

Научная статья**УДК 517.952:533.6.011.8****DOI: 10.18384/2949-5067-2026-2-77-102****К ПРОБЛЕМЕ ЗАМЫКАНИЯ СИСТЕМЫ МОМЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ****Попов С. А.** 

*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),
г. Москва, Российская Федерация
e-mail: flowtech@mail.ru*

Поступила в редакцию 28.01.2026

Принята к публикации 02.02.2026

Аннотация

Цель: сформулировать принцип отбора корректных физико-математических моделей, основанных на системах дифференциальных уравнений в частных производных.

Процедура и методы. Процедура отбора корректных моделей состоит в сравнительном анализе связей между полными дифференциалами из конвективной части системы уравнений и собственными числами их матриц Якоби. В работе используются метод полных дифференциалов и метод конечных разностей.

Результаты. При увеличении числа моментных уравнений в конечных замкнутых системах, таких как система 10-моментов или 13-моментов Грэда, характеристических скоростей звука может стать несколько, и все они отличаются от акустической. Это приводит к появлению субскачка внутри профиля ударной волны. Решение уравнений Грэда теряют устойчивость уже при $M=1.65$. Уравнения Навье – Стокса являются акустически согласованными.

Теоретическая и практическая значимость. Предложенный в работе принцип позволяет исключать математически некорректные модели ещё на начальных этапах их разработки.

Ключевые слова: общее уравнение переноса, система моментных уравнений, замыкание, 13-моментная система Грэда, метод полных дифференциалов, характеристические и акустическая скорости звука, акустическая согласованность, задача о профиле стационарной ударной волны, неравновесность

Для цитирования:

Попов С. А. К проблеме замыкания системы моментных уравнений // Вестник Государственного университета просвещения. Серия: Физика-Математика. 2026. № 2. С. 77–102. <https://doi.org/10.18384/2949-5067-2026-2-77-102>

Original research article

TO THE PROBLEM OF CLOSURE OF THE SYSTEM OF MOMENT EQUATIONS

S. Popov 

Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russian Federation
e-mail: flowmech@mail.ru

Received by the editorial office 28.01.2026

Accepted for publication 02.02.2026

Abstract

Aim: to formulate the principle of selecting correct physical and mathematical models based on systems of partial differential equations.

Methodology. The procedure for selecting correct models consists of a comparative analysis of the relationships between the total differentials from the convective part of the system equations and the eigenvalues of their Jacobian matrix. There total differential method and finite differences method are used in this paper.

Results. With increasing number of moment equations in finite closed systems as the Grad 10-moment or 13-moment systems, there may be several characteristics sound velocities, not equal acoustic sound velocity. This results in the appearance of a subshock within the shock wave profile. Solutions to the Grad equations lose stability already at $M=1.65$. Equations of the Navier – Stokes are acoustic compatibility.

Research implications. The principle proposed in this paper allows for the elimination of mathematically incorrect models at the initial stages of their development.

Keywords: general transport equation, systems of moment equations, closure, Grad's 13-moment system, total differential method, characteristics and acoustic speeds of sound, acoustic compatibility, stationary shock wave profile problem, nonequilibrium

For citation:

Popov, S. A. (2026). To the Problem of Closure of the Systems of Moment Equations. In: *Bulletin of the Federal State University of Education. Series: Physics and Mathematics*, 2, pp. 77–102. <https://doi.org/10.18384/2949-5067-2026-2-77-102>

Введение

Бесконечная незамкнутая последовательность моментных уравнений может быть получена из общего уравнения переноса. Впервые это уравнение было представлено в работе [1]. Оно было выведено на основании анализа динамики поведения смеси двух газов, молекулы которых являются точечными центрами сил отталкивания, нового определения функции распределения f молекул газа по скоростям ξ_i , через описание изменения средних значений $\bar{\Phi} = \frac{1}{n} \int \Phi(\xi) f d\xi$ молекулярных признаков $\Phi(\xi)$ внутри элемента единичного объёма за счёт

соударений между молекулами и их переноса через подвижную плоскость. При этом был использован обычный анализ роста или уменьшения среднего значения в элементе объёма, аналогично тому, как это делается в гидродинамике. Уравнение не учитывало действия массовых сил. В [2], записав выражение скорости изменения $\Phi(\xi)$ для молекул, которые в момент времени t находятся в параллелепипеде dx , а их скорости внутри $d\xi$, используя основное кинетическое уравнение и проинтегрировав его по всем возможным значениям $d\xi$, общее уравнение переноса было получено с учётом действия массовых сил

$$\frac{\partial \rho \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \rho \xi_i \Phi}{\partial x_i} - \rho X_i \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_i} = m \cdot \int (\Phi' - \Phi) \cdot f f_1 g b db d\epsilon d\xi d\xi_1,$$

где ρ – плотность, m – масса молекулы, b и ϵ – прицельные параметры столкновения, а g – модуль относительной скорости молекул. Это уравнение записано с учётом правила суммирования по повторяющимся индексам, которого мы будем придерживаться далее. В работах [1; 2] левые части уравнения, отвечающие за перенос, немного отличались, однако релаксационный член имел весьма схожий вид. Современный способ получения и вид общего уравнения переноса представлены, например, в работе [3] без учёта массовых сил и в [4] с их учётом.

Помимо основных результатов, в работах [1; 2], вероятно, впервые были предприняты попытки вывести систему уравнений гидродинамики. Ещё тогда автор работ [2] обратил внимание на то, что для получения гидродинамических уравнений в привычной форме из общего уравнения переноса следует пренебречь многими членами. В связи с чем встаёт вопрос математической строгости таких операций, даже если они на первый взгляд кажутся вполне законными. Значительный шаг в этом направлении был сделан, например, в работе Г. Грэда [3]. Для замыкания бесконечной цепочки моментных уравнений, получаемой подстановкой различных молекулярных признаков $\Phi(\xi)$ в общее уравнение переноса, им была предложена аппроксимирующая функция распределения f в виде ряда по полиномам Эрмита относительно тепловой скорости, умноженного на локально-равновесную функцию Максвелла. Чтобы получить замкнутую систему с конечным числом уравнений, приходится аппроксимировать функцию распределения конечным числом членов ряда. Ограничиваясь членами третьего порядка, получают так называемое двадцатимоментное приближение, поскольку аппроксимирующая функция содержит двадцать моментов, не все из которых имеют ясный физический смысл. Представляя в функции распределения моменты третьего порядка в виде их свёртки по двум индексам, получают тринадцатимоментную систему уравнений Грэда. Грэд вначале полагал, что такой подход наиболее универсален, поскольку позволяет в принципе получать замкнутые системы «макроскопических» уравнений при произвольных числах Кнудсена. Очевидно,

что полученные таким способом уравнения могут оказаться достаточно точными только для тех течений, в которых постулированная функция распределения будет хорошо аппроксимировать истинную функцию распределения. В частности, впоследствии в работе [5] было показано, что уравнения Грэда при числах Маха $M_\infty > 1.65$ не имеют решений.

Относительно недавно обратили внимание на то, что с процедурой замыкания системы уравнений связана одна из основных особенностей метода Грэда: моменты четвёртого порядка выражаются через моменты более низких порядков локально, без использования балансовых зависимостей, описываемых моментными уравнениями. В результате, например, полученные замыкающие выражения для моментов четвёртого порядка не удовлетворяют своим же моментным уравнениям. Эту особенность назвали рассогласованностью локального и балансового выражений замыкающих моментов. Для её устранения в работах [6; 7] была предложена некоторая процедура регуляризации уравнений Грэда. Авторы этих работ ввели в рассмотрение бесследовые тензоры и их отклонения от своих значений, полученных для 13 моментной функции распределения Грэда. Далее для этих отклонений, используя уравнения для бесследовых тензоров, получаемые из общей системы моментных уравнений, записывают соответствующие им уравнения переноса. После обезразмеривания переменных, входящих в эти уравнения, у источникового члена появляется множитель $\frac{Re}{M} \sim \frac{1}{Kn}$. Далее применяется

процедура, аналогичная методу Чепмена – Энскога, вводится некоторая фиктивная переменная ε , маленькое значение которой аналогично утверждению о малости числа Кнудсена. Введённые отклонения также представляются в виде степенных рядов по этому малому параметру, и эти выражения подставляются в полученные уравнения переноса для отклонений. Анализируя порядок слагаемых, входящих в уравнения, получают, что все слагаемые нулевого приближения равны нулю. Этот случай соответствует исходным уравнениям Грэда. Для поправок первого порядка малости могут быть получены замыкающие соотношения в виде дифференциальных уравнений с частными производными без производной по времени. Если ограничиться первым порядком малости, получается модель, названная авторами R13. Если сохранять поправки второго и более высоких порядков малости, получают приближения типа барнеттовского и супербарнеттовского. При выборе в качестве исходной функции распределения Максвелла в нулевом приближении получают уравнения Эйлера, а в первом – уравнения Навье – Стокса. Регуляризованная модель R13, как было показано авторами и в работах [8; 9], уже не имеет таких жёстких ограничений по числам Маха. Однако ограничение по числам Кнудсена $Kn < 1$, связанное с использованием процедуры Чепмена – Энскога, более жёсткие, чем в исходной 13-моментной модели. Помимо этого, модель R13 содержит громоздкий комплекс смешанных

производных, за счёт чего тип системы отличается от типа уравнения Больцмана, что влияет на характер распространения малых возмущений.

