



ISSN 2072-8387 (print)
ISSN 2310-7251 (online)



Вестник

МОСКОВСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
ОБЛАСТНОГО
УНИВЕРСИТЕТА

Серия

*Физика-
Математика*

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА НАИБОЛЬШЕГО ЗНАЧЕНИЯ ЭФФЕКТА
ВЫСОКОСКОРОСТНОГО ПЕРЕХЛЕСТА В УДАРНОЙ ВОЛНЕ

К ВОПРОСУ ОБ АНАЛИИЧЕСКОМ ВЫЧИСЛЕНИИ
КОЭФФИЦИЕНТА СУХОГО ТРЕНИЯ

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАБОТЫ НЕЙРОСЕТИ
В РАСПОЗНАВАНИИ ОБЪЕКТОВ



2021/ № 2

ВЕСТНИК
МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
ОБЛАСТНОГО УНИВЕРСИТЕТА

ISSN 2072-8387 (print)

2021 / № 2

ISSN 2310-7251 (online)

серия

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА

Рецензируемый научный журнал. Основан в 1998 г.

Журнал «Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика» включён Высшей аттестационной комиссией при Министерстве образования и науки Российской Федерации в «Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук» по следующим научным специальностям: 01.04.02 – Теоретическая физика (физико-математические науки); 01.04.07 – Физика конденсированного состояния (физико-математические науки) (См.: Список журналов на сайте ВАК при Минобрнауки России).

The peer-reviewed journal was founded in 1998

«Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics» is included by the Supreme Certifying Commission of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation into "the List of leading reviewed academic journals and periodicals recommended for publishing in corresponding series basic research thesis results for a Ph.D. Candidate or Doctorate Degree" on the following scientific specialties: 01.04.02 – Theoretical physics (physical-mathematical sciences); 01.04.07 – Physics of the condensed state (physical-mathematical sciences) (See: the online List of journals at the site of the Supreme Certifying Commission of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation).

ISSN 2072-8387 (print)

2021 / № 2

ISSN 2310-7251 (online)

series

PHYSICS AND MATHEMATICS

BULLETIN OF THE MOSCOW REGION
STATE UNIVERSITY

Учредитель журнала

«Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика»

Государственное образовательное учреждение высшего образования Московской области

Московский государственный областной университет

Выходит 4 раза в год

Редакционная коллегия

Главный редактор:

Бугаев А. С. — д. ф.-м. н., академик РАН, Московский физико-технический институт (Государственный университет)

Заместитель главного редактора:

Жачкин В. А. — д. ф.-м. н., проф., Московский государственный областной университет

Ответственный секретарь:

Васильчикова Е. Н. — к. ф.-м. н., доц., Московский государственный областной университет

Члены редакционной коллегии:

Беляев В. В. — д. т. н., проф., Московский государственный областной университет;

Боголюбов Н. Н. — д. ф.-м. н., проф., Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова;

Бугримов А. Л. — д. т. н., проф., Российский государственный университет имени А.Н. Косыгина (Технологии. Дизайн. Искусство);

Гладков С. О. — д. ф.-м. н., проф., Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет);

Емельяненко А. В. — д. ф.-м. н., проф., Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова;

Калашников Е. В. — д. ф.-м. н., проф., Московский государственный областной университет;

Осипов М. А. — д. ф.-м. н., проф., Университет Стратклайд (Великобритания);

Рыбаков Ю. П., — д. ф.-м. н., проф., Российский университет дружбы народов;

Чаругин В. М. — д. ф.-м. н., проф., Московский педагогический государственный университет;

Чигринов В. Г. — д. ф.-м. н., проф., Гонконгский университет науки и технологий (Китай)

ISSN 2072-8387 (print)

ISSN 2310-7251 (online)

Рецензируемый научный журнал «Вестник московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика» публикует статьи по математическим проблемам термодинамики, кинетики и статистической физики; теории конденсированного состояния классических и квантовых, макроскопических и микроскопических систем; изучению различных состояний вещества и физических явлений в них; статистической физике и кинетической теории равновесных и неравновесных систем; теоретическому и экспериментальному исследованию физических свойств неупорядоченных неорганических систем; изучению экспериментального состояния конденсированных веществ и фазовых переходов в них. Журнал адресован ученым, докторантам, аспирантам и всем, интересующимся достижениями физико-математических наук.

Журнал «Вестник Московского государственного областного университета. Серия «Физика-математика» зарегистрирован в Федеральной службе по надзору за соблюдением законодательства в сфере массовых коммуникаций и охране культурного наследия. Регистрационное свидетельство ПИ № ФС 77-73344.

Индекс серии «Физика-математика» по Объединенному каталогу «Пресса России» 40723

Журнал включён в базу данных Российского индекса научного цитирования (РИНЦ), имеет полнотекстовую сетевую версию в Интернете на платформе Научной электронной библиотеки (www.elibrary.ru), с августа 2017 г. на платформе Научной электронной библиотеки «КиберЛенинка» (<https://cyberleninka.ru>), а также на сайте Московского государственного областного университета (www.vestnik-mgou.ru).

При цитировании ссылка на конкретную серию «Вестника Московского государственного областного университета» обязательна. Публикация материалов осуществляется в соответствии с лицензией Creative Commons Attribution 4.0 (CC-BY).

Ответственность за содержание статей несут авторы. Мнение автора может не совпадать с точкой зрения редколлегии серии. Рукописи не возвращаются.

Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. — 2021. — № 2. — 76 с.

© МГОУ, 2021.

© ИИУ МГОУ, 2021.

Адрес Отдела по изданию научного журнала «Вестник Московского государственного областного университета»

г. Москва, ул. Радио, д.10А, офис 98

тел.: (495) 780-09-42 (доб. 6101)

e-mail: info@vestnik-mgou.ru; сайт: www.vestnik-mgou.ru

Founder of journal
«Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics»
Moscow Region State University

————— Issued 4 times a year —————

Editorial board

Editor-in-chief:

A. S. Bugaev – Doctor of Physics and Mathematics, Academician of RAS, Moscow Institute of Physics and Technology (State University)

Deputy editor-in-chief:

V. A. Zhachkin – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Moscow Region State University

Executive secretary:

E. N. Vasilchikova – Ph.D. in Physics and Mathematics, Associate Professor, Moscow Region State University

Members of Editorial Board:

V. V. Belyaev – Doctor of Technical Sciences, Professor, Moscow Region State University;

N. N. Bogolyubov – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Lomonosov Moscow State University;

A. L. Bugrimov – Doctor of Technical Sciences, Professor, Kosygin State University of Russia;

S. O. Gladkov – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Moscow Aviation Institute (National Research University);

A. V. Emelyanenko – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Lomonosov Moscow State University;

E. V. Kalashnikov – Doctor of Physics and Mathematics, Moscow Region State University;

M. A. Osipov – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Strathclyde University (Glasgow, UK);

Yu. P. Rybakov – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, RUDN University;

V. M. Charugin – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Moscow State Pedagogical University;

V. G. Chigrinov – Hong Kong University of Science and Technology (China)

ISSN 2072-8387 (print)

ISSN 2310-7251 (online)

The reviewed scientific journal “Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics” publishes articles on mathematical problems of thermodynamics, kinetics and statistical physics; the theory of the condensed state of classical and quantum, macroscopic and microscopic systems; the study of various states of substance and physical phenomena in them; statistical physics and the kinetic theory of equilibrium and non-equilibrium systems; theoretical and experimental research of physical features of disordered inorganic systems; the study of the experimental state of condensed substances and phase transitions in them. The journal is addressed to scientists, doctoral students, PhD students and everyone interested in the achievements of physical and mathematical sciences.

The series “Physics and Mathematics” of the Bulletin of the Moscow Region State University is registered in Federal service on supervision of legislation observance in sphere of mass communications and cultural heritage protection. The registration certificate ПИ № 00С 77 – 73344.

Index series «Physics and Mathematics» according to the union catalog «Press of Russia» 40723

The journal is included into the database of the Russian Science Citation Index, has a full text network version on the Internet on the platform of Scientific Electronic Library (www.elibrary.ru), and from August 2017 on the platform of the Scientific Electronic Library “CyberLeninka” (<https://cyberleninka.ru>), as well as at the site of the Moscow Region State University (www.vestnik-mgou.ru)

At citing the reference to a particular series of «Bulletin of the Moscow Region State University» is obligatory. Scientific publication of materials is carried out in accordance with the license of Creative Commons Attribution 4.0 (CC-BY).

The authors bear all responsibility for the content of their papers. The opinion of the Editorial Board of the series does not necessarily coincide with that of the author Manuscripts are not returned.

Bulletin of the Moscow State Regional University. Series: Physics and Mathematics. – 2021. – № 2. – 76 p.

© MRSU, 2021.

© Moscow Region State University Editorial Office, 2021.

The Editorial Board address:

Moscow Region State University

10A Radio st., office 98, Moscow, Russia

Phones: (495) 780-09-42 (add. 6101)

e-mail: info@vestnik-mgou.ru; site: www.vestnik-mgou.ru

СОДЕРЖАНИЕ

РАЗДЕЛ I. МАТЕМАТИКА

- Аксёнов К. А., Ключников С. А., Евстафьева С. Е., Калашиников Е. В.*
Компьютерное моделирование работы нейросети в распознавании
объектов6

РАЗДЕЛ II. ФИЗИКА

- Гладков С. О.* К вопросу об аналитическом вычислении коэффициента
сухого трения.18

- Лакунов И. С., Зотов А. А., Емельянов В. А., Барабанова Н. Н.*
Диэлектрические свойства жидкого кристалла 4-Пентил-4'-цианобифенила
в широком диапазоне температур30

- Кузнецов М. М., Кулешова Ю. Д.* Аналитическая оценка наибольшего
значения эффекта высокоскоростного перехлеста в ударной волне.41

- Шампаров Е. Ю., Бугримов А. Л., Родэ С. В., Жагрина И. Н.*
Измерение показателей теплозащитных свойств случайной рассеивающей
структуры52

РАЗДЕЛ III. ТЕОРИЯ И МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ И ВОСПИТАНИЯ

- Хасанов А. С., Зверева А. И.* Графический анализ чувствительности
оптимальных решений задач линейного программирования61

CONTENTS

SECTION I. MATHEMATICS

K. Aksenov, S. Klyuchnikov, S. Evstafyeva, E. Kalashnikov. Computer simulation of neural network operation for object recognition6

SECTION II. PHYSICS

S. Gladkov. Analytical calculation of the dry friction coefficient.18

I. Lakunov, A. Zotov, V. Emelyanov, N. Barabanova. Dielectric properties of a 4-pentil-4'-cyanobiphenyl liquid crystal in a wide temperature range30

M. Kuznetsov, Ju. Kuleshova. Analytical estimation of the highest value of the effect of high-speed overshoot in a shock wave41

E. Shamparov, A. Bugrimov, S. Rode, I. Jagrina. Measurement of thermal protection property metrics of a random scattering structure52

SECTION III. THEORY AND METHODS OF TEACHING AND EDUCATION

A. Khasanov, A. Zvereva. Graphical sensitivity analysis of optimal solutions of linear programming problems61

РАЗДЕЛ I. МАТЕМАТИКА

УДК 004.032.26

DOI: 10.18384/2310-7251-2021-2-6-17

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАБОТЫ НЕЙРОСЕТИ В РАСПОЗНАВАНИИ ОБЪЕКТОВ

Аксёнов К. А., Ключников С. А., Евстафьева С. Е., Калашников Е. В.

*Московский государственный областной университет
141014, Московская область, г. Мытищи, ул. Веры Волошиной, д. 24, Российская
Федерация*

Аннотация

Цель. Построение компьютерной модели работы нейронной сети для распознавания объектов.

Процедура и методы. На основании идей, положенных в основу теории распознавания и теории нейронных сетей, построена модель работы нейросети, предназначенной для распознавания исследуемых отображений с заданной точностью. Для успешной работы нейронной сети привлекались базы данных в открытом доступе с удалённых серверов. Это позволило использовать нейросети в стеснённых условиях (в отсутствии мощных вычислительных машин). Для организации работы и управления нейронной сетью разработана программа на языке Python.

Результаты. Построена нейронная сеть, распознающая исследуемые отображения с заданной точностью. Для управления построенной нейросетью и привлечения массивов баз данных с удалённых серверов разработана программа на языке Python. Продемонстрирован принцип работы нейросети на практике на примере распознавания изучаемых отображений.

Практическая значимость. Модель даёт реальный рецепт построения нейронной сети и использования её на практике в условиях отсутствия мощной вычислительной машины.

Ключевые слова: нейронные сети, математическая модель, библиотеки, программа управления, язык Python

COMPUTER SIMULATION OF NEURAL NETWORK OPERATION FOR OBJECT RECOGNITION

K. Aksenov, S. Klyuchnikov, S. Evstafyeva, E. Kalashnikov

Moscow Region State University

ul. Very Voloshinoy 24, 141014 Mytishchi, Russian Federation

Abstract

Aim. We construct a computer model of a neural network for object recognition.

Methodology. Based on the ideas underlying the theory of recognition and the theory of neural networks, we have constructed a model of neural network operation designed to recognize the studied mappings with a given accuracy. For the successful operation of a neural network, we have used open access databases from remote servers, which makes it possible to use neural networks in cramped conditions (in the absence of powerful computers). A program in Python has been developed to organize and manage the neural network.

Results. A neural network has been constructed that recognizes the studied mappings with a given accuracy. To manage the built neural network and attract database arrays from remote servers, a program in Python has been developed. The principle of neural network operation is demonstrated in practice, using the example of recognition of the studied mappings.

Research implications. The model provides a real recipe for constructing a neural network and using it in practice in the absence of a powerful computer.

Keywords: neural networks, mathematical model, libraries, program for managing the operation of a neural network, Python language

Введение

Нейронная сеть – это математическая модель, построенная по примеру деятельности нервной системы живого организма. Такая искусственная нейронная сеть отображает коллективное поведение взаимодействующих нейронов [3; 7–9] и имеет перспективы дальнейшего развития на основе квантовых явлений в наноструктурах [1].

Искусственная нейронная сеть (ИНС) [7; 8] представляет собой программную реализацию процессов, происходящих в коллективе взаимодействующих нейронов (искусственных). Любому нейрону можно поставить в соответствие функцию состояния γ , и эта функция зависит от особенностей взаимодействия между нейронами в коллективе. Взаимодействующие нейроны образуют нейросеть.

Нейросеть (ИНС) позволяет моделировать процесс обучения, запоминания и распознавания [8; 9]. ИНС является обучаемой системой. Она способна запоминать, сравнивать и воспроизводить на основе полученных данных новую информацию.

Математическая Модель Работы Нейросети

Моделируется деятельность системы распознавания. Распознавание подразумевает, что в исследуемом наборе объектов (в толпе людей и сопровождающих

их вещей), которые отображаются на экран монитора (X), нужно найти и выделить объекты, обладающие вполне конкретными характеристиками. Другими словами, каждому пикселю входного монитора X должен быть поставлен в соответствие пиксель с заданными характеристиками Y на выходном мониторе. Но такая зависимость не является однозначной, поскольку набору пикселей исходного прообраза X может соответствовать не одно, а множество значений из некоторой области значений характеристик (например, разные части цифр от 0 до 9 могут быть покрашены в разные цвета радуги). В таком случае каждому конкретному значению исходной переменной X соответствует некоторое вероятностное распределение зависимой переменной Y . Другими словами, зависимая переменная Y рассматривается как случайная величина. А влияние исходной величины X на зависимую переменную Y «в среднем» выражается через математическое ожидание M следующим образом:

$$M(Y | x) = f(x). \quad (1)$$

Эту связь называют **регрессией** Y на X [4; 5].

Чтобы учесть ситуацию, в которой реальные значения зависимой переменной не всегда совпадают с её условными математическими ожиданиями и могут быть различными при одном и том же значении, объясняющей переменной x , фактическая зависимость должна быть дополнена слагаемым ε , которое, по существу, является случайной величиной и указывает на статистическую суть этой зависимости (1). Тогда связь между зависимой и объясняющей переменной выражают соотношением:

$$Y = M(Y | x) + \varepsilon. \quad (2)$$

Такую связь называют регрессивной моделью или регрессивным уравнением [4].

Нейросети используют как набор входных нейронов (рис. 1), которые активируются с помощью пикселей входного сигнала $\hat{f}: x \rightarrow y$ по распределению x и y одновременно (здесь под x и y понимаются координаты картинки, выраженные в пикселях).

Для характеристики нейронной сети можно ввести функцию состояния:

$$\gamma(x) = \varphi(z_i, w_i, g_i(x)). \quad (3)$$

Этому соотношению соответствует графическое представление формулы (рис. 1):

Здесь φ – активационная функция нейросети (в нашем случае имеющая вид ступеньки); z_i – множество значений [z_i является переменной, несущей в себе все важные значения объясняющей переменной, составляющие функции нейросети, то есть $g_i(x) * W_i$]; $g_i(x)$ – набор нейронов (переменных, полученных на вход, которые могут быть представлены в разном виде, числом, объектом и т. д.); W_i – веса, предназначенные для учёта важности критериев (веса или «якоря», представляют собой важность одних значений над другими).

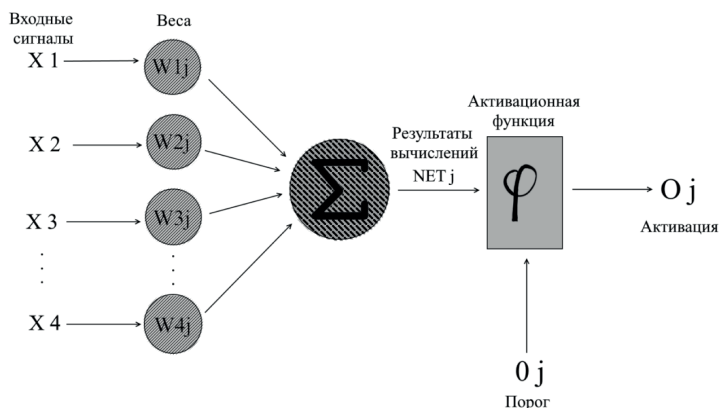


Рис. 1 / Fig. 1. Графическое представление функции $\gamma(x)$ нейросети, состоящей из одного нейрона / Graphical representation of the function $\gamma(x)$ of a neural network consisting of a single neuron.

Входные сигналы $X_1, X_2, \dots, X_n$ являются совокупностью $(g_i(x))$, с весами W_{in} (нейроны с определённой нагрузкой информации), суммой является z_i (набор всех входных сигналов вместе со всеми весами) и активационной функции ϕ , осуществляющей выход за порог и сопутствующим сообщением на экран / The input signals $X_1, X_2, \dots, X_n$ are a set $(g_i(x))$, with weights W_{in} (neurons with a certain load of information), the sum is z_i (the set of all input signals together with all weights) and the activation function ϕ , which goes beyond the threshold and the accompanying message to the screen.

Источник: составлено авторами.

Например, если рассматривать распознавание лица, то цвет волос или глаз будет иметь важное значение при определении личности человека.

Различают однослойные и многослойные нейронные сети (рис. 2).

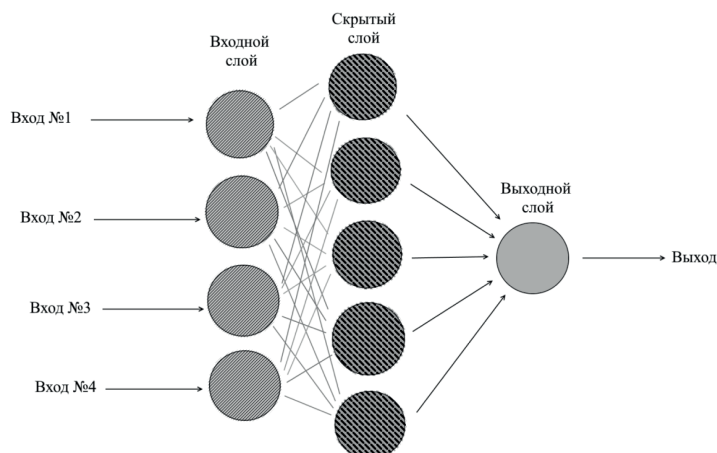


Рис. 2 / Fig. 2. Графическое представление о слоях нейросетей / Graphical representation of neural network layers.

Источник: составлено авторами.

Первым слоем (рис. 2) является набор входных значений (сигналов) и он называется входным слоем, далее идут обработочные слои (осуществляющие набор весов, вычисление значений данных об объекте и, соответственно, обучение нейросети); и последним слоем является выходной, с выводом значений на экране и подписью (найденных) объектов.

Нейросеть, используемая в нашей работе, является многослойной. Функциональная пирамидальная сеть (FPN) [6] используется для построения богатой многомасштабной функциональной пирамиды из одного входного изображения с одним разрешением. Однако, программа не сможет рассматривать полученные изображение масштабом $A \times B$ менее чем 32×32 .

В нашей нейросети активационная функция ϕ принимает значения выхода за порог. В зависимости от того, насколько нам важен результат (при установленном нами пороге, например, на 95% или же на 43%), настолько можно говорить об успешности результатов.

Для получения полной информации об объекте с входного монитора или фотографии необходимо провести разбиение входного изображения на элементарные области (площади). Это предполагает разделение весов (для каждой площади свой набор весов).

Использование концепции разделяемых весов позволяет получать большее количество связей при меньшем количестве (наборе) весов. Имея изображения, каждый нейрон принимает изображение площадью 32×32 , причём каждый из таких фрагментов будет обработан одним набором весов.

Наборы весов, применяемые к таким фрагментам, называют ядрами.

Каждый фрагмент изображения поэлементно умножается на небольшую матрицу весов (ядро, kernel), результат суммируется. Эта сумма является пикселем выходного изображения, которое называется картой признаков.

Отметим, что взвешенная сумма входов ещё пропускается через функцию активации (как в любой другой нейросети). На самом деле это может происходить и в некотором S -ом слое, принципиальной разницы нет. Кроме того, отметим, что, в идеальном случае, через ядро проходят последовательно не разные фрагменты, а параллельно проходит всё изображение через идентичные ядра. Количество ядер (наборов весов) определяется разработчиком и зависит от того, какое количество признаков необходимо выделить. Ещё одна особенность свёрточного слоя в том, что он немного уменьшает изображение за счёт краевых эффектов.

Чередование слоёв позволяет составлять карты признаков. На практике это означает способность распознавания сложных иерархий признаков [10].

Обычно после прохождения нескольких слоёв карта признаков вырождается в вектор или даже скаляр, но таких карт признаков становятся сотни. В таком виде они подаются на один-два слоя полносвязной сети. Выходной слой такой сети может иметь различные функции активации. В простейшем случае функция активации может быть тангенциальной функцией.

Выход сети представляет собой карту объектов 50×50 . Слой свёрток [kernel 3×3] (матрица весов) проходит через изображение. В каждом месте он предска-

зывает 4 $[x1, y1, h1, w1]$ значения для каждого якорного ящика (z_i). Всего выходной слой имеет $50*50*9*4$ (здесь $50*50$ – «площадь» изображения в пикселях, 9 – набор весов, 4 – требуемые нами критерии/значения оценок вероятности выхода). Обычно это представлено в массиве numpy, как `pr.array (2500, 36)`.

Организация нейросети

Цель данной работы: моделирование распознавания работы ИНС, а также её применение на практике.

Для организации работы и управления нейронной сетью разработана программа на языке Python [2]. Для обеспечения работы нейросети необходимо выполнить следующие операции.

Шаг 1. Необходимо создать набор специальных библиотек, обеспечивающих распознавание объектов (официальная английская документация для ImageAI). Она доступна на GitHub¹, а также на своём официальном сайте². На ImageAI³ мы берём пакеты, которые нам необходимо скачать для функционирования нейросети. Устанавливаем набор библиотек, таких как:

- 1) **Tensorflow** : `pip3 install – upgrade tensorflow`;
- 2) **OpenCV** : `pip3 install opencv-python`;
- 3) **Keras** : `pip3 install opencv-python`;
- 4) **ImageAI** : `pip3 install imageai – upgrade`.

Шаг 2. Для того, чтобы установить эти команды (управления библиотеками) нужно зайти в терминал и прописать установку. После установки команд все библиотеки попадают в папку «проект» (см. рис. 3).

Шаг 3. Затем скачиваем и устанавливаем последнюю библиотеку ImageAI (рис. 4).

Шаг 4. После скачивания и установки библиотеки можно приступить к написанию кода.

¹ OlafenwaMoses / ImageAI [Электронный ресурс] // GitHub : [сайт]. URL: <https://github.com/OlafenwaMoses/ImageAI/tree/master/imageai/Detection> (дата обращения: 20.11.2020).

² Ptitov. Самопроизвольное разлогинивание [Электронный ресурс] // Хабр : [сайт]. URL: <https://habr.com/ru/post/7/> (дата обращения: 20.11.2020).

