ISSN 2072-8387 (print)
ISSN 2310-7251 (online)

МГОУ

Вестник

Московского государственного областного университета

Серия Физика-математика

ОЦЕНКА ПЕРИОДА ШЕРОХОВАТОСТИ ПРОТИВООБЛЕДЕНИТЕЛЬНЫХ ПОКРЫТИЙ ТЕЛА В ПОТОКЕ ВОЗДУХА С ПЕРЕОХЛАЖДЕННЫМИ КАПЛЯМИ

ИССЛЕДОВАНИЕ СЕТОЧНОЙ СХОДИМОСТИ ЯВНОГО МЕТОДА МАК-КОРМАКА, ПРИМЕНЕННОГО К РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЙ КОНТИНУАЛЬНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИ ЗАРЯЖЕННОГО АЭРОЗОЛЯ

ФОРМУЛЫ ДЛЯ ПРОФИЛЕЙ ТЕМПЕРАТУРЫ И КОНЦЕНТРАЦИИ ВОКРУГ ДВУХ НАГРЕВАЕМЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ ИЗЛУЧЕНИЕМ ОДИНАКОВЫХ ИСПАРЯЮЩИХСЯ КАПЕЛЬ

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА

2021 / № 1

ВЕСТНИК
МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
ОБЛАСТНОГО УНИВЕРСИТЕТА

ISSN 2072-8387 (print) 2021 / № 1 ISSN 2310-7251 (online)

серия
ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА

Рецензируемый научный журнал. Основан в 1998 г.

Журнал «Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика» включён Высшей аттестационной комиссией при Министерстве образования и науки Российской Федерации в «Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук» по следующим научным специальностям: 01.04.02 – Теоретическая физика (физико-математические науки); 01.04.07 – Физика конденсированного состояния (физико-математические науки) (См.: Список журналов на сайте ВАК при Минобрнауки России).

The peer-reviewed journal was founded in 1998

«Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics» is included by the Supreme Certifying Commission of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation into "the List of leading reviewed academic journals and periodicals recommended for publishing in corresponding series basic research thesis results for a Ph.D. Candidate or Doctorate Degree" on the following scientific specialities: 01.04.02 – Theoretical physics (physical-mathematical sciences); 01.04.07 – Physics of the condensed state (physical-mathematical sciences) (See: the online List of journals at the site of the Supreme Certifying Commission of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation).

ISSN 2072-8387 (print) 2021 / № 1 ISSN 2310-7251 (online)

series
PHYSICS AND MATHEMATICS

BULLETIN OF THE MOSCOW REGION
STATE UNIVERSITY

Учредитель журнала
«Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика»
Государственное образовательное учреждение высшего образования Московской области
Московский государственный областной университет
Выходит 4 раза в год

ISSN 2072-8387 (print)
ISSN 2310-7251 (online)

Рецензируемый научный журнал «Вестник московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика» публикует статьи по математическим проблемам термодинамики, кинетики и статистической физики; теории конденсированного состояния классических и квантовых, макроскопических и микроскопических систем; изучению различных состояний вещества и физических явлений в них; статистической физике и кинетической теории равновесных и неравновесных систем; теоретическому и экспериментальному исследованию физических свойств неупорядоченных неорганических систем; изучению экспериментального состояния конденсированных веществ и фазовых переходов в них. Журнал адресован ученым, докторантам, аспирантам и всем, интересующимся достижениями физико-математических наук.

Журнал «Вестник Московского государственного областного университета. Серия «Физика-математика» зарегистрирован в Федеральной службе по надзору за соблюдением законодательства в сфере массовых коммуникаций и охране культурного наследия. Регистрационное свидетельство ПИ № ФС 77-73344.

Индекс серии «Физика-математика» по Объединенному каталогу «Пресса России» 40723

Журнал включён в базу данных Российского индекса научного цитирования (РИНЦ), имеет полнотекстовую сетевую версию в Интернете на платформе Научной электронной библиотеки (www.elibrary.ru), с августа 2017 г. на платформе Научной электронной библиотеки «КиберЛенинка» (https://cyberleninka.ru), а также на сайте Московского государственного областного университета (www.vestnik-mgou.ru).

Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. – 2021. – № 1. – 120 с.

Адрес Отдела по изданию научного журнала «Вестник Московского государственного областного университета»
г. Москва, ул. Радио, д.10А, офис 98
тел.: (495) 780-09-42 (доб. 6101)
e-mail: info@vestnik-mgou.ru; сайт: www.vestnik-mgou.ru

Founder of journal
«Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics»
Moscow Region State University

Issued 4 times a year

ISSN 2072-8387 (print)
ISSN 2310-7251 (online)

The reviewed scientific journal “Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics” publishes articles on mathematical problems of thermodynamics, kinetics and statistical physics; the theory of the condensed state of classical and quantum, macroscopic and microscopic systems; the study of various states of substance and physical phenomena in them; statistical physics and the kinetic theory of equilibrium and non-equilibrium systems; theoretical and experimental research of physical features of disordered inorganic systems; the study of the experimental state of condensed substances and phase transitions in them. The journal is addressed to scientists, doctoral students, PhD students and everyone interested in the achievements of physical and mathematical sciences.

The series “Physics and Mathematics” of the Bulletin of the Moscow Region State University is registered in Federal service on supervision of legislation observance in sphere of mass communications and cultural heritage protection. The registration certificate ПИ № ФС 77 – 73344.

Index series «Physics and Mathematics» according to the union catalog «Press of Russia» 40723

The journal is included into the database of the Russian Science Citation Index, has a full text network version on the Internet on the platform of Scientific Electronic Library (www.elibrary.ru), and from August 2017 on the platform of the Scientific Electronic Library “CyberLeninka” (https://cyberleninka.ru), as well as at the site of the Moscow Region State University (www.vestnik-mgou.ru)

Bulletin of the Moscow State Regional University. Series: Physics and Mathematics. – 2021. – № 1. – 120 p.

The Editorial Board address:
Moscow Region State University
10A Radio st., office 98, Moscow, Russia
Phones: (495) 780-09-42 (add. 6101)
e-mail: info@vestnik-mgou.ru; site: www.vestnik-mgou.ru

СОДЕРЖАНИЕ

РАЗДЕЛ I. МАТЕМАТИКА

РАЗДЕЛ II. ФИЗИКА

РАЗДЕЛ III. ТЕОРИЯ И МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ И ВОСПИТАНИЯ

CONTENTS

SECTION I. MATHEMATICS

SECTION II. PHYSICS

SECTION III. THEORY AND METHODS OF TEACHING AND EDUCATION

МАТЕМАТИКА

УДК 514.75+512.54
DOI: 10.18384/2310-7251-2021-1-6-16

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ПРОЕКТИВНО ПЛОСКИХ МНОГООБРАЗИЙ АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ

Матвеев О. А., Марченко Т. А., Мельник О. С.

Московский государственный областной университет
141014, Московская область, г. Мытищи, ул. Веры Волошиной, д. 24, Российская Федерация

Аннотация
Цель работы состоит в уточнении свойств параллельных переносов многообразий аффинной связности размерности больше чем два, таких, что для любых, достаточно близких, трёх точек существует содержащее их двумерное автопараллельное многообразие.
Методы исследования. Для описания свойств некоторых классов пространств аффинной связности привлекаются методы дифференцируемых универсальных алгебр.
Результаты. Доказано, что в классе проективно плоских многообразий аффинной связности выполняется тождество псевдолинейности, отражающее свойства параллельных переносов. Выводится дифференциально-геометрическая характеристика тождества псевдолинейности, то есть, если размерность носителя больше, чем два, то это тождество равносильно тому, что соответствующее многообразие аффинной связности проективно плоское и имеет общую псевдосвязность (одинаковый параллелизм направлений) с многообразием аффинной связности без кручения.
Теоретическая и практическая значимость. Дифференциальная геометрия имеет многочисленные приложения в теоретической механике, в специальной и общей теориях относительности и других областях естествознания. Настоящее исследование, в частности, может быть использовано для построения конкретной математической модели, описывающей протекание, например, физических процессов.
Ключевые слова: проективно плоские многообразия аффинной связности, тензоры кривизны и кручения, параллельные переносы, геодезическая лупа

ON SOME PROPERTIES OF PROJECTIVE FLAT MANIFOLDS WITH AFFINE CONNECTION

O. Matveyev, T. Marchenko, O. Melnik
Moscow Region State University
ul. Very Voloshinoi 24, 141014 Mytishchi, Moscow region, Russian Federation

Abstract
Aim. We refine the properties of parallel translations of manifolds with affine connection of dimension greater than two, such that for any three points that are sufficiently close, there exists a two-dimensional autoparallel manifold containing them.
Methodology. We use the methods of differentiable universal algebras to describe the properties of certain classes of affine-connected spaces.
Results. We prove that in this class of projective flat manifolds with affine connection, the "pseudoline" identity is fulfilled, reflecting the properties of parallel translations. The differential-geometric characteristic of a "pseudoline" identity is derived, that is, if the dimension of the manifold is more than two, then the "pseudoline" identity is equivalent to the fact that the corresponding manifolds of affine connection are projective flat and have a common pseudoconnection (the same concurrency) with the manifold of affine connection with zero torsion.
Research implications. Differential geometry has numerous applications in theoretical mechanics, Special and General relativity theory, and other fields of natural sciences. This research can be employed to build a specific mathematical model describing the course of physical processes.
Keywords: projective flat manifolds with affine connection, curvature and torsion tensors, parallel translations, geodesic loop

Введение

В XXI веке мы ушли далеко вперёд в развитии от синтетического метода в геометрии, идущего от Междуречья, древней цивилизации Египта, древнегреческой философско-математической школы, а также и от первоначальных конструкций аналитического подхода Эпохи Возрождения, (когда Европа очнулась от тяжёлого сна Средневековья), связанных с рождением аналитической, проективной, начертательной геометрии.

Безусловно ясно, что математика в целом едина, и грубое разделение: геометрия, алгебра, математический анализ – условно. Однако при решении новых проблем, возникающих перед сообществом учёных важно понимать, какие ветви математики в первую очередь образуют фундамент новых теорий.

В XX веке мы ясно осознали, как геометрические методы оказывают мощное влияние на другие разделы математики. Например, построение теории пространств обобщённых функций в школе выдающегося советского математика академика Соболева привело фактически к революционным прогрессивным переменам в области уравнений математической физики. С другой стороны, применение мощного потенциала современной алгебры привело к кардинальным изменениям в развитии, в первую очередь, дифференциальной геометрии. Один из возможных алгебраических подходов к геометрии и общей теории относительности получил яркое воплощение в платформе, созданной в школе профессора Л. В. Сабинина (смотри, например, [7]). Основной идеей является систематическое применение дифференцируемых неассоциативных универсальных алгебр, таких, например, как квазигруппа, лупа в решении актуальных проблем геометрии и физики. Безусловно, здесь первоначальной точкой отсчёта является теория групп и алгебр Ли, которая получает очень перспективное обобщение. Некоторые промежуточные итоги этого направления подведены в работе [8]. Импульс, началом которого явилась Россия, немедленно нашёл приложение в Японии, Германии, Латинской Америке, в Соединённых штатах Америки. Тематика актуальна.

В нашем веке, когда теория категорий вошла в повседневную жизнь, изучение различных пространств проводится сравнением по некоторым признакам с другими близкими пространствами, которые более глубоко исследованы. В хороших случаях одно пространство допускает некоторый морфизм на другое. Этот метод используется в работах [5; 6]. Одним из простейших, но важным в приложениях, является классическое геодезическое отображение, которое рассматривается, например, в работах [1; 2; 3; 7]. В настоящей работе мы приводим скромный эскиз к внушительной красивой картине построенного теоретического здания, которое всё-таки требует косметических улучшений.

Тождество псевдолинейности в многообразиях аффинной связности

Определение 1. Будем говорить, что в гладком многообразии аффинной связности (M, ∇) выполняется тождество псевдолинейности, если существуют гладкие локальные функции $\varphi : M \times M \times M \to \mathbb{R}$, $\Psi : M \times M \times M \to \mathbb{R}$ такие, что локально имеет место тождество:

$$L_x^y z = \left[\varphi\left(y, x, z\right)\right]_y x_y^+ \left[\Psi\left(y, x, z\right)\right]_y z, \tag{1}$$

где $L_x^y z = \mathrm{Exp}_x \, \tau_x^y \left(\left(\mathrm{Exp}_y\right)^{-1} z\right)$, $\tau_x^y : T_y\left(M\right) \to T_x\left(M\right)$ – параллельный перенос касательных векторов вдоль отрезка геодезической линии, соединяющего точки y и x, T_y-пространство касательных векторов, выходящих из точки y, Exp – экспоненциальное отображение),

$$x_y^+ z = L_x^y z = \mathrm{Exp}_y \left(\left(\mathrm{Exp}_y\right)^{-1} x + \left(\mathrm{Exp}_y\right)^{-1} z\right),$$

$$t \,{\scriptscriptstyle\sim}\, y = \mathrm{Exp} \quad \left(t \left(\mathrm{Exp} \quad\right)^{-1} y\right).$$

Лемма 1. Если в многообразии аффинной связности (M, ∇) выполняется тождество псевдолинейности, то существуют гладкие функции $\overline{\varphi} : M \times M \times M \to \mathbb{R}, \overline{\Psi} : M \times M \times M \to \mathbb{R}$ такие, что выполняется тождество:

$$\left(L_x^y\right)^{-1} z=\left[\overline{\varphi}(y,x,z)\right]_y x\overset{+}{_y}\left[\overline{\Psi}(y,x,z)\right]_y z. \tag{2}$$

Доказательство. Применяя тождество (1) к очевидному равенству:

$$L_x^y\left(L_x^y\right)^{-1} z=z,$$

имеем:

$$\left[\varphi\left(y,x,\left(L_x^y\right)^{-1} z\right)\right]_y x\overset{+}{_y}\left[\Psi\left(y,x,\left(L_x^y\right)^{-1} z\right)\right]_y \left(L_x^y\right)^{-1} z=z.$$

Из этого соотношения следует тождество (2), если обозначить:

$$\overline{\varphi}(y,x,z)=-\varphi\left(y,x,\left(L_x^y\right)^{-1} z\right)\left[\Psi\left(y,x,\left(L_x^y\right)^{-1} z\right)\right]^{-1},$$

$$\overline{\Psi}(y,x,z)=\left[\Psi\left(y,x,\left(L_x^y\right)^{-1} z\right)\right]^{-1}$$

Лемма 2. Если в гладком многообразии аффинной связности выполняется тождество псевдолинейности, то существуют такие гладкие локальные функции $\alpha: M\times M\times M\to\mathbb{R}$, $\beta: M\times M\times M\to\mathbb{R}$, $\gamma: M\times M\times M\to\mathbb{R}$, что выполняется тождество:

$$h^y(x,z)w=\left[\alpha(y,x,z,w)\right]_y x\overset{+}{_y}\left[\beta(y,x,z,w)\right]_y z\overset{+}{_y}\left[\gamma(y,x,z,w)\right]_y w, \tag{3}$$

где $h^y(x,z)=L_y^z L_z^x L_x^y$ – преобразование элементарной голономии.

Лемма 3. Если в гладком многообразии аффинной связности (M, ∇) выполняется тождество псевдолинейности, то для любых достаточно близких четырёх точек x, y, z, w, принадлежащих двумерному подмногообразию в M, существуют такие гладкие локальные функции $\overline{\alpha}: M\times M\times M\times M\to\mathbb{R}$, $\overline{\beta}: M\times M\times M\times M\to\mathbb{R}$, $\overline{\gamma}: M\times M\times M\times M\to\mathbb{R}$, что выполняется тождество:

$$L_x^w z=\left[\overline{\alpha}(y,x,z,w)\right]_y x\overset{+}{_y}\left[\overline{\beta}(y,x,z,w)\right]_y z\overset{+}{_y}\left[\overline{\gamma}(y,x,z,w)\right]_y w. \tag{4}$$

Замечание. Тождество (4) естественно назвать обобщённым тождеством псевдолинейности.

Дифференциально-геометрическая характеристика тождества псевдолинейности

Предложение 1. Пусть в C^k – гладком ($k\geq 3$) многообразии аффинной связности (M, ∇) выполняется тождество псевдолинейности. Тогда в нормальных координатах с центром в точке y –компоненты Кристоффеля второго рода аффинной связности ∇ имеют вид:

$$\Gamma^i_{jk}(w)=\lambda_j(w)\delta^i_k+\mu_k(w)\delta^i_j+\nu_{jk}(w)w^i. \tag{5}$$

Доказательство. Согласно формуле, приведённой, например, в работах [4; 5] имеем:

$$\Gamma^i_{jk}(w)=-\frac{\partial^2\left[L^w_x z\right]^i}{\partial x^j\partial z^k}\Bigg|_{x=z=w}. \tag{6}$$

Согласно тождеству (4) в нормальных координатах с центром в точке y, получаем:

$$\left[L^w_x z\right]^i=\overline{\alpha}(y,x,z,w)x^i+\overline{\beta}(y,x,z,w)z^i+\overline{\gamma}(y,x,z,w)w^i. \tag{7}$$

Подставляя выражение (7) в соотношение (6) и последовательно проводя дифференцирование, получаем формулу (5).

Предложение 2. Для того, чтобы в гладком многообразии аффинной связности (M,∇) выполнялось тождество псевдолинейности (1) необходимо и достаточно, чтобы для любых достаточно близких трёх точек в M существовало содержащее их двумерное автопараллельное подмногообразие.

Предложение 3. Пусть C^k – гладкое ($k\geq 3$) многообразие аффинной связности (M,∇) размерности больше, чем два, такое, что выполняется тождество псевдолинейности. Тогда тензоры кручения и кривизны многообразия аффинной связности имеют вид:

$$T(X,Y)=P(Y)\cdot X-P(X)\cdot Y. \tag{8}$$

$$R(X,Y)Z=Q(X,Z)\cdot Y-Q(Y,Z)\cdot X+A(X,Y)\cdot Z, \tag{9}$$

где P, Q, A – дифференциальные, соответственно, 1 и 2 – формы, причём:

$$A(X,Y)=-A(Y,X). \tag{10}$$

Доказательство. Рассмотрим нормальную систему координат с центром в точке y. Тогда по Предложению 1 имеем:

$$T^i_{jk}(y)=\Gamma^i_{jk}(y)-\Gamma^i_{kj}(y)=\lambda_i(y)\delta^i_k+\mu_k(y)\delta^i_j-\lambda_k(y)\delta^i_j-\mu_j(y)\delta^i_k=$$
$$=\left[\lambda_i(y)-\mu_j(y)\right]\delta^i_k-\left[\lambda_k(y)-\mu_k(y)\right]\delta^i_j.$$

И, следовательно, имеет место формула (8). Для того, чтобы вывести формулу (9), воспользуемся соотношением, доказанным в работе [2], согласно которому:

$$R^i_{jk,l}(y)=2\frac{\partial\left[h^y(x,z)w\right]^i}{\partial x^j\partial z^k\partial w^l}\Bigg|_{x=z=w=y}. \tag{11}$$

По Лемме 2 имеем:

$$\left[h^{y}\left(x,z\right)w\right]^{i}=\alpha\left(y,x,z,w\right)x^{i}+\beta\left(y,x,z,w\right)z^{i}+\gamma\left(y,x,z,w\right)w^{i}.$$

Последовательно три раза дифференцируя обе части этого равенства, получаем:

$$\left.\frac{\partial\left[h^{y}\left(x,z\right)w\right]^{i}}{\partial x^{j}}\right|_{x=y}=\tilde{\alpha}\left(y,z,w\right)\delta_{j}^{i}+\widetilde{\beta_{j}}\left(y,z,w\right)z^{i}+\tilde{\gamma}_{j}\left(y,z,w\right)w^{i}$$

$$\left.\frac{\partial^{2}\left[h^{y}\left(x,z\right)w\right]^{i}}{\partial z^{k}\partial x^{j}}\right|_{x=z=y}=\overline{\alpha}_{k}\left(y,w\right)\delta_{j}^{i}+\overline{\beta_{j}}\left(y,w\right)\delta_{k}^{i}+\overline{\gamma}_{jk}\left(y,w\right)w^{i}$$

$$\left.\frac{\partial^{3}\left[h^{y}\left(x,z\right)w\right]^{i}}{\partial w^{l}\partial z^{k}\partial x^{j}}\right|_{x=z=w=y}=\overline{\overline{\alpha}}_{kl}\left(y\right)\delta_{j}^{i}+\overline{\overline{\beta}}_{jl}\left(y\right)\delta_{k}^{i}+\overline{\overline{\gamma}}_{jk}\left(y\right)\delta_{l}^{i}.$$

Таким образом, для тензора кривизны получаем выражение:

$$R_{jk,l}^{i}=\alpha_{kl}\delta_{j}^{i}+\beta_{jl}\delta_{k}^{i}+\gamma_{jk}\delta_{l}^{i}. \qquad (12)$$

Так как тензор кривизны кососимметричен по первым двум нижним индексам:

$$R_{jk,l}^{i}=-R_{kj,l}^{i}, \qquad (13)$$

то, подставляя выражение (12) в тождество (13), получаем:

$$\alpha_{kl}\delta_{j}^{i}+\beta_{jl}\delta_{k}^{i}+\gamma_{jk}\delta_{l}^{i}=-\alpha_{jl}\delta_{k}^{i}-\beta_{kl}\delta_{j}^{i}-\gamma_{kj}\delta_{l}^{i}. \qquad (14)$$

В силу того, что размерность многообразия M больше двух, то из (14) следует $\alpha_{kl}=-\beta_{kl}$ и $\gamma_{kj}=-\gamma_{jk}$, то есть справедливы соотношения (9) и (10). Доказательство закончено.

Непосредственным следствием Предложения (3) является следующее предложение.

Предложение 4. Если в гладком ($k\geq 3$) многообразии аффинной связности выполняется тождество псевдолинейности, то оно имеет общую псевдосвязность с многообразием аффинной связности без кручения.

Предложение 5. Если C^k – гладкие пространства аффинной связности (M, ∇) и $\left(M,\overline{\nabla}\right)$ имеют общую псевдосвязность и в (M, ∇) выполняется тождество псевдосвязности, тогда и в $\left(M,\overline{\nabla}\right)$ также выполняется тождество псевдолинейности.

Предложение 6. Пусть C^k – гладкое ($k > 5$) многообразие аффинной связности (M, ∇) размерности больше чем два имеет нулевое кручение и в нём выполняется тождество псевдолинейности. Тогда многообразие аффинной связности (M, ∇) – проективно плоское.

Доказательство. Используя предложение (3), подставим выражение (9) для тензора кривизны в тождестве Риччи:

$$R(X,Y)Z + R(Z,X)Y + R(Y,Z)X = 0.$$

Получим:

$$\begin{gathered} Q(X,Z)Y - Q(Y,Z)X + A(X,Y)Z + \\ + Q(Z,Y)X - Q(X,Y)Z + A(Z,X)Y + \\ + Q(Y,X)Z - Q(Z,X)Y + A(Y,Z)X, \end{gathered}$$

или, приводя подобные члены:

$$\begin{gathered} \left[Q(Z,Y) - Q(Y,Z) + A(Y,Z)\right]X + \left[Q(X,Z) - Q(Z,X) + A(Z,X)\right]Y + \\ + \left[Q(Y,X) - Q(X,Y) + A(X,Y)\right]Z = 0. \end{gathered} \tag{15}$$

Так как размерность носителя больше, чем два, то из (15) следует:

$$A(X,Y) = Q(X,Y) - Q(Y,X). \tag{16}$$

Итак, получаем следующее выражение для тензора кривизны:

$$R(X,Y)Z = Q(X,Z)Y - Q(Y,Z)X + \left[Q(X,Y) - Q(Y,X)\right]Z. \tag{17}$$

Следовательно, многообразие аффинной связности (M, ∇) – проективно плоское.

Предложение 7. Пусть C^k – гладкое $(k > 5)$ многообразие аффинной связности (M, ∇) имеет размерность больше чем два, и выполняется тождество псевдолинейности. Тогда многообразие аффинной связности (M, ∇) – проективно плоское и имеет общую псевдосвязность (одинаковый параллелизм направлений) с некотором многообразием аффинной связности без кручения.

Предложение 8. Пусть C^k – гладкое $(k > 5)$ многообразие аффинной связности (M, ∇) – проективно плоское и имеет общую псевдосвязность с многообразием аффинной связности $\left(\bar{M}, \bar{\nabla}\right)$ без кручения. Тогда в многообразии аффинной связности (M, ∇) выполняется тождество псевдолинейности.

Объединяя предложения (7) и (8), приходим к следующей дифференциально-геометрической характеристике тождества псевдолинейности.

Предложение 9. В C^k – гладком $(k > 5)$ многообразии аффинной связности (M, ∇) размерности больше чем два выполняется тождество псевдолинейности тогда и только тогда, когда (M, ∇) проективно плоское и имеет общую псевдосвязность с многообразием аффинной связности с нулевым тензором кручения.

Итак, доказана следующая теорема.

Теорема. Пусть (M, ∇) – C^k – гладкое $(k > 5)$ многообразие аффинной связности размерности больше чем два. Тогда следующие три условия равносильны:

1) в (M, ∇) – локально выполняется тождество псевдолинейности;

2) (M, ∇) – проективно плоское и имеет общую псевдосвязность (одинаковый параллелизм направлений) с многообразием аффинной связности с нулевым тензором кручения;

3) для любых достаточно близких трёх точек в (M, ∇) существует содержащее их двумерное автопараллельное подмногообразие.

Замечание: в любом двумерном многообразии аффинной связности локально выполняется тождество псевдолинейности.

Пример многообразия аффинной связности с тождеством псевдолинейности.

Рассмотрим трёхмерное линейное пространство $\boldsymbol{R}^3$ с аффинной связностью, определяемой следующей формулой:

$$\nabla_X Y = \omega\left(X\right)\cdot Y - \omega\left(Y\right)\cdot X, \tag{18}$$

где ω – дифференциальная 1-форма на $\boldsymbol{R}^3$. В локальных координатах имеем:

$$\Gamma^i_{jk} = \omega_j \delta^i_k - \omega_k \delta^i_j, \tag{19}$$

где $\left\{\Gamma^i_{jk}\right\}$ – компоненты Кристоффеля 2-го рода.

(Здесь по правилу А. Эйнштейна производится суммирование по «слепым» индексам, если один и тот же индекс записан внизу и вверху). Для упрощения считаем, что все ω_j, $j = 1, 2, 3$, постоянные числа.

Компоненты тензора кручения и кривизны в локальных координатах имеют вид:

$$T^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj} = 2\left(\omega_j \delta^i_k - \omega_k \delta^i_j\right), \tag{20}$$

$$R^i_{ke,j} = \partial_k \Gamma^i_{ej} - \partial_e \Gamma^i_{kj} + \Gamma^m_{ej}\Gamma^i_{km} - \Gamma^m_{kj}\Gamma^i_{em} = \omega_j\left(\omega_e \delta^i_k - \omega_k \delta^i_e\right). \tag{21}$$

Для любых двух несовпадающих точек $a(a^1, a^2, a^3)$ и $b(b^1, b^2, b^3)$ из $\boldsymbol{R}^3$ существует единственная геодезическая линия, проходящая через эти точки a и b:

$$t_a b = \mathrm{Exp}_a\left(t\left(\mathrm{Exp}_a\right)^{-1} b\right) = t_e a \underset{e}{+} \left(1-t\right)_e b = \mathcal{L}^e_{t_e a}\left(1-t\right)_e b,$$

где $\mathcal{L}^e_a b = \mathrm{Exp}_e\left(\left(\mathrm{Exp}\right)^{-1}_e a + \left(\mathrm{Exp}\right)^{-1}_e b\right)$, t – аффинный (канонический) параметр вдоль геодезической.

Пусть точка e – начало нормальной системы координат в $\boldsymbol{R}^3$, и имеет нулевые координаты $e(0, 0, 0)$. Для упрощения записи нижний индекс e в формулах опускаем, окончательно имеем:

$$\left(t_a b\right)^i = ta^i + \left(1-t\right)b^i, \tag{23}$$

$$(L^e_a b)^i = \left(\omega_j b^j + 1\right)a^i + \left(1 - \omega_j a^j\right)b^i, \tag{24}$$

$$(L^c_a b)^i = \left(\omega_j\left(b-c\right)^j + 1\right)a^i + \left(1 - \omega_j\left(a-c\right)^j\right)b^i + \\ + \left(\omega_j\left(a^j - b^j\right) - 1\right)c^i. \tag{25}$$

В рассматриваемом пространстве аффинной связности все геодезические лупы изоморфны.

Заключение

При решении многих отдельных задач естествознания важно понимать, в каком геометрическом пространстве строится математическая модель того, или иного явления. Часто геометрическая составляющая конкретной ситуации остаётся «за кадром», понимается интуитивно, многозначно, что, естественно, приводит к разночтениям.

Простейшим с геометрической точки зрения является локально плоское многообразие аффинной связности, поэтому естественно в первую очередь, рассмотреть пространства, попадающие с ними в один геодезический класс, содержащий, в частности, эллиптические (сферические), гиперболические (геометрия Н. И. Лобаческого) пространства. Таким образом, доказанная теорема имеет место в проективно плоских пространствах нулевого кручения, в классических пространствах постоянной кривизны и в некоторых других более сложных многообразиях аффинной связности.

Статья поступила в редакцию 22.12.2020 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Марченко Т. А., Матвеев О. А., Птицына И. В. Локальная проективно плоская модель сферы // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2017. № 4. С. 6–13. DOI: 10.18384/2310-7251-2017-4-6-13.
2. Матвеев О. А., Марченко Т. А. О преобразовании голономии в пространствах аффинной связности [Электронный ресурс] // Актуальные проблемы математики, физики и математического образования: сборник трудов кафедры математического анализа и геометрии. М.: ИИУ МГОУ, 2019. С. 56–58. 1 электрон. опт. диск (CD-ROM).
3. Матвеев О. А., Мельник О. С., Марченко Т. А. К алгебраической теории геодезических отображений многообразий аффинной связности [Электронный ресурс] // Актуальные проблемы математики, физики и математического образования: сборник трудов кафедры математического анализа и геометрии. Вып. 3: Научные исследования в начале III тысячелетия. М.: ИИУ МГОУ, 2020. С. 17–28. 1 электрон. опт. диск (CD-ROM).
4. Матвеев О. А., Нестеренко Е. Л. Алгебраическая теория пространств, близких к симметрическим: монография. Germany: Lap Lambert Academic Publishing, 2012. 125 с.
5. Матвеев О. А., Нестеренко Е. Л. Универсальные алгебры в теории пространств аффинной связности, близких к симметрическим: монография. М.: МГОУ, 2012. 132 с.
6. Matveyev O. A., Nesterenko E. L. The real prosymmetric spaces // Non-Associative Algebra and Its Applications / edited by L. Sabinin, L. Sbitneva, I. Shestakov. Boca Raton, London, New York: Taylor and Francis Group, Chapman and Hall/CRC, 2006. P. 253–260 (A Series of Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics. Vol. 246).
7. Sabinin L. Loop-theoretic foundations of Differential Geometry and Relativity. // Webs and Quasigroups. Tver: Tver University Press, 2002. P. 67–72 (English).

8. Non-Associative Algebra and Its Applications / edited by L. Sabinin, L. Sbitneva, I. Shestakov. Boca Raton, London, New York: Taylor and Francis Group, Chapman and Hall/CRC, 2006. 516 p. (A Series of Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics. Vol. 246).

REFERENCES

1. Marchenko T. A., Matveev O. A., Ptitsyna I. V. [The local projective flat model of the sphere]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika* [Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics-Mathematics], 2017, no. 4, pp. 6–13. DOI: 10.18384/2310-7251-2017-4-6-13.
2. Matveev O. A., Marchenko T. A. [On transformation of holonomy in spaces of affine connection]. In: *Aktual'nye problemy matematiki, fiziki i matematicheskogo obrazovaniya: sbornik trudov kafedry matematicheskogo analiza i geometrii* [Actual problems of mathematics, physics and mathematical education: collection of works of the Department of Mathematical Analysis and Geometry]. Moscow, MRSU Ed. Office Publ., 2019, pp. 56–58. 1 CD-ROM.
3. Matveev O. A., Mel'nik O. S., Marchenko T. A. [algebraic theory of geodesic mappings of manifolds with affine connection]. *In: Aktual'nye problemy matematiki, fiziki i matematicheskogo obrazovaniya: sbornik trudov kafedry matematicheskogo analiza i geometrii. Vyp. 3: Nauchnye issledovaniya v nachale III tysyacheletiya* [Actual problems of mathematics, physics and mathematical education: collection of works of the Department of Mathematical Analysis and Geometry. Issue 3: Scientific research at the beginning of the III millennium]. Moscow, MRSU Ed. Office Publ., 2020, pp. 17–28. 1 CD-ROM.
4. Matveev O. A., Nesterenko E. L. *Algebraicheskaya teoriya prostranstv, blizkikh k simmetricheskim* [Algebraic theory of spaces close to symmetric]. Germany, Lap Lambert Academic Publishing Publ., 2012. 125 p.
5. Matveev O. A., Nesterenko E. L. *Universal'nye algebry v teorii prostranstv affinnoi svyaznosti, blizkikh k simmetricheskim* [Universal algebra in the theory of spaces with affine connection close to symmetric]. Moscow, Moscow Region State Unversity Publ., 2012. 132 p.
6. Matveyev O. A., Nesterenko E. L. The real prosymmetric spaces. In: Sabinin L., Sbitneva L., Shestakov I., eds. *Non-Associative Algebra and Its Applications*. Boca Raton, London, New York, Taylor and Francis Group Publ., Chapman and Hall/CRC Publ., 2006, pp. 253–260 (A Series of Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics. Vol. 246).
7. Sabinin L. Loop-theoretic foundations of Differential Geometry and Relativity. In: *Webs and Quasigroups*. Tver, Tver University Press, 2002, pp. 67–72 (English).
8. Sabinin L., Sbitneva L., Shestakov I., eds. *Non-Associative Algebra and Its Applications*. Boca Raton, London, New York, Taylor and Francis Group Publ., Chapman and Hall/CRC Publ., 2006. 516 p. (A Series of Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics. Vol. 246).

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Матвеев Олег Александрович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа и геометрии Московского государственного областного университета;
e-mail: matveyevoa@mail.ru;

Марченко Татьяна Андреевна – магистрант физико-математического факультета Московского государственного областного университета;
e-mail: tatian96@rambler.ru;

Мельник Ольга Сергеевна – магистрант физико-математического факультета Московского государственного областного университета;
e-mail: mospretty@gmail.com.

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Oleg A. Matveyev – Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Prof., Department of Mathematical Analysis and Geometry, Moscow Region State University;
e-mail: matveyevoa@mail.ru;

Tatyana A. Marchenko – Master's Degree Student, Faculty of Physics and Mathematics, Moscow Region State University;
e-mail: tatian96@rambler.ru;

Olya S. Melnik – Master's Degree Student, Faculty of Physics and Mathematics, Moscow Region State University;
e-mail: mospretty@gmail.com.

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Матвеев О. А., Марченко Т. А., Мельник О. С. О некоторых свойствах проективно плоских многообразий аффинной связности. // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2021. № 1. С. 6–16.
DOI: 10.18384/2310-7251-2021-1-6-16

FOR CITATION

Matveyev O. A., Marchenko T. A., Melnik O. S. On some properties of projective flat manifolds with affine connection. In: *Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics-Mathematics*, 2021, no. 1, pp. 6–16.
DOI: 10.18384/2310-7251-2021-1-6-16

УДК 004.94
DOI: 10.18384/2310-7251-2021-1-17-26

МОДЕЛИРОВАНИЕ АЗАРТНЫХ ИГР. ПОСТРОЕНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ КОМПЬЮТЕРНОЙ МОДЕЛИ УДВОЕНИЯ СТАВКИ В ИГРЕ

Живаева К. С.[1], Бугримов А. Л.[2], Калашников Е. В.[1]

[1] *Московский государственный областной университет*
141014, Московская область, г. Мытищи, ул. Веры Волошиной, д. 24, Российская Федерация

[2] *Российский государственный университет им. А. Н. Косыгина (Технологии. Дизайн. Искусство)*
117997, г. Москва, ул. Садовническая, д. 33, Российская Федерация

Аннотация
Целью работы является исследование основных механизмов, управляющих развитием азартной игры.
Процедуры и методы. Моделируется азартная игра при заданном банке, задаваемой ставке и выборе стратегии игры. В случае выигрыша игрок получает удвоенную ставку. В случае проигрыша вся ставка забирается у игрока. Рассматриваются различные стратегии игры при манипуляции «размером» банка, «размером» ставки и числом шагов (итераций) для достижения успеха. Учитывается конечность времени игры (число итераций) и дискретность происходящих процессов. Изучались зависимости частоты выигрыша от размера ставки и количества шагов (итераций) при заданном «размере» банка, необходимых для выигрыша.
Результаты. Выявлены пути возможного выигрыша в зависимости от размера ставки и количества шагов (итераций) при заданном «размере» банка.
Практическая значимость. В работе рассмотрены различные стратегии игры, ориентированные на максимальный выигрыш.
Ключевые слова: ставка, банк, стратегия, выигрыш, моделирование, язык Python

SIMULATION OF GAMBLING. CONSTRUCTION AND STUDY OF THE COMPUTER MODEL OF DOUBLE BET IN THE GAME

K. Zhivaeva[1], A. Bugrimov[2], E. Kalashnikov[1]

[1] *Moscow Region State University*
ul. Very Voloshinoi 24, 141014 Mytishchi, Moscow region, Russian Federation

[2] *Kosygin State University of Russia*
ul. Sadovnicheskaya 33, 117997 Moscow, Russian Federation

Abstract
Aim. We have studied the main mechanisms that control the development of gambling.
Methodology. Gambling is simulated with a given pot size, a given bet, and a choice of game strategy. The player, in case of winning, receives a double bet. In case of loss, the entire bet is taken from the player. Various game strategies are considered when manipulating the "size" of the pot, the "size" of the bet, and the number of steps (iterations) to achieve success. The finiteness of the game time (the number of iterations) and the discreteness of the ongoing processes are taken into account. We have studied the dependence of the winning frequency on the bet size and the number of steps (iterations) for a given "size" of the pot required for winning.
Results. The ways of possible winning are revealed depending on the size of the bet and the number of steps (iterations) for a given "size" of the pot.
Research Implications. The paper considers various strategies of the game, focused on the maximum win.
Keywords: bet, pot, strategy, win, simulation, python language

Введение

Моделирование азартных игр представляет интерес, в первую очередь, тем, что позволяет выявлять крайне экстремальные ситуации в поведении человека, которые возникают не только при игре в рулетку или карты, но и, например, при остром желании добиться успеха в кратчайшие сроки. Во всех таких ситуациях решающим фактором, управляющим удачей или неудачей, является случай. А целью является только выигрыш. Но случай предполагает и проигрыш. Тем не менее, всегда есть желание спланировать игру (или жизненную ситуацию) так, чтобы всегда был выигрыш, хотя бы при соблюдении определённых условий. Последней ситуацией занимается теория игр [1; 2; 8]. Различные игровые ситуации [3–6] (частный пример в приближении больших чисел приведён в Приложении) и их применение в азартных играх находятся в постоянном развитии [7]. В любой такой игре делается ставка, повышением или понижением которой стараются добиться успеха. В настоящей работе моделируется и исследуется стратегия игры, ориентируемой на случай выигрыша удвоения ставки. Особенностью каждой игры является её ограниченность во времени и дискретность. Цель: спроектировать модель данной ситуации и выявить её свойства.

1. Модель

В исходном состоянии игрок имеет начальное количество монет m (банк). Далее, выбирается ставка n (монет), для выбранной ставки включается случай $p = 1$ в виде выигрыша или проигрыша $p = 0$ в зависимости от выпадения, например, знака брошенной монеты. При выпадении орла деньги в виде удвоенной ставки возвращаются игроку. При выпадении решки ставка у игрока забирается. Задача игрока – увеличить в итоге количество начальных монет (ставки) в два раза за среднее число испытаний (итераций k).

Условия игры ставят проблему выбора наиболее рационального способа достижения результата [2], состоящего в том, чтобы избежать полного проигрыша.

А такая постановка задачи полностью противоположна возможному развитию игры, изложенному в работах [3; 4, с. 94–100] и представленному в Приложении (ниже).

2. Программное представление модели

Для программной реализации выбранной модели был выбран язык Python [9]. На рис. 1 представлен код программы, красным цветом выделены комментарии для лучшего понимания строк кода.

```
importrandom
m=10# Начальное количество монет
k=0#Счетчик шагов
n=int(input('Введите размер ставки: '))
while(m<20):
if (m<n):
print('Размер ставки превышает ваш банк - ',m,' монет')
if m==0:
print('Вы банкрот!')
print('Совершено',k,'шагов')
exit(0)
else:
      p=random.randint(0,1)#0-решка, 1- орел
print (p)
if (p==0):
         m=m-n
k+=1
print('Выпал орёл - ваш банк составляет ',m,' монет')
else:
         m=m+n
         k+=1
print('Выпала решка - ваш банк составляет ',m,' монет')
print('Совершено',k,'шагов')
```

Рис. 1 / Fig. 1. Программа стратегии игры в Python / Game strategy program in Python.
Источник: Составлено авторами.

В задаче были построены и исследованы модели с начальным количеством монет *m* (банком) 5, 10 и 20 путём изменения второй строки кода на соответствующие значения (выделено зелёным цветом, см. рис. 1).

3. Результаты исследования

Были рассмотрены частота выигрыша и среднее количество шагов при выигрыше с различными начальными данными: размером банка – *m* и размером ставки – *n*.

3.1. Начальное количество монет $m = 5$ монет.

