varepsilon^2) \left(\frac{1 + \tilde{\rho}}{1 + v} \right) \frac{m_l u^2}{kT_0} \right]^{-1} \approx \left[\varepsilon (1 - \varepsilon) \left(\frac{1 + \tilde{\rho}}{1 + v} \right) \frac{m_l u^2}{kT_0} \right]^{-1}, \quad (33)$$

где приближенное равенство (33), в котором $\epsilon = \varepsilon$, соответствуют случаю $M_l \gg 1$.

Формула (32), в силу удовлетворения системы кинетических уравнений Больцмана для компонентов смеси асимптотическими максвелловскими распределениями, является, по существу, точной.

Для её практического использования нужно входящие в неё все пять параметров $b, \mu, u, g_{\max}$ и T_s выразить по соотношениям (21) – (25), (31).

Однако, при этом она становится очень громоздкой и неудобной для определения порядка величины $\Delta\tilde{G}_{\max}^{(l,h)}$, от знания которого и зависит успех эксперимента по выявлению эффекта перехлёста [12, 13].

В связи с этим, выделим главные значения указанных параметров, пренебрегая малыми поправками. Тогда получим:

$$\Delta \tilde{G}_{\max}^{(l,h)} \approx e^{\frac{b+1}{2e(1+\tilde{\rho})}} - 1. \quad (34)$$

Интересно отметить, что в однокомпонентном газе аналогичный эффект рассматривался ранее авторами в работах [8; 9] и что он соответствует формуле (32), в которой $b = \tilde{\rho} = 0$.

Заметим также, что асимптотическому случаю (3) отвечает значение $\tilde{\rho} = 0$, а случаю (4) $\tilde{\rho} = \text{const} \approx 1$.

В силу этого величина высокоскоростного перехлёста будет выше в случае (3). Это соответствует общему выводу, полученному в численных исследованиях [12; 13; 15; 18], в соответствии с которым повышение концентрации лёгкого носителя, то есть уменьшение параметров ν и $\tilde{\rho}$ приводит к возрастанию эффекта перехлёста.

4. Область существования и максимальное значение эффекта перехлёста ($\Delta \tilde{G}_{\text{neq}}^{(l,h)} > 0$) при заданном энергетическом барьере неупругих столкновений пар молекул

Область существования эффекта перехлёста: $\Delta \tilde{G}_{\text{neq}}^{(l,h)} > 0$ и его максимальное значение $\Delta \tilde{G}_{\max}^{(l,h)}$ определяются точно так же, как и в предыдущем разделе. Вплоть до формулы (30) все предыдущие соотношения остаются справедливыми.

Формулы (30) для корней g_1 и g_2 квадратичного уравнения (28) следует обратить относительно искомых корней u_1 и u_2 . Абсолютная величина скорости g теперь является не искомой, а заданной «барьерной» $g_{th} = \sqrt{\frac{2E_{th}}{\mu}}$.

Величина E_{th} является энергетическим барьером неупругих столкновений молекул.

Таким образом, искомые корни u_1 и u_2 квадратичного уравнения (28) будут следующими:

$$u_1 = \left[1 - \left(1 + \frac{1}{b} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] g_{th} \quad \text{и} \quad u_2 = \left[1 + \left(1 + \frac{1}{b} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] g_{th}. \quad (35)$$

Область существования эффекта перехлёста: $u_2 \leq u \leq u_1$.

Координата максимума этого эффекта:

$$u_{\max} = \frac{u_1 + u_2}{2} = g_{th}. \quad (36)$$

Величина показателя экспоненты (28) в точке $u_{\max} = g_{th}$:

$$\left(g_{th}^2 - \left(1 + \frac{1}{b}\right)(g_{th} - u_{\max})^2\right) = g_{th}^2. \quad (37)$$

Величина максимума эффекта перехлёста с учётом равенств (32) и (37) будет равна:

$$\Delta \tilde{G}_{\max}^{(l,h)} = \left\{ \left(1 + \frac{1}{b}\right)^{\frac{3}{2}} \exp \left[\left(\frac{\mu}{2kT_s} \right) g_{th}^2 \right] - 1 \right\}. \quad (38)$$

Аналогично переходу в предыдущем разделе от точного значения эффекта (32) к его главному порядку (34), перейдём от точного значения величины (38) к её главному порядку:

$$\Delta \tilde{G}_{\max}^{(l,h)} \approx \exp \left[\frac{(g_{th} / u_{\max})^2}{2\varepsilon(1+\tilde{\rho})} \right] - 1, \quad (39)$$

причём в силу равенства (36) получим:

$$\Delta \tilde{G}_{\max}^{(l,h)} \approx \exp \left[\frac{1}{2\varepsilon(1+\tilde{\rho})} \right] - 1. \quad (40)$$

Из формулы (40) следует, что при $\tilde{\rho} = 0$, то есть в предельном случае (3), величина эффекта высокоскоростного перехлёста практически совпадает с такой же величиной в однокомпонентном газе, приближённо равной при $\varepsilon = \frac{1}{4} \Delta \tilde{G}_{\max}^{(l,h)} \approx 6$ [8, 9].

Сравним итоговые результаты, представленные равенствами (34) и (40), полученные при разных условиях поиска максимальной величины перехлёста. Напомним, равенство (34) получено при задании скорости свободного потока u , а равенство (40) при задании модуля относительной скорости молекул g_{th} , позволяющей им преодолеть энергетический барьер столкновения.

Видно, что эффект перехлёста, выражаемый равенствами (34) и (40), в первом случае значительно больше, чем во втором. Однако при этом поступательно-равновесные значения функций распределения пар молекул, к которым отнесены соответствующие поступательно-неравновесные значения этих функций, находятся в прямо противоположном соотношении.

5. Величина эффекта высокоскоростного перехлёста при заданной пороговой энергии неупругих соударений в трёхкомпонентной смеси газов

Итоговая величина эффекта перехлёста $\Delta \tilde{G}_{\max}^{(l,h)}$, представляемая равенством (40), может быть более значительной, если рассмотреть трёхкомпонентную смесь газов, сжимаемую в ударной волне.

Идея о том, что эффект перехлёста может стать особенно значительным в трёхкомпонентной смеси газов, была впервые сформулирована и обоснована при рассмотрении упрощённой модели эффекта в работе [19].

Применительно к асимптотически точной модели эффекта, рассматриваемой в данной работе, трёхкомпонентная смесь должна быть строго определённого вида как по составу, так и по соотношению масс. В противном случае может быть нарушена асимптотическая точность в постановке задачи.

Рассматриваемая трёхкомпонентная смесь газов, как и в работе [19], включает в себя лёгкий компонент с концентрацией n_l и массой m_l его частиц и два тяжёлых компонента с соответствующими концентрациями n_{h1} и n_{h2} и молекулярными массами m_{h1} и m_{h2} .

Асимптотическая точность задачи, как и в рассмотренной ранее бинарной смеси газов, основывается на том, что лёгкий компонент приходит к поступательно-равновесному состоянию внутри фронта ударной волны значительно раньше обоих компонентов из тяжёлой фракции.

Математическим условием, обеспечивающим релаксацию такого вида, является выполнение следующих неравенств:

$$1) n_l \gg n_{h1} \gg n_{h2}; \quad 2) m_l \ll m_{h1} \ll m_{h2}. \quad (41)$$

Выполнение первых двух сильных неравенств из пункта 1) обеспечивает отсутствие влияния каждого из компонентов, стоящих правее, на релаксацию предыдущих.

Выполнение сильных неравенств относительно масс компонентов из пункта 2) обеспечивает разделение их времён релаксации по порядку величины.

Промежуточные преобразования, приводящие к окончательным результатам в данном пункте, полностью аналогичны преобразованиям из предыдущих пунктов 4 и 5.

Отличие заключается в том, что ищется максимум для функции пар молекул $\Delta \tilde{G}_{\max}^{(h1,h2)}$ из тяжёлой фракции трёхкомпонентной смеси. Формула (32) остаётся справедливой и для этой величины с точностью до замены приведённой массы $\mu = \mu_{lh}$ компонентов m_l и m_h на приведённую массу $\mu = \mu_{h1h2}$ компонентов m_{h1} и m_{h2} :

$$\mu = \mu_{lh} = \frac{m_l m_h}{m_l + m_h} = \frac{m_l b}{(1+b)} \approx m_l, \quad (42)$$

$$\mu = \mu_{h1h2} = \frac{m_{h1} m_{h2}}{m_{h1} + m_{h2}} = \frac{m_{h1} d}{(1+d)} \approx m_{h1}; \quad d = \frac{m_{h2}}{m_{h1}}. \quad (43)$$

Температура T_s за фронтом волны трёхкомпонентной смеси газов, пришедшей в окончательное термодинамическое равновесие, будет совпадать с температурой T_s бинарной смеси газов при

$$bv = d_1 v_1 = d_2 v_2 = 0,$$

где $d_1 = \frac{m_{h1}}{m_l}$; $d_2 = \frac{m_{h2}}{m_l}$; $v_1 = \frac{n_{h1}}{n_l}$; $v_2 = \frac{n_{h2}}{n_l}$.

$$\Delta \tilde{G}_{\max}^{(h1,h2)} \approx e^{\frac{d_1}{2\varepsilon}} - 1.$$

Заключение

В работе получено асимптотически точное значение величины высокоскоростного перехлёста в бинарной и трёхкомпонентной смеси ударно сжатых газов. Асимптотическая точность обеспечивается тем, что при выбранном соотношении парциальных концентраций и их молекулярных масс в конце зоны релаксации лёгкого компонента никаких других функций распределения, кроме соответствующих распределений Максвелла для компонентов смеси, в принципе, быть не может. Эти же распределения являются решениями кинетических уравнений Больцмана для компонентов смеси.

Получены универсальные аналитические зависимости для величины высокоскоростного перехлёста от практически всех безразмерных параметров и факторов, определяющих движение ударно сжимаемой смеси газов (исключая влияние сечения взаимодействия).

Универсальности полученных аналитических результатов удалось достигнуть без проведения сложных численных расчётов структуры фронта ударной волны.

