

МАТЕМАТИКА

Научная статья

УДК 511.2, 512.642, 517.53

DOI: 10.18384/2949-5067-2026-1-92-121

МНОЖЕСТВО ДВОЙНЫХ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ КАК ОСОБОЕ РАСШИРЕНИЕ ПОЛЯ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Колягин А. Ю.

Независимый исследователь, г. Москва, Российская Федерация

e-mail: ak.russia4444@yandex.ru

Поступила в редакцию 27.11.2025

После доработки 08.12.2025

Принята к публикации 18.12.2025

Аннотация

Цель. Определение особой алгебраической системы на основе поля комплексных чисел со своими операциями сложения и умножения и их свойствами; понятий нормы и аргумента новых чисел; форм их представления, особого пространства как интерпретации этой системы.

Процедура и методы. Анализ алгебраической теории чисел, комплексных и гиперкомплексных чисел, теории векторных пространств, теории функций комплексного переменного.

Результаты. На основе комплексных чисел определена алгебраическая система нового типа, операции которой так же обратимы, как операции на поле комплексных чисел, определены и доказаны свойства операций. Эта система отличается от известных систем гиперкомплексных чисел и является особым расширением поля комплексных чисел. Определены: особое пространство, интерпретирующее данную систему; понятия модуля и аргумента новых чисел; формы их представления. Доказана возможность решения в новой системе определённого типа уравнений, неразрешимых на множестве комплексных чисел.

Теоретическая и/или практическая значимость. Новая алгебраическая система является элементом дальнейшего развития теории чисел и теории векторных пространств, расширяет направления исследований в других областях (разрешимость алгебраических уравнений, теория функций и др.). Результаты имеют и прикладной характер. В частности, разрешимость в новой алгебре не разрешимых ранее комплексных уравнений может использоваться в практических задачах, возможность графического представления функций комплексного переменного можно использовать в математическом моделировании пространственных объектов.

Ключевые слова: гиперкомплексные числа, векторное пространство, моделирование пространственных объектов, поле комплексных чисел, разрешимость комплексных уравнений, функции комплексного переменного

Для цитирования:

Колягин А. Ю. Множество двойных комплексных чисел как особое расширение поля комплексных чисел // Вестник Государственного университета просвещения. Серия: Физика-Математика. 2026. № 1. С. 92–121. <https://doi.org/10.18384/2949-5067-2026-1-92-121>

Original research article

SET OF DOUBLE COMPLEX NUMBERS AS A SPECIAL EXTENSION OF THE FIELD OF COMPLEX NUMBERS

A. Kolyagin

Independent researcher, Moscow, Russian Federation

e-mail: ak.russia4444@yandex.ru

Received by the editorial office 27.11.2025

Revised by the author 08.12.2025

Accepted for publication 18.12.2025

Abstract

Aim. Definition of a special algebraic system based on the field of complex numbers with its addition and multiplication operations and their properties, concepts of norm and argument of new numbers, forms of their representation, special space, as an interpretation of this system.

Methodology. Analysis of algebraic number theory, complex and hypercomplex numbers, theory of vector spaces, theory of functions of a complex variable.

Results. On the basis of complex numbers, an algebraic system of a new type is defined, the operations of which are also invertible, as operations on the field of complex numbers, the properties of operations are defined and proved. This system differs from known systems of hypercomplex numbers and is a special extension of the field of complex numbers. A special space is defined that interprets this system, the concepts of the module and argument of new numbers, the form of their presentation. The possibility of solving in a new system of a certain type of equations insoluble on the set of complex numbers has been proven.

Research implications. The new algebraic system is an element of further development of number theory and the theory of vector spaces, expands the direction of research in other areas (solvability of algebraic equations, function theory, etc.). The results are also applied. In particular, the solvability in the new algebra of previously insoluble complex equations can be used in practical problems, the ability to graphically represent functions of a complex variable can be used in mathematical modeling of spatial objects.

Keywords: hypercomplex numbers, vector space, spatial object modeling, complex number field, solvability of complex equations, complex variable functions

For citation:

Kolyagin, A. Yu. (2026). Set of double complex numbers as a special extension of the field of complex numbers. In: *Bulletin of the State University of Education*, 1, 92–121. <https://doi.org/10.18384/2949-5067-2026-1-92-121>

Введение

В этом исследовании представлена теория особого расширения поля комплексных чисел (C), которая является элементом теоретического развития математики, а также может быть использована в прикладном аспекте. В частности, по аналогии с теорией комплексных чисел [1], в которой снимается проблема неразрешимости ряда уравнений на множестве действительных чисел, новая алгебраическая система снимает проблему неразрешимости на C некоторого типа уравнений. Это уравнения с одним комплексным неизвестным X вида $X\bar{X} = Z$, где Z – некоторое фиксированное комплексное число с отрицательной действительной частью (в развёрнутом виде: $(x + yi)(x - yi) = a + bi$, $a < 0, b \in R$).

Также эта теория приводит к возможности графического отображения в трёхмерном пространстве функций комплексного переменного, что может применяться в математическом моделировании.

Данная теория не дублирует известные теории гиперкомплексных чисел [2], т. к. структура новых чисел, операция их умножения, свойства чисел и этой операции существенно отличаются от таковых, определённых для кватернионов и других чисел.

Определение множества двойных комплексных чисел и операций с ними

Определим множество C_d , элементами которого выступают упорядоченные пары комплексных чисел, соединённые знаком «+». Элементы будем называть двойными комплексными числами, или декомплексными числами. Такое число имеет две части: первое комплексное число в паре – левая часть, а второе – правая часть. Порядок комплексных чисел в декомплексном числе в принципе определён их расположением в паре и названиями – левая часть и правая часть. Но для лучшей наглядности и удобства эти части можно так или иначе выделить дополнительно. Теоретически можно было бы покрасить, например, правую часть, но решено дополнительно отмечать правую часть символом « j », который не обозначает какой-либо мнимого элемента:

$$(X + Vj) = (x + yi) + (v + wi)j.$$

Два числа равны тогда и только тогда, когда равны их левые и правые части:

$$C_d = \{(X + Vj)\} / X, V \in C, \quad (X_1 + V_1j) = (X_2 + V_2j) \Leftrightarrow \begin{cases} X_1 = X_2 \\ V_1 = V_2 \end{cases}$$

В соответствии с теорией алгебраических систем [3] будем определять на C_d операции сложения и умножения, для чего обозначим два произвольных числа:

$$\begin{aligned} (X_1 + V_1j) &= (x_1 + y_1i) + (v_1 + w_1i)j; \\ (X_2 + V_2j) &= (x_2 + y_2i) + (v_2 + w_2i)j. \end{aligned}$$

Определим сложение и вычитание правилом:

$$(X_1 + V_1j) \pm (X_2 + V_2j) = (X_1 \pm X_2) + (V_1 \pm V_2)j.$$

Это правило можно представить детально, раскрыв комплексные числа, составляющие декомплексные:

$$\begin{aligned} (X_1 + V_1j) \pm (X_2 + V_2j) &= \\ &= ((x_1 \pm x_2) + (y_1 \pm y_2)i) + ((v_1 \pm v_2) + (w_1 \pm w_2)i)j. \end{aligned}$$

Нейтральным элементом для этой операции выступает число, которое назовём декомплексным нулём или денулём и обозначим O_d :

$$O_d = (0 + 0i) + (0 + 0i)j.$$

Очевидно, что эта операция коммутативна, ассоциативна и обратима.

Теперь определим операцию умножения, используя операции умножения комплексных чисел, составляющих декомплексные, и сопряжённых с ними, обозначая их принятым образом $(\bar{X} = x - yi)$. Умножение любого декомплексного числа $X_1 + V_1j$ на другое произвольное число $X_2 + V_2j$ определим правилом:

$$(X_1 + V_1j)(X_2 + V_2j) = (X_1X_2 - \bar{V}_1\bar{V}_2) + (\bar{X}_1\bar{V}_2 + X_2V_1)j.$$

Левая часть результата: $(X_1X_2 - \bar{V}_1\bar{V}_2)$, правая – $(\bar{X}_1\bar{V}_2 + X_2V_1)$. Это правило также можно представить и более детально, раскрыв комплексные числа:

$$\begin{aligned} (X_1 + V_1j)(X_2 + V_2j) &= \\ &= ((x_1 + y_1i) + (v_1 + w_1i)j)((x_2 + y_2i) + (v_2 + w_2i)j) = \\ &= ((x_1 + y_1i)(x_2 + y_2i) - (v_1 - w_1i)(v_2 - w_2i)) + \\ &\quad + ((x_1 - y_1i)(v_2 - w_2i) + (x_2 + y_2i)(v_1 + w_1i))j = \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2 - v_1v_2 + w_1w_2 + (x_1y_2 + y_1x_2 + v_1w_2 + w_1v_2)i) + \\ &\quad + (x_1v_2 - y_1w_2 + x_2v_1 - y_2w_1 + (-x_1w_2 - y_1v_2 + x_2w_1 + y_2v_1)i)j. \end{aligned}$$

Пример:

$$\begin{aligned} ((2 + 3i) + (1 - 2i)j)((1 + 2i) + (1 + 4i)j) &= \\ &= ((2 + 3i)(1 + 2i) - (1 + 2i)(1 - 4i)) + \\ &\quad + ((2 - 3i)(1 - 4i) + (1 + 2i)(1 - 2i))j = (-13 + 9i) + (-5 - 11i)j. \end{aligned}$$

Нейтральным числом (обозначим E_j) для этой операции определим число $E_j = (1 + 0i) + (0 + 0i)j$:

$$\begin{aligned}(X + Vj)E_j &= (X(1 + 0i) - \bar{V}(0 - 0i)) + (\bar{X}(0 - 0i) + (1 + 0i)V)j = \\ &= (X + (0 + 0i)) + ((0 + 0i) + V)j = X + Vj.\end{aligned}$$

Данная операция является частично обратимой, т. е. для любых чисел $X_1 + V_1j \neq O_d$ и $X_2 + V_2j$ существует число $X + Vj$, для которого справедливо равенство $(X_1 + V_1j)(X + Vj) = (X_2 + V_2j)$. Число $X + Vj$ назовём частным $X_2 + V_2j$ и $X_1 + V_1j$ и обозначим $\frac{X_2 + V_2j}{X_1 + V_1j}$. Докажем это и определим формулы вычисления частного.

