

Научная статья**УДК: 511.51, 517.521, 519.65****DOI: 10.18384/2949-5067-2026-2-113-144****ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУНКЦИЙ
НЕСКОЛЬКИХ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ
В ИССЛЕДОВАНИИ И ПРИБЛИЖЕНИИ ФУНКЦИЙ****Колягин А. Ю.***Независимый исследователь, г. Москва, Российская Федерация**e-mail: ak.russia4444@yandex.ru**Поступила в редакцию 27.02.2026**После доработки 16.03.2026**Принята к публикации 17.03.2026***Аннотация**

Цель. Определение преобразования множества функций двух действительных переменных на основе понятия производной по направлению, представление методов применения преобразования для исследования функций и их приближения, построение численных методов и определение преобразования для функций большего числа переменных.

Процедура и методы. Анализ теории множеств и их отображений, включая отображения множества функций, использование соответствующих разделов теории математического анализа, в том числе преобразование функций и разложение непериодических и периодических функций в ряды, теории построения численных методов аппроксимации функций.

Результаты. Определено преобразование функций двух действительных переменных, описаны методы применения преобразования для исследования функций в окрестности заданной точки и разложения функций в особые функциональные ряды, определены центробежно периодические функции двух переменных, построены численные методы приближения функций двух переменных, определено преобразование функций большего числа переменных.

Теоретическая и практическая значимость. Представленное преобразование функций нескольких переменных является элементом дальнейшего развития теории функций и функционального анализа, описанные методы его использования расширяют направления для исследований этой теории, включая область разложения функций нескольких переменных в функциональные ряды. Полученные теоретические результаты могут быть использованы в прикладных задачах математического моделирования, включая использование центробежно периодических функций для моделирования волновых процессов (в сейсмологии, физике взрыва и в других областях), в аппроксимации функций с применением представленных численных методов, в разработке новых численных методов.

Ключевые слова: преобразование функций нескольких переменных, разложение функций двух переменных в ряды, приближение функций двух переменных, ряды Фурье и Тейлора

функций двух переменных, численные методы аппроксимации многомерных функций, периодические функции нескольких переменных

Для цитирования:

Колягин А. Ю. Тригонометрическое преобразование функций нескольких действительных переменных в исследовании и приближении функций // Вестник Государственного университета просвещения. Серия: Физика-Математика. 2026. № 2. С. 113–144. <https://doi.org/10.18384/2310-7251-2026-2-113-144>

Original research article

TRIGONOMETRIC TRANSFORMATION OF FUNCTIONS OF SEVERAL REAL VARIABLES IN THE STUDY AND APPROXIMATION OF FUNCTIONS

A. Kolyagin

Independent researcher, Moscow, Russian Federation

e-mail: ak.russia4444@yandex.ru

Received by the editorial office 27.02.2026

После доработки 16.03.2026

Accepted for publication 17.03.2026

Abstract

Aim. Defining the transformation of a set of functions of two real variables based on the concept of a directional derivative, representing methods for applying the transformation to explore functions and their approximation, constructing numerical methods and determining the transformation for functions of more variables.

Methodology. Analysis of the theory of sets and their mappings, including mappings of a set of functions, the use of relevant sections of the theory of mathematical analysis, including the transformation of functions and the expansion of non-periodic and periodic functions into series, the theory of constructing numerical methods for approximating functions.

Results. The transformation of functions of two real variables is defined, methods of applying the transformation to study functions in the vicinity of a given point and expansion of functions into special functional series are described, centrifugally periodic functions of two variables are defined, numerical methods for approximating functions of two variables are constructed, and transformation of functions of a larger number of variables is defined.

Research implications. The presented transformation of functions of several variables is an element of the further development of the theory of functions and functional analysis; the described methods of its use expand the directions for research of this theory, including the area of expansion of functions of several variables into functional series. The theoretical results obtained can be used in applied problems of mathematical modeling, including the use of centrifugally periodic functions for modeling wave processes (in seismology, explosion physics and other fields), in approximating functions using the presented numerical methods, and in the development of new numerical methods.

Keywords: transformation of functions of several variables, expansion of functions of two variables into series, approximation of functions of two variables, Fourier and Taylor series of functions of two variables, numerical methods for approximating multidimensional functions, periodic functions of several variables.

For citation:

Kolyagin, A. Yu. (2026). Trigonometric transformation of functions of several real variables in the study and approximation of functions. In: *Bulletin of the Federal State University of Education. Series: Physics and Mathematics*, 2, pp. 112-143. <https://doi.org/10.18384/2310-7251-2026-2-113-144>

Введение

В математике известно понятие производной по направлению функции нескольких переменных в некоторой точке аргументов [1]. Если рассматривать функцию двух переменных $f(x, y)$ и выбранную точку обозначить (x_0, y_0) , то определение этого понятия связано с составлением уравнения сложной функции $f(x_0 + r \cos t, y_0 + r \sin t)$ одной переменной r , где t можно рассматривать, как угол, определяющий направление от (x_0, y_0) на плоскости аргументов, а r – расстояние от указанной точки в направлении t до точки графика функции $f(x, y)$ с координатами $(x_0 + r \cos t, y_0 + r \sin t)$. В этом случае уравнение данной сложной функции можно рассматривать, как уравнение функции двух переменных r и t , полученное с помощью соответствующей замены переменных, которая в свою очередь очевидным образом связана с цилиндрической системой координат [2].

Если посмотреть на эту замену переменных шире, то использование представленных в ней правил позволяет определить отображение множества всех функций двух действительных переменных x и y в своё подмножество функций, где переменные в декартовой системе обозначены r и t . В математике рассматриваются различные отображения множества функций во множество функций, в частности – различные интегральные преобразования функций, которые часто применяются для решений дифференциальных и интегральных уравнений [3]. Они включают и преобразования действительных функций в действительные функции, например двумерные преобразования Фурье и Радона [4]. Рассматриваемое в данной работе отображение также отнесено к категории преобразования функций, хотя и не является интегральным.

Это преобразование множества функций двух действительных переменных в своё подмножество является биекцией. Оно расширяет возможности исследования и приближения функций вокруг выбранной точки аргументов (центра) путём исследования и приближения функций – образов. В определении данного преобразования и его использовании существуют параллели с определением и исследованием функций комплексного переменного, но это отдельная область, которая в данной работе не рассматривается.

После определения преобразования функций двух переменных в работе представлены методы исследования функций с его использованием (возрастание, убывание и выпуклость по направлениям от центра), определены центробежно периодические функции, описаны методы разложения функций в ряды в трёхмерном пространстве на основе теории рядов Тейлора и Фурье, а также построены численные методы аппроксимации функций двух переменных на основе полученных функциональных рядов. В конце работы представлено определение преобразования для функций $n > 2$ переменных.

Графики функций построены с использованием сервиса Grafikus.ru.

Определение и свойства тригонометрического преобразования

Рассмотрим функцию $f(x, y)$ двух действительных переменных в пространстве с декартовой системой координат. Пусть она определена в точке (x_0, y_0) и её окрестности. Не сложно показать, что значения координат x и y точки A графика функции, находящихся в окрестности x_0, y_0 (рис. 1), можно выразить в виде: $\begin{cases} x = x_0 + r \cos t \\ y = y_0 + r \sin t \end{cases}, r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, t \in [0, 2\pi)$.

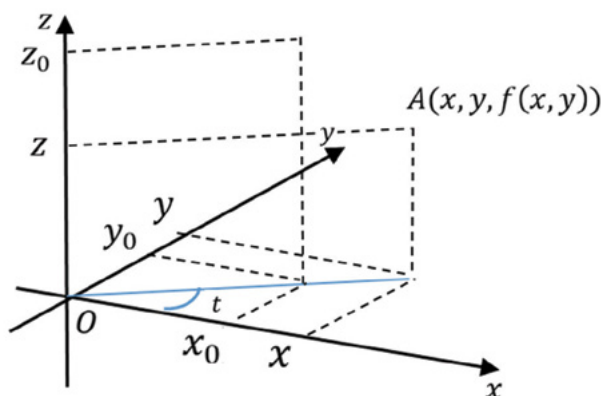


Рис. 1 / Fig. 1. Точка A графика $f(x, y)$ с точкой аргументов в окрестности (x_0, y_0) / Point A of the graph $f(x, y)$ с with the argument point in the neighborhood of (x_0, y_0)

Источник: подготовлено автором

Подставим в уравнение $z = f(x, y)$ эти выражение x и y и получим уравнение некоторой функции с аргументами r и t : $z = f(x_0 + r \cos t, y_0 + r \sin t)$.

Полученное уравнение, которое связано с понятием производной $f(x, y)$ по направлению [1], является и функцией от r и t , для которой определим своё трёхмерное пространство с декартовой системой координат и осями (or) и (ot) . В этом пространстве будем рассматривать множество X_k^2 функций $z = k(r, t)$, уравнения которых являются алгебраическими выражениями и содержат t только в виде $\cos t$ или $\sin t$ или приводимы к таким уравнениям, а часть области определения $k(r, t)$ при $r \geq 0$ не равна $\emptyset$. Обозначим множество всех функций $f(x, y)$ двух переменных X_f^2 и определим правило однозначного отображения X_f^2 в X_k^2 , связанное с фиксированной точкой (x_0, y_0) на плоскости (xOy) . Правило определяется заменой аргументов в уравнении $f(x, y)$:

$$\begin{cases} x = x_0 + r \cos t \\ y = y_0 + r \sin t \end{cases}; f(x, y) \rightarrow k(r, t) = f(x_0 + r \cos t, y_0 + r \sin t). \quad (1)$$

Также зададим правило обратного однозначного отображения X_k^2 в X_f^2 :

$$\begin{cases} r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \\ \cos t = (x - x_0)/r \\ \sin t = (y - y_0)/r \end{cases}; k(r, t) = \psi(r, \cos t, \sin t) \rightarrow f(x, y). \quad (2)$$

Правила (1) и (2) определяют биекцию множеств X_f^2 в X_k^2 , которая сохраняет операции над функциями. Множество X_k^2 является подмножеством X_f^2 , т. к. любая функция $k(r, t)$ – это тоже функции двух действительных переменных.

Данную биекцию будем называть тригонометрическим преобразованием функций двух действительных переменных и обозначать K_A , где $A(x_0, y_0)$ – центр преобразования, а обратное преобразование будем обозначать K_A^{-1} :

$$K_A(f(x, y)) = k(r, t); K_A^{-1}(k(r, t)) = f(x, y).$$

Приведём примеры $K_A(f(x, y))$ и $K_A^{-1}(k(r, t))$ с центром $A(1, 2)$.

$$1. f(x, y) = xy :$$

$$K_A(f(x, y)) = k(r, t) = (1 + r \cos t)(2 + r \sin t) =$$

$$= 2 + 2r \cos t + r \sin t + r^2 \cos t \sin t;$$

$$K_A^{-1}(k(r, t)) = 2 + 2r \frac{(x-1)}{r} + r \frac{(y-2)}{r} + r^2 \frac{(x-1)(y-2)}{r^2} = xy.$$

$$2. f(x, y) = e^{2x^2+y^2-4x-4y+5};$$

$$K_A(f(x, y)) = k(r, t) = e^{2(1+r \cos t)^2+(2+r \sin t)^2-4(1+r \cos t)-4(2+r \sin t)+5} =$$

$$e^{2+4r \cos t+2r^2 \cos^2 t+4+4r \sin t+r^2 \sin^2 t-4-4r \cos t-8-4r \sin t+5} = e^{r^2+r^2 \cos^2 t-1};$$

$$K_A^{-1}(k(r, t)) = e^{(x-1)^2+(y-2)^2+r^2 \frac{(x-1)^2}{r^2}-1} = e^{2x^2+y^2-4x-4y+5}.$$

Функции $k(r, t)$ будем называть преобразованными функциями и рассматривать их в части области определения, удовлетворяющей условию $r \geq 0$.

