

Научная статья**УДК 533.6.011.8****DOI: 10.18384/2949-5067-2026-1-16-24****РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ КЛАУЗИНГА ДЛЯ ТЕЧЕНИЯ РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА В КРУГЛОЙ ТРУБЕ****Горелов С. Л.**

Федеральное автономное учреждение «Центральный аэрогидродинамический институт имени профессора Н. Е. Жуковского», г. Жуковский, Московская область, Российская Федерация

e-mail: gorelovsl@yandex.ru

Поступила в редакцию 25.12.2025

Принята к публикации 19.01.2026

Аннотация

Цель. Решение уравнения Клаузинга, описывающего течение разреженного газа в круглой трубе.

Процедура и методы. Предлагается приближенное аналитическое решение этого уравнения, основанное на методе самоподобной интерполяции.

Результаты. Вероятности прохождения, полученные в работе, сравниваются с результатами известных численных решений.

Теоретическая и практическая значимость. Расчёт течения газа по каналам различной геометрии в вакуумных установках является одной из важнейших задач динамики разреженного газа.

Ключевые слова: динамика разреженного газа, уравнение Клаузинга, самоподобная интерполяция

Для цитирования:

Горелов С. Л. Решение уравнения клаузинга для течения разреженного газа в круглой трубе // Вестник Государственного университета просвещения. Серия: Физика-математика. 2026. № 1. С. 16–24. <https://doi.org/10.18384/2949-5067-2026-1-16-24>

Original research article**SOLUTION OF THE CLAUSING EQUATION FOR THE FLOW OF A RAREFIED GAS IN A CIRCULAR PIPE****S. Gorelov**

Central Aerohydrodynamic Institute, Zhukovsky, Moscow Region, Russian Federation

e-mail: gorelovsl@yandex.ru

Received by the editorial office 25.12.2025

Accepted for publication 19.01.2026

Abstract

Aim. Solution of the Clausius equation describing rarefied gas flow in a circular pipe.

Methodology. An approximate analytical solution of this equation is proposed, based on the method of self-similar interpolation.

Results. The passage probabilities obtained in the study are compared with the results of known numerical solutions.

Research implications. Calculating gas flow through channels of various geometries in vacuum systems is one of the most important problems in rarefied gas dynamics.

Keywords: rarefied gas dynamics, Clausius equation, self-similar interpolation

For citation:

Gorelov, S. L. (2026). Solution of the Clausius equation for the flow of a rarefied gas in a circular pipe. In: *Bulletin of the Federal State University of Education. Series: Physics and Mathematics*, 1, pp. 16–24. <https://doi.org/10.18384/2949-5067-2026-1-16-24>

Введение

Исторически задача о свободномолекулярном течении газа в круглой цилиндрической трубе является одной из наиболее старых задач динамики разреженного газа. Первые работы были опубликованы М. Кнудсеном в 1909 году [1] и М. Смолуховским в 1910 году [2]. П. Клаузингом в 1932 году [3] было получено уравнение, через решение которого выражается вероятность прохождения молекул через трубу (коэффициент Клаузинга) в случае диффузного отражения молекул от стенок. Там же представлены результаты приближенного решения. В дальнейшем численно вычислялись коэффициенты Клаузинга в зависимости от длины трубы многими авторами [4-6], в частности методом Монте-Карло [7].

В данной работе предлагается способ приближённого аналитического решения уравнения Клаузинга и, соответственно, нахождения коэффициента Клаузинга, основанный на методе самоподобной интерполяции [8; 9].

Для применения метода самоподобной интерполяции к решению уравнения Клаузинга необходимо знать асимптотическое решение этого уравнения при $L \rightarrow 0$ и при $L \rightarrow \infty$ (L – длина трубы). При $L \rightarrow \infty$ это решение известно [1; 2]. В данной работе вычисляется первый член разложения решения уравнения Клаузинга при $L \rightarrow 0$.

Значения коэффициента Клаузинга, полученные в работе, сравниваются с данными известных численных решений.

1. Метод самоподобной интерполяции.

