

Научная статья

УДК 517.958

DOI: 10.18384/2949-5067-2026-2-103-112

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ – НЕЙМАНА ДЛЯ ОБОБЩЁННОГО УРАВНЕНИЯ ТРИКОМИ

Алгазин О. Д.

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана

(национальный исследовательский университет), г. Москва, Российская Федерация

e-mail: tori66@yandex.ru

Поступила в редакцию 25.12.2025

После доработки 27.01.2026

Принята к публикации 28.01.2026

Аннотация

Целью работы является поиск условий, при выполнении которых уравнение Трикоми имеет точные решения и нахождение этих решений.

Процедура и методы. Рассматривается задача Дирихле – Неймана для многомерного обобщения уравнения Трикоми в бесконечной области, ограниченной двумя гиперплоскостями. С помощью преобразования Фурье показано, что эта задача в области эллиптичности уравнения имеет единственное решение в классе функций медленного роста.

Результаты. Показано, что в случае, когда правые части уравнения и граничных условий являются полигармоническими функциями (в частности полиномами), существуют точные решения задачи. Приведён алгоритм получения решения.

Теоретическая и практическая значимость заключается в нахождении условий существования точных решений задачи и нахождении самих точных решений, которые могут использоваться для проверки точности приближенных методов.

Ключевые слова: функции медленного роста, полигармонические функции, преобразование Фурье, задача Дирихле – Неймана, уравнение Трикоми

Для цитирования:

Алгазин О. Д. Точные решения задачи Дирихле – Неймана для обобщённого уравнения Трикоми // Вестник Государственного университета просвещения. Серия: Физика-Математика. 2026. № 2. С. 103–111. <https://doi.org/10.18384/2310-7251-2026-2-103-112>

Original research article

EXACT SOLUTIONS OF THE DIRICHLET – NEUMANN PROBLEM
FOR THE GENERALIZED TRICOMI EQUATION

O. Algazin

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

e-mail: mopi66@yandex.ru

Received by the editorial office 25.12.2025

Revised by the author 27.01.2026

Accepted for publication 28.01.2026

Abstract

Aim. The aim of the work is to find conditions under which the Tricomi equation has exact solutions and to find these solutions.

Methodology. We consider the Dirichlet – Neumann problem for a multidimensional generalization of the Tricomi equation in an infinite domain bounded by two hyperplanes. Using the Fourier transform, it is shown that this problem in the domain of ellipticity of the equation has a unique solution in the class of functions of slow growth.

Results. It is shown that when the right-hand sides of the equation and boundary conditions are polyharmonic functions (specifically, polynomials), exact solutions to the problem exist. An algorithm for obtaining the solution is presented.

Research implications consist of finding the conditions for the existence of exact solutions to the problem and finding the exact solutions themselves, which can be used to test the accuracy of approximate methods.

Keywords: functions of slow growth, polyharmonic functions, Fourier transform, Dirichlet-Neumann problem, Tricomi equation

For citation:

Algazin, O. D. (2026). Exact solutions of the Dirichlet – Neumann problem for the generalized Tricomi equation. In: *Bulletin of the Federal State University of Education. Series: Physics and Mathematics*, 2, pp. 103–112. <https://doi.org/10.18384/2310-7251-2026-2-103-112>

Введение

В статье рассматривается уравнение

$$y\Delta_x(u(x, y)) + u_{yy}(x, y) = f(x, y), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad a < y < b,$$

где

$$\Delta_x = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}, \quad x = (x_1, \dots, x_n).$$

Это уравнение смешанного типа является обобщением уравнения Трикоми [1; 2]

$$yu_{xx} + u_{yy} = f.$$

Применения уравнений смешанного типа описаны в [3–5]. Краевые задачи для них в смешанных областях, вообще говоря, поставлены некорректно [6]. Уравнениям смешанного типа посвящено много работ, например [7–10].

В данной работе показано, что в области эллиптичности уравнения задача Дирихле – Неймана имеет единственное решение в классе функций медленного роста, в области, где уравнение имеет смешанный тип, решение не единственно. Для случая, когда правые части уравнения и граничных условий являются полигармоническими функциями, существуют точные решения задачи, приведён алгоритм их получения.