Правила (1) и (2) также определяют биекцию множества точек пространства, где рассматривается $f(x, y)$, за исключением (x_0, y_0, z_0) , и множества точек пространства, где рассматривается $k(r, t)$ при значениях $r > 0$ и $0 \leq t < 2\pi$ (определяют пары соответствующих точек). Точке (x_0, y_0, z_0) по этим правилам соответствует множество точек $(0, t, z_0)$ с $0 \leq t < 2\pi$.

Отметим некоторые свойства преобразованных функций $k(r, t)$:

1. Преобразованная функция $k(r, t)$ является периодической по переменной t с периодом 2π при всех значениях $r \neq 0$.

2. Функция $f(x, y)$ и её преобразованная с центром (x_0, y_0) функция $k(r, t)$ в соответствующих точках плоскостей аргументов, за исключением (x_0, y_0) и $(0, t)$, определены / не определены, непрерывны / терпят разрыв, дифференцируемы / не дифференцируемы одновременно.

3. Функции $f(x, y)$ и $k(r, t)$ в соответствующих точках, где они определены, имеют равные значения. Если $f(x, y)$ определена в (x_0, y_0) , то $\forall t \ k(0, t) = f(x_0, y_0)$.

4. Если $f(x, y)$ не определена в центральной точке (x_0, y_0) , то либо $k(0, t)$ определена, но не имеет единственного значения для всех $t \in [0, 2\pi)$, либо не определена для всех или некоторых $t \in [0, 2\pi)$ и наоборот.

Преобразование $f(x, y)$ интересно прежде всего тем, что поведение функция $k(r, t)$, где $r > 0$, при каждом фиксированном $0 \leq t < 2\pi$ аналогично поведению $f(x, y)$ по определяемому углом t направлению от выбранной центральной точки. Для оценки поведения $f(x, y)$ вокруг центральной точки можно рассматривать поведение $k(r, t)$ в области $\begin{cases} r \geq 0 \\ 0 \leq t < 2\pi \end{cases}$.

Представим примеры графиков некоторых функций $f(x, y)$ и $K_A(f(x, y))$.

1. $f(x, y) = x^2 y^3$ с центром $(0, 5; -0, 5)$.

$K_A(f(x, y)) = k(r, t) = (0, 5 + r \cos t)^2 (-0, 5 + r \sin t)^3$ (рис. 2).

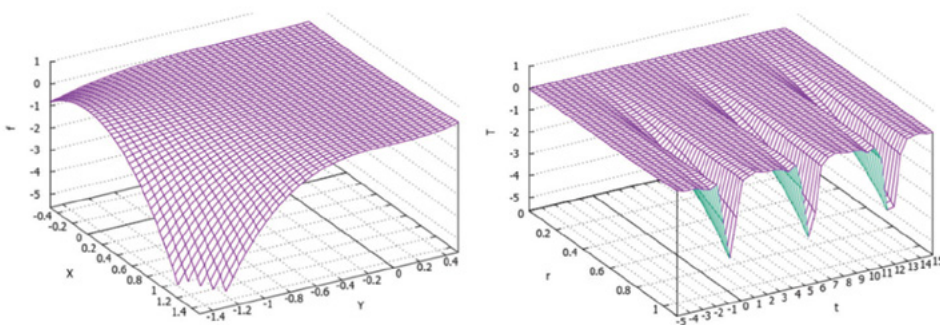


Рис. 2 / Fig. 2. Графики $f(x, y)$ слева, $k(r, t)$ справа / Graphs $f(x, y)$ on the left, $k(r, t)$ on the right

Источник: подготовлено автором

2. $f(x, y) = \frac{1}{(x-1)+(y-2)}$ с центром $(1; 2)$, где $f(x, y)$ не определена.

$K_A(f(x, y)) = k(r, t) = \frac{1}{r(\cos t + \sin t)}$ (рис. 3).

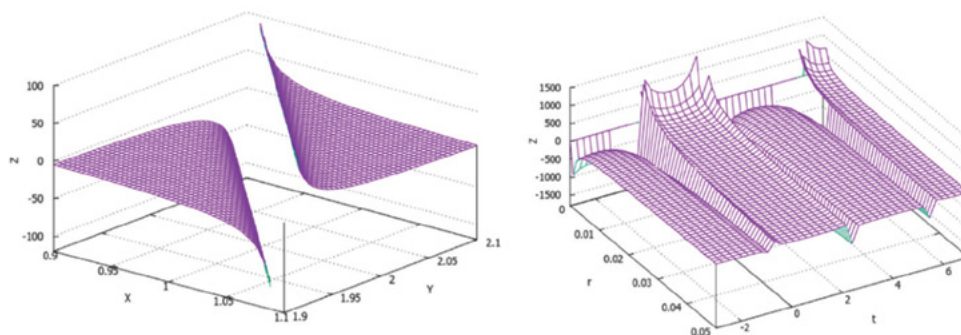


Рис. 3. Графики $f(x, y)$ слева, $k(r, t)$ справа / Graphs $f(x, y)$ on the left, $k(r, t)$ on the right

Источник: подготовлено автором

Тригонометрические радиальные и кольцевые функции

Обратное преобразование тригонометрических функций от переменных r и t позволяют определить функции, которые, могут быть полезными в теоретическом и прикладном плане.

Рассмотрим в X_k^2 не зависящие от t функции $\sin r$, $\cos r$, $\tan r$, $\cot r$. Обратное преобразование с центром (x_0, y_0) даёт функции, поведение которых соответствует тригонометрическим функциям одной переменной вдоль всех направлений от (x_0, y_0) . Назовём их тригонометрическими радиальными функциями:

$$\begin{aligned} z &= \sin \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} - \text{радиальный синус;} \\ z &= \cos \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} - \text{радиальный косинус;} \\ z &= \tan \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} - \text{радиальный тангенс;} \\ z &= \cot \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} - \text{радиальный котангенс.} \end{aligned}$$

Примеры графиков таких функций с центром $(0;0)$: $z = \cos \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = \cos r$ (рис. 4 вверх) и $z = \tan \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = \tan r$ (рис. 4 вниз):

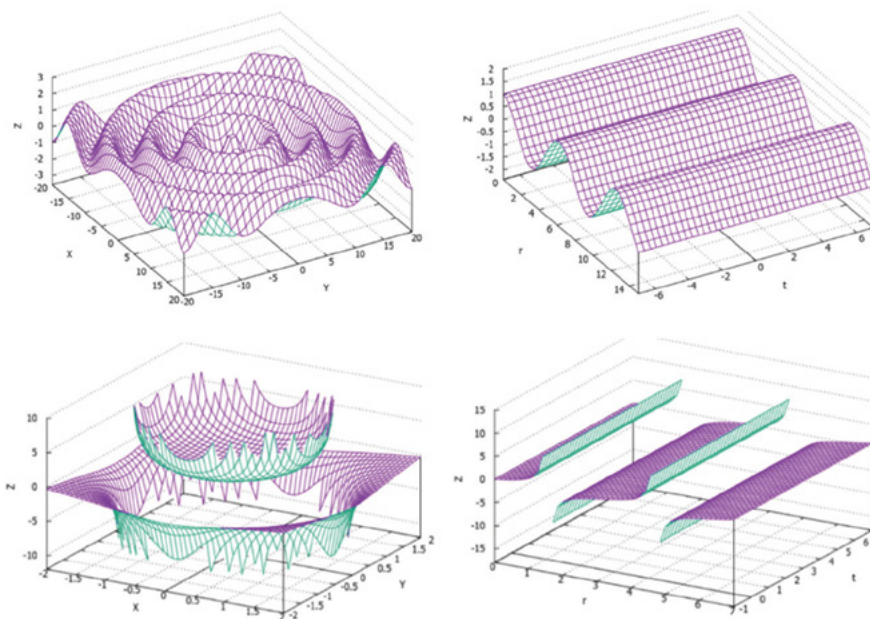


Рис. 4 / Fig. 4. Графики $z = \cos \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = \cos r$; $z = \tan \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = \tan r$ /
 Graphs $z = \cos \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = \cos r$; $z = \tan \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = \tan r$

Источник: подготовлено автором

Рассмотрим в X_k^2 не зависящие от r функции $\sin t$, $\cos t$, $\tan t$, $\cot t$. Обратное преобразование с центром (x_0, y_0) даёт функции, у которых тоже «тригонометрическое» поведение, но не вдоль направлений от точки (x_0, y_0) , а вокруг неё. Назовём их тригонометрическими кольцевыми функциями:

$$z = \frac{y - y_0}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} \text{ — кольцевой синус;}$$

$$z = \frac{x - x_0}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} \text{ — кольцевой косинус;}$$

$$z = \frac{y - y_0}{x - x_0} \text{ — кольцевой тангенс;}$$

$$z = \frac{x - x_0}{y - y_0} \text{ — кольцевой котангенс.}$$

Примеры графиков таких функций с центром $(0;0)$: $z = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$,

$z = \sin t$ (рис. 5 сверху) и $z = \frac{x}{y}$, $z = \cot t$ (рис. 5 внизу):

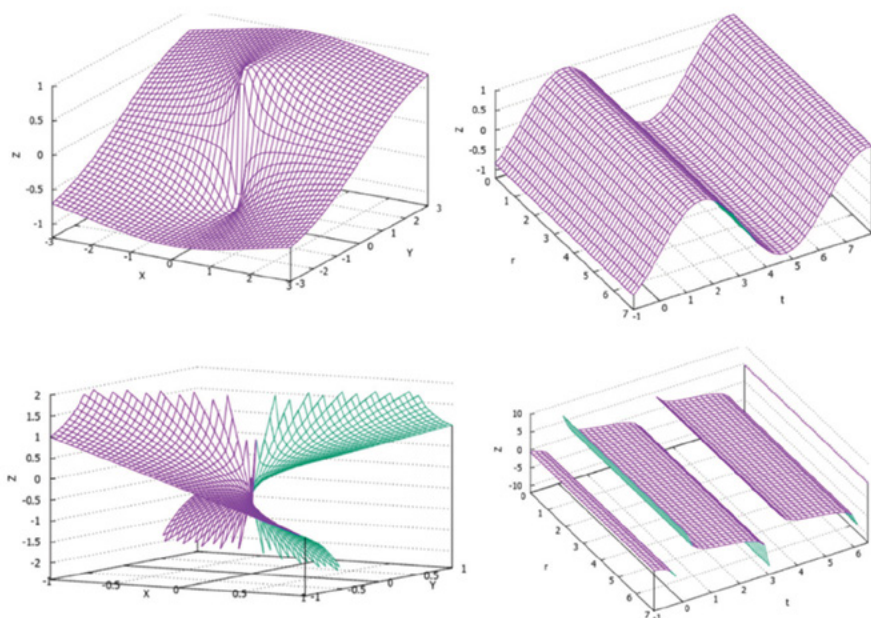


Рис. 5 / Fig. 5. Графики $z = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $z = \sin t$; $z = \frac{x}{y}$, $z = \cot t$ / Graphs $z = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $z = \sin t$; $z = \frac{x}{y}$, $z = \cot t$

Источник: подготовлено автором

Исследование функций с использованием преобразования

Пусть $f(x, y)$ – дважды дифференцируемая в точке (x_0, y_0) и некоторой её - окрестности функция, а $k(r, t)$ – её преобразованная функция. Тогда $k(r, t)$ также дважды дифференцируемая функция (дифференцируемость по r рассматриваем, как дифференцируемость справа) в точках $(0, t)$, где $0 \leq t < 2\pi$, и соответствующей области $\begin{cases} 0 \leq t < 2\pi \\ 0 < r < \delta \end{cases}$, которую назовём -окрестностью точек $(0, t)$. В целях исследования поведения $f(x, y)$ в δ -окрестности точки (x_0, y_0) будем исследовать $k(r, t)$ в δ -окрестности точек $(0, t)$.