В работах [10; 11] была также предпринята попытка расширения области применимости системы моментных уравнений за счёт повышения её порядка. Её автор отказался от задания априори вида функции распределения молекул газа по скоростям, ограничившись лишь утверждением о том, что замыкающие моменты более чем третьего порядка представляются в виде суммы аппроксимирующего и корректирующего членов. Аппроксимирующая часть выражается в виде всех возможных компактно симметризованных линейных комбинаций моментов второго и третьего порядков, корректирующий член имеет порядок замыкающего момента. В работе получено общее уравнение для моментов N -порядка. Замыкание получается подстановкой в него алгебраического выражения для моментов $N+1$ -порядка при условии, что корректирующий член $N+1$ -порядка принимается равным нулю. Для корректирующих моментов N -порядка используются точные моментные уравнения. Таким образом были построены системы моментных уравнений до шестого порядка включительно. На примере задачи о профиле ударной волны было показано, что повышение порядка системы моментных уравнений не приводит к улучшению решения. Это в работе объяснялось тем, что в условиях сильной термодинамической неравновесности, корректирующие члены по величине соизмеримы с величиной самого замыкающего момента. В данном случае, как и в 13-моментной модели Грэда система уравнений не содержала вторых производных. Вид функции распределения хотя и не задавался, но для моментов $N+1$ порядка использовалось заданное априори алгебраическое уравнение.

Метод моментов

В этом разделе приведён метод моментов для одноатомного газа в его наиболее общей форме, без ограничений на вид функции распределения молекул газа по скоростям. В основе метода лежит общее уравнение переноса, которое может быть строго получено [4] из уравнения Больцмана

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n} + X_n \frac{\partial f}{\partial \xi_n} = Q(f', f), \text{ где} \quad (1)$$

$$Q(f', f) = \int (f' f'_1 - f f_1) g b \, db \, d\varepsilon \, d\xi_1.$$

Умножим обе части этого уравнения на некоторую функцию $\Phi(\xi)$ молекулярных признаков и проинтегрируем то, что получится, по всем возможным скоростям молекул. Поскольку пределы интегрирования не зависят от времени, то поменяем порядок операций интегрирования и дифференцирования, а также воспользуемся правилом интегрирования по

частям. Так как при $\xi_n \rightarrow \infty$ функция $f \rightarrow 0$ и мы также предположим, что $\Phi \cdot f \rightarrow 0$, поэтому в результате получим искомое уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \Phi \cdot f d\xi + \frac{\partial}{\partial x_n} \int \xi_n \Phi \div f d\xi - X_n \int \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_n} f d\xi = I_\Phi, \quad (2)$$

где $I_\Phi = \int \Phi \cdot Q(f', f) d\xi$.

Хорошо известно, что в силу обратимости столкновений $I_\Phi = I_{\Phi'}$, где $I_{\Phi'} = \int \Phi' \cdot Q(f, f') d\xi'$, $\Phi' = \Phi(\xi')$, а $Q(f, f') = \int (f f_1 - f' f'_1) g b db d\varepsilon d\xi'_1$. Используя теорему Лиувилля о сохранении фазового объёма, $I_{\Phi'}$ можно переписать в виде $I_{\Phi'} = - \int \Phi' \cdot Q(f', f) d\xi$. Тогда проводя почленное сложение I_Φ и $I_{\Phi'}$, можно получить $\frac{1}{2} \int (\Phi - \Phi') \cdot (f' f'_1 - f f_1) g b db d\varepsilon d\xi d\xi_1$. Интеграл I_Φ ещё и симметричен относительно ξ и ξ_1 . Поэтому $I_\Phi = I_{\Phi_1}$, где $I_{\Phi_1} = \frac{1}{2} \int (\Phi_1 - \Phi'_1) \cdot (f' f'_1 - f f_1) g b db d\varepsilon d\xi d\xi_1$, а $\Phi_1 = \Phi(\xi_1)$. Тогда, складывая I_Φ и I_{Φ_1} , получим

$$I_\Phi = \frac{1}{4} \int (\Phi + \Phi_1 - \Phi' - \Phi'_1) \cdot (f' f'_1 - f f_1) g b db d\varepsilon d\xi d\xi_1. \quad (3)$$

Используя далее свойство симметрии интеграла столкновений, а также свойство сферической симметрии потенциала межмолекулярного взаимодействия и ещё раз теорему Лиувилля [4], можно получить:

$$I_\Phi = \frac{1}{2} \int (\Phi' + \Phi'_1 - \Phi - \Phi_1) \cdot f f_1 g b db d\varepsilon d\xi d\xi_1. \quad (4)$$

В качестве функций Φ могут быть взяты любые величины, имеющие вид произведений массы молекулы на её молекулярные скорости m , $m\xi_i$, $m\xi_i\xi_j$, $m\xi_i\xi_j\xi_k$, $m\xi_i\xi_j\xi_k\xi_l$, ... Возьмём $\Phi = m$ и определим составляющие средней скорости молекул газа как $u_i = \frac{1}{n} \int \xi_i f d\xi$, тогда можно ввести понятие тепловой скорости молекул газа с компонентами $c_i = \xi_i - u_i$. Интегралы от функции распределения молекул газа по скоростям вида $M = m \int f dc$, $M_i = m \int c_i f dc$, $M_{ij} = m \int c_i c_j f dc$, $M_{ijk} = m \int c_i c_j c_k f dc$, ... будем называть её моментами, а вида $F = m \int f d\xi$, $F_i = m \int \xi_i f d\xi$, $F_{ij} = m \int \xi_i \xi_j f d\xi$, $F_{ijk} = m \int \xi_i \xi_j \xi_k f d\xi$, ...

потоками. Поскольку $u_i = \frac{1}{n} \int (u_i + c_i) \cdot f dc = u_i + \frac{M_i}{M}$, то все моменты первого порядка $M_i = 0$. Наряду с $\Phi = \varphi, \varphi_i, \varphi_{ij}, \varphi_{ijk}, \dots$ можно ввести в рассмотрение также некоторые молекулярные признаки $\Psi = \psi, \psi_i, \psi_{ij}, \psi_{ijk}, \dots$, где $\psi = m, \psi_i = mc_i, \psi_{ij} = mc_i c_j, \psi_{ijk} = mc_i c_j c_k, \dots$, и наряду с I_Φ , ввести также

$$I_\Psi = \frac{1}{2} \int (\Psi' + \Psi'_1 - \Psi - \Psi_1) \cdot f f_1 g b db d\varepsilon dc dc_1. \quad (5)$$

Между потоками и моментами имеют место следующие связи $F_i = u_i M$, $F_{ij} = u_i u_j M + M_{ij}$, $F_{ijk} = u_i u_j u_k M + u_i M_{jk} + u_j M_{ik} + u_k M_{ij} + M_{ijk}$ и т.д. На основании простых алгебраических тождеств могут быть получены следующие равенства:

$$\begin{aligned} I_{\varphi_{ik}} &= I_{\psi_{ik}}, \\ I_{\varphi_{ijk}} &= I_{\psi_{ijk}} + u_i I_{\psi_{jk}} + u_j I_{\psi_{ik}} + u_k I_{\psi_{ij}}, \\ I_{\varphi_{ijkl}} &= I_{\psi_{ijkl}} + u_i I_{\psi_{jkl}} + u_j I_{\psi_{ikl}} + u_k I_{\psi_{ijl}} + \\ &+ u_l I_{\psi_{ijk}} + u_k u_l I_{\psi_{ij}} + u_j u_l I_{\psi_{ik}} + u_j u_k I_{\psi_{il}} + u_i u_l I_{\psi_{jk}} + u_i u_k I_{\psi_{jl}} + u_i u_j I_{\psi_{kl}}, \dots \end{aligned}$$