1. Постановка задачи

Рассмотрим уравнение

$$u\Delta_x(u(x, y)) + u_{yy}(x, y) = f(x, y), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad a < y < b, \quad (1)$$

где

$$\Delta_x = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}, \quad x = (x_1, \dots, x_n),$$

и граничные условия

$$u(x, a) = \varphi(x), \quad u_y(x, b) = \psi(x). \quad (2)$$

Здесь

$$u(x, a) = \lim_{y \rightarrow a+0} u(x, y), \quad u_y(x, b) = \lim_{y \rightarrow b-0} u_y(x, y).$$

Будем искать решение задачи в классе функций медленного роста по переменной x . То есть будем считать, что для каждого $y \in (a, b)$ существует постоянная $m \geq 0$, такая, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x, y)| (1 + |x|)^{-m} dx < C.$$

Также будем считать, что $f(x, y)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ принадлежат тому же классу функций.

Эту задачу можно свести к случаю однородного уравнения или однородных граничных условий.

Если $\tilde{u}(x, y)$ – некоторое решение уравнения (1), то для функции $v(x, y) = u(x, y) - \tilde{u}(x, y)$ получаем однородное уравнение

$$v\Delta_x v + v_{yy} = 0, \quad a < y < b, \quad (3)$$

и краевые условия

$$v(x, a) = \varphi_1(x), \quad v_y(x, b) = \psi_1(x) \quad (4)$$

где $\varphi_1(x) = \varphi(x) - \tilde{u}(x, a)$, $\psi_1(x) = \psi(x) - \tilde{u}_y(x, b)$.

Если $z(x, y)$ – некоторая функция, удовлетворяющая краевым условиям (2), то для функции $v(x, y) = u(x, y) - z(x, y)$ получаем неоднородное уравнение

$$y\Delta_x v + v_{yy} = f_1(x, y), \quad a < y < b, \quad (5)$$

где $f_1(x, y) = f(x, y) - y\Delta_x z - z_{yy}$ и однородные краевые условия

$$v(x, a) = 0, \quad v_y(x, b) = 0. \quad (6)$$

2. Решение задачи в области эллиптичности уравнения

Рассмотрим область (слой) $\{x \in \mathbb{R}^n, 0 < y < b\}$, в которой обобщённое уравнение Трикоми эллиплично. Достаточно рассмотреть случай однородного уравнения, поскольку общий случай сводится к нему.

$$y\Delta_x(u(x, y)) + u_{yy}(x, y) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad 0 < y < b, \quad (7)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_y(x, b) = \psi(x), \quad (8)$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – функции медленного роста.

Решение $u(x, y)$ ищем в классе функций медленного роста по x . Применяем преобразование Фурье по x для пространства $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ – пространства обобщённых функций медленного роста [11]:

$$\mathcal{F}_x[u(x, y)](\tau, y) = U(\tau, y).$$

Применим преобразование Фурье по x к уравнению (7) и краевым условиям (8). Получим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с параметром $\tau \in \mathbb{R}^n$, $|\tau| = (\tau_1^2 + \dots + \tau_n^2)^{1/2}$,

$$-|\tau|^2 y U(\tau, y) + U_{yy}(\tau, y) = 0, \quad 0 < y < b \quad (9)$$

и краевые условия

$$U(\tau, 0) = \Phi(\tau), \quad U_y(\tau, b) = \Psi(\tau). \quad (10)$$

Подстановка $\eta = |\tau|^{2/3} y$ приводит уравнение (9) к уравнению Эйри

$$U_{\eta\eta} - \eta U = 0,$$

его общее решение имеет вид:

$$U = C_1 \text{Ai}(\eta) + C_2 \text{Bi}(\eta),$$

где $Ai(\eta)$ и $Bi(\eta)$ – функции Эйри. Тогда общее решение уравнения (9) запишется в виде:

$$U(\tau, y) = c_1(\tau)Ai(|\tau|^{2/3}y) + c_2(\tau)Bi(|\tau|^{2/3}y).$$

Из краевых условий (10), получим

$$U(\tau, y) = K(\tau, y)\Phi(\tau) + L(\tau, y)\Psi(\tau), \quad (11)$$

где

$$K(\tau, y) = \frac{Ai(|\tau|^{2/3}y)Bi'(|\tau|^{2/3}b) - Bi(|\tau|^{2/3}y)Ai'(|\tau|^{2/3}b)}{Ai(0)Bi'(|\tau|^{2/3}b) - Bi(0)Ai'(|\tau|^{2/3}b)},$$

$$L(\tau, y) = \frac{Ai(0)Bi(|\tau|^{2/3}y) - Bi(0)Ai(|\tau|^{2/3}y)}{|\tau|^{2/3}[Ai(0)Bi'(|\tau|^{2/3}b) - Bi(0)Ai'(|\tau|^{2/3}b)]}.$$