Статья поступила в редакцию 02.08.2021 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Асимптотическое приближение для функции распределения пар молекул в ударной волне / Демидов И. В., Кузнецов М. М., Кузьмин М. К., Кулешова Ю. Д. // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2020. № 4. С. 86–94. DOI: 10.18384/2310-7251-2020-4-86-94.
2. Тамм И. Е. О ширине ударных волн большой интенсивности // Труды Физического института им. П. Н. Лебедева. 1965. Т. XXIX. С. 239–249.
3. Mott-Smith H. M. The Solution of the Boltzmann Equation for a Shock Wave // Physical Review. 1951. Vol. 82. P. 885. DOI: 10.1103/PhysRev.82.885.
4. Башлыков А. М., Великодный В. Ю. Структура ударных волн в газовой смеси // Журнал технической физики. 1991. Т. 61. № 8. С. 33–42.
5. Candler G. V., Nijhawan S., Bose D. A multiple translational temperature gas dynamics model // Physics of Fluids. 1994. Vol. 6. No. 11. P. 3776–3786. DOI: 10.1063/1.868367.
6. Riesco-Chueca P., Fernandez-Feria R., Fernandez de la Mora J. Nonlinearities in the interspecies transfer of moment and energy for disparate-mass gas mixtures and shock wave structure // Proceedings of the 15-th International Symposium on Rarefied Gas Dynamics (June 16-20, 1986, Grado, Italy). Vol. 1 / edited by V. Boffi, C. Cercignani. Stuttgart: B. G. Teubner, 1986. P. 283–292.
7. Holway L. H., Jr. Kinetic Theory of Shock structure using an ellipsoidal distribution function // Rarefied Gas Dynamics: Proceedings of the Fourth International Symposium. Vol. 1 / ed. by J. H. de Leeuw. New York: Academic Press, 1965. P. 193–215.

8. Кузнецов М. М., Кулешова Ю. Д., Смотров Л. В. Эффект высокоскоростной поступательной неравновесности в бимодальной ударной волне // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2012. № 2. С. 108–116.
9. Kuznetsov M. M., Kuleshova Yu. D. Increase in rates of Kinetic Processes inside the Bimodal Hypersonic Shock Wave // Heat Transfer Research. 2012. Vol. 43. Iss. 3. P. 228–236. DOI: 10.1615/HeatTransRes.v43.i3.30.
10. Кузнецов М. М., Смотров Л. В. Аналитические свойства эффекта высокоскоростной поступательной неравновесности // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2013. № 3. С. 66–73.
11. Analytical models of high velocity non-equilibrium of polyatomic gas mixtures / Kuznetsov M. M., Kuleshova Yu. D., Reshetnikova Yu. G., Smotrova L. V. // AIP Conference Proceedings. 2018. Vol. 1959. Iss. 1. P. 060011. DOI: 10.1063/1.5034672.
12. Распределение молекулярных скоростей во фронте ударной волны в газовых смесях / Генич А. П., Куликов С. В., Манелис Г. Б., Черешнев С. Л. // Известия Академии наук СССР. Механика жидкости и газа. 1990. № 2. С. 144–150.
13. Генич А. П., Куликов С. В., Манелис Г. Б., Черешнев С. Л. Поступательная релаксация в ударных волнах в газах / Препринт. Черноголовка: ОИХФ АН СССР, 1991. 68 с.
14. Осипов А. И. Релаксационные процессы в газах. I. Неравновесное распределение энергии по поступательным степеням свободы // Физика горения и взрыва. 1966. № 4. С. 42–61.
15. Bird G. A. Shock wave structure in gas mixtures // Rarefied Gas Dynamics: Proceedings of 14-th International Symposium. Vol. 1 / ed. H. Oguchi. Tokio: University of Tokio Press, 1984. P. 175–182.
16. Куликов С. В., Терновая О. Н., Черешнев С. Л. Специфика поступательной неравновесности во фронте ударной волны в однокомпонентном газе // Химическая физика. 1993. Т. 12. № 3. С. 340–342.
17. Куликов С. В., Терновая О. Н., Черешнев С. Л. Специфика эволюции распределения молекул однокомпонентного газа по относительным скоростям во фронте УВ // Физика горения и взрыва. 1994. Т. 30. № 4. С. 140–144.
18. Додулад О. И., Клосс Ю. Ю., Черемисин Ф. Г. Расчеты структуры ударной волны в смеси газов на основе решения уравнения Больцмана // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2013. Т. 14. Вып. 1 [Электронный ресурс]. URL: <http://www.chemphys.edu.ru/pdf/2013-07-08-001.pdf> (дата обращения: 20.06.2021).
19. Зельдович Я. Б., Генич А. П., Манелис Г. Б. Особенности поступательной релаксации во фронте ударной волны в газовых смесях // Доклады Академии наук СССР. 1979. Т. 248. № 2. С. 349–351.

REFERENCES

1. Demidov I. V., Kuznetsov M. M., Kuz'min M. K., Kuleshova Yu. D. [Asymptotic approximation for the distribution of pairs of molecules in a shock wave]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-Matematika* [Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics-Mathematics], 2020, no. 4, pp. 86–94. DOI: 10.18384/2310-7251-2020-4-86-94.
2. Tamm I. E. O shirine udarnykh voln bol'shoi intensivnosti [On the width of high-intensity shock waves]. In: *Trudy Fizicheskogo instituta im. P. N. Lebedeva* [Proceedings of the Lebedev Physical Institute of the Russian Academy of Sciences], 1965, vol. XXIX, pp. 239–249.
3. Mott-Smith H. M. The Solution of the Boltzmann Equation for a Shock Wave. In: *Physical Review*, 1951, vol. 82, p. 885. DOI: 10.1103/PhysRev.82.885.

4. Bashlykov A. M., Velikodnyi V. Yu. [Structure of shock waves in the gas mixture]. In: *Zhurnal tekhnicheskoi fiziki* [Journal of Technical Physics], 1991, vol. 61, no. 8, pp. 33–42.
5. Candler G. V., Nijhawan S., Bose D. A multiple translational temperature gas dynamics model. In: *Physics of Fluids*, 1994, vol. 6, no. 11, pp. 3776–3786. DOI: 10.1063/1.868367.
6. Riesco-Chueca P., Fernandez-Feria R., Fernandez de la Mora J. Nonlinearities in the interspecies transfer of moment and energy for disparate-mass gas mixtures and shock wave structure. In: Boffi V., Cercignani C., eds. *Proceedings of the 15-th International Symposium on Rarefied Gas Dynamics (June 16-20, 1986, Grado, Italy)*. Vol. 1. Stuttgart, B. G. Teubner Publ., 1986, pp. 283–292.
7. Holway L. H., Jr. Kinetic Theory of Shock structure using an ellipsoidal distribution function. In: de Leeuw J. H., ed. *Rarefied Gas Dynamics: Proceedings of the Fourth International Symposium*. Vol. 1. New York, Academic Press Publ., 1965, pp. 193–215.
8. Kuznetsov M. M., Kuleshova Yu. D., Smotrova L. V. [On the increase of the kinetic processes rates in Tamm-Mott-Smith shock wave model]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika* [Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics-Mathematics], 2012, no. 2, pp. 108–116.
9. Kuznetsov M. M., Kuleshova Yu. D. Increase in rates of Kinetic Processes inside the Bimodal Hypersonic Shock Wave. In: *Heat Transfer Research*, 2012, vol. 43, iss. 3, pp. 228–236. DOI: 10.1615/HeatTransRes.v43.i3.30.
10. Kuznetsov M. M., Smotrova L. V. [Analytical qualities of highvelocity translational nonequilibrium in shock wave]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika* [Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics-Mathematics], 2013, no. 3, pp. 66–73.
11. Kuznetsov M. M., Kuleshova Yu. D., Reshetnikova Yu. G., Smotrova L. V. Analytical models of high velocity non-equilibrium of polyatomic gas mixtures. In: *AIP Conference Proceedings*, 2018, vol. 1959, iss. 1, pp. 060011. DOI: 10.1063/1.5034672.
12. Genich A. P., Kulikov S. V., Manelis G. B., Chereshev S. L. [Distribution of molecular velocities in the shock front in gas mixtures]. In: *Izvestiya Akademii nauk SSSR. Mekhanika zhidkosti i gaza* [Fluid Dynamics], 1990, no. 2, pp. 144–150.
13. Genich A. P., Kulikov S. V., Manelis G. B., Chereshev S. L. *Postupatel'naya relaksatsiya v udarnykh volnakh v gazakh* [Translational relaxation in shock waves in gases]. Chernogolovka, OIKHF ANSSSR Publ., 1991. 68 p.
14. Osipov A. I. [Relaxation processes in gases. I. Nonequilibrium energy distribution over translational degrees of freedom]. In: *Fizika gorennya i vzryva* [Combustion, Explosion, and Shock Waves], 1966, no. 4, pp. 42–61.
15. Bird G. A. Shock wave structure in gas mixtures. In: Oguchi H., ed. *Rarefied Gas Dynamics: Proceedings of 14-th International Symposium*. Vol. 1. Tokio, University of Tokio Press Publ., 1984, pp. 175–182.
16. Kulikov S. V., Ternovaya O. N., Chereshev S. L. [Specificity of translational nonequilibrium in the shock front in a one-component gas]. In: *Khimicheskaya fizika* [Soviet Journal of Chemical Physics], 1993, vol. 12, no. 3, pp. 340–342.
17. Kulikov S. V., Ternovaya O. N., Chereshev S. L. [Specificity of the evolution of the distribution of molecules of one-component gas over the relative velocities in the shock front]. In: *Fizika gorennya i vzryva* [Combustion, Explosion, and Shock Waves], 1994, vol. 30, no. 4, pp. 140–144.
18. Dodulad O. I., Kloss Yu. Yu., Tceremissin F. G. [Computations of shock wave structure in gas mixture on the base of the Boltzmann equation]. In: *Physico-khimicheskaya*

- kinetika v gazovoy dinamike* [Physical-Chemical Kinetics in Gas Dynamics], 2013, vol. 14, iss. 1. Available at: <http://chemphys.edu.ru/media/published/5.pdf> (accessed: 20.06.2021).
19. Zel'dovich Ya. B., Genich A. P., Manelis G. B. [Features of translational relaxation in the shock wave front in gaseous mixtures]. In: *Doklady Akademii nauk SSSR* [Proceedings of the USSR Academy of Sciences], 1979, vol. 248, no. 2, pp. 349–351.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Кузнецов Михаил Михайлович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической физики Московского государственного областного университета;
e-mail: kuznets-omn@yandex.ru;

Кулешова Юлия Дмитриевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей алгебры, элементарной математики и методики преподавания математики Московского государственного областного университета;
e-mail: juliaybogdanova@mail.ru.

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Mihail M. Kuznetsov – Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Department of Theoretical Physics, Moscow Region State University;
e-mail: kuznets-omn@yandex.ru;

Yuliya D. Kuleshova – Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Prof., Department of Higher Algebra, Elementary Mathematics and Methods of Teaching Mathematics, Moscow Region State University;
e-mail: juliaybogdanova@mail.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Кузнецов М. М., Кулешова Ю. Д. Асимптотическое значение эффекта высокоскоростного перехлеста в ударно-сжатой смеси газов // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2021. № 3. С. 39–56.
DOI: 10.18384/2310-7251-2021-3-39-56

FOR CITATION

Kuznetsov M. M., Kuleshova Ju. D. Asymptotic high-speed overshoot effect value in a shock-compressed gas mixture. In: *Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics-Mathematics*, 2021, no. 3, pp. 39–56.
DOI: 10.18384/2310-7251-2021-3-39-56

УДК 538.958

DOI: 10.18384/2310-7251-2021-3-57-69

ТЕРАГЕРЦОВЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК РАССЕИВАЮЩЕЙ И ПОГЛОЩАЮЩЕЙ СТРУКТУРЫ

Шампаров Е. Ю., Бугримов А. Л., Родэ С. В., Жагрина И. Н.