³ Official English Documentation for ImageAI! [Электронный ресурс]. URL: <https://imageai.readthedocs.io/en/latest/index.html> (дата обращения: 20.11.2020).



Рис. 3. / Fig. 3. Весь набор библиотек ImageAI / The entire set of ImageAI libraries
Источник: составлено авторами

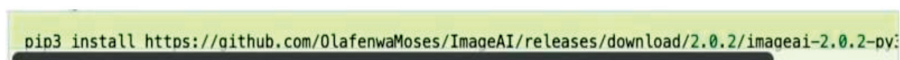


Рис. 4 / Fig. 4. Финальная библиотека ImageAI / The final ImageAI Library.
Источник: составлено авторами.

Шаг 5. Далее следует скачать файл RetinaNet на официальном сайте GitHub. Он позволяет понимать, что конкретно происходит на изображении, и отображать пользователю то, что происходит на данном изображении. RetinaNet вмещает в себя описание множества объектов.

Перечисление всех объектов, которые способна распознать RetinaNet, представлено ниже:

person, bicycle, car, motorcycle, airplane, bus, train, truck, boat, traffic light, fire hydrant, stop_sign, parking meter, bench, bird, cat, dog, horse, sheep, cow, elephant, bear, zebra, giraffe, backpack, umbrella, handbag, tie, suitcase, frisbee, skis, snowboard, sports ball, kite, baseball bat, baseball glove, skateboard, surfboard, tennis racket, bottle, wine glass, cup, fork, knife, spoon, bowl, banana, apple, sandwich, orange, broccoli, carrot, hot dog, pizza, donot, cake, chair, couch,

potted plant, bed, dining table, toilet, tv, laptop, mouse, remote, keyboard, cell phone, microwave, oven, toaster, sink, refrigerator, book, clock, vase, scissors, teddy bear, hair dryer, toothbrush.

Шаг 6. Далее после скачивания модели (фотографии) размещаем её в папку «проект», куда устанавливали все библиотеки (шаги 1–3).

Код программы для управления нейронной сетью

Код программы пишем на языке Python [2]:

1. `from imagery. Detection import Object Detection` // Этот класс позволит обнаруживать некоторые объекты на картинках
2. `import` // это встроенная библиотека в Python и она позволяет работать с операционной системой.
3. `exec_path = os. getcwd()` // создаём новую переменную, называем её `exec_path` и помещаем в неё `os. getcwd()` эта функция позволяет указать путь к проекту. Этот путь позволяет обнаружить объекты на изображении.
4. `detector = Object Detection()` // создаём объект на основе Object Detection
5. `detector.setModelTypeAsRetinaNet()` // данная функция позволяет установить то, что мы используем RetinaNet для поиска объектов на изображении.
6. `detector.setModelPath(os.path.join (exec_path,"resnet50_coco_best_v2.0.1.h5"))` // установка пути к модели.
7. `detector.loadModel()` // загрузка модели.
8. `list=detector.detectObjectsFromImage(input_image=os.path.join(exec_path,"Название любой картинки"))` // создаём список, в который будут помещаться различные обнаружения на картинке.
9. `output_image_path=os.path.join(exec_path," Название любой картинки")` // указать место сохранения полученной фотографии.

Далее сохраняем и переходим к поиску любого изображения (например, в Google). После загрузки изображения оно будет добавлено в папку программы «проект».

Результат работы нейросети



Рис. 5. / Fig. 5. Скриншот рабочей программы / Screenshot of the working program.

Источник: составлено авторами.

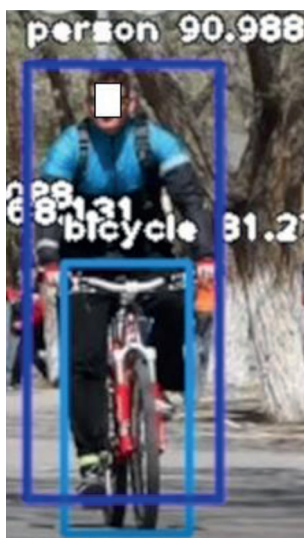


Рис. 6. / Fig. 6. Фрагмент рис. 5. Лицо закрыто намеренно / Fragment of fig. 5. The face is covered intentionally.

Источник: составлено авторами.

Алгоритм выполнен, и на картинке видно, что программа обвела в рамку все найденные объекты и написала процентное соотношение того, кто или что находится на картинке, а также были выведенные проценты, которые показывают, насколько программа уверена в том, кто или что находится на картинке. На картинке были найдены люди и сумки (см. рис. 5 и 6).

Также в коде программы можно прописать дополнительные характеристики, такие как:

10. `Minimum_percentage_probability=30`, // это минимальный процент точности, если выставить процент 90% машина будет искать только те объекты в которых она уверена именно на 90%. Всё, что будет ниже будет записано как неверный ответ.

11. `Display_percentage_probability=False/True`, // Если `False` –отображение процентов указываться не будет, если `True` – отображение процентов указываться будет.

12. `Display_object_name=False/True`, // Если `False` – отображение имени указываться не будет, если `True` – отображение имени указываться будет.

Заключение

В данной работе были рассмотрены элементы теории построения нейросети и принцип её работы на практике. Для запуска программы нейросети была создана рабочая программа и визуальная картинка к ней. Вся программа была разработана на языке программирования Python. Python обладает широким набором возможностей для создания программ с искусственным интеллектом. Были использованы базы ImageAI, которые позволили пользоваться в

ограниченных условиях возможностями нейронных сетей. Построенная искусственная нейронная сеть, распознаёт исследуемые отображения с заданной точностью. Такая модель даёт реальный рецепт построения нейронной сети и использования её на практике в условиях отсутствия мощной вычислительной машины.

Статья поступила 08.06.2021 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алтайский М. В., Капуткина Н. Е., Крылов В. А. Квантовые нейронные сети: современное состояние и перспективы развития // Физика элементарных частиц и атомного ядра. 2014. Т. 45. Вып. 5–6. С. 1824–1864.
2. Бутримов А. Л., Лаврентьев В. В. Python. Быстрое погружение в программирование: учебное пособие. М.: ИИУ МГОУ, 2018. 47 с.
3. Гафаров Ф. М., Галимянов А. Ф. Искусственные Нейронные сети и их приложение: учебное пособие. Казань: Казанский Государственный Университет, 2018. 121 с.
4. Любимцев О. В., Любимцева О. Л. Линейно-регрессивные модели в эконометрике. Нижний Новгород: ННГАСУ, 2016. 44 с.
5. Мазуров Вл. Д. Математические методы распознавания образов: учебное пособие. Екатеринбург: Издательство Уральского государственного университета, 2010. 101 с.
6. Ханеев Д. М., Филатова Н. Н. Пирамидальная сеть для классификации объектов, представленных нечёткими признаками // Известия ЮФУ. Технические науки. 2012. № 9 (134). С. 45–49.
7. Haykin S. Neural Networks and Learning Machines; 3rd edition. New Jersey: Pearson Education, 2009. 936 p.
8. Montavon G., Samek W., Müller Kl.-R. Methods for interpreting and understanding deep neural networks // Digital Signal Processing: A Review Journal. 2018. Vol. 73. P. 1–15. DOI: 10.1016/j.dsp.2017.10.011.
9. Thaler S., Furrer D. Neural Network Modeling // Advanced Materials & Processes. 2005. Vol. 163. Iss. 11. P. 42–46.
10. Liu T., Fang Sh., Zhao Y., Wang P., Zhang J. Implementation of Training Convolutional Neural Networks [Электронный ресурс] // arXiv : [сайт]. URL: <https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1506/1506.01195.pdf> (дата обращения: 20.11.2020).

REFERENCES

1. Altaiskii M. V., Kaputkina N. E., Krylov V. A. [Quantum Neural Networks: Current State and Perspective of Development]. In: *Fizika elementarnykh chastits i atomnogo yadra* [Physics of Elementary Particles and Atomic Nuclei], 2014, vol. 45, no. 5–6, pp. 1824–1864.
2. Bugrimov A. L., Lavrent'ev V. V. *Python. Bystroe pogruzhenie v programmirovaniye* [Python. A Quick Dive into Programming]. Moscow, MRSU Ed. Office Publ., 2018. 47 p.
3. Gafarov F. M., Galimyanov A. F. *Iskusstvennyye Neironnye seti i ikh prilozhenie* [Artificial Neural Networks and Their Applications]. Kazan, Kazan State University Publ., 2018. 121 p.
4. Lyubimtsev O. V., Lyubimtseva O. L. *Lineino-regressivnye modeli v ekonometrike* [Linear Regression Models in Econometrics]. Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod State University of Architecture and Civil Engineering Publ., 2016. 44 p.

5. Mazurov V.I. D. *Matematicheskie metody raspoznavaniya obrazov* [Mathematical Methods for Pattern Recognition]. Ekaterinburg, Ural State University Publ., 2010. 101 p.
6. Khaneev D. M., Filatova N. N. [The pyramidal network for classification of objects, presented by fuzzy features]. In: *Izvestiya YuFU. Tekhnicheskie nauki* [Bulletin of the Southern Federal University. Technical science], 2012, no. 9 (134), pp. 45–49.
7. Haykin S. *Neural Networks and Learning Machines*; 3rd edition. New Jersey, Pearson Education Publ., 2009. 936 p.
8. Montavon G., Samek W., Müller K.I.-R. Methods for interpreting and understanding deep neural networks. In: *Digital Signal Processing: A Review Journal*, 2018, vol. 73, pp. 1–15. DOI: 10.1016/j.dsp.2017.10.011.
9. Thaler S., Furrer D. Neural Network Modeling. In: *Advanced Materials & Processes*, 2005, vol. 163, iss. 11, pp. 42–46.
10. Liu T., Fang Sh., Zhao Y., Wang P., Zhang J. Implementation of Training Convolutional Neural Networks. In: *arXiv*. Available at: <https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1506/1506.01195.pdf> (accessed: 20.11.2020).

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Аксёнов Кирилл Александрович – студент физико-математического факультета Московского государственного областного университета;
e-mail: alexmayercom@mail.ru;

Ключников Семён Александрович – студент физико-математического факультета Московского государственного областного университета;
e-mail: semen.klyuchnikov@mail.ru;

Евстафьева Софья Евгеньевна – студент физико-математического факультета Московского государственного областного университета;
e-mail: e.sony@inbox.ru;

Калашников Евгений Владимирович – доктор физико-математических наук, профессор, кафедры вычислительной математики и методики преподавания информатики Московский государственный областной университет;
e-mail: ekevkalashnikov1@gmail.com

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Kirill A. Aksjonov – Student, Physics and Mathematics Faculty, Moscow Region State University;
e-mail: alexmayercom@mail.ru;

Semen A. Klyuchnikov – Student, Physics and Mathematics Faculty, Moscow Region State University;
e-mail: semen.klyuchnikov@mail.ru;

Sofya E. Evstafyeva – Student, Physics and Mathematics Faculty, Moscow Region State University;
e-mail: e.sony@inbox.ru;

Evgenii V. Kalashnikov – Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Department of Computational Mathematics and Teaching Computer Science, Moscow Region State University;
e-mail: ekevkashnikov1@gmail.com

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Аксёнов К. А., Ключников С. А., Евстафьева С. Е., Калашников Е. В. Компьютерное моделирование работы нейросети в распознавании объектов // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2021. № 2. С. 6–17.
DOI: 10.18384/2310-7251-2021-2-6-17

FOR CITATION

Aksenov K. A., Klyuchnikov S. A., Evstafyeva S. E., Kalashnikov E. V. Computer simulation of neural network operation for object recognition. In: *Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics-Mathematics*, 2021, no. 2, pp. 6–17.
DOI: 10.18384/2310-7251-2021-2-6-17

РАЗДЕЛ II. ФИЗИКА

УДК 53.091

DOI: 10.18384/2310-7251-2021-2-18-29

К ВОПРОСУ ОБ АНАЛИТИЧЕСКОМ ВЫЧИСЛЕНИИ КОЭФФИЦИЕНТА СУХОГО ТРЕНИЯ

Гладков С. О.

*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
125993, г. Москва, Волоколамское ш., д. 4, Российская Федерация*

Аннотация

Цель: исходя из общих принципов теории корреляции, вычислить зависимость коэффициента сухого трения скольжения k в виде функции от коэффициентов Пуассона обоих тел σ , σ' и температуры T .

Процедура и методы. Метод исследования основан на применении температурных функций Грина для неравновесных процессов.

Результаты. Найдена зависимость коэффициента сухого трения от коэффициентов Пуассона обоих тел и температуры.

Теоретическая и/или практическая значимость заключается в том, что предложено математическое описание зависимости коэффициента сухого трения от параметров, то есть функция $k = k(\sigma, \sigma', T)$; это является чрезвычайно важным для практического приложения полученной зависимости.

Ключевые слова: сухое трение, коэффициент Пуассона, температура

ANALYTICAL CALCULATION OF THE DRY FRICTION COEFFICIENT

S. Gladkov

*Moscow Aviation Institute (National Research University)
Volokolamskoe sh. 4, 125993 Moscow, Russian Federation*

Abstract

Aim. Based on the principles of correlation theory, calculate the dependence of the dry friction sliding factor k in the form of function from the Poisson coefficients of both bodies σ , σ' and temperature T .

Methodology. The research method is based on the application of Green's temperature functions for unbalanced processes.

Results. the dependence of the dry friction factor on the Poisson coefficients of both bodies and temperature has been found.

Research implications. A mathematical description of the dry friction factor depending on the parameters, meaning the function $k = k(\sigma, \sigma', T)$; this is extremely important for the practical application of the resulting dependency.

Keywords: dry friction, Poisson coefficient, temperature

Введение

Вопрос, решению которого посвящена настоящая статья, имеет весьма давнее историческое происхождение и берет своё начало с работ Амонтона-Кулона, в которых была впервые введена эмпирическая связь между силой нормального давления тела на поверхность контакта и усилием, необходимым для придания телу ускорения в некотором направлении. При внимательном изучении литературы, посвящённой обсуждению проблем, связанных с физической природой коэффициента трения скольжения k , предлагаются вполне разумные обоснования его физической сущности и возможной параметрической зависимости (см., например, монографии [1–4]). Например, в [1] обсуждается проблема внутреннего трения в металлах и его физика, связанная со взаимодействием электронов, а, скажем, в [4] (см. также [5]), проводится связь между коэффициентом трения k и диссипативными свойствами обоих тел. Некоторые аспекты и теоретические оценки, касающиеся вопросов, связанных с трением, изложены также и в ряде оригинальных статей [6–9]. Мы не станем придерживаться ни одной из отмеченных выше версий, а изложим несколько иной подход, позволяющий непосредственно вычислять величину k в виде функции от температуры T , модулей Юнга обоих тел E и E' , и двух других упругих параметров: σ и σ' , где, соответственно, σ – коэффициент Пуассона тела 1, а σ' – тела 2. Как увидим, полученная зависимость $k(E, E', \sigma, \sigma', T)$ вполне удовлетворительно позволяет рассчитывать численные значения k , согласующиеся с экспериментами по его измерению для различных видов материалов. Как известно из курса физики, линейная связь между силой трения F_{fr} и силой нормального давления N определяется по формуле $F_{fr} = \hat{k}N$, где $\hat{k}$ – тензор сухого трения с компонентами k_{ij} , $i, j = x, y, z$. Выберем систему координат на плоскости контакта обоих тел и пусть $\mathbf{g}$ – ускорение силы тяжести, а $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ – радиус-векторы, проведённые из начала координат, соответственно, к произвольной точке наблюдения A на плоскости контакта и к локальному месту приложения внешней силы $\mathbf{F} \leq F_{fr}$.

Основные вычисления

Рассмотрим коррелятор

$$k_{ijnm} = \frac{\sqrt{\langle F_i G_j F_n G_m \rangle}}{\langle G^2 \rangle}, \quad (1)$$

где угловые скобки означают некоторое усреднение, о котором мы поговорим немного ниже. Как видим, если положить здесь $F_y = k_{yz}G_z$ в частном случае, когда $k_{yzy} = k_{yz} = \mu$, где μ – привычный коэффициент трения, получим тождество $\mu = \mu$. Перепишем (1) несколько иначе, введя более удобное представление. Для этого положим $\mathbf{G} = m\mathbf{g}$, а $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, где $\mathbf{a}$ – ускорение, m – масса тела. Тогда

$$k_{yz} = \frac{\sqrt{\langle a_y^2 g_z^2 \rangle}}{2\langle g_z^2 \rangle}. \quad (2)$$

Множитель $\frac{1}{2}$ появляется ввиду того, что имеются два равноправных и неразличимых коэффициента трения: k_{yz} и k_{xz} . Заметим здесь, что формула (2) относится к вычислению только трения покоя, о котором и будет идти речь в настоящей статье. Согласно основному уравнению статической теории упругости [10] для вектора смещений внутренних точек деформируемых объектов справедливо уравнение:

$$\Delta \mathbf{u} + \frac{1}{1-2\sigma} \text{grad div} \mathbf{u} = \frac{\mathbf{g}}{c_{st}^2}, \quad (3)$$

где скорость поперечных звуковых волн $c_{st} = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\sigma)}}$, E – модуль Юнга,

ρ – плотность тела 1. Полагая в (2), что $\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{u}}$, а ускорение силы тяжести согласно (3) есть:

$$\mathbf{g} = c_{st}^2 \left(\Delta \mathbf{u} + \frac{1}{1-2\sigma} \text{grad div} \mathbf{u} \right), \quad (4)$$

получаем из (2):

$$k_{yz} = \frac{\sqrt{\left\langle \ddot{u}_y^2 \left(\Delta u_z + \frac{1}{1-2\sigma} \frac{\partial}{\partial z} \text{div} \mathbf{u} \right)^2 \right\rangle}}{2c_{st}^2 \left\langle \left(\Delta u_z + \frac{1}{1-2\sigma} \frac{\partial}{\partial z} \text{div} \mathbf{u} \right)^2 \right\rangle}. \quad (5)$$

Перейдём в формуле (4) к методу вторичного квантования [11] и представим вектор смещений $\mathbf{u}$ в виде оператора $\hat{\mathbf{u}}$ согласно, например, [12; 13], как:

$$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{k, \alpha, \nu} \left(\frac{\hbar}{\rho V \omega_{k\alpha}^{(\nu)}} \right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{e}_{\alpha\nu} \left(\hat{b}_{k\alpha\nu} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega_{k\alpha}^{(\nu)} t} + \hat{b}_{k\alpha\nu}^+ e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r} + i\omega_{k\alpha}^{(\nu)} t} \right), \quad (6)$$

где i – мнимая единица, $\hbar$ – постоянная Планка, V – объём тела, индекс $\nu = 1, 2$, $\omega_{k\alpha}^{(1)} = c_{s\alpha} k$ – спектр акустических фононов с поляризацией α , $c_{s\alpha}$ – фазовая

скорость акустических волн, k – волновой вектор, $\omega_s^{(2)} = \omega_0 + \omega^* - \frac{\omega^*}{(1 + \beta(\bar{a}k)^2)}$ –

дисперсия оптических фононов, где ω_0 , ω^* и β – некоторые константы, причём β безразмерна, $\bar{a}$ – некоторое среднее межатомное расстояние, $\mathbf{e}_{\alpha\nu}$ – вектор поляризации, $\hat{b}_{k\alpha\nu}^+ (\hat{b}_{k\alpha\nu})$ – оператор рождения (уничтожения) фонона с поляризацией α и волновым вектором $\mathbf{k}$ ветви спектра ν , индекс $\alpha = t, l$, где латинская буква t характеризует поперечную звуковую акустическую волну, а l – продольную акустическую волну. Мы будем полагать, что направлению вдоль оси z соответствует продольная звуковая волна, а направлению вдоль оси y – поперечная. Причём поперечных волн – две. Тогда

$$\Delta \hat{u}_z(\mathbf{r}, t) = -ie_l \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{\hbar}{2\rho V \omega_{kl}} \right)^{\frac{1}{2}} k^2 \left(\hat{b}_{kl} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega_{kl}t} + \hat{b}_{kl}^+ e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r} + i\omega_{kl}t} \right),$$

$$\hat{u}_y(\mathbf{r}, t) = -2ie_t \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{\hbar}{2\rho V \omega_{kt}} \right)^{\frac{1}{2}} \omega_{kt}^2 \left(\hat{b}_{kt} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega_{kt}t} + \hat{b}_{kt}^+ e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r} + i\omega_{kt}t} \right).$$

Подставляя их в (4) и подразумевая теперь под угловыми скобками усреднение по основному состоянию фононов, то есть при $T = 0$, после несложных преобразований, вводя далее оператор хронологического упорядочения $\hat{T}_t$ (см., например, [14]), можно записать в итоге следующий нелокальный коррелятор трения:

$$\begin{aligned} k_{yz}(t_1 - t_2, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = & \sqrt{\sum_{\mathbf{k}} e_l^2 e_t^2 \omega_{kl}^{-1} \omega_{kt}^3 k^2 \varphi_{1yz}(\mathbf{n}) \left(\tilde{G}_{kt}(t_1 - t_2) e^{ik(r_2 - n)} + \tilde{G}_{kt}(t_2 - t_1) e^{-ik(r_2 - n)} \right) \times} \\ & \times \sum_{\mathbf{k}} k^2 \varphi_{1yz}(\mathbf{n}) \left(\tilde{G}_{kl}(t_1 - t_2) e^{ik(r_2 - n)} + \tilde{G}_{kl}(t_2 - t_1) e^{-ik(r_2 - n)} \right) } \\ = & \frac{c_{st}^2 e_l^2 \sum_{\mathbf{k}} \frac{k^4 \varphi_2(\mathbf{n})}{\omega_{kl}} \left(\tilde{G}_{kl}(t_1 - t_2) e^{ik(r_2 - n)} + \tilde{G}_{kl}(t_2 - t_1) e^{-ik(r_2 - n)} \right)}{c_{st}^2 e_l^2 \sum_{\mathbf{k}} \frac{k^4 \varphi_2(\mathbf{n})}{\omega_{kl}} \left(\tilde{G}_{kl}(t_1 - t_2) e^{ik(r_2 - n)} + \tilde{G}_{kl}(t_2 - t_1) e^{-ik(r_2 - n)} \right)}, \quad (7) \end{aligned}$$

где функции

$$\varphi_{1yz}(\mathbf{n}) = 1 + \frac{n_z^2}{1 - 2\sigma},$$

$$\varphi_2(\mathbf{n}) = 1 + \frac{2n_z^2}{(1 - 2\sigma)} + \frac{n_z^2}{(1 - 2\sigma)^2}.$$

Фигурирующие в (7) обобщённые функции Грина в представлении Гейзенберга имеют вид:

$$\tilde{G}_{k\alpha\nu}(t_1 - t_2) = -i \left\langle \hat{T}_t \left| \tilde{\hat{b}}_{k\alpha\nu}(t_1) \tilde{\hat{b}}_{k\alpha\nu}^+(t_2) \right| \right\rangle, \quad (8)$$

где $\tilde{\hat{b}}_{k\alpha\nu}^+(t) \left(\tilde{\hat{b}}_{k\alpha\nu}(t) \right)$ – операторы рождения (уничтожения) фонона, записанные в представлении Гейзенберга (о чём свидетельствует значок «тильда» над соответствующими величинами (см. [14])). Формула (7) является общей и позволяет нам учесть влияние на коэффициент трения процессов взаимодействия фононов друг с другом, с примесями, неоднородностями, дислокациями, с границами тела и т. п. Если это суммарное взаимодействие обозначить как $\hat{V}$, то полный гамильтониан системы фононов можно представить в следующем аддитивном виде:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}, \quad (9)$$

где $\hat{H}_0 = \frac{\hbar}{N} \sum_{\mathbf{k}, \alpha, \nu} \omega_{k\alpha}^{(\nu)} \hat{b}_{k\alpha\nu}^+ \hat{b}_{k\alpha\nu}$ – основной гамильтониан, а N – количество атомов

в кристалле. Везде далее будем считать, что постоянная Планка $\hbar = 1$. Согласно определению, имеем:

$$\tilde{\hat{b}}_{k\alpha\nu}(t) = e^{i \int_{-\infty}^t \hat{V}(t) dt} \hat{b}_{k\alpha\nu}(t) e^{-i \int_{-\infty}^t \hat{V}(t) dt}, \quad \tilde{\hat{b}}_{k\alpha\nu}^+(t) = e^{i \int_{-\infty}^t \hat{V}(t) dt} \hat{b}_{k\alpha\nu}^+(t) e^{-i \int_{-\infty}^t \hat{V}(t) dt},$$

где $\hat{b}_{k\alpha\nu}(t) = e^{i\hat{H}_0 t} \hat{b}_{k\alpha\nu}(t) e^{-i\hat{H}_0 t}$, $\hat{b}_{k\alpha\nu}^+(t) = e^{i\hat{H}_0 t} \hat{b}_{k\alpha\nu}^+(t) e^{-i\hat{H}_0 t}$ – соответствующие операторы в представлении взаимодействия. Рассмотрим формулу (7) в случае отсутствия взаимодействия и в пределе, когда $t_2 \rightarrow t_1 + 0$. В результате получим:

$$k_{yz}(0, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \frac{\sqrt{\sum_k e_i^2 e_t^2 \omega_{kl}^{-1} \omega_{kt}^3 k^2 \varphi_{1yz}(\mathbf{n}) \left((1 + iG_{0kt}(+0)) e^{ik(r_2 - r_1)} + iG_{0kt}(+0) e^{-ik(r_2 - r_1)} \right) \times \times \sum_k k^2 \varphi_{1yz}(\mathbf{n}) \left((1 + iG_{0kl}(+0)) e^{ik(r_2 - r_1)} + iG_{0kl}(+0) e^{-ik(r_2 - r_1)} \right)}}{c_{st}^2 e_i^2 \sum_k \frac{k^4 \varphi_2(\mathbf{n})}{\omega_{kl}} \left((1 + iG_{0kl}(+0)) e^{ik(r_2 - r_1)} + iG_{0kl}(+0) e^{-ik(r_2 - r_1)} \right)}, \quad (10)$$

где учтено правило коммутации Бозе – операторов

$$\hat{b}_{kt,l} \hat{b}_{kt,l}^+ - \hat{b}_{kt,l}^+ \hat{b}_{kt,l} = \delta_{\alpha\alpha'},$$

где $\alpha, \alpha' = t, l$.