Из уравнения $(X_1 + V_1j)(X + Vj) = (X_2 + V_2j)$ с неизвестным $(X + Vj)$ следует, что система уравнений $\begin{cases} X_1X - \bar{V}_1\bar{V} = X_2 \\ \bar{X}_1\bar{V} + XV_1 = V_2 \end{cases}$ при $X_1 + V_1j \neq O_d$ должна иметь единственное решение. Решим эту систему:

$$\begin{aligned}\begin{cases} X_1X - \bar{V}_1\bar{V} = X_2 \\ \bar{X}_1\bar{V} + XV_1 = V_2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (X_1X - \bar{V}_1\bar{V})\bar{X}_1 = X_2\bar{X}_1 \\ (\bar{X}_1\bar{V} + XV_1)\bar{V}_1 = V_2\bar{V}_1 \end{cases} \Rightarrow X_1X\bar{X}_1 + XV_1\bar{V}_1 = \\ &= X_2\bar{X}_1 + V_2\bar{V}_1 \Rightarrow \\ \Rightarrow X &= \frac{X_2\bar{X}_1 + V_2\bar{V}_1}{X_1\bar{X}_1 + V_1\bar{V}_1} = \frac{(x_2 + y_2i)(x_1 - y_1i) + (v_2 + w_2i)(v_1 - w_1i)}{(x_1 + y_1i)(x_1 - y_1i) + (v_1 + w_1i)(v_1 - w_1i)} = \\ &= \frac{x_2x_1 + y_1y_2 + (y_2x_1 - x_2y_1)i + v_2v_1 + w_1w_2 + (w_2v_1 - v_2w_1)i}{x_1^2 + y_1^2 + v_1^2 + w_1^2} \Rightarrow \\ X &= \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + v_1v_2 + w_1w_2}{x_1^2 + y_1^2 + v_1^2 + w_1^2} + \frac{x_1y_2 - x_2y_1 + v_1w_2 - v_2w_1}{x_1^2 + y_1^2 + v_1^2 + w_1^2}i.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\begin{cases} X_1X - \bar{V}_1\bar{V} = X_2 \\ \bar{X}_1\bar{V} + XV_1 = V_2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (X_1X - \bar{V}_1\bar{V})V_1 = X_2V_1 \\ (\bar{X}_1\bar{V} + XV_1)X_1 = V_2X_1 \end{cases} \Rightarrow \bar{X}_1\bar{V}X_1 + \bar{V}_1\bar{V}V_1 = \\ &= V_2X_1 - X_2V_1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \bar{V} &= \frac{V_2X_1 - X_2V_1}{X_1\bar{X}_1 + V_1\bar{V}_1} = \frac{(v_2 + w_2i)(x_1 + y_1i) - (x_2 + y_2i)(v_1 + w_1i)}{(x_1 + y_1i)(x_1 - y_1i) + (v_1 + w_1i)(v_1 - w_1i)} = \\ &= \frac{v_2x_1 - w_2y_1 + (v_2y_1 + w_2x_1)i - x_2v_1 + y_2w_1 - (x_2w_1 + y_2v_1)i}{x_1^2 + y_1^2 + v_1^2 + w_1^2} =\end{aligned}$$

$$= \frac{x_1 v_2 - y_1 w_2 - x_2 v_1 + y_2 w_1}{x_1^2 + y_1^2 + v_1^2 + w_1^2} + \frac{y_1 v_2 + x_1 w_2 - x_2 w_1 - y_2 v_1}{x_1^2 + y_1^2 + v_1^2 + w_1^2} i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{x_1 v_2 - y_1 w_2 - x_2 v_1 + y_2 w_1}{x_1^2 + y_1^2 + v_1^2 + w_1^2} - \frac{y_1 v_2 + x_1 w_2 - x_2 w_1 - y_2 v_1}{x_1^2 + y_1^2 + v_1^2 + w_1^2} i.$$

Учитывая, что $x_1^2 + y_1^2 + v_1^2 + w_1^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = y_1 = v_1 = w_1 = 0$, считаем сделанное выше утверждение доказанным.

Понятие сопряжения двойных комплексных чисел, свойства операции их умножения

Комплексное число представляет одну пару элементов, а именно: действительную и мнимую части. Поэтому на $\mathbb{C}$ определена одна унарная операция сопряжения, когда в результате операции вместо второго элемента (мнимой части) ставится ему противоположный.

Декомлексное число представляет три пары элементов: каждая часть декомплексного числа это – комплексная пара, и сами части декомплексного числа составляют третью пару. Поэтому на данном множестве определим три типа унарной операции сопряжения.

Число $\bar{X} + Vj$ будем называть **сопряжённым слева** числу $X + Vj$ и обозначать левой стрелкой: $\overleftarrow{X + Vj} = \bar{X} + Vj = (x - yi) + (v + wi)j$.

Число $X + \bar{V}j$ будем называть **сопряжённым справа** числу $X + Vj$ и обозначать правой стрелкой: $\overrightarrow{X + Vj} = X + \bar{V}j = (x + yi) + (v - wi)j$.

Второй элемент третьей пары может заменяться противоположным или возможен равносильный вариант, когда заменяются на противоположные вторые элементы в левой и правой частях, а потом правая часть результата заменяется противоположным значением. Два варианта являются равносильными, т. к. при определении сопряжения по первому варианту операция по второму варианту может быть выражена имеющимися унарными операциями и наоборот. Мы выберем второй вариант и число $\bar{X} - \bar{V}j$ будем называть **сопряжённым** числу $X + Vj$ и обозначать чертой: $\overline{X + Vj} = \bar{X} - \bar{V}j = (x - yi) - (v - wi)j$.

Если с числом осуществляется одновременно операция сопряжения слева и справа, то для удобства можно обозначать это одной стрелкой в обе стороны: $\overleftrightarrow{X + Vj} = \overleftarrow{X + Vj} = \bar{X} + \bar{V}j$.

Некоторые свойства сопряжённых чисел:

- $$(X + Vj)(\overline{X + Vj}) = (X + Vj)(\bar{X} - \bar{V}j) = (X\bar{X} + \bar{V}\bar{V}) + (-\bar{X}\bar{V} + V\bar{X})j =$$

$$= (x^2 + y^2 + v^2 + w^2 + 0i) + (-\bar{X}V + \bar{X}V)j =$$

$$= (x^2 + y^2 + v^2 + w^2 + 0i) + (0 + 0i)j.$$

- Выполнение дважды одного и того же сопряжения с числом или выражением не меняет это число или выражение.

Например, $\overrightarrow{\overrightarrow{X + V_j}} = \overrightarrow{\overrightarrow{X} + \overrightarrow{V_j}} = \overrightarrow{\overline{\overline{X}} + \overline{\overline{V_j}}} = \overline{\overline{X}} + \overline{\overline{V_j}} = X + V_j$.

- $\overrightarrow{(\overrightarrow{X_1 + V_{1j}})(\overrightarrow{X_2 + V_{2j}})} = (X_1 + V_{1j})(X_2 + V_{2j})$.

$$(X_1 + V_{1j})(X_2 + V_{2j}) = (X_1 X_2 - \overline{V_1} \overline{V_2}) + (\overline{X_1} \overline{V_2} + X_2 V_1)j;$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{(\overrightarrow{X_1 + V_{1j}})(\overrightarrow{X_2 + V_{2j}})} &= \overrightarrow{(\overline{\overline{X_1 + V_{1j}}})(\overline{\overline{X_2 + V_{2j}}})} = \\ &= \overrightarrow{(\overline{\overline{X_1} \overline{X_2} - \overline{V_1} \overline{V_2}} + (\overline{X_1} \overline{V_2} + \overline{X_2} \overline{V_1}))} = \\ &= \overrightarrow{(\overline{\overline{X_1} \overline{X_2} - \overline{V_1} \overline{V_2}}) + (\overline{X_1} \overline{V_2} + \overline{X_2} \overline{V_1})j} = \\ &= (\overline{\overline{X_1} \overline{X_2} - \overline{V_1} \overline{V_2}}) + (\overline{X_1} \overline{V_2} + \overline{X_2} \overline{V_1})j = (X_1 X_2 - \overline{V_1} \overline{V_2}) + (\overline{X_1} \overline{V_2} + X_2 V_1)j. \end{aligned}$$

Рассмотрим свойства операции умножения. Она не является коммутативной, т. е. $(X_1 + V_{1j})(X_2 + V_{2j}) \neq (X_2 + V_{2j})(X_1 + V_{1j})$ для всех чисел. Но для этой операции справедливо следующее свойство:

$$(X_1 + V_{1j})(X_2 + V_{2j}) = \overrightarrow{(X_2 + V_{2j})(X_1 + V_{1j})}.$$

Убедимся в этом, преобразовав и сравнив части равенства.

$$\begin{aligned} (X_1 + V_{1j})(X_2 + V_{2j}) &= (X_1 X_2 - \overline{V_1} \overline{V_2}) + (\overline{X_1} \overline{V_2} + X_2 V_1)j; \\ \overrightarrow{(X_2 + V_{2j})(X_1 + V_{1j})} &= \overrightarrow{(X_2 X_1 - \overline{V_2} \overline{V_1}) + (\overline{X_2} \overline{V_1} + V_2 X_1)j} = \\ &= (X_1 X_2 - \overline{V_1} \overline{V_2}) + \overrightarrow{(\overline{X_2} \overline{V_1} + V_2 X_1)j} = (X_1 X_2 - \overline{V_1} \overline{V_2}) + (\overline{\overline{X_2} \overline{V_1}} + \overline{V_2 X_1})j = \\ &= (X_1 X_2 - \overline{V_1} \overline{V_2}) + (\overline{X_1} \overline{V_2} + X_2 V_1)j. \end{aligned}$$

Приведём пример:

$$((2 + 3i) + (1 - 2i)j)((1 + 2i) + (1 + 4i)j) = -13 + 9i + (-5 - 11i)j.$$

Переставим местами сомножители и применим сопряжение справа:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{((1 + 2i) + (1 + 4i)j)((2 + 3i) + (1 - 2i)j)} &= \\ \overrightarrow{2 - 6 - 1 - 8 + (4 + 3 - 2 + 4)i + (1 + 4 + 2 - 12 + (2 - 2 + 3 + 8)i)j} &= \\ = \overrightarrow{-13 + 9i + (-5 + 11i)j} = -13 + 9i + (-5 - 11i)j. \end{aligned}$$

Это свойство будем называть **сопряжённой коммутативностью**.