Представим частные производные $k(r, t)$ в окрестности $(0, t)$ в виде:

$$\begin{aligned} k'_r(r, t) &= f'_r(x_0 + r \cos t, y_0 + r \sin t) = \\ &= \cos t f'_x(x_0 + r \cos t, y_0 + r \sin t) + \sin t f'_y(x_0 + r \cos t, y_0 + r \sin t); \\ k'_t(r, t) &= f'_t(x_0 + r \cos t, y_0 + r \sin t) = \\ &= -r \sin t f'_x(x_0 + r \cos t, y_0 + r \sin t) + r \cos t f'_y(x_0 + r \cos t, y_0 + r \sin t). \end{aligned}$$

Рассматриваем $k'_r(0, t)$. Если $k'_r(0, t) = 0 \forall t \in [0; 2\pi)$, что возможно только при $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$, то (x_0, y_0) может быть точкой максимума,

минимума, перегиба или график $f(x, y)$ – плоскость, параллельная плоскости xOy , и для уточнения необходимо исследование $f(x, y)$ на выпуклость в (x_0, y_0) , которое будет представлено ниже. В противном случае решение уравнения $k'_r(0, t) = \cos t f'_x(x_0, y_0) + \sin t f'_y(x_0, y_0) = 0$ даёт два отличающихся на π направления t_+ и t_- , по которым $f(x, y)$ не меняется в некоторой окрестности. Эти направления делят все направления $0 \leq t < 2\pi$ на направления роста $f(x, y)$, где $k'_r(0, t) > 0$, и убывания $f(x, y)$, где $k'_r(0, t) < 0$.

Рассмотрим $(k'_r(0, t))'_t = -\sin t f'_x(x_0, y_0) + \cos t f'_y(x_0, y_0)$. Знак этой производной позволяет судить об изменении $k'_r(0, t)$ при изменении t , а значит – об изменении производной $f(x, y)$ по направлениям, когда направления меняются вокруг центра против часовой стрелки. В случае $k'_r(0, t) \neq 0 \forall t \in [0, 2\pi)$ производная $(k'_r(0, t))'_t \neq \text{const}$ и отличающиеся на π решения t_1 и t_2 уравнение $(k'_r(0, t))'_t = 0$ дают направления максимального роста и снижения $f(x, y)$ в (x_0, y_0) . Для любого из них (пусть t_1) определяем знак $(k'_r(0, t_1))''_{tt}$. Если $(k'_r(0, t_1))''_{tt} < 0$, то t_1 – направление максимального роста $f(x, y)$, т. е. градиента, а t_2 – направление максимального убывания. В противном случае – наоборот.

Рассмотрим вторую производную $k''_{rr}(r, t)$ и при $r = 0$:

$$k''_{rr}(0, t) = \cos^2 t f''_{xx}(x_0, y_0) + 2 \cos t \sin t f''_{xy}(x_0, y_0) + \sin^2 t f''_{yy}(x_0, y_0).$$

Если $k''_{rr}(0, t) > 0 \forall t \in [0, 2\pi)$, то в точке (x_0, y_0) функция $f(x, y)$ выпукла вниз по всем направлениям и при $k'_r(0, t) = 0 \forall t \in [0, 2\pi)$ точка (x_0, y_0) является точкой минимума $f(x, y)$. Если $k''_{rr}(0, t) < 0 \forall t \in [0, 2\pi)$, то в точке (x_0, y_0) функция $f(x, y)$ выпукла вверх по всем направлениям и (x_0, y_0) является точкой максимума $f(x, y)$ при $k'_r(0, t) = 0 \forall t \in [0, 2\pi)$.

Если $k''_{rr}(0, t) = 0 \forall t \in [0, 2\pi)$, то график $f(x, y)$ является плоскостью, а при $k'_r(0, t) = 0 \forall t \in [0, 2\pi)$ эта плоскость параллельна xOy .

В других случаях решение уравнения $k''_{rr}(0, t) = 0$ даёт возможность определить, в каких направлениях $f(x, y)$ выпукла вниз, в каких – выпукла вверх, в каких не имеет выпуклости, т. е. точка её графика с координатами (x_0, y_0) лежит на прямолинейном участке графика или это точка перегиба.

Теперь рассмотрим уравнение $(k''_{rr}(0, t))'_t = 0$ для поиска направлений максимальной и минимальной выпуклости:

$$\begin{aligned} (k''_{rr}(0, t))'_t &= 2((\cos^2 t - \sin^2 t) f''_{xy}(x_0, y_0) + \\ &+ \cos t \sin t (f''_{yy}(x_0, y_0) - f''_{xx}(x_0, y_0))) = \\ &= 2f''_{xy}(x_0, y_0) \cos 2t + \sin 2t (f''_{yy}(x_0, y_0) - f''_{xx}(x_0, y_0)) = 0. \end{aligned}$$

Оно может иметь либо бесконечное множество решений – все $0 \leq t < 2\pi$, либо четыре решения t_3, t_4, t_5, t_6 . В первом случае график $f(x, y)$ – плоскость. Во втором случае четыре направления делят диапазон направлений $0 \leq t < 2\pi$ на

две пары сегментов, в одной из которых выпуклость растёт, а в другой – убывает. Два направления из t_3, t_4, t_5, t_6 являются направлениями максимального роста выпуклости на границах сегментов, а два других – направлениями максимального убывания выпуклости на других границах сегментов. Два направления максимального роста, как и два направления максимального убывания, являются противоположными, т. е. отличаются на π . По знаку $(k''_{rr}(0, t))''_{tt}$ в t_3, t_4, t_5, t_6 можно определить, какие из них являются направлениями максимального роста, а какие – убывания выпуклости.

Пример исследования $f(x, y) = x^3 + xy^2$ около $A(-3; 1; -30)$ (рис. 6).

Уравнения функций $k(r, t)$, $k'_r(r, t)$ и $k''_{rr}(r, t)$:

$$\begin{aligned} k(r, t) &= (r \cos t - 3)^3 + (r \cos t - 3)(1 + r \sin t)^2; \\ k'_r(r, t) &= 3 \cos t (r \cos t - 3)^2 + \cos t (1 + r \sin t)^2 \\ &\quad + 2 \sin t (r \cos t - 3)(1 + r \sin t); \\ k''_{rr}(r, t) &= 6r \cos^3 t - 18 \cos^2 t + 4 \cos t \sin t + 6r \cos t \sin^2 t - 6 \sin^2 t. \end{aligned}$$

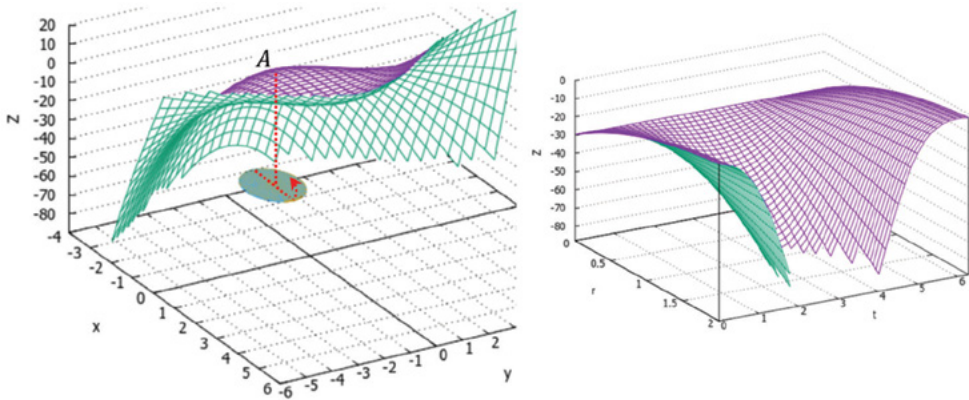


Рис. 6 / Fig. 6. Графики $f(x, y) = x^3 + xy^2$ слева, $k(r, t)$ справа /

Graphs $f(x, y) = x^3 + xy^2$ on the left, $k(r, t)$ on the right

Источник: подготовлено автором

Решение уравнения $k'_r(0, t) = 28 \cos t - 6 \sin t = 0$ даёт нам два направления $t_+ = \arctan \frac{14}{3}$ и $t_- = t_0 + \pi$, в которых $f(x, y)$ не меняется. В направлениях $t_+ < t < t_-$ функция убывает, а в противоположных – растёт. Далее решим уравнение: $(k'_r(0, t))'_t = (28 \cos t - 6 \sin t)'_t = -28 \sin t - 6 \cos t = 0$. Его решения $t_1 = \arctan \frac{-3}{14}$ и $t_2 = t_1 + \pi$, а $(k'_r(0, t))''_{tt} = -28 \cos t + 6 \sin t$.

Направление t_1 является направлением градиента, т. к. $(k'_r(0, t_1))''_{tt} < 0$, а t_2 – направлением максимального убывания функции $f(x, y)$.

Не сложно убедиться, что $k''_{rr}(0, t) = -12 \cos^2 t + 4 \cos t \sin t - 6 < 0$ для всех $0 \leq t < 2\pi$ и функция $f(x, y)$ в окрестности точки $(-3; 1)$ выпукла вверх.

Теперь рассмотрим уравнение $(k''_{rr}(0, t))'_t = 0$:

$$(-12 \cos^2 t + 4 \cos t \sin t - 6)'_t = 24 \cos t \sin t - 4 \sin^2 t + 4 \cos^2 t = 0.$$

Его решения:

$$t_3 = 0,5 \arctan \frac{-1}{3}, \quad t_4 = t_3 + \pi, \quad t_5 = 0,5 \left(\arctan \frac{-1}{3} + \pi \right), \quad t_6 = t_5 + \pi.$$

Проверяем t_3 : $(k''_{rr}(0, t_3))''_{tt} = 24 \cos 2t_3 - 8 \sin 2t_3 > 0 \Rightarrow t_3$ и t_4 – направления максимального убывания, а t_5 и t_6 – максимального роста выпуклости.

Использование тригонометрического преобразования в исследовании функций даёт достаточно простой способ не только поиска локальных экстремумов и направления градиента, что является стандартными элементами исследования функций двух переменных, но и определения вокруг центральной точки секторов направлений выпуклости поверхности – графика функции вниз или вверх, направлений её линейности, а также направлений максимальной и минимальной выпуклости, что может быть полезным в исследованиях, связанных с понятием выпуклости многомерных функций.

Приближение функций двух переменных

Рассмотрим дифференцируемую достаточное число раз в точке (x_0, y_0) и её окрестности функцию $f(x, y)$. В этом случае её преобразованная с центром (x_0, y_0) функция $k(r, t)$ также дифференцируема достаточное число раз в точках $(0, t) \forall t \in [0, 2\pi)$ и в соответствующей δ -окрестности по r . Для приближения $f(x, y)$ в окрестности (x_0, y_0) можно определять аппроксиманты $k(r, t)$ в окрестности с $0 \leq r < \delta$ и $0 \leq t < 2\pi$ и применять к ним обратное преобразование.

Функция $k(r, t)$ может быть разложена по переменной r в ряд Тейлора около точки $r = 0$ для $r \geq 0$ и $0 \leq t < 2\pi$:

$$k(r, t) = k(0, t) + k'_r(0, t)r + k''_r(0, t)\frac{1}{2}r^2 + \dots$$

Обратное преобразование этого ряда даст нам разложение $f(x, y)$ вокруг точки (x_0, y_0) , известное в математике, как формула Тейлора с центром в выбранной точке [1] для функции двух переменных. Вместе с этим по аналогии с методами приближения функций одной переменной многочленами [5] можно строить методы приближения $f(x, y)$ в определённом секторе направлений от (x_0, y_0) или по всем направлениям от (x_0, y_0) , основываясь на разложении $k(r, t)$ в ряд Тейлора. Построение таких методов представлено ниже.