Согласно определению (8) для нулевой функции Грина имеем:

$$G_{0k\alpha\nu}(+0) = -i \left\langle \hat{b}_{k\alpha\nu}^+ \hat{b}_{k\alpha\nu} \right\rangle = -i f_{0k\alpha\nu},$$

где равновесная функция распределения в случае статистики Бозе имеет вид (см. [15]):

$$f_{0kt,l} = \left(e^{\frac{\omega_{kt,l}}{T}} - 1 \right)^{-1}.$$

С физической точки зрения формула (10) вполне понятна, если не учитывается временное запаздывание, то есть считается, что как только мы подействовали силой $\mathbf{F}$ на тело, оно мгновенно начинает двигаться. С точки зрения введенных нами в рассмотрение корреляторов это, конечно, неверно. Однако, в механике и в трибологии, в частности, этим временем всегда пренебрегают и считают, что движение начинается одновременно с силовым воздействием. Таким образом, выражение (10) можно представить в виде:

$$k_{yz}(0, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \frac{\sqrt{\sum_k e_l^2 e_i^2 \omega_{kl}^{-1} \omega_{kt}^3 k^2 \phi_{1yz}(\mathbf{n}) \left((1 + f_{0kt}) e^{ik(r_2 - n)} + f_{0kt} e^{-ik(r_2 - n)} \right) \times \sum_k k^2 \phi_{1yz}(\mathbf{n}) \left((1 + f_{0kl}) e^{ik(r_2 - n)} + f_{0kl} e^{-ik(r_2 - n)} \right)}}{c_{st}^2 e_l^2 \sum_k \frac{k^4 \phi_2(\mathbf{n})}{\omega_{kl}} \left((1 + f_{0kl}) e^{ik(r_2 - n)} + f_{0kl} e^{-ik(r_2 - n)} \right)}, \quad (11)$$

Формула (11), хотя и не учитывает взаимодействие фононов, является довольно общей и позволяет нам вычислить не только сам коэффициент трения, но даже его зависимость от места приложения внешней силы. Если считать, что основной вклад дают фононы с малыми волновыми векторами, то есть, когда выполняется условие $k|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \ll 1$, координатная зависимость исчезает. Однако, в случае массивных тел это неверно. При сравнительно высоких температурах, превышающих, когда речь идет о кристаллических телах, температуру Дебая, функцию распределения можно разложить по степеням $\frac{\omega_{kt,l}}{T} < 1$, то есть:

$$f_{0kt,l} = \left(e^{\frac{\omega_{kt,l}}{T}} - 1 \right)^{-1} \approx \frac{T}{\omega_{kt,l}}.$$

Поэтому, опуская пространственную зависимость коэффициента трения, получим:

$$k_{yz} \approx S - \frac{A}{T} \quad (12)$$

где функция S равна:

$$S = \frac{\sqrt{\sum_k e_l^2 e_i^2 \omega_{kl}^{-1} \omega_{kt}^3 k^2 \phi_{1yz}(\mathbf{n}) \sum_k k^2 \phi_{1yz}(\mathbf{n})}}{c_{st}^2 e_l^2 \sum_k \frac{k^4 \phi_2(\mathbf{n})}{\omega_{kl}}},$$

а функция A равна:

$$A = \frac{\sqrt{\sum_{\mathbf{k}} e_i^2 e_t^2 \omega_{kl}^{-1} \omega_{kt}^3 k^2 \varphi_{1yz}(\mathbf{n}) \sum_{\mathbf{k}} k^2 \varphi_{1yz}(\mathbf{n})}}{c_{st}^2 e_l^2 \sum_{\mathbf{k}} \frac{k^4 \varphi_2(\mathbf{n})}{\omega_{kl}}} \times$$

$$\times \left(2 \frac{\sum_{\mathbf{k}} \frac{k^4 \varphi_2(\mathbf{n})}{\omega_{kl}}}{\sum_{\mathbf{k}} \frac{k^4 \varphi_2(\mathbf{n})}{\omega_{kl}^2}} - \frac{\sum_{\mathbf{k}} \omega_{kl}^{-2} \omega_{kt}^2 (\omega_{kl} + \omega_{kt}) k^2 \varphi_{1yz}(\mathbf{n}) \sum_{\mathbf{k}} k^2 \varphi_{1yz}(\mathbf{n})}{\sum_{\mathbf{k}} \omega_{kl}^{-2} \omega_{kt}^2 k^2 \varphi_{1yz}(\mathbf{n}) \sum_{\mathbf{k}} k^2 \varphi_{1yz}(\mathbf{n})} \right). \quad (13)$$

Переходя в (13) от суммирования по $\mathbf{k}$ к интегрированию, благодаря правилу:

$$\sum_{\mathbf{k}} (...) = \frac{V}{(2\pi)^3} \int (...) d^3 k,$$

где $d^3 k = dk_x dk_y dk_z$, и используя удобную в нашем случае сферическую систему координат, а также правило усреднения по угловой переменной $\mathbf{n}$ в виде:

$$\overline{n_i n_j} = \frac{1}{3} \delta_{ij}, \quad \overline{n_i n_k n_n n_m} = \frac{1}{15} (\delta_{ik} \delta_{nm} + \delta_{in} \delta_{km} + \delta_{im} \delta_{kn}),$$

находим, согласно (13), что

$$S = c_{sl} \frac{\sqrt{\int_0^{k_0} k^4 dk \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} e_i^2 e_t^2 \varphi_{1yz}(\mathbf{n}) \sin \theta d\theta d\varphi \int_0^{k_0} k^4 dk \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_{1yz}(\mathbf{n}) \sin \theta d\theta d\varphi}}{c_{st} \int_0^{k_0} k^4 dk \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} e_l^2 \varphi_2(\mathbf{n}) \sin \theta d\theta d\varphi}, \quad (14)$$

$$A = 5c_{sl}^2 k_0 \frac{\sqrt{\int_0^{k_0} k^4 dk \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} e_i^2 e_t^2 \varphi_{1yz}(\mathbf{n}) \sin \theta d\theta d\varphi \int_0^{k_0} k^4 dk \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_{1yz}(\mathbf{n}) \sin \theta d\theta d\varphi}}{c_{st} \int_0^{k_0} k^4 dk \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} e_l^2 \varphi_2(\mathbf{n}) \sin \theta d\theta d\varphi} \left(1 - \frac{c_{st}}{c_{sl}} \right). \quad (15)$$

При интегрировании по угловым переменным весьма удобно выбрать полярную ось вдоль вектора продольной поляризации $\mathbf{e}_l$. Поэтому, полагая, что $e_l = 1$, а $e_t = \sin \varphi$, после простых вычислений получаем:

$$S(\sigma) = \sqrt{2} \frac{(2 - 3\sigma)(1 - \sigma)}{(3 - 8\sigma + 6\sigma^2)}, \quad (16)$$

$$\begin{aligned}
 A &= 5\sqrt{2}c_{sl}k_0 \frac{(2-3\sigma)(1-2\sigma)}{(3-8\sigma+6\sigma^2)} \left(\frac{c_{sl}}{c_{st}} - 1 \right) = \\
 &= 5\sqrt{2}c_{sl}k_0 \frac{(2-3\sigma)(1-2\sigma)}{(3-8\sigma+6\sigma^2)} \left(\frac{2(1-\sigma)}{1-2\sigma} - 1 \right) = \\
 &= 5\sqrt{2}c_{sl}k_0 \frac{(2-3\sigma)}{(3-8\sigma+6\sigma^2)}. \quad (17)
 \end{aligned}$$

Фигурирующий в (14) – (17) параметр $k_0 = \frac{\pi}{a}$ представляет собой верхний предел интегрирования по первой зоне Бриллюэна.

Общее выражение для коэффициента трения в пренебрежении температурной зависимостью принимает в результате следующий вид:

$$\mu = \frac{1}{2}(S(\sigma) + S(\sigma')), \quad (18)$$

где

$$S(\sigma') = \sqrt{2} \frac{(2-3\sigma')(1-\sigma')}{(3-8\sigma'+6\sigma'^2)}. \quad (19)$$

Оценки по формуле (18) дают:

$\sigma_{\text{чугун}} = 0,25$ $\mu_{\text{чугун}} = 0,964$, $\sigma_{\text{олово}} = 0,3$ $\mu_{\text{олово}} = 0,956$, $\sigma_{\text{латунь}} = 0,38$ $\mu_{\text{латунь}} = 0,912$,
 $\sigma_{\text{медь}} = 0,4$ $\mu_{\text{медь}} = 0,894$, $\sigma_{\text{резина}} = 0,5$ $\mu_{\text{резина}} = 0,7$.

Сравнение с экспериментом

Согласно формуле (17), величина A может быть легко оценена. Действительно, если в качестве примера взять олово и положить, например, что $\sigma_{\text{олово}} = 0,3$, продольная скорость звука $c_{sl} = 3 \cdot 10^5 \frac{\text{см}}{\text{с}}$, $k_0 = \frac{\pi}{a} \approx 10^8 \text{ см}$, постоянная Планка

$\hbar = 10^{-27} \text{ эрг} \cdot \text{с}$, а постоянная Больцмана $k_B = 1,38 \cdot 10^{-16} \frac{\text{эрг}}{\text{°К}}$, то получим, что

$A \approx 217 \text{ °К}$. Поэтому при температурах выше 217 °К должно наблюдаться спадание коэффициента трения скольжения. Согласно формулам (12) и (18) зависимости $\mu(\sigma)$ и $\mu(T)$, в их сравнении с экспериментальными значениями, можно проиллюстрировать в соответствии с рис. 1 и 2.

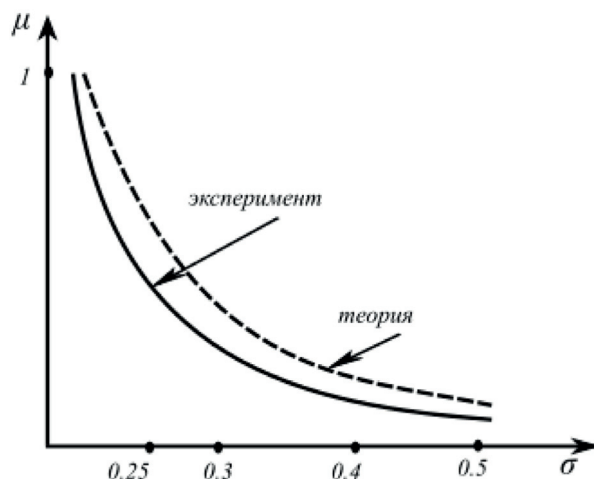


Рис. 1 / Fig. 1. Зависимость коэффициента трения покоя от коэффициента Пуассона контактирующих тел. Видно качественное согласие теории с многочисленными экспериментами по измерению трения покоя / Dependence of the coefficient of friction at rest on the Poisson's ratio of contacting bodies. One can see the qualitative agreement of the theory with numerous experiments on the measurement of static friction.

Источник: составлено автором.

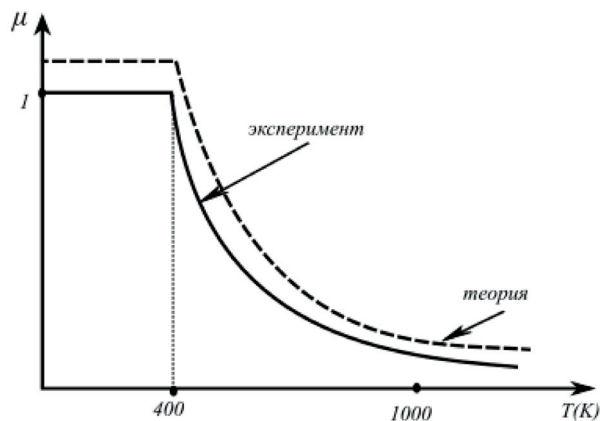


Рис. 2 / Fig. 2. Температурная зависимость коэффициента трения покоя и скольжения. Как следует из рисунка, имеется вполне удовлетворительное, как качественное, так и количественное согласие с экспериментальными данными / Temperature dependence of the coefficient of static friction and sliding. As follows from the figure, there is quite satisfactory, both qualitative and quantitative agreement with the experimental data.

Источник: составлено автором.

Заключение

В заключение работы стоит ещё раз обратить внимание на ряд полученных выше результатов.

1. Предложен довольно общий математический подход для описания коэффициента сухого трения контактирующих твёрдых материалов.
2. Найдена температурная зависимость коэффициента трения и его зависимость от коэффициентов Пуассона обоих тел.
3. Приведено сравнение теоретически полученных результатов с экспериментальными и показано их вполне удовлетворительное согласие.

Статья поступила в редакцию 06.06.2021 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Постников В. С. Внутреннее трение в металлах. М.: Металлургия, 1974. 352 с.
2. Persson B. N. J. Sliding friction physical principles and applications. New York: Springer Verlag, 2000. 516 p.
3. Джеллетт Дж. Х. Трактат по теории трения / пер. Н. А. Зубченко. Ижевск: Институт компьютерных исследований, Регулярная и хаотическая динамика (R&C Dynamics), 2009. 264 с.
4. Буфеев В. А., Буфеев К. В. Внешнее трение и его закономерности. М.: Ленанд, 2014. 328 с.
5. Гладков С. О. О законе Дарси в условиях сохранения энтальпии // Письма в Журнал технической физики. 2002. Т. 28. № 20. С. 50–57.
6. Paranjape B. V. On the Theory of Internal Friction in Metals // Proceedings of the Physical Society. Section A. 1953. Vol. 66. No. 6. P. 572–584. DOI: 10.1088/0370-1298/66/6/309.
7. Mason W. P., Вцmmel H. E. Ultrasonic Attenuation at Low Temperatures for Metals in the Normal and Superconducting States // The Journal of the Acoustical Society of America. 1956. Vol. 28. No. 5. P. 930–941. DOI: 10.1121/1.1908524.
8. Постников В. С. Температурная зависимость внутреннего трения чистых металлов и сплавов // Успехи физических наук. 1958. Т. 66. № 9. С. 43–77. DOI: 10.3367/UFNr.0066.195809b.0043.
9. Persson B. N. J. Elastoplastic contact between randomly rough surfaces // Physical Review Letters. 2001. Vol. 87. Iss. 11. P. 116101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.87.116101.
10. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. VII. Теория упругости. М.: Наука, 1987. 246 с.
11. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. III. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М.: Наука, 1974. 752 с.
12. Займан Дж. Принципы теории твёрдого тела. М.: Мир, 1974. 472 с.
13. Гладков С. О. Физика композитов: термодинамические и диссипативные свойства. М.: Наука, 1999. 330 с.
14. Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Теоретическая физика. Т. IV. Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1980. 704 с.
15. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. V. Статистическая физика. М.: Наука, 1978. 584 с.

REFERENCES

1. Postnikov V. S. *Vnutrennee trenie v metallakh* [Internal friction in metals]. Moscow, Metallurgiya Publ., 1974. 352 p.
2. Persson B. N. J. *Sliding friction physical principles and applications*. New York, Springer Verlag Publ., 2000. 516 p.
3. Jellett J. H. A Treatise on the Theory of Friction (Russ. ed.: Zubchenko N. A., transl. *Traktat po teorii treniya*. Izhevsk, Institut komp'yuternykh issledovaniy, Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika (R&C Dynamics) Publ., 2009. 264 p.).
4. Bufileev V. A., Bufileev K. V. *Vneshnee trenie i ego zakonomernosti* [External friction and its patterns]. Moscow, Lenand Publ., 2014. 328 p.
5. Gladkov S. O. [On Darcy's law under conditions of enthalpy conservation]. In: *Pis'ma v Zhurnal tekhnicheskoi fiziki* [Applied Physics Letters], 2002, vol. 28, no. 20, pp. 50–57.
6. Paranjape B. V. On the Theory of Internal Friction in Metals. In: *Proceedings of the Physical Society. Section A*, 1953, vol. 66, no. 6, pp. 572–584. DOI: 10.1088/0370-1298/66/6/309.
7. Mason W. P., Bummel H. E. Ultrasonic Attenuation at Low Temperatures for Metals in the Normal and Superconducting States. In: *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1956, vol. 28, no. 5, pp. 930–941. DOI: 10.1121/1.1908524.
8. Postnikov V. S. [Temperature dependence of the internal friction of metals and alloys]. In: *Uspekhi fizicheskikh nauk* [Advances in Physical Sciences], 1958, vol. 66, no. 9, pp. 43–77. DOI: 10.3367/UFNr.0066.195809b.0043.
9. Persson B. N. J. Elastoplastic contact between randomly rough surfaces. In: *Physical Review Letters*, 2001, vol. 87, iss. 11, pp. 116101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.87.116101.
10. Landau L. D., Lifshits E. M. *Teoreticheskaya fizika. T. VII. Teoriya uprugosti* [Theoretical physics. T. VII. Elasticity theory]. Moscow, Nauka Publ., 1987. 246 p.
11. Landau L. D., Lifshits E. M. *Teoreticheskaya fizika. T. III. Kvantovaya mekhanika. Nerelyativistskaya teoriya* [Theoretical physics. T. III. Quantum mechanics. Nonrelativistic theory]. Moscow, Nauka Publ., 1974. 752 p.
12. Ziman J. M. *Printsipy teorii tverdogo tela* [Principles of Solid State Theory]. Moscow, Mir Publ., 1974. 472 p.
13. Gladkov S. O. *Fizika kompozitov: termodinamicheskie i dissipativnye svoystva* [Physics of composites: thermodynamic and dissipative properties]. Moscow, Nauka Publ., 1999. 330 p.
14. Berestetskii V. B., Lifshits E. M., Pitaevskii L. P. *Teoreticheskaya fizika. T. IV. Kvantovaya elektrodinamika* [Theoretical physics. T. IV. Quantum electrodynamics]. Moscow, Nauka Publ., 1980. 704 p.
15. Landau L. D., Lifshits E. M. *Teoreticheskaya fizika. T. V. Statisticheskaya fizika* [Theoretical physics. T. V. Statistical physics]. Moscow, Nauka Publ., 1978. 584 p.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Гладков Сергей Октябринович – доктор физико-математических наук, профессор Московского авиационного института (национального исследовательского университета); e-mail: sglad51@mail.ru

INFORMATIONS ABOUT THE AUTHOR

Sergey O. Gladkov – Dr. Sci. (Phys. and Math.), Prof., Moscow Aviation Institute (National Research University); e-mail: sglad51@mail.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Гладков С. О. К вопросу об аналитическом вычислении коэффициента сухого трения // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2021. №2. С. 18–29.

DOI: 10.18384/2310-7251-2021-2-18-29

FOR CITATION

Gladkov S. O. Analytical calculation of the dry friction coefficient. In: *Bulletin of the Moscow state regional University. Series: Physics-Mathematics*, 2021, no. 2, pp. 18–29.

DOI: 10.18384/2310-7251-2021-2-18-29

УДК 537.226.5, 538.956

DOI: 10.18384/2310-7251-2021-2-30-40

ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЖИДКОГО КРИСТАЛЛА 4-ПЕНТИЛ-4'-ЦИАНОБИФЕНИЛА В ШИРОКОМ ДИАПАЗОНЕ ТЕМПЕРАТУР

Лакунов И. С., Зотов А. А., Емельянов В. А., Барабанова Н. Н.

Московский государственный областной университет

141014, Московская область, г. Мытищи, ул. Веры Волошиной, д. 24, Российская Федерация

Аннотация

Цель: экспериментальное исследование дисперсии диэлектрической проницаемости нематического жидкого кристалла 5CB в широком интервале температур и проведение численных аппроксимаций полученных зависимостей.

Процедура и методы. Проведены измерения продольной и поперечной компонент комплексной диэлектрической проницаемости жидкого кристалла 5CB в широком интервале температур от 263 до 318 К и диапазоне частот от 100 Гц до 1 МГц ёмкостным методом и на частоте 39,25 ГГц волноводным методом.

Результаты. Обнаружена и исследована переохлаждённая жидкокристаллическая фаза исследуемого вещества, представляющая собой совокупность молекул нематика и молекулярных ассоциаций. Проведена числовая аппроксимация диэлектрических спектров нематической и переохлаждённой жидкокристаллической фаз.

Теоретическая и/или практическая значимость. Показано, что дисперсия продольной и поперечной компонент диэлектрической проницаемости жидкого кристалла 5CB в нематической фазе удовлетворительно описываются уравнениями Дебая, а в переохлаждённой фазе – уравнениями Коул и Коула. Рассчитаны времена релаксации дипольной поляризации.

Ключевые слова: жидкий кристалл, нематик, переохлаждённая фаза, молекулярные ассоциации, диэлектрическая проницаемость, время релаксации

DIELECTRIC PROPERTIES OF A 4-PENTIL-4'-CYANOBIPHENYL LIQUID CRISTAL IN A WIDE TEMPERATURE RANGE

I. Lakunov, A. Zotov, V. Emelyanov, N. Barabanova

Moscow Region State University

ul. Very Voloshinoy 24, 141014 Mytishchi, Russian Federation

Abstract

Aim. We study experimentally the dispersion of the permittivity of a 5CB nematic liquid crystal in a wide temperature range and numerically approximate the obtained dependences.

Methodology. The longitudinal and transverse components of the complex permittivity of a 5CB liquid crystal are measured in a wide temperature range from 263 to 318 K and in the frequency range from 100 Hz to 1 MHz by the capacitive method and at a frequency of 39.25 GHz by the waveguide method.

Results. The supercooled liquid crystal phase of the substance in question, which is a combination of nematic molecules and molecular associations, is found and studied. The numerical approximation of the dielectric spectra of the nematic and supercooled liquid crystal phases is performed.

Research implications. It is shown that dispersion of the longitudinal and transverse components of the permittivity of a 5CB liquid crystal in the nematic phase is satisfactorily described by the Debye equations, and in the supercooled phase by the Cole–Cole equations. The relaxation times of the dipole polarization are calculated.

Keywords: liquid crystal, nematic, supercooled phase, molecular associations, permittivity, relaxation time

Введение

Отличительной особенностью жидкокристаллических веществ является анизотропия молекул и их построение в предоставленном объеме. Такие структуры чувствительны к влиянию внешних полей разной природы. Экспериментальный набор физико-химических характеристик открывает возможность получить сведения о веществе на молекулярном уровне. Исследование зависимости диэлектрической проницаемости от частоты электрического поля позволяет определить такие величины как время релаксации, дипольный момент и другие.

Целью данной работы является исследование дисперсии диэлектрической проницаемости нематического жидкого кристалла в широком интервале температур и проведение численных аппроксимаций полученных зависимостей.

Объект исследования и методика измерений

В качестве объекта исследования использовался 4-пентил-4'-цианобифенил, структурная формула которого представлена на Рис. 1.

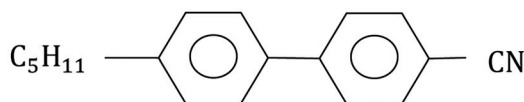


Рис. 1 / Fig. 1. Структурная формула жидкого кристалла 5CB / Structural formula of 5CB liquid crystal.

Источник: составлено авторами.