В простейшем варианте [8; 9], метод самоподобной интерполяции позволяет построить интерполяционные формулы для функций, асимптотические разложения которых на границах полубесконечного интервала известны, и эти разложения представляют собой стандартные степенные ряды.

Предположим, что

$$f(x) = a_0, \quad x \rightarrow 0 \quad (1.1)$$

и известны несколько членов асимптотического ряда при $x \rightarrow \infty$

$$f(x) = \sum_{i=0}^k A_i x^{m_i} \quad x \rightarrow \infty \quad (1.2)$$

К такому виду можно привести все разложения после определённых преобразований. Построим интерполяционные формулы разных порядков.

Первый порядок.

Для интерполяционной формулы первого порядка получаем:

$$f(x) = \begin{cases} a_0, & x \rightarrow 0 \\ A_0 x^{m_0}, & x \rightarrow \infty \end{cases} \quad (1.3)$$

Формула будет иметь вид:

$$f^*(x) = (a_0^{1/n_1} + B_1 x)^{n_1}$$

Не трудно заметить, что при $x \rightarrow 0$ $f^*(x) \equiv f(x)$, а неизвестные B_1 и n_1 находятся из уравнения, которое получается при $x \rightarrow \infty$ и имеет вид:

$$B_1^{n_1} x^{n_1} = A_0 x^{m_0}$$

Отсюда

$$n_1 = m_0, \quad B_1 = A_0^{1/m_0}$$

В результате получаем формулу

$$f^*(x) = (a_0^{1/m_0} + A_0^{1/m_0} x)^{m_0},$$

которая даёт правильную асимптотику (4.3) как при $x \rightarrow 0$, так и при $x \rightarrow \infty$.

Второй порядок.

$$f(x) = \begin{cases} a_0, & x \rightarrow 0 \\ A_0 x^{m_0} + A_1 x^{m_1}, & x \rightarrow \infty \end{cases} \quad (1.4)$$

В этом случае интерполяционная функция будет иметь вид:

$$f^*(x) = \left[\left(a_0^{1/n_1} + C \cdot x \right)^{n_1/n_2} + B_2 x^2 \right]^{n_2} \quad (1.5)$$

Также, как и в первом случае, при $x \rightarrow 0$ $f^*(x) \equiv f(x)$, а неизвестные n_1, n_2, C, B_2 находятся следующим образом. При $x \rightarrow \infty$ главный член в формуле (1.5) приравнивается главному члену в (4.4), в результате получаем уравнение:

$$B_2^{n_2} x^{2n_2} = A_0 x^{m_0}$$

Отсюда $n_2 = m_0 / 2$, $B_2 = A_0^{2/m_0}$. В круглых скобках пренебрегаем a_0 по сравнению с $C \cdot x$ при $x \rightarrow \infty$ и получаем:

$$n_1 = \frac{m_0}{2} (m_1 - m_0 + 2); C = \left(\frac{2}{m_0} A_0^{\frac{2}{m_0}-1} A_1 \right)^{1/(m_0-m_1+2)}$$

Интерполяционная формула второго порядка будет иметь вид

$$f^*(x) = ((a_0^{2/m_0(m_1-m_0-2)} + C \cdot x)^{m_1-m_0+2} + B_2 x^2)^{m_0/2}.$$

Аналогично строятся интерполяционные формулы для приближений следующих порядков. Например, для приближения третьего порядка:

$$f(x) = \begin{cases} a_0, x \rightarrow 0 \\ A_0 x^{m_0} + A_1 x^{m_1} + A_2 x^{m_2}, x \rightarrow \infty \end{cases}$$

и интерполяционная формула будет:

$$f^*(x) = \left\{ \left[\left(a_0^{1/n_1} + Dx \right)^{n_1/n_2} + Ex^2 \right]^{n_2/n_3} + B_3 x^3 \right\}^{n_3}$$

2. Решение уравнения Клаузинга

Уравнение Клаузинга имеет вид [10] ($z = L/D$, L – длина, D – диаметр трубы)

$$w(x) = f(x) + \int_0^z K(x, y) w(y) dy$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}} - 2x \right); \quad K(x, y) = 1 - |x-y| \frac{2(x-y)^2 + 3}{2[(x-y)^2 + 1]^{3/2}} \quad (2.1)$$