Операция умножения не обладает свойством ассоциативности, но для неё справедливо свойство:

$$[(X_1 + V_1j)(X_2 + V_2j)](X_3 + V_3j) = (X_1 + V_1j) \left[\overrightarrow{(X_2 + V_2j)(X_3 + V_3j)} \right].$$

Убедимся в этом:

$$\begin{aligned} [(X_1 + V_1j)(X_2 + V_2j)](X_3 + V_3j) &= [(X_1X_2 - \overline{V_1V_2}) + (\overline{X_1V_2} + X_2V_1)j](X_3 + V_3j) = \\ &= [(X_1X_2 - \overline{V_1V_2})X_3 - (\overline{X_1V_2} + X_2V_1)\overline{V_3}] + [(X_1X_2 - \overline{V_1V_2})\overline{V_3} + (\overline{X_1V_2} + X_2V_1)X_3]j = \\ &= [X_1X_2X_3 - \overline{V_1V_2}X_3 - X_1V_2\overline{V_3} - \overline{X_2V_1}V_3] + [\overline{X_1X_2}V_3 - V_1V_2\overline{V_3} + \overline{X_1V_2}X_3 + X_2V_1X_3]j; \\ (X_1 + V_1j) \left[\overrightarrow{(X_2 + V_2j)(X_3 + V_3j)} \right] &= (X_1 + V_1j) \left[\overrightarrow{(X_2 + V_2j)(X_3 + V_3j)} \right] = \\ &= (X_1 + V_1j) \left[\overrightarrow{(X_2X_3 - V_2\overline{V_3}) + (\overline{X_2V_3} + X_3\overline{V_2})j} \right] = (X_1 + V_1j) \times \\ &\times \left[(X_2X_3 - V_2\overline{V_3}) + (\overline{X_2V_3} + X_3\overline{V_2})j \right] = (X_1 + V_1j) \left[(X_2X_3 - V_2\overline{V_3}) + (X_2V_3 + \overline{X_3V_2})j \right] = \\ &= [X_1(X_2X_3 - V_2\overline{V_3}) - \overline{V_1}(X_2V_3 + \overline{X_3V_2})] + [\overline{X_1}(X_2V_3 + \overline{X_3V_2}) + V_1(X_2X_3 - V_2\overline{V_3})]j = \\ &= [X_1X_2X_3 - X_1V_2\overline{V_3} - \overline{V_1}(X_2V_3 + \overline{X_3V_2})] + [\overline{X_1}(X_2V_3 + \overline{X_3V_2}) + V_1(X_2X_3 - V_2\overline{V_3})]j = \\ &= [X_1X_2X_3 - \overline{V_1V_2}X_3 - X_1V_2\overline{V_3} - \overline{X_2V_1}V_3] + [\overline{X_1X_2}V_3 - V_1V_2\overline{V_3} + \overline{X_1V_2}X_3 + X_2V_1X_3]j. \end{aligned}$$

Это свойство назовём **левой сопряжённой ассоциативностью**.

Для операции умножения также справедливо свойство:

$$(X_1 + V_1j) \left[\overrightarrow{(X_2 + V_2j)(X_3 + V_3j)} \right] = [(X_1 + V_1j)(\overrightarrow{X_2 + V_2j})](X_3 + V_3j).$$

В этом можно убедиться, используя свойство сопряжённой коммутативности и свойство левой сопряжённой ассоциативности:

$$\begin{aligned} (X_1 + V_1j) \left[\overrightarrow{(X_2 + V_2j)(X_3 + V_3j)} \right] &= (X_1 + V_1j) [(X_3 + V_3j)(X_2 + V_2j)] = \\ &= \overrightarrow{[(X_3 + V_3j)(X_2 + V_2j)](X_1 + V_1j)} = (X_3 + V_3j) \left[\overrightarrow{(X_2 + V_2j)(X_1 + V_1j)} \right] = \\ &= \overrightarrow{(X_3 + V_3j) [(X_1 + V_1j)(\overrightarrow{X_2 + V_2j})]} = [(X_1 + V_1j)(\overrightarrow{X_2 + V_2j})](X_3 + V_3j). \end{aligned}$$

Это свойство назовём **правой сопряжённой ассоциативностью**. Формулы левой и правой сопряжённой ассоциативности равносильны, т. к. каждая может быть получена с помощью другой. Поэтому одно свойство сопряжённой ассоциативности выражено разными формулами. Для удобства оставим различные названия этого свойства для разных формул.

Операция умножения также обладает свойством дистрибутивности слева и справа по отношению к сложению.

$$\begin{aligned}
& (X_1 + V_1j)(X_2 + V_2j) + (X_3 + V_3j) = \\
& = (X_1 + V_1j)(X_2 + V_2j) + (X_1 + V_1j)(X_3 + V_3j). \\
& (X_1 + V_1j)[(X_2 + V_2j) + (X_3 + V_3j)] = (X_1 + V_1j)[(X_2 + X_3) + (V_2 + V_3)j] = \\
& = [X_1(X_2 + X_3) - \overline{V_1}(\overline{V_2 + V_3})] + [\overline{X_1}(\overline{V_2 + V_3}) + V_1(X_2 + X_3)]j = \\
& = [X_1X_2 + X_1X_3 - \overline{V_1}\overline{V_2} - \overline{V_1}\overline{V_3}] + [\overline{X_1}\overline{V_2} + \overline{X_1}\overline{V_3} + V_1X_2 + V_1X_3]j; \\
& (X_1 + V_1j)(X_2 + V_2j) + (X_1 + V_1j)(X_3 + V_3j) = \\
& = [(X_1X_2 - \overline{V_1}\overline{V_2}) + (\overline{X_1}\overline{V_2} + X_2V_1)]j + \\
& + [(X_1X_3 - \overline{V_1}\overline{V_3}) + (\overline{X_1}\overline{V_3} + X_3V_1)]j = \\
& = [X_1X_2 - \overline{V_1}\overline{V_2} + X_1X_3 - \overline{V_1}\overline{V_3}] + [\overline{X_1}\overline{V_2} + X_2V_1 + \overline{X_1}\overline{V_3} + X_3V_1]j. \\
& [(X_2 + V_2j) + (X_3 + V_3j)](X_1 + V_1j) = \\
& = (X_2 + V_2j)(X_1 + V_1j) + (X_3 + V_3j)(X_1 + V_1j). \\
& [(X_2 + V_2j) + (X_3 + V_3j)](X_1 + V_1j) = [(X_2 + X_3) + (V_2 + V_3)j](X_1 + V_1j) = \\
& = [(X_2 + X_3)X_1 - (\overline{V_2 + V_3})\overline{V_1}] + [(\overline{X_2 + X_3})\overline{V_1} + (V_2 + V_3)X_1]j = \\
& = [X_2X_1 + X_3X_1 - \overline{V_2}\overline{V_1} - \overline{V_3}\overline{V_1}] + [\overline{X_2}\overline{V_1} + \overline{X_3}\overline{V_1} + V_2X_1 + V_3X_1]j; \\
& (X_2 + V_2j)(X_1 + V_1j) + (X_3 + V_3j)(X_1 + V_1j) = \\
& = [(X_2X_1 - \overline{V_2}\overline{V_1}) + (\overline{X_2}\overline{V_1} + X_1V_2)]j + \\
& + [(X_3X_1 - \overline{V_3}\overline{V_1}) + (\overline{X_3}\overline{V_1} + X_1V_3)]j = \\
& = [X_2X_1 - \overline{V_2}\overline{V_1} + X_3X_1 - \overline{V_3}\overline{V_1}] + [\overline{X_2}\overline{V_1} + X_1V_2 + \overline{X_3}\overline{V_1} + X_1V_3]j.
\end{aligned}$$

Назовём это свойство сопряжённой дистрибутивностью.

Множество комплексных чисел находится во взаимно однозначном соответствии с подмножеством C_{dc} множества C_d , где правая часть декомплексных чисел является комплексным нулём (O_i):

$$C = \{X / X = x + yi, x, y \in R\} \leftrightarrow C_{dc} = \{X + O_ij / X = x + yi, x, y \in R\}.$$

Операции сложения и умножения, определённые на C_d , являются замкнутыми и на C_{dc} , а указанная биекция сохраняет операции сложения и умножения, определённые на C и на C_{dc} :

$$\begin{aligned}
& (X_1 + O_ij) \pm (X_2 + O_ij) = X_1 \pm X_2 + O_ij. \\
& (X_1 + O_ij)(X_2 + O_ij) = (X_1X_2 - \overline{O_i}\overline{O_i}) + (\overline{X_1}\overline{O_i} + X_2O_i)j = X_1X_2 + O_ij
\end{aligned}$$

Формулы для частного при $V_1 = V_2 = O_i \Leftrightarrow v_1 = v_2 = w_1 = w_2 = 0$:

$$X = \frac{x_2x_1+y_1y_2+0\cdot0+0\cdot0}{x_1^2+y_1^2+0^2+0^2} + \frac{y_2x_1-x_2y_1+0\cdot0-0\cdot0}{x_1^2+y_1^2+0^2+0^2}i = \frac{x_2x_1+y_1y_2}{x_1^2+y_1^2} + \frac{y_2x_1-x_2y_1}{x_1^2+y_1^2}i;$$

$$V = \frac{0x_1-0y_1-x_2\cdot0+y_2\cdot0}{x_1^2+y_1^2+0^2+0^2} - \frac{0y_1+0x_1-x_2\cdot0-y_2\cdot0}{x_1^2+y_1^2+0^2+0^2}i = O_i.$$

Свойства операций декомплексных чисел на подмножестве C_{dc} , т. е. при $V_1 = V_2 = O_i$, сводятся к свойствам операций комплексных чисел.

Сопряжённая коммутативность сводится к коммутативности:

$$(X_1 + O_{ij})(X_2 + O_{ij}) = X_1X_2 = X_2X_1 = \overline{(X_2 + O_{ij})(X_1 + O_{ij})}.$$

Сопряжённая ассоциативность сводится к ассоциативности (на примере левой ассоциативности):

$$\begin{aligned} [(X_1 + O_{ij})(X_2 + O_{ij})](X_3 + O_{ij}) &= (X_1X_2)X_3 = \\ &= X_1(X_2X_3) = (X_1 + O_{ij}) \left[\overline{(X_2 + O_{ij})(X_3 + O_{ij})} \right]. \end{aligned}$$

Сопряжённая дистрибутивность сводится к дистрибутивности (на примере дистрибутивности слева):

$$\begin{aligned} (X_1 + O_{ij})[(X_2 + O_{ij}) + (X_3 + O_{ij})] &= X_1(X_2 + X_3) = \\ &= X_1X_2 + X_1X_3 = (X_1 + O_{ij})(X_2 + O_{ij}) + (X_1 + O_{ij})(X_3 + O_{ij}). \end{aligned}$$

Таким образом подмножество C_{dc} с операциями сложения и умножения, включая их свойства, определёнными на C_{dc} , как и на C_d , составляет поле, изоморфное полю комплексных чисел. На основе этого само множество C_d можно рассматривать как особое расширение множества комплексных чисел C , при котором операции на C «расширяются» до операций на C_d , включая унарную операцию сопряжения, а также свойства операций на C «расширяются» до соответствующих свойств операций на C_d .

Множество C_d с определёнными выше на нём операциями сложения и умножения и их свойствами будем называть **деполем**, на котором можно рассматривать различные уравнения и их решения.

Уравнения, не имеющие решений на множестве комплексных чисел и разрешимые на множестве декомплексных чисел

Вернёмся к вопросу неразрешимости на C уравнений вида

$$(x + yi)(x - yi) = a + bi, a < 0, b \in R.$$

Если говорить об уравнении $x^2 = -1$ в контексте определения комплексных чисел, то нахождение решения этого уравнения по сути сводится к нахождению на множестве C решения уравнения

$$(x + yi)(x + yi) = -1 + 0i.$$

Для поиска решений рассматриваем систему $\begin{cases} x^2 - y^2 = -1 \\ 2xy = 0 \end{cases}$ и находим два решения: $0 + i$ и $0 - i$.