Российский государственный университет имени А. Н. Косыгина (Технологии.

Дизайн. Искусство)

117997, г. Москва, ул. Садовническая, д. 33, Российская Федерация

Аннотация

Цель работы: определение взаимосвязи между параметрами структуры материала и показателями оптических свойств составляющих его веществ, с одной стороны, и характеристиками его рассеяния и поглощения – с другой.

Процедура и методы. Терагерцовые спектрально-избирательные измерения пропускания пакетов тонких диэлектрических мембран с периодически модулированной толщиной в зависимости от числа слоёв в пакете.

Результаты. Разработана методика измерения глубины рассеяния и глубины проникновения излучения в вещество рассеивающе-поглощающей диэлектрической структуры.

Теоретическая и/или практическая значимость. При описании рассеяния электромагнитного излучения в диэлектрической структуре справедливо макроскопическое волновое приближение.

Ключевые слова: терагерцовое рассеяние и поглощение, периодическая диэлектрическая структура

TERAHERTZ MEASUREMENTS OF SCATTERING AND ABSORBING STRUCTURE CHARACTERISTICS

E. Shamparov, A. Bugrimov, S. Rode, I. Zhagrina

Kosygin State University of Russia

ul. Sadovnicheskaya 33, Moscow 117997, Russian Federation

Abstract

Aim. The purpose is to determine the relationship between the material structure parameters and the optical properties of its constituent substances on the one hand and its scattering and absorption characteristics on the other hand.

Methodology. Use is made of terahertz spectral-selective transmission measurements of packets of thin dielectric webs with periodically modulated thickness (fabrics) depending on the number of layers in the packet.

Results. A method for measuring the scattering depth and the penetration depth of radiation into the substance of the scattering and absorbing dielectric structure is developed.

Research implications. When describing the scattering of electromagnetic radiation in a dielectric structure, the macroscopic wave approximation is valid.

Keywords: terahertz scattering and absorption, periodic dielectric structure.

Введение

Измерения свойств рассеивающих и поглощающих электромагнитное излучение структур обычно сложны для реализации. Для рассеяния характерный размер элементов структуры должен быть сравним с длиной волны излучения или превышать её. В видимом и ближнем инфракрасном диапазонах из-за малых размеров элементов структуры имеются большие сложности, связанные с приготовлением опытных образцов и измерением их характеристик. В сверхвысокочастотном диапазоне, наоборот, размеры образцов очень велики, вследствие чего возникают сложности с работой в оптическом приближении. Наиболее удобен терагерцовый диапазон, в котором и выполнены обсуждаемые в настоящей работе измерения. Но и в этом диапазоне имеются определённые сложности, обусловленные некоторым ограничением возможностей измерительной техники. Поэтому измерения выполнены с учётом указанных особенностей оборудования и с подбором оптимальных образцов.

По логике, для измерений стоило бы взять некоторую квазислучайную структуру. Однако тогда дополнительные сложности возникли бы с измерением характеристик структуры и меры её хаотичности. На первом этапе в работе исследуется регулярная структура, параметры которой легко измеримы, а способности рассеивать излучение – известны. Согласно второму началу термодинамики любые отклонения от идеальности структуры увеличивают случайную составляющую рассеяния. Поэтому для исследований были выбраны достаточно неидеальные структуры и схема измерений построена так, чтобы вклад случайной составляющей умножался.

Исследованию рассеяния и поглощения (прежде всего, в видимом диапазоне излучения) посвящено достаточно большое количество работ. Однако в малом числе из них рассмотрена роль структуры. Значительное внимание уделено математическим моделям. Исследованию природы рассеяния посвящены редкие работы [1; 2]. В большинстве случаев используют ультраквантовое или однофотонное приближение. Стоит отметить, что согласно основополагающему принципу корпускулярно-волнового дуализма в процессе распространения электромагнитное излучение ведёт себя как волна и только в процессах испускания и поглощения как элементарная порция. В общем случае применение к процессам рассеяния однофотонного приближения представляется недостаточно обоснованным. Оно работает, когда речь идёт о поглощении и последующем испускании. В настоящей работе речь идёт о диэлектрическом рассеянии, то есть о макроскопических свойствах составляющей структуру среды, характеризуемой показателями преломления и поглощения. Эту область исследования знаний принято называть спектроскопией конденсированного состояния. Рассеяние в рассматриваемом случае обусловлено не вероятностью взаимодействия излучения со средой, а наличием и формой границы двух сред с различной оптической плотностью.

Для измерений использовался охлаждаемый детектор-спектрометр [3], работающий на циклотронном резонансном поглощении в InSb [4]. Разработанный прибор выполнен в виде вставки в стандартный сосуд Дьюара [5], предназначенный для транспортировки жидкого гелия. На окунаемом в гелий конце вставки собран сверхпроводящий электромагнит броневого типа, в зазоре которого на оптической оси внутри интегрирующей поступающее излучение камеры расположен приёмный кристалл InSb. Помещённый в магнитное поле с индукцией B кристалл как фоторезистор [6] регистрирует излучение избирательно вблизи резонансной частоты вращения электронов [4]:

$$f = eB / (2\pi m^*),$$

где m^* – эффективная масса электронов в InSb (в 70 раз меньшая массы электрона) на переходе между нулевым и первым уровнями Ландау.

Управляющий ток позволяет создавать в электромагните поле до 2,5 Тл и избирательно регистрировать излучение в полосе от 1 до 5 ТГц (с длиной волны от 300 до 60 мкм). Излучение направляется на входное окно прибора диаметром 14 мм, откуда по сверхразмерному круглому волноводу подаётся в охлаждаемую часть, где с помощью двухступенчатой рупорной антенны собирается внутрь камеры с приёмным кристаллом. Для максимального быстродействия и чувствительной регистрации выполнена автономная схема предусиления сигнала с приёмного кристалла, включающая охлаждаемый в гелии согласующий каскад. Общим недостатком подобного типа спектрометров является невысокая спектральная избирательность. Независимо от резонансной частоты поглощение происходит в полосе шириной около 1,0 ТГц.

Широкополосным источником излучения служило нагретое до 600 °С тело. На базе детектора собрана установка для автоматического измерения терагерцевых спектров пропускания [7; 8]. Программа через управляющее устройство задаёт сканирующий диапазон спектрометра ток электромагнита и по градуировочной характеристике вычисляет частоту поглощения. В установке подаваемое излучение модулируем с помощью прерывателя. Усиленный сигнал с приёмного кристалла и опорный сигнал с прерывателя подаются на соответствующие входы синхронного детектора. Измеренное значение сигнала с кристалла вместе с заданной частотой приёма записывается в компьютерный файл. Измерения зависимости отклика детектора от частоты излучения выполняются дважды: один раз – без образца и второй раз – с образцом, расположенным перпендикулярно оптической оси непосредственно перед входным окном детектора. Разделив по точечно результаты второго измерения на результаты первого, получаем терагерцевый спектр пропускания образца.

Характеристики образцов

В качестве испытуемых структур были выбраны ткани. Ткань – это продукт глубокой технологической обработки. Из исходного сырья – волокон, либо природных, либо полученных искусственно, формируют полуфабрикат – нить. Из нитей ткнут структуры более высокого уровня – ткани различных переплетений.

Все подобранные образцы имеют простейшее полотняное переплетение, состоят из волокон только одного типа (имеют свой собственный химический состав). Параметры структуры образцов собраны в табл. 1.

Таблица 1 / Table 1

Характеристики структуры исследуемых тканей / Characteristics of the structure of the investigated tissues

Характеристика структуры, размерность		Волокнистый состав						
		хлопок	полиамид	лён	полиэфир	шёлк	вискоза	шерсть
Поверхностная плотность M , г/м ²		79	67	200	50	53	72	112
Плотность вещества γ , г/см ³		1,54	1,14	1,50	1,38	1,37	1,53	1,31
Толщина ткани d , мм		0,28	0,13	0,44	0,08	0,23	0,13	0,34
Число нитей на 100 мм	по основе	335	280	200	300	380	420	180
	по утку	220	445	150	240	290	260	115
Средний период структуры $\langle b \rangle$, мкм		360	275	570	370	300	295	680

Источник: по данным авторов.

В первой серии измерений (рис. 1) получены спектры пропускания образцов этих тканей. Образцы были измерены в равновесном воздушно-сухом состоянии при температуре 20 °С и влажности 40%.

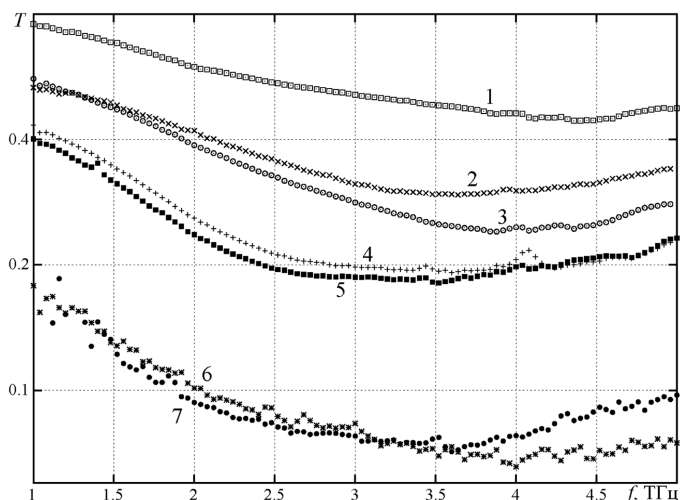


Рис. 1 / Fig. 1. Спектры пропускания тканей: 1 – полиэфирной, 2 – полиамидной, 3 – вискозной, 4 – хлопчатобумажной, 5 – шёлковой, 6 – шерстяной, 7 – льняной / Tissue transmission spectra: 1 – polyester, 2 – polyamide, 3 – viscose, 4 – cotton, 5 – silk, 6 – wool, 7 – linen.

Источник: по данным авторов.