Коэффициент Клаузинга выражается формулой

$$W = 1 - 2 \int_0^z w(x) \left(\frac{1 + 2x^2}{\sqrt{1 + x^2}} - 2x \right) dx \quad (2.2)$$

Будем искать решение уравнения (2.1) в виде

$$w(x) = a + bx$$

Коэффициенты a и b находятся из решения системы линейных уравнений

$$\begin{aligned} a q_1 + b q_2 &= s_1 \\ a q_2 + b q_3 &= s_2 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь

$$\begin{aligned} q_1 &= z - \int_0^z \int_0^z K(x, y) dx dy = z \left(-z + \sqrt{1 + z^2} \right); \\ q_2 &= \frac{z^2}{2} - \int_0^z \int_0^z K(x, y) y dx dy = \frac{z^2}{2} \left(-z + \sqrt{1 + z^2} \right); \\ q_3 &= \frac{z^3}{3} - \int_0^z \int_0^z K(x, y) x y dx dy = \frac{1}{8} \left(-2z^4 + z\sqrt{1 + z^2} + 2z^3\sqrt{1 + z^2} - \operatorname{Arcsh}(z) \right) \\ s_1 &= -\frac{1}{2} \left(z^2 - z\sqrt{1 + z^2} \right); \\ s_2 &= \frac{1}{6} (1 - 2z^2) \left(1 - \sqrt{1 + z^2} \right); \end{aligned}$$

Решая систему (2.3), вычисляем $a(z)$ и $b(z)$. Вычисляем интеграл (2.2) и, переходя к пределу при $z \rightarrow 0$, получаем $W = 1 - z$ или $W = 1 - t/2$, где $t = L/R$, R – радиус трубы.

При $L \rightarrow \infty$ решение известно $W = 8t^{-1}/3$. Таким образом, имеем

$$W = \begin{cases} 1 - t/2 & t \rightarrow 0 \\ 8t^{-1}/3 & t \rightarrow \infty \end{cases} \quad (2.4)$$

Преобразовывая (2.4) к виду, удобному для интерполирования, получаем

$$g = 2 \frac{1 - W}{t} = \begin{cases} 1 & t \rightarrow 0 \\ 2t^{-1} - 16t^{-2}/3 & t \rightarrow \infty \end{cases}$$

Можно применить второй порядок интерполяции – формулы (1.4), (1.5), тогда

$$n_1 = n_2 = -1/2; \quad a_0 = 1; \quad C = 4/3; \quad B_2 = 1/4; \quad g = \left(1 + \frac{4}{3}t + \frac{1}{4}t^2\right)^{-1/2};$$

Окончательно

$$W = 1 - t \left(2 \sqrt{1 + \frac{4}{3}t + \frac{1}{4}t^2} \right)^{-1} \quad (2.5)$$

3. Обсуждение результатов

В табл. 1 представлены коэффициенты Клаузинга, рассчитанные по формуле (2.5) (столбец 1). В других столбцах представлены для сравнения данные из других работ. Столбец 2 – данные работы [3], столбец 3 – [4], столбец 4 – [5], столбец 5 – [6], столбец 6 – [7].