Данный образец является полярным органическим соединением. По форме молекул мезоген относится к каламитикам, то есть к одноосным жидким кристаллам, определяемым точечными группами симметрии, поэтому тензор ϵ_{ij} будет иметь матрицу из двух отличных от нуля компонент. Разность этих главных значений называют анизотропией диэлектрической проницаемости [1, с. 133–135; 2, с. 52, 55]:

$$\Delta\epsilon = \epsilon_{\parallel} - \epsilon_{\perp}, \quad (1)$$

где $\epsilon_{\parallel}$ – диэлектрическая проницаемость вдоль директора; $\epsilon_{\perp}$ – диэлектрическая проницаемость в направлении, перпендикулярном директору. Исследуемый жидкий кристалл обладает положительной анизотропией диэлектрической проницаемости.

При частотах, сравнимых с обратной величиной времени релаксации, следует учитывать явление дисперсии. Она проявляется в уменьшении действительной части диэлектрической проницаемости и увеличении мнимой части, которая характеризует диссипацию энергии электрического поля на преодоление сил трения между молекулами:

$$\epsilon = \epsilon' - i\epsilon'', \quad (2)$$

В случае переменного поля с циклической частотой ω классическая теория Дебая приводит к выражению [1, с. 133–135; 2, с. 52, 55]:

$$\epsilon^*(\omega) = \epsilon_{\infty} + \frac{\epsilon_0 - \epsilon_{\infty}}{1 + i\omega\tau}, \quad (3)$$

где ϵ_{∞} – высокочастотная диэлектрическая проницаемость; ϵ_0 – низкочастотная диэлектрическая проницаемость; τ – время релаксации.

Когда имеется распределение времени релаксации, применяют эмпирическое уравнение Коул-Коула [3; 4]:

$$\epsilon^*(\omega) = \epsilon_{\infty} + \frac{\epsilon_0 - \epsilon_{\infty}}{1 + (i\omega\tau^*)^{1-\alpha}}, \quad (4)$$

где α – коэффициент распределения; τ^* – наиболее вероятное время релаксации.

Измерения диэлектрической проницаемости на частотах от 100 Гц до 1 МГц проводились ёмкостным методом [5], а на частоте 39,25 ГГц волноводным методом [6–9]. Ориентация молекул задавалась внешним постоянным магнитным полем величиной 0,25 Тл.

В ходе эксперимента жидкий кристалл постепенно охлаждался, начиная с изотропной фазы, сначала при одной взаимной ориентации магнитного и электрического полей, затем при другой. Измерения диэлектрической проницаемости для каждой температуры осуществлялись после часа термостатирования.

Результаты измерений и их анализ

Температурные зависимости продольной $\epsilon_{\parallel}$ и поперечной $\epsilon_{\perp}$ компонент диэлектрической проницаемости на частоте 100 Гц представлены на рис. 2.

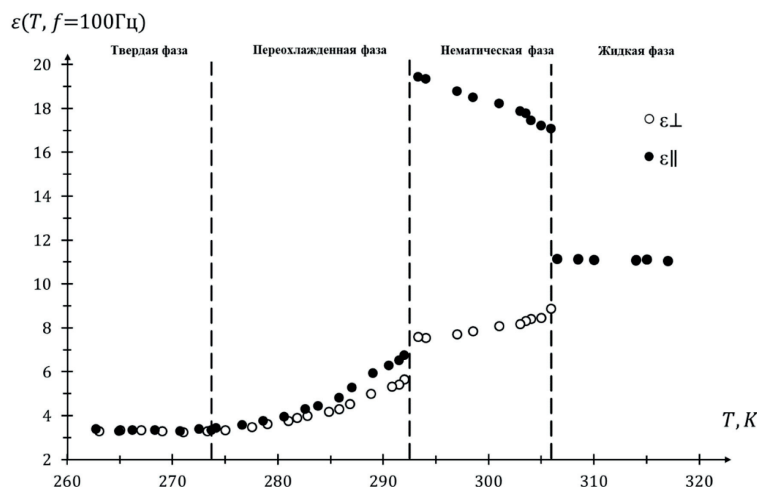


Рис. 2 / Fig. 2. Зависимость действительной части диэлектрической проницаемости жидкого кристалла 5CB от температуры на частоте 100 Гц / Dependence of the real part of the dielectric constant of the liquid crystal 5CB on temperature at a frequency of 100 Hz.

Источник: данные авторов.

Из рисунка видно, что при температуре 306 К исследуемый жидкий кристалл переходит из изотропной в нематическую фазу. При этом анизотропия диэлектрической проницаемости $\Delta\epsilon$ достигает значения 12. При температуре 292 К анизотропия $\Delta\epsilon$ резко уменьшается до 1,2. Данную температуру можно рассматривать как температуру перехода жидкого кристалла из нематической в переохлажденную фазу [10]. Процесс переохлаждения нематической фазы характеризуется переходом к двухкомпонентной системе, состоящей из молекул и молекулярных ассоциаций 5CB.

Причина объединения молекул в ассоциаты объясняется дисперсионным взаимодействием, так как данный контакт отвечает наиболее равновесному состоянию системы. Молекулярные ассоциации обладают незначительной анизотропией, поэтому анизотропия диэлектрической проницаемости определяется оставшейся нематической фазой. При дальнейшем охлаждении системы синтез продолжается, анизотропия уменьшается и при температуре 273 К становится равной нулю и жидкий кристалл переходит в твердое состояние.

Результаты измерений диэлектрической проницаемости на частоте 39,25 ГГц приведены на рис. 3а. Из рисунка видно, что значения действительной части диэлектрической проницаемости в изотропной фазе в пределах погрешности не зависят от температуры. Параллельная компонента $\epsilon_{\parallel}$ с уменьшением температуры увеличивается, а перпендикулярная $\epsilon'_{\perp}$ — уменьшается. График зависимости анизотропии диэлектрической проницаемости представлен на рис. 3б.

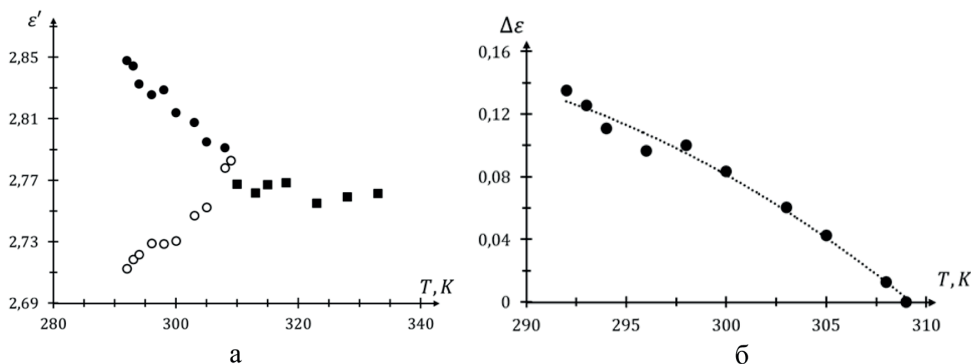


Рис. 3. / Fig. 3. Температурная зависимость компонент (а) и анизотропии (б) диэлектрической проницаемости ϵ' жидкого кристалла 5CB на частоте 39,25 ГГц / Temperature dependence of the components (a) and anisotropy (b) of the dielectric constant ϵ' of the 5CB liquid crystal at a frequency of 39.25 GHz.

Источник: данные авторов.

Значения анизотропии являются положительными и имеют небольшую величину. Частота 39,25 ГГц является достаточно высокой, и можно считать, что поляризация жидкого кристалла обусловлена только деформацией молекул. Таким образом, анизотропия диэлектрической проницаемости на данной частоте определяется анизотропией поляризуемости молекул и параметром ориентационного порядка.

Анализ полученных частотных зависимостей компонент комплексной диэлектрической проницаемости для нематической фазы 5CB проводился при помощи уравнения Дебая (3), записанного в виде:

$$\epsilon'_k(\epsilon''_k\omega) = \epsilon_{0k} - \tau_k \epsilon''_k \omega; \quad (5)$$

$$\epsilon'_k \left(\frac{\epsilon''_k}{\omega} \right) = \epsilon_{\infty k} + \frac{1}{\tau_k} \frac{\epsilon''_k}{\omega};$$

где вместо k ставится символ $\parallel$ или $\perp$ в зависимости от рассматриваемой компоненты.

По экспериментальным данным, полученным на частотах 100 Гц – 1 МГц, были построены прямые $\epsilon'_k(\epsilon''_k\omega)$ и $\epsilon'_k \left(\frac{\epsilon''_k}{\omega} \right)$ (см. рис. 4).

По точкам пересечения этих прямых с осью ϵ'_k были определены значения $\epsilon_{0\parallel} = 18,00$; $\epsilon_{\infty\parallel} = 3,87$; $\epsilon_{0\perp} = 8,31$; $\epsilon_{\infty\perp} = 3,01$, а по углу наклона – времена релаксации: $\tau_{\parallel} = 25,8$ нс; $\tau_{\perp} = 40,0$ нс.

Экспериментальные значения и аппроксимирующая кривая по расчётным параметрам изображены на рис. 5.

Из рис. 5 видно, что аппроксимирующая кривая хорошо описывает низкочастотные экспериментальные данные, однако в СВЧ диапазоне наблюдается

расхождение. Экспериментальные точки лежат ниже расчётных. Также проведённая аппроксимация не даёт смены знака анизотропии диэлектрической проницаемости, наблюдаемого авторами [11]. При этом максимум диэлектрических потерь наблюдался при частоте 6,19 МГц для параллельной компоненты и 3,98 МГц для перпендикулярной компоненты.

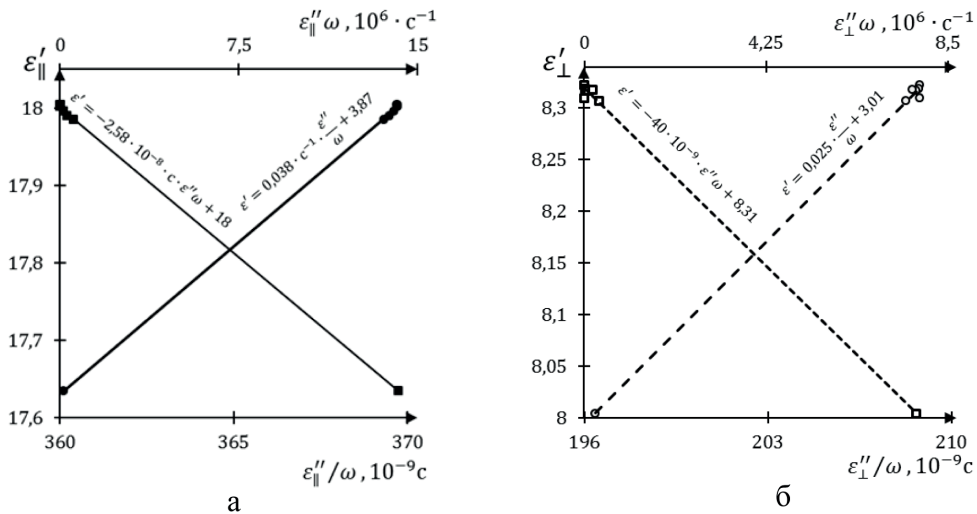


Рис. 4 / Fig. 4. Экспериментальные зависимости линеаризованного уравнения Дебая для продольной (а) и поперечной (б) компонент комплексной диэлектрической проницаемости / Experimental dependences of the linearized Debye equation for the longitudinal (a) and transverse (b) components of the complex permittivity.

Источник: данные авторов.

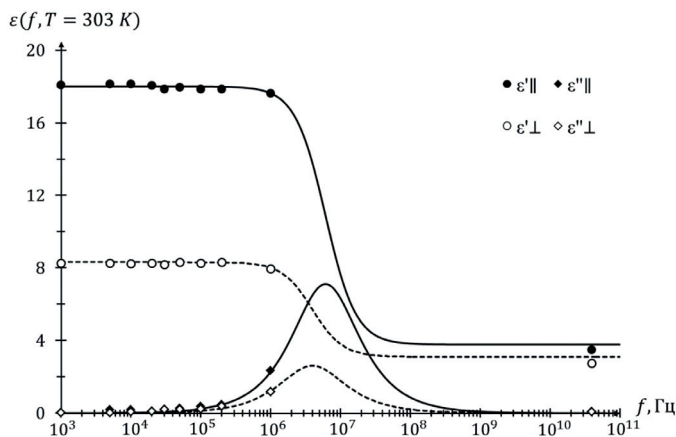


Рис. 5 / Fig. 5. Дисперсионные кривые для нематической фазы жидкого кристалла 5CB при температуре 303 K / Dispersion curves for the nematic phase of the liquid crystal 5CB at a temperature of 303 K

Источник: данные авторов.

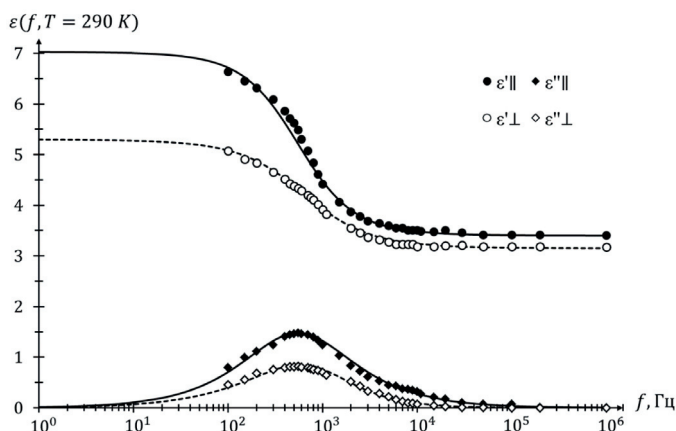


Рис. 6 / Fig. 6. Дисперсионные кривые для переохлажденной фазы жидкого кристалла 5CB при температуре 290 K / Dispersion curves for the supercooled phase of the liquid crystal 5CB at a temperature of 290 K.

Источник: данные авторов.

Частотные зависимости компонент комплексной диэлектрической проницаемости переохлажденной нематической фазы 5CB представлены на рис. 6. Максимум диэлектрических потерь параллельной компоненты наблюдался при частоте 540 Гц, а для перпендикулярной компоненты – при частоте 580 Гц.

В качестве функции аппроксимации было использовано подходящее для многокомпонентных систем уравнение Коул-Коула (4), представленное в виде:

$$\epsilon'_k = \epsilon_{\infty k} + (\epsilon_k - \epsilon_{\infty k}) \frac{1 + (\omega\tau_k)^{1-\alpha} \sin \frac{\pi\alpha}{2}}{1 + 2(\omega\tau_k)^{1-\alpha} \sin \frac{\pi\alpha}{2} + (\omega\tau_k)^{2(1-\alpha)}}, \quad (6)$$

$$\epsilon''_k = (\epsilon_k - \epsilon_{\infty k}) \frac{(\omega\tau_k)^{1-\alpha} \cos \frac{\pi\alpha}{2}}{1 + 2(\omega\tau_k)^{1-\alpha} \sin \frac{\pi\alpha}{2} + (\omega\tau_k)^{2(1-\alpha)}}, \quad (7)$$

где вместо k ставится символ $\parallel$ или $\perp$ в зависимости от рассматриваемой компоненты.

Расчёт параметров, входящих в уравнение (4), производился с помощью диаграмм Коул-Коула [3; 4] (рис. 6). Полученные диаграммы представляют собой дуги окружностей, центры которых лежат ниже оси действительной части диэлектрической проницаемости. Таким образом, для параметров были получены следующие значения: $\epsilon_{\infty\parallel} = 3,40$; $\epsilon_{0\parallel} = 7,03$; $\alpha_{\parallel} = 0,131$; $\tau_{\parallel} = 2,9 \cdot 10^{-4}$ с; $\epsilon_{\infty\perp} = 3,15$; $\epsilon_{0\perp} = 5,30$; $\alpha_{\perp} = 0,197$; $\tau_{\perp} = 2,5 \cdot 10^{-4}$ с. Построенные по этим параметрам кривые достаточно хорошо описывают экспериментальные данные.

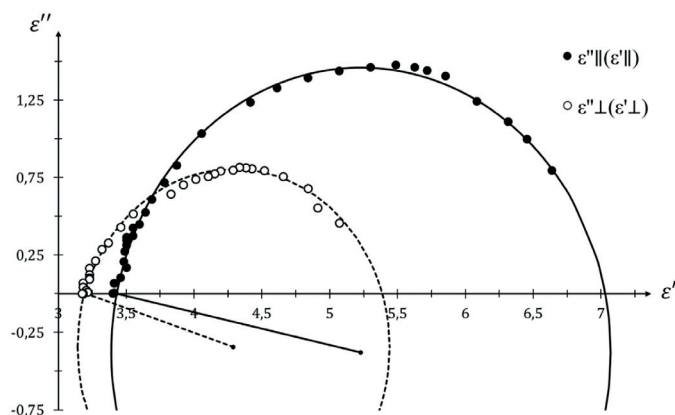


Рис. 7 / Fig. 7. Диаграммы Коул-Коула для продольной и поперечной компонент диэлектрической проницаемости жидкого кристалла 5CB при температуре 290 K / Cole – Cole diagrams for the longitudinal and transverse components of the dielectric constant of a 5CB liquid crystal at a temperature of 290 K.

Источник: данные авторов.

Также можно отметить, что времена релаксации $\tau_{\parallel}$ и $\tau_{\perp}$ в переохлаждённой жидкокристаллической фазе одного порядка и на пять порядков больше времён релаксации в нематической фазе, что можно объяснить возросшей вязкостью.

Заключение

Исследована дисперсия комплексной диэлектрической проницаемости жидкого кристалла 5CB в нематической и переохлаждённой жидкокристаллической фазах. Установлено, что анизотропия диэлектрической проницаемости жидкого кристалла 5CB положительна в рассматриваемом диапазоне частот и температур. Проведена аппроксимация экспериментальных данных с использованием уравнений Дебая и Коул-Коула. Рассчитаны времена релаксации дипольной поляризации жидкого кристалла. Времена релаксации в переохлаждённой фазе на пять порядков больше времён релаксации в нематической фазе.

Статья поступила в редакцию 11.06.2021 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сонин А. С. Введение в физику жидких кристаллов. М.: Наука, 1983. 318 с.
2. Де Жё В. Физические свойства жидкокристаллических веществ. М.: Мир, 1982. 152 с.
3. Cole K. S.; Cole R. H. Dispersion and Absorption in Dielectrics I. Alternating Current Characteristics // The Journal of Chemical Physics. 1941. Vol. 9. Iss. 4. P. 341–352. DOI: 10.1063/1.1750906.
4. Cole K. S.; Cole R. H. Dispersion and Absorption in Dielectrics II. Direct Current Characteristics // The Journal of Chemical Physics. 1942. Vol. 10. Iss. 2. P. 98–105. DOI: 10.1063/1.1723677.

5. Barsoukov E., Macdonald J. R. Impedance spectroscopy: Theory, Experiment, and Applications. Hoboken: Wiley Publ., 2018. 528 p.
6. Емельянов В. А., Шубин А. В. Методика измерения диэлектрической проницаемости нематических жидких кристаллов в СВЧ-диапазоне // Вестник Московского государственного областного университета (электронный журнал). 2012. № 3. URL: <https://vestnik-mgou.ru> (дата обращения: 06.03.2021).
7. Брандт А. А. Исследование диэлектриков на сверхвысоких частотах. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1963. 404 с.
8. Емельянов В. А. Диэлектрические свойства жидкого кристалла ЖК-1289 // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2020. № 1. С. 102–110. DOI: 10.18384/2310-7251-2020-1-102-110.
9. The dielectric properties of nematic LC-1289 in microwave range / Emelianov V. A., Gevorkyan E. V., Barabanova N. N., Zhachkin V. A. // Journal of Physics: Conference Series. 2020. Vol. 1560. P. 012035. DOI: 10.1088/1742-6596/1560/1/012035.
10. Шабатина Т. И. Реакции в мезогенных цианофенилах при низких температурах и криоформирование металл-мезогенных наносистем // Вестник Московского университета. Серия 2: Химия. 2002. Т. 43. № 5. С. 273–285.
11. Диэлектрическая анизотропия жидкого кристалла 5 ЦБ в дециметровом диапазоне длин волн / Беляев Б. А., Дронкин Н. А., Шабанов В. Ф., Шепов В. Н. // Физика твердого тела. 2000. Т. 42. Вып. 3. С. 564–566.

REFERENCES

1. Sonin A. S. *Vvedenie v fiziku zhidkikh kristallov* [Introduction to the physics of liquid crystals]. Moscow, Nauka Publ., 1983. 318 p.
2. De Jeux V. *Fizicheskie svoystva zhidkokristallicheskikh veshchestv* [Physical properties of liquid crystalline substances]. Moscow, Mir Publ., 1982. 152 p.
3. Cole K. S.; Cole R. H. Dispersion and Absorption in Dielectrics I. Alternating Current Characteristics. In: *The Journal of Chemical Physics*, 1941, vol. 9, iss. 4, pp. 341–352. DOI: 10.1063/1.1750906.
4. Cole K. S.; Cole R. H. Dispersion and Absorption in Dielectrics II. Direct Current Characteristics. In: *The Journal of Chemical Physics*, 1942, vol. 10, iss. 2, pp. 98–105. DOI: 10.1063/1.1723675.
5. Barsoukov E., Macdonald J. R. Impedance spectroscopy: Theory, Experiment, and Applications. Hoboken, Wiley Publ., 2018. 528 p.
6. Emel'yanov V. A., Shubin A. V. [Dielectric permittivity measuring method for nematic liquid crystals in microwave frequency range]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta (elektronnyi zhurnal)* [Bulletin of the Moscow Region State University (e-journal)], 2012, no. 3. Available at: <https://vestnik-mgou.ru> (accessed: 06.03.2021).
7. Brandt A. A. *Issledovanie dielektrikov na sverkhvysokikh chastotakh* [The study of dielectrics at ultrahigh frequencies]. Moscow, Gosudarstvennoe izdatel'stvo fiziko-matematicheskoi literatury Publ., 1963. 404 p.
8. Emel'yanov V. A. [Dielectric properties of liquid crystal LC-1289]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika* [Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics-Mathematics], 2020, no. 1, pp. 102–110. DOI: 10.18384/2310-7251-2020-1-102-110.

9. Emelianov V. A., Gevorkyan E. V., Barabanova N. N., Zhachkin V. A. The dielectric properties of nematic LC-1289 in microwave range. In: *Journal of Physics: Conference Series*, 2020, vol. 1560. P. 012035. DOI: 10.1088/1742-6596/1560/1/012035.
10. Shabatina T. I. [Reactions in mesogenic cyanophenyls at low temperatures and cryoformation of metal-mesogenic nanosystems]. In: *Vestnik Moskovskogo universiteta. Seriya 2: Khimiya* [Bulletin of the Moscow University. Series 2: Chemistry], 2002, vol. 43, no. 5, pp. 273–285.
11. Belyaev B. A., Dronkin N. A., Shabanov V. F., Shepov V. N. [Dielectric anisotropy of 5cb liquid crystal in a decimeter wavelength range]. In: *Fizika tverdogo tela* [Physics of the Solid State], 2000, vol. 42, no. 3, pp. 564–566.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Лакунов Иван Сергеевич – студент физико-математического факультета Московского государственного областного университета;
e-mail: lakunov.ivan@mail.ru;

Зотов Александр Александрович – студент физико-математического факультета Московского государственного областного университета;
e-mail: aleksandr.zotov.99@mail.ru;

Емельянов Владимир Анатольевич – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры общей физики Московского государственного областного университета;
e-mail: vladanemel@mail.ru;

Барabanова Наталья Николаевна – кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой общей физики Московского государственного областного университета;
e-mail: nn.barabanova@mgou.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Ivan S. Lakunov – Student, Faculty of Physics and Mathematics, Moscow Region State University;
e-mail: lakunov.ivan@mail.ru;

Aleksandr A. Zotov – Student, Faculty of Physics and Mathematics, Moscow Region State University;
e-mail: aleksandr.zotov.99@mail.ru;

Vladimir A. Emelyanov – Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Prof., Department of General Physics, Moscow Region State University;
e-mail: vladanemel@mail.ru;

Nataliya N. Barabanova – Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Prof., Departmental Head, Department of General Physics, Moscow Region State University;
e-mail: nn.barabanova@mgou.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Лакунов И. С., Зотов А. А., Емельянов В. А., Барабанова Н. Н. Диэлектрические свойства жидкого кристалла 4-пентил-4'-цианобифенила в широком диапазоне температур // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2021. № 2. С. 30–40.

DOI: 10.18384/2310-7251-2021-2-30-40

FOR CITATION

Lakunov I. S., Zotov A. A., Emelyanov V. A., Barabanova N. N. Dielectric properties of a 4-pentil-4'-cyanobiphenyl liquid crystal in a wide temperature range. In: *Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics-Mathematics*, 2021, no. 2, pp. 30–40.