После применения обратного преобразования Фурье получим в виде свёртки единственное решение задачи Дирихле – Неймана (7), (8) в классе функций медленного роста

$$u(x, y) = k(x, y) * \varphi(x) + l(x, y) * \psi(x), \quad (12)$$

где

$$k(x, y) = \mathcal{F}_\tau^{-1}(K(\tau, y)), \quad l(x, y) = \mathcal{F}_\tau^{-1}(L(\tau, y)).$$

$K(\tau, y)$ и $L(\tau, y)$ как функции переменного τ бесконечно дифференцируемые и быстро убывающие, то есть принадлежат пространству $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, а, следовательно, и $k(x, y)$, и $l(x, y)$ как функции переменного x принадлежат пространству $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, поскольку преобразование Фурье переводит $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ в себя. Поэтому свёртки (12), где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ принадлежат пространству $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, существуют.

Точные решения можно получить в явном виде в случае, когда функции $f(x, y)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ являются полигармоническими по x , то есть существуют такие натуральные числа N_1, N_2, N_3 , что $\Delta_x^{N_1}f(x, y) = 0$, $\Delta_x^{N_2}\varphi(x, y) = 0$, $\Delta_x^{N_3}\psi(x, y) = 0$, и $f(x, y)$ интегрируема по y в (a, b) . В частности, если $\varphi(x), \psi(x), f(x, y)$ – полиномы. Решение задачи $u(x, y)$ в этом случае также будет полиномом. Случай $n = 1$ рассмотрен в [12].

Достаточно рассмотреть случай задачи с однородными граничными условиями, так как общий случай сводится к нему

$$y\Delta_x(u(x, y)) + u_{yy}(x, y) = f(x, y), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad 0 < y < b, \quad (13)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_y(x, b) = 0, \quad (14)$$

где $f(x, y)$ интегрируема по y в (a, b) и $\Delta_x^N f(x, y) = 0$ для некоторого N , в частности $f(x, y)$ является полиномом по переменным x и y .

Обозначим

$$y\Delta_x + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = B + A,$$

Где

$$B = y\Delta_x, \quad A = \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

также обозначим

$$A^{-1}(f) = \int_0^y (y - \xi)f(x, \xi)d\xi - y \int_0^b f(x, \xi)d\xi.$$

Решением задачи (13), (14) будет функция

$$u(x, y) = \left(\sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n A^{-1}(BA^{-1})^n \right) (f) \quad (15)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} (B + A) \left(\sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n A^{-1}(BA^{-1})^n \right) &= \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n (BA^{-1})^n + \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n (BA^{-1})^{n+1} = \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n (BA^{-1})^n + \sum_{n=1}^N (-1)^{n-1} (BA^{-1})^n = \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n (BA^{-1})^n - \sum_{n=1}^N (-1)^n (BA^{-1})^n = I - (-1)^N (BA^{-1})^N = I, \end{aligned}$$

где I – тождественный оператор.

То есть функция (15) является решением уравнения (13). Поскольку

$$A^{-1}(f)(x, 0) = 0 \quad \text{и} \quad [A^{-1}(f)]_y(x, b) = 0,$$

то функция (15) удовлетворяет граничным условиям (14).

Пример 1

Рассмотрим задачу Дирихле для неоднородного уравнения Трикоми

$$\begin{aligned} y\Delta_x u + u_{yy} &= 2x_1^2 x_2 y^3, & x \in \mathbb{R}^2, & 0 < y < 1, \\ u(x, 0) &= x_1 x_2^2, & u_y(x, 1) &= 0, & x \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Возьмём

$$z(x, y) = x_1 x_2^2,$$

для функции $v(x, y) = u(x, y) - z(x, y)$ получим задачу

$$\begin{aligned} y\Delta_x v + v_{yy} &= f(x, y), & x \in \mathbb{R}^2, & 0 < y < 1, \\ f(x, y) &= 2x_1^2 x_2 y^3 - 2x_1 y \\ v(x, 0) &= 0, & v(x, 1) &= 0, & x \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Поскольку $\Delta_x^2 f(x, y) = 0$, то решением задачи будет функция

$$\begin{aligned} u(x, y) &= z(x, y) + v(x, y) = z(x, y) + A^{-1}(f) - A^{-1}(BA^{-1}(f)) = \\ &= x_1 x_2^2 + \frac{1}{10} x_1^2 x_2 y^5 - \frac{1}{3} x_1 y^3 - \frac{1}{2} x_1^2 x_2 y + x_1 y - \frac{1}{280} x_2 y^8 + \\ &\quad + \frac{1}{12} x_2 y^4 - \frac{32}{105} x_2 y. \end{aligned}$$

3. Решение задачи в области, где уравнение имеет смешанный тип

Рассмотрим задачу

$$y\Delta_x(u(x, y)) + u_{yy}(x, y) = f(x, y), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad -a < y < a, \quad (16)$$

$$u(x, -a) = 0, \quad u_y(x, a) = 0, \quad (17)$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, $f(x, y)$ – полигармонические функции по x и $f(x, y)$ интегрируема по y в $(-a, a)$.