Рассмотрим приближение функцию $f(x, y)$ в окрестности (x_0, y_0) с помощью разложения периодической по t с периодом 2π функции $k(r, t)$ в ряд Фурье [5]. Тогда $\forall r \in [0; \delta]$ функция $k(r, t)$ раскладывается в ряд:

$$\begin{aligned} k(r, t) &= A(r) + \sum_{i=1}^{\infty} (a_i(r) \cos it + b_i(r) \sin it), \text{ где} \\ A(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k(r, t) dt; \\ a_i(r) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} k(r, t) \cos it dt; \\ b_i(r) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} k(r, t) \sin it dt. \end{aligned} \quad (3)$$

Это представление по сути определяет сходящийся к $k(r, t)$ функциональный ряд в соответствующей области, который назовём преобразованным кольцевым рядом Фурье двух переменных. Отметим, что сумма этого ряда при $r = 0$ равна $f(x_0, y_0)$, в чём не сложно убедиться, рассмотрев предел

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(A(r) + \sum_{i=1}^{\infty} (a_i(r) \cos it + b_i(r) \sin it) \right) = f(x_0, y_0).$$

Проводя обратное преобразование слагаемых этого ряда, выражая для этого в формулах слагаемых $\cos it$ и $\sin it$ через $\cos t$ и $\sin t$, получаем соответствующие слагаемые, образующие ряд, который будем называть кольцевым рядом Фурье функции $f(x, y)$ с центром (x_0, y_0) . Приведём пример построения частичной суммы первого порядка кольцевого ряда Фурье с центром $(1; 0)$ для $f(x, y) = 0,3x + 0,2y^3$. Обозначим эту сумму $S_0^1(x, y)$, а преобразованную сумму $S_{ok}^1(r, t)$. В этом случае $k(r, t) = 0,3(1 + r \cos t) + 0,2(r \sin t)^3$ и

$$\begin{aligned} A(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (0,3(1 + r \cos t) + 0,2(r \sin t)^3) dt = 0,3; \\ a_1(r) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (0,3(1 + r \cos t) + 0,2(r \sin t)^3) \cos t dt = 0,3r; \\ b_1(r) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (0,3(1 + r \cos t) + 0,2(r \sin t)^3) \sin t dt = 0,15r^3; \\ S_{ok}^1(r, t) &= 0,3 + 0,3r \cos t + 0,15r^3 \sin t; \\ S_0^1(x, y) &= 0,3 + 0,3(x - 1) + 0,15y((x - 1)^2 + y^2). \end{aligned}$$

На рис. 7 представлены графики $f(x, y)$ и $S_0^1(x, y)$.

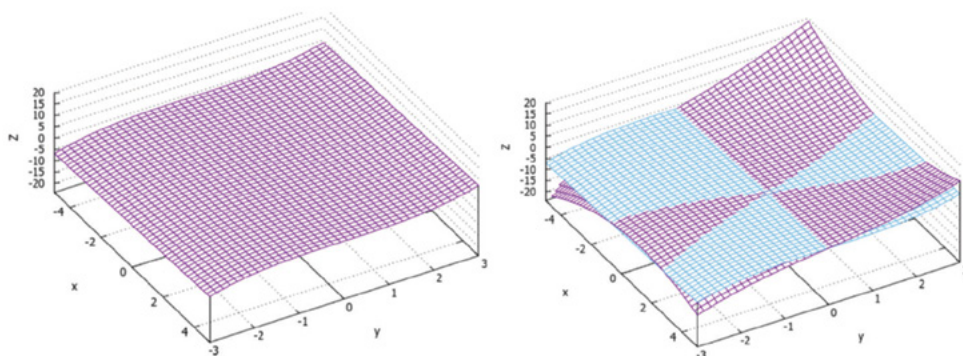


Рис. 7 / Fig. 7. Графики $f(x, y)$ слева, $S_0^1(x, y)$ вместе с $f(x, y)$ справа / Graphs of $f(x, y)$ on the left, $S_0^1(x, y)$ together with $f(x, y)$ on the right

Источник: подготовлено автором

В целях приближения функции $f(x, y)$ в окрестности (x_0, y_0) можно раскладывать $k(r, t)$ в ряд Фурье и по переменной r . Такой метод будет логичен в случае, когда $f(x, y)$ является периодической по всем направлениям $t \in [0; 2\pi)$ от (x_0, y_0) . Будем рассматривать такие функции с дополнительным условием, что периоды либо одинаковы по всем направлениям, либо определяют функцию от переменной t ($T(t) = 2u(t)$), представленной в уравнении $u(t)$ в виде $\cos t$, $\sin t$, т. е. $u(t) = \psi(\cos t, \sin t)$. Очевидно, что $T(t)$ и $u(t)$ также периодические с периодом 2π . Такие функции $f(x, y)$ будем называть центробежно периодическими с центром в (x_0, y_0) и периодами по $u(t)$. Пусть $f(x, y)$ такая функция. Её преобразованная функция $k(r, t)$ при каждом $t \in [0; 2\pi)$ также будет периодической по r с соответствующим периодом и может быть разложена в ряд Фурье по r для каждого t . Тогда эти ряды имеют вид:

$$\begin{aligned}
 k(r, t) &= A(t) + \sum_{i=1}^{\infty} (a_i(t) \cos \frac{i\pi r}{u(t)} + b_i(t) \sin \frac{i\pi r}{u(t)}), \text{ где} \\
 A(t) &= \frac{1}{2u(t)} \int_0^{2u(t)} k(r, t) dr; \\
 a_i(t) &= \frac{1}{u(t)} \int_0^{2u(t)} k(r, t) \cos \frac{i\pi r}{u(t)} dr; \\
 b_i(t) &= \frac{1}{u(t)} \int_0^{2u(t)} k(r, t) \sin \frac{i\pi r}{u(t)} dr.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Это представление также определяет сходящийся к $k(r, t)$ функциональный ряд в соответствующей области, который назовём преобразованным радиальным рядом Фурье двух переменных. Коэффициенты сумм в нём являются функциями от t , содержащими эту переменную в виде $\cos t$ и $\sin t$:

$$A(t) = A^*(\cos t, \sin t), a_i(t) = a_i^*(\cos t, \sin t), b_i(t) = b_i^*(\cos t, \sin t).$$

Обратное преобразование слагаемых этого ряда приводит к ряду, который будем называть радиальным рядом Фурье функции $f(x, y)$ с центром (x_0, y_0) .

Приведём пример построения частичных сумм первого порядка преобразованного и просто радиального рядов Фурье для $f(x, y) = \cos^2(\sqrt{x^2 + y^2}) + \sin(\sqrt{x^2 + y^2}) - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ с центром $(0; 0)$ и $u(t) = 2\pi$. Обозначим преобразованную радиальную сумму $S_{rk}^1(r, t)$ и радиальную сумму $S_r^1(x, y)$.

$$k(r, t) = \cos^2 r + \sin r - \cos t.$$

$$A(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos^2 r + \sin r - \cos t) dr = 1 - \cos t;$$

$$a_1(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (\cos^2 r + \sin r - \cos t) \cos r dr = 0$$

$$b_1(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (\cos^2 r + \sin r - \cos t) \sin r dr = 1$$

$$S_{rk}^1(r, t) = 1 - \cos t + \sin r;$$

$$S_r^1(x, y) = 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \sin(\sqrt{x^2 + y^2}).$$

На рис. 8 представлены графики $f(x, y)$ и $S_r^1(x, y)$.

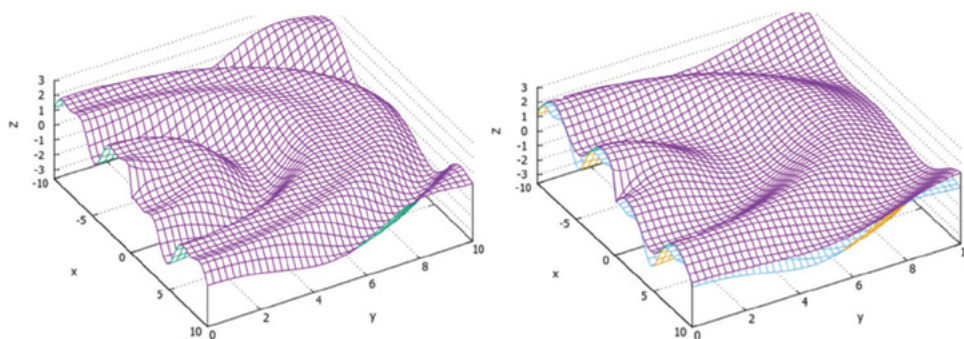


Рис. 8 / Fig. 8. Графики $f(x, y)$ слева, $S_r^1(x, y)$ вместе с $f(x, y)$ справа / Graphs of $f(x, y)$ on the left, $S_r^1(x, y)$ together with $f(x, y)$ on the right

Источник: подготовлено автором

Рассмотрим ещё одно разложение центрально периодической функции $f(x, y)$ с центром (x_0, y_0) и периодами по $u(t)$, основанное на разложении её преобразованной функции $k(r, t)$ в ряд Фурье и по r и по t . Очевидно, что

коэффициенты $A(t), a_i(t), b_i(t)$ ряда Фурье (4) функции $k(r, t)$ по r являются периодическими функциями от t с периодом 2π .

Каждая из них раскладывается в ряд Фурье по t . Представим эти ряды, введя нужные обозначения коэффициентов и используя выражения $A(t), a_i(t), b_i(t)$ через интегралы из ряда Фурье (4):

$$A(t) = c_0 + \sum_{j=1}^{\infty} (c_{0j} \cos jt + d_{0j} \sin jt),$$

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2u(t)} \int_0^{2u(t)} k(r, t) dr \right) dt,$$

$$c_{0j} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} A(t) \cos jt dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2u(t)} \int_0^{2u(t)} k(r, t) dr \right) \cos jt dt,$$

$$d_{0j} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} A(t) \sin jt dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2u(t)} \int_0^{2u(t)} k(r, t) dr \right) \sin jt dt;$$

$$a_i(t) = a_{i0} + \sum_{j=1}^{\infty} (a_{ij} \cos jt + d_{aij} \sin jt),$$

$$a_{i0} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a_i(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2u(t)} \int_0^{2u(t)} k(r, t) \cos \left(\frac{ir\pi}{u(t)} \right) dr \right) dt,$$

$$a_{ij} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} a_i(t) \cos jt dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2u(t)} \int_0^{2u(t)} k(r, t) \cos \left(\frac{ir\pi}{u(t)} \right) dr \right) \cos jt dt,$$

$$d_{aij} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} a_i(t) \sin jt dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2u(t)} \int_0^{2u(t)} k(r, t) \cos \left(\frac{ir\pi}{u(t)} \right) dr \right) \sin jt dt$$

$$b_i(t) = b_{i0} + \sum_{j=1}^{\infty} (b_{ij} \cos jt + d_{bij} \sin jt),$$

$$b_{i0} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} b_i(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2u(t)} \int_0^{2u(t)} k(r, t) \sin \left(\frac{ir\pi}{u(t)} \right) dr \right) dt,$$

$$b_{ij} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} b_i(t) \cos jt dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2u(t)} \int_0^{2u(t)} k(r, t) \sin \left(\frac{ir\pi}{u(t)} \right) dr \right) \cos jt dt,$$

$$d_{bij} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} b_i(t) \sin jt dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2u(t)} \int_0^{2u(t)} k(r, t) \sin \left(\frac{ir\pi}{u(t)} \right) dr \right) \sin jt dt.$$

Используя эти ряды Фурье вместо $A(t), a_i(t), b_i(t)$ в записи ряда (4), получаем сложную бесконечную сходящуюся к $k(r, t)$ сумму функций, коэффициенты которой определяются представленными выше повторными интегралами:

$$k(r, t) = c_0 + \sum_{j=1}^{\infty} (c_{0j} \cos jt + d_{0j} \sin jt) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\infty} \left[\left(a_{i0} + \sum_{j=1}^{\infty} (a_{ij} \cos jt + d_{aij} \sin jt) \right) \cos \frac{ir\pi}{u(t)} + \right. \\ \left. + \left(b_{i0} + \sum_{j=1}^{\infty} (b_{ij} \cos jt + d_{bij} \sin jt) \right) \sin \frac{ir\pi}{u(t)} \right].$$

Данное представление $k(r, t)$ будем называть преобразованным рядом Фурье функции $k(r, t)$ с радиальными периодами по функции $u(t)$.