В направлениях перпендикулярно нитям основы и нитям утка чередуются нить, то промежутки между нитями. В этих направлениях толщина слоя вещества (оптическая толщина), через который проходит излучение, меняется периодически. Из-за преломления вещества на выходе из структуры периодически модулированной оказывается фаза, а из-за поглощения вещества – амплитуда электромагнитной волны. Структура служит для излучения двумерной амплитудно-фазовой дифракционной решёткой. Свойства таких решёток подробно описаны [9; 10]. В нашем случае при малой частоте (большой длине волны) в угол зрения детектора попадает только центральный (нулевой, нерассеянный) дифракционный максимум. С ростом частоты доля рассеянной решёткой мощности увеличивается. Однако при некоторой частоте угол первого дифракционного максимума

$$\theta \approx \arcsin(\lambda/l)$$

оказывается меньше угла зрения детектора, и рассеянное решёткой излучение тоже начинает попадать на приёмный элемент и им регистрироваться. Коэффициент пропускания, как мы видим на всех спектрах, достигает минимума и затем начинает увеличиваться вплоть до границы диапазона измерений. Положение минимума пропускания численно соответствует приведённым рассуждениям. Например, для полиамидной ткани минимум соответствует $f = 3,65$ ТГц или $\lambda = 82$ мкм. Угол между нулевым и первым дифракционными максимумами $\theta \approx 17^\circ$ с хорошей точностью равен углу зрения детектора-спектрометра (20°).

Измерения рассеяния и поглощения

Далее были выполнены измерения коэффициентов пропускания в зависимости от толщины рассеивающей среды (числа образцов N ткани в пакете). Для качественных измерений с сильно поглощающими образцами из шёлка, льна и шерсти чувствительность прибора оказалась недостаточной. Результаты измерений для пакетов образцов остальных тканей при частотах 1,5; 2,5; 3,5 и 4,5 ТГц показаны на рис. 2–5.

Углы рассеяния излучения в каждом слое достаточно велики, а доля нерассеянного излучения с каждым слоем быстро (экспоненциально) убывает. Поэтому для насыщения рассеяния достаточно лишь нескольких слоёв ткани. При большем числе слоёв характер распространения излучения становится практически полностью диффузным. Рассеяние перестаёт влиять на изменение коэффициента пропускания.

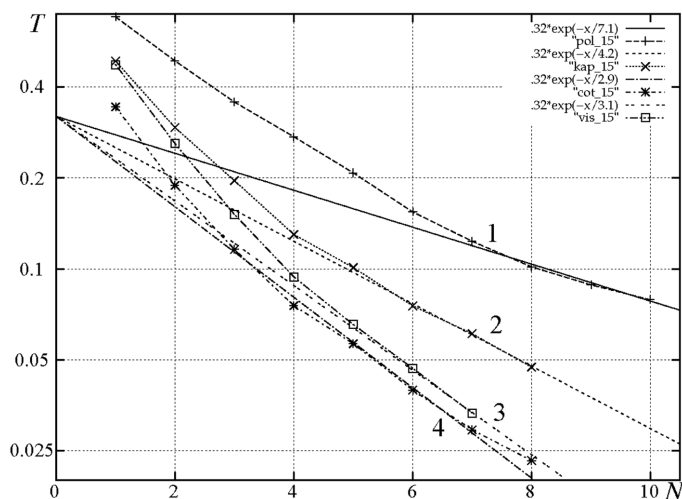


Рис. 2 / Fig. 2. При $f = 1,5$ ТГц пропускание пакетов в зависимости от числа слоёв тканей: 1 – полиэфирной, 2 – полиамидной, 3 – вискозной, 4 – хлопчатобумажной / At $f = 1,5$ THz, packet transmission depending on the number of fabric layers: 1 – polyester, 2 – polyamide, 3 – viscose, 4 – cotton

Источник: по данным авторов.

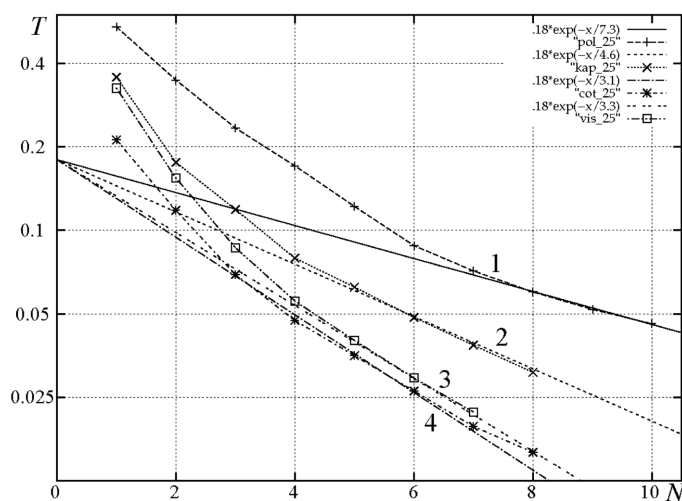


Рис. 3 / Fig. 3. При $f = 2,5$ ТГц пропускание пакетов в зависимости от числа слоёв тканей: 1 – полиэфирной, 2 – полиамидной, 3 – вискозной, 4 – хлопчатобумажной / At $f = 2,5$ THz, packet transmission depending on the number of fabric layers: 1 – polyester, 2 – polyamide, 3 – viscose, 4 – cotton

Источник: по данным авторов.

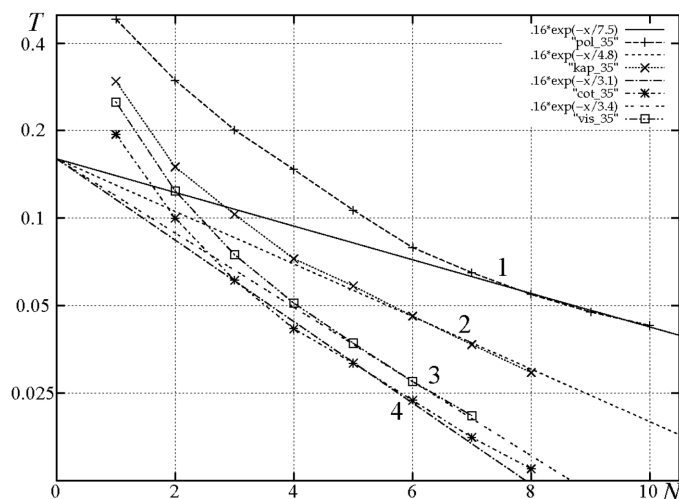


Рис. 4 / Fig. 4. При $f = 3,5$ ТГц пропускание пакетов в зависимости от числа слоёв тканей: 1 – полиэфирной, 2 – полиамидной, 3 – вискозной, 4 – хлопчатобумажной / At $f = 3,5$ THz, packet transmission depending on the number of fabric layers: 1 – polyester, 2 – polyamide, 3 – viscose, 4 – cotton

Источник: по данным авторов.

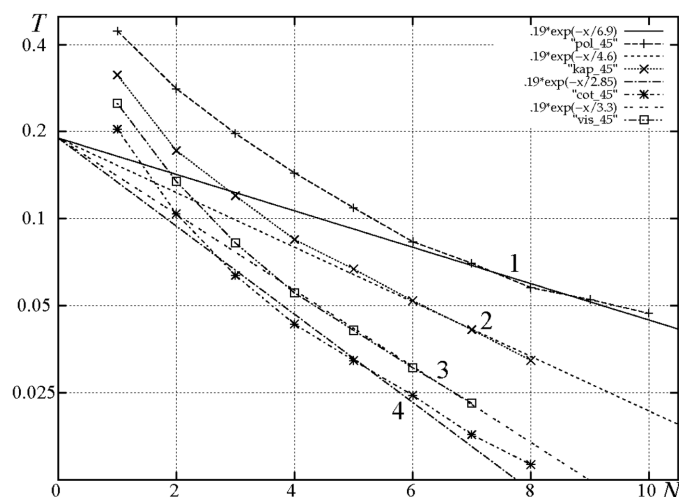


Рис. 5 / Fig. 5. При $f = 4,5$ ТГц пропускание пакетов в зависимости от числа слоев тканей: 1 – полиэфирной, 2 – полиамидной, 3 – вискозной, 4 – хлопчатобумажной / At $f = 4,5$ THz, packet transmission depending on the number of fabric layers: 1 – polyester, 2 – polyamide, 3 – viscose, 4 – cotton.

Источник: по данным авторов.

Обсуждение результатов измерений

Начиная с некоторого числа слоёв тканей, результаты измерений коэффициентов пропускания (в логарифмическом масштабе) легли с хорошей точностью

на одну прямую. Коэффициент пропускания при добавлении следующего слоя уменьшается в одинаковое количество раз. Наблюдается типичное при измерениях прозрачности экспоненциальное уменьшение пропускания в зависимости от толщины материала (закон Бугера).

Надо отметить, что диффузный характер распространения излучения не усложняет картину происходящего. Для любой пространственной компоненты J (пространственной угловой плотности потока энергии) излучения согласно закону Бугера доля поглощаемой мощности dJ/J пропорциональна толщине среды dl , в которой происходит поглощение:

$$dJ / J = -dl / a.$$

Если x – направление распространения мощности, то в перпендикулярных ему направлениях y и z изменения плотности потока излучения не происходит. При этом изменение любой пространственной компоненты в направлении x прямо пропорционально косинусу угла ее отклонения:

$$dJ_x = dJ \cos \alpha,$$

и толщина слоя среды, перпендикулярного направлению распространения, тоже пропорциональна косинусу угла отклонения:

$$dx = dl \cos \alpha,$$

поэтому

$$dJ_x = -J dx / a.$$

Так как все пространственные компоненты плотности потока излучения одинаковы, то и изменения пространственных компонент одинаковы. В направлении распространения затухание одинаково для всех пространственных компонент излучения. Соответственно, для плотности потока излучения в направлении x справедлив закон Бугера:

$$d\Phi_x = -\Phi_x dx / a; \quad \Phi_x = \Phi_{x0} \exp(-x / a),$$

причём при диффузном распространении глубина проникновения излучения a такая же, как при направленном.

Наклон, прямой, экстраполирующей результаты измерений при больших N , равен отношению толщины ткани d к глубине проникновения в неё излучения a :

$$-d(\ln T) / dN = 1 / N_p = d / a,$$

где N_p – число слоёв ткани, на котором мощность излучения уменьшается в e раз.

Однако, фактическая толщина поглощающего слоя вещества зависит от структуры ткани и является её индивидуальной характеристикой. Соответствующую одному слою ткани эффективную толщину поглощающего излучение слоя вещества адекватно можно найти (табл. 1) по соотношению:

$$d_m = M / \gamma,$$

тогда глубина проникновения излучения в вещество:

$$a_m = ad_m / d.$$

Результаты измерений a и a_m тканей приведены в табл. 2.

Таблица 2 / Table 2

Глубина проникновения излучения / Radiation penetration depth

Тип волокна	d , мм	d_m , мкм	Глубина проникновения в образец a , мм при f , ТГц				Глубина проникновения в вещество a_m , мкм при f , ТГц			
			1,5	2,5	3,5	4,5	1,5	2,5	3,5	4,5
Хлопок	0,8	51	0,82	0,86	0,86	0,80	148	158	158	145
Полиамид	0,13	53	0,55	0,60	0,62	0,60	223	244	254	244
Полиэфир	0,08	36	0,57	0,58	0,60	0,55	256	263	270	248
Вискоза	0,13	47	0,40	0,43	0,44	0,43	146	155	160	155

Источник: по данным авторов.