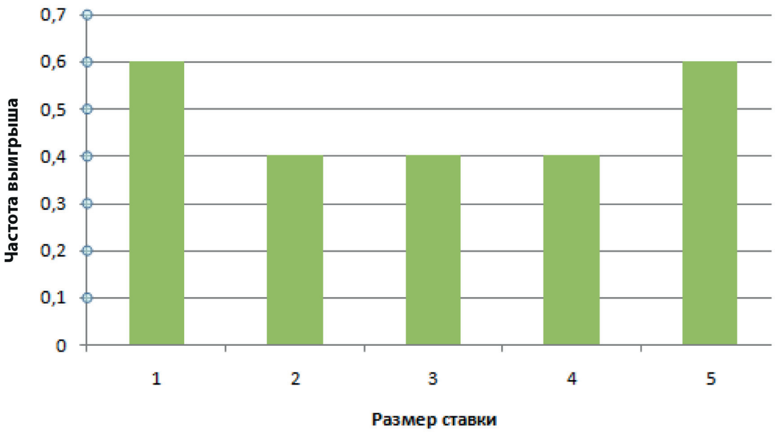

Рис. 2 / Fig. 2. Частота выигрыша (по оси ординат), в зависимости от размера ставки / Winning frequency (on the ordinate axis), depending on the bet size.

Источник: составлено авторами.

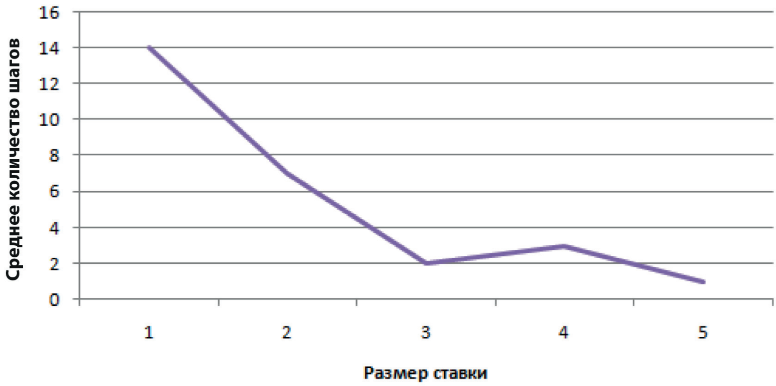

Рис. 3 / Fig. 3. Среднее количество шагов (по оси ординат) для достижения выигрыша в зависимости от размера ставки / Average number of steps (on the ordinate axis) to achieve a win, depending on the bet size.

Источник: составлено авторами.

Анализ полученных статистических результатов (рис. 2, 3) показывает, что в данном случае рациональнее идти ва-банк, так как частота появления выигрыша наибольшая наряду со ставкой, равной 1 монете, но при этом совершается значительно меньшее число шагов. Однако не стоит упускать тот факт, что, делая ставку на всё количество монет, выигрыш будет получен либо за один шаг, либо сразу же будет проигрыш – это равновероятные исходы.

При начальной ставке в 5 монет для достижения выигрыша в среднем не требуется очень большого количества шагов, поэтому лучше играть именно на такой ставке.

3.2. Начальное количество монет m = 10 монет.

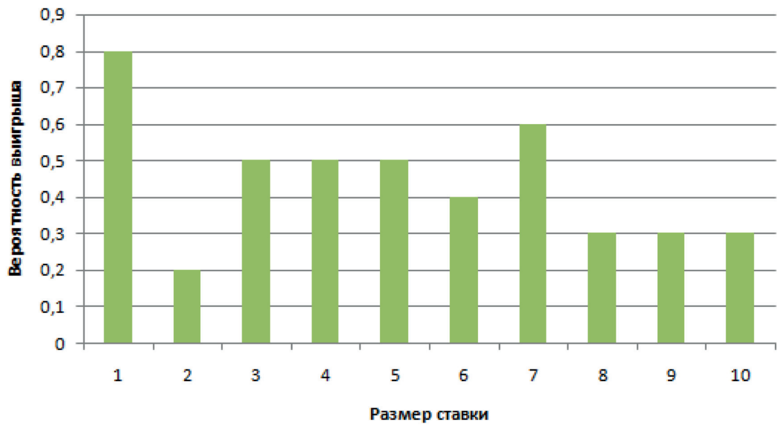

Рис. 4 / Fig. 4. Частота выигрыша (по оси ординат), в зависимости от размера ставки / Winning frequency (on the ordinate axis), depending on the bet size.

Источник: составлено авторами.

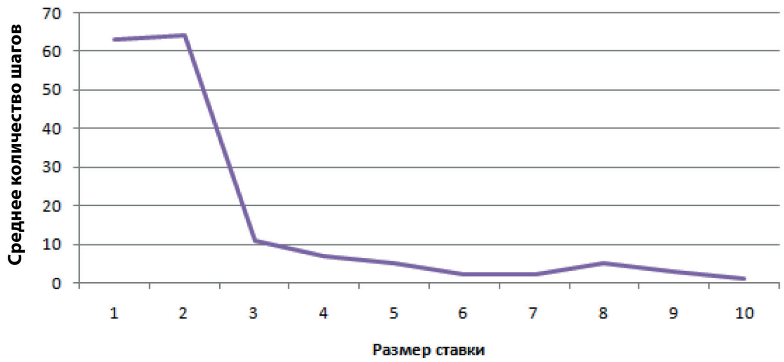

Рис. 5 / Fig. 5. Среднее количество шагов (по оси ординат) для достижения выигрыша в зависимости от размера ставки / The average number of steps (on the ordinate axis) to achieve a win, depending on the size of the bet.

Источник: составлено авторами.

Анализ полученных результатов (рис. 4, 5) показывает, что в случае с начальной ставкой в 10 монет выгоднее делать ставку, равную 7 монетам, с учётом частоты выигрыша и среднего количества итераций. При ставке, равной 1 монете, частота выигрыша является более высокой, однако количество шагов для выигрыша в десятки раз превышает число итераций при ставке в 7 монет.

3.3. Начальное количество монет m = 20 монет

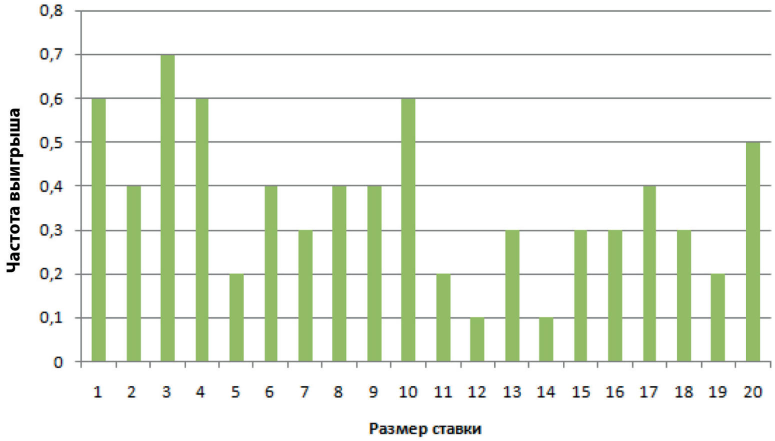

Рис. 6 / Fig. 6. Частота выигрыша (по оси ординат), в зависимости от размера ставки / Winning frequency (on the ordinate axis), depending on the bet size.

Источник: составлено авторами.

Совместный анализ графиков (рис. 6, 7), полученных из данных о частоте выигрыша и количестве шагов, за которые можно его достичь, показывает, что наиболее вероятным оказывается выигрыш при ставке, равной 3 монетам. Однако здесь встаёт вопрос о рациональности действий с точки зрения необходимого среднего количества шагов. Ставка, равная одной монете в случае с начальным банком в 20 монет, вообще не может быть рассмотрена как адекватная. Причиной этого является количество шагов, значительно превышающих количество шагов при ставке в 3 монеты. А вероятность выигрыша при ставке

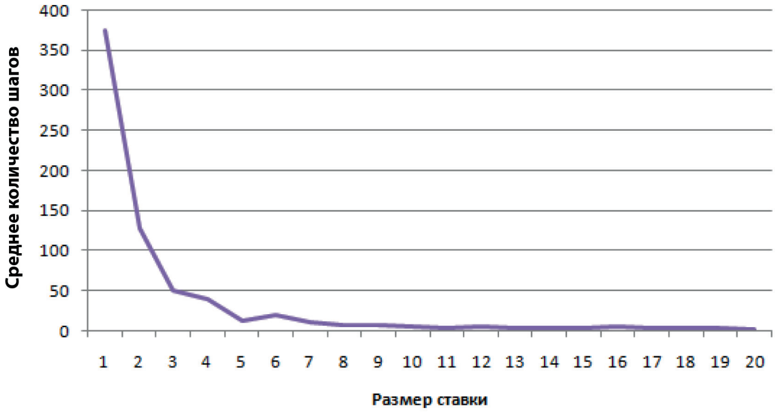

Рис. 7 / Fig. 7. Среднее количество шагов (по оси ординат) для достижения выигрыша в зависимости от размера ставки / The average number of steps (on the ordinate axis) to achieve a win, depending on the size of the bet.

Источник: составлено авторами.

в 3 монеты значительно выше (с учётом полученных статистических данных частот) вероятности выигрыша при ставке в одну монету. Наиболее рациональным выбором способа действия является ставка в 10 монет – частота появления выигрыша не мала, а количество шагов сравнительно мало.

4. Анализ результатов

Анализ проведённых испытаний вскрывает следующую ситуацию:

– даже при большой вероятности выигрыша можно проиграть;

– шансы выигрыша или проигрыша на каждой конкретной ставке равновероятны;

– корреляция частот выигрыша или проигрыша во всей игре в целом получается за счет увеличения или уменьшения банка в определенное (разное) количество монет за ставку.

Выводы

1. Ставка «ва-банк» равновероятно принесёт либо выигрыш, либо проигрыш за один шаг.

2. Очень маленькие ставки при решении задачи удвоения большой суммы, как правило, более вероятны, однако несут за собой намного большее число шагов (иногда их количество превышает допустимое с точки зрения разумности).

3. Ставки, меньшие или равные половине банка, более выигрываемые.

Приложение

Игрок A имеет «a» денег. Удача – вероятность выигрыша игрока A на одном шаге обозначим через p неудачу – q.

Игрок B имеет «b» денег. Соответственно, удача игрока B на том же шаге обозначается через q, а неудача этого игрока – p. (игрок B может быть выбран в качестве казино так, что $b \gg a$).

Рассмотрим игрока A. На каком-то шаге у игрока A денег оказалось n при ($n < a + b$). А полная вероятность выиграть для A – игрока p_n может быть представлена в разностном виде [3; 4]:

$$P_n = p \cdot p_{n+1} + q \cdot p_{n-1}. \qquad (1)$$

Здесь p_{n+1} – вероятность увеличения суммы на единицу, а p_{n-1} – вероятность утраты.

Соотношение между пошаговыми вероятностями выигрыша

Согласно условию

$$p + q = 1, \qquad (2)$$

учитывая (1) и (2), получим:

$$(p+q)\,p_n = pp_{n+1} + qp_{n-1}. \qquad (3)$$

Отсюда:

$$p_{n+1} - p_n = \frac{q}{p}\left(p_n - p_{n-1}\right). \quad (4)$$

Поскольку в нашем случае проигрыш и выигрыш равноправны, то

$$p = q.$$

Последовательность (4) представим в виде:

$$p_{n+1} - p_n = p_n - p_{n-1} =$$

$$= p_{n-1} - p_{n-2} = p_{n-2} - p_{n-3} =$$

$$= p_{n-2} - p_{n-3} =$$

$$= p_1 - p_0 = C.$$

При этом: $p_1 = p_0 + C$, но по условию нет денег (ставки), нет и выигрыша, то есть $p_0 = 0$.

Тогда

$$p_2 = p_1 + C = 2C,$$

$$p_3 = p_2 + C = 3C,$$

$$p_{a+b} = (a + b)C = 1.$$

Отсюда $C = (a + b)^{-1}$.

Если у A денег n, тогда $p_n = n \cdot (a + b)^{-1}$.

Если у A денег a, тогда $p_a = a \cdot (a + b)^{-1}$.

Тогда, поскольку игрок B представляет собой казино, у которого $b \gg a$, то конечный итог для A-игрока $p_a \to 0$.

Статья поступила в редакцию 24.12.2020 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Данилов В. И. Лекции по теории игр: Курс лекций. М.: Российская экономическая школа. 2002. 140 с.
2. Теория вероятностей и математическая статистика для технических университетов. Часть I: Теория вероятностей: учебное пособие / Крицкий О. Л., Михальчук А. А., Трифонов А. Ю, Шинкеев М. Л.; Томский политехнический университет. Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2010. 212 с.
3. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и её приложения. М.: Мир, 1964. 493 с.
4. Ширяев А. Н. Случайное блуждание. I. Вероятности разорения и средняя продолжительность при игре с бросанием монеты // Ширяев А. Н. Вероятность. М.: Наука, 1980. С. 94–100.
5. Kamron J. The expected value of an advantage blackjack player //All Graduate Plan B and other Reports. 5–2014 [Электронный ресурс]. URL: https://digitalcommons.usu.edu/gradreports/524 (дата обращения: 10.03.2020).
6. Shi J., Littman M. L. Abstraction Methods for Game Theoretic Poker // Computers and Games: Second International Conference (CG 2001, Hamamatsu, Japan, October 26–28,

2000 Revised Papers) / ed. Marsland T., Frank I. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 2001. P. 333–345 (Series: Lecture Notes in Computer Science, Vol. 2063).
7. Advances in Computer Games: 16th International Conference, ACG 2019, Macao, China, August 11–13, 2019, Revised Selected Papers / Cazenave T., van den Herik J., Saffidine A., Wu I.-C., eds. Berlin, Heidelberg, New York: Springer US, 2020. 194 p. (Series: Lecture Notes in Computer Science. Vol. 2516).
8. Owen G. Discrete Mathematics and Game Theory. New York: Springer. 358 p. (Series: Theory and Decision Library C. Vol. 22).
9. Бугримов А. Л., Лаврентьев В. В. Python. Быстрое погружение в программирование: учебное пособие. М.: ИИУ МГОУ, 2018. 47 с.

REFERENCES

1. Danilov V. I. *Lektsii po teorii igr: Kurs lektsii* [Game theory lectures: Course of lectures]. Moscow, Rossiiskaya ekonomicheskaya shkola Publ., 2002. 140 p.
2. Kritskii O. L., Mikhal'chuk A. A., Trifonov A. Yu., Shinkeev M. L. *Teoriya veroyatnostei i matematicheskaya statistika dlya tekhnicheskikh universitetov. Cpast' I: Teoriya veroyatnostei* [Probability theory and mathematical statistics for technical universities. Part I: Probability theory]. Tomsk, Tomsk Polytechnic University Publ., 2010. 212 p.
3. Feller V. *Vvedenie v teoriyu veroyatnostei i ee prilozheniya* [Introduction to probability theory and its applications]. Moscow, Mir Publ., 1964. 493 p.
4. Shiryaev A. N. [Random walk. I. Probabilities of being ruined and the average duration of a coin toss game]. In: Shiryaev A. N. *Veroyatnost'* [Probability]. Moscow, Nauka Publ., 1980. pp. 94–100.
5. Kamron J. The expected value of an advantage blackjack player. In: *All Graduate Plan B and other Reports, 5–2014*. Available at: https://digitalcommons.usu.edu/gradreports/524 (accessed: 10.03.2020).
6. Shi J., Littman M. L. Abstraction Methods for Game Theoretic Poker. In: Marsland T., Frank I., eds. *Computers and Games: Second International Conference (CG 2001, Hamamatsu, Japan, October 26–28, 2000 Revised Papers)*. Berlin, Heidelberg, New York, Springer Publ., 2001, pp. 333–345 (Series: Lecture Notes in Computer Science, Vol. 2063).
7. Cazenave T., van den Herik J., Saffidine A., Wu I.-C., eds. Advances in Computer Games: 16th International Conference, ACG 2019, Macao, China, August 11–13, 2019, Revised Selected Papers). Berlin, Heidelberg, New York, Springer US Publ., 2020. 194 p. (Series: Lecture Notes in Computer Science. Vol. 2516).
8. Owen G. Discrete Mathematics and Game Theory. New York, Springer Publ.. 358 p. (Series: Theory and Decision Library C. Vol. 22).
9. Bugrimov A. L., Lavrent'ev V. V. *Python. Bystroe pogruzhenie v programmirovanie* [Python. A Quick Dive Into Programming]. Moscow, MRSU Ed. Office Publ., 2018. 47 p.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Живаева Кристина Сергеевна – студентка физико-математического факультета Московского государственного областного университета;
e-mail: christinazhivaeva0703@gmail.com;

Бугримов Анатолий Львович – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой физики Российского государственного университета имени А. Н. Косыгина (Технологии. Дизайн. Искусство);
e-mail: bugrimov-al@rguk.ru;

Калашников Евгений Владимирович – доктор физико-математических наук, профессор, кафедры вычислительной математики и методики преподавания информатики Московского государственного областного университета;
e-mail: ekevkalashnikov1@gmail.com

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Kristina S.Zhivaeva – Bachelor, Department of Computational Mathematics and Teaching Computer Science, Moscow Region State University;
e-mail: christinazhivaeva0703@gmail.com;

Anatoly L. Bugrimov – Dr. Sci. (Engineering), Prof., Departmental Head, Department of Physics, Russian State University named after A. N. Kosygin (Technology. Design. Art);
e-mail: bugrimov-al@rguk.ru

Evgenii V. Kalashnikov – Dr. Sci. (Phys.–Math.), Prof., Department of Computational Mathematics and Teaching Computer Science, Moscow Region State University;
e-mail: ekevkalashnikov1@gmail.com

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Живаева К.С., Бугримов А.Л., Калашников Е.В. Моделирование азартных игр. построение и исследование компьютерной модели удвоения ставки в игре // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2021. №1. С. 17–26.
DOI: 10.18384/2310-7251-2021-1-17-26

FOR CITATION

Zhivaeva K. S., Bugrimov A. L., Kalashnikov E. V. Simulation of gambling. Construction and study of the computer model of double bet in the game. In: *Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics-Mathematics*, 2021, no. 1, pp. 17–26.
DOI: 10.18384/2310-7251-2021-1-17-26

ФИЗИКА

УДК 537.632
DOI: 10.18384/2310-7251-2021-1-27-38

ВРЕМЕННАЯ ЭВОЛЮЦИЯ БОЗЕ-КОНДЕНСИРОВАННЫХ АТОМОВ В ТРЁХЪЯМНОЙ СИММЕТРИЧНОЙ ЦЕПОЧНОЙ ЛОВУШКЕ

Васильева О. Ф., Зинган А. П.

Приднестровский государственный университет имени Т. Г. Шевченко
МД 3300, г. Тирасполь, ул. 25 Октября, д. 128, Молдова

Аннотация
Целью работы является изучение динамики бозе-конденсированных атомов в трёхъямной симметричной цепочной ловушке
Процедура и методы. Проведены теоретические исследования временной эволюции популяции атомов в ямах.
Результаты. Показано, что в условиях точного резонанса имеют место осцилляционные режимы эволюции атомов в ямах трёхъямной ловушки, а также покой системы.
Теоретическая значимость. Динамика туннелирования бозе-конденсированных атомов в трёхъямной ловушке определяется начальным количеством атомов в ямах и начальной фазой.
Ключевые слова: бозе-конденсированные атомы, трёхъямный потенциал, осцилляционный режим эволюции

TEMPORARY EVOLUTION OF BOSE-CONDENSED ATOMS IN A THREE-WELL SYMMETRIC CHAIN TRAP

O. Vasilieva, A. Zingan

Pridnestrovian State University
ul. 25 Oktyabrya 128, 3300 Tiraspol, Moldova

Abstract
Aim. The dynamics of Bose-condensed atoms in a three-well symmetric chain trap is studied.
Methodology. The temporal evolution of the population of atoms in the wells is investigated theoretically.

Results. It is shown that under conditions of exact resonance, there are oscillatory regimes of evolution of atoms in the wells of a three-well trap, as well as the rest of the system.
Research implications. The dynamics of tunneled Bose-condensed atoms in a three-well trap is determined by the initial number of atoms in the wells and the initial phase.
Keywords: Bose-condensed atoms, three-well potential, oscillatory regime of evolution.

Введение

С момента первой реализации атомных бозе-конденсатов наступает новая эпоха в изучении их динамических свойств с помощью уравнения Гросса-Питаевского и приближения среднего поля [1–5]. В [6] установлены методы детерминированного создания тёмных солитонов в отталкивающих взаимодействующих атомных бозе-эйнштейновских конденсатах, позволяющие получить стабильные солитонные вихри в сигарообразной (эллипсоподобной) системе БЭК. В [7; 8] была теоретически изучена временная эволюция атомов в двухъямной ловушке при учёте линейных и нелинейных взаимодействий. Получены различные режимы эволюции, в том числе и самозахват атомов одной из ловушек. В [9–11] было предложено, что бозе-конденсированные атомы, захваченные оптическими ловушками, могут использоваться для переноса квантовых вычислений.

В последние десятилетия начинается исследование квантового туннелирования атомов в тройной яме [12–16]. Показано, что динамика туннелирования атомов в тройной яме проявляет более интересное поведение атомов, чем в двухъямных ловушках. В [17] рассмотрено управление процессом туннелирования бозе-конденсированных бозонов в трёхъямной ловушке. Показано, что поток бозонов между первой и второй ямами можно контролировать с помощью увеличения или уменьшения населенности в третьей яме, таким образом, небольшая популяция бозонов, помещённая в третью яму, обеспечивает контроль дисбаланса между населенностью бозонов в первой и во второй ямах. В [12] были получены периодические режимы эволюции, наблюдались джозефсоновские колебания, а также самозахват либо в одной, либо в двух ловушках. Самозахват атомов в ловушках позволяет экспериментально реализовать ряд атомных оптических устройств, таких как атомные волноводы, светоделители [12; 18–20], интерферометры [21; 22], атомный транзистор в трёхъямной оптической ловушке [23], позволяющий управлять большим количеством атомов с помощью меньшего числа атомов. Атомный транзистор демонстрирует переключение, а также дифференциальное и абсолютное усиление, подобное поведению электронного транзистора.

Цель данной работы – изучение динамики туннелирования бозе-конденсированных атомов в трёхъямной симметричной ловушке, в трех ямах которой могут находиться бозе-конденсированные атомы. Ямы разделены потенциальным барьером, допускающим возможность туннелирования атомов между ямами.

Постановка задачи. Получение основных уравнений и их анализ

Гамильтониан задачи в этом случае примет вид:

$$\hat{H}_{\text{int}} = \hbar\chi_{12}\left(\hat{a}_1^+\hat{a}_2^+ + \hat{a}_1\hat{a}_2\right) + \hbar\chi_{13}\left(\hat{a}_1^+\hat{a}_3^+ + \hat{a}_3\hat{a}_1\right) + \hbar\chi_{23}\left(\hat{a}_2^+\hat{a}_3^+ + \hat{a}_3\hat{a}_2\right), \tag{1}$$

где χ_{12}, χ_{13} и χ_{23} – постоянные взаимодействия между атомами в первой и второй, первой и третьей, и второй и третьей ямах. Из (1), пользуясь приближением среднего поля в условиях точного резонанса, получим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} i\dot{a}_1 &= \chi_{12}a_2 + \chi_{13}a_3, \\ i\dot{a}_2 &= \chi_{12}a_1 + \chi_{23}a_3, \\ i\dot{a}_3 &= \chi_{13}a_1 + \chi_{23}a_{32}. \end{aligned} \tag{2}$$

В данной работе рассматриваем симметричный цепочный трёхъямный потенциал ловушки (рис. 1), в котором взаимодействие между атомами в первой и второй ямах равно взаимодействию атомов во второй и третьей ямах $\chi_{12} = \chi_{23} = \chi$, а $\chi_{13} = 0$. Решение системы уравнений (2) в этом случае представляется в виде:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_{10}\cos^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\chi t\right) - a_{30}\sin^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\chi t\right) + i\sqrt{2}a_{20}\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\chi t\right)\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\chi t\right), \\ a_2 &= a_{20}\cos\left(\sqrt{2}\chi t\right) + i\frac{\sqrt{2}}{2}\left(a_{10} + a_{30}\right)\sin\left(\sqrt{2}\chi t\right), \\ a_3 &= a_{30}\cos^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\chi t\right) - a_{10}\sin^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\chi t\right) + i\sqrt{2}a_{20}\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\chi t\right)\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\chi t\right). \end{aligned} \tag{3}$$

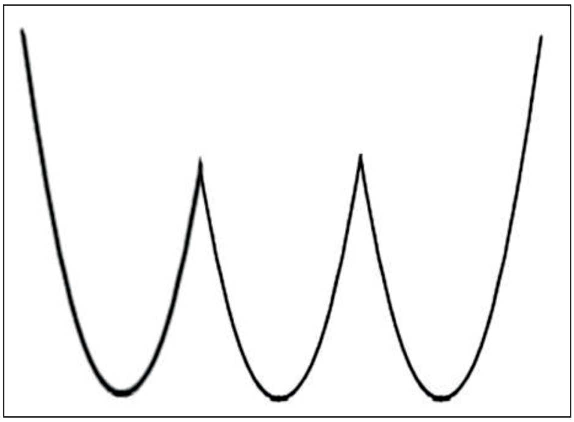

Рис. 1 / Fig. 1. Схема трёхъямного потенциала / Three-well potential diagram.
Источник: составлено авторами.

Если ввести в рассмотрение плотности атомов в первой, второй и третьей ямах, то из (3) можно получить выражения для плотностей частиц в ямах:

$$n_1 = n_{10}\cos^4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\chi t\right) + n_{30}\sin^4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\chi t\right) + 2\left(n_{20} - \sqrt{n_{10}n_{30}}\cos\left(\varphi_{10}-\varphi_{30}\right)\right)\times$$
$$\times\sin^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\chi t\right)\cos^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\chi t\right) - 2\sqrt{2}\sqrt{n_{10}n_{20}}\sin\left(\varphi_{10}-\varphi_{20}\right)\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\chi t\right)\times$$
$$\times\cos^3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\chi t\right) + 2\sqrt{2}\sqrt{n_{20}n_{30}}\sin\left(\varphi_{20}-\varphi_{30}\right)\sin^3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\chi t\right)\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\chi t\right),$$

$$n_2 = n_{20}\cos^2\left(\sqrt{2}\chi t\right) + \frac{1}{2}\left(n_{10} + n_{30} + 2\sqrt{n_{10}n_{30}}\cos\left(\varphi_{10}-\varphi_{30}\right)\right)\sin^2\left(\sqrt{2}\chi t\right) +$$
$$+\sqrt{2}\sqrt{n_{20}}\left(\sqrt{n_{30}}\sin\left(\varphi_{20}-\varphi_{30}\right) - \sqrt{n_{10}}\sin\left(\varphi_{10}-\varphi_{30}\right)\right)\sin\left(\sqrt{2}\chi t\right)\cos\left(\sqrt{2}\chi t\right),$$

$$n_3 = n_{30}\cos^4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\chi t\right) + n_{10}\sin^4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\chi t\right) + 2\left(n_{20} - \sqrt{n_{10}n_{30}}\cos\left(\varphi_{10}-\varphi_{30}\right)\right)\times$$
$$\times\sin^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\chi t\right)\cos^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\chi t\right) + 2\sqrt{2}\sqrt{n_{20}n_{30}}\sin\left(\varphi_{20}-\varphi_{30}\right)\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\chi t\right)\times$$
$$\times\cos^3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\chi t\right) - 2\sqrt{2}\sqrt{n_{10}n_{20}}\sin\left(\varphi_{10}-\varphi_{20}\right)\sin^3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\chi t\right)\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\chi t\right), \qquad (4)$$

где φ_{10}, φ_{20} и φ_{30} – начальные фазы. При этом в системе выполняется закон сохранения популяции атомов: $n_1 + n_2 + n_3 = n_{10} + n_{20} + n_{30}$.

Согласно (4) популяция атомов в ямах существенно зависит от начальных параметров системы: n_{10}, n_{20}, n_{30}, φ_{10}, φ_{20} и φ_{30}.

Рассмотрим динамику системы, когда $\varphi_{10} - \varphi_{30} = \varphi_{20} - \varphi_{30} = \frac{\pi}{2}$. Тогда система уравнений (4) примет вид:

$$n_1 = n_{10}\cos^4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\chi t\right) + n_{30}\sin^4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\chi t\right) + 2n_{20}\sin^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\chi t\right)\cos^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\chi t\right) -$$
$$-2\sqrt{2}\sqrt{n_{10}n_{30}}\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\chi t\right)\cos^3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\chi t\right) + 2\sqrt{2}\sqrt{n_{20}n_{30}}\sin^3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\chi t\right)\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\chi t\right),$$

$$n_2 = n_{20}\cos^2\left(\sqrt{2}\chi t\right) + \frac{1}{2}\left(n_{10} + n_{30}\right)\sin^2\left(\sqrt{2}\chi t\right) +$$
$$+\sqrt{2}\sqrt{n_{20}}\left(\sqrt{n_{30}} - \sqrt{n_{10}}\right)\sin\left(\sqrt{2}\chi t\right)\cos\left(\sqrt{2}\chi t\right),$$

$$n_3 = n_{30}\cos^4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\chi t\right) + n_{10}\sin^4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\chi t\right) + 2n_{20}\sin^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\chi t\right)\cos^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\chi t\right) +$$

$$+ 2\sqrt{2}\sqrt{n_{20}n_{30}}\,\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\chi t\right)\cos^3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\chi t\right) - 2\sqrt{2}\sqrt{n_{10}n_{20}}\,\sin^3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\chi t\right)\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\chi t\right). \quad (5)$$

Если в начальный момент времени популяции атомов в трёхъямной ловушке равны друг другу $n_{10} = n_{20} = n_{30}$, то из (5) и рис. 2 видно, что будет наблюдаться осцилляционный переход атомов из первой ямы во вторую, а затем из второй в третью и обратно. При этом плотность атомов во второй яме будет сохраняться: $n_2(t) = n_{20} = \text{const}$, а популяции атомов в первой и в третьей ямах будут антифазно изменяться с одинаковой амплитудой колебаний, однако полной перекачки атомов из одной ямы в другую не будет. В моменты времени $t = \frac{\pi n}{2\chi\sqrt{2}}$ ($n = 0,1, \ldots$) популяции атомов во всех трёх ямах будут равны начальным плотностям $n_1(t) = n_2(t) = n_3(t) = n_{10} = n_{20} = n_{30}$, то есть система вернётся в начальное состояние.

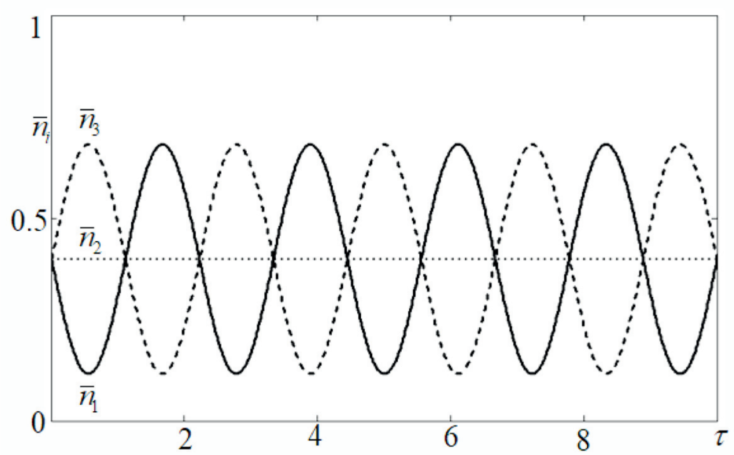

Рис. 2 / Fig. 2. Популяции атомов в ямах в зависимости от времени при $n_{10} = n_{20} = n_{30} = 0{,}4$ и $\varphi_{10} - \varphi_{30} = \varphi_{20} - \varphi_{30} = \frac{\pi}{2}$. Здесь $\tau = \chi t$, $\overline{n}_i$ – нормированные популяции атомов / Populations of atoms in wells as a function of time at $n_{10} = n_{20} = n_{30} = 0{,}4$ and $\varphi_{10} - \varphi_{30} = \varphi_{20} - \varphi_{30} = \frac{\pi}{2}$. Here $\tau = \chi t$, $\overline{n}_i$ – the normalized populations of atoms.

Источник: составлено авторами.

Рассмотрим случай, когда $n_{10} \gg n_{20}, n_{30}$. Как видно из рис. 3 популяция атомов во второй яме будет осциллировать со временем с постоянной амплитудой, в то время как амплитуда колебаний атомов в первой и третьей ямах будет модулированной функцией от времени. Популяция атомов в третьей яме существенно определяется начальной плотностью атомов в первой яме и достигает своего максимального значения, когда популяция атомов в первой яме минимальна. При этом в процессе эволюции системы не возникает состояния полного истощения атомов в ямах. Вторая яма в данном случае служит туннелем для перехода атомов из первой ямы в третью. Если в начальный момент времени $n_{30} \gg n_{20}, n_{10}$, то качественно эволюция системы не изменится.

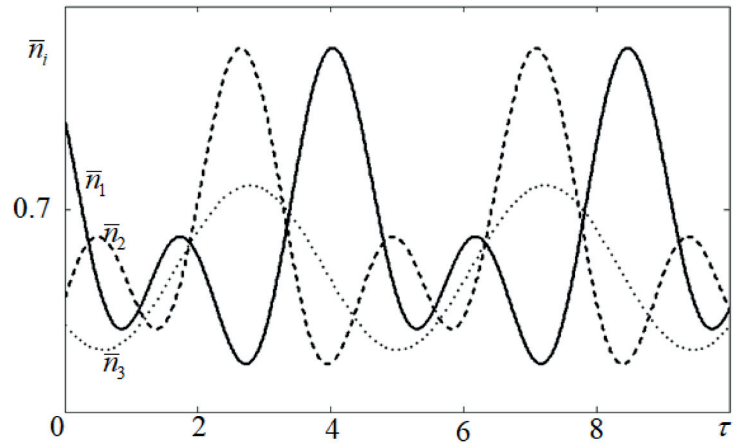

Рис. 3 / Fig. 3. Популяции атомов в ямах в зависимости от времени при $n_{10} = 1$, $n_{20} = 0{,}3$, $n_{30} = 0{,}4$ и $\varphi_{10} - \varphi_{30} = \varphi_{20} - \varphi_{30} = \dfrac{\pi}{2}$. Здесь $\tau = \chi t$, $\bar{n}_i$ – нормированные популяции атомов / Populations of atoms in wells as a function of time at $n_{10} = 1$, $n_{20} = 0{,}3$, $n_{30} = 0{,}4$ and $\varphi_{10} - \varphi_{30} = \varphi_{20} - \varphi_{30} = \dfrac{\pi}{2}$. Here $\tau = \chi t$, $\bar{n}_i$ – the normalized populations of atoms.

Источник: составлено авторами.

Если же $\varphi_{10} - \varphi_{30} = \varphi_{20} - \varphi_{30} = 0$, то (4) можно записать в виде:

$$n_1 = n_{10}\cos^4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\chi t\right) + n_{30}\sin^4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\chi t\right) + 2\left(n_{20} - \sqrt{n_{10}n_{30}}\right)\sin^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\chi t\right)\cos^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\chi t\right),$$

$$n_2 = n_{20}\cos^2\left(\sqrt{2}\chi t\right) + \frac{1}{2}\left(n_{10} + n_{30} + 2\sqrt{n_{10}n_{30}}\right)\sin^2\left(\sqrt{2}\chi t\right),$$

$$n_3 = n_{30}\cos^4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\chi t\right) + n_{10}\sin^4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\chi t\right) + 2\left(n_{20} - \sqrt{n_{10}n_{30}}\right)\sin^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\chi t\right)\cos^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\chi t\right). \quad (6)$$

Рассмотрим ситуацию начального равнозаселения атомов в трёхъямной ловушке: $n_{10} = n_{20} = n_{30} = n_0$. Согласно (6) и рис. 4 популяции атомов в ямах будут осциллировать со временем. В данном случае максимальная локализация атомов будет наблюдаться во второй яме, при этом популяция атомов во второй яме в процессе эволюции будет больше или равна n_0. Амплитуды колебаний атомов в первой и третьей ямах будут равны, и изменяться со временем синфазно. Популяции атомов в первой и третьей ямах с течением времени будут меньше или равны n_0. Равенство $n_1(t) = n_2(t) = n_3(t) = n_{10} = n_{20} = n_{30}$ будут наблюдаться в моменты времени $t = \dfrac{2\pi n}{\sqrt{2}\chi}$ $(n = 0,1, ...)$.

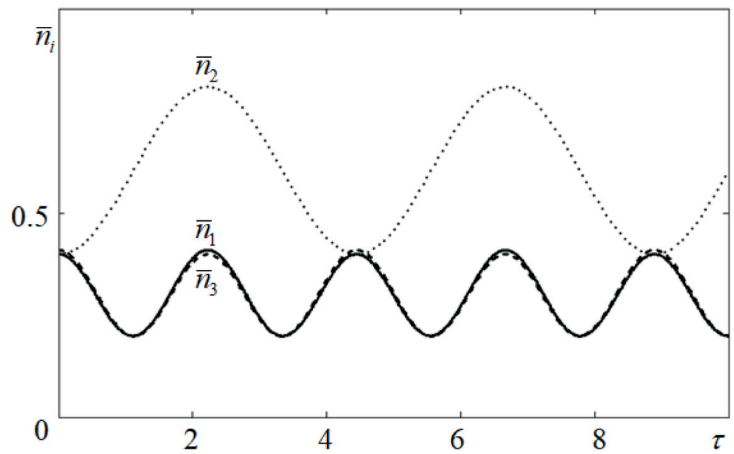

Рис. 4 / Fig. 4. Популяции атомов в ямах в зависимости от времени при $n_0 = 0{,}4$ и $\varphi_{10} - \varphi_{30} = \varphi_{20} - \varphi_{30} = 0$. Здесь $\tau = \chi t$, $\overline{n}_i$ – нормированные популяции атомов / Populations of atoms in wells as a function of time at $n_0 = 0{,}4$ and $\varphi_{10} - \varphi_{30} = \varphi_{20} - \varphi_{30} = 0$. Here $\tau = \chi t$, $\overline{n}_i$ – the normalized populations of atoms.

Источник: составлено авторами.

Когда $n_{10} \gg n_{20}, n_{30}$, то, как видно из рис. 5, популяции атомов осциллируют с течением времени с различными амплитудами. В данном случае снова максимальная популяция атомов наблюдается во второй яме, причём минимальная плотность атомов во второй яме равна n_{20}. Таким образом, популяция атомов во второй яме увеличивается за счёт туннелирования атомов из первой и третьей ям. Амплитуды колебаний популяции атомов в первой и третьей ямах являются модулированными в пределах одного периода. Популяция атомов в первой яме в процессе эволюции не превосходят n_{10}; таким образом, количество атомов, пришедших из второй ямы в первую, не превосходит количество атомов, покинувших первую яму. Популяция атомов в третьей яме в процессе эволюции может достигать своего максимального значения равного n_{10}.

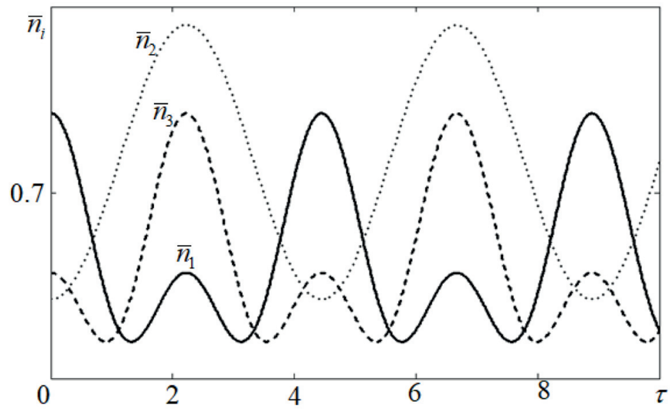

Рис. 5 / Fig. 5. Популяции атомов в ямах в зависимости от времени при $n_{10} = 1$, $n_{20} = 0{,}3$, $n_{30} = 0{,}4$ и $\varphi_{10} - \varphi_{30} = \varphi_{20} - \varphi_{30} = 0$. Здесь $\tau = \chi t$, $\overline{n}_i$ – нормированные популяции атомов / Populations of atoms in wells depending on time at $n_{10} = 1$, $n_{20} = 0{,}3$, $n_{30} = 0{,}4$ and $\varphi_{10} - \varphi_{30} = \varphi_{20} - \varphi_{30} = 0$. Here $\tau = \chi t$, $\overline{n}_i$ – the normalized populations of atoms.

Источник: составлено авторами.

Если $n_{20} = 2n_{10} = 2n_{30}$, то в системе будет наблюдаться покой, атомы не будут туннелировать из одной ямы в другую: $n_1(t) = n_2(t) = n_3(t) = \text{const}$ (рис. 6). Однако, если $n_{20} < 2n_{10} = 2n_{30}$, то максимальное значение популяции атомов в первой яме равно n_{10}, а если $n_{20} > 2n_{10} = 2n_{30}$, то минимальное значение популяции атомов в первой яме равно n_{10}, таким образом, популяция атомов в первой яме будет обогащаться благодаря туннелированию атомов из второй ямы.