Если в качестве функций Φ брать инварианты столкновений – $m, m\xi_i$ и $\frac{1}{2}m\xi^2$, то можно последовательно получить уравнения сохранения массы, импульса и энергии. При этом $I_\Phi = 0$. В общем случае при последовательной подстановке $\Phi = \varphi, \varphi_i, \varphi_{ij}, \varphi_{ijk}$, где $\varphi = m, \varphi_i = m\xi_i, \varphi_{ij} = m\xi_i \xi_j, \varphi_{ijk} = m\xi_i \xi_j \xi_k, \dots$ в уравнение (2), получается бесконечная незамкнутая система уравнений для моментов функции распределения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial u_n M}{\partial x_n} &= 0, \\ M \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_n M \frac{\partial u_i}{\partial x_n} + \frac{\partial}{\partial x_n} M_{in} - X_i M &= 0, \\ \frac{\partial M_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial (u_n M_{ij} + M_{ijn})}{\partial x_n} + M_{jn} \frac{\partial u_i}{\partial x_n} + M_{in} \frac{\partial u_j}{\partial x_n} &= I_{\psi_{ij}}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial M_{ijk}}{\partial t} + \frac{\partial (u_n M_{ijk} + M_{ijkn})}{\partial x_n} + M_{jkn} \frac{\partial u_i}{\partial x_n} + M_{ikn} \frac{\partial u_j}{\partial x_n} + M_{ijn} \frac{\partial u_k}{\partial x_n} - \\ & - \frac{M_{jk}}{M} \frac{\partial M_{in}}{\partial x_n} - \frac{M_{ik}}{M} \frac{\partial M_{jn}}{\partial x_n} - \frac{M_{ij}}{M} \frac{\partial M_{kn}}{\partial x_n} = I_{\psi_{ijk}}, \\ & \dots \end{aligned}$$

Аналитические выражения интегралов столкновения I_{Ψ} могут быть получены для молекул, отталкивающихся с силой обратно пропорциональной пятой степени расстояния между ними. Потенциал такого взаимодействия выглядит как $U(r) = \frac{K}{r^{s-1}}$, где s – показатель отталкивания, K – некоторый параметр. Ограничимся случаем парных упругих столкновений максвелловских молекул, для которых $s=5$. Рассматривая процесс взаимодействия как центральное движение молекулы с приведённой массой $M = \frac{m \cdot m_1}{m + m_1}$ относительно некоторого центра отталкивания, так же как в [2], применяя закон сохранения энергии и второй закон Кеплера, а также элементы сферической тригонометрии, можно получить выражения для $I_{\psi_{ij}}$ и $I_{\psi_{ijk}}$ при $i = j = k$. Оставшиеся интегралы для разных $i \neq j \neq k$ получаются с помощью либо поворота осей, либо пространственного преобразования координат. Полученные таким образом интегралы в обозначениях работы [3] $\rho = M$, $P_{ij} = M_{ij}$, $S_{ijk} = M_{ijk}$ для произвольных моментов второго и третьего порядка имеют вид:

$$\begin{aligned} I_{\psi_{ij}} &= -3A \sqrt{\frac{K}{2m^3}} \cdot \rho \cdot (P_{ij} - p \cdot \delta_{ij}), \\ I_{\psi_{ijk}} &= -\frac{1}{2} A \sqrt{\frac{K}{2m^3}} \cdot \rho \cdot (9S_{ijk} - S_i \delta_{jk} - S_j \delta_{ik} - S_k \delta_{ij}), \end{aligned} \quad (7)$$

точные выражения для интеграла столкновений максвелловских молекул в случае моментов 4 и более высокого порядков отсутствуют. Здесь $p = \frac{1}{3} P_{nn}$ – давление в одноатомном газе, $S_i = 2q_i = S_{inn} = S_{nin} = S_{nni}$ – удвоенные компоненты вектора теплового потока q_i , выраженные через свёртки моментов

третьего порядка, $A = 4\pi \int_0^\infty \sin^2 \vartheta \cdot \cos^2 \vartheta \beta d\beta$ – некоторый коэффициент, значение которого Максвелл [1] приближённо определил как $A = 1.3682$, δ_{ij} – символ Кронекера. В рамках данной работы этих выражений будет достаточно.

Мягкое замыкание системы моментных уравнений

Остановимся на замыкании системы моментных уравнений (6). Для начала запишем их в более привычной недивергентной форме, введя понятие девиаторов тензора

$$\begin{aligned} p_{ij} &= P_{ij} - \frac{1}{3} P_{nn} \cdot \delta_{ij} = P_{ij} - p \cdot \delta_{ij}, \\ s_{ijk} &= S_{ijk} - \frac{1}{5} (S_{inn} \cdot \delta_{jk} + S_{jnn} \cdot \delta_{ik} + S_{knn} \cdot \delta_{ij}) = S_{ijk} - \frac{1}{5} (S_i \cdot \delta_{jk} + S_j \cdot \delta_{ik} + S_k \cdot \delta_{ij}), \quad (8) \\ p_{ijkl} &= P_{ijkl} - \frac{1}{7} (P_{ijnn} \cdot \delta_{kl} + P_{iknn} \cdot \delta_{jl} + P_{ilnn} \cdot \delta_{jk} + P_{jknn} \cdot \delta_{il} + P_{jlnn} \cdot \delta_{ik} + P_{klenn} \cdot \delta_{ij}) + \\ &+ \frac{1}{35} P_{oonn} (\delta_{ij} \cdot \delta_{kl} + \delta_{ik} \cdot \delta_{jl} + \delta_{il} \cdot \delta_{jk}) \end{aligned}$$

и т. д.

Эти величины характеризуют степень термодинамической неравновесности на гидродинамическом уровне описания газа. Основным их свойством является то, что любые свёртки девиаторов тождественно равны нулю. После некоторых преобразований систему (6) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + u_n \frac{\partial \rho}{\partial x_n} + \rho \frac{\partial u_n}{\partial x_n} &= 0, \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_n \frac{\partial u_i}{\partial x_n} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} p + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_n} p_{in} - X_i &= 0, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + u_n \frac{\partial p}{\partial x_n} + \frac{5}{3} p \frac{\partial u_n}{\partial x_n} + \frac{2}{3} p_{mn} \frac{\partial u_m}{\partial x_n} + \frac{1}{3} \frac{\partial S_n}{\partial x_n} &= 0, \quad (9) \\ \frac{\partial p_{ij}}{\partial t} + u_n \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_n} + p_{ij} \frac{\partial u_n}{\partial x_n} + p_{jn} \frac{\partial u_i}{\partial x_n} + p_{in} \frac{\partial u_j}{\partial x_n} - \frac{2}{3} p_{mn} \delta_{ij} \frac{\partial u_m}{\partial x_n} + \\ + p \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2\delta_{ij}}{3} \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \right) + \frac{1}{5} \left(\frac{\partial S_i}{\partial x_j} + \frac{\partial S_j}{\partial x_i} - \frac{2\delta_{ij}}{3} \frac{\partial S_n}{\partial x_n} \right) + \frac{\partial s_{ijn}}{\partial x_n} &= I_{\psi_{ij}}, \\ \frac{\partial S_i}{\partial t} + u_n \frac{\partial S_i}{\partial x_n} + \frac{7S_n}{5} \frac{\partial u_i}{\partial x_n} + \frac{2S_m}{5} \frac{\partial u_m}{\partial x_i} + \frac{7S_i}{5} \frac{\partial u_n}{\partial x_n} + 2s_{imn} \frac{\partial u_m}{\partial x_n} - \end{aligned}$$

$$-\frac{5p \cdot \delta_{in} + 2p_{in}}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_n} - \frac{5p \cdot \delta_{im} + 2p_{im}}{\rho} \frac{\partial p_{mn}}{\partial x_n} + \frac{\partial P_{inmm}}{\partial x_n} = I_{\psi_{imm}},$$

$$\dots$$

Здесь в правых частях стоят $I_{\psi_{ij}} = -3A \sqrt{\frac{K}{2m^3}} \cdot \rho \cdot p_{ij}$ и

$$I_{\psi_{imm}} = -2A \sqrt{\frac{K}{2m^3}} \cdot \rho \cdot S_i.$$

Заметим, что свёртки $S_i = 2q_i$ для потоков тепла играют такую же роль, как и p для компонентов тензора напряжений. Поэтому можно и дальше переходить от уравнений для моментов из системы (6) к уравнениям для их девиаторов и свёрток, получая всё более громоздкие уравнения системы. Чтобы замкнуть эту систему и получить из неё, например, систему уравнений Эйлера, надо принять следующее правило: все девиаторы равны нулю, а т. к. произвести свёртку тензора можно только по двум индексам, то это правило работает с девиаторов 2 ранга, т. е. начиная с $p_{nn} = 0$ и далее, дивергенция свёртки моментов 3 порядка равна нулю. Тогда, по аналогии с этим, для следующего приближения также можно принять, что все девиаторы 3 ранга равны нулю, а дивергенция свёртки моментов 4 порядка равна нулю. И далее по индукции. На первый взгляд кажется, что такой подход не накладывает жёстких ограничений на сами моменты, например, 4 порядка, а потому не возникает необходимости во введении коррекции для замыкающих соотношений [6; 10]. Оценим порядок слагаемых, входящих в уравнения системы (9) при нормальных условиях, т. е.

примем, что $A \sqrt{\frac{K}{2m^3}} \cdot \rho = \frac{1}{\tau} = \nu \geq 10^9$, и полагая величины p_{ij} , S_{ijk} , P_{ijkl} , ...

