

Научная статья**УДК 533.6.011.72****DOI: 10.18384/2949-5067-2026-1-38-45****ОБОБЩЕНИЕ БИМОДАЛЬНОЙ МОДЕЛИ УДАРНОЙ ВОЛНЫ
НА УДАРНОЕ СЖАТИЕ СМЕСИ ГАЗОВ****Кузнецов М. М.* , Сатюков Д. Г., Кулешова Ю. Д. , Владимирова Е. Я. ,
Кузнецов Г. В. , Халиков Р. Ф.***Государственный университет просвещения, г. Москва, Российская Федерация*** Корреспондирующий автор, e-mail: kuznets-omn@yandex.ru**Поступила в редакцию 19.01.2026**Принята к публикации 23.01.2026***Аннотация****Цель:** модифицировать известную аналитическую бимодальную модель ударной волны Тамма – Мотт-Смита на случай ударного сжатия бинарной смеси газов.**Методы.** Применялись асимптотические и аппроксимационные методы математической физики.**Результаты.** Разработана аналитическая нелинейная однопараметрическая модель для структуры ударно-сжатой бинарной смеси газов, где, в частности, в качестве параметра используется параметр классического распределения Тамма – Мотт-Смита.**Теоретическая и практическая значимость.** Предложенное обобщение классической бимодальной модели ударной волны на случай бинарной смеси газов сохраняет её простоту и удобство для применения в решении теоретических вопросов, а также в газодинамическом эксперименте.**Ключевые слова:** асимптотическая модель, эффект перехлёста, рэлеевская смесь, неравновесность.**Для цитирования:**

Обобщение бимодальной модели ударной волны на ударное сжатие смеси газов / М. М. Кузнецов, Д. Г. Сатюков, Ю. Д. Кулешова, Е. Я. Владимирова, Г. В. Кузнецов, Р. Ф. Халиков // Вестник Государственного университета просвещения. Серия: Физика-Математика. 2026. № 1. С. 38–45. <https://doi.org/10.18384/2949-5067-2026-1-38-45>

Original research article**GENERALIZATION OF THE BIMODAL IMPACT WAVE MODEL
TO SHOCK COMPRESSION OF GAS MIXTURES****M. Kuznetsov*, D. Satyukov, Yu. Kuleshova, E. Vladimirova, G. Kuznetsov, R. Halikov***Federal State University of Education, Moscow, Russian Federation*** Corresponding author, e-mail: kuznets-omn@yandex.ru*

Received by the editorial office 19.01.2026

Accepted for publication 23.01.2026

Abstract

Aim: to modify the well-known analytical bimodal model of the Tamm – Mott-Smith shock wave for the case of shock compression of a binary gas mixture.

Methods. Asymptotic and approximation methods of mathematical physics were used.

Results. An analytical nonlinear single-parameter model has been developed for the structure of a shock-compressed binary gas mixture, where, in particular, the classical Tamm-Mott-Smith distribution parameter is used as a parameter.

Research implications: The proposed generalization of the classical bimodal shock wave model to the case of a binary gas mixture retains its simplicity and convenience for use in solving theoretical problems and in gas-dynamic experiments.

Keywords: asymptotic model, overshoot effect, Rayleigh mixture, nonequilibrium

For citation:

Kuznetsov, M. M., Satyukov, D. G., Kuleshova, Yu. D., Vladimirova, E. Ya., Kuznetsov, G. V. & Khalikov, R. F. (2026). Generalization of the bimodal impact wave model to shock compression of gas mixtures. In: *Bulletin of the State University of Education*, 1, 38–45. <https://doi.org/10.18384/2949-5067-2026-1-38-45>

Введение

Радикальность предлагаемой в данной работе модификации классической бимодальной модели ударной волны Тамма – Мотт-Смита заключается в том, что благодаря этой модификации удаётся сохранить все преимущества классической модели не только для однокомпонентного газа, но и для смеси ударно-сжатых газов.