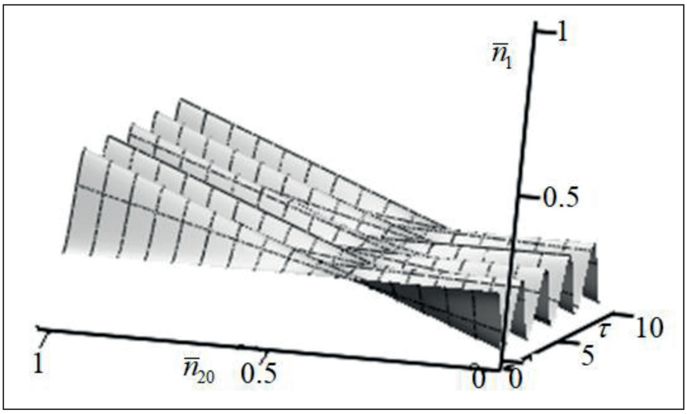

Рис. 6 / Fig. 6. Популяция атомов в первой яме в зависимости от времени и n_{20} при $n_{30} = 0{,}2$ и $\varphi_{10} - \varphi_{30} = \varphi_{20} - \varphi_{30} = 0$. Здесь $\tau = \chi t$, $\overline{n}_i$ – нормированная популяция атомов в первой ловушке / Population of atoms in the first well versus time and n_{20} at $n_{30} = 0{,}2$ and $\varphi_{10} - \varphi_{30} = \varphi_{20} - \varphi_{30} = 0$. Here $\tau = \chi t$, $\overline{n}_i$ – the normalized population of atoms in the first trap.

Источник: составлено авторами.

Заключение

Таким образом, задавая в цепочном симметричном трёхъямном потенциале с бозе-конденсированными атомами начальные разности фаз $\varphi_{10} - \varphi_{30}$, $\varphi_{20} - \varphi_{30}$, и начальные плотности атомов в ямах, можно получать различные режимы эволюции популяций атомов в ямах: максимальную и минимальную локализации атомов в одной из ям в ловушке, покой системы. Варьируя начальные параметры системы, можно получить модулированную эволюцию популяций атомов в первой и третьей ямах в пределах одного периода.

Статья поступила в редакцию 16.12.2020 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Li W., Haque M., Komineas S. Vortex dipole in a trapped two-dimensional Bose-Einstein condensate // Physical Review A. 2008. Vol. 77. Iss. 5. P. 053610. DOI: 10.1103/PhysRevA.77.053610.
2. Rogel-Salazar J. The Gross-Pitaevskii equation and Bose-Einstein condensate // European Journal of Physics. 2013.Vol. 34. No. 2. P. 247–257. DOI: 10.1088/0143-0807/34/2/247.
3. Complete Bose-Einstein condensation the Gross-Pitaevskii regime / Boccato C., Brennecke C., Cenatiempo S., Schbein B. // Communications in Mathematical Physics. 2018. Vol. 359. P. 975–1026. DOI: 10.1007/s00220-017-3016-5.
4. Metastable Bose-Einstein condensation in a strongly correlated optical lattice / McKay D., Ray U., Natu S. M., Russ P., Ceperley D., DeMarco B. // Physical Review A. 2015. Vol. 91. Iss. 2. P. 023625. DOI: 10.1103/PhysRevA.91.023625.
5. Li Y., Yuan J., Hemmerich A., Li X. Rotation-Symmetry-Enforced Coupling of Spin and Angular Momentum for p-Orbital Bosons // Physical Review Letters. 2018. Vol. 121. Iss. 9. P. 93401. DOI: 10.1103/PhysRevLett.121.093401.
6. Creating solitons with controllable and near-zero velocity in Bose-Einstein condensates / Fritsch A. R., Lu M., Reid G. H., Pineiro A. M., Spielman I. B. // Physical Review A. 2020. Vol. 101. Iss. 5. P. 053629. DOI: 10.1103/PhysRevA.101.053629.
7. Васильева О. Ф., Зинган А. П. Динамика нелинейного туннелирования бозе-конденсированных атомов в двухъямной ловушке // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2019. №2. С. 83–95. DOI: 10.18384-2310-7251-2019-2-83-95.
8. Khadzhi P. I., Vasilieva O. F. Coherent dynamics of Bose-condensed atoms in a double-well trap // Journal of Nanoelectronics and Optoelectronics. 2011. Vol. 6. No. 4. P. 433–451. DOI: 10.1166/jno.2011.1194.
9. Byrnes T., Wen K., Yamamoto Y. Macroscopic quantum computation using Bose-Einstein condensates // Physical Review A. 2012. Vol. 85. P. 040306(R). DOI: 10.1103/PhysRevA.85.040306.
10. Macroscopic quantum information processing using spin coherent states / Byrnes T., Rosseau D., Khosla M., Pyrkov A., Thomosen A., Mukai T., Koyama S., Abdelrahman A., Ilo-Okeke E. // Optics Communication. 2015. Vol. 337. P. 102–109. DOI: 10.1016/j.optcom.2014.08.017.
11. Quantum walk in momentum space with a Bose-Einstein condensate / Dadras S., Cresch A., Croiseau C., Wimberger S., Summy G. S. // Physical Review Letters. 2018. Vol. 121. Iss. 7. P. 70402. DOI: 10.1103/PhysRevLett.121.070402.
12. Guiding neutral atoms on a chip / Dekker N. H., Lee C. S., Lorent V., Thywissen J. H.,

Smith S. P., Drndic M., Westervelt R. M., Prentiss M. // Physical Review Letters. 2000. Vol. 84. Iss. 6. P. 1124. DOI: 10.1103/PhysRevLett.84.1124.

13. Mossmann S., Jung C. Semiclassical approach to Bose-Einstein condensates in a triple well potential // Physical Review A. 2006. Vol. 74. Iss. 3. P. 033601. DOI: 10.1103/PhysRevA.74.033601.
14. Viscondi T. F., Furuya K. Dynamics of a Bose-Einstein condensate in a symmetric triple-well trap // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. 2011. Vol. 44. No. 17. P. 175301. DOI: 10.1088/1751-8113/44/17/175301
15. Optimal conditions for spatial adiabatic passage of a Bose-Einstein condensate / Rubio J. L., Ahufinger V., Busch Th., Mompart J. // Physical Review A. 2016. Vol. 94. Iss. 5. P. 053606. DOI: 10.1103/PhysRevA.94.053606.
16. Self-trapping and tunneling of Bose-Einstein condensates in a cavity-mediated triple-well system / Wang B., Zhang H., Chen Y., Tan L. // The European Physical Journal D. 2017. Vol. 71. P. 56. DOI: 10.1140/epjd/e2017-70647-3.
17. Control of tunneling in a atomtronics switching device / Wilsmann K. W., Ymai L. H., Tonel A. P., Linkes J., Foerster A. // Communications physics. 2018. Vol. 1. P. 91. DOI: 10.1038/s42005-018-0089-1.
18. Guiding neutral atoms around curves with lithographically patterned current-carrying wires / Muller D., Anderson D. Z., Grow R. J., Schwindt P. D., Cornell E. A. // Physical Review Letters. 1999. Vol. 83. Iss. 25. P. 5194. DOI: 10.1103/PhysRevLett.83.5194.
19. Beam splitter for guided atoms / Cassettari D., Hessmo B., Folman R., Maier T., Schmiedmayer J. // Physical Review Letters. 2000. Vol. 85. Iss. 26. P. 5483. DOI: 10.1103/PhysRevLett.85.5483
20. Propagation of Bose-Einstein condensates in magnetic waveguide / Leanhardt A. E., Chikkovtur A. P., Kielpinski D., Shin Y., Gustavson T. L., Ketterle W., Pritchard D. E. // Physical Review Letters. 2002. Vol. 89. Iss. 4. P. 040401. DOI: 10.1103/PhysRevLett.89.040401.
21. Atom Michelson interferometer on a chip using a Bose-Einstein condensate / Wang Y.-J., Anderson D. Z., Bright V. M., Cornell E. A., Diot Q., Kishimoto T., Prentiss M., Saravanan R. A., Segal S. R., Wu S. // Physical Review Letters. 2005. Vol. 94. Iss. 9. P. 090405. DOI: 10.1103/PhysRevLett.94.090405.
22. Atom interferometry with Bose-Einstein condensates in a double-well potential / Shin Y., Saba M., Pasquini T. A., Ketterle W., Pritchard D. E., Leanhardt A. E. // Physical Review Letters. 2004. Vol. 92. Iss. 5. P. 050405. DOI: 10.1103/PhysRevLett.92.050405.
23. Stickney J. A., Anderson D. Z., Zozulya A. A. Transistorlike behavior of a Bose-Einstein condensate in a triple-well potential // Physical Review Letters A. 2007. Vol. 75. Iss. 1. P. 013608. DOI: 10.1103/PhysRevA.75.013608.

REFERENCES

1. Li W., Haque M., Komineas S. Vortex dipole in a trapped two-dimensional Bose-Einstein condensate. In: *Physical Review A*, 2008, vol. 77, iss. 5, pp. 053610. DOI: 10.1103/PhysRevA.77.053610.
2. Rogel-Salazar J. The Gross-Pitaevskii equation and Bose-Einstein condensate. In: *European Journal of Physics*, 2013,vol. 34, no. 2, pp. 247–257. DOI: 10.1088/0143-0807/34/2/247.
3. Boccato C., Brennecke C., Cenatiempo S., Schbein B. Complete Bose-Einstein condensation the Gross-Pitaevskii regime. In: *Communications in Mathematical Physics*, 2018, vol. 359, pp. 975–1026. DOI: 10.1007/s00220-017-3016-5.
4. McKay D., Ray U., Natu S. M., Russ P., Ceperley D., DeMarco B. Metastable Bose-Einstein condensation in a strongly correlated optical lattice. In: *Physical Review A*, 2015, vol. 91,

iss. 2, pp. 023625. DOI: 10.1103/PhysRevA.91.023625.
5. Li Y., Yuan J., Hemmerich A., Li X. Rotation-Symmetry-Enforced Coupling of Spin and Angular Momentum for p-Orbital Bosons. In: *Physical Review Letters*, 2018, vol. 121, iss. 9, pp. 93401. DOI: 10.1103/PhysRevLett.121.093401.
6. Fritsch A. R., Lu M., Reid G. H., Pineiro A. M., Spielman I. B. Creating solitons with controllable and near-zero velocity in Bose-Einstein condensates. In: *Physical Review A*, 2020, vol. 101, iss. 5, pp. 053629. DOI: 10.1103/PhysRevA.101.053629.
7. Vasilieva O. F., Zingan A. P. Dynamics of nonlinear tunneling of Bose-condensed atoms in a double-well trap. In: *Vestnik Moskovsokogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriaya: Fizika-Matematika* (Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics), 2019, no. 2, pp. 83–95. DOI: 10.18384-2310-7251-2019-2-83-95.
8. Khadzhi P. I., Vasilieva O. F. Coherent dynamics of Bose-condensed atoms in a double-well trap. In: *Journal of Nanoelectronics and Optoelectronics*, 2011, vol. 6, no. 4, pp. 433–451. DOI: 10.1166/jno.2011.1194.
9. Byrnes T., Wen K., Yamamoto Y. Macroscopic quantum computation using Bose-Einstein condensates. In: *Physical Review A*, 2012, vol. 85, pp. 040306(R). DOI: 10.1103/PhysRevA.85.040306.
10. Byrnes T., Rosseau D., Khosla M., Pyrkov A., Thomosen A., Mukai T., Koyama S., Abdelrahman A., Ilo-Okeke E. Macroscopic quantum information processing using spin coherent states. In: *Optics Communication*, 2015, vol. 337, pp. 102–109. DOI: 10.1016/j.optcom.2014.08.017.
11. Dadras S., Cresch A., Croiseau C., Wimberger S., Summy G. S. Quantum walk in momentum space with a Bose-Einstein condensate. In: *Physical Review Letters,* 2018, vol. 121, iss. 7, pp. 70402. DOI: 10.1103/PhysRevLett.121.070402.
12. Dekker N. H., Lee C. S., Lorent V., Thywissen J. H., Smith S. P., Drndic M., Westervelt R. M., Prentiss M. Guiding neutral atoms on a chip. In: *Physical Review Letters*, 2000, vol. 84, iss. 6, pp. 1124. DOI: 10.1103/PhysRevLett.84.1124.
13. Mossmann S., Jung C. Semiclassical approach to Bose-Einstein condensates in a triple well potential. In: *Physical Review A*, 2006, vol. 74, iss. 3, pp. 033601. DOI: 10.1103/PhysRevA.74.033601.
14. Viscondi T. F., Furuya K. Dynamics of a Bose-Einstein condensate in a symmetric triple-well trap. In: *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 2011, vol. 44, no. 17, pp. 175301. DOI: 10.1088/1751-8113/44/17/175301
15. Rubio J. L., Ahufinger V., Busch Th., Mompart J. Optimal conditions for spatial adiabatic passage of a Bose-Einstein condensate. In: *Physical Review A*, 2016, vol. 94, iss. 5, pp. 053606. DOI: 10.1103/PhysRevA.94.053606.
16. Wang B., Zhang H., Chen Y., Tan L. Self-trapping and tunneling of Bose-Einstein condensates in a cavity-mediated triple-well system. In: *The European Physical Journal D*, 2017, vol. 71, pp. 56. DOI: 10.1140/epjd/e2017-70647-3.
17. Wilsmann K. W., Ymai L. H., Tonel A. P., Linkes J., Foerster A. Control of tunneling in a atomtronics switching device. In: *Communications physics*, 2018, vol. 1, pp. 91. DOI: 10.1038/s42005-018-0089-1.
18. Muller D., Anderson D. Z., Grow R. J., Schwindt P. D., Cornell E. A. Guiding neutral atoms around curves with lithographically patterned current-carrying wires. In: *Physical Review Letters*, 1999, vol. 83, iss. 25, pp. 5194. DOI: 10.1103/PhysRevLett.83.5194.
19. Cassettari D., Hessmo B., Folman R., Maier T., Schmiedmayer J. Beam splitter for guided atoms. In: *Physical Review Letters*, 2000, vol. 85, iss. 26, pp. 5483. DOI: 10.1103/PhysRevLett.85.5483

20. Leanhardt A. E., Chikkovtur A. P., Kielpinski D., Shin Y., Gustavson T. L., Ketterle W., Pritchard D. E. Propagation of Bose-Einstein condensates in magnetic waveguide. In: *Physical Review Letters*, 2002, vol. 89, iss. 4, pp. 040401. DOI: 10.1103/PhysRevLett.89.040401.
21. Wang Y.-J., Anderson D. Z., Bright V. M., Cornell E. A., Diot Q., Kishimoto T., Prentiss M., Saravanan R. A., Segal S. R., Wu S. Atom Michelson interferometer on a chip using a Bose-Einstein condensate. In: *Physical Review Letters*, 2005, vol. 94, iss. 9, pp. 090405. DOI: 10.1103/PhysRevLett.94.090405.
22. Shin Y., Saba M., Pasquini T. A., Ketterle W., Pritchard D. E., Leanhardt A. E. Atom interferometry with Bose-Einstein condensates in a double-well potential. In: *Physical Review Letters*, 2004, vol. 92, iss. 5, pp. 050405. DOI: 10.1103/PhysRevLett.92.050405.
23. Stickney J. A., Anderson D. Z., Zozulya A. A. Transistorlike behavior of a Bose-Einstein condensate in a triple-well potential. In: *Physical Review Letters A*, 2007, vol. 75, iss. 1, pp. 013608. DOI: 10.1103/PhysRevA.75.013608.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Васильева Ольга Федоровна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры квантовой радиофизики и систем связи Приднестровского государственного университета имени Т. Г. Шевченко;
e-mail: florina_of@mail.ru;

Зинган Анна Петровна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры квантовой радиофизики и систем связи Приднестровского государственного университета имени Т. Г. Шевченко;
e-mail: zingan.anna@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Olga F. Vasilieva – Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Prof., Department of Quantum Radiophysics and Communication Systems, Pridnestrovian State University;
e-mail: florina_of@mail.ru;

Anna P. Zingan – Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Prof., Department of Quantum Radiophysics and Communication Systems, Pridnestrovian State University;
e-mail: zingan.anna@mail.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Васильева О. Ф., Зинган А. П. Временная эволюция бозе-конденсированных атомов в трехъямной симметричной цепочной ловушке // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2021. № 1. С. 27–38.
DOI: 10.18384/2310-7251-2021-1-27-38

FOR CITATION

Vasilieva O. F., Zingan A. P. Temporary evolution of Bose-condensed atoms in a three-well symmetric chain trap. In: *Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics-Mathematics*, 2021, no. 1, pp. 27–38.
DOI: 10.18384/2310-7251-2021-1-27-38

УДК: 533.2, 51-72
DOI: 10.18384/2310-7251-2021-1-39-53

ИССЛЕДОВАНИЕ СЕТОЧНОЙ СХОДИМОСТИ ЯВНОГО МЕТОДА МАК-КОРМАКА, ПРИМЕНЁННОГО К МОДЕЛИРОВАНИЮ ТЕЧЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИ ЗАРЯЖЕННОГО АЭРОЗОЛЯ, ВЫЗВАННОГО ДВИЖЕНИЕМ ДИСПЕРСНЫХ ЧАСТИЦ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНУТРЕННЕГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Тукмаков Д. А.

Федеральный исследовательский центр «Казанский научный центр Российской академии наук»
420111, г. Казань, ул. Лобачевского, д. 2/31, Российская Федерация

Аннотация
Цель данной работы заключается в исследовании сеточной сходимости явного метода Мак-Кормака, применённого к решению уравнений континуальной математической модели динамики электрически заряженного аэрозоля.
Процедура и методы. В данной работе для описания течения аэрозоля применена континуальная модель движения неоднородной среды, предполагающая, что движение каждой из компонент смеси описывается полной системой уравнений динамики сплошной среды.
Результаты. Проведены численные расчёты на последовательности измельчающихся конечно-разностных сеток. Отличия в вычисленных решениях уменьшаются по мере измельчения разбиения расчётной области.
Теоретическая и/или практическая значимость. Результаты расчётов демонстрируют сходимость явного метода Мак-Кормака при моделировании течения двухкомпонентной смеси, вызванного движением дисперсной компоненты. Также численное моделирование выявило, что в процессе движения дисперсной фазы на динамику смеси влияет как величина силы Кулона, так и на межкомпонентное взаимодействие.
Ключевые слова: явная конечно-разностная схема; континуальная модель; многофазные среды; межкомпонентное взаимодействие; газовзвеси

INVESTIGATION OF THE GRID CONVERGENCE OF THE EXPLICIT MAC-CORMAK METHOD APPLIED TO SIMULATION OF ELECTRICALLY CHARGED AEROSOL FLOW CAUSED BY THE MOTION OF DISPERSED PARTICLES UNDER THE ACTION OF INTERNAL ELECTRIC ELECTRICITY

D. Tukmakov

Federal Research Center "Kazan Scientific Center of the Russian Academy of Sciences"
ul. Lobachevskogo 2/31, 420111 Kazan, Russian Federation

Abstract
Aim. We study the grid convergence of the explicit MacCormack method applied to solving the equations of a heterogeneous mathematical model of the dynamics of an electrically charged aerosol.

Methodology. The flow of aerosol is described by using a continuous model of the motion of an inhomogeneous medium, which assumes that the motion of each of the mixture components is described by a complete system of equations for the dynamics of a continuous medium.
Results. Numerical calculations are carried out on a sequence of refining finite-difference grids. Differences in the calculated solutions decrease as the partition of the computational domain becomes smaller.
Research implications. The calculation results demonstrate the convergence of the explicit MacCormack method in modeling the flow of a two-component mixture caused by the movement of the dispersed component. Also, numerical modeling revealed that during the movement of the dispersed phase, the dynamics of the mixture is influenced by both the magnitude of the Coulomb force and the inter-component interaction.
Keywords: explicit finite difference scheme, continual model, multiphase media, inter-component interaction, gas suspension.

Введение

Одним из развивающихся разделов механики сплошных сред является механика неоднородных сред [1–12]. В связи со сложностью экспериментального исследования существенное значение в изучении течений неоднородных сред имеет математическое моделирование. При этом из-за нелинейного характера уравнений математических моделей динамики недородных сред для решения уравнений используются численные алгоритмы. В монографии [1] выведены основные уравнения механики неоднородных сплошных сред. Монографии [2; 3] посвящены моделированию течений газокапельных и запылённых сред. Для описания динамики неоднородных сред существует несколько подходов. Широко распространён подход моделирования динамики неоднородных смесей, в рамках которого математическая модель предполагает, что все компоненты смеси движутся с одинаковой скоростью [1; 4; 11]. Также распространён подход в моделировании неоднородных сред, предполагающий расчёт полей скоростей только для несущей среды, при этом динамика дисперсной компоненты описывается уравнениями диффузии с конвективными слагаемыми, вычисленными при решении уравнений динамики несущей компоненты [5; 12].

В ряде случаев расчёт динамики смеси предполагает моделирование изменения динамических параметров дисперсной компоненты при стационарном распределении скорости несущей среды [6–8]. Объектом исследований являются также электрически заряженные запылённые среды [7–9], частным случаем которых можно считать низкотемпературную пылевую плазму. При изучении таких сред моделируются не только газодинамические, но и электрические поля. Континуальные математические модели динамики неоднородных сред [1–3; 10; 13] позволяют моделировать течения смесей, в которых массовые доли компонент являются величинами одного порядка. Как правило, данные модели применяются к исследованию течений многофазных сред– сред, в которых компоненты имеют различное агрегатное состояние: аэрозоли, суспензии, пенные среды [1; 2]. За счёт учёта межкомпонентного взаимодействия такие модели позволяют исследовать динамические процессы в многофазных средах, возникающие вследствие движения дисперсной компоненты, например, течение жидкости, возникающее при осаждении суспензии [10]. В данной работе исследуется сеточная сходимость явного конечно-разностного метода Мак-Кормака при моделировании процесса генерации течения газа, вызванного движением электрически заряженной дисперсной компоненты. Математическая модель реализует методологию моделирования течений неоднородных сред, в рамках которой для каждой из компонент смеси решается полная гидродинамическая система уравнений динамики, а также учитывается взаимодействие компонент смеси. Представленная в работе математическая модель позволяет описывать электрическое поле, формируемое электрически заряженными твёрдыми частицами аэрозоля. Целью работы было исследование сходимости явного метода Мак-Кормака при решении уравнений континуальной математической модели аэрозоля. Также в работе выявлены возможности применения модели к исследованию эффектов взаимообратного влияния компонент смеси на общую динамику многофазной среды (аэрозоля).

Математическая модель

Для описания движения неоднородной среды применяется система уравнений динамики многоскоростной и многотемпературной газовзвеси со скоростным скольжением фаз и межфазным теплообменом. Одним из наиболее важных параметров дисперсной компоненты многофазной смеси является «средняя плотность», представляющая собой произведение объёмного содержания дисперсной компоненты на физическую плотность материала дисперсной фазы [1–3]. Физическая плотность материала дисперсных включений в процессе течения многофазной среды не изменяется. При этом объёмное содержание является функцией временной и пространственных переменных. Движение несущей среды описывается системой уравнений Навье-Стокса для сжимаемого теплопроводного газа [14–19] с учётом межфазного силового взаимодействия и теплообмена [2]:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla\left(\rho_i \mathbf{V}_i\right) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho_1 V_1^k}{\partial t} + \nabla^i\left(\rho_1 V_1^k V_1^i + \delta_{ik} p - \tau_{ik}\right) = -F_k + \alpha \nabla^k p, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho_2 V_2^k}{\partial t} + \nabla^i\left(\rho_2 V_2^i V_2^k\right) = F_k - \alpha \nabla^k p, \quad (3)$$

$$\frac{\partial (e_1)}{\partial t} + \nabla^i\left(V_1^i\left(e_1 + p - \tau_{ii}\right) - V_1^k \tau_{ki} - \lambda \nabla^i T\right) = -Q - \left|F_k\right|\left(V_1^k - V_2^k\right) + \alpha \nabla^k\left(p V_1^k\right), \quad (4)$$

$$\frac{\partial\left(e_2\right)}{\partial t} + \nabla^k\left(e_2 V_2^k\right) = Q, \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \rho_2 q_0, \quad (6)$$

$$\mathbf{V}_i = [u_i, v_i]; \quad i,k = 1,2.$$

Тензор вязких напряжений несущей среды вычисляется следующим образом [17]:

$$\tau_{xx} = \mu\left(2\frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{2}{3}D\right),\ \ \tau_{xy} = \mu\left(2\frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{2}{3}D\right),$$

$$\tau_{xy} = \mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x}\right),\ \ D = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y}.$$

Межфазное силовое взаимодействие описывалось уравнениями [2]:

$$F_x = \frac{3}{4}\frac{\alpha}{(2r)}C_d\rho_1\sqrt{(u_1-u_2)^2+(v_1-v_2)^2}\,(u_1-u_2) + \alpha\rho_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1\frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1\frac{\partial u_1}{\partial y}\right) +$$

$$+\,0,5\alpha\rho_2\left(\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1\frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1\frac{\partial u_1}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial t} - u_2\frac{\partial u_2}{\partial x} - v_2\frac{\partial u_2}{\partial y}\right) - q_0\rho_2\,\partial\varphi/\partial x,$$

$$F_y = \frac{3}{4}\frac{\alpha}{(2r)}C_d\rho_1\sqrt{(u_1-u_2)^2+(v_1-v_2)^2}\,(v_1-v_2) + \alpha\rho_1\left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + u_1\frac{\partial v_1}{\partial x} +\right.$$

$$\left.+\,v_1\frac{\partial v_1}{\partial y}\right) + 0,5\alpha\rho_1\left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + u_1\frac{\partial v_1}{\partial x} + v_1\frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial t} - u_2\frac{\partial v_2}{\partial x} - v_2\frac{\partial v_2}{\partial y}\right) - q_0\rho_2\,\partial\varphi/\partial y.$$

Компоненты вектора межфазного силового взаимодействия включают в себя силу аэродинамического сопротивления, динамическую силу Архимеда, силу присоединённых масс [1]; также при описании динамики частиц учитывается сила Кулона [20]. Здесь p, ρ_1, u_1, v_1 – давление, плотность, декартовы составляющие скорости несущей среды в направлении осей x и y, соответственно; T_1, e_1 –температура и полная энергия газа; ρ_2, T_2, e_2, u_2, v_2 – средняя плотность, температура, внутренняя энергия, декартовы составляющие скорости дисперсной фазы; F_x, F_y – составляющие вектора силового взаимодействия дисперсной фазы и несущей среды; $k = 1,2$; Q – тепловой поток между дисперсной фазой и несущей средой [1–3]; λ и μ – теплопроводность и вязкость несущей среды, соответственно. Температура несущей среды находится из уравнения $T_1 = (\gamma - 1) \cdot \cdot (e_1/\rho_1 - 0,5(u_1^2+v_1^2))/R$, где R – газовая постоянная несущей фазы, γ – постоянная адиабаты. Внутренняя энергия взвешенной в газе дисперсной фазы определяется как $e_2 = \rho_2 C_p T_2$, где C_p – удельная теплоёмкость единицы массы вещества дисперсной фазы. Тепловой поток между компонентами смеси описывается выражением: $Q = 6\alpha Nu_{12}\lambda(T_1 - T_2)/(2r)^2$. Число Нуссельта определяется с помощью известной аппроксимации в зависимости от относительных чисел Маха, Рейнольдса и от числа Прандтля [2; 3]:

$$M_{12} = \left|\bar{V}_1 - \bar{V}_2\right|/c,\ \ \mathrm{Re}_{12} = \rho_1\left|\bar{V}_1 - \bar{V}_2\right|2r/\mu,\ \ \mathrm{Pr} = \gamma C_p\mu/\lambda,$$

$$Nu_{12} = 2\exp(-M_{12}) + 0,459\,\mathrm{Re}_{12}^{0,55}\,\mathrm{Pr}^{0,33},$$

Здесь c – скорость звука. Коэффициент аэродинамического сопротивления вычислялся с использованием следующего выражения [2]:

$$C_d = \frac{24}{\mathrm{Re}_{12}} + \frac{4}{\mathrm{Re}^{0,5}{}_{12}} + 0,4.$$

При моделировании течения аэрозоля для составляющих скорости несущей и дисперсной компонент смеси задавались однородные граничные условия Дирихле. Для остальных динамических функций на границе расчётной области задавались однородные граничные условия Неймана. Составляющие силы Кулона на единицу объёма газовзвеси определяются через её удельный заряд, объёмную плотность твёрдой фазы и напряжённость электрического поля. Потенциал электрического поля в расчётной области определяется из решения уравнения Пуассона [19]:

$$div\mathbf{E} = \frac{\rho_{эл}}{\varepsilon\varepsilon_0}, \quad \mathbf{E} = -\overline{\nabla}\varphi, \quad \Delta^2\varphi = -\frac{\rho_{эл}}{\varepsilon\varepsilon_0},$$

$$\rho_{эл} = \alpha\rho_{20}\cdot q_0 = \rho_2\cdot q_0, \quad \varepsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36\pi}\Phi/м, \quad \varepsilon = 1.$$

где q_0 – удельный заряд единицы массы твёрдой фракции, φ – потенциал электрического поля. Для уравнения Пуассона задавались однородные граничные условия Неймана в той части канала, в которой располагался однородный газ, и однородные граничные условия Дирихле в той части канала, в которой располагалась электрически заряженная дисперсная компонента смеси. Система уравнений динамики многофазной среды (1)–(5) решалась явным конечно-разностным методом Мак-Кормака [17]. Шаг по времени вычислялся, исходя из условия Куранта-Фридрихса-Леви [17]. Рассмотрим применение численного метода на примере скалярного нелинейного уравнения в частных производных (7):

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial a(f)}{\partial x_1} + \frac{\partial b(f)}{\partial x_2} = c(f). \tag{7}$$

Алгоритм явного конечно-разностного метода Мак-Кормака для нелинейного уравнения (7) имеет вид (8)–(9):

$$f^*_{j,k} = f^n_{j,k} - \frac{\Delta t}{\Delta x_1}\left(a^n_{j+1,k} - a^n_{j,k}\right) - \frac{\Delta t}{\Delta x_2}\left(b^n_{j,k+1} - b^n_{j,k}\right) + \Delta t c^n_{j,k}. \tag{8}$$

$$f^{n+1}_{j,k} = 0,5(f^n_{j,k} + f^*_{j,k}) - 0,5\frac{\Delta t}{\Delta x_1}\left(a^*_{j,k} - a^*_{j-1,k}\right) - 0,5\frac{\Delta t}{\Delta x_2}\left(b^*_{j,k} - b^*_{j,k-1}\right) + 0,5\Delta t c^*_{j,k}. \tag{9}$$

Здесь Δx_i – шаг по соответствующему пространственному направлению, Δt – шаг по времени. Для получения монотонного численного решения к сеточной функции на каждом временном шаге применялась схема нелинейной коррекции [18]. Алгоритм коррекции выполнялся последовательно вдоль всех узлов. Рассмотрим алгоритм коррекции решения на примере функции f. В случае, если выполняются условия $(\delta f_{j-1/2}\cdot\delta f_{j+1/2}) < 0$ или $(\delta f_{j+1/2}\cdot\delta f_{j+3/2}) < 0$, то к функции f в j-ом узле применяется алгоритм схемы коррекции:

$$\tilde{f}_j = f_j + \kappa\left(\delta f_{j+1/2} - \delta f_{j-1/2}\right).$$

Нижний индекс обозначает номер узла сетки. Здесь использованы обозначения:

$$\delta f_{j-1/2} = f_j - f_{j-1},\ \ \delta f_{j+1/2} = f_{j+1} - f_j,\ \ \ \delta f_{j+3/2} = f_{j+2} - f_{j+1},$$

в противном случае: $\tilde{f}_i = f_i$, $\tilde{f}_j$ – значение функции в j-ом узле после перехода на $(n+1)$-ый временной слой по схеме Мак-Кормака, κ – коэффициент коррекции.

Для уравнения, описывающего внутреннее электрическое поле дисперсной компоненты газовзвеси, задавались однородные граничные условия Дирихле в той части канала, в которой была расположена многофазная среда. И однородные граничные условия Неймана в той части моделируемой области, которая предполагалась заполненной однородным газом. Уравнение Пуассона (6) интегрировалось методом установления [21].

Результаты расчётов

На рис. 1 схематично изображён канал, разделённый на две части; в одной части канала расположена электрически заряженная запылённая среда, в другой части находится чистый газ. Так как все частицы дисперсной компоненты смеси имеют одинаковый заряд, то под действием силы Кулона начинается движение дисперсной компоненты смеси из той части канала, которая заполнена электрически заряженной газовзвесью, в ту часть канала, которая заполнена чистым газом.

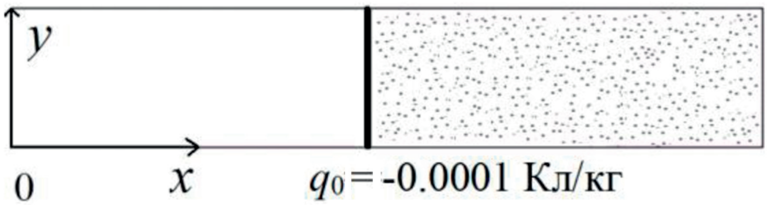

Рис. 1 / Fig. 1. Схематическое изображение канала, частично заполненного электрически заряженной запылённой средой / Schematic representation of a channel partially filled with an electrically charged dusty medium.

Источник: составлено автором.

Размеры моделируемого канала составляли: длина $L = 2$ м, ширина $h = 0{,}1$ м. Параметры электрически заряженного аэрозоля: $\rho_{20} = 2700$ кг/м^3, удельный массовый заряд дисперсной компоненты $q_0 = 0{,}0001$ Кл/кг, размер частиц $d = 2$ мкм.

На рис. 2 представлено распределение объёмного содержания дисперсной компоненты в начальный и последующий моменты времени.

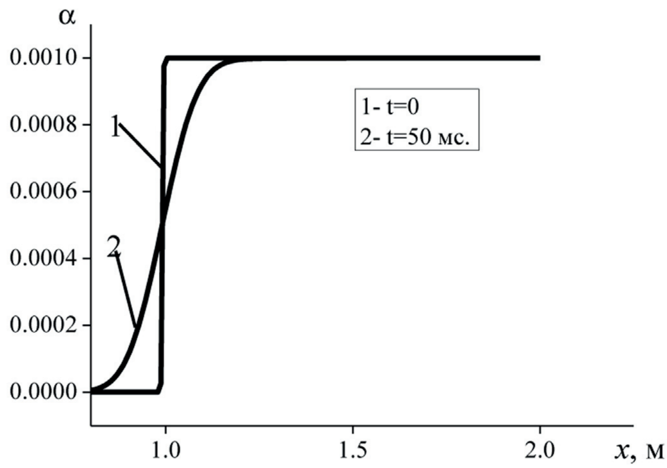

Рис. 2 / Fig. 2. Пространственное распределение объёмного содержания дисперсной компоненты аэрозоля в начальный (кривая 1) и последующий (кривая 2) моменты времени, (y = 0,05 м, t = 0,0015 с) / Spatial distribution of the volumetric content of the dispersed aerosol component at the initial (curve 1) and subsequent (curve 2) moments of time, (y = 0,05 m, t = 0,0015 s).

Источник: составлено автором.

Под действием силы Кулона, за счёт межкомпонентного взаимодействия, начинается движение газовой компоненты смеси, при этом скорость газа меньше скорости движения дисперсной компоненты (рис. 3).

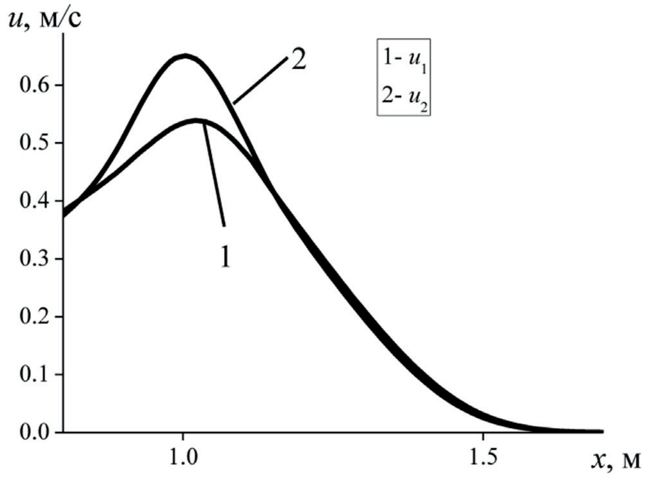

Рис. 3 / Fig. 3. Пространственное распределение продольных составляющих скорости газа (кривая 1) и дисперсной компоненты смеси (кривая 2), (y = 0,05 м, t = 0,0015 с) / Spatial distribution of the longitudinal components of the gas velocity (curve 1) and the dispersed component of the mixture (curve 2), (y = 0,05 m, t = 0,0015 s).

Источник: составлено автором.

В процессе генерации акустического возмущения наибольшая скорость несущей среды наблюдается вблизи начальной поверхности раздела двухкомпонентной смеси и однородного газа (рис. 4).

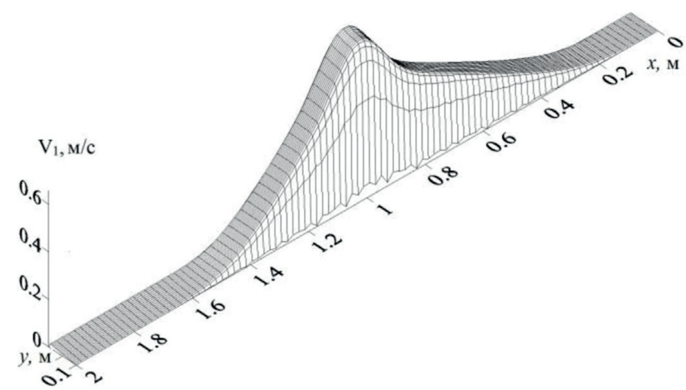

Рис. 4 / Fig. 4. Пространственное распределение модуля скорости газа в канале / Spatial distribution of the gas velocity module in the channel.

Источник: составлено автором.

При уменьшении объёмного содержания дисперсной компоненты смеси происходит уменьшение интенсивности акустического возмущения: уменьшается скорость движения газа (рис. 5а) и уменьшается величина давления в акустическом возмущении (рис. 5б).

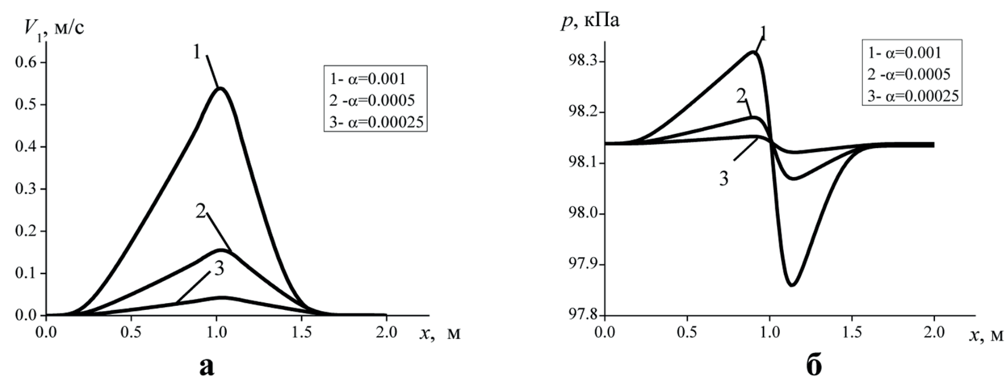

Рис. 5 / Fig. 5. Продольное пространственное распределение модуля скорости (*а*) и давления газа (*б*) для расчётов, проведённых с различным объёмным содержанием электрически заряженной дисперсной компоненты, (y = 0,05 м, t = 0,0015 с) / Longitudinal spatial distribution of the velocity modulus (*a*) and gas pressure (*b*) for calculations carried out with different volumetric content of the electrically charged dispersed component, (y = 0,05 m, t = 0,0015 s).

Источник: составлено автором.

При одинаковой массовой плотности заряда дисперсной компоненты интенсивности перепада давления в акустическом возмущении (разность максимального и минимального давлений в канале $\Delta p = p_{\max} - p_{\min}$) составляет $\Delta p_1 = 459$ Па, $\Delta p_2 = 122$ Па, $\Delta p_3 = 31$ Па для начальных объёмных содержаний дисперсной компоненты $\alpha_1 = 0{,}001$, $\alpha_2 = 0{,}0005$, $\alpha_3 = 0{,}00025$, соответственно. Данную закономерность можно объяснить тем, что в массовой модели электрического заряда дисперсной компоненты смеси уменьшение объёмного содержания дисперсной компоненты приводит к уменьшению потенциала внутреннего электрического поля дисперсной компоненты смеси, следовательно, уменьшается воздействие силы Кулона на дисперсные частицы.

При объёмных содержаниях электрически заряженной дисперсной компоненты $\alpha_1 = 0{,}001$, $\alpha_2 = 0{,}0005$, $\alpha_3 = 0{,}00025$ максимальное значение продольной составляющей силы Кулона на единицу массы твёрдой компоненты аэрозоля составляет $F_{x,1} = -0{,}213$ Кл/кг, $F_{x,2} = -0{,}105$ Кл/кг, $F_{x,3} = -0{,}0053$ Кл/кг, соответственно, (рис. 6).