Таблица 1 / Table 1

Коэффициенты Клаузинга / Clausing coefficients

t	1	2	3	4	5	6
0.1	0.9531	0.9524	0.9524	0.9525	-	-
0.2	0.9115	0.9092	0.9092	0.9092	0.9090	-
0.3	0.8742	0.8699	0.8699	0.8699	-	-
0.4	0.8405	0.8341	0.8341	0.8341	-	-
0.5	0.8099	0.8013	0.8013	0.8013	0.8012	0.804
0.6	0.7818	0.7711	-	0.7711	-	-
0.7	0.7559	0.7434	-	0.7434	-	-
0.8	0.7319	0.7177	-	0.7178	-	-
0.9	0.7097	0.6940	-	0.6940	-	-
1.0	0.6889	0.6720	0.6720	0.6720	0.6720	0.678
1.5	0.6026	0.5810	0.5815	-	0.5815	0.571
2.0	0.5371	0.5136	0.5142	0.5142	0.5142	0.522
3.0	0.4429	0.4205	0.4201	0.4201	-	0.425
4.0	0.3778	0.3589	0.3566	0.3566	-	0.361
5.0	0.3298	0.3146	0.3105	0.3105	0.3105	0.315
6.0	0.2929	0.2807	0.2755	0.2755	-	-
7.0	0.2635	0.2537	-	0.2478	-	-
8.0	0.2395	0.2316	-	0.2253	-	-
9.0	0.2196	0.2131	-	0.2067	-	-
10	0.2027	0.1973	0.1910	0.1910	0.1909	-
15	0.1467	-	-	-	0.1370	-
20	0.1150	0.1135	0.1094	0.1093	0.1090	-
25	0.09454	-	-	-	0.0899	-
50	0.05010	0.0499	-	0.04852	0.0488	-
100	0.02583	0.02558	-	0.02529	-	-
500	0.005299	-	-	0.005264	-	-
1000	0.002658	0.002658	-	0.002648	-	-

Источник: [3–7].

На рис. 1 представлен график значений коэффициента Клаузинга в зависимости от длины трубы, полученных по формуле (2.5) (сплошная линия). На этом же рисунке точками нанесены средние значения коэффициентов по работам других авторов, взятые из табл. 1. Максимальное отклонение аналитического решения от численных не превышает 5% при значениях $t \approx 5$.

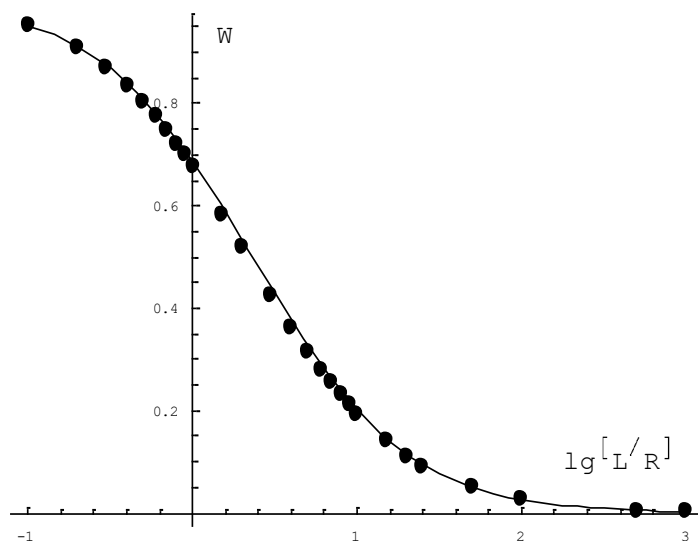


Рис. 1 / Fig. 1. График значений коэффициента Клаузинга в зависимости от длины трубы / Graph of the Clausing coefficient values depending on the pipe length

Источник: подготовлено авторами

Заключение

В данной работе предложено приближенное аналитическое решение уравнения Клаузинга, описывающее течение сильно разреженного газа по круглой цилиндрической трубе, основанное на методе самоподобной интерполяции. В результате получена формула вычисления коэффициентов Клаузинга для любой длины трубы. Проведено сравнение полученных результатов с данными численных расчётов других авторов. Максимальное отличие не превышает 5%. Данный результат можно считать удовлетворительным, так как разница в данных численных расчётов находится в тех же пределах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Knudsen M. Die Gesetze der Molekularströmung und der inneren Reibungsströmung der Gase durch Röhrn // Annalen der Physik. 1909. Vol. 333. Iss. 1. P. 75–130. DOI: 10.1002/andp.19093330106.
2. Smoluchowski M. V. Zur kinetischen Theorie der Transpiration und Diffusion verdünnter Gase // Annalen der Physik. 1910. Vol. 338. Iss. 16. P. 1559–1570. DOI: 10.1002/andp.19103381623.