В ранее известных модификациях [1–3] не удавалось преодолеть главный недостаток классической бимодальной модели в применении к ударно-сжимаемым смесям, заключающийся в невыполнении законов сохранения потоков массы, импульса и энергии в структуре фронта ударной волны. Их выполнение осуществлялось только на входе и выходе ударной волны в т. н. условиях Рэнкина-Гюгоньо. В силу этого для выполнения законов сохранения в известных модификациях приходилось считать парциальные макроскорости и парциальные температуры (содержащиеся в максвелловских распределениях) переменными по всей ширине фронта ударной волны.

Однако, как показало дальнейшее исследование структуры фронтов ударных волн в газовых смесях, применение таких модификаций приводило к невозможности получения аналитических решений соответствующих моментных уравнений, что было преимуществом классической бимодальной модели Тамма – Мотт-Смита.

Предлагаемая модификация классической модели преодолевает эту фундаментальную трудность и сохраняет, как и в классической модели, постоянство частичных макроскоростей и температур в аппроксимационных максвеллианах по всей ширине фронта ударной волны в газовых смесях.

Для начала представим в безразмерном виде распределения молекул по их тепловым скоростям внутри фронтов ударных волн.

Модифицированные вероятностные распределения молекул в ударно-сжатых смесях газов

Для многокомпонентной смеси газов размерные функции распределения молекул по тепловым скоростям имеют вид [4–6]:

$$f_i(\vec{c}, x) = [1 - a(x)]f_i^-(\vec{c}) + a(x)f_i^+(\vec{c}) + \frac{1}{2}\sum_{j \neq i}^N \beta_{ij}\tilde{a}(x)[f_j^+(\vec{c}) - f_j^-(\vec{c})] \quad (1)$$

Здесь $i, j = 1, 2, \dots, N$, $\beta_{ij} = m_j / m_i$, f_i^- и f_i^+ – поступательно равновесные максвелловские распределения,

$$f_i^-(\vec{c}) = n_i^- \cdot m_i^{\frac{3}{2}} (2\pi k T^-)^{-3/2} \exp[-m_i(\vec{c} - v^-)^2 / 2k T^-] \quad (2)$$

$$f_i^+(\vec{c}) = n_i^- \cdot m_i^{\frac{3}{2}} (2\pi k T^+)^{-3/2} \exp[-m_i(\vec{c} - v^+)^2 / 2k T^+] \quad (3)$$

Индексы «-» и «+» в формулах (1)–(3) относятся к максвелловским функциям распределения по собственным тепловым скоростям молекул и макроскопическим параметрам этих функций соответственно на входе («-») и выходе («+») ударной волны, m_i – масса молекулы i -го компонента. Для компонента j формулы для максвелловских функций распределения аналогичные (2), (3) получаются формальной заменой в них индекса i на индекс j , причём β_{ij} равно m_j / m_i . N – число компонентов смеси.

Заметим ещё раз, что, как и в классической модели, частичные макроскорости, температуры и концентрации v^- и v^+ , T^- и T^+ , n_i^- и n_i^+ остаются постоянными по всей ширине фронта ударной волны в смесях газов.

Переменность модифицированных функций распределения (1) по ширине фронта ударной волны (как и в классической модели для одного компонента, когда $i=j=1$) связана только с двумя весовыми множителями $a(x)$ и $\tilde{a}(x)$. В классической же модели таких множителей будет только один.

Таким образом, проблема сведения двухпараметрических функций распределения (1) к однопараметрическим функциям в классической модели N -компонентной смеси газов с N -модифицированными распределениями (1) требует ещё одной дополнительной модификации.

Ниже в следующем разделе мы представим пример такого сведения. Основная часть новой модификации была фактически разработана в предыдущих работах авторов статьи [4–6]. Однако не было показано, что классическая бимодальная модель может быть непосредственно включена в структуру модифицированных бимодальных функций распределения для молекул компонентов в смеси газов.

Сведение двухпараметрической модификации к однопараметрической

Функции $a(x)$ и $\tilde{a}(x)$ определяются из системы моментных уравнений, следующих из системы кинетических уравнений Больцмана для N-компонентов, и удовлетворяют следующим граничным условиям:

$$a(-\infty) = 0, a(+\infty) = 1, \tilde{a}(-\infty) = \tilde{a}(+\infty) = 0 \quad (4)$$

Далее в целях снижения громоздкости формул остановимся только на случае бинарной смеси.