малыми там, где они не множатся на большую величину ν . Обобщённый закон трения Ньютона может быть получен из четвёртого уравнения системы (9) методом отбрасывания всех входящих в него слагаемых порядка τ , считая их малыми, кроме следующего

$$p_{ij} = -\frac{p}{3\nu} \cdot \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \right). \quad (10)$$

Однако такое действие не является аналитическим преобразованием и изменяет тип системы дифференциальных уравнений. Аналог закона теплопроводности Фурье можно получить из пятого уравнения системы (9), полагая в нём дивергенцию свёртки моментов 4 порядка равной нулю, а τ также

малой величиной $-\frac{5p}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} = -\frac{4}{2} A \sqrt{\frac{K}{2m^3}} \cdot \rho \cdot S_i$ или после некоторых преобразований

$$q_i = \frac{5pR}{4\nu} \left(\frac{T}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} + \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) = \frac{5pR}{4\nu} \left(T \frac{\partial \ln \rho}{\partial x_i} + \frac{\partial T}{\partial x_i} \right). \quad (11)$$

Полученное выражение отличается знаком от закона Фурье и, вероятно, противоречит второму началу термодинамики. Поэтому для замыкания системы нужно обязательно задать выражения для девиаторов 3 ранга и моментов 4 порядка. Их, например, можно взять из работы [3]

$$s_{ijk} = 0, \quad (12)$$

$$P_{ijkl} = RT(p_{ij} \cdot \delta_{kl} + p_{ik} \cdot \delta_{jl} + p_{il} \cdot \delta_{jk} + p_{jk} \cdot \delta_{il} + p_{jl} \cdot \delta_{ik} + p_{kl} \cdot \delta_{ij}) +$$

$$+ pRT(\delta_{ij} \cdot \delta_{kl} + \delta_{ik} \cdot \delta_{jl} + \delta_{il} \cdot \delta_{jk}).$$

Переходя к свёртке P_{inmm} , определив её дивергенцию и подставляя полученное в результате выражение в (9), получим такое же уравнение для свёртки моментов третьего порядка, как и в работе [3]

$$\frac{\partial S_i}{\partial t} + u_n \frac{\partial S_i}{\partial x_n} + \frac{7S_n}{5} \frac{\partial u_i}{\partial x_n} + \frac{2S_n}{5} \frac{\partial u_n}{\partial x_i} + \frac{7S_i}{5} \frac{\partial u_n}{\partial x_n} +$$

$$+ 2RT \frac{\partial p_{in}}{\partial x_n} + 7p_{in} \frac{\partial RT}{\partial x_n} - \frac{2p_{in}}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_n} - \frac{2p_{in}}{\rho} \frac{\partial p_{nm}}{\partial x_m} + 5p \frac{\partial RT}{\partial x_i} = I_{\psi_{imm}}. \quad (13)$$

Совместно с другими уравнениями системы (9) при условии, что $\frac{\partial s_{ijn}}{\partial x_n} = 0$, это будет 13-моментное приближение Грэда. Снова полагая ν большой, оценив порядок слагаемых, входящих в (13), получим закон Фурье

$$q_i = -\frac{5pR}{4\nu} \cdot \frac{\partial T}{\partial x_i}. \quad (14)$$

Можно и иначе подойти к замыканию системы. Например, если мы изучаем дозвуковые нестационарные течения или сверхзвуковые потоки без интенсивного теплообмена. Тогда в системе уравнений (9) можно пренебречь дивергенцией девиатора третьего ранга, а свёртки моментов 3 порядка

определить с помощью закона Фурье. В результате получится замкнутая система из 11 уравнений (10 независимых газодинамических переменных) [12]. Решение такой системы для ряда хорошо изученных дозвуковых течений мало чем отличается от решения уравнений Навье – Стокса. Можно указать ещё несколько способов получения моделей более сложных, чем уравнения Навье – Стокса, не связанных с заданием априори вида функции распределения, отличных от опубликованных. Попытки построения более расширенных моделей предпринимались в первую очередь ради описания сильнонеравновесных течений одно- и многоатомных газов на уровне понятий механики сплошной среды. Это стало сильно востребованным в связи с основными тенденциями развития современной авиационной и ракетно-космической техники, разработкой гиперзвуковых и воздушно-космических летательных аппаратов, движение которых происходит в переходной по числам Кнудсена области течений. В этой области возникают течения высокой степени неравновесности, описание которых требует адекватных и экономичных физико-математических моделей. Среди большого количества тестовых примеров особое место занимает классическая задача о профиле ударной волны.

Задача о профиле стационарной ударной волны

Простейшим примером ударной волны является равномерная плоская ударная волна, поскольку в этом случае в соответствующей системе координат поток является стационарным и одномерным. Поэтому будем рассматривать эту задачу в одномерной постановке. На входной границе расчётной области задаётся невозмущённый поток, на выходной выставляются условия Ренкина – Гюгонио. В силу того, что указанные граничные условия предполагают равновесное состояние газа перед и за ударной волной, значения неравновесных величин становятся также определёнными, т. е. равными нулю. Расчётная область делится пополам. В качестве начального условия слева задаётся всюду невозмущённый поток, справа – значения газодинамических переменных на выходной границе. Размер расчётной области составляет несколько десятков длин свободного пробега молекулы в невозмущённом

потоке: $\lambda_\infty = \frac{\mu_\infty}{p_\infty} \sqrt{RT_\infty}$ и подбирается опытным путём в зависимости от

чисел Маха и Кнудсена. Несмотря на кажущуюся простоту этой задачи, все попытки построения расширенной модели сплошной среды, позволяющие получить её более точное решение в более широком диапазоне параметров подобия, предпринятые в разное время, не смогли привести к видимому улучшению модели Навье – Стокса. Так оказалось, что уравнения Барнета не имеют решений при числах Маха $M > 2,1$ [4], а решение 13-моментного приближения Грэда, как было сказано во введении, полностью разрушается и перестаёт существовать уже при числе $M = 1,65$. Одни исследователи [6] объясняли последнее тем, что замыкающие соотношения (12) не удовлетворяют самой системе моментных уравнений (9) и предложили систему R13. Другие [10]

тем, что в условиях сильной неравновесности корректирующие члены в модели замыкания по величине соизмеримы с самими моментами. Мы же попробуем это исследовать и объяснить из несколько других соображений. Для этого нам будет достаточно рассмотреть более простые модели, чем приведённые в работах [6; 10].

Возьмём следующие три модели, каждая из которых может быть записана в общей векторно-матричной форме

$$\frac{\partial \vec{Q}}{\partial t} + A \frac{\partial \vec{Q}}{\partial x} = \vec{H}, \quad (15)$$

где векторы и матрица Якоби для 13-моментной системы Грэда имеют вид:

$$\vec{Q} = \begin{bmatrix} \rho \\ u \\ p \\ p_{xx} \\ S \end{bmatrix}, \quad \vec{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ I_{\psi_{xx}} \\ I_{\psi_x} \end{bmatrix}, \quad (16)$$

$$A = \begin{bmatrix} u & \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & \frac{1}{\rho} & \frac{1}{\rho} & 0 \\ 0 & \frac{5p+2p_{xx}}{3} & u & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{4p+7p_{xx}}{3} & 0 & u & \frac{4}{15} \\ -\left(5R^2T^2 + \frac{7p_{xx}}{\rho}RT\right) & \frac{16}{5}S & 5\left(RT + \frac{p_{xx}}{\rho}\right) & 2\left(RT - \frac{p_{xx}}{\rho}\right) & u \end{bmatrix},$$

где $I_{\psi_{xx}} = -3\nu \cdot p_{xx}$, $I_{\psi_x} = -2\nu \cdot S$, индекс x у удвоенного значения теплового потока мы опустили. Массовыми силами в электрически нейтральном газе можно пренебречь. Рассмотрим также более простую 10-моментную систему уравнений:

$$\vec{Q} = \begin{bmatrix} \rho \\ u \\ p \\ p_{xx} \end{bmatrix}, \quad \vec{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \frac{\partial S}{\partial x} \\ -\frac{4}{15} \frac{\partial S}{\partial x} + I_{\psi_{xx}} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} u & \rho & 0 & 0 \\ 0 & u & \frac{1}{\rho} & \frac{1}{\rho} \\ 0 & \frac{5p+2p_{xx}}{3} & u & 0 \\ 0 & \frac{4p+7p_{xx}}{3} & 0 & u \end{bmatrix}, \quad (17)$$

$$\text{где } S = -\frac{5pR}{2\nu} \cdot \frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{15}{2}\mu R \cdot \frac{\partial T}{\partial x} = -3\mu \cdot C_p \cdot \frac{\partial T}{\partial x};$$