DOI: 10.18384/2310-7251-2021-2-30-40

УДК 533.6.011

DOI: 10.18384/2310-7251-2021-2-41-51

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА НАИБОЛЬШЕГО ЗНАЧЕНИЯ ЭФФЕКТА ВЫСОКОСКОРОСТНОГО ПЕРЕХЛЕСТА В УДАРНОЙ ВОЛНЕ

Кузнецов М. М., Кулешова Ю. Д.

Московский государственный областной университет

141014, Московская область, г. Мытищи, ул. Веры Волошиной, д. 24, Российская Федерация

Аннотация

Целью данной работы является получение аналитической оценки наибольшего значения эффекта высокоскоростного перехлёста в ударной волне. Основное состояние рассматриваемой ударно-сжатой бинарной газовой смеси является сильно диспергированным по концентрациям лёгкого (значительное преобладание) и тяжёлого компонентов.

Процедура и методы. В работе использовались аналитические методы теоретической физики и, в первую очередь, высшей алгебры и математического анализа, позволяющие, ввиду их большой универсальности, установить границы максимального значения рассматриваемого эффекта. Сделать это численными методами было бы значительно труднее.

Результаты. Получены аналитические оценки, позволяющие, в первую очередь, определить принципиальные условия существования высокоскоростного эффекта. Кроме того, дана аналитическая оценка наибольшего значения этого эффекта.

Теоретическая и/или практическая значимость. Полученные результаты существенны для воспроизведения эффекта высокоскоростного перехлёста в оптимальных условиях его наибольшей интенсивности.

Ключевые слова: кинетический, уравнение, неравновесный, смесь газов, ударная волна, диспергация

Благодарности. Исследование выполнено в рамках гранта РФФИ 20-07-00740 А и в рамках гранта Президента РФ для молодых учёных – кандидатов наук МК-1330.2020.9.

ANALYTICAL ESTIMATION OF THE HIGHEST VALUE OF THE EFFECT OF HIGH-SPEED OVERSHOOT IN A SHOCK WAVE

M. Kuznetsov, Ju. Kuleshova

Moscow Region State University

ul. Very Voloshinoy 24, Mytishchi 141014, Moscow region, Russian Federation

Abstract

Aim. The purpose of this work is to obtain an analytical estimate of the highest value of the effect of high-speed overlap in a shock wave. The ground state of the considered shock-compressed

binary gas mixture is highly dispersed in the concentrations of light (significant predominance) and heavy components.

Methodology. The paper uses analytical methods of theoretical physics, and first of all, higher algebra and mathematical analysis, which allow one, due to their great versatility, to set the limits of the maximum value of the effect under consideration, which would be much more difficult to do by numerical methods.

Results. Analytical estimates are obtained that allow one, first of all, to determine the fundamental conditions for the existence of the high-speed effect. In addition, an analytical assessment of the highest value of this effect is presented.

Research implications. The results obtained are certainly essential for reproducing the effect of high-speed overlap under optimal conditions of its greatest intensity.

Keywords: kinetic, equation, nonequilibrium, gas mixture, shock wave, dispersion

Acknowledgments. This study is supported by the Russian Science Foundation (Grant No. 20-07-00740A) and the RF President's Grants Council (State Support of Young Scientists – Candidates of Sciences Program, Grant No. MK-1330.2020.9).

Введение

Авторами [1–4] ранее были аналитически установлены общие необходимые и достаточные условия эффекта высокоскоростного перехлёста в ударно-сжатых бинарных смесях газов (без ограничений на их состав и соотношение молекулярных масс). В качестве основной математической модели использовалось так называемое бимодальное распределение Тамма–Мотт-Смита, априорно задаваемое для каждого из компонентов смеси. Применение этого распределения в большинстве аналитических исследований структуры фронта ударной волны неоднократно верифицировалось и подтвердило его хорошую пригодность.

В большинстве упомянутых исследований задача о структуре ударной волны решалась на уровне одночастичных бимодальных распределений для каждого отдельного компонента. Такого «одночастичного» использования молекулярных распределений вполне хватало для определения изменения макропараметров сжимаемой смеси газов при прохождении ею ударной волны. Специфика задач, рассматриваемых в работах авторов, связана с ускорением скоростей процессов молекулярных соударений в самом фронте ударной волны, т. е. с поступательной неравновесностью функции распределения пар сталкивающихся молекул. Аналитический вид этой функции на основе одночастичных бимодальных распределений Тамма–Мотт-Смита, был получен ранее в работах авторов [1–4]. При получении этого результата авторам удалось аналитически представить действие четырёх основных факторов, ускоряющих процессы столкновения частиц в ударной волне. Эти процессы были выявлены ранее в численных исследованиях статистическими методами Монте Карло [5] и детерминированными методами консервативных схем.

Эффект высокоскоростной неравновесности, обнаруженный ранее в численных исследованиях, как раз и был связан со значениями функции распределения пар сталкивающихся молекул. Величина этой функции оказалась значительно

выше внутри волны по сравнению с её величиной в термодинамическом равновесном состоянии непосредственно за фронтом волны.

Ранее аналогичные эффекты перехлёста наблюдались и в макроструктуре ударной волны, начиная с хорошо известного локального «заброса» энтропии в её фронте [6]. Наиболее существенным из них оказался эффект перехлёста «параллельной» кинетической температуры (измеряемой вдоль потока в ударной волне). Величина этой температуры оказалась заметно выше величины равновесной температуры за волной. Как было показано в работе [7], в простом однокомпонентном газе существование этого эффекта строго следует из закона сохранения потоков массы и импульса. Анизотропная температурная структура ударной волны: «параллельная температура» – $T^{\parallel}$ и «перпендикулярная температура» – $T^{\perp}$ неоднократно измерялись также в эксперименте [8].

В работах авторов [1–4] анизотропная структура температурного поля внутри ударного фронта также была учтена в аналитическом представлении функции распределения пар молекул.

Аналитическое исследование функции распределения пар молекул в настоящей работе дано для случая сильно диспергированной по составу бинарной смеси газов, когда концентрация лёгкого компонента (l – light) значительно превышает концентрацию тяжёлого (h – heavy), $n_l \gg n_h$. Численно это соответствует величине отношения концентрации лёгкого компонента – n_l к концентрации тяжёлого – n_h порядка $10^{-2} - 10^{-3}$.

Основные усилия авторов при выполнении данной работы были направлены на выделение главных безразмерных параметров задачи, определяющих как условие существования эффекта, так и его наибольшую величину.

Функция распределения пар лёгкого и тяжёлого компонентов

Как отмечалось выше, функция распределения пар молекул $G^{(l, h)}$ строится на основе одночастичных бимодальных распределений молекул каждого компонента смеси:

$$F^{(\gamma)} = \chi^{(\gamma)} F_0^{(\gamma)} + (1 - \chi^{(\gamma)}) F_1^{(\gamma)}, \quad (1)$$

$$\chi^{(\gamma)} = \frac{n_0^{(\gamma)}}{n_0^{(\gamma)} + n_1^{(\gamma)}}, \quad (2)$$

$$F_i^{(\gamma)}(c) = \left(\frac{m_\gamma}{2\pi k T_i} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left[-\frac{m_\gamma (c - u_i)^2}{2k T_i} \right]. \quad (3)$$

Здесь верхний индекс γ соответствует одному из компонентов смеси: лёгкому $\gamma = l$, или тяжёлому $\gamma = h$, причём $m_l < m_h$; полные объёмные концентрации смеси компонентов n_l и n_h складываются из своих парциальных $n_0^{(\gamma)}$ и $n_1^{(\gamma)}$, где: $n_\gamma = n_0^{(\gamma)} + n_1^{(\gamma)}$; $\gamma = l, h$; одночастичные функции $F_i^{(\gamma)}$ ($i = 0, 1$) являются максвел-

ловскими распределениями; m_γ – масса молекулы γ – компонента; u_i и T_i – скорость и температура потока перед ($i = 0$) и за ($i = 1$) волной; k – постоянная Больцмана; $(c - u_i)$ – собственная скорость молекулы.

Как и в простом однокомпонентном газе парциальные концентрации, входящие в числитель и знаменатель формулы (2), являются функциями координаты x , меняющейся по ширине волны. Парциальные же параметры потока: температура T_i и макроскорость u_i остаются неизменными и совпадают, соответственно, с термодинамической температурой и макроскоростью потока на входе в волну ($i = 0$) и на выходе из неё ($i = 1$).

Функция распределения пар молекул, получающаяся на основе соотношений (1–3), как было показано в работе [9], имеет следующий вид:

$$G^{(l,h)} = \chi^{(l)} \chi^{(h)} G_0^{(l,h)} + \chi^{(l)} (1 - \chi^{(h)}) G_{01}^{(l,h)} + (1 - \chi^{(l)}) \chi^{(h)} G_{10}^{(l,h)} + (1 - \chi^{(l)}) (1 - \chi^{(h)}) G_1^{(l,h)}. \quad (4)$$

В целях дальнейшего изложения остановимся несколько подробнее на структуре соотношения (4).

Это соотношение получается путём перемножения одночастичных распределений (1) с последующим интегрированием по всему пространству скоростей обеих сталкивающихся молекул за исключением модуля их относительной скорости g (где $g = |\vec{c}_l - \vec{c}_h|$).

Покажем, что формулу (4) можно алгебраически преобразовать к виду, содержащему в качестве одного из слагаемых билинейную симметрическую форму по произведению безразмерных координат $\chi^{(l)}, \chi^{(h)}$, а в качестве другого – линейную форму по этим координатам:

$$G^{(l,h)} - G_1^{(l,h)} = - \left(G_{01}^{(l,h)} + G_{10}^{(l,h)} - G_1^{(l,h)} - G_0^{(l,h)} \right) \chi^{(l)} \chi^{(h)} + \left(G_{01}^{(l,h)} - G_1^{(l,h)} \right) \chi^{(l)} + \left(G_{10}^{(l,h)} - G_1^{(l,h)} \right) \chi^{(h)}. \quad (5)$$

Нетрудно видеть, что в правой части формулы (5) отрицательное слагаемое, содержащее произведение безразмерных координат $\chi^{(l)} \chi^{(h)}$, является симметрической билинейной формой по перестановке этих координат. При этом параметры $G_0^{(l,h)}, G_{01}^{(l,h)}, G_{10}^{(l,h)}, G_1^{(l,h)}$ не зависят от координат и являются функциями модуля относительной скорости молекул g . Представление одночастичных функций в соответствии с выражением (1) можно понимать как разложение этих функций по базисным векторам, состоящим из «холодного» максвелловского распределения на входе в ударную волну $F_0^{(\gamma)}$ и «горячего» – $F_1^{(\gamma)}$ на выходе из неё. В билинейном же слагаемом в формуле (5) каждый из безразмерных параметров $G_0^{(l,h)}, G_{01}^{(l,h)}, G_{10}^{(l,h)}, G_1^{(l,h)}$ является результатом действия билинейного функционала $A(e_i^{(\gamma)}, e_j^{(\gamma)})$ на соответствующую пару базисных векторов:

$e_i^{(\gamma)} = F_i^{(\gamma)}$, $e_j^{(\gamma)} = F_j^{(\gamma)}$. Билинейным функционалом в этой задаче, как уже упоминалось, является интегрирование произведения одночастичных функций компонентов смеси по пространству скоростей сталкивающихся молекул разных компонентов смеси (за исключением интегрирования по относительной скорости молекул).

Таким образом, функция распределения пар молекул (5) параметрически зависит от модуля относительной скорости молекул g и координаты в ударной волне « x ». Эта координата входит в парциальные безразмерные плотности $\chi^{(l)}$ и $\chi^{(h)}$. Правая часть формулы (5) зависит от переменных аргументов задачи: относительной скорости g и координаты в волне « x ». При этом переменная g входит только в безразмерные параметры $G_0^{(l,h)}$, $G_{01}^{(l,h)}$, $G_{10}^{(l,h)}$, $G_1^{(l,h)}$; координата же « x » – только в безразмерные плотности $\chi^{(l)}$ и $\chi^{(h)}$. В этом проявляется одно из преимуществ исходного аналитического априорного представления одночастичной функции распределения (1) по Тамму–Мотт–Смиту. Мы видим, что переход к к функции распределения пар молекул сохраняет эту фундаментальную простоту.

Центральность кривой, геометрически соответствующей функции распределения пар молекул

Для достижения целей, поставленных в работе, необходимо выполнить ряд преобразований, традиционных для билинейных форм. Прежде всего заметим, что геометрически соотношения (4) и (5) можно рассматривать как уравнения кривых второго порядка по координатам $\chi^{(l)}$ и $\chi^{(h)}$. Покажем, что путём линейного преобразования, переводящего старые координаты $\chi^{(l)}$ и $\chi^{(h)}$ в новые χ_l и χ_h :

$$\chi^{(l)} = \chi_l + d_l, \quad \chi^{(h)} = \chi_h + d_h, \quad (6)$$

кривые зависимостей (4) и (5) в новых координатах станут симметричными. Это выразится в том, что левые части равенств (4) и (5) останутся неизменными при замене координаты χ_l на $-\chi_l$, χ_h на $-\chi_h$. При этом положение центра симметрии будет смещено на расстояния: d_l , d_h (в старых координатах) относительно начала старых координат $\chi^{(l)} = \chi^{(h)} = 0$. Сами координаты d_l , d_h определяются из условия отсутствия линейных слагаемых в равенствах (4) и (5) после перехода в них к новым координатам.

В итоге получим:

$$\overline{\Delta G}^{(l,h)} = -\chi_l \chi_h + \bar{g}_{01}^{(l,h)} \bar{g}_{10}^{(l,h)}, \quad (7)$$

где

$$\overline{\Delta G}^{(l,h)} = \frac{G^{(l,h)} - G_1^{(l,h)}}{G_{01}^{(l,h)} + G_{10}^{(l,h)} - G_1^{(l,h)} - G_0^{(l,h)}}, \quad (8)$$

$$\bar{g}_{01}^{(l,h)} = \frac{G_{01}^{(l,h)} - G_1^{(l,h)}}{G_{01}^{(l,h)} + G_{10}^{(l,h)} - G_1^{(l,h)} - G_0^{(l,h)}}, \quad (9)$$

$$\bar{g}_{10}^{(l,h)} = \frac{G_{10}^{(l,h)} - G_1^{(l,h)}}{G_{01}^{(l,h)} + G_{10}^{(l,h)} - G_1^{(l,h)} - G_0^{(l,h)}}, \quad (10)$$

$$d_l = \bar{g}_{10}^{(l,h)}; \quad d_h = \bar{g}_{01}^{(l,h)}. \quad (11)$$

Заметим, что как было показано в работе [9], равенства (8–10) могут быть представлены целиком через величины $g_{01}^{(l,h)}$, $g_{10}^{(l,h)}$, $g_1^{(l,h)}$, где

$$g_{01}^{(l,h)} = G_{01}^{(l,h)} - G_1^{(l,h)}; \quad g_{10}^{(l,h)} = G_{10}^{(l,h)} - G_1^{(l,h)}; \quad g_1^{(l,h)} = G_1^{(l,h)} - G_0^{(l,h)}. \quad (12)$$

Область существования эффекта высокоскоростного перехлёста

В предыдущих работах авторов [4; 9] были сформулированы необходимые и достаточные условия эффекта высокоскоростного перехлёста.

Необходимые условия сводились к неотрицательности выражения $\Delta G_{ij}^{(l,h)}$, где $i, j = 0, 1$ причём:

$$\Delta G_{ij}^{(l,h)} = (G_{01}^{(l,h)} + G_{10}^{(l,h)} - G_1^{(l,h)} - G_0^{(l,h)}) \geq 0, \quad (13)$$

или

$$\Delta G_{ij}^{(l,h)} = g_{01}^{(l,h)} + g_{10}^{(l,h)} + g_1^{(l,h)}. \quad (14)$$

Достаточные же условия заключались в неотрицательности каждого слагаемого в равенстве (14):

$$g_{01}^{(l,h)} \geq 0; \quad g_{10}^{(l,h)} \geq 0; \quad g_1^{(l,h)} \geq 0.$$

Неравенства (15) можно рассматривать и как область существования эффекта в определённом диапазоне значений модулей относительных скоростей молекул g , поскольку все величины, стоящие в левых частях нестрогих неравенств (15), являются функциями g .

Однако в пространстве координат $\chi^{(l)}$ и $\chi^{(h)}$, где $0 \leq \chi^{(l)} \leq 1$; $0 \leq \chi^{(h)} \leq 1$, такая область не была указана, в отличие от однокомпонентного газа, рассмотренного в работе [2].

Для установления границ искомой области вернёмся к старым координатам $\chi^{(l)}$ и $\chi^{(h)}$ в выражении (7):

$$\overline{\Delta G}^{(l,h)} = -\left(\chi^{(l)} - \bar{g}_{10}^{(l,h)}\right)\left(\chi^{(h)} - \bar{g}_{01}^{(l,h)}\right) + \bar{g}_{01}^{(l,h)}\bar{g}_{10}^{(l,h)}. \quad (16)$$

Нетрудно видеть, что, когда произведение «новых координат» χ_l и χ_h является отрицательной величиной, эффект высокоскоростного перехлёста $\overline{\Delta G}^{(l,h)} \geq 0$

всегда существует. Кроме того, он больше величины $\bar{g}_{01}^{(l,h)} \bar{g}_{10}^{(l,h)}$ в исходных «старых координатах» $\chi^{(l)}$ и $\chi^{(h)}$.

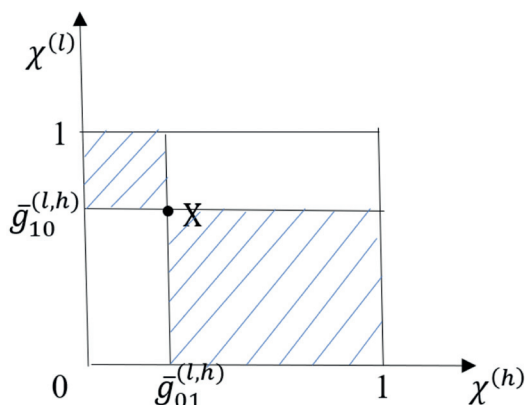


Рис. 1 / Fig. 1. Область существования эффекта высокоскоростного перехлёста /
The region of existence of the high-speed overlap effect

Источник: составлено авторами.

Преобразуем правые части равенств (8-10) с использованием функций (12-14):

$$\overline{\Delta G}^{(l,h)} = \frac{\Delta G^{(l,h)}}{g_{01}^{(l,h)} + g_{10}^{(l,h)} + g_1^{(l,h)}}, \quad (17)$$

$$\bar{g}_{01}^{(l,h)} = \frac{g_{01}^{(l,h)}}{g_{01}^{(l,h)} + g_{10}^{(l,h)} + g_1^{(l,h)}} < 1, \quad (18)$$

$$\bar{g}_{10}^{(l,h)} = \frac{g_{10}^{(l,h)}}{g_{01}^{(l,h)} + g_{10}^{(l,h)} + g_1^{(l,h)}} < 1, \quad (19)$$

где $\Delta G^{(l,h)} = G^{(l,h)} - G_1^{(l,h)}$.

В точке «X» с координатами $(\bar{g}_{01}^{(l,h)}; \bar{g}_{10}^{(l,h)})$, а также на линиях $\chi^{(l)} = \bar{g}_{10}^{(l,h)}$ и $\chi^{(h)} = \bar{g}_{01}^{(l,h)}$ эффект перехлёста $\overline{\Delta G}^{(l,h)}$ точно равен произведению $\bar{g}_{01}^{(l,h)} \bar{g}_{10}^{(l,h)}$.

В областях: $(\chi^{(h)} > \bar{g}_{01}^{(l,h)}, \chi^{(l)} < \bar{g}_{10}^{(l,h)})$ и $(\chi^{(h)} < \bar{g}_{01}^{(l,h)}, \chi^{(l)} > \bar{g}_{10}^{(l,h)})$ величина $\overline{\Delta G}^{(l,h)}$ будет больше, чем $\bar{g}_{01}^{(l,h)} \bar{g}_{10}^{(l,h)}$.

В областях: $\left(\chi^{(h)} > \bar{g}_{01}^{(l,h)}, \chi^{(l)} > \bar{g}_{10}^{(l,h)}\right)$ и $\left(\chi^{(h)} < \bar{g}_{01}^{(l,h)}, \chi^{(l)} < \bar{g}_{10}^{(l,h)}\right)$ величина $\overline{\Delta G}^{(l,h)}$ будет меньше, чем $\bar{g}_{01}^{(l,h)} \bar{g}_{10}^{(l,h)}$.

В точке $(\chi^{(h)} = 0, \chi^{(l)} = 0)$, т.е. в начале координат эффект полностью отсутствует, $\overline{\Delta G}^{(l,h)} = 0$. Эффект также отсутствует на линии с уравнением: $-\chi^{(h)}\chi^{(l)} + \bar{g}_{01}^{(l,h)}\chi^{(l)} + \bar{g}_{10}^{(l,h)}\chi^{(h)} = 0$. Эта кривая на рис. 1 расположена в верхнем правом незаштрихованном прямоугольнике.

Оценка наибольшего значения эффекта высокоскоростного перехлёста

Равенство (16), полученное из выражения (5) для функции распределения пар молекул $G^{(l,h)}$, позволяет также оценить наибольшее значение эффекта перехлёста.

Действительно, как следует из равенства (16), положительная добавка к основному значению эффекта $\overline{\Delta G}^{(l,h)} = \bar{g}_{01}^{(l,h)} \bar{g}_{10}^{(l,h)}$, может быть записана только в следующих вариантах:

$$a) \left(\bar{g}_{01}^{(l,h)} - \chi^{(l)}\right)\left(\chi^{(h)} - \bar{g}_{10}^{(l,h)}\right);$$

$$b) \left(\chi^{(l)} - \bar{g}_{01}^{(l,h)}\right)\left(\bar{g}_{10}^{(l,h)} - \chi^{(h)}\right).$$

В каждом из этих вариантов найдём наибольшие значения каждого из сомножителей и перемножим их:

$$\begin{aligned} a) \left(\bar{g}_{01}^{(l,h)} - \chi^{(l)}\right) \Big|_{\sup} \times \left(\chi^{(h)} - \bar{g}_{10}^{(l,h)}\right) \Big|_{\sup} &= \left(\bar{g}_{01}^{(l,h)} - 0\right)\left(1 - \bar{g}_{10}^{(l,h)}\right) = \\ &= \bar{g}_{01}^{(l,h)} - \bar{g}_{01}^{(l,h)} \bar{g}_{10}^{(l,h)}; \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} b) \left(\chi^{(l)} - \bar{g}_{01}^{(l,h)}\right) \Big|_{\sup} \times \left(\bar{g}_{10}^{(l,h)} - \chi^{(h)}\right) \Big|_{\sup} &= \left(1 - \bar{g}_{01}^{(l,h)}\right)\left(\bar{g}_{10}^{(l,h)} - 0\right) = \\ &= \bar{g}_{10}^{(l,h)} - \bar{g}_{01}^{(l,h)} \bar{g}_{10}^{(l,h)}. \end{aligned} \quad (21)$$

Подставим равенства (20) и (21) в формулу (16). Тогда получим:

$$a) \overline{\Delta G}_{\sup}^{(l,h)} = \bar{g}_{01}^{(l,h)} - \bar{g}_{01}^{(l,h)} \bar{g}_{10}^{(l,h)} + \bar{g}_{01}^{(l,h)} \bar{g}_{10}^{(l,h)} = \bar{g}_{01}^{(l,h)}. \quad (22)$$

$$b) \overline{\Delta G}_{\sup}^{(l,h)} = \bar{g}_{10}^{(l,h)} - \bar{g}_{01}^{(l,h)} \bar{g}_{10}^{(l,h)} + \bar{g}_{01}^{(l,h)} \bar{g}_{10}^{(l,h)} = \bar{g}_{10}^{(l,h)}. \quad (23)$$

Таким образом, из выражений (22) и (23) следует оценка наибольшего значения эффекта высокоскоростного перехлёста $\overline{\Delta G}_{\text{sup}}^{(l,h)}$:

$$1) \text{ если } \overline{g}_{01}^{(l,h)} > \overline{g}_{10}^{(l,h)}, \text{ то } \overline{g}_{10}^{(l,h)} < \overline{\Delta G}_{\text{sup}}^{(l,h)} < \overline{g}_{01}^{(l,h)};$$

$$2) \text{ если } \overline{g}_{01}^{(l,h)} < \overline{g}_{10}^{(l,h)}, \text{ то } \overline{g}_{01}^{(l,h)} < \overline{\Delta G}_{\text{sup}}^{(l,h)} < \overline{g}_{10}^{(l,h)}.$$

Заключение

В статье показано, что, в случае сильной диспергации концентраций компонентов смеси, одно из слагаемых, представляющих функцию распределения пар молекул, может быть представлено в виде билинейной симметрической формы.