В бинарной смеси газов, когда $i=1, j=2$ или иначе $i=1,2$ формулы (2), (3) примут более простой вид.

При $i=1, j=2$ получим:

$$f_1(c, x) = [1 - a(x)]f_1^-(c) - \beta_{12}\tilde{a}(x)f_2^-(c) + \beta_{12}\tilde{a}(x)f_2^+(c) + a(x)f_1^+(c) \quad (5)$$

Аналогично для второго компонента при $j=2$ будет:

$$f_2(c, x) = [1 - a(x)][f_2^-(c) + a(x)f_2^+(c) + \beta_{21}\tilde{a}(x)[f_1^+(c) - f_1^-(c)]], \quad (6)$$

Числовую плотность частиц каждого из компонентов бинарной смеси после интегрирования в пространстве тепловых скоростей молекул можно записать в безразмерном виде:

$$N_1(x) = a(x) + [1 - a(x)]\varepsilon + \tilde{a}(x)[1 - \varepsilon]\rho_{21} \quad (7)$$

$$N_2(x) = a(x) + [1 - a(x)]\varepsilon + \tilde{a}(x)[1 - \varepsilon]\rho_{12} \quad (8)$$

Здесь:

$$n_1^-/n_1^+ = \varepsilon = n_2^-/n_2^+, \rho_{12} = \rho_2/\rho_1 = m_2 n_2^+ / m_1 n_1^+ = 1/\rho_{21}$$

Представим также в безразмерном виде выражения (1–3) для случая бинарной смеси газов $N=2$:

$$F_1(c, x) = \frac{1}{N_1(x)} \{ \Phi_1^+(c) - a(x) \Delta_1 + \tilde{a}(x) \rho_{12} \Delta_2 \} \quad (9)$$

$$F_2(c, x) = \frac{1}{N_2(x)} \{ \Phi_2^+(c) - a(x) \Delta_2 + \tilde{a}(x) \rho_{21} \Delta_1 \}, \quad (10)$$

где безразмерные величины Φ_1^-, Φ_1^+ получаются делением функций f_1^-, f_1^+ соответственно на концентрации n_1^-, n_1^+ , а безразмерные величины Φ_2^-, Φ_2^+ – делением функций f_2^-, f_2^+ на величину n_2^-, n_2^+ .

Функции Δ_1 и Δ_2 зависят только от тепловых скоростей молекул, причём:

$$\Delta_1(c) = \Phi_1^+(c) - \varepsilon \Phi_1^-(c), \quad \Delta_2(c) = \Phi_2^+(c) - \varepsilon \Phi_2^-(c) \quad (11)$$

Вследствие проведённых выше процедур обезразмеривания все функции распределения: $F_1(c, x)$, $F_2(c, x)$, $\Phi_1^-, \Phi_1^+, \Phi_2^-, \Phi_2^+$ нормированы на единицу и имеют смысл соответствующих плотностей вероятностей.

Действительно, как было показано ранее [4–6], четырёхмодальная суперпозиция функций распределения смеси газов (1) допускает однопараметрическое представление:

$$\tilde{a} = a^m(1-a)^n f(a) \quad (12)$$

Здесь степени m или n – целые или дробные положительные числа (в зависимости от исследования особенностей на входе в ударную волну при $a = 0$ и выходе из неё при $a = 1$), $f(a)$ – некоторая гладкая аналитическая функция.

Формулы (1, 12) дают замкнутое аналитическое однопараметрическое представление по параметру a во всей области его изменения от $a = 0$ до $a = 1$.

В частности, в качестве равенства (12) может быть выбрано наиболее простое:

$$\tilde{a} = a(1-a) \quad (13)$$

Нетрудно видеть, что равенство (13) полностью удовлетворяет граничным условиям (4). Параметр a будет также удовлетворять этим условиям, если его выбрать в соответствии с классическим решением Тамма – Мотт-Смита. Эта модификация решает проблему сведения двухпараметрических функций распределения (1) к однопараметрическим функциям в классической модели N-компонентной смеси газов с N-модифицированными распределениями, сохраняя все преимущества классического метода Тамма – Мотт-Смита для решения задач динамики газов [7–8].