Проведение обратного преобразования функций, входящих в слагаемые этого ряда, определяет также функциональный ряд, который будем называть полным рядом Фурье или просто рядом Фурье функции двух переменных $f(x, y)$ с центром в (x_0, y_0) и с радиальными периодами по функции $u(t)$. Частичные суммы таких рядов с фиксированным в слагаемых верхним пределом l сумм по i и верхним пределом m сумм по j обозначим $F_{l;m}(r, t)$ для ряда функции $k(r, t)$ и $F_{l;m}^f(x, y)$ для ряда функции $f(x, y)$, как суммы порядка $l; m$.

Такое разложение можно рассматривать не только для центробежно периодических функций, где оно естественно больше подходит для целей приближения функций, но и для непериодических функций, но только в некоторой u -окрестности (x_0, y_0) , например, при условии, что соответствующая преобразованная функция $k(r, t)$, как функция по r , удовлетворяет условиям Дирихле [4] на отрезке $[0; u]$ при каждом t . Это можно сформулировать, как удовлетворение условиям Дирихле функции $f(x, y)$ по всем направлениям от (x_0, y_0) .

На основе такого разложения центробежно периодической функции $f(x, y)$ с центром (x_0, y_0) и периодами по $u(t)$ определим метод её приближения частичными суммами её ряда Фурье.

Рассмотрим частичные суммы порядка $l; m$ ряда для $k(r, t)$:

$$F_{l;m}(r, t) = A_m(t) + \sum_{i=1}^l \left(a_{mi}(t) \cos \frac{ir\pi}{u(t)} + b_{mi}(t) \sin \frac{ir\pi}{u(t)} \right),$$

$$A_m(t) = c_0 + \sum_{j=1}^m (c_{0j} \cos jt + d_{0j} \sin jt),$$

$$a_{mi}(t) = a_{i0} + \sum_{j=1}^m (a_{ij} \cos jt + d_{aij} \sin jt),$$

$$b_{mi}(t) = b_{i0} + \sum_{j=1}^m (b_{ij} \cos jt + d_{bij} \sin jt).$$

Для определения $F_{l;m}(r, t)$ нам нужны значения $k(r, t)$ в $(0, t)$ и в $v \geq 2l$ точках по $n \geq 2m + 1$ направлениям $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ и значения полупериодов по этим направлениям $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ либо уравнение $u(t)$.

На основе значений функции в ν точках по каждому отдельному направлению t_h ($h = 1, 2, \dots, n$) определяем известными методами [5] коэффициенты $A_m(t_h)$, $a_{mi}(t_h)$ и $b_{mi}(t_h)$ частичной суммы, приближающей $k(r, t)$ по этому направлению, т.е. $k(r, t_h)$. Далее, рассматривая однородные коэффициенты $A_m(t_h)$, $h = 1, 2, \dots, n$, как значения функции $A_m(t)$, определяем коэффициенты c_0, c_{0j}, d_{0j} частичной суммы $c_0 + \sum_{j=1}^m (c_{0j} \cos jt + d_{0j} \sin jt)$. Аналогично поступаем в отношении других однородных коэффициентов $a_{mi}(t_h)$, $h = 1, 2, \dots, n$ и $b_{mi}(t_h)$, $h = 1, 2, \dots, n$. Таким образом определяем все коэффициенты для $F_{l;m}(r, t)$. Если известно уравнение $u(t)$, используем его в выражении $F_{l;m}(r, t)$. В противном случае на основе известных $u_1, u_2, \dots, u_n$ строим частичную сумму ряда Фурье функции $u(t)$ и используем её уравнение вместо $u(t)$. Обратное преобразование $F_{l;m}(r, t)$ определяет искомое приближение $f(x, y)$ в виде $F_{l;m}^f(x, y)$.

Для примера на рис. 9 дан график центробежно периодической функции $f(x, y) = \frac{0,2y}{\sqrt{x^2+y^2}} + 4 \cos\left(\sqrt{x^2+y^2}\left(1 + \frac{0,3y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right)$ с центром $(0;0)$, рядом – график $k(r, t) = 0,2 * \sin t + 4 \cos(r(1 + 0,3 * \sin t))$, а ниже даны эти графики вместе с аппроксимантами $F_{2;1}^f(x, y)$ и $F_{2;1}(r, t)$.

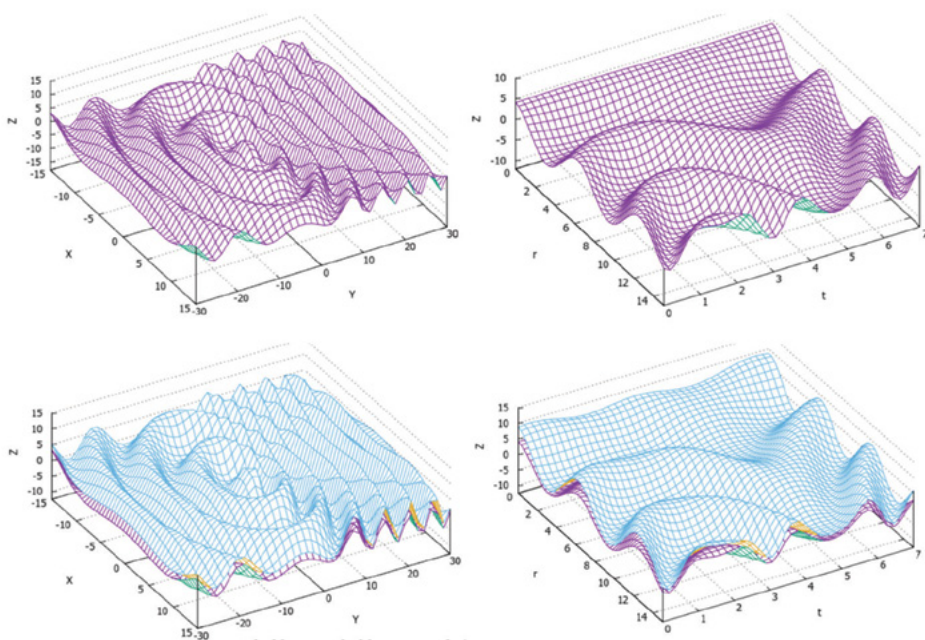


Рис. 9 / Fig. 9. Графики $f(x, y)$ и $k(r, t)$ отдельно и с аппроксимантами / Graphs of $f(x, y)$ and $k(r, t)$ separately and with approximants

Источник: подготовлено автором

В построении приближения считалось известным уравнение функции периодов $u(t) = \frac{2\pi}{(1+0,3*\sin t)}$. Частичные суммы $F_{2;1}(r, t)$ и $F_{2;1}^f(x, y)$ построены на основе значений функций в центральной точке (0;0) и точках, расположенных на одинаковых расстоянии 3 и 6 от центра в пяти равномерно распределённых по интервалу $[0; 2\pi]$ направлениях.

Рассмотрим теперь разложение бесконечно дифференцируемой в δ -окрестности (x_0, y_0) функции $f(x, y)$ в такой функциональный ряд, который строится на основе теории разложения периодических функций в ряд Фурье и теории разложения функций в ряд Тейлора. Рассмотрим её преобразованную функцию $k(r, t)$, которая является периодической по t с периодом 2π и бесконечно дифференцируемой по r для $0 \leq r < \delta$. Разложим $k(r, t)$ в ряд Фурье по t (3): $k(r, t) = A(r) + \sum_{i=1}^{\infty} (a_i(r) \cos it + b_i(r) \sin it)$. Коэффициенты $A(r)$, $a_i(r)$, $b_i(r)$, как бесконечно дифференцируемые функциями от r , разложим в ряд Тейлора в окрестности $r = 0$:

$$A(r) = A(0) + A'(0)r + \frac{1}{2}A''(0)r^2 + \dots$$

$$a_i(r) = a_i(0) + a_i'(0)r + \frac{1}{2}a_i''(0)r^2 + \dots$$

$$b_i(r) = b_i(0) + b_i'(0)r + \frac{1}{2}b_i''(0)r^2 + \dots$$

Тогда, подставляя эти разложения в уравнение ряда Фурье, получаем функциональный ряд, который может быть представлен в форме ряда Фурье (вариант F) и в форме ряда Тейлора (вариант T):

$$\begin{aligned} \text{F: } k(r, t) = & \left(A(0) + A'(0)r + \frac{1}{2}A''(0)r^2 + \dots + \frac{1}{l!}A^{(l)}(0)r^l + \dots \right) + \\ & + \sum_{i=1}^{\infty} \left[\left(a_i(0) + a_i'(0)r + \frac{1}{2}a_i''(0)r^2 + \dots + \frac{1}{l!}a_i^{(l)}(0)r^l + \dots \right) \cos it + \right. \\ & \left. + \left(b_i(0) + b_i'(0)r + \frac{1}{2}b_i''(0)r^2 + \dots + \frac{1}{l!}b_i^{(l)}(0)r^l + \dots \right) \sin it \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{T: } k(r, t) = & \left(A(0) + \sum_{i=1}^{\infty} (a_i(0) \cos it + b_i(0) \sin it) \right) + \\ & + \left(A'(0) + \sum_{i=1}^{\infty} (a_i'(0) \cos it + b_i'(0) \sin it) \right) r + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \left(A''(0) + \sum_{i=1}^{\infty} (a_i''(0) \cos it + b_i''(0) \sin it) \right) r^2 + \dots \\
& \dots + \frac{1}{l!} \left(A^{(l)}(0) + \sum_{i=1}^{\infty} (a_i^{(l)}(0) \cos it + b_i^{(l)}(0) \sin it) \right) r^l + \dots, \\
A(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k(r, t) dt; \quad a_i(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} k(r, t) \cos it dt; \quad b_i(r) = \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} k(r, t) \sin it dt.
\end{aligned}$$

Данное разложение $k(r, t)$ будем называть разложением в преобразованный ряд Фурье – Тейлора. Применение обратного преобразования к элементам этого ряда определяет функциональный сходящийся к $f(x, y)$ ряд, который будем называть рядом Фурье – Тейлора функции $f(x, y)$ в (x_0, y_0) . Части каждого из этих двух рядов при фиксированном верхнем пределе сумм, который обозначим m , и степени l будем называть фт-многочленами степени l порядка m или частичными фт-суммами порядка m степени l , добавляя «преобразованными» в случае преобразованного ряда Фурье – Тейлора. Для ряда Фурье – Тейлора обозначим такие фт-многочлены / фт-суммы записью $T_{l;m}^{f(x_0, y_0)}(x, y)$ или сокращая - $T_{l;m}^f(x, y)$, а их образы - $T_{l;m}(r, t)$.

Построим метод приближения $f(x, y)$ в δ -окрестности (x_0, y_0) фт-многочленом $T_{l;m}^{f(x_0, y_0)}(x, y)$. Запишем $T_{l;m}(r, t)$ в виде:

$$\begin{aligned}
T_{l;m}(r, t) &= C_0(t) + C_1(t)r + \dots + C_l(t)r^l = A_{00} + \sum_{i=1}^m (a_{0i} \cos it + b_{0i} \sin it) + \\
&+ \left(A_{10} + \sum_{i=1}^m (a_{1i} \cos it + b_{1i} \sin it) \right) r + \dots \\
&\dots + (A_{l0} + \sum_{i=1}^m (a_{li} \cos it + b_{li} \sin it)) r^l.
\end{aligned}$$

Для определения $T_{l;m}(r, t)$ нам нужно иметь значения $k(r, t)$ в $l + 1$ точке, включая $(0, t)$ по каждому из $n \geq 2m + 1$ направлению $t_1, t_2, \dots, t_n$.