Именно это слагаемое является единственной варьируемой величиной, тогда как второе слагаемое остаётся постоянным.

Благодаря выделению симметрической билинейной формы в аналитическом представлении функции распределения пар молекул удалось определить как область существования эффекта перехлёста в полном диапазоне значений относительных концентраций компонентов смеси, так и оценить наибольшее значение этого эффекта.

Статья поступила в редакцию 29.06.2021 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кузнецов М. М., Кулешова Ю. Д., Смотров Л. В. Эффект высокоскоростной поступательной неравновесности в бимодальной ударной волне // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2012. № 2. С. 108–116.
2. Kuznetsov M. M., Kuleshova Yu. D. Increase in rates of Kinetic Processes inside the Bimodal Hypersonic Shock Wave // Heat Transfer Research. 2012. Vol. 43. Iss. 3. P. 228–236. DOI: 10.1615/HeatTransRes.v43.i3.30.
3. Кузнецов М. М., Смотров Л. В. Аналитические свойства эффекта высокоскоростной поступательной неравновесности // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2013. № 3. С. 66–73.
4. Analytical properties of nonequilibrium threshold in shock waves / Kuznetsov M. M., Kuleshova Ju. D., Reshetnikova Yu. G., Smotrova L. V. // Journal of Physics: Conference Series. 2018. Vol. 996. P. 012006. DOI: 10.1088/1742-6596/996/1/012006.
5. Распределение молекулярных скоростей во фронте ударной волны в газовых смесях / Генич А. П., Куликов С. В., Манелис Г. Б., Черешнев С. Л. // Известия Академии наук СССР. Механика жидкости и газа. 1990. № 2. С. 144–150.
6. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных явлений. М.: Наука, 1966. 688 с.
7. Shee-Mang Yen. Temperature Overshoot in Shock Waves // The Physics of Fluids. 1966. Vol. 9. Iss. 7. P. 1417–1418. DOI: 10.1063/1.1761862.
8. Muntz E. P., Harnett L. N. Molecular Velocity Distribution Function Measurement in a Normal Shock Wave // The Physics of Fluids. 1969. Vol. 12. Iss. 10. P. 2027–2035. DOI: 10.1063/1.1692308.

9. О максимуме эффекта высокоскоростной поступательной неравновесности в ударной волне / Кузнецов М. М., Кулешова Ю. Д., Смотров Л. В., Решетникова Ю. Г. // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2016. № 3. С. 84–95. DOI: 10.18384/2310-7251-2016-3-84-95.

REFERENCES

1. Kuznetsov M. M., Kuleshova Yu. D., Smotrova L. V. [On the increase of the kinetic processes rates in tamm-mott-smith shock wave model]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika* [Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics-Mathematics], 2012, no. 2, pp. 108–116.
2. Kuznetsov M. M., Kuleshova Yu. D. Increase in rates of Kinetic Processes inside the Bimodal Hypersonic Shock Wave. In: *Heat Transfer Research*, 2012, vol. 43, iss. 3, pp. 228–236. DOI: 10.1615/HeatTransRes.v43.i3.30.
3. Kuznetsov M. M., Smotrova L. V. [Analytical qualities of highvelocity translational nonequilibrium in shock wave]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika* [Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics-Mathematics], 2013, no. 3, pp. 66–73.
4. Kuznetsov M. M., Kuleshova Ju. D., Reshetnikova Yu. G., Smotrova L. V. Analytical properties of nonequilibrium threshold in shock waves. In: *Journal of Physics: Conference Series*, 2018, vol. 996, pp. 012006. DOI: 10.1088/1742-6596/996/1/012006.
5. Genich A. P., Kulikov S. V., Manelis G. B., Chereshev S. L. [The distribution of molecular speeds in the shock wave front in gas mixtures]. In: *Izvestiya Akademii nauk SSSR. Mekhanika zhidkosti i gaza* [Fluid Dynamics], 1990, no. 2, pp. 144–150.
6. Zel'dovich Ya. B., Raizer Yu. P. *Fizika udarnykh voln i vysokotemperaturnykh yavlenii* [Physics of shock waves and high-temperature phenomena]. Moscow, Nauka Publ., 1966. 688 p.
7. Shee-Mang Yen. Temperature Overshoot in Shock Waves. In: *The Physics of Fluids*, 1966, vol. 9, iss. 7, pp. 1417–1418. DOI: 10.1063/1.1761862.
8. Muntz E. P., Harnett L. N. Molecular Velocity Distribution Function Measurement in a Normal Shock Wave. In: *The Physics of Fluids*, 1969, vol. 12, iss. 10, pp. 2027–2035. DOI: 10.1063/1.1692308.
9. Kuznetsov M. M., Kuleshova Yu. D., Smotrova L. V., Reshetnikova Yu. G. [On the maximum effect of high translational nonequilibrium in the shock wave]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika* [Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics-Mathematics], 2016, no. 3, pp. 84–95. DOI: 10.18384/2310-7251-2016-3-84-95.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Кузнецов Михаил Михайлович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической физики Московского государственного областного университета; e-mail: kuznets-omn@yandex.ru;

Кулешова Юлия Дмитриевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей алгебры, элементарной математики и методики преподавания математики Московского государственного областного университета; e-mail: juliyabogdanova@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Mihail M. Kuznetsov – Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Department of Theoretical Physics, Moscow Region State University;

e-mail: kuznets-omn@yandex.ru;

Yuliya D. Kuleshova – Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Prof., Department of Higher Algebra, Elementary Mathematics and Methods of Teaching Mathematics, Moscow Region State University;

e-mail: juliaybogdanova@mail.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Кузнецов М. М., Кулешова Ю. Д. Аналитическая оценка наибольшего значения эффекта высокоскоростного перехлеста в ударной волне // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2021. № 2. С. 41–51.

DOI: 10.18384/2310-7251-2021-2-41-51

FOR CITATION

Kuznetsov M. M., Kuleshova Ju. D. Analytical estimation of the highest value of the effect of high-speed overshoot in a shock wave. In: *Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics-Mathematics*, 2021, no. 2, pp. 41–51.

DOI: 10.18384/2310-7251-2021-2-41-51

УДК 538.931

DOI: 10.18384/2310-7251-2021-2-52-60

ИЗМЕРЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ТЕПЛОЗАЩИТНЫХ СВОЙСТВ СЛУЧАЙНОЙ РАССЕИВАЮЩЕЙ СТРУКТУРЫ

Шампаров Е. Ю., Бугримов А. Л., Родэ С. В., Жагина И. Н.

Российский государственный университет имени А. Н. Косыгина (Технологии.

Дизайн. Искусство)

117997, г. Москва, ул. Садовническая, д. 33, Российская Федерация

Аннотация

Цель. Определение взаимосвязи между параметрами структуры материалов и показателями их теплозащитных свойств.

Процедура и методы. Теоретический анализ и сопоставление теории и эксперимента на основании результатов двух методов практических измерений компонент теплопроводности случайной рассеивающей среды.

Результаты. Описана методика измерения лучистой и кондуктивной компонент и суммарной теплопроводности среды с помощью экранов излучения. Найден новый способ измерения компонент теплопроводности при сжатии волокнистого холста. Измерены показатели теплозащитных свойств ряда выпускаемых утепляющих материалов.

Теоретическая и/или практическая значимость. Установлено, что кондуктивная компонента теплопроводности лёгких утепляющих материалов практически равна теплопроводности воздуха, а лучистая компонента обратно пропорциональна плотности структуры. Определены кондуктивный и радиационный показатели среды.

Ключевые слова: радиационно-кондуктивный перенос тепла, случайная рассеивающая структура

MEASUREMENT OF THERMAL PROTECTION PROPERTY METRICS OF A RANDOM SCATTERING STRUCTURE

E. Shamparov, A. Bugrimov, S. Rode, I. Jagrina

The Kosygin State University of Russia

ul. Sadovnicheskaya 33, 117997 Moscow, Russian Federation

Abstract

Aim. We determine the relationship between the parameters of a materials structure and metrics of their thermal protection properties.

Methodology. Use is made of a theoretical analysis and comparison of theory and experiment based on the results of two methods of practical measurements of the thermal conductivity components of a random scattering medium.

Results. A method for measuring the radiant, conductive and total heat transfer coefficient of the medium using screens is described. A new method for determining the components of heat

transfer with use the compression of the canvas is found. Metrics of heat-shielding properties of materials are measured.

Research implications. It is found that the conductive component of the thermal conductivity of light insulation materials is almost equal to the thermal conductivity of air, and the radiant component is inversely proportional to the density of the structure. The conductive and radiation parameters of the medium are determined.

Keywords: radiant-conductive heat transfer, random scattering structure

Введение

Современные лёгкие теплозащитные материалы имеют вспененную или волокнистую структуру с характерным размером неоднородностей порядка 100 мкм. Когда доля заполненного твёрдым веществом пространства около 1%, уже по визуальной оценке материала видно, что глубина проникновения в него теплового излучения значительно превышает размер неоднородностей. Распространение излучения в таких случайных рассеивающих структурах должно иметь диффузный характер. Основной механизм, препятствующий прохождению излучения, – рассеяние на неоднородностях. Но, с другой стороны, размеры неоднородностей много больше, чем длины волн теплового излучения. Поэтому глубина проникновения a практически не должна зависеть от частоты теплового излучения. Для излучения такой материал можно считать однородной бездисперсионной (серой) средой. Свойства такой среды характеризуют её кондуктивная D и лучистая L составляющие теплопроводности λ :

$$\lambda = D + L.$$

Вдалеке от границ в среде выполняется уравнение Фурье в обобщённой форме:

$$\Phi = -\lambda \nabla T,$$

где Φ – плотность потока тепла, ∇T – градиент температуры.

Лучистая составляющая теплопроводности среды [1; 2]:

$$L = 16\sigma T^3 a / 3,$$

где σ – постоянная Стефана-Больцмана.

Задачи по переносу тепла обычно решают численно [2; 3]. Сложность определения лучистой и кондуктивной компонент теплопроводности по отдельности обусловлена тем, что обе они входят в уравнение теплового переноса в одной и той же форме. Но недавно в работе [4] получено аналитическое решение задачи о радиационно-кондуктивном переносе тепла с постоянной плотностью потока Φ возле плоской непрозрачной поверхности (со светимостью ϵ) при малом градиенте температуры:

$$\nabla T \ll T / a.$$

Зависимость температуры от расстояния x до границы среды с температурой $T_0 + \beta$ имеет вид:

$$T = T_0 + \nabla T_{\infty} x + \beta \cdot \exp(-\gamma x / a),$$

где $\nabla T_{\infty} = -\Phi / \lambda$ – градиент температуры вдали от границы, a/γ – толщина радиационно-кондуктивной релаксации,

$$\gamma^2 = \lambda / D,$$

β – скачок температуры возле удалённой поверхности

$$\beta = -a \nabla T_{\infty} (\gamma^2 - 1) / (\gamma + \gamma^2 \varepsilon / (2 - \varepsilon)).$$

Кроме того, была решена задача о радиационно-кондуктивном переносе тепла между двумя плоскостями, разделёнными полупрозрачной средой толщиной d , известная как задача Висканты и Гроша [5]. Разность температур плоскостей:

$$\Delta T = \nabla T_{\infty} d - 2\beta \cdot \tanh(\gamma d / (2a)).$$

Измерения с экранами излучения

Для исследований разработана установка для измерения тепловой проницаемости материалов без конвекции [6]. В ней нагреватель помещён строго над холодильником, а за нагревателем расположен тепловой экран. Образец помещается в зазор между горизонтальными поверхностями нагревателя и холодильника, сделанными для большей светимости из монокристаллического кремния. При измерении стабилизируются температуры холодильника и теплового экрана. В нагревателе выделяем такую мощность, чтобы его температура не изменялась и была равной температуре экрана. Тогда эта мощность идёт сквозь образец от нагревателя к холодильнику. Толщина зазора мала по сравнению с размерами нагревателя и холодильника. Поэтому плотность потока тепла можно считать одинаковой во всем объёме образца, что соответствует условиям задачи Висканты и Гроша. На рис. 1 представлены результаты измерения зависимости теплового сопротивления $R = \Delta T / \Phi$ среды (пакета образцов) от её толщины d . Образцы вырезаны из пласта вспененного полиэтилена (толщиной 2,2 мм и долей заполненного твёрдым веществом пространства – 1,74%). В следующей серии измерений между всеми слоями пакета проложены экраны излучения из тонкой (10 мкм) алюминиевой фольги. В третьей серии экраны проложены только сверху и снизу пакета.

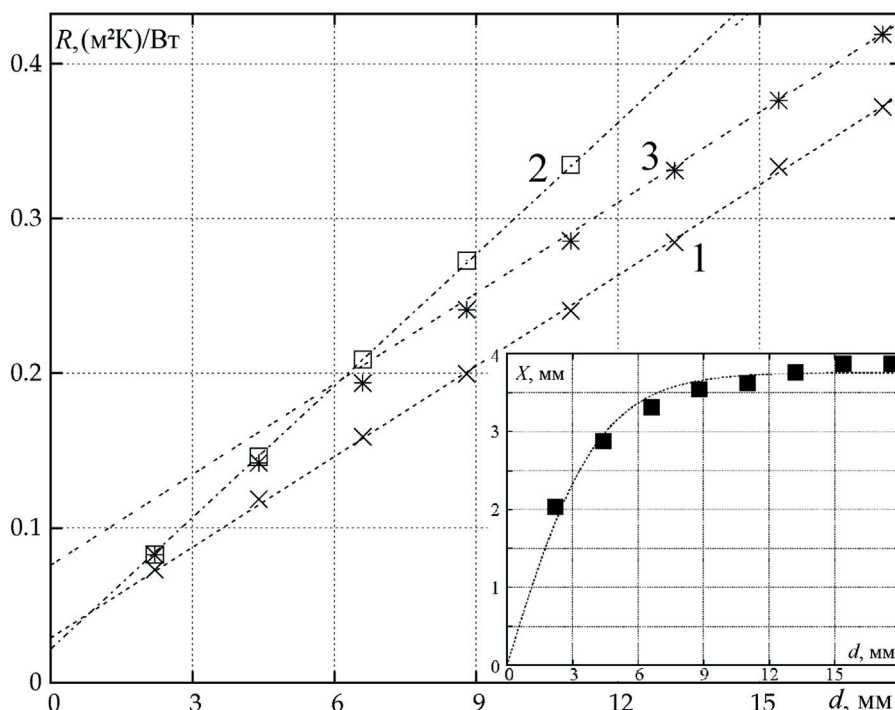


Рис. 1 / Fig. 1. Тепловое сопротивление R в зависимости от толщины пакета d : 1 – без фольги, 2 – с фольгой сверху, снизу и между всеми слоями и 3 – с фольгой сверху и снизу пакета. На вставке – зависимость $X(d)$ / Thermal resistance R depending on the package thickness d : 1 – without foil, 2 – with foil on top, bottom and between all layers, and 3 – with foil on top and bottom of the package. On the inset, there is dependency $X(d)$.

Источник: составлено авторами

По наклону графика № 1 на рис. 1 вычислена суммарная теплопроводность среды:

$$\lambda = \Delta d / \Delta R = 0,051 \text{ Вт} / (\text{м} \cdot \text{К}).$$

Используя λ и данные графика № 3 (при $\epsilon = 0$ для фольги), вычислен параметр X :

$$X = R\lambda - d = \frac{2a(\gamma^2 - 1)}{\gamma} \tanh \frac{\gamma d}{2a}.$$

Численная аппроксимация $X(d)$ позволила определить значения $a = 2,9$ мм, $\gamma = 1,38$, $L = 0,024$ и $D = 0,027$ Вт/(м · К). По наклону графика № 2 найдено, что благодаря экранам теплопроводность пакета снизилась в 1,45 раза. Лучистая и кондуктивная компоненты теплопроводности оказались примерно равными. Значение кондуктивной практически совпало с теплопроводностью воздуха $D_a = 0,026$ Вт/(м · К). Видно, что вклад движения тепла по твёрдому веществу

мал. Поэтому материал можно рассматривать как воздух с включениями, препятствующими прохождению излучения.

Измерения со сжатием холста

Описанный метод измерения даёт хорошие результаты при толщине образца, сравнимой с глубиной проникновения излучения. Но даже самые лёгкие производимые нетканые объёмные холсты имеют много большую толщину, и подобные измерения в них невозможны, хотя и у них доля занятого твёрдым веществом объёма $\sim 1\%$. Есть основания полагать, что их кондуктивная составляющая теплопроводности тоже близка к теплопроводности воздуха. При не очень большом сжатии пористого волокнистого материала она практически не должна изменяться.

Глубина проникновения теплового излучения в первом приближении обратно пропорциональна плотности случайной рассеивающей структуры. Лучистая компонента теплопроводности должна быть пропорциональна толщине образца материала d :

$$L = \alpha d.$$

Тогда тепловая проводимость образца G пропорциональна его обратной толщине $1/d$:

$$G = R^{-1} = \alpha + D/d.$$

Для измерений (рис. 2) взяты холсты (1 – 9 табл. 1), состоящие из полиэфирных (полиэтилентерефталат, ПЭТ) волокон толщиной ~ 30 мкм с 15% добавкой шерстяных, бамбуковых, эвкалиптовых, хлопковых или льняных.

Таблица 1 / Table 1

Характеристики теплозащитных материалов / Characteristics of heat-shielding materials

№	Волокнистый состав	$D, 10^{-4},$ Вт/(м · К)	$\alpha,$ Вт/(м ² К)	$M,$ г/м ²	δ	$\mu,$ г/м ²	$d^*,$ мм	$L, 10^{-4},$ Вт/(м · К)	$\rho^*,$ кг/м ³
1	ПЭТ + овечья шерсть	283	1,47	283	1,08	45,3	19,8	291	14,3
2	ПЭТ + овечья шерсть	279	1,41	312	1,06	47,9	18,4	259	17,0
3	ПЭТ + бамбуковые	292	1,18	330	1,11	42,4	17,9	211	18,4
4	ПЭТ + хлопковые	296	1,19	293	1,13	38,0	16,6	198	17,7
5	ПЭТ + бамбуковые	285	1,32	339	1,09	48,7	22,4	296	15,1
6	ПЭТ + шерсть яка	283	1,38	300	1,08	45,1	16,3	225	18,4
7	ПЭТ + льняные	285	1,51	340	1,09	55,9	18,7	282	18,2
8	ПЭТ + эвкалиптовые	289	1,33	349	1,10	50,5	18,6	247	18,8
9	ПЭТ	275	1,57	268	1,05	45,8	16,2	254	16,5

Источник: составлено авторами.

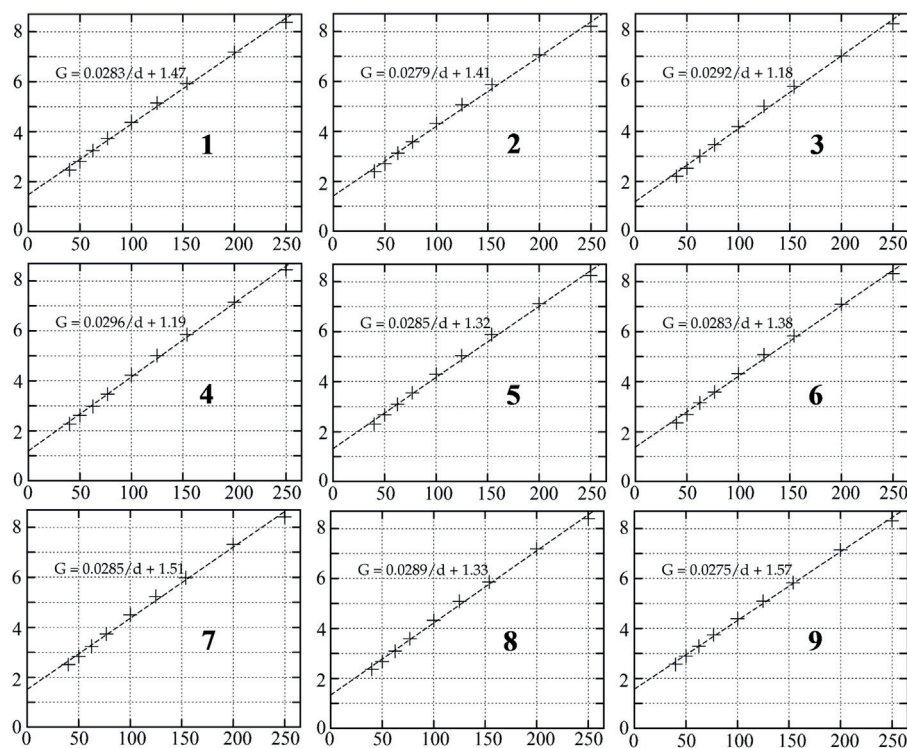


Рис. 2 / Fig. 2. Зависимости G (Вт/(м²К)) от обратной толщины $1/d$ (м⁻¹) холста / Dependencies of G (W/(m²K)) on the inverse thickness of $1/d$ (m⁻¹) of the canvas.

Источник: составлено авторами.

В табл. 1 собраны результаты измерений и характеристики образцов: поверхностная плотность M , толщина d^* при сжатии 100 Па, плотность ρ^* и лучистая теплопроводность L при этой толщине.

Обсуждение результатов измерений

Следует отметить, что наблюдается вполне удовлетворительное качественное и количественное соответствие экспериментальных результатов основным положениям предложенной физической модели. Полученные значения с хорошей точностью удовлетворяют предсказанной линейной зависимости. Кондуктивная составляющая теплопроводности материалов, ожидаемо, близка к теплопроводности воздуха.

Добавки дают разнонаправленный эффект. Благодаря толстым волокнам (в качестве которых использована овечья шерсть) материал лучше держит форму, но остаётся более прозрачным для излучения. Тонкие волокна (например, хлопок) уменьшают прозрачность, но материал легче деформируется. Однозначно положительный эффект от добавок слабо заметен. Разумно построенный материал должен иметь каркас из толстых волокон и непрозрачный наполнитель из тонких. Производители делать такой материал пока не научились. Однако заме-

тим, что такой природный материал существует. Это мех, содержащий толстый волос – ость и наполнитель – пух.

Для взаимного сравнения характеристики материалов сведены к показателям, не содержащим зависимости от толщины d и температуры T образца. Это кондуктивный показатель –

$$\delta = D(T_0) / D_a(T_0)$$

(для приведённых измерений $T_0 = 311$ К и $D_a = 0.026$ Вт/(м·К)) и радиационный показатель:

$$\mu = M\alpha(T_0) / (16\sigma T_0^3 / 3),$$

равный поверхностной плотности материала, эквивалентной глубине проникновения излучения. С их помощью при разной толщине d и температуре T можно рассчитать суммарную теплопроводность материала:

$$\lambda(d, T) = \delta D_a(T) + 16\sigma\mu T^3 d / (3M).$$

Заключение

Таким образом, разработаны методики измерений, определены критерии оценки и получены характеристики теплозащитных свойств лёгких утепляющих материалов. Продемонстрированы методы их сравнения. Определена роль случайной рассеивающей структуры как препятствия радиационной передаче тепла. Установлено, что при достаточно малой доле объёма, занятой твёрдым веществом, его участие в передаче тепла несущественно, а тепловая проводимость наполненной воздухом структуры пропорциональна её обратной толщине. Измерены показатели тепловой проницаемости ряда волокнистых материалов. Определено, как теплопроводность образца материала зависит от его температуры и толщины, до которой он сжат. Определены направления совершенствования теплозащитных свойств материалов. Продемонстрирован эффект от уменьшения лучистой составляющей теплопроводности. Доказано, что при создании ультралёгких утепляющих материалов приоритетное внимание должно быть уделено уменьшению радиационной компоненты в переносе тепла.

Статья поступила в редакцию 29.06.2021 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кутателадзе С. С. Основы теории теплообмена; изд. 5-е перераб. и доп. М.: Атомиздат, 1979. 416 с.
2. Doornink D. G., Hering R. G. Transient Combined Conductive and Radiative Heat Transfer // Journal of Heat Transfer. 1972. Vol. 94. Iss. 4. P. 473–478. DOI: 10.1115/1.3449970.
3. Moore T. J., Jones M. R. Analysis of the conduction–radiation problem in absorbing, emitting, non-gray planar media using an exact method // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2014. Vol. 73. P. 804–809. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2014.02.029.