и модель Навье – Стокса:

$$\vec{Q} = \begin{bmatrix} \rho \\ u \\ p \end{bmatrix}, \quad \vec{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} \\ -\frac{1}{3} \frac{\partial S}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} u & \rho & 0 \\ 0 & u & \frac{1}{\rho} \\ 0 & \frac{5p + 2p_{xx}}{3} & u \end{bmatrix}, \quad (18)$$

$$\text{где } p_{xx} = -\frac{4p}{9\nu} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{4}{3}\mu \cdot \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Проанализируем характеристические свойства выбранных систем уравнений. Если записать уравнение для собственных чисел матрицы Якоби системы (16)

$$\det(A - \lambda \cdot I) = 0,$$

то оно представляет собой многочлен 4 степени. Это нелинейное уравнение сводится к кубическому и, в принципе, решается в радикалах. Решение его громоздко, корни в некоторых подобластях, возможно, могут быть и комплексными числами. Автор 13-моментной системы в работе [3] определил корни этого уравнения, выбрав так систему координат, чтобы в рассматриваемой точке $u=0$ и при предположении о малости напряжения и теплового потока. Характеристическое уравнение матрицы A при этом имело

$$\text{один корень } \lambda_1 = 0 \text{ и четыре корня } \lambda_{2,3} = \pm c_1 = \pm \sqrt{\frac{13 + \sqrt{94}}{5}} RT,$$

$$\lambda_{4,5} = \pm c_2 = \pm \sqrt{\frac{13 - \sqrt{94}}{5}} RT \quad \text{выделенного оставшегося биквадратного}$$

уравнения. Поскольку в произвольной системе координат величины λ нужно было заменить на $u + \lambda$, то корень $\lambda_1 = u$ соответствовал траектории движения жидкой частицы, а другие корни, представляющие характеристические направления $u \pm c_{1,2}$, соответствовали “скоростям звука” в движущейся среде.

Последние Грэд уподобил адиабатической скорости звука, определяемой формулой $\sqrt{\frac{5p}{3\rho}}$, следующей из уравнения Эйлера. Налицо имеют место две

скорости звука, одна из которых меньше, а другая больше адиабатической скорости. Будем далее такие скорости звука, входящие в уравнения характеристик, называть характеристическими. Учёт в характеристическом уравнении матрицы A членов, зависящих от напряжения и теплового потока,

вероятно, несколько изменит численные значения корней уравнения. В частности, тепловой поток вызывает появление члена при нечётной степени, обуславливающего асимметрию по отношению к скорости потока u . Однако характеристики 13-моментной системы, являющиеся пределом характеристик для случая, когда напряжение и тепловой поток стремятся к нулю, не совпадают с характеристиками уравнений Эйлера, когда напряжение и тепловой поток равны нулю.

Характеристическое уравнение матрицы A 10-моментной системы имеет двойной корень $\lambda_{1,2} = u$ и два корня $\lambda_{3,4} = u \pm \sqrt{3 \cdot \frac{p + p_{xx}}{\rho}}$. Здесь тоже характеристическая скорость звука, входящая в направления $u \pm c$, когда напряжение становится бесконечно малой величиной, не равна адиабатической скорости звука. И только для системы уравнений Навье – Стокса имеет место равенство между характеристической звуковой скоростью и адиабатической скоростью звука, когда напряжение и тепловой поток стремятся к нулю. Для этой системы характеристическое уравнение матрицы A имеет первый корень $\lambda_1 = u$, соответствующий траектории движения жидкой частицы и два «звуковых» корня $\lambda_{2,3} = u \pm \sqrt{\frac{5p + 2p_{xx}}{3\rho}}$.

Будем решать эту задачу в нестационарной постановке, как это дано уравнением (15), до установления. Мы специально выбрали недивергентную форму, чтобы показать её работоспособность на «гладких» решениях при высоком сеточном разрешении, позволяющем детально определять форму профиля стоячей ударной волны. Тем более, что при таком выборе меньше погрешности округления, всегда имеющие место в численных методах. Для решения систем (16) – (18) воспользуемся методом полных дифференциалов, изложенным в работах [12; 13]. Опишем основные моменты его применения в обратном порядке, начнём с системы уравнений Навье – Стокса (18). Умножим систему, записанную в общем виде (15), слева на матрицу

$$\Omega = \begin{bmatrix} c_0^2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1/\rho \cdot c \\ 0 & -1 & 1/\rho \cdot c \end{bmatrix},$$

требования к выбору вида которой подробно описаны в [12; 13]. Элементы матрицы c_0^2 и c можно рассматривать как параметры, которые определяются в процессе построения разностной схемы. В итоге, получим

$$\Omega \cdot A = \begin{bmatrix} c_0^2 \cdot u & \rho \cdot c_0^2 - a_{32} & -u \\ 0 & u + a_{32}/\rho \cdot c & (u+c)/\rho \cdot c \\ 0 & -(u - a_{32}/\rho \cdot c) & (u-c)/\rho \cdot c \end{bmatrix},$$

где a_{32} – элемент матрицы A для системы (18). Для того чтобы первое уравнение преобразованной системы связывало между собой полные дифференциалы давления и плотности, необходимо выполнение равенства $\rho \cdot c_0^2 = a_{32}$. Отсюда

следует, что $c_0 = \sqrt{\frac{5p + 2p_{xx}}{3\rho}}$ и первое уравнение выглядит как

$$c_0^2 \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} \right\} - \left\{ \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} \right\} = 0, \text{ откуда } c_0^2 = \frac{dp}{d\rho}. \text{ А это есть хорошо}$$

известное выражение для скорости распространения малых возмущений в упругой среде или, что то же самое, звуковых волн, поведение которых описывается волновым уравнением. Будем далее скорость звука, определённую как корень из отношения полных дифференциалов давления и плотности, называть акустической. В данном случае акустическая скорость звука равна характеристической. Такую физико-математическую модель будем называть акустически согласованной. В связи с этим логично принять, что $c_0 = c$. Далее алгоритм построения противопоточной разностной схемы в рамках принятого метода описан в работе [12].

Для 10-моментной системы, следуя тому же подходу, умножим систему (15+17) слева на матрицу

$$\Omega = \begin{bmatrix} c_0^2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{\rho \cdot c} & \frac{1}{\rho \cdot c} \\ 0 & -1 & \frac{1}{\rho \cdot c} & \frac{1}{\rho \cdot c} \\ 0 & -1 & -\frac{1}{\rho \cdot c} & \frac{1}{\rho \cdot c} \end{bmatrix}, \text{ тогда } \Omega \cdot A = \begin{bmatrix} c_0^2 \cdot u & \rho \cdot c_0^2 - a_{32} & -u & 0 \\ 0 & u + \frac{a_{32} + a_{42}}{\rho \cdot c} & \frac{u+c}{\rho \cdot c} & \frac{u+c}{\rho \cdot c} \\ 0 & -\left(u - \frac{a_{32} + a_{42}}{\rho \cdot c}\right) & \frac{u-c}{\rho \cdot c} & \frac{u-c}{\rho \cdot c} \\ 0 & -\left(u + \frac{a_{32} - a_{42}}{\rho \cdot c}\right) & -\frac{u+c}{\rho \cdot c} & \frac{u-c}{\rho \cdot c} \end{bmatrix}.$$

В данном случае акустическая скорость определяется так же, как и для уравнений Навье – Стокса $c_0 = \sqrt{\frac{5p + 2p_{xx}}{3\rho}}$. Параметр c можно определить как

$c = \sqrt{\frac{a_{32} + a_{42}}{\rho \cdot c}} = \sqrt{3 \cdot \frac{p + p_{xx}}{\rho}}$, что даст наиболее простые выражения для элементов матрицы $\Omega \cdot A$ и совпадает с характеристической скоростью звука системы 10 моментов. Но даже в этом самом простом случае расширенной модели уже отсутствует акустическая согласованность.

Для 13-моментной системы Грэда уже не существует такого преобразования Ω , которое позволяет получить связь только между дифференциалами давления и плотности. Для примера можно привести следующие два наиболее подходящих случая такой связи:

$$c_0^2 \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} \right\} - \left\{ \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} \right\} = \frac{1}{3} \frac{\partial S}{\partial x}, \quad c_0 = \sqrt{\frac{5p + 2p_{xx}}{3\rho}};$$

$$c_0^2 \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} \right\} - \left\{ \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} \right\} + \frac{5}{4} \left\{ \frac{\partial p_{xx}}{\partial t} + u \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} \right\} = \frac{5}{4} \cdot I_{\psi_{xx}}, \quad c_0 = \sqrt{-\frac{9p_{xx}}{4\rho}},$$

по виду которых выбор первого варианта является более очевидным. Мы уже подробно разобрали собственные числа матрицы A 13-моментной системы. Эта модель, как и все более сложные, не является акустически согласованной, поскольку с увеличением числа уравнений системы растёт и количество различных характеристических скоростей звука.