Построим $T_{l;m}(r, t)$ отдельно по каждому направлению t_i ($i = 1, 2, \dots, n$) в форме многочлена от r степени l известными методами (5) на основе известных значений $k(r, t)$ в точках по этим направлениям:

$$\begin{aligned}
T_{l;m}(r, t_1) &= p_{10} + p_{11}r + p_{12}r^2 + \dots + p_{1l}r^l; \\
T_{l;m}(r, t_2) &= p_{20} + p_{21}r + p_{22}r^2 + \dots + p_{2l}r^l;
\end{aligned}$$

$$\dots\dots$$

$$T_{l,m}(r, t_n) = p_{n0} + p_{n1}r + p_{n2}r^2 + \dots + p_{nl}r^l.$$

Рассматриваем полученные коэффициенты этих многочленов, как соответствующие значения функций $C_0(t), C_1(t), \dots, C_l(t)$ в m точках:

$$p_{10}, p_{20}, \dots, p_{n0} - \text{как значения } C_0(t) = A_{00} + \sum_{i=1}^m (a_{0i} \cos it + b_{0i} \sin it),$$

$$p_{11}, p_{21}, \dots, p_{n1} - \text{как значения } C_1(t) = A_{10} + \sum_{i=1}^m (a_{1i} \cos it + b_{1i} \sin it), \dots$$

$$p_{1l}, p_{2l}, \dots, p_{nl} - \text{как значения } C_l(t) = A_{l0} + \sum_{i=1}^m (a_{li} \cos it + b_{li} \sin it).$$

Далее соответствующими методами (5) вычисляем коэффициенты частичных сумм Фурье $A_{00}, a_{0i}, b_{0i}; A_{10}, a_{1i}, b_{1i}; \dots A_{l0}, a_{li}, b_{li}$. Таким образом получаем $T_{l,m}(r, t)$ и с обратным преобразованием – $T_{l,m}^f(x, y)$.

Рассмотрим пример приближения функции $f(x, y) = 2^{\cos x} y^2$ в окрестности точки $(0, 3)$ с радиусом $\delta = 0,8$ фт-многочленом $T_{2,2}^f$ на основе 10 точек, расположенных по две на расстоянии $r_1 = 0,4$ и $r_2 = 0,8$ от центра $(0;3)$ в пяти равноотстоящих направлениях $0 < t_i \leq 2\pi, i = 1, 2, 3, 4, 5$.

Определяем аппроксимант $T_{2,2}$ для $k(r, t) = 2^{\cos(r \cos t)}(3 + r \sin t)^2$.

В табл. 1 представлены координаты $k(r, t)$, соответствующие точкам с известными значениями $f(x, y)$, которые равны значениям $k(r, t)$ в этих точках.

Таблица 1 / Table 1

Исходные данные / Initial data

r_0	0	0	0	0	0
r_1	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4
r_2	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8
t_i	$\pi/5$	$3\pi/5$	π	$7\pi/5$	$9\pi/5$
$k(0, t)$	18	18	18	18	18
$k(r_1, t)$	20,19222325	22,73396842	17,04156583	13,65198258	14,74889083
$k(r_2, t)$	20,93475421	27,69803811	14,58720637	9,818526631	11,12537068

На основании этих данных определяем по каждому из пяти направлений многочлен второй степени:

$$T_{2,2}(r, t_1) \approx 18 + 7,292673488r - 4,530288406r^2;$$

$$T_{2,2}(r, t_2) \approx 18 + 11,54729446r + 0,719066469r^2;$$

$$T_{2,2}(r, t_3) \approx 18 - 0,526178813r - 4,674766531r^2;$$

$$T_{2,2}(r, t_4) \approx 18 - 11,51324539r + 1,608004597r^2;$$

$$T_{2,2}(r, t_5) \approx 18 - 7,6622592r - 1,163784313r^2.$$

Формируем табл. 2 с пятью значениями для трёх сумм Фурье:

Таблица 2 / Table 2

Значения для сумм Фурье / Values for Fourier sums

t_i	p_{i0}	p_{i1}	p_{i2}
$\pi/5$	18	7,292673488	-4,530288406
$3\pi/5$	18	11,54729446	0,719066469
π	18	-0,526178813	-4,674766531
$7\pi/5$	18	-11,51324539	1,608004597
$9\pi/5$	18	-7,6622592	-1,163784313

Учитывая равномерное распределение пяти направлений по $[0; 2\pi]$, применяем упрощённый метод вычисления коэффициентов сумм Фурье [5]:

$$A_{j0} = \frac{1}{5} \sum_{n=1}^5 p_{nj}; \quad a_{ji} = \frac{2}{5} \sum_{n=1}^5 p_{nj} \cos it_n; \quad b_{ji} = \frac{2}{5} \sum_{n=1}^5 p_{nj} \sin it_n; \quad j = 0, 1, 2;$$

$$i = 1, 2.$$

Вычисляем на основе данных табл. 2 коэффициенты $T_{2,2}(r, t)$:

$$T_{2,2}(r, t) = 18 +$$

$$+ (-0,17234309 + 0,086662379 \cos t + 12,28886623 \sin t$$

$$- 0,267173343 \cos 2t + 0,267336379 \sin 2t)r +$$

$$+ (-1,608353637 + 0,260375829 \cos t - 1,129684743 \sin t$$

$$- 3,326788723 \cos 2t - 1,071692373 \sin 2t)r^2.$$

Обратное преобразования даёт аппроксиманта для $f(x, y)$:

$$T_{2,2}^f(x, y) = 18 + \left(-0,17234309 + \frac{0,086662379 x}{\sqrt{x^2 + (y-3)^2}} + \frac{12,28886623 (y-3)}{\sqrt{x^2 + (y-3)^2}} - \right.$$

$$- \frac{0,267173343 x^2}{x^2 + (y-3)^2} + \frac{0,267336379 x(y-3)}{x^2 + (y-3)^2} \left. \right) \sqrt{x^2 + (y-3)^2} +$$

$$+ \left(-1,608353637 + \frac{0,260375829 x}{\sqrt{x^2 + (y-3)^2}} - \frac{1,129684743 (y-3)}{\sqrt{x^2 + (y-3)^2}} - \frac{3,326788723 x^2}{x^2 + (y-3)^2} - \right.$$

$$\left. \frac{1,071692373 x(y-3)}{x^2 + (y-3)^2} \right) (x^2 + (y-3)^2).$$

На рис. 10 представлены графики $f(x, y)$ и $k(r, t)$ с их аппроксимантами (голубого цвета):

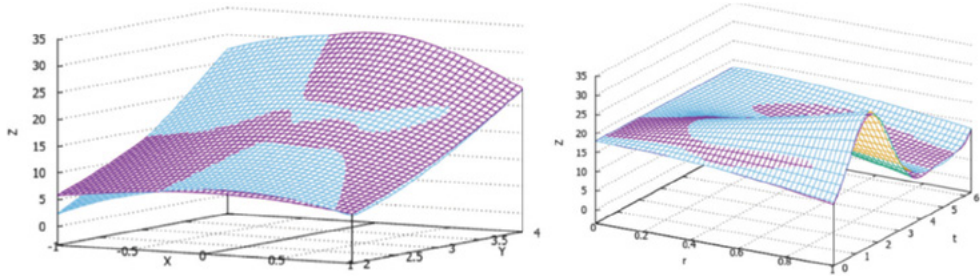


Рис. 10 / Fig. 10. Графики $f(x, y)$ слева и $k(r, t)$ справа с аппроксимантами /
Graphs of $f(x, y)$ on the left and $k(r, t)$ on the right with approximants

Источник: подготовлено автором

Рассмотрим использование данного метода для аппроксимации поверхности $f(x, y)$ в трёхмерном пространстве на особой сетке точек плоскости аргументов, где известны значения аппроксимируемой функции.

Будем рассматривать сетку, базовым элементом которой является равносторонний треугольник на плоскости аргументов. Пусть значения $f(x, y)$ известны в его центре и вершинах, т. е. в центре описанной окружности радиуса r_0 (точка C_0) и в точках C_1, C_2, C_3 на окружности по направлениям $\frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}$ (рис. 11).

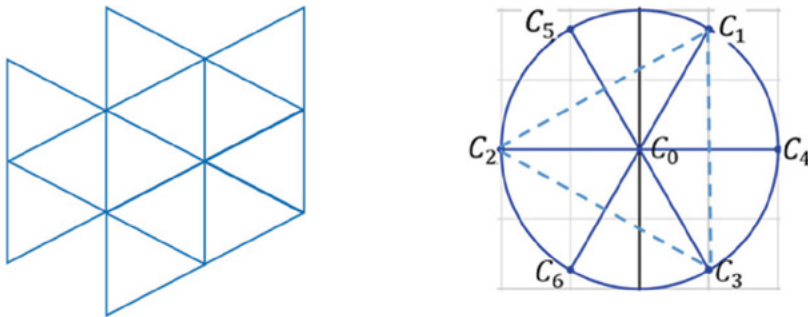


Рис. 11 / Fig. 11. Часть сетки на основе треугольника и связанные с ним точки /
A portion of a triangle-based mesh and its associated points

Источник: подготовлено автором

Обозначим значения функции в этих точках $f(C_0) = z_0$, $f(C_1) = z_1$, $f(C_2) = z_2$, $f(C_3) = z_3$. Пусть $k(r, t)$ – преобразованная функция $f(x, y)$ с центром в C_0 . Тогда $k(0, t) = z_0$, $k(r_0, \frac{\pi}{3}) = z_1$, $k(r_0, \pi) = z_2$, $k(r_0, \frac{5\pi}{3}) = z_3$.