Общий случай $u(x, -a) = \varphi(x)$, $u_y(x, a) = \psi(x)$ сводится к случаю однородных краевых условий.

Решением задачи (16), (17) будет функция

$$u(x, y) = \left(\sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n A^{-1}(BA^{-1})^n \right) (f), \quad (18)$$

где $\Delta_x^N f(x, y) = 0$ и

$$A^{-1}(f) = \int_{-a}^y (y - \xi) f(x, \xi) d\xi - (y + a) \int_{-a}^a f(x, \xi) d\xi.$$

Пример 2

Рассмотрим задачу Дирихле – Неймана для неоднородного уравнения Трикоми

$$\begin{aligned} y\Delta_x u + u_{yy} &= 2x_1^2 x_2 y^3, & x \in \mathbb{R}^2, -1 < y < 1, \\ u(x, -1) &= x_1 x_2^2, & u_y(x, 1) = 0, & x \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Возьмём

$$z(x, y) = x_1 x_2^2,$$

для функции $v(x, y) = u(x, y) - z(x, y)$ получим задачу

$$\begin{aligned} y\Delta_x v + v_{yy} &= f(x, y), & x \in \mathbb{R}^2, -1 < y < 1, \\ f(x, y) &= 2x_1^2 x_2 y^3 - 2x_1 y \\ v(x, 0) &= 0, & v_y(x, 1) = 0, & x \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Поскольку $\Delta_x^2 f(x, y) = 0$, то решением задачи будет функция

$$\begin{aligned} u(x, y) &= z(x, y) + v(x, y) = z(x, y) + A^{-1}(f) - A^{-1}(BA^{-1}(f)) = \\ &= x_1 x_2^2 + \frac{1}{10} x_1^2 x_2 y^5 - \frac{2}{5} x_1^2 x_2 - \frac{1}{2} x_1^2 x_2 y - \frac{1}{3} x_1 y^3 + \frac{2}{3} x_1 + x_1 y - \\ &\quad - \frac{1}{280} x_2 y^8 - \frac{547}{840} x_2 - \frac{74}{105} x_2 y + \frac{1}{12} x_2 y^4 + \frac{2}{15} x_2 y^3. \end{aligned}$$

Это решение не единственно, к нему можно прибавить любое решение однородной задачи, например,

$$\sin(v_1 x_1) \sin(v_2 x_2) (\text{Bi}(\mu_k y) \text{Ai}(-\mu_k) - \text{Ai}(\mu_k y) \text{Bi}(-\mu_k)),$$

где μ_k – любой положительный корень уравнения

$$\text{Bi}'(\mu) \text{Ai}(-\mu) - \text{Ai}'(\mu) \text{Bi}(-\mu) = 0, \quad (20)$$

$$v_1^2 + v_2^2 = \mu_k^3.$$

Заключение

Рассмотрена краевая задача Дирихле – Неймана для неоднородного обобщённого уравнения Трикоми в неограниченной области (слое)

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1}: x \in \mathbb{R}^n, \quad a < y < b\}.$$