В случае уравнения $(x + yi)(x - yi) = a + bi, a < 0, b \in R$ действуем аналогично, т. е. рассматриваем уравнение с произведением неизвестного декомплексного числа с сопряжённым себе слева на C_d :

$$[(x + yi) + (v + wi)j][(x - yi) + (v + wi)j] = a + bi + (0 + 0i)j.$$

Преобразуем левую часть уравнения:

$$\begin{aligned} & [(x + yi) + (v + wi)j][(x - yi) + (v + wi)j] = \\ & = [(x + yi)(x - yi) - (v - wi)(v - wi)] + \\ & + [(x - yi)(v - wi) + (v + wi)(x - yi)]j = \\ & = [x^2 + y^2 - v^2 + w^2 + 2vwi] + [2xv - 2yvi]j. \end{aligned}$$

В поисках решений рассматриваем систему:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - v^2 + w^2 + 2vwi = a + bi \\ 2xv - 2yvi = 0 + 0i \end{cases}.$$

Если положить $v = 0$, то при удовлетворении второго уравнения, противоречие есть в первом, т. к. $x^2 + y^2 + w^2 \neq a + bi$ для $a < 0, b \in R$. При $v \neq 0$ получаем $2xv - 2yvi = 0 + 0i \Rightarrow x = y = 0$.

Учитывая, что $v \neq 0$, рассматриваем уравнение

$$\begin{aligned} -v^2 + w^2 + 2vwi = a + bi & \Leftrightarrow \begin{cases} v^2 - w^2 = -a \\ 2vw = b \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} v^2 - w^2 = -a \\ w = \frac{b}{2v} \end{cases} & \Rightarrow v^2 - \left(\frac{b}{2v}\right)^2 = -a \Rightarrow \frac{4v^4 + a4v^2 - b^2}{4v^2} = 0. \end{aligned}$$

Решая уравнение $4v^4 + a4v^2 - b^2 = 0$ ($a < 0$), находим v , а w из системы:

$$v = \pm \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \quad \text{и} \quad w = \frac{-b}{\pm \sqrt{2(-a + \sqrt{a^2 + b^2})}}.$$

Таким образом, рассматриваемое уравнение имеет два решения:

$$(0 + 0i) + \left(\sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} + \frac{-b}{\sqrt{2(-a + \sqrt{a^2 + b^2})}} i \right) j;$$

$$(0 + 0i) + \left(-\sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} + \frac{b}{\sqrt{2(-a + \sqrt{a^2 + b^2})}} i \right) j.$$

В случае $b = 0$ уравнение принимает вид:

$$[(x + yi) + (0 + 0i)j][(x - yi) + (0 + 0i)j] = a + 0i + (0 + 0i)j.$$

В этом случае оно имеет корни:

$$(0 + 0i) + (\sqrt{-a} + 0i)j \text{ и } (0 + 0i) + (-\sqrt{-a} + 0i)j.$$

При $b = 0$ и $a = -1$ уравнение принимает вид:

$$[(x + yi) + (0 + 0i)j][(x - yi) + (0 + 0i)j] = -1 + 0i + (0 + 0i)j.$$

Тогда корнями будут $(0 + 0i) + (1 + 0i)j$ и $(0 + 0i) + (-1 + 0i)j$. Проверим, например, первый корень:

$$\begin{aligned} & [(0 + 0i) + (1 + 0i)j][(0 - 0i) + (1 + 0i)j] = \\ & = [(0 + 0i)(0 - 0i) - (1 - 0i)(1 - 0i)] + \\ & + [(0 - 0i)(1 - 0i) + (1 + 0i)(0 - 0i)]j = -1 + 0i + (0 + 0i)j. \end{aligned}$$

Ещё один пример: уравнение $(x + yi)(x - yi) = -4 + 3i$ на C или $[(x + yi) + (v + wi)j][(x - yi) + (v + wi)j] = -4 + 3i + (0 + 0i)j$ на C_d .

Его корни: $(0 + 0i) + \left(\sqrt{4,5} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)j$ и $(0 + 0i) + \left(-\sqrt{4,5} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)j$.

Проверка:

$$\begin{aligned} & \left[(0 + 0i)(0 - 0i) - \left(\sqrt{4,5} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt{4,5} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) \right] + \\ & + \left[(0 - 0i)\left(\sqrt{4,5} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\sqrt{4,5} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)(0 - 0i) \right] j = \\ & = [0 + 0 - 4,5 + 0,5 + \sqrt{9}i] + [0 - 0i]j = -4 + 3i + (0 + 0i)j; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[(0 + 0i)(0 - 0i) - \left(-\sqrt{4,5} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left(-\sqrt{4,5} - \frac{1}{\sqrt{2}} i \right) \right] + \\
& + \left[(0 - 0i) \left(-\sqrt{4,5} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \left(-\sqrt{4,5} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) (0 - 0i) \right] j = \\
& = [0 + 0 - 4,5 + 0,5 + \sqrt{9}i] + [0 - 0i]j = -4 + 3i + (0 + 0i)j.
\end{aligned}$$

Рассмотрим на C уравнение с неизвестным $z = x + iy$ ($x, y \in R$) вида: $a_1(z\bar{z})^2 + a_2(z\bar{z}) + a_3 = 0$, $a_1, a_2, a_3 \in R$.

Решая его относительно $(z\bar{z})$, получим:

$$(z\bar{z}) = (x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2 + 0i = c + di, \quad c, d \in R.$$

В случае $c \geq 0$ и $d = 0$ уравнение имеет один корень при $c = 0$ или бесконечное множество корней при $c > 0$. В противном случае, т. е. при $c < 0$ или $d \neq 0$, оно не разрешимо на множестве C , но разрешимо на C_d .

Геометрическая интерпретация декомплексных чисел, их модуль, аргумент и особые формы представления

Для декомплексных чисел определим векторное пространство, выступающее их геометрической интерпретацией. Это пространство, как и двумерное векторное пространство C^2 [4], основано на множестве упорядоченных пар комплексных чисел. Но оно отличается от C^2 определёнными свойствами. Оно также отличается от пространства комплексных векторов [5]. Определим элементы нового пространства.

Рассмотрим трёхмерное пространство точек, в котором ось ox будем называть горизонтальной осью, ov – вертикальной осью и oi – совмещённой осью. Плоскость с осями ox и oi рассматриваем как двумерное векторное пространство, которое назовём горизонтальным, интерпретирующим множество комплексных чисел $x + yi$. Плоскость с осями ov и oi рассматриваем как двумерное векторное пространство, которое назовём вертикальным, интерпретирующим множество комплексных чисел $v + wi$. На оси oi отмечаются оба значения мнимых частей y и w (рис. 1).

Пусть $A = (x_1 + y_1 i) + (v_1 + w_1 i)j$ – некоторое декомплексное число. Построим в горизонтальной и вертикальной комплексных плоскостях векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$, соответствующие комплексным числам в левой и правой частях A (рис. 1, слева). На основе векторов построим треугольник OAB . Очевидно, что такой треугольник однозначно определяется направляющими векторами $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$, т. е. декомплексным числом. Направление вектора $\overrightarrow{OA}$ назовём горизонтальным, а направление вектора $\overrightarrow{OB}$ – вертикальным направлением треугольника.

Когда действительные части комплексных чисел $x_1 = v_1 = 0$, тогда треугольник вырождается в отрезок $[AB]$ (рис. 1, справа). Считаем, что у

треугольника одно нулевое направление, если один из векторов нулевой, и оба направления нулевые, если оба вектора нулевые.

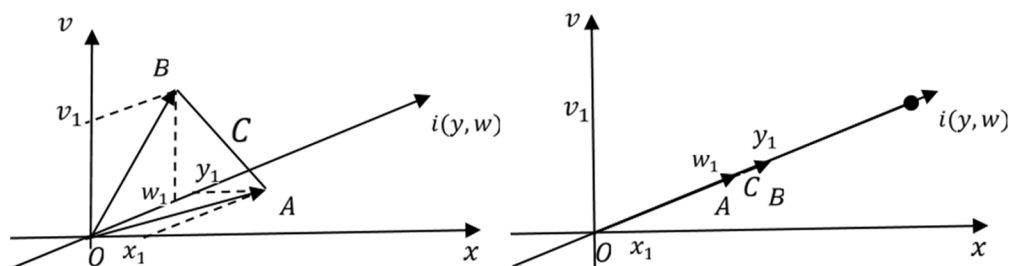


Рис. 1 / Fig. 1. Построение поливектора, справа при $x_1 = v_1 = 0$ / Construction of a polyvector, right, when $x_1 = v_1 = 0$.

Источник: данные автора.

Таким образом, обозначив направления стрелками, получаем в трёхмерном пространстве объекты, имеющие два направления. По аналогии представления вектора как направленного отрезка будем считать такие объекты направленными треугольниками. В перспективе можно рассматривать направленные объекты и с большим количеством направлений. Поэтому такого рода объекты будем называть поливекторами. Исходную точку O направляющих векторов назовём началом поливектора, точку A на горизонтальной плоскости – горизонтальной вершиной, точку B на вертикальной плоскости – вертикальной вершиной. Дополнительно на стороне AB треугольника выделим середину точкой C , которую будем называть центральной вершиной. Обозначать поливектор будем со стрелкой. Если обозначаем его всеми четырьмя точками, то начинаем с начала поливектора и заканчиваем его центральной вершиной: $\overrightarrow{OAB\vec{C}}$.

Теперь в привычном трёхмерном пространстве введём особую систему, построенную не на координатных осях, а на перпендикулярных друг другу координатных плоскостях с началом координат в выбранной точке на прямой, по которой они пересекаются. На рис.1 выше – это горизонтальная координатная плоскость xOi и вертикальная координатная плоскость vOi . Началом координат выступает точка O . Координатные плоскости рассматриваем как комплексные плоскости, а систему координат назовём плоскостной.

Координатами поливектора в этом случае выступают два комплексных числа: $\overrightarrow{OAB\vec{C}}(x_1 + y_1 i; v_1 + w_1 i)$. Визуально поливекторы можно рассматривать как в трёхмерном пространстве со совмещённой осью, так и в плоскостной системе координат. Далее в соответствии с теорией векторных пространств [6] на множестве поливекторов определяем соответствующие операции. Начнём с операций сложения и вычитания:

$$\vec{A}(x_1 + y_1i; v_1 + w_1i) \pm \vec{B}(x_2 + y_2i; v_2 + w_2i) = \\ = \vec{C}((x_1 \pm x_2) + (y_1 \pm y_2)i; (v_1 \pm v_2) + (w_1 \pm w_2)i).$$

На рис. 2 показана графическая интерпретация сложения поливекторов $\vec{OABC}$ и $\vec{OA'B'C'}$. В горизонтальной комплексной плоскости вектор $\vec{OA}$ складываем с вектором $\vec{OA'}$, а в вертикальной вектор $\vec{OB}$ складываем с вектором $\vec{OB'}$. Результат – суммарный поливектор $\vec{OA''B''C''}$.