Отметим, что у образцов из хлопка (представляющего собой природную целлюлозу) и вискозы (являющейся химически очищенной целлюлозой) поглощение (глубина проникновения в вещество) оказалось практически одинаковым. Влияния рассеяния излучения в структуре на её поглощение практически не наблюдается. Между тем, как показано ниже, глубина рассеяния структур из хлопка и вискозы отличается почти в 1,5 раза.

Когда число слоёв достаточно велико, со стороны приёмника каждый элемент площади исследуемого образца виден с одинаковой яркостью I . Доля рассеянного образцом излучения, попадающего в угол зрения рупорной антенны, определяется только геометрическими параметрами детектора. Мощность P_u , излучаемая образцом под всеми углами φ внутрь детектора-спектрометра, равна:

$$P_u = IS_0 \int_0^{\pi/2} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi = IS_0 / 2,$$

где S_0 – площадь входного окна детектора.

Тогда внутрь угла зрения рупорной антенны φ_w попадает мощность:

$$P_w = IS_0 \int_0^{\varphi_w} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi = IS_0 \sin^2 \varphi_w / 2 \approx \varphi_w^2 / 2.$$

Доля мощности, собираемая антенной, составляет:

$$T_w \approx \varphi_w^2$$

и, отражаемая от антенны, $R_w \approx 1 - \varphi_w^2$.

При диффузном рассеянии и малом внутреннем поглощении A сквозь образец и обратно от образца идёт по половине направляемого на него излучения. Пусть P_1 – направляемая на образец извне мощность; P_2 – мощность, идущая

от образца к антенне; P_3 – мощность, отражённая от антенны назад к образцу. Тогда:

$$P_2 = (1 - A)P_1 / 2 + P_3 / 2; \quad P_3 = R_w P_2.$$

После исключения P_3 можно получить:

$$P_2 = (1 - A)P_1 / (1 + \varphi_w^2).$$

Принимаемая антенной доля падающей рассеянной мощности составляет:

$$T_s = T_w P_2 / P_1 = (1 - A)\varphi_w^2 / (1 + \varphi_w^2).$$

В пределе малого числа слоёв поглощение становится равным нулю. Это значит, что все экстраполирующие прямые при $N = 0$ должны выходить из одной точки с

$$T_{s0} = \varphi_w^2 / (1 + \varphi_w^2).$$

Согласие этого факта с результатами измерений хорошо видно на рис. 2–5.

Дополнительно по полученным результатам независимым образом можно оценить угол зрения детектора:

$$\varphi_w = \sqrt{T_{s0} / (1 - T_{s0})}.$$

При 3,5 ТГц $\varphi_w \approx 22^\circ$ это вполне соответствует предыдущим оценкам.

С учётом представления о том, как происходит насыщение рассеяния, можно оценить необходимое для этого число слоёв ткани N_s и соответственно глубину рассеяния s . Полученные при разных частотах для образцов тканей значения s и N_s собраны в табл. 3. Там же приведены параметры структуры: толщина ткани d , доля заполненного твёрдым веществом пространства $\delta = d_m/d$ и средний период повторения структуры тканей $\langle l \rangle$.

Таблица 3 / Table 3

Рассеяние структуры / Scattering structure

Тип волокна	d , мм	δ	$\langle l \rangle$, мкм	Число слоёв насыщения рассеяния N_s при f , ТГц				Глубина рассеяния s , мм при f , ТГц			
				1,5	2,5	3,5	4,5	1,5	2,5	3,5	4,5
Хлопок	0,28	0,18	360	1,9	1,6	1,4	1,4	0,53	0,45	0,39	0,39
Полиамид	0,13	0,41	275	2,8	2,4	2,0	2,0	0,36	0,31	0,26	0,26
Полиэфир	0,08	0,45	370	5,6	4,7	4,4	4,3	0,45	0,38	0,35	0,34
Вискоза	0,13	0,36	295	3,0	2,6	2,0	1,9	0,39	0,34	0,26	0,25

Источник: по данным авторов.

Из данных, представленных в табл. 3, видно, что способность рассеивать излучение определяют именно параметры структуры. Для очень близких по параметрам структуры образцов из вискозы и полиамида (капрона) получились при-

мерно равные глубины рассеяния. Рассеяние обусловлено практически только преломлением составляющей структуру среды. Поглощения вискозы и полиамида отличаются в 1,5 раза, а соответствующих различий рассеяния не видно. Слабее всего рассеивает излучение самая менее плотная ($\delta = 0,18$) структура из хлопка. Однако на втором месте самая плотная ($\delta = 0,45$) структура из полиэфира (лавсана). Надо отметить, что соответствующая ткань имеет наименьшую толщину (80 мкм) по сравнению с периодом повторения (370 мкм). Ткань сделана из редких трощёных (не скрученных) нитей. Нити практически распластаны в плоскости полотна. Этой ткани соответствует минимальная переменная составляющая толщины. Поэтому и рассеяние, несмотря на большую плотность, невелико.

Статья поступила в редакцию 19.07.2021 г.

Заключение

Разработана методика измерения характеристик рассеяния и поглощения терагерцового излучения в диэлектрической структуре с контролируемыми параметрами. Установлено, что природа исследованного диэлектрического рассеяния соответствует волновому приближению и принципиально отлична от квантового рассеяния, наблюдаемого обычно в видимом диапазоне. Выявлена практически полная независимость процессов рассеяния и поглощения излучения в структуре, согласующаяся с полагаемой в волновом приближении независимостью показателей преломления и поглощения среды.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кочубей В. И., Башкатов А. Н. Спектроскопия рассеивающих сред. Саратов: Новый ветер, 2014. 87 с.
2. Kokhanovsky A. A. Physical interpretation and accuracy of the Kubelka-Munk theory // Journal of Applied Physics. D: Applied Physics. 2007. Vol. 40. No. 7. P. 2210–2216. DOI: 10.1088/0022-3727/40/7/053.
3. Быстродействующий перестраиваемый детектор терагерцового излучения на циклотронном резонансе в InSb / Богомолов Г. Д., Шампаров Е. Ю., Завьялов В. В., Зотова Е. А. // Приборы и техника эксперимента. 2002. № 1. С. 87–94.
4. Патли Е. Длинноволновая инфракрасная спектроскопия. М.: Мир, 1966. С. 177–191.
5. Роуз-Инс А. Техника низкотемпературного эксперимента. М.: Мир, 1966. 216 с.
6. Aronzon B. A. Tsidilkovskii I. M. Magnetic-Field-Induced Localization of Electrons in Fluctuation Potential Wells of Impurities // Physica Status Solidi. 1990. Vol. 157. No. 1. P. 17–59. DOI: 10.1002/pssb.2221570102.
7. Родэ С. В., Шампаров Е. Ю. Установка для быстрой терагерцовой спектроскопии тонких диэлектрических материалов // Дизайн и технологии. 2010. № 18 (60). С. 47–53.
8. Родэ С. В., Шампаров Е. Ю., Жагина И. Н. Терагерцовые спектры пропускания и отражения тканей // Известия высших учебных заведений. Технология легкой промышленности. 2010. Т. 10. № 4. С. 22–24.
9. Родэ С. В., Шампаров Е. Ю. Дифракция терагерцового электромагнитного излучения в структуре ткани // Дизайн и технологии. 2014. № 39 (81). С. 48–53.
10. Родэ С. В., Шампаров Е. Ю. Исследования свойств тканей в терагерцовом диапазоне электромагнитного излучения М.: РИО МГУДТ, 2015. 114 с.

REFERENCES

1. Kochubei V. I., Bashkatov A. N. *Spektroskopiya rasseivayushchikh sred* [Scattering media spectroscopy]. Saratov, Novyi veter Publ., 2014. 87 p.
2. Kokhanovsky A. A. Physical interpretation and accuracy of the Kubelka-Munk theory. In: *Journal of Applied Physics. D: Applied Physics*, 2007, vol. 40, no. 7, pp. 2210–2216. DOI: 10.1088/0022-3727/40/7/053.
3. Bogomolov G. D., Shamparov E. Yu., Zav'yalov V. V., Zotova E. A. [A fast tunable detector of submillimeter waves on cyclotron resonance in an INSB crystal]. In: *Pribory i tekhnika eksperimenta* [Instruments and Experimental Techniques], 2002, no. 1, pp. 87–94.
4. Patli E. *Dlinnovolnovaya infrakrasnaya spektroskopiya* [Long wave infrared spectroscopy] Moscow, Mir Publ., 1966, pp. 177–191.
5. Rouz-Ins A. *Tekhnika nizkotemperaturnogo eksperimenta* [Low-temperature experiment technique]. Moscow, Mir Publ., 1966. 216 p.
6. Aronzon B. A., Tsidilkovskii I. M. Magnetic-Field-Induced Localization of Electrons in Fluctuation Potential Wells of Impurities. In: *Physica Status Solidi*, 1990, vol. 157, no. 1, pp. 17–59. DOI: 10.1002/pssb.2221570102.
7. Rode S. V., Shamparov E. Yu. [The equipment for fast terahertz spectrometry of thin dielectric samples]. In: *Dizain i tekhnologii* [Design and Technology], 2010, no. 18 (60), pp. 47–53.
8. Rode S. V., Shamparov E. Yu., Zhagrina I. N. [Terahertz transmission and reflection spectra of fabrics]. In: *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Tekhnologiya legkoi promyshlennosti* [The News of higher educational institutions. Technology of Light Industry], 2010, vol. 10, no. 4, pp. 22–24.
9. Rode S. V., Shamparov E. Yu. [Diffraction of terahertz electromagnetic radiation in the tissue structure]. In: *Dizain i tekhnologii* [Design and Technology], 2014, no. 39 (81), pp. 48–53.
10. Rode S. V., Shamparov E. Yu. *Issledovaniya svoystv tkanei v teragertsovom diapazone elektromagnitnogo izlucheniya* [Research of the properties of tissues in the terahertz range of electromagnetic radiation]. Moscow, The Kosygin State University of Russia Publ., 2015. 114 p.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Шампаров Евгений Юрьевич – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры физики Российского государственного университета имени А. Н. Косыгина (Технологии. Дизайн. Искусство);
e-mail: shamparov-eu@rguk.ru;

Бугримов Анатолий Львович – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой физики Российского государственного университета имени А. Н. Косыгина (Технологии. Дизайн. Искусство);
e-mail: bugrimov-al@rguk.ru;

Родэ Сергей Витальевич – доктор технических наук, профессор, профессор кафедры физики Российского государственного университета имени А. Н. Косыгина (Технологии. Дизайн. Искусство);
e-mail: rode-s-v@mail.ru;

Жагрина Инна Николаевна – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры материаловедения Российского государственного университета имени А.Н. Косыгина (Технологии. Дизайн. Искусство);
e-mail: zhagrina-in@rguk.ru.