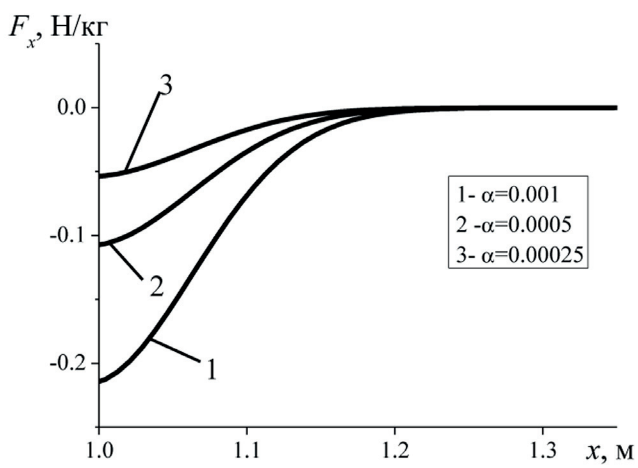

Рис. 6 / Fig. 6. Распределение вдоль продольной координаты x-составляющей силы Кулона для расчётов с различными объёмными содержаниями электрически заряженной дисперсной компоненты смеси, ($y = 0{,}05$ м, $t = 0{,}0015$ с) / Distribution along the longitudinal coordinate of the x-component of the Coulomb force for calculations with different volumetric contents of the electrically charged dispersed component of the mixture, ($y = 0{,}05$ m, $t = 0{,}0015$ s).

Источник: составлено автором.

Таким образом, интенсивность воздействия внутреннего электрического поля дисперсной компоненты смеси кратна объёмному содержанию электрически заряженной компоненты аэрозоля.

Рассмотрим изменения значений численных решений при расчётах на измельчающихся сетках. В работе были проведены численные расчёты генерации акустического возмущения в электрически заряженной газовзвеси на последовательности измельчающихся сеток:

$$\{N_1 = 150, M_1 = 50\}, \{N_2 = 180, M_2 = 60\}, \{N_3 = 210, M_3 = 70\},$$

$$\{N_4 = 240, M_4 = 80\}, \{N_5 = 270, M_5 = 90\}, \{N_6 = 300, M_6 = 100\}.$$

Обозначим через $\Delta^i f = |\max_{\{Ni,Mi\}} f(t, x, y) - \max_{\{Ni+1,Mi+1\}} f(t, x, y)|$ модули разности максимального значения физической величины f в момент времени t в расчётной области (x, y), полученные численным расчётом на сетках с количеством узлов соответственно $\{N_i,M_i\}$ и $\{N_{i+1},M_{i+1}\}$. Для модуля скорости газа разность значений, рассчитанных на последовательности сеток, изменяется следующим образом: $\Delta^1 V_1 = 0{,}11$ м/с, $\Delta^2 V_1 = 0{,}08$ м/с, $\Delta^3 V_1 = 0{,}06$ м/с, $\Delta^4 V_1 = 0{,}05$ м/с, $\Delta^5 V_1 = 0{,}04$ м/с (рис. 7а).

Аналогичная зависимость наблюдается и для модуля скорости дисперсной компоненты смеси: $\Delta^1 V_2 = 0{,}11$ м/с, $\Delta^2 V_2 = 0{,}09$ м/с, $\Delta^3 V_2 = 0{,}06$ м/с, $\Delta^4 V_2 = 0{,}055$ м/с, $\Delta^5 V_2 = 0{,}04$ м/с. (рис. 7б).

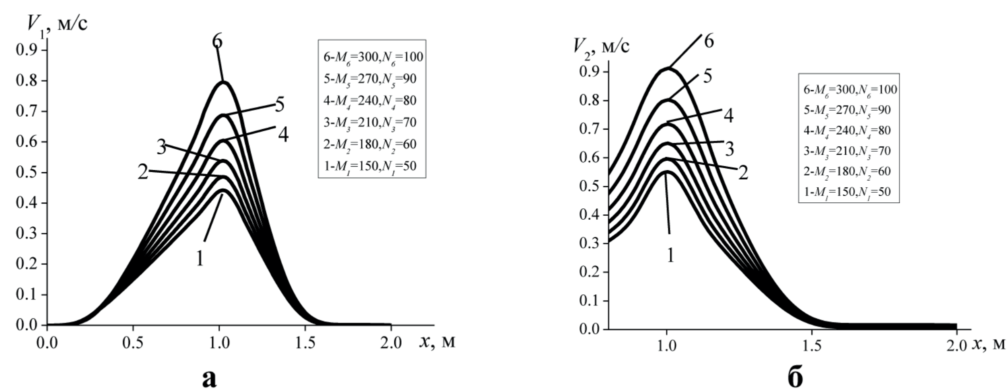

Рис. 7 / Fig. 7. Результаты расчёта модуля скорости несущей среды (*а*) и дисперсной компоненты (*б*) для расчётных сеток с различным количеством узлов, (y = 0,05 м, t = 0,0015 с) / The results of calculating the velocity modulus of the carrier medium (*a*) and the dispersed component (*b*) for computational grids with a different number of nodes, (y = 0,05 m, t = 0,0015 s).

Источник: составлено автором.

В то же время интенсивность акустического возмущения уменьшается существенно быстрее, чем сила Кулона, действующая на единицу массы дисперсной компоненты. Это можно объяснить тем, что при уменьшении объёмного содержания дисперсной фазы уменьшается площадь соприкосновения несущей среды и дисперсной компоненты. А так как межкомпонентное взаимодействие определяется площадью контакта компонент смеси, то интенсивность воздействия дисперсной компоненты на движение газа уменьшается. Таким образом, при уменьшении объёмного содержания электрически заряженной дисперсной компоненты на уменьшение интенсивности течения газа влияют как электрофизические, так и аэродинамические факторы межкомпонентного взаимодействия в аэрозоле.

При измельчении сеток также происходит уменьшение количественных отличий в максимальном значении давления газа в канале: $\Delta^1 p = 300$ Па, $\Delta^2 p = 270$ Па, $\Delta^3 p = 200$ Па, $\Delta^4 p = 100$ Па, $\Delta^5 p = 50$ Па (рис. 8).

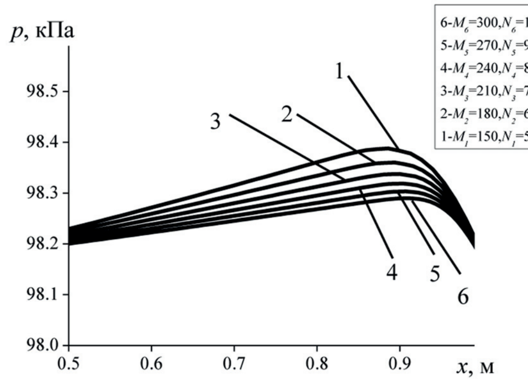

Рис. 8 / Fig. 8. Продольные распределение давления газа вычисленные на различных расчётных сетках, (y = 0,05 м, t = 0,0015 с) / Longitudinal distribution of gas pressure calculated on various computational grids, (y = 0,05 m, t = 0,0015 s).

Источник: составлено автором.

Таким образом при расчётах явным конечно-разностным методом Мак-Кормака на последовательности измельчающихся сеток наблюдается постепенное уменьшение отличий максимальных значений физических величин, описывающих динамику смеси.

Заключение

В работе представлена математическая модель двухмерного нестационарного течения гетерогенной среды – аэрозоля и численный алгоритм решения уравнений математической модели. С помощью компьютерной реализации конечно-разностного решения уравнений математической модели исследовалось течение газа при движении электрически заряженной дисперсной компоненты аэрозоля. Численные расчёты течения аэрозоля при различных объёмных содержаниях электрически заряженной дисперсной компоненты аэрозоля выявили влияние на интенсивность генерируемого акустического возмущения как силы Кулона, зависящей от напряжения электрического поля, так и интенсивности межкомпонентного аэродинамического взаимодействия газа и дисперсной компоненты. Таким образом, в отличие от математических моделей динамики электрически заряженных сред [7–9], не учитывающих межкомпонентное взаимодействие, континуальная математическая модель динамики электрически заряженного аэрозоля позволяет выявить эффекты, связанные как с газодинамическими, так и с эклектическими полями. Численные расчёты на последовательности измельчающихся сеток, демонстрируют сходимость решения, получаемого явным методом Мак-Кормака.

Статья поступила в редакцию 30.10.2020 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нигматулин Р. И. Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978. 336 с.
2. Кутушев А. Г. Математическое моделирование волновых процессов в аэродисперсных и порошкообразных средах. СПб.: Недра, 2003. 284 с.
3. Федоров А. В., Фомин В. М., Хмель Т. А. Волновые процессы в газовзвесях частиц металлов: монография. Новосибирск: Параллель, 2015. 301 с.
4. Суров В. С. Гиперболическая модель односкоростной многокомпонентной теплопроводной среды // Теплофизика высоких температур. 2009. Т. 47. № 6. С. 905–913.
5. Шаповалов А. В., Шаповалов В. А., Рязанов В. И. Математическая модель распространения примесей в ближней зоне при работе ракетных двигателей // Наука. Инновации. Технологии. 2017. № 2. С. 87–96.
6. Моделирование движения частицы в наклонной плоскости под действием потока воды / Еремеева Н. Г., Куличкина Т. П., Матвеев И. А., Никифорова Л. В., Яковлев Б. В. // Математические заметки СВФУ. 2019. Т. 26. № 4. С. 73–82. DOI: 10.25587/SVFU.2019.82.51.007.
7. Дикалюк А. С., Суржиков С. Т. Численное моделирование разреженной пылевой плазмы в нормальном тлеющем разряде // Теплофизика высоких температур. 2012. Т. 50. № 5. С. 611–619.
8. Семенов В. П., Тимофеев А. В. Параметрический резонанс и перенос энергии в пылевой плазме // Математическое моделирование. 2018. Т. 30. № 2. С. 3–17.
9. Heat transfer enhancement in a gas–solid suspension flow by applying electric field / Tadaa Y., Yoshioka S., Takimoto A., Hayashi Y. // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2016. Vol. 93. P. 778–787. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2015.09.063.
10. Невский Ю. А., Осипцов А. Н. Медленная гравитационная конвекция дисперсных систем в областях с наклонными границами // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2011. № 2. С. 65–81.
11. Тукмаков Д. А. Конечно-разностная модель динамики гомогенной смеси в применении к исследованию распространения и отражения ударной волны большой интенсивности в водородно-воздушной среде // Модели, системы, сети в экономике, технике, природе и обществе. 2020. № 1 (33). С. 86–97. DOI: 10.21685/2227-8486-2020-1-7.
12. Тукмаков Д. А. Математическая модель нестационарной сорбции в двухфазной среде, учитывающая пространственную неравномерность распределения концентрации микрокомпонента в фазе сорбента // Вестник Тверского государственного университета. Серия: Химия. 2019. № 4 (38). С. 24–35. DOI: 10.26456/vtchem2019.4.3.
13. Tukmakov D. A. Numerical study of polydisperse aerosol dynamics with the drop destruction // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2019. Vol. 40. Iss. 6. P. 824–827. DOI: 10.1134/S1995080219060234.
14. Тукмаков А. Л., Тукмаков Д. А. Применение неявной конечно-разностной схемы с весами для моделирования колебаний газа в акустическом резонаторе // Вестник Казанского государственного технического университета им. А. Н. Туполева. 2011. № 4. С. 119–127.
15. Tukmakov D. A. Comparison of the physical experiment of the gas oscillations in the acoustic resonator with numerical calculations // Journal of Physics: Conference series.

2019. Vol. 1328, Scientific Technical Conference on Low Temperature Plasma during the Deposition of Functional Coatings (5–8 November 2018, Kazan University, Kazan, Russian Federation). P. 012087. DOI: 10.1088/1742-6596/1328/1/012087.
16. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М: Дрофа, 2003. 784 с.
17. Fletcher C. A. Computation Techniques for Fluid Dynamics. Berlin: Springer-Verlang, 1988. 502 p.
18. Музафаров И. Ф., Утюжников С. В. Применение компактных разностных схем к исследованию нестационарных течений сжимаемого газа // Математическое моделирование. 1993. Т. 5. № 3. С. 74–83.
19. Тукмаков А. Л. Численное моделирование акустических течений при резонансных колебаниях газа в закрытой трубе // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. 2006. № 4. С. 33–36.
20. Сальянов Ф. А. Основы физики низкотемпературной плазмы, плазменных аппаратов и технологий. М.: Наука, 1997. 240 с.
21. Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырный П. И. Вычислительные методы. Т. 2. М.: Наука, 1977. 401 с.

REFERENCES

1. Nigmatulin R. I. *Osnovy mekhaniki geterogennykh sred* [Fundamentals of mechanics of heterogeneous environment]. Moscow, Nauka Publ., 1978. 336 p.
2. Kutushev A. G. *Matematicheskoe modelirovanie volnovykh protsessov v aerodispersnykh i poroshkoobraznykh sredakh* [Mathematical modeling of wave processes in aerodispersed and powdery environment]. St. Petersburg, Nedra Publ., 2003. 284 p.
3. Fedorov A. V., Fomin V. M., Khmel' T. A. *Volnovye protsessy v gazovzvesyakh chastits metallov* [Wave processes in gas suspensions of metal particles]. Novosibirsk, Parallel' Publ., 2015. 301 p.
4. Surov V. S. [A hyperbolic model of one-velocity multicomponent heat-conducting medium]. In: *Teplofizika vysokikh temperatur* [High Temperature], 2009, vol. 47, no. 6, pp. 905–913.
5. Shapovalov A. V., Shapovalov V. A., Ryazanov V. I. [A mathematical model of aerosol distribution in the near zone when working rocket engines]. In: *Nauka. Innovatsii. Tekhnologii* [Science. Innovations. Technologies], 2017, no. 2, pp. 87–96.
6. Eremeeva N. G., Kulichkina T. P., Matveev I. A., Nikiforova L. V., Yakovlev B. V. [Modeling of the particle motion in an inclined plane under the influence of a stream of water]. In: *Matematicheskie zametki SVFU* [Mathematical notes of NEFU], 2019, vol. 26, no. 4, pp. 73–82. DOI: 10.25587/SVFU.2019.82.51.007.
7. Dikalyuk A. S., Surzhikov S. T. [Numerical simulation of a rarefied dusty plasma in a normal glow discharge]. In: *Teplofizika vysokikh temperatur* [High Temperature], 2012, vol. 50, no. 5, pp. 611–619.
8. Semenov V. P., Timofeev A. V. [Parametric resonance and energy transfer in dusty plasma]. In: *Matematicheskoe modelirovanie* [Mathematical Models and Computer Simulations], 2018, vol. 30, no. 2, pp. 3–17.
9. Tadaa Y., Yoshioka S., Takimoto A., Hayashi Y. Heat transfer enhancement in a gas–solid suspension flow by applying electric field. In: *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2016, vol. 93, pp. 778–787. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2015.09.063.
10. Nevskii Yu. A., Osiptsov A. N. [Slow gravitational convection of disperse systems in domains with inclined boundaries]. In: *Izvestiya Rossiiskoi akademii nauk. Mekhanika zhidkosti i gaza* [Fluid Dynamics], 2011, no. 2, pp. 65–81.
11. Tukmakov D. A. [Finite difference dynamics model of a homogeneous mixture in application to the study of the large intensity of the shock wave in a hydrogen-air environment].

In: *Modeli, sistemy, seti v ekonomike, tekhnike, prirode i obshchestve* [Models, Systems, Networks in Economics, Engineering, Nature and Society], 2020, no. 1 (33), pp. 86–97. DOI: 10.21685/2227-8486-2020-1-7.
12. Tukmakov D. A. [Mathematical model of non-stationary sorption in a two-phase medium taking into account the spatial unequality of the distribution of the microcomponent concentration distribution in the sorbent phase]. In: *Vestnik Tverskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Khimiya* [Bulletin of the Tver State University. Series: Chemistry], 2019, no. 4 (38), pp. 24–35. DOI: 10.26456/vtchem2019.4.3.
13. Tukmakov D. A. Numerical study of polydisperse aerosol dynamics with the drop destruction. In: *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2019, vol. 40, iss. 6, pp. 824–827. DOI: 10.1134/S1995080219060234.
14. Tukmakov A. L., Tukmakov D. A. [Application of the implicit finite-difference scheme with weights to simulate gas oscillations in an acoustic resonator]. In: *Vestnik Kazanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta im. A. N. Tupoleva* [Vestnik of KNRTU n. a. A. N. Tupolev], 2011, no. 4, pp. 119–127.
15. Tukmakov D. A. Comparison of the physical experiment of the gas oscillations in the acoustic resonator with numerical calculations. In: *Journal of Physics: Conference series*. 2019. Vol. 1328, Scientific Technical Conference on Low Temperature Plasma during the Deposition of Functional Coatings (5–8 November 2018, Kazan University, Kazan, Russian Federation). P. 012087. DOI: 10.1088/1742-6596/1328/1/012087.
16. Loitsyanskii L. G. *Mekhanika zhidkosti i gaza* [Mechanics of liquid and gas]. Moscow, Drofa Publ., 2003. 784 p.
17. Fletcher C. A. Computation Techniques for Fluid Dynamics. Berlin, Springer-Verlang Publ., 1988. 502 p.
18. Muzafarov I. F., Utyuzhnikov S. V. [Application of compact difference schemes to investigation of unstationary gas flows]. In: *Matematicheskoe modelirovanie* [Mathematical Models and Computer Simulations], 1993, vol. 5, no. 3, pp. 74–83.
19. Tukmakov A. L. [Numerical simulation of acoustic flows at resonance gas oscillations in a closed tube]. In: *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Aviatsionnaya tekhnika* [Russian Aeronautics], 2006, no. 4, pp. 33–36.
20. Sal'yanov F. A. *Osnovy fiziki nizkotemperaturnoi plazmy, plazmennykh apparatov i tekhnologii* [Fundamentals of physics of low-temperature plasma, plasma devices and technologies]. Moscow, Nauka Publ., 1997. 240 p.
21. Krylov V. I., Bobkov V. V., Monastyrnyi P. I. *Vychislitel'nye metody. T. 2* [Computational methods. Vol. 2]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 401 p.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Тукмаков Дмитрий Алексеевич – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Казанский научный центр Российской академии наук»;
e-mail: tukmakovda@imm.knc.ru.

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Dmitry A. Tukmakov – Cand. Sci. (Phys.-Math.), Researcher, Federal Research Center "Kazan Scientific Center of Russian Academy of Sciences";
e-mail: tukmakovda@imm.knc.ru.

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Тукмаков Д. А. Исследование сеточной сходимости явного метода Мак-Кормака, применённого к моделированию течения электрически заряженного аэрозоля, вызванного движением дисперсных частиц под действием внутреннего электрического поля // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2021. № 1. С. 39–53.
DOI: 10.18384/2310-7251-2021-1-39-53

FOR CITATION

Tukmakov D. A. Investigation of the grid convergence of the explicit Mac-Cormak method applied to simulation of electrically charged aerosol flow caused by the motion of dispersed particles under the action of internal electric electricity. In: Bulletin of the Moscow Region State University. *Series: Physics-Mathematics*, 2021, no. 1, pp. 39–53.
DOI: 10.18384/2310-7251-2021-1-39-53

УДК 532.529:536.24
DOI: 10.18384/2310-7251-2021-1-54-63

ОЦЕНКА ПЕРИОДА ШЕРОХОВАТОСТИ ПРОТИВООБЛЕДЕНИТЕЛЬНЫХ ПОКРЫТИЙ ТЕЛА В ПОТОКЕ ВОЗДУХА С ПЕРЕОХЛАЖДЁННЫМИ КАПЛЯМИ

Амелюшкин И. А., Миллер А. Б., Стасенко А. Л.

Центральный аэрогидродинамический институт имени профессора Н. Е. Жуковского
140180, Московская обл., г. Жуковский, ул. Жуковского, д. 1, Российская Федерация

Аннотация

Цель исследования – математическое моделирование геометрических свойств льдофобной поверхности, обеспечивающей антиобледенительный эффект.

Процедура и методы. Использованы численные расчёты движения капель в окрестности моделирующего переднюю кромку крыла цилиндра на основании опубликованных ранее математических моделей физических процессов.

Результаты. В приложении к проблеме обледенения летательных аппаратов получены оценки конфигурации рельефа гидрофобных покрытий твёрдого тела в переохлаждённом воздушно-капельном потоке, при которых капли жидкости не примерзают к обтекаемому телу при столкновениях с его поверхностью.

Теоретическая и/или практическая значимость. Результаты исследования могут быть использованы при создании рельефа гидрофобного покрытия под конкретный диапазон условий полёта летательного аппарата.

Ключевые слова: метастабильные капли, гидрофобные покрытия, обледенение

Благодарности: Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-29-13024.

ESTIMATION OF THE ROUGHNESS PERIOD OF ANTI-ICE BODY COATINGS IN AIR FLOW WITH SUPERCOOLED DROPLETS

I. Amelyushkin, A. Miller, A. Stasenko

Central Aerohydrodynamic Institute named after N. E. Zhukovsky
ul. Zhukovskogo 1, 140180 Zhukovsky, Moscow region, Russian Federation

Abstract

Aim. Geometric properties of ice-phobic surfaces are mathematically simulated to provide the anti-icing effect.

Methodology. Numerical calculations of droplet motion in the vicinity of a cylinder simulating the leading edge of a wing relies on the use of previously published mathematical models of physical processes.

Results. As applied to the problem of icing of aircrafts, the relief configuration of hydrophobic coatings of a solid is estimated in air flow with supercooled droplets, in which liquid drops do not freeze to the streamlined body as a result of collisions with its surface.

Research implications. The results of the study can be used to produce a relief of a hydrophobic coating for a specific range of flying vehicle flight conditions.

Keywords: metastable droplets, hydrophobic coatings, ice accretion.

Acknowledgments: The study was supported by the Russian Foundation for Basic Research (Scientific Project No. 19-29-13024).

Введение

Использование гидрофобных покрытий представляет интерес в широкой области технических приложений [5; 6], в частности, в задачах противодействия обледенению летательных аппаратов [1]. Такие покрытия, как правило, эффективны при незначительных отношениях сил инерции к силам поверхностного натяжения жидкости при взаимодействии с рельефным покрытием обтекаемого тела. Однако, при превышении поверхностной плотности кинетической энергии капли некоего критического значения льдофобные свойства приводят к отрицательным эффектам ввиду проникновения переохлаждённой капли в углубления и отвердевания в них.

Постановка задачи

В принципе, исход столкновения капли с поверхностью твёрдого тела зависит от многих параметров, характеризующих геометрические и физико-механические свойства капли, несущего её газа и условия полёта. Таким образом, одна из важнейших характеристик рассматриваемой проблемы – нормальная компонента скорости V_{in} соударения капли с поверхностью является функцией многих переменных:

$$V_{in} = V_{in}\,(a, R, L; \rho_l, \sigma_l, \mu_l; \mu_g, \rho_g, V_\infty, \alpha).$$

Здесь индекс *n* означает normal – по нормали, *i* – incident – падающий; *a* – радиус невозмущённой шаровой капли, *R* – характерный размер обтекаемого тела со скоростью V_∞ («на бесконечности»), *L* – период шероховатости его поверхности, ρ_l, σ_l, μ_l – плотность, коэффициент поверхностного натяжения и динамическая вязкость, соответственно; α – угол падения капли; индексы *l* и *g* относятся к жидкости и к газу, ∞ – означает большое удаление (значительно превышающее *R*) от обтекаемого тела (рис. 1). Использование безразмерных критериев и накопленный опыт численных исследований позволяют сделать более «компактным» описание исследуемых процессов. Для того, чтобы элементы капли, деформирующейся при ударе, не проникали в углубления (или в поры) гидрофобного покрытия, необходимо превышение давления сил поверхностного натяжения над характерным значением скоростного напора жидкости в капле, то есть выполнение неравенства: $\sigma_l/(L/2) > \rho_l V_{in}^2$.

При этом расстояние между выступами рельефа *L* предполагается не больше диаметра капли: $L < 2a$. Таким образом, можно сформулировать следующее необходимое условие эффективности гидрофобного покрытия:

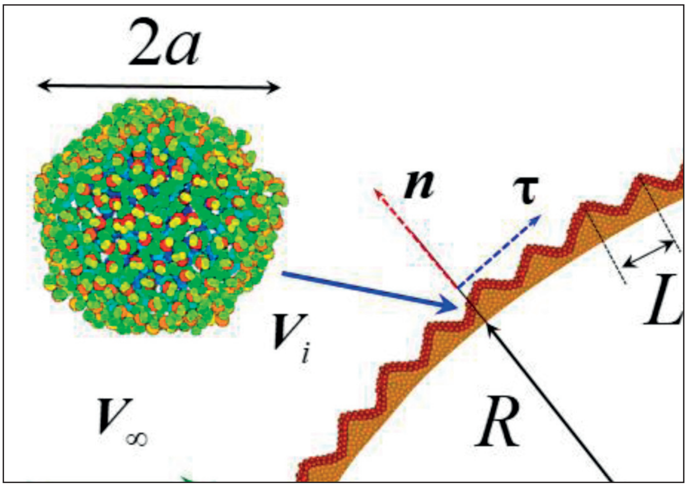

Рис. 1 / Fig. 1. Схема взаимодействия переохлаждённых капель с обтекаемым телом / Scheme of interaction of supercooled drops with a streamlined body.

Источник: составлено авторами.

$$L < 2\sigma_l / \rho_l V_{in}^2 = L_{\max} < D. \tag{1}$$

Динамика капли в окрестности обтекаемого тела

Скорость V_i отличается от скорости набегающего потока V_∞. Это отличие описывается безразмерным числом Стокса

$$Stk_\infty = \frac{2}{9}\frac{\rho_l V_\infty a^2}{\mu_g R}.$$

Динамика частицы (капли) перед столкновением с поверхностью определяется набором сил различной физической природы: аэродинамического сопротивления, Магнуса, Сэффмана, веса частицы, силы Архимеда, Бассе. Кроме того, возможно влияние силы инерции присоединённой массы несущей частицы среды, экранного эффекта, электромагнитных и поверхностных эффектов, связанных с силами Ван-дер-Ваальса. Эти силы были учтены, например, в приложении к проблемам обледенения [2] и к задачам панорамной диагностики потоков [3].

Соударение капли с поверхностью

Перечисленные силы приводят к отличию скорости V частицы в момент столкновения с обтекаемым телом от V_∞. Многочисленные расчёты, проведённые в широкой области параметров, характерных для лётных условий и наземных экспериментов в аэродинамических трубах, показали, что связь скорости V_{in} удара капель о поверхность обтекаемого потоком со скоростью V_∞ тела, может быть аппроксимирована соотношением (рис. 2):

$$V_{in}^{\max} / V_\infty \cong \exp\left(-1/4Stk_\infty\right). \tag{2}$$

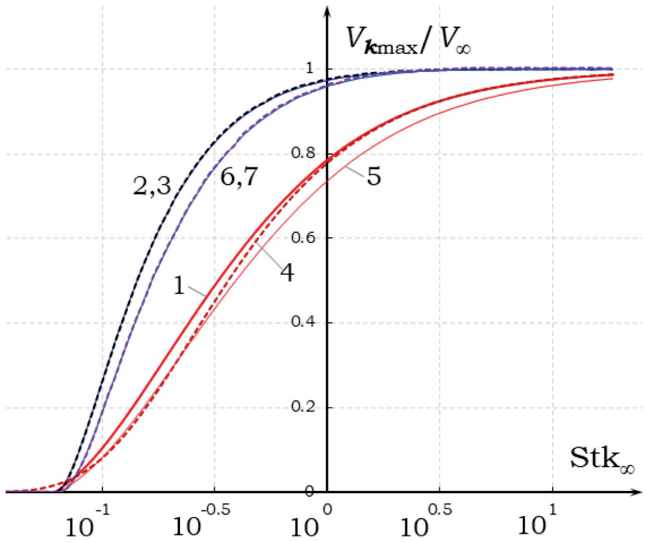

Рис. 2 / Fig. 2. Зависимость максимального значения нормальной (кривая 1), касательной (кривая 2) компонент скорости и её модуля (кривая 3) удара капли об обтекаемое тело от значения числа Стокса Stk_∞ при стоксовом режиме обтекания; кривая 4 – аппроксимация (2) кривой 1; кривые 5, 6, 7 – зависимости максимального значения скорости удара капель по нормали, по касательной и модуля скорости, соответственно, при коэффициенте сопротивления, использованном в работах [2–4]. Индекс k принимает вид in (incident normal), $i\tau$ (incident tangential) / Dependence of the maximum value of the normal (curve 1), tangent (curve 2) components of the velocity and its modulus (curve 3) of the droplet impact on the streamlined body on the value of the Stokes number Stk_∞ in the Stokes flow regime; curve 4 – approximation (2) of curve 1; curves 5, 6, 7 – dependences of the maximum value of the drop impact velocity along the normal, tangential direction and the velocity modulus, respectively, with the drag coefficient used in [2–4]. Index k takes the form in (incident normal), $i\tau$ (incident tangential).

Источник: составлено авторами.

Заметим, что максимальное значение нормальной компоненты скорости наблюдается на линии растекания. Разумеется, максимальные значения этих компонент скорости достигаются в различных точках поверхности обтекаемого тела.

Подставляя (2) в (1), можно предложить следующую обобщённую интерполяцию периода неровностей гидрофобного покрытия:

$$\frac{L_{\max}}{D} = 2\frac{\sqrt[4Stk]{e}}{We_\infty}, \quad We_\infty = D\rho_l V_\infty^2 / \sigma_l. \tag{3}$$

Здесь $W_{e\infty}$ – число Вебера, рассчитанное по скорости полёта летательного аппарата V_∞, e – основание натуральных логарифмов. В принципе, в определении «ударного» числа Вебера должна присутствовать V_{in}; однако, поскольку предполагается однозначная связь $V_{in}(V_\infty)$ типа (2), отражающая предысторию движения капли до столкновения, здесь использована скорость «на бесконечности».

Визуализация результатов и их обсуждение

Рассмотрим следующий диапазон определяющих величин: радиус кривизны обтекаемого тела R от 5 мм (характерный размер датчика скоростного напора) до 1 м, скорость обтекания $V_\infty = 1 \div 200$ м/с, радиус капель $a = 10$ нм $\div$ 1 мм. При этих параметрах число Вебера We_∞ лежит в пределах от $2{,}7 \cdot 10^{-4}$ до 10^6, а число Стокса Stk_∞ от 10^{-9} до $5 \cdot 10^5$. На рис. 3 показаны оценки максимального значения периода шероховатости в зависимости от этих чисел.

В области параметров правее крайней справа (We_∞ >~1) линии капли проникают между неровностями гидрофобного покрытия, либо не долетают до поверхности.

На рис. 4 данные рисунка 3 перестроены в виде, который позволяет определить значение периода шероховатости L_{max} (в микрометрах) в зависимости от безразмерных параметров – чисел Вебера и Стокса при заданном радиусе капель. Учтено предельное условие (1): $L_{max} < 2a$. Отметим, что в случае полидисперсного воздушно-капельного потока более мелкие частицы могли бы застрять в углублениях рельефа; но, с другой стороны, у них больше вероятность быть унесёнными газом, не дойдя до поверхности (т. к. их число Стокса мало).

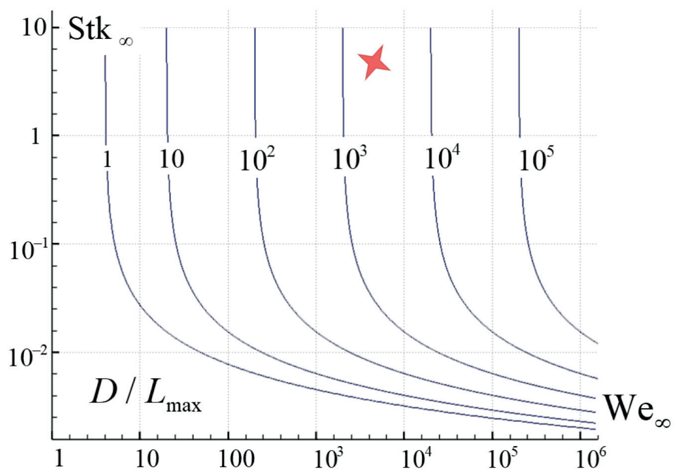

Рис. 3 / Fig. 3. Область значений отношения максимального размера неровностей L_{max} к диаметру капли D в зависимости от чисел Стокса и Вебера. Параметром является $\lg(L_{max}/D)$ / Range of values of the ratio of the maximum relief size L_{max} to the droplet diameter D depending on the Stokes and Weber numbers. The parameter is $\lg(L_{max}/D)$.

Источник: составлено авторами.

Заметим, что формула (3) получена в пренебрежении силами вязкости внутри капли, однако при рассмотренных параметрах эти силы могут быть сравнимы с силами поверхностного натяжения – так, например (кресты ✧ на рис. 3 и на рис. 4), при $a = 20$ мкм (типичный размер капель при обледенении, например, [7]), скорости обтекания $V_\infty = 100$ м/с и радиусе передней кромки крыла $R = 0{,}1$ м имеем следующее значение отношение сил вязкости к силам поверхностного натяжения $\frac{\mu_l V_\infty}{\sigma_l} \approx 1,3 =$ Ca – число капиллярности. Поэтому полученная формула (3) даёт оценку минимального значения для максимального периода шероховатости.

В рассмотренном примере $D/L_{\max} \approx 2600$, ($\lg[D/L_{\max}] \approx 3,4$), $L_{\max} \approx$ 15 нм (кресты ✧ на рис. 3 и 4).

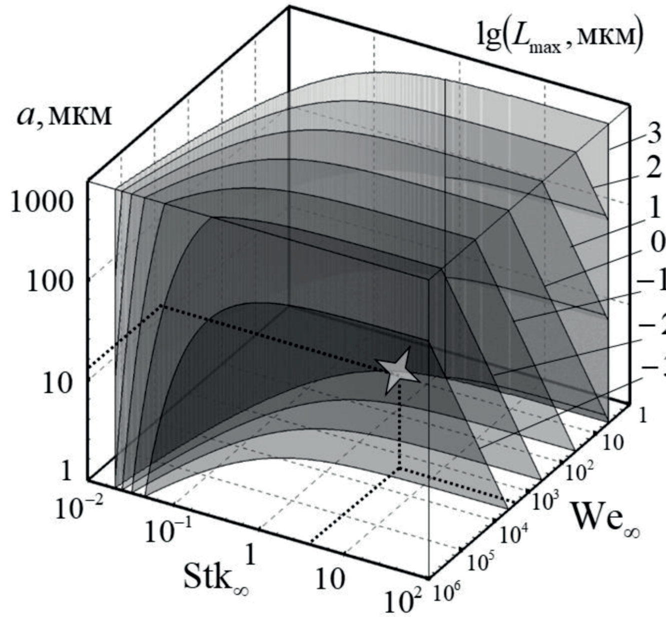

Рис. 4 / Fig. 4. Зависимость максимального расстояния между выступами от чисел Вебера, Стокса и радиуса капли a / Dependence of the maximum distance between the protrusions on the Weber and Stokes numbers and the radius of the drop a.

Источник: составлено авторами.

Отметим, что описанная выше аэрогидродинамика капли, сталкивающейся с твёрдым телом, осложнена рядом физических процессов. Так, соударение деформирующейся переохлаждённой капли с поверхностью и прохождение волны сжатия в её объёме сопровождается взаимодействием нанокристаллов, образующихся в начальной стадии отвердевания. Характерное время поворота молекул воды на угол, необходимый для возникновения упорядоченной структуры (например, 90°), составляет величину порядка 10^{-12} с. В свою очередь, этот процесс должен сопровождаться выделением фазовой теплоты кристаллизации, которая, в принципе, будет нагревать отвердевающую каплю. Удаление этой теплоты происходит по некоторым каналам: теплопроводностью к поверхности капли с последующей теплопередачей в воздух и твёрдое тело; испарением с внешней поверхности капли; и, возможно, излучением. Реализуемость и численные оценки последнего процесса исследованы при кристаллизации различных растворов

[8]. Оценки потока тепла на межфазной границе получены в [9]. Потеря массы капли на испарение (при отвердевании всего её объёма) может быть оценена сверху отношением удельных теплот кристаллизации и конденсации:

$$\Delta m_{vap} / \Delta m_{res} \approx L_{solid} / L_{vap} \approx 0{,}14.$$

Здесь Δm_{res} – масса капли, которая остаётся на поверхности после разбрызгивания [10]. Теплопередача в воздух и в твёрдое тело берёт на себя часть выделяющейся теплоты фазового перехода, так что разумная оценка доли массы, теряемой при испарении, по-видимому, составит порядка 10 %.

С точки зрения гидромеханики капли, для которой основным масштабом времени является отношение её диаметра к скорости звука в воде ($\sim 10^{-8}$ – 10^{-6} с для капли от 10 мкм до 1 мм), наиболее важным является рост эффективной вязкости жидкости, связанный с возникновением и ростом нанозародышей кристаллизации. Зависимость этого коэффициента переноса суспензии от относительного объёма диспергированной фазы описывается классической формулой Эйнштейна и подтверждена во многих областях науки [11]. Ясно, что эффективная теплопроводность суспензии также зависит от относительного объёма кристаллической фазы. Таким образом, процессы переноса должны существенно влиять на механику и тепломассообмен капли. Важно также отличие динамического угла смачивания от статического [12; 13]. Таким образом, мы имеем дело с трёхмерной трёхфазной нестационарной динамикой деформируемой дробящейся и отвердевающей капли, взаимодействующей с рельефной поверхностью твёрдого тела.

Заключение

Получены значения наименьшего периода рельефа покрытия поверхности обтекаемого тела, при котором капли жидкости заданных размера и скорости при соударении не прилипают к телу, в широкой области значений параметров потока: чисел Стокса, Вебера и размеров капель. Полученные оценки противообледенительных свойств покрытий могут быть использованы при их проектировании и производстве.

Статья поступила в редакцию 07.12.2020 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Anti-icing superhydrofobic coatings / Cao L., Jones A. K., Sikka V. K., Wu J., Gao D. // Langmuir. 2009. Vol. 25. Iss. 21. P. 12444–12448. DOI: 10.1021/la902882b/
2. Амелюшкин И. А., Гринац Э. С., Стасенко А. Л. Кинетика молекулярных кластеров и гидротермодинамика капель при обледенении летательных аппаратов // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2012. № 2. С. 152–161.
3. Стасенко А. Л., Толстых А. И., Широбоков Д. А. К моделированию оледенения самолёта: Динамика капель и поверхность смачивания // Математическое моделирование. 2001. Т. 13. № 6. С. 81–86.
4. Неравновесный аэрозольный поток в сверхзвуковой аэродинамической трубе /

Амелюшкин И. А., Ганиев Ю. Х., Гобызов О. А., Липницкий Ю. М., Ложкин Ю. А., Филиппов С. Е. // Ученые записки ЦАГИ. 2017. Т. 48. № 1. С. 53–71.
5. Amelyushkin I. A., Stasenko A. L. Interaction of supercooled droplets and nonspherical ice crystals with a solid body in a mixed cloud // CEAS Aeronautics Journal. 2018. Vol. 9. Iss. 4. P. 711–720. DOI: 10.1007/s13272-018-0314-3.
6. Aboud D. G. K., Kietzig A. M. On the oblique impact dynamics of drops on superhydrophobic surfaces. Part II: Restitution coefficient and contact time // Langmuir. 2018. Vol. 34. Iss. 34. P. 9889–9896. DOI: 10.1021/acs.langmuir.8b01233.
7. Hansman R. J., Jr. The influence of ice accretion physics on the forecasting of aircraft icing conditions [Электронный ресурс]. URL: https://ntrs.nasa.gov./api/citations/19900011612/downloads/19900011612.pdf (дата обращения: 30.10.2020).
8. Татарченко В. А. Инфракрасное характеристическое излучение фазовых переходов первого рода и его связь с оптикой атмосферы // Оптика атмосферы и океана. 2010. Т. 23. № 3. С. 169–175.
9. Модели процессов, сопровождающих кристаллизацию переохлажденных капель / Амелюшкин И. А., Кудров М. А., Морозов А. О., Стасенко А. Л., Щеглов А. С. // Труды Института системного программирования РАН. 2020. Т. 32. № 4. С. 235–244. DOI: DOI: 10.15514/ISPRAS-2020-32(4)-17.
10. Berthoumieu P. Experimental study of supercooled large droplets impact in icing wind tunnel // 4th AIAA Atmospheric and Space Environments Conference 25–28 June, New Orleans, Louisiana. AIAA. 2012. No. 2012–3130. 14 p. DOI: 10.2514/6.2012-3130.
11. Mader H. M., Llewellin E. W., Mueller S. P. The rheology of two-phase magmas: a review and analysis // Journal of Volcanology and geothermal Research. 2013. Vol. 257. P. 135–158. DOI: 10.1016/j.jvolgeores.2013.02.014.
12. Пухначев В. В., Солоников В. А. К вопросу о динамическом краевом угле // Прикладная математика и механика. 1982. Т. 46. № 6. С. 961–971.
13. Экспериментальные и теоретические исследования процессов обледенения наномодифицированных супергидрофобных и обычных поверхностей / Гринац Э. С., Миллер А. Б., Потапов Ю. Ф., Стасенко А. Л. // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2013. № 3. С. 84–92.

REFERENCES

1. Cao L., Jones A. K., Sikka V. K., Wu J., Gao D.Anti-icing superhydrofobic coatings. In: *Langmuir*, 2009, vol. 25, iss. 21, pp. 12444–12448. DOI: 10.1021/la902882b/
2. Amelyushkin I. A., Grinats E. S., Stasenko A. L. [Kinetics of molecular clusters and hydrothermodynamics of drops in a problem of aircraft ice accretion]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-Matematika* [Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics-Mathematics], 2012, no. 2, pp. 152–161.
3. Stasenko A. L., Tolstykh A. I., Shirobokov D. A. [The icing process of an aircraft: drop dynamics and wetted surface]. In: *Matematicheskoe modelirovanie* [Mathematical Models], 2001, vol. 13, no. 6, pp. 81–86.
4. Amelyushkin I. A., Ganiev Yu. Kh., Gobyzov O. A., Lipnitskii Yu. M., Lozhkin Yu. A., Filippov S. E. [Non-equilibrium aerosol flow in a supersonic wind tunnel]. In: *Uchenye zapiski TSAGI* [TsAGI Science Journal], 2017. vol. 48, no. 1, pp. 53–71.
5. Amelyushkin I. A., Stasenko A. L. Interaction of supercooled droplets and nonspherical ice crystals with a solid body in a mixed cloud. In: *CEAS Aeronautics Journal*, 2018, vol. 9, iss. 4, pp. 711–720. DOI: 10.1007/s13272-018-0314-3.