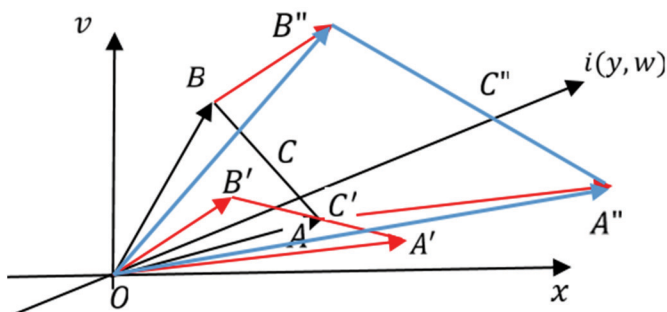


Рис. 2 / Fig. 2. Сложение поливекторов / Adding polyvectors.

Источник: данные автора.

Очевидно, что эта операция коммутативна и ассоциативна. В отношении сложения существует нулевой элемент – нулевой поливектор $\vec{O}(0 + 0i; 0 + 0i)$, т. к. для любого поливектора $\vec{A}$ справедливо равенство $\vec{A} + \vec{O} = \vec{O} + \vec{A} = \vec{A}$. Также для каждого поливектора $\vec{A}(x + yi; v + wi)$ есть ему противоположный: $\vec{A}'(-x - yi; -v - wi)$ / $\vec{A} + \vec{A}' = \vec{A}' + \vec{A} = \vec{O}$.

Далее на множестве поливекторов определим операцию умножения поливектора и на комплексное число. Операцию определяем по правилу умножения декомплексных чисел, представляя пару координат вектора как декомплексное число $X + Vj = x + yi + (v + wi)j$ и число, с которым перемножается поливектор в виде соответствующего декомплексного числа $Z = a + bi + (0 + 0i)j$:

$$\vec{A}(X; V)Z = \vec{A}(x + yi; v + wi)(a + bi + (0 + 0i)j) = \\ = \vec{A}((x + yi)(a + bi) - (v + wi)(0 - 0i); (x - yi)(0 - 0i) + \\ + (v + wi)(a + bi)) = \vec{A}((x + yi)(a + bi); (v + wi)(a + bi)) = \vec{A}(XZ; VZ).$$

Используя это, покажем справедливость аксиом векторного пространства для множества поливекторов:

$$\bullet \quad (\vec{A}(X; V)Z_1)Z_2 = \vec{A}_1(XZ_1; VZ_1)Z_2 = \vec{A}_2(XZ_1Z_2; VZ_1Z_2) = \vec{A}(X; V)(Z_1Z_2).$$

- $\vec{A}(X; V)(Z_1 + Z_2) = \vec{A}_1(XZ_1 + XZ_2; VZ_1 + VZ_2) = \vec{A}_2(XZ_1; VZ_1) + \vec{A}_3(XZ_2; VZ_2) = \vec{A}(X; V)Z_1 + \vec{A}(X; V)Z_2.$
- $(\vec{A}_1(X_1; V_1) + \vec{A}_2(X_2; V_2))Z = \vec{A}_3((X_1 + X_2)Z; (V_1 + V_2)Z) = \vec{A}_4(X_1Z; V_1Z) + \vec{A}_5(X_2Z; V_2Z) = \vec{A}_1(X_1; V_1)Z + \vec{A}_2(X_2; V_2)Z.$
- $\vec{A}(X; V)(1 + 0i + (0 + 0i)j) = \vec{A}(X; V).$

Множество поливекторов является комплексным векторным пространством. Умножение декомплексных чисел обладает свойством сопряжённой коммутативности. Поэтому справедливо равенство $Z\vec{A}(X; V) = \vec{A}(ZX; \bar{Z}\bar{V}) = \vec{A}(ZX; \bar{Z}\bar{V}) = \vec{A}(XZ; \bar{V}\bar{Z})$. Покажем это:

$$\begin{aligned} (a + bi + (0 + 0i)j)\vec{A}(x + yi; v + wi) &= \\ = \vec{A}((a + bi)(x + yi) - (0 - 0i)(v - wi); (a - bi)(v - wi) + \\ + (0 + 0i)(x + yi)) &= \vec{A}((a + bi)(x + yi); (a - bi)(v - wi)). \end{aligned}$$

С учётом этого покажем справедливость дополнительных свойств:

- $Z_2(\vec{A}(X; V)Z_1) = Z_2\vec{A}(XZ_1; VZ_1) = \vec{A}_2(XZ_1Z_2; \overline{VZ_1Z_2}) = (Z_1Z_2)\vec{A}(X; V).$
- $(Z_1 + Z_2)\vec{A}(X; V) = \vec{A}_1(XZ_1 + XZ_2; \overline{VZ_1} + \overline{VZ_2}) = \vec{A}_2(XZ_1; \overline{VZ_1}) + \vec{A}_3(XZ_2; \overline{VZ_2}) = Z_1\vec{A}(X; V) + Z_2\vec{A}(X; V).$
- $Z(\vec{A}_1(X_1; V_1) + \vec{A}_2(X_2; V_2)) = \vec{A}_3(Z(X_1 + X_2); \bar{Z}(\bar{V}_1 + \bar{V}_2)) = \vec{A}_4(ZX_1; \bar{Z}\bar{V}_1) + \vec{A}_5(ZX_2; \bar{Z}\bar{V}_2) = Z\vec{A}_1(X_1; V_1) + Z\vec{A}_2(X_2; V_2).$
- $(1 + 0i + (0 + 0i)j)\vec{A}(X; V) = \vec{A}(X; \bar{V}).$

С учётом и этих свойств пространство поливекторов будем называть **комплексным поливекторным пространством с сопряжённо ассоциативным умножением** (далее – **поливекторное пространство**).

Отметим, что геометрической интерпретацией декомплексного числа, сопряжённого слева и справа одновременно, а также декомплексного числа, полностью сопряжённого с декомплексным числом $A = (x_1 + y_1i) + (v_1 + w_1i)j$, является симметрия соответствующих поливекторов с поливектором, представляющим число A .

На рис. 3 поливектор $\vec{OA'B'C'}(x_1 - y_1i; v_1 - w_1i)$, отвечающий сопряжённому слева и справа числу $\vec{A} = (x_1 - y_1i) + (v_1 - w_1i)j$, и поливектор

$\overrightarrow{OABC}(x_1 + y_1 i; v_1 + w_1 i)$, представляющий число A , симметричны относительно плоскости xOv .

Поливектор $\overrightarrow{OA''B''C''}(x_1 - y_1 i; -(v_1 - w_1 i))$, представляющий число $\bar{A} = (x_1 - y_1 i) - (v_1 - w_1 i)j$, и поливектор $\overrightarrow{OABC}(x_1 + y_1 i; v_1 + w_1 i)$ симметричны относительно оси Ox (точки A' и A'' совпадают).

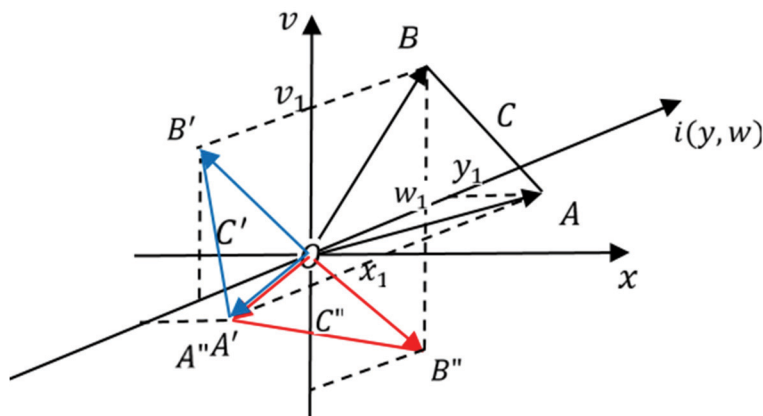


Рис. 3 / Fig. 3. Интерпретация сопряжённых чисел / Interpretation of conjugate numbers.

Источник: данные автора.

Рассматривая вопрос нормирования поливекторного пространства, определим функцию с областью значений не на множестве действительных чисел, как для обычного понятия нормы, а на множестве комплексных чисел.

Функцию, которая каждому элементу поливекторного пространства ставит в соответствие комплексное число, будет называть s -нормой и обозначать $f(\vec{A}) = \|\vec{A}\|$, если она удовлетворяет следующим аксиомам:

1. $f(\vec{A}) = \|\vec{A}\| = 0 + 0i \Leftrightarrow \vec{A} = \vec{O}$.
2. $f(\vec{AZ}) = \|\vec{AZ}\| = \|\vec{A}\||Z| = f(\vec{A})|Z|$; $Z = a + bi$; $a, b \in R$.
3. Пусть $f(\vec{A_1} + \vec{A_2}) = \|\vec{A_1} + \vec{A_2}\| = a + bi$,
 $f(\vec{A_1}) = \|\vec{A_1}\| = a_1 + b_1 i$; $a_1, b_1 \in R$,
 $f(\vec{A_2}) = \|\vec{A_2}\| = a_2 + b_2 i$; $a_2, b_2 \in R$.

Тогда справедливы неравенства $\begin{cases} a \leq a_1 + a_2 \\ b \leq b_1 + b_2 \end{cases}$.

Несложно показать, что действительная и мнимая части s -нормы поливектора всегда неотрицательны.

Положим в третьей аксиоме $\vec{A_2} = \vec{A_1}(-1 + 0i)$. Тогда:

$$f(\vec{A_2}) = (a_1 + b_1 i)|-1 + 0i| = (a_1 + b_1 i) \Rightarrow \\ \Rightarrow f(\vec{A_1} + \vec{A_2}) = f(\vec{A_1} + \vec{A_1}(-1 + 0i)) = f(\vec{A_1} + (-\vec{A_1})) = 0 + 0i.$$

В соответствии с третьей аксиомой: $\begin{cases} 0 \leq a_1 + a_1 \Rightarrow \{a_1 \geq 0 \\ 0 \leq b_1 + b_1 \Rightarrow \{b_1 \geq 0 \end{cases}$.

В общем, если рассматривать пространство на множестве структур, представляющих три упорядоченные пары некоторых элементов как декомплексные числа, где определена коммутативная, ассоциативная и обратимая операция сложения этих структур, а также операция умножения структур на комплексное число с указанными выше свойствами, то это пространство с определённой на нём с-нормой можно назвать поливекторным, с-нормированным пространством и обозначить N_c .