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Eugene Yu. Shamparov – Cand. Sci. (Engineering), Assoc. Prof., Department of Physics, Kosygin State University of Russia;
e-mail: shamparov-eu@rguk.ru;

Anatoly L. Bugrimov – Dr. Sci. (Engineering), Prof., Departmental Head, Department of Physics, Kosygin State University of Russia;
e-mail: bugrimov-al@rguk.ru;

Sergey V. Rode – Dr. Sci. (Engineering), Prof., Department of Physics, Kosygin State University of Russia;
e-mail: rode-s-v@mail.ru;

Inna N. Zhagrina – Cand. Sci. (Engineering), Assoc. Prof., Department of Material Science, Kosygin State University of Russia;
e-mail: zhagrina-in@rguk.ru.

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Шампаров Е. Ю., Бугримов А. Л., Родэ С. В., Жагрина И. Н. Терагерцовые измерения характеристик рассеивающей и поглощающей структуры // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2021. № 3. С. 57–69.
DOI: 10.18384/2310-7251-2021-3-57-69

FOR CITATION

Shamparov E. Ju., Bugrimov A. L., Rode S. V., Zhagrina I. N. Terahertz measurements of scattering and absorbing structure characteristics. In: Bulletin of the Moscow state regional University. Series: Physics-Mathematics, 2021, no. 3, pp. 57–69.
DOI: 10.18384/2310-7251-2021-3-57-69

УДК 536.331

DOI: 10.18384/2310-7251-2021-3-70-81

К ВОПРОСУ РЕЗОНАНСНОГО НАГРЕВА ПОВЕРХНОСТЕЙ ТЕПЛОВЫМ ЛУЧИСТЫМ ИЗЛУЧЕНИЕМ

Гладков С. О., Годин А. А.

*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
125993, г. Москва, Волоколамское ш., д. 4, Российская Федерация*

Аннотация

Цель: показать, что при действии лучистого солнечного излучения на поверхность металлической пластины будет происходить её резонансный разогрев на частоте $\omega_0 = \frac{2\varepsilon_F}{\hbar}$,

где ω_0 – оптическая частота излучения, ε_F – энергия Ферми, $\hbar$ – постоянная Планка.

Процедура и методы. Методом квазиклассического кинетического уравнения вычислена зависимость коэффициента теплопроводности от координаты x , отсчитываемой вглубь пластины.

Результаты. Приведено аналитическое значение температуры поверхности, нагреваемой резонансным оптическим источником тепла, для различных типов материалов, в частности, для металла, песка и диэлектрика.

Теоретическая и практическая значимость заключается в том, что предложено теоретическое обоснование возможности резонансного разогрева поверхностей лучистым потоком энергии.

Ключевые слова: теплопроводность, кинетическое уравнение, лучистая энергия, уравнение Фурье

RESONANCE HEATING OF SURFACES BY THERMAL SOLAR RADIATION

S. Gladkov, A. Godin

*Moscow Aviation Institute (National Research University)
Volokolamskoe sh. 4, Moscow 125993, Russian Federation*

Abstract

Aim of the article is to show that under the action of raying solar radiation on the surface of the metal plate will occur its resonance heating at the frequency $\omega_0 = \frac{2\varepsilon_F}{\hbar}$, where ω_0 – is the

optical frequency of radiation, ε_F – is an Fermi's energy, $\hbar$ – is Planck constant.

Methodology. Thanks to the method of the kinetic equation, the dependence of the thermal conductivity coefficient on the coordinate counted deep into the plate is calculated x .

Results. The analytical value of the surface temperature heated by a resonance optical heat source for various types of materials, in particular, for metal, sand and dielectric, is given.

Research implications. A theoretical substantiation of the possibility of resonance heating of surfaces by a raying flow of energy is proposed.

Keywords: thermal conductivity, kinetic equation, raying energy, Fourier equation.

Введение

Задача, о которой сейчас пойдёт речь, относится к разряду проблем, связанных с аналитическим вычислением значения температуры поверхности некоторых материалов, подверженных внешнему стационарно действующему лучистому излучению.

В известных нам задачах, связанных с описанием распределения температуры по пластинам (см., к примеру, [1–14] и, в частности, монографию [15], в которой пластинам посвящена целая глава), мы не обнаружили решения той задачи, о которой пойдёт речь в настоящей статье.

Речь идёт о вычислении температуры поверхности абстрактного (пока что) материала под воздействием стационарного источника лучистого теплового солнечного излучения, направленного строго перпендикулярно его поверхности. Предполагаемое условие перпендикулярности потока связано с тем обстоятельством, что в этом случае разогрев поверхности должен быть максимальным. Однако, если всё же считать, что излучение падает под углом α к поверхности, то перпендикулярная составляющая потока Φ просто должна быть умножена на $\cos \alpha$.

Для конкретности мы будем рассматривать плоскую пластину толщиной d , на поверхность которой падает спектр лучистого оптического излучения с широким разбросом частот $\Omega_1 < \Omega < \Omega_2$, где Ω_1 – граничная инфракрасная частота, Ω_2 – граничная ультрафиолетовая частота. Равновесная интенсивность излучения согласно закону Стефана-Больцмана [16] определяется как $I_0 = c\sigma T_0^4$,

где c – скорость света, постоянная Стефана-Больцмана $\sigma = \frac{\pi^2}{30} \frac{k_B^4}{(\hbar c)^3}$, где k_B –

постоянная Больцмана, T_0 – равновесная температура всей внешней от пластины среды.

Основные уравнения и их анализ

Решение задачи мы начнем с закона дисперсии электронов, движущихся вблизи поверхности пластины в приповерхностном слое толщиной ξ , определяемой законом Бутера-Ламберта [17]:

$$I = I_0 e^{-\frac{x}{\xi}}. \quad (1)$$

В случае проводящей пластины, о которой мы говорим, под параметром длины ξ следует подразумевать глубину скин-слоя, определяемую согласно, например, [18], как

$$\xi = \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma_0\Omega}}, \quad (2)$$

где σ_0 – проводимость, которую не следует путать с постоянной Стефана-Больцмана, обозначенную нами, как σ , но без индекса «ноль».

Согласно [19], изменение работы, совершаемой над зарядом e , должно определяться выражением:

$$\delta A = e\delta\varphi, \quad (3)$$

где вариация $\delta\varphi$ – изменение электрического потенциала. После перехода к распределению зарядов с плотностью ρ , то есть с помощью замены $e \rightarrow \rho dV$, мы приходим (подробности вычислений см. в [19]) к выражению для энергии электромагнитного поля в виде $\epsilon_{EM} = \frac{1}{8\pi} \int_V (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2) dV$. При квантовании

амплитуд поля формально полагается (см., например, [20]), что

$$\frac{E^2 + H^2}{8\pi} V = \frac{\hbar\omega}{2}. \quad (4)$$

С другой стороны, энергия электрона во внешнем электромагнитном поле определяется в виде (см. [16]):

$$\epsilon = \frac{p^2}{2m} - e\varphi, \quad (5)$$

где $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ – импульс электрона, m – его масса.

Благодаря дисперсии (5), где фигурирует лишь электрическая составляющая ЭМ поля в виде потенциала φ , которая и будет определять все описываемые далее тепловые свойства материала, мы имели бы право положить $H = 0$. Это условие, однако, совсем не обязательно, поскольку согласно соотношениям (3) и (4), дисперсию электрона (5) в поле действия световой волны на полусегменте $0 \leq x < \xi$ можно представить в виде:

$$\epsilon = \frac{p^2}{2m} + \frac{\hbar\omega(x)}{2}. \quad (6)$$

В силу же закона Бугера-Ламберта (1) электромагнитное поле должно быстро исчезать в глубь пластины (длина волны стремится к бесконечности). Поэтому, согласно (4), положив:

$$\omega = \omega_0 e^{-\frac{x}{\xi}}, \quad (7)$$

где ω_0 – значение оптической частоты из спектра $\Omega_1 < \Omega < \Omega_2$ на поверхности пластины, то есть при $x = 0$, получаем для дисперсии электронов проводимости искомую зависимость:

$$\varepsilon = \varepsilon(p, x) = \frac{p^2}{2m} + \frac{\hbar\omega_0}{2} e^{-\frac{x}{\xi}}. \quad (8)$$

Формула (8) даёт нам возможность, воспользовавшись методом квазиклассического кинетического уравнения (ККУ), вывести уравнение теплопроводности с учётом координатной зависимости коэффициента теплопроводности κ в области поверхностного слоя ξ .

Действительно, записывая стандартным образом ККУ (см., скажем, [21])

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f + \mathbf{F} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = L(f), \quad (9)$$

где $f = f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ – функция распределения электронов, $\mathbf{F}$ – сила, действующая на них, $L(f)$ – интеграл столкновений.

Поскольку мы интересуемся только теплопроводностью то, полагая $\mathbf{F} = 0$, в τ – приближении находим искомую поправку к функции распределения, а именно:

$$f_1 = -\tau_p \left(\frac{\partial f_0}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T \frac{\partial f_0}{\partial T} \right).$$

В стационарном случае отсюда следует, что

$$f_1 = -\tau_p \mathbf{v} \cdot \nabla T \frac{\partial f_0}{\partial T}, \quad (10)$$

где τ_p – время релаксации, связанное взаимодействием электронов с фононами термостата.

Квазиравновесная функция распределения электронов определяется здесь как обобщённое распределение Ферми:

$$f_0 = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon(p, x) - \mu}{T(x, t)}} + 1}, \quad (11)$$

где μ – их химический потенциал, а энергия $\varepsilon(p, x)$ даётся формулой (8).

Следуя определению теплового потока, имеем для него:

$$\mathbf{q} = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \int \varepsilon \mathbf{v} f d^3 p.$$

Подставляя сюда решение (10) с учётом (11), немедленно находим отсюда:

$$\mathbf{q} = -\frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \int \varepsilon \tau_p \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \nabla T) \frac{\partial f_0}{\partial T} d^3 p. \quad (12)$$

Сравнивая с определением Фурье $\mathbf{q} = -\kappa \nabla T$, после усреднения по угловым переменным, получаем для коэффициента теплопроводности следующую простую формулу:

$$\kappa = \frac{2}{3(2\pi\hbar)^3} \int \varepsilon \tau_p \mathbf{v}^2 \frac{\partial f_0}{\partial T} d^3 p. \quad (13)$$

Поскольку речь идёт о вырожденном электронном газе, то имеет место следующее соотношение:

$$\frac{\partial f_0}{\partial T} = -\frac{\varepsilon - \mu}{T} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \approx \frac{\varepsilon - \mu}{T} \delta(\varepsilon - \varepsilon_F). \quad (14)$$

Подставляя (14) в (13), после несложных преобразований после перехода к сферическим координатам в импульсном пространстве и в приближении среднего времени релаксации $\bar{\tau}$ приходим к такой формуле:

$$\kappa = \frac{\bar{\tau}}{9m\hbar^3} \frac{T}{\varepsilon_F} \left(\varepsilon + \frac{\hbar\omega(x)}{2} \right) \int_0^\infty \delta(p^2 - 2m(\varepsilon_F - \hbar\omega(x))) p^4 dp.$$

Простое интегрирование с учётом свойств дельта-функции позволяет нам записать следующий окончательный ответ:

$$\kappa = \frac{2\bar{\tau}\sqrt{m}}{9\sqrt{2}\hbar^3} \frac{T}{\varepsilon_F} \left(\varepsilon + \frac{\hbar\omega(x)}{2} \right) \left(\varepsilon - \frac{\hbar\omega(x)}{2} \right)^{\frac{3}{2}}. \quad (15)$$

Поэтому общее уравнение теплопроводности:

$$c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\kappa \nabla T),$$

где c_p – изобарическая теплоёмкость металла, в стационарном случае должно быть записано как:

$$(\kappa T')' = 0, \quad (16)$$

где «штрих» указывает на дифференцирование по координате x .