6. Aboud D. G. K., Kietzig A. M. On the oblique impact dynamics of drops on superhydrophobic surfaces. Part II: Restitution coefficient and contact time. In: *Langmuir*, 2018, vol. 34, iss. 34, pp. 9889–9896. DOI: 10.1021/acs.langmuir.8b01233.
7. Hansman R. J., Jr. The influence of ice accretion physics on the forecasting of aircraft icing conditions. Available at: https://ntrs.nasa.gov./api/citations/19900011612/downloads/19900011612.pdf (accessed: 30.10.2020).
8. Tatarchenko V. A. [Infrared characteristic radiation of the first order phase transitions and its connection with optics of the atmosphere]. In: *Optika atmosfery i okeana* [Atmospheric and Oceanic Optics], 2010, vol. 23, no. 3, pp. 169–175.
9. Amelyushkin I. A., Kudrov M. A., Morozov A. O., Stasenko A. L., Shcheglov A. S. [Models of processes accompanying crystallization of supercooled droplets]. In: *Trudy Instituta sistemnogo programmirovaniya RAN* [Proceedings of ISP RAS], 2020, vol. 32, no. 4, pp. 235–244. DOI: DOI: 10.15514/ISPRAS-2020-32(4)-17.
10. Berthoumieu P. Experimental study of supercooled large droplets impact in icing wind tunnel. In: *4th AIAA Atmospheric and Space Environments Conference 25–28 June, New Orleans, Louisiana. AIAA*, 2012, no. 2012–3130, 14 p. DOI: 10.2514/6.2012-3130.
11. Mader H. M., Llewellin E. W., Mueller S. P. The rheology of two-phase magmas: a review and analysis. In: *Journal of Volcanology and geothermal Research*, 2013, vol. 257, pp. 135–158. DOI: 10.1016/j.jvolgeores.2013.02.014.
12. Pukhnachev V. V., Solonikov V. A. [To the question about dynamic edge corner]. In: *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Journal of Applied Mathematics and Mechanics], 1982, vol. 46, no. 6, pp. 961–971.
13. Grinats E. S., Miller A. B., Potapov Yu. F., Stasenko A. L. [Experimental and theoretical investigations of the ordinary and nano modified superhydrophobic surfaces icing processes]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika* [Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics-Mathematics], 2013, no. 3, pp. 84–92.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Амелюшкин Иван Алексеевич – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник отделения исследования аэротермодинамики гиперзвуковых летательных аппаратов и объектов ракетно-космической техники Центрального аэрогидродинамического института имени профессора Н. Е. Жуковского;
e-mail: Amelyushkin_Ivan@mail.ru;

Миллер Алексей Борисович – кандидат физико-математических наук, доцент, начальник отдела отделения исследования аэротермодинамики гиперзвуковых летательных аппаратов и объектов ракетно-космической техники Центрального аэрогидродинамического института имени профессора Н. Е. Жуковского;
e-mail: ABMiller@yandex.ru;

Стасенко Альберт Леонидович – доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник отделения исследования аэротермодинамики гиперзвуковых летательных аппаратов и объектов ракетно-космической техники Центрального аэрогидродинамического института имени профессора Н. Е. Жуковского;
e-mail: Stasenko@serpantin.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Ivan A. Amelyushkin – Cand. Sci. (Phys.-Math.), Senior Researcher, Department of Aerothermodynamics Research of Hypersonic Aircraft and Rocket and Space Technology Objects, Central Aerohydrodynamic Institute named after N. E. Zhukovsky;
e-mail: Amelyushkin_Ivan@mail.ru;

Aleksey B. Miller – Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Prof., Departmental Head, Department of Aerothermodynamics Research of Hypersonic Aircraft and Rocket and Space Technology Objects, Central Aerohydrodynamic Institute named after N. E. Zhukovsky;
e-mail: ABMiller@yandex.ru;

Albert L. Stasenko – Dr. Sci. (Engineering), Prof., Leading Researcher, Department of Aerothermodynamics Research of Hypersonic Aircraft and Rocket and Space Technology Objects, Central Aerohydrodynamic Institute named after N. E. Zhukovsky;
e-mail: Stasenko@serpantin.ru.

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Амелюшкин И. А., Миллер А. Б., Стасенко А. Л. Оценка периода шероховатости противообледенительных покрытий тела в потоке воздуха с переохлаждёнными каплями // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2021. № 1. С. 54–63.
DOI: 10.18384/2310-7251-2021-1-54-63

FOR CITATION

Amelyushkin I. A., Miller A. B., Stasenko A. L. Estimation of the roughness period of anti-ice body coatings in air flow with supercooled droplets In: *Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics-Mathematics*, 2021, no. 1, pp. 54–63.
DOI: 10.18384/2310-7251-2021-1-54-63

УДК 533.72
DOI: 10.18384/2310-7251-2021-1-64-76

ФОРМУЛЫ ДЛЯ ПРОФИЛЕЙ ТЕМПЕРАТУРЫ И КОНЦЕНТРАЦИИ ВОКРУГ ДВУХ НАГРЕВАЕМЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ ИЗЛУЧЕНИЕМ ОДИНАКОВЫХ ИСПАРЯЮЩИХСЯ КАПЕЛЬ

Хасанов А. С.

Российский экономический университет имени Г. В. Плеханова
117997, г. Москва, Стремянный пер., д. 36, Российская Федерация

Аннотация
Целью данной статьи является вывод операторными методами формул для профилей температуры и концентрации вокруг двух испаряющихся в диффузионном режиме взаимодействующих аэрозольных капель в поле электромагнитного излучения.
Процедура и методы. Поля температур и концентраций представляются в виде стандартных разложений по сферическим функциям, неопределённые коэффициенты этих разложений рассматриваются как координаты векторов бесконечномерного линейного нормированного пространства. Нахождение неопределённых коэффициентов сводится к нахождению бесконечномерных векторов из граничных условий с помощью линейных операторов. Скалярные величины представляются в виде линейных функционалов, определённых на упомянутом выше бесконечномерном линейном нормированном пространстве.
Результаты. Получены формулы для профилей температуры и концентрации вокруг двух одинаковых капель и приведены соответствующие графики. Проведено сравнение приведённых графиков с графиками, полученными методом, использующим биполярную систему координат.
Теоретическая и практическая значимость. Получены простые формулы для профилей температуры и концентрации, алгоритмы расчётов по которым при решении конкретных задач могут быть легко реализованы в Excel.
Ключевые слова: аэрозольные капли, испарение капель, взаимодействующие капли

FORMULAS FOR TEMPERATURE AND CONCENTRATION PROFILES AROUND TWO IDENTICAL EVAPORATING DROPS HEATED BY ELECTROMAGNETIC RADIATION

A. Khasanov

Plekhanov Russian University of Economics
Stremyanny pereulok 36, 117997 Moscow, Russian Federation

Abstract
Aim. We derive formulas by operator methods for the temperature and concentration profiles around two interacting identical aerosol drops heated by radiation and evaporating in the diffusion regime.

Methodology. The temperature and concentration fields are represented as standard expansions in spherical functions, and the undefined coefficients of these expansions are considered as coordinates of vectors of an infinite-dimensional linear normed space. The search for the undefined coefficients is reduced to finding infinite-dimensional vectors from the boundary conditions by means of linear operators. Scalar quantities are represented as linear functionals defined on the infinite-dimensional linear normed space mentioned above.
Results. Formulas for temperature and concentration profiles around two identical drops are obtained and corresponding graphs are presented. These graphs are compared with the graphs obtained by the method using the bipolar coordinate system.
Research implications. Simple formulas are obtained for temperature and concentration profiles. When solving specific problems, calculation algorithms based on these formulas can be easily implemented in Excel.
Keywords: aerosol drops, evaporation of drops, interacting drops

Введение

При сближении капель в аэродисперсных системах до расстояний, сравнимых с их радиусами, возникает необходимость учёта их взаимодействия. Наибольшей вероятностью обладают сближения двух капель. Начиная с некоторого расстояния между центрами капель, процесс испарения капель этой пары может заметно отличаться от процесса испарения одиночной капли. Теоретическое описание процесса испарения двух капель дано в работах [1–2] с использованием биполярной системы координат. Более простым для решения широкого класса задач о двух взаимодействующих аэрозольных частицах является использованный нами в данной статье операторный метод. Мы рассматриваем неподвижные капли, но метод применим и при изучении движения взаимодействующих аэрозольных частиц во внешних полях с учётом различных эффектов [3–5]. Изучение процессов испарения капель с учётом различных эффектов остаётся актуальным [6–9]. Так как объяснение особенностей процесса испарения двух капель проводится с опорой на вид профилей температуры и концентрации вокруг них, основной целью данной работы является вывод формул для этих профилей операторным методом.

Методы

Пусть две одинаковые неподвижные капли чистого вещества, на которые падает монохроматическое излучение с длиной волны λ и с интенсивностью I_0, находятся в бинарной газовой смеси. Первый компонент смеси состоит из молекул вещества капли, а второй компонент – из молекул несущего газа. Молекулы газа на поверхностях капель не испытывают фазового перехода. Пусть a – радиус капель, l – расстояние между их центрами. В случае крупных капель $\bar{\lambda}/a \ll 1$, где $\bar{\lambda}$ – средняя длина свободного пробега молекул бинарной смеси.

Предполагается, что радиус a достаточно мал, чтобы можно было пренебречь временем релаксаций полей температур и концентраций и рассматривать процесс испарения в квазистационарном приближении. Пусть n_1 и n_2 – численные концентрации молекул первого и второго компонентов смеси, $n = n_1 + n_2$, $c_1 = \dfrac{n_1}{n}$. Будем считать, что $c_1 \ll 1$, т. е. $\dfrac{n_2}{n} \approx 1$.

Пусть T_e – распределение температуры в бинарной смеси. На большом расстоянии от капель температура T_e и относительная концентрация c_1 равны постоянным величинам $T_{e\infty}$ и $c_{1\infty}$. Задача решается в предположении, что поле T_e характеризуется малыми относительными перепадами: $\left|\dfrac{T_e - T_{e\infty}}{T_{e\infty}}\right| \ll 1$. Поля T_e и c_1 описываются системой уравнений $\Delta T_e = 0$, $\Delta c_1 = 0$. В данной задаче коэффициент теплопроводности капель значительно больше коэффициента теплопроводности несущего газа. В этих условиях распределение температуры вдоль поверхности капли можно считать однородным. Пусть $T_{i0}^{(d)}$ – температура поверхности капель, $c_{1s}\left(T_{i0}^{(d)}\right)$ – относительная концентрация молекул насыщенных паров вещества капли при температуре $T_{i0}^{(d)}$. Величина $T_{i0}^{(d)}$ является неизвестной величиной, и ниже мы приведём уравнение, из которого её можно найти. В случае крупных капель мы можем пренебречь слоем Кнудсена и считать, что на поверхности капли $c_1 = c_{1s}\left(T_{i0}^{(d)}\right)$, $T_e = T_{i0}^{(d)}$.

Пусть O_1 и O_2 – центры капель. Выберем декартову систему координат $O_1x_1y_1z_1$ так, чтобы направление оси O_1z_1 совпадало с направлением вектора $\overrightarrow{O_1O_2}$ Декартова система координат $O_2x_2y_2z_2$ получена путем параллельного переноса декартовой системы координат $Ox_1y_1z_1$. Везде далее r_j, θ_j, φ_j – сферические координаты точки в системе координат с началом в точке O_j. Так как прямая O_1O_2 является осью симметрии полей T_e и c_1, то эти поля не зависят от сферической координаты φ.

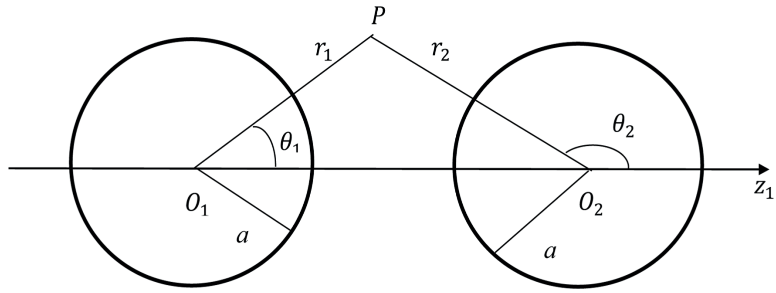

Рис. 1 / Fig. 1. Сферические координаты r_1, θ_1 и r_2, θ_2 одной и той же точки P в бинарной смеси в сферических системах координат с началами в точках O_1 и O_2 / Spherical coordinates r_1, θ_1 and r_2, θ_2 of the same point P in a binary mixture in spherical coordinate systems with origins at points O_1 and O_2.

Источник: составлено автором.

Пусть $\delta_T = T_{i0}^{(d)} - T_{e\infty}$, $\delta_c = c_{1s}\left(T_{i0}^{(d)}\right) - c_{1\infty}$, P_n – полином Лежандра. Поля T_e и c_1 ищем в виде [10]:

$$T_e = T_{e\infty} + \delta_T \sum_{n=0}^{\infty} x_{en}^{(1)} \left(\frac{a}{r_1}\right)^{n+1} P_n\left(\cos\theta_1\right) +$$

$$+ \delta_T \sum_{n=0}^{\infty} \left(-1\right)^n x_{en}^{(2)} \left(\frac{a}{r_2}\right)^{n+1} P_n\left(\cos\theta_2\right); \tag{1}$$

$$c_1 = c_{1\infty} + \delta_c \sum_{n=0}^{\infty} x_{cn}^{(1)} \left(\frac{a}{r_1}\right)^{n+1} P_n\left(\cos\theta_1\right) +$$

$$+ \delta_c \sum_{n=0}^{\infty} \left(-1\right)^n x_{cn}^{(2)} \left(\frac{a}{r_2}\right)^{n+1} P_n\left(\cos\theta_2\right), \tag{2}$$

где $x_{en}^{(1)}$, $x_{en}^{(2)}$, $x_{cn}^{(1)}$, $x_{cn}^{(2)}$ – неопределённые коэффициенты.

При рассмотрении граничного условия на поверхности одной капли, слагаемые, записанные в системе координат с центром другой капли, находятся по формулам [10]:

$$\left(-1\right)^n \left(\frac{l}{r_2}\right)^{n+1} P_n\left(\cos\theta_2\right) = \sum_{s=0}^{\infty} C_{n+s}^{n} \left(\frac{r_1}{l}\right)^s P_s\left(\cos\theta_1\right)$$

вблизи первой капли и

$$\left(\frac{l}{r_1}\right)^{n+1} P_n\left(\cos\theta_1\right) = \sum_{s=0}^{\infty} C_{n+s}^{n} \left(-1\right)^s \left(\frac{r_2}{l}\right)^s P_s\left(\cos\theta_2\right)$$

вблизи второй капли, где C_{n+s}^{n} – биномиальные коэффициенты. Следовательно, формулы (1)–(2) вблизи первой капли могут быть записаны в виде:

$$T_e = T_{e\infty} + \delta_T \sum_{s=0}^{\infty} \left[x_{es}^{(1)} \left(\frac{a}{r_1}\right)^{s+1} + \left(\frac{r_1}{a}\right)^s \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+s}^{n} \tau^{n+s+1} x_{en}^{(2)} \right] P_s\left(\cos\theta_1\right), \tag{3}$$

$$c_1 = c_{1\infty} + \delta_c \sum_{s=0}^{\infty} \left[x_{cs}^{(1)} \left(\frac{a}{r_1}\right)^{s+1} + \left(\frac{r_1}{a}\right)^s \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+s}^{n} \tau^{n+s+1} x_{cn}^{(2)} \right] P_s\left(\cos\theta_1\right), \tag{4}$$

где $\tau = a/l$. Аналогично, вблизи второй капли:

$$T_e = T_{e\infty} + \delta_T \sum_{s=0}^{\infty} [x_{es}^{(2)} \left(\frac{a}{r_2}\right)^{s+1} +$$

$$+\left(\frac{r_2}{a}\right)^s\sum_{n=0}^{\infty}C_{n+s}^{n}\tau^{n+s+1}x_{en}^{(1)}](-1)^s P_s\left(\cos\theta_2\right), \tag{5}$$

$$c_1 = c_{1\infty}+\delta_c\sum_{s=0}^{\infty}\left[x_{cs}^{(2)}\left(\frac{a}{r_2}\right)^{s+1}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{r_2}{a}\right)^s\sum_{n=0}^{\infty}C_{n+s}^{n}\tau^{n+s+1}x_{s}^{(1)}\right](-1)^s P\left(\cos\theta_2\right). \tag{6}$$

Пусть

$X_e^{(1)}=\left(x_{e0}^{(1)},x_{e1}^{(1)},\dots\right)^T$, $X_e^{(2)}=\left(x_{e0}^{(2)},x_{e1}^{(2)},\dots\right)^T$, $X_c^{(1)}=\left(x_{c0}^{(1)},x_{c1}^{(1)},\dots\right)^T$, $X_c^{(2)}=\left(x_{c0}^{(2)},x_{c1}^{(2)},\dots\right)^T$, где T – операция транспонирования. Поиск этих четырёх векторов будем вести в пространстве $l_1=\left\{X\middle| X=\left(x_1,x_2,\dots\right)^T,\sum_{i=1}^{\infty}\left|x_i\right|<+\infty\right\}$. Пространство l_1 является линейным нормированным пространством с нормой $X=\sum_{i=1}^{\infty}\left|x_i\right|$. Пусть $L_1^{(M)}$ – линейное пространство матриц A с бесконечным числом строк и столбцов, элементы a_{sn} которых удовлетворяют условию $\sup\limits_n\sum_{s=1}^{\infty}\left|a_{sn}\right|<+\infty$. Это пространство является линейным нормированным пространством с нормой $\|A\|=\sup\limits_n\sum_{s=1}^{\infty}\left|a_{sn}\right|$. В пространстве l_1 рассмотрим линейный оператор, действующий из l_1 в l_1 по формуле $Y = AX$, где $A\in L_1^{(M)}$, $X\in l_1$, AX – произведение матрицы A на вектор X. Для матрицы и порожденного ею матричного оператора будем использовать одно и то же обозначение. Можно показать, что норма матричного оператора A, согласованная с нормой вектора X, равна $\|A\|=\sup\limits_n\sum_{s=1}^{\infty}\left|a_{sn}\right|$. Для элемента матрицы A с индексами s и n кроме стандартного обозначения a_{sn} будем использовать и обозначение $(A)_{sn}$.

Пусть $E_1 = (1,0,0, \dots)^T$, а элементы матрицы $M\in L_1^{(M)}$ определяются по формуле $\left(M\right)_{sn}=C_{n+s-2}^{n-1}\tau^{n+s-1}$, где $s \geq 1$, $n \geq 1$. С учётом формул (3) – (6), граничные условия на поверхностях капель приводят к следующим матричным уравнениям:

$$X_e^{(1)}+MX_e^{(2)}=E_1,\quad X_e^{(2)}+MX_e^{(1)}=E_1$$

$$X_c^{(1)}+MX_c^{(2)}=E_1,\quad X_c^{(2)}+MX_c^{(1)}=E_1.$$

Из этих уравнений следует, что:

$$X_e^{(1)}=X_e^{(2)}=X_c^{(1)}=X_c^{(2)}=\left(E+M\right)^{-1}E_1, \tag{7}$$

где $(E)_{sn} = \delta_{sn}$ – символ Кронекера, $s \geq 1$, $n \geq 1$. Ясно, что в общем случае $0 < \tau < 0{,}5$, так как $2a < l < +\infty$, если не рассматривать касающиеся капли (в случае касания $2a = l$, $\tau = 0{,}5$) и не переходить от пары капель к одиночной капле (в этом случае $l \to +\infty$, $\tau \to 0$). Можно показать, что $||M|| < 1$ при $\forall\tau \in [0{,}1/2)$, то есть линейный оператор $(E + M)^{-1}$ существует при $\forall\tau \in [0{,}1/2)$. Заметим, что результаты для двух касающихся капель и одиночной капли могут быть получены из наших результатов путём предельного перехода при $l \to 2a$ (т. е. при $\tau \to 0{,}5$) и $l \to \infty$ (то есть при $\tau \to 0$).

Пусть m – линейное нормированное пространство ограниченных последовательностей $Y = (y_1, y_2, ...)$ с нормой $Y = \sup_k |y_k|$. Любую точку $Y \in m$ можно рассматривать как матрицу (как вектор-строку) и определить матричный оператор, т. е. функционал, действующий из l_1 в $(-\infty, +\infty)$ по формуле $y = YX$, где $X = (x_1, x_2, ...)^T \in l_1$. Этот функционал будем обозначать буквой Y. Норма Y функционала Y, согласованная с нормой вектора $X = (x_1, x_2, ...)^T \in l_1$, совпадает с числом $Y = \sup_k |y_k|$. Пусть r_1, θ_1 и r_2, θ_2 – координаты точки P в сферических системах координат с началами в точках O_1 и O_2, где $r_1 \geq a$ и $r_2 \geq a$. Определим в точке P вектор-строку $Y^{(1)}(P) = \left(y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, \ldots\right) \in m$, где $y_k^{(1)} = \left(\dfrac{a}{r_1}\right)^k P_{k-1}(\cos\theta_1)$, и вектор-строку $Y^{(2)}(P) = \left(y_1^{(2)}, y_2^{(2)}, \ldots\right) \in m$, где $y_k^{(2)} = (-1)^{k-1}\left(\dfrac{a}{r_2}\right)^k P_{k-1}(\cos\theta_2)$. Из формул (1)–(2) и (7) получим следующие формулы для полей T_e и c_1:

$$T_e(P) = T_{e\infty} + \delta_T\left[Y^{(1)}(P) + Y^{(2)}(P)\right](E+M)^{-1}E_1, \tag{8}$$

$$c_1(P) = c_{1\infty} + \delta_c\left[Y^{(1)}(P) + Y^{(2)}(P)\right](E+M)^{-1}E_1. \tag{9}$$

Формулы (8)–(9) характеризуют взаимовлияние капель на процесс их испарения. Так как наиболее сильно это взаимодействие выражено на линии центров капель, то рассмотрим поля (8) – (9) на этой линии. Так мы получим профили температуры и концентрации. В этом случае координаты θ_1 и θ_2, в зависимости от положения точки P на линии центров, принимают только два значения 0 и π, а координаты r_1 и r_2 легко выражаются через координату z_1. В результате получим следующие формулы для профилей температуры и концентрации:

$$T_e(P) = T_{e\infty} + \delta_T Y(z_1)(E+M)^{-1}E_1, \tag{10}$$

$$c_1(P) = c_{1\infty} + \delta_c Y(z_1)(E+M)^{-1}E_1, \tag{11}$$

где k-я координата $(Y(z_1))_k$ вектор-строки $Y(z_1) \in m$ определяется по формуле:

$$\left(Y\left(z_1\right)\right)_k=\begin{cases}\left(\dfrac{\tau}{1-\tau z_1/a}\right)^k-\left(\dfrac{a}{z_1}\right)^k & \text{при } z_1\le -a,\\ \left(\dfrac{a}{z_1}\right)^k+\left(\dfrac{\tau}{1-\tau z_1/a}\right)^k & \text{при } a\le z_1\le l-a,\\ \left(\dfrac{a}{z_1}\right)^k-\left(\dfrac{\tau}{1-\tau z_1/a}\right)^k & \text{при } z_1\ge l+a.\end{cases}\qquad(12)$$

Нахождение температуры поверхности капель

Так как поля температуры и концентрации обладают плоскостью симметрии, проходящей через середину отрезка O_1O_2 перпендикулярно линии центров, то в дальнейшем будем рассматривать эти поля только вблизи первой капли. Зная поля T_e и c_1, мы можем найти поток тепла $Q_T^{(d)}$ и поток первого компонента бинарной смеси $Q_1^{(d)}$ через поверхность первой капли. Вычисления проведём в сферической системе координат с центром в точке O_1. Поток тепла $dQ_T^{(d)}$ и поток первого компонента бинарной смеси $dQ_1^{(d)}$ через бесконечно малый элемент поверхности $ds = a^2\sin\theta_1 d\theta_1 d\varphi_1$ первой капли со сторонами $ad\theta_1$ и $a\sin\theta_1 d\varphi_1$ находим по формулам:

$$dQ_T^{(d)}=-\kappa_e\left(\nabla T_e,\vec{n}_e\right)ds=-\kappa_e\frac{\partial T_e}{\partial r_1}\Big|_{r_1=a}\,a^2\sin\theta_1 d\theta_1 d\varphi_1,$$

$$dQ_1^{(d)}=-nD_{12}\left(\nabla c_1,\vec{n}_e\right)ds=-nD_{12}\frac{\partial c_1}{\partial r_1}\Big|_{r_1=a}\,a^2\sin\theta_1 d\theta_1 d\varphi_1,$$

где κ_e – коэффициент теплопроводности газовой среды, D_{12} – коэффициент взаимной диффузии компонентов бинарной смеси, $\vec{n}_e$ – единичный вектор внешней нормали к рассматриваемому бесконечно малому элементу поверхности ds. Величины $\dfrac{\partial T_e}{\partial r_1}\Big|_{r_1=a}$ и $\dfrac{\partial c_1}{\partial r_1}\Big|_{r_1=a}$ легко могут быть найдены из формул (3)–(4). Проинтегрировав выражения для $dQ_T^{(d)}$ и $dQ_1^{(d)}$ по φ_1 от 0 до 2π и по θ_1 от 0 до π с учётом свойств полиномов Лежандра, получим формулы $Q_T^{(d)}=4\pi a\kappa_e\delta_T x_{e0}^{(1)}$, $Q_1^{(d)}=4\pi anD_{12}\delta_c x_{c0}^{(1)}$. Так как $x_{e0}^{(1)}=E_1^T X_e^{(1)}$ и $x_{c0}^{(1)}=E_1^T X_c^{(1)}$, то из формул (7) следует, что

$$Q_1^{(d)}=4\pi anD_{12}\delta_c E_1^T\left(E+M\right)^{-1}E_1,\qquad(13)$$

$$Q_T^{(d)}=4\pi a\kappa_e\delta_T E_1^T\left(E+M\right)^{-1}E_1.\qquad(14)$$

Пусть Q_w – тепло, выделяющееся в единицу времени в объёме первой капли. Эта величина равна суммарной мощности тепловых источников, которые возникают вследствие поглощения этой каплей монохроматического излучения с длиной волны λ и с интенсивностью I_0. Величину Q_w можно найти [11] по формуле:

$$Q_w = \pi a^2 I_0 K_w, \tag{15}$$

где K_w – фактор поглощения. Если пренебречь влиянием лучистого переноса тепла на процесс испарения капель, то должно выполняться условие:

$$Q_w = L_1 m_1 Q_1^{(d)} + Q_T^{(d)}, \tag{16}$$

где L_1 и m_1 – удельная теплота фазового перехода и масса молекул первого компонента, соответственно. Из формул (13)–(16) получим следующее уравнение для определения неизвестной температуры поверхности капли $T_{i0}^{(d)}$:

$$\kappa_e \left(T_{i0}^{(d)} - T_{e\infty}\right) + L_1 m_1 n D_{12} \left(c_{1s}\left(T_{i0}^{(d)}\right) - c_{1\infty}\right) = \frac{a I_0 K_w}{4 E_1^T \left(E+M\right)^{-1} E_1}. \tag{17}$$

Хотя поле температуры T_e в нашей задаче характеризуется малыми относительными перепадами, при решении уравнения (17) в конкретных задачах нами учитывались не только известные зависимости величин n и c_{1s} от температуры, но и зависимости от температуры величин κ_e, L_1 и D_{12}.

Анализ полученных результатов

Рассмотрим расчёты для капель воды в атмосфере. В случае капель воды при падении на них монохроматического излучения с длиной волны λ величину K_w можно найти [11] по формуле:

$$K_w = e^{-0{,}2\left(\sqrt{n_\lambda^2 + m_\lambda^2} - 1\right)} \left(1 - e^{-8\pi m_\lambda \frac{a}{\lambda}}\right), \tag{18}$$

где n_λ и m_λ – действительная и мнимая части показателя преломления воды. В работе [11] приведены расчёты профилей температуры и концентрации с использованием биполярной системы координат вокруг двух одинаковых капель воды в воздухе для расстояний между их центрами $l = 2a$ (случай касающихся капель) и $l = 20a$ (случай большого расстояния между центрами капель) при значении радиуса капель $a = 5$ мкм. При значении давления $p = 101325$ Па в этой работе выбраны следующие значения температуры и концентрации на большом расстоянии от капель: $T_{e\infty} = 20$ °C, $c_{1\infty} = 0$. Капли находятся в поле электромагнитного излучения с длиной волны $\lambda = 10{,}6$ мкм с интенсивностью $I_0 = 1000$ Вт/см^2. Такому значению длины волны соответствуют [12] действительная и мнимая части показателя преломления воды $n_\lambda = 1{,}1750$ и $m_\lambda = 0{,}0802$. Зная a, λ, n_λ, m_λ, легко найти значение K_w по формуле (18).

Сравним результаты наших расчётов с результатами расчётов в работе [11]. Величина $E_1^T\left(E+M\right)^{-1}E_1$, фигурирующая в наших формулах, расположена в левом верхнем углу матрицы $(E + M)^{-1}$ с бесконечным числом строк и столбцов и может быть легко найдена в Excel с большой точностью, так как в расчётах могут быть использованы урезанные матрицы. Для достижения высокой точности в матрицах E и M нами были оставлены первые 52 строки и 52 столбца, а у бесконечномерной вектор-строки $Y(z_1)$ оставлены первые 52 элемента. При известных значениях $T_{e\infty}$, m_1, $c_{1\infty}$, a, I_0, K_w, l уравнение (17) легко решить в Excel с большой точностью относительно температуры $T_{i0}^{(d)}$ с учётом зависимости κ_e, L_1, D_{12}, n и c_{1s} от $T_{i0}^{(d)}$. Ниже приведены графики профилей температуры и концентрации, построенные по формулам (10) – (12) для расстояний между их центрами $l = 2a$ и $l = 20a$.

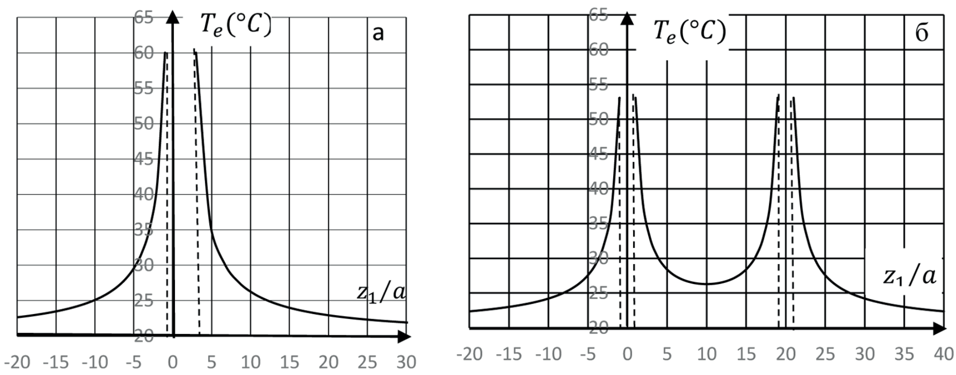

Рис. 2 / Fig. 2. Профили температуры вокруг двух испаряющихся капель воды радиуса a = 5 мкм в воздухе при $T_{e\infty}$ = 20 °С и $c_{1\infty}$ = 0, нагреваемых излучением с длиной волны λ = 10,6 мкм и с интенсивностью I_0 = 1000 Вт/см^2: *а* – при $l = 2a$; *б* – при $l = 20a$ / Temperature profiles around two evaporating water droplets of radius a = 5 μm in air at $T_{e\infty}$ = 20 °C and $c_{1\infty}$ = 0, heated by radiation with a wavelength λ = 10,6 μm and an intensity I_0 = 1000 w/cm^2: *a* – for $l = 2a$; *b* – for $l = 20a$.

Источник: составлено автором.

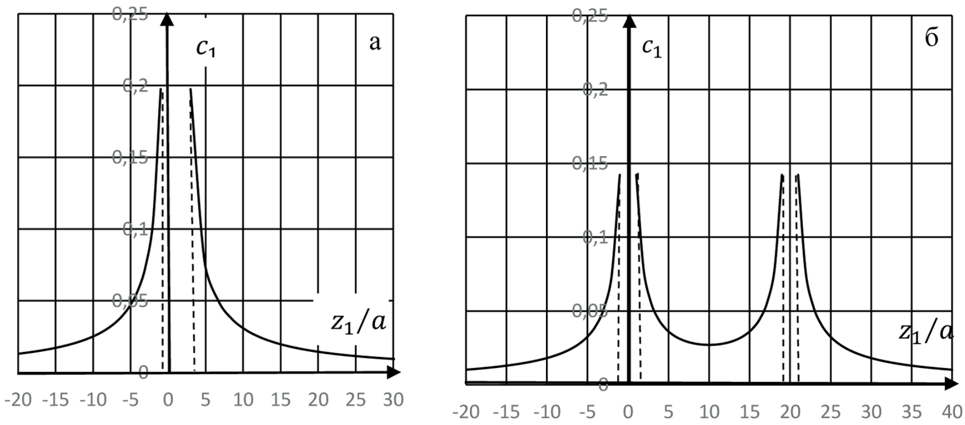

Рис. 3 / Fig. 3. Профили концентрации вокруг двух испаряющихся капель воды радиуса $a = 5$ мкм в воздухе при $T_{e\infty} = 20$ °C и $c_{1\infty} = 0$, нагреваемых излучением с длиной волны $\lambda = 10{,}6$ мкм и с интенсивностью $I_0 = 1000$ Вт/см^2: *а* – при $l = 2a$; *б* – при $l = 20a$ / Concentration profiles around two evaporating water droplets of radius $a = 5$ μm in air at $T_{e\infty} = 20$ °C and $c_{1\infty} = 0$, heated by radiation with a wavelength $\lambda = 10{,}6$ μm and an intensity $I_0 = 1000$ w/cm^2: *a* – for $l = 2a$; *b* – for $l = 20a$.

Источник: составлено автором.

Приведённые графики практически совпадают с графиками в работе [11].

Заключение

Достаточно широкий класс задач о двух сферических аэрозольных частицах может быть решён с использованием биполярной системы координат. Но такой метод имеет ограниченную область применения. Дело в том, что для двух сфер, расположенных одна вне другой, существует единственная биполярная система координат, в которой эти сферы являются координатными плоскостями. В таким образом подобранной криволинейной системе координат очень просто записываются граничные условия на поверхностях двух сферических частиц. Но уже при рассмотрении пары двухслойных сферических аэрозольных частиц, образовавшихся на некотором твёрдом сферическом ядре конденсации и состоящих из однородного ядра и однородной оболочки, нельзя выбрать биполярную систему координат, в которой четыре сферические поверхности ядер и оболочек были бы координатными поверхностями. Более широкую область применения имеет операторный метод. В данной работе операторными методами получены достаточно простые формулы (8)–(9) для полей температуры и концентрации вокруг капель и формулы (10)–(12) для профилей этих полей. Расчёты по этим формулам легко выполнить в Excel, а результаты расчётов соответствуют результатам расчётов достаточно сложным методом биполярной системы координат.

Формулы для профилей температуры концентрации имеют важное теоретическое значение. Из приведённых выше графиков мы видим, как при сближении капель (при $l \to 2a$) повышается температура их поверхности. Из зависимости относительной концентрации молекул насыщенных паров воды от температуры следует, что повышается при этом и концентрация c_1 на их поверхности. Повышение температуры поверхности капель происходит из-за затруднения отвода тепла и испаряющейся воды от поверхностей капель. Этот эффект приводит к увеличению времени полного испарения капель при их взаимодействии. При увеличении расстояния между центрами капель l взаимодействие капель ослабевает. Профили вокруг первой капли, приведённые для l = 20a, близки к профилям вокруг одиночной первой капли. При $l = 20a$ значения температуры T_e и концентрации c_1 на поверхности первой капли равны, соответственно, 53 °C и 0,1422. Путём перехода к пределу при $l \to \infty$ из наших формул можно получить, что в случае одиночной первой капли значения температуры T_e и концентрации c_1 на её поверхности равны, соответственно, 52 °C и 0,1352.

В данной работе мы рассмотрели для простоты две одинаковые аэрозольные капли. Но из хода наших рассуждений можно заключить, что метод можно обобщить и для двух капель с различными радиусами.

Статья поступила 10.10.2020 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Carstens J. C., Williams A., Zung J. T. Theory of droplet growth in clouds: II. Diffusional interaction between two growing droplets // Journal of the Atmospheric Sciences. 1971. Vol. 27. Iss. 5. P. 798–803. DOI: 10.1175/1520-0469(1970)027<0798:TODGIC>2.0.CO;2.
2. Williams A., Carstens J. C. A note concerning the interaction of two growing water droplets // Journal of the Atmospheric Sciences. 1971. Vol. 28. Iss. 7. P. 244–247. DOI: 10.1175/1520-0469(1971)028<1298:ANCTIO>2.0.CO;2.
3. Яламов Ю. И., Хасанов А. С. Теория термофореза неоднородных аэрозольных частиц // Теплофизика высоких температур. 1996. Т. 34. № 6. С. 929–935.
4. Яламов Ю. И., Хасанов А. С. Фотофорез крупных сублимирующих аэрозольных частиц // Теплофизика высоких температур. 2006. Т. 44. № 2. С. 293–297.
5. Яламов Ю. И., Хасанов А. С. Термофорез твердой сферической крупной аэрозольной частицы с учётом инерционных эффектов в уравнениях гидродинамики. М.: Московский педагогический университет, 1995. 33 с. Деп. в ВИНИТИ № 3196-В95.
6. Высокоморная О. В., Кузнецов Г. В., Стрижак П. А. Прогностическое определение интегральных характеристик испарения капель воды в газовых средах с различной температурой // Инженерно-физический журнал. 2017. Т. 90. № 3. С. 648–657.
7. Высокоморная О. В., Кузнецов Г. В., Стрижак П. А. Испарение капель воды в высокотемпературной газовой среде // Инженерно-физический журнал. 2016. Т. 89. № 1. С. 133–142.
8. Захаревич А. В., Кузнецов Г. В., Стрижак П. А. Экспериментальное исследование изменения температуры в центре капли воды в процессе ее испарения в разогретом воздухе // Инженерно-физический журнал. 2016. Т. 89. № 3. С. 537–547.
9. Влияние поверхностных явлений на испарение и конденсацию водных систем / Кочурова Н. Н., Коротких О. П., Абдуллин Н. Г., Айрапетова Е. Р., Караев Р. Р., Petzold G. // Инженерно-физический журнал. 2016. Т. 89. № 1. С. 104–108.
10. Хаппель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир. 1976. 632 с.

11. Щукин Е. Р., Яламов Ю. И., Шулиманова З. Л. Избранные вопросы физики аэрозолей. Москва: Московский педагогический университет, 1992. 297 с.
12. Centeno M. V. The Refractive Index of Water in the Near Infra-Red Spectrum // Journal of the Optical Society of America. 1941. Vol. 31. Iss. 3. P. 244–247. DOI: 10.1364/JOSA.31.000244.

REFERENCES

1. Carstens J. C., Williams A., Zung J. T. Theory of droplet growth in clouds: II. Diffusional interaction between two growing droplets. In: *Journal of the Atmospheric Sciences*, 1971, vol. 27, iss. 5, pp. 798–803. DOI: 10.1175/1520-0469(1970)027<0798:TODGIC>2.0.CO;2.
2. Williams A., Carstens J. C. A note concerning the interaction of two growing water droplets. In: *Journal of the Atmospheric Sciences*, 1971, vol. 28, iss. 7, pp. 244–247. DOI: 10.1175/1520-0469(1971)028<1298:ANCTIO>2.0.CO;2.
3. Yalamov Yu. I., Khasanov A. S. [The theory of thermophoresis of inhomogeneous aerosol particles]. In: *Teplofizika vysokikh temperatur* [High Temperature], 1996, vol. 34, no. 6, pp. 929–935.
4. Yalamov Yu. I., Khasanov A. S. [Photophoresis of large sublimating aerosol particles]. In: *Teplofizika vysokikh temperature* [High Temperature], 2006, vol. 44, no. 2, pp. 293–297.
5. Yalamov Yu. I., Khasanov A. S. *Termoforez tverdoi sfericheskoi krupnoi aerozol'noi chastitsy s uchetom inertsionnykh effektov v uravneniyakh gidrodinamiki* [Thermophoresis of a solid spherical large aerosol particle with allowance for inertial effects in the equations of hydrodynamics]. Moscow, Moskovskii pedagogicheskii universitet Publ., 1995. 33 p. Deposited in VINITI, no. 3196-B95.
6. Vysokomornaya O. V., Kuznetsov G. V., Strizhak P. A. [Predictive determination of the integral characteristics of evaporation of water droplets in gas media with a varying temperature]. In: *Inzhenerno-fizicheskii zhurnal* [Journal of Engineering Physics and Thermophysics], 2017, vol. 90, no. 3, pp. 648–657.
7. Vysokomornaya O. V., Kuznetsov G. V., Strizhak P. A. [Evaporation of water droplets in a high-temperature gaseous medium]. In: *Inzhenerno-fizicheskii zhurnal* [Journal of Engineering Physics and Thermophysics], 2016, vol. 89, no. 1, pp. 133–142.
8. Zakharevich A. V., Kuznetsov G. V., Strizhak P. A. [Experimental investigation of the change in temperature at the center of a water droplet in the process of evaporation in heated air]. In: *Inzhenerno-fizicheskii zhurnal* [Journal of Engineering Physics and Thermophysics], 2016, vol. 89, no. 3, pp. 537–547.
9. Kochurova N. N., Korotkikh O. P., Abdullin N. G., Airapetova E. R., Karaev R. R., Petzold G. [Effect of surface phenomena on evaporation and condensation of water systems]. In: *Inzhenerno-fizicheskii zhurnal* [Journal of Engineering Physics and Thermophysics], 2016, vol. 89, no. 1, pp. 104–108.
10. Happel J., Brenner H. *Gidrodinamika pri malykh chislakh Reinol'dsa* [Low Reynolds Number Hydrodynamics with Special Applications to Particulate Media]. Moscow, Mir Publ., 1976. 632 p.
11. Shchukin E. R., Yalamov Yu. I., Shulimanova Z. L. *Izbrannye voprosy fiziki aerozolei* [Selected topics of the physics of aerosols]. Moscow, Moskovskii pedagogicheskii universitet Publ., 1992. 297 p.
12. Centeno M. V. The Refractive Index of Water in the Near Infra-Red Spectrum. In: *Journal of the Optical Society of America*, 1941, vol. 31, iss. 3, pp. 244–247. DOI: 10.1364/JOSA.31.000244

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Хасанов Анис Саляхович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики Российского экономического университета имени Г. В. Плеханова;
e-mail: ankhasanov@yandex.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Anis S. Khasanov – Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Department of Higher Mathematics, Plekhanov Russian University of Economics;
e-mail: ankhasanov@yandex.ru.