Отметим, что на основе с-нормы можно определить соответствующую естественную с-метрику на рассматриваемом множестве, соответствующие аксиомы и понятие с-метрического пространства.

В нашем случае, т. е. для пространства поливекторов, определим с-норму следующим образом:

$$f(\vec{A}) = \|\vec{A}\| = \|\vec{A}(x + yi; v + wi)\| = \sqrt{x^2 + y^2} + i\sqrt{v^2 + w^2}.$$

Проверим выполнение аксиом с-нормы (обозначим $Z = (a + bi)$).

1. $f(\vec{A}) = 0 + 0i \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} = 0 \\ \sqrt{v^2 + w^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \vec{A} = \vec{O}.$
2. $f(\vec{A}Z) = f(\vec{A}(xa - yb + (xb + ya)i; va - wb + (vb + wa)i)) = \\ = \sqrt{(xa - yb)^2 + (xb + ya)^2} + i\sqrt{(va - wb)^2 + (vb + wa)^2} = \\ = \sqrt{(xa)^2 + (yb)^2 + (xb)^2 + (ya)^2} + i\sqrt{(va)^2 + (wb)^2 + (vb)^2 + (wa)^2}; \\ f(\vec{A}(x + yi; v + wi))|Z| = (\sqrt{x^2 + y^2} + i\sqrt{v^2 + w^2})\sqrt{a^2 + b^2} = \\ = \sqrt{(xa)^2 + (yb)^2 + (xb)^2 + (ya)^2} + i\sqrt{(va)^2 + (wb)^2 + (vb)^2 + (wa)^2}. \\ \Rightarrow f(\vec{A}Z) = f(\vec{A})|Z|. \text{ Также можно показать, что } f(Z\vec{A}) = f(\vec{A})|Z|.$
3. $f(\vec{A_1}(x_1 + y_1i; v_1 + w_1i)) = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + i\sqrt{v_1^2 + w_1^2}, \\ f(\vec{A_2}(x_2 + y_2i; v_2 + w_2i)) = \sqrt{x_2^2 + y_2^2} + i\sqrt{v_2^2 + w_2^2}, \\ f(\vec{A_1}(x_1 + y_1i; v_1 + w_1i) + \vec{A_2}(x_2 + y_2i; v_2 + w_2i)) = \\ = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2} + i\sqrt{(v_1 + v_2)^2 + (w_1 + w_2)^2}.$

Учитывая, что модуль суммы обычных векторов меньше или равен сумме модулей векторов, делаем вывод о справедливости неравенств:

$$\sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2} \leq \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2};$$

$$\sqrt{(v_1 + v_2)^2 + (w_1 + w_2)^2} \leq \sqrt{v_1^2 + w_1^2} + \sqrt{v_2^2 + w_2^2}.$$

Поливекторное пространство с данной с-нормой является пространством N_c . Это пространство рассматриваем как интерпретацию множества декомплексных чисел.

Модуль и аргумент декомплексного числа, тригонометрическая и другие формы его представления

Модулем декомплексного числа $A = (x_1 + y_1 i) + (v_1 + w_1 i)j$ определим с-норму соответствующего поливектора.

Аргументом числа A (обозначим $\arg A$) определим комплексное число $\arg A = \arg((x_1 + y_1 i) + (v_1 + w_1 i)j) = \varphi_1 + \varphi_2 i$, где задающий горизонтальное направление поливектора угол $\varphi_1 = \arg(x_1 + y_1 i)$ и задающий его вертикальное направление угол $\varphi_2 = \arg(v_1 + w_1 i)$. Углы измеряются в соответствии с принятым правилом на комплексной плоскости (против часовой стрелки от положительного направления действительной оси, при рассмотрении комплексной плоскости так, что эта ось направлена вправо, а мнимая – вверх).

Пусть поливектор $\vec{OBAC}$ (рис. 4) представляет декомплексное число $A = (x_1 + y_1 i) + (v_1 + w_1 i)j$. Тогда:

$$|A| = \|\vec{A}(x_1 + y_1 i; v_1 + w_1 i)\|, \quad \arg(A) = \varphi_1 + \varphi_2 i.$$

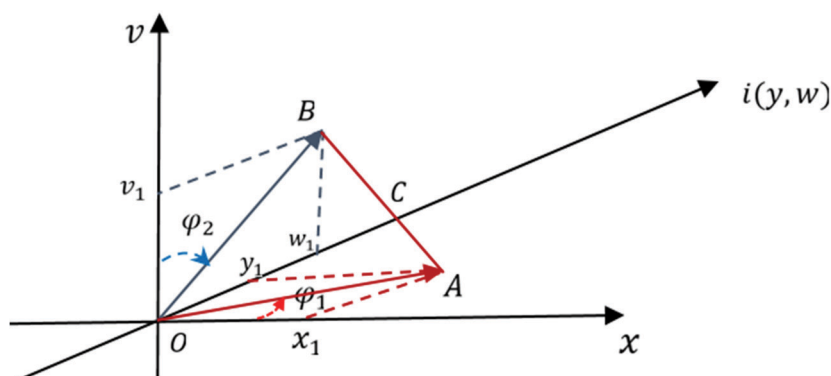


Рис. 4 / Fig. 4. Углы аргумента декомплексного числа / Angles of the argument of a decomplex number.

Источник: данные автора.

Рассмотрим вопрос представления декомплексного числа в особых формах. Поскольку обе части декомплексного числа являются комплексными числами, несложно представить его в форме с синусами и косинусами от углов, которые составляют его аргумент:

$$A = X + Vj = (x_1 + y_1 i) + (v_1 + w_1 i)j, \quad \arg(X + Vj) = \varphi_1 + \varphi_2 i,$$

$$r_x = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}, \quad r_v = \sqrt{v_1^2 + w_1^2},$$

$$A = r_x(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) + r_v(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)j.$$

Естественно назвать такую форму тригонометрической формой декомплексного числа.

Вместе с этим отметим, что тригонометрические функции являются функциями действительного переменного, определяются особым образом и используются в соответствующей форме комплексного числа. Логично предположить, что для такого рода формы декомплексного числа нужны соответствующие функции комплексного переменного, также определяемые особым образом, т. е. своего рода аналоги тригонометрических функций, но определённые на множестве комплексных чисел.

В математике значения синуса и косинуса действительного переменного определяют как соответствующие отношения величин, получаемых на основе координат точек единичной числовой окружности [7]. Это можно трактовать в терминах двумерного векторного пространства на плоскости xOy . Для этого с точкой на окружности связываем единичный вектор из начала координат и вершиной в этой точке. Синус угла отклонения вектора от оси Ox определяется как отношение координаты вектора на оси Oy к модулю вектора, который равен единице. Аналогично определяется и значение косинуса угла, но с координатой на оси Ox .

Используем ту же логику для определения аналогичных тригонометрическим однозначных функций на множестве комплексных чисел с помощью векторной интерпретации декомплексных чисел, т. е. рассматривая соответствующие отношения величин, связанных с поливектором.

В поливекторном пространстве рассмотрим множество поливекторов с модулем равным $1 + 1i$. Пусть $\vec{A}(x + iy; v + iw)$ – один из них. Тогда должно выполняться равенство:

$$\|\vec{A}\| = \sqrt{x^2 + y^2} + i\sqrt{v^2 + w^2} = 1 + 1i \Leftrightarrow x^2 + y^2 = v^2 + w^2 = 1.$$

Графически это множество можно отобразить в трёхмерном пространстве, используя описанную выше связанную с плоскостной системой координат систему координат с четырьмя координатными осями, две из которых совмещены на одной прямой. Графиком в этом случае будет поверхность из точек – центральных вершин п-векторов, когда их определяющие векторы в

вертикальной и горизонтальной плоскостях «пробегают» в этих плоскостях единичные окружности. Назовём получаемую таким образом поверхность *c*-сферой. На рис. 5 слева показана такая вершина *C* и определяющие векторы $\vec{OA}$ и $\vec{OB}$, а справа представлено графическое изображение *c*-сферы.

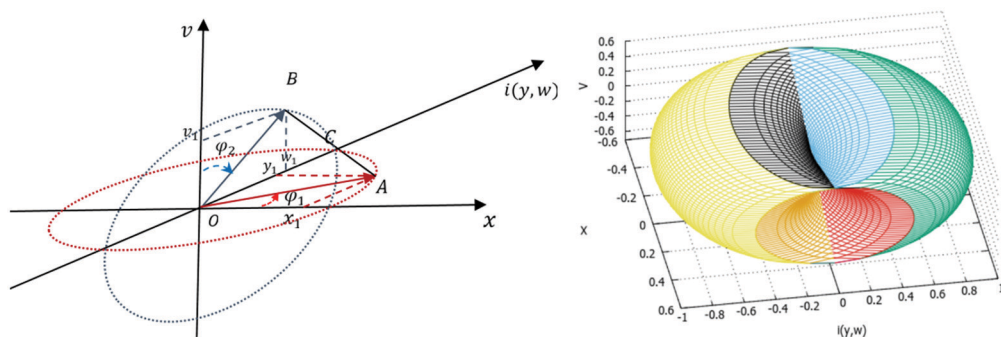


Рис. 5 / Fig. 5. Построение и графическое изображение *c*-сферы / Construction and graphical representation of the *c*-sphere

Источник: данные автора.

Теперь определим функции с комплексным аргументом $\varphi_1 + \varphi_2 i$ как отношение координат поливектора $\vec{A}(x + iy; v + iw)$, определяющее некоторую точку *c*-сферы к его модулю.

Назовём такого рода функции *c*-тригонометрическими и в их обозначении добавим символ «C» как знак принадлежности к функциям комплексного переменного. Учитывая, что $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{v^2 + w^2} = 1$, определим четыре основные функции:

$$C\sin(\varphi_1 + \varphi_2 i) = \frac{v + iw}{\|\vec{A}\|} = \frac{v + iw}{1 + 1i} = \frac{v + w}{2} + \frac{w - v}{2}i;$$

$$C\cos(\varphi_1 + \varphi_2 i) = \frac{x + iy}{\|\vec{A}\|} = \frac{x + iy}{1 + 1i} = \frac{x + y}{2} + \frac{y - x}{2}i;$$

$$C\tan(\varphi_1 + \varphi_2 i) = \frac{v + iw}{x + iy} = \frac{xv + yw}{x^2 + y^2} + \frac{xw - vy}{x^2 + y^2}i = xv + yw + (xw - vy)i;$$

$$C\cotan(\varphi_1 + \varphi_2 i) = \frac{x + iy}{v + iw} = \frac{vx + wy}{v^2 + w^2} + \frac{vy - xw}{v^2 + w^2}i = xv + yw - (xw - vy)i.$$

Отметим некоторые свойства этих функций:

$$C\sin(\varphi_1 + \varphi_2 i) \overline{C\sin(\varphi_1 + \varphi_2 i)} = \left(\frac{v+w}{2} + \frac{w-v}{2}i\right) \left(\frac{v+w}{2} - \frac{w-v}{2}i\right) = \frac{1}{2};$$

$$C\cos(\varphi_1 + \varphi_2 i) \overline{C\cos(\varphi_1 + \varphi_2 i)} = \left(\frac{x+y}{2} + \frac{y-x}{2}i\right) \left(\frac{x+y}{2} - \frac{y-x}{2}i\right) = \frac{1}{2};$$

$$C\sin(\varphi_1 + \varphi_2 i) \overline{C\sin(\varphi_1 + \varphi_2 i)} + C\cos(\varphi_1 + \varphi_2 i) \overline{C\cos(\varphi_1 + \varphi_2 i)} = 1;$$

$$C\tan(\varphi_1 + \varphi_2 i) \overline{C\tan(\varphi_1 + \varphi_2 i)} = (xv + yw)^2 + (xw - vy)^2 = 1.$$

На рис. 6 даны примеры поливекторов, определяющих с-сферу, подсчитаны отвечающие им значения с-синуса и с-косинуса от соответствующих комплексных углов $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 i$.