Приведём систему уравнений (16) к безразмерному виду. Координаты точек физического пространства $x' = x/L$ отнесём к характерной длине L . В задаче о профиле стационарной ударной волны за характерную длину можно принять ширину фронта волны. Время $t' = t/(L/c_\infty)$ нормируем на характерное время L/c_∞ , где c_∞ – скорость звука в набегающем потоке. Время между столкновениями $\tau' = \tau/(\lambda_\infty/c_\infty)$ отнесём к λ_∞/c_∞ , где λ_∞ – средняя длина свободного пробега молекул в набегающем потоке. Плотность и скорость отнесём к параметрам невозмущённого потока на бесконечности $\rho' = \rho/\rho_\infty$, $u' = u/c_\infty$. Давление и тепловой поток – на некоторые комплексы, выраженные в тех же единицах измерения, что и сами параметры $p' = p/(\rho_\infty c_\infty^2)$, $S' = S/(\rho_\infty c_\infty^3)$. Первые уравнения системы, описывающие перенос массы, импульса и энергии единицы объёма газа полностью обезразмерятся. Следующие два уравнения системы, содержащие релаксационный член, после нормировки приобретут в своей правой части множитель $\frac{L}{\lambda_\infty} = \frac{1}{Kn_\infty} = \frac{1}{Kn}$, где Kn – число Кнудсена в набегающем потоке. Вводя следующую нормировку

температуры $T' = T / (c_\infty^2 / C_{p_\infty})$, где C_{p_∞} – теплоёмкость при постоянном давлении, обезразмерится и уравнение состояния, поскольку $C_p = \frac{\gamma}{\gamma-1} R$, то $\rho_\infty c_\infty p' = \frac{\gamma-1}{\gamma} C_{p_\infty} C'_p \rho_\infty p' \frac{c'_\infty}{C_{p_\infty}} T'$, здесь $C'_p = C_p / C_{p_\infty}$. После сокращения одинаковых сомножителей получим $p' = \frac{\gamma-1}{\gamma} C'_p \rho' T'$. Также поступим и с коэффициентами вязкости и теплопроводности $\mu' = \mu / \mu_\infty$, $\chi' = \chi / \chi_\infty$. При нормальных условиях большими величинами являются давление p и частота межмолекулярных столкновений $\nu \sim \frac{1}{\tau}$. Малыми величинами – длина

свободного пробега молекул λ и среднее время между столкновениями τ . Определим правые части уравнения, отбросив все малые слагаемые:

$$p \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2\delta_{ij}}{3} \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \right) = -3A \sqrt{\frac{K}{2m^3}} \cdot \rho \cdot p_{ij}, \text{ тогда } A \sqrt{\frac{K}{2m^3}} \cdot \rho \text{ можно}$$

$$\text{выразить через вязкость } \mu = \frac{p}{3A \sqrt{\frac{K}{2m^3}} \cdot \rho} \text{ и } A \sqrt{\frac{K}{2m^3}} \cdot \rho = \frac{p}{3 \cdot \mu}. \text{ При}$$

подстановке этого выражения в правые части релаксационных уравнений системы получим:

$$I_{\psi_{11}} = -3A \sqrt{\frac{K}{2m^3}} \cdot \rho \cdot p_{11} = -\frac{p}{\mu} \cdot p_{11};$$

$$I_{\psi_1} = -2A \sqrt{\frac{K}{2m^3}} \cdot \rho \cdot S = -\frac{2}{3} \frac{p}{\mu} \cdot S.$$

$$\text{При нормировке будем иметь: } \frac{L}{\rho_\infty c_\infty^3} \frac{\rho_\infty^2 c_\infty^4}{\mu_\infty} = \frac{L \rho_\infty c_\infty V_\infty}{\mu_\infty V_\infty} = \frac{\text{Re}}{M} = \frac{1}{Kn}.$$

Аналогичным образом может быть нормирована 10-моментная система уравнений и уравнения Навье – Стокса.

Метод полных дифференциалов использовался в рамках конечно-разностного подхода. Была выбрана явная разностная схема первого порядка точности по времени и противопоточная схема третьего порядка по пространству. Уравнения, включающие релаксационный член интегрировались с помощью разностной аппроксимации аналитического решения простого

линейного дифференциального уравнения вида $\frac{\partial p_{ij}}{\partial t} + A_{ij} + \nu p_{ij} = 0$. Шаг интегрирования по времени выбирался на основе составного критерия, состоящего из условия КФЛ и его аналога для диссипативных членов уравнения. Достаточно подробно все перечисленные процедуры описаны в работе [12]. Расчётная сетка слегка сгущалась по закону тангенса относительно центра расчётной области, где располагалась ударная волна. Использовалась одна обобщённая координата ξ , производная которой по x была своеобразным аналогом метрических коэффициентов из обобщённых криволинейных координат. Такой подход упрощал задание разностных аналогов производных на сгущённой сетке. Решение уравнений Навье – Стокса стартовало от разрывного профиля (разрыв первого рода) в начале координат, расположенного по центру расчётной области. Две другие системы для ускорения расчётов в качестве начального приближения предпочтительно использовали гладкие решения, полученные для уравнений Навье – Стокса. Размеры расчётной области задавались на основании анализа имеющихся экспериментальных данных для аргона по определению зависимости обратной толщины ударной волны от числа Маха [14; 15]. Согласно приведённым там данным, ширина фронта ударной волны составляет примерно от 3 до 10 длин свободного пробега молекул. Тогда при заданном числе Кнудсена $Kn=0.1$ на некоторый условный размер L , примерно равный ширине фронта, будет приходиться 10 длин свободного пробега. И области размером от $-2 \cdot L$ до $2 \cdot L$ оказывается вполне достаточно для формирования в ней профиля до чисел Маха ~ 25 .

Полученные результаты и их анализ

На рис. 1 представлены результаты по исследованию сеточной сходимости расчётов между собой и с имеющимися экспериментальными данными из работы [16], выполненные на основании системы уравнений Навье – Стокса. В легенде графика в скобках указано количество узлов расчётной сетки. Оно варьировалось от 100 до 800. При числе узлов 400 средняя длина свободного пробега молекул разрешалась 10 узлами разностной сетки. Из графика видно, что результаты, полученные на сетке в 400 узлов, практически не отличаются от разрешения в 800 узлов. Поэтому везде далее использовалась сетка с 400 узлами. В целом расчётные данные по распределению нормированной плотности $\rho^* = \frac{\rho - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1}$, где ρ_1 и ρ_2 – значения плотности перед и за ударной волной, хорошо согласуются с экспериментом.

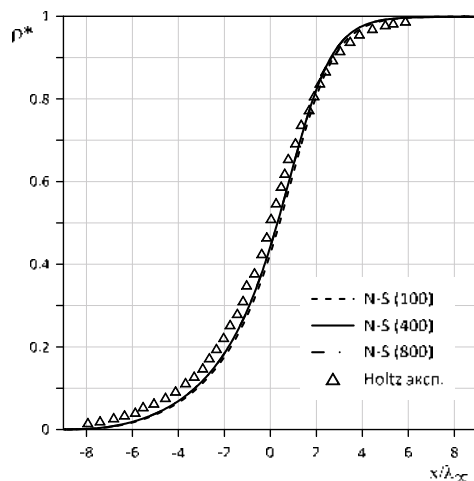


Рис. 1 / Fig. 1. Профиль плотности в плоской ударной волне аргона / Density profile in the plane shock wave of argon

Источник: подготовлено автором

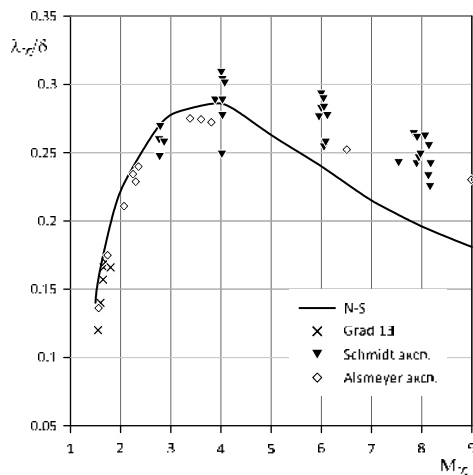


Рис. 2 / Fig. 2. Обратная ширина ударной волны в аргона / Inverse width of the shock wave in argon

Источник: подготовлено автором

На рис. 2 приведены экспериментальные [14; 15] и расчётные данные для обратной ширины профиля плотности в ударной волне аргона. Сплошной линией представлены результаты решения уравнений Навье – Стокса, крестиками – решения 13-моментной системы Грэда. Последняя допускала получение решений только до числа Маха 1.65, поэтому результаты на графике лежат в узком диапазоне слева на графике. Результаты, полученные для 10-моментной системы, мало чем отличались от уравнений Навье – Стокса в пределах существования гладких профилей. Для примера на рис. 3 приведено распределение всех нормированных параметров потока в ударной волне для числа Маха 1.55. У системы уравнений Грэда для этого режима решение тоже гладким, но профиль параметров был более пологим, см. рис. 4.

В решении 10-моментной системы уравнений, начиная с числа Маха набегающего потока 1.9, в том месте профиля, где локальное число Маха, определённое по характеристической скорости звука, равно 1, на кривых плотности, давления и температуры возникает излом производной. Такое число Маха M_h будем далее также называть характеристическим. С дальнейшим ростом скорости он начинает расти, а на кривой удвоенного теплового потока S , например, при $M=3$, возникает даже что-то похожее на субскачок, см. рис. 5. Подобная картина с устойчивым решением в виде разрыва производных и размазанного субскачка на тепловом потоке была проверена до числа $M=25$. У системы 10-моментов, также как и у конвективной части уравнений Навье – Стокса, две звуковые характеристики. В силу того, что в набегающем слева потоке скорость звука меньше массовой скорости, обе характеристики наклонены в одну сторону. В ту же сторону, что и траектория движения жидких частиц.