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Хасанов А. С. Формулы для профилей температуры и концентрации вокруг двух нагреваемых электромагнитным излучением одинаковых испаряющихся капель // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2021. № 1. С. 64–76.
DOI: 10.18384/2310-7251-2021-1-64-76

FOR CITATION

Khasanov A. S. Formulas for temperature and concentration profiles around two identical evaporating drops heated by electromagnetic radiation. In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*, 2021, no. 1, pp. 64–76.
DOI: 10.18384/2310-7251-2021-1-64-76

УДК 532.5.013.12
DOI: 10.18384/2310-7251-2021-1-77-91

ОБ УТОЧНЕНИИ УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ-СТОКСА ПРИМЕНИТЕЛЬНО К НАНОЧАСТИЦАМ

Гладков С. О., Зо Аунг

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
125993, г. Москва, Волоколамское ш., д. 4, Российская Федерация

Аннотация
Цель. Главная цель работы заключается в уточнении уравнения Навье-Стокса применительно к наночастицам.
Процедура и методы. Методика вычислений основана на использовании классического кинетического уравнения Больцмана.
Результаты. Найденное уравнение представляет собой уточнённое уравнение Навье-Стокса, в правой части которого учтены слагаемые высших степеней по длине свободного пробега частиц.
Теоретическая и/или практическая значимость. Во всех случаях, когда необходимо провести изучение гидродинамического движения наночастиц в потоке вязкой жидкости, полученное уравнение позволяет нам вычислить все интересующие нас поправки к любым гидродинамическим параметрам и, в частности, к силе Стокса.
Ключевые слова: кинетическое уравнение Больцмана, уравнение Навье-Стокса, длина свободного пробега молекул.

ON REFINING THE NAVIER–STOKES EQUATION IN RELATION TO NANOPARTICLES

S. Gladkov, Zaw Aung

Moscow Aviation Institute (National Research University)
Volokolamskoe shosse 4, 125993 Moscow, Russian Federation

Abstract
Aim. The main purpose of the work is to refine the Navier–Stokes equation for nanoparticles.
Methodology. The calculation technique is based on the use of classical Boltzmann kinetic equation.
Results. The found equation is a refined Navier–Stokes equation, on the right side of which the components of the higher degrees along the length of the free run of particles are taken into account.
Research implications. In all cases where it is necessary to study the hydrodynamic movement of nanoparticles in the flow of a viscous liquid, the resulting equation allows one to calculate all the necessary amendments to any hydrodynamic parameters and, in particular, to the Stokes strength.
Keywords: Boltzmann kinetic equation, Navier–Stokes equation, free length of molecules.

Введение

Вопрос, поднимаемый в настоящей статье, посвящён анализу применения уравнения Навье-Стокса к малым частицам, характерная линейная длина которых соответствует размеру наночастиц. Подобная тема исследования в настоящее время является весьма актуальной благодаря быстро развивающимся в последнее время практическим приложениям нанотехнологий. Надо сказать, что в результате кропотливой работы над источниками, так или иначе близко связанными с тематикой нашего исследования, мы не смогли обнаружить оригинальных статей (и монографий), посвящённых изучению гидродинамического обтекания частиц малого линейного размера (см., к примеру, литературу [1–20]) из диапазона 10^{-4} – 10^{-6} см.

В этой работе речь пойдёт о вычислении дополнительных поправок к правой части уравнения Навье-Стокса по длине свободного пробега молекул жидкости l.

Ясно, что если мы говорим о размерах такого порядка, то классическое уравнение Навье-Стокса необходимо подвергнуть модификации. Действительно, в этом случае длина свободного пробега молекул может оказаться сравнимой с линейным размером наночастицы.

Чтобы подробно описать решение поставленной задачи можно воспользоваться хорошо проверенной методикой, а именно кинетическим уравнением Больцмана (см. [21; 22]).

1. Вывод уравнения Навье-Стокса с учётом поправок по длине свободного пробега

Представим классическое кинетическое уравнение Больцмана в следующем виде [21] (см. также [22]):

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\nabla f+\mathbf{F}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}}=L\left(f\right), \tag{1}$$

где $f = f(t, \mathbf{p}, \mathbf{r})$ – искомая функция распределения, $\mathbf{v}$ – скорость молекул, $\mathbf{p}$ – их импульс, $\mathbf{F}$ – сила, действующая на частицы жидкости, которая в нашем случае равна нулю, $L(f)$ – интеграл столкновений. Его явное выражение для максвелловского газа можно записать как (см. [22]):

$$L\left(f\right)=n\sum\left|\mathbf{v}-\mathbf{v}_1\right|\sigma\left[f\left(\mathbf{v}'\right)f\left(\mathbf{v}_1'\right)-f\left(\mathbf{v}\right)f\left(\mathbf{v}_1\right)\right],$$

где n – концентрация молекул, σ – сечение рассеяния.

В рамках решаемой нами задачи можно воспользоваться приближением времени релаксации (так называемое «тау-приближение» [21]) и в соответствии с [21] будем искать решение в виде ряда:

$$f = f_0 + f_1 + f_2 + \ldots, \tag{2}$$

где квазиравновесная функция распределения:

$$f_0=\frac{1}{Z}e^{-\frac{\varepsilon(p)-\mathbf{pV}}{T}}. \tag{3}$$

При этом время релаксации, если воспользоваться явным выражением для интеграла столкновений, можно представить как:

$$\frac{1}{\tau_v} = -\frac{\delta L(f)}{\delta f}\bigg|_{f=\overline{f}(\mathbf{v})} = n\sum\left|\mathbf{v}-\mathbf{v}_1\right|\sigma\overline{f}\left(\mathbf{v}_1\right).$$

Заметим, что ряд (2) представляет собой разложение по параметру $\frac{l}{L}$, где l – длина свободного пробега молекул, а L – некоторый характерный размер (в случае, если рассматривается, например, обтекание шара, то его можно считать равным радиусу шара R). Нормировочный множитель в (3) есть:

$$Z = \int \overline{f} d\Gamma = \int e^{-\frac{\varepsilon(p)}{T}} d\Gamma. \tag{4}$$

Здесь $d\Gamma = d^3pdV$ – элемент фазового объёма [24], $\overline{f} = f_0\big|_{\mathbf{V}=0}$ – равновесная функция распределения, $\varepsilon(p) = \frac{p^2}{2m}$ – кинетическая энергия молекулы, m – её масса, а интегрирование ведётся по всему импульсному пространству, элемент объёма которого определяется как $d^3p = dp_xdp_ydp_z$. $dV = dxdydz$ – элемент объёма в декартовых координатах. Постоянную Больцмана k_B здесь и везде далее будем полагать равной единице, вектор $V = V(t,\mathbf{r})$ представляет собой скорость гидродинамического потока, которым увлекаются молекулы жидкости, функции f_1, f_2, f_3, представляют собой искомые поправки к квазиравновесной функции распределения, которые нам следует найти. Температура T считается постоянной во всей области пространства.

Для решения поставленной задачи правую часть уравнения (1) удобно представить в виде ряда:

$$L(f) \approx -\frac{f_0 + f_1 + f_2 + \ldots}{\tau_p}, \tag{5}$$

где τ_p – время между столкновениями молекул. В этом решении поправки f_1, f_2, ... так же, как и в (2), есть величины порядка только чётных степеней, то есть $f_1 \sim \left(\frac{l}{L}\right)^2, f_2 \sim \left(\frac{l}{L}\right)^4, \ldots$ (см. вычисления далее).

Прежде, чем искать поправки в (2), нам следует записать общий принцип получения уравнений движения для случая, когда температура $T \neq 0$.

Если бы температура была равна нулю, то уравнение движения легко было бы получить из принципа сохранения полной мощности системы, аналогично тому, как это было сделано, например, в работах [20; 23], то есть, исходя из условия:

$$\dot{E} + \dot{Q} = 0, \tag{6}$$

где полная энергия потока жидкости имеет вид:

$$E=\frac{1}{Z}\int\left[\varepsilon(p)+\frac{m\mathrm{V}^2}{2}\right]fd\Gamma.$$

Поэтому изменение энергии в единицу времени будет равно:

$$\dot{E}=\frac{1}{Z}\int\varepsilon(p)\,\dot{f}d\Gamma+\frac{m}{Z}\int\mathbf{V}\dot{\mathbf{V}}\bar{f}d\Gamma, \quad (7)$$

а диссипативная функция равна:

$$\dot{Q}=T\dot{S}, \quad (8)$$

где S – энтропия. То есть при $T = 0$ это слагаемое попросту исчезает.

В случае же, когда $T \neq 0$ уравнение (6) не годится (в отличие от чисто механических задач, как это описывается, например, в [25]), и мы должны записать вместо него уравнение в виде:

$$\dot{F}=\frac{d}{dt}(E-TS)=0, \quad (9)$$

где $F = E - TS$ – свободная энергия Гиббса.

При $T = \mathrm{const}$ имеем отсюда:

$$E-Q=0. \quad (10)$$

Согласно, например, [24] энтропию неравновесного классического больцмановского газа можно записать в виде:

$$S=-\frac{1}{Z}\int f\ln\left(\frac{f}{e}\right)d\Gamma. \quad (11)$$

Подставляя определение (11) в (8), получаем:

$$\dot{Q}=-\frac{T}{Z}\int\dot{f}\ln fd\Gamma. \quad (12)$$

Подставляя теперь (7) и (12) в (10), находим:

$$\frac{1}{Z}\int\left[\varepsilon(p)+T\ln f\right]\dot{f}d\Gamma+\frac{m}{Z}\int\mathbf{V}\dot{\mathbf{V}}\bar{f}d\Gamma=0. \quad (13)$$

Следуя (5), имеем:

$$\dot{f}=L(f)\approx-\frac{f_0+f_1+f_2+\ldots}{\tau_p}.$$

И поэтому из (13) получаем:

$$\frac{1}{Z}\int\left[\varepsilon(p)+T\ln(f_0+f_1+f_2+\ldots)\right]\frac{(f_0+f_1+f_2+\ldots)}{\tau_p}d\Gamma+\frac{m}{Z}\int\mathbf{V}\dot{\mathbf{V}}\bar{f}d\Gamma=0. \quad (14)$$

Легко проверить, что рекуррентная формула для определения произвольной поправки n-ого порядка к квазиравновесной функции распределения может быть представлена в виде (подробности см. в работе [26]):

$$f_n = \left(-1\right)^n \tau_p^n \left[\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\right]^n f_0. \tag{15}$$

Как видно из (15), в стационарном случае $\left(\dfrac{\partial f}{\partial t} = 0\right)$ все поправки чётной степени будут порядка $\left(\dfrac{l}{L}\right)^2$ и т.д., о чем мы выше уже упоминали.

Для разложения логарифма, фигурирующего в (13), можно воспользоваться следующим соотношением:

$$\ln\left(1+\lambda\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(-1\right)^{k+1}\frac{\lambda^k}{k}. \tag{16}$$

Для нашего конкретного случая мы будем интересоваться только решением с точностью до $n = 2$ в формуле (15).

Поэтому имеем:

$$f_1 = -\tau_p\left(\dot{f}_0 + \mathbf{v}\cdot\nabla f_0\right), \tag{17}$$

$$f_2 = \tau_p^2\left(\ddot{f}_0 + 2\mathbf{v}\cdot\nabla\dot{f}_0 + \left(\mathbf{v}\cdot\nabla\right)^2 f_0\right), \tag{18}$$

где точки над функцией f_0 означают частные производные по времени соответствующего порядка.

Составив относительные величины $\dfrac{f_1}{f_0}$ и $\dfrac{f_2}{f_0}$ с учётом явных выражений (17), (18) и (3), после несложных вычислений найдём:

$$\frac{f_1}{f_0} = \frac{\tau_p}{T}\left(\mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{V}} + \mathbf{v}\cdot\nabla\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)\right). \tag{19}$$

В рамках нашей задачи выражение (19) должно быть записано с точностью до членов порядка V^2.

Поэтому согласно (3), так же как это делается в монографии [21], имеем приближённо:

$$f_0 = \frac{1}{Z}e^{-\frac{\varepsilon(p)-\mathbf{pV}}{T}} \approx \frac{1}{Z}e^{-\frac{\varepsilon(p)}{T}}\left(1+\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}}{T}\right) = \overline{f}\left(1+\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}}{T}\right). \tag{20}$$

Действительно, в силу того, что скорость потока сравнительно невелика, дробь $\dfrac{\mathbf{pV}}{T}$ по порядку величины должна составлять величину $\dfrac{\mathbf{pV}}{T} \sim \dfrac{m\mathrm{v}_T^2}{T}\dfrac{\mathrm{V}}{\mathrm{v}_T}$, но так как $T \sim m\mathrm{v}_T^2$, а $\mathrm{V} \ll v_T$, где v_T – это средняя тепловая скорость молекулы, то отсюда и получается условие $\frac{\mathbf{pV}}{T} \ll 1,$ которое и является обоснованием возможности разложения вида (20). Подчеркнём, что это условие обусловлено именно гауссовским распределением.

Таким образом,

$$f_1 = \frac{\tau_p}{T}\overline{f}\left(\left(\mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{V}}\right)+\mathbf{v}\cdot\nabla\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)\right)\left(1+\frac{\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)}{T}\right)=$$

$$=\frac{\tau_p}{T}\overline{f}\left(\mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{V}}+\left(\mathbf{v}\cdot\nabla\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)\right)\frac{\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)}{T}+\frac{\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)^2}{T}+\mathbf{v}\cdot\nabla\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)\right). \tag{21}$$

Вполне аналогично находим, что

$$\frac{f_2}{f_0}=\frac{\tau_p^2}{T}\left[\frac{\left(\mathbf{p}\dot{\mathbf{V}}\right)^2+2\mathbf{v}\cdot\left(\mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{V}}\right)\nabla\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)+\left(\mathbf{v}\nabla\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)\right)^2}{T}-\right.$$

$$\left.-\mathbf{p}\cdot\ddot{\mathbf{V}}-2\mathbf{v}\cdot\nabla\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)-\mathrm{v}_i\mathrm{v}_k\frac{\partial^2\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)}{\partial x_i\partial x_k}\right] \tag{22}$$

и, значит, с учётом (20) имеем:

$$f_2\approx\overline{f}\frac{\tau_p^2}{T}\left[\frac{\left(\mathbf{p}\dot{\mathbf{V}}\right)^2+2\mathbf{v}\cdot\left(\mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{V}}\right)\nabla\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)+\left(\mathbf{v}\nabla\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)\right)^2}{T}-\mathbf{p}\cdot\ddot{\mathbf{V}}-2\mathbf{v}\cdot\nabla\left(\mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{V}}\right)-\right.$$

$$\left.-\mathrm{v}_i\mathrm{v}_k\frac{\partial^2\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)}{\partial x_i\partial x_k}-\left(\mathbf{p}\cdot\ddot{\mathbf{V}}+2\mathbf{v}\cdot\nabla\left(\mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{V}}\right)+\mathrm{v}_i\mathrm{v}_k\frac{\partial^2\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)}{\partial x_i\partial x_k}\right)\frac{\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)}{T}\right]. \tag{23}$$

Теперь с помощью (21) и (23) уравнение (14) можно записать в виде:

$$\frac{1}{Z}\int\frac{\tau_p\overline{f}}{T}\left\{\mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{V}}+\left(\mathbf{v}\cdot\nabla\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)\right)\frac{\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)}{T}+\frac{\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)\left(\mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{V}}\right)}{T}+\mathbf{v}\cdot\nabla\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)+\right.$$

$$+\tau_p^2\left[\frac{\left(\mathbf{p}\dot{\mathbf{V}}\right)^2+2\mathbf{v}\cdot\left(\mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{V}}\right)\nabla\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)+\left(\mathbf{v}\nabla\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)\right)^2}{T}-\right.$$

$$-\mathbf{p}\cdot\ddot{\mathbf{V}}-2\mathbf{v}\cdot\nabla\left(\mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{V}}\right)-\mathrm{v}_i\mathrm{v}_k\frac{\partial^2\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)}{\partial x_i\partial x_k}-$$

$$\left.\left.-\left(\mathbf{p}\cdot\ddot{\mathbf{V}}+2\mathbf{v}\cdot\nabla\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)+\mathrm{v}_i\mathrm{v}_k\frac{\partial^2\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)}{\partial x_i\partial x_k}\right)\frac{\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)}{T}\quad\right]\right\}^2 d\Gamma+\frac{m}{Z}\int\mathbf{V}\dot{\mathbf{V}}\overline{f}d\Gamma=0. \quad (24)$$

После возведения в квадрат выражения в фигурных скобках (24), с точностью до членов порядка V^2 получаем:

$$\frac{1}{Z}\int\frac{\tau_p\overline{f}}{T}\left\{\left(\mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{V}}\right)+\left(\mathbf{v}\cdot\nabla\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)\right)\frac{\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)}{T}+\frac{\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)\left(\mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{V}}\right)}{T}+\mathbf{v}\cdot\nabla\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)+\right.$$

$$+\tau_p\left[\quad\frac{\left(\mathbf{p}\dot{\mathbf{V}}\right)^2+2\mathbf{v}\cdot\left(\mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{V}}\right)\nabla\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)+\left(\mathbf{v}\nabla\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)\right)^2}{T}-\right.$$

$$-\left(\mathbf{p}\cdot\ddot{\mathbf{V}}\right)-2\mathbf{v}\cdot\nabla\left(\mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{V}}\right)-\mathrm{v}_i\mathrm{v}_k\frac{\partial^2\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)}{\partial x_i\partial x_k}-$$

$$\left.\left.-\left(\mathbf{p}\cdot\ddot{\mathbf{V}}+2\mathbf{v}\cdot\nabla\left(\mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{V}}\right)+\mathrm{v}_i\mathrm{v}_k\frac{\partial^2\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)}{\partial x_i\partial x_k}\right)\frac{\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)}{T}\quad\right]\right\}^2 d\Gamma+$$

$$+\frac{m}{Z}\int\mathbf{V}\dot{\mathbf{V}}\overline{f}d\Gamma=\frac{1}{Z}\int\frac{\tau_p\overline{f}}{T}\times$$

$$\times\left\{\left(\mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{V}}\right)^2+\left(\mathbf{v}\cdot\nabla\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)\right)^2+\tau_p^2\left[\left(\mathbf{p}\cdot\ddot{\mathbf{V}}\right)^2+4\left(\mathbf{v}\cdot\nabla\left(\mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{V}}\right)\right)^2+\left(\mathrm{v}_i\mathrm{v}_k\frac{\partial^2\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)}{\partial x_i\partial x_k}\right)^2\right]+\right.$$

$$+2\left(\mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{V}}\right)\left[\mathbf{v}\cdot\nabla\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)-\tau_p\left(\left(\mathbf{p}\cdot\ddot{\mathbf{V}}\right)+2\mathbf{v}\cdot\nabla\left(\mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{V}}\right)+\mathrm{v}_i\mathrm{v}_k\frac{\partial^2\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)}{\partial x_i\partial x_k}\right)\right]-$$

$$-2\mathbf{v}\cdot\nabla\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)\tau_p\left[\left(\mathbf{p}\cdot\ddot{\mathbf{V}}\right)+2\mathbf{v}\cdot\nabla\left(\mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{V}}\right)+\mathrm{v}_i\mathrm{v}_k\frac{\partial^2\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)}{\partial x_i\partial x_k}\right]+$$

$$+2\tau_p^2\left(\mathbf{p}\cdot\ddot{\mathbf{V}}\right)\left(2\mathbf{v}\cdot\nabla\left(\mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{V}}\right)+\mathrm{v}_i\mathrm{v}_k\frac{\partial^2\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)}{\partial x_i\partial x_k}\right)+$$

$$
\left. + 4\tau_p^2 \left(\mathbf{v} \cdot \nabla \left(\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{V}} \right) \right) \mathrm{v}_i \mathrm{v}_k \frac{\partial^2 \left(\mathbf{p} \cdot \mathbf{V} \right)}{\partial x_i \partial x_k} \right\} d\Gamma + \frac{m}{Z} \int \mathbf{V} \dot{\mathbf{V}} \overline{f} d\Gamma = 0.
$$

Оставляя в этом уравнении только квадратичные по импульсу слагаемые (комментарий по этому поводу см. чуть ниже), будем иметь:

$$
\frac{1}{Z} \int \frac{\tau_p \overline{f}}{T} \left\{ \frac{m\mathbf{V}\dot{\mathbf{V}}}{\tau_p} + \left(\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{V}} \right)^2 + \left(\mathbf{v} \cdot \nabla \left(\mathbf{p} \cdot \mathbf{V} \right) \right)^2 + \right.
$$

$$
+ \tau_p^2 \left[\left(\mathbf{p} \cdot \ddot{\mathbf{V}} \right)^2 + 4 \left(\mathbf{v} \cdot \nabla \left(\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{V}} \right) \right)^2 + \left(\mathrm{v}_i \mathrm{v}_k \frac{\partial^2 \left(\mathbf{p} \cdot \mathbf{V} \right)}{\partial x_i \partial x_k} \right)^2 \right] -
$$

$$
-2\tau_p \left(\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{V}} \right) \left[\left(\left(\mathbf{p} \cdot \ddot{\mathbf{V}} \right) + \mathrm{v}_i \mathrm{v}_k \frac{\partial^2 \left(\mathbf{p} \cdot \mathbf{V} \right)}{\partial x_i \partial x_k} \right) \right] - 4\tau_p \left(\mathbf{v} \cdot \nabla \left(\mathbf{p} \cdot \mathbf{V} \right) \right) \left(\mathbf{v} \cdot \nabla \left(\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{V}} \right) \right) +
$$

$$
\left. + 2\tau_p^2 \left(\mathbf{p} \cdot \ddot{\mathbf{V}} \right) \mathrm{v}_i \mathrm{v}_k \frac{\partial^2 \left(\mathbf{p} \cdot \mathbf{V} \right)}{\partial x_i \partial x_k} \right\} d\Gamma = 0. \tag{25}
$$

В уравнении (25) интегрирование по импульсам удобно провести в сферической системе координат. Как следствие, у нас возникает интегрирование по телесному углу $dO = \sin\theta d\theta d\varphi$, где угловые переменные меняются в пределах $0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$.

Сказанное означает, что, когда возводится в квадрат подынтегральное выражение в (21), у нас появляются усреднения от произведений, как чётных степеней импульса, так и нечётных. При этом, что вполне очевидно, результат усреднения от любого нечётного произведения импульсов будет давать нуль. Отличными от нуля оказываются только средние вида:

$$
\overline{p_i p_k}, \quad \overline{p_i p_k p_l p_n}, \quad \overline{p_i p_k p_l p_n p_m p_s},
$$

где чертой сверху мы подчеркнули, что усреднение ведётся только по угловым переменным от соответствующих произведений, а не от каждого по отдельности, поскольку среднее от одного $\overline{p_i}$ даёт просто нуль.

Непосредственно можно убедиться, что выполняются следующие правила усреднения:

$$\overline{p_i p_k} = \frac{1}{3}\delta_{ik} p^2,$$

$$\overline{p_i p_k p_l p_n} = \frac{p^4}{15}\left(\delta_{ik}\delta_{ln} + \delta_{il}\delta_{kn} + \delta_{in}\delta_{kl}\right),$$

$$\overline{p_i p_k p_l p_n p_m p_s} = \frac{p^6}{105}\Big[\delta_{ik}\left(\delta_{ln}\delta_{ms} + \delta_{lm}\delta_{ns} + \delta_{ls}\delta_{nm}\right) +$$
$$+\delta_{il}\left(\delta_{kn}\delta_{ms} + \delta_{km}\delta_{ls} + \delta_{ks}\delta_{nm}\right) + \delta_{in}\left(\delta_{kl}\delta_{ms} + \delta_{km}\delta_{ls} + \delta_{ks}\delta_{ml}\right) +$$
$$+\delta_{im}\left(\delta_{kl}\delta_{ns} + \delta_{kn}\delta_{ls} + \delta_{ks}\delta_{nl}\right) + \delta_{is}\left(\delta_{kl}\delta_{mn} + \delta_{kn}\delta_{lm} + \delta_{km}\delta_{nl}\right)\Big], \tag{26}$$

где δ_{ik} – символ Кронекера.

В результате довольно громоздких преобразований, с учётом правил усреднения (26), уравнение (25) можно привести к следующему виду:

$$\frac{1}{Z}\int \frac{\tau_p \overline{f}}{T}\left\{\frac{mT\mathbf{V}\dot{\mathbf{V}}}{\tau_p} + \frac{p^2}{3}\left(\dot{\mathbf{V}} - \tau_p\ddot{\mathbf{V}}\right)^2 +\right.$$
$$+\frac{p^4}{15m^2}\left[\left(div\mathbf{V}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathrm{V}_i}{\partial x_k}\right)^2 + \frac{\partial \mathrm{V}_i}{\partial x_k}\frac{\partial \mathrm{V}_k}{\partial x_i}\right] + \frac{4\tau_p^2 p^4}{15m^2}\times$$
$$\times\left[\left(div\dot{\mathbf{V}}\right)^2 + \left(\frac{\partial \dot{\mathrm{V}}_i}{\partial x_k}\right)^2 + \frac{\partial \dot{\mathrm{V}}_i}{\partial x_k}\frac{\partial \dot{\mathrm{V}}_k}{\partial x_i}\right] - \frac{2\tau_p p^4}{15m^2}\left(\dot{\mathbf{V}}\cdot\Delta\mathbf{V} + 2\dot{\mathbf{V}}\cdot graddiv\mathbf{V}\right) - \frac{4\tau_p p^4}{15m^2}\times$$
$$\times\left[div\mathbf{V}div\dot{\mathbf{V}} + \frac{\partial \mathrm{V}_i}{\partial x_k}\frac{\partial \dot{\mathrm{V}}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \mathrm{V}_i}{\partial x_k}\frac{\partial \dot{\mathrm{V}}_k}{\partial x_i}\right] + \frac{2\tau_p^2 p^4}{15m^2}\left(\ddot{\mathbf{V}}\cdot\Delta\mathbf{V} + 2\ddot{\mathbf{V}}\cdot graddiv\mathbf{V}\right) + \frac{4\tau_p^2 p^6}{105m^4}\times$$
$$\times\left(\Delta\mathbf{V}\cdot graddiv\mathbf{V} + \left(graddiv\mathbf{V}\right)^2 + \frac{\partial^2 \mathrm{V}_n}{\partial x_i\partial x_k}\cdot\frac{\partial^2 \mathrm{V}_k}{\partial x_i\partial x_n} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\mathbf{V}}{\partial x_i\partial x_k}\times\right.$$
$$\left.\left.\times\frac{\partial^2\mathbf{V}}{\partial x_i\partial x_k} + \frac{1}{4}\left(\Delta\mathbf{V}\right)^2\right)\right\} p^2 dp d\Omega = 0, \tag{27}$$

где $d\Omega = dxdydz$ обычный элемент объёма.

После применения в уравнении (27) приёма интегрирования по частям с помощью теоремы Гаусса, преследуя цель выделить в явном виде скорость **V**, например, как:

$$\int_{\Omega}\left(div\mathbf{V}\right)^2 d\Omega = \int_{\Sigma_\Omega} div\mathbf{V}\left(\mathbf{V}\cdot d\mathbf{S}\right) - \int_{\Omega}\mathbf{V}\cdot graddiv\mathbf{V}d\Omega = -\int_{\Omega}\mathbf{V}\cdot graddiv\mathbf{V}d\Omega,$$

и, считая, что интеграл по поверхности исчезает благодаря граничному условию $\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\big|_{\Sigma_\Omega} = 0,$ где **n** – нормаль к поверхности, получаем из (27):

$$\frac{1}{Z}\int\frac{\tau_p\bar{f}}{T}\left\{\frac{mT\mathbf{V}\dot{\mathbf{V}}}{\tau_p}+\frac{p^2}{3}\left(\dot{\mathbf{V}}-\tau_p\ddot{\mathbf{V}}\right)^2-\frac{p^4}{15m^2}\mathbf{V}\cdot\left(\Delta\mathbf{V}+2graddiv\mathbf{V}\right)-\right.$$
$$-\frac{4\tau_p^2p^4}{15m^2}\dot{\mathbf{V}}\cdot\left(\Delta\dot{\mathbf{V}}+2grddiv\dot{\mathbf{V}}\right)+\frac{2\tau_pp^4}{15m^2}\mathbf{V}\cdot\left(\Delta\dot{\mathbf{V}}+2graddiv\dot{\mathbf{V}}\right)+$$
$$+\frac{2\tau_p^2p^4}{15m^2}\mathbf{V}\cdot\left(\Delta\ddot{\mathbf{V}}+2graddiv\ddot{\mathbf{V}}\right)+$$
$$\left.+\frac{4\tau_p^2p^6}{35m^4}\mathbf{V}\cdot\left(\Delta graddiv\mathbf{V}+\frac{1}{4}\Delta^2\mathbf{V}\right)\right\}p^2dpd\Omega=0. \qquad (28)$$

Второе и четвёртое слагаемые в квадратных скобках можно также преобразовать с помощью интегрирования по частям, но теперь уже по времени, несмотря на тот факт, что интегрирование по времени в (28) отсутствует. Этот приём становится вполне понятным, если вспомнить, что любое уравнение движения получается благодаря применению классического действия Лагранжа [27], в котором присутствует явное интегрирование по времени. В результате уравнение (28) сводится к виду:

$$\frac{1}{Z}\int\frac{\tau_p\bar{f}}{T}\mathbf{V}\cdot\left\{\frac{mT\dot{\mathbf{V}}}{\tau_p}+\frac{p^2}{3}\left(-\ddot{\mathbf{V}}+2\tau_p\dddot{\mathbf{V}}+\tau_p^2\mathbf{V}^{(4)}\right)-\right.$$
$$-\frac{p^4}{15m^2}\left(\Delta\mathbf{V}+2graddiv\mathbf{V}\right)+\frac{2\tau_pp^4}{15m^2}\left(\Delta\dot{\mathbf{V}}+2graddiv\dot{\mathbf{V}}\right)+$$
$$\left.+\frac{2\tau_p^2p^4}{5m^2}\left(\Delta\ddot{\mathbf{V}}+2graddiv\ddot{\mathbf{V}}\right)+\frac{4\tau_p^2p^6}{35m^4}\left(\Delta graddiv\mathbf{V}+\frac{1}{4}\Delta^2\mathbf{V}\right)\right\}p^2dpd\Omega=0.$$

Полагая здесь выражение в фигурных скобках равным нулю, приходим к обобщённому уравнению Навье-Стокса:

$$\dot{\mathbf{V}}+\frac{\overline{p^2\tau_p}}{3mT}\left(-\ddot{\mathbf{V}}+2\tau_p\dddot{\mathbf{V}}+\tau_p^2\mathbf{V}^{(4)}\right)-\frac{\overline{p^4\tau_p}}{15m^3T}\left(\Delta\mathbf{V}+2graddiv\mathbf{V}\right)+$$
$$+\frac{\overline{2\tau_p^2p^4}}{15m^3T}\left(\Delta\dot{\mathbf{V}}+2graddiv\dot{\mathbf{V}}\right)+\frac{\overline{2\tau_p^3p^4}}{5m^3T}\left(\Delta\ddot{\mathbf{V}}+2graddiv\ddot{\mathbf{V}}\right)+$$
$$+\frac{\overline{4\tau_p^3p^6}}{35m^5T}\left(\Delta graddiv\mathbf{V}+\frac{1}{4}\Delta^2\mathbf{V}\right)=0, \qquad (29)$$

где черта сверху означает усреднение по импульсам молекул с помощью равновесной функции распределения Максвелла.

Считая жидкость несжимаемой, то есть, полагая $div\mathbf{V}=0$ и пренебрегая высшими производными по времени, находим отсюда искомое уравнение:

$$\dot{\mathbf{V}}=\nu\Delta\mathbf{V}-\nu^2\tau^*\Delta^2\mathbf{V}, \qquad (30)$$

где кинематическая вязкость ν и время τ^* определяются формулами:

$$\nu = \frac{\overline{p^4 \tau_p}}{15 m^3 T} = \frac{1}{15 m^3 T Z_0} \int_0^\infty \tau_p p^6 e^{-\frac{p^2}{2mT}} dp,$$

$$\nu^2 \tau^* = \frac{\overline{\tau_p^3 p^6}}{35 m^5 T} = \frac{1}{35 m^5 T Z_0} \int_0^\infty \tau_p^3 p^8 e^{-\frac{p^2}{2mT}} dp, \qquad (31)$$

а для удобства введён нормировочный множитель

$$Z_0 = \int_0^\infty p^2 e^{-\frac{p^2}{2mT}} dp. \qquad (32)$$

Добавляя в уравнение (30) член с градиентом давления, окончательно приходим к следующему обобщённому уравнению Навье-Стокса:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V} = -\frac{\nabla P}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{V} - \nu^2 \tau^* \Delta^2 \mathbf{V}. \qquad (33)$$

2. Выводы

Обратим ещё раз внимание на несколько важных моментов.

1. Уравнение (33) представляет собой обобщённое уравнение Навье-Стокса, в котором учтено дополнительное бигармоническое слагаемое, пропорциональное кубу длины свободного пробега молекул. Оно, как видим, входит со знаком «минус». Как с физической, так и с чисто математической точек зрения этот факт является вполне корректным. Связано это с тем, что если бы перед этим слагаемым был знак «плюс», то решение имело бы осциллирующий характер, для которого физических оснований просто нет, поскольку физическое решение может быть либо растущим, либо убывающим.

2. Когда мы задаёмся вопросом написать уравнение Навье-Стокса с учётом любых поправок по длине свободного пробега, то, следуя намеченному выше алгоритму, и в соответствии с (2) и (5) можно прийти к уравнению наиболее общего вида:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V} = -\frac{\nabla P}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{V} - \nu^2 \tau^* \Delta^2 \mathbf{V} + \nu^3 \tau^{**2} \Delta^3 \mathbf{V} - \nu^4 \tau^{***3} \Delta^4 \mathbf{V} + \ldots, \qquad (34)$$

где времена τ^{**}, τ^{***}, ... можно вычислить с помощью алгоритма (31).

Как видно из (34), коэффициенты теплопереноса, которые были найдены с использованием метода «тау-приближения», имеют вполне определённый аналитический вид, который можно явно привести, с помощью подробно описанного выше приёма. И хотя целью Максвелла и др. авторов был вывод этих коэффициентов исходя непосредственно из вида интеграла столкновений, мы воспользовались здесь именно малостью параметра $\left(\frac{l}{L}\right)^{2n}$, где L – линейный размер наночастицы.

Обратим внимание, что если использовать другие приближения и расчёты (к примеру, вейвлет–разложение), то численные коэффициенты будут отличаться от коэффициентов в (31).

Здесь стоит ещё раз подчеркнуть, что основной целью статьи было уточнение уравнения Навье-Стокса при учёте дополнительных слагаемых по длине свободного пробега (или иначе, по числу Кнудсена) молекул с помощью метода «тау-приближения», что и дало нам дополнительный бигармонический по оператору Лапласа вклад к правой части уравнения.

В представленном исследовании мы не ставили перед собой цель сравнения коэффициентов переноса, полученных нами, с работами других авторов, поскольку, как мы чуть выше это отметили, наша цель была иной.

Стоит отметить ещё, что при решении уравнений гидродинамики в любом криволинейном базисе удобно использовать простой алгоритм, подробно изложенный в работах [27; 28].

Заключение

Заканчивая работу, отметим следующие положения:

1) благодаря классическому кинетическому уравнению Больцмана описан общий алгоритм получения уравнения Навье-Стокса в виде ряда по числу Кнудсена;

2) получено обобщённое уравнение Навье-Стокса, в котором учтены дополнительные слагаемые по l, приводящие к бигармоническому оператору Лапласа к его правой части;

3) отмечена важная роль этого слагаемого в деле исследования свойств наночастиц.

Статья поступила в редакцию 12.10.2020 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Прандтль Л., Титьенс О. Гидро- и аэромеханика. В 2-х т. М.: ГИТТЛ, 1933–1935.
2. Ламб Г. Гидродинамика. М.: ГИТТЛ, 1947. 929 с.
3. Прикладная газовая динамика: в 2-х частях. Часть 1 / Христианович С. А., Гальперин В. Г., Миллионщиков М. Д., Симонов Л. А. М.: ЦАГИ, 1948. 145 с.
4. Жуковский Н. Е. Собрание сочинений. Том. 2. Гидродинамика. М.: ГИТТЛ, 1949. 765 с.
5. Липман Г.В., Пакет А. Е. Введение в аэродинамику сжимаемой жидкости. М.: ИЛ, 1949. 330 с.
6. Слёзкин Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М.: ГИТТЛ, 1955. 520 с.
7. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959. 700 с.
8. Биркгоф Г. Гидродинамика. Методы. Факты. Подобие. М.: Иностранная литература, 1963. 246 с.
9. Серрин Д. Математические основы классической механики жидкости. М.: Иностранная литература,1963. 256 с.
10. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. В 2-х ч. М.: Физматлит, 1963.

11. Милн-Томсон Л. М. Теоретическая гидродинамика. М.: Мир, 1964. 660 с.
12. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. В 2-х ч. М., Наука, 1965–1967.
13. Рауз Х. Механика жидкости. М.: Стройиздат, 1967. 392 с.
14. Седов Л. И. Механика сплошной среды. В 2-х т. М.: Наука, 1970.
15. Сокольников И. С. Тензорный анализ. Теория и применения в геометрии и в механике сплошных сред. М.: Наука, 1971. 376 с.
16. Ильюшин А. А. Механика сплошной среды. М.: МГУ, 1971–1990. 310 с.
17. Гладков С. О. Об одном доказательстве единственности гидродинамического решения Стокса // Известия высших учебных заведений. Физика. 2018. Т. 61. №. 6 (726). С. 103–105.
18. Gladkov S. O. The theory of thermal conductivity and hydrodynamics of Maxwell gas, which is under the influence of an external sound wave // Solid State Communications. 1995. Vol. 94. Iss. 9. P. 787–791. DOI: 10.1016/0038-1098(95)00003-8.
19. Гладков С. О. К теории конвективного движения газа в цилиндрическом объеме // Письма в журнал технической физики. 2005. Т. 31. № 12. С. 71–78.
20. Гладков С. О. К вопросу о вычислении времени остановки вращающегося в вязком континууме цилиндрического тела и времени увлечения соосного с ним внешнего цилиндра // Журнал технической физики. 2018. Т. 88. № 3. С. 337–341. DOI: 10.21883/JTF.2018.03.45587.2349.
21. Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Физическая кинетика. 1979. Т. 10. М.: Наука. 528 с.
22. Резибуа П., Де Лернер М. Классическая кинетическая теория жидкостей и газов. М.: Мир. 1980. 423 с.
23. Гладков С. О., Богданова С. Б. Хаотическая динамика взаимодействующих маятников (решение проблемы синхронизации) // Инженерная физика. 2019. № 1. С. 49–61.
24. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика. Т. 5. М.: Наука, 2003. 583 с.
25. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. Т. 1. М.: Наука, 1973. 207 с.
26. Гладков С. О., Богданова С. Б. Об аналитических решениях квазиклассического кинетического уравнения высших порядков теории возмущений по времени релаксации // Известия высших учебных заведений. Физика. 2018. Т. 61. № 5 (725). С. 28–35.
27. Гладков С. О. Об альтернативном вычислении ковариантных производных с приложением к проблемам механики, физики и геометрии // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2019. № 1. С. 16–45. DOI: 10.18384/2310-7251-2019-1-16-45.
28. Гладков С. О. К вопросу приложения второй ковариантной производной от векторной функции к задачам гидродинамики и теории упругости // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2019. № 3. С. 42–67. DOI: 10.18384/2310-7251-2019-3-42-67.