Откуда следует, что

$$\kappa T' = C_1. \quad (17)$$

Константу C_1 можно сразу же определить из условия «сшивки» тепловых потоков на границе контакта излучения с пластиной, а именно:

$$\kappa T'(0) = C_1 = c\sigma T_0^4. \quad (18)$$

Подставляя в (17) формулу (15), после простого интегрирования приходим к следующему ответу в квадратурах:

$$\kappa T'(0) = C_1 = c\sigma T_0^4, \quad (19)$$

где $C_{1,2}$ – константы интегрирования, а постоянная $\alpha = \frac{\bar{\tau}\sqrt{m}}{9\sqrt{2}\varepsilon_F\hbar^3}$.

С помощью замены переменной $u = e^{-\frac{x}{\xi}}$ выражение (19) приводится к виду:

$$T^2 = T_0^2 + \frac{4c\sigma T_0^4 \xi}{\alpha} \int_u^1 \frac{du}{u(2\varepsilon_F + \omega_0 u)(2\varepsilon_F - \omega_0 u)^{\frac{3}{2}}}, \quad (20)$$

где мы сразу же учли граничное условие $T(x)|_{x=0} = T_0$.

В приграничной области, которую мы рассматриваем, значение интеграла можно вычислить в непосредственной близости к значению $u \approx 1 - \delta$, где $\delta \ll 1$. В результате из (20) следует, что

$$T^2 = T_0^2 + \frac{4c\sigma T_0^4 x}{\alpha(2\varepsilon_F + \omega_0)(2\varepsilon_F - \omega_0)^{\frac{3}{2}}}, \quad (21)$$

где было использовано приближенное соотношение $\delta = 1 - u = 1 - e^{-\frac{x}{\xi}} \approx \frac{x}{\xi}$.

Здесь удобно ввести параметр $\lambda = \frac{\omega_0}{2\varepsilon_F}$ и коэффициент теплопроводности с учётом явного значения параметра α в виде:

$$\kappa = \frac{T_0 \bar{\tau} \sqrt{m\varepsilon_F^2}}{9\hbar^3}. \quad (22)$$

Если ввести импульс Ферми согласно формуле $p_F = \sqrt{2m\varepsilon_F}$, то формула (22) преобразуется к следующему виду:

$$\kappa = \frac{T_0 \bar{\tau} p_F^3}{18\sqrt{2}m\hbar^3} = \frac{T_0 \bar{\tau} n}{m}, \quad (23)$$

где была введена концентрация электронов согласно формуле:

$$n = \frac{p_F^3}{18\sqrt{2}\hbar^3} = \frac{\pi^3}{18\sqrt{2}\bar{a}^3}.$$

Здесь $\bar{a}$ – среднее межатомное расстояние в металле.

С учётом сказанного формула (21) может быть записана в довольно компактном виде, а именно, как

$$T^2 = T_0^2 + \frac{c\sigma T_0^5 x}{k_B \kappa (1 - \lambda^2) \sqrt{1 - \lambda}}. \quad (24)$$

Как это явно следует из формулы (24), в области приповерхностного слоя при $\lambda \rightarrow 1 \left(\omega_0 \rightarrow \frac{2\varepsilon_F}{\hbar} \right)$ будет иметь место резонансный разогрев металлической по-

верхности, что практически и наблюдается. Действительно, если приложить руку к поверхности тонкого металлического забора, сделанного из профлиста, в жаркий солнечный день, то рука не выдерживает температуры его разогретой поверхности. Этот же эффект относится и к песку, когда в жаркий солнечный день песок сильно перегревается. Здесь эффект тот же самый, что и для металла, но в случае кремниевых песчинок резонанс с выделенной частотой естественного солнечного света происходит из-за её совпадения с частотой собственных колебаний атомов кремния, которая по порядку величины как раз соответствует оптическому диапазону, то есть частоте порядка $10^{15} \frac{1}{c}$.

Исходя из формулы (24), можно оценить температуру перегрева численно. Действительно, имеем из формулы (24):

$$T \approx T_0 \left[1 + \frac{c \sigma T_0^3 x}{2 k_B \kappa (1 - \lambda^2) \sqrt{1 - \lambda}} \right]. \quad (25)$$

Полагая здесь, что

$$c = 3 \cdot 10^{10} \frac{\text{см}}{\text{с}}, \quad \sigma \sim 10^{-15} (\text{СГС}, ^\circ\text{К}), \quad T_0 = 300 \text{ К},$$

$$k_B = 1,38 \cdot 10^{-16} \frac{\text{эрг}}{\text{К}}, \quad \kappa \sim 10^{22} \frac{1}{\text{см} \cdot \text{с}}.$$

получаем:

$$T \approx T_0 \left[1 + \frac{3^4 \cdot 10^{10} \cdot 10^{-15} \cdot 10^6 x}{2 \cdot 1,38 \cdot 10^{-16} \cdot 10^{22} (1 - \lambda^2) \sqrt{1 - \lambda}} \right] \sim T_0 \left[1 + \frac{2,7 \cdot 10^{-4} x}{(1 - \lambda^2) \sqrt{1 - \lambda}} \right]. \quad (26)$$

Выбирая значение λ вблизи единицы, но так, чтобы слагаемое с λ было значительно меньше единицы, мы немедленно получим искомое приращение температуры в приповерхностном слое, соответствующее резонансному перегреву металлической поверхности.

Глядя на оценочную формулу (26), можно задать вполне естественный вопрос, а что же будет, если $\lambda = 1$? Из формулы (25) видно, что резонансная особенность ведёт себя как дробь $\frac{1}{(1 - \lambda)^2}$, наподобие особенностей при магнитных фазовых

переходах. Эта особенность, однако, является «убираемой», если учесть взаимодействие электронов с фононами. При этом следует исходить из выражения $\varepsilon - \frac{\omega}{2}$, которое заменяется на выражение $\varepsilon + i\gamma - \frac{\omega}{2}$, где γ – «затухание», объясняемое электрон – фононным взаимодействием. В результате мы имеем право записать соответствие:

$$\left(\varepsilon - \frac{\omega}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \rightarrow \left(\varepsilon + i\gamma - \frac{\omega}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

и тогда получим:

$$\left(\varepsilon + i\gamma - \frac{\omega}{2}\right)^{-\frac{3}{2}} = \frac{\cos\left(\frac{3\varphi}{2} + 3\pi k\right) - i \sin\left(\frac{3\varphi}{2} + 3\pi k\right)}{\left[\left(\varepsilon - \frac{\omega}{2}\right)^2 + \gamma^2\right]},$$

где k – целое число, а $\varphi = \arg Z = \arctg \left(\frac{\gamma}{\varepsilon - \frac{\omega}{2}} \right)$. Оставив действительную часть

и положив $\varepsilon = \frac{\omega}{2}$ из формулы (24) при $\lambda = 1$, приходим к интересующей нас оценке:

$$T^2 = T_0^2 + \frac{c\sigma T_0^5 x}{2k_B \kappa} \left(\frac{\varepsilon_F}{\hbar \gamma} \right)^{\frac{3}{2}}. \quad (27)$$

Положив здесь $\gamma = 5 \cdot 10^8 \text{ с}^{-1}$, при выбранных выше параметрах будем иметь:

$$T \approx T_0 (1 + 10^5 x)$$

и для $x \sim 10^{-6}$ см мы получаем, что перегрев составит примерно 30°C .

То есть для человеческого тела это становится весьма чувствительным.

Заканчивая настоящее сообщение, стоит обратить внимание также на следующее весьма важное обстоятельство. Казалось бы, что в самом начале статьи мы могли бы ограничиться одной фразой, которая сразу же позволила бы на качественном уровне объяснить описанный выше эффект. Действительно, не нуждается в доказательстве тот факт, что любой резонанс всегда приводит к возрастанию внутренней энергии резонирующей системы, поскольку система является открытой. А это, в свою очередь, означает, что когда речь идёт об ансамбле частиц, то в условиях резонанса их энергия должна автоматически возрасти, что естественным образом приведёт к спонтанному повышению их кинетической энергии, а, следовательно, и температуры. Но при этом возникает другой весьма важный вопрос, на который чисто интуитивная качественная догадка про резонанс не позволяет дать ответ: какому конкретно численному значению должна соответствовать эта частота. Ответ на него можно получить только после аналитического решения поставленной задачи, которое в нашем случае привело к резонансной частоте из оптического спектра $\Omega = \frac{2\varepsilon_F}{\hbar}$. Если, к примеру, взять

энергию Ферми $\varepsilon_F = 1 \text{ эВ} = 11000 \text{ }^\circ\text{К}$, то частота Ω должна соответствовать значению $\frac{2\varepsilon_F}{\hbar} = \frac{2 \cdot 11000 \cdot 1,38 \cdot 10^{-16}}{10^{-27}} = 3,036 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$, что по электромагнитной шкале

приближается к длине волны красного цвета.

Стоит также подчеркнуть, что перегрев пластины будет возможен только в том случае, если пластина очень тонкая (например, порядка миллиметра) и резонансное поглощение потока тепла в поверхностном скин-слое происходит гораздо быстрее, чем теплоперенос в объём пластины, обусловленный теплопроводностью.

Заключение

1. В статье рассмотрен вопрос о стационарном нагреве лучистым излучением поверхности металлической пластины конечной толщины d .

2. Показано, что в процессе этого воздействия поверхность металла начинает сильно нагреваться в области поверхностного слоя глубины $\xi = \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\omega_0}}$.

3. Приведена оценка температуры перегрева и дано объяснение этого явления, как резонансного процесса.