Показано, что если правые части уравнения и граничных условий являются полигармоническими функциями (в частности полиномами), то задача имеет точное решение. Приведён алгоритм построения этого решения. Если слой лежит в области эллиптичности уравнения, то решение задачи единственно в классе функций медленного роста по x . Если слой лежит в области, где уравнение имеет смешанный тип, то решение не единственно. Если правые части уравнения и граничных условий являются полиномами, то и решение является полиномом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Tricomi F. Sulle equazioni lineari alle derivate parziali di secondo ordine, di tipo misto // *Atti Della Reale Accademia Dei Lincei. Serie Quinta. Rendiconti. Classe di Scienze di Fisiche, Matematiche e Naturale*. 1923. Vol. 14. P. 134–247.
2. Трикоми Ф. О линейных уравнениях в частных производных второго порядка смешанного типа. М.:ОГИЗ, 1947. 191 с.
3. Берс Л. Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики. М.: Изд-во иностранной литературы, 1961. 208 с.
4. Франкль Ф. И. Избранные труды по газовой динамике. М.: Наука, 1973. 712 с.
5. Бицадзе А. В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981. 448 с.
6. Бицадзе А. В. Некорректность задачи Дирихле для уравнений смешанного типа в смешанных областях // *Доклады Академии наук СССР*. 1958. Т. 122. № 2. С. 167–170.
7. Нахушев А. Н. Критерий единственности задачи Дирихле для уравнения смешанного типа в цилиндрической области // *Дифференциальные уравнения*. 1970. Т. 6. № 1. С. 190–191.
8. Ruzhansky M., Torebek B. T., Turmetov B. Well-posedness of Tricomi – Gellerstedt – Keldysh-type fractional elliptic problems // *Journal of Integral Equations and Applications*. 2022. Vol. 4. No. 3. P. 373–387. DOI: 10.1216/jie.2022.34.373.
9. Nytrebych Z. M. The differential-symbol method of solving the problem with local two-point in time conditions for a partial differential equation // *Journal of Mathematical Sciences*. 2021. Vol. 254. No. 3. P. 406–415. DOI: 10.1007/s10958-021-05312-7.
10. Zhang X. Generalized Tikhonov regularization method for an inverse boundary value problem of the fractional elliptic equation // *Boundary Value Problems*. 2024. Vol. 2024. No. 1. Article no. 80. DOI: 10.1186/s13661-024-01887-7.
11. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979. 318 с.
12. Алгазин О. Д. Полиномиальные решения смешанной краевой задачи Дирихле – Неймана для уравнения Трикоми в полосе // *Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Математика-Физика*. 2018. № 3. С. 8–21. DOI: 10.18384-2310-7251-2018-3-8-21.

REFERENCES

1. Tricomi, F. (1923). Sulle equazioni lineari alle derivate parziali di secondo ordine, di tipo misto. In: *Atti Della Reale Accademia Dei Lincei. Serie Quinta. Rendiconti. Classe di Scienze di Fisiche, Matematiche e Naturale*, 14, 134–247.

2. Tricomi, F. (1947). *On linear partial differential equations of the second order of mixed type*. Moscow: OGIZ publ. (in Russ.).
3. Bers, L. (1961). *Mathematical aspects of subsonic and transonic gas dynamics*. Moscow: Izdatel'stvo Inostrannoi literatury publ. (in Russ.).
4. Frankl, F. I. (1973). *Selected works on gas dynamics*. Moscow, Nauka publ. (in Russ.).
5. Bitsadze, A. V. (1981). *Some classes of partial differential equations*. Moscow: Nauka publ. (in Russ.).
6. Bitsadze, A. V. (1958). Incorrectness of the Dirichlet problem for mixed-type equations in mixed domains. In: *Reports of the USSR Academy of Sciences*, 122 (2), 167–170 (in Russ.).
7. Nakhushev, A. N. (1970). The criterion of uniqueness of the Dirichlet problem for a mixed-type equation in a cylindrical domain. In: *Differential Equations*, 6 (1), 190–191 (in Russ.).
8. Ruzhansky, M., Torebek, B. T. & Turmetov, B. (2022). Well-posedness of Tricomi – Gellerstedt – Keldysh-type fractional elliptic problems. In: *Journal of Integral Equations and Applications*, 4 (3), 373–387. DOI: 10.1216/jie.2022.34.373.
9. Nytrebych, Z. M. (2021). The differential-symbol method of solving the problem with local two-point in time conditions for a partial differential equation. In: *Journal of Mathematical Sciences*, 254 (3), 406–415. DOI: 10.1007/s10958-021-05312-7.
10. Zhang, X. (2024). Generalized Tikhonov regularization method for an inverse boundary value problem of the fractional elliptic equation. In: *Boundary Value Problems*, 2024 (1), 80. DOI: 10.1186/s13661-024-01887-7.
11. Vladimirov, V. S. (1979). *Generalized functions in mathematical physics*. Moscow: Nauka publ. (in Russ.).
12. Algazin, O. D. (2018). Polynomial solutions to the mixed Dirichlet-Neumann boundary value problem for the Tricomi equation in the strip. In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*, 3, 8–21. DOI: 10.18384-2310-7251-2018-3-8-21. (in Russ.).

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Алгазин Олег Дмитриевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры вычислительной математики и математической физики Московского государственного технического университета имени Н. Э. Баумана (национального исследовательского университета);
e-mail: mopi66@yandex.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Oleg D. Algazin – PhD (Phys.-Math.), Assoc. Prof., Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University;
e-mail: mopi66@yandex.ru