REFERENCES

1. Prandtl L., Tietjens O. *Gidro- i aeromekhanika: v 2-kh tomah* [Hydro- and aeromechanics: in 2 volumes]. Moscow, GITTL Publ., 1933–1935.
2. Lamb H. *Gidrodinamika* [Hydrodynamics]. Moscow, GITTL Publ., 1947. 929 p.
3. Khristianovich S. A., Gal'perin V. G., Millionshchikov M. D., Simonov L. A *Prikladnaya gazovaya dinamika: v 2-kh chastyakh. Cpast' 1* [Applied Gas Dynamics: in 2 parts. Part 1]. Moscow, Central Aerohydrodynamic Institute Publ., 1948. 145 p.
4. Zhukovskii N. E. *Sobranie sochinenii. Tom. 2. Gidrodinamika* [Collected Works. Vol. 2. Hydrodynamics]. Moscow, GITTL Publ., 1949. 765 p.

5. Liepmann H. W., Puckett A. E. *Vvedenie v aerodinamiku szhimaemoi zhidkosti* [Introduction to the aerodynamics of a compressible fluid]. Moscow, Izdatel'stvo inostrannoy literatury Publ., 1949. 330 p.
6. Slezkin N. A. *Dinamika vyazkoi neszhimaemoi zhidkosti* [Dynamics of a viscous incompressible fluid]. Moscow, GITTL Publ., 1955. 520 p.
7. Levich V. G. *Fiziko-khimicheskaya gidrodinamika* [Physicochemical hydrodynamics]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1959. 700 p.
8. Birkhoff G. *Gidrodinamika. Metody. Fakty. Podobie* [Hydrodynamics. Methods. Facts. Similarity]. Moscow, Inostrannaya literatura Publ., 1963. 246 p.
9. Serrin J. *Matematicheskie osnovy klassicheskoi mekhaniki zhidkosti* [Mathematical Foundations of Classical Fluid Mechanics]. Moscow, Inostrannaya literatura Publ., 1963. 256 p.
10. Kochin N. E., Kibel' I. A., Roze N. V. *Teoreticheskaya gidromekhanika: v 2-kh chastyah* [Theoretical hydromechanics: in 2 parts]. Moscow, Fizmatlit Publ., 1963.
11. Milne-Thomson L. M. *Teoreticheskaya gidrodinamika* [Theoretical hydrodynamics]. Moscow, Mir Publ., 1964. 660 p.
12. Monin A. S., Yaglom A. M. *Statisticheskaya gidromekhanika: v 2-kh chastyah* [Statistical fluid mechanics: in 2 parts]. Moscow, Nauka Publ., 1965-1967.
13. Rouse H. *Mekhanika zhidkosti* [Fluid mechanics]. Moscow, Stroiizdat Publ., 1967. 392 p.
14. Sedov L. I. *Mekhanika sploshnoi sredy: v 2-kh tomah* [Continuum mechanics: in 2 volumes]. Moscow, Nauka Publ., 1970.
15. Sokol'nikov I. S. *Tenzornyi analiz. Teoriya i primeneniya v geometrii i v mekhanike sploshnykh sred* [Tensor analysis. Theory and Applications in Geometry and Continuum Mechanics]. Moscow, Nauka Publ., 1971. 376 p.
16. Il'yushin A. A. *Mekhanika sploshnoi sredy* [Continuum mechanics]. Moscow, Moscow State University Publ., 1971–1990. 310 p.
17. Gladkov S. O. [On one proof of the uniqueness of the Stokes hydrodynamic solution]. In: *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Fizika* [Russian Physics Journal], 2018, vol. 61, no. 6 (726), pp. 103–105.
18. Gladkov S. O. The theory of thermal conductivity and hydrodynamics of Maxwell gas, which is under the influence of an external sound wave. In: *Solid State Communications*, 1995, vol. 94, iss. 9, pp. 787–791. DOI: 10.1016/0038-1098(95)00003-8.
19. Gladkov S. O. [To the theory of convective gas motion in a cylindrical volume]. In: *Pis'ma v zhurnal tekhnicheskoi fiziki* [Applied Physics Letters], 2005, vol. 31, no. 12, pp. 71–78.
20. Gladkov S. O. [On calculating the stopping time of a cylindrical body rotating in a viscous continuum and the time of entrainment of a coaxial external cylinder]. In: *Zhurnal tekhnicheskoi fiziki* [Technical Physics], 2018, vol. 88, no. 3, pp. 337–341. DOI: 10.21883/JTF.2018.03.45587.2349.
21. Lifshits E. M., Pitaevskii L. P. *Teoreticheskaya fizika: v 10 tomakh. Tom 10. Fizicheskaya kinetika* [Theoretical physics: in 10 volumes. Volume 10. Physical kinetics]. Moscow, Nauka Publ., 1979. 528 p.
22. Rezibua P. De Lerner M. *Klassicheskaya kineticheskaya teoriya zhidkostei i gazo*v [Classical kinetic theory of liquids and gases]. Moscow, Mir Publ., 1980. 423 p.
23. Gladkov S. O., Bogdanova S. B. [Chaotic dynamics of interacting pendulums (decision of synchronization problem)]. In: *Inzhenernaya fizika* [Engineering Physics], 2019, no. 1, pp. 49–61.
24. Landau L. D., Lifshits E. M. *Statisticheskaya fizika. T. 5* [Statistical physics. Vol. 5]. Moscow, Nauka Publ., 2003. 583 p.
25. Landau L. D., Lifshits E. M., Mekhanika. T. 1 [Mechanics. Vol. 1]. Moscow, Nauka, 1973. 207 p.

26. Gladkov S. O., Bogdanova S. B. [On analytical solutions of the quasiclassical kinetic equation of the highest-order perturbation theory in the approximation of the relaxation time]. In: *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Fizika* [Russian Physics Journal], 2018, vol. 61, no. 5 (725), pp. 28–35.
27. Gladkov S. O. [Alternative calculation of covariant derivatives with an application to the problems of mechanics, physics and geometry]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-Matematika* [Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics-Mathematics], 2019, no. 1, pp. 16–45. DOI: 10.18384/2310-7251-2019-1-16-45.
28. Gladkov S. O. [Application of the second covariant derivative from the vector function to the problems of hydrodynamics and elasticity theory]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-Matematika* [Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics-Mathematics], 2019, no. 3, pp. 42–67. DOI: 10.18384/2310-7251-2019-3-42-67.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Гладков Сергей Октябринович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры № 311 «Прикладные программные средства и математические методы» Московского авиационного института (национального исследовательского университета);
e-mail: sglad51@mail.ru.

Зо Аунг – аспирант кафедры № 311 «Прикладные программные средства и математические методы» Московского авиационного института (национального исследовательского университета);
e-mail: shwehtikeaung1993@gmail.com.

INFORMATIONS ABOUT THE AUTHORS

Sergey O. Gladkov – Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Department No. 311 "Applied software and mathematical methods", Moscow Aviation Institute (National Research University);
e-mail: sglad51@mail.ru.

Zau Aung – Postgraduate Student, Department No. 311 "Applied software and mathematical methods", Moscow Aviation Institute (National Research University);
e-mail: shwehtikeaung1993@gmail.com

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Гладков С. О., Зо Аунг Об уточнении уравнения Навье–Стокса применительно к наночастицам // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2021. № 1. С. 77–91.
DOI: 10.18384-2310-7251-2021-1-77-91

FOR CITATION

Gladkov S. O., Zaw Aung. On refining the Navier–Stokes equation in relation to nanoparticles. In: *Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics-Mathematics*, 2021, no. 1, pp. 77–91.
DOI: 10.18384-2310-7251-2021-1-77-91

ТЕОРИЯ И МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ И ВОСПИТАНИЯ

УДК 378.662.147:53
DOI: 10.18384/2310-7251-2021-1-92-102

МЕЖПРЕДМЕТНЫЕ СВЯЗИ КУРСОВ ОБЩЕЙ ФИЗИКИ И ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ ПРИ ИЗУЧЕНИИ МЕХАНИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

Бугримов А. Л., Ветшева А. А., Лобов В. И., Родэ С. В., Шампаров Е. Ю.

Российский государственный университет имени А. Н. Косыгина (Технологии. Дизайн. Искусство)
117997, г. Москва, ул. Садовническая, д. 33, Российская Федерация

Аннотация
Цель: продемонстрировать необходимость апелляции к основным положениям математики при построении физических моделей.
Процедура и методы. Сопоставление и анализ существующих подходов к методам вычислений работы в физике и соответствующих им методам математического анализа (методам высшей математики).
Результаты. Достоверные в эвристическом смысле результаты вычислений в рамках общефизических подходов в процессе обучения требуют демонстрации учёта основных методов высшей математики в построении физической картины процесса.
Теоретическая и/или практическая значимость. Продемонстрирована необходимость учёта межпредметных связей физики и высшей математики при вычислении механической работы.
Ключевые слова: механическая работа, поле потенциальных сил, центральное поле сил, потенциальная энергия, определенный интеграл

INTERSUBJECT RELATIONS OF GENERAL PHYSICS AND HIGHER MATHEMATICS COURSES IN THE STUDY OF MECHANICAL WORK

A. Bugrimov, A. Vetsheva, V. Lobov, S. Rode, E. Shamparov

Kosygin State University of Russia
ul. Sadovnicheskaya 33, 117997 Moscow, Russian Federation

Abstract
Aim. We demonstrate the need to appeal to the main mathematical concepts in the construction of physical models.
Methodology. The existing approaches to methods of computing work in physics and corresponding methods of mathematical analysis (methods of higher mathematics) are compared and analyzed.
Results. Heuristically reliable results of calculations within the framework of general physical approaches in the learning process require the consideration of the main methods of higher mathematics in the construction of the physical picture of the process.
Research implications. The necessity of taking into account the intersubject relations of physics and higher mathematics in the calculation of mechanical work is demonstrated.
Keywords: mechanical work, field of potential forces, central field of forces, potential energy, definite integral

Введение

Статья имеет целью продемонстрировать необходимость учёта межпредметных связей физики и высшей математики при моделировании физических процессов, в частности, при вычислении механической работы.

Изучение механической работы

По определению работа силы $\vec{f}$ при движении по пути s (рис. 1) из точки 1 в точку 2 определяется как [1]:

$$\delta A = \left(\vec{f}d\vec{s}\right); \quad A_{1s2} = \int\limits_{1s2} \left(\vec{f}d\vec{s}\right). \qquad (1)$$

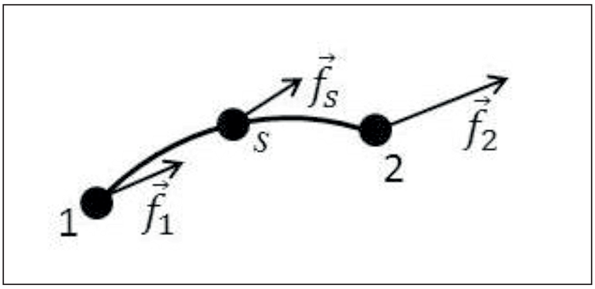

Рис. 1 / Fig. 1. Работа силы / Work of Force.

Источник: составлено авторами.

Однако, в простых случаях работу силы вычисляют не по формуле (1), а основываясь на очевидных понятиях. Так, например, работа однородного поля по перемещению тела массой m с высоты h_1 до h_2 записывается просто [1–5][1]:

$$A = mg\left(h_1 - h_2\right), \qquad (2)$$

[1] Также см.: Яворский Б. М., Детлаф А. А. Справочник по физике; 3-е изд., испр. М.: Наука, 1990. 624 с.

после чего определяется потенциал поля:

$$U(h) = mgh + \text{const}. \quad (3)$$

Затем традиционно рассматривается поле потенциальных сил. В качестве основного рассматривается центральное поле сил:

$$f = G\frac{Mm}{r^2}, \quad (4)$$

и доказывается, что работа по перемещению точечного тела массой m из точки 1 в точку 2 не зависит от радиусов-векторов $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$, а зависит только лишь от расстояний этих точек от центра притяжения r_1 и r_2 (рис. 2).

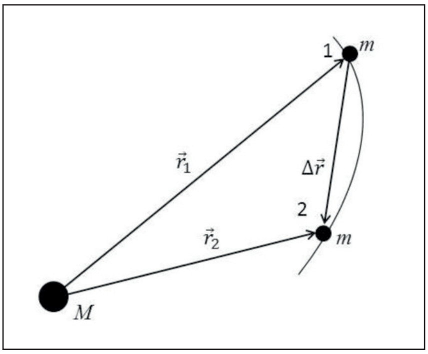

Рис. 2 / Fig. 2. Перемещение в центральном поле сил / Moving in the central force field.
Источник: составлено авторами.

Однако, при вычислении работы поля или внешней силы по перемещению точечного тела массой m не удаётся проследить общность логики вычислений в соответствии с формулой (1) и преемственность методов математического анализа применительно к реализации вычислительных процессов. Так, например, согласно [1]: «При перемещении массы m из бесконечности гравитационные силы совершают работу»:

$$A = \int_r^{\infty} G\frac{Mm}{r^2}dr = G\frac{Mm}{r}. \quad (5)$$

При этом неясно, о какой работе идёт речь: о работе сил поля по перемещению массы (из бесконечности в точку, удалённую от центра на расстояние r) или, наоборот, о работе внешней силы по перемещению массы из точки r в бесконечность (интегрирование в пределах от r до бесконечности).

Согласно [2], работа на всём пути:

$$A = \int_{r_1}^{r_2} f(r)dr. \quad (6)$$

Делается замечание: «Последнее выражение зависит, очевидно, только от вида функции $f(r)$ и от значений r_1 и r_2. От вида траектории оно никак не зависит». Примеров вычислений работы не приводится.

Согласно [3], «рассматривается работа по удалению тела массой m от Земли. На расстоянии R на тело действует сила:

$$F = G\frac{Mm}{R^2}. \tag{7}$$

При перемещении этого тела на расстояние dR затрачивается работа:

$$dA = -G\frac{Mm}{R^2}dR. \tag{8}$$

Знак минус появляется потому, что сила и перемещение в данном случае противоположны по направлению».

В данном случае неясно, какие силы совершают работу. Если внешняя, то направление силы совпадает с перемещением. Если силы притяжения, то речь должна идти о работе сил поля, тогда действие силы также совпадает с перемещением.

В справочнике по физике Б. М. Яворского и А. А. Детлафа[1] отмечается, что «в потенциальном поле центральных сил на материальную точку действуют силы $\vec{F}$, которые всюду направлены вдоль прямых, проходящих через одну и ту же точку – центр сил, и зависят только от расстояния r до центра сил»:

$$\vec{F} = F_r\left(r\right)\frac{\vec{r}}{r}, \tag{9}$$

и считается, что «если материальная точка притягивается к центру сил, то»

$$F_r\left(r\right) = -\left|\vec{F}\right| < 0. \tag{10}$$

«Элементарная работа силы $\vec{F}$ $\delta A = \vec{F}\,d\vec{r} = F_r\left(r\right)dr$».

Ясно, что при таком определении элементарная работа должна быть отрицательной.

В [4] определяется работа внешней силы при перемещении материальной точки из близкого положения в удалённое:

$$A = \int_{r_1}^{r_2} F_{\text{внешн}}dr. \tag{11}$$

При этом направление действие силы совпадает с направлением перемещения. Связь между работой поля по перемещению материальной точки и работой внешней силы по перемещению материальной точки не анализируется.

В [5] подчёркивается, что «гравитационная сила $\vec{F}_r$ направлена против радиуса-вектора и её проекция на последний отрицательна, т. е.»:

[1] Яворский Б. М., Детлаф А. А. Справочник по физике; 3-е изд., испр. М.: Наука, 1990. 624 с.

$$F_r = -G\frac{Mm}{r^2}. \quad (12)$$

При этом направление движения точки (также против радиуса-вектора) отрицательным знаком не снабжается.

Реализация межпредметных связей курсов высшей математики и общей физики при изучении механической работы

В классических пособиях [6; 7] понятие потенциальной энергии определяется вполне конструктивно, но – в силу определённых ограничений – без использования идей интегрального исчисления.

Для вычисления работы поля или внешней силы по перемещению массы с точки зрения единообразия подходов к вычислениям в соответствии с формулой (1), а также с учётам межпредметных связей с методами математического анализа применительно к реализации вычислительных процессов прежде всего следует обратить внимание на понятие определённого интеграла.

Как известно (например, [8]), определённый интеграл от функции $f(x)$ в пределах от a до b (рис. 3) есть предел интегральных сумм при измельчении отрезков разбиения ($\max(\Delta x_i = x_{i+1} - x_i) \to 0$):

$$\lim_{\max(\Delta x_i = x_{i+1} - x_i) \to 0} \sum_i f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx. \quad (13)$$

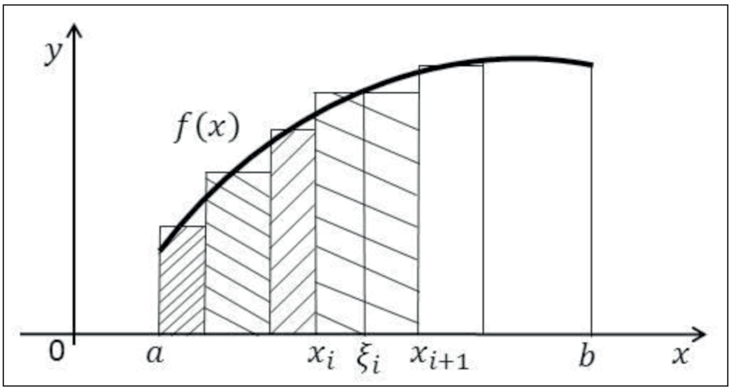

Рис. 3 / Fig. 3. Определённый интеграл / Definite integral.

Источник: оставлено авторами.

Одним из свойств определённого интеграла является изменение его знака при изменении пределов интегрирования:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx. \quad (14)$$

Чтобы сохранить смысл определённого интеграла (площади под кривой $f(x)$), в случае интегрирования от большего значения предела к меньшему следует поставить знак «минус» и записать:

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx. \tag{15}$$

Это и понятно, поскольку теперь в соотношении (13) $\Delta x_i = x_i - x_{i+1} < 0$.

Кроме того, запись (1) никак не учитывает направление вектора силы $\vec{f}$ относительно радиуса-вектора, а лишь только взаимное направление $\vec{f}$ и $d\vec{s}$.

Приведённые соображения лежат в основе определения работы однородного поля по перемещению точечного тела массой m с высоты h_1 до h_2 (рис. 4).

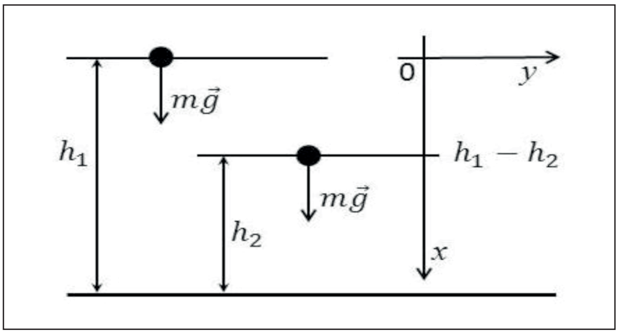

Рис. 4 / Fig. 4. Работа однородного поля по перемещению точечного тела массой m с высоты h_1 до h_2 / Work of a homogeneous field on the displacement of a point body of mass m from a height of h_1 to h_2.

Источник: составлено авторами.

В выбранной системе координат $0xy$ перемещение и сила тяжести имеют одинаковое направление, переменная интегрирования изменяется в пределах от 0 до $h_1 - h_2$:

$$A = \int_1^2 \left(\vec{f}d\vec{s}\right) = \int_0^{h_1-h_2} mgdx = mg\left(h_1 - h_2\right) =$$

$$= mgh_1 - mgh_2 = U_1 - U_2 = -\left(U_2 - U_1\right) = -\Delta U. \tag{16}$$

Силы поля совершают работу за счёт убыли потенциальной энергии.

Подъём тела. Работа внешних сил против сил поля:

$$\vec{f}_{\text{поля}} = m\vec{g}. \tag{17}$$

Направление действия внешних сил совпадает с направлением перемещения материальной точки. С учётом равенства:

$$f_{\text{внешн}} = mg \tag{18}$$

и выбранной системы координат (рис. 5):

$$A = \int_1^2 \left(\vec{f} d\vec{s}\right) = \int_{h_1}^{h_2} mg dx = mg\left(h_2 - h_1\right) =$$

$$= mgh_2 - mgh_1 = U_2 - U_1. \tag{19}$$

Работа внешней силы идёт на увеличение потенциальной энергии материальной частицы.

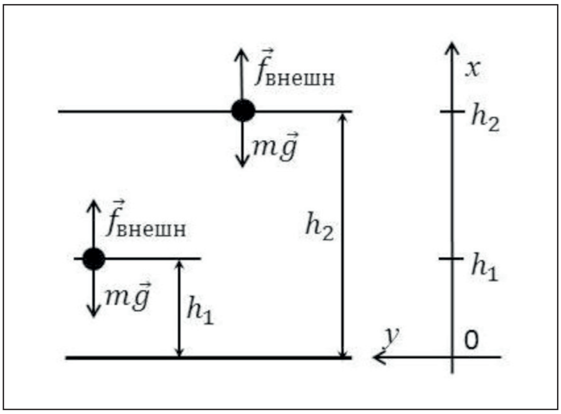

Рис. 5 / Fig. 5. Работа внешней силы по перемещению тела массой m с высоты h_1 до h_2 / The work of an external force to move a body of mass m from a height of h_1 to h_2.
Источник: составлено авторами.

Работа поля по перемещению точечного тела массой m из точки, находящейся на расстоянии от центра притяжения r_1 до r_2 (рис. 6):

$$A = \int_1^2 \left(\vec{f} d\vec{s}\right) = -\int_{r_1}^{r_2} G\frac{Mm}{r^2} dr = -GMm\left(-\frac{1}{r}\right)\Big|_{r_1}^{r_2} = G\frac{Mm}{r_2} - G\frac{Mm}{r_1} =$$

$$= -G\frac{Mm}{r_1} - \left(-G\frac{Mm}{r_2}\right) = U_1 - U_2, \tag{20}$$

откуда естественным образом следует понятие потенциальной энергии:

$$U\left(r\right) = -G\frac{Mm}{r}. \tag{21}$$

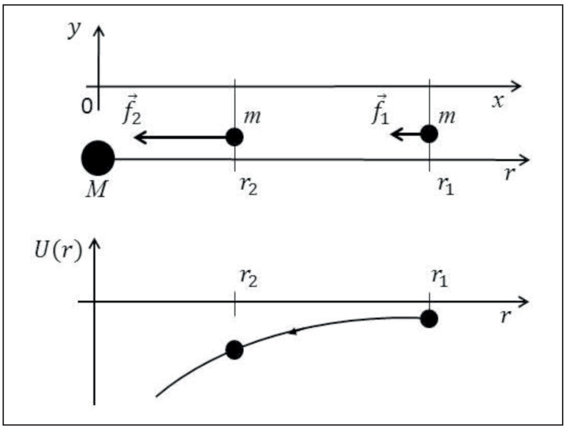

Рис. 6 / Fig. 6. Работа центрального поля сил / Central force field work.
Источник: составлено авторами.

Работа поля осуществляется за счёт убыли потенциальной энергии частицы.

Полезна демонстрация независимости результата от выбора системы координат.

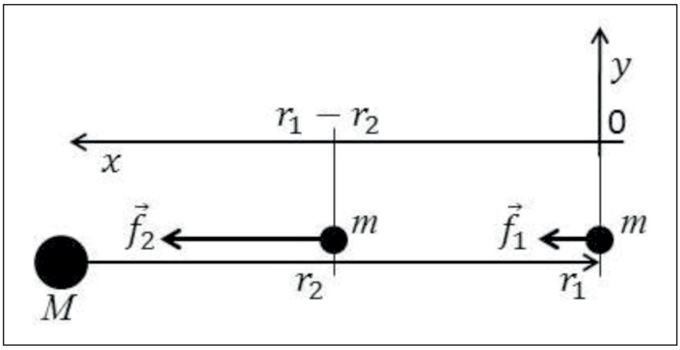

Рис. 7 / Fig. 7. Работа силы в системе координат / Force work in the coordinate system
Источник: составлено авторами.

Следует учесть (рис. 7): сила и перемещение – однонаправленны! Необходимо также учесть изменение вида функции (12) в новой системе координат:

$$f = G\frac{Mm}{(r_1 - x)^2}. \tag{22}$$

Поэтому:

$$A = \int_0^{r_1 - r_2} G\frac{Mm}{(r_1 - x)^2}dx = GMm\frac{1}{r_1 - x}\Big|_0^{r_1 - r_2} = G\frac{Mm}{r_2} - G\frac{Mm}{r_1}. \tag{23}$$

Следует рассмотреть работу перемещения тела под действием внешней силы от расстояния r_1 до r_2 (рис. 8):

$$A=\int_1^2\left(\vec{f}d\vec{s}\right)=\int_{r_1}^{r_2}G\frac{Mm}{r^2}dr=GMm\left(-\frac{1}{r}\right)\Big|_{r_1}^{r_2}=$$

$$=-G\frac{Mm}{r_2}-\left(-G\frac{Mm}{r_1}\right)=U_2-U_1. \qquad (24)$$

При этом очевидно, что работа внешних сил идёт на увеличение потенциальной энергии от U_1 до U_2.

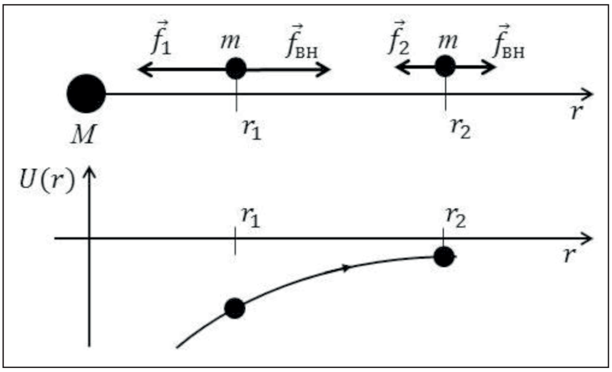

Рис. 8 / Fig. 8. Работа внешней силы / External force work.

Источник: составлено авторами.

Рассмотренные примеры вычислений не зависят от вида поля: поля гравитационных сил или поля электростатических сил.

Вывод

Приведённые выше соображения демонстрируют необходимость учёта межпредметных связей, которые с необходимостью возникают при изучении любых разделов физики и тесно связанных с нею разделов высшей математики.

Статья поступила в редакцию 23.12.2020 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сивухин Д. В. Общий курс физики: учеб. пособие: для вузов. В 5 т. Т. I. Механика. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 560 с.
2. Савельев И. В. Курс общей физики. Том 1. Механика, колебания и волны, молекулярная физика. М.: Наука, 1973. 512 с.
3. Трофимова Т. И. Курс физики: учеб. пособие для вузов; 11-е изд., стер. М.: Академия, 2006. 560 с.
4. Александров Н. В., Яшкин А. Я. Курс физики. Механика: учеб. пособие для студентов-заочников физ.-мат. фак. пед ин-тов. М.: Просвещение, 1978. 416 с.

5. Зисман Г. А., Тодес О. М. Курс общей физики. Т. 1. Механика, молекулярная физика, колебания и волны. М.: Наука, 1974. 336 с.
6. Физика: 10 класс: базовый и углубленный уровни: учебник для обучающихся общеобразовательных организаций / Хижнякова Л. С., Синявина А. А., Холина С. А., Кудрявцев В. В. М.: Вентана-Граф, 2017. 400 с.
7. Физика: 10 класс: базовый уровень: углубленный уровень: учебник для обучающихся общеобразовательных учреждений; 2-е изд., доп. и испр./ Грачев А. В., Погожев А. В., Салецкий А. М., Боков П. Ю. М.: Вентана-Граф, 2019. 464 с.
8. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3-х тт. Том 2; 14-е изд, стереот. СПб.: Лань, 2020. 800 с.

REFERENCES

1. Sivukhin D. V. *Obshchii kurs fiziki. V 5 t. T. I. Mekhanika* [General course of physics. In 5 volumes.Vol. I. Mechanics]. Moscow, FIZMATLIT Publ., 2005. 560 p.
2. Savel'ev I. V. *Kurs obshchei fiziki. Tom 1. Mekhanika, kolebaniya i volny, molekulyarnaya fizika* [General physics course. Volume 1. Mechanics, Oscillations and Waves, Molecular Physics]. Moscow, Nauka Publ., 1973. 512 p.
3. Trofimova T. I. *Kurs fiziki* [Physics course]. Moscow, Akademiya Publ., 2006. 560 p.
4. Aleksandrov N. V., Yashkin A. Ya. *Kurs fiziki. Mekhanika* [Physics course. Mechanics]. Moscow, Prosveshchenie Publ., 1978. 416 p.
5. Zisman G. A., Todes O. M. *Kurs obshchei fiziki. T. 1. Mekhanika, molekulyarnaya fizika, kolebaniya i volny* [General physics course. Vol. 1. Mechanics, Molecular Physics, Oscillations and Waves]. Moscow, Nauka Publ., 1974. 336 p.
6. Khizhnyakova L. S., Sinyavina A. A., Kholina S. A., Kudryavtsev V. V. Fizika: 10 klass: bazovyi i uglublennyi urovni [Physics: Grade 10: basic and advanced levels]. Moscow, Ventana-Graf Publ., 2017. 400 p.
7. Grachev A. V., Pogozhev A. V., Saletskii A. M., Bokov P. Yu. *Fizika: 10 klass: bazovyi uroven': uglublennyi uroven'* [Physics: Grade 10: basic level: advanced level]. Moscow, Ventana-Graf Publ., 2019. 464 p.
8. Fikhtengol'ts G. M. *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya. V 3-kh tt. Tom 2* [Differential and integral calculus course. In 3 vols. Volume 2]. St. Petersburg, Lan' Publ., 2020. 800 p.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Бугримов Анатолий Львович – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой физики Российского государственного университета имени А. Н. Косыгина (Технологии. Дизайн. Искусство);
e-mail: bugrimov-al@rguk.ru;

Ветшева Алиса Александровна – заведующий лабораторией кафедры физики Российского государственного университета имени А. Н. Косыгина (Технологии. Дизайн. Искусство);
e-mail: alsavetsheva@mail.ru;

Лобов Владимир Иванович – старший преподаватель кафедры физики Российского государственного университета имени А. Н. Косыгина (Технологии. Дизайн. Искусство);
e-mail: lobov-vi@rguk.ru;

Родэ Сергей Витальевич – доктор технических наук, профессор, профессор кафедры физики Российского государственного университета имени А. Н. Косыгина (Технологии. Дизайн. Искусство);
e-mail: rode-sv@rguk.ru;

Шампаров Евгений Юрьевич – кандидат технических наук, доцент кафедры физики Российского государственного университета имени А. Н. Косыгина (Технологии. Дизайн. Искусство);
e-mail: shamparov-eu@rguk.ru.

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Anatoly L. Bugrimov – Dr. Sci. (Engineering), Prof., Departmental Head, Department of Physics, Kosygin State University of Russia;
e-mail: bugrimov-al@rguk.ru;

Alisa A. Vetsheva – Laboratory Head, Laboratory of the Department of Physics, Kosygin State University of Russia;
e-mail: alsavetsheva@mail.ru;

Vladimir I. Lobov – Senior Lecturer, Department of Physics, Kosygin State University of Russia;
e-mail: lobov-vi@rguk.ru;

Sergey V. Rode – Dr. Sci. (Engineering), Prof., Department of Physics, Kosygin State University of Russia;
e-mail: rode-s-v@mail.ru;

Evgeniy Yu. Samparov – Cand. Sci. (Engineering), Assoc. Prof., Department of Physics, Kosygin State University of Russia;
e-mail: shamparov-eu@rguk.ru.

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Бугримов А. Л., Ветшева А. А., Лобов В. И., Родэ С. В. Шампаров Е. Ю. Межпредметные связи курсов общей физики и высшей математики при изучении механической работы // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2021. № 1. С. 92–102.
DOI: 10.18384/2310-7251-2021-1-92-102

FOR CITATION

Bugrimov A. L., Vetsheva A. A., Lobov V. I., Rode S. V., Shamparov E. Yu. Intersubject relations of General physics and higher mathematics courses in the study of mechanical work. In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics.*2021. no. 1. pp. 92–102.
DOI: 10.18384/2310-7251-2021-1-92-102

УДК 519.852
DOI: 10.18384/2310-7251-2021-1-103-119

ИЗУЧЕНИЕ СЛУЧАЯ ВЫРОЖДЕННОСТИ ОПОРНЫХ РЕШЕНИЙ ПРИ ПРИМЕНЕНИИ СИМПЛЕКС-МЕТОДА

Хасанов А. С.

Российский экономический университет имени Г. В. Плеханова
117997, г. Москва, Стремянный пер., д. 36, Российская Федерация

Аннотация

Целью данной статьи является описание случая вырожденности опорных решений в симплекс-методе для использования преподавателями как на занятиях, так и при организации самостоятельной работы студентов.

Процедура и методы. Формулируются основные понятия линейного программирования и рассматриваются проблемы, вызванные избыточными ограничениями в условиях задачи. Приведены причины возникновения такого особого случая в симплексном методе, как вырожденность опорных решений. Описаны случаи временной вырожденности и зацикливания. Приведено правило, позволяющее избежать зацикливания. Все вышесказанное проиллюстрировано на конкретных примерах. Поскольку при переходе к общему случаю возникает проблема, связанная с невозможностью видеть математические объекты, используется метод визуализации математических объектов.

Результаты. Приведено подробное описание случая вырожденности опорных решений при применении симплекс-метода.

Практическая значимость работы обусловлена возможностью её использования при изучении одного из четырёх особых случаев, возникающих при применении симплекс-метода.

Ключевые слова: математическое программирование, линейное программирование, симплекс-метод, опорные решения, вырожденные опорные решения

STUDY OF THE DEGENERACY CASE OF BASIC FEASIBLE SOLUTIONS IN THE SIMPLEX METHOD

A. Khasanov

Plekhanov Russian University of Economics
Stremyanny pereulok 36, 117997 Moscow, Russian Federation

Abstract

Aim. We describe the degeneracy case of basic feasible solutions in the simplex method for use by lecturers both in the classroom and in self-study of students.

Methodology. The basic concepts of linear programming are formulated and the problems caused by excessive constraints in the problem conditions are considered. The reasons for the occurrence of such a special case in the simplex method as the degeneracy of basic feasible

solutions are presented. The cases of temporal degeneracy and cycling are described. A rule is given to avoid cycling. All of the above is illustrated by concrete examples. Since the transition to the general case raises a problem related to the inability to see mathematical objects, the method of visualization of mathematical objects is used.
Results. A detailed description of the degeneracy case of basic feasible solutions in the simplex method is presented.
Research implications. The work is of practical significance, since it can be used in the study of one of the four special cases that arise when using the simplex method.
Keywords: mathematical programming, linear programming, simplex method, basic feasible solutions, degenerate basic feasible solutions.

Введение

Общая задача линейного программирования имеет вид:

$$z = c_0 + c_1x_1 + \ldots + c_nx_n \to \max(\min), \tag{1}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{k1}x_1 + \ldots + a_{kn}x_n = b_k, \\ a_{k+1,1}x_1 + \ldots + a_{k+1,n}x_n \le (\ge) b_{k+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \le (\ge) b_m, \end{cases} \tag{2}$$

$$x_j \ge 0,\ j \in I. \tag{3}$$

Допустимым решением называется последовательность $(x_1, ..., x_n)$, удовлетворяющая условиям системы ограничений (2) и условиям неотрицательности (3). Множество допустимых решений называется областью допустимых решений. Оптимальным решением называется такое допустимое решение, при котором целевая функция достигает максимума (или минимума). Задача называется разрешимой, если имеет хотя бы одно оптимальное решение. В задаче (1)–(3) требуется найти множество всех оптимальных решений и искомое значение экстремума целевой функции.

Последовательность $(x_1, ..., x_n)$ рассматривается как вектор n-мерного пространства R^n. Слова «вектор» и «точка» используются как синонимы для обозначения элемента R^n. В n-мерном координатном пространстве $Ox_1 \ldots x_n$ последовательность $(x_1, ..., x_n)$ можно интерпретировать и как точку $M(x_1, ..., x_n)$, и как вектор с началом $O(0, ... 0)$ и концом $M(x_1, ..., x_n)$.

Если в исходной задаче (1)–(3) к целевой функции прибавить число или её умножить на (-1) и заменить задачу минимизации (максимизации) задачей максимизации (минимизации), то последовательность $(x_1, ..., x_n)$ является оптимальным решением новой задачи тогда и только тогда, когда она является оптимальным решением исходной задачи, т. е. можно считать, что в равенстве (1) $c_0 = 0$, и рассматривать только задачи максимизации.

В пространстве R^n отрезком с концами в точках X_1 и X_2 называется совокупность точек:

$$X = (1-t)X_1 + tX_2, \text{ где } 0 \le t \le 1. \tag{4}$$

Точка X называется выпуклой линейной комбинацией точек $X_1, \ldots, X_k$, если

$$X = \alpha_1 X_1 + \ldots + \alpha_k X_k, \tag{5}$$

где $\alpha_i \ge 0 \, \forall i, \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1.$ Формула (4) является частным случаем формулы (5) при $k = 2$. Множество называется выпуклым, если вместе с любыми двумя своими точками оно содержит и весь отрезок с концами в этих точках. Легко доказать, что выпуклое множество вместе с любыми своими точками $X_1, X_2, \ldots, X_k$ содержит все выпуклые линейные комбинации этих точек.

Можно доказать, что область допустимых решений задачи (1)–(3) является выпуклым множеством. Точка X области допустимых решений задачи (1)–(3) называется её вершиной, если её нельзя представить в виде выпуклой линейной комбинации двух различных точек этой области, отличных от точки X. Подмножество R^n называется ограниченным, если существуют числа m_1 и m_2 такие, что для любой точки $(x_1, ..., x_n)$ этого множества неравенства $m_1 \le x_i \le m_2$ выполняются для всех $i = 1, 2, ..., n$. В общем случае условия неотрицательности (3) относятся не ко всем переменным, а только к тем, индексы которых принадлежат множеству I. Но если переменная x_j не связана с условием неотрицательности, то её можно заменить разностью двух неотрицательных переменных: $x_j = x_j' - x_j''$, где $x_j' \ge 0, x_j'' \ge 0.$ Далее будем считать, что $x_j \ge 0 \, \forall j$.

В этой работе рассматриваются задачи, в которых область допустимых решений является непустым ограниченным множеством. В этом случае можно доказать [1], что справедливы следующие утверждения:

1) задача линейного программирования разрешима;
2) область допустимых решений имеет непустой конечный набор вершин;
3) хотя бы одна вершина является оптимальным решением;
4) если $X_1, ..., X_k$ – набор всех оптимальных вершин области допустимых решений, то множеством всех оптимальных решений является множество всех выпуклых линейных комбинаций этих вершин.

Многие экономические задачи [1–3], а порой неожиданно [4], приводят к задаче линейного программирования. Так как линейное программирование является частью высшей математики, то изучая линейную алгебру, мы изучаем инструменты линейного программирования, а изучая линейное программирование – инструменты для решения экономических задач линейной оптимизации [5; 6][1]. Основным методом решения задач линейного программирования явля-

[1] Также см.: Справочник для студентов технических вузов: Высшая математика. Физика. Теоретическая механика. Сопротивление материалов / Полянин А. Д., Полянин В. Д., Попов В. А., Путятин Б. В., Сафрай В. М., Черноуцан А. И. М.: Издательство АСТ, 2002. 735 с.

ется симплекс-метод. При применении этого метода могут встретиться четыре особых случая [2]: вырожденность, альтернативные решения, неограниченные решения, отсутствие допустимых решений. В данной работе мы рассматриваем случай вырожденности (в работе [7] нами рассматривались задачи линейного программирования с неограниченными областями допустимых решений).

При изучении линейного программирования особое значение приобретают вопросы организации самостоятельной работы студентов [8]. Кроме индивидуальных заданий [9–11], актуальным является создание комплекса материалов для самостоятельного изучения студентами. Тогда, рассмотрев на занятиях классический случай единственного решения и коротко обозначив особые случаи, подробное изучение особых случаев может быть оставлено для самостоятельного изучения студентами. Этой цели посвящена данная работа. Основную часть теории и методов линейного программирования можно найти в работах [1; 2; 12; 13].

Вырожденные опорные решения

Рассмотрим следующую задачу с двумя переменными:

$$z = 3x_1 + x_2 \to \max, \tag{6}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 6, \\ 2x_1 + x_2 \le 12, \end{cases} \tag{7}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \tag{8}$$

Перейдём к точечной интерпретации допустимых решений (x_1, x_2) на координатной плоскости Ox_1x_2. Область допустимых решений этой задачи состоит из точек ΔOAB (см. рис. 1):

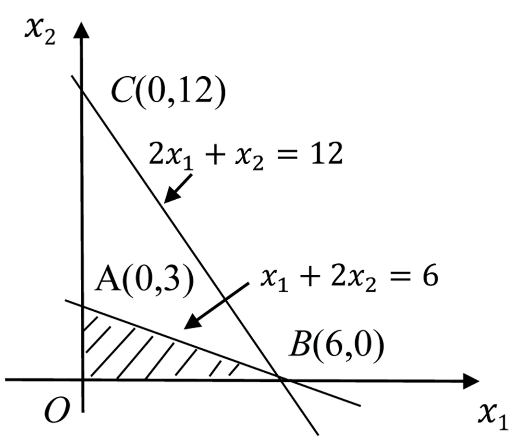

Рис. 1 / Fig. 1. Область допустимых решений задачи (6)–(8) /
Domain of feasible solutions to problem (6)–(8).

Источник: составлено автором.

Так как область допустимых решений является непустым ограниченным множеством, то задача разрешима. Так как точки $O(0{,}0)$, $A(0{,}3)$, $B(6{,}0)$ – вершины области допустимых решений и среди них есть оптимальное решение, то (6,0) – оптимальное решение, $z_{\max} = z(6{,}0) = 18$ ($z(0{,}0) = 0 < 18$, $z(0{,}3) = 3 < 18$). Задача имеет единственное решение.