4. Шампаров Е. Ю. Исследование теплового переноса в полупрозрачной среде // Журнал технической физики. 2018. Т. 88. № 1. С. 134–140. DOI: 10.21883/JTF.2018.01.45497.2109.
5. Viskanta R., Grosh R. J. Heat transfer by simultaneous conduction and radiation in an absorbing medium // Journal of Heat Transfer. 1962. Vol. 84. Iss. 1. P. 63–72. DOI: 10.1115/1.3684294.
6. Шампаров Е. Ю., Жагрина И. Н. Установка для прецизионных бесконвекционных измерений тепловой проницаемости материалов при температурах, близких к комнатной. Патент на полезную модель № 166709 РФ 17.11.2016, заявл. 01.04.2016, опублик. 10.12.2016, бюл. № 34.

REFERENCES

1. Kutateladze S. S. *Osnovy teorii teploobmena* [Basics of the theory of heat transfer]. Moscow, Atomizdat Publ., 1979. 416 p.
2. Doornink D. G., Hering R. G. Transient Combined Conductive and Radiative Heat Transfer. In: *Journal of Heat Transfer*, 1972, vol. 94, iss. 4, pp. 473–478. DOI: 10.1115/1.3449970.
3. Moore T. J., Jones M. R. Analysis of the conduction–radiation problem in absorbing, emitting, non-gray planar media using an exact method. In: *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2014, vol. 73, pp. 804–809. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2014.02.029.
4. Shamparov E. Yu. [Heat transfer in a semitransparent medium]. In: *Zhurnal tekhnicheskoi fiziki* [Technical Physics], 2018, vol. 88, no. 1, pp. 134–140. DOI: 10.21883/JTF.2018.01.45497.2109.
5. Viskanta R., Grosh R. J. Heat transfer by simultaneous conduction and radiation in an absorbing medium. In: *Journal of Heat Transfer*, 1962, vol. 84, iss. 1, pp. 63–72. DOI: 10.1115/1.3684294.
6. Shamparov E. Yu., Zhagrina I. N. Installation for precision non-convection measurements of the thermal permeability of materials at close to room temperature. Utility model patent No. 166709 RF 17.11.2016

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Шампаров Евгений Юрьевич – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры физики Российского государственного университета имени А. Н. Косыгина (Технологии. Дизайн. Искусство);
e-mail: shamparov-eu@rguk.ru;

Бугримов Анатолий Львович – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой физики Российского государственного университета имени А. Н. Косыгина (Технологии. Дизайн. Искусство);
e-mail: bugrimov-al@rguk.ru;

Родэ Сергей Витальевич – доктор технических наук, профессор, профессор кафедры физики Российского государственного университета имени А. Н. Косыгина (Технологии. Дизайн. Искусство);
e-mail: rode-s-v@mail.ru;

Жагрина Инна Николаевна – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры материаловедения Российского государственного университета имени А. Н. Косыгина (Технологии. Дизайн. Искусство);
e-mail: zhagrina-in@rguk.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Eugene Yu. Shamparov – Cand. Sci. (Engineering), Assoc. Prof., Department of Physics, The Kosygin State University of Russia;
e-mail: shamparov-eu@rguk.ru;

Anatoly L. Bugrimov – Dr. Sci. (Engineering), Prof., Departmental Head, Department of Physics, The Kosygin State University of Russia;
e-mail: bugrimov-al@rguk.ru;

Sergey V. Rode – Dr. Sci. (Engineering), Prof., Department of Physics, The Kosygin State University of Russia;
e-mail: rode-s-v@mail.ru;

Inna N. Zhagrina – Cand. Sci. (Engineering), Assoc. Prof., Department of Material Science, The Kosygin State University of Russia;
e-mail: zhagrina-in@rguk.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Измерение показателей теплозащитных свойств случайной рассеивающей структуры / Шампаров Е. Ю., Бугримов А. Л., Родэ С. В., Жагрина И. Н. // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2021. № 2. С. 52–60. DOI: 10.18384/2310-7251-2021-2-52-60

FOR CITATION

Shamparov E. Ju., Bugrimov A. L., Rode S. V., Jagrina I. N. Measurement of thermal protection property metrics of a random scattering structure. In: *Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*, 2021, no. 2, pp. 52–60.
DOI: 10.18384/2310-7251-2021-2-52-60

РАЗДЕЛ III. ТЕОРИЯ И МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ И ВОСПИТАНИЯ

УДК 519.852

DOI: 10.18384/2310-7251-2021-2-61-76

ГРАФИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Хасанов А. С., Зверева А. И.

*Российский экономический университет имени Г. В. Плеханова
117997, г. Москва, Стремянный пер., д. 36, Российская Федерация*

Аннотация

Целью данной статьи является рассмотрение основных идей пост-оптимального анализа в задачах линейного программирования на примере задачи планирования производства в случае двух видов продукции и трёх видов ресурсов.

Процедура и методы. Оптимальные решения задач линейного программирования зависят от параметров математических моделей рассматриваемых реальных процессов. В данной работе выбрана модель задачи планирования производства. Параметрами этой модели являются прибыли от продажи единицы каждого вида продукции и объёмы каждого вида ресурса. При рассмотрении общей проблемы производства n видов продукции с использованием m видов ресурсов возникает проблема, связанная с невозможностью видеть математические объекты. Для визуализации математических объектов рассматривается задача производства двух видов продукции с использованием трёх видов ресурсов. Такой подход позволил свести пост-оптимальный анализ к графическому анализу чувствительности оптимального решения к изменению параметров рассматриваемой задачи линейного программирования.

Результаты. Основные идеи пост-оптимального анализа рассмотрены в двух случаях. Проведён графический анализ устойчивости оптимального решения к изменению прибыли от продажи единицы каждого вида продукции при фиксированной прибыли от продажи единицы другого вида продукции. Проведён графический анализ чувствительности общей прибыли к изменению объёма каждого полностью используемого вида ресурса при фиксированных объёмах других видов ресурсов.

Практическая значимость работы обусловлена возможностью её использования преподавателями на начальном этапе изучения линейного программирования. В общем случае пост-оптимальный анализ является достаточно сложной задачей и выполняется после изучения симплекс-метода и теории двойственности. Описанный подход позволяет рас-

смагивать основные идеи пост-оптимального анализа на координатной плоскости сразу после рассмотрения графического метода. Он может быть использован преподавателями как на занятиях, так и при организации самостоятельной работы студентов, так как использует простейшие инструменты линейного программирования.

Ключевые слова: линейное программирование, графический метод, оптимальные решения, пост-оптимальный анализ

GRAPHICAL SENSITIVITY ANALYSIS OF OPTIMAL SOLUTIONS OF LINEAR PROGRAMMING PROBLEMS

A. Khasanov, A. Zvereva

Plekhanov Russian University of Economics

Stremyannyyi pereulok 36, 117997 Moscow, Russian Federation

Abstract

Aim. We consider the main ideas of post-optimal analysis in linear programming problems on the example of the production planning in the case of two types of products and three types of resources.

Methodology. Optimal solutions of linear programming problems depend on the parameters of mathematical models of real processes under consideration. In this paper, the model of the production planning problem is selected. The parameters of this model are the profits from the sale of a unit of each product type and the volumes of each resource type. When considering the general problem of producing n types of products using m types of resources, there is a problem associated with the inability to see mathematical objects. In order to visualize mathematical objects, the problem of producing two types of products using three types of resources is considered. This approach allows one to reduce post-optimal analysis to graphical sensitivity analysis of the optimal solution to changes in the parameters of the linear programming problem under consideration.

Results. The main ideas of post-optimal analysis are considered in two cases. Graphical analysis of stability of the optimal solution to changes in the profit from the sale of a unit of each product type with the fixed profit from the sale of a unit of another product type is carried out. Graphical analysis of sensitivity of the total profit to the changes in the volume of each fully used resource type with the fixed volumes of the other resource types is performed.

Research implications. The work is of practical significance since it can be used by lecturers at the initial stage of studying linear programming. In general, post-optimal analysis is a rather complicated task and is performed after studying the simplex method and duality theory. The described approach allows one to consider the main ideas of post-optimal analysis on the coordinate plane immediately after considering the graphical method. It can be used by lecturers both in the classroom and in self-study of students, as it uses the simplest linear programming tools.

Keywords: linear programming, graphical method, optimal solutions, post-optimal analysis

Введение

Общая задача линейного программирования имеет вид:

$$z = c_0 + c_1x_1 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max(\min), \quad (1)$$

1. Нахождение пределов изменения прибыли c_j (по отдельности), получаемой от реализации единицы j -го вида продукции, при которых сохраняется найденное оптимальное решение, где $j = 1, 2, \dots, n$.

2. Анализ чувствительности оптимума целевой функции к изменению объёмов ресурсов b_i (по отдельности), где $i = 1, 2, \dots, m$.

Такой анализ в общем случае выполняется после изучения симплекс-метода и теории двойственности [14]. Но основные идеи метода анализа чувствительности оптимальных решений задач линейного программирования (т. е. идеи пост-оптимального анализа) могут быть рассмотрены на примере задачи планирования производства двух видов продукции. Такая задача может быть решена графическим методом на координатной плоскости, что позволяет провести графический анализ чувствительности оптимального решения задачи линейного программирования [2] и решить проблему, связанную с невозможностью видеть математические объекты в общем случае.

Графический метод

При $n = 2$ задача (4)–(6) принимает вид:

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 \rightarrow \max, \quad (7)$$

[illegible]

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \quad (9)$$

Будем считать, что $c_1 \neq 0$ или $c_2 \neq 0$, так как в противном случае целевая функция будет величиной постоянной. В неравенствах $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leq b_i$ системы (8) $a_{i1} \neq 0$ или $a_{i2} \neq 0$ для любого i . Перейдём к точечной интерпретации допустимых решений. На координатной плоскости Ox_1x_2 уравнение $ax_1 + bx_2 + c = 0$, где $a \neq 0$ или $b \neq 0$, является уравнением некоторой прямой, перпендикулярной вектору $\vec{n} = (a, b)$ [14]. Вектор $\vec{n}$ будем называть нормальным вектором этой прямой и откладывать от начала координат. Прямая с уравнением $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$ из системы (8) разбивает плоскость на две полуплоскости и одна из них является решением неравенства $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leq b_i$ [14]. При $b_i > 0$ этой полуплоскостью является та, которая содержит начало координат. В общем случае соответствующую полуплоскость легко выбрать, например, по некоторой точке, не принадлежащей рассматриваемой прямой. Так как неравенствам $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ тоже соответствуют полуплоскости, то ОДР задачи (7)–(9) является пересечением полуплоскостей.

Линией уровня целевой функции $z = c_1x_1 + c_2x_2$ называются прямая, имеющая уравнение $c_1x_1 + c_2x_2 = c$, где c – произвольная постоянная. В точках этой прямой целевая функция равна c : $z = c_1x_1 + c_2x_2 = c$. При изменении постоянной c мы получим семейство параллельных прямых с общим нормальным вектором $\vec{n} = (c_1, c_2)$. Достаточно провести одну линию уровня, а остальные линии уровня могут быть получены путём параллельного переноса этой линии.

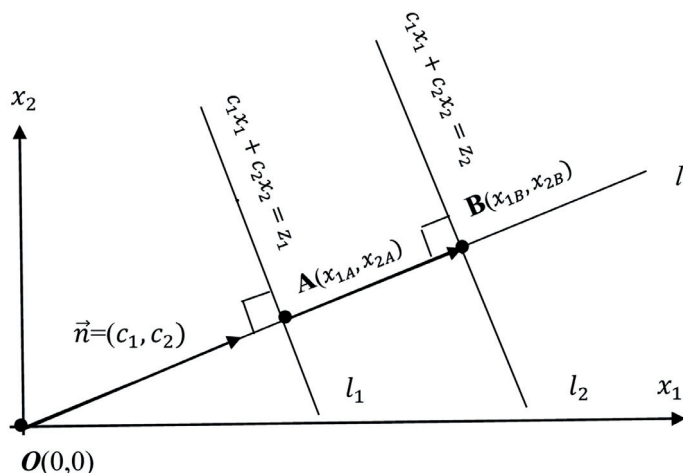


Рис. 1 / Fig. 1. Линии уровня l_1, l_2 целевой функции, нормальный вектор $\vec{n}$ в задаче (7)–(9) / Level lines l_1, l_2 of the objective function, the normal vector $\vec{n}$ in problem (7)–(9).

Источник: составлено авторами.

На рис. 1 приведены нормальный вектор $\vec{n}$, прямая l с направляющим вектором $\vec{n}$, линия уровня l_1 , проходящая через точку A , линия уровня l_2 , проходящая через точку B . Линия уровня l_2 получена путём перемещения линии уровня l_1 параллельно начальному положению в направлении вектора $\vec{n}$. Заметим, что $z(B) > z(A)$. Действительно, $z(B) - z(A) = z_2 - z_1 = (c_1x_{1B} + c_2x_{2B}) - (c_1x_{1A} + c_2x_{2A}) = c_1(x_{1B} - x_{1A}) + c_2(x_{2B} - x_{2A}) = \vec{n} \cdot \overline{AB}$, где $\vec{n} \cdot \overline{AB}$ – скалярное произведение векторов $\vec{n}$ и $\overline{AB} = (x_{1B} - x_{1A}, x_{2B} - x_{2A})$. Так как угол между векторами $\vec{n}$ и $\overline{AB}$ равен нулю, то $z(B) - z(A) = \vec{n} \cdot \overline{AB} = |\vec{n}| \cdot |\overline{AB}| \cos(0) > 0$. Следовательно, значения целевой функции увеличиваются, если линию уровня перемещать параллельно начальному положению в направлении нормального вектора $\vec{n}$. На этом утверждении основан алгоритм графического метода решения задачи линейного программирования с двумя переменными на максимум (7)–(9):

1. Строится ОДР.
2. От начала координат откладывается нормальный вектор $\vec{n} = (c_1, c_2)$.
3. Перпендикулярно нормальному вектору $\vec{n}$ проводится одна линия уровня.
4. Линия уровня перемещается в направлении нормального вектора $\vec{n}$ до положения опорной прямой, т. е. до крайнего положения, при котором линия уровня ещё имеет хотя бы одну общую точку с ОДР.
5. Общие точки ОДР и опорной прямой образуют множество оптимальных решений.

В данной работе рассматривается случай, когда все параметры модели и элементы технологической матрицы положительны и оптимальное решение является единственным. Рассмотрим конкретную задачу планирования производства двух видов продукции с использованием трёх видов ресурсов. Даны прибыли от реализации единицы продукции первого и второго видов $c_1 = 5$, $c_2 = 6$ и объёмы трёх используемых видов ресурсов $b_1 = 145$, $b_2 = 65$, $b_3 = 105$. Расходы i -го вида ресурса на изготовление единицы j -го вида продукции a_{ij} являются элементами следующей технологической матрицы:

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 4 & 3 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

В этом случае задача (7)–(9) приобретает вид:

$$z = 5x_1 + 6x_2 \rightarrow \max, \quad (10)$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 \leq 145, \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 65, \\ 7x_1 + 3x_2 \leq 105, \end{cases} \quad (11)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \quad (12)$$

Результаты решения задачи (10)–(12) графическим методом приведены на рис. 2: ОДР – пятиугольник $OABCD$, опорной прямой является линия уровня $z = 115$, т. е. прямая $5x_1 + 6x_2 = 115$, единственным оптимальным решением является точка $B(5,15)$ (или вектор $X^* = (5,15)$), $z_{\max} = 115$.

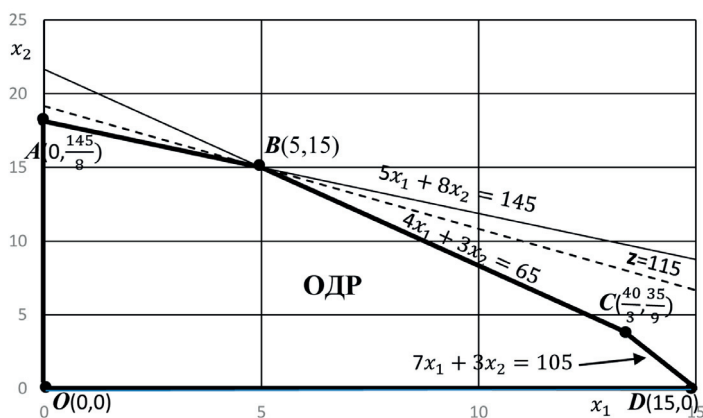


Рис. 2. / Fig. 2. ОДР $OABCD$, опорная прямая $z = 115$ (---) и оптимальное решение $B(5,15)$ в задаче (10)–(12) / The feasible region $OABCD$, the supporting line $z = 115$ (---), and the optimal solution $B(5,15)$ in problem (10)–(12).

Источник: составлено авторами.

Устойчивость оптимального решения

Уравнение прямой с угловым коэффициентом k , проходящей через точку $M_0(x_{10}, x_{20})$, имеет вид $x_2 - x_{20} = k(x_1 - x_{10})$. Если φ – угол наклона прямой, то $k = \operatorname{tg} \varphi$. Если точка $M_0(x_{10}, x_{20})$ фиксирована, то изменение k приведёт к изменению угла наклона прямой, т. е. к вращению прямой вокруг точки M_0 . В результате получим семейство прямых, которые могут быть получены путём вращения какой-то одной прямой. На рис. 2 прямые AB , BC и опорная прямая $z = 115$ проходят через точку $B(5, 15)$ и имеют угловые коэффициенты $k_1 = -5/8$, $k_2 = -4/3$ и $k_z = -5/6$.

В общем случае, когда $z = c_1x_1 + c_2x_2$, формула для углового коэффициента k_z опорной прямой $c_1x_1 + c_2x_2 = c$ имеет вид:

$$k_z = -c_1 / c_2, \quad (13)$$

где мы считаем, что $c_1 > 0$, $c_2 > 0$.

В нашем случае $c_1 = 5$, $c_2 = 6$, $z = 5x_1 + 6x_2$. Пусть прибыль $c_2 = 6$ фиксирована. Если придать величине c_1 достаточно малое приращение, то целевая функция будет иметь вид $z = c_1x_1 + 6x_2$ и получит малое приращение. Следовательно, в других вершинах максимум не будет достигаться, вершина B сохранит статус единственного оптимального решения, новая опорная прямая будет получена путём достаточно малого вращения старой опорной прямой $z = 115$ вокруг точки B . Равенство (13) приобретает вид:

$$k_z = -c_1 / 6. \quad (14)$$

При возрастании c_1 правая часть формулы (14) убывает, угол наклона φ убывает, новая опорная прямая будет получена от старой опорной прямой $z = 115$ путём вращения по часовой стрелке. Статус опорной прямой при вращении сохранится до перехода к предельному положению, которым является прямая BC с угловым коэффициентом $k_2 = -4/3$. Из равенства $-c_1/6 = -4/3$ находим верхний предел при увеличении c_1 : $c_{1,\max} = 8$. При $c_1 = 8$ вершина B остаётся оптимальной, но появляется альтернативная оптимальная вершина C . При дальнейшем увеличении c_1 вершина B перестаёт быть оптимальной (оптимальной становится вершина C).

При убывании c_1 правая часть формулы (14) возрастает, угол наклона φ возрастает, новая опорная прямая будет получена от старой опорной прямой $z = 115$ путём вращения против часовой стрелки. Статус опорной прямой при вращении сохранится до перехода к предельному положению, которым является прямая AB с угловым коэффициентом $k_1 = -5/8$. Из равенства $-c_1/6 = -5/8$ находим нижний предел при уменьшении c_1 : $c_{1,\min} = 3,75$. При $c_1 = 3,75$ вершина B остаётся оптимальной, появляется альтернативная оптимальная вершина A . При дальнейшем уменьшении c_1 вершина B перестаёт быть оптимальной (оптимальной становится вершина A). Итак, при $c_2 = 6$ и $c_1 \in [3,75; 8]$ оптимальное решение остаётся неизменным.

Аналогично можно найти пределы изменения значения прибыли c_2 , при которых оптимальное решение остаётся неизменным, если прибыль $c_1 = 5$ фиксирована.

сирована. В общем случае интервалы изменения величин c_1 и c_2 не совпадают. Совпадение происходит, когда, как в нашем случае, угловые коэффициенты $k_1 = -5/8$, $k_2 = -4/3$ и $k_z = -5/6$ прямых AB , BC и опорной прямой $z = 115$ связаны соотношением $k_z = -k_1 k_2$. Убедимся в этом. Так как $z = 5x_1 + c_2 x_2$, равенство (13) приобретает вид:

$$k_z = -5/c_2. \quad (15)$$

При достаточно малом изменении c_2 новая опорная прямая может быть получена от старой опорной прямой $z = 115$ путём вращения вокруг точки B . Переходя к предельным положениям, в которых при вращении ещё сохраняется статус опорной прямой, найдём пределы изменения c_2 . Из равенства $-5/c_2 = -5/8$ находим верхний предел при увеличении c_2 : $c_{2,\max} = 8$. Из равенства $-5/c_2 = -4/3$ находим нижний предел при уменьшении величины c_2 : $c_{2,\min} = 3,75$. Итак, при $c_1 = 5$ и $c_2 \in [3,75; 8]$ оптимальное решение остаётся неизменным.

Теневые цены

На рис. 2 оптимальное решение $B(5,15)$ является точкой пересечения прямых $5x_1 + 8x_2 = 145$ и $4x_1 + 3x_2 = 65$. Следовательно, при таком оптимальном плане производства ресурсы первого и второго видов использованы полностью. Так как $7 \cdot 5 + 3 \cdot 15 < 105$, то в точке $B(5,15)$ имеет место неполное использование ресурса третьего вида. В этом случае ограничения $5x_1 + 8x_2 \leq 145$ и $4x_1 + 3x_2 \leq 65$ называются связанными, а ограничение $7x_1 + 3x_2 \leq 105$ называется несвязанным.

Предположим, что мы решили докупить полностью использованный ресурс первого вида, оставляя при этом неизменными объёмы остальных двух видов ресурсов. Величина изменения прибыли при увеличении объёма ресурса на единицу называется теневой ценой этого вида ресурса. Ясно, что покупка ресурса, который не использован полностью, не позволит выпустить дополнительную продукцию и не приведёт к изменению прибыли. Теневая цена такого вида ресурса равна нулю. Пусть Δr_1 – объём ресурса первого вида, купленного дополнительно, а $x_1^* = 5 + \Delta x_1 \geq 0$ и $x_2^* = 15 + \Delta x_2 \geq 0$ – координаты нового оптимального решения, найденные при неизменных значениях объёмов ресурсов второго и третьего видов при условии, что ограничения на первый и второй виды ресурсов остаются связанными. Найдём пределы изменения Δr_1 :

$$\begin{cases} 5(5 + \Delta x_1) + 8(15 + \Delta x_2) = 145 + \Delta r_1, \\ 4(5 + \Delta x_1) + 3(15 + \Delta x_2) = 65, \\ 7(5 + \Delta x_1) + 3(15 + \Delta x_2) \leq 105, \\ 5 + \Delta x_1 \geq 0, 15 + \Delta x_2 \geq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5\Delta x_1 + 8\Delta x_2 = \Delta r_1, \\ 4\Delta x_1 + 3\Delta x_2 = 0, \\ 7\Delta x_1 + 3\Delta x_2 \leq 25, \\ \Delta x_1 \geq -5, \Delta x_2 \geq -15. \end{cases} \quad (16)$$

Из первого и второго уравнений системы (16) следует, что $\Delta x_1 = -\frac{3}{17}\Delta r_1$,

$\Delta x_2 = \frac{4}{17}\Delta r_1$. Подставим эти выражения в неравенства системы (16):

$$\begin{cases} 7\left(-\frac{3}{17}\Delta r_1\right) + 3\frac{4}{17}\Delta r_1 \leq 25, \\ -\frac{3}{17}\Delta r_1 \geq -5, \frac{4}{17}\Delta r_1 \geq -15. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta r_1 \geq -\frac{425}{9}, \\ \Delta r_1 \leq \frac{85}{3}, \Delta r_1 \geq -\frac{255}{4}. \end{cases}$$

Итак, в общем случае $-425/9 \leq \Delta r_1 \leq 85/3$, а если мы покупаем первый вид ресурса, то $0 \leq \Delta r_1 \leq 85/3$. Найдём новое значение целевой функции:

$$z(5 + \Delta x_1, 15 + \Delta x_2) = 5\left(5 - \frac{3}{17}\Delta r_1\right) + 6\left(15 + \frac{4}{17}\Delta r_1\right) = 115 + \frac{9}{17}\Delta r_1.$$

Отсюда следует, что величина изменения прибыли при увеличении объема ресурса первого вида на единицу, т.е. теневая цена этого вида ресурса, равна $\frac{9}{17}$.

Эта цена действует при изменении Δr_1 на отрезке $-\frac{425}{9} \leq \Delta r_1 \leq \frac{85}{3}$.