3. Clausing P. Über die Strömung sehr verdünnter Gase durch Röhren von beliebiger Länge // *Annalen der Physik*. 1932. Vol. 404. Iss. 8. P. 961–989. DOI: 10.1002/andp.19324040804.
4. DeMarcus W. C., Hopper E. H. Knudsen flow through a circular capillary // *Journal of Chemical Physics*. 1955. Vol. 23. Iss. 7. P. 1344. DOI: 10.1063/1.1742272.
5. Berman A. S. Free Molecule Flow in an Annulus // *Journal of Applied Physics*. 1969. Vol. 40. Iss. 12. P. 4991–4992. DOI: 10.1063/1.1657335.
6. Garelis E., Wainwright T. E. Free-molecule flow in a right circular cylinder // *The Physics of Fluids*. 1973. Vol. 16. Iss. 4. P. 476–481. DOI: 10.1063/1.1694369.
7. Davis D. H. A Monte Carlo calculation of molecular flow rates through cylindrical elbow and pipes of other shapes // *Journal of Applied Physics*. 1960. Vol. 31. Iss. 7. P. 1169–1176. DOI: 10.1063/1.1735797.
8. Gluzman S., Yukalov V. I. Unified approach to crossover phenomena // *Physical Review E*. 1998. Vol. 58. Iss. 4. P. 4197–4209. DOI: 10.1103/PhysRevE.58.4197.
9. Горелов С. Л. Применение метода самоподобной интерполяции к задачам динамики разреженного газа // *Прикладная математика и механика*. 2005. Т. 69. № 3. С. 438–444.
10. Кошмаров Ю. А., Рыжов Ю. А. *Прикладная динамика разреженного газа*. М.: Машиностроение, 1977. 184 с.

REFERENCES

1. Knudsen, M. (1909). Die Gesetze der Molekularströmung und der inneren Reibungsströmung der Gase durch Röhrn. In: *Annalen der Physik*, 333 (1), 75–130. DOI: 10.1002/andp.19093330106.
2. Smoluchowski, M. V. (1910). Zur kinetischen Theorie der Transpiration und Diffusion verdünnter Gase. In: *Annalen der Physik*, 338 (16), 1559–1570. DOI: 10.1002/andp.19103381623.
3. Clausing, P. (1932). Über die Strömung sehr verdünnter Gase durch Röhren von beliebiger Länge. In: *Annalen der Physik*, 404 (8), 961–989. DOI: 10.1002/andp.19324040804.
4. DeMarcus, W. C. & Hopper, E. H. (1955). Knudsen flow through a circular capillary. In: *Journal of Chemical Physics*, 23 (7), 1344. DOI: 10.1063/1.1742272.
5. Berman, A. S. (1969). Free Molecule Flow in an Annulus. In: *Journal of Applied Physics*, 40 (12), 4991–4992. DOI: 10.1063/1.1657335.
6. Garelis, E. & Wainwright, T. E. (1973). Free-molecule flow in a right circular cylinder. In: *The Physics of Fluids*, 16 (4), 476–481. DOI: 10.1063/1.1694369.
7. Davis, D. H. (1960). A Monte Carlo calculation of molecular flow rates through cylindrical elbow and pipes of other shapes. In: *Journal of Applied Physics*, 1960, 31 (7), 1169–1176. DOI: 10.1063/1.1735797.
8. Gluzman, S. & Yukalov, V. I. (1998). Unified approach to crossover phenomena. In: *Physical Review E*, 58 (4), 4197–4209. DOI: 10.1103/PhysRevE.58.4197.

9. Gorelov, S. L. (2005). Application of the self-similar interpolation method to problems of rarefied gas dynamics. In: *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 69 (3), 398–404. DOI 10.1016/j.jappmathmech.2005.05.007.
10. Koshmarov, Yu. A. & Ryzhov, Yu. A. (1977). *Applied dynamics of rarefied gas*. Moscow: Mashinostroenie publ. (in Russ).

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Горелов Сергей Львович (г. Москва) – доктор физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник Центрального аэрогидродинамического института имени профессора Н. Е. Жуковского;
e-mail: gorelovsl@yandex.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Sergey L. Gorelov (Moscow) – Dr. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Prof., Leading Researcher, Central Aerohydrodynamic Institute;
e-mail: gorelovsl@yandex.ru