Построим описанным методом аппроксимант $T_{1,1}(r, t) = A(t)r + B(t)$, $\square$
 $A(t) = a_0 + a \cos t + b \sin t$ и $B(t) = d_0 + d \cos t + c \sin t$. Так как $k(0, t) = z_0$ для любых t , то $T_{1,1}(0, t) = k(0, t) = z_0$ и следовательно $B(t) = z_0$ для всех t . В

этом случае $c = d = 0$ и $d_0 = z_0$. Тогда при $r = r_0$ получаем выражение $T_{1,1}(r_0, t)$ в форме суммы Фурье первого порядка:

$$T_{1,1}(r_0, t) = z_0 + r_0 a_0 + r_0 a \cos t + r_0 b \sin t = A_0 + A_1 \cos t + B_1 \sin t.$$

На основе значений $T_{1,1}(r, t)$ в точках $(r_0, \frac{\pi}{3}), (r_0, \pi), (r_0, \frac{5\pi}{3})$ для данной суммы Фурье определим A_0, A_1, B_1, a_0, a, b и уравнение $T_{1,1}(r, t)$:

$$A_0 = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 z_i = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3};$$

$$A_1 = \frac{2}{3} \sum_{i=1}^3 z_i \cos t_i = \frac{z_1 + z_3 - 2z_2}{3}; B_1 = \frac{2}{3} \sum_{i=1}^3 z_i \sin t_i = \frac{\sqrt{3}(z_1 - z_3)}{3};$$

$$a_0 = \frac{z_1 + z_2 + z_3 - 3z_0}{3r_0}; a = \frac{z_1 + z_3 - 2z_2}{3r_0}; b = \frac{\sqrt{3}(z_1 - z_3)}{3r_0};$$

$$T_{1,1}(r, t) = z_0 + r \frac{z_1 + z_2 + z_3 - 3z_0}{3r_0} + r \frac{z_1 + z_3 - 2z_2}{3r_0} \cos t + r \frac{\sqrt{3}(z_1 - z_3)}{3r_0} \sin t.$$

С помощью $T_{1,1}(r, t)$ можно вычислять приближённое значение $f(x, y)$ в разных точках на рассматриваемой окружности с $r = r_0$. Например, вычислим такие значения в точках C_4, C_5, C_6 с направлениями $0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ (рис. 11):

$$\begin{aligned} f(C_4) &= k(r_0, 0) \approx T_{1,1}(r_0, 0) = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} + \frac{z_1 + z_3 - 2z_2}{3} \cos 0 + \frac{\sqrt{3}(z_1 - z_3)}{3} \sin 0 = \\ &= \frac{2z_1 + 2z_3 - z_2}{3}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(C_5) &= k\left(r_0, \frac{2\pi}{3}\right) \approx T_{1,1}\left(r_0, \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} + \frac{z_1 + z_3 - 2z_2}{3} \cos \frac{2\pi}{3} + \\ &+ \frac{\sqrt{3}(z_1 - z_3)}{3} \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{2z_1 + 2z_2 - z_3}{3}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(C_6) &= k\left(r_0, \frac{4\pi}{3}\right) \approx T_{1,1}\left(r_0, \frac{4\pi}{3}\right) = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} + \frac{z_1 + z_3 - 2z_2}{3} \cos \frac{4\pi}{3} + \\ &+ \frac{\sqrt{3}(z_1 - z_3)}{3} \sin \frac{4\pi}{3} = \frac{2z_2 + 2z_3 - z_1}{3}. \end{aligned}$$

Полученные формулы вычисления значений в C_4, C_5, C_6 не требуют значения z_0 , т. е. в этом случае можно не иметь фактического значения z_0 , а вычислить его, например, линейной интерполяцией на основе значений в точках C_2, C_4 :

$$f(C_0) = k(0, t) \approx \frac{f(C_2) + f(C_4)}{2} = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}.$$

Приведём примеры формул вычисления с помощью $T_{1,1}(r, t)$ аппроксимации значения функции ещё в ряде точек на окружности и внутри неё:

$$\begin{aligned}
T_{1;1}\left(r_0; \frac{\pi}{2}\right) &= \frac{(1+\sqrt{3})z_1+z_2+(1-\sqrt{3})z_3}{3}; & T_{1;1}\left(r_0; -\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{(1-\sqrt{3})z_1+z_2+(1+\sqrt{3})z_3}{3}, \\
T_{1;1}\left(\frac{-r_0}{2}; \pi\right) &= \frac{z_1+4z_2+z_3}{6}; & T_{1;1}\left(\frac{r_0}{2}; 0\right) &= \frac{z_1+z_3}{2}; & T_{1;1}\left(\frac{r_0}{2}; \frac{\pi}{2}\right) &= \frac{(2+\sqrt{3})z_1+2z_2+(2-\sqrt{3})z_3}{6}, \\
T_{1;1}\left(\frac{r_0}{2}; -\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{(2-\sqrt{3})z_1+2z_2+(2+\sqrt{3})z_3}{6}.
\end{aligned}$$

На основе фактических значений функции в ограниченном количестве точек – узлов сетки (рис. 11) можно получать расчётные значения функции во многих других точках по представленным формулам.

Аналогичным образом можно построить сетку на основе правильного шестиугольника. Используя данные о значениях $f(x, y)$ в его вершинах, можно построить аппроксимант $k(r, t)$ в виде фт-многочлена $T_{2;2}(r, t)$, а с его помощью определить формулы повышенной точности расчётных значений функции во многих точках на окружности, описанной вокруг шестиугольника, и внутри неё.

Также отметим, что важным является и сравнение представленных методов аппроксимации функций на основе тригонометрического преобразования с известными методами (на основе формул Тейлора, рядов Фурье, теорем А. Н. Колмогорова и В. И. Арнольда и др.), анализ возможного их комбинирования, но это требует отдельного детального исследования.

Преобразование функций с числом аргументов большим двух

Далее рассмотрим метод определения преобразования функций с тремя и большим количеством переменных. Начнём с определения преобразования функции трёх действительных переменных $u = f(x, y, z)$ с центром в точке (x_0, y_0, z_0) . Рассмотрим $u = f(x, y, z)$, как функцию двух переменных x, y с параметром z и определим для неё с центром (x_0, y_0, z) преобразованную функцию, с параметром z : $k(r, t, z) = f(x_0 + r \cos t, y_0 + r \sin t, z)$.

Тогда при $r = 0$ значение $k(0, t, z) = f(x_0, y_0, z)$ при всех t и z , а также $k(r, t, z) = f(x, y, z)$ при $r > 0$ и $0 \leq t < 2\pi$ в соответствующих точках, где значение $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$, а t – соответствующий угол отклонения, характеризующий горизонтальное направление от центра. Поэтому далее рассматриваем функцию $k(r, t, z)$ в той части области определения, где $r \geq 0$ и значения $0 \leq t < 2\pi$. На рис. 12 показаны соответствующие точки областей определения $f(x, y, z)$ и $k(r, t, z)$.

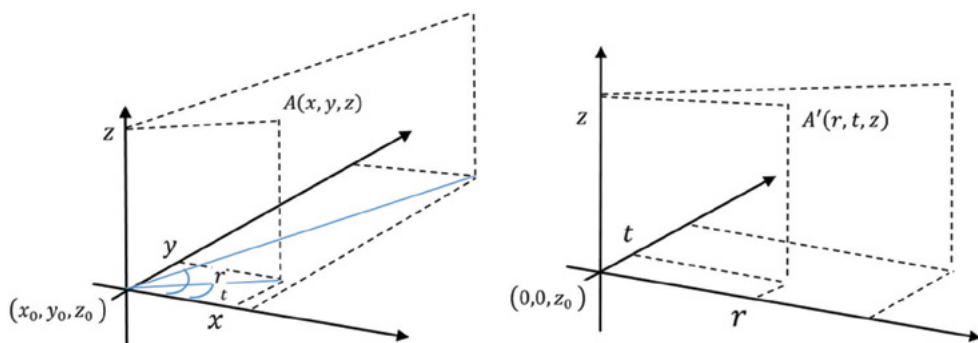


Рис. 12 / Fig. 12. Соответствующие точки областей определения $f(x, y, z)$ и $k(r, t, z)$ /
The corresponding points of the domains of definition of $f(x, y, z)$ and $k(r, t, z)$

Источник: подготовлено автором

Далее рассматриваем $k(r, t, z) = f(x_0 + r \cos t, y_0 + r \sin t, z)$, как функцию трёх переменных r, t, z с условием $r \geq 0$ и $0 \leq t < 2\pi$. Теперь в уравнении этой функции переменную t считаем параметром, и для полученной таким образом функции двух независимых переменных r, z проводим преобразование с центром в точке $(0, z_0, t)$ и получаем преобразованную функцию (обозначим её ${}^2k(v, q, t)$) заменой переменных $r = 0 + v \cos q$, $z = z_0 + v \sin q$:

$${}^2k(v, q, t) = f(x_0 + (0 + v \cos q) \cos t, y_0 + (0 + v \cos q) \sin t, z_0 + v \sin q) = f(x_0 + v \cos q \cos t, y_0 + v \cos q \sin t, z_0 + v \sin q).$$

В этом случае $v = \sqrt{r^2 + (z - z_0)^2}$, а q – угол отклонения, характеризующий вертикальное направление от центра. При $v = 0$ значение ${}^2k(0, q, t) = k(0, t, z_0)$ для всех q и t , а ${}^2k(v, q, t) = k(r, t, z) = f(x, y, z)$ в соответствующих точках при $v > 0$ и $q \in [0; \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3\pi}{2}; 2\pi)$. Ограничение $q \in [0; \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3\pi}{2}; 2\pi)$ вместо $0 \leq q < 2\pi$ обосновано тем, что в указанной выше замене переменных значения $v \cos q = r \geq 0$ в соответствии с предыдущим преобразованием. Тогда из условия $v \geq 0$ следует требование $\cos q \geq 0$, и получаем сужение ограничения $0 \leq q < 2\pi$ до $q \in [0; \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3\pi}{2}; 2\pi)$. Учитывая, что ${}^2k(v, q, t)$ периодическая по q с периодом 2π и нас интересуют только значения функции, где $\cos q \geq 0$, ограничения $q \in [0; \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3\pi}{2}; 2\pi)$ можно заменить на $-\frac{\pi}{2} \leq q \leq \frac{\pi}{2}$ для удобства.

На рис. 13 показаны соответствующие точки областей определения $f(x, y, z)$ и ${}^2k(v, q, t)$.

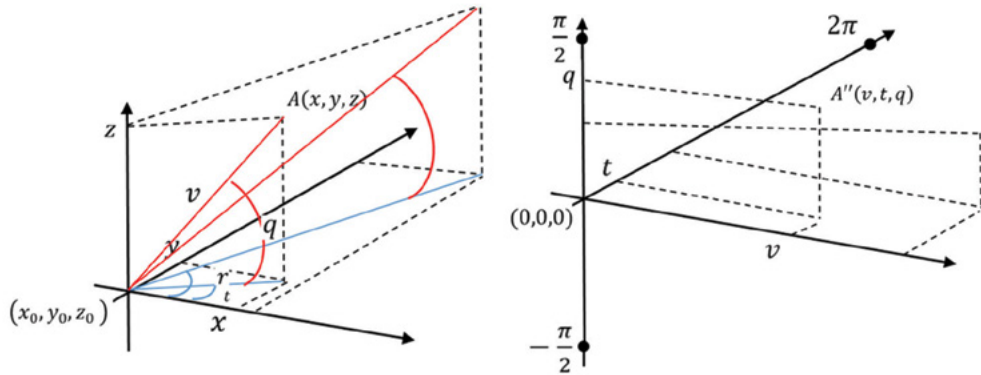


Рис. 13 / Fig. 13. Соответствующие точки областей определения $f(x, y, z)$ и ${}^2k(v, t, q)$ /
The corresponding points of the domains of definition of $f(x, y, z)$ and ${}^2k(v, t, q)$

Источник: подготовлено автором

Таким образом, данное двухэтапное преобразование $f(x, y, z)$ с центром (x_0, y_0, z_0) определяется следующей заменой переменных в её уравнении:

$$\begin{cases} x = x_0 + v \cos q \cos t \\ y = y_0 + v \cos q \sin t ; \\ z = z_0 + v \sin q \end{cases}$$

$${}^2k(v, q, t) = f(x_0 + v \cos q \cos t, y_0 + v \cos q \sin t, z_0 + v \sin q).$$

Уравнения преобразованных функций трёх переменных содержат переменные t и q только под знаком синуса или косинуса, а в целях исследования и приближения $f(x, y, z)$ вокруг (x_0, y_0, z_0) с помощью преобразованной функции ${}^2k(v, q, t)$ последняя рассматривается с ограничением по области

$$\text{определения} \begin{cases} v \geq 0 \\ 0 \leq t < 2\pi \\ -\frac{\pi}{2} \leq q \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Обратное преобразование ${}^2k(v, q, t) = \psi(v, \cos t, \sin t, \cos q, \sin q)$ в соответствующую функцию $u = f(x, y, z)$ определяется правилом замены в ψ :

$$\left\{ \begin{array}{l} v = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} \\ \cos t = \frac{x - x_0}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} \\ \sin t = \frac{y - y_0}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} \\ \cos q = \frac{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}} \\ \sin q = \frac{z - z_0}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}} \end{array} \right. .$$

По аналогии определения радиальных и кольцевых тригонометрических функций двух переменных определяются аналогичные функции трёх переменных, но с учётом, что кроме горизонтального типа направлений от центра в случае трёх переменных имеются направления вертикального типа. Назовём эти функции д-радиальными и сферическими тригонометрическими функциями и определим их следующим образом:

$$u = \sin \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} - \text{д-радиальный синус};$$

$$u = \cos \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} - \text{д-радиальный косинус};$$

$$u = \tan \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} - \text{д-радиальный тангенс};$$

$$u = \cot \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} - \text{д-радиальный котангенс};$$

$$z = \frac{z - z_0}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}} - \text{сферический синус};$$

$$z = \frac{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}} - \text{сферический косинус};$$

$$z = \frac{z - z_0}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} - \text{сферический тангенс};$$

$$z = \frac{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}{z - z_0} - \text{сферический котангенс}.$$

Д-радиальные функции демонстрируют соответствующее периодическое изменение значений во всех направлениях в пространстве от точки аргументов (x_0, y_0, z_0) , а сферические функции – периодическое изменение значений при перемещении точки аргументов по сфере с центром (x_0, y_0, z_0) для каждого фиксированного расстояния до центра v .