На рис. 2 при увеличении $\Delta r_1 > 0$ прямая $5x_1 + 8x_2 = 145$ перемещается вверх, оптимальное решение скользит вверх по прямой $4x_1 + 3x_2 = 65$. При некоторых Δr_1 ограничение на ресурс первого вида может стать несвязанным. На рис. 3 мы видим, что $\Delta r_1 = 85/3$ – предельное значение, при котором первый и второй виды ресурсов ещё остаются связанными. При этом значении $B(0, 65/3)$ – оптимальное решение, $z = 130$ – опорная прямая (см. рис. 3).

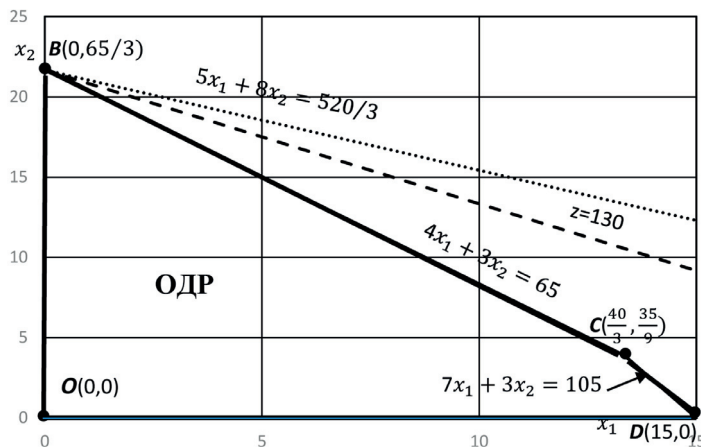


Рис. 3 / Fig. 3. ОДР $OBCD$, опорная прямая $z = 130$ (---), оптимальное решение $B(0, 65/3)$ при $\Delta r_1 = 85/3$ / The feasible region $OBCD$, the supporting line $z = 130$ (---), the optimal solution $B(0, 65/3)$ at $\Delta r_1 = 85/3$.

Источник: составлено авторами.

Аналогично, на рис. 2 при уменьшении $\Delta r_1 < 0$ прямая $5x_1 + 8x_2 = 145$ перемещается вниз, оптимальное решение скользит вниз по прямой $4x_1 + 3x_2 = 65$.

При некоторых Δr_1 ограничение на ресурс второго вида может стать несвязанным. На рис. 4 мы видим, что $\Delta r_1 = -425/9$ – предельное значение, при котором первый и второй виды ресурсов ещё остаются связанными. При этом значении $B(40/3, 35/9)$ – оптимальное решение, $z = 90$ – опорная прямая.

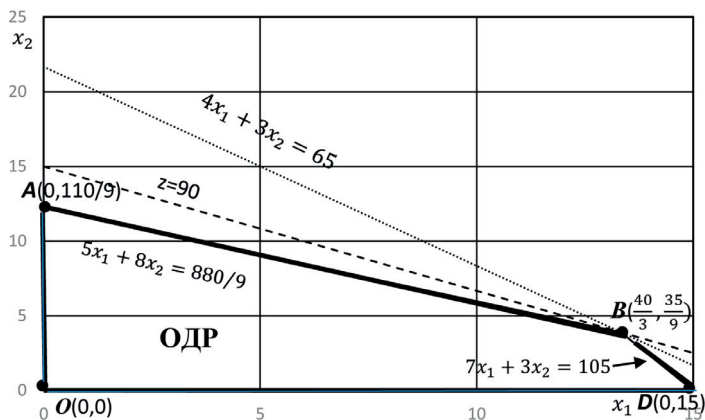


Рис. 4 / Fig. 4. ОДР $OABD$, опорная прямая $z = 90$ (---), оптимальное решение $B(40/3, 35/9)$ при $\Delta r_1 = -425/9$ / The feasible region $OABD$, the supporting line $z = 90$ (---), the optimal solution $B(40/3, 35/9)$ at $\Delta r_1 = -425/9$.

Источник: составлено авторами.

Искомую теньевую цену первого вида ресурса можно найти и из следующих соображений [2]. Из рис. 3 и рис. 4 видно, что при изменении величины Δr_1 от значения $\Delta r_1 = -425/9$ до значения $\Delta r_1 = 85/3$ значение целевой функции z , являющейся линейной функцией вида $z = k\Delta r_1 + b$ переменной Δr_1 , меняется от значения $z = 90$ до значения $z = 130$. Так как значение теньевой цены первого вида ресурса равно значению коэффициента k , то значение теньевой цены равно

$$\frac{130 - 90}{85/3 - (-425/9)} = \frac{9}{17}.$$

Аналогично найдём теньевую цену второго вида ресурса. Пусть Δr_2 – объём ресурса второго вида, купленного дополнительно, $x_1^* = 5 + \Delta x_1 \geq 0$ и $x_2^* = 15 + \Delta x_2 \geq 0$ – координаты нового оптимального решения, найденные при неизменных значениях объёмов ресурсов первого и третьего видов при условии, что ограничения на первый и второй виды ресурсов остаются связанными. Найдём пределы изменения Δx_2 :

$$\begin{cases} 5(5 + \Delta x_1) + 8(15 + \Delta x_2) = 145, \\ 4(5 + \Delta x_1) + 3(15 + \Delta x_2) = 65 + \Delta r_2, \\ 7(5 + \Delta x_1) + 3(15 + \Delta x_2) \leq 105, \\ 5 + \Delta x_1 \geq 0, 15 + \Delta x_2 \geq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5\Delta x_1 + 8\Delta x_2 = 0, \\ 4\Delta x_1 + 3\Delta x_2 = \Delta r_2, \\ 7\Delta x_1 + 3\Delta x_2 \leq 25, \\ \Delta x_1 \geq -5, \Delta x_2 \geq -15. \end{cases} \quad (17)$$

Система (17) решается так же, как система (16). Если мы покупаем второй вид ресурса, то $0 \leq \Delta r_2 \leq 425/41$, в общем случае $-85/8 \leq \Delta r_2 \leq 425/41$,

$$z(5 + \Delta x_1, 15 + \Delta x_2) = 5 \left(5 + \frac{8}{17} \Delta r_2 \right) + 6 \left(15 - \frac{5}{17} \Delta r_2 \right) = 115 + \frac{10}{17} \Delta r_2.$$

Величина изменения прибыли при увеличении объёма ресурса второго вида на единицу, т. е. теневая цена этого ресурса, равна $\frac{10}{17}$ при $-\frac{85}{8} \leq \Delta r_2 \leq \frac{425}{41}$.

На рис. 2 при увеличении $\Delta r_2 > 0$ прямая $4x_1 + 3x_2 = 65$ перемещается вверх, оптимальное решение скользит вниз по прямой $5x_1 + 8x_2 = 145$. При некоторых Δr_2 ограничение на ресурс второго вида может стать несвязанным. На рис. 5 мы видим, что при предельном значении $\Delta r_2 = 425/41$ первый и второй виды ресурсов ещё остаются связанными.

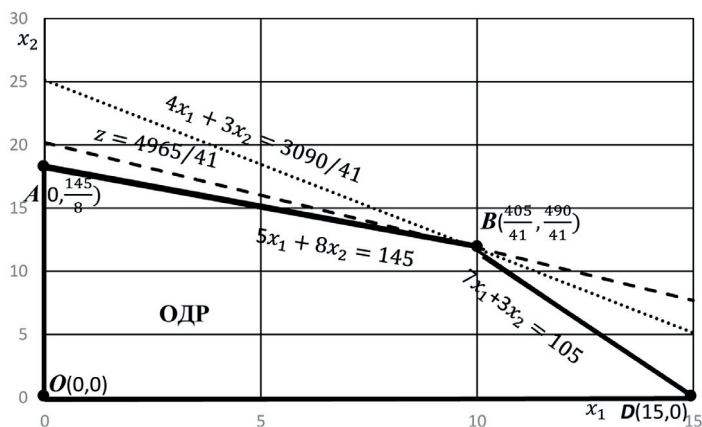


Рис. 5 / Fig. 5. ОДР $OABD$, опорная прямая $z = 4965/41$ (---), оптимальное решение $B(405/41, 490/41)$ при $\Delta r_2 = 425/41$ / The feasible region $OABD$, the supporting line $z = 4965/41$ (---), the optimal solution $B(405/41, 490/41)$ at $\Delta r_2 = 425/41$.

Источник: составлено авторами.

Аналогично, на рис. 2 при уменьшении $\Delta r_2 < 0$ прямая $4x_1 + 3x_2 = 65$ перемещается вниз, оптимальное решение скользит вверх по прямой $5x_1 + 8x_2 = 145$. При некоторых Δr_2 ограничение на ресурс первого вида может стать несвязанным. На рис. 6 мы видим, что $\Delta r_2 = -85/8$ – предельное значение, при котором первый и второй виды ресурсов ещё остаются связанными.

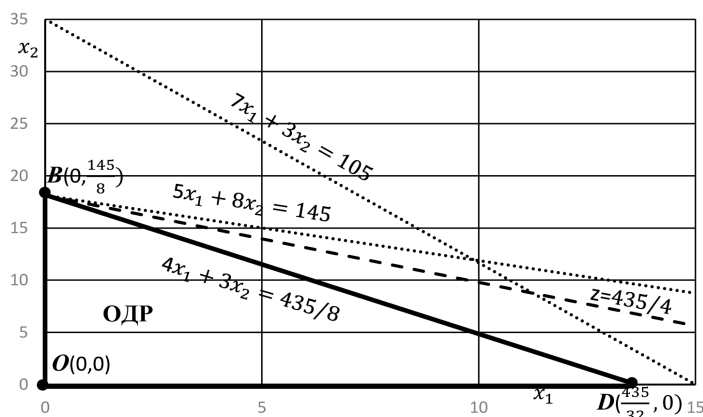


Рис. 6 / Fig. 6. ОДР OBD , опорная прямая $z = 435/4$ (---), оптимальное решение $B(0; 145/8)$ при $\Delta r_2 = -85/8$ / The feasible region OBD , the supporting line $z = 435/4$ (---), the optimal solution $B(0; 145/8)$ at $\Delta r_2 = -85/8$.

Источник: составлено авторами.

Как видно из рис. 5 и рис. 6, при изменении величины Δr_2 от значения $\Delta r_2 = -85/8$ до значения $\Delta r_2 = 425/41$ значение целевой функции z , являющейся линейной функцией вида $z = k\Delta r_2 + b$ переменной Δr_2 , меняется от значения $z = 435/4$ до значения $z = 4965/41$. Так как значение теневой цены второго вида ресурса равно значению коэффициента k в зависимости $z = k\Delta r_2 + b$, то это значение теневой цены равно $\frac{4965/41 - 435/4}{425/41 - (-85/8)} = \frac{10}{17}$.

Теневые цены всех трёх видов ресурсов в этой задаче образуют тройку $(9/17, 10/17, 0)$. Отметим, что если составить по задаче (10)–(12) двойственную задачу и найти её решение симплекс-методом, то координатами этого решения будут теневые цены [14].

Заключение

Важно проанализировать, как изменится значение максимальной прибыли при изменении прибыли за единицу того или иного продукта при сохранении оптимального решения. Для этого нужно найти пределы изменения этих прибылей, при которых оптимальное решение остаётся неизменным. Знание того, какие ресурсы как используются, определяет узкие места в обеспечении производственного процесса. Можно продать излишки ресурсов для получения дополнительного дохода или докупить дополнительные объёмы тех ресурсов, которые используются полностью. Эти новые объёмы вместе с оставшимися излишками других ресурсов позволят выпустить дополнительную продукцию и получить дополнительный доход. Пост-оптимальный анализ является важным этапом после решения задачи линейного программирования.

Статья поступила в редакцию 28.05.2021 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Г. Линейное программирование (теория, методы и приложения). М.: Наука, 1969. 424 с.
2. Taha H. A. Operations Research: An Introduction. Harlow, England: Pearson Education, 2017. 849 p.
3. Arya J. C., Lardner R. W. Mathematical analysis for business, economics, and the life and social sciences. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1989. 798 p.
4. Макжанова Я. В., Шаракшане А. А., Зверева А. И. Оптимизация нагрузки доцента как задача линейного программирования // Известия Российского экономического университета им. Г. В. Плеханова (электронный научный журнал). 2016. № 1 (23). С. 160–177. URL: https://www.rea.ru/ru/org/managements/izdcentr/Documents/Известия%20РЕУ_ном23.pdf (дата обращения: 12.11.2020).
5. Попов В. А. Преподавание экономики и математики в единстве // Современная математика и концепции инновационного математического образования: материалы конференции. Т. 6. № 1. М.: Издательский дом МФО, 2019. С. 362–370.
6. Попов В. А. Математика и экономика // Современная математика и концепции инновационного математического образования: материалы конференции. Т. 7. № 1. М.: Издательский дом МФО, 2020. С. 435–441.
7. Зверева А. И. Совершенствование технологий преподавания высшей математики для студентов экономического университета // Управление региональным развитием: проблемы, возможности, перспективы развития: сборник научных статей по материалам Международной научно-практической конференции с международным участием (Чебоксары, 02 сентября 2018 г.) /отв. ред. Е. А. Ильина. Чебоксары: Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, 2018. С. 191–195.
8. Высшая математика (для гуманитарных специальностей) / Сухорукова И. В., Савина О. И., Лавриненко Т. А., Артюшина Т. Г. М.: Издательство Российского экономического университета им. Г. В. Плеханова, 2018. 112 с.
9. Рыжкова Т. В., Тушканов Д. А., Чистякова Н. А. К вопросу об организации самостоятельной работы студентов (на примере кафедры высшей математики РЭУ им. Г. В. Плеханова) // Известия Российского экономического университета им. Г. В. Плеханова (электронный научный журнал). 2015. № 4 (22) С. 411–431. URL: [https://www.rea.ru/ru/org/managements/izdcentr/Pages/4\(22\).aspx](https://www.rea.ru/ru/org/managements/izdcentr/Pages/4(22).aspx) (дата обращения: 12.11.2020).
10. Хасанов А. С. Индивидуальные домашние задания по основам линейного программирования // Известия Российского экономического университета им. Г. В. Плеханова (электронный научный журнал). 2013. № 4 (14). С. 92–121. URL: <https://www.rea.ru/ru/org/managements/izdcentr/Pages/archiveizvestia.aspx> (дата обращения: 12.11.2020).
11. Хасанов А. С. Индивидуальные домашние задания по основам линейной алгебры // Известия Российского экономического университета им. Г. В. Плеханова (электронный научный журнал). 2013. № 4 (14). С. 122–165. URL: <https://www.rea.ru/ru/org/managements/izdcentr/Pages/archiveizvestia.aspx> (дата обращения: 12.11.2020).
12. Хасанов А. С. Об особенностях алгоритмов решения задач линейного программирования с неограниченными областями допустимых решений // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2017. № 1. С. 113–123. DOI: 10.18384/2310-7251-2017-1-113-123.
13. Макжанова Я. В., Зверева А. И., Хачко О. И. Сборник задач по теме «Функция двух переменных». М.: Типография «Белый ветер», 2018. 38 с.
14. Курс высшей математики для экономистов / Бобрик Г. И., Гладких И. М., Гринцевичюс Р. К., Матвеев В. И., Рудык Б. М., Сагитов Р. В., Шершнев В. Г. М.: ИНФРА-М, 2016. 647 с.

REFERENCES

1. Yudin D. B., Gol'shtein E. G. *Lineinoe programmirovaniye (teoriya, metody i prilozheniya)* [Linear programming (theory, methods and applications)]. Moscow, Nauka Publ., 1969. 424 p.
2. Taha H. A. *Operations Research: An Introduction*. Harlow, England, Pearson Education Publ., 2017. 849 p.
3. Arya J. C., Lardner R. W. *Mathematical analysis for business, economics, and the life and social sciences*. Englewood Cliffs, Prentice Hall Publ., 1989. 798 p.
4. Makzhanova Ya. V., Sharakhshane A. A., Zvereva A. I. [Optimization of an associate professor's workload as a linear programming problem]. In: *Izvestiya Rossiiskogo ekonomicheskogo universiteta im. G. V. Plekhanova (elektronnyi nauchnyi zhurnal)* [Bulletin of Plekhanov Russian University of Economics (electronic scientific journal)], 2016, no. 1 (23), pp. 160–177. Available at: https://www.rea.ru/ru/org/managements/izdcentr/Documents/Известия%20РЕУ_ном23.pdf (accessed: 12.11.2020).
5. Popov V. A. [Education in economics, finance and mathematics]. In: *Sovremennaya matematika i kontseptsii innovatsionnogo matematicheskogo obrazovaniya: materialy konferentsii. T. 6. № 1* [Contemporary mathematics and the concepts of innovative mathematical education: conference proceedings. Vol. 6. No. 1]. Moscow, Publishing House of the Moscow Physical Society, 2019, pp. 362–370.
6. Popov V. A. [Mathematics and Economics]. In: *Sovremennaya matematika i kontseptsii innovatsionnogo matematicheskogo obrazovaniya: materialy konferentsii. T. 7. № 1* [Contemporary mathematics and the concepts of innovative mathematical education: conference proceedings. Vol. 7. No. 1]. Moscow, Publishing House of the Moscow Physical Society, 2020, pp. 435–441.
7. Zvereva A. I. [Improvement of technologies in teaching the higher mathematics for students of the economic university]. In: *Upravlenie regional'nyim razvitiem: problemy, vozmozhnosti, perspektivy razvitiya: sbornik nauchnykh statei po materialam Mezhdunarodnoi nauchno-prakticheskoi konferentsii s mezhdunarodnym uchastiem (Cheboksary, 02 sentyabrya 2018 g.)* [Regional development management: problems, opportunities, development prospects: a collection of scientific articles based on the materials of the International Scientific and Practical Conference with International Participation (Cheboksary, September 02, 2018)]. Cheboksary, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University Publ., 2018, pp. 191–195.
8. Sukhorukova I. V., Savina O. I., Lavrinenko T. A., Artyushina T. G. *Vyshshaya matematika (dlya gumanitarnykh spetsial'nostei)* [Higher mathematics (for humanitarian specialties)]. Moscow, Plekhanov Russian University of Economics Publ., 2018. 112 p.
9. Ryzhkova T. V., Tushkanov D. A., Chistyakova N. A. [Concerning the organization of independent work of students (case study Department of Mathematics, Plekhanov Russian University of Economics)]. In: *Izvestiya Rossiiskogo ekonomicheskogo universiteta im. G. V. Plekhanova (elektronnyi nauchnyi zhurnal)* [Bulletin of Plekhanov Russian University of Economics (electronic scientific journal)], 2015, no. 4 (22), pp. 411–431. Available at: https://www.rea.ru/ru/org/managements/izdcentr/Pages/4_22.aspx (accessed: 12.11.2020).
10. Khasanov A. S. [Individual homework on the basics of linear programming]. In: *Izvestiya Rossiiskogo ekonomicheskogo universiteta im. G. V. Plekhanova (elektronnyi nauchnyi zhurnal)* [Bulletin of Plekhanov Russian University of Economics (electronic scientific journal)], 2013, no. 4 (14), pp. 92–121. Available at: <https://www.rea.ru/ru/org/managements/izdcentr/Pages/archiveizvestia.aspx> (accessed: 12.11.2020).
11. Khasanov A. S. [Individual homework on the fundamentals of linear algebra]. In: *Izvestiya Rossiiskogo ekonomicheskogo universiteta im. G. V. Plekhanova (elektronnyi nauchnyi zhurnal)* [Bulletin of Plekhanov Russian University of Economics (electronic scientific journal)],

- 2013, no. 4 (14), pp. 122–165. Available at: <https://www.rea.ru/ru/org/managements/izdcentr/Pages/archiveizvestia.aspx> (accessed: 12.11.2020).
12. Khasanov A. S. [Peculiarities of algorithms for solving linear programming problems with unbounded feasible regions]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-Matematika* [Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], 2017, no. 1, pp. 113–123. DOI: 10.18384/2310-7251-2017-1-113-123.
13. Makzhanova Ya. V., Zvereva A. I., Khachko O. I. *Sbornik zadach po teme «Funktsiya dvukh peremennykh»* [Collection of tasks on the topic “The function of two variables”]. Moscow, Tipografiya «Belyi veter» Publ., 2018. 38 p.
14. Bobrik G. I., Gladkikh I. M., Grintsevichyus R. K., Matveev V. I., Rudyk B. M., Sagitov R. V., Shershnev V. G. *Kurs vysshei matematiki dlya ekonomistov* [The course of higher mathematics for economists]. Moscow, INFRA-M Publ., 2016. 647 p.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Хасанов Анис Салыхович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики Российского экономического университета имени Г. В. Плеханова; e-mail: ankhasanov@yandex.ru

Зверева Анна Игоревна – старший преподаватель кафедры высшей математики Российского экономического университета имени Г. В. Плеханова; e-mail: azvereva@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Anis S. Khasanov – Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Department of Higher Mathematics, Plekhanov Russian University of Economics; e-mail: ankhasanov@yandex.ru.

Anna I. Zvereva – Senior Lecturer, Department of Higher Mathematics, Plekhanov Russian University of Economics; e-mail: azvereva@mail.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Хасанов А. С., Зверева А. И. Графический анализ чувствительности оптимальных решений задач линейного программирования // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2021. № 2. С. 61–76. DOI: 10.18384/2310-7251-2021-2-61-76.

FOR CITATION

Khasanov A. S., Zvereva A. I. Graphical sensitivity analysis of optimal solutions of linear programming problems. In: *Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*, 2021, no. 2, pp. 61–76. DOI: 10.18384/2310-7251-2021-2-61-76.

ПАМЯТИ МАТВЕЕВА ОЛЕГА АЛЕКСАНДРОВИЧА



(03.06.1956 – 05.07.2021)

На 66 году жизни скоропостижно скончался доцент кафедры математического анализа и геометрии, кандидат физико-математических наук Матвеев Олег Александрович.

Матвеев О. А. закончил РУДН и около сорока лет проработал в нашем университете: сначала в МОПИ им. Крупской, затем в МПУ и, наконец, во МГОУ. Он трудился сначала на кафедре геометрии, а затем на объединенной кафедре математического анализа и геометрии. Всё своё время он беззаветно отдавал служению делу науки и преподавания.

Научные интересы Олега Александровича были разнообразными: от вопросов пространств аффинной связности до проблемы реализации принципа преемственности в практике подготовки учителя математики.

О. А. Матвеев опубликовал более 100 научных работ. Он – автор множества учебных пособий по геометрии и высшей математики для студентов.

О. А. Матвеев тесно сотрудничал с журналом: активно публиковал свои работы, занимался рецензированием.

Его уважали и любили коллеги и студенты. Все окружающие ценили Олега Александровича за его высочайший профессионализм и непревзойденное чувство юмора. Под руководством О. А. Матвеева было защищено множество выпускных квалификационных работ. Олег Александрович был высококвалифицированным специалистом, одаренным, терпеливым и доброжелательным педагогом.

Светлая память об Олеге Александровиче Матвееве навсегда сохранится в сердцах сотрудников физико-математического факультета МГОУ, всего университета, его коллег и учеников.



ВЕСТНИК МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ОБЛАСТНОГО УНИВЕРСИТЕТА

Рецензируемый научный журнал «Вестник Московского государственного областного университета» основан в 1998 г.

Сегодня Московским государственным областным университетом выпускается десять научных журналов по разным отраслям науки. Журналы включены в Перечень ВАК (составленный Высшей аттестационной комиссией при Минобрнауки РФ Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание учёной степени кандидата наук, на соискание учёной степени доктора наук). Журналы включены в базу данных Российского индекса научного цитирования (РИНЦ).

Печатные версии журналов зарегистрированы в Федеральной службе по надзору за соблюдением законодательства в сфере массовых коммуникаций и охране культурного наследия.

Полнотекстовые версии журналов доступны в интернете на сайте Вестника Московского государственного областного университета (www.vestnik-mgou.ru), а также на платформах Научной электронной библиотеки (www.elibrary.ru) и Научной электронной библиотеки «КиберЛенинка» (<https://cyberleninka.ru>).

ВЕСТНИК МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ОБЛАСТНОГО УНИВЕРСИТЕТА

СЕРИЯ: ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА
2021. № 2

Над номером работали:

Литературный редактор М.С. Тарасова
Переводчик И.А. Улиткин
Корректор М.С. Тарасова
Компьютерная верстка Н.Н. Жильцов

Отдел по изданию научного журнала
«Вестник Московского государственного областного университета»
Информационно-издательского управления МГОУ
105005, г. Москва, ул. Радио, д. 10А, офис 98
тел.: (495) 780-09-42 (доб. 6101)
e-mail: info@vestnik-mgou.ru
сайт: www.vestnik-mgou.ru

Формат 70x108/16. Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура «Minion Pro».

Тираж 500 экз. Усл. п. л. 5, уч.-изд. л. 4,5.

Подписано в печать: 30.06.2021. Дата выхода в свет: 12.07.2021. Заказ № 2021/06-08.

Отпечатано в ИИУ МГОУ
105005, г. Москва, ул. Радио, 10А