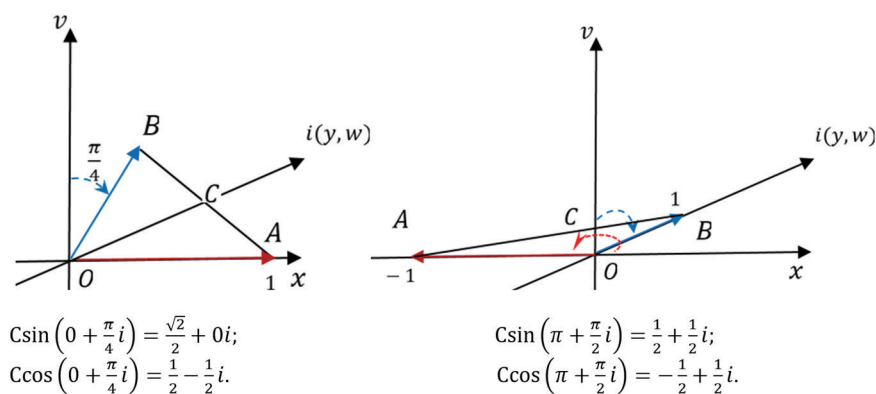


Рис. 6 / Fig. 6. Примеры поливекторов со значениями с-синуса и с-косинуса /
Examples of polyvectors with c-sine and c-cosine values

Источник: данные автора.

Пусть $A = (x_1 + iy_1) + (v_1 + iw_1)j$ – произвольное декомплексное число и ему соответствует поливектор $\vec{A}(x_1 + iy_1; v_1 + iw_1)$. Определим множество поливекторов вида:

$$\vec{A}_{a,b}(a(x_1 + iy_1); b(v_1 + iw_1)) = \vec{A}_{a,b}(ax_1 + ia y_1; bv_1 + ib w_1), a, b \in \mathbb{R}_+.$$

Для всех $\vec{A}_{a,b}$ действительная и мнимая части их координат меняются в отношении таковых у $\vec{A}$ на одинаковый сомножитель (на $a > 0$ для первой координаты и на $b > 0$ для второй) (рис. 7).

Учитывая это, заключаем, что соответствующие направляющие векторы в горизонтальной координатной плоскости лежат с вектором $\overrightarrow{x_1 y_1}$ на одном луче из центра координат, как и в вертикальной, – на одном луче с $\overrightarrow{v_1 w_1}$. Таким образом, поливектор $\vec{A}$ и поливекторы $\vec{A}_{a,b}$ имеют одинаковое направление, т. е. одинаковые аргументы $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 i$.

Определим среди поливекторов $\vec{A}_{a,b}(ax_1 + ia y_1; bv_1 + ib w_1)$ такой, центральная вершина которого лежит на с-сфере, т. е. определим a, b из условия $\|\vec{A}_{a,b}\| = \sqrt{(ax_1)^2 + (a y_1)^2 + i \sqrt{(bv_1)^2 + (b w_1)^2}} = 1 + 1i$:

$$a = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} \text{ и } b = \frac{1}{\sqrt{v_1^2 + w_1^2}}.$$

$$\begin{cases} x = p/2 \\ i = (d + \psi_2(p, d))/2 \text{ (} i \text{ – для обозначения координат на } oi \text{).} \\ v = \psi_1(p, d)/2 \end{cases}$$

Эту функцию обозначим G . Её график считаем графиком функции f . При этом каждая точка графика (C на рис. 8) позволяет установить соответствие между точкой аргумента на горизонтальной координатной плоскости и точкой значения функции на вертикальной координатной плоскости. Порядок установления этого соответствия отличается от такового для графиков функций действительного переменного. В этом случае необходимо знать выражение $\psi_2(x_1, y_1)$.

Пусть $A(x_1, y_1)$ – точка аргумента на горизонтальной плоскости. Для определения соответствующей точки значения функции необходимо сначала определить нужную точку C графика функции. Эту точку находим с помощью координат её проекции $A_g(x_g, y_g)$. Координаты определяются соответственно заданию функции в параметрической форме: $x_g = x_1/2$, $y_g = (y_1 + \psi_2(x_1, y_1))/2$. Пересечение вертикальной прямой из $A_g(x_g, y_g)$ с поверхностью – графиком функции – даёт нам нужную точку C графика. Далее находим искомую точку $B(v_1, w_1)$ значения функции на вертикальной координатной плоскости как пересечение с этой плоскостью луча из A , проходящего через найденную точку C .

Рассмотрим примеры построения описанным способом графиков некоторых функций комплексного переменного, представленных в явном виде (графики построены с помощью интернет-сервиса Grafikus.ru, см. рис. 9–13).

$$f_1 = (x + yi)^3 = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3),$$

$$f_2 = e^{x+yi} = e^x \cos y + ie^x \sin y.$$

$$G_1: \begin{cases} x = p/2 \\ i = (d + 3p^2d - d^3)/2 \\ v = (p^3 - 3pd^2)/2 \end{cases}, G_2: \begin{cases} x = p/2 \\ i = (d + 0,5(e^{-d} - e^d) \sin p)/2 \\ v = (0,5(e^{-d} + e^d) \cos p)/2 \end{cases}$$

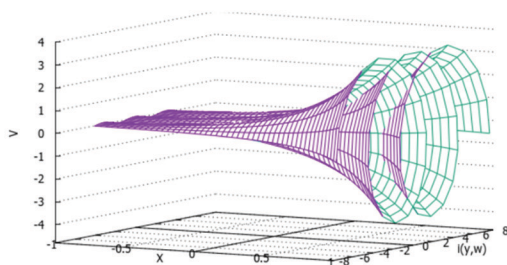
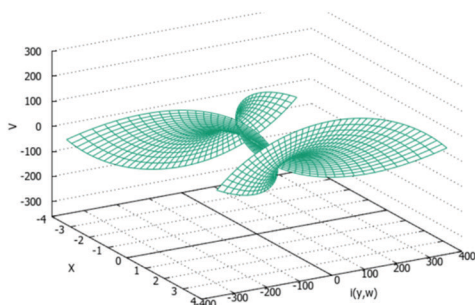


Рис. 9 / Fig. 9. Графики f_1 , слева и f_2 , справа / Graphs of f_1 , left, and f_2 , right.

Источник: данные автора.

$$f_3 = C \sin(x + yi) = 0,5(\cos y + \sin y) - 0,5(\cos y - \sin y)i,$$

$$f_4 = C \cos(x + yi) = 0,5(\cos x + \sin x) - 0,5(\cos x - \sin x)i.$$

$$G_3: \begin{cases} x = p/2 \\ i = (d - 0,5(\cos d - \sin d))/2 \\ v = 0,5(\cos d + \sin d)/2 \end{cases}, G_4: \begin{cases} x = p/2 \\ i = (d - 0,5(\cos p - \sin p))/2 \\ v = 0,5(\cos p + \sin p)/2 \end{cases}$$

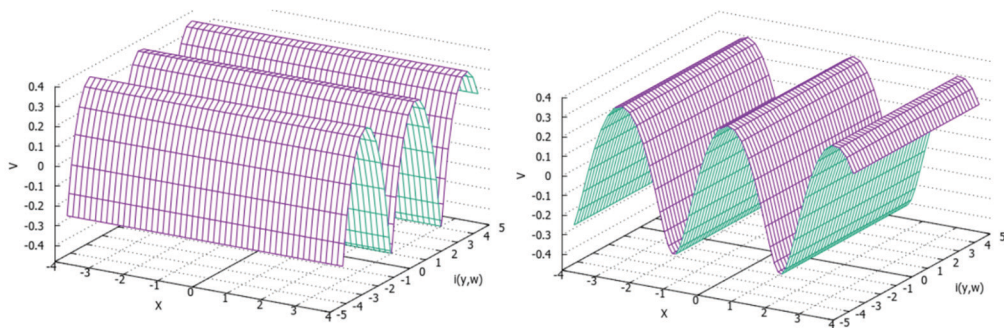


Рис. 10 / Fig. 10. Графики f_3 , слева и f_4 , справа / Graphs of f_3 , left, and f_4 , right.

Источник: данные автора.

$$f_5 = (3 - x^2 - (y + 0,2x^3 + y^2)^3)^{1/2} + (y + 0,2x^3 + y^3)i,$$

$$f_6 = (3 + \sin^2 y) + (4 - 0,5y \cos^2 x)i.$$

$$G_5: \begin{cases} x = p/2 \\ i = \frac{d + (d + 0,2p^3 + d^3)}{2} \\ v = \frac{(3 - p^2 - (v + 0,2p^3 + v^2)^3)^{1/2}}{2} \end{cases}, G_6: \begin{cases} x = p/2 \\ i = \frac{d + (4 - 0,5y \cos^2 x)}{2} \\ v = \frac{(3 + \sin^2 y)}{2} \end{cases}.$$

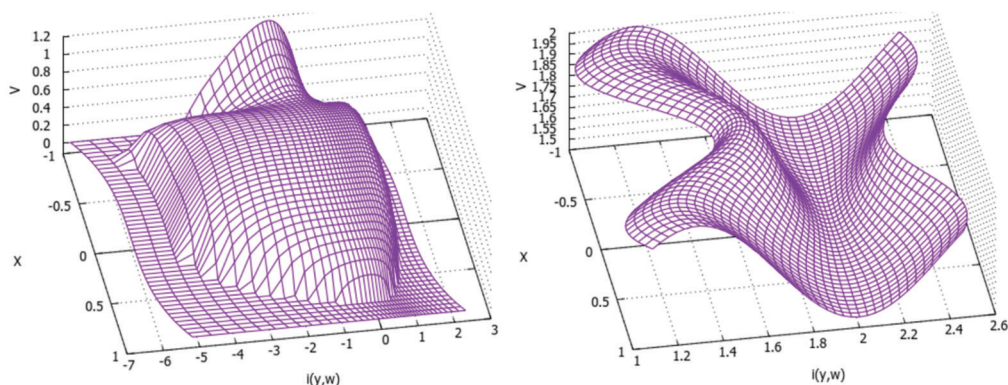


Рис. 11 / Fig. 11. Графики f_5 , слева и f_6 , справа / Graphs of f_5 , left, and f_6 , right.