О единственности однопараметрической модификации классического распределения ударно-сжатой смеси газов

Известно, что моментный метод Мотт-Смита уступает в строгости решения задачи о структуре ударной волны методу Тамма, поскольку в последнем единственность выбора системы моментных уравнений обеспечивается применением вариационного метода. Такая же ситуация возникает и при использовании рассмотренной выше однопараметрической модификации.

Заключение

Найдено однопараметрическое модифицированное бимодальное представление функции распределений по тепловым скоростям молекул в ударно-сжатой смеси газов, позволяющее распространить все преимущества использования классического аналитического метода Тамма – Мотт-Смита в однокомпонентном газе и на смесь газов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Tanenbaum B. S., MacDonald R. S. Comments on “Kinetic-Theory Approach to the Problem of Shock-Wave Structure in a Binary Mixture” // *The Physics of Fluids*. 1966. Vol. 9. Iss. 5. P. 1048–1049. DOI: 10.1063/1.1761772.
2. Fujimoto T. Shock-Wave Structure in Binary Gas Mixtures with No Chemical Reaction // *Rarefied Gas Dynamics*. Vol. 1: Proceedings of the Fourth International Symposium held at the Institute for Aerospace Studies (Toronto, 1964). New York: Academic Press, 1965. P. 223–239.
3. Bratos M., Herczynski R. Shock waves in noble gases and their mixtures // *Archives of Mechanics (Archiwum Mechaniki Stosowanej)*. 1983. Vol. 35. No. 2. P. 215–239.
4. Аналитические модели поступательно-неравновесной динамики ударно-сжатых бинарных смесей газов / М. М. Кузнецов, Г. В. Кузнецов, В. И. Паренкина, Д. Г. Сатюков, Р. Ф. Халиков // *Вестник Государственного университета просвещения. Серия: Физика-Математика*. 2023. № 4. С. 34–48. DOI: 10.18384/2949-5067-2023-4-34-48.
5. Кузнецов М. М., Кулешова Ю. Д., Сатюков Д. Г. Статистические распределения пар молекул в модифицированной бимодальной модели ударно-сжатой смеси газов // *Вестник Государственного университета просвещения. Серия: Физика-Математика*. 2024. № 3. С. 50–57. DOI: 10.18384/2949-5067-2024-3-50-57.
6. Аналитические свойства функций распределения по относительным скоростям молекул в ударно-сжатой бинарной смеси газов / М. М. Кузнецов, Д. Г. Сатюков, Ю. Д. Кулешова, Е. Я. Владимирова, Г. В. Кузнецов, Р. Ф. Халиков // *Вестник Государственного университета просвещения. Серия: Физика-Математика*. 2025. № 1. С. 52–65. DOI: 10.18384/2949-5067-2025-1-52-65.
7. Коган М. Н. Динамика разреженного газа (кинетическая теория). М.: Изд-во «Наука», 1967. 440 с.
8. Черчиньяни К. Теория и приложения уравнения Больцмана / пер. с англ. Гурмузовой Э. А. [и др.]; под ред. Р. Г. Баранцева. М.: Мир, 1978. 495 с.

REFERENCES

1. Tanenbaum, B. S. & MacDonald, R. S. (1966). Comments on “Kinetic-theory approach to the problem of shock-wave structure in a binary mixture”. In: *The Physics of Fluids*, 9 (5), 1048–1049. DOI: 10.1063/1.1761772/.
2. Fujimoto, T. (1965). Shock-Wave Structure in Binary Gas Mixtures with No Chemical Reaction. In: *Rarefied Gas Dynamics*. Vol. 1: *Proceedings of the Fourth International*