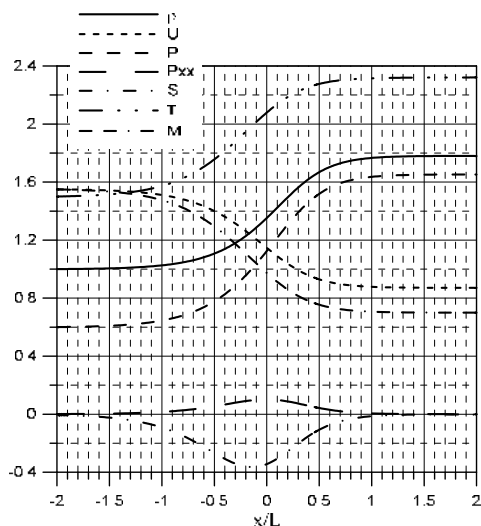


Рис. 3 / Fig. 3. Распределение параметров в ударной волне для уравнений Навье – Стокса / Shock wave parameter profiles for the Navier-Stokes equations

Источник: подготовлено автором

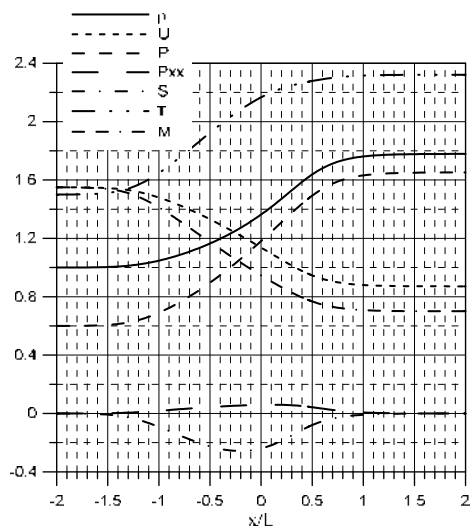


Рис. 4 / Fig. 4. Распределение параметров в ударной волне для уравнений Грэда / Shock wave parameter profiles for the Grad equations

Источник: подготовлено автором

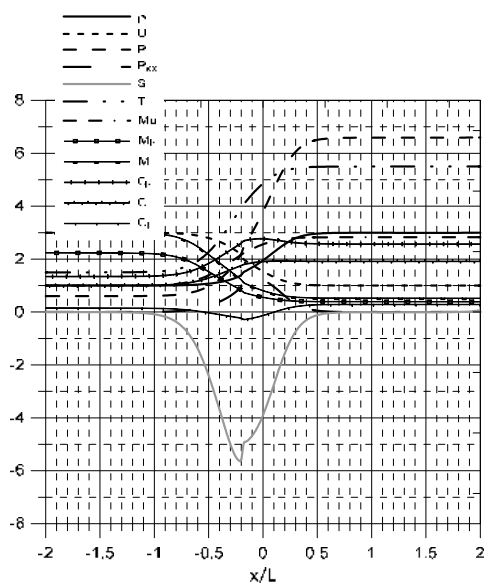


Рис. 5 / Fig. 5. Распределение параметров в ударной волне для 10-моментной системы уравнений / Shock wave parameter profiles for the 10 moments system equations

Источник: подготовлено автором

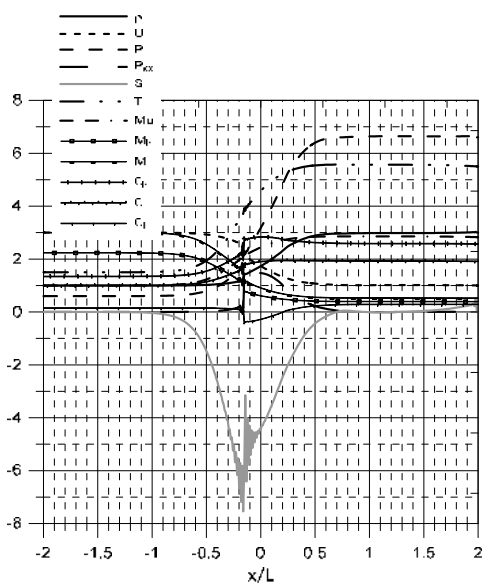


Рис. 6 / Fig. 6. Распределение параметров в ударной волне для изменённой 10-моментной системы уравнений / Shock wave parameter profiles for the modified 10 moments system equations

Источник: подготовлено автором

Внутри фронта ударной волны газ разогревается, скорость звука растёт, а поток тормозится, правая звуковая характеристика меняет свой угол наклона. Если всё происходит акустически согласованно, все профили остаются гладкими. Но у 10-моментной системы характеристическая скорость звука больше акустической. Поэтому на профилях всех параметров выполнение законов сохранения может привести к образованию локальных разрывов. Это должно было бы происходить точно в тот момент, когда характеристическое число Маха становилось равным единице. На рис. 5 это равенство выполняется почему-то до момента образования субскачка на тепловом потоке. Но если мы изменим уравнение для девиатора напряжения, искусственно убрав из него тепловой поток, то разрыв решения на всех параметрах произойдёт точно в момент, когда $M_h=1$, см. рис. 6. И то, что возникает при этом, очень похоже на разрыв первого рода с учётом немонотонности разностной схемы.

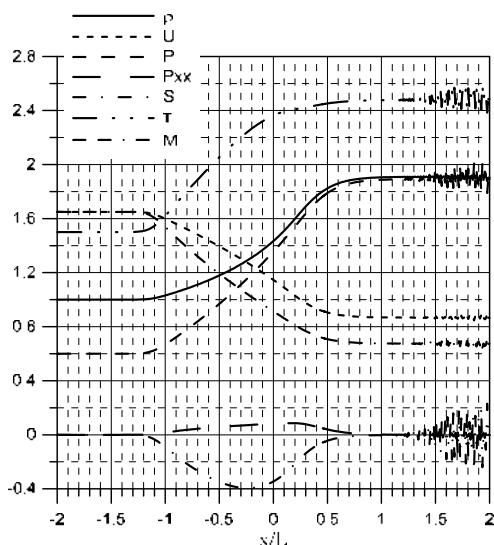


Рис. 7 / Fig. 7. Распределение параметров в ударной волне для уравнений Грэда / Shock wave parameter profiles for the Grad equations

Источник: подготовлено автором

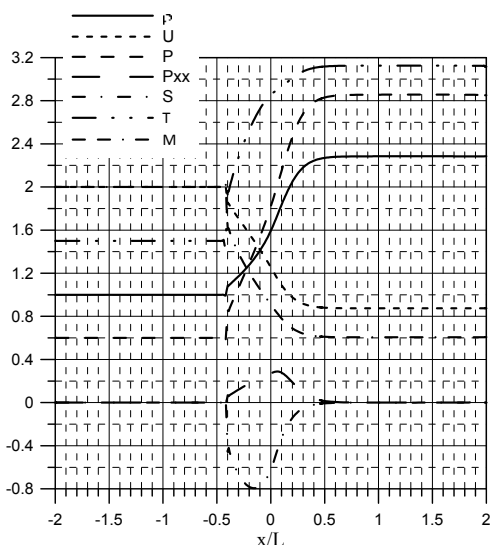


Рис. 8 / Fig. 8. Распределение параметров в ударной волне для уравнений Грэда / Shock wave parameter profiles for the Grad equations

Источник: подготовлено автором

У системы уравнений Грэда поведение решения с ростом числа Маха выглядит несколько иначе. До числа $M=1.64$ оно выглядит как гладкое. При $M=1.65$ при формировании гладкого профиля на расстоянии 0.5, что соответствует положению за гребнем ударной волны, возникают едва заметные слабые гладкие осцилляции. Они с течением времени сносятся вниз по потоку и постепенно нарастают, а решение теряет гладкость, см. рис. 7. После этого решение

разрушается. На сетке с таким высоким разрешением это можно трактовать как неустойчивость аналитических решений системы при $M \geq 1.65$. Решение при более высоких числах Маха перестаёт существовать. Можно слегка поправить систему уравнений. Например, если синтетически заменить выражение для релаксационного члена I_{ψ_1} на $-\frac{3}{2} \frac{p}{\mu} \cdot S$. Тогда можно несколько продвинуться

вправо по числам Маха до 2.0, см. рис. 8. При этом на профилях возникает субскачок в самом начале ударной волны и множество изломов производной вверх по потоку.

Такие субскачки не являются устойчивыми образованиями, они, если имеют место, то разрушаются с течением времени. Их природа возникновения, вероятно, такая же, как и в случае 10-моментной системы уравнений.