Как и в случае с функциями двух переменных, можно определить методы приближения вокруг точки (x_0, y_0, z_0) непериодических, периодических и центробежно периодических функций $f(x, y, z)$ через приближение ${}^2k(v, q, t)$ соответствующими многочленами по v , тригонометрическими суммами по v, t и q и их комбинациями с последующим обратными преобразованием.

Рассматривая теперь функцию четырёх переменных $f(x, y, z, u)$ с центром (x_0, y_0, z_0, u_0) , следуем той же логике. Будем рассматривать эту функцию, как функцию трёх переменных x, y, z , считая u в уравнении параметром. Определяем для неё преобразованную функцию с центром (x_0, y_0, z_0, u) :

$${}^2k(v, q, t, u) = f(x_0 + v \cos q \cos t, y_0 + v \cos q \sin t, z_0 + v \sin q, u), v \geq 0,$$

$$\begin{cases} v \geq 0 \\ 0 \leq t < 2\pi \\ -\frac{\pi}{2} \leq q \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

Далее рассматриваем полученное уравнение, как функцию двух переменных v, u с двумя параметрами q, t , и строим преобразованную с центром $(0, q, t, u_0)$ функцию, которая будет функцией двух переменных r, h с двумя параметрами q, t (в ${}^2k(v, q, t, u)$ заменяем v на $0 + r \cos h$ и u на $u_0 + r \sin h$):

$${}^3k(r, h, q, t) = f(x_0 + r \cos h \cos q \cos t, y_0 + r \cos h \cos q \sin t, z_0 + r \cos h \sin q, u_0 + r \sin h).$$

Теперь в этом уравнении параметры q, t будем считать переменными, как и r, h . Тогда получаем функцию четырёх переменных, которая и является искомой преобразованной с центром (x_0, y_0, z_0, u_0) функцией для $f(x, y, z, u)$. Таким образом, правило преобразования функции $f(x, y, z, u)$ определяется заменами переменных:

$$\begin{cases} x = x_0 + r \cos h \cos q \cos t \\ y = y_0 + r \cos h \cos q \sin t \\ z = z_0 + r \cos h \sin q \\ u = u_0 + r \sin h \end{cases}$$

Для исследования и приближения функции $f(x, y, z, u)$ вокруг точки (x_0, y_0, z_0, u_0) функцию ${}^3k(r, h, q, t)$ следует рассматривать в той части области определения, где выполняются условия:

$$\begin{cases} r \geq 0 \\ 0 \leq t < 2\pi \\ -\frac{\pi}{2} \leq q \leq \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2} \leq h \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

По аналогии с преобразованными функциями двух и трёх переменных определяются формулы обратного преобразования, соответствующие тригонометрические функции четырёх переменных, методы приближения функций.

Аналогичные действия приводят к общему правилу преобразования функции n переменных $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ с центром в точке аргументов $(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$, т. е. путём соответствующей замены аргументов в её уравнении. В результате получим преобразованную функцию n переменных в R^n с декартовой системой координат: ${}^{n-1}k(r, t_{n-1}, t_{n-2}, \dots, t_1) =$

$$= f(x_{10} + r \cos t_{n-1} \cos t_{n-2} \dots \cos t_1, x_{20} + r \cos t_{n-1} \cos t_{n-2} \dots \cos t_2 \sin t_1, x_{30} + r \cos t_{n-1} \cos t_{n-2} \dots \cos t_3 \sin t_2, \dots, x_{(n-1)0} + r \cos t_{n-1} \sin t_{n-2}, x_{n0} + r \sin t_{n-1}); \quad r = \sqrt{(x_1 - x_{10})^2 + (x_2 - x_{20})^2 + \dots + (x_n - x_{n0})^2}.$$

Для исследования и приближения функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ вокруг точки пространства аргументов $(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$ можно исследовать и приближать преобразованную функцию ${}^{n-1}k(r, t_{n-1}, t_{n-2}, \dots, t_1)$ в области, определяемой ограничениями:

$$\left\{ \begin{array}{l} r \geq 0 \\ 0 \leq t_1 < 2\pi \\ -\frac{\pi}{2} \leq t_2 \leq \frac{\pi}{2} \\ \dots \\ -\frac{\pi}{2} \leq t_{n-1} \leq \frac{\pi}{2} \end{array} \right.$$

По аналогии с описанными выше преобразованиями определяются правила обратного преобразования и для случая функций n переменных.

Заключение

Данная работа в определённой степени расширяет спектр теоретических исследований в области функций нескольких действительных переменных, в частности связанных с более детальным исследованием поведения функций в окрестности точки, включая степень её изменения и выпуклости по направлениям, с разложением функций нескольких переменных в ряды и тригонометрические бесконечные суммы, связанные с рядом Тейлора и рядом Фурье, с определением, исследованием и использованием соответствующих тригонометрических и центробежно периодических функций $n \geq 2$ переменных и с другими аспектами.

Полученные теоретические результаты могут быть использованы для разработки численных методов и математического моделирования в разных областях. Например, представленный подход к исследованию роста, убывания и выпуклости функций по разным направлениям может быть полезен в прикладных исследованиях, связанных с минимизацией функций, анализом выпуклости функций, построением выпуклых объектов [6–8]. Представленные в работе центробежные периодические функции и численные методы аппроксимации функций двух переменных вокруг точки по всем направлениям от неё, в том числе на нестандартных сетках аргументов, могут быть использованы в задачах моделирования центробежно волновых процессов, которые исследуются в сейсмологии, физики взрыва, акустике, радиофизике и других областях [9–12]. Эти численные методы могут быть расширены до функций большего числа аргументов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х. Математический анализ. Начальный курс; 2-е изд. М.: МГУ, 1985. 682 с.

2. Ульянов А. П. Основы математического анализа для студентов-физиков. Часть 3. Функции нескольких переменных: учебное пособие; 2-е изд. Новосибирск: Новосибирский государственный университет, 2019. 96 с.
3. Диткин В. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: Физматгиз, 1961. 524 с. (Серия «Справочная математическая библиотека»)
4. Волков В. А. Ряды Фурье. Интегральные преобразования Фурье и Радона. Екатеринбург: Изд-во Уральского университета, 2014. 32 с.
5. Фадеев М. А., Марков К. А. Численные методы: учебное пособие. Н. Новгород: ННГУ, 2010. 158 с.
6. Арушанян И. О. Алгоритмы безусловной минимизации функций многих переменных. М.: МГУ, 2017. 44 с.
7. Смирнов А. В. Метод оценки выпуклости рельефа целевых функций в процессе поиска экстремума // Russian Technological Journal. 2025. Т. 13. № 2. С. 121–131. DOI: 10.32362/2500-316X-2025-13-2-121-131.
8. Бахтиярова Л. И. Численные методы для решения задачи о нахождении выпуклой пространственной фигуры вращения максимальной площади поверхности при заданных ограничениях на её ширину // Молодой учёный. 2017. № 9 (143). С. 1–7.
9. Вальгер С. А., Фёдорова Н. Н., Фёдоров А. В. Математическое моделирование распространения взрывных волн и их воздействия на объекты // Физика горения и взрыва. 2017. Т. 53. № 4. С. 72–83.
10. Скобельцын С. А., Толоконников Л. А. Моделирование рассеяния звука шаром с неоднородным покрытием в плоском волноводе // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2019. № 9. С. 150–158.
11. Степанов П. Ю., Гоманюк Ю. А. Математическое моделирование кинематики сейсмических волн в сложно построенных средах // Вестник Московского университета. Серия 4. Геология. 2022. № 6. С. 167–178. DOI: 10.33623/0579-9406-2022-6-167-178.
12. Ненашев В. А., Блаунштейн Н. Ш. Моделирование процесса распространения радиоволн в канале «земля-атмосфера» // Информационно-управляющие системы. 2016. № 6. С. 25–33. DOI: 10.15217/issn1684-8853.2016.6.25.

REFERENCES

1. Ilyin, V. A., Sadovnichy, V. A. & Sendov, B. Kh. (1985). *Mathematical Analysis. Basic Course*. Moscow: Lomonosov Moscow State University publ. (in Russ.).
2. Ulyanov, A. P. (2019). *Fundamentals of Mathematical Analysis for Physics Students. Part 3. Functions of Several Variables*. Novosibirsk: Novosibirsk State University publ. (in Russ.).
3. Ditkin, V. A. & Prudnikov, A. P. (1961). *Integral Transforms and Operational Calculus* (Series "Reference Mathematical Library"). Moscow: Fizmatgiz publ. (in Russ.).
4. Volkov, V. A. (2014). *Fourier Series. Fourier and Radon Integral Transforms*. Yekaterinburg: Ural University publ. (in Russ.).

5. Fadeev, M. A. & Markov, K. A. (2010). *Numerical Methods*. N. Novgorod: UNN publ. (in Russ.).
6. Arushanyan, I. O. (2017). *Algorithms for Unconstrained Minimization of Functions of Many Variables*. Moscow: Lomonosov Moscow State University publ. (in Russ.).
7. Smirnov, A. V. (2025). Method for estimating objective function landscape convexity during extremum search. In: *Russian Technological Journal*, 13 (2), 121–131. DOI: 10.32362/2500-316X-2025-13-2-121-131 (in Russ.).
8. Bakhtiyarova, L. I. (2017). Numerical methods for solving the problem of finding a convex spatial figure of revolution of maximum surface area under given restrictions on its width. In: *Young scientist*, 9 (143), 1–7 (in Russ.).
9. Valger, S. A., Fedorova, N. N. & Fedorov, A. V. (2017). Mathematical modeling of propagation of explosion waves and their effect on various objects. In: *Combustion, Explosion, and Shock Waves*, 53 (4), 72–83. DOI: 10.1134/S0010508217040074.
10. Skobel'tsyn, S. A. & Tolokonnikov, L. A. (2019). Modelling of sound scattering by sphere with an inhomogeneous coating in a plane waveguide. In: *Izvestiya Tula State University. Technical sciences*, 9, 150–158.
11. Stepanov, P. Yu. & Gomanyuk, J. A. (2022). Mathematical modeling of seismic wave kinematics in complex media. In: *Moscow University Geology Bulletin*, 6, 167–178. DOI: 10.33623/0579-9406-2022-6-167-178 (in Russ.).
12. Nenashev, V. A. & Blaunstein, N. S. (2016). Modeling Radio Wave Propagation in an Earth-Atmosphere Channel. In: *Information and Control Systems*, 6, 25–33. DOI: 10.15217/issn1684-8853.2016.6.25.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Колягин Андрей Юрьевич (г. Москва) – кандидат педагогических наук, независимый исследователь;

e-mail: ak.russia4444@yandex.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Andrey Yu. Kolyagin (Moscow) – Cand. Sci. (Education), independent researcher;

e-mail: ak.russia4444@yandex.ru