- Symposium held at the Institute for Aerospace Studies (Toronto, 1964).* New York: Academic Press, pp. 223–239.
3. Bratos, M. & Herczynski, R. (1983). Shock waves in noble gases and their mixtures. In: *Archives of Mechanics (Archiwum Mechaniki Stosowanej)*, 35 (2), 215–239.
 4. Kuznetsov, M. M., Kuznetsov, G. V., Parenkina, V. I., Satyukov, D. G. & Khalikov, R. F. (2023). Analytical models of translationally nonequilibrium dynamics of shock-compressed binary gas mixtures. In: *Bulletin of the Federal State University of Education. Series: Physics and Mathematics*, 4, 34–48. DOI: 10.18384/2949-5067-2023-4-34-48 (in Russ.).
 5. Kuznetsov, M. M., Kuleshova, Yu. D. & Satyukov, D. G. (2024). Analytical models of translationally nonequilibrium dynamics of shock-compressed binary gas mixtures. In: *Bulletin of the Federal State University of Education. Series: Physics and Mathematics*, 3, 50–57. DOI: 10.18384/2949-5067-2024-3-50-57 (in Russ.).
 6. Kuznetsov, M. M., Satyukov, D. G., Kuleshova, Yu. D., Vladimirova, E. Ya., Kuznetsov, G. V. & Khalikov, R. F. (2025). Analytical properties of distribution functions for relative velocities of molecules in a shock-compressed binary mixture of gases. In: *Bulletin of the Federal State University of Education. Series: Physics and Mathematics*, 1, 52–65. DOI: 10.18384/2949-5067-2025-1-52-65.
 7. Kogan, M. N. (1967). *Dynamics of a rare gas (Kinetic Theory)*. Moscow: Nauka publ. (in Russ.).
 8. Chérchignani, K. (1978). *Theory and applications of the Boltzmann equation*. Moscow: Mir publ. (in Russ.).

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Кузнецов Михаил Михайлович (г. Москва) – доктор физико-математических наук, профессор кафедры фундаментальной физики и нанотехнологии Государственного университета просвещения;
e-mail: kuznets-omn@yandex.ru

Сатюков Дмитрий Геннадьевич (г. Москва) – аспирант кафедры фундаментальной физики и нанотехнологии Государственного университета просвещения;
e-mail: dsatyukov@gmail.com

Кулешова Юлия Дмитриевна (г. Жуковский, Московская обл.) – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей алгебры, математического анализа и геометрии Государственного университета просвещения;
<https://orcid.org/0000-0001-8556-9340>; e-mail: juliyabogdanova@mail.ru

Владимирова Елена Яковлевна (г. Москва) – аспирант кафедры фундаментальной физики и нанотехнологии Государственного университета просвещения;
<https://orcid.org/0009-0000-3382-1516>; e-mail: e.vladimirova7@gmail.com

Кузнецов Глеб Витальевич (г. Москва) – аспирант кафедры фундаментальной физики и нанотехнологии Государственного университета просвещения;
<https://orcid.org/0000-0002-6878-8346>; e-mail: glebwow7@yandex.ru

Халиков Руслан Фанусович (г. Москва) – аспирант кафедры фундаментальной физики и нанотехнологии Государственного университета просвещения;
e-mail: rustek95@gmail.com

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Mihail M. Kuznetsov (Moscow) – Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Department of Fundamental Physics and Nanotechnology, Federal State University of Education;
e-mail: kuznets-omn@yandex.ru

Dmitry G. Satyukov (Moscow) – Postgraduate student, Department of Fundamental Physics and Nanotechnology, Federal State University of Education;
e-mail: dsatyukov@gmail.com

Juliya D. Kuleshova (Zhukovsky, Moscow Region) – Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Prof., Department of Higher Algebra, Mathematical Analysis and Geometry, Federal State University of Education;
<https://orcid.org/0000-0001-8556-9340>; e-mail: juliaybogdanova@mail.ru

Elena Ya. Vladimirova (Moscow) – Postgraduate student, Department of Fundamental Physics and Nanotechnology, Federal State University of Education;
<https://orcid.org/0009-0000-3382-1516>; e-mail: e.vladimirova7@gmail.com

Gleb V. Kuznetsov (Moscow) – Postgraduate student, Department of Fundamental Physics and Nanotechnology, Federal State University of Education;
<https://orcid.org/0000-0002-6878-8346>, e-mail: glebwow7@yandex.ru

Ruslan F. Halikov (Moscow) – Postgraduate student, Department of Fundamental Physics and Nanotechnology, Federal State University of Education;
e-mail: rustek95@gmail.com