Статья поступила в редакцию 26.05.2021 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Действие излучения большой мощности на металлы / Анисимов С. И., Имас Я. И., Романов Г. С., Ходыко Ю. В. М.: Наука. 1970. 272 с.
2. Григорьев Б. А. Импульсный нагрев излучениями: в 2 ч. М.: Наука. 1974.
3. Рэди Дж. Действие мощного лазерного излучения. М.: Мир, 1974. 486 с.
4. Лыков А. В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 599 с.
5. Аполлонов В. В., Прохоров А. М., Хомич В. Ю., Четкин С. А. Термоупругое воздействие импульсно-периодического излучения на поверхность твёрдого тела // Квантовая электроника. 1982. Т. 9. № 2. С. 343–353.
6. Joseph D. D., Preziosi I. Heat waves // Reviews of Modern Physics. 1989. Vol. 61. Iss. 1. P. 41–73. DOI: 10.1103/RevModPhys.61.41.
7. Joseph D. D., Preziosi I. Addendum to paper “Heat waves” // Reviews of Modern Physics. 1990. Vol. 62. Iss. 2. P. 375–391. DOI: 10.1103/RevModPhys.62.375.
8. Jou D., Casas-Vázquez J., Lebon G. Extended irreversible thermodynamics // Reports on Progress in Physics. 1988. Vol. 51. P. 1105–1179. DOI: 10.1007/978-3-642-97430-4.
9. Dedeurwaerdere T., Casas-Vázquez J., Jour D., Lebon G. Foundations and applications of a mesoscopic thermodynamic theory of fast phenomena // Physical Review E. 1996. Vol. 53. Iss. 1. P. 498–506. DOI: 10.1103/PhysRevE.53.498.
10. Александров А. Н., Голубев Е. В. Нагрев бесконечной металлической пластины импульсным лазерным излучением // Вестник Южно-уральского государственного университета. Серия: Математика, физика, химия. 2005. № 2 (42). Вып. 5. С. 80–84.
11. Гладков Г. В., Крисов Г. А., Синьков Ю. П. Влияние импульсного нестационарного отжига на структурные параметры кремниевых пластин // Электронная промышленность. 1988. Вып. 5 (173). С. 18–19.

12. Конова В. Н., Матыскин В. Н., Мурашкин С. В. Дефектообразование в кремнии при импульсном воздействии некогерентного излучения // Электронная промышленность. 1988. Вып. 5 (173). С. 22–25.
13. Коротких А. Г. Теплопроводность материалов. Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2011. 96 с.
14. Либенсон М. Н., Яковлев Е. Б., Шандыбина Г. Д. Взаимодействие лазерного излучения с веществом (силовая оптика). Ч. 1, 2. СПб.: Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий механики и оптики, 2014.
15. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964. 487 с.
16. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика. Т. 5. М.: Наука. 1976. 583 с.
17. Сивухин Д. В. Общий курс физики. Оптика. Т. 4. М.: Физматлит, 2006. 791 с.
18. Лифшиц И. М., Азбель М. Я., Каганов М. И. Электронная теория металлов. М.: Наука, 1971. 415 с.
19. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. Т. 8. М.: Наука, 1982. 620 с.
20. Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Квантовая электродинамика. Т. 4. М.: Наука, 1980. 702 с.
21. Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Физическая кинетика. Т. 10. М.: Наука, 1979. 527 с.

REFERENCES

1. Anisimov S. I., Imas Ya. I., Romanov G. S., Khodyko Yu. V. *Deistvie izlucheniya bol'shoi moshchnosti na metally* [Effect of high-power radiation on metals]. Moscow, Nauka Publ., 1970. 272 p.
2. Grigor'ev B. A. *Impul'snyi nagrev izluchenyami: v 2 ch.* [Pulsed heating by radiation: in 2 parts]. Moscow, Nauka Publ., 1974.
3. Ready J. *Deistvie moshchnogo lazernogo izlucheniya* [Effects of high-power laser radiation]. Moscow, Mir Publ., 1974. 486 p.
4. Lykov A. V. *Teoriya teploprovodnosti* [Heat conduction theory]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1967. 599 p.
5. Apollonov V. V., Prokhorov A. M., Khomich V. Yu., Chetkin S. A. [Thermoelastic action of pulse-periodic laser radiation on the surface of a solid]. In: *Kvantovaya elektronika* [Soviet Journal of Quantum Electronics], 1982, vol. 9, no. 2, pp. 343–353.
6. Joseph D. D., Preziosi I. Heat waves. In: *Reviews of Modern Physics*, 1989, vol. 61, iss. 1, pp. 41–73. DOI: 10.1103/RevModPhys.61.41.
7. Joseph D. D., Preziosi I. Addendum to paper “Heat waves”. In: *Reviews of Modern Physics*, 1990, vol. 62, iss. 2, pp. 375–391. DOI: 10.1103/RevModPhys.62.375.
8. Jou D., Casas-Vázquez J., Lebon G. Extended irreversible thermodynamics. In: *Reports on Progress in Physics*, 1988, vol. 51, pp. 1105–1179. DOI: 10.1007/978-3-642-97430-4.
9. Dedeurwaerdere T., Casas-Vázquez J., Jour D., Lebon G. Foundations and applications of a mesoscopic thermodynamic theory of fast phenomena. In: *Physical Review E*, 1996, vol. 53, iss. 1, pp. 498–506. DOI: 10.1103/PhysRevE.53.498.
10. Aleksandrov A. N., Golubev E. V. [Heating of an infinite metal plate by pulsed laser radiation]. In: *Vestnik Yuzhno-ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematika, fizika, khimiya* [Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematics. Mechanics. Physics], 2005, no. 2 (42), iss. 5, pp. 80–84.

11. Gladkov G. V., Krisov G. A., Sin'kov Yu. P. [Influence of non-stationary pulsed annealing on the structural parameters of silicon wafers]. In: *Elektronnaya promyshlennost'* [Electronic Industry], 1988, no. 5 (173), pp. 18–19.
12. Konova V. N., Matyskin V. N., Murashkin S. V. [Defect formation in silicon under pulsed action of incoherent radiation]. In: *Elektronnaya promyshlennost'* [Electronic Industry], 1988, no. 5 (173), pp. 22–25.
13. Korotkikh A. G. *Teploprovodnost' materialov* [Thermal conductivity of materials]. Tomsk, Tomsk Polytechnic University Publ., 2011. 96 p.
14. Libenson M. N., Yakovlev E. B., Shandybina G. D. *Vzaimodeistvie lazernogo izlucheniya s veshchestvom (silovaya optika). Ch. 1, 2* [Interaction of laser radiation with matter (power optics). Part 1, 2]. St. Petersburg, ITMO University Publ., 2014.
15. Carslaw H. S., Jaeger J. C. *Teploprovodnost' tverdykh tel* [Conduction of heat in solids]. Moscow, Nauka Publ., 1964. 487 p.
16. Landau L. D., Lifshits E. M. *Statisticheskaya fizika. T. 5* [Statistical physics. Vol. 5]. Moscow, Nauka Publ., 1976. 583 p.
17. Sivukhin D. V. *Obshchii kurs fiziki. Optika. T. 4* [General course of physics. Optics. Vol. 4]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2006. 791 p.
18. Lifshits I. M., Azbel' M. Ya., Kaganov M. I. *Elektronnaya teoriya metallov* [Electron theory of metals]. Moscow, Nauka Publ., 1971. 415 p.
19. Landau L. D., Lifshits E. M. *Elektrodinamika sploshnykh sred. T. 8* [Electrodynamics of continuous media. Vol. 8]. Moscow, Nauka Publ., 1982. 620 p.
20. Berestetskii V. B., Lifshits E. M., Pitaevskii L. P. *Kvantovaya elektrodinamika. T. 4* [Quantum electrodynamics. Vol. 4]. Moscow, Nauka Publ., 1980. 702 p.
21. Lifshits E. M., Pitaevskii L. P. *Fizicheskaya kinetika. T. 10* [Physical kinetics. Vol. 10]. Moscow, Nauka Publ., 1979. 527 p.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Гладков Сергей Октябрьнович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры № 311 «Прикладные программные средства и математические методы» Московского авиационного института (национального исследовательского университета);
e-mail: sglad51@mail.ru;

Годин Александр Александрович – кандидат экономических наук, доцент кафедры №310 «Прикладные программные средства и математические методы» Московского авиационного института (национального исследовательского университета);
e-mail: dedal@cryptopro.ru

INFORMATIONS ABOUT THE AUTHORS

Sergey O. Gladkov – Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Department No. 311 “Applied Software and Mathematical Methods”, Moscow Aviation Institute (National Research University);
e-mail: sglad51@mail.ru;

Alexander A. Godin – Cand. Sci. (Economics), Assoc. Prof., Department No. 310 “Applied Software and Mathematical Methods”, Moscow Aviation Institute (National Research University);
e-mail: dedal@cryptopro.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Гладков С. О., Годин А. А. К вопросу резонансного нагрева поверхностей тепловым лучистым излучением // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2021. №3. С. 70–81.

DOI: 10.18384/2310-7251-2021-3-70-81

FOR CITATION

Gladkov S. O., Godin A. A. Resonance heating of surfaces by thermal radiation. In: *Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics-Mathematics*, 2021, no. 3, pp. 70–81.

DOI: 10.18384/2310-7251-2021-3-70-81



ВЕСТНИК МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ОБЛАСТНОГО УНИВЕРСИТЕТА

Рецензируемый научный журнал «Вестник Московского государственного областного университета» основан в 1998 г.

Сегодня Московским государственным областным университетом выпускается десять научных журналов по разным отраслям науки. Журналы включены в Перечень ВАК (составленный Высшей аттестационной комиссией при Минобрнауки РФ Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание учёной степени кандидата наук, на соискание учёной степени доктора наук). Журналы включены в базу данных Российского индекса научного цитирования (РИНЦ).

Печатные версии журналов зарегистрированы в Федеральной службе по надзору за соблюдением законодательства в сфере массовых коммуникаций и охране культурного наследия.

Полнотекстовые версии журналов доступны в интернете на сайте Вестника Московского государственного областного университета (www.vestnik-mgou.ru), а также на платформах Научной электронной библиотеки (www.elibrary.ru) и Научной электронной библиотеки «КиберЛенинка» (<https://cyberleninka.ru>).

ВЕСТНИК МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ОБЛАСТНОГО УНИВЕРСИТЕТА

СЕРИЯ: ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА
2021. № 3

Над номером работали:

Литературный редактор М.С. Тарасова
Переводчик И.А. Улиткин
Корректор М.С. Тарасова
Компьютерная верстка Н.Н. Жильцов

Адрес редакции:
105005, г. Москва, ул. Радио, д. 10А, офис 98
тел.: (495) 780-09-42 (доб. 6101)
e-mail: info@vestnik-mgou.ru
сайт: www.vestnik-mgou.ru

Формат 70x108/16. Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура «Minion Pro».
Тираж 500 экз. Усл. п. л. 5,25, уч.-изд. л. 4,75.
Подписано в печать: 29.10.2021. Дата выхода в свет: 12.11.2021. Заказ № 2021/10-11.
Отпечатано в МГОУ
105005, г. Москва, ул. Радио, 10А