Источник: данные автора.

Далее рассмотрим возможность построения графиков функций комплексного переменного, заданных в неявном виде. Начнём с построения графика с-сферы. В соответствии с определением с-сферы, на координаты точек графика $A(x; y + w; v)$ накладываются условия $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ v^2 + w^2 = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} y = \pm\sqrt{1-x^2} \\ w = \pm\sqrt{1-v^2} \end{cases}$. В общем случае задание функции f системой вида

$\begin{cases} y = \psi_1(x, v) \\ w = \psi_2(x, v) \end{cases}$ можно рассматривать как один из способов задания функции в неявном виде. Тогда соответствующая параметрическая функция G задаётся

$$\text{так: } \begin{cases} x = p/2 \\ i = (\psi_1(p, d) + \psi_2(p, d))/2. \\ v = d/2 \end{cases}$$

Для построения образа с-сферы с радиусом $1 + i$ требуется рассматривать четыре функции комплексного переменного (обозначим $f_{1,2,3,4}$) и, соответственно, четыре функции $G_{1,2,3,4}$, графики которых и составляют с-сферу. Определим для с-сферы $G_{1,2,3,4}$:

$$x = p, y = \pm\sqrt{1-p^2}, v = d, w = \pm\sqrt{1-d^2}$$

$$\Rightarrow G_{1,2,3,4}: \begin{cases} x = p/2 \\ i = (\pm\sqrt{1-p^2} \pm \sqrt{1-d^2})/2. \\ v = d/2 \end{cases}$$

Для примера также построим график с-сферы с радиусом $1 + 4i$:

$$f_{1,2,3,4}: \begin{cases} y = \pm\sqrt{1-x^2} \\ w = \pm\sqrt{4-v^2} \end{cases} \Rightarrow G_{1,2,3,4}: \begin{cases} x = p/2 \\ i = (\pm\sqrt{1-p^2} \pm \sqrt{4-d^2})/2. \\ v = d/2 \end{cases}$$

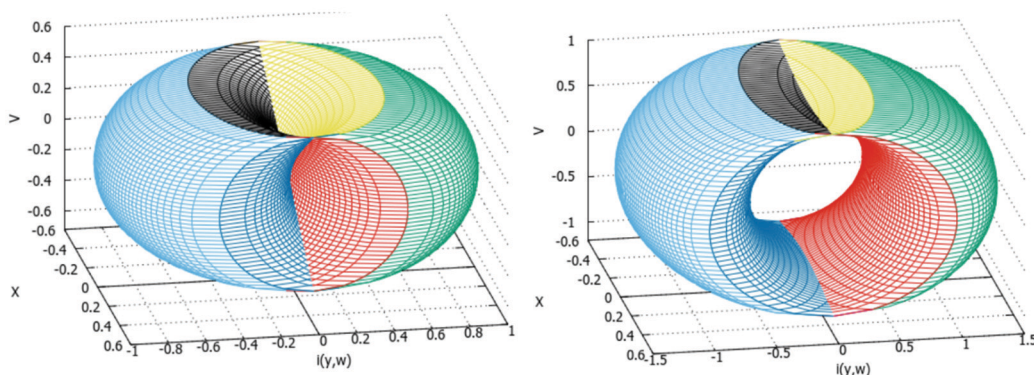


Рис. 12 / Fig. 12. График с-сфер с радиусом $1 + i$, слева и с радиусом $1 + 4i$, справа / Graph of c-spheres with radius $1 + i$, on the left, and with radius $1 + 4i$, on the right.

Источник: данные автора.

Примеры графиков других функций, заданных в неявном виде:

$$f_{1,2}: \begin{cases} y = \sin 2x \\ w = \pm \sqrt{2 - (v + v^2)^2} \end{cases}, G_{1,2}: \begin{cases} x = p/2 \\ i = (\sin 2p \pm \sqrt{2 - (d + d^2)^2})/2, \\ v = d/2 \end{cases}$$

$$f_{3,4}: \begin{cases} y = 0,7x^3 - 1,5x^2 \\ w = \pm(2 + \cos 5x) \sqrt{1 - v^2} \end{cases}, G_{3,4}: \begin{cases} x = p/2 \\ i = (0,7p^3 - 1,5p^2 \pm \frac{(2 + \cos 5p)\sqrt{1-d^2}}{2}) \\ v = d/2 \end{cases}$$

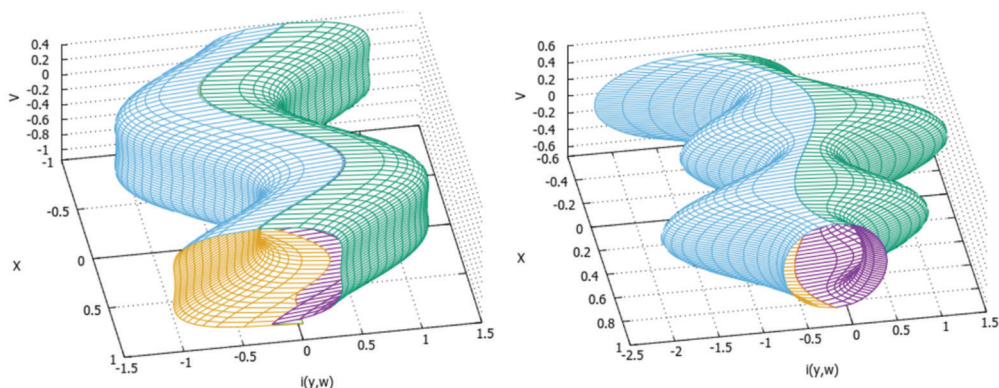


Рис. 13 / Fig. 13. Графики функций $f_{1,2}$, слева и функций $f_{3,4}$, справа / Graphs of functions $f_{1,2}$, on the left, and functions $f_{3,4}$, on the right.

Источник: данные автора.

Заключение

В результате исследования определена алгебраическая система декомплексных чисел, которая является особым расширением поля $\mathbb{C}$. Учитывая обратимость и свойства операций этой алгебры, считаем, что она может быть использована в развитии определённых направлений как в теории чисел, так и в других естественным образом связанных с теорией чисел разделах математики.

Введение для комплексных векторных пространств понятия s -нормы на множестве комплексных чисел с положительными действительной и мнимой частями открывает ещё одно направление для исследований в теории нормированных пространств.

В практическом плане полагаем, что те или иные сложные физические процессы могут описываться в этой системе соответствующими уравнениями, включая те, которые не разрешимы на $\mathbb{C}$, но разрешимы на множестве декомплексных чисел.

Также отметим, что современные учёные в области геометрического и других методов моделирования поверхностей и тел отмечают важность развития

математических средств для аналитического описания сложных геометрических объектов [9;10]. В этой связи полученный способ графического представления функций комплексного переменного может быть использован для решения данной задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Колягин Ю. М., Луканкин Г. Л., Яковлев Г. Н. Математика: учебное пособие: в2 кн. Кн.1. М.: Издательство «Новая Волна», 2005. 656 с.
2. Кантор И. Л., Солодовников А. С. Гиперкомплексные числа. М.: Наука, 1973. 144 с.
3. Варпаховский Ф. Л., Солодовников А. С., Стеллецкий И. В. Алгебра. Группы, кольца, поля. Векторные и евклидовы пространства. Линейные отображения. М.: Просвещение, 1978. 145 с.
4. Сурнев В. Б. Высшая математика для физиков. Линейная алгебра: учебное пособие. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2020. 440 с.
5. Акимов В. Н., Коновалова И. Н., Корнеева Е. В. Комплексные числа, комплексные векторы и их приложения: учебное пособие. М.: РНИМУ им. Н. И. Пирогова Минздрава России, 2024. 103 с.
6. Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х. Математический анализ. М.: Наука, 1979. 719 с.
7. Андронов И. К., Окунев А. К. Курс тригонометрии, развиваемый на основе реальных задач. М.: Просвещение, 1967. 648 с.
8. Ахтамова С. С., Бадуденко Л. Н. Теория функций комплексного переменного: учеб.-метод. пособие. Красноярск: Сиб. федерал. у-т, 2018. 80 с.
9. Голованов Н. Н. Геометрическое моделирование: учебное пособие М.: КУРС ИНФРА-М, 2016. 402 с.
10. Мисюра Н. Е. Математические модели для аналитического описания сложных геометрических объектов и их преобразований: теория и приложения: автореф. дис. канд. физ-мат. н-к. Екатеринбург, 2018. 17 с.

REFERENCES

1. Kolyagin, Yu. M., Lukankin, G. L. & Yakovlev, G. N. (2005). *Mathematics: textbook: in 2 Books. Book 1*. Moscow: Novaya Volna publ. (in Russ.).
2. Kantor, I. L. & Solodovnikov, A. S. (1973). *Hypercomplex numbers*. Moscow: Nauka publ. (in Russ.).
3. Varpakhovsky, F. L., Solodovnikov, A. S. & Stelletsy, I. V. (1978). *Algebra. Groups, rings, fields. Vector and Euclidean spaces. Linear maps*. Moscow: Prosveshchenie publ. (in Russ.).
4. Surnev, V. B. (2020). *Higher mathematics for physicists. Linear algebra*. Yekaterinburg: Ural University publ. (in Russ.).
5. Akimov, V. N., Konovalova, I. N. & Korneeva, E. V. (2024). *Complex numbers, complex vectors, and their applications*. Moscow: Pirogov Russian National Research Medical University (in Russ.).

6. Ilyin, V. A., Sadovnichy, V. A. & Sendov, Bl. Kh. (1979). *Mathematical analysis*. Moscow: Nauka publ. (in Russ.).
7. Andronov, I. K. & Okunev, A. K. (1967). *Trigonometry course based on real problems*. Moscow: Prosveshchenie publ. (in Russ.).
8. Akhtamova, S. S. & Badulenko, L. N. (2018). *Theory of functions of a complex variable*. Krasnoyarsk: Siberian Federal University. (in Russ.).
9. Golovanov, N. N. (2016). *Geometric modeling*. Moscow: KURS INFRA-M. (in Russ.).
10. Misyura, N. E. (2018). *Mathematical models for the analytical description of complex geometric objects and their transformations: theory and applications* [dissertation]. Yekaterinburg (in Russ.).

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Колягин Андрей Юрьевич (г. Москва) – кандидат педагогических наук, независимый исследователь;

e-mail: ak.russia4444@yandex.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Andrey Yu. Kolyagin (Moscow) – Cand. Sci. (Education), independent researcher;

e-mail: ak.russia4444@yandex.ru