Заключение

Во введении мы подробно разобрали основные результаты, полученные в работах [6; 7; 10; 11]. Настоящая работа исходит из иных оснований и приводит к другой точке зрения на построение расширенной неравновесной термодинамики с использованием регуляризованных систем уравнений переноса изначально гиперболического типа. Эта точка зрения возникла при применении современного аналитического подхода [12; 13], вначале разработанного для численного решения гиперболических систем дифференциальных уравнений первого порядка (например, в газовой динамике) путём сведения их к связям между полными дифференциалами газодинамических переменных вдоль характеристических направлений. Было замечено, что при увеличении числа моментных уравнений в конечных замкнутых системах, таких как система 10-моментов или 13-моментов Грэда, характеристических скоростей звука может стать несколько, и все они отличаются от акустической. Из предыдущего раздела следует, что это для системы 10-моментов приводит к преждевременному распространению малых возмущений давления и скорости навстречу потоку, их взаимодействию с местным сверхзвуковым течением и образованию субскачка внутри гребня ударной волны. Поведение 13-моментной системы другое. Уравнения Грэда при малых сверхзвуковых скоростях дают гладкий профиль, но при увеличении скорости потока не позволяют дойти до момента возникновения субскачка ввиду более ранней потери устойчивости решения уже при $M=1.65$. Гораздо лучше всё обстоит для системы уравнений Навье – Стокса. Они являются акустически согласованными, поэтому гладкий профиль ударной волны имеет место, вероятно, при всех числах Маха набегающего потока. В данной работе было проверено, что такие решения имеют место и при $M=50$, только при этом ширина волны становится такой большой, что требуется увеличить размер расчётной области.

Таким образом, предложенный в работе принцип позволяет отсекаать математически некорректные физико-математические модели, основанные на системах дифференциальных уравнений в частных производных, ещё на начальных этапах их разработки. Это особенно важно при описании термодинамически неравновесных течений, когда используются модели нескольких температур, волновых процессов и турбулентности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Maxwell J. C. On the Dynamical Theory of Gases // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. 1867. Vol. 157. P. 49–88. DOI: 10.1098/RSTL.1867.0004.
2. Boltzmann L. Vorlesungen über Gastheorie. Bd. 1. Leipzig: Johann Ambrosius Barth, 1896. 204 S.
3. Grad H. On the kinetic theory of rarefied gases // Communications on pure and applied mathematics. 1949. Vol. 2. Iss. 4. P. 331–407. DOI: 10.1002/cpa.3160020403.
4. Коган М. Н. Динамика разреженного газ. М.: Наука, 1967. 440 с.
5. Grad H. The Profile of a Steady Plane Shock Wave // Communications on Pure and Applied Mathematics. 1952. Vol. 5. Iss. 3 P. 257–300. DOI: 10.1002/cpa.3160050304.
6. Struchtrup H., Torrilhon M. Regularization of Grad's 13 moment equations: Derivation and linear analysis // Physics of Fluids. 2003. Vol. 15. No. 9. P. 2668–2680. DOI: 10.1063/1.1597472.
7. Torrilhon M., Struchtrup H. Regularized 13-moment equations: shock structure calculations and comparison to Burnett models // Journal of Fluid Mechanics. 2004. Vol. 513. P. 171–198. DOI: 10.1017/S0022112004009917.
8. Different variants of R13 moment equations applied to the shock-wave structure / M. Y. Timokhin, H. Struchtrup, A. A. Kokhanchik, Y. A. Bondar // Physics of Fluids. 2017. Vol. 29. Iss. 3. Article no. 037105. DOI: 10.1063/1.4977978.
9. Bondar Y. A., Shoev G. V., Timokhin M. Y. Regular reflection of shock waves in steady flows: viscous and non-equilibrium effects // Journal of Fluid Mechanics. 2024. Vol. 984. Article no. A10. DOI: 10.1017/jfm.2024.112.
10. Никитченко Ю. А. Вариант замыкания системы моментных уравнений произвольного порядка // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2022. Т. 62. № 3. С. 499–520. DOI: 10.31857/S0044466922030127.
11. Никитченко Ю. А. Снижение коротковолновой неустойчивости системы моментных уравнений за счет ее расширения // Учёные записки ЦАГИ. 2015. Т. 46. № 1. С. 72–84.
12. Попов С. А. Метод полных дифференциалов для численного решения гиперболических систем уравнений // Труды МАИ. 2006. № 22. С. 5–23.
13. Попов С. А. Интегралы уравнений движения // Вестник Государственного университета просвещения. Серия: Физика-Математика. 2025. № 3. С. 42–62. DOI: 10.18384/10.18384/2949-5067-2025-3-42-62.
14. Schmidt B. Electron beam density measurements in argon // Journal of Fluid Mechanics. 1969. Vol. 39. P. 361–366. DOI: 10.1017/S0022112069002229.

15. Alsmeyer H. Density profiles in argon and nitrogen shock waves measured by the absorption of an electron beam // *Journal of Fluid Mechanics*. 1976. Vol. 74. Iss. 3. P. 497–513. DOI: 10.1017/S0022112076001912.
16. Holtz T., Muntz E. P. Molecular velocity distribution functions in an argon normal shock wave at Mach number 7 // *Physics of Fluids*. 1983. Vol. 26. Iss. 9. P. 2425–2436. DOI: 10.1063/1.864428.

REFERENCES

1. Maxwell, J. C. (1867). On the Dynamical Theory of Gases. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 157, 49–88. DOI: 10.1098/RSTL.1867.0004.
2. Boltzmann, L. (1896). *Vorlesungen über Gastheorie. Bd. 1*. Leipzig: Johann Ambrosius Barth.
3. Grad, H. (1949). On the kinetic theory of rarefied gases. In: *Communications on pure and applied mathematics*, 2 (4), 331–407. DOI: 10.1002/cpa.3160020403.
4. Kogan, M. N. (1967). *Dynamics of rarefied gas*. Moscow: Nauka publ. (in Russ.).
5. Grad, H. (1952). The Profile of a Steady Plane Shock Wave. In: *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 5 (3), 257–300. DOI: 10.1002/cpa.3160050304.
6. Struchtrup, H. & Torrilhon, M. (2003). Regularization of Grad's 13 moment equations: Derivation and linear analysis. In: *Physics of Fluids*, 15 (9), 2668–2680. DOI: 10.1063/1.1597472.
7. Torrilhon, M. & Struchtrup, H. (2004). Regularized 13-moment equations: shock structure calculations and comparison to Burnett models. In: *Journal of Fluid Mechanics*, 513, 171–198. DOI: 10.1017/S0022112004009917.
8. Timokhin, M. Y., Struchtrup, H., Kokhanchik, A. A. & Bondar, Y. A. (2017). Different variants of R13 moment equations applied to the shock-wave structure. In: *Physics of Fluids*, 29 (3), 037105. DOI: 10.1063/1.4977978.
9. Bondar, Y. A., Shoen, G. V. & Timokhin, M. Y. (2024). Regular reflection of shock waves in steady flows: viscous and non-equilibrium effects. In: *Journal of Fluid Mechanics*, 984, A10. DOI: 10.1017/jfm.2024.112.
10. Nikitchenko, Y. A. (2022). A Version of Closing the System of Moment Equations of an Arbitrary Order. In: *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 62, 487–507. DOI: 10.1134/S0965542522030125.
11. Nikitchenko, Yu. A. (2015). Reduction of short-wave instability of the system of moment equations due to its expansion. In: *TsAGI Science Journal*, 46 (1), 72–84 (in Russ.).
12. Popov, S. A. (2006). Method of total differentials for numerical solution of hyperbolic systems of equations. In: *Trudy MAI*, 22, 5–2 (in Russ.).
13. Popov, S. A. (2025). The integrals of the equations of motion. In: *Bulletin of the Federal State University of Education. Series: Physics and Mathematics*, 3, 42–62. DOI: 10.18384/10.18384/2949-5067-2025-3-42-62 (in Russ.).
14. Schmidt, B. (1969). Electron beam density measurements in argon. In: *Journal of Fluid Mechanics*, 39, 361–366. DOI: 10.1017/S0022112069002229.

15. Alsmeyer, H. (1976). Density profiles in argon and nitrogen shock waves measured by the absorption of an electron beam. In: *Journal of Fluid Mechanics*, 74 (3), 497–513. DOI: 10.1017/S0022112076001912.
16. Holtz, T. & Muntz, E. P. (1983). Molecular velocity distribution functions in an argon normal shock wave at Mach number 7. In: *Physics of Fluids*, 26 (9), 2425–2436. DOI: 10.1063/1.864428.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Попов Сергей Александрович (г. Москва) – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры аэродинамики, динамики и управления летательных аппаратов Московского авиационного института (национального исследовательского университета);

<https://orcid.org/0009-0004-4724-5424>; e-mail: flowmech@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Sergey A. Popov (Moscow) – Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Prof., Department of Aerodynamics, Dynamics and Control of Aircraft, Moscow Aviation Institute (National Research University);

<https://orcid.org/0009-0004-4724-5424>; e-mail: flowmech@mail.ru