В следующем разделе мы рассмотрим решение этой задачи симплекс-методом. Но симплекс-метод применяется для решения канонической задачи. Задачу линейного программирования называют канонической, если в ней система ограничений является системой уравнений и все переменные удовлетворяют условиям неотрицательности. Если присутствуют неравенства, то перейти от неравенства типа «≤» («≥») к соответствующему уравнению можно путем прибавления к левой части неравенства (вычитания из левой части неравенства) неотрицательной, так называемой дополнительной переменной. Эти переменные вводятся в целевую функцию с нулевым коэффициентом и отбрасываются при переходе от решения канонической задачи к решению исходной задачи. В дальнейшем будем считать, что правые части уравнений системы ограничений канонической задачи неотрицательны. Если в каком-нибудь уравнении правая часть отрицательна, то обе части этого уравнения умножается на (–1). Каноническую задачу можно записать в виде:

$$z = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n \to \max(\min), \tag{9}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{10}$$

$$x_j \geq 0\, \forall j. \tag{11}$$

где $b_i \geq 0 \forall i$.

Итак, перейдём от задачи (6)–(8) к канонической задаче:

$$z = 3x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 \to \max, \tag{12}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 12, \end{cases} \tag{13}$$

$$x_j \geq 0\, \forall j. \tag{14}$$

Система (13) является разрешённой системой, в которой x_3 и x_4 – разрешённые, а x_1 и x_2 – свободные неизвестные. Разрешённые неизвестные называются базисными переменными, а свободные неизвестные – небазисными. Присвоим небазисным переменным нулевые значения. Получим частное решение (0, 0, 6, 12), которое называется базисным решением с базисом (x_3, x_4). О системе (13) говорят, что она приведена к базису (x_3, x_4). Найдём все базисные решения системы (13) методом перебора. Для перехода к новому базису достаточно выполнить жорданово преобразование с разрешающим элементом, являющимся коэффициентом при некоторой небазисной переменной x_j. При таком преобразовании переменная x_j вводится в базис, а одна из переменных выводится из базиса. Так как в этой задаче из четырёх переменных два являются базисными, то переберём $C_4^2 = 6$ вариантов. Результаты перебора приведены в табл. 1. В столбце «*Б*» этой таблицы приведены базисы, а в первом столбце приведены их номера (начальному базису присвоен нулевой номер). Разрешающие элементы заключены в рамку и выделены жирным шрифтом. Из табл. 1 следует, что у системы (13) четыре базисных решения. Допустимые базисные решения канонической задачи называются её опорными решениями. Следовательно, в этой задаче (0, 0, 6, 12), (6, 0, 0, 0), (0, 3, 0, 9) – опорные решения, а (0,12, – 18,0) не является опорным решением, так как не удовлетворяет условиям (14).

Таблица 1 / Table 1

Базисные решения системы (13) и их базисы / Basic solutions of system (13) and their bases

№	*Б*	x_1	x_2	x_3	x_4	*b*	Пояснение
0	x_3	1	2	1	0	6	(0, 0, 6, 12) – базисное решение с базисом *Б*
	x_4	2	$\boxed{\mathbf{1}}$	0	1	12	= (x_3, x_4). Вводится в базис x_2, выводится x_4.
1	x_3	–3	0	1	–2	–18	(0,12, – 18,0) – базисное решение с базисом *Б*
	x_2	$\boxed{\mathbf{2}}$	1	0	1	12	= (x_3, x_2). Вводится в базис x_1, выводится x_2.
2	x_3	0	$\boxed{\mathbf{3/2}}$	1	–1/2	0	(6, 0, 0, 0) – базисное решение с базисом *Б*
	x_1	1	1/2	0	1/2	6	= (x_3, x_1). Вводится в базис x_2, выводится x_3.
3	x_2	0	1	2/3	$\boxed{\mathbf{-1/3}}$	0	(6, 0, 0, 0) – базисное решение с базисом *Б*
	x_1	1	0	–1/3	2/3	6	= (x_2, x_1). Вводится в базис x_4, выводится x_2.
4	x_4	0	–3	–2	1	0	(6, 0, 0, 0) – базисное решение с базисом *Б*
	x_1	1	$\boxed{\mathbf{2}}$	1	0	6	= (x_4, x_1). Вводится в базис x_2, выводится x_1.
5	x_4	3/2	0	–1/2	1	9	(0, 3, 0, 9) – базисное решение с базисом *Б*
	x_2	1/2	1	1/2	0	3	= (x_4, x_2). Все C_4^2 вариантов рассмотрены.

Источник: составлено автором.

Можно доказать [1], что допустимое решение (x_1, ..., x_n) канонической задачи является опорным решением тогда и только тогда, когда оно является вершиной её области допустимых решений. Таким образом, в задаче (12)–(14) область допустимых решений имеет три вершины: (0, 0, 6, 12), (6, 0, 0, 0), (0, 3, 0, 9). На рис. 1 вершине (0, 0, 6, 12) соответствует точка *O* (точка *O* и вершина (0, 0, 6, 12) определяются условиями $x_1 = 0$, $x_2 = 0$), вершине (0, 3, 0, 9) – точка *A* (точка *A* и вершина (0, 3, 0, 9) определяются условиями $x_1 = 0$, $x_1 + 2x_2 = 6 \Leftrightarrow x_3 = 0$), а вершине (6, 0, 0, 0) – точка *B* (точка *B* и вершина (6, 0, 0, 0) определяются условиями $x_2 = 0$, $x_1 + 2x_2 = 6 \Leftrightarrow x_1 = 6$). Заметим, что базисному решению (0,12, – 18,0) на рис. 1 соответствует точка *C*(0,12). Опорные решения, у которых базисные координаты положительны, называются невырожденными опорными решениями. Если хотя бы одна базисная координата равна нулю, то опорное решение называется вырожденным. В нашей задаче опорные решения (0, 0, 6, 12) и (0, 3, 0, 9) являются невырожденными, а опорное решение (6, 0, 0, 0) – вырожденное. Из табл. 1

мы видим, что у вырожденного опорного решения может быть несколько базисов. Базис же невырожденного опорного решения однозначно определяется по его положительным координатам. Причину вырожденности опорного решения (6, 0, 0, 0) можно увидеть на рис. 1, на котором опорному решению (6, 0, 0, 0) соответствует точка *B*. На плоскости для определения точки достаточно двух пересекающихся прямых, а точка *B* является точкой пересечения трёх прямых $x_2 = 0$, $x_1 + 2x_2 = 6$, $2x_1 + x_2 = 12$. Эта точка переопределена. Вырожденность в канонической задаче (12)–(14) объясняется тем, что в исходной задаче (6)–(8) присутствует избыточное ограничение $2x_1 + x_2 \leq 12$.

Вырожденность при применении симплекс-метода

Симплекс-метод – метод последовательного улучшения опорных решений задачи (9)–(11) путём перехода от одного базиса опорного решения к другому базису опорного решения. Пусть, для определённости, система ограничений приведена к базису $(x_1, x_2, ..., x_m)$ опорного решения $X_1 = (b_1, b_2, ..., b_m, 0, ..., 0)$, где $b_i \geq 0 \forall i$. Запишем целевую функцию (9) в виде уравнения $z - c_1x_1, - ... - c_mx_m - ... - c_nx_n = 0$ добавим это уравнение к системе ограничений (10) (запишем его под системой ограничений), исключим базисные переменные из целевой функции и заполним симплекс-таблицу (см. табл. 2). Последняя строка этой таблицы называется z-строкой или строкой оценок, в ней Δ_j – коэффициент при небазисной переменной x_j; обычно столбец коэффициентов при z не включается в эту таблицу. Легко убедиться путём простой подстановки, что z_0 – значение целевой функции на опорном решении $X_1 = (b_1, b_2, ..., b_m, 0, ..., 0)$.

Таблица 2 / Table 2

Симплекс-таблица / Simplex table

Б	x_1	…	x_i	…	x_m	x_{m+1}	…	x_j	…	x_n	b
x_1	1	…	0	…	0	$a_{1,m+1}$	…	a_{1j}	…	a_{1n}	b_1
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
x_i	0	…	1	…	0	$a_{i,m+1}$	…	a_{ij}	…	a_{in}	b_i
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
x_m	0	…	0	…	1	$a_{m,m+1}$	…	a_{mj}	…	a_{mn}	b_m
z	0	…	0	…	0	Δ_{n+1}	…	Δ_j		Δ_n	z_0

Источник: составлено автором.

Пусть в табл. 2 выбран отличный от нуля коэффициент a_{ij} при небазисной переменной x_j в качестве разрешающего элемента для выполнения жорданова преобразования и перехода к другому базису опорного решения. После выполнения жорданова преобразования с разрешающим элементом a_{ij} в базис вводится переменная x_j, а из базиса выводится переменная x_i. В результате получим следующую таблицу (см. табл. 3)

Таблица 3 / Table 3

Симплекс-таблица, приведенная к другому базису / Simplex table reduced to another basis

Б	x_1	...	x_i	…	x_m	x_{m+1}	…	x_j	…	x_n	b
x_1	1	...	a'_{1i}	…	0	$a'_{1,m+1}$	…	0	…	a'_{1n}	$b_1 - a_{1j}b_i/a_{ij}$
…	…	...	...	…	…	…	…	...	…	...	...
x_j	0	...	a'_{ij}	…	0	$a'_{i,m+1}$	…	1	…	a'_{in}	b_i/a_{ij}
…	…	...	...	…	…	...	…	...	…	...	...
x_m	0	...	a'_{mj}	…	1	$a'_{m,m+1}$	…	0	…	a'_{mn}	$b_m - a_{mj}b_i/a_{ij}$
z	0	...	Δ'_j	…	0	Δ'_{m+1}	…	0	…	Δ'_n	$z_0 - \Delta_j b_i/a_{ij}$

Источник: составлено автором.

Новому базису соответствует новое базисное решение. Из столбца b табл. 3 видно, что оно будет опорным, если $a_{ij} > 0$ (тогда $b_i/a_{ij} \geq 0$) и отношение b_i/a_{ij} является наименьшим среди всех отношений вида b_k/a_{kj}, где $a_{kj} > 0$ (тогда $b_k - a_{kj}b_i/a_{ij} = a_{kj}(b_k/a_{kj} - b_i/a_{ij}) \geq 0$). Заметим, что при $a_{kj} \leq 0$ неотрицательность величин $b_k - a_{kj}b_i/a_{ij}$ столбца b табл. 3 выполняется автоматически, так как $b_k \geq 0$, $b_i/a_{ij} \geq 0$. Отношения b_k/a_{kj}, вычисленные для $a_{kj} > 0$, называются допустимыми отношениями и для этих отношений далее в симплекс-таблице отведём справа от столбца правых частей столбец θ. Если $a_{kj} \leq 0$, то в k-й строке столбца θ ставится прочерк. Минимальное допустимое отношение обозначим символом θ_0. Из сказанного следует правило выбора разрешающего элемента и переменной, выводимой из базиса, при переходе от одного базиса опорного решения к другому базису опорного решения, если в базис вводится переменная x_j, т. е. разрешающий элемент выбирается из столбца x_j: разрешающий элемент и выводимая из базиса переменная должны находиться в той же строке, в которой расположено минимальное допустимое отношение θ_0. Если отношение θ_0 встречается в нескольких строках, то из этих строк выбирается любая. Пусть, для определённости, $\theta_0 = b_i/a_{ij}$. Из z-строки табл. 3 следует формула для приращения целевой функции при таком переходе:

$$\Delta z = -\Delta_j \theta_0. \tag{15}$$

Из формулы (15) следует, что если симплекс-таблица приведена к базису невырожденного опорного решения, то в задаче максимизации опорное решение будет улучшено, т. е. значение целевой функции станет ближе к максимуму, если в базис ввести переменную x_j, для которой оценка $\Delta_j < 0$, так как в этом случае в табл. 2 $b_j > 0 \forall i$, следовательно, $\theta_0 > 0$ и $\Delta z = -\Delta_j\theta_0 > 0$. На этом основано правило выбора переменной, вводимой в базис, в методе последовательного улучшения опорных решений: в базис вводится переменная x_j, входящая в z-строку с отрицательным коэффициентом $\Delta_j < 0$. Если таких переменных несколько, то можно выбрать любую из них. В случае вырожденного опорного решения это правило может не дать улучшения опорного решения, если $\theta_0 = 0$, так как в этом случае $\Delta z = -\Delta_j\theta_0 = 0$. В этом случае вместо улучшения мы перейдём к другому базису того же вырожденного опорного решения, так как при $\theta_0 = b_i/a_{ij} = 0$ столбцы b таблиц 2 и 3 совпадают.

Приведём достаточное условие максимума, используемое при применении симплекс-метода: если симплекс-таблица приведена к базису опорного решения X' и в z-строке $\Delta_j \geq 0\forall$j, то опорное решение является оптимальным. Действительно, из определения z-строки следует, что $z = z_0 - \Sigma_{j\in J}\Delta_j x_j$ для любого допустимого решения $(x_1, ..., x_n)$, где z_0 – значение целевой функции на опорном решении X', J – множество индексов небазисных переменных. Так как $\Delta_j \geq 0\forall$j и $x_j \geq 0\forall$j, то $z \leq z_0$ в области допустимых решений. Если симплекс-таблица приведена к базису оптимального опорного решения X' и в z-строке коэффициенты всех небазисных переменных положительны, то оптимальное решение X' является единственным. Действительно, из формулы $z = z_0 - \Sigma_{j\in J}\Delta_j x_j$ следует, что $z = z_0$ только при нулевых значениях небазисных переменных, но таким опорным решением является только X'.

Заметим только, что, если симплекс-таблица приведена к базису оптимального опорного решения X' и в z-строке коэффициент Δ_j при небазисной переменной x_j равен нулю и минимальное допустимое отношение θ_0, вычисленное по положительным элементам a_{kj} столбца x_j, положительное число, то существуют альтернативные решения. Действительно, пусть, для определённости, $\theta_0 = b_i/a_{ij}$. Если ввести в базис переменную x_j, то разрешающим элементом будет a_{ij}, переменная x_i выводится из базиса, из формулы (15) следует, что значение целевой функции не изменится, так как $\Delta z = -\Delta_j\theta_0 = 0$. Мы получим новое оптимальное опорное решение, так как в табл. 2 $x_j = 0$, а в табл. 3 $x_j = b_i/a_{ij} = \theta_0 > 0$.

Рассмотрим решение задачи (12)–(14) симплекс-методом (табл. 4).

Таблица 4 / Table 4

Решение задачи (12)–(14) симплекс-методом / Solution of problem (12)–(14) by the simplex method

№	*Б*	x_1	x_2	x_3	x_4	b	θ	Пояснение
0	x_3	1	$\boxed{\mathbf{2}}$	1	0	6	**3**	(0, 0, 6, 12) – опорное решение. $z_0 = 0$. Нет признака оптимальности. Вводится в базис x_2, выводится x_3 из базиса.
	x_4	2	1	0	1	12	12	
	z	–3	–1	0	0	0		
1	x_2	0,5	1	0,5	0	3	6	(0, 3, 0, 9) – опорное решение. $z_0 = 3$. Нет признака оптимальности. Вводится в базис x_1. θ_0 повторяется. Выводится x_4 из базиса.
	x_4	$\boxed{\mathbf{1,5}}$	0	–0,5	1	9	**6**	
	z	–2,5	0	0,5	0	3		
2	x_2	0	1	$\boxed{\mathbf{2/3}}$	–1/3	0	0	(6, 0, 0, 0) – вырожденное опорное решение. $z_0 = 18$. Нет признака оптимальности. Вводится в базис x_3, выводится x_2 из базиса
	x_1	1	0	–1/3	2/3	6	–	
	z	0	0	–1/3	5/3	18		
3	x_3	0	1,5	1	–0,5	0		Перешли к другому базису опорного решения (6, 0, 0, 0). Признак оптимальности выполняется. Единственное решение.
	x_1	1	0,5	0	0,5	6		
	z	0	0,5	0	1,5	18		

Источник: составлено автором.

В нулевом базисе значение $\Delta_2 < 0$ указывает на рост целевой функции по переменной x_2, а значение $\theta_0 = 3$ даёт нам максимальное приращение этой переменной. На рис. 1 мы видим, что при таком приращении мы перейдём от точки O к точке A. Но если мы нарушим правило выбора переменной, выводимой из базиса, и выведем переменную x_4, то на рис. 1 мы видим, что будет осуществлён переход от точки O к точке C, которая не принадлежит области допустимых решений задачи (6)–(8). В первом базисе в столбце θ минимальное допустимое отношение встречается более одного раза. Это привело к неоднозначности при выборе переменной, выводимой из базиса. Из-за этого в следующем базисе появилась вырожденность. Заметим, что в одном базисе одного и того же вырожденного опорного решения достаточное условие оптимальности выполняется, а в другом – нет. Итак, оптимальным решением задачи (12)–(14) является (6, 0, 0, 0) и $z_{\max} = 18$. Решением исходной задачи (6)–(8) является (6, 0) и $z_{\max} = z(6, 0) = 18$.

В рассмотренной задаче вырожденность появилась на завершающем этапе, и вырожденное опорное решение является оптимальным. Рассмотрим следующую задачу с двумя переменными:

$$z = 2x_1 + x_2 \to \max, \tag{16}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 1, \\ x_1 + 2x_2 \le 2, \end{cases} \tag{17}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \tag{18}$$

Перейдём к канонической задаче и решим её симплекс-методом (табл. 5).

Таблица 5 / Table 5

Решение задачи (16)–(18) симплекс-методом / Solution of problem (16)–(18) by the simplex method

№	*Б*	x_1	x_2	x_3	x_4	*b*	θ	Пояснение
0	x_3	1	1	1	0	1	1	(0, 0, 1, 2) – опорное решение. $z_0 = 0$. Нет признака оптимальности. Вводится в базис x_2. θ_0 повторяется. Выводится x_4 из базиса.
	x_4	1	$\boxed{\mathbf{2}}$	0	1	2	1	
	z	−2	−1	0	0	0		
1	x_3	$\boxed{\mathbf{0{,}5}}$	0	1	−0,5	0	**0**	(0, 1, 0, 0) – вырожденное опорное решение. $z_0 = 1$. Нет признака оптимальности. Вводится в базис x_1, выводится x_3 из базиса.
	x_2	0,5	1	0	0,5	1	2	
	z	−1,5	0	0	0,5	1		
2	x_1	1	0	2	−1	0	–	Перешли к другому базису опорного решения (0, 1, 0, 0). Нет признака оптимальности. Вводится x_4, выводится x_2.
	x_2	0	1	−1	$\boxed{\mathbf{1}}$	1	**1**	
	z	0	0	3	−1	1		
3	x_1	1	1	1	0	1		(1, 0, 0, 1) – невырожденное опорное решение. $z_0 = 2$. Признак оптимальности выполняется. Единственное решение.
	x_4	0	1	−1	1	1		
	z	0	1	2	0	2		

Источник: составлено автором.

Легко убедиться на координатной плоскости, что в задаче (16)–(18) есть избыточное условие. По этой причине при решении канонической задачи θ_0 встречается более одного раза, то есть появляется вырожденное опорное решение. Вырожденность в задаче является временной, оптимальным решением канонической задачи является невырожденное опорное решение (1, 0, 0, 1), $z_{\max} = 2$. Ответ исходной задачи (16)–(18): (1, 0), $z_{\max} = 2$.

Зацикливание

Рассмотрим решение следующей задачи симплекс-методом [1; 14]:

$$Z\left(X\right) = x_3 - x_4 + x_5 - x_6 \to \max, \tag{19}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - 2x_4 - 3x_5 + 4x_6 = 0, \\ x_2 + 4x_3 - 3x_4 - 2x_5 + x_6 = 0, \\ x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 1, \end{cases} \tag{20}$$

$$x_j \geq 0\, \forall j. \tag{21}$$

Таблица 6 / Table 6

Решение задачи (19)–(21) до появления цикла из шести итераций / Solution of problem (19)–(21) before the appearance of a six iterations cycle

№	*Б*	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	*b*	θ	Пояснение
0	x_1	1	0	$\boxed{\mathbf{1}}$	–2	–3	4	0	0	**0**	$X_1 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$ – вырожден-ное опорное решение. Введём x_3 в базис. $\theta_0 = 0$. Выведем x_1. Переход к другому базису X_1.
	x_2	0	1	4	–3	–2	1	0	0	0	
	x_7	0	0	1	1	1	1	1	1	1	
	z	0	0	–1	1	–1	1	0	0		
1	x_3	1	0	1	–2	–3	4	0	0	–	Признака оптимальности нет. Введём x_4 в базис. $\theta_0 = 0$. Выведем x_2 из базиса. Переход к другому базису X_1.
	x_2	–4	1	0	$\boxed{\mathbf{5}}$	10	–15	0	0	**0**	
	x_7	–1	0	0	3	4	–3	1	1	1/3	
	z	1	0	0	–1	–4	5	0	0		
2	x_3	–0,6	0,4	1	0	$\boxed{\mathbf{1}}$	–2	0	0	**0**	Признака оптимальности нет. Введём x_5 в базис. $\theta_0 = 0$. Выведем x_3 из базиса. Переход к другому базису X_1.
	x_4	–0,8	0,2	0	1	2	–3	0	0	0	
	x_7	1,4	–0,6	0	0	–2	6	1	1	–	
	z	0,2	0,2	0	0	–2	2	0	0		
3	x_5	–0,6	0,4	1	0	1	–2	0	0	–	Признака оптимальности нет. Введём x_6 в базис. $\theta_0 = 0$. Выведем x_4 из базиса. Переход к другому базису X_1.
	x_4	0,4	–0,6	–2	1	0	$\boxed{\mathbf{1}}$	0	0	**0**	
	x_7	0,2	0,2	2	0	0	2	1	1	1/2	
	z	–1	1	2	0	0	–2	0	0		
4	x_5	$\boxed{\mathbf{0{,}2}}$	–0,8	–3	2	1	0	0	0	**0**	Признака оптимальности нет. Введём x_1 в базис. $\theta_0 = 0$. Выведем x_5 из базиса. Переход к другому базису X_1.
	x_6	0,4	–0,6	–2	1	0	1	0	0	0	
	x_7	–0,6	1,4	6	–2	0	0	1	1	–	
	z	–0,2	–0,2	–2	2	0	0	0	0		

№	Б	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b	θ	Пояснение
5	x_1	1	–4	–15	10	5	0	0	0	–	Признака оптимальности нет. Введём x_2 в базис. $\theta_0 = 0$. Выведем x_6 из базиса. Переход к другому базису X_1.
	x_6	0	$\boxed{\mathbf{1}}$	4	–3	–2	1	0	0	0	
	x_7	0	–1	–3	4	3	0	1	1	–	
	z	0	–1	–5	4	1	0	0	0	–	
6	x_1	1	0	1	–2	–3	4	0	0		Вернулись к ранее встречавшемуся нулевому базису (x_1, x_2, x_7). Произошло зацикливание.
	x_2	0	1	4	–3	–2	1	0	0		
	x_7	0	0	1	1	1	1	1	1		
	z	0	0	–1	1	–1	1	0	0		

Источник: составлено автором.

Если при применении симплекс-метода в нескольких последовательных переходах $\theta_0 = 0$, то, как было сказано выше, мы не переходим к новому опорному решению, а переходим от одного базиса к другому базису одного и того же вырожденного опорного решения. Этот процесс может привести к зацикливанию, т. е. к возврату к ранее встречавшемуся базису этого опорного решения. Известно, что цикл не может содержать менее шести переходов [1]. В рассматриваемой нами задаче система ограничений (20) приведена к базису (x_1, x_2, x_7) вырожденного опорного решения $X_1 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$. После шести переходов произошло зацикливание. Хотя вероятность зацикливания очень мала, требуются практические рекомендации, предотвращающие зацикливание, ведь рассматриваемая задача не является сложной и может быть решена простым методом перебора вершин. Из третьего уравнения системы (20) и условий (21) следует, что $0 \le x_i \le 1$ при $i = 3, 4, 5, 6, 7$. Но тогда из первых двух уравнений системы (20) и условий (21) следует, что $0 \le x_i \le 5$ при $i = 1{,}2$. Итак, $0 \le x_i \le 5 \forall i$, т. е. область допустимых решений является непустым ограниченным множеством, задача разрешима. Методом перебора нетрудно найти все базисные решения системы (20), а затем выбрать из них опорные решения (вершины области допустимых решений). Всего в этой задаче одно вырожденное опорное решение $X_1 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$ с пятнадцатью базисами и восемь невырожденных опорных решений $X_2 = (2, 3, 0, 1, 0, 0, 0)$, $X_3 = (3, 2, 0, 0, 1, 0, 0)$, $X_4 = \left(\frac{5}{7}, 0, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, 0, 0, 0\right)$,

$X_5 = \left(0, \frac{5}{7}, 0, 0, \frac{4}{7}, \frac{3}{7}, 0\right)$, $X_6 = \left(\frac{5}{3}, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}, 0, 0\right)$, $X_7 = \left(0, \frac{5}{3}, 0, \frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}, 0\right)$,

$X_8 = \left(0, 0, \frac{1}{6}, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 0\right)$, $X_9 = \left(0, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{6}, 0\right)$. Так как $z(X_1) = 0$, $z(X_2) = -1$, $z(X_3) = 1$, $z(X_4) = -\frac{1}{7}$, $z(X_5) = \frac{1}{7}$, $z(X_6) = 1$, $z(X_7) = -1$, $z(X_8) = \frac{1}{3}$, $z(X_9) = -\frac{1}{3}$, то $z_{\max} = 1$ достигается на множестве оптимальных решений $(1 - t)X_3 + tX_6$ (см. формулу (4)).

Правило против зацикливания

Решим задачу (19)–(21) симплекс-методом, соблюдая правило, исключающее возврат к базису, который ранее встречался. Как было сказано выше, мы ограничимся каноническими задачами с непустыми ограниченными областями допустимых решений. Для этого случая были приведены правила для выбора вводимой в базис и выводимой из базиса переменных. Эти правила часто приводят к неоднозначности при выборе. Исключим неоднозначности. Если при выборе переменной для включения в базис (переменной для исключения из базиса) под сформулированные правила подходят несколько переменных, то выбираем из них переменную с наименьшим индексом [13]. Так как в табл. 6 при переходах от нулевого базиса до третьего базиса новое правило не нарушается, то решение задачи (19)–(21) продолжим, начиная с третьего базиса с соблюдением нового правила (оставим без изменения нумерацию вершин из предыдущего раздела, см. табл. 7).

Таблица 7 / Table 7

Решение задачи (19)-(21) с соблюдением нового правила / Solution of the problem (19)-(21) in accordance with the new rule

№	*Б*	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	*b*	θ	Пояснение
3	x_5	–0,6	0,4	1	0	1	–2	0	0	–	Признака оптимальности нет. Введем x_1 в базис. $\theta_0 = 0$. Выведем x_4 из базиса. Переход к другому базису X_1.
	x_4	$\boxed{\mathbf{0{,}4}}$	–0,6	–2	1	0	1	0	0	**0**	
	x_7	0,2	0,2	2	0	0	2	1	1	5	
	z	–1	1	2	0	0	–2	0	0		
4	x_5	0	–0,5	–2	1,5	1	–0,5	0	0	–	Признака оптимальности нет. Введем x_2 в базис. $\theta_0 = 2$. Выведем x_7 из базиса. Переход к базису X_3.
	x_1	1	–1,5	–5	2,5	0	2,5	0	0	–	
	x_7	0	$\boxed{\mathbf{0{,}5}}$	3	–0,5	0	1,5	1	1	**2**	
	z	0	–0,5	–3	2,5	0	0,5	0	0		
5	x_5	0	0	1	1	1	1	1	1	1	$X_3 = (3, 2, 0, 0, 1, 0, 0)$ – невырожденное опорное решение. Есть признак оптимальности. Есть альтернативные решения.
	x_1	1	0	4	1	0	7	3	3	3/4	
	x_2	0	1	6	–1	0	3	2	2	**1/3**	
	z	0	0	**0**	2	0	2	1	1		

Источник: составлено автором.

После пяти переходов мы перешли к базису (x_5, x_1, x_2) невырожденного опорного решения $X_3 = (3, 2, 0, 0, 1, 0, 0)$. Из z-строки следует, что это опорное решение удовлетворяет условиям признака оптимальности. Так как в z-строке коэффициент при небазисной переменной x_3 равен нулю и минимальное допустимое отношение θ_0, вычисленное по положительным элементам столбца x_3, положительное число, то, как было сказано выше, есть альтернативные решения. Продолжим процесс решения, см. табл. 8.

Таблица 8 / Table 8

Нахождение альтернативных оптимальных решений задачи (19)–(21) / Search for alternative optimal solutions of problem (19)–(21)

№	Б	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b	θ	Пояснение
5	x_5	0	0	1	1	1	1	1	1	1	Введем x_3 в базис. $\theta_0 = 1/3$. Выведем x_2 из базиса. Перейдем к новому оптимальному решению.
	x_1	1	0	4	1	0	7	3	3	3/4	
	x_2	0	1	$\boxed{\mathbf{6}}$	–1	0	3	2	2	**1/3**	
	z	0	0	0	2	0	2	1	1		
6	x_5	0	–1/6	0	7/6	1	0,5	2/3	2/3		$X_6 = \left(\frac{5}{3}, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}, 0, 0\right)$, – оптимальное опорное решение. Других оптим. опорных решений нет.
	x_1	1	–2/3	0	5/3	0	5	5/3	5/3		
	x_3	0	1/6	1	–1/6	0	0,5	1/3	1/3		
	z	0	0	0	2	0	2	1	1		

Источник: составлено автором.

Заметим, что если ввести переменную x_2 в шестой базис, то мы вернёмся к оптимальному опорному решению X_3. Множество оптимальных решений в этой задаче находим по формуле (4): $X = (1 - t)X_3 + tX_6$, где $X_3 = (3, 2, 0, 0, 1, 0, 0)$, $X_6 = \left(\frac{5}{3}, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}, 0, 0\right)$, $0 \le t \le 1$, а $z_{\max} = 1$.

Заключение

Наличие избыточности условий в исходной задаче линейного программирования может привести к вырожденному опорному решению при решении соответствующей канонической задачи симплекс-методом. Вырожденное решение может привести к увеличению количества итераций, но не приводит к непреодолимым препятствиям. В практических разрешимых задачах появление вырожденного опорного решения приводит в алгоритме к особому случаю, который можно назвать как временная вырожденность. Связано это с тем, что вырожденное опорное решение может иметь несколько базисов. Либо в каком-нибудь своём базисе вырожденное опорное решение будет удовлетворять условиям признака оптимальности, либо оно будет улучшено при переходе к базису другого опорного решения. В редких случаях правила выбора вводимой в базис и выводимой из базиса переменных могут привести к зацикливанию. Существуют правила, позволяющие избежать зацикливания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Г. Линейное программирование (теория, методы и приложения). М.: Наука, 1969. 424 с.
2. Taha H. A. Operations Research: An Introduction. Harlow, England: Pearson Education. 2017. 849 p.
3. Arya J. C., Lardner R. W. Mathematical analysis for business, economics, and the life and social sciences. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1989. 798 p.
4. Макжанова Я. В., Шаракшане А. А., Зверева А. И. Оптимизация нагрузки доцента как задача линейного программирования // Известия Российского экономического

университета им. Г. В. Плеханова. (электронный журнал). 2016. № 1 (23). С. 160–177. URL: https://www.rea.ru/ru/org/managements/izdcentr/Pages/archiveizvestia.aspx (дата обращения: 20.09.2020).
5. Попов В. А. Математика и экономика // Современная математика и концепции инновационного математического образования: материалы конференции. Т. 7. № 1. М.: Издательский дом МФО, 2020. С. 435–441.
6. Попов В. А. Преподавание экономики и математики в единстве // Современная математика и концепции инновационного математического образования: материалы конференции. Т. 6. № 1. М.: Издательский дом МФО, 2019. С. 362–370.
7. Хасанов А. С. Об особенностях алгоритмов решения задач линейного программирования с неограниченными областями допустимых решений // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2017. № 1. С. 113–123. DOI: 10.18384/2310-7251-2017-1-113-123.
8. Рыжкова Т. В., Тушканов Д. А., Чистякова Н. А. К вопросу об организации самостоятельной работы студентов (на примере кафедры высшей математики РЭУ им. Г. В. Плеханова) // Известия Российского экономического университета им. Г. В. Плеханова (электронный журнал). 2015. № 4 (22). С. 411–431. URL: https://www.rea.ru/ru/org/managements/izdcentr/Pages/archiveizvestia.aspx (дата обращения: 20.09.2020).
9. Хасанов А. С. Индивидуальные домашние задания по основам линейного программирования // Известия Российского экономического университета им. Г. В. Плеханова (электронный журнал). 2013. № 4 (14). С. 92–121. URL: https://www.rea.ru/ru/org/managements/izdcentr/Pages/archiveizvestia.aspx (дата обращения: 20.09.2020).
10. Хасанов А. С. Индивидуальные домашние задания по основам линейной алгебры // Известия Российского экономического университета им. Г. В. Плеханова (электронный журнал). 2013. № 4 (14). С. 122–165. URL: https://www.rea.ru/ru/org/managements/izdcentr/Pages/archiveizvestia.aspx (дата обращения: 20.09.2020).
11. Высшая математика (для гуманитарных специальностей) / Сухорукова И. В., Савина О. И., Лавриненко Т. А., Артюшина Т. Г. М.: Издательство Российского экономического университета им. Г. В. Плеханова, 2018. 112 с.
12. Курс высшей математики для экономистов / Бобрик Г. И., Гладких И. М., Гринцевичюс Р. К., Матвеев В. И., Рудык Б. М., Сагитов Р. В., Шершнев В. Г. М.: ИНФРА-М, 2016. 647 с.
13. Элементы линейной алгебры и линейной оптимизации / Барбаумов В. Е., Полякова С. Т., Рудык Б. М., Сафонова Т. А., Чуйко А. С. М.: Издательство РЭА им. Г. В. Плеханова, 2007. 134 с.
14. Beale E. M. L. Cycling in the dual simplex algorithm // Naval Research Logistics Quarterly. 1955. Vol. 2. Iss. 4. P. 269–275. DOI: 10.1002/nav.3800020406.

REFERENCES

1. Yudin D. B., Gol'shtein E. G. *Lineinoe programmirovanie (teoriya, metody i prilozheniya)* [Linear programming (theory, methods and applications)]. Moscow, Nauka Publ., 1969. 424 p.
2. Taha H. A. Operations Research: An Introduction. Harlow, England, Pearson Education Publ., 2017. 849 p.
3. Arya J. C., Lardner R. W. Mathematical analysis for business, economics, and the life and social sciences. Englewood Cliffs, Prentice Hall Publ., 1989. 798 p.
4. Makzhanova Ya. V., Sharakshane A. A., Zvereva A. I. [Optimization of an associate

professor's workload as a linear programming problem]. In: *Izvestiya Rossiiskogo ekonomicheskogo universiteta im. G. V. Plekhanova. (elektronnyi zhurnal)* [Bulletin of Plekhanov Russian University of Economics (e-journal)], 2016, no. 1 (23), pp. 160–177. Available at: https://www.rea.ru/ru/org/managements/izdcentr/Pages/archiveizvestia.aspx (accessed: 20.09.2020).
5. Popov V. A. [Mathematics and Economics]. In: *Sovremennaya matematika i kontseptsii innovatsionnogo matematicheskogo obrazovaniya: materialy konferentsii. T. 7. № 1* [Contemporary mathematics and the concepts of innovative mathematical education: conference proceedings. Vol. 7. No. 1]. Moscow, Publishing house MFO, 2020, pp. 435–441.
6. Popov V. A. [Education in economics, finance and mathematics]. In: *Sovremennaya matematika i kontseptsii innovatsionnogo matematicheskogo obrazovaniya: materialy konferentsii. T. 6. № 1* [Contemporary mathematics and the concepts of innovative mathematical education: conference proceedings. Vol. 6. No. 1]. Moscow, Publishing house MFO, 2019, pp. 362–370.
7. Khasanov A. S. [Peculiarities of algorithms for solving linear programming problems with unbounded feasible regions]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-Matematika* [Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], 2017, no. 1, pp. 113–123. DOI: 10.18384/2310-7251-2017-1-113-123.
8. Ryzhkova T. V., Tushkanov D. A., Chistyakova N. A. [On the organization of students' independent work (on the example of the Department of Higher Mathematics, Plekhanov Russian University of Economics)]. In: *Izvestiya Rossiiskogo ekonomicheskogo universiteta im. G. V. Plekhanova (elektronnyi zhurnal)* [Bulletin of Plekhanov Russian University of Economics (e-journal)], 2015, no. 4 (22), pp. 411–431. Available at: https://www.rea.ru/ru/org/managements/izdcentr/Pages/archiveizvestia.aspx (accessed: 20.09.2020).
9. Khasanov A. S. [Individual homework on the basics of linear programming]. In: *Izvestiya Rossiiskogo ekonomicheskogo universiteta im. G. V. Plekhanova (elektronnyi zhurnal)* [Bulletin of Plekhanov Russian University of Economics (e-journal)], 2013, no. 4 (14), pp. 92–121. Available at: https://www.rea.ru/ru/org/managements/izdcentr/Pages/archiveizvestia.aspx (accessed: 20.09.2020).
10. Khasanov A. S. [Individual homework on the fundamentals of linear algebra]. In: *Izvestiya Rossiiskogo ekonomicheskogo universiteta im. G. V. Plekhanova (elektronnyi zhurnal)* [Bulletin of Plekhanov Russian University of Economics (e-journal)], 2013, no. 4 (14), pp. 122–165. Available at: https://www.rea.ru/ru/org/managements/izdcentr/Pages/archiveizvestia.aspx (accessed: 20.09.2020).
11. Sukhorukova I. V., Savina O. I., Lavrinenko T. A., Artyushina T. G. *Vysshaya matematika (dlya gumanitarnykh spetsial'nostei)* [Higher mathematics (for humanitarian specialties)]. Moscow, Plekhanov Russian University of Economics Publ., 2018. 112 p.
12. Bobrik G. I., Gladkikh I. M., Grintsevichyus R. K., Matveev V. I., Rudyk B. M., Sagitov R. V., Shershnev V. G. *Kurs vysshei matematiki dlya ekonomistov* [The course of higher mathematics for economists]. Moscow, INFRA-M Publ., 2016. 647 p.
13. Barbaumov V. E., Polyakova S. T., Rudyk B. M., Safonova T. A., Chuiko A. S. *Elementy lineinoi algebry i lineinoi optimizatsii* [Elements of linear algebra and linear optimization]. Moscow, Plekhanov Russian University of Economics Publ., 2007. 134 p.
14. Beale E. M. L. Cycling in the dual simplex algorithm. In: Naval Research Logistics Quarterly, 1955, vol. 2, iss. 4, pp. 269–275. DOI: 10.1002/nav.3800020406.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Хасанов Анис Саляхович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики Российского экономического университета имени Г. В. Плеханова;
e-mail: ankhasanov@yandex.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Anis S. Khasanov – Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Department of Higher Mathematics, Plekhanov Russian University of Economics;
e-mail: ankhasanov@yandex.ru.

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Хасанов А. С. Изучение случая вырожденности опорных решений при применении симплекс-метода // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2021. № 1. С. 103–119.
DOI: 10.18384/2310-7251-2021-1-103-119

FOR CITATION

Khasanov A. S. Study of the degeneracy case of basic feasible solutions in the simplex method. In: *Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*, 2021, no. 1, pp. 103–119.
DOI: 10.18384/2310-7251-2021-1-103-119.

ВЕСТНИК
МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
ОБЛАСТНОГО УНИВЕРСИТЕТА

Рецензируемый научный журнал «Вестник Московского государственного областного университета» основан в 1998 г.

Сегодня Московским государственным областным университетом выпускается десять научных журналов по разным отраслям науки. Журналы включены в Перечень ВАК (составленный Высшей аттестационной комиссией при Минобрнауки РФ Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание учёной степени кандидата наук, на соискание учёной степени доктора наук). Журналы включены в базу данных Российского индекса научного цитирования (РИНЦ).

Печатные версии журналов зарегистрированы в Федеральной службе по надзору за соблюдением законодательства в сфере массовых коммуникаций и охране культурного наследия.

Полнотекстовые версии журналов доступны в интернете на на сайте Вестника Московского государственного областного университета (www.vestnik-mgou.ru), а также на платформах Научной электронной библиотеки (www.elibrary.ru) и Научной электронной библиотеки «КиберЛенинка» (https://cyberleninka.ru).

ВЕСТНИК
МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ОБЛАСТНОГО УНИВЕРСИТЕТА

СЕРИЯ: ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА
2021. № 1

Над номером работали:

Литературный редактор М.С. Тарасова
Переводчик И.А. Улиткин
Корректор М.С. Тарасова
Компьютерная верстка Н.Н. Жильцов

Отдел по изданию научного журнала
«Вестник Московского государственного областного университета»
Информационно-издательского управления МГОУ
105005, г. Москва, ул. Радио, д. 10А, офис 98
тел.: (495) 780-09-42 (доб. 6101)
e-mail: info@vestnik-mgou.ru
сайт: www.vestnik-mgou.ru

Формат 70x108/$_{16}$. Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура «Minion Pro».
Тираж 500 экз. Усл. п. л. 7,5, уч.-изд. л. 7.
Подписано в печать: 31.03.2021. Дата выхода в свет: 15.04.2021. Заказ № 2021/03-12.
Отпечатано в ИИУ МГОУ
105005, г. Москва, ул. Радио, 10А